

Б. Н. ИВАНОВ

ЗАКОНЫ ФИЗИКИ



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1986



Scan AAW

ББК 22.3

И20

УДК 53

Рекомендовано

Министерством высшего и среднего специального образования СССР для использования в учебном процессе на подготовительных отделениях высших учебных заведений

Рецензенты:

кафедра физики Московского института инженеров гражданской авиации (зав. кафедрой проф. А. Д. Суханов); проф. Л. В. Тарасов (Московский институт электронного машиностроения)

Иванов Б. Н.

И20 **Законы физики: Учеб. пособие для подгот. отделений вузов. — М.: Высш. шк., 1986. — 335 с.: ил.**

В пособии наряду с традиционными разделами курса физики, изучаемого в средней школе, рассматриваются и вопросы современной физики (астрофизика, физика плазмы, физическая гидродинамика и др.). Особенностью курса является также схема его построения: от изложения основных понятий физики частиц и полей к изучению макрофизики. Пособие может быть полезным широкому кругу читателей, изучающих физику.

И **4306021100—478**
001(01)—86 **82—86**

ББК 22.3
53

© Издательство «Высшая школа», 1986

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие	8
Обращение к читателю	9
Глава I. Единство природы	10
§ 1. Иерархия объектов в природе	10
1.1. Элементарные частицы. 1.2. Ядра. 1.3. Атомы и молекулы. 1.4. Макротела. 1.5. Планеты. 1.6. Звезды. Галактики. Вселенная	
§ 2. Четыре вида фундаментальных взаимодействий	18
2.1. Связанные системы объектов. Взаимодействия. 2.2. Гравитационные взаимодействия (тяготение). 2.3. Электромагнитные взаимодействия. 2.4. Сильные (ядерные) взаимодействия. 2.5. Слабые взаимодействия. 2.6. Сравнительная оценка интенсивностей всех видов взаимодействий. 2.7. Поля и вещество	
§ 3. Пространство и время	21
3.1. Пространственная и временная шкалы в природе. 3.2. Однородность пространства и времени. 3.3. Свободные тела и движение по инерции. 3.4. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности	
Глава II. Механика материальной точки	25
§ 4. Координаты, скорость, ускорение	25
§ 5. Преобразования Галлея	26
5.1. Абсолютность размеров и промежутков времени. 5.2. Относительность скоростей и их закон преобразования. 5.3. Абсолютность ускорений	
§ 6. Закон движения в механике	28
§ 7. Движение материальной точки в поле тяготения	29
§ 8. Импульс. Закон сохранения импульса	31
§ 9. Закон сохранения энергии. Применения и универсальность законов сохранения	33
9.1. Закон сохранения энергии. 9.2. Применения законов сохранения. 9.3. Универсальность законов сохранения. Момент импульса	
§ 10. Предельная скорость. Механика частиц высоких энергий	40
10.1. Эксперименты на ускорителях и предельная скорость. 10.2. Преобразования Лоренца. 10.3. Релятивистские энергия и импульс. 10.4. Роль релятивистской постоянной c в физике	
Глава III. Электромагнитное поле	47
§ 11. Электрический заряд	47
§ 12. Способ изучения поля	48
12.1. Уравнения движения заряда в поле. 12.2. Законы преобразования полей	
§ 13. Законы электромагнитного поля	50
13.1. Новые объекты и новая математика. 13.2. Первое уравнение поля. Связь электрического поля с электрическими зарядами. 13.3. Второе уравнение поля. Отсутствие магнитных зарядов. 13.4. Третье уравнение поля. Связь тока и «чего-то» с вихревым магнитным полем. 13.5. Четвертое уравнение поля. Связь переменного магнитного поля с вихревым электрическим. 13.6. Дополнительный анализ третьего уравнения поля. Связь переменного электрического поля с вихревым магнитным. 13.7. Уравнения Максвелла	

§ 14.	Постоянное электрическое поле	55
	14.1. Поле покоящегося точечного заряда. 14.2. Поля зарядов, распределенных по сфере, линии, плоской поверхности. 14.3. Электростатическая энергия зарядов. Потенциал поля. 14.4. Поле диполя. Взаимодействия заряд—диполь и диполь—диполь	
§ 15.	Постоянное магнитное поле	60
	15.1. Магнитное поле прямолинейного тока. 15.2. Магнитное поле токовой плоскости. 15.3. Магнитный момент и его связь с механическим моментом	
§ 16.	Движение зарядов в полях	63
	16.1. Движение заряда в постоянном однородном электрическом поле. 16.2. Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле. 16.3. Движение заряда в кулоновском поле	
§ 17.	Поля движущихся зарядов. Излучение	67
	17.1. Поле равномерно движущегося заряда. 17.2. Излучение ускоренно движущегося заряда. 17.3. Излучение заряда, движущегося равномерно по окружности	
§ 18.	Электромагнитные волны	73
	18.1. Некоторые свойства поля излучения. 18.2. Бегущие волны. 18.3. Излучение электромагнитных волн колеблющимися зарядами. Энергия и импульс волн. 18.4. Собственные колебания поля. Стоячие волны	
§ 19.	Распространение света	77
	19.1. Интерференция электромагнитных волн. 19.2. Дифракция электромагнитных волн. 19.3. Геометрическая оптика	
	Глава IV. Атомные явления. Квантовая механика	81
§ 20.	О планетарной модели атома	81
§ 21.	Опыты по дифракции частиц	81
§ 22.	Соотношения неопределенностей	85
§ 23.	Волны вероятности	87
	23.1. Комплексные числа. Формула Эйлера. 23.2. Комплексные волны вероятности. Принцип суперпозиции. 23.3. Предельный переход к классической механике	
§ 24.	Электрон в атоме	91
	24.1. Энергия и ее квантование. 24.2. Момент импульса и его квантование. 24.3. Амплитуды вероятности и квантовые числа	
§ 25.	Многоэлектронный атом	97
	25.1. Спин электрона. 25.2. Системы одинаковых частиц. Квантовые статистики. 25.3. Атомные квантовые состояния	
§ 26.	Квантованное излучение атома	102
	26.1. Квантовые переходы. Линейчатые спектры излучения. 26.2. Фотон. Понятие четности. Правила отбора	
§ 27.	Взаимодействие фотонов с электронами. Фотоэффект. Комптон-эффект	107
§ 28.	Одновременная измеримость величин и понятие об их полных наборах	110
§ 29.	Молекулы	111
	Глава V. Макроскопические тела как совокупности частиц. Тепловые явления	114
§ 30.	Основная задача статистической физики	114
§ 31.	Макроскопические величины. Флуктуации	116
§ 32.	Статистическое рассмотрение модели газа	117
	32.1. «Машинные эксперименты». 32.2. Обратимость во времени микроскопических процессов и необратимость процессов в макротелах	
§ 33.	Энтропия	119
§ 34.	Температура	119
§ 35.	Равновесное распределение частиц в телах	123
§ 36.	Термодинамические соотношения	126

§ 37.	Идеальный газ	129
	37.1. Вещество и его состояния. 37.2. Классический и квантовый идеальные газы. 37.3. Уравнение состояния идеального газа. 37.4. Теплоемкость идеального газа. 37.5. Обратимые тепловые процессы	
§ 38.	Статистика и термодинамика излучения	137
§ 39.	Кристаллы	141
	39.1. Кристаллическая решетка. 39.2. Типы связей в решетках. 39.3. Механические свойства кристаллов. 39.4. Электронные энергетические спектры кристаллов. 39.5. Теплоемкость решетки. 39.6. Электронный газ в металлах	
§ 40.	Фазовые переходы	158
	Глава VI. Макроскопические движения сред. Неравновесные процессы	164
§ 41.	Неравновесные состояния тел	164
§ 42.	Макроскопическое движение	165
§ 43.	Уравнения гидродинамики идеальной жидкости	166
	43.1. Закон сохранения вещества в гидродинамике. 43.2. Уравнение движения в гидродинамике	
§ 44.	Гидродинамическое рассмотрение задач на вязкие течения, теплопроводность и диффузию	170
	44.1. Вязкость. 44.2. Течение вязкой жидкости в трубе. 44.3. Теплопроводность. 44.4. Передача теплоты между двумя стенками. 44.5. Диффузия. Растворение кристалла в жидкости	
§ 45.	Кинетические коэффициенты в газах и их связь с молекулярными характеристиками	177
	45.1. Понятие длины свободного пробега молекул. 45.2. Молекулярное рассмотрение процесса диффузии. 45.3. Диффузия как задача о случайном блуждании частиц. 45.4. Связь между кинетическими коэффициентами	
§ 46.	Законы сопротивления движению тел в жидкости	183
	46.1. Метод подобия. Число Рейнольдса. 46.2. Сопротивление при малых скоростях. 46.3. Сопротивление при больших (дозвуковых) скоростях	
§ 47.	Неустойчивости в гидродинамике	188
	47.1. Переход ламинарных течений в турбулентные. 47.2. Пограничный слой. 47.3. Турбулентная вязкость и температуропроводность. 47.4. Переход от молекулярного к конвекционному переносу теплоты. Солнечная грануляция	
§ 48.	Колебания и волны в жидкости	193
	48.1. Некоторые виды волнового движения. 48.2. Характеристики волн. 48.3. Линейные и нелинейные волны. 48.4. Солитоны и другие нелинейные эффекты. 48.5. Сильно возмущенные среды. 48.6. Колебания заряженной капли и деление тяжелых атомных ядер	
§ 49.	Макроскопические движения сжимаемых сред	199
	49.1. Обобщенная форма уравнения Бернулли. 49.2. Критерий сжимаемости среды и скорость звука. 49.3. Течение в трубе с переменным сечением. 49.9. Сопло Лаваля	
§ 50.	Ударные волны	202
	50.1. Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа. 50.2. Общие соотношения для ударного скачка. 50.3. Ударные волны в идеальном газе. 50.4. Задача о сильном взрыве в атмосфере	
§ 51.	Эффекты гидродинамической кумуляции	211
	51.1. Кумулятивные струи. 51.2. Схлопывание пузырьков в жидкости. 51.3. Сходящиеся сферические и цилиндрические ударные волны. 51.4. Роль неустойчивостей в ограничении кумуляции. 51.5. Выход ударной волны на поверхность звезды	
§ 52.	Кавитация в жидкости	217
§ 53.	Явления в сильно разреженных газах	218
§ 54.	Макроскопические квантовые явления в жидкости	221
§ 55.	Обобщения гидродинамики	223

Глава VII. Электромагнитные поля в средах. Электрические, магнитные и оптические свойства вещества	225
§ 56. Сверхпроводимость	225
§ 57. Электропроводность металлов	226
§ 58. Постоянный электрический ток	230
§ 59. Проводимость диэлектриков	232
59.1. Электроны и дырки. Экситонные состояния. 59.2. Полупроводники	
§ 60. Электрические поля в веществе	235
60.1. Флуктуации поля в веществе. 60.2. Электростатическое поле в металле. 60.3. Электростатические поля в диэлектриках. Поляризация вещества	
§ 61. Вещество в магнитном поле	241
61.1. Диамагнитный эффект. 61.2. Парамагнетики. Ориентационная намагниченность. 61.3. Спонтанная намагниченность. Ферромагнетизм. 61.4. Магнитные свойства сверхпроводников. Квантование крупномасштабного магнитного потока	
§ 62. Переменные токи и электромагнитные волны в среде. Оптические свойства сред	250
62.1. Переменные поля и вещество. 62.2. Индукционная э. д. с. 62.3. Цепи переменного тока. Решения дифференциальных уравнений. 62.4. Генерация электромагнитных волн. 62.5. Некоторые законы оптики сред. Скорость распространения электромагнитных волн в среде. Отражение и преломление волн. 62.6. Показатель преломления в диэлектриках. Дисперсия света. Поглощение света. 62.7. Показатель преломления в металлах. Скин-эффект. Прозрачность металлов к жесткому излучению. 62.8. Эффекты нелинейной оптики. 62.9. Лазеры	
Глава VIII. Плазма	271
§ 63. Общие замечания	271
§ 64. Квантовые явления в плазме. Туннелирование ядер сквозь потенциальный барьер	272
§ 65. Релятивистские эффекты в плазме. Дефект массы при синтезе ядер и их энергоделиение	275
§ 66. Статистика плазмы. Уравнение состояния плазмы. Тепловое излучение плазмы	276
§ 67. Кинетика плазмы. Подвижность ионов и ее связь с диффузией. Электропроводность плазмы	278
§ 68. Магнитная гидродинамика и неустойчивости плазмы. «Токамаки»	279
§ 69. Колебания и волны в плазме. Распространение радиоволн в ионосфере Земли	281
Глава IX. Звездные и дозвездные состояния вещества	284
§ 70. Состояние вещества при сверхвысоких температурах и плотностях	284
§ 71. Звезда — газовый шар	286
71.1. Расчет давления и температуры в центре звезды. 71.2. Температура поверхности и полная мощность излучения звезды. 71.3. Перенос энергии в звездах	
§ 72. Источники звездной энергии	288
72.1. Анализ возможных источников энергии звезд. 72.2. Ядерные реакции протон — протонного цикла	
§ 73. Плотные звезды — белые карлики	291
73.1. Возможная эволюция звезд типа Солнца. 73.2. Плотность и размеры белых карликов. 73.3. Предельная масса белых карликов	
§ 74. Сверхплотные нейтронные звезды	293
74.1. Размеры нейтронных звезд. 74.2. Вращение и магнитные поля нейтронных звезд. 74.3. Радиоизлучение пульсаров. 74.4. Внутренняя структура нейтронных звезд. 74.5. Гравитационные эффекты в окрестностях нейтронной звезды	

§ 75. Гравитация и релятивизм	298
75.1. Принцип эквивалентности. 75.2. Геометрия и ход времени в неинерциальных системах отсчета. 75.3. Уравнения Эйнштейна	
§ 76. Распирение Вселенной	301
76.1. Фридмановские космологические решения. 76.2. Открытие «расширения» Вселенной. 76.3. Критическая плотность	
§ 77. Горячая Вселенная	304
77.1. Открытие фонового теплового радиоизлучения. 77.2. Зарядово-несимметричная модель ранней Вселенной. 77.3. Изменение плотности и температуры дозвездной материи в процессе космологического расширения. 77.4. Состояние вещества в ранние эпохи горячей Вселенной	
§ 78. Синтез элементов в звездах	309
Заключительное слово автора	314
Приложения	315
I. Фундаментальные эксперименты в истории физики и выдающиеся изобретения в физико-технической области	315
II. О мировых постоянных, анализе размерностей и системах единиц	320
III. Единицы физических величин	324
IV. Внесистемные единицы	325
V. Приставки и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования	326
VI. Некоторые физические постоянные (приближенные значения)	326
VII. Латинский и греческий алфавиты	327
Предметный указатель	328

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для подготовительных отделений вузов за последние годы вышло немало учебных пособий по физике. Слушатели курсов могут не только по рекомендации преподавателей, но и по своему вкусу и наклонностям подбирать себе нужную книгу. Предлагаемое учебное пособие существенно отличается от остальных нетрадиционным построением курса физики. О схеме его построения кратко можно сказать так: «От атома — к веществу».

Каковы причины, побудившие автора именно так излагать курс? Создание новых материалов с необычными механическими, тепловыми, электрическими, магнитными и оптическими характеристиками требует микроскопического подхода к делу, ясного понимания практического смысла схемы «от атома — к веществу». Значит, к этому методу работы должны быть готовы научно-производственные кадры в таких отраслях, как физическое материаловедение, ядерная и полупроводниковая технология, разработка лазерной и космической техники и др.

Современная радиоэлектроника становится квантовой; на повестке дня у электротехников — использование квантовых сверхпроводящих материалов. Важнейшие биологические проблемы — понимание работы мышцы, передача нервного возбуждения, механизм памяти и др. — могут быть решены лишь исследованиями на молекулярном уровне. Обычные курсы физики, использующие схему построения: механика, теплота, электромагнетизм, оптика, атомная физика, не вполне отвечают указанным требованиям практики. Заметим, наконец, что не только современная инженерно-физическая практика требует построения курсов физики по схеме «от атома — к веществу», но и сама логика развития физики требует ее преподавания по той же схеме.

Какой будет «естественно-научная идеология» в подходе к техническому прогрессу в грядущем веке? Как нужно вести обучение, чтобы в потоке растущей научно-технической информации молодой специалист мог ориентироваться, мог самостоятельно сортировать эту информацию и видеть главную тенденцию развития? Эти вопросы еще ждут своего оптимального решения.

Содержание предлагаемого курса физики детально представлено в оглавлении. Из него видно, что пособие включает в себя широкий круг вопросов.

В пособии, в основном, используется система единиц СИ. Однако в связи с тем что в научных исследованиях и публикациях по физике применяется система единиц СГС, те, кто изучают физику, должны владеть обеими системами единиц и свободно переходить от одной к другой. На системе СГС основано в частности, изложение глав III, IV, VII.

Пособие рассчитано на тех слушателей, которые хотят изучать физику более углубленно. Оно может быть использовано учащимися физико-математических школ, а также лицами, окончившими среднюю школу и занимающимися самообразованием. Преподаватели физики, ведущие различные факультативы, найдут здесь много полезного материала.

В заключение выражаю глубокую благодарность профессорам Л. В. Тарасову и А. Д. Суханову за их доброжелательную критику, способствовавшую улучшению книги. Особую благодарность выражаю Т. Д. Кириловой за помощь при работе над книгой.

Автор

ОБРАЩЕНИЕ К ЧИТАТЕЛЮ

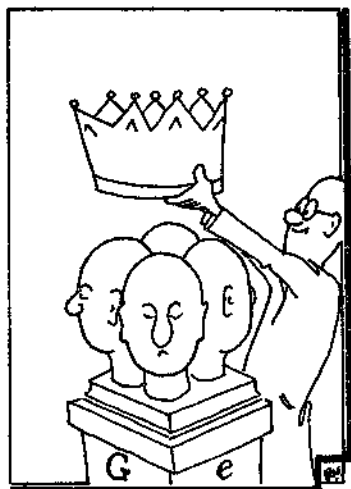
Книга, которую вы держите в руках, — не учебник, а скорее то, что надо использовать совместно с обычным учебником. Эта книга не для легкого чтения, здесь нужно работать с карандашом, нужно размышлять, анализировать и при необходимости производить вычисления. На страницах книги будет изложена физика, причем так, как ее понимают сегодня физики-исследователи.

По самому своему существу физика имеет дело с исходными, наиболее фундаментальными закономерностями природы. Наблюдаемый сегодня прогресс во всех областях естествознания связан, как правило, с проникновением в них физических представлений и методов исследования. Мы не говорим уже о значении физических знаний как основы новых промышленных производств, основы техники будущего. Физика в наши дни становится важным элементом культуры современной цивилизации.

При изложении материала я буду полагаться на информированность читателя о вещах и событиях. Правда, порою он может быть далек от понимания природы этих вещей и причин появления тех или иных событий. Но в этом и будет состоять цель нашего нелегкого, но, как я надеюсь, увлекательного путешествия в «Страну Физики». Я также предполагаю, что читатель в ладах с математикой. Это необходимый «язык», на котором нужно говорить с Природой. В тех случаях, когда математических знаний у читателя недостаточно, я постараюсь изложить необходимое.

Как разобраться с нумерацией формул и рисунков? В книге принята сквозная нумерация параграфов. В номерах формул (и рисунков) сначала указан номер параграфа, в котором использована эта формула (рисунок), а затем порядковый номер формулы (рисунка). Например, ссылка на формулу (40.3) означает, что нужно обратиться к § 40, а рис. 9.5 отыщется в § 9.

Б. Иванов

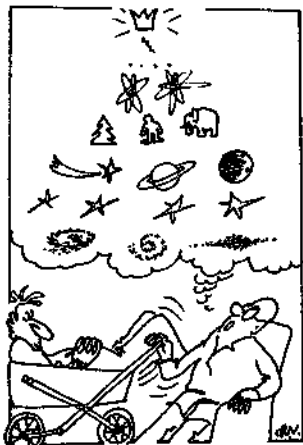


ГЛАВА I ЕДИНСТВО ПРИРОДЫ

§ 1. ИЕРАРХИЯ ОБЪЕКТОВ В ПРИРОДЕ

Слово «иерархия» в применении к рассматриваемому случаю отображает лестницу объектов, качественно отличающихся или характеризующихся степенью сложности. В окружающем нас мире можно подметить (а это стало возможным в результате многовекового изучения природы человеком) следующую иерархию объектов: элементарные частицы — ядра — атомы — молекулы — макротела (кристаллы, жидкости, газы, плазма) — планеты — звезды — галактики — Вселенная.

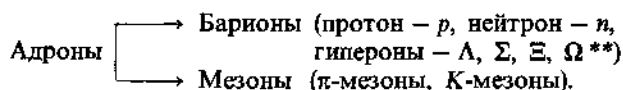
Человек обычно имеет дело с макротелами (приставка «макро» означает большой) и сам таковым является. Как исследователь, человек всегда, во все времена стремился познать природу в ее двух крайних проявлениях: в очень малом (микромир) и в очень большом (мегамир). Каждое звено цепи «макротела — молекулы — атомы — ядра — элементарные частицы» отражает исторические вехи в исследованиях, этапы познания. Заметим, что если попытаться проследить за этой цепочкой в обратном направлении от частиц к макротелам (считая свойства частиц известными, и определять по ним свойства совокупностей частиц, т. е. самих макротел), то эта задача окажется не из легких. Так, например, в физике до сих пор отсутствует последовательная микроскопическая теория жидкого состояния вещества.



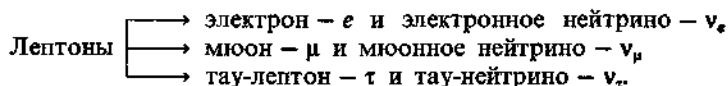
Итак, рассмотрим всю иерархию основных объектов природы и дадим краткую характеристику.

1.1 Элементарные частицы На сегодня эти образования являются исходными, простейшими в смысле структуры. Однако это не означает, что их свойства просты. Для описания поведения элементарных частиц используют наиболее глубокие физические теории, представляющие собой синтез теории относительности и квантовой теории.

Все известные элементарные частицы* подразделяются на две группы: *адроны* и *лептоны*. В свою очередь, многочисленная адронная группа состоит из *барионов* и *мезонов*:



Группа лептонов представлена следующими частицами:



Кроме того, в группе адронов существуют два больших семейства так называемых *резонансных частиц*: *барионные* и *мезонные резонансы*. Общее число открытых резонансов более 300.

Последнее замечание, по-видимому, несколько озадачит читателя. Действительно, не слишком ли много частиц, неужели все они элементарны? Эти вопросы волновали и волнуют самих физиков. Уже в 60-х годах было установлено, что адроны могут быть сгруппированы в некоторые семейства частиц, близких по своим основным характеристикам. Число частиц в каждом таком семействе и их свойства можно было объяснить, если предположить, что адроны имеют составное строение: состоят из истинно элементарных частиц — *кварков*. Барионы, согласно указанной гипотезе, состоят из трех кварков (антибарионы — из трех антикварков), а мезоны — из одного кварка и одного антикварка. Все известные к тому времени адроны можно было построить, постулировав существование только трех типов кварков.

Вначале, при формулировке кварковой модели адронов, кварки рассматривались как чисто математические структурные элементы, открывающие возможность очень удобного описания адронов. В дальнейшем, однако, были поставлены эксперименты по рассеянию электронов высоких энергий нуклонами, которые выявили наличие внутри нуклона точечных заряженных образований; их естественно было отождествить с кварками. В свободном состоянии кварки до сих пор не наблюдались, и есть теоретические соображения, которые указывают на невозможность таких состояний для кварков.

Последующие открытия в физике элементарных частиц потребовали введения еще двух новых типов кварков. Предполагается существование всего шести типов кварков.

* За исключением фотона.

** Это буквы греческого алфавита (см. приложение VII к книге).

Лептоны, как и кварки, рассматривают как бесструктурные точечные частицы. Так же, как и кварки, лептоны представлены 6-членным семейством.

Кварки и лептоны ныне могут претендовать на роль истинно элементарных частиц.

Частицами — переносчиками взаимодействий — являются глюоны, фотоны и массивные промежуточные бозоны. В настоящее время все взаимодействия элементарных частиц представляются как своеобразная «игра в мячики»: перебросом глюонами осуществляется связь между кварками, обмен фотонами происходит в актах взаимодействия электрически заряженных частиц, массивные промежуточные бозоны ответственны за медленные распады частиц и за чрезвычайно слабое взаимодействие всех типов нейтрино с веществом. Большая масса промежуточных бозонов обуславливает очень малый радиус ($\lesssim 10^{-18}$ м) их переброса. В результате для того, чтобы стал возможным процесс, связанный с обменом массивными промежуточными бозонами, взаимодействующие частицы должны подойти на чрезвычайно малое расстояние, что случается весьма редко (по масштабам времени микромира).

О классификации взаимодействий речь пойдет в дальнейшем, а сейчас остановимся на некоторых характеристиках элементарных частиц. Стабильными, т. е. живущими в свободном состоянии неограниченно долго, частицами являются протон, электрон, фотон и, по-видимому, нейтрино всех типов. Самыми короткоживущими образованиями являются резонансы — их время жизни порядка 10^{-23} с. «Рекордсменом-долгожителем» в микромире явился нейтрон в свободном состоянии, его время жизни около 10^3 с. Гипероны живут от рождения до распада в течение 10^{-10} с. Для мезонов характерно время жизни порядка 10^{-8} с. У лептонов время жизни распределяется так: мюон — 10^{-6} с, тау-лептон — $< 10^{-12}$ с.

Мир короткоживущих элементарных частиц может быть искусственно создан человеком в экспериментах на ускорителях — приборах, представляющих собой грандиозные инженерно-физические сооружения. В ускорителях формируются интенсивные потоки протонов или электронов, которые разгоняются до больших энергий с помощью электрических полей. При столкновении с веществом мишени (мишенью может служить, например, жидкий водород пузырьковой камеры, являющейся одновременно и детектором) протоны или электроны высоких энергий рожают новые короткоживущие элементарные частицы. С ростом энергии сталкивающихся частиц раскрываются новые уровни в их организации. Высокоэнергичные пучки частиц позволяют «прощупать» субмикроскопическую структуру исследуемых объектов. Вот почему строятся ускорители частиц на все большие и большие энергии.

В самой природе короткоживущие элементарные образования могут играть роль при самых экстремальных условиях существования вещества и поля, например: в «начальных» стадиях эволюции Вселенной, при образовании таких астрофизических объектов, как «черные дыры», в формировании сердцевин нейтронных звезд.

Массы стабильных элементарных частиц распределяются следую-

шим образом: у протона $m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, у электрона $m_e \approx 0,91 \cdot 10^{-30}$ кг. Масса покоя равна нулю у фотонов, глюонов и, по-видимому, у всех типов нейтрино; у электронного нейтрино в новейших предварительных экспериментах получено значение массы покоя $\approx 10^{-35}$ кг. Массы гиперонов превышают протонную, а массы мезонов меньше ее.

Элементарным электрическим зарядом является заряд с абсолютной величиной $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Почти все элементарные частицы обладают электрическим зарядом $+e$ или $-e$ или являются незаряженными. Исключение составляют некоторые резонансы с зарядом, кратным e .

Частицы с дробным электрическим зарядом не наблюдались. У истинно элементарных частиц — кварков — электрический заряд кратен $1/3e$. Однако кварки не могут существовать вне своей «колыбели» — тяжелой частицы, структуру которой они образуют.

Объединение релятивистских и квантовых представлений, осуществленное в значительной степени еще в 30-е годы, привело к одному из наиболее выдающихся предсказаний в физике — открытию мира *античастиц*. Частица и соответствующая античастица имеют одинаковые времена жизни, одинаковые массы, их электрические заряды равны, но противоположны по знаку. Кроме того, у частицы и ее античастицы имеется целый набор специфических «внутренних» дискретных характеристик; их значения у частицы и античастицы отличаются только знаком. Самым характерным свойством пары частица — античастица является способность *аннигилировать* (самоуничтожаться) при встрече с превращением в частицы другого рода.

К настоящему времени экспериментально обнаружены античастицы почти всех известных элементарных частиц. Любопытно, что имеются частицы, которые совпадают со своими античастицами; таковыми являются, например, фотон и π^0 -мезон.

Античастицы могут собираться в *антивещество*. Так на ускорителе Института физики высоких энергий (ИФВЭ) в Серпухове был получен антигелий-3. У атома антигелия-3 ядро состоит из двух антипротонов и одного антинейтрона, это ядро окружено оболочкой из пары *позитронов* (так называют антиэлектроны). Кстати, нейтрон и антинейтрон, обладая нулевыми электрическими зарядами, имеют равные, но противоположно направленные магнитные моменты (по отношению к собственному внутреннему механическому моменту).

Несмотря на микроскопическую симметрию между частицами и античастицами, во Вселенной до сих пор не обнаружены области со скольким-нибудь заметным содержанием антивещества.

Заметим, что частицы и соответствующие им античастицы, одинаково взаимодействуют с полем тяготения; это указывает на отсутствие «антигравитации».

1.2 Ядра Атомные ядра представляют собой связанные системы протонов и нейтронов*. Массы ядер всегда несколько меньше

* К обеим частицам, протону и нейтрону, часто применяют единый термин — *нуклон*, что означает ядерная частица.

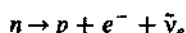
суммы масс свободных нуклонов, составляющих ядро. Это релятивистский эффект, определяющий энергию связи ядра.

В отличие от массы электрические заряды ядер строго равны сумме зарядов, входящих в ядро протонов. Известны ядра с зарядом от $1e$ до $107e$ и с числом нуклонов от 1 до примерно 260. Особенно устойчивыми ядрами, т. е. обладающими наибольшей энергией связи, являются ядра с числами протонов или нейтронов 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, получившими название *магических*.

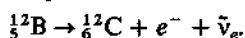
Плотность числа частиц в многонуклонных ядрах порядка 10^{44} нуклонов/м³, а плотность массы 10^{17} кг/м³. «Радиусы ядер» изменяются от $2 \cdot 10^{-15}$ м (ядро гелия) до $7 \cdot 10^{-15}$ м (ядро урана). Ядра имеют «форму» вытянутого или сплюснутого эллипсоида (или еще более сложную).

Ядро, как квантовая система, может находиться в различных дискретных возбужденных состояниях. В основном состоянии ядра могут быть *стабильными* (устойчивыми) и *нестабильными*. Время, за которое из любого макроскопического количества нестабильных ядер распадается половина, называют *периодом полураспада**. Периоды полураспадов известных нам элементов изменяются в пределах примерно от 10^{18} лет до 10^{-10} с.

Уже отмечалось, что свободные нейтроны — нестабильные частицы, распадающиеся на протон p , электрон e^- и электронное антинейтрино $\bar{\nu}_e$:



(заметим, что масса нейтрона немного больше протонной). Однако нейтроны, входящие в состав стабильных атомных ядер, устойчивы. В нестабильных же ядрах нейтроны могут испытывать указанное выше превращение. В качестве примера приведем схему распада ядра бора с превращением в ядро углерода:



Среди астрофизических объектов имеются нейтронные звезды, являющиеся как бы колоссальными атомными ядрами, состоящими в основном из нейтронов. Механическое равновесие нейтронной звезды поддерживается гравитационными силами. Могут ли существовать многонейтронные ядра в микромире только за счет ядерного взаимодействия? Этот вопрос остается открытым.

1.3 Атомы и молекулы Ядра имеют положительный электрический заряд и окружены роем отрицательно заряженных электронов. Такое электрически нейтральное образование называют *атомом*. *Атом есть наименьшая структурная единица химических элементов*.

В отличие от «плотной упаковки» ядерных частиц атомные электроны образуют весьма рыхлые и ажурные *оболочки*. Существуют жесткие правила «заселенности» электронами «атомных этажей» вокруг ядра. Электроны, находящиеся на самых верхних этажах «атомного дома», определяют реакционную способность атомов, т. е. их способность всту-

* Речь идет о статистически среднем времени, поскольку при распаде ядер действуют вероятностные закономерности.

пать в соединение с другими атомами. Здесь мы вступаем в область химии, и условность границ раздела между физикой и химией в данном случае очевидна.

Не всякие атомы способны соединяться друг с другом. Связь возможна в том случае, если совместный «верхний этаж» целиком заполнен электронами. Такое образование называют *молекулой*. Молекула есть наименьшая структурная единица сложного химического соединения. Число возможных комбинаций атомов, определяющих число химических соединений, составляет около 10^6 .

Некоторые атомы (например, углерода и водорода) способны образовывать сложные *молекулярные цепи**, являющиеся основой для образования еще более сложных структур (макромолекул), которые проявляют уже биологические свойства.

1.4 Макротела При определенных условиях однотипные атомы или молекулы могут собираться в огромные совокупности — *макроскопические тела (вещество)*. Простое вещество является атомарным, сложное — молекулярным. Ниже для простоты мы будем говорить об атомарных телах.

При достаточно низких температурах все тела являются кристаллическими**. В кристаллах взаимное расположение атомов тела является правильным. Атомы в таком теле не могут значительно удалиться от своих равновесных положений — *узлов кристаллической решетки*. Их движение, в основном, сводится к колебаниям вблизи узлов решетки.

Геометрия кристаллического состояния вещества при обычных давлениях и температурах отличается необычайным разнообразием, хотя число типов решеток и ограничено. Свойства веществ определяются не только характером атомов, но и их взаимным расположением. В качестве примера можно указать на алмаз и графит — вещества, состоящие из одних и тех же атомов углерода, но имеющие различные кристаллические решетки.

Тела могут сильно отличаться в отношении механических, тепловых, электрических, магнитных и оптических свойств. Зная атомную природу тел и зависимость указанных свойств от нее, можно целенаправленно создавать новые материалы.

Перейдем от кристаллического состояния вещества к *жидкому*. При значительном повышении температуры происходит *фазовый переход* кристалл — жидкость (*плавление*). Каждое вещество имеет свою строго определенную температуру плавления. В жидком состоянии атомы уже не являются строго локализованными, т. е. связанными с какими-то определенными положениями в теле. Тепловое движение в жидкостях носит довольно сложный характер.

При переходе жидкости в пар (при атмосферном давлении) вещество практически полностью теряет свою индивидуальность. Это связано с малой плотностью газообразного вещества. В разреженных

* К 70-м годам нашего века было известно более $3 \cdot 10^6$ органических соединений углерода, в то время как соединений всех остальных элементов — многим более 10^5 .

** Исключение составляют гелий ^4He и ^3He , которые остаются жидкими вплоть до 0 К (при давлениях меньших 25 атм).

газах по существу отсутствует взаимное влияние атомов, а значит, не проявляется их индивидуальная атомная структура. Газы всех веществ (при нормальных условиях) с хорошей точностью подчиняются одинаковым закономерностям.

Дальнейшее весьма значительное повышение температуры (до $\sim 10^4 - 10^5$ К) среды ведет к ионизации атомов, т. е. распаду их на ионы и свободные электроны. Такое состояние вещества называют *плазменным*.

Поскольку ионы и электроны в отличие от атомов несут нескомпенсированные электрические заряды, их взаимное влияние становится существенным. Плазма в противовес газам может проявлять коллективные свойства, что сближает ее с *конденсированным состоянием*, т. е. с твердыми телами и жидкостями. В плазме легко возбуждаются всякого рода упругоэлектрические колебания.

Приведем в качестве справки значения плотностей макротел в обычных условиях: в твердых телах и жидкостях она имеет порядок $10^{28} - 10^{29}$ атомов/м³, в газах $\sim 10^{25}$ молекул/м³, в искусственно создаваемой плазме плотность частиц $\sim 10^{19}$ м⁻³.

1.5 Планеты Следующей ступенью в иерархии объектов природы являются макротела астрономического масштаба — *планеты*.

Изучение планет солнечной системы по существу только начинается. На Венеру и Марс посылались автоматические межпланетные станции и спускаемые аппараты. На Луне человек уже побывал.

Что показали эти исследования? Во-первых, условия, в которых находится вещество планет, отличаются от земных. Во-вторых, в составе вещества планет не обнаружено никаких новых химических элементов по сравнению с земными.

Внутреннее строение планет изучать особенно сложно. Даже о своем «собственном доме» — планете Земля — человек знает крайне недостаточно. По оценкам, внутреннее давление в центральных областях земного шара имеет порядок 10^7 атм (10^{12} Па). Какие изменения испытывает вещество при таких давлениях?

Если при невысоких давлениях вещество отличается крайним разнообразием своих свойств и обнаруживает чрезвычайно резкую и немонотонную зависимость от химического состава, то при сжатии вещества проявляется ярко выраженная тенденция «сглаживания» его свойств. Это последнее обстоятельство легко понять. В самом деле, наружные электронные оболочки атомов вещества, ответственные за отмеченную немонотонность, при давлениях порядка $10^7 - 10^8$ атм перестают существовать, ибо входящие в их состав электроны отрываются от атомов и становятся коллективными. Внутренние же электронные оболочки уплотняются и распределение плотности электронов меняется сравнительно медленно при переходе от одного вещества к другому.

Давления порядка 10^7 атм физики научились создавать в экспериментах по ударному сжатию тел. Правда, такие давления возникают лишь на короткое время. Однако уже сейчас ведутся работы по созданию прессов на статические давления указанного порядка.

Исследования по физике высоких давлений привели к созданию целой группы новых материалов, среди них искусственные алмазы.

Есть надежда на получение при давлениях $\sim 10^7$ атм металлического водорода. Его свойства должны резко отличаться от обычных диэлектрических кристаллов молекулярного водорода, существующих при низких температурах и нормальном давлении. По оценкам физиков-теоретиков, кристаллы металлического водорода должны быть сверхпроводниками при комнатной температуре. Если это будет так, то мы станем свидетелями новой революции в электротехнике.

Одной из планет-гигантов солнечной системы является Юпитер. Он почти в 10 раз превосходит Землю по размерам и находится, по видимому, в жидком состоянии. Его вещество богато водородом и наверняка центральные области планеты состоят из металлического водорода.

1.6 Звезды. Галактики. Вселенная Как ни странно, но физики гораздо лучше представляют себе состояние вещества внутренних областей звезд, чем планет.

Центральные области Солнца характеризуются температурой $\sim 10^7$ К и давлением $\sim 10^{11}$ атм. В этих условиях вещество является полностью ионизованной плазмой: голые ядра и свободные электроны. При этом становятся возможными термоядерные реакции, окончательным итогом которых является слияние ядер водорода и превращение их в ядра гелия. Эта ядерная реакция служит источником энергии звезд.

По мере потери энергии звезды уплотняются. Свободные электроны начинают как бы вдавливаться в ядра. Происходит захват электронов протонами с превращением последних в нейтроны, при этом одновременно испускается нейтрино. В результате такой реакции уменьшается заряд ядра (при неизменной его массе), что, вообще говоря, приводит к уменьшению энергии связи ядра. В конце концов ядра, содержащие слишком много нейтронов, станут неустойчивыми и распадутся. Вещество звезды будет представлять собой сверхплотный нейтронный газ.

Нейтронные звезды обнаружены в последние годы. Они обладают массой, сравнимой с солнечной, а размерами в 10^5 раз меньшими. Плотность нейтронной звезды сравнима с плотностью ядерного вещества, т. е. 10^{17} кг/м³. Масса 1 см³ вещества такой звезды составляет сотни миллионов тонн!

Галактики — это звездные системы. Число звезд в них порядка $10^9 - 10^{12}$. Если масса звезды порядка 10^{30} кг (как у нашего Солнца), то масса Галактики $\sim 10^{41}$ кг.

Известная нам часть *Вселенной* содержит число галактик порядка 10^{11} . Общее число протонов и нейтронов в известной нам части *Вселенной* порядка 10^{80} .

Оставим в стороне доказательства и способы измерений, которые сделали возможным привести названные здесь числа. Замечательно то, что эти числа нам известны; очевидно, что некоторые из них являются только приближенными.

Астрономические данные показывают, что галактики во *Вселенной* стремительно «разбегаются» друг от друга. Расширение *Вселенной* позволяет предположить, что когда-то в прошлом она занимала весьма малый объем. Это в свою очередь означает, что «дозвездное вещество»

было сверхплотным и чрезвычайно горячим (температура порядка 10^{13} К). При таких температурах вещество может состоять в основном из излучения — фотонов и нейтрино.

Указанная «горячая» модель Вселенной приводит к целому ряду следствий, которые могут быть проверены наблюдениями. Обнаружение в последние годы так называемых *реликтовых фотонов*, являющихся остатками дозвездного состояния вещества, является неплохим доказательством справедливости наших представлений о самых ранних стадиях развития мира.

§ 2. ЧЕТЫРЕ ВИДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

2.1 Связанные системы объектов. Взаимодействия Как мы убедились в предыдущем параграфе, в природе существуют качественно различные связанные системы объектов. Так, ядра есть связанные системы протонов и нейтронов; атомы — связанные ядра и электроны; макротела — совокупность атомов или молекул; солнечная система — «связка» планет и массивной звезды и т. д.

Наличие связанных систем объектов говорит о том, что должно существовать нечто такое, что скрепляет части системы в целое. Чтобы «разрушить» систему частично или полностью, нужно затратить энергию. Взаимное влияние частей системы характеризуется *энергией взаимодействия*, или просто *взаимодействием*.

В настоящее время принято считать, что любые взаимодействия каких угодно объектов могут быть сведены к ограниченному классу основных фундаментальных взаимодействий: сильному, электромагнитному, слабому и гравитационному.

2.2 Гравитационные взаимодействия (тяготение) Притяжение тел к земле, существование солнечной системы, звездных систем (галактик) обусловлено действием *сил тяготения*, или, иначе, гравитационными взаимодействиями. Эти взаимодействия универсальны, т. е. применимы к любым микро- и макрообъектам. Однако они существуют лишь для тел огромных астрономических масс и для формирования структуры и эволюции Вселенной как целого. Гравитационные взаимодействия очень быстро ослабевают для объектов с малыми массами и практически не играют роли для ядерных и атомных систем.

Проявления гравитации количественно были изучены одними из первых. Это не случайно, ибо источником гравитации являются массы тел, а дальность гравитационного воздействия неограничена.

2.3 Электромагнитные взаимодействия Ими обусловлены связи в атомах, молекулах и обычных макротелах. Энергия ионизации атома, т. е. энергия отрыва электрона от ядра, определяет значение электромагнитного взаимодействия, существующего в атоме. Теплота парообразования, т. е. энергия перехода жидкость — пар (при атмосферном давлении), определит, правда довольно грубо, значение межмолекулярных взаимодействий в теле. Последние же имеют электромагнитное происхождение.

2.4 Сильные (ядерные) взаимодействия Наличие в ядрах одинаково заряженных протонов и нейтральных частиц говорит о том, что

должны существовать взаимодействия, которые гораздо интенсивнее электромагнитных, ибо иначе ядро не могло бы образоваться. Эти взаимодействия, их называют сильными, проявляются лишь в пределах ядра.

Чтобы установить некоторые особенности взаимодействий в ядре, обратимся к так называемым *зеркальным ядрам*. Это ядра, которые формально получаются друг из друга заменой протонов нейтронами и нейтронов протонами. Такие ядра почти не отличаются по своим основным физическим характеристикам (энергия связи, энергетический спектр и др.). В качестве примера зеркальных ядер можно указать на ядра ^{11}B и ^{11}C . Физическая эквивалентность зеркальных ядер говорит о том, что сильные взаимодействия типа $p-p$, $p-n$, $n-n$ должны быть одинаковыми. Небольшое различие в указанных взаимодействиях, естественно, существует за счет электромагнитных сил.

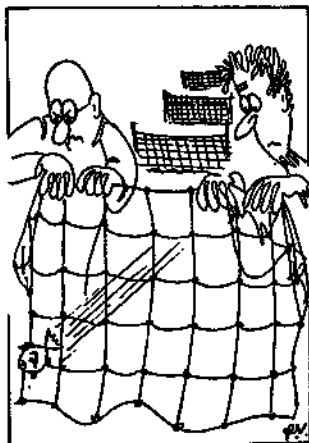
Сильным взаимодействиям подвержены не только ядерные частицы, но и все барионы и мезоны.

2.5 Слабые взаимодействия Уже отмечалось, что из большого списка элементарных частиц только p , e , γ , ν_e , ν_μ , ν_τ являются стабильными. Под влиянием «внутренних причин», нестабильные свободные частицы за те или иные характерные времена превращаются в другие частицы. Так, резонансы распадаются за время $\sim 10^{-23}$ с за счет сильных взаимодействий, а нейтральные π^0 -мезоны, например, испытывают распад под влиянием электромагнитных взаимодействий за время 10^{-16} с. Существуют медленные распады с характерным временем $10^{-10} - 10^{-6}$ с; они происходят за счет так называемого *слабого взаимодействия*.

Значительное число медленных распадов элементарных частиц сопровождается излучением нейтрино. Эта частица крайне слабо взаимодействует с веществом. При прохождении ее через среду обычной плотности длина пути между двумя столкновениями нейтрино с частицами вещества составляет астрономическую цифру порядка 10^{17} км. Это означает, что, например, Земля, радиус которой $6,4 \cdot 10^3$ км, совершенно «прозрачна» для потока нейтрино.

Как же физикам удалось не только зарегистрировать нейтрино, но даже изучить их свойства — ведь открыты три нейтрино: ν_e , ν_μ , ν_τ ? При работе ядерного реактора возникают потоки электронных антинейтрино $\bar{\nu}_e$ низких энергий со значением потока 10^{17} частиц/(м²·с). Естественно, при таких больших потоках вероятность зарегистрировать нейтрино резко возрастает; впервые это удалось сделать в 1953 г. Поток нейтрино высоких энергий (до 10^{11} эВ) генерируется с помощью ускорителей заряженных частиц.

Общая схема современных нейтринных экспериментов, проводимых на ускорителях в ИФВЭ (СССР, Серпухов), ЦЕРН (Европейский центр ядерных ис-



следований, Женева), Брукхейвене и Батавии (США) такова: пучок протонов, выводимый из ускорителя, взаимодействует с ядрами мишени, рождая при этом π - и K -мезоны. Эти мезоны попадают сначала в фокусирующее устройство, позволяющее отбирать частицы нужного заряда, а затем в распадный канал (длиной от 30 до 1300 м в зависимости от энергии ускорителя), где в реакциях распада на мюоны и нейтрино формируется нейтринный пучок. Распадный канал заканчивается массивным стальным поглотителем — мюонным фильтром. Поток нейтрино, проходящий через него без поглощения, попадает на мишень — детектор — пузырьковую камеру (объемом до 20 м³) или искровую камеру и сцинтилляционные счетчики, прослоенные фильтрами из Fe или Al. Детекторы имеют поперечные размеры 3–4 м, длину до 16 м и массу до 1000 т.

Нейтринные эксперименты на ускорителях не только позволяют изучать свойства нейтрино, но и являются средством исследования слабого взаимодействия, структуры и свойств других частиц.

2.6 Сравнительная оценка интенсивностей всех видов взаимодействий Если рассматривать только элементарные частицы, то интенсивность различных взаимодействий по отношению к сильным распределяется следующим образом:

сильное	~ 1 ;
электромагнитное	$\sim 10^{-3}$;
слабое	$\sim 10^{-14}$;
гравитационное	$\sim 10^{-40}$.

В вопросах строения и развития мира как целого роль гравитации становится определяющей. Исследование же конкретных астрофизических объектов (звезд, пульсаров, квазаров и др.) невозможно без привлечения всех фундаментальных взаимодействий.

2.7 Поля и вещество Вся совокупность элементарных частиц с их взаимодействиями проявляет себя макроскопически в форме вещества и поля.

Поле в отличие от вещества обладает особыми свойствами. Физическая реальность электромагнитного поля видна хотя бы из того, что существуют радиоволны. Они имеют конечную скорость распространения; так, при локации Луны с помощью радиоволн время запаздывания радиосигнала составило около 2,5 с.

Источником электромагнитного поля являются движущиеся заряженные частицы. Взаимодействие зарядов происходит по схеме: частица — поле — частица. Поле является переносчиком взаимодействия. В некоторых условиях поле может «оторваться» от своих источников и свободно распространяться в пространстве. Такое поле носит волновой характер.

Как получают сведения о состоянии вещества звезд? Атомные процессы, которые разыгрываются во внешних оболочках звезд, сопровождаются излучением электромагнитных волн. Одним из таких процессов является возбуждение атомов, ведущее к излучению ряда характерных «порций» электромагнитного поля (спектр). У каждого химического элемента имеется свой, только ему присущий спектр излучения.

Анализируя, например, солнечный свет (свет является электромагнитным излучением) с помощью оптических приборов, можно определить химический состав и процентное содержание элементов во внешних оболочках Солнца.

Ядерные процессы, которые происходят в недрах звезд, сопровождаются излучением всепроникающих частиц — нейтрино. Именно нейтрино должно дать нам информацию о типе термоядерных реакций, происходящих на Солнце.

§ 3. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

3.1 Пространственная и временная шкалы в природе Явления и процессы, происходящие с взаимодействующими объектами, протекают в пространстве и времени. Пространство и время являются той своеобразной «ареной», на которой разыгрываются события. Если событие характеризовать местоположением и моментом времени, то существование пространственно-временных связей накладывает определенные ограничения на возможный ход событий.

Рассмотренной выше иерархии объектов и взаимодействий могут быть сопоставлены пространственные и временные характеристики. Так, верхняя грань для пространственной области, в которой действуют сильные и слабые взаимодействия, имеет размер $\sim 10^{-15}$ м; радиус действия электромагнитных и гравитационных взаимодействий неограничен, в связи с чем становится ясным, почему эти последние взаимодействия могут проявлять себя макроскопически.

Между взаимодействиями имеются существенные различия во временных характеристиках. Процессы, которые происходят под влиянием сильных взаимодействий, характеризуются временами $\sim 10^{-23}$ с. Для процессов, связанных с электромагнитными взаимодействиями частиц, характерны времена $\sim 10^{-15}$ с. Наконец, для процессов, ход которых регулируют слабые взаимодействия, характерны времена $\gtrsim 10^{-8}$ с.

Связанные системы протонов и нейтронов (ядра) характеризуются пространственной областью $\sim 10^{-15}$ м. Для электронов в атоме характерна пространственная область движения с размерами $\sim 10^{-10}$ м.

Приведем данные о пространственно-временной шкале астрофизических объектов. Средний радиус Земли $\approx 6,4 \cdot 10^6$ м, время ее существования $\approx 4,6 \cdot 10^9$ лет. У Солнца радиус $7 \cdot 10^8$ м, его возраст $(5 - 10) \cdot 10^9$ лет. Для галактик характерны размеры $\sim 10^{21}$ м, возраст вещества звезд составляет $(5 - 10) \cdot 10^9$ лет. Что касается известной части Вселенной, то ее радиус $\sim 10^{26}$ м, а возраст $\sim 10^{10}$ лет.

3.2 Однородность пространства и времени Пространство и время обладают определенными свойствами, и это несомненно влияет на ход физических явлений. Важнейшим из этих свойств является так называемая *однородность*. *Однородность пространства* означает, что любая его точка физически равноценна, т. е. *перенос любого объекта в пространстве никак не влияет на процессы, происходящие с этим объектом*. Так, мы совершенно уверены, что свойства атомов у нас на Земле, в условиях Луны и на Солнце одни и те же.

Однородность времени нужно понимать как физическую неразличи-

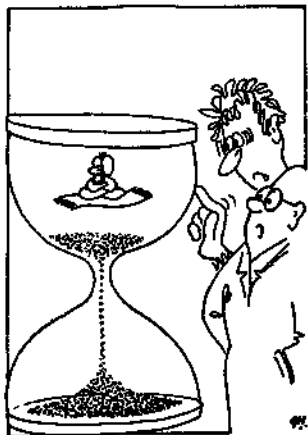
мость всех моментов времени для свободных объектов. Другими словами, *если объекты не взаимодействуют с окружением, то для них любой момент времени может быть принят за начальный*. Мы считаем, что изученные сегодня закономерности в поведении атомов были теми же самыми и многие миллионы лет тому назад.

Приведем еще ряд иллюстраций. Один и тот же физический эксперимент, поставленный в Москве и Нью-Йорке, дает одинаковые результаты — это есть не что иное, как отражение эквивалентности различных точек пространства в условиях Земли. В свое время Архимед открыл законы плавания тел; в настоящее время каждый из нас их может легко воспроизвести, создав соответствующие условия наблюдения, т. е. все моменты времени в рассмотренной ситуации физически равнозначны.

Если бы эти кажущиеся столь очевидными свойства однородности пространства и времени отсутствовали, то было бы почти бессмысленным заниматься наукой. В самом деле, представьте себе, к чему бы вело отсутствие однородности пространства — законы физики в Москве были бы одни, в Туле другие, в Воронеже третьи. Отсутствие однородности времени вело бы к тому, что люди не могли бы прогрессировать в познании. Открытый вчера закон плавания тел сегодня был бы уже несправедлив и нужно было бы вновь вести исследование; завтра он, в свою очередь, будет снова несправедлив.

3.3 Свободные тела и движение по инерции Наше пространство является «плоским» в том смысле, что оно удовлетворяет всем аксиомам геометрии Евклида; это является экспериментальным фактом. Как будут вести себя свободные тела в таком пространстве?

Прежде всего под свободным телом мы будем понимать тело, настолько удаленное от всех окружающих тел, что можно пренебречь его взаимодействием с ними. Для такого свободного тела вследствие однородности пространства любые его местоположения никак не будут влиять на его состояние. Телу «безразлично», в какой точке пространства находится, ибо «внешние условия» не меняются. Если учесть еще и однородность времени, т. е. физическую эквивалентность всех моментов времени для свободного тела, то мы приходим к любопытному обстоятельству: тело будет двигаться, т. е. последовательно менять свои местоположения с течением времени. Причем вследствие однородности пространства и времени движение будет равномерным, т. е. за равные промежутки времени тело должно проходить равные расстояния, оно будет к тому же и прямолинейным, ибо пространство «плоское». Такое движение свободных тел называют движением по инерции.



Следует иметь в виду, что свойства пространства — времени в масштабах всей Вселенной или вблизи тел огромных астрономических масс отклоняются от свойств обычной геометрии Евклида; здесь

пространство обладает своеобразной «кривизной». Движение по инерции в таком неевклидовом пространстве уже непрямолинейно и неравномерно.

В исследованиях элементарных частиц, ядер, атомов, молекул и макротел мы исходим из предположения, что пространство евклидово и это подтверждается в эксперименте с высочайшей точностью. Где особенно наглядно проявляется движение тел по инерции? Возьмите разреженный газ, в нем отдельные молекулы можно рассматривать как свободные тела, ибо межмолекулярные взаимодействия исчезающе малы, а прямые столкновения молекул чрезвычайно редки. От одного столкновения до другого молекулы движутся по инерции.

Движение тел по инерции есть проявление своеобразной симметрии пространства и времени, их однородности.

3.4 Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности
Для количественного изучения движения любых объектов необходимо иметь *систему отсчета*. Под системой отсчета разумеют систему координат и часы, связанные с телом отсчета.

В качестве системы координат мы будем обычно пользоваться *прямоугольной декартовой системой*. Говоря же о часах, мы имеем в виду не только изобретенный человеком механизм, но и любой периодический процесс, который осуществляется в природе. Так, в роли часов могут выступить:

вращение Земли вокруг собственной оси,
движение Земли по околосолнечной орбите,
периодическое движение атомных электронов (атомные часы) и т. д.

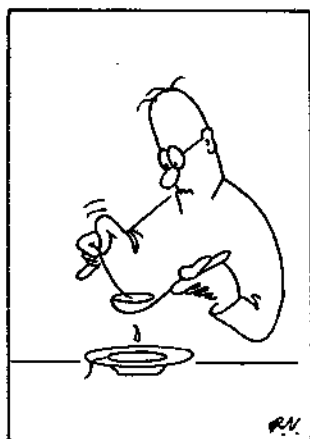
Если связывать систему координат и часы с произвольно движущимся телом, то относительно такой системы отсчета изучаемые физические явления даже в простейших случаях могут выглядеть весьма сложно. Особенная простота при количественном описании явлений возникает, если в качестве тела отсчета брать свободно движущиеся тела. Такие системы отсчета называют *инерциальными*.

В инерциальных системах отсчета всякие свободно движущиеся объекты движутся равномерно и прямолинейно. Инерциальных систем отсчета можно выбрать сколько угодно, и все они будут относительно друг друга двигаться по инерции.

Нет критерия, благодаря которому мы могли бы предпочесть одну инерциальную систему отсчета другой, также инерциальной. Все инерциальные системы отсчета являются физически эквивалентными, и опыт это подтверждает.

Какое бы физическое явление ни рассматривалось, с точки зрения любых инерциальных систем отсчета оно выглядит совершенно оди-





наковым. Это означает, что *математическая формулировка законов природы должна быть таковой, чтобы она не менялась при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой*. Это положение в физике именуют **принципом относительности**.

Из-за существования принципа относительности физические законы обладают особым совершенством, связанным с их симметрией по отношению к выбору инерциальных систем отсчета. Требования указанной симметрии играют немаловажную эвристическую роль при поисках количественных соотношений, описывающих явления в новой области исследований.

ГЛАВА II МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



§ 4. КООРДИНАТЫ, СКОРОСТЬ, УСКОРЕНИЕ

Простейшей областью физических явлений, весьма важной для физики в целом, является *механическое движение тел*. Законы такого движения включают в себя не только движение свободных тел, которое мы уже рассмотрели, но и движение тел взаимодействующих. Этот общий случай движения и называют *механическим*.

Механическое движение удобно изучать на примере идеализированного объекта — *материальной точки*. Под материальной точкой понимают тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения*. Знать движение материальной точки — это значит знать ее положения в пространстве в каждый момент времени.

Опыт показывает, что для полного задания положения материальной точки в пространстве по отношению к некоторому телу отсчета необходимо задать три *координаты* точки. Будем связывать с выбранным нами телом отсчета некоторую декартову систему координат; тогда положение материальной точки в пространстве можно характеризовать ее *радиусом-вектором* \mathbf{r} , компоненты которого по осям системы координат равны декартовым координатам точки x , y , z (рис. 4.1).

При движении материальной точки ее положение в пространстве изменяется. Соответственно этому радиус-вектор материаль-

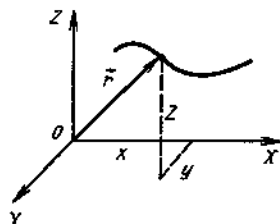


Рис. 4.1

* Приближение материальной точки работает и тогда, когда движение тел конечных размеров является заведомо поступательным.



ной точки можно рассматривать как функцию времени t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (4.1)$$

Векторная функция (4.1) равносильна заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Механические движения могут отличаться быстротой изменения координат со временем. В связи с этим вводят понятие *скорости* \mathbf{v} . Ее определяют как предел отношения приращения радиуса-вектора к промежутку времени, в течение которого это приращение произошло, при условии, что сам промежуток времени стремится к нулю*. Имея в виду эту формулировку, запишем

скорость как

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Для компонентов скорости, например, вдоль оси X , получим

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (4.3)$$

При движении материальной точки ее скорость может быть как постоянной, так и переменной. Движение с постоянной скоростью является *равномерным* и *прямолинейным*. В случае изменения скорости величина $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$, называемая *ускорением*, отлична от нуля; само же движение называют *ускоренным*.

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

Уже отмечалось, что изучать движение тела невозможно, не относя его к той или иной системе отсчета. Мы условились пользоваться только инерциальными системами отсчета. Если известно движение $\mathbf{r}(t)$ материальной точки в одной инерциальной системе отсчета, как найти ее движение $\mathbf{r}'(t')$ в другой инерциальной системе? Для ответа на этот вопрос необходимо выяснить, как преобразуются пространственно-временные величины при таком переходе. Это весьма важно, поскольку речь идет о таких важнейших понятиях, как пространство и время.

* Математически это запишется так:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

т. е. скорость есть производная от радиуса-вектора по времени. В тексте мы пока не будем пользоваться понятием производной, а лишь конечными разностями.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета (X, Y) и (X', Y') — рис. 5.1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ начала координат O и O' обеих систем совпадают. Пусть система отсчета (X', Y') движется относительно системы отсчета (X, Y) с постоянной скоростью V вдоль оси X . Тогда координаты одной и той же точки в этих системах отсчета связаны соотношениями

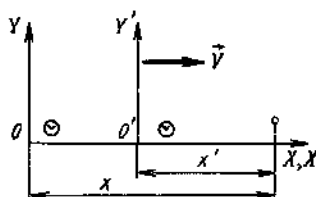


Рис. 5.1

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + Vt, \\ t &= t'. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Координаты y и y' , а также z и z' остаются равными друг другу. Это так называемые *преобразования Галилея*.

Если первое равенство в (5.1) довольно очевидно, то для второго требуется сделать пояснения. А именно, оно выражает абсолютность времени, т. е. его независимость от выбора инерциальной системы отсчета. Это предположение оправдывается на опыте для огромного круга физических явлений.

5.1 Абсолютность размеров и промежутков времени Пусть $\Delta x = x_2 - x_1$ — расстояние между двумя точками в системе отсчета (X, Y) . Как связаны Δx и $\Delta x' = x'_2 - x'_1$? Из (5.1) следует, что

$$x_1 = x'_1 + Vt, \quad x_2 = x'_2 + Vt,$$

или $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \Delta x', \\ \Delta t &= \Delta t'. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Равенства (5.2) выражают независимость длин и промежутков времени от выбора инерциальных систем отсчета. Другими словами, *размеры тел и ход времени не зависят от того, что эти тела находятся в состоянии движения*.

5.2 Относительность скоростей и их закон преобразования Из (5.1) имеем

$$\Delta x = \Delta x' + V \Delta t$$

или

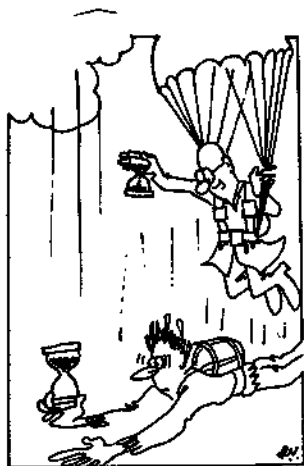
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} + V \frac{\Delta t}{\Delta t},$$

т. е.

$$v = v' + V. \quad (5.3)$$

Здесь мы воспользовались определением (4.3) для скорости, а также предположением, что скорость материальной точки направлена вдоль осей X, X' . Векторное соотношение (5.3) справедливо и в общем случае.

В (5.3) v' есть скорость материальной точки относительно инерциальной системы отсчета (X', Y') , v — скорость той же точки относительно системы отсчета (X, Y) и V , как уже отмечалось, — скорость переноса



штрихованной системы относительно нештрихованной. Таким образом, *скорость есть понятие относительное; ее значение зависит от выбора системы отсчета*, в частности: если в некоторой системе отсчета тело покоится, то относительно всех других оно, вообще говоря, движется с той или иной постоянной скоростью. Последнее хорошо видно из (5.3); если положить $v' = 0$, то $v = V$.

5.3 Абсолютность ускорений Применим к левой и правой частям равенства (5.3) операцию Δ (разность двух близких значений величины) и будем иметь в виду, что V есть постоянный вектор, тогда получим

$$\Delta v = \Delta v'$$

или

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v'}{\Delta t'}. \quad (5.4)$$

Соотношение (5.4) означает, что *ускорения тел во всех инерциальных системах отсчета одинаковы*.

§ 6. ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Мы уже знаем, что свободное тело движется равномерно и прямолинейно, т. е. с постоянной скоростью. Если же тело не свободно, а взаимодействует с окружением, то скорость его, в общем случае, уже не будет оставаться постоянной — появится ускорение. Таким образом ускорение

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \propto F,$$

где F — сила, являющаяся мерой внешнего воздействия на тело.

Написанное соотношение не может считаться полным, поскольку в него никак не входят механические характеристики тела. Таковой является масса m тела. Окончательно имеет место следующая связь:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F. \quad (6.1)$$

Это и есть закон движения в механике.

Механику, которую мы излагаем, называют *ньютоновской* или *классической*. Она имеет определенные границы применимости; о них будет сказано в дальнейшем.

Как и всякий основной закон, закон движения в механике (6.1) обязан удовлетворять принципу относительности, т. е. математическая форма закона не должна зависеть от выбора инерциальных систем

отсчета. Для механики Ньютона это означает, что уравнения движения (6.1) материальной точки не изменяют своего вида при преобразованиях Галилея.

Прежде чем применять преобразования (5.1) к уравнениям (6.1), заметим, что силы в классической механике являются функциями только расстояния между взаимодействующими телами. В этом мы убедимся позднее. Итак, правая часть в (6.1), например, ее составляющая силы $F_x(\Delta x)$, являясь функцией Δx , согласно (5.2), переходит в $F'_x(\Delta x')$ и остается неизменной, как говорят, инвариантной в различных инерциальных системах отсчета.

Левая часть в (6.1), согласно принципу относительности, также должна быть инвариантной. Множитель $\Delta v/\Delta t$ при преобразованиях Галилея переходит в $\Delta v'/\Delta t'$ и, согласно (5.4), остается неизменным. Следовательно, и сама масса тела является величиной инвариантной; она имеет одно и то же значение в различных инерциальных системах отсчета. Это обстоятельство и позволяет считать массу механической характеристикой материальной точки.

Состояние материальной точки в механике определяется заданием координат и скорости. Закон движения (6.1) связывает ее состояния в различные моменты времени. Если известны начальные координаты и скорость точки, а также силы как функции координат, то тем самым полностью определяется все последующее движение материальной точки. Задав любой момент времени, из (6.1) можно определить координаты и скорость точки в этот момент.

Заметим, что если сам механический закон движения (6.1) остается неизменным во всех инерциальных системах отсчета, то этого нельзя сказать о виде траектории движения тела. Характер траектории зависит от начального состояния тела.



§ 7. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Для иллюстрации того, что мы говорили выше относительно закона движения в механике, рассмотрим пример движения тела в гравитационном поле.

Несколько слов о самом поле тяготения. Источником поля тяготения являются гравитационные массы. Как показывает опыт и современные физические представления, гравитационная масса количественно совпадает с массой инертной, т. е. той массой, которая входит в механический закон движения. В связи с этим мы не станем делать терминологических различий и будем говорить просто о массе тел.

Основное свойство гравитационного поля состоит в том, что все тела независимо от их массы в заданном поле тяготения падают

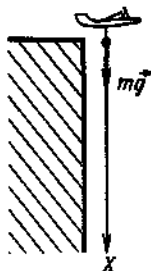


Рис. 7.1

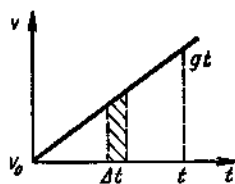


Рис. 7.2

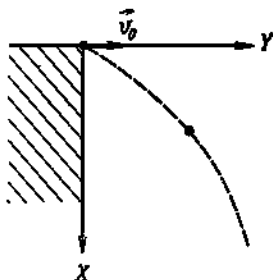


Рис. 7.3

с одинаковым ускорением. В поле тяготения Земли, на малых расстояниях от нее, ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. В этом случае на тело массы m действует сила mg .

А теперь рассмотрим следующую задачу. С высокого обрыва катапультирует мотопланер; его скорость v_0 в дальнейшем не изменяется. В момент прохождения мотопланером края обрыва с него сбрасывают груз. Сначала определим, как движется этот груз в системе отсчета, связанной с мотопланером (рис. 7.1). Выпишем закон движения груза: $m \Delta v / \Delta t = F$, где $F = mg$. Тогда $\Delta v / \Delta t = g$. Придадим этому равенству вид $\Delta v = g \Delta t$ и просуммируем его по всем малым интервалам времени, это запишется как

$$v = g \sum_i \Delta t_i = gt.$$

Сюда не входит в качестве слагаемого v_0 , ибо в системе отсчета, связанной с мотопланером, начальная скорость груза равна нулю.

Найдем зависимость координаты x от времени t . Координаты y , z в рассматриваемом случае несущественны. По определению, скорость $v_x = \Delta x / \Delta t$. Выше мы получили зависимость скорости от времени $v = gt$. Следовательно, $\Delta x / \Delta t = gt$. Отсюда $\Delta x = gt \Delta t$. Просуммировав графически последнее равенство (рис. 7.2), получим

$$x = gt^2/2.$$

Начальная координата в качестве слагаемого сюда не входит, ибо она равна нулю.

Таким образом, исходя из общего закона движения, мы нашли зависимость как координат, так и скорости от времени. Траектория груза в системе отсчета, связанной с мотопланером, является, очевидно, вертикальной прямой, поскольку меняется только x -координата, $y = z = 0$.

Рассмотрим теперь движение того же груза в системе отсчета, связанной с краем обрыва (рис. 7.3). Векторное уравнение движения в компонентах запишется как

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} &= F_x, \\ m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} &= F_y. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (*) \\ (**) \end{aligned}$$

Уравнение (*) нами уже решалось, приведем его решение и начальные условия, при котором оно получено:

$$F_x = mg; v_{x0} = 0; v_x = gt; \\ x_0 = 0; x = \frac{1}{2}gt^2.$$

Для уравнения движения (**) начальные условия

$$F_y = 0; v_{y0} = v_0, y_0 = 0.$$

В результате

$$m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0 \rightarrow \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0 \rightarrow v_y = \text{const} = v_0.$$

Соотношения для у-координаты следующие:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v_0 \rightarrow \Delta y = v_0 \Delta t \rightarrow y = v_0 t.$$

Таким образом, получим

$$v_y = v_0; y = v_0 t.$$

Уравнение траектории связывает между собой в данном случае координаты x и y . Для нахождения траектории выпишем полученные зависимости координат от времени

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}gt^2, \\ y &= v_0 t. \end{aligned} \right\}$$

Исключим t из этой системы. Применим метод подстановки. Выражая время из второго уравнения и подставляя в первое, получим

$$x = \left(\frac{g}{2v_0^2} \right) y^2.$$

Это и есть уравнение траектории груза в системе отсчета, связанной с краем обрыва.

Таким образом, рассматривая движение груза с различных точек зрения (пилота и наблюдателя на краю обрыва), мы получаем разные траектории: вертикальную прямую и параболу. Связано это с различием в начальных условиях (скоростях) для общих уравнений механического движения.

§ 8. ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Рассмотренный выше закон движения в механике

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F$$

может быть преобразован к виду

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = F, \quad (8.1)$$

поскольку масса — величина постоянная. Оказывается, что выражение mv не просто формально, а имеет определенный физический смысл. Для материальной точки произведение массы тела (или частицы) на его скорость называют его *импульсом* p . В отличие от скоростей для импульсов выполняется закон сохранения. Его содержание будет раскрыто ниже.

Из эксперимента, который ставился в школе, тебе, читатель, известно, что два тела взаимодействуют друг с другом с равными и противоположно направленными силами

$$F_1 = -F_2,$$

или

$$F_1 + F_2 = 0. \quad (8.2)$$

Обобщением (8.2) на случай N взаимодействующих тел является выражение

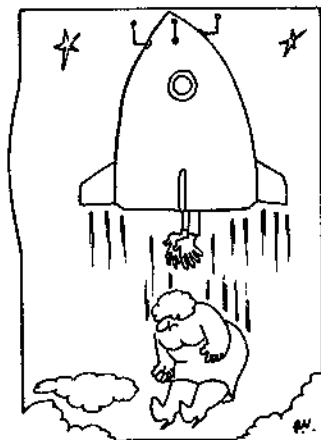
$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_N = 0. \quad (8.3)$$

Соотношение (8.3) довольно очевидно. В самом деле, оно заведомо выполняется для покоящегося тела, рассматриваемого как совокупность взаимодействующих микрочастиц. Другими словами, *внутренними силами нельзя вызвать движение тела как целого*.

Формулируя (8.3), мы, по существу, пользовались понятием *замкнутой системы*. Это система взаимодействующих тел, влиянием на которую со стороны окружения можно пренебречь. Напишем для N взаимодействующих материальных точек уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta p_1}{\Delta t} &= F_1, \\ \frac{\Delta p_2}{\Delta t} &= F_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\Delta p_N}{\Delta t} &= F_N. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Сложив эти уравнения и учтя (8.3), получим



$$\frac{\Delta \sum_i p_i}{\Delta t} = 0.$$

Это равенство означает, что $\Delta \sum_i p_i = 0$, т. е.

$$\sum_{i=1}^N p_i = \text{const.} \quad (8.5)$$

Детальная запись (8.5) выглядит следующим образом:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_N = \text{const.} \quad (8.6)$$

Таким образом, в замкнутой системе тел выполняется векторное равенство (8.6). Его смысл состоит в следующем: хотя в замкнутой системе импульсы

отдельных материальных точек меняются при их взаимодействии, сумма импульсов по всем материальным точкам остается величиной, не зависящей от времени (закон сохранения импульса).

§ 9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. ПРИМЕНЕНИЯ И УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

9.1 Закон сохранения энергии Под действием сил тела движутся, т. е. происходит их перемещение. При этом, как говорят, совершается работа сил по перемещению тел. Количественно работа A выражается через силу F и перемещение s следующим образом:

$$A = (Fs). \quad (9.1)$$

В (9.1) стоит скалярное произведение двух векторов, т. е.

$$A = |F| |s| \cos \alpha, \quad (9.2)$$

где α — угол между векторами F и s . Особенностью (9.2) является то обстоятельство, что при $\alpha = \pi/2$ работа $A = 0$.

Возможная работоспособность физических систем характеризуется понятием *энергии*. Если E_1 — первоначальное значение энергии системы, а E_2 — ее конечное значение, то работа системы

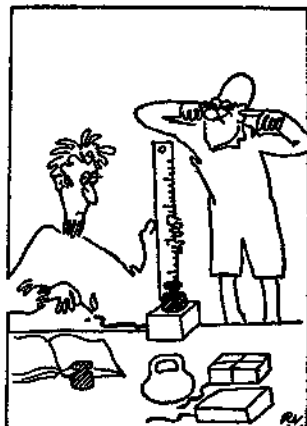
$$A = E_2 - E_1. \quad (9.3)$$

Работа (9.3) может быть как положительной, так и отрицательной. В первом случае работа совершается внешними силами над системой, во втором случае работу совершает сама система. Такое определение знака работы вполне согласуется с (9.2).

Если тело массы m свободно и движется со скоростью v , то оно обладает, как говорят, запасом *кинетической энергии*. Выражение для кинетической энергии может быть установлено из соображений размерности (см. приложение II). Действительно, размерность работы $[A] = [F][s] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{кг} \cdot (\text{м}^2/\text{с}^2)$, а из величин m и v можно составить только единственную комбинацию с указанной размерностью, а именно mv^2 . Полное выражение для кинетической энергии T имеет вид

$$T = mv^2/2. \quad (9.4)$$

Остановимся для наглядности на примере движения тела при наличии сил трения, хотя данный случай и выходит, строго говоря, за рамки механики. Это связано с тем, что при таком движении механическая энергия переходит в тепловые формы, которые не рассматриваются собственно механикой. Итак, пусть тело, двигаясь горизонтально, скользит вдоль поверхности, его начальная кинетическая энергия $T_1 = mv_1^2/2$, а конечным состоянием является покой, т. е. $v_2 = 0$.



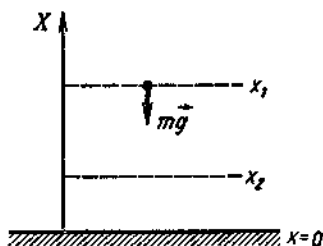


Рис. 9.1

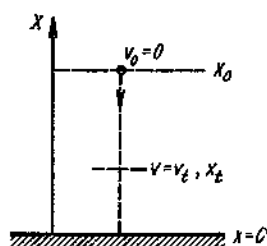


Рис. 9.2

Тогда, согласно (9.3), работа против сил трения $A = -mv_1^2/2$. Если же воспользоваться равенством (9.2), то $\alpha = \pi$, поскольку \mathbf{F} и \mathbf{s} в данном случае направлены противоположно друг другу и сама работа оказывается отрицательной.

При движении тел во внешних полях поле сил совершает над ними работу. Обратимся к случаю тел, находящихся в поле тяготения. Пусть тело оказалось на небольшой высоте x_1 над поверхностью Земли (рис. 9.1); естественно, при перемещении была затрачена работа mgx_1 по подъему тела на этот уровень. Предоставленное самому себе тело переместится в поле тяготения под действием его сил mg на новый уровень x_2 . В результате поле совершит работу

$$A = mg(x_1 - x_2)$$

или

$$A = -(mgx_2 - mgx_1). \quad (9.5)$$

Сравнивая (9.5) с (9.3), можно заключить, что тело, находясь в поле тяготения, должно обладать в различных его точках вполне определенным значением энергии. Энергию взаимодействующих тел (в данном случае рассматриваемого тела и Земли) называют *потенциальной*. В итоге (9.5) может быть записано в виде

$$A = -(U_2 - U_1), \quad (9.6)$$

где U — потенциальная энергия как функция координат.

Заметим, что формула (9.6) применима не только для случая полей тяготения, но имеет и более общее значение. Вид потенциальной энергии для взаимодействий различной природы естественно различен.

Полная энергия E систем складывается из кинетической T и потенциальной U энергий:

$$E = T + U. \quad (9.7)$$

Записывая (9.3), мы имели в виду именно полную энергию. Для замкнутых систем $A = 0$ и, следовательно, $E_2 = E_1$, т. е. их *полная энергия сохраняется*. В этом состоит закон сохранения энергии.

Однако энергия сохраняется не только для изолированных систем, но и для систем, находящихся во внешних полях, не изменяю-

щихся во времени. Рассмотрим вновь случай полей тяготения. Пусть покоящееся ($v_0 = 0$) тело находится на начальном уровне x_0 над поверхностью (рис. 9.2). В таком состоянии полная энергия тела сводится к его потенциальной энергии, т. е. $E_0 = mgx_0$. Найдём полную энергию тела в произвольный момент времени t при его падении. Для этого нужно знать его координату x_t и скорость v_t в этот момент. Из формул § 7 имеем

$$\left. \begin{aligned} v_t &= gt, \\ x_t &= x_0 - gt^2/2. \end{aligned} \right\}$$

Подставим эти значения v_t и x_t в выражение для полной энергии $E = T(v) + U(x)$, тогда

$$^{1/2}mv_t^2 + mgx_t = ^{1/2}m(gt)^2 + mg(x_0 - ^{1/2}gt^2) = mgx_0.$$

Таким образом, полная энергия в произвольный момент времени не отличается от первоначального значения.

9.2 Применения законов сохранения Приложение общих соотношений к конкретным случаям позволяет лучше осмыслить содержание общих закономерностей. Мы рассмотрим применения законов сохранения к задачам об упругом столкновении тел и о малых колебаниях тел. Эти случаи особенно важны в физике.

Упругие столкновения Будем моделировать две частицы шарами, размеры которых достаточно малы. Если столкновение частиц не сопровождается изменением внутреннего состояния самих частиц, то такое столкновение называют *упругим*. При применении закона сохранения энергии к упругому столкновению шаров не нужно учитывать изменения их внутренней энергии. Пусть столкновение шаров является центральным, т. е. происходит вдоль линии, соединяющей их центры (рис. 9.3). Массы шаров равны m_1 и m_2 , причём один из шаров покоится ($v_2 = 0$), а другой движется со скоростью v_1 . Необходимо найти скорости u_1 и u_2 шаров после столкновения.

В задаче два неизвестных, а значит, в нашем распоряжении должно быть два соотношения — ими явятся законы сохранения импульса и энергии. Выпишем их:

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ ^{1/2}m_1 v_1^2 &= ^{1/2}m_1 u_1^2 + ^{1/2}m_2 u_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Поскольку процесс столкновения является одномерным, система уравнений (9.8) выглядит так:

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ m_1 v_1^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Нужно решить эту систему уравнений. Преобразуем (9.9) к виду

$$\left. \begin{aligned} m_1 (v_1 - u_1) &= m_2 u_2, \\ m_1 (v_1^2 - u_1^2) &= m_2 u_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

В (9.10) делим второе уравнение на первое, тогда

$$v_1 + u_1 = u_2. \quad (9.11)$$



Рис. 9.3

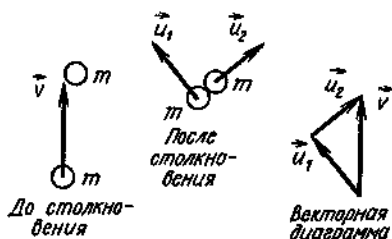


Рис. 9.4

Решаем уравнение (9.11) совместно с первым из (9.10), т. е. рассматриваем систему

$$\left. \begin{aligned} v_1 + u_1 &= u_2, \\ m_1 v_1 - m_1 u_1 &= m_2 u_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Подставляя здесь первое уравнение во второе, получаем

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1. \quad (9.13)$$

Используя (9.13) и первое уравнение из (9.12), запишем

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (9.14)$$

Таким образом, поставленная задача решена.

Чтобы полученные решения (9.13) и (9.14) сделать физически наглядными, рассмотрим одно их следствие: пусть массы шаров одинаковы $m_1 = m_2$, тогда из (9.13) и (9.14) вытекает, что $u_1 = 0$, $u_2 = v_1$. Другими словами, происходит «эстафетная» передача скорости между шарами.

В нашем рассмотрении силы взаимодействия в явном виде не вводились. Это означает, что полученное решение задачи на упругое столкновение пригодно для любых как угодно взаимодействующих объектов.

В качестве примера укажем на приложение полученного решения к задачам замедления нейтронов в ядерных реакторах. Вещество, не поглощающее нейтронов, эффективно замедляет их в том случае, если масса ядер этого вещества близка к массе нейтронов — эта рекомендация следует из нашего решения. На практике в качестве замедлителей используют, в частности, тяжелую воду. Масса ядер дейтерия только в два раза больше массы нейтронов.

Как происходят нецентральные столкновения шаров? Ясно, что в этом случае необходимо пользоваться системой векторных уравнений (9.8). Для простоты рассмотрим шары одинаковых масс (рис. 9.4). В этом случае (9.8) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} mv &= mu_1 + mu_2, \\ mv^2 &= mu_1^2 + mu_2^2, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \\ v^2 &= u_1^2 + u_2^2, \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

Уравнения (9.15) совместны, если только $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0$. Действительно, если первое уравнение возвести в квадрат, то получим второе при выполнении указанного условия. Но

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = u_1 u_2 \cos \alpha,$$

и так как $u_1 \neq u_2 \neq 0$, то $\cos \alpha = 0$, т. е. $\alpha = \pi/2$. Таким образом, векторы скоростей шаров после столкновения направлены под прямым углом друг к другу.

Систему уравнений (9.15) можно интерпретировать чисто геометрически (рис. 9.4). Векторный треугольник, построенный на векторах \mathbf{v} , \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , соответствует первому уравнению по закону сложения векторов, а также второму уравнению по теореме Пифагора, если только треугольник прямоугольный.

Малые колебания Однократное воздействие на подвешенное на нити тело приводит к его колебаниям вблизи положения устойчивого равновесия. При малых углах отклонения от вертикали маятник, предоставленный сам себе, довольно долго совершает периодическое движение. Этот факт есть не что иное, как следствие закона сохранения энергии. Ведь для систем, находящихся в поле тяготения, энергия сохраняется.

Рассмотрим колебания материальной точки массы m , подвешенной на нити длиной l (рис. 9.5). Выпишем порознь выражения для кинетической и потенциальной энергий. Последняя имеет вид $U(h) = mgh$, где $h = l - l \cos \varphi$,

$$\text{или} \quad U(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi), \quad (9.16)$$

причем $U(0) = 0$, т. е. мы принимаем, что в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю.

Введем в выражение для кинетической энергии $T = \frac{1}{2}mv^2$ угловую скорость $\Delta\varphi/\Delta t$. Так как $v = l(\Delta\varphi/\Delta t)$, то

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right)^2. \quad (9.17)$$

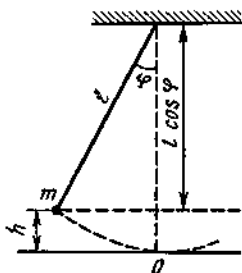


Рис. 9.5

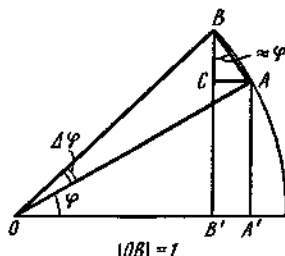


Рис. 9.6

Полная энергия запишется как

$$E = T + U = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right)^2 + m g l (1 - \cos \varphi). \quad (9.18)$$

В качестве простейшей периодической функции, которая могла бы описать колебания, т. е. описать зависимость угла φ от времени t , возьмем функцию синус:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t, \quad (9.19)$$

где φ_0 — максимальный угол отклонения от положения равновесия (амплитуда угла); ω — так называемая частота колебаний.

Для нахождения ω необходимо предварительно рассмотреть некоторые чисто математические вопросы. Найдем сперва выражение для $\Delta(\sin \varphi)$. По определению, $\Delta(\sin \varphi) = \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin \varphi$. Из геометрического построения (рис. 9.6) видно, что $\Delta(\sin \varphi) = |BC| = |BB'| - |AA'|$, с другой стороны, $|BC| = |AB| \cos \varphi$, само же $|AB| \approx \Delta\varphi$. В результате

$$\Delta(\sin \varphi) = \cos \varphi \Delta\varphi. \quad (9.20)$$

Покажем еще, что для малых углов

$$\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2. \quad (9.21)$$

В самом деле, из рис. 9.7 видно, что $\cos \varphi = |OA|$, но само $|OA| = \sqrt{|OB|^2 - |BA|^2} \approx \sqrt{1 - \varphi^2}$. По формуле же бинома Ньютона $(1 - \varphi^2)^{1/2} \approx 1 - \varphi^2/2$.

Вернемся к рассмотрению колебательного движения. Подставим выражение (9.19) в (9.18). Для этого предварительно необходимо вычислить $\Delta\varphi/\Delta t$: применяя к (9.19) операцию Δ , получим $\Delta\varphi = \varphi_0 \Delta(\sin \omega t)$; используя (9.20), запишем, что $\Delta\varphi = \varphi_0 \cos \omega t \cdot \Delta(\omega t) = \varphi_0 \omega \cos \omega t \cdot \Delta t$

или
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \varphi_0 \omega \cos \omega t. \quad (9.22)$$

В результате в (9.18) слагаемое, соответствующее кинетической энергии, примет вид

$$\frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \varphi_0^2 \cos^2 \omega t.$$

Используя (9.21) и (9.19), получим в (9.18) для потенциальной части энергии

$$\frac{1}{2} m g l \varphi_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Соединяя оба этих слагаемых, запишем выражение для полной энергии

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \varphi_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} m g l \varphi_0^2 \sin^2 \omega t. \quad (9.23)$$

Поскольку полная энергия в рассматриваемой системе сохраняется, она не должна зависеть от времени. Для этого необходимо положить

$$\omega^2 = g/l. \quad (9.24)$$

Действительно, подставляя (9.24) в (9.23), получим

$$E = \frac{1}{2} m g l \varphi_0^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t),$$

или, окончательно,

$$E = \frac{1}{2} m g l \varphi_0^2. \quad (9.25)$$

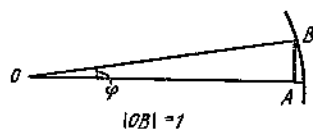


Рис. 9.7

Таким образом, введенный в (9.19) неизвестный параметр — частота колебаний — нами найден, он определяется выражением (9.24).

9.3 Универсальность законов сохранения. Момент импульса В 3.3 была показана связь свойств симметрии пространства и времени (а именно их однородности) с движением свободных тел по инерции. Но ведь для свободных тел выполняются законы сохранения импульса и энергии, причем из постоянства v в случае инерции следует и постоянство mv и $(m/2)v^2$. Отсюда, естественно, вытекает вывод о происхождении самих законов сохранения, а именно: они должны быть связаны со свойствами однородности пространства и времени. Это обстоятельство объясняет тот поразительный факт, что *законы сохранения импульса и энергии являются универсальными*, т. е. выполняются для физических объектов самой различной природы.

Наряду с однородностью пространство обладает свойством изотропии, т. е. физической неразличимостью всевозможных направлений в пространстве по отношению к свободным телам, или, более общо, по отношению к замкнутым системам. С этой симметрией пространства связан так называемый **закон сохранения момента импульса**. Момент импульса L , например, для материальной точки определяется как векторное произведение ее радиуса-вектора r на импульс p , т. е.

$$L = [rp]. \quad (9.26)$$

При этом

$$|L| = |r||p|\sin\alpha, \quad (9.27)$$

где α — угол между векторами r и p . Направление вектора L образует с направлениями векторов r и p , как говорят, их *правую тройку* (рис. 9.8). Это означает, что после совмещения двух векторов r и p в общее начало направление искомого вектора L определится направлением движения винта при вращении его головки на наименьший угол между r и p (если смотреть из общего начала).

Проиллюстрируем сохранение момента импульса и его следствия рядом примеров. Рассмотрим движение планеты по околосолнечной орбите (рис. 9.9). В этой задаче тело находится во внешнем поле, обладающем центральной симметрией, т. е. потенциальная энергия в нем зависит лишь от расстояния до некоторой точки (центра). В таком поле все направления в пространстве, проходящие через центр, являются эквивалентными, а значит, момент импульса относительно этого центра сохраняется. Далее, так как момент импульса — величина векторная, то его сохранение означает, что указанное движение тела должно происходить в плоскости, перпендикулярной направлению момента.

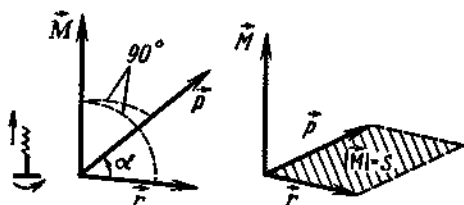


Рис. 9.8

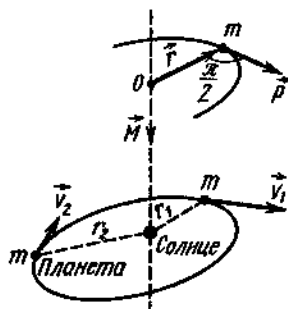


Рис. 9.9

В этой задаче угол между \vec{r} и \vec{p} равен $\pi/2$, т.е. модуль момента импульса запишется как

$$L = rp = rmv. \quad (9.28)$$

Отсюда ясно, что скорость v движения тела по эллиптической орбите меняется вместе с изменением r (рис. 9.9).

Если в (9.28) использовать связь между линейной v и угловой $\omega = \Delta\phi/\Delta t$ скоростями

$$v = \omega r, \quad (9.29)$$

то выражение для момента импульса примет вид

$$L = m\omega r^2. \quad (9.30)$$

Эта формула позволяет, в частности, понять такие явления, как увеличение угловой скорости при сжатии вращающихся систем.

В заключение этого параграфа отметим, что практическое значение указанных законов сохранения в механике состоит в том, что они позволяют находить такие связи между величинами, которые не зависят от характера взаимодействия объектов, а значит, являются весьма общими.

§ 10. ПРЕДЕЛЬНАЯ СКОРОСТЬ. МЕХАНИКА ЧАСТИЦ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

10.1 Эксперименты на ускорителях и предельная скорость С момента открытия основных законов движения Ньютоном область их применения все больше расширялась. Классическая механика превосходно описывала всевозможные движения обычных тел; ее представления о движении были перенесены на космические объекты, и здесь — мы имеем в виду движение планет солнечной системы — она добилась выдающихся результатов. Перейдем теперь совсем в другой мир — область тепловых явлений, когда тела (речь идет о газах) рассматриваются как совокупности огромного числа молекул. Оказывается очень многое здесь можно понять, если предположить, что

движение отдельных молекул подчиняется законам классической механики.

Однако триумфальное шествие механики Ньютона было остановлено. Нашлись такие группы явлений, для которых классическая механика была слишком грубой или просто непригодной. Чтобы четко представить себе границы применимости ньютоновской механики, обратимся к данным эксперимента по ускорению элементарных частиц.

Тебе, читатель, хорошо известно, что в настоящее время в целом ряде стран существуют или строятся большие инженерно-физические сооружения — ускорители элементарных частиц. В них заряженные частицы, протоны или электроны, разгоняют с помощью электромагнитного поля до огромных скоростей. Сталкивая высокоэнергичные частицы, исследователи пытаются «прощупать» очень малые пространственные области, в которых разыгрываются процессы рождения и «гибели» элементарных частиц, — мир, во многом загадочный и хранящий глубокую и важную «тайну».

При постепенном увеличении кинетической энергии T ускоряемых частиц их скорость v вначале растет, подчиняясь обычному соотношению $T = (m/2)v^2$ (рис. 10.1). Однако дальнейшее увеличение энергии частицы сопровождается резко замедляющимся ростом ее скорости. При тех гигантских энергиях, которые достигнуты на современных ускорителях, частицы практически перестали увеличивать свою скорость, приблизившись к значению $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Это своеобразная предельная скорость, которую мы будем обозначать c .

10.2 Преобразования Лоренца Существование предельной скорости находится в разительном противоречии с законом сложения скоростей (5.3) классической механики. Но ведь (5.3) вытекает из преобразований Галилея, отражающих свойства преобразований пространства и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Таким образом, открытие предельной скорости c выявляет новые стороны в свойствах пространства и времени при движении тел и частиц со скоростями, сравнимыми с c .

Опыт показывает, что принцип относительности остается неизменным, а значит, должны быть уточнены трансформационные (т. е. связанные с преобразованиями координат и времени) свойства пространства и времени в области высоких энергий. Другими словами, преобразования Галилея должны быть заменены другим классом преобразований, которые, однако, обязаны содержать галилеевские преобразования как предельный случай, когда скорости $v \ll c$. Конечно же, эти новые преобразования должны совершенно естественно учитывать наличие в природе предельной скорости c . Указанные преобразования имеют вид (см. также рис. 5.1):

$$x = \frac{x' + \sqrt{t'}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (10.1)$$

Это так называемые *преобразования Лоренца*, имеющие в современной физике фундаментальное значение.

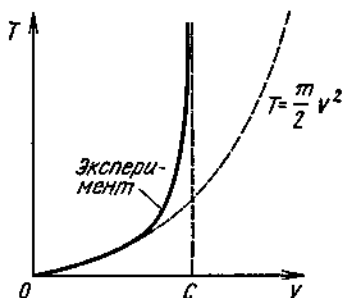


Рис. 10.1

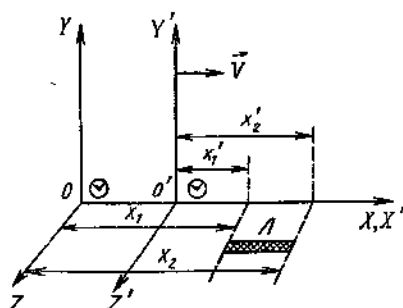


Рис. 10.2

Из (10.1) следует, что: 1) нельзя связывать инерциальную систему отсчета с объектами, имеющими скорость $V = c$; 2) при $V > c$ преобразования (10.1) становятся мнимыми; 3) если $V \ll c$, то (10.1) переходит в (5.1), т. е. законы классической механики Ньютона справедливы при скоростях движения тел, много меньших предельной скорости c .

Механику, учитывающую наличие предельной скорости c , называют *релятивистской*.

Расстояния и промежутки времени в теории относительности
Пусть в инерциальной системе отсчета (X, Y, Z) покоится линейка L , параллельная оси X (рис. 10.2). Длина ее, измеренная в этой системе отсчета, $\Delta x = x_2 - x_1$. Найдем длину линейки в движущейся инерциальной системе отсчета (X', Y', Z') . Для этого надо найти координаты обоих концов линейки (x'_2 и x'_1) в этой системе отсчета в один и тот же момент времени t' . Из (10.1) имеем

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

откуда

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

или

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (10.2)$$

Из (10.2) следует, что $\Delta x' \rightarrow 0$ при $V \rightarrow c$. С точки зрения движущихся систем отсчета размеры тел или расстояния между двумя точками в пространстве уменьшаются. При $V \ll c$ (10.2) переходит в классическое соотношение (5.2) $\Delta x' = \Delta x$.

Пусть теперь в системе отсчета (X', Y', Z') покоятся часы. Рассмотрим два события, происшедшие в одном и том же месте x' в этой системе отсчета. Время между событиями есть $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Найдем время Δt , которое прошло между этими же событиями в системе отсчета (X, Y, Z) . Из (10.1) имеем

$$t_1 = \frac{t'_1 + (V/c^2) x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (V/c^2) x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

откуда

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (10.3)$$

Теперь времени у движущихся часов замедляется. При $V \ll c$ (10.3) переходит в (5.2), т. е. $\Delta t = \Delta t'$.

В качестве иллюстрации обратимся к экспериментам с элементарными частицами. Известно, что большинство из них нестабильные. Так, заряженный π^+ -мезон имеет среднее время жизни $\Delta t' \approx 2,5 \cdot 10^{-8}$ с. Это так называемое *собственное среднее время жизни* частицы, оно определяется для покоящейся частицы. Если же рассматривать пучок π^+ -мезонов, образуемых на ускорителе, то среднее время жизни Δt этих частиц, измеряемое экспериментатором, станет возрастать в соответствии с (10.3).

Приведем результаты конкретных измерений. Если бы отсутствовала релятивистская зависимость среднего времени жизни частиц от состояния движения, то π^+ -мезоны, прежде чем испытать распад $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, проходили бы расстояние

$$L = (2,5 \cdot 10^{-8} \text{ с}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ м/с}) \approx 7,5 \text{ м}$$

(скорость движения π^+ -мезонов близка к предельной скорости c).

Данные эксперимента таковы (табл. 10.1):

Таблица 10.1

V	Δt , с	L , м
0	$2,5 \cdot 10^{-8}$	
0,9c	$5,7 \cdot 10^{-8}$	15,4
0,99995 c	$2,5 \cdot 10^{-6}$	750

Проверим значения Δt , например, при $V/c = 0,9$. Согласно (10.3)

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \Delta t = \frac{2,5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - 0,9^2}} \text{ с} \approx 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

Из табл. 10.1 видно, что среднее время жизни частиц в пучке может возрастать в сотни раз.

Закон преобразования скоростей в релятивистской механике Пусть $v_x = \Delta x / \Delta t$ — скорость частицы в системе отсчета (X, Y, Z) , а $v'_x = \Delta x' / \Delta t'$ — скорость той же частицы в системе отсчета (X', Y', Z') . Найдём связь между ними. Из (10.1) имеем

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + V \Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + (V/c^2) \Delta x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

или

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + V \Delta t'}{\Delta t' + (V/c^2) \Delta x'}.$$

Поделив числитель и знаменатель правой части этого равенства на $\Delta t'$, получим

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (10.4)$$

Это и есть закон сложения скоростей в релятивистской механике. При $V \ll c$ (10.4) переходит в (5.3) $v_x = v'_x + V$.

В порядке иллюстрации, рассмотрим следующие примеры: 1) при $v'_x = c$ из (10.4) получим, что $v_x = c$; 2) при $v'_x = c$ и $V = c$ из (10.4) следует, что $v_x = c$.

10.3 Релятивистские энергия и импульс Поставим задачу о нахождении выражений для релятивистских энергии и импульса частицы. Значения импульса \mathbf{p} и энергии E частицы зависят от выбора системы отсчета. Однако может существовать такая комбинация \mathbf{p} , E и релятивистской постоянной c , которая не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, тоже инерциальной системе отсчета. Прежде всего такая комбинация указанных величин должна быть скаляром (числом), ибо любой скаляр есть инвариант (неизменная величина) по отношению к преобразованиям Лоренца.

Из трех величин \mathbf{p} , E и c последние две являются скалярными; квадрат вектора импульса p^2 также является скаляром. При этом сама связь между p^2 , E и c легко находится из соображений размерности. А именно

$$E^2 \sim p^2 c^2.$$

В итоге инвариантом явится

$$E^2 - p^2 c^2 = (E')^2 - (p')^2 c^2 = \text{const}. \quad (10.5)$$

Как определится сама константа? В механике характеристикой частицы, не зависящей от выбора системы отсчета, является ее масса m . Так как мы рассматриваем релятивистский случай движения, то в константу должна войти и постоянная c . Кроме того, константа, согласно (10.5), должна иметь размерность квадрата энергии. В результате

$$\text{const} \sim (mc^2)^2.$$

Таким образом, для релятивистской частицы мы получили необычайно важное соотношение

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (10.6)$$

Проанализируем его. При $p = 0$, т. е. для заведомо покоящейся частицы, имеем

$$E = mc^2. \quad (10.7)$$

Это означает, что энергия свободной частицы при $v = 0$ отлична от нуля. Результат необычный, поскольку этого нет в механике Ньютона.

Таким образом, кинетическая энергия частицы в случае $v \ll c$ должна иметь вид

$$E \approx mc^2 + mv^2/2. \quad (10.8)$$

Найденные формулы (10.7) и (10.8) позволяют восстановить выражение для релятивистской энергии частицы, а именно

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (10.9)$$

Действительно, при $v = 0$ из (10.9) следует (10.7). При $v \ll c$ к корню квадратному в (10.9) можно применить формулу бинорма Ньютона, тогда с точностью до членов v^4/c^4 получим (10.8).

Наконец, подставляя (10.9) в общее соотношение (10.6), получим, например, для компонента p_x импульса выражение

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

или в векторной записи

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (10.10)$$

В предельном случае $v \ll c$, из (10.10) следует выражение для классического импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Отметим, что только выражения (10.9) и (10.10) могут вести к выполнению законов сохранения энергии и импульса в релятивистском случае. При этом связь (10.7) называют *энергией покоя частицы*.

Рассмотрим теперь сложное тело, состоящее из совокупности частиц. Пусть это тело, как целое, покоится; тогда его энергия равна Mc^2 , где M — полная масса тела. Энергия покоя тела Mc^2 меньше суммарной энергии покоя $\sum_a m_a c^2$ для свободных частиц с массами m_a , т. е. закон сохранения массы нарушается. Однако закон сохранения полной энергии, включающей энергию покоя частиц, выполняется.

Для *дефекта массы* ΔM введем определение

$$\Delta M = \sum_a m_a - M. \quad (10.11)$$

Энергия связи

$$\Delta E = -c^2 \Delta M \quad (10.12)$$

для устойчивых стабильных тел должна быть величиной отрицательной.

В дальнейшем, на примере ядерных реакций синтеза, мы увидим, как используются приведенные соотношения.

10.4 Роль релятивистской постоянной c в физике Открытие существования в природе предельной скорости c указало на границы применимости представлений классической механики. Закономерности механики Ньютона точны и справедливы до тех пор, пока скорости движения $v \ll c$.

Уравнения движения классической механики были инвариантными относительно преобразований Галилея. Этот математический «факт» являлся выражением принципа относительности в применении к законам

движения в ньютоновской механике. Однако переход в области скоростей $v \sim c$ от преобразований Галилея к преобразованиям Лоренца, а также требование справедливости принципа относительности в этой области приводят к тому, что законы движения при больших скоростях должны стать другими. Так возникла новая *релятивистская механика*, уравнения которой инвариантны относительно преобразований Лоренца и которая в случае малых скоростей автоматически переходит в классическую механику. В релятивистской механике, в частности, у частиц с массой $m \neq 0$ при стремлении их скорости $v \rightarrow c$ энергия неограниченно возрастает, см. (10.9).

Опыт показал, что *взаимодействия между объектами передаются не мгновенно, а с конечной, хотя и очень большой, скоростью*. Это относится в равной степени как к электромагнитным, так и к гравитационным взаимодействиям. В результате понятие поля из чего-то «словесного» превращается в реальность. Но самым удивительным является то, что скорость распространения взаимодействий (полей) совпадает с предельной скоростью c . Поскольку же скорость распространения поля характеризует само явление взаимодействия, она должна быть одинаковой во всех инерциальных системах отсчета. Если бы это было не так, то нарушился бы принцип относительности, т. е. можно было бы отличить одну инерциальную систему отсчета от другой. Таким образом, величина c является универсальной постоянной (*релятивистская постоянная*).

Наличие релятивистской постоянной указало на парадоксальные свойства пространства и времени в области скоростей движения, сравнимых с c : размеры тел и промежутки времени оказались относительными, т. е. зависящими от выбора системы отсчета. Более того, наличие релятивистской постоянной c означает, что между пространством и временем появляется связь

$$c \Delta t = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}. \quad (10.13)$$



Выражение (10.13) легко получить, если заметить, что величина $c \Delta t$ есть не что иное, как расстояние между двумя близкими точками пространства.

Релятивистские принципы, четко сформулированные в начале XX в. Эйнштейном, находят сейчас самое широкое применение в физике частиц высоких энергий. Представления о поле и его законах также основаны на идеях релятивизма; основанием для этого служит факт совпадения релятивистской постоянной со скоростью распространения свободных электромагнитных полей в пространстве, в частности со скоростью света.

ГЛАВА III ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ*



§ 11. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД

Не все элементарные частицы являются источником электромагнитного поля. Частицам, которые создают такого рода поля, мы приписываем определенное значение электрического заряда** e .

Заряд e наряду с массой m является важнейшей характеристикой частицы. Поводом для этого является то обстоятельство, что заряд, как и масса, есть величина инвариантная, т. е. его значение не зависит от выбора системы отсчета.

Существуют два рода электрических зарядов, которые мы условно делим на положительные и отрицательные. Законы физики не изменяют своего вида при замене всех положительных зарядов на отрицательные и наоборот. Иначе говоря, физические законы симметричны по отношению к операции $e \rightarrow -e$.

Для замкнутых систем частиц выполняется закон сохранения электрического заряда

$$\sum_i e_i^+ - \sum_i e_i^- = \text{const.} \quad (11.1)$$

* Эта глава написана с использованием системы СГС.

** Такое утверждение не абсолютно правильно. Очень не просто сформулировать положения касающиеся электрического заряда. Так, например, у нейтрона электрический заряд с большой точностью равен нулю, наличие же у него магнитного момента указывает на то, что эта частица обладает сложной внутренней структурой и что внутри нее существуют электрические токи. В результате нейтрон обладает собственным магнитным полем.

Заметим, что у всех заряженных элементарных частиц числовые значения их зарядов являются наименьшими и одинаковыми:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \approx 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. заряда СГСЭ.}$$

О способе установления единицы заряда мы расскажем в дальнейшем.

§ 12. СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ПОЛЯ

12.1 Уравнения движения заряда в поле О свойствах электромагнитного поля мы судим по тому воздействию, которое оно оказывает на движущиеся в нем заряженные частицы. Движение зарядов в поле таково, что оно может быть описано как действие в каждой точке пространства на заряд Q двух совершенно не похожих сил: одна сила F_e способна ускорять или замедлять движение заряда и совершенно не зависит от его скорости; другая сила F_m направлена перпендикулярно скорости, причем зависит от отношения скорости v заряда к скорости распространения c электромагнитного поля. Обе указанные силы пропорциональны заряду. В результате на точечный заряд Q (понятие аналогичное материальной точке) действуют силы:

$$F_e = QE \text{ и } F_m = Q \left[\frac{v}{c} H \right], \quad (12.1)$$

где E и H — так называемые *напряженности* соответственно *электрического* и *магнитного* полей.

В итоге уравнения движения заряда в электромагнитном поле могут быть записаны как

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = QE + Q \left[\frac{v}{c} H \right], \quad (12.2)$$

где правая часть в целом носит название *силы Лоренца*. Существенно, что в (12.2) входит скорость c распространения электромагнитного взаимодействия, а p , в общем случае, является релятивистским импульсом заряженной частицы, см. (10.10).

12.2 Законы преобразования полей Согласно принципу относительности уравнения движения (12.2) не должны менять своего вида при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. В частности, выражение для силы Лоренца

$$F = QE + Q \left[\frac{v}{c} H \right] \quad (12.3)$$

может лишь перейти в

$$F' = QE' + Q \left[\frac{v'}{c} H' \right]. \quad (12.4)$$

Ясно, что для этого закон преобразования полей

$$E \rightarrow E' \text{ и } H \rightarrow H'$$

должен быть весьма определенным. Так, в случае $V \ll c$, где V — относительная скорость двух инерциальных систем отсчета (см. рис.

10.2), это преобразование (с точностью до членов порядка V/c) имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} [\mathbf{E}'\mathbf{V}], \quad (12.5)$$

а $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$.

Убедимся в этом. Подставим (12.5) в (12.3), тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= Q \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{H}'\mathbf{V}] \right) + Q \left[\frac{\mathbf{v}' + \mathbf{V}}{c} \left(\mathbf{H}' - \frac{1}{c} [\mathbf{E}'\mathbf{V}] \right) \right] = \\ &= Q\mathbf{E}' + \frac{Q}{c} [\mathbf{H}'\mathbf{V}] + Q \left[\frac{\mathbf{v}'}{c} \mathbf{H}' \right] + \frac{Q}{c} [\mathbf{V}\mathbf{H}'] + \text{малые члены порядка } (V/c)^2. \end{aligned}$$

Если учесть, что векторное произведение меняет знак при перестановке векторов, то полученное выражение сводится к (12.4).

Рассмотрим некоторые следствия преобразований (12.5). Если в системе отсчета (X', Y', Z') напряженность магнитного поля $\mathbf{H}' = 0$, то согласно (12.5) между электрическим и магнитным полями в системе отсчета (X, Y, Z) существует соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{E}]. \quad (12.6)$$

Если же в системе (X', Y', Z') напряженность электрического поля $\mathbf{E}' = 0$, то в системе (X, Y, Z)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{H}]. \quad (12.7)$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля относительны, т. е. их свойства различны в разных системах отсчета. В частности, напряженности электрического или магнитного поля могут быть равны нулю в одной системе отсчета и в то же время присутствовать в другой системе.

Обобщением полевых преобразований (12.5) на случай скоростей V , сравнимых с c , являются следующие формулы преобразования электрического и магнитного полей:

$$E_x = E'_x; \quad E_y = \frac{E'_y + (V/c) H'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad E_z = \frac{E'_z - (V/c) H'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (12.8)$$

$$H_x = H'_x; \quad H_y = \frac{H'_y - (V/c) E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad H_z = \frac{H'_z + (V/c) E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (12.9)$$

Предельный переход в (12.8) и (12.9) к $V \ll c$ дает формулы (12.5), записанные в компонентах.

§ 13. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

13.1 Новые объекты и новая математика Состояние материальной точки задавалось ее положением в пространстве и ее скоростью. Такой способ описания непригоден для электромагнитных полей. Поле определено, если для каждой точки пространства известны значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Причем в общем случае векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} являются функциями не только координат \mathbf{r} , но и времени t , т. е. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.

При описании векторных полей, в частности полей электромагнитных, очень удобными оказываются понятия *потока* и *циркуляции* поля. Если в векторном поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ провести мысленно некоторую поверхность S (рис. 13.1), то в каждой точке этой поверхности вектор \mathbf{A} должен иметь определенную ориентацию и значение. Рассмотрим для каждого из векторов \mathbf{A} его проекцию A_n на внешнюю нормаль к поверхности, построенную для точки основания вектора. Тогда *

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Поток векторного поля } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \text{через поверхность } S \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{l} \text{Средняя} \\ \text{нормальная} \\ \text{компонента} \\ \text{вектора } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \text{Площадь} \\ \text{поверхности } S \end{array} \right) = \\ &= \langle A_n \rangle S. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Для того чтобы сконструировать понятие циркуляции поля, проведем мысленно в векторном поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ некоторый замкнутый контур l . В каждой точке контура существует вектор \mathbf{A} (рис. 13.2). Рассмотрим для каждого из векторов его проекцию A_t на касательное направление к контуру (с учетом ее знака по отношению к направлению обхода контура). Тогда

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Циркуляция} \\ \text{векторного поля } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \text{вдоль контура } l \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{l} \text{Средняя} \\ \text{касательная} \\ \text{составляющая} \\ \text{вектора } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \text{Длина} \\ \text{пути} \\ \text{обхода } l \end{array} \right) = \\ &= \langle A_t \rangle l. \end{aligned} \quad (13.2)$$

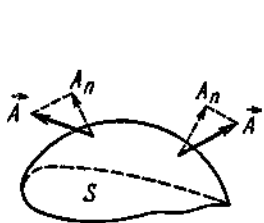


Рис. 13.1

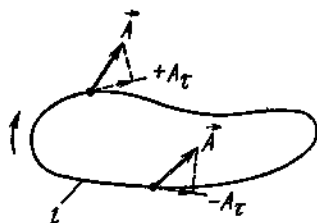


Рис. 13.2

* Здесь и далее угловыми скобками мы будем обозначать средние значения величин.

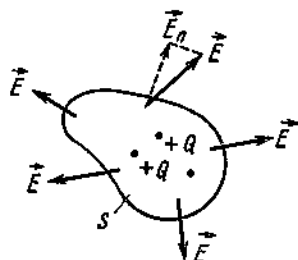


Рис. 13.3

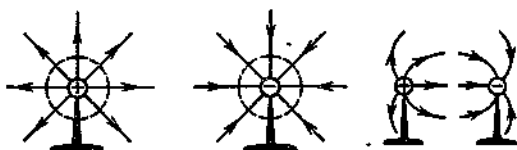


Рис. 13.4

С помощью понятий потока и циркуляции сформулируем основные законы электромагнитного поля и дадим по возможности их экспериментальное обоснование.

13.2 Первое уравнение поля. Связь электрического поля с электрическими зарядами Формулировка первого уравнения поля состоит в следующем (рис. 13.3):

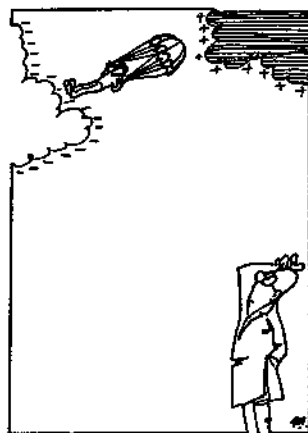
$$\left(\begin{array}{l} \text{Поток напряженности } E \\ \text{электрического поля} \\ \text{через любую замкнутую} \\ \text{поверхность } S \end{array} \right) = 4\pi \left(\begin{array}{l} \text{Заряд} \\ \text{внутри} \\ \text{поверхности} \end{array} \right)$$

или

$$\langle E_n \rangle S_{\text{замкнутая}} = 4\pi \sum_i Q_i. \quad (13.3)$$

Уравнение (13.3) означает, что *заряды являются источником электрического поля*.

Для того чтобы уравнение (13.3) сделать наглядным, вводят понятие силовых линий поля как линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением поля; густота же расположения силовых линий пропорциональна напряженности поля. В этой связи школьные эксперименты с султанами* (рис. 13.4) являются весьма полезными. Они позволяют заключить, что силовые линии электрического поля начинаются и оканчиваются на зарядах или уходят в бесконечность.



* Султаны, как известно, представляют собой пачку бумажных узких полосок, закрепленных одним концом в вершине изолирующего штатива. Электрический заряд передается султану от наэлектризованной палочки или от электрофорной машины (электростатического генератора). У уединенного заряженного султана бумажные полоски принимают радиальное расположение. Взаимная конфигурация полосок в пространстве между парой заряженных (одноименно или разноименно) султанов дает представление о характере электрического поля.



13.3 Второе уравнение поля. Отсутствие магнитных зарядов. Это уравнение имеет вид (рис. 13.5)

$$\left(\begin{array}{l} \text{Поток напряженности } \vec{H} \\ \text{магнитного поля} \\ \text{через любую замкнутую} \\ \text{поверхность } S \end{array} \right) = 0$$

$$\langle H_n \rangle S_{\text{замкнутая}} = 0. \quad (13.4)$$

Смысл (13.4) заключается в том, что магнитных зарядов в природе не существует. Магнитные силовые линии нигде не начинаются и не оканчиваются — они всегда замкнуты.

13.4 Третье уравнение поля. Связь тока и «чего-то» с вихревым магнитным полем. Формулировка этого уравнения состоит в следующем (рис. 13.6):

$$\left(\begin{array}{l} \text{Циркуляция напряженности } \vec{H} \\ \text{магнитного поля вдоль} \\ \text{замкнутого произвольного} \\ \text{контура } l \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Электрический ток} \\ \text{через поверхность } S, \\ \text{опирающуюся} \\ \text{на контур } l \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Неизвестный} \\ \text{пока член} \end{array} \right)$$

или
$$\langle H_t \rangle l = \frac{4\pi}{c} \langle j_n \rangle S + (\text{«что-то»}). \quad (13.5)$$

В (13.5) входит нормальная составляющая вектора плотности электрического тока $\vec{j} = \rho \vec{v}$, где ρ — число зарядов в единичном объеме, а \vec{v} — скорость заряда в данной точке поверхности.

Из уравнения (13.5) видно, что источником вихревого магнитного поля являются движущиеся электрические заряды. Рассмотрение же движения зарядов требует учета релятивистской постоянной c . Природа неизвестного члена в уравнении (13.5) будет рассмотрена в дальнейшем.

Эксперимент по проверке (13.5) можно поставить на электронно-лучевой трубке (рис. 13.7). При прохождении пучка электронов желез-

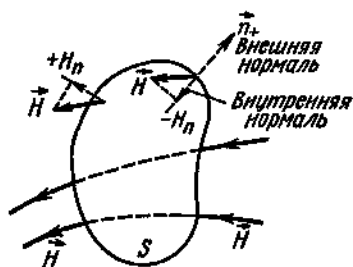


Рис. 13.5

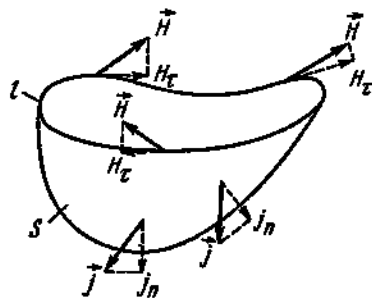


Рис. 13.6

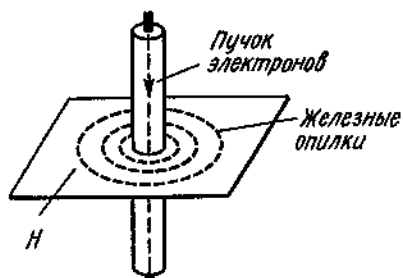


Рис. 13.7

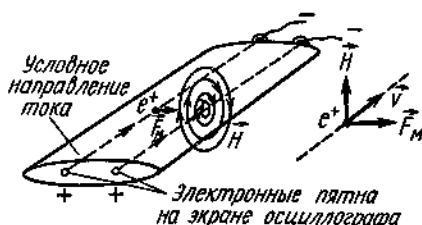


Рис. 13.8

ные опилки группируются по концентрическим окружностям — вдоль линий напряженности H магнитного поля. Сам же факт образования электронного пучка в трубке говорит о том, что заряды ускоряются в электрическом поле согласно $F_z = eE$.

Экспериментально наличие магнитной составляющей силы Лоренца $F_M = e[(v/c)H]$ можно наблюдать на двухлучевом осциллографе (рис. 13.8). Включив каждую из электронных пушек по отдельности, отметим положение световых пятен на экране. Если же оба луча включить одновременно, пятна сблизятся (на рис. 13.8 для удобства применения правила левой руки вместо электронов e^- изображены частицы с противоположным зарядом e^+ , движущиеся в противоположную сторону).

13.5 Четвертое уравнение поля. Связь переменного магнитного поля с вихревым электрическим Это уравнение формулируется так (рис. 13.9):

$$\left(\begin{array}{l} \text{Циркуляция напряженности } E \\ \text{электрического поля} \\ \text{по контуру } l \end{array} \right) = - \frac{1}{c} \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\begin{array}{l} \text{Поток напряженности } H \\ \text{магнитного поля} \\ \text{сквозь поверхность } S, \\ \text{опирающуюся на контур } l \end{array} \right)$$

или
$$\langle E_z \rangle l = - \frac{1}{c} \frac{\Delta}{\Delta t} \langle H_n \rangle S. \quad (13.6)$$

В (13.6) магнитное поле является функцией времени. Для переменных же полей всегда существенно учитывать скорость распространения c самих полей. Из этого уравнения видно, что *изменяющееся магнитное поле может порождать вихревое электрическое поле*.

Особенно четко уравнение (13.6) демонстрируется на ускорительных установках типа бетатрон (рис. 13.10). Вакуумную трубку помещают в быстро нарастающее магнитное поле, в результате в самой трубке возникает вихревое электрическое поле, которое ускоряет инжектируемые в трубку электроны.

13.6 Дополнительный анализ третьего уравнения поля. Связь переменного электрического поля с вихревым магнитным Поля E и H являются функциями координат r и времени t . Система уравнений (13.3) — (13.6) является полной, если она позволяет найти $E(r, t)$ и

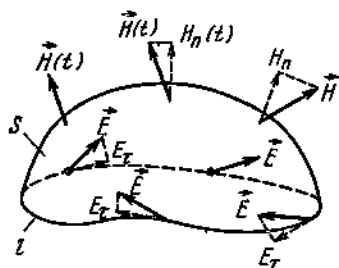


Рис. 13.9

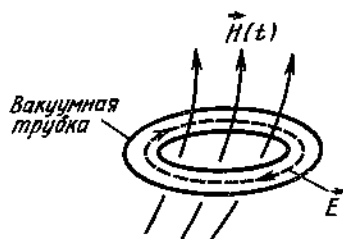


Рис. 13.10

$\vec{H}(\vec{r}, t)$. Уравнения (13.3) и (13.4) дают $\langle E_n \rangle$ и $\langle H_n \rangle$ как функции координат; уравнения (13.5) и (13.6) — пространственную зависимость $\langle H_r \rangle$ и $\langle E_r \rangle$. Зависимость $\langle H_n \rangle$ от времени входит в уравнение (13.6); в результате неизвестный член в (13.5) должен определять зависимость $\langle E_n \rangle$ от времени.

Каков вид неизвестного члена в (13.5)? Прежде всего все выражения в (13.3) — (13.6), зависящие от времени, содержат c (скорость распространения электромагнитного поля) и это вполне естественно. Исходя из соображений симметрии и размерности, можно заключить, что указанный член должен иметь вид

$$\frac{1}{c} \frac{\Delta}{\Delta t} \langle E_n \rangle S.$$

Таким образом, третье уравнение поля окончательно запишем так:

$$\langle H_r \rangle l = \frac{4\pi}{c} \langle j_n \rangle S + \frac{1}{c} \frac{\Delta \langle E_n \rangle S}{\Delta t}. \quad (13.7)$$

Графическая иллюстрация уравнения (13.7) дана на рис. 13.11. Из уравнения (13.7) вытекает, что *вихревое магнитное поле создается не только токами зарядов, но и переменным электрическим полем.*

Слагаемое $(1/c) \Delta \langle E_n \rangle S / \Delta t$ в (13.7) вполне отчетливо проявляет себя в опытах с электрическими цепями переменного тока, содержащими конденсаторы. Эти эксперименты рассмотрены в гл. VII.

13.7 Уравнения Максвелла Четыре рассмотренных уравнения поля (13.3), (13.4) и (13.6), (13.7) представляют собой единую систему так называемых *уравнений Максвелла*. Из уравнений Максвелла можно полностью определить электромагнитное поле, если известны расположение и движение электрических зарядов. Эти уравнения, к которым должна быть добавлена формула для силы Лоренца (12.3), являются выражением наиболее общих законов электромагнитных явлений и описывают всю область электромагнетизма.

Интересно отметить, что закон сохранения электрических зарядов содержится в уравнениях Максвелла. Из уравнений Максвелла и уравнения движения заряда в электромагнитном поле (12.2) можно получить выражения для энергии и импульса поля. В замкнутой системе частица — поле сохраняются полный импульс и суммарная энергия частицы и поля.

Уравнения Максвелла удовлетворяют принципу относительности: они инвариантны относительно преобразований Лоренца, см. (10.1). Заметим, что исторически последние были найдены именно из требования неизменности уравнений электромагнитного поля в различных инерциальных системах отсчета.

Важной особенностью электромагнитных полей является то обстоятельство, что для них выполняется так называемый **принцип суперпозиции**:

результатирующее поле, созданное совокупностью движущихся зарядов, представляется в виде суммы (векторной) полей отдельных зарядов. Другими словами, при наложении полей отсутствует их влияние друг на друга. Уравнения Максвелла удовлетворяют принципу суперпозиции.

Нашей дальнейшей задачей является рассмотрение ряда следствий общих законов электромагнетизма и их приложений. Приложения позволяют сделать общие законы более рельефными и почти осязаемыми.

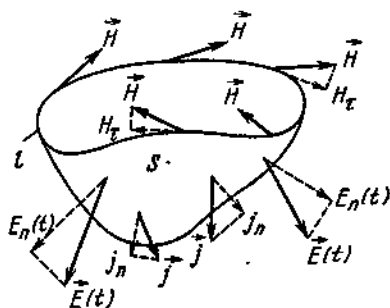


Рис. 13.11

§ 14. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Постоянные электрические поля необходимо рассматривать на основе первого уравнения поля (13.3).

14.1 Поле покоящегося точечного заряда Это поле обладает очевидной центральной симметрией с центром в точке нахождения заряда Q (рис. 14.1). В любом месте мысленно проведенной в поле сферической поверхности площади S должно выполняться равенство $E_n = E$. Поскольку E одинаково во всех точках сферы радиуса r , то $\langle E_n \rangle = E$. В результате уравнение поля (13.3) запишется как $ES = 4\pi Q$ или $E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi Q$, т. е.

$$E = Q/r^2. \quad (14.1)$$

Это электростатическое поле неподвижного точечного заряда. В применении к электронам справедливость соотношения (14.1) проверена экспериментально вплоть до расстояний порядка 10^{-16} м.

14.2 Поля зарядов, распределенных по сфере, линии, плоской поверхности Найдем напряженность E поля заряженной сферы радиуса R с суммарным зарядом Q . Имея в виду в данном случае сферическую симметрию поля, построим две вспомогательные поверхности: одну S_1 с радиусом r вне заряженной сферы, другую S_2 внутри сферы с зарядом Q (рис. 14.2). Для поверхности S_1 уравнение поля (13.3) запишем в виде $E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi Q$, т. е.

$$E = Q/r^2. \quad (14.2)$$

Для поверхности S_2 из (13.3) получим $ES_2 = 0$, поскольку зарядов

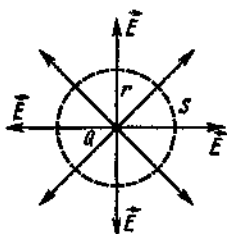


Рис. 14.1

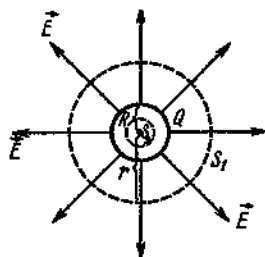


Рис. 14.2

внутри S_2 нет. Таким образом, поле внутри заряженной сферы отсутствует.

Вычислим E для зарядов, расположенных вдоль прямой линии. Пусть ρ — линейная плотность распределенных зарядов. Электрическое поле в этой задаче обладает осевой симметрией, ось симметрии направлена вдоль линии расположения зарядов (рис. 14.3). Построим замкнутую цилиндрическую поверхность, у которой S_1 — площади верхнего и нижнего оснований, а S_2 — площадь боковой поверхности. Поток E сквозь поверхности S_1 отсутствует, а сквозь поверхность S_2 , согласно (13.3), составляет $E \cdot 2\pi r \cdot h = 4\pi r h$, где h — высота цилиндрической поверхности, а r — ее радиус. В итоге

$$E = 2\rho/r. \quad (14.3)$$

Найдем теперь напряженность E поля, создаваемого зарядами, расположенными в плоскости с поверхностной плотностью зарядов σ (рис. 14.4). Из соображений симметрии следует, что вектор напряженности E электрического поля направлен перпендикулярно плоскости. Для определения E построим вспомогательную замкнутую цилиндрическую поверхность с основаниями S_1 и боковой поверхностью S_2 . Вектор E скользит вдоль образующей цилиндра и его поток сквозь S_2 равен нулю. Поток же сквозь оба основания S_1 , согласно (13.3), определится как $E \cdot 2\pi r^2 = 4\pi\sigma \cdot \pi r^2$, т. е.

$$E = 2\pi\sigma. \quad (14.4)$$

Поле равномерно заряженной неограниченной плоскости является однородным во всем пространстве, причем его направление по обе стороны плоскости противоположно.

Наконец, определим напряженность E поля, создаваемого разноименными зарядами, расположенными на двух параллельных друг другу неограниченных плоскостях при условии, что поверхностная плотность зарядов σ одинакова (рис. 14.5). Силовые линии E выходят из положительно заряженной поверхности и входят в поверхность с отрицательными зарядами (на рис. 14.5 напряженность поля, создаваемого положительно заряженной поверхностью, обозначена E^+ , а E^- — напряженность поля, создаваемого отрицательно заряженной поверхностью). Из рисунка видно, что поле вне поверхности полностью

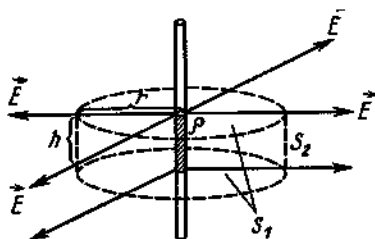


Рис. 14.3

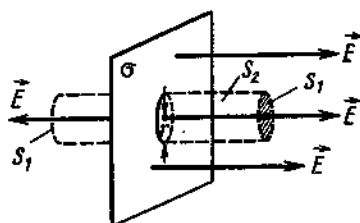


Рис. 14.2

гасится, а между поверхностями удваивается. Учитывая (14.4), для «конденсатора» получим $E = 2 \cdot 2\pi\sigma$, или

$$E = 4\pi\sigma. \quad (14.5)$$

14.3 Электростатическая энергия зарядов. Потенциал поля При нахождении энергии взаимодействия двух зарядов будем исходить из следующей схемы: неподвижный заряд Q_1 создает электрическое поле E , другой заряд Q_2 находится в этом поле. Тогда со стороны электрического поля на заряд Q_2 действует сила $F = Q_2 E$, см. (12.1). Используя для E выражение (14.1), получим

$$F = Q_1 Q_2 / r^2. \quad (14.6)$$

Здесь r — расстояние между точечными зарядами. Соотношение (14.6) называют законом Кулона, из него удобно определять единицу заряда*.

Зная силу взаимодействия (14.6) между зарядами, найдем работу по перемещению заряда Q_2 в поле неподвижного заряда Q_1 . Исходим из общего выражения для элементарной работы

$$\Delta A = F \Delta r; \quad (14.7)$$

тогда на пути от точки r_0 до точки r (рис. 14.6) полная работа

$$A = \sum F(r) \Delta r = Q_1 Q_2 \sum \frac{\Delta r}{r^2}. \quad (14.8)$$

Здесь r — текущая координата и ее конечное значение.

Задача сводится, таким образом, к нахождению суммы $\sum (\Delta r / r^2)$. Разобьем весь участок пути от r_0 до r на малые отрезки (см. рис. 14.6). Введем $\sqrt{r_1 r_0}$ — среднее геометрическое расстояние между, например, точками r_1 и r_0 . В результате получим

$$\sum \frac{\Delta r}{r^2} = \frac{r_1 - r_0}{r_1 r_0} + \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1} + \frac{r_3 - r_2}{r_3 r_2} + \frac{r - r_3}{r r_3}$$

* Именно так поступают в системе СГС. В СИ единица заряда определяется через единицу силы тока, а именно как ампер на секунду [А·с]. При этом эталон ампера вводят через магнитное взаимодействие токов.

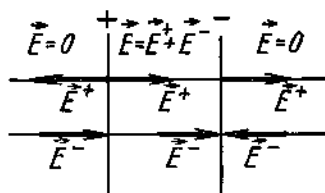


Рис. 14.5

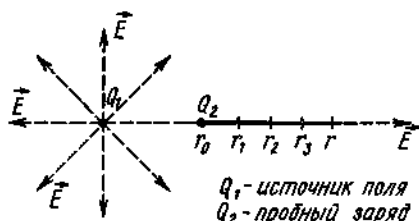


Рис. 14.6

или

$$\sum \frac{\Delta r}{r^2} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}.$$

Используя полученный результат, выражение (14.8) перепишем в виде

$$A = Q_1 Q_2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right),$$

или

$$A = - \left(\frac{Q_1 Q_2}{r} - \frac{Q_1 Q_2}{r_0} \right). \quad (14.9)$$

Сравнивая формулу (14.9) с общим соотношением (9.12), получим для электростатической энергии взаимодействия зарядов выражение

$$U = Q_1 Q_2 / r. \quad (14.10)$$

Здесь заряды Q_1 и Q_2 находятся на расстоянии r друг от друга. При $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия $U \rightarrow 0$.

Из (14.10) следует, что потенциальная энергия может иметь различные знаки: она положительна, когда оба заряда имеют одинаковый знак, и отрицательна, когда оба заряда имеют разные знаки; это обстоятельство соответствует тому факту, что мы наблюдаем как отталкивание зарядов, так и их притяжение (рис. 14.7).

Введем понятие *потенциала поля*

$$\varphi = U / Q_2. \quad (14.11)$$

Потенциал — энергетическая характеристика поля, он соответствует энергии, которой обладает единичный пробный заряд, помещаемый в данную точку поля. Подставив в (14.11) выражение (14.10), получим

$$\varphi = Q_1 / r. \quad (14.12)$$

Так вычисляется потенциал поля, создаваемого зарядом Q_1 в точке, отстоящей от него на расстоянии r .

Работа (14.9) по перемещению пробного заряда Q_2 в поле с потенциалом (14.12) из точки r_0 в точку r выразится как

$$A = - Q_2 [\varphi(r) - \varphi(r_0)]. \quad (14.13)$$

Легко связать потенциал ϕ поля с его напряженностью E . В самом деле, с одной стороны, $A = -Q_2 \Delta \phi$, а с другой — $A = Q_2 (E \Delta r)$; в случае $E \parallel \Delta r$ имеем

$$E = - \frac{\Delta \phi}{\Delta r}, \quad (14.14)$$

где $\Delta \phi / \Delta r$ — падение потенциала на единичной длине.

Соотношение (14.14) позволяет применять два способа задания электрического поля: использование потенциала или вектора напряженности.

14.4 Поле диполя. Взаимодействия заряд — диполь и диполь — диполь Некоторые молекулы обладают несимметричным расположением составляющих их атомов, а значит, и несимметричным распределением зарядов обоих знаков в молекуле. Хотя в целом молекула электрически нейтральна, но разделение центров расположения положительных и отрицательных зарядов приводит к наличию электрического поля вне молекулы. Вычислим это поле.

Пусть имеется некоторая система зарядов. Поместим начало координат O где-либо внутри этой системы (рис. 14.8) и рассчитаем потенциал поля в точке, достаточно удаленной от рассматриваемой системы. Обозначим r_i — радиус-вектор заряда Q_i , R — «координаты» точки наблюдения, $|R - r_i|$ — расстояние от заряда Q_i до расчетной точки поля. Тогда, согласно (14.12), для потенциала поля, создаваемого зарядом Q_i в рассматриваемой точке, получим

$$\phi_i = \frac{Q_i}{|R - r_i|}. \quad (14.15)$$

Мы должны исследовать это выражение при значениях $R \gg r_i$. Найдем приближенный вид для $(R - r_i)^{-1}$; для этой цели воспользуемся формулой бинома Ньютона $(a - b)^n \approx a^n - na^{n-1}b$, в которой нужно поло-

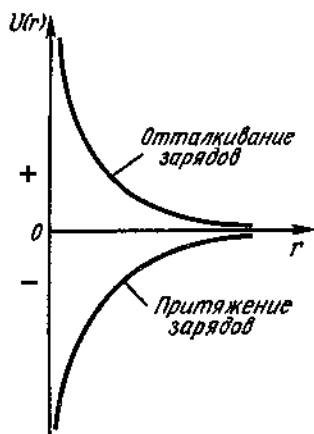


Рис. 14.7

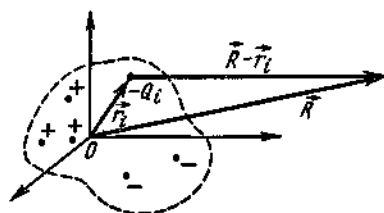


Рис. 14.8

жить $n = -1$. Тогда

$$(R - r_i)^{-1} \approx \frac{1}{R} + \frac{r_i}{R^2}.$$

Подставив это выражение в формулу (14.15), получим

$$\varphi_i = \frac{Q_i}{R} + \frac{Q_i r_i}{R^2}.$$

Для определения потенциала поля, создаваемого в точке наблюдения всеми зарядами системы, воспользуемся принципом суперпозиции: $\varphi = \sum \varphi_i$, т. е.

$$\varphi = \frac{\sum Q_i}{R} + \frac{\sum Q_i |r_i|}{R^2}. \quad (14.16)$$

Поскольку в рассматриваемой системе зарядов $\sum Q_i = 0$, (14.16) перепишем в виде

$$\varphi = |d|/R^2, \quad (14.17)$$

где $d = \sum Q_i r_i$ — так называемый *электрический дипольный момент* системы зарядов.

Найдем энергию взаимодействия одиночного заряда с дипольной системой. Для этого воспользуемся схемой: заряд Q в поле φ диполя. Используя (14.11) и (14.17), получим

$$U = Q |d|/R^2. \quad (14.18)$$

Оказывается, что энергия взаимодействия двух дипольных систем с равными нулю суммами зарядов в каждой из них и с дипольными моментами d_1 и d_2 , находящихся на расстояниях, больших по сравнению с их собственными размерами, составляет

$$U \approx \frac{(d_1 d_2)}{R^3}. \quad (14.19)$$

В заключение приведем сводку формул для энергий взаимодействия систем заряд — заряд, заряд — диполь и диполь — диполь:

$$U_{QQ} = Q^2/R, \quad U_{Qd} = Q |d|/R^2, \quad U_{dd} \approx d^2/R^3. \quad (14.20)$$

Эти формулы будут использованы нами при рассмотрении взаимодействия молекул.

§ 15. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Постоянные магнитные поля необходимо исследовать на основе третьего уравнения поля (13.7), в котором, однако, должны быть опущены члены, зависящие от времени, а сам ток зарядов должен считаться стационарным. В результате (13.7) запишем как

$$\langle H_r \rangle l = \frac{4\pi}{c} \langle j_n \rangle S. \quad (15.1)$$

Рассмотрим ряд симметричных токовых систем.

15.1 Магнитное поле прямолинейного тока Пусть заряды движутся в пространстве вдоль бесконечной прямой линии, причем *плотность тока* j зарядов (т. е. заряд, переносимый через единичную площадку за 1 с в направлении нормали к площадке) остается неизменной. В качестве контура l выберем окружность, расположенную в плоскости, перпендикулярной току I (рис. 15.1); поверхность площади S ограничена контуром l . Учитывая условия симметрии и вихревой характер магнитного поля H , можно заключить, что вектор H является функцией только r и направлен по касательной к контуру l , т. е. $\langle H_r \rangle = |H|$. В результате (15.1) примет вид $H \cdot 2\pi r = (4\pi/c)I$, где $I = jS$ — сила тока. Окончательно для магнитного поля прямого тока будем иметь

$$H(r) = \frac{2}{c} \frac{I}{r}. \quad (15.2)$$

15.2 Магнитное поле токовой плоскости Пусть ток зарядов движется в неограниченной плоскости, причем линейная плотность тока равна i . Проведем вспомогательный контур l , лежащий в плоскости, перпендикулярной токовой (рис. 15.2). Соображения симметрии подсказывают, что вектор напряженности H магнитного поля параллелен токовой плоскости, и поскольку последняя бесконечна, H не может зависеть от расстояния до нее. Другими словами, *магнитное поле по обе стороны токовой поверхности является однородным, но направления H антипараллельны друг другу*. Последнее замечание вытекает из того положения, что магнитные силовые линии должны замыкаться на бесконечности.

Применим уравнение (15.1) к рассматриваемому случаю. Обходя контур l в направлении вращения часовой стрелки относительно направления тока, получим $\langle H_r \rangle l = H \cdot l_1 + 0 \cdot 2l_2 + H \cdot l_1 + 0 \cdot 2l_2 = H \cdot 2l_1$. Полный же ток, идущий через контур, равен il_1 . В результате (15.1) запишется как $H \cdot 2l_1 = (4\pi/c) il_1$. Для магнитного поля токовой плоскости получим выражение

$$H = \frac{2\pi}{c} i, \quad (15.3)$$

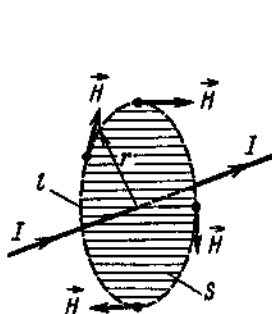


Рис. 15.1

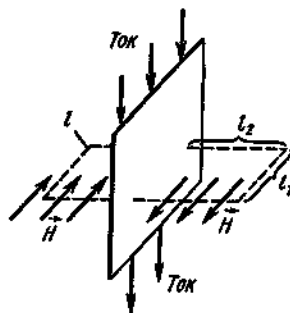


Рис. 15.2

где i — ток, приходящийся на единичную длину в направлении, перпендикулярном движению зарядов.

15.3 Магнитный момент и его связь с механическим моментом
Рассмотрим движение одиночного заряда вблизи притягивающего центра. Пусть траектория заряда является круговой; оценим среднее магнитное поле, создаваемое движущимся зарядом в центре окружности. Для расчета H применим, с известными оговорками («у кольца нет конца»), формулу (15.2) для бесконечного прямолинейного тока. Естественно, что в этой формуле должны быть опущены числовые коэффициенты и сам расчет явится весьма приближенным. Итак, положим, что в центре круга $\langle H \rangle \approx (1/c)(I/R)$; под током следует понимать выражение $I = Q[v/(2\pi R)]$, где множитель при заряде есть число оборотов за 1 с. Введем величину

$$p_m = \frac{Q}{2c} [Rv] \quad (15.4)$$

— магнитный момент орбитального движения заряда (рис. 15.3), тогда

$$\langle H \rangle \approx p_m/R^3. \quad (15.5)$$

Заметим, что магнитное поле выражается через магнитный момент такой же формулой, какой электрическое поле выражается через электрический момент диполя (дипольный момент).

Установим связь магнитного момента с моментом механическим. Из (15.4) имеем

$$p_m = \frac{Q}{2mc} [Rp] = \frac{Q}{2mc} L, \quad (15.6)$$

где L — момент импульса частицы, причем здесь предполагается, что ее $v \ll c$.

Если поместить электрический диполь и систему, имеющую магнитный момент, соответственно в электрическое и магнитное поля, то возникают ориентирующие моменты со стороны внешнего поля. Указанная ситуация ясна из рис. 15.4.

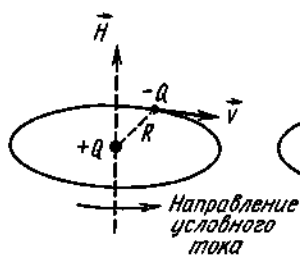


Рис. 15.3

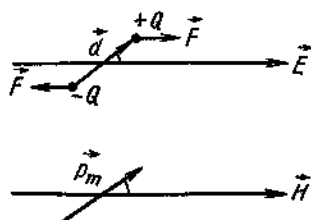
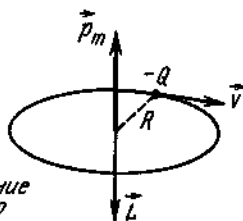


Рис. 15.4

§ 16. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ПОЛЯХ

Исследование движения зарядов в электромагнитных полях ведется на основе уравнения (12.2)

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = Q\mathbf{E} + Q\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{H}\right].$$

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что скорость движения зарядов $v \ll c$, так что $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ есть обычный импульс частицы.

16.1 Движение заряда в постоянном однородном электрическом поле Поля, не зависящие от времени, называют *постоянными*; если к тому же напряженность поля одинакова во всех точках пространства, то поле называют *однородным*. Для постоянного однородного электрического поля уравнение движения заряда примет вид

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = Q\mathbf{E}. \quad (16.1)$$

Это уравнение математически аналогично уравнению

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = m\mathbf{g},$$

которое описывает движение материальной точки в поле тяготения (см. § 7). Но одинаковые уравнения имеют и одинаковые решения, поэтому, записывая по аналогии, получим

$$x = \frac{Q}{m} \left(\frac{E}{2v_0^2} \right) y^2. \quad (16.2)$$

Мы получили уравнение траектории движения заряда Q в электрическом поле E , направленном вдоль оси X . Движение происходит в плоскости XY , причем заряженная частица имеет массу m и начальную скорость v_0 .

В § 7 для траектории тела в однородном поле тяготения было получено уравнение $x = [g/(2v_0^2)] y^2$. Оно одинаково для тел любой массы, ибо масса выпала из рассмотрения и это отражает основное свойство самих полей тяготения. Напротив, для зарядов в электрических полях траектория (16.2) зависит от отношения Q/m . На этом свойстве электрических полей основаны методы масс-спектропии, занимающейся, например, определением масс *изотопов* — ядер, имеющих одинаковый электрический заряд, но различные массы.

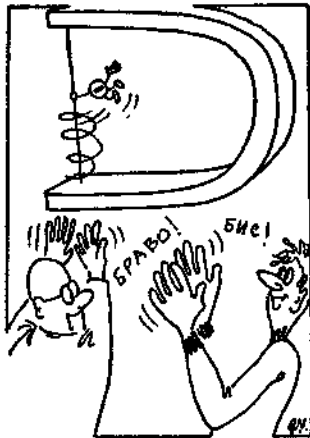
16.2 Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = Q\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{H}\right]. \quad (16.3)$$

Поскольку в (16.3)

$$|\mathbf{F}| = \frac{Q}{c} |\mathbf{v}| |\mathbf{H}| \sin(\mathbf{v}\mathbf{H}), \quad (16.4)$$

то при движении заряда вдоль или против магнитного поля сила Лоренца обращается в нуль (рис. 16.1). При движении же заряда



в направлении, перпендикулярном полю \mathbf{H} , сила $\mathbf{F} = (Q/c) \mathbf{v} \mathbf{H} \neq 0$ (рис. 16.2, а).

Указанное рассмотрение позволяет заключить [см. (9.8)], что магнитное поле не совершает работы над зарядами, т. е. энергия зарядов в поле \mathbf{H} сохраняется. Само же движение заряда в случае, когда $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$, является круговым (рис. 16.2, б). При таком движении ускорение постоянно и выразится как комбинация неизменяющихся кинематических величин v^2 и R . Уравнение движения (16.3) в этом случае запишется как

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{Q}{c} v H. \quad (16.5)$$

Из (16.5) при учете (9.35) получим

$$\omega = \frac{QH}{mc}, \quad (16.6)$$

где ω — частота обращения заряда в магнитном поле.

Если скорость \mathbf{v} заряда составляет произвольный угол α с полем \mathbf{H} (рис. 16.3, а), то траектория его движения, как это показано на рис. 16.3, б, — винтовая линия.

16.3 Движение заряда в кулоновском поле Источником кулоновского поля является неподвижный точечный заряд Q_1 , при этом напряженность $E = Q_1/r^2$ [см. (14.1)] является функцией только расстояния r от заряда до точки наблюдения. Пусть в таком поле движется заряд Q_2 , тогда энергия взаимодействия обоих зарядов [см. (14.10)] $U = Q_1 Q_2 / r$. Предположим, что масса положительного заряда Q_1 (центр) велика по сравнению с массой m движущегося отрицательного заряда Q_2 .

Кулоновское поле обладает центральной симметрией с центром в точке нахождения заряда Q_1 . Все направления в пространстве, проходящие через центр, эквивалентны. Последнее означает (см. § 9.4), что при движении заряда Q_2 момент импульса сохранится, а само движение окажется плоским (рис. 16.4, а), т. е. будет лежать в плоскости, перпендикулярной вектору момента \mathbf{L} .

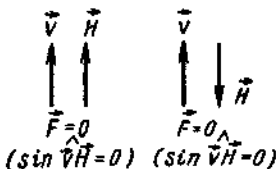


Рис. 16.1

В связи с этим удобно вести рассмотрение движения в полярных координатах (рис. 16.4, б). Связь между полярными r и ϕ координатами и декартовыми x и y дается следующими формулами:

$$x = r \cos \phi; \quad y = r \sin \phi. \quad (16.7)$$

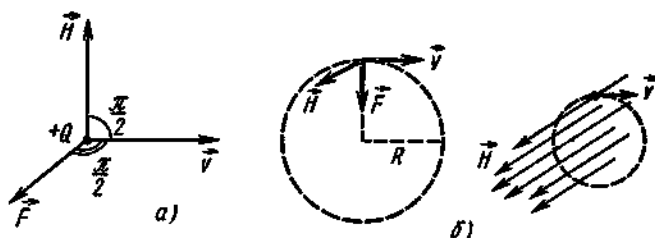


Рис. 16.2

Так как в рассматриваемой задаче энергия взаимодействия U не зависит от времени, то должна (см. конец § 9.2) сохраняться полная энергия E системы, т. е. сумма кинетической T и потенциальной U энергий. Запишем выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2) \quad (16.8)$$

через полярные координаты.

Для этого получим вспомогательное математическое соотношение для произведения двух произвольных функций $f(x)$ и $g(x)$, а именно

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) = \\ &= fg + g\Delta f + f\Delta g + \Delta f\Delta g - fg = g\Delta f + f\Delta g + \text{малые члены, пропорциональные} \\ &\quad (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

В итоге

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g. \quad (16.9)$$

Применим теперь (16.9) к (16.7), тогда

$$\Delta x = \Delta r \cos \varphi + r \Delta(\cos \varphi),$$

но $\Delta(\cos \varphi) = -\sin \varphi \Delta \varphi$ (это равенство легко получить из рассмотрения рис. 9.6). В результате получим

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cos \varphi - \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} r \sin \varphi$$

или иначе

$$v_x = v_r \cos \varphi - \omega r \sin \varphi, \quad (16.10)$$

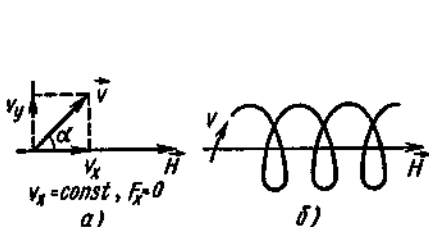


Рис. 16.3

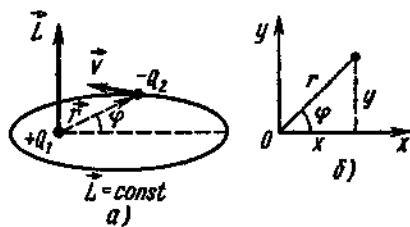


Рис. 16.4

где $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ — угловая скорость. Производя аналогичные действия, получим для v_φ выражение

$$v_\varphi = v_r \sin \varphi + \omega r \cos \varphi. \quad (16.11)$$

Здесь использовалось соотношение $\Delta(\sin \varphi) = \cos \varphi \Delta\varphi$, полученное нами в § 9.3, см. формулу (9.26). Подставляя, наконец, (16.10) и (16.11) в (16.8), получим окончательно

$$T = \frac{m}{2} (v_r^2 + \omega^2 r^2). \quad (16.12)$$

Таким образом, полная энергия системы

$$E = T + U = \frac{m}{2} (v_r^2 + \omega^2 r^2) - \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (16.13)$$

По поводу знака потенциальной энергии см. формулу (14.10) и примечание к ней и к рис. 14.7. Форма записи члена с потенциальной энергией в (16.13) пригодна для рассмотрения в полярных координатах.

При изучении движения заряда в кулоновском поле мы исходим не из уравнений движения, а из законов сохранения.

Выражение для момента импульса в полярных координатах дается формулой (9.36)

$$L = m\omega r^2.$$

Введем этот момент импульса в выражение для полной энергии, тогда (16.13) примет вид

$$E = \frac{m}{2} v_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (16.14)$$

В (16.14) два последних слагаемых в правой части можно рассматривать в качестве эффективной потенциальной энергии

$$U_{\text{эф}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (16.15)$$

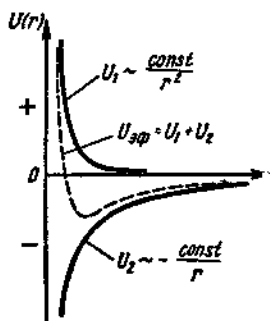


Рис. 16.5

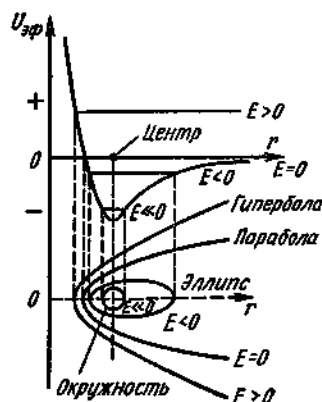


Рис. 16.6

Действительно, вследствие сохранения момента импульса выражение $U_{\text{эф}} = A/r^2 - B/r$, где A и B константы, — функция только r . Изобразим графически $U_{\text{эф}}$ (рис. 16.5) и рассмотрим движение заряда в таком потенциальном поле (рис. 16.6). Поворотным точкам траекторий соответствует условие $E = U_{\text{эф}}$. Когда полная энергия E системы отрицательна, движение заряда происходит в пределах «потенциальной ямы», причем возможными траекториями являются окружность и эллипс. При значениях $E \geq 0$ движение ограничено лишь с одной стороны, другими словами, когда $U_{\text{эф}}$ положительно, то система зарядов $Q^+ - Q^-$ уже не является связанной.

Поскольку математическая форма закона всемирного тяготения* $F = -Gm_1m_2/r^2$, где G — гравитационная постоянная, аналогична записи закона Кулона (14.6), все полученные результаты автоматически переносятся на движение массивных тел в центральном поле тяготения (кеплерова задача). Читателю, конечно, известны такие факты, как круговые и эллиптические орбиты искусственных спутников Земли, как 1-я и 2-я космические скорости и т. д.

§ 17. ПОЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ. ИЗЛУЧЕНИЕ

Рассмотрим влияние движения зарядов на характер создаваемого ими поля. В этих задачах мы не будем ограничиваться случаем $v \ll c$ и релятивистские эффекты проявятся в полной мере.

17.1 Поле равномерно движущегося заряда Электрическое поле покоящегося заряда нам известно: это обычное кулоновское поле, обладающее центральной сферической симметрией с центром в месте нахождения заряда. Как изменится электрическое поле заряда при его движении с постоянной скоростью; какой характер оно будет носить? Решение этой задачи мы произведем в несколько этапов:

1) зная поле заряда неподвижного (в системе отсчета (X', Y')), найдем поле заряда движущегося (относительно системы отсчета (X, Y)); для этого, естественно, нужно воспользоваться законами преобразования полей;

2) электрическое поле заряда, находящегося в движении, необходимо выразить через координаты той системы отсчета, относительно которой заряд движется (такое преобразование координат должно производиться на основе преобразований Лоренца); эта операция, однако, может оказаться не из легких и потребует некоторой изобретательности (при этом роль рисунков здесь велика);

3) для исследования конфигурации электрического поля быстрой заряженной частицы проще всего ввести угловые координаты.

* Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тел всегда отрицательна (гравитация проявляется только как притяжение тел). Чтобы от сил F взаимодействия перейти к энергии U взаимодействия, необходимо воспользоваться связью $F = -dU/dr$ между ними. Тогда

$$U = - \int F dr = - \int (-Gm_1m_2/r^2) dr = Gm_1m_2 \int dr/r^2 = -Gm_1m_2/r.$$

При $r \rightarrow \infty$ получаем $U \rightarrow 0$, т. е. для связанных тел энергия всегда отрицательна. Для тел свободных энергия движения $mv^2/2$ всегда положительна.

Итак, приступим к первому этапу решения задачи. Поместим заряд Q в начало координат инерциальной системы отсчета (X', Y') , которая движется относительно другой инерциальной системы отсчета (X, Y) со скоростью V (рис. 17.1, а). Электрическое поле напряженности E' в системе отсчета (X', Y') — это обычное кулоновское поле покоящегося заряда (рис. 17.1, б):

$$E' = QR'/R'^3. \quad (17.1)$$

Выражение (17.1) является векторной записью формулы (14.1), в которую введен единичный вектор $n = R'/R'$ в направлении R' (рис. 17.1, в).

В системе отсчета (X, Y) , согласно формулам преобразования поля (12.8), напряженность электрического поля имеет компоненты

$$E_x = E'_x = \frac{Qx'}{(R')^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{Qy'}{(R')^3 \sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (17.2)$$

В (17.2) мы учли то обстоятельство, что $H' = 0$ в системе (X', Y') , поскольку в этой системе заряд покоится.

Обратимся ко второму этапу решения задачи. Выразим R' через x, y по формулам преобразования Лоренца (10.1):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y. \quad (17.3)$$

Написанные выражения (17.3) являются обращением преобразований (10.1); формулы (17.3) получают из (10.1) заменой V на $-V$, так как система отсчета (X, Y) движется относительно системы (X', Y') со скоростью $-V$. В результате

$$(R')^2 = (x')^2 + (y')^2 = \frac{(x - Vt)^2 + (1 - V^2/c^2)y^2}{1 - V^2/c^2}. \quad (17.4)$$

Далее следует подставить в (17.2) x', y', R' , выраженные через x, y , тогда

$$E_x = \frac{Q(x - Vt)(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2} [(x - Vt)^2 + (1 - V^2/c^2)y^2]^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{Qy(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2} [(x - Vt)^2 + (1 - V^2/c^2)y^2]^{3/2}}.$$

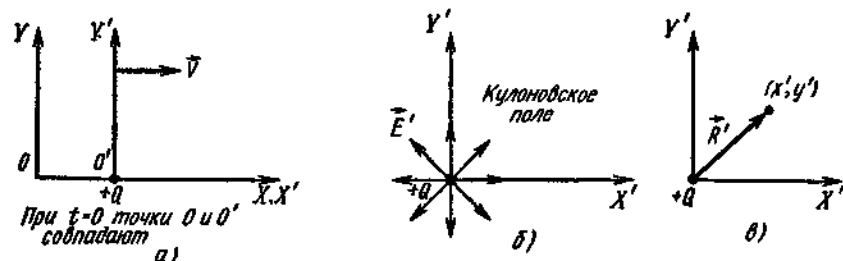


Рис. 17.1

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} E_x &= Q \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{x - Vt}{[(x - Vt)^2 + (1 - V^2/c^2) y^2]^{3/2}}, \\ E_y &= Q \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{y}{[(x - Vt)^2 + (1 - V^2/c^2) y^2]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

Полученные выражения (17.5) для компонентов поля необходимо сделать как-то обозримыми и более наглядными. Для этого обратим внимание на структуру формул для E_x и E_y и перейдем к векторной записи для поля \mathbf{E} . Здесь естественно ввести вектор \mathbf{R} с компонентами $R_x = x - Vt$ и $R_y = y$ (рис. 17.2), а также следующее обозначение:

$$(R^*)^2 = (x - Vt)^2 + (1 - V^2/c^2) y^2. \quad (17.6)$$

Тогда (17.5) примет вид

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{Q\mathbf{R}}{(R^*)^3}. \quad (17.7)$$

Это есть окончательное выражение для напряженности электрического поля равномерно движущегося заряда.

Наконец, перейдем к последнему этапу решения задачи. Чтобы изучить характер поля (17.7), введем угол θ между направлением движения и радиусом-вектором \mathbf{R} (рис. 17.3). Тогда $y^2 = R^2 \sin^2 \theta$, а (17.6) можно записать в виде

$$(R^*)^2 = R_x^2 + (1 - V^2/c^2) R^2 \sin^2 \theta.$$

Так как

$$R_x^2 = R^2 - R_y^2 = R^2 - y^2 = R^2 (1 - \sin^2 \theta),$$

то

$$(R^*)^2 = R^2 [1 - (V^2/c^2) \sin^2 \theta]. \quad (17.8)$$

Подставив (17.8) в (17.7), получим

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - V^2/c^2}{[1 - (V^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}}. \quad (17.9)$$

Проанализируем выражение (17.9). При $V \ll c$ поле (17.9) переходит в обычное кулоновское поле $\mathbf{E} = Q\mathbf{R}/R^3$ [см. (14.1) и (17.1)]. Далее, зафиксируем расстояние R от заряда до точки наблюдения поля и проведем сферу радиусом R . Тогда значение напряженности \mathbf{E} минимально вдоль направления движения ($\theta = 0, \pi$) и составляет

$$E_{\parallel} = \frac{Q}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right). \quad (17.10)$$

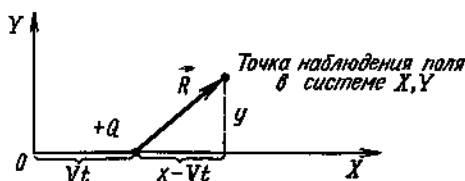


Рис. 17.2

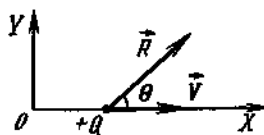


Рис. 17.3

Наибольшее же значение поле имеет в направлении, перпендикулярном скорости ($\theta = \pi/2$):

$$E_{\perp} = \frac{Q}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (17.11)$$

Из (17.10) и (17.11) видно, что при возрастании скорости V движения заряда поле E_{\parallel} уменьшается, а E_{\perp} возрастает (рис. 17.4). На рис. 17.4 использованы два способа графического изображения напряженности E поля: один из них связывает значение напряженности с густотой силовых линий (рис. 17.4, а); в другом — модуль напряженности характеризуется длиной вектора (рис. 17.4, б).

Указанный характер электрического поля движущегося заряда проявляется особенно заметно при скоростях движения, сравнимых с предельной скоростью c .

Магнитное поле в системе отсчета (X', Y') отсутствует, в системе же (X, Y) оно отлично от нуля и, согласно (12.6), его напряженность

$$H = \frac{1}{c} [VE].$$

При $V \ll c$

$$H = \frac{1}{c} \left[V \frac{QR}{R^3} \right] = \frac{Q}{c} \frac{[VR]}{R^3}. \quad (17.12)$$

Мы получили так называемый закон Био — Савара — Лапласа.

17.2 Излучение ускоренно движущегося заряда Заряд Q при $t = 0$ покоится, затем в течение времени Δt ускоряется с ускорением a и продолжает движение с постоянной скоростью v . Характер его электрического поля показан на рис. 17.5, а. На этом рисунке изображены силовые линии $E_{v=0}$ поля неподвижного точечного заряда, $E_{v=\text{const}}$ поля заряда, движущегося с постоянной скоростью, и $E_{\text{изл}}$ переходного поля, изображенного в виде сферического «фронта» (см. также рис. 17.5, б, в). Напряженности $E_{v=0}$ и $E_{v=\text{const}}$ не зависят от времени,

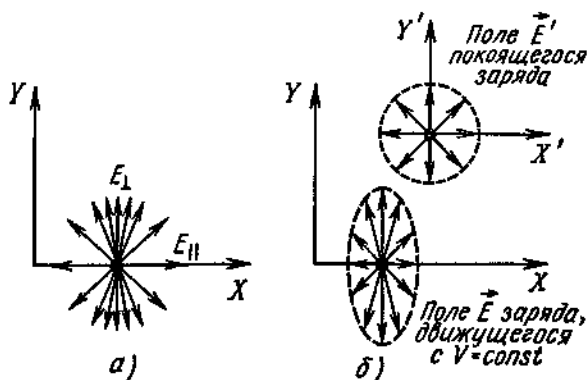


Рис. 17.4

напряженность $E_{\text{изл}}$ переходного поля является переменной. Как и всякие переменные поля, поле с напряженностью $E_{\text{изл}}$ (его называют полем излучения) распространяется в пространстве со скоростью c . Поле излучения носит волновой характер и на больших расстояниях от заряда имеет вид плоской волны (см. следующий параграф).

Найдем напряженность $E_{\text{изл}}$ поля в точке r в момент времени t . Время t выбрано так, чтобы волна излучения проходила через точку r в момент t , т. е. $r = ct$. Положим $t \gg \Delta t$, где Δt — время ускорения заряда, а скорость заряда $v \ll c$. Тогда смещение vt заряда мало по сравнению с расстоянием ct , проходимым полем излучения. По этой причине силовые линии поля напряженностью $E_{v=\text{const}}$ до перегиба можно считать параллельными силовым линиям поля напряженностью $E_{v=0}$ после перегиба; сам перегиб силовых линий, как уже отмечалось, связывается с полем напряженностью $E_{\text{изл}}$. Соответствующие геометрические построения изображены на рис. 17.5, б. Из него видно, что треугольники 1 и 2 подобны. Из их подобия следует соотношение

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{v_{\perp} t}{c \Delta t}. \quad (17.13)$$

В (17.13) E_{\perp} и E_{\parallel} — компоненты поля $E_{\text{изл}}$, $c \Delta t$ — расстояние, проходимое волной излучения за время Δt ускорения заряда, $v_{\perp} t$ — смещение заряда за время t в направлении, перпендикулярном распространению волны. Поскольку $v_{\perp} = a_{\perp} \Delta t$, а $t = r/c$, то (17.13) перепишем в виде

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{(a_{\perp} \Delta t)(r/c)}{c \Delta t} = \frac{a_{\perp} r}{c^2}. \quad (17.14)$$

Составляющая E_{\parallel} поля излучения может быть найдена из общих уравнений поля. Применим первое уравнение поля (13.3) и построим вспомогательную замкнутую поверхность S в виде «коробочки» (рис. 17.5, в). Поскольку заряды внутри «коробочки» отсутствуют, полный поток электрического поля через нее равен нулю. Вследствие этого нормальная к поверхности S составляющая E_{\parallel} поля излучения должна быть равна нормальной к S составляющей поля $E_{v=0}$ неподвижного заряда, т. е. $E_{\parallel} = Q/r^2$, см. (14.1). Подставив это выражение для E_{\parallel} в (17.14), получим

$$E_{\perp} = \frac{Q}{c^2} \frac{a_{\perp}}{r}. \quad (17.15)$$

Поскольку составляющая E_{\parallel} не зависит от времени, она не может быть включена в волну излучения. Таким образом, поле излучения представляет собой поперечную волну: вектор $E_{\text{изл}}$ перпендикулярен направлению распространения волны. Векторная запись для (17.15) выглядит так:

$$E_{\text{изл}}(r, t) = - \frac{Q}{c^2} \frac{a_{\perp}(t')}{r}. \quad (17.16)$$

Здесь $t' = t - r/c$ есть более ранний момент времени по отношению к t ; знак минус соответствует противоположному направлению векторов $E_{\text{изл}}$ и a (рис. 17.5, б).

в трубке испытывает резкое торможение (отрицательное ускорение), сопровождающееся излучением электромагнитных волн огромной частоты; их проникающая способность в веществе может быть весьма высокой.

17.3 Излучение заряда, движущегося равномерно по окружности
Движение заряда (например, электрона) в постоянном однородном магнитном поле \mathbf{H} в случае, когда $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$, является круговым. При этом, как следует из (16.5), ускорение

$$a = \frac{eH}{mc} v.$$

Подставив это выражение для центростремительного ускорения в (17.19), получим интенсивность излучения

$$J \approx \left(\frac{e^4}{c^3 m^2} \right) H^2 v^2. \quad (17.20)$$

Формула (17.20) для интенсивности электромагнитного излучения зарядов, движущихся в магнитных полях, получена для случая $v \ll c$. Частота излучения в основном совпадает с частотой (16.6) обращения зарядов вокруг силовых линий поля \mathbf{H} .

В качестве иллюстрации отметим: космическое радиоизлучение галактик (движение электронов в магнитных полях звезд); электромагнитное излучение электронов в ускорительных установках типа «бетатрон», причем излучение может происходить в видимой области частот («эффект светящегося электрона»).

Рассмотрим модель атома, в которой электрон обращается вокруг протона по законам классической механики. Тогда вследствие потерь энергии на излучение электрон за весьма короткое время «упадет» в центр и подобный атом прекратит существование. Оценим время жизни такого «атома». Начальная электростатическая энергия системы «протон — электрон», согласно (14.10), есть $U_0 \sim e^2/R_0$. По определению, интенсивность излучения $J \sim U_0/\Delta t$, где для J используется (17.19), а ускорение $a = v^2/R_0$. В результате $\Delta t \sim c^3 R_0/v^4$; взяв $R_0 \sim 10^{-10}$ м, $v \sim 10^6$ м/с, получим $\Delta t \sim 10^{-9}$ с.

§ 18. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

18.1 Некоторые свойства поля излучения Мы видели, что поле $\mathbf{E}_{\text{изл}}$ перпендикулярно направлению распространения поля. Из закона преобразования магнитного поля (12.6)

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{E}]$$

следует, что при $\mathbf{V} = \mathbf{c}$

$$\mathbf{H}_{\text{изл}} = \left[\frac{\mathbf{c}}{c} \mathbf{E}_{\text{изл}} \right] = [\mathbf{n}_c \mathbf{E}_{\text{изл}}],$$

где \mathbf{n}_c — единичный вектор в направлении распространения поля

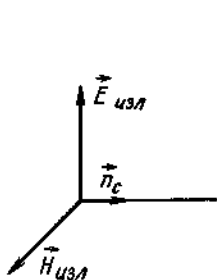


Рис. 18.1

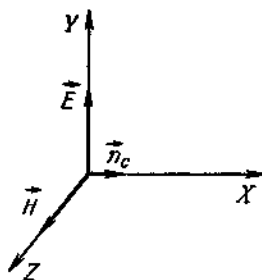


Рис. 18.2

излучения. В результате в поле излучения

$$|\mathbf{H}_{\text{изл}}| = |\mathbf{E}_{\text{изл}}|$$

и

$$\mathbf{H}_{\text{изл}} \perp \mathbf{E}_{\text{изл}} \perp \mathbf{n}_c \quad (18.1)$$

Взаимная ориентация этих трех векторов показана на рис. 18.1.

18.2 Бегущие волны Пусть в поле излучения векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} ориентированы так, чтобы направление распространения \mathbf{n}_c излучения совпадало с осью X (рис. 18.2). Тогда, если в начальный момент времени $t = 0$ характеристики поля имели некоторое определенное значение в точке x пространства, то через промежуток времени t они будут иметь то же самое значение на расстоянии ct от первоначального места вдоль положительного направления оси X . Другими словами, характеристики поля одинаковы для координат x и моментов времени t , если те удовлетворяют соотношению

$$t - x/c = \text{const.}$$

В результате поле излучения образует плоскую бегущую волну, при этом электромагнитная волна является поперечной: колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (рис. 18.3). Сами же компоненты E_y и H_z поля в электромагнитной волне являются простыми периодическими функциями от $(t - x/c)$:

$$\left. \begin{aligned} E_y &= A \cos \omega(t - x/c), \\ H_z &= A \cos \omega(t - x/c); \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

такую волну называют *монохроматической*. В выражении для волны (18.2) A есть так называемая *амплитуда*, ω — *круговая (циклическая) частота*. Смысл этих понятий лучше всего уяснить на примере механических колебаний.

В § 9.3 были рассмотрены колебания маятника; кинематика его движений и способ их описания изображены на рис. 18.4. Из рис. 18.4

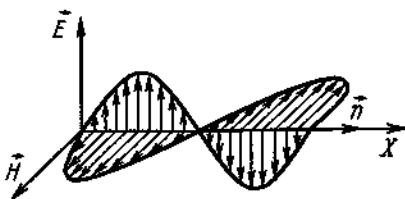


Рис. 18.3

видно, что смещение материальной точки от положения равновесия

$$y = y_0 \sin \varphi, \quad (18.3)$$

где y_0 — максимальное смещение (амплитуда); φ называют *фазой*, причем

$$\varphi = \omega t, \quad (18.4)$$

где ω — тоже круговая частота. Если обозначить T *период колебаний* (т. е. время одного колебания) и учесть, что для синуса $T = 2\pi$, то

$$\omega = 2\pi/T. \quad (18.5)$$

В применении к волнам вводят понятие *длины волны* λ , которая выражается через T и скорость распространения c (в случае электромагнитных волн) как

$$\lambda = cT,$$

или

$$\lambda = 2\pi c/\omega. \quad (18.6)$$

18.3 Излучение электромагнитных волн колеблющимися зарядами.
Энергия и импульс волн Если заряд совершает колебательное движение по закону

$$y = y_0 \sin \omega t,$$

то его скорость

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = y_0 \omega \cos \omega t$$

[см. (9.26)], а ускорение

$$a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -y_0 \omega^2 \sin \omega t$$

[см. вычисления к (16.9)]. Как и при всяком ускоренном движении зарядов, интенсивность излучения электромагнитных волн определяется по (17.19), т. е.

$$J \approx \frac{Q^2}{c^3} y_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega t.$$

Произведем усреднение по времени за $t \geq T$; используем при этом тригонометрическое соотношение $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$, которое при усреднении даст $\frac{1}{2}$. В результате, опуская числовые множители, получим

$$J \approx \frac{Q^2}{c^3} y_0^2 \omega^4. \quad (18.7)$$

Из (18.7) видно, что интенсивность излучения электромагнитных волн резко возрастает с увеличением частоты колебаний электрических зарядов. По этой причине частотный радиодиапазон, используемый на практике, начинается с частот порядка 10^6 Гц (1 Гц есть одно колебание за 1 с).

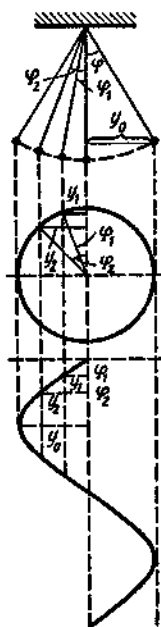


Рис. 18.4

Остановимся на вопросе об энергии и импульсе электромагнитных волн. В предыдущем параграфе [см. рассуждения к (17.17)] было показано, что плотность энергии ρ_E электрического поля есть квадратичная функция поля E . Для поля электромагнитного, являющегося наложением электрического и магнитного полей, в выражение для ρ_E следует ввести напряженность магнитного поля H . Так как размерности E и H одинаковы, а это видно из выражения для силы Лоренца (12.3), то

$$\rho_E \approx E^2 + H^2. \quad (18.8)$$

Плотность импульса ρ_p электромагнитной волны может зависеть лишь от E , H и c . Поскольку размерность $[\rho_p] = (\text{импульс})/\text{м}^3$, а размерность $[\rho_E] = (\text{энергия})/\text{м}^3$, то ясно (это читатель может легко проверить сам), что для электромагнитных волн плотность энергии и плотность импульса связаны соотношением

$$\rho_p = \rho_E/c. \quad (18.9)$$

В свою очередь, из (18.8) и (18.9) следует выражение для плотности импульса

$$\rho_p \approx (E^2 + H^2)/c. \quad (18.10)$$

Отметим, что плотность импульса есть величина векторная и направлена вдоль направления n распространения волны, т. е. $\rho_p = (\rho_E/c)n$, где n — единичный вектор.

18.4 Собственные колебания поля. Стоячие волны. Бегущие волны (18.2) распространяются во всем пространстве. Рассмотрим электромагнитную волну, заключенную в ящик с зеркальными стенками. Поле на границах объема обращается в нуль. Перенос энергии в волне отсутствует и сама волна становится «стоячей». Электрическое поле в такой волне имеет вид

$$E_y = A(x) \cos(\omega t + \alpha), \quad (18.11)$$

где α — начальная фаза. Представим (18.11) в другой форме; для этого используем тригонометрическое соотношение

$$\cos(\omega t + \alpha) = \cos \alpha \cos \omega t - \sin \alpha \sin \omega t,$$

в результате

$$E_y = C_1 \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t - C_2 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \sin \omega t. \quad (18.12)$$

Запись (18.12) показывает, что *стоячая волна есть результат интерференции падающей и отраженной волн.*

Учтем в (18.12) условие $E_y = 0$ на границах (рис. 18.5):

$$0 = C_1 \cos \omega t \text{ и } C_1 = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$0 = -C_2 \sin\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right) \sin \omega t \text{ при } x = L,$$

$$\text{т. е.} \quad \sin\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right) = 0. \quad (18.13)$$

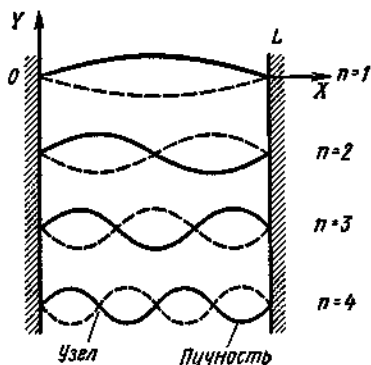


Рис. 18.5

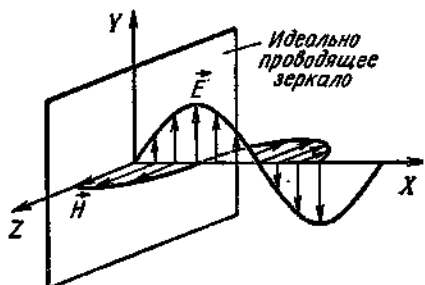


Рис. 18.6

Решение (18.13)

$$2\pi \frac{L}{\lambda} = n\pi,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, или иначе

$$L = n \frac{\lambda}{2}. \quad (18.14)$$

Здесь L — линейные размеры полости (рис. 18.5).

Таким образом, в ограниченном объеме пространства устанавливаются состояния поля

$$E_y(x, t) = C_2 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \sin \omega t \quad (18.15)$$

лишь с дискретным набором частот

$$\omega = n\pi \frac{c}{L}. \quad (18.16)$$

Выражение (18.16) для спектра собственных колебаний поля можно получить из (18.14) с помощью (18.6).

Рис. 18.6 иллюстрирует ряд других свойств стоячей электромагнитной волны.

§ 19. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА

Скорость распространения света оказалась равной скорости распространения с электромагнитных возмущений. Вся совокупность экспериментальных данных указывает на то, что свет есть электромагнитные волны с длинами волн в диапазоне $(4 \div 8) \cdot 10^{-7}$ м. Вследствие этого все оптические явления должны рассматриваться в рамках электродинамики.

19.1 Интерференция электромагнитных волн Пусть две волны f_1 и f_2 с одинаковой частотой ω

$$f_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1); f_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \quad (19.1)$$

распространяются вдоль одного направления. Здесь под f_1 и f_2 будем понимать любую из составляющих поля: E или H . Положим для простоты их амплитуды одинаковыми ($A_1 = A_2 = A$), тогда результирующая волна

$$f_R = f_1 + f_2,$$

возникающая как наложение одиночных волн, запишется так:

$$f_R = A [\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_2)].$$

Преобразуем f_R . Для этого используем тригонометрическое соотношение

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

В итоге получим

$$f_R = 2A \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

Таким образом, результирующая волна является также косинусоидальной, но с новой фазой и новой амплитудой

$$A_R = 2A \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right).$$

Найдем интенсивность (квадрат амплитуды) результирующей волны

$$A_R^2 = 4A^2 \cos^2\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right).$$

Вспомнив тригонометрическую формулу

$$\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2,$$

получим

$$A_R^2 = 2A^2 + 2A^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (19.2)$$

Если теперь перейти к общему случаю волн с различными амплитудами (19.1), то (19.2) можно записать в виде

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (19.3)$$

Легко убедиться, что из (19.3) следует (19.2) при условии $A_1 = A_2 = A$. Перекрестный член в (19.3), содержащий косинус, называют *интерференционным*; он в зависимости от разности начальных фаз ($\alpha_1 - \alpha_2$) может быть положительным и отрицательным.

На примере (19.2) уясним действие эффекта интерференции. Если разность фаз $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi$, то $A_R^2 = 2A^2 - 2A^2 = 0$ и $A_R^2 = 2A^2 + 2A^2 = 4A^2$, если $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$.

В результате наложения волны могут полностью погасить друг друга. В случае же усиления результирующей волны ее интенсивность отличается от простой суммы интенсивностей составляющих волн.

19.2 Дифракция электромагнитных волн Огибание волнами всякого рода препятствий или изменение направления распространения волны при прохождении ею, например, отверстий в экранах обычно

называют явлениями дифракции волн. Эффекты дифракции особенно заметны в тех случаях, когда размеры препятствий или отверстий в экранах сравнимы с длиной волны.

Рассмотрим дифракцию от двух щелей (рис. 19.1, а), расстояние d между которыми имеет порядок длины волны λ излучателя (рис. 19.1, б). Волны от отверстий 1 и 2 при падении в произвольную точку наблюдения P интерферируют. Здесь удобно перейти от разности фаз ($\varphi_2 - \varphi_1$) между волнами к разности расстояний $D_2 - D_1 = \Delta D$, проходимых волнами. Связь между этими величинами весьма проста. Масштабом длины явится λ , а отношение $\Delta D/\lambda$, умноженное на 2π , даст разность фаз. В результате

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta, \quad (19.4)$$

где θ — угол, определяющий направление в точку наблюдения. Если в (19.4) положить $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, что является условием минимума интенсивности результирующей волны, то получим $d \sin \theta = \lambda/2$. В общем же случае условие минимума интенсивности запишется как

$$d \sin \theta = (2N + 1)\lambda/2, \quad (19.5)$$

где $N = 0, 1, 2, \dots$. Ясно, что условием максимума интенсивности явится равенство

$$d \sin \theta = 2N\lambda/2. \quad (19.6)$$

Картина интерференции при дифракции от двух щелей изображена на рис. 19.1, в.

19.3 Геометрическая оптика Длины λ световых волн обычно много меньше размеров d тел, с которыми свет взаимодействует. В этих условиях волновые свойства света (интерференция и дифракция) не могут проявиться. В самом деле, если $\lambda \ll d$, то из (19.4) следует, что

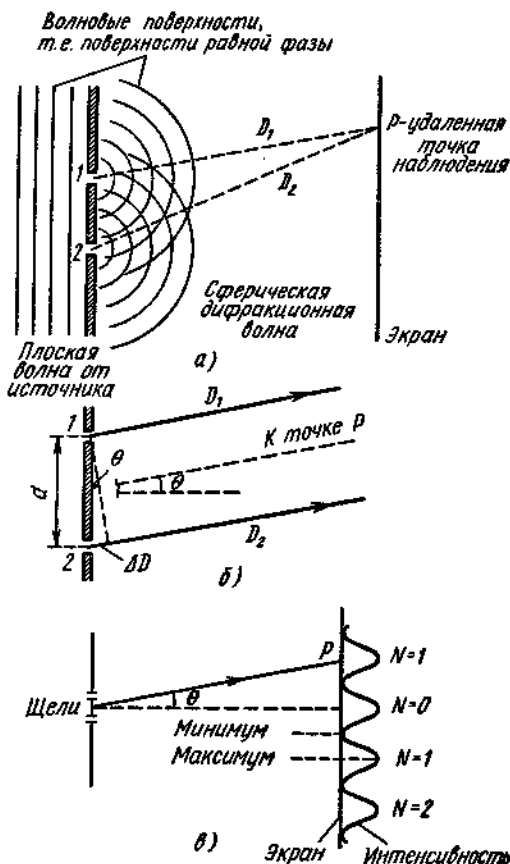


Рис. 19.1

разность фаз есть большая величина. А это означает, что интерференционный член в (19.3) практически становится равным нулю, ибо функция косинус для очень больших значений углов совершает быстрое осциллирующее движение и ее среднее значение равно нулю. Что касается дифракции, то из выражения (19.6), которое можно переписать как $(d/\lambda) \sin \theta = N$, видно, что при очень больших значениях d/λ множитель $\sin \theta$ должен быть близок к нулю, т. е. свет должен распространяться прямолинейно.

Последний результат означает, что в предельном случае, когда $\lambda \rightarrow 0$, для описания законов распространения света вполне пригодно понятие *луча* — своеобразной световой «траектории».

ГЛАВА IV АТОМНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА*



§ 20. О ПЛАНЕТАРНОЙ МОДЕЛИ АТОМА

Перейдем от рассмотрения физических явлений в больших областях пространства к изучению их в чрезвычайно малых областях ($\lesssim 10^{-10}$ м). Явления, происходящие с частицами очень малой массы в очень малых областях пространства, относят к группе *атомных явлений*.

Если попытаться анализировать с точки зрения классической механики и электродинамики модель атома как системы, состоящей из положительно заряженного ядра, в котором сосредоточена почти вся масса атома, и обращающихся вокруг ядра электронов, то мы сразу же приходим к противоречию с действительностью. В самом деле, движение электронов по замкнутым траекториям является, очевидно, ускоренным и с точки зрения классической теории оно должно сопровождаться излучением электромагнитных волн. Теряя энергию, электроны должны были бы в конце концов упасть на ядро. Оценки показывают (см. конец § 17.3), что время жизни такого «атома» было бы порядка 10^{-9} с. Само же существование макроскопических тел в природе говорит о том, что составляющие их частицы — атомы — есть устойчивые образования.

Отсюда следует, что рассмотрение внутриатомных движений требует использования новых принципов. Чтобы выяснить их характер, необходимо обратиться к эксперименту.

§ 21. ОПЫТЫ ПО ДИФРАКЦИИ ЧАСТИЦ

Рассмотрим опыты по дифракции электронов на кристаллах. Пропуская через тонкий кристалл (фольгу) одиночные электроны, следующие друг за другом, ученые обнаружили на экране (фотопластинке) картину чередующихся максимумов и минимумов интенсивности.

* В этой главе использована система СГС.

В этих опытах для всех электронов начальные условия и условия прохождения через кристалл были с высокой точностью одинаковыми. Однако после прохождения кристалла электроны давали точечные пятна почернения на фотопластинке в самых различных местах. Последовательное падение на экран все большего и большего количества одиночных электронов постепенно приводило к возникновению определенной результирующей дифракционной картины распределения их мест падения (рис. 21.1). Описанный результат опыта означает, что электроны, оставаясь частицами, в указанных условиях подчиняются законам волнового движения.

Дифракция любых волн происходит, как известно, при условии соизмеримости длины волны с размерами препятствий или вообще области движения: для электромагнитных волн это могут быть, например, размеры отверстий в непрозрачных экранах; для возможных волн, которые мы с необходимостью должны сопоставить с электронами, — это межатомные расстояния в решетке кристалла.

Согласно классическим представлениям о движении частица в каждый момент времени находится в определенном месте пространства и характеризуется определенной скоростью. Это проявляется в классической механике в наличии у частиц траекторий, когда они движутся в относительно больших областях пространства. Сказанное справедливо с достаточной точностью для электронов, движущихся от электронной пушки до кристалла. Однако ситуация резко меняется, если электроны начинают двигаться в условиях, когда характерная пространственная область движения сравнима с их длиной волны. На первый план выступают волновые эффекты, и к электрону, как частице, здесь неприменимо понятие траектории.

Чтобы более отчетливо уяснить всю необычность складывающейся ситуации, рассмотрим последовательно серию «мысленных экспериментов» с пулями, волнами и электронами*.

Представим себе, что производится ненаправленная стрельба из пулемета (рис. 21.2). На пути движения пуль находится бронированная плита с двумя отверстиями 1 и 2. Позади плиты расположен земляной вал, вдоль которого может перемещаться детектор — ящик с песком. Пуля — это тело, заведомо имеющее траекторию. Последнее означает, что зная начальные условия (координаты и скорость), мы могли бы

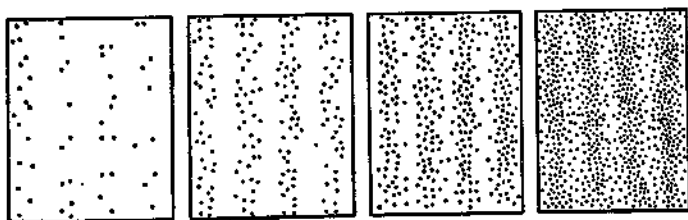


Рис. 21.1

* Их идея заимствована нами у Фейнмана. См.: Фейнман Р. Характер физических законов. М., 1968.

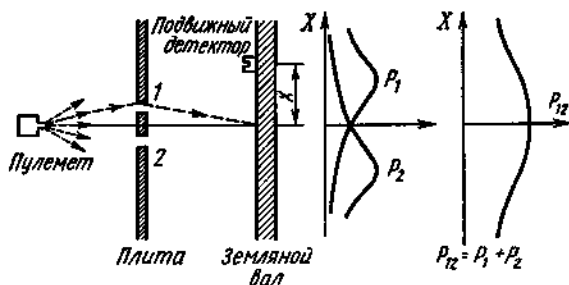


Рис. 21.2

предсказать движение пули во все последующие моменты времени. Однако поскольку стрельба ненаправленная, то условия прохождения пули сквозь отверстия плиты складываются случайным образом (пуля может, например, ricochetировать от края отверстия). По этой причине пули попадают в земляной вал в самые разные места.

Используя подвижный ящик с песком, считаем количество пуль, упавших на земляной вал в его различных местах. Введем величину $P = n/N$, где N — общее количество пуль, выпущенных при стрельбе за определенный промежуток времени; n — количество пуль, зарегистрированных в детекторе с координатами x за то же самое время. Начертим график функции $P(x)$, при этом, конечно, нам придется несколько сгладить ее ход из-за скачкообразности соседних значений. В результате мы получим кривую распределения вероятностей для падения пуль в то или иное место земляного вала. Ведь мы не можем заранее предсказать место падения какой-либо конкретной пули.

Сам опыт с пулеметной стрельбой будет заключаться в следующем. Закроем отверстие 2 и оставим открытым отверстие 1. Производя стрельбы и серию соответствующих измерений, построим кривую распределения вероятностей P_1 для этого случая. Затем закроем отверстие 1 и откроем 2. Выполним повторные стрельбы и их количественную обработку, в результате получим кривую P_2 . Наконец, оставим оба отверстия открытыми. Итогом стрельб и подсчетов явится кривая P_{12} (рис. 21.2).

Каким бы случайным ни было место падения отдельных пуль, каждая из них обладает своей определенной траекторией. Отсюда ясно, что кривая распределения вероятностей P_{12} представится в виде простой суммы кривых P_1 и P_2 :

$$P_{12} = P_1 + P_2.$$

Перейдем к опыту с электромагнитными волнами. Создадим условия для прохождения волн, близкие по своей постановке опыту с прохождением пуль (рис. 21.3). Пусть от излучателя на экран с двумя отверстиями падает плоская волна (излучатель находится достаточно далеко). Предположим также, что расстояние между отверстиями и размеры самих отверстий сравнимы с длиной волны. Тогда после прохождения через отверстие волна дифрагирует и падает на поглощающий

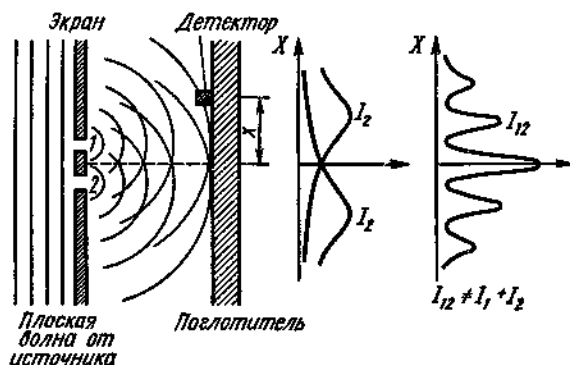


Рис. 21.3

экран с детектором (рис. 21.3). В качестве детектора можно взять миниатюрную антенну, соединенную с приемником электромагнитных волн. Этот детектор может регистрировать интенсивность волны (она определяется квадратом напряженности поля), например, по амплитуде радиосигнала.

Оставив отверстие 1 открытым (при закрытом отверстии 2), получим на поглощающем экране некоторое распределение интенсивности I_1 поля волны. Закрыв отверстие 1 и открыв отверстие 2, с помощью перемещающейся антенны определим интенсивность I_2 как функцию координат x антенны. При открытых обоих отверстиях проходящие волны интерферируют (см. § 19 и рис. 19.1). В итоге интенсивность

$$I_{12} \neq I_1 + I_2,$$

см. формулу (19.3).

Наконец, перейдем к опытам с электронами. Они являются некоторой идеализацией опытов с дифракцией электронов на кристаллах. Пусть электроны из электронной пушки падают на пластинку с двумя отверстиями (рис. 21.4). Расстояние между отверстиями достаточно мало (критерий малости будет указан в дальнейшем). Позади этой пластины

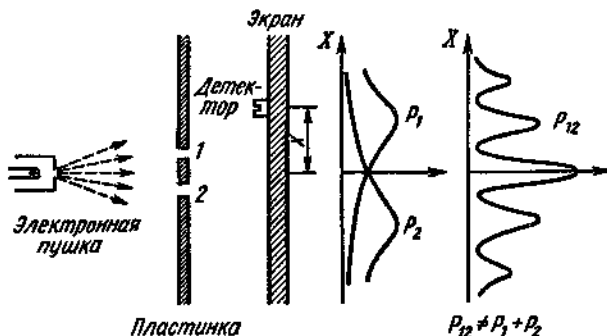


Рис. 21.4

находится экран с перемещающимся детектором, например счетчиком Гейгера, способным отмечать появление одиночных электронов. Произведем знакомые для нас операции. Закроем отверстие 2 и оставим открытым отверстие 1. Перемещая детектор вдоль экрана, будем регистрировать падающие электроны. Так же как и пули, электроны падают на экран в самых различных местах по вероятностным законам. В результате получим некоторую кривую распределения числа электронов, падающих в то или иное место экрана, т. е. функцию $P_1(x)$. Затем откроем отверстие 2 (при закрытом отверстии 1) и снова повторим указанную процедуру. Итогом явится кривая $P_2(x)$. Все так же, как у пули.

Однако произойдет странное, если открыть оба отверстия. В этом случае кривая распределения вероятностей P_{12} будет иметь вид, сходный с распределением интенсивностей I_{12} в опыте с волнами, т. е. в случае электронов

$$P_{12} \neq P_1 + P_2.$$

Другими словами, в опыте с электронами появляются эффекты интерференции.

§ 22. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Если для электронов характерна интерференция, значит, они могут уничтожать друг друга? Да нет же! Ведь каждый из них дает на фотопластинке единственное локальное пятно почернения. Никогда не фиксируется доля электрона. Тогда что же означает вид кривой P_{12} для электронов? Ответ: это распределение вероятностей для электронов попасть в то или другое место фотопластинки.

Из опытов по дифракции электронов можно обычным образом (см. § 19) измерить длину волны λ , соответствующую электрону с импульсом p . Естественно, что должна существовать связь между волновыми и корпускулярными* характеристиками электрона. Она существует и определяется выражением

$$\lambda = 2\pi \frac{\hbar}{p}, \quad (22.1)$$

где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка — фундаментальная постоянная, характеризующая явления атомного масштаба.

Проанализируем количественно дифракцию электронов на кристалле. Пусть Δx — постоянная решетки (ширина щели), θ — угол дифракционного отклонения электрона от первоначального направления движения. Условием первого максимума в дифракционной картине является, как известно (см. формулу (19.6) и рис. 19.1) выражение

$$(\lambda/\Delta x) \sim \sin \theta$$

или, учитывая, что углы близки к 90° ,

$$(\lambda/\Delta x) \sim 1. \quad (*)$$

* Корпускула в переводе с латинского означает частица.

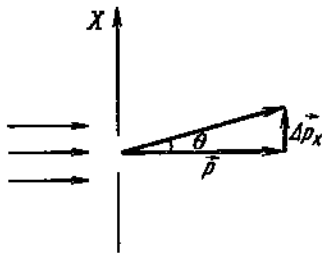


Рис. 22.1

Проведя аналогичное рассмотрение для изменения компоненты Δp_x импульса электрона при дифракции (рис. 22.1), получим

$$(\Delta p_x/p) \sim 1, \quad (**)$$

где p — первоначальный импульс электрона в пучке. Объединяя теперь (*) и (**), получим

$$\frac{\lambda}{\Delta x} \sim \frac{\Delta p_x}{p}$$

или

$$\Delta p_x \Delta x \sim \lambda p. \quad (***)$$

Наконец, учитывая (22.1), окончательно запишем (***) в виде

$$\Delta p_x \Delta x \gtrsim \hbar \quad (22.2)$$

и аналогично

$$\Delta p_y \Delta y \gtrsim \hbar; \quad \Delta p_z \Delta z \gtrsim \hbar.$$

Соотношение (22.2) называют **соотношением неопределенностей**. Оно имеет весьма общее значение и применимо не только к электронам, но и к другим микрообъектам.

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из соотношения неопределенностей. Если допустить, что координата электрона точно известна, т. е. $\Delta x \rightarrow 0$, то, согласно (22.2), $\Delta p_x \rightarrow \infty$. Это означает, что импульс, а значит, и скорость v становятся совершенно неопределенными как по модулю, так и по направлению. Другими словами, *координата и скорость частицы не могут иметь одновременно строго определенных значений*.

Указанное обстоятельство ведет к тому, что если в некоторый момент времени t известна координата электрона, то уже в следующий как угодно близкий момент времени $t + \Delta t$ его координата становится совершенно неопределенной. В самом деле, $v\Delta t$ есть смещение электрона за время Δt , а так как и модуль и направление скорости v в рассматриваемом случае являются неопределенными, то и координата электрона также окажется неопределенной. Мы вынуждены говорить лишь о вероятности нахождения электрона в той или иной точке пространства. Понятие траектории электрона в этих условиях полностью теряет смысл*.

Примерами других соотношений неопределенностей являются связи между неопределенностями в энергии ΔE и времени Δt :

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar, \quad (22.3)$$

между неопределенностями проекции момента импульса ΔL_z на ось Z и угла поворота $\Delta \varphi_z$ вокруг оси Z :

$$\Delta L_z \Delta \varphi_z \gtrsim \hbar \quad (22.4)$$

и аналогично

$$\Delta L_y \Delta \varphi_y \gtrsim \hbar; \quad \Delta L_x \Delta \varphi_x \gtrsim \hbar.$$

* О границах применимости понятия траектории см. § 23.3.

§ 23. ВОЛНЫ ВЕРОЯТНОСТИ

Сопоставляемые с микрообъектами волны иногда называют *волнами вероятности*. Эти волны нельзя рассматривать как распределенное в пространстве поле, подобное электромагнитному или другим полям. Их нельзя непосредственно измерить; они, как правило, описываются не вещественными, а комплексными функциями.

23.1 Комплексные числа. Формула Эйлера У читателя, по-видимому, уже имеются первоначальные сведения о комплексных числах. Напомним некоторые из них. *Комплексным числом* a называют число вида $a = p + iq$, где p и q — вещественные числа, а i — мнимая единица, определяемая как $i^2 = -1$. Для каждого комплексного числа a существует *комплексно-сопряженное* $a^* = p - iq$, причем

$$aa^* = (p + iq)(p - iq) = p^2 + q^2. \quad (23.1)$$

Комплексные числа можно графически изображать точками в «комплексной плоскости» (рис. 23.1). Тогда любое комплексное число

$$(x + iy) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (23.2)$$

ибо

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Представление комплексных чисел в виде (23.2) называют их *тригонометрической формой*. С ее помощью удобно перемножать комплексные числа:

$$a_1 a_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (23.3)$$

В частности,

$$aa \equiv a^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi), \quad (23.4)$$

причем $r = |a|$ называют *модулем комплексного числа*, он равен (рис. 23.1) $\sqrt{x^2 + y^2}$. В результате (23.1) можно записать так

$$aa^* = |a|^2. \quad (23.5)$$

Таким образом, *квадрат модуля комплексного числа есть число вещественное*.

Покажем возможность существования формулы (*формула Эйлера*)

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (23.6)$$

где e — вещественное число, определяемое как предел выражения

$$e = (1 + 1/n)^n \quad (23.7)$$

при неограниченном росте n . Для этого перепишем (23.7) в виде

$$e^{1/n} = 1 + 1/n, \quad (23.8)$$

тогда при малых $\varphi = 1/n$ (23.8) запишется как

$$e^\varphi \approx 1 + \varphi. \quad (23.9)$$

Обобщением (23.9) явится равенство

$$e^{i\varphi} \approx 1 + i\varphi. \quad (23.10)$$

Возвращаясь к (23.6), заметим, что при малых φ функция $\cos \varphi \approx 1$, а $\sin \varphi \approx \varphi$, т. е. правая часть (23.6) также дает $1 + i\varphi$. Мы убедились, что при малых углах формула (23.6) является справедливой. Оказывается, что и при произвольных значениях φ она также имеет место.

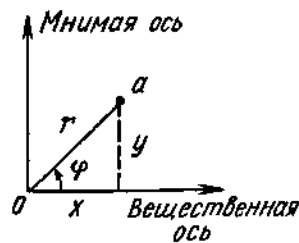


Рис. 23.1

Формула Эйлера (23.6) позволяет представить комплексное число в «показательном» виде. Действительно, достаточно умножить (23.6) на r , как сразу получим указанное представление:

$$a = r e^{i\varphi}, \quad (23.11)$$

где r — модуль комплексного числа a . Отметим, что поскольку

$$e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = e^0 = 1,$$

соотношение (23.5) автоматически выполняется.

23.2 Комплексные волны вероятности. Принцип суперпозиции
Волны вероятности, описывающие поведение электрона, имеют вид

$$\Psi = \psi e^{i\varphi}. \quad (23.12)$$

В математическом плане волны вероятности как комплексные функции характеризуются двумя вещественными функциями: модулем $|\psi|$, или *амплитудой волны вероятности*, и *фазой* φ . Фаза отражает волновые свойства электрона (она «заведует» интерференцией волн, связанных с электроном), а амплитуда отражает его корпускулярные свойства. Точнее, распределение вероятностей для электрона находится в той или иной точке пространства определяется выражением

$$\Psi \Psi^* = |\Psi|^2 = |\psi|^2. \quad (23.13)$$

Естественно, что $|\psi|^2$ может быть лишь величиной положительной, конечной, однозначной и непрерывной. Сумма $|\psi(x, y, z)|^2$ для всевозможных точек пространства должна быть равна единице — ведь электрон обязательно находится где-то.

В квантовой механике удалось создать такой математический образ — *волновую функцию* Ψ , в котором очень искусно комбинируются корпускулярные свойства частиц и волновой характер движения. Вероятностная интерпретация волновой функции явилась единственно правильной, логически согласованной и внутренне непротиворечивой.

Опишем с помощью волн вероятности опыт с дифракцией электронов (см. рис. 21.4). При открытом отверстии 1 (и закрытом 2) электрон описывается функцией

$$\Psi_1 = \psi_1 e^{i\alpha_1};$$

вероятность же его различных местонахождений на экране определяется выражением

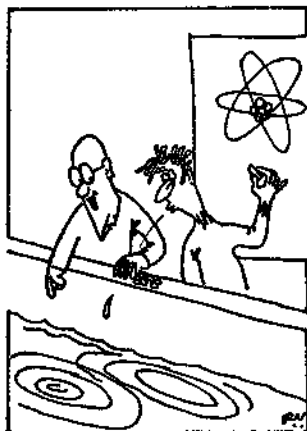
$$|\Psi_1|^2 = |\psi_1|^2.$$

При открытом отверстии 2 (и закрытом 1) электрон соответственно описывается функцией

$$\Psi_2 = \psi_2 e^{i\alpha_2},$$

а вероятности для мест его падений на экран определяются выражением

$$|\Psi_2|^2 = |\psi_2|^2.$$



При открытых обоих отверстиях состояние электрона описывается функцией

$$\Psi_{12} = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (23.14)$$

Для вероятностей координат электрона получим

$$|\Psi_{12}|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_2|\cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (23.15)$$

Если теперь сравнить (23.15) с (19.3), то мы увидим, что распределение вероятностей для местонахождений падающих на экран электронов носит интерференционный характер. При написании (23.15) мы пользуемся формулой Эйлера (23.6), а именно, берем вещественную часть от $e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}$, которая выражается как $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$.

Связь между состояниями электрона, даваемая соотношением (23.14), выражает принцип суперпозиции (наложения) квантовых состояний. Это один из основных принципов квантовой механики. Остановимся на корпускулярной интерпретации этого принципа, для чего запишем его в несколько более общей форме (мы имеем в виду по-прежнему случай прохождения электрона через экран с двумя отверстиями):

$$\Psi_{12} = a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2,$$

где a_1 и a_2 — некоторые (вообще говоря, комплексные) коэффициенты. Если система находится в состоянии Ψ_1 (открыто только отверстие 1), то $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, причем $|a_1|^2 = 1$, т. е. вероятность прохождения электроном отверстия 1 переходит в достоверность. Если же система находится в состоянии Ψ_2 (открыто только отверстие 2), то $a_2 \neq 0$, $a_1 = 0$ и при этом, естественно, $|a_2|^2 = 1$. В случае же нахождения системы в состоянии Ψ_{12} (открыты оба отверстия) у электрона существует возможность пройти либо сквозь отверстие 1 с вероятностью $|a_1|^2$, либо сквозь отверстие 2 с вероятностью $|a_2|^2$, причем

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1.$$

Заметим, что в идеализированном опыте с дифракцией электронов расстояние между отверстиями 1 и 2, как и размеры самих отверстий, сравнимо с длиной волны вероятности λ . Волна вероятности, связанная с электроном, как бы «проходит» сразу через оба отверстия и интерферирует сама с собой, обеспечивая соответствующее статистическое появление электронов в тех или иных местах. Именно в этом смысле иногда говорят, что каждый электрон «интерферирует сам с собой».

23.3 Предельный переход к классической механике Взаимоотношение квантовой и классической механики во многом аналогично взаимоотношению между волновой и геометрической оптикой. В квантовой механике существует динамическое уравнение движения, описывающее состояния частицы в пространстве и времени с помощью волновой функции. Это уравнение, называемое уравнением Шредингера, является линейным дифференциальным, что, кстати сказать, согласуется

с наличием принципа суперпозиции. В классической механике движение частицы рассматривается как движение по траектории.

В электродинамике волновые оптические явления описываются с помощью линейных дифференциальных уравнений (уравнений Максвелла). В предельном случае геометрической оптики свет рассматривается как распространяющийся по своеобразным траекториям — лучам.

В обычных условиях длина λ световых волн много меньше размеров d тел, с которыми свет взаимодействует. В § 19.3 было показано, что в таких случаях волновые свойства света (интерференция и дифракция) проявиться не могут.

Естественно ожидать, что и в квантовой механике в случаях, когда длина λ волны вероятности, связанная с частицей, много меньше размеров d характерной области движения, появится возможность применения понятия траектории частицы. Убедимся в этом на ряде примеров. Рассмотрим движение электрона в электронно-лучевой трубке при напряжении 100 В. Найдем длину волны λ , связанную с электроном. Исходим из выражения (22.1) $\lambda = 2\pi\hbar/p$, причем импульс p электрона определим из его связи с энергией $E = p^2/(2m_e)$. Тогда

$$\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2m_e E}.$$

Подстановка числовых значений дает

$$\lambda = \frac{6,3 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{(2 \cdot 10^{-30} \cdot 100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})^{1/2}} \text{ м} \approx 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Мы видим, что при движении в вакуумной трубке с размерами, например, $d = 0,1$ м координаты электрона определяются с точностью 10^{-10} м; это чрезвычайно высокая точность.

В отличие от условий $\lambda \ll d$, когда понятие траектории для частицы оправдано и хорошо работает, в случае $\lambda \sim d$ движение частицы носит волновой характер. Так, в § 24.1 будет показано, что электрон в атоме имеет неопределенность координаты порядка 10^{-10} м, что совпадает с размерами самого атома. Ясно, что для внутриатомного электрона понятие траектории теряет смысл.

При движении заряженных частиц в камере Вильсона или в пузырьковой камере хорошо видны треки — траектории частиц. Точность определения координаты частицы здесь обусловлена размерами пузырьков жидкости или газа, из которых образован трек. Пространственное разрешение треков $\sim 10^{-4}$ м, а длины волн, связанные, например, с электронами релятивистских энергий, составляют $\lambda \sim \hbar/(mc) \sim 10^{-13}$ м.

Если в выражение, описывающее поведение системы, входит постоянная \hbar , это явный признак того, что система квантовая. Относительное значение по-



Рис. 23.2

стоянной \hbar по сравнению с другими величинами той же размерности (Et или pr) определяет «степень квантовости» данной системы. Если возникает возможность полностью пренебречь \hbar , то автоматически совершается переход от квантового рассмотрения к классическому.

Таким образом, квантовая механика содержит в себе классическую в качестве предельного случая. Предельный вид волны вероятности для «почти классических» систем содержит в качестве фазы отношение S/\hbar , где S — так называемое *действие* системы, а \hbar рассматривается как *квант действия*. Для квазиклассических систем отношение S/\hbar велико. В этом случае, согласно оптической аналогии (рис. 23.2) и формуле (19.4), длина λ волны вероятности мала по сравнению с размерами d характерной области движения.

§ 24. ЭЛЕКТРОН В АТОМЕ

24.1 Энергия и ее квантование Рассмотрим простейший атом — атом водорода. Исходим из обычного классического выражения для полной энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}, \quad (24.1)$$

где e — заряд электрона; $p^2/(2m)$ — его кинетическая энергия, а слагаемое $-e^2/r$ определяет потенциальную энергию взаимодействия электрона с протоном, см. (14.10).

В квантовом случае координата и импульс не существуют одновременно, поэтому в (24.1) необходимо использовать соотношение неопределенностей (22.2). Для атома $\Delta p \sim p$ и $\Delta r \sim r$, поэтому, подставляя в (24.1) $p \sim \hbar/r$, получим

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}. \quad (24.2)$$

Чтобы двигаться дальше, приведем некоторые сведения из математики. В настоящее время в средней школе вводят понятие *производной* и учат *дифференцированию* элементарных функций. Если читатель к моменту знакомства с этой книгой еще не успел подойти к этим «премудростям», то мы поможем ему в их понимании. Итак, каков смысл понятия производной? Обратимся к графику функции $y = f(x)$ — см. рис. 24.1. Пусть точка O неподвижна, а точка A графика скользит в направлении к O . Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

и в пределе

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \equiv \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \text{ угла наклона касательной в точке } O. \quad (24.3)$$

Величину dy/dx называют производной от функции $y = f(x)$. Рецепт ее вычисления вытекает из самого определения:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (24.4)$$

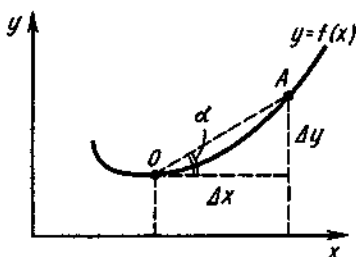


Рис. 24.1

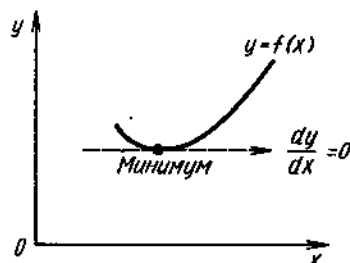


Рис. 24.2

В качестве примера найдем производную от функции $y = x^2$. Запишем последовательно

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (\Delta x)^2 + 2x\Delta x - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Обобщением полученной формулы

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

на случай любого показателя степени n (целого, дробного, отрицательного) является выражение

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}. \quad (24.5)$$

В частном случае $n = 2$, из (24.5) следует вышенаписанная производная.

Иногда возникают задачи нахождения минимума функции $y = f(x)$. Исходя из геометрического смысла производной [см. (24.3)], можно заключить, что условием минимума функции явится

$$\frac{dy}{dx} = 0. \quad (24.6)$$

В связи с этим обратите внимание на рис. 24.2. Здесь некоторые из читателей, по-видимому, заметят, что условие (24.6) может с равным успехом отметить и максимум функции. Да, это так! При рассмотрении физических вопросов из самой постановки задачи обычно бывает ясно, с чем мы имеем дело.

Вернемся к электрону в атоме водорода. Исходя непосредственно из (24.2), нельзя ничего сказать о размерах атома. Однако любая физическая система в свободном состоянии должна обладать минимумом возможной энергии. Применим к функции $E(r)$ условие (24.6), тогда, взяв производную от (24.2), получим

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0.$$

При нахождении производной dE/dr мы использовали формулу (24.5). Решая теперь уравнение $dE/dr = 0$, находим размеры атома (так называемый *боровский радиус*)

$$r_a = \frac{\hbar^2}{me^2}. \quad (24.7)$$

В (24.7) входят лишь фундаментальные постоянные; их комбинация устанавливает естественный масштаб длин для атомных явлений. Поскольку (24.7) записано в СГС, значение констант следует брать в СГС и лишь в ответе переходить к СИ. В результате

$$r_a = 0,52 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Подставив (24.7) в (24.2), найдем энергию атомного электрона

$$E_a = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,6 \text{ эВ.} \quad (24.8)$$

Таким образом, природа уготовила и естественный масштаб энергии для атомных явлений. Отрицательный знак в энергии (24.8) означает, что электрон связан в атоме (см. также рис. 16.6). Для его отрыва (ионизации атома водорода) необходима энергия в 13,6 эВ.

Электроны в атоме являются нерелятивистскими объектами. В самом деле, из соотношения неопределенностей скорость электрона $v \sim \hbar/(mr_a) \sim 10^6$ м/с, что на два порядка меньше предельной скорости c . По этой причине и в (24.7), и в (24.8) отсутствует фундаментальная постоянная c .

Что касается длин волн вероятности λ , то для атомных электронов $\lambda \sim \hbar/(mv) \sim 10^{-10}$ м, т. е. неопределенность в их координате ($\Delta r \sim \lambda$) порядка размеров самого атома. Электрон в атоме может быть обнаружен в любом месте, однако наиболее вероятно его местопребывание вблизи значений r_a .

Применение основных квантовомеханических положений о корпускулярно-волновом дуализме к электрону в атоме совершенно естественно приводит к дискретности (квантованию) значений таких величин, как энергия и момент импульса.

Стационарные состояния электрона в атоме, т. е. состояния с определенной энергией, описывают с помощью амплитуд вероятности $\psi(x, y, z)$. Последние же находят из уравнения Шредингера, не содержащего времени.

Для стационарных состояний электрона в атоме мы не можем даже представлять себе электрон движущимся вокруг ядра в обычном смысле. Плотность вероятности $|\psi|^2$ меняется от точки к точке. Последнее означает, что вероятности обнаружения электрона в различных элементах объема пространства атома различны.

Поскольку пространственная область для электронных волн вероятности ψ как-то ограничена размерами атома, то следует ожидать, что ψ образуют некоторый дискретный набор функций $\psi_n(x, y, z)$, где n пробегает значения 1, 2, 3, ... Здесь весьма уместно провести аналогию со стоячими электромагнитными волнами, образующимися в замкнутой полости (см. § 18.4, а также рис. 18.5).

Указанному набору функций ψ_n , явный вид которых будет приведен в дальнейшем, соответствует дискретный набор значений энергии

$$E_n = \frac{E_a}{n^2} = -\left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right) \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (24.9)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ называют *главным квантовым числом*.

Формула (24.9) представляет собой спектр квантованных значений энергии электрона в одноэлектронном атоме. Число «уровней энергии» в этом спектре не ограничено. При $n = 1$ формула (24.9) переходит в (24.8); это значение энергии соответствует так называемому *основному состоянию* атома. В основном состоянии атом обладает наименьшим значением энергии. Все состояния атома при $n > 1$ называют *возбужденными* (рис. 24.3).

24.2 Момент импульса и его квантование При рассмотрении в § 16.3 задачи о классическом движении заряда в кулоновском поле было получено (в полярных координатах) выражение для полной энергии

$$E = \frac{m}{2} v_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \quad (24.10)$$

где $mv_r^2/2$ — радиальная часть кинетической энергии, а $L^2/(2mr^2)$ — ее орбитальная часть. Учтем в (24.10) соотношение неопределенности, тогда, замечая, что $mv_r r \sim \hbar$, получим

$$E = \frac{1}{2mr^2} (\hbar^2 + L^2) - \frac{e^2}{r}. \quad (24.11)$$

Из (24.11) видно, что при квантовании E правая часть может принимать дискретные значения, соответствующие E , лишь за счет L (момент импульса). Из (24.11) видно также, что \hbar является естественной единицей для измерения момента импульса электрона. Оказывается, что

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1), \quad (24.12)$$

где l , называемое *орбитальным квантовым числом*, имеет дискретные значения

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Таким образом, момент импульса электрона в атоме также является квантованной величиной.

Весьма необычно то обстоятельство, что у атомного электрона может быть $L = 0$. Это соответствует с точки зрения классической механики движению электрона вдоль радиуса с прохождением через центр, см. (24.10). Возможные значения l ограничены значением n .

Момент импульса L является векторной величиной. Это означает, что для его задания необходимо знать не только модуль L , но и направление этого вектора. Квантование значений L , естественно, ведет к дискретности и направлений момента.

Вспомним, что в классической электродинамике механический момент L заряда связан с его магнитным моментом p_m , см. (15.6). В квантовом случае для атомного электрона связь орбитального механического момента с соответствующим магнитным моментом определяется той же формулой

$$p_m = \frac{e}{2mc} L, \quad (24.13)$$

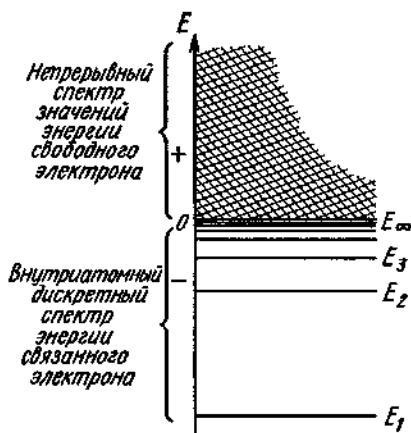


Рис. 24.3

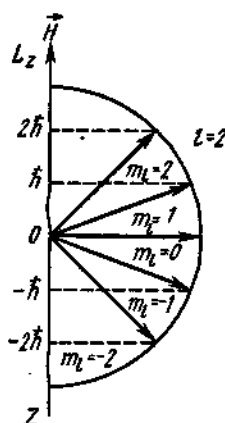


Рис. 24.4

причем здесь уже учтено, что скорость атомных электронов $v \ll c$. Во внешнем магнитном поле H момент p_m испытывает ориентирующее воздействие. Дополнительную энергию атомного электрона в магнитном поле оценим по формуле, аналогичной (14.18), выражающей энергию диполя d в электрическом поле E , т. е.

$$U_m = p_m \cdot H \sim \frac{e\hbar}{2mc} H \sim 10^{-3} \text{ эВ.} \quad (24.14)$$

В (24.14) для H мы взяли его максимально возможное значение $\sim 10^5$ Гс, получаемое в современных лабораториях. Имея в виду (24.8), можно заключить, что возможные квантовые состояния электрона при данном n , но различном l образуют группу очень близких подсостояний.

Итак, какова дискретность в ориентации момента? Пусть направление вдоль оси Z является выделенным (направление магнитного поля), тогда проекции момента

$$L_z = m_l \hbar. \quad (24.15)$$

Возможны лишь такие ориентации момента, проекции которых на выделенное направление в пространстве равны целым (положительным и отрицательным) числам в единицах \hbar , включая нуль. Само число m_l называют магнитным квантовым числом, его значения при данном l лежат в пределах от $+l$ до $-l$, проходя через 0, так что число возможных ориентаций вектора момента L в магнитном поле равно $2l + 1$. В качестве примера возьмем состояние электрона с $l=2$. Тогда общее число возможных ориентаций момента равно $2 \cdot 2 + 1 = 5$. Все остальное показано на рис. 24.4.

Заметим, что здесь мы говорим лишь об одной проекции момента, ибо две остальные неопределенны. Это обстоятельство находится в соответствии с соотношением неопределенностей (22.4).

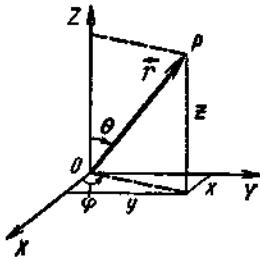


Рис. 24.5

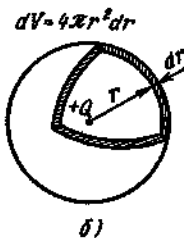
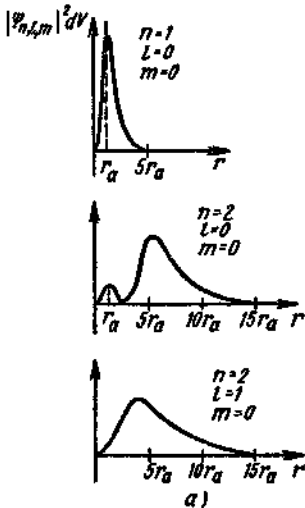


Рис. 24.6

24.3 Амплитуды вероятности и квантовые числа Последовательное рассмотрение задачи об атоме водорода заключается в решении динамического уравнения квантовой механики (уравнения Шредингера). Результатом решения является набор амплитуд вероятности $\psi_{n,l,m}(x, y, z)$, дающих полное описание квантовых состояний электрона в атоме.

Как всегда, математическое рассмотрение может существенно упроститься, если учесть условия симметрии, действующие в задаче. Поле ядра является сферически симметричным. Перейдем от декартовых координат (x, y, z) к так называемым *сферическим* (r, θ, ϕ) — см. рис. 24.5. Эти координаты наиболее приспособлены к описанию физических ситуаций, в которых имеется сферическая симметрия. В сферических координатах амплитуды вероятности $\psi(x, y, z)$ переходят в $\psi(r, \theta, \phi)$. Упрощающим обстоятельством является то, что функция трех переменных $\psi(r, \theta, \phi)$ распадается на три функции $R(r)$, $\Theta(\theta)$ и $\Phi(\phi)$, каждая из которых зависит лишь от одной переменной:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi). \quad (24.16)$$

Решения уравнения Шредингера должны удовлетворять естественным условиям:

- 1) в каждой точке пространства амплитуда вероятности характеризуется одним-единственным значением;
- 2) амплитуда вероятности нигде не может обращаться в бесконечность;
- 3) амплитуда вероятности является непрерывной функцией координат.

Такого рода решения в задаче об атоме водорода возможны, как оказывается, лишь при целых значениях некоторых параметров, от которых зависят функции

$R(r)$, $\Theta(\theta)$ и $\Phi(\phi)$. И самым замечательным стало то, что этими параметрами оказались квантовые числа n , l , m . Это означало, что (24.16) можно записать так:

$$\psi_{n,l,m} = R_{n,l} \Theta_{l,m} \Phi_m. \quad (24.17)$$

Вероятности $|\psi_{n,l,m}|^2 dV$ обнаружения электрона при определенных значениях n , l и m в произвольном шаровом слое, заключенном

между значениями r и $r + dr$, приведены на рис. 24.6, а. Сам способ определения элемента объема dV ясен из рис. 24.6, б, к которому нужно лишь заметить, что $4\pi r^2$ есть поверхность сферы, а dr — толщина сферической оболочки.

В трехмерной пространственной задаче об атомном электро́не электрон обладает тремя степенями свободы и для описания его поведения нужны три квантовых числа.

§ 25. МНОГОЭЛЕКТРОННЫЙ АТОМ

25.1 Спин электрона Опыт показывает, что электрон наряду с орбитальным механическим моментом, связанным с его движением в пространстве, обладает и некоторым собственным механическим моментом, который существует у него, в частности, в системе отсчета, где он покоится. Этот собственный момент следует относить к проявлениям внутренних степеней свободы электрона, ибо три координаты вполне исчерпывают его пространственные степени свободы. Внутренний механический момент частицы называют ее *спином*. Естественно, что со спином связан и соответствующий магнитный момент.

В рамках рассмотренных выше представлений спин электрона должен вводиться как нечто дополнительное. Релятивистское же обобщение квантовой механики естественно приводит к учету спина электрона. Поскольку в атоме скорости электронов $v \ll c$, спин должен слабо отразиться на спектре энергии атома. Действительно, магнитное взаимодействие спин — орбита, пропорциональное $1/c^2$ (см. ниже), определяет лишь тонкую структуру уровней энергии (их расщепление). Однако в проблеме многоэлектронного атома спин электрона играет решающую роль. Он является четвертым квантовым числом, определяющим внутриатомные состояния.

Спиновый момент S электрона описывается формулой

$$S^2 = \hbar^2 s(s + 1), \quad (25.1)$$

которая аналогична (24.12). В (25.1) спиновое квантовое число $s = 1/2$. Дискретность же в ориентации спина определяется выражением

$$S_z = m_s \hbar. \quad (25.2)$$

Видно, что (25.2) вполне аналогично (24.15). Число ориентаций спина равно $2s + 1 = 2(1/2) + 1 = 2$. Сами же проекции спина на выделенное направление в пространстве

$$S_z = \pm \hbar/2. \quad (25.3)$$

Связь между спином S и его магнитным моментом \mathbf{p}_{ms} изображается в виде

$$\mathbf{p}_{ms} = \frac{e}{mc} \mathbf{S}. \quad (25.4)$$

При сравнении (25.4) с (24.13) видно, что отношение магнитного

момента к механическому в случае спина в два раза больше. Это различие четко вытекает из релятивистских квантовых уравнений электрона во внешнем поле.

Оценим величину тонкой структуры уровней энергии в атоме водорода. Она связана с взаимодействием спинового \mathbf{p}_{ms} и орбитального \mathbf{p}_{ml} магнитных моментов электрона. Исходим из классического выражения для энергии магнитного взаимодействия спин — орбита

$$U_{sl} \sim \frac{\mathbf{p}_{ms}\mathbf{p}_{ml}}{r_a^3}. \quad (25.5)$$

Формула (25.5) построена аналогично формуле (14.19). Подставим в (25.5)

$$p_{ml} = \frac{e}{2mc} L_l = \frac{e\hbar}{2mc},$$

$$p_{ms} = \frac{e}{mc} L_s = \frac{e\hbar}{mc},$$

а также выражение (24.7) для размеров r_a атома. В результате получим

$$U_{sl} \sim \frac{me^8}{2\hbar^4} \left(\frac{1}{c^2} \right) = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2}. \quad (25.6)$$

Из сопоставления (25.6) с (24.8) видно, что эти выражения отличаются наличием в (25.6) безразмерного множителя $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx \approx 1/137$, называемого *постоянной тонкой структуры*. Так как $\alpha^2 \sim (10^{-2})^2 \sim 10^{-4}$, то

$$U_{sl} \sim 10^{-4} E_a.$$

Отметим существенное отличие орбитального механического момента электрона от его спина. Согласно (24.12) при больших значениях l орбитальный момент $L \gg \hbar$, что соответствует переходу к представлениям классической механики. Модуль же спина электрона, согласно (25.1), есть

$$S = \frac{\hbar}{2} \sqrt{3}.$$

При $\hbar \rightarrow 0$ спин $S \rightarrow 0$, т. е. классического предела для спинового момента не существует. Вследствие этого спину электрона нельзя, строго говоря, дать наглядной классической интерпретации, например представлять его как результат вращения электрона вокруг собственной оси.

Спин есть чисто квантовая характеристика частицы. Наряду с массой и электрическим зарядом спин является важнейшей постоянной частицы. У многих элементарных частиц — лептонов и большинства барионов — спин равен $1/2$; π - и K -мезоны имеют нулевой спин, спин фотонов равен 1. Что касается атомных ядер, то спин является целым или полуцелым в зависимости от того, четно или нечетно число входящих в их состав нуклонов (см. § 1).

Все сказанное о спине собрано на рис. 25.1 (сравните этот рисунок с рис. 24.4).

25.2 Системы одинаковых частиц. Квантовые статистики До сих пор мы говорили, что амплитуда вероятности частиц есть функция координат. Введение понятия спина приводит к тому, что амплитуда вероятности должна быть функцией и координат и переменной спина, указывающей значение проекции спина па выбранное направление в пространстве и пробегающей ограниченное число дискретных значений.

В системе одинаковых частиц (например, электронов) существует особая симметрия амплитуд вероятностей, связанная с неразличимостью таких частиц. В самом деле, в связи с отсутствием у частиц траекторий мы не можем следить за движением каждой из них. Поэтому *состояния системы, получающиеся в результате простой перестановки частиц, должны быть физически тождественны.*

Рассмотрим систему, состоящую из двух одинаковых частиц с амплитудой вероятности $\psi(\xi_1, \xi_2)$, где ξ_1 и ξ_2 есть совокупности координат и спина каждой из частиц в отдельности. Указанная запись, в частности, означает, что волны вероятности, описывающие поведение двух и более частиц, есть волны в абстрактном математическом многомерном пространстве, а не в реальном трехмерном физическом пространстве. Это лишний раз показывает, что с волнами вероятности нельзя сопоставлять каких-либо реальных полей.

Произведем в рассматриваемой системе обмен частицами, тогда

$$|\psi(\xi_1, \xi_2)|^2 = |\psi(\xi_2, \xi_1)|^2, \quad (25.7)$$

ведь непосредственный физический смысл имеет лишь $|\psi|^2$. В результате из (25.7) следует, что

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \pm \psi(\xi_2, \xi_1). \quad (25.8)$$

Соотношение (25.8) показывает, что система, состоящая из двух одинаковых частиц, может описываться либо симметричными (+), либо антисимметричными (—) по отношению к перестановке частиц амплитудами вероятности.

Указанное свойство симметрии амплитуд вероятностей однозначно связано со значением спина частиц. Частицам, обладающим полуцелым спином (в единицах \hbar), сопоставляются антисимметричные ψ -функции, а частицам с целым или нулевым спином — симметричные ψ -функции.

Прежде чем перейти к рассмотрению следствий из указанных свойств перестановочной симметрии амплитуд вероятностей систем одинаковых частиц, остановимся кратко на одном результате теории вероятностей: *вероятность одновременного появления двух независимых событий есть произведение вероятностей отдельных событий.* Возьмем, например, две игральные кости (кубики с числовыми метками от 1 до 6 на каждой из последующих граней). Если

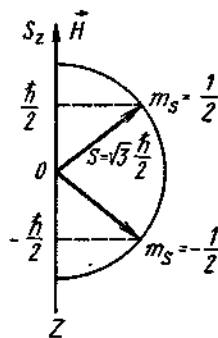


Рис. 25.1

бросать кубик, вероятность появления любого из указанных чисел равна $1/6$. Это вполне очевидно. Если же два испытателя одновременно независимым образом бросают каждый по одному кубику, то вероятность одновременного появления любых заданных наперед пар чисел составит $(1/6) \cdot (1/6) = 1/36$. В этом можете убедиться сами, проделав вдвоем с товарищем подобные испытания.

Рассмотрим вновь систему из двух одинаковых не взаимодействующих частей. Каждая из них может находиться в одном из своих квантовых состояний ψ_{N_1} , ψ_{N_2} и т. д., где N_i — номер квантового состояния частицы. Как будет выглядеть амплитуда вероятности ψ системы? Во-первых, вследствие независимости частиц она должна выражаться в виде произведения амплитуд вероятностей каждой из частиц, во-вторых, вследствие принципа суперпозиции [см. (23.14)] ψ должно содержать линейную комбинацию указанных произведений, различающихся перестановками частиц. Если спины частиц целые, то ψ не должно менять знака при перестановке частиц, т. е. выражаться симметричной комбинацией

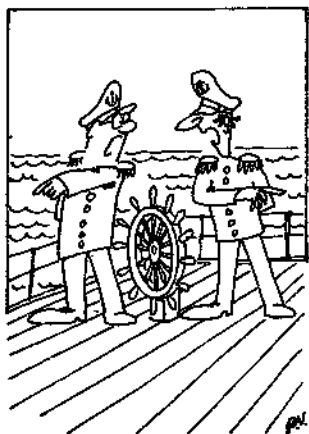
$$\psi(\xi_1, \xi_2) \sim \psi_{N_1}(\xi_1)\psi_{N_2}(\xi_2) + \psi_{N_1}(\xi_2)\psi_{N_2}(\xi_1); \quad (25.9)$$

если же спины частиц полуцелые, то ψ при перестановке частиц меняет знак, т. е. представляет собой антисимметричную комбинацию:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) \sim \psi_{N_1}(\xi_1)\psi_{N_2}(\xi_2) - \psi_{N_1}(\xi_2)\psi_{N_2}(\xi_1). \quad (25.10)$$

Проанализируем выражение (25.10). Если среди номеров квантовых состояний частиц два совпадут, то $\psi(\xi_1, \xi_2) = 0$. Это означает, что в системе, состоящей из двух одинаковых частиц с полуцелым спином, в одном и том же квантовом состоянии не может находиться более одной частицы.

Из (25.9) ясно, что в системе, состоящей из двух одинаковых частиц с целым спином, ограничения на заполнения квантовых состояний отсутствуют. Правила заселенности квантовых состояний для частиц с полуцелым спином называют статистикой Ферми — Дирака, для частиц с целым спином — статистикой Бозе — Эйнштейна*.



Полученные результаты непосредственно обобщаются на системы, состоящие из произвольного числа одинаковых частиц. Амплитуды вероятностей таких систем могут быть лишь симметричными или антисимметричными по отношению к перестановке любой пары частиц. Таким образом, в квантовой механике в системе одинаковых частиц даже в отсутствие не-

* В дальнейшем для краткости мы будем употреблять, как это принято, термины «статистика Ферми» и «статистика Бозе».

посредственного силового взаимодействия в системе существует своеобразное взаимное влияние частиц.

25.3. Атомные квантовые состояния Электроны в атоме образуют систему одинаковых частиц с полуцелым спином. Совокупность атомных электронов подчиняется статистике Ферми, т. е. каждое квантовое состояние в атоме может быть занято лишь одним электроном. Само атомное квантовое состояние определяется набором квантовых чисел n, l, m_l, m_s .

Сколько может быть допустимых квантовых состояний при заданном значении n главного квантового числа? Орбитальное квантовое число l пробегает целые значения от $l=0$ до $l=n-1$, см. (24.12). Для каждого l возможны $2l+1$ значений магнитного квантового числа m_l , см. пояснения к (24.15). Наконец, учет спинового магнитного квантового числа m_s ведет к удвоению общего числа состояний. В итоге при данном n число возможных квантовых состояний равно

$$2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1).$$

Вычислим эту сумму. Приписывая последовательно l указанные значения, получим

$$2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2 \{1 + 3 + 5 + \dots + [2(n-1) + 1]\} = 2 [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)].$$

Слагаемые в квадратных скобках (их число равно n) образуют арифметическую прогрессию, сумма S_n которой, как известно, определяется выражением

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n,$$

где a_1, a_n — соответственно первый и последний члены прогрессии, содержащей всего n членов. Применяя формулу для S_n к рассматриваемому случаю, получим

$$S_n = \left[\frac{1 + (2n-1)}{2} \right] n = n^2.$$

Окончательно

$$2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2. \quad (25.11)$$

Составим таблицу по формуле (25.11).

Т а б л и ц а 25.1

Главное квантовое число n	Число квантовых состояний в атоме при данном n
1	2
2	8
3	18
4	32

Рассмотренная выше классификация атомных квантовых состояний получена в применении к одноэлектронному атому. В многоэлектронном атоме между электронами существует взаимодействие, тем не менее оказывается, что к ним с достаточной точностью применимо «приближение независимых частиц». Это означает, что электроны должны последовательно заполнять атомные квантовые состояния в соответствии с приведенной классификацией.

Электронные состояния, соответствующие данному значению главного квантового числа (см. табл. 25.1), обладают весьма близкими значениями энергии, см. пояснения к (24.14) и (25.6). О таких состояниях говорят, что они образуют энергетическую оболочку. Если электроны целиком заполняют все возможные состояния данной оболочки, ее называют замкнутой. В замкнутой оболочке полный орбитальный момент всех ее электронов, а также полный спин обращаются в нуль. Распределение эффективного электрического заряда в замкнутых оболочках сферически симметрично. Это означает, что атомы, состоящие только из замкнутых оболочек, не обладают дипольным электрическим моментом.

Если рассматривать химические элементы в порядке возрастания заряда ядер их атомов, то, как известно, в изменении свойств мы обнаружим определенную периодичность. Периодическая таблица элементов содержит периоды с числом элементов в периодах 2, 8, 18, 32, что находится в соответствии с данными таблицы 25.1. Это объясняет природу химической периодичности.

§ 26. КВАНТОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ АТОМА

26.1 Квантовые переходы. Линейчатые спектры излучения Из предыдущих рассуждений и оценок легко заключить, что при переходе атома с возбужденных состояний в основное возникает электромагнитное излучение. Поскольку энергия электронных состояний в атоме квантована, квантована и энергия излучения. А именно

$$\Delta E = \hbar\omega, \quad (26.1)$$

где ΔE — разность энергий между энергетическими уровнями соответствующего возбужденного и основного состояний.

Следует иметь в виду, что переходы возможны и между возбужденными состояниями. Если E_i и E_k — энергии i -го и k -го возбужденных состояний, то частота излучения

$$\omega_{ik} = \frac{E_i - E_k}{\hbar}. \quad (26.2)$$

На рис. 26.1 изображены спектральные серии излучения атома водорода. Естественно, что сам спектр излучения состоит из отдельных линий, соответствующих переходам между дискретными уровнями энергии в атоме. Из рисунка видно, что возбужденный атом может явиться источником электромагнитного излучения в весьма широком диапазоне частот. Наблюдаемое дискретное излучение атомов охватывает область инфракрасного излучения, видимую об-

ласть, ультрафиолетовую часть спектра и даже рентгеновский линейчатый спектр (в случае тяжелых атомов).

Заметим, что атомы разных химических элементов обладают различными спектрами излучения. На этом основан спектральный анализ химического состава таких космических объектов, как Солнце и звезды.

26.2 Фотон. Понятие четности. Правила отбора . Энергия кванта излучения, образовавшегося в результате перехода

$$\left(\begin{array}{c} \text{Возбужденный} \\ \text{атом} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Нормальный} \\ \text{атом} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Квант} \\ \text{поля} \end{array} \right),$$

составляет

$$E = \hbar\omega, \quad (26.3)$$

его момент импульса

$$L = \hbar. \quad (26.4)$$

Квант электромагнитного излучения — его называют *фотоном* — является элементарной частицей. Однако это не совсем обычная частица. Для фотона, например, невозможно разделение полного механического момента на орбитальную и спиновую части. По определению, спин есть момент покоящейся частицы. Для фотона же состояние покоя не существует, ибо его скорость равна c в любой инерциальной системе отсчета.

Не всякие радиационные переходы в атоме возможны, как это могло бы показаться, если исходить из (26.2). В самом деле, ведь для возбужденного изолированного атома выполняются законы сохранения энергии и механического момента. Переход, возможный в энергетическом отношении, может оказаться запрещенным с точки зрения правил (24.12) квантования момента.

Для объяснения радиационных переходов в атоме совокупность квантовых чисел, связанная с энергией и моментом, нуждается, как показывает опыт, в некоторых правилах отбора. Они проистекают из закона сохранения момента и из так называемого закона **сохранения четности** квантового состояния замкнутой системы.

Причина существования закона сохранения четности очень глубока. Дело в том, что физические соотношения не изменяют своего вида при преобразовании координат $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ (на примере законов движения Ньютона, мы убе-

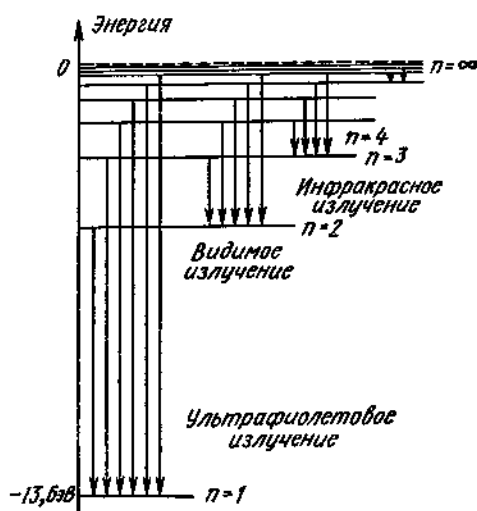


Рис. 26.1

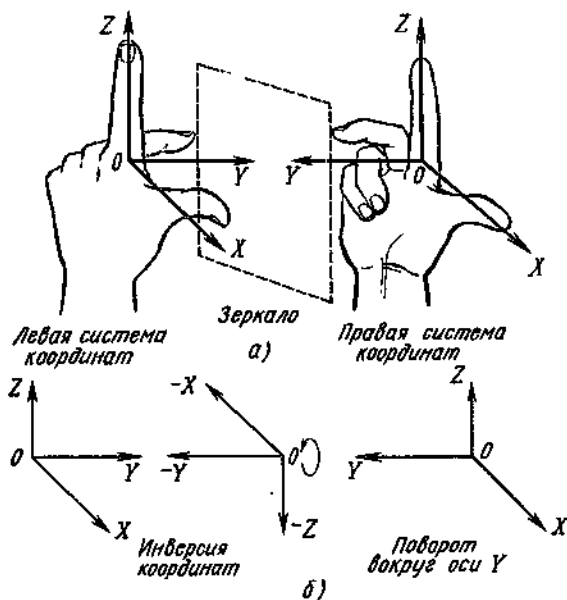


Рис. 26.2

димся в этом ниже). Это преобразование называют *инверсией* координат. Отмеченное обстоятельство означает, что для описания законов природы одинаково пригодны как левая, так и правая системы координат* (рис. 26.2 а).

Преобразование $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ведет к тому, что, например, вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ переходит в вектор $-\mathbf{v}$; вектор импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ переходит в $-\mathbf{p}$, а вектор силы $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ заменяется на $-\mathbf{F}$. В результате уравнения движения классической механики $m d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$ остаются неизменными при преобразовании инверсии.

Поведение физических величин при преобразовании инверсии характеризуют понятием *четности*. Мы видели, что, например, векторы \mathbf{v} , \mathbf{p} , \mathbf{F} меняют знак при преобразовании $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$; по этой причине им приписывают *отрицательную четность*. Однако, например, вектор момента импульса $\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$, определяемый как векторное произведение векторов \mathbf{r} и \mathbf{p} , не меняет знака при инверсии координат; таким же свойством обладает и вектор момента силы $\mathbf{K} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]$. Указанным векторам приписывают *положительную четность*.

В квантовой механике требование инвариантности уравнений относительно преобразования инверсии накладывает определенные ограничения на характер волновых функций $\psi_{n,l,m}(x, y, z)$, описывающих кван-

* На рис. 26.2,б показаны две операции: инверсия системы координат и ее поворот на 180° вокруг оси Y. Именно так осуществляется *зеркальное отражение*, т. е. переход от левой к правой системе координат.

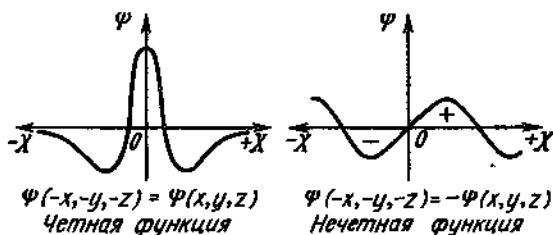


Рис. 26.3

товые состояния внутриатомных электронов. Эти функции могут быть либо четными, т. е. $\psi(-x, -y, -z) = \psi(x, y, z)$, либо нечетными, когда $\psi(-x, -y, -z) = -\psi(x, y, z)$ (рис. 26.3).

К каким следствиям ведет зеркальная симметрия законов физики? Если в природе возможен некоторый процесс, то возможен и зеркально отраженный процесс, причем все характеристики обоих процессов одинаковы. Зеркальной симметрией обладают процессы, протекающие под действием гравитационного, электромагнитного и сильного взаимодействий (слабые взаимодействия составляют исключение!). Такие процессы удовлетворяют правилам отбора, связанным с сохранением четности: четность замкнутой системы не должна меняться в результате происходящих в ней процессов.

Обратимся к радиационным переходам в атоме. В качестве примера рассмотрим излучение атома водорода при переходе его из квантового возбужденного состояния $2p$ ($n=2, l=1$) в основное состояние $1s$ ($n=1, l=0$). Характер симметрии и распределение в пространстве электромагнитного поля, излучаемого при таком переходе, такие же, как и у поля излучения осциллирующего электрического диполя.

Фотоны, которые сопоставляются указанному излучению, называют *электродипольными*. Полный механический момент j фотона, как уже отмечалось, не может быть разделен на орбитальный l и спиновый s моменты. Сам же полный момент j частицы принимает лишь целочисленный ряд значений $j=1, 2, 3, \dots$. У электродипольного фотона $j=1$, а четность P_γ состояния равна $(-1)^j = -1$, т. е. его состояние нечетно.

Атом водорода в основном состоянии имеет орбитальное квантовое число $l=0$, а четность $P_{l=0}$ этого состояния равна $(-1)^l = (-1)^0 = +1$, т. е. состояние четно. Для исходного же возбужденного атома водорода $l=1$, это значит, что такой атом находился в нечетном состоянии ($P_{l=1} = (-1)^l = -1$). Таким образом, изучаемый радиационный процесс можно представить схемой, приведенной на рис. 26.4.

В результате рассматриваемого излучательного перехода орбитальное квантовое число атома изменилось на $\Delta l = -1$; естественно, момент импульса в этом процессе сохранился. Что касается сохранения четности, то предварительно отметим, что четность P системы из двух не взаимодействующих частей с четностями P_1 и P_2 равна

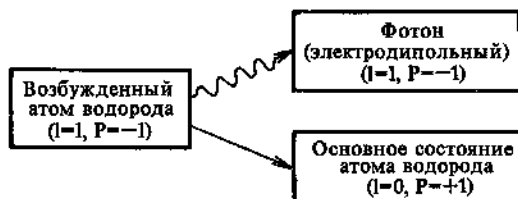


Рис. 26.4

произведению $P_1 P_2$ четностей этих частей. Тогда должно быть

$$P_{l=1}^{\text{атом}} = P_{\gamma} P_{l=0}^{\text{атом}}.$$

Действительно, подставляя соответствующие значения четностей, получим

$$(-1) = (-1)(+1).$$

В итоге сохранение четности в радиационных дипольных переходах (помимо сохранения энергии и момента) даст следующее обобщенное правило отбора:

$$\Delta l = \pm 1, \quad (26.5)$$

т. е. момент может изменяться лишь на \hbar .

Для мультипольных радиационных переходов, вероятность которых значительно меньше, указанное правило отбора (26.5) может не выполняться.

Вернемся к рассмотрению свойств фотонов. Целочисленность механического момента фотона говорит о том, что он представляет собой бозе-частицу. Последнее означает, что совокупность фотонов подчиняется статистике Бозе. Это важнейшее обстоятельство ведет к ряду замечательных следствий.

Рассмотренное выше излучение атомов можно назвать спонтанным (самопроизвольным). Однако если на возбужденный атом падает фотон такого типа, который атом сам может испустить, то вероятность излучения атомом тождественного фотона резко возрастает. Это видно из (25.9): амплитуда вероятности образования системы двух одинаковых фотонов, т. е. фотонов, имеющих одинаковую энергию и момент, умножается на 2. Если в начальном состоянии поля было N одинаковых фотонов, то вероятность излучения атомом такого же фотона возрастает в N раз. Этот эффект называют вынужденным излучением*.

Применимость к фотонам статистики Бозе приводит к тому, что в одном и том же квантовом состоянии поля может скапливаться неограниченное число фотонов. Это обстоятельство позволяет, с одной

* Рассмотрение прикладных задач, связанных с вынужденным излучением (см. § 62.9), позволит более детально остановиться на понятии «тождественный фотон».

стороны, ввести представление о поле как совокупности фотонов, а с другой делает возможным предельный переход от фотонной картины поля к классическим электромагнитным волнам.

Указанные соображения позволяют немедленно получить выражение для импульса p фотона. В самом деле, исходя из связи (18.9) между плотностью импульса и плотностью энергии в классической электромагнитной волне, получим

$$p = E/c = \hbar \omega/c. \quad (26.6)$$

Классической электромагнитной волне соответствует совокупность фотонов одинаковой частоты (энергии) и поляризации (момента), распространяющихся в одном направлении.

Таким образом, квантовые свойства могут проявлять не только обычные частицы, но и поля. Фотоны являются одновременно и квантовыми и релятивистскими объектами, см. (26.6). В этой связи уместно рассмотреть схему взаимоотношений фундаментальных физических теорий (рис. 26.5) — условная запись на рисунке $\hbar = 0$ и $c = \infty$ означает, что конечность этих величин несущественна для данной области явлений.

Наконец, остановимся еще на одном свойстве фотона как релятивистской частицы. Выражение $p = E/c$, согласно общему релятивистскому соотношению (10.6), позволяет заключить, что фотон — безмассовая частица ($m = 0$).

Указанное свойство фотона, в свою очередь, приводит к утверждению, что скорость фотона может быть только равной c . В самом деле, если в формулах (10.9) и (10.10) положить $v = c$, то импульс p и энергия E обратятся в бесконечность. Это означает, что частица с отличной от нуля массой не может двигаться со скоростью, равной c . Однако если $m = 0$ и $v = c$, то выражения для энергии (10.9) и импульса (10.10) приводят к неопределенностям типа $0/0$ и могут остаться конечным. О том, что это именно так, мы знаем из квантовой теории, см. (26.3) и (26.6).

§ 27. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФОТОНОВ С ЭЛЕКТРОНАМИ. ФОТОЭФФЕКТ. КОМПТОН-ЭФФЕКТ

Рассмотрим фотоэффект на атоме водорода. Сам процесс сводится к ионизации атома при поглощении им фотона внешнего излучения. В опытах по фотоэффекту использовалось ультрафиолетовое излучение, т. е. излучение с длинами волн $\lambda \sim 10^{-7}$ м. Тогда частота излучения

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}; \quad \omega \approx 6,3 \frac{3 \cdot 10^8}{10^{-7}} \text{ с}^{-1} \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}.$$



Рис. 26.5

При этом энергия фотонов

$$\hbar\omega \sim 10^{-34} \cdot 2 \cdot 10^{16} \text{ Дж} \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Что касается энергии ионизации U_i атома водорода, то она сравнима с его энергией основного состояния E_a , т. е.

$$U_i \sim |E_a| = \frac{m e^4}{2 \hbar^2}.$$

Эта формула записана в СГС. Подставив в нее числовые значения и переведя результаты в СИ, получим

$$U_i \sim 10^{-18} \text{ Дж.}$$

В результате

$$\hbar\omega \sim U_i \text{ (в фотоэффекте).} \quad (27.1)$$

В атоме скорость электронов $v \approx 10^6$ м/с, т. е. $v \ll c$. Пусть и в конечном состоянии у свободного электрона, покинувшего атом, $v \ll c$. Другими словами, по отношению к электрону задача нерелятивистская. В этом случае закон сохранения энергии для фотоэффекта может быть записан как

$$E_\gamma = U_i + E_e, \quad (27.2)$$

где $E_\gamma = \hbar\omega$ — энергия фотона; U_i — энергия ионизации атома; $E_e = mv^2/2$ — энергия движения фотоэлектрона. Перепишем (27.2) в виде

$$\hbar\omega = U_i + mv^2/2. \quad (27.3)$$

Это соотношение было предложено Эйнштейном.

При фотоэффекте импульс фотона мал по сравнению с импульсом атомного электрона. Убедимся в этом. Импульс фотона

$$p_\gamma = \frac{\hbar\omega}{c}; \quad p_\gamma \approx \frac{10^{-34} \cdot 2 \cdot 10^{16}}{3 \cdot 10^8} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} \approx 10^{-26} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Импульс атомного электрона

$$p_e = mv \sim 10^{-30} \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} \sim 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1},$$

т. е. действительно

$$p_\gamma \ll p_e \text{ (в фотоэффекте).}$$

Остановимся теперь на *эффекте Комптона*. Речь пойдет о рассеянии фотона свободным электроном. В этом случае опыт ставится с весьма жестким рентгеновским излучением. Его длины волн $\lambda \approx 10^{-10}$ м, соответствующие частоты $\omega \approx 2 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$.

В отличие от фотоэффекта при рассеянии фотона на электроне импульс фотона p_γ сравним с импульсом электрона p_e . В самом деле, $p_\gamma = \hbar\omega/c \sim 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$, а $p_e = mv \sim 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$, т. е.

$$p_\gamma \gtrsim p_e \text{ (в комптон-эффекте)} \quad (27.5)$$

Что касается энергий, то здесь мы попадаем в релятивистскую область, мерилom энергии в которой является энергия покоя частиц,

см. (10.7). В данном случае речь идет об энергии покоя электрона

$$mc^2 \sim 10^{-30} (3 \cdot 10^8)^2 \sim 10^{-13} \text{ Дж.}$$

Если в фотоэффекте энергия ионизации атома $U_i \sim 10^{-18}$ Дж была исчезающе малой величиной по сравнению с энергией покоя электрона

$$U_i \ll mc^2 \text{ (в фотоэффекте),} \quad (27.6)$$

то при комптоновском рассеянии степень различия между энергией кванта и энергией покоя электрона значительно уменьшается:

$$\hbar\omega \ll mc^2 \text{ (в комптон-эффекте).} \quad (27.7)$$

Действительно, для рентгеновских квантов $\hbar\omega \sim 2 \cdot 10^{-15}$ Дж.

Заметим, что если $\hbar\omega \approx mc^2$, точнее, $\hbar\omega = 2mc^2$, то возникает новый круг релятивистских квантовых явлений: фотоны высоких энергий, исчезая, порождают пары частица — античастица, в данном случае пары электрон — позитрон (это явление происходит вблизи ядер); возможен и обратный процесс — аннигиляция (уничтожение) встречающихся электрона и позитрона с превращением их в фотоны.

Вернемся к эффекту Комптона и найдем частоту ω' рассеянного рентгеновского кванта. Исходим из законов сохранения энергии и импульса в процессе рассеяния фотона на свободном покоящемся электроны. Пусть явление происходит в плоскости чертежа (рис. 27.1). Тогда

$$\left. \begin{aligned} E_\gamma + E_{e0} &= E'_\gamma + E_e \\ \mathbf{p}_\gamma &= \mathbf{p}'_\gamma + \mathbf{p}_e \end{aligned} \right\} \quad (27.8)$$

Здесь $E_\gamma = \hbar\omega$ — энергия падающего фотона с частотой ω ; $E_{e0} = mc^2$ — релятивистская энергия покоящегося электрона [см. (10.7)]; $E'_\gamma = \hbar\omega'$ — энергия рассеянного фотона с частотой ω' ; E_e — полная релятивистская энергия электрона — отдачи, см. (10.9). Подставив указанные явные выражения для энергий в исходные соотношения (27.8), получим

$$\left. \begin{aligned} \hbar\omega + mc^2 - \hbar\omega' &= E_e \\ \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}'_\gamma &= \mathbf{p}_e \end{aligned} \right\} \quad (27.9)$$

Далее следуют такие преобразования равенств (27.9). Поделим обе части первого равенства на c и вычтем квадрат второго выражения из квадрата первого:

$$\frac{1}{c^2} (\hbar\omega + mc^2 - \hbar\omega')^2 - (\mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}'_\gamma)^2 = \frac{E_e^2}{c^2} - p_e^2 \equiv m^2 c^2. \quad (27.10)$$

Чтобы убедиться в справедливости правой части (27.10), необходимо воспользоваться (10.6). В соотношении (27.10) $p_\gamma = \hbar\omega/c$ — импульс падающего фотона, $p'_\gamma = \hbar\omega'/c$ — импульс рассеянного фотона и p_e — релятивистский импульс электрона отдачи, см. (10.10). Заметив, что скалярное произведение двух векторов $(\mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}'_\gamma) = p_\gamma p'_\gamma \cos \theta$ (рис. 27.1), и вводя в (27.10) явные выражения для p_γ и p'_γ , выразим из формулы (27.10) ω' через остальные величины:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2} (1 - \cos \theta)}. \quad (27.11)$$

Формула (27.11) показывает, что чем ближе значение величины $\hbar\omega$ к значению mc^2 , тем заметнее уменьшение частоты рассеянного фотона. Вот почему эксперимент ставился на жестком рентгеновском излучении.

Интерпретация указанного процесса рассеяния фотона на электроне с точки зрения квантовой электродинамики состоит в поглощении электроном фотона с энергией $\hbar\omega$ и последующем излучении фотона $\hbar\omega'$, при этом сам излучающий электрон приобретает импульс $\hbar(\omega - \omega')/c$.

Эксперименты по изучению элементарных процессов, такие, как непосредственное измерение энергии фотона (в фотоэффекте), прямое измерение импульса фотона (в комптон-эффекте), сыграли выдающуюся роль в становлении понятий квантовой механики и квантовой электродинамики.



Рис. 27.1

§ 28. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИЗМЕРИМОСТЬ ВЕЛИЧИН И ПОНЯТИЕ ОБ ИХ ПОЛНЫХ НАБОРАХ

Анализ этого принципиально важного вопроса является некоторым обобщением тех сведений по квантовой механике, которые мы уже приводили.

Далеко не всякие наборы разнородных физических величин в квантовой механике одновременно измеримы. Это следует, например, из соотношений неопределенности (22.2), которые показывают, что импульс и координата одновременно не могут иметь сколь угодно точных значений. Причиной этого является существование входящей в (22.2) конечной величины — постоянной \hbar . Волновые функции Ψ систем могут иметь в качестве параметров только наборы одновременно измеримых величин. Как мы видели, примерами таких наборов для электронов являются совокупности величин

$$x, y, z, s_z;$$

$$p_x, p_y, p_z, s_z;$$

$$E_n, l, m_l, s_z.$$

Набор из всех проекций импульса (p_x, p_y, p_z) и проекции спина s_z на некоторое направление Z применяют для описания состояний свободного электрона, при этом, конечно, определена и энергия $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/(2m)$. Для описания состояния связанного атомного электрона используют набор из энергии E_n , квадрата модуля момента L^2 (через квантовое число l), проекции момента L_z (через квантовое число m_l) и проекции спина s_z .

Если иметь в виду фотоны, то для их описания применяют следующие наборы:

$$k_x, k_y, k_z, \alpha, \\ E, L^2, L_z, P.$$

Для свободно распространяющихся фотонов, соответствующих плоским классическим волнам, используют набор из трех компонентов волнового вектора \mathbf{k} и поляризацию α , определяющую ориентацию спина фотона в пространстве. Рождающийся фотон при квантовых переходах в атоме описывают набором из E, L^2, L_z, P , где P — четность состояния фотона.

Для объектов и систем, изучаемых классической механикой, значения действия много больше кванта действия ($S \gg \hbar$). Поэтому ограничения на одновременную измеримость разнородных физических величин, накладываемые, например, соотношениями (22.2), становятся несущественными. Точнее говоря, в условиях, когда квантом действия можно пренебречь (т. е. при стремлении $\hbar \rightarrow 0$), связи типа (22.2) «развязываются». В результате любые наборы физических величин могут быть измерены одновременно и сам процесс измерений практически не оказывает воздействия на измеряемый объект.

§ 29. МОЛЕКУЛЫ

Атомы могут соединяться в молекулу, если энергия связанных атомов окажется меньшей, чем суммарная энергия изолированных атомов. При образовании молекул внутренние замкнутые электронные оболочки атомов остаются почти нетронутыми, а внешние электроны обобществляются. При этом, так как пространственная область движения обобществленных электронов возрастает, то, согласно соотношению неопределенностей (22.2), импульс этих электронов уменьшается; уменьшается, следовательно, и энергия обобществленных электронов.

Характер обобществления внешних электронов в молекулах различного типа может быть различным (см. дальше § 39.2).

В молекулах вследствие большой разницы в массах ядер и электронов скорости ядер малы по сравнению со скоростями электронов. Поэтому, рассматривая электронные спектры энергии в молекуле, можно считать ядра неподвижными. В общем случае, электронные уровни энергии в молекуле являются функциями расстояния между ядрами.

Простейшими типами молекул являются *двухатомные молекулы*. В этих молекулах не имеет места закон сохранения полного орбитального момента всех электронов, поскольку электрическое поле двух ядер уже не обладает центральной симметрией. Однако электрическое поле в этом случае обладает *аксиальной (осевой) симметрией* относительно направления, проходящего через оба ядра. Поворот всей системы относительно указанной оси не может изменить свойств самой системы. Это означает, что будет сохраняться проекция полного момента на эту ось и мы можем классифицировать уровни энергии молекулы по значениям этой проекции.

Помимо осевой симметрии двухатомные молекулы обладают симметрией относительно плоскости, проходящей через ось (рис. 29.1, а).

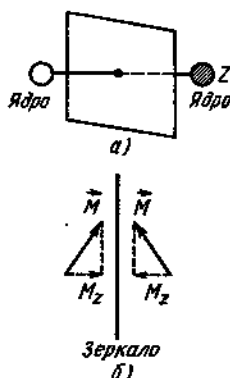


Рис. 29.1

Зеркальное отражение (изменение координат $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ всех электронов) ничего не меняет в энергетическом состоянии молекулы. Однако если момент отличен от нуля, знак проекции момента при зеркальном отражении изменяется (рис. 29.1, б). Поэтому каждому значению энергии в молекуле соответствует два квантовых состояния, отличающихся направлением проекции момента на ось.

Остановимся теперь на вопросе о влиянии движения ядер на энергетический спектр двухатомной молекулы. В такой молекуле: 1) ядра могут совершать малые колебания относительно положений равновесия, 2) связанные ядра, как «жесткие гантели», могут вращаться относительно некоторой точки, расположенной на соединяющей их линии (разумеется, в этом случае нужно рассматривать вращение молекулы как целого). Колебательное и вращательное движения в молекуле естественно квантуются. В результате электронные уровни энергии $E_{эл}$ молекулы расщепляются под влиянием энергии колебаний $E_{кол}$ ядер, образуя тонкую структуру уровней, которые, в свою очередь, вновь расщепляются под влиянием энергии вращения $E_{вр}$ молекулы как целого, образуя *сверхтонкую структуру* (полосы). Таким образом, энергия двухатомной молекулы может быть представлена в виде

$$E = E_{эл} + E_{кол} + E_{вр},$$

причем в $E_{эл}$ включается электростатическая энергия взаимодействия ядер.

Для энергетического спектра молекулы характерно следующее соотношение:

$$\Delta E_{эл} \gg \Delta E_{кол} \gg \Delta E_{вр}.$$

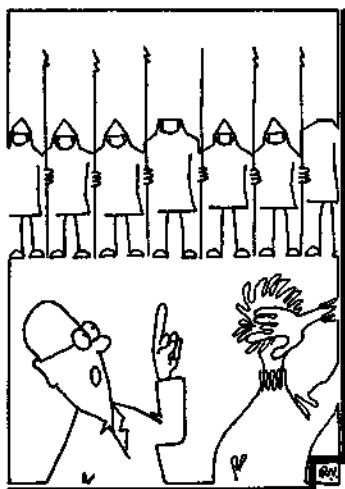
Разность энергий $\Delta E_{эл}$ — порядка нескольких электрон-вольт, $\Delta E_{кол} \sim 0,1$ эВ и $\Delta E_{вр} \sim 10^{-3}$ эВ. Спектры излучения молекул, возникающего при переходах между электронными состояниями, лежат в видимой и ультрафиолетовой областях. Квантовые переходы между уровнями колебательной структуры обуславливают излучение в инфракрасной области спектра. Наконец, переходы между уровнями вращательной структуры дают излучение в микроволновой области (с длинами волн 0,1 мм — 1 см). Изучение спектров излучения молекулы может дать довольно подробное представление о самой молекуле.

Исследуем вопрос о взаимодействии атомов, находящихся на больших расстояниях. Рассмотрим два одинаковых атома. Пусть их внешние электронные оболочки замкнуты, а сами атомы находятся в основном состоянии. У таких атомов в силу полной сферической симметрии состояний средний дипольный электрический момент равен нулю. Однако мгновенные значения дипольных моментов d атомов отличны от нуля. Это обстоятельство ведет к тому, что между атомами

в силу электростатической связи (14.19) возникает взаимодействие, но это уже эффект второго порядка малости, поэтому

$$\left(\begin{array}{c} \text{Энергия} \\ \text{взаимодействия} \\ \text{атом} - \text{атом} \end{array} \right) \sim |U_{dd}|^2 \sim - \frac{\text{const}}{r^6},$$

[обозначения те же, что и в (14.20)]. Указанное взаимодействие носит характер притяжения. Эти силы (*ван-дер-ваальсовы*) действуют на гораздо больших расстояниях, чем силы химического сродства. В отличие от последних они не обладают свойством насыщения. Поэтому ван-дер-ваальсовы силы ведут к образованию конденсированных состояний вещества (жидкостей и твердых тел).



ГЛАВА V

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ТЕЛА КАК СОВОКУПНОСТИ ЧАСТИЦ. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 30. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Физические системы, состоящие из огромного количества частиц (атомов или молекул), называют *макроскопическими телами*. Сама возможность существования макротел как пространственно распределенных устойчивых скоплений частиц (ядер и электронов) следует из квантовых представлений. Действительно, электростатическое взаимодействие между ядрами и электронами должно было бы с точки зрения классической теории даже при обычных условиях привести к всеобщей конденсации частиц в сверхплотное вещество. Однако, например, уже в такой системе, как атом, вследствие соотношений неопределенностей электрон, подходя слишком близко к ядру, обладал бы столь большим импульсом, что не мог бы оставаться в ядре. Прикосновение же электронных оболочек соседних атомов друг к другу запрещено, поскольку электроны являются ферми-частицами.

Макроскопические тела при обычных условиях содержат 10^{25} — 10^{28} атомов/м³. Как же описывать такие огромные совокупности частиц? Будучи последовательными, мы должны были бы попытаться применить методы механики (классической или квантовой). Однако в рамках, например, классической механики для описания указанной совокупности взаимодействующих частиц необходимо: 1) составить и решить систему уравнений движения с числом уравнений, равным числу частиц, т. е. порядка, скажем, 10^{26} ; 2) знать начальные условия (координаты и скорости) всех частиц тела. Ясно, что решение подобной задачи невозможно даже с использованием самых мощных ЭВМ (электронно-вычислительных машин).

Выход из сложившейся ситуации указывает сама же механика. Действительно, вспомним о существовании законов сохранения энергии,

импульса и момента. Если тело замкнуто, то как бы ни взаимодействовали частицы, составляющие тело, как бы замысловато они не изменяли своих состояний, суммарные энергия, импульс и момент всех частиц тела должны оставаться неизменными. Если же при этом для простоты рассматривать макротело в системе отсчета, где оно покоится, то в нашем распоряжении останется лишь одна неизменяющаяся величина — полная внутренняя энергия макросистемы.

Говоря об энергии квантовых систем, мы обычно имеем в виду, что речь идет об энергетических спектрах атомов и молекул. Однако квантовая механика приводит к представлению также и об *энергетическом спектре макроскопических тел*. Лишь для идеальных газов, т. е. тел, состоящих из невзаимодействующих частиц, уровни энергии тела складываются из уровней энергии отдельных частиц. Для тел конденсированных (жидкостей и кристаллов) из-за сложности и интенсивности взаимодействий частиц, составляющих эти тела, говорить о нахождении полного энергетического спектра тела возможно, по-видимому, лишь в принципе. Дело в том, что в таких телах вследствие межчастичных взаимодействий реализуются различные коллективные формы движения частиц, т. е. сам спектр энергии может состоять из целого ряда ветвей. К тому же многие тела обычно формируются из подсистем различных частиц, например из ионной решетки и из «свободных» электронов; при этом ветви спектров энергии, характерные для каждой подсистемы, могут испытывать взаимное влияние. Такое влияние иногда ведет к качественному изменению самого спектра (примером этого является переход металлов из нормального в сверхпроводящее состояние). Замечательным, однако, является то, что для *слабовозбужденных состояний тела уровни энергии могут быть представлены через энергию основного состояния и сумму энергий так называемых элементарных возбуждений (квазичастиц)*. О последних будет сказано дальше.

Для рассмотрения принципов физической статистики* обратимся к простейшим телам — газам. В таких телах отдельные частицы испытывают со стороны окружающих частиц беспорядочные воздействия и с течением времени выделенная частица проходит через все свои возможные состояния. Единственное, что можно попытаться определить для такой частицы, — это вероятности ее пребывания в каждом из состояний.

Пусть рассматриваемый газ остается «газом» при любых условиях. Тогда пребыванию тела на нижнем макроскопическом квантовом уровне должно соответствовать одно-единственное микроскопическое распределение частиц по состояниям. Когда тело возбуждено (произошел его переход на более высокие уровни энергии), резко расширяются возможности для реализации данного макросостояния различными микроскопическими способами распределения частиц по энергиям, причем эти распределения могут быть только такими, что совокупная энергия частиц совпадает с полной энергией тела. Основной задачей

* Так иногда именуют статистическую физику.

становится нахождение распределения вероятностей для средних чисел частиц, заполняющих различные квантовые уровни энергии. Иначе говоря, *важнейшей задачей статистической физики, исследующей свойства макроскопических тел как совокупностей частиц, является определение «населенности» частицами различных «энергетических этажей» матрицы.*

§ 31. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФЛУКТУАЦИИ

Мысленно разобьем исследуемое тело на отдельные малые, но все же макроскопические области — подсистемы. Естественно характеризовать состояние тела распределением энергии по различным подсистемам. Для замкнутого тела сумма энергий всех подсистем неизменна вследствие закона сохранения энергии. Внутри же самого тела полная энергия может распределяться по различным подсистемам различными способами. Пусть некоторая подсистема находится в квантовом состоянии с энергией E_n . Тогда, зная закон распределения вероятностей w_n для нахождения подсистемы в том или ином состоянии n , можно найти среднее значение $\langle f \rangle$ величины:

$$\langle f \rangle = \sum_n f_n w_n; \quad (31.1)$$

здесь f_n — собственные микроскопические значения величины. Такие средние значения имеют макроскопический смысл, их называют *термодинамическими величинами*.

Естественно, что в теле постоянно происходят отклонения характеризующих его величин от их средних значений — *флуктуации*. Определим относительную флуктуацию аддитивной величины f как

$$\sqrt{\langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle} / \langle f \rangle. \quad (31.2)$$

Величину называют *аддитивной*, если ее значение для всего тела равно сумме ее значений для подсистем, составляющих данное тело. Например, энергия тела с хорошей точностью равна сумме энергий подсистем, так как внутренняя энергия подсистемы намного превосходит энергию взаимодействия между самими подсистемами. Это следует из того, что относительное число частиц на поверхности подсистемы (по сравнению с числом частиц в объеме) резко убывает при росте объема подсистемы.

Раскроем подкоренное выражение в (31.2):

$$\langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle = \langle [f^2 - 2f\langle f \rangle + (\langle f \rangle)^2] \rangle = \langle f^2 \rangle - 2\langle f \rangle \langle f \rangle + (\langle f \rangle)^2$$

или

$$\langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle = \langle f^2 \rangle - (\langle f \rangle)^2.$$

Обозначим отклонение от среднего $\Delta f = f - \langle f \rangle$, при этом ясно, что $\langle \Delta f \rangle = 0$.

Так как число подсистем в теле можно считать пропорциональным числу N частиц, составляющих тело, то очевидно, что для тела как целого $\langle f \rangle \sim N$ и $\langle (\Delta f)^2 \rangle \sim N$. Отсюда получим выражение для

относительной флуктуации макроскопической величины, характеризующей тело:

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta f)^2\rangle}}{\langle f \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (31.3)$$

Таким образом, чем больше (по числу частиц) и сложнее тело, тем меньше отклонение его термодинамических величин от средних. Как уже указывалось, плотность твердых тел порядка 10^{28} частиц/м³ и для них флуктуации величин составляют примерно 10^{-14} .

§ 32. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ МОДЕЛИ ГАЗА

32.1 «Машинные эксперименты» На ЭВМ ставился «теоретический эксперимент» с несколькими сотнями упруго сталкивающихся шаров. Задавались начальные условия (координаты и скорости) и уравнения движения для каждого из шаров. Уже после нескольких индивидуальных столкновений в системе устанавливалось так называемое *равновесное распределение по скоростям* (см. дальше). Последнее сохранялось и практически не менялось при изменении начальных условий для шаров.

Полученный на ЭВМ результат дает наглядное чисто механическое обоснование методов статистической физики. Ведь в ней мы отказываемся от детального рассмотрения движения каждой из частиц, в частности совершенно не учитываем их начальные состояния. Нас интересуют лишь возможные распределения различных групп частиц по значениям той или иной величины.

Одним из важнейших результатов, полученных на ЭВМ, является закон распределения «молекул» (шаров) в объеме тела. Эксперимент ставился следующим образом. Вычислительной машине задавались начальные положения «молекул» и их скорости. Машина должна была численно решить уравнения движения «молекул» для последующего времени и показать на осциллографе расположение «молекул» в эти моменты. Кинокамера фотографировала экран осциллографа. Временной интервал был выбран таким, чтобы два последовательных кадра были разделены несколькими «молекулярными столкновениями». В качестве модели тела брался ящик с условным делением его на равные левую и правую части.

Как же «молекулы» распределяются по обеим половинам ящика? В случае одной молекулы 1 эти распределения указаны на рис. 32.1. Для двух молекул 1 и 2 их различные распределения представлены на рис. 32.2. Эти простейшие результаты можно получить и не обращаясь непосредственно к «теоретическому эксперименту» на ЭВМ. В самом деле, достаточно уметь подсчитывать число различных способов размещения перенумерованных шаров по обеим половинам ящика. Так как для каждого возможного распределения одной молекулы существует два возможных распределения другой, то общее число различных распределений двух молекул составит $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. В общем случае N молекул полное число возможных различных распределений по обеим половинам ящика равно 2^N .



Рис. 32.1

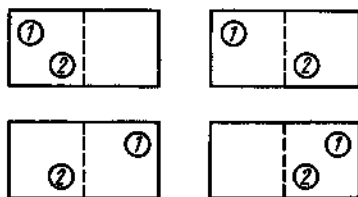


Рис. 32.2

32.2 Обратимость во времени микроскопических процессов и необратимость процессов в макротелах Каждому возможному распределению молекул соответствует в нашем фильме один кадр. Для N молекул число кадров равно 2^N . Из этого числа кадров только на одном будет зафиксировано распределение, когда все N молекул находятся в левой половине ящика. Другими словами, вероятность нахождения всех N молекул в левой части

$$P_N = \frac{1}{2^N}.$$

Так, для $N = 80$ число кадров фильма равно $2^{80} = 10^{24}$. Если прокручивать фильм со скоростью 10^6 кадров в секунду, то необходимо время 10^{10} лет, чтобы обнаружить кадр, на котором все 80 молекул собрались в левой половине ящика.

Полученный результат можно интерпретировать так. Допустим, что в начальный момент все молекулы собраны в левой половине ящика, которая отгорожена заслонкой от правой части. Затем заслонку открывают и начинают съемку фильма о движении и распределении молекул. Ясно, что очень скоро молекулы равномерно заполняют обе половины ящика.

Прокрутим фильм в обратном направлении (вспять по времени), причем так, чтобы зрительный зал этого не знал. Концовка фильма, надо полагать, вызовет смех в зале. Всем станет ясно, что кинемеханик пустил ленту в обратном направлении, ибо зрители увидят на экране совершенно невероятное событие: газ сам собой собрался в левой половине ящика. А вот если оперировать с фильмом о двух молекулах, то никто не сможет обнаружить, в прямом или обратном направлении прокручивается фильм.

Вышеизложенное показывает, что процессы, идущие в макротелах, необратимы во времени. Это связано с большим числом частиц, участвующих в процессе.

Однако временная необратимость в макротелах имеет вероятностную природу. Для малых частей макросистемы, содержащих относительно небольшое число частиц, могут кратковременно проявляться и «почти обращенные во времени процессы» — так называемые флуктуации (их количественное описание давалось в § 31). Хотя обычно флуктуационные эффекты в макротелах исчезающе малы, существуют явления, в которых флуктуации играют существенную роль (см., например, § 60.1).



§ 33. ЭНТРОПИЯ

На модели классического молекулярного газа было показано, что в изолированной макроскопической системе за очень короткое время устанавливается такое макросостояние, которому соответствует наибольшее число возможных способов распределения частиц по их микросостояниям. Такое состояние тела отвечает *статистическому равновесию*. В нем тело может находиться неограниченно долго.

Переходя на более общий, «квантовый язык», введем понятие энтропии S как числа микроспособов $\Delta\Gamma$ реализации данного макроскопического состояния тела. Точнее,

$$S = \ln \Delta\Gamma. \quad (33.1)$$

В частности, низшему уровню энергии тела соответствует $\Delta\Gamma = 1$ (см. последний абзац § 30), а следовательно, для него $S = 0$.

Вероятность w_n для различных состояний тела пропорциональна $\Delta\Gamma$, которое, согласно (33.1), записывается как e^S , в результате

$$w_n \sim e^S. \quad (33.2)$$

Наиболее вероятным макроскопическим состоянием тела (при данной энергии) является то, которому соответствует наибольшее число микроскопических распределений частиц. Отсюда ясно, что *в состоянии статистического равновесия энтропия максимальна*.

Если замкнутая система в некоторый момент времени не находится в состоянии статистического равновесия, то в ней происходят процессы перехода в более вероятные состояния. Другими словами, *процессы в изолированном теле происходят в направлении возрастания энтропии*.

Точнее закон возрастания энтропии формулируется следующим образом: *во всех замкнутых системах энтропия никогда не убывает, она либо остается постоянной, либо возрастает*. Соответственно этим двум возможностям все процессы, которые могут происходить с телами, делятся на *обратимые* и *необратимые*. Первые из них могут протекать как в прямом, так и в обратном направлениях, поскольку энтропия при этом не меняется; для вторых — это невозможно, поскольку связано с уменьшением энтропии.



§ 34. ТЕМПЕРАТУРА

Исходя из определения энтропии, можно заключить, что энтропия S есть возрастающая функция внутренней энергии E . Это хорошо видно из рис. 34.1. Сама же функция $S(E)$ изображена на рис. 34.2.



Рис. 34.1

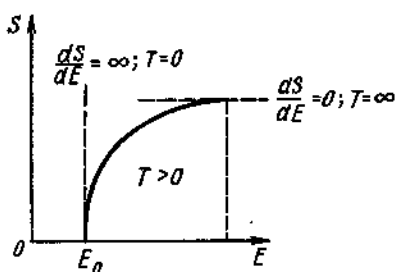


Рис. 34.2

Определим температуру T (речь идет о термодинамической температуре) как

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}. \quad (34.1)$$

В связи с (34.1) необходимо вспомнить содержание математического дополнения к § 24 (о понятии производной и его геометрической интерпретации).

Рассмотрим основные свойства температуры. Вновь обратимся к рис. 34.2; из него видно, что тело при $T=0$ может находиться лишь в основном (наинищем) квантовом состоянии. Сама температура может изменяться в области значений $0 \leq T < \infty$, оставаясь величиной положительной.

Покажем, что в состоянии статистического равновесия двух тел их температуры T_1 и T_2 одинаковы. Пусть оба тела представляют собой единую замкнутую систему с постоянной энергией E . В состоянии статистического равновесия энтропия S всей системы должна иметь наибольшее возможное (при данной энергии E) значение. Энергия и энтропия — величины аддитивные, т. е. $E = E_1 + E_2$ и $S = S_1(E_1) + S_2(E_2)$, где E_1 , E_2 и S_1 , S_2 — соответственно энергии и энтропии каждого из тел. Так как $E_2 = E - E_1$, то S является функцией лишь одной переменной E_1 . Условие максимума для функции $S(E_1)$ запишется как [см. (24.6)]

$$\frac{dS}{dE_1} = \frac{dS_1}{dE_1} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{dE_2}{dE_1} = 0;$$

здесь справа во втором слагаемом мы применили, как говорят, цепное правило. Производная $dE_2/dE_1 = -1$, поскольку E — постоянная. В результате

$$\frac{dS}{dE_1} = \frac{dS_1}{dE_1} - \frac{dS_2}{dE_2} = 0,$$

т. е.

$$\frac{dS_1}{dE_1} = \frac{dS_2}{dE_2}.$$

Это равенство может быть обобщено на случай произвольного числа тел, находящихся в статистическом равновесии. Другими словами [см. (34.1)], температура равновесной системы одинакова для всех ее частей.

На этом основании статистическое равновесие называют еще *тепловым равновесием*.

Пусть замкнутая система двух тел с температурами T_1 и T_2 не находится в тепловом равновесии. Тогда температуры этих тел различны, скажем, $T_2 > T_1$. Между телами установится процесс перехода в совместное равновесное состояние с постепенным выравниванием температуры вдоль всей системы. При этом энтропия системы $S = S_1 + S_2$ возрастает. На математическом языке это означает, что производная от энтропии по времени есть величина положительная, т. е.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} = \frac{dS_1}{dE_1} \frac{dE_1}{dt} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{dE_2}{dt} > 0.$$

Так как полная энергия $E = E_1 + E_2$ сохраняется, то

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_1}{dt} + \frac{dE_2}{dt} = 0. \quad (*)$$

В результате

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{dS_1}{dE_1} - \frac{dS_2}{dE_2} \right) \frac{dE_1}{dt} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \frac{dE_1}{dt} > 0.$$

Поскольку же, по условию, $T_2 > T_1$, то

$$\frac{dE_1}{dt} > 0.$$

В соответствии с (*) производная

$$\frac{dE_2}{dt} < 0.$$

Это означает, что энергия первого тела увеличивается, а второго — уменьшается. Таким образом, рассматриваемое свойство температуры кратко формулируется так: *между телами с различной температурой возникает поток энергии, причем энергия переходит от тела с более высокой к телу с более низкой температурой*.

Заметим, что так как энтропия есть величина безразмерная, то, согласно (34.1), температура имеет размерность энергии. Если возникает необходимость пользоваться шкалой температур Кельвина, то надо применять переводной коэффициент

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К},$$

его называют *постоянной Больцмана*. Сам же переход от температуры в энергетических единицах (T_E) к температуре в Кельвинах (T_K) совершается по правилу

$$T_E \rightarrow kT_K.$$

В дальнейшем индексы в обозначении температуры мы будем опускать и пояснять смысл обозначения при необходимости.

Хотя температура, как и энтропия, имеет чисто статистический смысл, попытаемся выяснить ее «микроскопическое содержание». Пред-

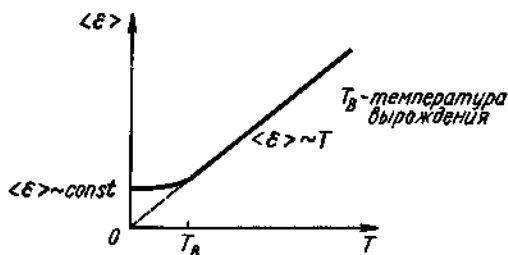


Рис. 34.3

ставим (34.1) через конечные разности:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S}{\Delta E} = \frac{S - S_0}{E - E_0}, \quad (34.2)$$

где E_0 — энергия основного квантового состояния тела, а $S_0 = 0$ — энтропия тела в основном состоянии. В силу аддитивности энтропии $S \sim N$, где N — общее число частиц в теле, тогда (34.2) запишется как

$$\frac{1}{T} = \frac{S}{E - E_0} \sim \frac{N}{E - E_0},$$

или

$$T \sim \frac{E - E_0}{N} = \langle \epsilon \rangle. \quad (34.3)$$

В (34.3) $\langle \epsilon \rangle$ есть средняя энергия отдельной частицы тела. Когда $E \gg E_0$ (классическая область энергетических состояний тела), то $\langle \epsilon \rangle$ пропорционально T . Когда же $E = E_n \sim E_0$ (квантовая область), то $\langle \epsilon \rangle$ становится постоянной и от T не зависит.

Результат приведенного анализа представлен на рис. 34.3.

Мы уже отмечали, что температура макроскопического тела как целого может быть лишь положительной величиной. В этом можно убедиться также следующим образом. В силу аддитивности энтропии

$$S = \sum_i S_i \left(E_i - \frac{p_i^2}{2M_i} \right), \quad (34.4)$$

где индексом i обозначены величины, описывающие отдельные малые, но макроскопические части тела (его подсистемы); E_i , p_i и M_i — соответственно полная энергия, импульс и масса отдельных под-

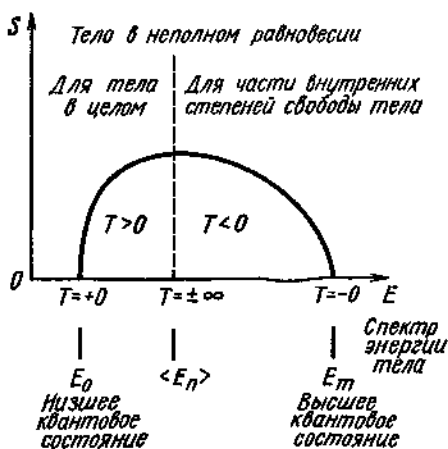


Рис. 34.4

систем. Аргументом энтропий S_i подсистем являются их внутренние энергии. Если бы для тела было $T < 0$, то, согласно (34.1), с уменьшением внутренней энергии энтропия бы возрастала. Однако уменьшение аргумента энтропии возможно лишь за счет увеличения кинетической энергии подсистем. Это означает, что было бы вообще невозможным существование устойчивых макроскопических тел.

Если тело находится в неполном равновесии, то может оказаться, что некоторая часть внутренних степеней свободы тела (не имеющих отношения к поступательным движениям) описывается отрицательными температурами. Конечно, при этом тело в целом описывается температурами положительными. Указанная ситуация в общем виде изображена на рис. 34.4. Некоторые конкретные случаи будут рассмотрены в дальнейшем.

§ 35. РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ В ТЕЛАХ

Вернемся к основной задаче физической статистики, поставленной в § 30, а именно к нахождению закона распределения вероятностей w_n пребывания равновесных макроскопических систем в различных квантовых состояниях с энергиями E_n .

Рассмотрим малую часть некоторого тела (его подсистему). Пусть она находится в квантовом состоянии с энергией E_0 . Энергии близких состояний подсистемы обозначим E_n . Энтропия S является функцией $(E_0 - E_n)$. Так как у макротел разности между уровнями энергии весьма малы, то

$$S(E_0 - E_n) \approx S(E_0) - E_n \frac{dS}{dE}. \quad (35.1)$$

Оценку для интервалов между уровнями энергии тела можно получить исходя из квантового принципа неопределенности. Вводя среднее «расстояние» между уровнями энергии $D(E)$, получим

$$D(E) \sim \frac{(\Delta p)^2}{m} \sim \frac{\hbar^2}{mL^2}. \quad (35.2)$$

В (35.2) рассмотрена частица с массой m в «ящике» с размерами L . Так, для случая электрона в «потенциальной яме» с $L \approx 10^{-2}$ м = 1 см получим $D(E) \sim 10^{-34}$ Дж. Для сравнения напомним, что в атоме, где $L \approx 10^{-10}$ м, интервалы между уровнями энергии $\sim 10^{-18}$ Дж.

Следует иметь в виду, что *макроскопические тела не могут находиться в строго стационарном квантовом состоянии с определенным значением $E_n \equiv E$* . Причина этого заключается в том, что внешнее воздействие на тело, как бы оно ни было мало с других точек зрения, все же намного превышает среднее расстояние $D(E)$ между квантовыми уровнями в спектре энергии тела. Другими словами, энергия тела всегда «размазана» на ΔE вблизи значения E . Так что на интервал ΔE энергии приходится большое число уровней энергии, расположенных почти непрерывно.

Подставим теперь выражение (35.1) для S в (33.2); принимая во

внимание определение (34.1), получаем

$$w_n \propto e^{-E_n/(kT)}. \quad (35.3)$$

В (35.3) необходимо учесть то естественное условие, что сумма вероятностей всевозможных состояний системы должна быть равна единице (ведь система обязательно должна находиться в каком-либо состоянии). Вводя в (35.3) нормирующую постоянную A , окончательно имеем

$$w_n = A e^{-E_n/(kT)}. \quad (35.4)$$

Выражение (35.4) называют *распределением Гиббса*. Оно применимо не только к подсистемам, находящимся в статистическом равновесии, но и к самим равновесным телам, поскольку тело можно рассматривать как часть некоторой большой системы, которой являются внешние условия.

Применим распределение Гиббса к вопросу о «населенности» частицами квантовых уровней энергии тела. В качестве тела возьмем «газ», состоящий из N частиц (молекул). Взаимодействием между частицами будем пренебрегать. Введем средние числа заполнения n_i частицами различных молекулярных квантовых уровней энергии E_i . Тогда

$$N = n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

и

$$E = n_0 E_0 + n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots + n_m E_m,$$

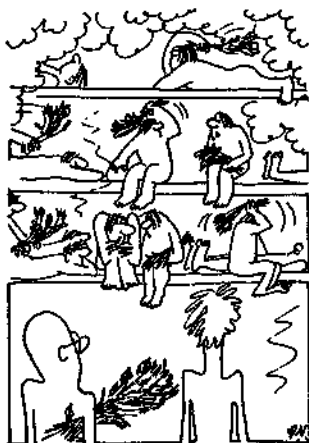
где E — полная сохраняющаяся энергия тела.

Вероятность нахождения того или иного числа частиц на i -м квантовом уровне

$$\frac{n_i}{N} \propto e^{-E_i/(kT)}.$$

Отношение же средних чисел заполнения различных уровней запишется как

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-(E_1 - E_0)/(kT)}. \quad (35.5)$$



В (35.5) в качестве примера взято отношение «населенностей» первого возбужденного состояния к основному уровню. Можно показать, что если последовательность значений энергии E_i уровней образует арифметическую прогрессию, то соответствующие числа заполнения n_i образуют геометрическую прогрессию. Общий вид указанной зависимости, называемой *распределением Больцмана*, изображен графически на рис. 35.1.

Любопытно проследить зависимость «населенности» уровней системы от температуры. Для этого прологарифмируем

обе стороны в (35.5), в результате получим

$$T = \frac{E_1 - E_0}{k \ln(n_0/n_1)}. \quad (35.6)$$

Это выражение для температуры могло быть получено и непосредственно из (34.1) при учете (33.1). Проанализируем формулу (35.6). Так как $E_1 - E_0 > 0$, то при: 1) $n_0 \neq 0$ и $n_1 = 0$ получим $T = 0$; 2) при $n_0 > n_1 \neq 0$ имеем $T > 0$; 3) при $n_1 = n_0$ температура $T = +\infty$. Если же в системе (точнее, подсистеме некоторой большой системы) «населенность» уровней такова, что $n_1 > n_0$, то $T < 0$, т. е. такая ситуация должна описываться отрицательными температурами. В частности, при $n_1 \neq 0$ и $n_0 = 0$ получим $T = -0$ (рис. 35.2).

Из самого рис. 35.2 следует, что отрицательные температуры находятся выше $T = +\infty$. Это соответствует тому факту, что энергия самопроизвольно переходит от частей системы с $T < 0$ к частям с $T > 0$. Рис. 35.2 следует сопоставить с рис. 34.4. На рис. 34.4 в качестве примера рассмотрено возможное поведение подсистемы атомных магнитных моментов кристаллической решетки, слабо взаимодействующих с самой решеткой.

Подсистема может не находиться в полном статистическом равновесии с кристаллом (при возбуждении ее внешним магнитным полем). Совокупность магнитных моментов обладает конечными энергиями (порядка энергии взаимодействия магнитных моментов) с конечным числом уровней. Сами магнитные моменты закреплены в узлах решетки и могут лишь переориентироваться в магнитном поле, изменяя свою энергию.

Для системы одинаковых частиц, как известно (см. § 25.2), существуют особые правила в заполнении ими квантовых состояний. Если частицы системы обладают полуцелыми значениями спинов, то в каждом квантовом состоянии системы может находиться не более одной частицы. Возникающую статистику частиц называют *распределением Ферми* (рис. 35.3, а). Характер этого распределения при различных



Рис. 35.1

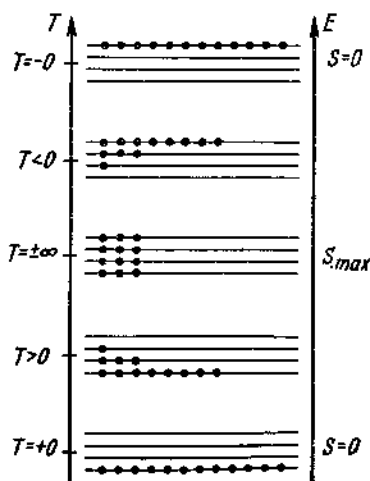


Рис. 35.2

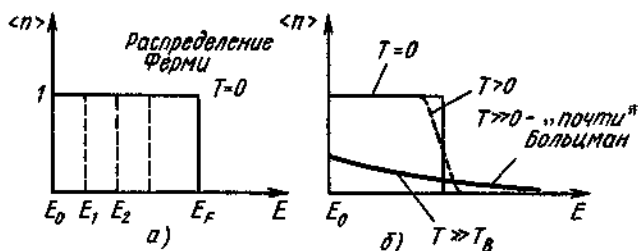


Рис. 35.3

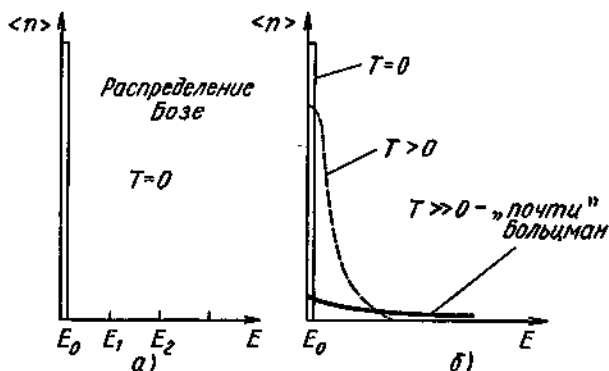


Рис. 35.4

температурах изображен на рис. 35.3,б. Если же спины частиц целые, то числа заполнения квантовых состояний ничем не ограничены (рис. 35.4,а). Эволюция этого распределения (распределения Бозе) с изменением температуры показана на рис. 35.4,б (подробнее о квантовых статистиках см. § 37.2).

В дальнейшем на конкретных примерах мы рассмотрим применения распределений Ферми и Бозе. Существование указанных статистик позволяет понять весьма необычные свойства вещества.

§ 36. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Теперь закон распределения (35.4) известен и с помощью (31.1) можно определить значения термодинамических величин (см. § 31). Однако между самими термодинамическими величинами могут существовать такие соотношения, которые применимы к любым телам вне зависимости от их атомного строения.

Общий метод, позволяющий находить термодинамические соотношения, называют *термодинамикой*. Она может быть построена аксиоматически, без всяких ссылок на статистику. Основу ее содержания составляют, как говорят, три начала термодинамики: 1) закон сохранения энергии; 2) закон возрастания энтропии (само понятие энтропии

вводится в термодинамике феноменологически); 3) обращение энтропии в нуль при абсолютном нуле температуры.

Указанные три начала термодинамики не являются для нас чем-то новым. Эти положения уже рассматривались нами статистически при исследовании поведения тел как совокупности частиц. Хотя только физическая статистика может последовательно подвести нас к понятиям термодинамики, последняя имеет право на самостоятельное существование, ибо она оперирует общими макроскопическими связями, отвлекаясь при этом от микроструктуры тел.

Когда мы плохо разбираемся в атомном строении какого-либо макроскопического объекта, а картина протекающих в нем процессов сложна, то термодинамические соотношения являются единственным (помимо эксперимента) средством исследования тепловых равновесных свойств такого рода объектов.

Приступим к выводу необходимых термодинамических соотношений. Изменение внутренней энергии dE тела должно состоять из «тепловой» части, как это следует из (34.1), равной TdS , и «механической», равной $-p dV$. Выражение для последней вытекает из сопоставления с механикой

$$\left(F = - \frac{dU}{dr}\right) \rightarrow \left(p = - \frac{dE}{dV}\right),$$

где F — сила; p — давление; U — потенциальная энергия взаимодействия частиц, зависящая от расстояния r между ними. В результате полное изменение внутренней энергии тела определяется как

$$dE = TdS - p dV. \quad (36.1)$$

В (36.1) входят два существенно различных слагаемых, одно из них

$$dQ = TdS \quad (36.2)$$

называют *количеством теплоты*, а другое

$$dA = - p dV \quad (36.3)$$

— *работой*. Иначе (36.1) может быть записано в виде

$$dE = dQ + dA. \quad (36.4)$$

Наряду с соотношениями (36.1) и (36.4), являющимися выражением закона сохранения энергии, существует весьма важное соотношение, возникающее в связи с вопросом о так называемой *максимальной работе*. Пусть неравновесная система нескольких тел теплоизолирована, т. е. для нее $dQ = 0$. При переходе системы в тепловое равновесие она способна совершать работу над внешними объектами. Указанный переход может происходить различным образом; различными будут и конечные энергия и энтропия системы. Полная работа, совершаемая за счет неравновесности системы (общий объем системы остается неизменным), зависит от способа установления равновесия. Спрашивается, как должен произойти переход в равновесное состояние, чтобы была совершена максимально возможная работа?

Пусть $E_{\text{нач}}$ — первоначальная энергия неравновесной системы, $E(S)$ —

энергия как функция энтропии в конечном равновесном состоянии. Так как $dQ = 0$, то, согласно (36.4), работа

$$|A| = E_{\text{нач}} - E(S);$$

по условию, работа отрицательна, когда ее совершает сама система. Возьмем производную от $|A|$ по энтропии конечного состояния

$$\frac{d|A|}{dS} = - \frac{dE}{dS} = -T.$$

Эта производная отрицательна, т. е. $|A|$ уменьшается с ростом S . Если бы энтропия уменьшалась, что невозможно, то работа бы возрастала. В результате наибольшая возможная работа, производимая системой за счет своей неравновесности, совершается при таком переходе, когда энтропия не меняется, т. е. процесс установления равновесия должен быть обратимым (см. конец § 33).

Определим количественно $|A|_{\text{max}}$ при обмене энергией между двумя телами 1 и 2 с температурами T_1 и T_2 . Положим $T_2 > T_1$, в связи с чем назовем тело 2 *нагревателем*, а тело 1 *холодильником*. Введем промежуточное *рабочее тело*, ибо иначе при непосредственном контакте тел с различными температурами обмен энергией произойдет необратимым образом без совершения работы (см. § 34). Пусть рабочее тело совершает обратимый круговой процесс (рис. 36.1). Поскольку рабочее тело в результате кругового процесса возвращается в исходное состояние, мы исключаем его из количественного рассмотрения при подсчете работы. Положим, что

$$-\Delta E_2 = -T_2 \Delta S_2$$

есть отдача энергии более нагретым телом, а

$$\Delta E_1 = T_1 \Delta S_1$$

есть количество энергии, полученной более холодным телом. Так как процесс обратим и энтропия системы постоянна, то

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0,$$

или

$$\Delta S_1 = -\Delta S_2.$$

Сама произведенная работа, которая равна уменьшению полной энергии обоих тел, определится как

$$|\Delta A|_{\text{max}} = -\Delta E_1 - \Delta E_2 = -T_1 \Delta S_1 - T_2 \Delta S_2 = -(T_2 - T_1) \Delta S_2.$$

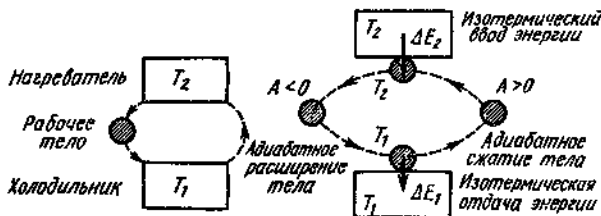


Рис. 36.1

или

$$|\Delta A|_{\max} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} |\Delta E_2|. \quad (36.5)$$

Введем коэффициент полезного действия η , равный отношению совершенной работы $|\Delta A|$ к количеству затраченной энергии $|\Delta E_2|$, тогда

$$\eta_{\max} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}. \quad (36.6)$$

В формулах (36.5) и (36.6) по существу содержится утверждение о невозможности получения работы за счет энергии тел, находящихся в тепловом равновесии (когда $T_2 = T_1$). Эти формулы имеют не только принципиальное, но и важное прикладное значение.

§ 37. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

37.1 Вещество и его состояния Вернемся к рассмотрению макроскопических тел как совокупностей частиц. В более широком смысле, большие скопления частиц называют *веществом*. Вещество может находиться в газообразном, жидком и твердом состояниях.

Микроструктура и тепловое движение в этих состояниях вещества носят различный характер. В газах частицы совершают хаотическое поступательное движение. В твердых кристаллических телах поступательное движение частиц отсутствует и последние совершают лишь колебательное движение около некоторых постоянных положений равновесия. В жидкостях же имеет место комбинация поступательного и колебательного типов движений.

37.2 Классический и квантовый идеальные газы Вещество в газообразном состоянии представляет собой совокупность многих слабо взаимодействующих частиц. В связи с тем что кинетическая энергия частиц газа значительно превосходит их энергию взаимодействия, последней при рассмотрении свойств газов обычно пренебрегают. Такую модель газа называют идеальным газом.

Примерами систем, рассматриваемых как идеальные газы, могут служить следующие: 1) атомные и молекулярные газы при обычных давлениях и температурах; 2) высокотемпературные состояния плотных газов; 3) «газ» свободных электронов в металлах; 4) «фотонный газ» свободного излучения в полости.

Газ как система многих частиц подчиняется классическим закономерностям при тех значениях плотности и температуры, при которых квантовомеханическая длина волны вероятности λ , соответствующая тепловому движению частиц, мала по сравнению со средним расстоянием l между частицами ($\lambda \ll l$), см. § 26.1 и рис. 24.3. Газ подчиняется квантовым закономерностям, если λ сравнима с l ($\lambda \sim l$).

В условиях, когда $\lambda \ll l$, квазиклассическим характером обладает лишь часть степеней свободы молекул или атомов. Поступательное движение молекул, характеризующееся их импульсом, является квазиклассическим (равновесное распределение молекул по импульсам дается распределением Максвелла, см. ниже); внутреннее же состояние молекул,

естественно, рассматривается квантовым образом (равновесное распределение молекул по квантовым состояниям описывается распределением Больцмана, см. рис. 35.1).

В условиях, когда $\lambda \sim l$, равновесное распределение частиц по различным квантовым состояниям (в случае систем одинаковых частиц) представляется распределением Ферми или распределением Бозе (см. рис. 35.3 и рис. 35.4), в зависимости от значения спина частиц. Естественно, что распределения Ферми и Бозе при $\lambda \ll l$ переходят в распределение Больцмана.

Следует иметь в виду, что более общим критерием принадлежности газа к классическому или квантовому является отношение числа занятых квантовых состояний к их полному числу. Для классического газа это отношение значительно меньше чем единица; для квантового газа оно сравнимо с единицей.

Атомные и молекулярные газы являются классическими газами. Квантовыми идеальными газами могут быть газы легких элементарных частиц с относительно высокой плотностью.

Рассмотрим энергетические спектры квантовых идеальных газов. Наиболее интересными с физической точки зрения являются спектры систем одинаковых частиц. Известно (см. § 25.2), что на возможные состояния подобных систем накладываются определенные ограничения, ведущие к существованию только двух типов таких систем — бозе-и ферми-систем.

Насколько глубоко различаются свойства идеальных бозе- и ферми-газов, видно из рассмотрения их энергетических спектров при абсолютном нуле температуры ($T = 0$ К). Так, в бозе-газе при $T = 0$ К энергетический спектр системы представлен, по существу, единственным основным уровнем с нулевой энергией; возбужденные состояния практически не реализуются. Все частицы системы находятся на этом низшем нулевом уровне, поскольку в случае бозе-систем в одном и том же квантовом состоянии одновременно может находиться произвольное число частиц (см. рис. 35.4).

В идеальном ферми-газе при $T = 0$ К энергетический спектр представляет собой квазинепрерывную зону уровней, начинающуюся с нулевого уровня и оканчивающуюся некоторым граничным уровнем E_F , энергия которого зависит от числа частиц в системе. Такой характер спектра связан с тем, что в случае ферми-систем в одном и том же квантовом состоянии не может находиться одновременно более одной частицы (см. рис. 35.3).

Исходя из характера спектров квантовых идеальных газов, можно заключить, что полная энергия ферми-газа при $T = 0$ К отлична от нуля, в то время как для бозе-газа она равна нулю.

37.3 Уравнение состояния идеального газа Основной величиной, характеризующей макросистему, является энергия E . Поскольку энергия есть величина аддитивная, E является функцией объема V . Заметим, что давление $p \approx E/V$. В случае идеального газа, состоящего из N атомов, совершающих поступательное хаотическое движение,

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m}{2} \langle v_i^2 \rangle = N \langle \epsilon \rangle, \quad (37.1)$$

а давление

$$p = \frac{N}{V} \langle \varepsilon \rangle = \frac{NkT}{V}. \quad (37.2)$$

При выводе (37.2) мы воспользовались выражением (34.3). Перепишем (37.2) в виде

$$pV = NkT. \quad (37.3)$$

Мы получили так называемое **уравнение состояния классического идеального газа**. Оно связывает давление, объем и температуру газа. Так как в (37.3) не входят никакие величины, характеризующие природу конкретного газа, то оно пригодно для любых классических идеальных газов. Это находится в соответствии с тем обстоятельством, что мы при выводе (37.3) пренебрегали взаимодействием атомов, лишив газ его «индивидуальности».

Два различных идеальных газа, взятые при одинаковых p , V и T , содержат одинаковое число атомов. Так в 1 м^3 при нормальных условиях, т. е. при температуре 273 К и давлении $1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$, содержится

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{kT}$$

атомов. Подстановка числовых значений дает

$$\frac{N}{V} = \frac{1,01 \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} \text{ атомов/м}^3 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ атомов/м}^3.$$

В 1 моль газа, т. е. при $V = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, содержится атомов

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1};$$

указанное число называют *постоянной Авогадро*.

Запишем уравнение состояния (37.3) для 1 моль :

$$pV = RT, \quad (37.4)$$

где $R = N_A k$ называют *молярной газовой постоянной*:

$$R = 8,3 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}.$$

Остановимся на выводе классического *распределения Максвелла*, отмеченного в предыдущем параграфе. Речь идет о равновесном распределении почти свободных поступательно движущихся атомов газа по значениям их скоростей. Для этого достаточно в распределении Гиббса (35.3) заменить E_n на $mv^2/2$, поскольку поступательное движение атома с достаточной точностью описывается законами движения классической механики (см. рис. 24.3). В итоге

$$w(v) \propto e^{-mv^2/(2kT)}. \quad (37.5)$$

Чтобы получить распределение средних чисел $\langle n(v) \rangle$ частиц по значениям модулей их скоростей v (с разбросом dv), достаточно (37.5) умножить на объем шарового слоя $4\pi v^2 dv$ (в «пространстве скоростей»). В результате

$$\langle n(v) \rangle \equiv \frac{dN}{dv} = \text{const } v^2 e^{-mv^2/(2kT)}. \quad (37.6)$$

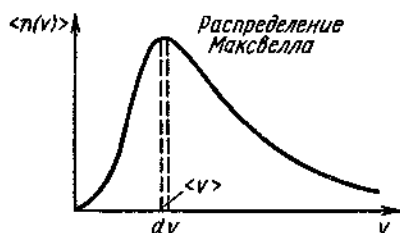


Рис. 37.1

График этой функции представлен на рис. 37.1. Максимум кривой находится при $v = \sqrt{2kT/m}$. Это значение скорости несколько меньше средней квадратической $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$. Последняя может быть вычислена по распределению Максвелла (37.5) и равна $\sqrt{3kT/m}$. Отсюда среднее значение кинетической энергии атома

$$\frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (37.7)$$

Сопоставление результата (37.7) с рис. 34.3 говорит о том, что область применимости (37.7) ограничена снизу так называемыми температурами вырождения T_v . При этих температурах в идеальном газе начинают проявляться квантовые эффекты и уравнение состояния газа (37.2) должно быть уточнено.

Найдем выражение для температуры вырождения T_v . Как уже отмечалось, в системе квантовые эффекты существенны, если

$$\lambda \sim l, \quad (37.8)$$

где λ — квантовомеханическая длина волны частицы и l — среднее расстояние между частицами. Соотношение (37.8) можно записать, учитывая (22.1), в виде

$$\frac{h}{p} \sim \left(\frac{N}{V} \right)^{-1/3}; \quad (37.9)$$

здесь p — импульсы частиц; (N/V) — их плотность. Полагая, согласно (37.7), что средняя кинетическая энергия частицы в системе

$$p^2/m \sim kT,$$

получим из (37.9)

$$T_v \sim \frac{h^2}{mk} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}. \quad (37.10)$$

Таким образом, температура вырождения определяется массой частиц и их плотностью. Подстановка числовых значений для всех атомарных (и молекулярных) газов показывает, что для проявления квантовых эффектов необходимы такие плотности, при которых газы фактически уже будут конденсированными телами (жидкостями или кристаллами). Иная ситуация складывается для газов из легких элементарных частиц (см. дальше).

37.4 Теплоемкость идеального газа По определению, *теплоемкость*

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (37.11)$$

Эта величина характеризует количество теплоты, которое должно получить тело, чтобы его температура повысилась на один кельвин. Ясно, что такое определение понятия теплоемкости неоднозначно. Действительно, поглощенная энергия может пойти не только на повышение температуры, но, например, и на работу расширения тела. Другими словами, при определении теплоемкости необходимо указывать условия, в которых происходит нагревание тела. В связи с этим рассматривают две теплоемкости: C_V — теплоемкость при постоянном объеме V тела, C_p — теплоемкость при постоянном внешнем давлении p .

При неизменном объеме тела $dV = 0$ и, согласно (36.1) и (36.2), $dQ = dE$, т. е. все полученное количество теплоты идет на изменение внутренней энергии тела. В результате

$$C_V = \left(\frac{dE}{dT} \right)_V. \quad (37.12)$$

Индекс V у производной означает, что дифференцирование производится при постоянном V (ведь внутренняя энергия E является функцией целого ряда переменных, в том числе V и T).

При нагревании тела в условиях, когда остается постоянным внешнее давление p (а на практике этот случай наиболее естествен),

$$dQ = dE + p dV. \quad (37.13)$$

Теперь поглощенная теплота идет не только на увеличение внутренней энергии, но и на работу расширения тела. Равенство (37.13) можно переписать и так:

$$dQ = d(E + pV) \equiv dH \quad (37.14)$$

и соответственно теплоемкость

$$C_p = \left(\frac{dH}{dT} \right)_p, \quad (37.15)$$

где H называют энтальпией (*тепловой функцией*).

Ясно, что теплоемкость C_p всегда больше теплоемкости C_V :

$$C_p > C_V. \quad (37.16)$$

Прежде чем переходить к рассмотрению теплоемкостей идеальных газов, отметим, что поскольку в них взаимодействие между частицами мало и в силу этого не учитывается, для данной массы газа внутренняя энергия E является функцией лишь температуры T , но не V и p .

Энтальпия 1 моль газа может быть записана в виде

$$H \equiv E + pV = E + RT. \quad (37.17)$$

Здесь использовано уравнение состояния (37.4) идеального газа. Продифференцируем (37.17) по температуре, тогда, учитывая определения теплоемкостей (37.12) и (37.15), получим

$$C_p = C_V + R. \quad (37.18)$$

Так просто связаны обе теплоемкости в идеальных газах.

Рассмотрим теплоемкость одноатомного газа (примерами ато-

марных газов являются инертные газы). Поскольку для таких газов внутренняя энергия определяется (37.1), то с учетом (37.7) можно написать

$$E = \frac{3}{2} k T N_A = \frac{3}{2} R T. \quad (37.19)$$

Теплоемкости же по (37.12) и (37.18) соответственно составят

$$C_V = \frac{3}{2} R, \quad C_p = \frac{5}{2} R. \quad (37.20)$$

Вычислим значения теплоемкостей двухатомных газов (т. е. газов, молекулы которых состоят из двух атомов). Для этого необходимо обратиться к структуре самих молекул. Из § 29 нам известно, что спектр энергии двухатомной молекулы состоит из нескольких ветвей: $E_{эл}$, $E_{кол}$, $E_{вр}$. Включиться в тепловое движение могут лишь возбужденные состояния тех или иных ветвей спектра. В связи с этим при температуре T в тепловую динамику системы в основном «включены» те ветви квантовых состояний, для которых $T \gtrsim \Delta E_i$, где ΔE_i — интервалы между соответствующими уровнями энергии. В § 29 приводились также значения порядков величин (в эВ) для интервалов энергии в различных ветвях спектра энергии молекулы. Чтобы воспользоваться этими данными, заметим, что

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} \text{ К} = 11\,600 \text{ К}.$$

Тогда $\Delta E_{эл} \sim kT$ соответствует температуре в несколько десятков тысяч кельвин, $\Delta E_{кол}$ — температуре свыше тысячи кельвин и $\Delta E_{вр}$ — температуре около 10 К. Энергия поступательного движения молекулы как целого изменяется непрерывно. Таким образом, если, например, взять двухатомный газ (водород, азот, кислород и др.) при комнатной температуре, то в тепловом движении будут участвовать фактически лишь поступательные и вращательные «степени свободы» молекул.

Изолированный атом обладает только тремя степенями свободы, связанными с поступательным движением атома как целого. Молекула из двух атомов имеет: три степени свободы для ее поступательного движения (рис. 37.2, а) и еще две степени свободы для вращательного движения (колебательное движение атомов внутри молекулы для

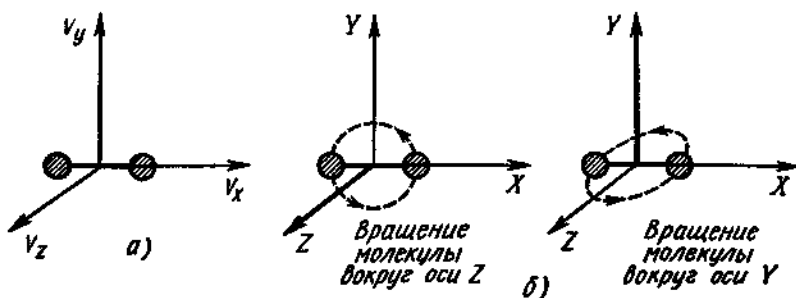


Рис. 37.2

нас сейчас несущественно) — рис. 37.2, б. Рассматривать вращение молекулы вокруг оси X не имеет смысла.

Если температура системы $T \gg \Delta E_n$, где ΔE_n — характерные интервалы энергии в ее энергетическом спектре, то: 1) свойства системы близки к классическим; 2) вследствие беспорядочности теплового движения ни один из видов движения сложной частицы (например, молекулы) не имеет преимущества перед другими; 3) в статистическом равновесии на каждую степень свободы, соответствующую поступательному или вращательному движению сложной частицы, приходится одна и та же средняя кинетическая энергия, равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы приходится энергия kT .

Для теплоемкости двухатомных газов (при комнатной температуре) без учета колебательных степеней свободы получим

$$C_V = \frac{5}{2}R, \quad C_p = \frac{7}{2}R. \quad (37.21)$$

По мере повышения температуры ($T \sim 10^3$ К) в тепловое движение будут «включаться» колебательные степени свободы, соответственно изменится и теплоемкость газа.

37.5 Обратимые тепловые процессы Если процесс протекает так, что в каждый момент времени система находится в состоянии теплового равновесия и энтропия в течение процесса не изменяется, то сам процесс называют обратимым (см. конец § 33).

Простейшие типы обратимых тепловых процессов, которые могут протекать в идеальных газах, рассматривают на основе уравнения состояния. Состояние газа определяется тремя параметрами: давлением p , объемом V и температурой T . Во время процесса состояние системы меняется, меняются значения p , V и T , хотя в каждый момент они удовлетворяют уравнению состояния. Последнее означает, что рассматриваемые тепловые процессы достаточно медленные: *в каждый момент времени система находится в новом состоянии теплового равновесия, соответствующего новым изменившимся условиям.*

Если процесс протекает так, что температура остается постоянной (*изотермический процесс*), то из (37.4) следует, что

$$pV = \text{const}. \quad (37.22)$$

Процесс, в котором постоянно давление (*изобарный процесс*), описывается соотношениями

$$\begin{aligned} T/V &= \text{const} \\ \text{или} \quad V/V_0 &= T/T_0. \end{aligned} \quad (37.23)$$

Формулы (37.23) вытекают из (37.4).

Процессы, сопровождающиеся постоянством объема (*изохорные процессы*), подчиняются, как это следует из уравнения состояния (37.4), связям

$$\begin{aligned} p/T &= \text{const} \\ \text{или} \quad p/T &= p_0/T_0. \end{aligned} \quad (37.24)$$

Рассмотрим так называемый *адиабатный процесс*, т. е. процесс, происходящий с теплоизолированной системой при совершении ею ра-

боты (или работы над ней). Используем общее термодинамическое соотношение (36.4), в котором положим $dQ = 0$. Тогда изменение состояния тела в адиабатном процессе описывается уравнением

$$dE + p dV = 0. \quad (37.25)$$

Применим (37.25) к адиабатному расширению (или сжатию) идеального газа. Возьмем 1 моль газа, тогда (37.25) можно записать в виде

$$C_V dT + p dV = 0. \quad (37.26)$$

В (37.26) мы использовали определение теплоемкости (37.12) и тот факт, что E для идеального газа (с фиксированной массой) является функцией лишь T . Подставим теперь в (37.26) выражение для p из (37.4) и разделим все равенство (37.26) на T , в результате получим соотношение

$$C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0. \quad (37.27)$$

Будем далее рассматривать ту область температур, в которой теплоемкость газа постоянна, тогда (37.27) переписывается в виде

$$d(C_V \ln T + R \ln V) = 0. \quad (37.28)$$

В (37.28) мы использовали выражение для производной от логарифмической функции и правило о том, что постоянную величину можно свободно вносить под знак дифференциала d и выносить из-под знака d . Равенство (37.28) означает, что выражение под знаком d есть константа, т. е.

$$C_V \ln T + R \ln V = \text{const.} \quad (37.29)$$

Иначе (37.29) запишется как

$$\ln(T^{C_V} V^R) = \text{const.},$$

а это означает, что

$$T^{C_V} V^R = \text{const.} \quad (37.30)$$

Наконец, учитывая (37.18) и возводя (37.30) в степень $1/C_V$, окончательно получим

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.}, \quad (37.31)$$

где

$$\gamma = C_p/C_V.$$

Таким образом, в адиабатном процессе температура и объем меняются так, что произведение $TV^{\gamma-1}$ остается неизменным. Так как, согласно (37.16), $\gamma > 1$ и, следовательно, $\gamma - 1 > 0$, то *адиабатное расширение газа сопровождается его охлаждением, а адиабатное сжатие — нагреванием*. Отмеченное обстоятельство следует из соотношения $dE = dA$, описывающего теплоизолированные системы, ибо работа расширения производится в этом случае за счет внутренней энергии, которая для идеального газа есть возрастающая функция температуры, см. (37.7).

Используя уравнение состояния идеального газа (37.4) и получен-

ную связь (37.31), можно найти соотношения между другими переменными, описывающими адиабатный процесс, а именно

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (37.32)$$

и
$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (37.33)$$

Сравним адиабатное и изотермическое расширения идеального газа. Уравнение изотермы есть (37.22), а в качестве уравнения адиабаты возьмем (37.32). Пусть в начальный момент времени состояние газа характеризуется параметрами p_0 , V_0 . В дальнейшем, каждый раз исходя из состояния p_0 , V_0 , проведем с газом два различных процесса расширения. Результаты представлены на рис. 37.3.

Ранее в § 36 (на рис. 36.1) рассматривался так называемый цикл Карно, который состоял из двух адиабат и двух изотерм. Теперь читатель должен яснее представлять себе этот цикл.

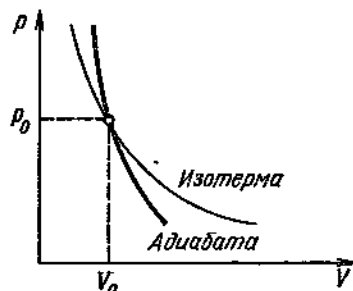


Рис. 37.3

§ 38. СТАТИСТИКА И ТЕРМОДИНАМИКА ИЗЛУЧЕНИЯ

Электромагнитное излучение в полости может находиться в тепловом равновесии с веществом стенок полости. Если рассматривать электромагнитное излучение как коллектив фотонов (см. § 26.3), то речь должна идти о равновесном «фотонном газе».

Электромагнитные волны не рассеиваются друг на друге, этот факт нашел отражение в линейности уравнений Максвелла. Линейность уравнений поля обеспечивает применимость к полю принципа суперпозиции, который означает, что поля могут накладываться друг на друга без взаимного влияния. В результате «газ» фотонов следует рассматривать как идеальный газ.

Фотоны есть квантовые объекты, ведь в выражения их энергии (26.4), импульса (26.6) и момента (26.5) входит постоянная Планка \hbar . Поскольку момент фотона целочисленный (см. § 26.3), равновесный «фотонный газ» должен подчиняться статистике Бозе.

Фотоны, находящиеся в полости, непрерывно поглощаются стенками полости, в свою очередь стенки сами испускают новые фотоны. В состоянии теплового равновесия между стенками и излучением все указанные процессы компенсируют друг друга, так что распределение фотонов по частотам и направлениям остается в среднем неизменным.

Пусть вещество стенок состоит из различных групп атомов, каждая из которых включает в себя N атомов. Предположим, что эти атомы могут находиться только в двух состояниях: основном i и возбужденном j . Разности энергий ΔE между этими состояниями соответствует либо испущенный, либо поглощенный фотон с энергией $\hbar\omega$ (рис. 38.1, а). Таким образом, фотонам с данной частотой ω сопоставляется некоторая группа атомов (число атомов в группе достаточно

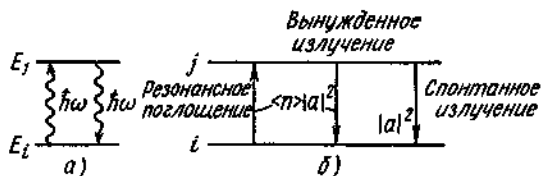


Рис. 38.1

велико). Средние числа атомов группы, находящихся в основном и возбужденном состояниях, обозначим соответственно $N_{\text{осн}}$ и $N_{\text{возб}}$. В тепловом равновесии эти числа должны удовлетворять соотношению (35.5), которое в данном случае запишется как

$$\frac{N_{\text{возб}}}{N_{\text{осн}}} = e^{-\Delta E/(kT)} = e^{-\hbar\omega/(kT)}. \quad (38.1)$$

На рис. 38.1, б изображены два основных процесса, которые происходят между фотонами полости и атомами вещества стенок. Один из процессов (назовем его *прямым*) состоит в поглощении атомом, находящимся в основном состоянии, фотона с частотой ω и последующем переходе этого атома в возбужденное состояние. *Обратным* процессом по отношению к указанному является переход атома из возбужденного состояния в основное, сопровождающийся излучением фотона с частотой ω . При этом возможны два типа излучения: *спонтанное* и *вынужденное*, причем вероятность последнего пропорциональна числу фотонов с частотой ω , имеющихся в полости (см. § 26).

В статистическом равновесии скорости прямого и обратного процессов должны быть равны. Сами скорости процессов определяются как количеством атомов в группе, так и средним числом $\langle n \rangle$ фотонов с частотой ω , находящихся в данном состоянии. Средние числа $\langle n \rangle$ фотонов входят в выражение $\langle n \rangle |a|^2$ для вероятности резонансного поглощения и в вероятность $\langle n \rangle |a|^2$ вынужденного излучения; $|a|^2$ есть квантовомеханическая вероятность спонтанного излучения. Тогда скорость поглощения фотона из «подсистемы фотонов с частотой ω » есть $N_{\text{осн}} \langle n \rangle |a|^2$, скорость же испускания фотона в «подсистему ω -фотонов» есть $N_{\text{возб}} (\langle n \rangle + 1) |a|^2$, где в выражении в скобках единица относится к спонтанному излучению, а $\langle n \rangle$ к вынужденному излучению. Приравнявая скорости двух рассматриваемых процессов, получим

$$N_{\text{осн}} \langle n \rangle = N_{\text{возб}} (\langle n \rangle + 1). \quad (38.2)$$

Сравнив (38.2) с (38.1), найдем

$$\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1} = e^{-\hbar\omega/(kT)}$$

$$\text{или} \quad \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1}. \quad (38.3)$$

Заметим, что (38.3) есть аналитическое выражение распределения Бозе в применении к фотонному газу.

Хотя вывод (38.3) основан на некоторой модели, это распределение имеет прямое отношение к реальности. Оно существенно квантовое и дает распределение фотонов при температуре T по различным квантовым состояниям с энергиями $\varepsilon = \hbar\omega$, где ω — собственные частоты излучения в данном объеме V полости. Если считать объем достаточно большим, то можно перейти от дискретного распределения собственных частот излучения к непрерывному.

Пусть объем V полости, в которой устанавливаются собственные колебания поля (см. § 18.4), не мал. Это означает, что волны свободно распространяются в условиях, когда их длина волны $\lambda \ll L$, где L — размеры полости. Введем 6-мерное «фазовое пространство состояний». Элементарной фазовой ячейкой является

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \Delta x \Delta y \Delta z \sim \hbar^3;$$

здесь использованы соотношения неопределенностей (22.2), буквой p обозначен импульс. Для фотонов с модулем импульса в интервале между p и $p + dp$ число квантовых состояний равно

$$2 \frac{4\pi p^2 dp V}{\hbar^3},$$

где множитель 2 соответствует двум независимым направлениям поляризации фотонов (см. § 28). Поскольку для фотонов импульс $p = \hbar\omega/c$, то число квантовых состояний с частотами в интервале между ω и $\omega + d\omega$ составит

$$\frac{V\omega^2 d\omega}{c^3}; \quad (38.4)$$

числовые коэффициенты здесь опущены. Умножив распределение (38.3) на (38.4), получим число фотонов в данном интервале частот

$$dN_\omega = \frac{V}{c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1}. \quad (38.5)$$

Умножив (38.5) на $\hbar\omega$, найдем энергию излучения, заключенную в этом участке спектра:

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1}. \quad (38.6)$$

Формула (38.6), называемая *формулой Планка*, дает спектральное распределение энергии равновесного излучения (ее график представлен на рис. 38.2).

На рис. 38.2 показано положение максимума величины $dE_\omega/d\omega$ («плотность» спектрального распределения энергии равновесного излучения по частотам). Если же перейти к распределению энергии равновесного излучения по

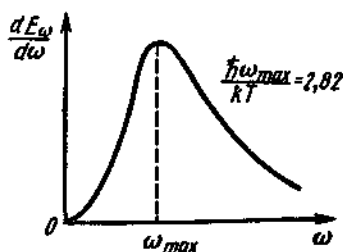


Рис. 38.2

длинам волн ($\lambda = 2\pi c/\omega$), то величина $dE_\lambda/d\lambda$ имеет максимум при выполнении условия

$$2\pi \left(\frac{\hbar c}{k} \right) \frac{1}{\lambda_{\max} T} = 4,96^*, \quad (38.7)$$

или

$$T\lambda_{\max} = \text{const} = \frac{2\pi\hbar c}{4,96k}.$$

При повышении температуры излучающего тела максимум энергии излучения смещается в коротковолновую область спектра.

Чтобы оценить значение формулы (38.7), рассчитаем в качестве примера температуру внешних слоев Солнца. Известно, что энергетический максимум излучения Солнца приходится на желто-зеленую область спектра, т. е. $\lambda_{\max} \approx 5,5 \cdot 10^{-7}$ м, тогда из (38.7)

$$T \approx \frac{6,28 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,96 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 5,5 \cdot 10^{-7}} \text{ К} \approx 5300 \text{ К}.$$

Если проинтегрировать (38.5) по всем частотам (от 0 до ∞), то

$$dN_\omega \rightarrow N,$$

где

$$N = 0,244 [kT/(\hbar c)]^3 V \quad (38.8)$$

есть полное число фотонов в равновесном излучении. Интегрирование можно выполнить графически, если построить график функции (38.5) и подсчитать площадь под этой кривой. Из (38.8) следует, что

$$VT^3 = \text{const}. \quad (38.9)$$

Это есть термодинамическое соотношение.

Другую термодинамическую связь для равновесного электромагнитного излучения получим, проинтегрировав (38.6) в том же неограниченном диапазоне частот; тогда

$$dE_\omega \rightarrow E,$$

где

$$E = 0,658 \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} V \quad (38.10)$$

есть полная энергия равновесного излучения. Так как давление

$$p \sim E/V \quad (38.11)$$

(см. начало § 37.3), то из (38.10) и (38.11) вытекает, что

$$\frac{p}{T^4} = \text{const}. \quad (38.12)$$

Рассмотрев совместно (38.9) и (38.12) и исключив из них T , получим

$$pV^{4/3} = \text{const}. \quad (38.13)$$

* Этот числовой результат для $\lambda = \lambda_{\max}$ получается из решения уравнения $dE_\lambda/d\lambda = 0$ (математическая задача на экстремум).

Отметим, что давление, объем и температура равновесного фотонного газа связаны соотношениями (38.9), (38.12) и (38.13) при его адиабатном расширении (или сжатии). Эти соотношения могут оказаться полезными в целом ряде случаев, например в вопросах эволюции звезд, поскольку световое давление внутри звезды играет заметную роль.

Найдем *поверхностную плотность потока равновесного излучения* (интенсивность излучения), т. е. отношение энергии, испускаемой в единичное время, к площади излучающей поверхности. Для этого исходим из выражения

$$j \sim \frac{E}{V}c, \quad (38.14)$$

где E/V — объемная плотность энергии поля; c — скорость света (см. § 17.2); размерность $[j] = 1 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Ясно, что для получения j достаточно плотность энергии излучения из (38.10) умножить на постоянную c . В результате находим

$$j \sim \left(\frac{k^4}{h^3 c^2} \right) T^4. \quad (38.15)$$

Точные вычисления дают

$$j = \sigma T^4, \quad (38.16)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ — *постоянная Стефана — Больцмана*. Таким образом, интенсивность равновесного излучения 1 м^2 излучающей поверхности определяется формулой (38.16).

Заметим, что формула (38.16) может быть получена чисто термодинамически, однако таким способом нельзя получить числового значения постоянной σ . Статистический подход позволяет, как мы видели, находить не только самую связь величин, но и вычислять необходимые постоянные. В термодинамике постоянная σ может быть извлечена только из эксперимента.

§ 39. КРИСТАЛЛЫ

39.1 Кристаллическая решетка В состоянии полного термодинамического равновесия при $T = 0 \text{ К}$ энергия системы минимальна и из всех возможных взаимных расположений частиц должны реализовываться лишь некоторые избранные, а значит, упорядоченные. Другими словами, *при низких температурах все тела должны быть кристаллическими* (об одном-единственном исключении из этого правила см. § 54).

Под понятием *кристалла* (кристаллическое тело) разумеют прежде всего периодичность его микроскопической структуры. В кристалле каждый атом окружен расположенными определенно другими атомами, и если эта конфигурация атомов обладает наименьшей возможной энергией, ясно, что она должна повторяться и в любых других местах тела.

Простейшая конфигурация атомов (в общем случае, атомов различного сорта), которая периодически повторяется вдоль тела во всех

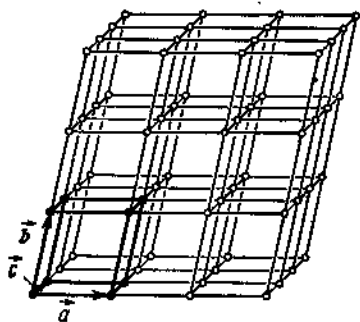


Рис. 39.1

трех измерениях, образует то, что называют элементарной ячейкой кристаллической решетки (рис. 39.1).

Кристаллическая решетка обладает, как говорят, *трансляционной симметрией* или *симметрией переноса* с периодами a , b и c вдоль соответствующего направления (рис. 39.1). Естественно, что такие физические величины, как, например, плотность заряда, создаваемая электронами атомов, обладают такой же периодичностью, как и сама решетка.

Какие кристаллические системы могут существовать в природе? Ответ на этот вопрос связан с рассмотрением возможных типов симметрии пространственных решеток. Мы не станем останавливаться на этой интересной теме, а заметим лишь, что число типов симметрии решеток ограничено.

В этом можно как-то убедиться хотя бы на следующем примере. Скажем, пусть поставлена задача: выложить плоскость одинаковыми фигурами так, чтобы получившийся паркет был без зазоров между фигурами. Ясно, что геометрия самих фигур не может быть какой угодно. Сумма углов смежных фигур вокруг общей вершины должна быть равной углу 360° , а сами углы — целыми кратными от 360° , т. е. в простейшем случае 60° , 90° , 120° . В результате симметричные паркеты можно складывать из прямоугольников, треугольников, квадратов и шестиугольников (разумеется, правильных). Изложенный пример имеет отношение к реальным кристаллам, поскольку плоская сетка есть проекция пространственной.

39.2 Типы связей в решетках Какие типы связей существуют в решетках? Это *ионная*, *ковалентная*, *металлическая* и *ван-дер-ваальсова* связи (см. § 29). Типичным представителем кристаллов с ионной связью является кристалл NaCl . При образовании этого кристалла происходит перераспределение атомных внешних электронов между атомами Na и атомами Cl , а именно валентный электрон Na переходит во внешнюю оболочку атома Cl и насыщает ее. В результате кристалл состоит не из атомов Na и Cl , а из ионов Na^+ и Cl^- . Электростатическое притяжение этих ионов обеспечивает связь в кристалле NaCl .

Природу ковалентной связи в кристаллах можно понять, рассматривая процесс сближения атомов. При большом удалении атомов друг от друга каждый электрон находится в поле только своего ядра. При сближении атомов до расстояний, при которых их электронные амплитуды вероятности $\psi(r)$ [см. рис. 24.6, а] начинают перекрываться, образуется общее электронное состояние из двух электронов с антипараллельными спинами в поле обоих ядер. Энергия такой пары электронов меньше, чем их суммарная энергия в изолированных состояниях (см. § 29). Такую связь и называют ковалентной.

Типичным кристаллом с ковалентной связью является алмаз. Кристаллическая решетка алмаза образована атомами углерода C ,

имеющего четыре валентных электрона. Каждый атом С находится в центре тетраэдра, вершинами которого служат четыре ближайших атома. Таким образом, каждый атом в решетке алмаза связан четырьмя направленными ковалентными связями. Высокая энергия ковалентных связей и ее направленность делают кристаллическую решетку очень жесткой.

В металлах связь имеет совершенно другой характер. Она возникает не между соседними атомами, а является свойством всего кристалла. Внешние валентные электроны в металле полностью обобществлены и образуют, как говорят, *электронный газ*. В узлах решетки металла находятся положительно заряженные ионы. Связи в металлах уже не являются строго направленными.

В молекулярных кристаллах молекулы сохраняют, так сказать, свою индивидуальность и скреплены между собой слабыми ван-дер-ваальсовыми силами. Такого рода кристаллы резко отличаются от кристаллов типа алмаза, который есть не что иное, как одна гигантская молекула. К ван-дер-ваальсовым кристаллам относятся и атомарные кристаллы типа твердого аргона.

В ван-дер-ваальсовых кристаллах энергия связи частиц на один-два порядка ниже, чем в кристаллах любого другого типа. Поэтому для ван-дер-ваальсовых кристаллов характерны крайне низкие температуры плавления (обычно от -150 до $+350^{\circ}\text{C}$); большая рыхлость их структуры ведет к значительной сжимаемости.

В кристаллах часто реализуются несколько разных типов связей одновременно. Так, в графите, имеющем сложную структуру, в плоскостях, состоящих из шестичленных сеток, осуществляются ковалентные связи (расстояние $0,142$ нм), а между слоями действуют ван-дер-ваальсовы силы (расстояние $0,34$ нм). Такое странное сочетание различных видов связей в решетке графита ведет к поразительному сочетанию его свойств — он обладает невысокой твердостью (мягок) и одновременно одной из самых высоких температур плавления (около 4000°C).

39.3 Механические свойства кристаллов Энергия U взаимодействия атом — атом как функция межатомного расстояния r различна в разных решетках и к тому же зависит от сорта атомов. Отвлекаясь от указанных деталей, можно привести качественную зависимость $U(r)$, характерную для любых межатомных взаимодействий. Ее вид приведен на рис. 16.5 (см. ход $U_{\text{ф}}$) и рис. 45.1.

Для наших целей, однако, удобно проанализировать кривую $F(r)$, где

$$F = - \frac{dU}{dr}$$

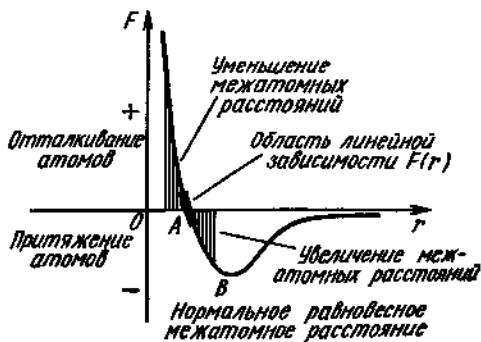


Рис. 39.2

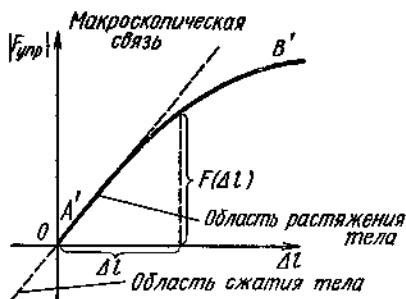


Рис. 39.3

является силой межатомного взаимодействия. Все замечания, высказанные по отношению к функции $U(r)$, естественно, переносятся и на функцию $F(r)$, являющуюся производной от U . Ход функции $F(r)$ приведен на рис. 39.2.

Будем рассматривать макроскопическое отображение функции $F(r)$, имеющее вид зависимости упругой силы $|F_{\text{упр}}|$ от деформации Δl (участок AB на рис. 39.2 отображен участком $A'B'$ на рис. 39.3).

Поставим формальную задачу о построении простого и удобного приближенного выражения для функции $F_{\text{упр}}(\Delta l)$. Исходим из общей формулы для производной от функции $F_{\text{упр}}(\Delta l)$ по Δl в точке $\Delta l = 0$:

$$F'_{\Delta l}(0) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{F(\Delta l) - F(0)}{\Delta l}. \quad (39.1)$$

Перепишем ее в виде

$$F(\Delta l) \approx F(0) + F'_{\Delta l}(0) \Delta l. \quad (39.2)$$

Формула (39.2) дает приближенное выражение функции $F(\Delta l)$ в точке Δl через ее значение и ее производную в нуле.

Поскольку производная $F'_{\Delta l}$ меняется на промежутке Δl , точное выражение для $F(\Delta l)$ в точке Δl имеет вид

$$F(\Delta l) = F(0) + \int_0^{\Delta l} F'_{\Delta l}(\Delta l) d(\Delta l). \quad (39.3)$$

Возьмем производную от (39.2)

$$F'_{\Delta l}(\Delta l) \approx F'_{\Delta l}(0) + F''_{\Delta l}(0) \Delta l$$

и подставим ее в (39.3):

$$F(\Delta l) \approx F(0) + \int_0^{\Delta l} [F'_{\Delta l}(0) + F''_{\Delta l}(0) \Delta l] d(\Delta l) = F(0) + F'_{\Delta l}(0) \Delta l + F''_{\Delta l}(0) \frac{(\Delta l)^2}{2}. \quad (39.4)$$

Производя дальнейшие аналогичные операции по уточнению приближенного выражения (39.2), мы перейдем от (39.4) к

$$F(\Delta l) \approx F(0) + F'_{\Delta l}(0) \Delta l + F''_{\Delta l}(0) (\Delta l)^2 + F'''_{\Delta l}(0) (\Delta l)^3. \quad (39.5)$$

В этой формуле мы опустили числовые коэффициенты при второй и третьей производных. Как ясно из вывода, (39.5) применимо к любой непрерывной гладкой функции, а не только к $F(\Delta l)$. В (39.5) построение последующих членов можно было бы продолжать неограниченно. Такую математическую процедуру называют *разложением функции в ряд*. Это одна из замечательных находок математиков, которая в руках физиков становится весьма конструктивным средством.

Убедимся в этом. В общей математической формуле (39.5) учтем условия конкретной физической задачи. А именно: 1) в состоянии

равновесия, когда деформация отсутствует, т. е. $\Delta l = 0$, упругие силы не возникают $F(0) = 0$; 2) поскольку тела проявляют симметрию по отношению к растяжению и сжатию (не слишком далеко от состояния равновесия), функция $F(\Delta l)$ должна быть нечетной, т. е. $F(\Delta l) = -F(-\Delta l)$, а это означает, что в разложении по малым деформациям все члены с четными степенями отсутствуют. В итоге

$$F(\Delta l) \approx F'_{\Delta l}(0) \Delta l - F'''_{\Delta l}(0) (\Delta l)^3,$$

где

$$F'_{\Delta l}(0) = \text{const} \equiv \alpha,$$

$$F'''_{\Delta l}(0) = \text{const} \equiv \beta.$$

При малых деформациях

$$\alpha \Delta l \gg \beta (\Delta l)^3$$

и зависимость

$$F_{\text{упр}}(\Delta l) \approx \alpha \Delta l \quad (39.6)$$

является линейной (закон Гука). При больших деформациях

$$\alpha \Delta l \gtrsim \beta (\Delta l)^3$$

и

$$F_{\text{упр}}(\Delta l) \approx \alpha \Delta l - \beta (\Delta l)^3, \quad (39.7)$$

т. е. зависимость уже нелинейна. Не только в (39.6), но и в (39.7) деформации предполагаются упругими, т. е. тело нацело восстанавливает свою форму и размеры после снятия механических нагрузок.

С термодинамической точки зрения деформированное состояние тел есть неравновесное состояние. Поэтому в деформированном теле возникают внутренние напряжения, которые стремятся вернуть тело в состояние теплового равновесия. Последнее означает, что вдоль всего тела любой малый мысленно выделенный объем испытывает такое воздействие со стороны окружающих его частей, что результирующая всех сил равна нулю.

Заметим, что внутренние напряжения в деформированном теле обусловлены межатомными взаимодействиями. Естественно, что в недеформированном состоянии тел внутренние напряжения отсутствуют.

Оценим значения предельных внутренних напряжений в идеальных кристаллических телах, т. е. в *бездефектных монокристаллах*. Рассмотрим предельную механическую прочность идеальных ионных кристаллов. Внутреннее напряжение p , характеризующее разрыв тела, может быть выражено как (см. § 37, п. 37.3)

$$p \sim E/V \sim \langle U \rangle (N_i/V),$$

где (N_i/V) — плотность числа ионов в теле. Средняя энергия взаимодействия пары однозарядных ионов с противоположными знаками зарядов $\langle U \rangle \sim e^2/r$, что составляет $\sim 10^{-18}$ Дж. Для вычисления $\langle U \rangle$ в формулу в данном случае нужно подставлять значения величин, выраженные в СГС, а затем переходить в СИ. Так как $(N_i/V) \sim 10^{28}$ ионов/м³, то

$$p \sim 10^{10} \text{ Дж/м}^3.$$

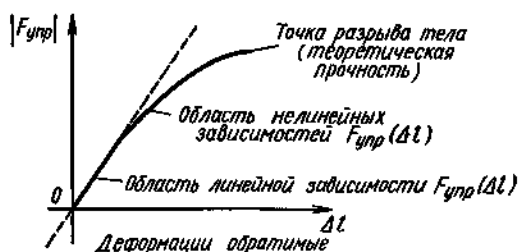


Рис. 39.4

Полученные значения механической прочности превышают прочность реальных тел в $10^2 - 10^3$ раз. Причина таких расхождений теоретических оценок и реальных измерений будет выяснена в дальнейшем. Сейчас же отметим, что механическая прочность нитевидных бездефектных кристаллов, которые удалось получить физикам, оказалась близкой к теоретическому значению.

Если подвергать идеальный кристалл при низких температурах однородной деформации (т. е. такой деформации, когда каждая малая часть кристалла деформируется одинаковым образом), то график зависимости внутренних упругих сил $F_{упр}(\Delta l)$ от деформаций Δl должен выглядеть так, как это изображено на рис. 39.4. Отметим, что в идеальном кристалле деформации носят обратимый характер, т. е. чисто упруги.

Перейдем к реальным кристаллам. Здесь рассмотрение будет по необходимости лишь качественным. В реальных образцах помимо упругих (обратимых) деформаций возникают (при значительных нагрузках) и необратимые, так называемые *пластические деформации*. При пластических деформациях после снятия нагрузки возникают остаточные изменения в теле.

При анализе механических свойств реальных кристаллов удобно исходить из вида их зависимости $F(\Delta l)$. На рис. 39.5 приведен качественный ход кривой $F(\Delta l)$. На ней представлены области упругих (линейных и нелинейных) деформаций, области пластичности и текучести. При сравнении кривых $F(\Delta l)$ для идеальных кристаллов (рис. 39.4) и реальных твердых тел (рис. 39.5) следует иметь в виду



Рис. 39.5



Рис. 39.6

огромное различие в масштабах. Как уже отмечалось, дело в том, что максимум $|F|$ для идеальных кристаллических структур в сотни и тысячи раз превышает максимум $|F|$ для реальных образцов. Причина указанных столь разительных отличий состоит в том, что в одном случае имеет место строгая упорядоченность в расположении атомов в решетке, а в другом — отклонение от правильностей в «атомной упаковке», кристалла, т. е. в наличии так называемых *дефектов решетки*.

В кристаллических телах дефекты классифицируют следующим образом. Группа *точечных дефектов*: *вакансии* — пустые незаполненные места в узлах решетки; *межузельные атомы внедрения* (по отношению к атомам основного вещества или «чужеродным» атомам примеси). Другим типом дефектов являются *линейные дефекты*, к ним относят так называемые *дислокации*. Дислокация — это дефект решетки, вызванный наличием в ней одной лишней кристаллической полуплоскости, вдвинутой между двумя геометрически правильными атомными плоскостями (рис. 39.6).

Механические свойства реальных твердых тел в основном определяются поведением дислокаций. Потеря упругих свойств реальными образцами связана с появлением в них дислокаций, с движением рожденных дислокаций, с их взаимодействием с другими дислокациями и иного рода дефектами.

В качестве примера того, как увязывается макроскопическое поведение механически нагруженных образцов с кинетикой дислокаций в них, рассмотрим явление *упрочнения металлов* при значительных пластических деформациях. Вначале отметим, что любой вид однородной деформации кристаллических тел сводится к *всестороннему сжатию* (или *растяжению*) и *сдвигу*. При всестороннем сжатии форма тела остается подобной самой себе, меняется лишь объем тела. При деформации сдвига ситуация обратная, т. е. меняется только форма, но не объем тела. Именно под влиянием сдвиговой составляющей возникает скольжение дислокаций (рис. 39.7) уже при сравнительно небольших напряжениях (целостное соскальзывание одной части кристалла относительно другой возможно при слишком высоких напряжениях). Если испытываемый образец обладает достаточно упорядоченной структурой, то начавшая двигаться дислокация почти не тормозится и пластические деформации растут. Но развитие деформации приводит к возникновению новых дислокаций, ко-

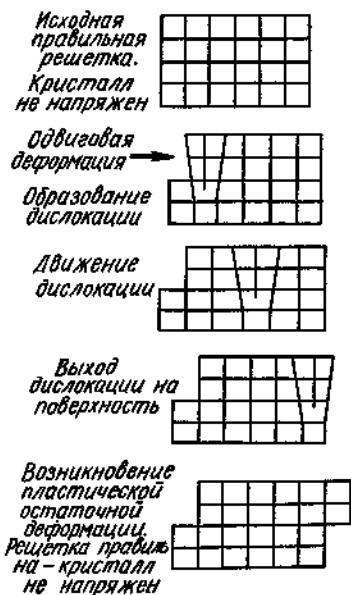


Рис. 39.7

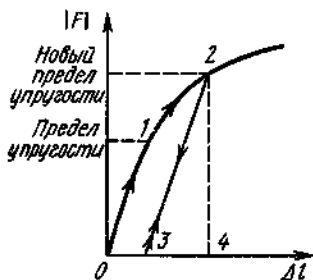


Рис. 39.8

торые начинают препятствовать свободному скольжению других. Торможение дислокаций ведет к прекращению пластической деформации, а это означает, что предел упругости тела повышается. Описанное явление и называют упрочнением (на рис. 39.8 участки 0-1-2 и 2-3 — соответственно диаграммы нагрузки и разгрузки, 0-3 — остаточная деформация, 3-4 — упругая деформация).

Заметим, что существует несколько экспериментальных способов непосредственного наблюдения дислокаций. Наиболее

прямой из них — это использование электронного микроскопа, позволяющего видеть расположение атомных плоскостей, в том числе и «лишние» атомные полуплоскости, т. е. сами дислокации.

Кратко остановимся на свойстве *текучести твердых тел*. При крайне высоких механических нагрузках заметное увеличение объема тел происходит за счет образования «пустых мест» в решетке, т. е. за счет вакансий. При больших внутренних напряжениях вакансии интенсивно диффундируют вдоль «испорченного» кристалла, в направлении действия внешних механических усилий. Возникает нечто похожее на течение очень вязкой жидкости, однако скорость такого течения необычайно мала. В эксперименте это проявляется в непрерывном росте деформации тела без увеличения нагрузки.

Описанный механизм течения твердых тел характерен скорее для повышенных температур; при низких температурах осуществляется, по-видимому, пластическое течение скользящих дислокаций.

39.4 Электронные энергетические спектры кристаллов Из-за взаимодействия внешних электронных оболочек атомов кристалла внешние валентные электроны могут обобществляться по-разному. Существование такого взаимодействия означает, что в твердых телах нельзя уже говорить об уровнях энергии отдельных атомов, можно говорить лишь об уровнях для совокупности электронных оболочек всех атомов в целом.

В решетке из N ячеек содержатся N одинаковых и одинаково расположенных атомов. Обладая одной и той же энергией, электрон e^- может находиться в любом из них (ψ -функции этих атомов перекрываются). Поэтому простой атомный уровень приобретает в решетке добавочное N -кратное вырождение. Взаимодействие между атомами в решетке снимает это «перестановочное» вырождение. Атомный уровень превращается в энергетическую зону, которая состоит из N близко расположенных уровней (рис. 39.9).

Степень заполнения электронами уровней в какой-либо энергетической зоне зависит от заполнения соответствующего атомного уровня. Если все квантовые состояния с энергией E_n в атоме заполнены электронами, то образующаяся из этого уровня зона также заполнена.

Из пустых уровней получаются пустые зоны; из частично запол-

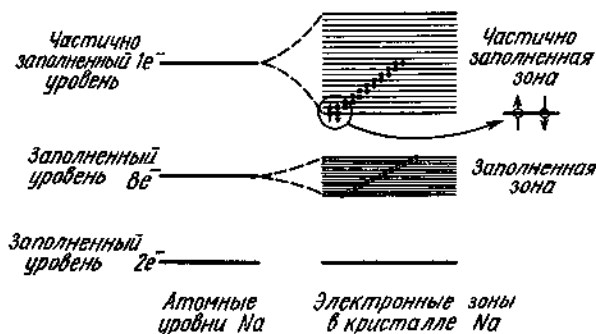


Рис. 39.9

ненных — частично заполненные*. Тела с частично заполненной зоной являются *металлами*, а тела, у которых энергетический спектр электронных состояний состоит только из заполненных и пустых зон, — *диэлектриками* (рис. 39.10).

Наличие в металле частично заполненной зоны приводит к тому, что тепловое движение может вызывать перераспределение электронов по состояниям (электроны переводятся на соседние вакантные уровни в зоне). В диэлектрике, напротив, электроны целиком заполненной зоны не могут принимать участия в тепловом движении (отсутствие вакантных уровней в зоне).

В отличие от металлов в диэлектриках электронный спектр характеризуется присутствием «энергетической щели» (*запрещенная зона*). Поэтому свойства диэлектриков определяются двумя зонами — заполненной и пустой — и существенно зависят от ширины щели, разделяющей эти зоны. Если ширина энергетической щели не очень велика, то вместо диэлектрика имеем *полупроводник*.

У обычных диэлектриков ширина щели или, иначе говоря, запрещенной энергетической зоны (рис. 39.10) имеет порядок нескольких электрон-вольт, что соответствует температуре порядка нескольких

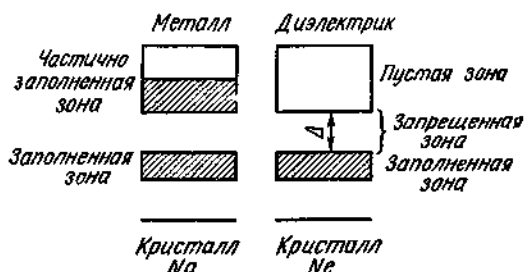


Рис. 39.10

* Конечно, от этого правила есть и отступления, поскольку зоны могут взаимно перекрываться.

десятков тысяч градусов. При обычных для диэлектрических кристаллов температурах, когда $kT \ll \Delta$, где Δ — ширина щели, плотность свободных электронов в «пустой» зоне, переходящих в нее из заполненной зоны вследствие теплового движения, чрезвычайно мала и зависит от температуры экспоненциально ($\sim \exp[-\Delta/(kT)]$). В полупроводниках ширина щели Δ порядка и меньше 1 эВ.

Таким образом, зонный характер энергетического спектра электронных состояний в кристаллах позволяет понять фундаментальный факт существования в природе трех основных групп кристаллических твердых тел: металлов, диэлектриков и полупроводников. Указанная терминология связана со свойством электрической проводимости тел (см. гл. VII).

39.5 Теплоемкость решетки Основной вклад в энергию теплового движения вносит решетка, роль же электронов весьма мала*. Это связано с большой разницей в числе степеней свободы у решетки и электронов. В диэлектриках при обычных температурах все электроны «закжаты» в полностью заполненных зонах; эти электроны не могут изменить свои состояния и принять участие в тепловом движении. В металлах электроны имеют возможность изменять энергию своих состояний, но число электронов, включившихся в тепловое движение, хотя и растет с температурой, но все-таки остается малым по сравнению с числом ядер решетки (количественные оценки см. в следующем параграфе). В результате те термодинамические величины, которые будут получены ниже, полностью описывают тепловые свойства диэлектрических кристаллов и лишь решеточную составляющую теплоемкости металлов.

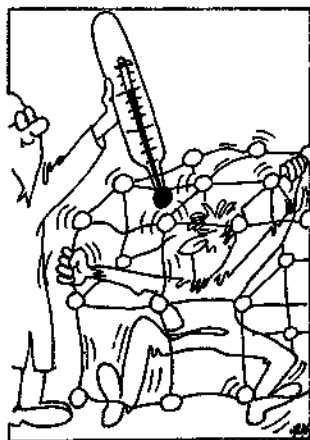
Тепловое движение ядер решетки сводится к их колебательному движению около некоторых положений равновесия (узлов решетки). Это движение не прекращается даже при стремлении температуры к абсолютному нулю. Колебания ядер решетки при абсолютном нуле температуры называют иногда «нулевыми».

Оценим интервал температур, в котором колебания ядер решетки следует рассматривать квантовым образом. Согласно (37.10)

$$T_q \sim \frac{h^2}{m_p k} \left(\frac{N_p}{V} \right)^{2/3} \quad (39.8)$$

Здесь m_p — масса протона. Подстановка числовых значений дает

$$T_q \sim \frac{(10^{-34})^2}{10^{-27} \cdot 10^{-23}} (10^{28})^{2/3} \text{ К} = 10 \text{ К.}$$



* Исключение составляют металлы при температурах, близких к абсолютному нулю (см. § 39.6).

Таким образом, квантовомеханическое исследование колебаний решетки необходимо при температурах $T \approx 10$ К. При более высоких температурах решетку можно рассматривать классически.

Слабовозбужденные состояния решетки, т. е. ее состояния при низких температурах, характеризуются возникновением в ней коллективных упругих колебаний малых частот ω . Такие колебания есть не что иное, как обычные звуковые волны. Звуковые же волны носят макроскопический характер, а это значит, что их длины волн λ должны быть много больше постоянной решетки a (см. рис. 39.1). В свою очередь, условие $\lambda \gg a$ сводится к условию

$$\omega \ll u/a, \quad (39.9)$$

где u — скорость звука; при получении (39.9) мы использовали выражение $\lambda \sim u/\omega$. Таким образом, коллективные колебания ядер решетки могут рассматриваться как звуковые волны, если температура удовлетворяет условию

$$\frac{kT}{\hbar} \ll \frac{u}{a}$$

или

$$T \ll \frac{\hbar u}{ka}. \quad (39.10)$$

Какова температурная область, соответствующая (39.10)? Полагая в (39.10) $u \sim 10^3$ м/с и $a \sim 10^{-10}$ м, получим

$$T \ll \frac{10^{-34} \cdot 10^3}{10^{-23} \cdot 10^{-10}} \text{ К} = 10^2 \text{ К}. \quad (39.11)$$

Противоречия между оценками (39.8) и (39.11) нет.

Введем представление о квантах звука — *фононах*; оно весьма естественно в нашем изложении. Чтобы до конца уяснить необходимость такого нововведения, заметим, что если в двухатомных молекулах идеального газа ядра совершают индивидуальные внутримолекулярные колебания (см. § 29), то в решетке колебания ядер носят коллективный характер. *Понятие фононов возникает как способ квантового описания коллективных колебаний ядер решетки.*

Фононы рассматривают как *квазичастицы* (как бы частицы) — ведь вне кристалла их существование невозможно, в противоположность, например, фотонам и электронам. Коллективные колебания решетки эквивалентны «газу фононов», при этом каждый из фононов свободно распространяется в объеме, занимаемом телом, при этом его энергия

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad (39.12)$$

где ω — частота упругой волны, а импульс (для малых значений)*

$$p \approx \varepsilon/u. \quad (39.13)$$

* По мере роста импульса зависимость $\varepsilon(p)$ отклоняется от линейной; в этой области закон дисперсии $\varepsilon(p)$ всецело определяется характером взаимодействия атомов решетки и не может быть найден в общем виде.

Соотношение (39.12) аналогично подобному же соотношению (26.4) для квантов света — фотонов. Однако связь (39.13), как уже отмечалось, не вполне аналогична (26.6). Дело еще и в том, что импульс фонона в отличие от импульса фотона является не истинным импульсом, а, как говорят, *квазиимпульсом*. Суть заключается в следующем. Само существование импульса частицы как физической величины является следствием однородности пространства по отношению к этой частице (см. § 3.2, 3.3, 9.4). В решетке же пространство по отношению, например, к электрону обладает «ячеечной симметрией», периодически повторяющейся при его движении. Это обстоятельство ведет к тому, что импульс свободного электрона в кристалле в отличие от импульса свободного электрона вне кристалла определяется неоднозначно, а с точностью до некоторого постоянного вектора — так называемого *вектора обратной решетки* \mathbf{b} , связанного с симметрией решетки.

Аналогичное рассуждение применимо и для фононов. В результате вид закона дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$, т. е. зависимости энергии ε элементарного возбуждения от его квазиимпульса \mathbf{p} , для решетки не только различен для различных кристаллов, но и зависит от выбора направления квазиимпульса фононов в одном и том же кристалле. Так, если элементарная ячейка решетки состоит из атомов одного сорта, то в ней существуют три ветви $\varepsilon(\mathbf{p})$ для *акустических колебаний*: одна ветвь соответствует продольному звуку в кристалле и связана с его деформацией сжатия и растяжения; еще две ветви сопоставляются поперечному звуку, представляющему собой волны деформаций сдвига.

В сложных решетках элементарные ячейки могут содержать два и более сортов атомов. В этом случае возможны не только синфазные односторонние смещения атомов-соседей, когда ячейка смещается как целое. Разнородные атомы-соседи внутри элементарной ячейки могут испытывать смещения во взаимно противоположных направлениях, при этом центр тяжести ячейки остается неподвижным. Такого типа колебания решетки образуют так называемую *оптическую ветвь* $\varepsilon(\mathbf{p})^*$. Название связано с тем, что в ионных кристаллах колебания указанного типа ведут к возникновению осциллирующего дипольного электрического момента (ионы с зарядами разных знаков периодически в противофазе смещаются относительно друг друга); сам же дипольный момент решетки интенсивно взаимодействует со светом (обычно в инфракрасной области спектра).

Графический вид закона дисперсии для акустических и оптических ветвей резко различен (рис. 39.11). В акустических ветвях $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$, поскольку эти колебания в указанном пределе соответствуют обычным макроскопическим упругим колебаниям среды. В оптических же ветвях ε стремится к некоторому конечному значению ε_0 при стремлении \mathbf{p} к нулю. Для оптических фононов соотношение (39.13) не работает даже при малых значениях \mathbf{p} .

Максимальные акустические частоты колебаний решетки

* Таких ветвей имеется $3(k-1)$, где k — число атомов в элементарной ячейке.

$\nu_{\text{max}} \sim 10^{13}$ Гц (см. рис. 39.11). Эта оценка может быть получена из соотношения $\nu = u/\lambda_{\text{min}}$, где u — скорость звука, а λ_{min} — предельная минимально возможная длина акустических волн, которая по порядку величины равна постоянной решетки.

Энергия оптических колебаний решетки по порядку величины совпадает с энергией колебаний ядер в двухатомных молекулах, т. е. $\epsilon_{\text{опт}} \sim 0,1$ эВ (см. § 29). Соответственно частотная щель для возбуждения оптических колебаний решетки $\Delta_{\nu} \approx 2 \cdot 10^{13}$ Гц (инфракрасная область частот) — см. рис. 39.11.

При низких температурах решетки возбуждаются практически только акустические колебания. Доля возбужденных оптических ветвей в спектре колебаний решетки оказывается экспоненциально малой.

Фононный закон дисперсии является основной динамической характеристикой кристаллической решетки. Если известны силы межатомного взаимодействия, то закон дисперсии для решетки может быть рассчитан. Однако подобный расчет требует большого объема вычислительной работы и возможен лишь с использованием ЭВМ. Причем даже в этом случае задача должна быть значительно упрощена, а сам расчет носит модельный характер.

Теперь понятно, почему большое значение получили экспериментальные методы восстановления фононных спектров кристаллов. Особенно замечательными оказались эксперименты по рассеянию очень медленных нейтронов. Они стали возможными лишь после создания ядерных реакторов — мощных источников тепловых нейтронов. Интенсивные пучки тепловых нейтронов с энергией $\sim 10^{-2}$ эВ, проходя через кристалл, «раскачивают» атомы решетки, т. е. возбуждают звуковые волны (это возможно, поскольку энергии и массы нейтронов и ядер решетки сравнимы). Можно сказать и так: неупруго рассеянные нейтроны «рождают» фононы. С помощью законов сохранения энергии и импульса возможно найти энергию $\hbar\omega$ и импульс $p_{\text{ф}}$ фонона:

$$\left. \begin{aligned} \hbar\omega &= E_n - E'_n, \\ p_{\text{ф}} + 2\pi\hbar b &= p_n - p'_n. \end{aligned} \right\}$$

Здесь E_n и p_n — энергия и импульс нейтрона в монохроматическом пучке (до рассеяния); E'_n и p'_n — энергия и импульс нейтрона, рассеянного в образце кристалла; b — вектор обратной решетки. Регистрируя неупруго рассеянные нейтроны, находят закон дисперсии для колебаний кристаллической решетки.

Как известно (см. § 38), фотоны в полости образуют газ из невзаимодействующих частиц, поэтому их тепловое равновесие может установиться лишь в присутствии некоторого количества вещества. Фононы решетки не взаимодействуют между собой, как говорят, лишь

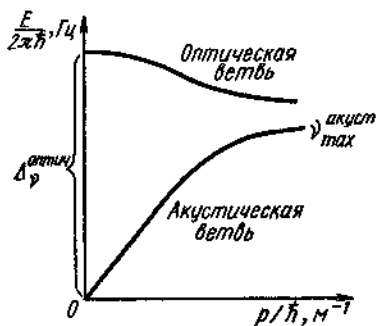


Рис. 39.11

в первом приближении. В следующем приближении необходимо учитывать всякого рода процессы упругого и неупругого рассеяния фононов друг на друге, именно через них и реализуется механизм установления статистического равновесия в тепловом движении решетки.

Такая квантовая картина поведения упругих волн в кристалле соответствует тому факту, что упругие волны в отличие от электромагнитных могут рассеиваться друг на друге (особенно это заметно для волн большой интенсивности). Связано это обстоятельство с тем, что уравнения гидродинамики нелинейны (см. гл. VI), а количественные соотношения, описывающие упругие волны, следуют из гидродинамических уравнений*.

Число одинаковых фононов, которое может быть возбуждено в решетке, ничем не ограничено. Это означает, что газ фононов подчиняется статистике Бозе. Учитывая это обстоятельство и рассмотренную выше аналогию между фононами и фотонами, мы воспользуемся для расчета теплоемкости решетки схемой, приведенной в § 38.

Поскольку теплоемкость при постоянном объеме $C_V = dE/dT$ [см. (37.12)], необходимо воспользоваться выражением (38.10), в котором, однако, скорость света c должна замениться на среднюю скорость звука $\langle u \rangle$ (усреднение предполагает учет типа симметрии решетки и характера акустических волн — поперечный и продольный звук). В итоге при низких температурах [когда выполняются (39.13) и (39.10)] теплоемкость решетки

$$C_V = \left(\frac{dE}{dT} \right)_V \approx \frac{V k^3}{(\hbar \langle u \rangle)^3} T^3. \quad (39.14)$$

В обратном предельном случае высоких температур, область которых определяется неравенством

$$T \gg \frac{\hbar u}{ka}, \quad (39.15)$$

представление о фононах уже неприменимо. При этих температурах, согласно замечанию к (39.8), «работает» классическое приближение. Как известно, в этом приближении на каждую колебательную степень свободы приходится энергия kT . В результате при высоких температурах средняя тепловая энергия ядер решетки

$$E = 3NkT, \quad (39.16)$$

где N — общее число ядер в образце кристалла; соответственно теплоемкость

$$C_V = 3Nk. \quad (39.17)$$

Для 1 моль вещества высокотемпературная теплоемкость решетки

$$C_V = 3R. \quad (39.18)$$

* Мы ведем здесь в известной степени качественное рассмотрение, и аналогия кристаллов с жидкостью уместна. Заметим, однако, что в жидкостях существует лишь обычный продольный звук — упругие волны сжатия и разрежения, в кристаллах же, как уже отмечалось, помимо обычного существует и поперечный звук — волны деформаций сдвига.

39.6 Электронный газ в металлах Обобществление внешних (валентных) электронов в металле делает их свободными. Свободными в том смысле, что они сравнительно легко переходят от одних ионов решетки к другим. «Газ» свободных электронов является квантовым. Это можно видеть из оценки их температуры вырождения

$$T_v \sim \frac{\hbar^2}{m_e k} \left(\frac{N_e}{V} \right)^{2/3}. \quad (39.19)$$

Подстановка числовых значений дает

$$T_v \sim \frac{(10^{-34})^2}{10^{-30} \cdot 10^{-23}} (10^{28})^{2/3} \text{ К} = 10^4 \text{ К}.$$

Здесь использован тот факт, что в типичных металлах на каждый атом приходится один свободный электрон, т. е. плотность последних $(N_e/V) \sim 10^{28}$ электронов/м³. Таким образом, при всех реальных температурах свободные электроны в металлах подчиняются квантовой статистике.

Квантовое описание состояний свободных электронов металла осуществляется заданием трех компонент импульса (p_x, p_y, p_z) и проекции s_z спина на некоторое направление (см. § 28). Точное задание импульса электрона, согласно квантовым соотношениям (22.2), делает совершенно неопределенным значения его координат, т. е. электрон может быть локализован в любом месте кристалла.

Здесь уместно сравнить классическое и квантовое описания свободных частиц. Как известно, в классической механике состояние частиц задается точными значениями всех трех компонент импульса (p_x, p_y, p_z) и тремя координатами (x, y, z). Введем, чисто формально, 6-мерное пространство состояний с осями p_x, p_y, p_z, x, y, z . Тогда состояние классической частицы определяется точкой в этом, как говорят, «фазовом пространстве» (рис. 39.12, а). Для квантовой частицы, в силу соотношения неопределенностей (22.2), состояние задается ячейкой в «фазовом пространстве» (рис. 39.12, б). В итоге при квантовом описании свободных частиц элементарной ячейкой состояний в фазовом пространстве станет

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \Delta x \Delta y \Delta z \sim \hbar^3. \quad (39.20)$$

Теперь необходимо обратиться к «правилам заселения» ячеек в фазовом пространстве. Нам уже известно, что если спин у частиц

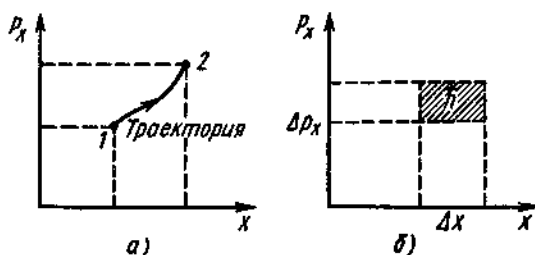


Рис. 39.12

целый, включая значение 0, то в ячейке может скапливаться неограниченное число таких частиц (это относится, в частности, к фотонам). Если спин у частиц полуцелый, а у электрона он равен $1/2$, то в ячейке возможно присутствие не более двух частиц. Это связано с тем, что квантовое состояние электронов с заданным импульсом (p_x, p_y, p_z) определено не полностью; необходимо задать еще значение одной из двух проекций s_z спина. Итак, в «пространстве импульсов» свободные электроны парами последовательно заполняют ячейки квантовых состояний.

Какую конфигурацию в «импульсном пространстве» образует вся совокупность квантовых ячеек? В «газе» свободных электронов (в случае кубической решетки) все направления импульсов практически равновероятны. Это означает, что «кладка из ячеек» превратится в «сферическое сооружение». Радиус сферы в «пространстве импульсов», который мы обозначим p_F , определяется плотностью числа свободных электронов N_e/V .

Будем рассматривать вырожденный электронный газ при абсолютном нуле температуры. При $T = 0$ К энергия любой системы принимает минимально возможное при данных условиях значение. Поскольку для свободных электронов энергия $\epsilon = p^2/(2m_e)$, заполнение ячеек электронными парами начинается с ячейки, помещенной в начало отсчета для импульса, т. е. с нулевого значения ($p = 0$).

Подсчитаем теперь число квантовых ячеек, попадающих в очень узкий шаровой слой толщиной dp и с произвольным «радиусом» — импульсом p (при этом объем V кристалла входит в общее выражение в качестве множителя):

$$4\pi p^2 dp V / \hbar^3. \quad (39.21)$$

Число электронов, заполняющих приведенное количество ячеек, определяется выражением (39.21), увеличенным вдвое. Если проинтегрировать (39.21) в пределах от $p = 0$ до $p = p_F$, то получим полное число свободных электронов

$$N_e \approx \frac{V}{\hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{V}{\hbar^3} \left(\frac{p_F^3}{3} - \frac{0}{3} \right) \approx \frac{V}{\hbar^3} p_F^3.$$

Отсюда
$$p_F \sim \hbar \left(\frac{N_e}{V} \right)^{1/3}; \quad (39.22)$$

импульс p_F называют *граничным* или *фермиевским*.

Чтобы найти выражение для *граничной энергии* ϵ_F , необходимо знать связь ϵ_F с p_F . Вспомним, что скорость электронов в атоме имеет порядок одной сотой от предельной скорости c (см. § 24.1), следовательно, связь p_F с ϵ_F должна быть нерелятивистской, т. е.

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{N_e}{V} \right)^{2/3}. \quad (39.23)$$

Обратим внимание, что (39.23) совпадает с (37.10); граничная энергия свободных электронов в металле определяет их температуру вырождения:

$$kT_b \approx \varepsilon_F. \quad (39.24)$$

Это означает, что формулы для электронного газа в металлах, полученные в этом параграфе, применимы не только при $T = 0$ К, но и при всех температурах $T \ll T_b$; сама температура T_b имеет порядок нескольких десятков тысяч кельвин, см. (39.19).

При температурах $kT \ll \varepsilon_F$ происходит возбуждение лишь граничных электронов. Функция распределения Ферми «размазывается» на kT вблизи значения ε_F (см. рис. 35.3). В результате доля фермиевских электронов (так иногда называют электроны частично заполненной зоны), включившихся в тепловое движение, приблизительно составляет kT/ε_F ; при температуре T число таких электронов

$$n_e(T) = N_e \frac{kT}{\varepsilon_F}, \quad (39.25)$$

где N_e — полное число электронов в частично заполненной зоне.

С учетом (39.24) выражение (39.25) можно преобразовать к виду

$$n_e(T) = N_e \cdot (T/T_b). \quad (39.26)$$

Указанное число (39.26) тепловых электронов растет с увеличением температуры; при $T = 0$ К оно обращается в нуль. При комнатной температуре в металлах число тепловых электронов (в 1 м^3) по порядку величины составит

$$10^{28} (10^2/10^4) \sim 10^{26}.$$

Число же ядер решетки на два порядка выше. Таким образом, при комнатной температуре вклад электронов металла в значения термодинамических величин составит несколько процентов от вклада решетки.

После этих замечаний легко написать выражение для электронной теплоемкости в металлах:

$$C_V^e = \frac{dE_e}{dT} = \frac{d}{dT} [n_e(T) T] = \frac{d}{dT} \left[N_e \cdot \left(\frac{T}{T_b} \right) T \right] \approx N_e \frac{T}{T_b}, \quad (39.27)$$

или для 1 моль вещества

$$C_V^e \approx N_A \cdot \left(\frac{T}{T_b} \right) k = \left(\frac{T}{T_b} \right) R. \quad (39.28)$$

Формула (39.28) довольно удобна, но из нее «не видно», что она относится к электронам. Используя выражение (39.27), в котором температура выражена в энергетических единицах, запишем

$$C_V^e \approx N_e \frac{T}{T_b} = N_e \frac{T}{\varepsilon_F} = \frac{m_e}{\hbar^2} N_e T \left(\frac{V}{N_e} \right)^{2/3}. \quad (39.29)$$

Выражение (39.29) мы получили с помощью (39.24) и (39.23).

У металлов при низких температурах решеточная составляющая

теплоемкости $C_V^{\text{эл}} \sim T^3$ [см. (39.14)], а электронная составляющая $C_V^{\text{эл}} \sim T$ [см. (39.29)]. Отсюда следует, что понижение температуры ведет к более быстрому спаду $C_V^{\text{эл}}$ по сравнению со спадом $C_V^{\text{реш}}$. При температурах, близких к абсолютному нулю, как показывают теоретические оценки и эксперимент, электронная теплоемкость не только сравнивается с решеточной, но и превышает ее.

В заключение остановимся на одном из экстремальных состояний вещества — *ультрарелятивистском вырожденном электронном газе*. При энергиях электронов, значительно превышающих их энергию покоя ($\varepsilon \gg m_e c^2$), связь между импульсом и энергией дается соотношением

$$\varepsilon \approx cp. \quad (39.30)$$

Эта зависимость следует из (10.6) при сделанных выше предположениях. Соответственно связь граничной энергии ε_F с граничным импульсом p_F определяется выражением

$$\varepsilon_F \approx cp_F = \hbar c \left(\frac{N_e}{V} \right)^{1/3}. \quad (39.31)$$

В подобном состоянии электронный газ может находиться в веществе белых карликов — плотных массивных звезд (подробнее см. в гл. IX).

§ 40. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Уравнение состояния идеального газа хорошо описывает любые молекулярные или атомарные газы при давлениях, существенно не превышающих нормальные. В сжатых газах, когда становится заметным межмолекулярное взаимодействие, уже проявляется некоторая индивидуальность их тепловых свойств; для них единое уравнение состояния отсутствует.

В кристаллах взаимодействие частиц весьма интенсивно, но характер теплового движения частиц отличается особой простотой (малые колебания). Это ведет к тому, что термодинамические свойства кристаллических твердых тел могут быть исследованы в общем виде, т. е. в виде, пригодном для всех кристаллических тел. Однако такое исследование возможно лишь в области низких и высоких температур.

Жидкости — это тела, в которых взаимодействие между частицами велико и в то же время тепловое движение самих частиц является сложным. Это обстоятельство делает теоретическое изучение статистических свойств жидкостей весьма затруднительным. Характер взаимодействия частиц жидкости, который различен в разных жидкостях, сильно сказывается, например, на температурной зависимости термодинамических величин. Это означает, что тепловые свойства конкретных жидкостей существенно индивидуальны. Лишь при температурах, близких к абсолютному нулю, возможно исследование тепловых свойств жидкостей в общем виде. Однако в природе имеется только одно вещество — гелий, которое остается жидким при $T \rightarrow 0$ К.

После краткого обзора уровня развития термодинамических исследований вещества перейдем непосредственно к *фазовым переходам*. Так называют процессы перехода кристалл — жидкость (плавление), жидкость — газ (испарение), сами же состояния вещества, между которыми происходит переход, называют *фазами*.

При фазовом переходе обе фазы находятся в состоянии теплового равновесия, которое характеризуется определенными значениями температуры и давления (различными для разных веществ). В том, что в состоянии теплового равновесия температуры всех частей системы одинаковы, мы уже убеждались (см. § 34); но тепловое равновесие предполагает наличие и механического равновесия, т. е. отсутствие в системе внутренних макроскопических перемещений, а это означает, что давление вдоль системы постоянно.

Связь между давлением p и температурой T фазового перехода изображают в виде *фазовых диаграмм* (на рис. 40.1 представлен в качестве примера переход жидкость — газ). Если меняется внешнее давление, то соответственно меняется и температура фазового перехода. В точках самой фазовой диаграммы различные фазы сосуществуют; вне фазовой кривой вещество однородно, т. е. представляет собой однофазовое состояние.

Фазовый переход можно изображать не только в переменных p , T , но и T , V и p , V . Дело в том, что если у отдельных фаз (конкретного вещества) существуют свои индивидуальные связи p , V и T (их уравнения состояния), то для самого фазового перехода характерно наличие универсальной связи между этими параметрами (эта связь будет получена ниже).

На рис. 40.2 изображена фазовая диаграмма перехода жидкость — газ в переменных T , V . Обычно рассматривают определенное количество вещества (1 кг), так что V есть удельный объем, а $1/V$ — плотность вещества. Вместо фазовой кривой на диаграмме p , T в переменных T , V мы имеем целую фазовую область, где могут сосуществовать жидкость и газ в различных относительных количествах.

Итак, поставим задачу о нахождении термодинамического соотношения, описывающего фазовые переходы. Прежде всего фазовые превращения происходят скачкообразно и при этом поглощается или выделяется определенное количество теплоты — так называемая *удельная теплота перехода* q . Для переходов кристалл — жидкость говорят

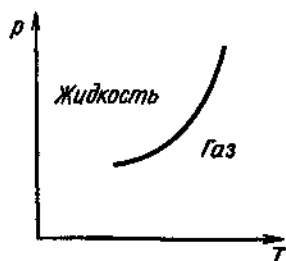


Рис. 40.1

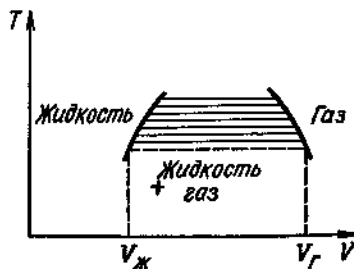
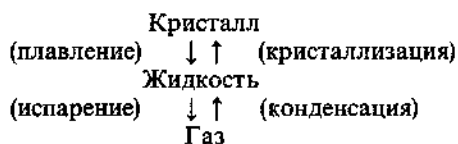


Рис. 40.2

об удельной теплоте плавления, а переходов жидкость — газ — об удельной теплоте парообразования. Для прямых (переход из фазы 1 в фазу 2) и обратных процессов (2—1) фазового перехода



имеет место очевидная связь

$$q_{12} = -q_{21}, \quad (40.1)$$

т. е. если при каком-либо фазовом переходе теплота поглощается, то при обратном переходе такое же количество теплоты выделяется.

Рассмотрим фазовый переход из фазы 1 в фазу 2 на диаграмме p, V (рис. 40.3). Так как сам переход есть равновесный процесс, при котором затрачивается удельная теплота q_{12} , то естественно возникает мысль об использовании общего термодинамического соотношения (36.5) для получения искоемых связей. А именно, представим себе, что мы реализуем очень «узкий» цикл Карно (см. конец § 37.5) с изотермами ab и cd (см. рис. 40.3), из которых изотерма ab соответствует переходу из фазы 2 в фазу 1, а изотерма cd — переходу из фазы 1 в фазу 2. Каждый из этих переходов происходит при постоянном давлении: переход ab — при давлении p и переход cd — при давлении $p + dp$. Участки bc и da «фазового цикла Карно», вообще говоря, должны быть адиабатными, но в данной задаче это не важно, ибо нас интересует «фазовая площадь», расположенная внутри контура $abcd$. Поскольку высота dp контура чрезвычайно мала, ясно, что характер «боковых сторон» контура не скажется на значении фазовой площади. Сама же фазовая площадь $(V_2 - V_1) dp$, где V_2 и V_1 — удельные объемы соответствующих фаз при переходе, есть не что иное, как работа, см. (36.3). С другой стороны, эта же работа равна произведению удельной теплоты перехода q_{12} (по изотерме cd) на к. п. д. цикла Карно [см. (36.6)]; последний в данном случае выразится как dT/T , где dT — разность температур на обеих изотермах. В результате получаем

$$(V_2 - V_1) dp = q_{12} \frac{dT}{T},$$

или

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V_2 - V_1)}. \quad (40.2)$$

В качестве примера рассмотрим формулу (40.2) в применении к процессу испарения. Найдем давление p насыщенного пара над поверхностью жидкости в зависимости от температуры T . Для получения насыщенного пара, т. е. пара, находящегося в равновесии со своей жидкостью, обычно берут закрытый сосуд. Если температуры таковы, что насыщенный пар можно рассматривать как идеальный газ (а это осуществляется при температурах достаточно низких), то искомая зависимость может быть найдена относительно просто (тебе же,

читатель, в этом примере представляется возможность познакомиться с интегрированием простейших дифференциальных уравнений). Перепишем (40.2) соответственно рассматриваемому случаю как

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_r - V_{\kappa})}. \quad (40.3)$$

Возьмем 1 моль вещества, тогда q — молярная теплота испарения, а V_r и V_{κ} — молярные объемы пара и жидкости. Обычно $V_r \gg V_{\kappa}$ (так, у воды при 100°C $V_r \approx 1600 V_{\kappa}$), по этой причине в (40.3) мы не станем учитывать V_{κ} . Теперь воспользуемся условием идеальности насыщенного пара и выразим V_r через давление и температуру согласно (37.4); это даст $V_r = RT/p$. Подставляя выражение для V_r в (40.3), получим

$$\frac{dp}{dT} = \frac{qp}{RT^2}. \quad (40.4)$$

Напомним, что наша задача найти p как функцию T . Для этого преобразуем (40.4) к виду

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dT} = \frac{d \ln p}{dT} = \frac{q}{RT^2}. \quad (40.5)$$

В (40.5) мы воспользовались выражением для производной от логарифмической функции. В этом месте физика процесса позволяет сделать математическое упрощение. Дело в том, что теплота перехода слабо зависит от температуры (так, в случае воды теплота испарения в интервале от 0 до 100°C уменьшается лишь на 10%), это позволяет считать q постоянной. В результате (40.5) перепишем в виде

$$\frac{d \ln p}{dT} = - \frac{d}{dT} \left(\frac{q}{RT} \right). \quad (40.6)$$

Здесь использовано соотношение $d(1/x)/dx = -1/x^2$ и учтен тот математический факт, что постоянная может выноситься за знак производной. Наконец, возьмем неопределенные интегралы от обеих частей (40.6) по температуре:

$$\int \frac{d \ln p}{dT} dT = - \int \frac{d}{dT} \left(\frac{q}{RT} \right) dT + \text{const.}$$

В результате интегрирования получим

$$\ln p = \text{const} - q/(RT).$$

Окончательно имеем

$$p = \text{const} \cdot e^{-q/(RT)}. \quad (40.7)$$

Полученная формула (40.7) показывает, что давление насыщенных паров очень быстро (по экспоненте) растет с температурой. Здесь же

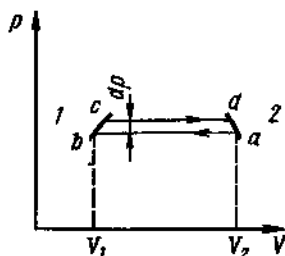


Рис. 40.3

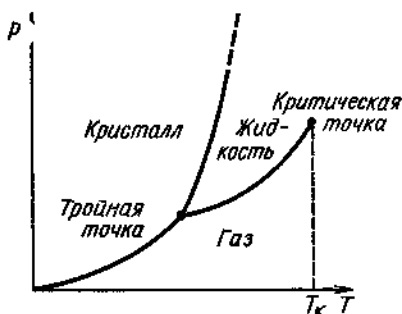


Рис. 40.4

заметим, что кривая равновесия двух фаз (жидкости и газа), изображенная на рис. 40.1, есть не что иное, как графическое изображение зависимости (40.7).

Важно отметить также и следующее. Термодинамическое соотношение (40.3) точное; а результат (40.7) — всего лишь приближение. Это ясно из самого способа получения обеих формул. Поэтому, если эмпирическую фазовую кривую равновесия жидкость — пар (см. рис. 40.1)

детально сравнивать с зависимостью (40.7), то они совпадут лишь в области низких температур.

Постоянная интегрирования в (40.7) не может быть определена в рамках термодинамики без обращения к эксперименту. Ее можно было бы вычислить, если бы удалось теоретически построить хорошую микроскопическую модель явления испарения (что сделать весьма затруднительно).

Исходя из простейших физических соображений, формулу (40.7) можно написать сразу, без решения дифференциального уравнения (40.4). Ведь перевести молекулу из жидкости, где она связана с соседними молекулами, в пар можно, лишь затратив работу. Ясно, что эта работа равна разности потенциальных энергий молекулы в газе U_r и жидкости $U_{ж}$. Для 1 моль вещества эта «работа выхода молекулы» составит q/N_A , где q — молярная теплота испарения, а N_A — постоянная Авогадро. Используя (35.5), запишем:

$$\frac{(\text{Плотность})_r}{(\text{Плотность})_ж} = e^{-(U_r - U_{ж})/(kT)} = e^{-q/(N_A k T)} = e^{-q/(RT)}. \quad (40.8)$$

Так как плотности отличаются от давлений на постоянное произведение kT [см. (37.2)], то и для отношения давлений получим

$$p_r/p_{ж} = e^{-q/(RT)}. \quad (40.9)$$

Из (40.9) видно, что с ростом температуры растет давление насыщенных паров, а вместе с давлением растет и их плотность. При некоторой температуре T_c , согласно (40.8), значения плотностей насыщенных паров и жидкости совпадают; это означает, что жидкость и ее пар становятся неотличимыми. Температуру T_c называют *критической*. Таким образом, при температуре $T = T_c$ кривая фазового равновесия жидкость — газ должна оканчиваться (рис. 40.4).

Рис. 40.4 показывает, что если тепловое равновесие каких-либо двух фаз (кристалл — жидкость, жидкость — газ, кристалл — газ) данного вещества может осуществляться при различных связанных значениях (p , T), то равновесие трех фаз реализуется лишь в единственной точке, называемой *тройной точкой* этого вещества. Отсюда непосредственно следует, что *тепловое равновесие более чем трех фаз данного вещества невозможно*.

Рассмотренные фазовые переходы называют *фазовыми переходами первого рода*, характерным для них является то, что при таких переходах $q \neq 0$. Существуют, однако, и так называемые *фазовые переходы второго рода*, для которых $q = 0$. При этих переходах состояние вещества не меняется, т. е. в момент перехода остаются неизменными его внутренняя энергия E , объем V , энтальпия H [см. (37.17)] и т. п. В то же время этот переход сопровождается скачкообразным изменением зависимости названных величин от температуры, т. е. их производные по температуре (dE/dT , dV/dT , dH/dT) испытывают скачок. Таким образом, фазовый переход второго рода отражается на значениях, в частности, теплоемкостей и теплового расширения; в опыте обычно фиксируют теплоемкость C_p , см. (37.15). При фазовых переходах второго рода происходит изменение внутренней симметрии тел.

Примерами таких переходов могут служить: 1) переход металла в сверхпроводящее состояние; 2) переходы ферромагнетик — парамагнетик; 3) переход жидкого гелия в сверхтекучее состояние.



ГЛАВА VI МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕД. НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 41. НЕРАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ТЕЛ

В предыдущей главе рассматривались равновесные состояния макроскопических систем и равновесные процессы в них. Под равновесными процессами подразумевались достаточно медленные процессы, считалось, что в каждый момент времени вся система находилась в некотором равновесном состоянии и сам ход процесса представлял собой непрерывную смену одних равновесных состояний другими.

Говоря о «достаточной медленности процесса», мы имели в виду, что характерные времена процесса много больше так называемых *времен релаксации*. Под последними разумеют времена установления равновесия в системе; ведь если замкнутая система в какой-то момент находилась в неравновесном состоянии, то вероятнее всего в последующий момент времени она начнет переходить в равновесное состояние.

Весьма важным обстоятельством является то, что время релаксации существенно зависит от размеров системы, а именно оно растет с увеличением размеров макротел. Это означает, что *малые части макросистемы приходят в равновесие значительно быстрее, чем все тело в целом*. Указанная особенность времен релаксации позволяет ввести понятие о *локальном равновесии*, т. е. равновесии в точке. Под точкой в данном случае имеется в виду элемент объема тела, достаточно малый по сравнению с размерами самого тела, но содержащий еще весьма большое количество молекул или атомов.

При локальном равновесии «точка среды» характеризуется своим местным значением температуры, а сама неравновесная среда описывается «полем температур». С течением времени неполное равновесие всей замкнутой системы превращается в полное, температура для всех ее частей постепенно выравнивается.

§ 42. МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Для каждой точки среды, в силу существующего в ней локального равновесия, выполняется уравнение состояния данного вещества среды. Поэтому зная температуры отдельных точек среды (при ее известной плотности) — значит одновременно иметь информацию и о давлениях в этих точках. В равновесных системах давление p и температура T постоянны по всему объему тела. Постоянство p предполагает механическое равновесие тела, а постоянство T — его тепловое равновесие. Естественно, что в состоянии равновесия в системе должны отсутствовать внутренние макроскопические движения. Причем под макроскопическим движением в отличие от микроскопического движения молекул подразумевают движение, в котором участвуют как целое отдельные макроскопические части тела. Если же в теле имеется какое-то распределение давлений $p(\mathbf{r})$ и температур $T(\mathbf{r})$, где \mathbf{r} — координаты произвольной «точки среды», значит система не равновесна. Из-за наличия перепадов (градиентов) давления в таком теле возникают внутренние макроскопические движения, характеризующиеся каким-то распределением скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ среды.

На практике чаще всего приходится иметь дело с макроскопическими движениями в жидкостях и газах, причем общие закономерности такого движения одинаковы для жидкостей и газов. Как же описывать макроскопические движения сред, которые сопровождаются перемещениями не отдельных «точек среды» и не их ограниченной совокупности, а переносом целого континуума точек (точек, расположенных сплошь, непрерывно)? На помощь приходят законы сохранения (в который раз!). Однако в применении к сплошным средам законами сохранения удобно пользоваться в так называемой *локальной форме*.

Локальная формулировка законов сохранения не только удобна и наглядна, но и необходима. Дело в том, что релятивистские принципы (см. § 10), основным содержанием которых является утверждение о конечной скорости распространения частиц и полей, делают не вполне эквивалентными следующие две формулировки законов сохранения (рассмотрим их на примере закона сохранения электрического заряда):

1) суммарный заряд в замкнутой системе движущихся заряженных частиц сохраняется, если под таким зарядом мы понимаем подсчитанную нами сумму зарядов «здесь» и «там»;

2) убыль заряда за единичное время «здесь» равна потоку заряда, который обеспечивает его появление «там».

Второе определение более глубоко и передает некоторые детали того, как происходит сохранение — величина сохраняется локально.

При рассмотрении макроскопических движений сплошных сред (*гидродинамика*) можно использовать законы сохранения энергии, импульса (в некоторых случаях и момента импульса), а также закон сохранения массы; последний в рамках гидродинамики можно трактовать как сохранение количества вещества («числа частиц»). Указанные законы сохранения для двух скалярных величин и одной векторной дают пять уравнений. В соответствии с этим количественное опи-

сание состояния движущейся жидкости (и газа) осуществляется с помощью одной векторной функции $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, дающей три компоненты, и двух скалярных функций, например, $p(\mathbf{r}, t)$ и $\rho(\mathbf{r}, t)$, где ρ — плотность вещества среды. Кинематика движения жидкости определяется распределением скоростей $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, являющихся функциями координат x, y, z и времени t . Термодинамическое состояние жидкости характеризуется распределением давления $p(x, y, z, t)$ и плотности $\rho(x, y, z, t)$. По значениям p и ρ , используя уравнение состояния вещества, можно определить все остальные термодинамические величины.

В заключение параграфа остановимся на пределах применимости макроскопического описания. Гидродинамика, как и термодинамика, не интересуется микроскопическим состоянием вещества среды. Среда рассматривается как сплошная, т. е. их атомарной структурой пренебрегают. В соответствии с этим гидродинамические соотношения, как и термодинамические, применимы к любым средам. Сами же пределы гидродинамического описания особенно четко проявляются при рассмотрении макроскопических движений газов. А именно, *законы гидродинамики (в данном случае газодинамики) справедливы до тех пор, пока длины свободных пробегов l молекул (см. дальше) газа много меньше характерных размеров L системы.* Так, в аэродинамических трубах при нормальных давлениях ведут исследования газовых потоков, обтекающих разного рода модели, на основе законов гидродинамики; ведь в этом случае $l \ll L$, где L — размеры модели. Если же понижать давление в каналах трубы, то течение сильно разреженных газов уже не будет описываться гидродинамикой, ибо в этих условиях может оказаться, что $l \sim L$. Вообще, в рамках гидродинамики полагают $l \rightarrow 0$.

Границы применимости гидродинамики и термодинамики совпадают. В связи с этим замечанием напомним, что точность описания в термодинамике определяется относительным уровнем тепловых флуктуаций в макросистеме (см. § 31). Что же касается течений сильно разреженных газов, то они должны рассматриваться на основе методов статистической теории явлений переноса.

§ 43. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Поле, например электромагнитное, и сплошные среды обладают сходством в том отношении, что для их описания нужно задавать значения характеризующих их величин для каждой точки пространства или среды. В связи с этим в гидродинамике возможно использование математического аппарата векторных полей, введенного нами в электродинамике (см. § 13.1). Ведь для жидкости можно говорить о «векторном поле скоростей», где каждой «точке жидкости» сопоставляется некоторый вектор скорости. Аналогично (13.1), вводится понятие *потока векторного поля скоростей*; в формуле (13.1) нужно лишь произвольный вектор \mathbf{A} заменить на вектор скорости \mathbf{v} . Понятие *циркуляции векторного поля скоростей* формулируется согласно (13.2), где $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{v}$. Поток и циркуляция скорости приобретают в гидродинамике весьма наглядный смысл, поскольку сводятся к потоку и циркуляции (вихрю) самой жидкости.

43.1 Закон сохранения вещества в гидродинамике Макроскопическое движение в среде, естественно, сопровождается переносом массы. Изменение величины $\rho(\mathbf{r}, t)$ подчиняется закону сохранения массы в его локальной формулировке: *убыль массы в единичное время в некотором объеме должна быть равна потоку массы через поверхность, охватывающую рассматриваемый объем*. Сформулируем это утверждение количественно. Пусть V_0 — рассматриваемый объем в жидкости (мы выделяем его в жидкости чисто мысленно). Количество жидкости (ее масса) в объеме V_0 равно $\langle \rho \rangle V_0$, где $\langle \rho \rangle$ — среднее значение плотности жидкости в объеме V_0 (ведь сама плотность есть функция координат). Что же касается уменьшения количества жидкости в объеме V_0 за единичное время, то оно запишется в виде

$$- \frac{\Delta}{\Delta t} (\langle \rho \rangle V_0); \quad (*)$$

знак минус здесь поставлен для того, чтобы само выражение было положительным.

Уменьшение количества жидкости в объеме V_0 за единичное время может быть вычислено и другим способом. Сам объем V_0 ограничен некоторой поверхностью S_0 . Введем направленный элемент поверхности ds ; его модуль равен площади элемента поверхности, а сам вектор направлен по внешней нормали к поверхности. Масса жидкости, вытекающей через элемент поверхности ds за единичное время, равна $\rho \mathbf{v} ds$, ведь скалярное произведение

$$\mathbf{v} ds = |\mathbf{v}| |ds| \cos(\hat{\mathbf{v}} ds)$$

— это объем жидкости, вытекающей за 1 с. Выражение $\mathbf{v} ds$ положительно, если угол $\hat{\mathbf{v}} ds$ острый, и отрицательно, если он тупой, т. е. элементарный поток $\rho \mathbf{v} ds$ жидкости берется со знаком плюс, если жидкость вытекает из объема V_0 , и со знаком минус в случае его втекания в объем V_0 . Подсчитать полное количество жидкости, вытекающей за 1 с из объема V_0 , можно, обойдя всю ограничивающую его поверхность S_0 и просуммировав все элементарные потоки (со своими знаками). Так нужно было бы сделать. Однако мы воспользуемся средним значением нормальной составляющей скорости $\langle v_n \rangle$ потока и запишем искомое выражение как

$$\langle \rho \rangle \langle v_n \rangle S_{\text{замк}}. \quad (**)$$

Сравнив теперь (*) и (**), получим окончательно

$$- \frac{\Delta}{\Delta t} (\langle \rho \rangle V_0) = \langle \rho \rangle \langle v_n \rangle S_{\text{замк}} \quad (43.1)$$

Это есть закон сохранения вещества в гидродинамике.

Заметим, что в физике уравнение вида (43.1) встречается неоднократно. Если для величины и ее потока имеет место соотношение типа (43.1), это означает, что величина сохраняется. В данном случае рассматриваемой величиной является плотность массы ρ , а плотностью потока массы — выражение $\rho \mathbf{v}$.

Рассмотрим *стационарное течение* жидкости, т. е. такое ее движение, при котором величины, описывающие это движение, не зависят от времени. Используем понятие *трубки тока* — некоторого объема движущейся жидкости, поверхность которого ограничена *линиями тока* (траекториями «точек жидкости»). Пример трубки тока дан на рис. 43.1. Ясно, что в трубке тока изменения количества жидкости не происходит, т. е.

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (\langle \rho \rangle V_0) = 0.$$

В силу этого из (43.1) следует

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \text{const.} \quad (43.2)$$

Здесь S — площади сечений трубки тока в соответствующих местах (поток жидкости через боковую поверхность трубки тока отсутствует). Это важная и простая формула найдет в дальнейшем многочисленные применения.

В случае *несжимаемой жидкости*, т. е. когда плотность массы вдоль трубки тока неизменна,

$$\rho_1 = \rho_2 = \text{const.},$$

из (43.2) вытекает хорошо известная связь

$$v_1/v_2 = S_2/S_1,$$

смысл которой состоит в том, что в узком месте жидкость течет быстрее, чем в широком.

43.2 Уравнение движения в гидродинамике Закон сохранения импульса в жидкости должен выражаться соотношением типа (43.1), т. е.

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \left(\begin{array}{c} \text{Импульс} \\ \text{единичного} \\ \text{объема} \\ \text{жидкости} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Плотность} \\ \text{потока} \\ \text{импульса} \end{array} \right) S_{\text{звмк}}. \quad (43.3)$$

Это и есть *уравнение движения в гидродинамике*, являющееся аналогом уравнений движения Ньютона

$$\frac{\Delta}{\Delta t} p_n = F, \quad (*)$$

где p_n — импульс.

Проанализируем уравнение (43.3). Известно, что сила F имеет размерность

$$[F] = [p] [S], \quad (**)$$

где p — давление. Сопоставление уравнений (43.3), (*) и учет связи (**) приводят к выводу, что плотность потока импульса обладает размерностью давления. Это позволяет сразу написать выражение, описывающее стационарное течение. В самом деле, размерность давления совпадает с размерностью плотности энергии, поэтому следует ожидать,

что должно существовать соотношение

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (43.4)$$

Здесь мы подразумевали, что в предельном случае неподвижной жидкости ($v = 0$)

$$p = \text{const}$$

вдоль всего объема жидкости. Это верно для условий невесомости, но мы и не учитывали поля тяготения.

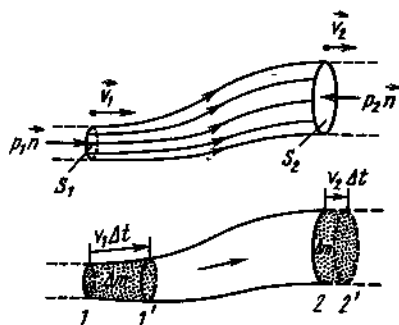


Рис. 43.1

Ввиду важности уравнения (43.4) приведем его детальный вывод. Для этого рассмотрим пучок линий тока, образующих трубку тока (на рис. 43.1 n — единичный вектор нормали). Сохранение массы Δm жидкости (между сечениями 1-2) при ее течении вдоль трубки тока означает, что количества втекающей и вытекающей жидкости должны быть одинаковыми, т. е. $\rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t \equiv \Delta m$, где ρ — плотность жидкости; S_1 и S_2 — площади сечения трубки тока в сечениях 1 и 2; v_1 и v_2 — скорости потока в этих сечениях; Δt — интервал времени рассмотрения. Само течение возникает под влиянием разницы давлений в жидкости. Отсюда полную работу, произведенную над жидкостью, заключенной между сечениями 1-2, нужно приравнять к изменению энергии элемента Δm жидкости на его пути от сечения 1 к сечению 2. Это следует из того, что при стационарном течении энергия жидкости, находящейся между сечениями 1'-2, остается неизменной. В результате

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m}{2} (v_2^2 - v_1^2),$$

где p — давление жидкости; Δm — масса рассматриваемого элемента жидкости. Поскольку же $\Delta m = \rho S_i v_i \Delta t$, где i — номер сечения, последнее соотношение переходит в

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}.$$

Это не что иное, как формула (43.4).

Обобщением формулы (43.4), называемой *уравнением Бернулли*, на случай наличия поля тяжести является уравнение

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho \phi = \text{const}, \quad (43.5)$$

где ϕ — гравитационный потенциал, а $\rho \phi$ — потенциальная энергия элемента массы в поле тяготения.

Уравнение равновесия жидкости в поле тяжести:

$$p(z) = p_0 + \rho g (h - z). \quad (43.6)$$

Здесь p_0 — внешнее давление (например, атмосферы) на свободную поверхность жидкости, находящуюся при $z = h$. Зависимость давления

только от вертикальной координаты z естественна, ибо изменение давления в горизонтальной плоскости вызвало бы движение жидкости.

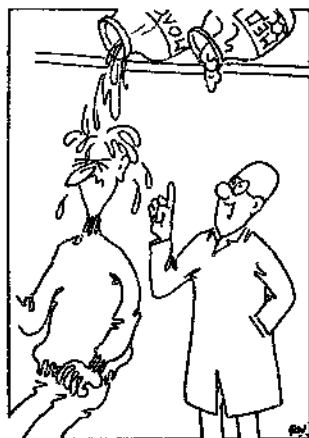
В полученные нами соотношения (43.2), (43.4), (43.5) входят по существу лишь механические характеристики, и по этой причине движение жидкости, описываемое этими соотношениями, должно быть обратимым.

При рассмотрении движения жидкости в этом параграфе мы совершенно не учитывали процессов внутреннего трения (вязкости) и теплообмена между различными участками движущейся жидкости. Те случаи движения жидкости, в которых процессы вязкости и теплопроводности несущественны, именуют как движение *идеальной жидкости*. Таким образом, соотношения (43.2), (43.4), (43.5) описывают движения идеальной жидкости.

§ 44. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ЗАДАЧ НА ВЯЗКИЕ ТЕЧЕНИЯ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ДИФФУЗИЮ

44.1 Вязкость Если различные «точки жидкости» движутся с одинаковыми скоростями, направленными одинаково, то это означает, что жидкость находится в равновесном состоянии. Действительно, если ввести систему отсчета, связанную с жидкостью, то в этой системе подобная жидкость покоится. Однако если скорости разных участков жидкости различны, то введение указанной системы отсчета становится невозможным. Такая жидкость находится в неравновесном состоянии и в ней возникают самопроизвольные процессы перехода в состояние равновесия. Эти процессы обуславливают появление особого свойства жидкости, которое называют *вязкостью*.

Процесс выравнивания скоростей между соседними участками жидкости сопровождается переносом импульса. Механизм этого переноса носит молекулярный характер и ведет к росту энтропии системы. Полученное в предыдущем параграфе уравнение (43.3) описывает чисто механический обратимый перенос импульса в среде. При наличии же в жидкости вязкости любой градиент скорости вызывает дополнительно и необратимый перенос импульса. При движении среды полный перенос импульса, включающий обратимый и необратимый его перенос, должен удовлетворять уравнению типа (43.3) вследствие закона сохранения импульса.



Чтобы написать выражение, связывающее поток импульса с градиентом скорости, заметим, что поток скалярной величины является вектором, а поток векторной величины — тензором. В результате поток импульса должен быть величиной тензорной. Тензор — это обобщение понятия вектора. Математика тензоров необходима для описания таких свойств вещества, которые зависят от направления в среде.

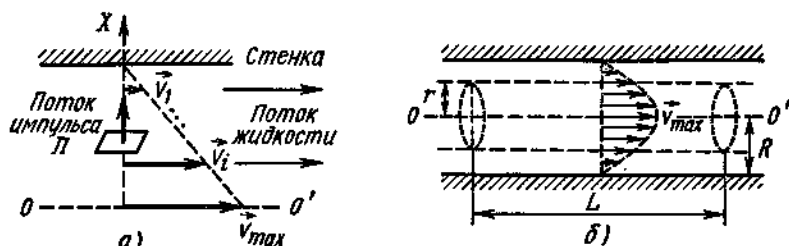


Рис. 44.1

Мы не станем усложнять материал и откажемся от применения тензоров. Математику мы используем здесь по существу как «качественное средство», которое помогает понять наличие связи, «схватить» главное в явлении, увидеть вытекающие следствия.

Рассмотрим плоскопараллельный поток жидкости, т. е. такое ее течение, в котором векторы скорости v_i всюду направлены одинаково (рис. 44.1, а, б). Пусть к тому же модуль скорости v меняется (уменьшается) лишь вдоль положительной оси X , перпендикулярной потоку жидкости. Тогда скорость является функцией координаты, т. е. $v = v(x)$. В этом случае для малых перепадов (градиентов) dv/dx скорости течения поток импульса Π (рис. 44.1, а) пропорционален градиенту скорости:

$$\Pi = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (44.1)$$

где η — динамическая вязкость (коэффициент вязкости) среды. В (44.1) поток Π импульса положителен, поскольку он берется вдоль положительного направления оси X ; производная же dv/dx отрицательна, так как скорость падает вдоль указанного направления. Знак минус в (44.1) обеспечивает положительность правой части равенства.

Установим размерность коэффициента вязкости. Так как поток импульса есть полный импульс, переносимый через единичную площадку, перпендикулярную выделенному направлению X , в единичное время, то

$$[\Pi] = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}}{1 \text{ м}^2 \cdot 1 \text{ с}} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}.$$

Размерность же градиента скорости

$$\left[\frac{dv}{dx} \right] = \frac{1 \text{ м}}{1 \text{ с} \cdot 1 \text{ м}} = 1 \frac{1}{\text{с}}.$$

Так как размерности левой и правой частей равенства (44.1) должны быть одинаковы, то для размерности коэффициента вязкости получим

$$[\eta] = \frac{1 \text{ кг}}{1 \text{ м} \cdot 1 \text{ с}} \equiv 1 \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Всякая реальная жидкость обладает вязкостью. Если такая жидкость течет, например, вдоль стенок цилиндрической трубы, то тонкий слой жидкости, непосредственно прилегающий к поверхности твердого тела,

вследствие молекулярного сцепления как бы «прилипает» к стенке. В результате скорость течения жидкости возрастает от $v = 0$ на стенках до некоторого максимального значения на оси трубы. Вследствие же процесса, описываемого (44.1), из жидкости к стенкам установится поток импульса (ведь импульс передается от быстрых частиц к медленным). Но всякое изменение импульса системы со временем означает, согласно (9.1), что на нее действует некоторая сила, в данном случае сила трения. Последняя приводит к постепенному замедлению течения жидкости и переходу в конечном итоге ее кинетической энергии в теплоту.

44.2 Течение вязкой жидкости в трубе В качестве примера рассмотрим стационарное течение жидкости в цилиндрической трубе. Жидкость будем характеризовать коэффициентом вязкости η . Геометрия трубы задается ее радиусом R и длиной L . Жидкость движется вдоль оси цилиндра под влиянием перепада давлений $\Delta p = p_2 - p_1$ на концах трубы (рис. 44.1, б).

На текущую жидкость действуют две силы: сила трения, тормозящая поток, и движущая сила, связанная с Δp . Чтобы написать выражения для этих сил, построим в потоке жидкости вспомогательный коаксиальный цилиндр радиусом r (отсчет производим от оси цилиндра). Так как поток импульса Π направлен вдоль радиуса от оси к стенке, то сила трения

$$F_{\text{тр}} = \Pi \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Площадь} \\ \text{боковой} \\ \text{поверхности} \\ \text{цилиндра} \end{array} \right) = \Pi \cdot 2\pi r L.$$

Учтем, что сам поток импульса в рассматриваемом случае выглядит как

$$\Pi = -\eta \frac{dv}{dr}.$$

В результате на выделенный объем жидкости со стороны окружения действует сила трения

$$F_{\text{тр}} = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}.$$

Разность давлений Δp , действующая на основания рассматриваемого цилиндра, даст движущую силу

$$F_{\text{давл}} = \Delta p \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Площадь} \\ \text{основания} \\ \text{цилиндра} \end{array} \right) = \Delta p \cdot \pi r^2.$$

Поскольку течение жидкости стационарное, указанные силы должны быть одинаковы ($F_{\text{тр}} = F_{\text{давл}}$), т. е.

$$-2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = \pi r^2 \Delta p$$

или

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2L\eta} r.$$

Это простое дифференциальное уравнение, оно решается следующим образом. Разделяем переменные

$$dv = - \frac{\Delta p}{2L\eta} r dr,$$

интегрируем левую и правую части

$$v = - \frac{\Delta p}{2L\eta} \int r dr = - \frac{\Delta p}{2L\eta} \left(\frac{r^2}{2} \right) + \text{const.}$$

При этом произвольная постоянная определяется граничными условиями: скорость жидкости на поверхности трубы, т. е. при $r = R$, обращается в нуль.

Из последнего выражения имеем

$$0 = - \frac{\Delta p}{4L\eta} R^2 + \text{const.}$$

Окончательно получим

$$v = \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2).$$

Этот результат означает, что скорость в потоке вязкой жидкости меняется по параболическому закону, возрастая от нуля на стенках до максимального значения $v_{\max} = [\Delta p / (4L\eta)] R^2$ на оси цилиндрической трубы (рис. 44.1, б).

44.3 Теплопроводность Чисто механический обратимый перенос импульса в среде обуславливает, естественно, и обратимый перенос механической энергии. Выражение для механической энергии единичного объема жидкости входит в соотношение Бернулли (43.5), в котором $\rho v^2/2$ есть кинетическая энергия единичного объема, p представляет собой работу сил давления над жидкостью, заключенную в выделенном единичном объеме, $\rho\phi$ — потенциальная энергия рассматриваемого элемента массы в поле тяжести.

Если температура движущейся жидкости различна в разных точках, то наряду с обратимым переносом энергии возникнет и необратимый ее перенос из мест с более высокой температурой в места с температурой более низкой (см. § 34). Этот последний поток энергии связан с переходом системы в равновесное состояние. Сам процесс выравнивания температур, который называют *теплопроводностью*, осуществляется молекулярным механизмом: молекулы из более нагретых участков среды, сталкиваясь при своем движении с молекулами соседних, менее нагретых участков, передают им часть своей энергии.

Отметим, что при течении вязкой и неравномерно нагретой жидкости необратимый перенос энергии связан не только с теплопроводностью, но и с наличием трения.

Пусть температура T среды меняется только вдоль некоторого выделенного направления, которое примем за ось X . Сам поток теплоты определим как его количество, проходящее через единичную площадку, перпендикулярную оси X , за единичное время. В случае, если перепады температур в неподвижной среде невелики, плотность

потока тепловой энергии j_E пропорциональна градиенту температур, т. е.

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (44.2)$$

где λ — так называемая *теплопроводность* (коэффициент теплопроводности), эта величина определяет скорость передачи теплоты. Размерность потока теплоты по определению, $1 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Поскольку же размерность $[dT/dx] = 1 \text{ К}/\text{м}$, размерность теплопроводности

$$[\lambda] = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}} = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Из (44.2) особенно наглядно видно, почему необходим знак минус между плотностью потока и соответствующим градиентом. Производная dT/dx отрицательна, если температура падает в сторону положительных x . При этом так как поток теплоты направлен в сторону уменьшения температуры, т. е. вдоль положительной оси X , то знак его положителен.

44.4 Передача теплоты между двумя стенками Пусть рассматриваемый слой вещества толщиной d ограничен двумя параллельными плоскостями, S — площадь каждой из них (рис. 44.2). Сами плоскости поддерживаются при температурах T_1 и T_2 , при этом $T_1 > T_2$. Будем считать теплопроводность вещества $\lambda = \text{const}$; мы пренебрегаем ее зависимостью от температуры и для этого полагаем разность $(T_1 - T_2)$ относительно малой. Поскольку поток теплоты направлен от T_1 к T_2 , введем ось X в направлении от T_1 к T_2 с началом отсчета в T_1 .

Из соображений симметрии ясно, что распределение температур $T(x)$ зависит лишь от x . Составим уравнение для искомого распределения температур. В выражении для полного потока теплоты

$$Q = j_E S \quad (*)$$

используем связь (44.2), тогда (*) примет вид

$$Q = -\lambda S \frac{dT}{dx},$$

где Q от x не зависит.

Полученное дифференциальное уравнение для искомой функции $T(x)$ необходимо проинтегрировать, в результате чего будет найдено его решение, т. е. определено распределение температуры в слое как

функция x . Для этого перепишем уравнение в виде

$$dT = -\frac{Q}{\lambda S} dx;$$

интегрирование левой и правой частей написанного выражения дает

$$T = -\frac{Q}{\lambda S} x + \text{const.}$$

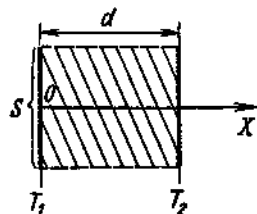


Рис. 44.2

Мы видим, что температура есть линейная функция вдоль толщины слоя.

Для нахождения константы необходимо использовать заданные условия на границах слоя. При $x = 0$ температура $T = T_1$, поэтому $\text{const} = T_1$, т. е. решение преобразуется к виду

$$T = T_1 - \frac{Q}{\lambda S} x. \quad (**)$$

При $x = d$ температура $T = T_2$ и (**) переходит в равенство

$$T_2 = T_1 - \frac{Q}{\lambda S} d,$$

или

$$Q = \frac{\lambda S}{d} (T_1 - T_2).$$

44.5 Диффузия. Растворение кристалла в жидкости До сих пор мы рассматривали однородную жидкость. Сейчас остановимся на изучении поведения смесей жидкостей. Пусть жидкость состоит из смеси двух веществ, причем состав смеси неоднороден вдоль ее объема. При макроскопическом движении смеси жидкости ее состав в каждом данном участке не меняется. Это следствие чисто механического обратимого переноса массы. Однако неоднородность состава смеси в различных участках приводит и к необратимому переносу компонент смеси. Механизм этого переноса носит молекулярный характер. Сам указанный процесс выравнивания концентрации называют *диффузией*.

При изучении диффузии обычно рассматривают неподвижную равномерно нагретую неоднородную жидкость. Состав смеси описывается *концентрацией* c , определяемой как отношение массы одного из входящих в состав смеси веществ к полной массе жидкости в данном элементе объема. Пусть между двумя сферическими концентрическими поверхностями радиусов r_1 и r_2 заключен слой вещества (рис. 44.3). На этих сферах поддерживают определенные концентрации смесей в жидкости c_1 и c_2 . Пусть $c_1 > c_2$, тогда возникающий диффузионный поток

$$j_m = -D \frac{dc}{dr}, \quad (44.3)$$

где D — коэффициент диффузии; dc/dr — градиент концентрации; смысл обозначения r виден из рис. 44.3. Полный же поток вещества

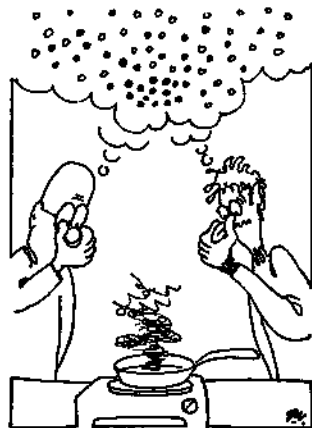
$$N = 4\pi r^2 j_m,$$

$$\text{или} \quad N = -4\pi D r^2 \frac{dc}{dr}.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{dc}{dr} = - \frac{N}{4\pi D r^2}$$

$$\text{или} \quad dc = - \left(\frac{N}{4\pi D} \right) \frac{dr}{r^2}.$$



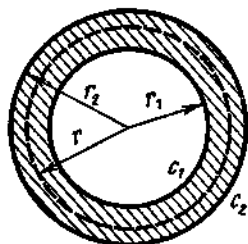


Рис. 44.3

Так как N не зависит от r , то интегрирование обеих частей этого уравнения дает

$$c = \left(\frac{N}{4\pi D} \right) \frac{1}{r} + \text{const.}$$

Теперь необходимо учесть граничные условия. При $r = r_1$ концентрация $c = c_1$, в результате

$$\text{const} = c_1 - \frac{N}{4\pi D r_1},$$

т. е.
$$c = c_1 + \frac{N}{4\pi D} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

При $r = r_2$ концентрация $c = c_2$, в итоге

$$c_2 = c_1 + \frac{N}{4\pi D} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

или

$$N = \frac{(c_1 - c_2) 4\pi D}{1/r_1 - 1/r_2}. \quad (*)$$

Из (*) следует, что если $r_2 = \infty$ (неограниченная среда вокруг сферы радиуса r_1) и при этом на бесконечности концентрация равна нулю, то

$$N = 4\pi D r_1 c_1. \quad (**)$$

Формулой (**) может описываться, например, скорость растворения твердого тела в жидкости, ибо она определяется скоростью диффузии растворяющегося вещества в жидкости. В самом деле, ведь в узком слое вблизи поверхности тела сразу образуется насыщенный раствор. Последующее же растворение идет по мере диффузии растворенного вещества из этого слоя в окружающую жидкость. Если растворяемое тело имеет форму шара (радиуса r_1) и концентрация насыщенного раствора вблизи него равна c_1 , а вдали от шара положена равной нулю, то полный диффузионный поток N от шара в растворитель, т. е. количество растворяющегося в единичное время вещества, определится через (**).

Здесь удобно остановиться на размерности коэффициента диффузии. Если определить j_m как число молекул растворенного вещества, проходящих в единичное время через единичную площадку, то $[j_m] = 1 \text{ с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$. Концентрация же есть число растворенных молекул в единичном объеме и ее размерность $[c] = 1 \text{ м}^{-3}$. Если же теперь в (44.3) сравнить размерности обеих сторон, то получим

$$[D] = 1 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Как оценивать времена диффузионных процессов? Исходим из соображений размерности. Прежде всего *время выравнивания концентраций в некоторой смеси не может зависеть от самих концентраций*. В самом деле, если концентрацию смеси в различных местах изменить в одинаковое число раз, то пропорционально этому изменению изменится и диффузионный поток и время выравнивания останется прежним. Совершенно очевидно, что время установ-

ления τ однородного состава смеси во всей системе может определяться лишь коэффициентом диффузии D и размерами L той области среды, в которой концентрации различны. Из этих величин можно составить единственную комбинацию, имеющую размерность времени

$$\tau \sim L^2/D. \quad (44.4)$$

Время τ можно назвать «временем релаксации» для процессов диффузии, т. е. временем установления равновесного состава смеси вдоль системы. Оно пропорционально квадрату размеров системы и обратно пропорционально коэффициенту диффузии.

§ 45. КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ В ГАЗАХ И ИХ СВЯЗЬ С МОЛЕКУЛЯРНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Необратимые процессы установления равновесия в системе, такие, например, как диффузия, вязкость и теплопроводность, называют *кинетическими*, а соответствующие коэффициенты — *кинетическими коэффициентами*. В жидкостях и газах кинетические коэффициенты, являясь некоторыми характеристиками вещества, проявляют, вообще говоря, зависимость от температуры и давления. Кинетические коэффициенты определяют обычно экспериментально: создают градиенты и измеряют соответствующие потоки. Производя такого рода измерения при различных температурах и давлениях, находят зависимость кинетических коэффициентов от состояния вещества среды. В жидкостях и плотных газах отсутствуют сколько-нибудь общие зависимости кинетических коэффициентов от T и p . Последнее связано с различием молекулярных взаимодействий в различных жидкостях, которое существенно для процессов молекулярного переноса массы, импульса и энергии.

Идеальные газы, т. е. газы с не взаимодействующими молекулами (точнее, слабо взаимодействующими), допускают теоретическое рассмотрение связи кинетических коэффициентов с молекулярными параметрами в общем виде. Однако как бы мало ни было взаимодействие между молекулами такого относительно разреженного газа, именно оно (взаимодействие) является механизмом установления статистического равновесия в системе.

45.1 Понятие длины свободного пробега молекул Взаимодействие молекул (или атомов) на относительно больших расстояниях рассматривалось нами в конце § 29. Было выяснено, что «далекие взаимодействия» молекул носят характер слабого притяжения (ван-дер-ваальсовы силы). Что же касается взаимного влияния молекул при их тесном сближении, то оно проявляется как обоюдная «непроницаемость». Возникновение резко возрастающих сил отталкивания между молекулами на расстояниях, сравнимых с собственными размерами молекул, обусловлено двумя обстоятельствами: 1) кулоновским отталкиванием ядер; 2) «квантовомеханической несовместимостью» внешних электронных оболочек различных молекул при их взаимном касании (электроны есть ферми-частицы — см. п. 25.2 в § 25).

Зависимость энергии межмолекулярного взаимодействия U_{12} от расстояния r между центрами молекул несколько условно представлена

на рис. 45.1. Условность рис. 45.1 связана с тем, что взаимодействие молекул в отличие от взаимодействия атомов зависит не только от взаимных расстояний, но и от взаимной ориентации, т. е. U_{12} является функцией многих параметров. На этом рисунке r_0 — «радиус» молекулы; U_0 — «глубина потенциальной ямы», она порядка величины критической температуры (см. § 40) данного вещества и составляет десятки или сотые доли электрон-вольта. Заметим, что аналогичная функция $U_{12}(r)$ для межатомного взаимодействия внутри молекулы имеет минимум U_0 порядка нескольких электрон-вольт.

Рассмотрение реальных взаимодействий молекул, а оно должно проводиться на квантовомеханической основе, является довольно сложным делом. Мы введем упрощение, перейдя от кривой взаимодействия двух молекул (рис. 45.1) к кривой взаимодействия двух упругих шаров (рис. 45.2). Теперь r_0 — радиус шара; само же взаимодействие сводится к кратковременным моментам столкновений шаров.

Рассмотрим достаточно разреженный газ молекул (шаров), в котором можно было бы пренебрегать одновременными столкновениями более чем двух молекул в одном акте столкновения. Пусть n — число молекул в единичном объеме. Какое среднее расстояние l должна пройти молекула для того, чтобы с заметной вероятностью столкнуться с другой молекулой? Слой газа малой толщины «прозрачен» для нашей молекулы. Спроецируем все молекулы слоя на экран единичной площади (рис. 45.3). При достаточно большой толщине l слоя он становится «непрозрачным»; при этом на экран проецируется nl молекул. Доля площади экрана, покрытая проекциями молекул, составляет $\pi r_0^2 nl$. Если эта величина близка к единице, то слой непрозрачен. Таким образом, расстояние, пролетев которое молекула почти наверняка испытывает столкновение,

$$l \sim \frac{1}{\pi r_0^2 n}.$$

Величину l называют длиной свободного пробега молекул, а

$$\sigma = 4\pi r_0^2 \quad (*)$$

— эффективным сечением столкновения молекул. Выражение (*) следует из того, что наибольшее расстояние между центрами двух шаров (молекул), на котором они могут пройти так, чтобы еще коснуться

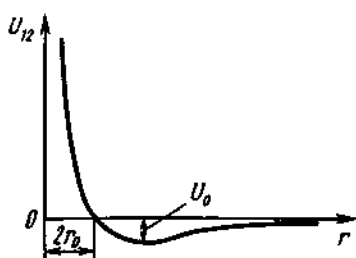


Рис. 45.1

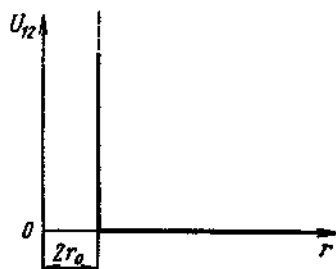


Рис. 45.2

друг друга, равно $2r_0$. В итоге

$$l \sim 1/(n\sigma). \quad (45.1)$$

Наряду с величиной l можно рассматривать также и *среднее время* τ между двумя последовательными столкновениями молекул. Ясно, что по порядку величины

$$\tau \sim l/v, \quad (45.1*)$$

где v — средняя скорость теплового движения молекул.

Сделаем числовые оценки рассматриваемых величин. Сечение взаимодействия

$$\sigma = 4\pi \cdot (10^{-10})^2 \approx 10^{-19} \text{ м}^2.$$

В 1 м^3 газа при нормальных условиях, т. е. при 0°C и давлении 1 атм, содержится $n = 2,7 \cdot 10^{25}$ молекул (см. § 37.3). В результате для длины свободного пробега молекул получим

$$l \sim \frac{1}{2,7 \cdot 10^{25} \cdot 10^{-19}} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Среднюю тепловую скорость молекул (например, азота) оценим по формуле (37.7):

$$v \sim \sqrt{3kT/m}; \quad v \approx \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2}{30 \cdot 10^{-27}}} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 6 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

Отсюда среднее время между столкновениями молекул

$$\tau \sim \frac{3 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^2} \text{ с} \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ с}.$$

Произведенные числовые оценки вполне согласуются (в пределах порядков величин) с прямыми экспериментальными данными, а также с более последовательными (чем это принято в нашем изложении) теоретическими расчетами. Это означает, что модель газа с молекулами — шарами достаточно хорошо передает суть изучаемых явлений.

45.2 Молекулярное рассмотрение процесса диффузии Пусть в газе давление и температура всюду одинаковы. Сам газ представляет собой смесь двух компонентов, причем состав смеси меняется вдоль одного направления, которое примем за ось X .

Рассмотрим один из газов смеси (газ 1); число молекул его в единичном объеме обозначим n_1 и будем считать n_1 функцией координаты x . Построим на оси X условную единичную площадку с координатой x , расположенную перпендикулярно оси. Число молекул, пересекающих эту площадку за 1 с, составляет $n_1 v$, где v — средняя тепловая скорость молекул. При этом диффузионный поток определяется как разность числа молекул данного сорта, проходящих площадку слева — направо и справа — налево. Для подсчета же самого потока через единичную площадку, очевидно, следует брать лишь слой

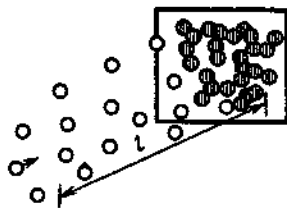


Рис. 45.3

газа толщиной l (где l — длина свободного пробега молекул), расположенного по обе стороны от выбранной площадки. Тогда диффузионный поток

$$j_M \sim v n_1|_{x-l} - v n_1|_{x+l}. \quad (*)$$

В (*) $n_1|_{x-l}$ — число молекул сорта «1», находящихся в единичном объеме вблизи точки $x-l$. Изменение же функции n_1 в двух близких точках $(x-l)$ и $(x+l)$ может быть выражено произведением ее производной на расстояние между этими точками, т. е.

$$n_1|_{x-l} - n_1|_{x+l} \approx -l \frac{dn_1}{dx}.$$

Здесь предполагается, что концентрация молекул сорта «1» растет в положительном направлении оси X . В результате (*) принимает вид

$$j_M \sim -vl \frac{dn_1}{dx}. \quad (**)$$

Сравним теперь (**), например, с (44.3), тогда получим, что

$$D \sim vl. \quad (45.2)$$

Таким образом, коэффициент диффузии в газах по порядку величины равен произведению средней тепловой скорости молекул на их длину свободного пробега.

Выражению (45.2) можно придать другой вид. С учетом (45.1) запишем

$$D \sim \frac{v}{n\sigma},$$

где n — полное число молекул обоих компонентов газа в единичном объеме. Если же обратиться к уравнению состояния идеального газа (37.3), то из него плотность числа молекул

$$N/V = p/(kT)$$

и тогда

$$D \sim \left(\frac{vk}{\sigma} \right) \frac{T}{p}. \quad (45.3)$$

В результате коэффициент диффузии обратно пропорционален давлению (при заданной температуре). Что же касается зависимости $D(T)$, то ее легко выяснить, если вспомнить, что $v \sim \sqrt{T}$; в итоге $D \sim T^{3/2}$.

Заметим здесь, что сечение взаимодействия σ для реальных молекул является убывающей функцией температуры, ибо время взаимодействия уменьшается с ростом относительных скоростей молекул. Однако указанная зависимость весьма слаба. Для модели молекул-шаров σ есть константа.

45.3 Диффузия как задача о случайном блуждании частиц Изучая процесс диффузии, мы невольно задаем вопрос: почему с течением времени частицы смещаются на значительные расстояния от первоначального положения? Если движение молекул совершенно случайно и все направления равновероятны, то частица, казалось бы, должна «топтаться на месте».

Рассмотрим движение броуновской частицы — частицы макроскопической, но достаточно малой для того, чтобы чувствовать различие в числе ударов молекул жидкости на свои «боковые грани». Беспорядочность и случайность результирующего воздействия молекул на частицу приводят к ее столь же беспорядочному и случайному движению как целого. Обратимся к рис. 45.4, а, на нем изображено движение броуновской частицы, наблюдаемое под микроскопом. Каждый прямолинейный отрезок (AB , BC , CD , DE , EF , ..., YZ) фиксирует смещение частицы из некоторого начального положения в конечное через равные промежутки времени Δt . Общее время наблюдения составляет t , общее число смещений — N *.

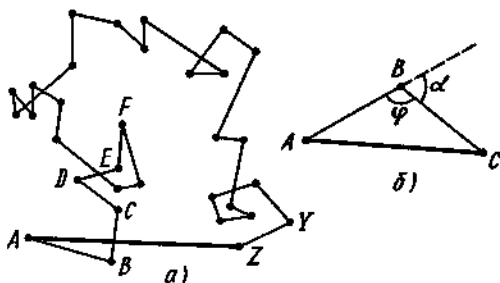


Рис. 45.4

На рис. 45.4, б представлено одно звено большой ломаной, состоящее из двух последовательных смещений AB и BC . Отрезок AC — замыкающий. По известной геометрической теореме

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cos \varphi.$$

Введем в рассмотрение дополнительный к φ угол α , тогда на основе равенства

$$\cos \varphi = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$

приведенное соотношение запишем в виде

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |BC| \cos \alpha. \quad (*)$$

Перейдем теперь к большой ломаной. Ее можно представить как состоящую из множества парных звеньев. Для каждой пары последовательных смещений можно написать соотношение типа (*). Складывая их почленно и деля на общее число смещений N , получим

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |A_i C_i|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |A_i B_i|^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |B_i C_i|^2 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (|A_i B_i| \cdot |B_i C_i| \cos \alpha_i).$$

Последним суммарным слагаемым, содержащим $\cos \alpha_i$, можно пренебречь в силу его чрезвычайной близости к нулю. Это следует из самого характера броуновского движения: оно хаотично, а значит, все значения угла α встречаются одинаково часто. Другими словами, в последней сумме частота появления слагаемых, близких по значению, но имеющих противоположные знаки, практически одинакова.

* Разумеется, наблюдаемое движение броуновской частицы в промежутке между регистрацией событий запутано и хаотично.

Наблюдения показывают, что средние значения квадратов смещений

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |A_i B_i|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |B_i C_i|^2$$

с большой точностью одинаковы и это совпадение тем строже, чем большее число смещений N мы рассматриваем. В итоге средний квадрат результирующего смещения $|AZ|$ (рис. 45.4, а), для которого мы введем обозначение

$$\langle L^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |A_i C_i|^2,$$

связан с $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ равенством

$$\langle L^2 \rangle = N \langle (\Delta x)^2 \rangle. \quad (45.4)$$

Число смещений N выражается через полное время t наблюдения и временной интервал Δt между смещениями следующим образом:

$$N = t/\Delta t.$$

Тогда (45.4) можно записать в виде

$$\langle L^2 \rangle = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{\Delta t} t. \quad (45.5)$$

Обратим здесь внимание на сходство соотношений (45.5) и (44.4). Это не только количественное сходство, но и сходство в постановке задач. Указанное позволяет установить следующую связь:

$$\langle L^2 \rangle \sim Dt. \quad (45.6)$$

Результат (45.6) замечателен во многих отношениях. Во-первых, он отвечает на поставленный в начале параграфа вопрос — почему частица уходит из первоначального положения, а не остается в некоторой ограниченной области; более того, результат (45.6) показывает, как частица «мигрирует» во времени (радиус «миграции» пропорционален \sqrt{t}). Во-вторых, полученный вывод раскрывает природу процесса диффузии.

45.4 Связь между кинетическими коэффициентами Диффузионный поток j_m связан с избыточным переносом молекул в одном из направлений, т. е. связан с переносом массы. Теплопроводность можно рассматривать как «диффузию энергии», а вязкость — как «диффузию импульса макроскопического движения». Поскольку необратимый перенос массы, энергии и импульса в газе связан с одним и тем же молекулярным механизмом, соответствующие кинетические коэффициенты обязаны иметь один и тот же порядок величины. При этом мы берем те коэффициенты переноса, которые являются аналогами друг друга и в соответствующих процессах диффузии, теплопроводности и вязкости играют одинаковую роль. Так, «диффузия энергии» описывается так называемой *температуропроводностью*

$$a = \frac{\lambda}{\rho C_p} = \frac{\lambda}{nc_p}, \quad (45.7)$$

где λ — теплопроводность; C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; c_p — теплоемкость, отнесенная к одной молекуле; ρ — плотность массы; n — плотность числа частиц. «Диффузия импульса макроскопического движения» характеризуется кинематической вязкостью

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\eta}{mn}, \quad (45.8)$$

где η — динамическая вязкость; m — масса молекулы.

Коэффициенты переноса D , α , ν имеют одинаковую размерность — $\text{м}^2/\text{с}$. В результате проведенного анализа можно написать, что

$$D \sim \lambda/(\rho C_p) \sim \eta/\rho, \quad (45.9)$$

или

$$D \sim \lambda/(nc_p) \sim \eta/(nm). \quad (45.10)$$

Соотношения (45.9) и (45.10) выражают связь между кинетическими коэффициентами в газах.

Отметим, что для большинства реальных газов значение измеренного отношения ν/α находится в пределах 0,75–0,90.

Из (45.10), при учете (45.2), сразу следуют выражения для теплопроводности

$$\lambda \sim nc_p \nu l \quad (45.11)$$

и динамической вязкости

$$\eta \sim nm \nu l. \quad (45.12)$$

Если в (45.11) и (45.12) использовать для длины свободного пробега l соотношение (45.1), а для средней тепловой скорости v молекул связь $v \sim \sqrt{kT/m}$, то получим

$$\lambda \sim \frac{c_p}{\sigma} \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (45.13)$$

и

$$\eta \sim \sqrt{mkT}/\sigma. \quad (45.14)$$

Таким образом, в отличие от коэффициента диффузии теплопроводность и динамическая вязкость не зависят от давления. От температуры λ и η зависят примерно как \sqrt{T} .

§ 46. ЗАКОНЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЮ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

46.1 Метод подобия. Число Рейнольдса Общие уравнения гидродинамики сложны в математическом отношении — они нелинейны. Последнее видно даже из простого соотношения Бернулли, в которое скорость входит во второй степени. Положение еще более усложняется (в математическом плане) при изучении движения вязких жидкостей. Лишь небольшое число задач на вязкие течения может быть решено точно. В связи с этим в гидродинамике большое значение придается эксперименту (это, впрочем, характерно и для всей физики).

Особенно ценными для исследований в гидродинамике оказались так называемые *методы подобия*. Их сущность можно уяснить из следующих рассуждений. В уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости в качестве параметра, характеризующего самую жидкость, входит лишь кинематическая вязкость $\nu = \eta/\rho$. Функциями, которые должны быть определены в результате решения уравнения, являются скорость v и отношение давления к плотности p/ρ (плотность в данном случае — постоянная величина). Тип течения жидкости также определяется условиями на границах тела и зависит от его формы, размеров L и скорости u .

Рассмотрим определенный тип течения жидкости, им может явиться обтекание жидкостью тела заданной формы, например шара. Пусть течение стационарно, т. е. скорость потока в каждой точке неизменна во времени. Тогда данный тип движения жидкости определится тремя параметрами: v , L , u . Учитывая размерности этих параметров:

$$[v] = 1 \text{ м}^2/\text{с}, [L] = 1 \text{ м}, [u] = 1 \text{ м}/\text{с},$$

составим их безразмерную комбинацию. Такая комбинация единственна, ее называют *числом Рейнольдса*:

$$Re = uL/\nu = \rho uL/\eta. \quad (46.1)$$

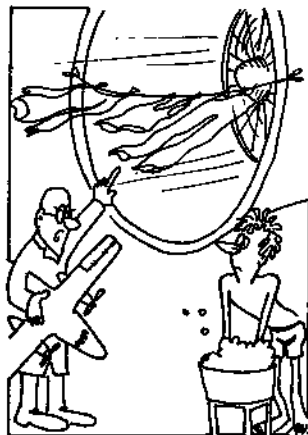
Число Рейнольдса входит в гидродинамические уравнения и его числовое значение существенно определяет структуру этих уравнений.

Введем безразмерные координаты r/L и скорость v/u , т. е. будем выражать длины в единицах L , а скорость — в единицах u . В результате решения гидродинамических уравнений получим для распределения скоростей функцию вида

$$\frac{v}{u} = f\left(\frac{r}{L}, Re\right). \quad (46.2)$$

Какие следствия вытекают из этого выражения? Если рассматривать два различных течения одного и того же типа (в нашем случае обтекание шаров различного радиуса жидкостями различной вязкости), то «поле скоростей» (46.2) для них одинаково, если только числа Рейнольдса этих течений совпадают. Указанные течения могут быть получены друг из друга простым изменением масштабов измерения координат и скоростей; такие течения называют *подобными*. В итоге мы приходим к следующему положению: *течения одинакового типа с одинаковым числом Рейнольдса подобны*.

Практическим следствием рассмотренного является возможность моделирования реальных (крупномасштабных) течений в аэродинамических трубах. До постройки летательного аппарата его уменьшенная копия продувается в газовом потоке,



имеющем параметры, которые обеспечивают равенство чисел Рейнольдса для модели и натурy.

46.2 Сопротивление при малых скоростях Прежде всего выясним относительную роль отдельных членов, входящих в гидродинамические уравнения движения, в зависимости от значения числа Рейнольдса. Для этого выпишем порядки величин для этих членов. Исходим из простейшего уравнения движения для идеальной жидкости. В случае стационарного движения жидкости им является уравнение Бернулли

$$\rho u^2 = -p. \quad (*)$$

Теперь учтем вязкость жидкости. Так как необратимый поток импульса пропорционален градиенту скорости, а коэффициентом пропорциональности является динамическая вязкость, то соотношение (*) запишется как

$$\rho u^2 - \eta \frac{u}{L} = -p; \quad (46.3)$$

здесь смысл обозначений тот же, что и в предыдущем параграфе (§ 46.1). Член, содержащий плотность ρ , называют *инерционным*; *вязкостный член* включает в себя коэффициент η . Легко заметить, что число Рейнольдса

$$Re = \frac{(\text{Инерционный член})}{(\text{Вязкостный член})}. \quad (46.4)$$

При малых скоростях, когда $u \ll 1$, инерционный член мал по сравнению с вязкостным, см. (46.3). При этом, согласно (46.4), мало и число Рейнольдса ($Re \ll 1$). В результате при малых скоростях течения жидкости можно не учитывать инерцию самой жидкости при обтекании ею тела. В этом случае линии тока в натекающем (например, на цилиндр) потоке имеют вид, приведенный на рис. 46.1, а.

Поставим задачу о нахождении выражения для силы сопротивления F , оказываемой со стороны жидкости на тело с характерными размерами L , движущегося с малой скоростью u . Свойства

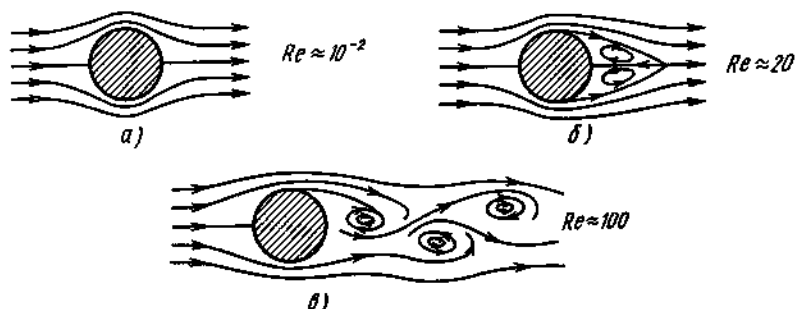


Рис. 46.1

жидкости в рассматриваемом случае можно описывать только динамической вязкостью η .

Сначала выпишем размерности участвующих величин:

$$[F] = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}, [\eta] = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, [L] = 1 \text{ м}, [\mu] = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Отсюда сразу видно, что размерность произведения $\eta L \mu$ совпадает с размерностью силы, т. е.

$$F \sim \eta L \mu. \quad (46.5)$$

Это и есть искомая формула.

В случае шара числовой коэффициент в (46.5) равен 6π . Точное выражение при этом имеет вид

$$F = 6\pi\eta R \mu, \quad (46.6)$$

где R — радиус шара. Формулу (46.6) называют *формулой Стокса*. Она справедлива для медленных движений шара в жидкости.

Формула Стокса полезна в целом ряде случаев. Так, она позволяет определять скорости макроскопических частиц, которые приближенно можно считать шариками, при их движении в жидкости под влиянием некоторой силы. Например, осаждение частиц происходит под действием силы тяжести; сортировка частиц по массе в центрифуге идет под влиянием центробежных сил; неравномерно распределенные в жидкости взвешенные частицы участвуют в процессах диффузии под влиянием случайных флуктуаций давления.

В классических опытах Миллиkena по определению элементарного электрического заряда также использовалась формула Стокса. Напомним методику этих экспериментов. В камеру, содержащую две горизонтальные пластины плоского электрического конденсатора, путем распыления вводились мельчайшие капельки масла. При этом сами капельки обладали электрическим зарядом (или вследствие электризации при распылении, или в результате поглощения ионов из воздуха). Скорость и равномерного осаждения капельки определяли с помощью микроскопа (электрическое поле в этот момент отсутствовало). Динамическую вязкость η воздуха, плотность ρ масла и напряженность g поля тяготения считали известными. В этом случае из условия равенства сил $F_{\text{тяж}} = F_{\text{сопр}}$ т. е.

$$mg = \rho^4/3 \pi R^3 g = 6\pi\eta R \mu,$$

можно получить выражение для радиуса капельки

$$R = \sqrt{\frac{6\pi\eta\mu}{4/3\pi\rho g}}.$$

Затем включали электрическое поле (напряженностью E), компенсирующее действие поля тяготения. Иначе говоря, обеспечивали выполнимость соотношения

$$F_{\text{эл}} = F_{\text{тяж}} = F_{\text{сопр}}$$

из которого следует, что

$$QE = 6\pi\eta R u.$$

Из этого соотношения находили электрический заряд Q капельки. Он оказался целым кратным по отношению к некоторому заряду

$$e = Q_n/n,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Заряд e и следует принять за элементарный заряд.

46.3 Сопротивление при больших (дозвуковых) скоростях Обратимся вновь к соотношению (46.3). Из него видно, что в случае больших скоростей течения, когда $u \gg 1$, ведущая роль переходит к инерционному члену (содержащему плотность ρ); вязкостной член оказывается малым по сравнению с инерционным. В этом случае, согласно (46.4), число Рейнольдса $Re \gg 1$.

Напишем выражение для сопротивления жидкой среды при движении в ней тела с относительно большой скоростью. Существенным свойством жидкости в этих условиях, как уже отмечалось, является плотность массы ρ . В результате в нашем распоряжении три величины: размер L тела, его скорость u и плотность ρ жидкости. Из соображений размерности следует выражение для силы сопротивления

$$F \sim \rho u^2 L^2. \quad (46.7)$$

Полученный закон сопротивления для больших скоростей резко отличен от закона сопротивления (46.5) для малых скоростей. Изменение вида закона сопротивления связано с изменением характера обтекания. Ведь с ростом скорости растет и инерция потока; поток может отрываться от тела, при этом возникают вихри.

Наглядно описанная картина представлена на рис. 46.1, б и 46.1, в. В частности, из рис. 46.1, б видно, что при $Re \approx 20$ на задней стороне тела возникает противоток. Это связано с тем, что позади тела струи несколько расширяются и давление в них по закону Бернулли возрастает. Из этого же рисунка видно, что возникновению вихрей способствует паличие в некоторых областях одновременно тока и противотока. При дальнейшем росте скорости потока для значений чисел Рейнольдса $Re \approx 100$ (рис. 46.1, в) течение вновь изменяет свой характер. А именно, вихри отрываются от тела и плывут вдоль потока; позади тела формируются новые вихри.

При больших числах Рейнольдса сопротивление очень сильно зависит от формы тела. Это легко уяснить, если вновь обратиться к рис. 46.1, б. Вместо изображенного цилиндра с его круговым сечением представим себе тело, сечение которого состоит из площади круга и сходящейся на нет хвостовой части; причем последняя заполняет область, где существуют два вихря и противоток. Тогда сам поток плавно сомкнется у удлиненного конца тела. Наступление кризиса (в виде отрыва потока от тела) отодвинется в область гораздо больших скоростей. Тела с указанной формой называют хорошо обтекаемыми.

Количественно зависимость сопротивления от формы тел выражают с помощью *коэффициента сопротивления* C , который необходимо ввести в (46.7). В результате получим

$$F = C \rho v^2 L^2, \quad (46.8)$$

где под L^2 следует разуметь площадь поперечного сечения тела. Коэффициент сопротивления C для хорошо обтекаемых тел имеет значения $C = 0,03 \div 0,05$, для плохо обтекаемых тел $C = 1,0 \div 1,5$.

Формула (46.8) определяет сопротивление тел при их движении с относительно большими скоростями. Однако эти скорости все же должны быть значительно меньшими, чем скорость звука в среде, в которой совершается движение. В этом случае нет нужды учитывать сжимаемость среды, т. е. изменение ее плотности. В формуле (46.8) $\rho = \text{const}$.

§ 47. НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ГИДРОДИНАМИКЕ

47.1 **Переход ламинарных течений в турбулентные** Начнем с примера неустойчивости. Для этого обратимся к опыту. Возьмем сосуд и частично наполним его сперва легкой жидкостью (например, водой), а затем аккуратно дольем более тяжелой жидкостью (например, крепкой серной кислотой). В таком состоянии, когда тяжелая жидкость находится поверх легкой жидкости (рис. 47.1), система может быть в равновесии. Однако это равновесие будет неустойчивым с точки зрения энергетической. Ведь если жидкости поменяются местами: тяжелая жидкость опустится вниз, а легкая — вверх, то общая потенциальная энергия системы уменьшится (при этом освободившаяся часть энергии пойдет на подъем легкой жидкости). Поэтому достаточно малого возмущения, чтобы указанная перестройка системы произошла.

Мы рассмотрели пример неустойчивости состояния равновесия жидкостей. Как подходят к изучению неустойчивостей течений жидкостей и газов? Если вам удалось найти математическое решение уравнений гидродинамики для какой-либо задачи, то это не означает, что найденное решение реально осуществимо в природе. В потоке жидкости неизбежно присутствуют малые возмущения; поэтому полученное решение (даже если оно точное) может реализоваться, только если оно устойчиво по отношению к малым возмущениям.

Эксперимент показывает, что при увеличении числа Рейнольдса Re достигается такое его критическое значение $Re_{кр}$, когда стационарное обтекание становится невозможным из-за его неустойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям. Естественно, что для каждого типа движения существует свое значение $Re_{кр}$.

Каков же характер того нестационарного режима, который появляется в результате абсолютной неустойчивости стационарного движения при $Re \geq Re_{кр}$?

Как правило, на стационарное движение накладываются периодические пульсации потока.

При дальнейшем росте чисел Рейнольдса движение становится

все более сложным и запутанным; такое движение называют *турбулентным* в отличие от упорядоченного слоистого движения жидкости, называемого *ламинарным*.

Турбулентное движение жидкости при больших числах Рейнольдса характеризуется наличием чрезвычайно нерегулярного, беспорядочного изменения скорости со временем в каждой точке потока (*развитая турбулентность*). Скорость все время пульсирует вокруг некоторого своего среднего значения, причем размах пульсаций может быть не мал по сравнению со значением самой скорости. Такое же нерегулярное изменение скорости имеет место от точки к точке потока, рассматриваемого в заданный момент времени. Траектории «жидких частиц» в турбулентном потоке чрезвычайно сложны, что приводит к наличию сильного перемешивания жидкости.

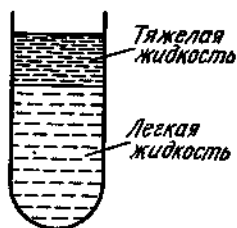


Рис. 47.1

Чтобы нагляднее представить себе отличие ламинарного и турбулентного течений, опишем следующий опыт. Пусть в стеклянной трубе течет вода. В одном и том же месте поперечного сечения трубы выпускают ярко окрашенные взвешенные частицы. В случае ламинарного потока все частицы движутся по одной и той же траектории. При турбулентном потоке траектории частиц окажутся различными; причем заранее нельзя предвидеть, какими именно они будут. Траектории движения частиц в турбулентном потоке становятся «случайными», и частицы могут попадать в любое место трубы.

Изложенное показывает, что теория турбулентного движения должна иметь статистический характер.

47.2 Пограничный слой В свободных течениях при больших числах Рейнольдса можно не учитывать вязкости жидкости. Однако в пристеночном слое, вблизи поверхности тела, течения формируются под влиянием вязких сил трения. Действительно, на самой поверхности неподвижного тела скорость «жидких частиц» обязана быть нулевой. Весь рост скорости от нулевого значения до ее значения в основном потоке происходит в тонком слое, обволакивающем тело и называемом *пограничным слоем*.

Увеличение скорости в основном потоке ведет ко все большему градиенту скоростей в пограничном слое. Ламинарное течение в нем сопровождается возникновением вихрей. Именно резкий перепад скоростей и является источником вихреобразования («турбулизации») в потоке. Эти вихри в дальнейшем диффундируют в прилегающую область. На рис. 47.2 показана структура потока в пограничном слое (1 — ламинарная область, 2 — переходная область («периодические пульсации»), 3 — турбулентная область, 4 — вязкий подслой, 5 — условная граница между идеальной жидкостью и пограничным слоем).

Заметим, что при значениях $Re < 420$ ламинарное течение в пограничном слое вполне устойчиво к внешним возмущениям. Переход ламинарных течений в турбулентные происходит при $Re > 420$. При этом пограничный слой тем тоньше, чем больше числа Рей-

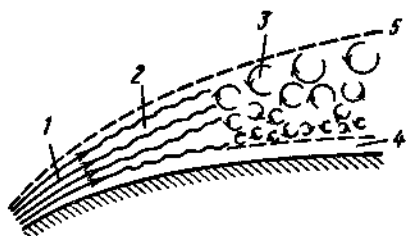


Рис. 47.2



Рис. 47.3

нольдса. Это физически вполне ясно, ибо в случае идеальной жидкости (когда вязкость $\eta = 0$) пограничный слой должен вообще отсутствовать.

Таким образом, с ростом скорости основного потока возрастает градиент скорости в пограничном слое и молекулярный перенос импульса в слое в конце концов становится неустойчивым. Происходит переход к иному способу передачи импульса — путем макроскопической турбуликации слоя.

Турбулентное перемешивание жидкости представляет собой гораздо более эффективный механизм передачи импульса, чем «диффузионный» процесс его молекулярного переноса. Это особенно хорошо видно на примере профилей скоростей в ламинарном и турбулентном потоках в трубе (рис. 47.3). В ламинарном потоке действует молекулярный механизм передачи импульса и скорость плавно меняется от оси потока к стенкам трубы. В турбулентном потоке существует интенсивный макроскопический перенос импульса между различными областями жидкости, что и обеспечивает постоянство скорости по всему сечению, кроме узкой пристеночной области.

47.3 Турбулентная вязкость и температуропроводность Статистический характер турбулентных движений жидкости позволяет провести существенную аналогию с молекулярным тепловым хаотическим движением. При этом роль беспорядочных «молекулярных траекторий» переходит к беспорядочным «линиям тока жидкости».

Уже отмечалось, что если наблюдать за турбулентным течением в какой-либо фиксированной точке, то окажется, что модуль и направление скорости испытывают беспорядочные изменения.

Будем пользоваться понятием средней скорости $u = \langle v \rangle$ течения в точке как усредненной по времени истинной скоростью v . Тогда вдоль потока скорость u должна меняться плавно. Разность

$$v' = v - u$$

между истинной и средней скоростями называют «пульсационной» частью скорости.

На усредненный поток накладывается нерегулярное «пульсационное» движение.

Известно, что кинетические коэффициенты молекулярного переноса импульса и энергии

$$\nu \sim a \sim \langle v \rangle l,$$

где $\langle v \rangle$ — средняя тепловая скорость молекул; l — длина свободного пробега молекул. В ламинарных потоках пользуются именно этими коэффициентами переноса.

В потоках с развитой турбулентностью вязкость и теплопередача могут качественно описываться соответствующими аналоговыми коэффициентами. Так, *турбулентная вязкость*

$$\nu_{\text{турб}} \sim \Delta u \cdot L,$$

где L — основной масштаб турбулентности, отражающий размеры области турбулизации потока; Δu — изменение средней скорости на расстояниях порядка величины L . Связь между турбулентной $\nu_{\text{турб}}$ и молекулярной ν вязкостями может выражаться соотношением

$$\nu_{\text{турб}} \sim \nu \frac{Re}{Re_{\text{кр}}}.$$

Теплопередача в турбулентной области соответственно станет описываться *турбулентной температуропроводностью*

$$a_{\text{турб}} \sim L \Delta u,$$

и связь молекулярной температуропроводности a с турбулентной температуропроводностью $a_{\text{турб}}$ может быть следующей:

$$a_{\text{турб}} \sim a \frac{Re}{Re_{\text{кр}}}.$$

Таким образом, молекулярные и турбулентные коэффициенты переноса сравниваются по порядку величины при критических значениях чисел Рейнольдса $Re_{\text{кр}}$.

47.4 Переход от молекулярного к конвекционному переносу теплоты. Солнечная грануляция Обратимся к переносу теплоты в жидкостях, находящихся в поле тяжести, при наличии очень больших градиентов температуры. При относительно малых градиентах температуры осуществляется молекулярный перенос теплоты путем теплопроводности. Однако при больших градиентах температуры молекулярный механизм становится неустойчивым. Происходит переход к макроскопическому переносу теплоты путем конвекции.

Пусть в поле тяжести имеется слой газа или жидкости, заключенный между двумя горизонтальными поверхностями. При этом верхняя поверхность обладает температурой T_1 , а нижняя — температурой T_2 ; положим, что $T_2 > T_1$.

Если разность температур $(T_2 - T_1)$ не слишком велика, то жидкость остается неподвижной и передача теплоты осуществляется обычным механизмом теплопроводности. На этой стадии процесса теплопередачи существенны величины a , L , $T_2 - T_1$, где L — толщина рассматриваемого слоя среды.

При некотором критическом значении разности температур $(T_2 - T_1)_{\text{кр}}$ процесс молекулярной передачи теплоты становится неустойчивым, возникает стационарное макроскопическое конвекционное движение. В этом случае в рассмотрение дополнительно должны войти такие характеристики движущейся среды, как кинематическая вязкость ν . Однако никакого параметра с размерностью скорости в

случае свободной конвекции входить не должно. Это связано с тем, что все движение жидкости при свободной конвекции обуславливается только ее неравномерной нагретостью. В результате в рассмотрение войдет температурный коэффициент объемного расширения β жидкости, который определяется как

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}.$$

Так как плотность ρ среды является убывающей функцией температуры, то

$$\rho(T_1) > \rho(T_2),$$

т. е. верхние слои окажутся более плотными, чем нижние. Это означает, что в поле тяжести с напряженностью g система будет неустойчивой (см. пример в начале § 47.1).

Таким образом, в нашем распоряжении имеются следующие величины:

$$[a] = [v] = 1 \text{ м}^2/\text{с}, [T_2 - T_1] = 1 \text{ К}, [L] = 1 \text{ м}, \\ [g] = 1 \text{ м}/\text{с}^2, [\beta] = 1 \text{ К}^{-1}.$$

Из этих величин можно составить две независимые безразмерные комбинации. Обычно выбирают следующие:

$$\text{Pr} = \nu/a$$

и

$$\text{Gr} = \frac{g\beta L^3 (T_2 - T_1)}{\nu^2}.$$

Это так называемые числа *Прандтля* Pr и *Грассхофа* Gr .

Число Gr является важной характеристикой конвекционного движения жидкости. При малых Gr конвекционный механизм теплопередачи отсутствует и перенос теплоты осуществляется молекулярной теплопроводностью. При больших значениях Gr конвекция становится турбулентной. Мы видим, что роль числа Рейнольдса Re , которое в случае свободной конвекции не существует (из-за отсутствия характеристических параметров скорости), переходит к числу Грассхофа Gr .

Если граничные условия для конвекции таковы, что верхняя поверхность жидкости свободна, но поддерживается при постоянной температуре, то критическое значение для разности температур $(T_2 - T_1)_{\text{кр}}$ наступает при

$$\text{Gr} \cdot \text{Pr} = \frac{g\beta L^3 (T_2 - T_1)}{\nu a} > 1100.$$

Возникающее при этом конвекционное движение разбивается на отдельные области — ячейки; последние напоминают структуру пчелиных сот (рис. 47.4, а). Движение конвекционных потоков внутри ячеек-сот показано на рис. 47.4, б.

При $\text{Gr} \sim 50\,000$ стационарная ламинарная конвекция становится неустойчивой, ячейки исчезают и возникает турбулентная конвекция.

В больших масштабах ячеистая структура конвекционных областей проявляется в гранулированной поверхности Солнца. На солнечном диске насчитывается общее число гранул (ячеек) $\approx 2 \cdot 10^6$; оно несколько возрастает в период максимума солнечной активности. Средний диаметр гранул ≈ 700 км, а среднее время жизни около 8 мин. Скорости движения ионизированного газа в ячейках достигают значений 2–3 км/с.

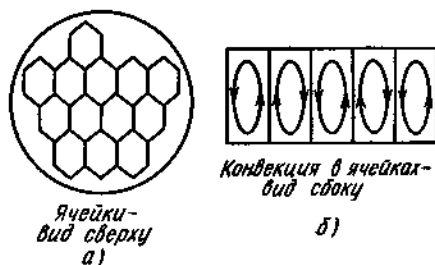


Рис. 47.4

Конвекционные движения являются тем механизмом, вследствие которого часть теплового потока, идущего из внутренних областей звезды, превращается в механическую и магнитную энергии. Так, источниками локальных магнитных полей могут быть плазменные турбулентные области, возникающие при нестационарной конвекции (явление так называемого *турбулентного динамо*).

§ 48. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ

48.1 Некоторые виды волнового движения В достаточно плотных средах всякое возмущение не остается локализованным; из-за взаимодействия между частицами оно распространяется в виде волны вдоль всей среды. Волна — это, собственно, эстафетная передача возмущения от одной частицы к другой.

В кристаллах существуют деформации сжатия (растяжения) и сдвига, они и выполняют роль возмущений. Соответственно двум видам деформаций в кристаллах возможны упругие (звуковые) продольные и поперечные волны. Волнам поперечным сопоставляются деформации сдвига; здесь направление распространения волны и направление смещения частиц перпендикулярны. Продольным волнам сопоставляются деформации сжатия (и растяжения); соответственно направление смещения частиц и направление распространения волны совпадают (или противоположны).

В жидкостях упругие деформации сдвига отсутствуют. Это ведет, с одной стороны, к возникновению текучести, а с другой — к существованию лишь упругих продольных волн (продольный звук).

Однако следует иметь в виду, что поверхность жидкости в отличие от ее объемных свойств находится в особых условиях. На поверхность жидкости действует несколько сил: силы поверхностного натяжения и силы тяжести. Возникающие поверхностные (гравитационные) волны ведут к периодическому изменению самой поверхности. Под действием силы тяжести поверхность жидкости стремится принять равновесную плоскую горизонтальную форму. При этом силы поверхностного натяжения лежат в касательной плоскости, а сила тяжести всегда вертикальна. В результате частицы жидкости в поверхностной волне совершают не поперечное и не продольное колебания, а круго-

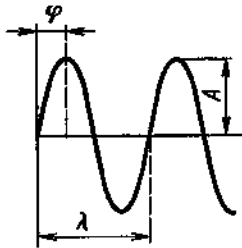


Рис. 48.1

вое движение. Последнее является периодическим, поэтому поверхностные волны в жидкости называются волнами более сложного вида.

48.2 Характеристики волн Простейшим типом волны является синусоидальная (рис. 48.1). Ее характеристиками являются: A — амплитуда, т. е. размах колебаний; ω — угловая частота, т. е. число циклов колебаний за 2π единиц времени (выражается в радианах/с); φ — фаза, определяемая как угловое расстояние любой точки волны от нулевой точки (выражается в радианах); иногда говорят о высоте волны $2A$.

В математике существует следующее положение: *любая функция может быть представлена как наложение синусоид; если указанная функция периодическая, то набор синусоид дискретен, их частоты кратны друг другу; для функций непериодических разложение в частотный спектр имеет непрерывный характер, т. е. частоты могут быть любыми.*

На рис. 48.2 представлено наложение двух синусоид с близкими частотами ω и $\omega + \Delta\omega$, в результате которого образуется волновой пакет.

Так как волна — это распространяющиеся в среде колебания, то характеристикой волн является также их скорость распространения. По известным частоте ω и скорости u_ϕ распространения волны можно определить длину волны

$$\lambda = 2\pi u_\phi / \omega.$$

В целом ряде сред скорость распространения зависит от длины волны; эту зависимость называют *дисперсией*. В таком случае необходимо различать *фазовую* u_ϕ и *групповую* $u_{гр}$ скорости распространения волн. Особенно ясно их различие видно при распространении волнового локализованного пакета, состоящего из большого набора синусоид с очень близкими частотами. Вследствие дисперсии такой волновой пакет расплывается (уширяется), ведь у его составляющих — отдельных синусоид — скорости несколько различны. Скорость перемещения «центра» волнового пакета и является групповой скоростью, она определяет скорость переноса энергии волной. Скорость распространения, например, одного из гребней пакета определяет фазовую скорость. Именно зависимость фазовой скорости от длины волны и называют дисперсией.

За другим примером различия в фазовой и групповой скоростях при распространении волн обратимся к рис. 48.2, на котором даны две синусоиды с близкими частотами ω_1 и ω_2 и *волновыми числами* k_1 и k_2 . Волновое число k — это модуль волнового вектора \mathbf{k} , совпадающего с направлением распространения волны, при этом

$$k = 2\pi/\lambda,$$

т. е. волновое число показывает, как меняется фаза с расстоянием (радиан/м). Для отдельных синусоидальных волн их фазовые скорости

$$u_\phi^1 = \omega_1/k_1 \text{ и } u_\phi^2 = \omega_2/k_2.$$

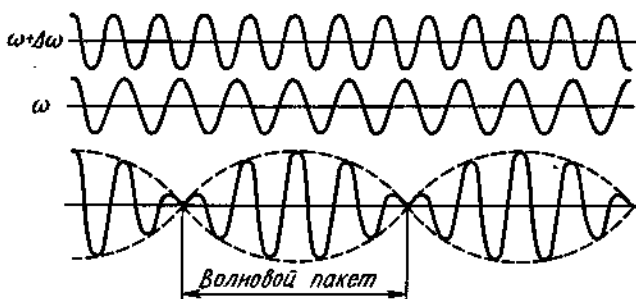


Рис. 48.2

Групповая скорость — это скорость модулированной волны, полученной путем сложения исходных волн:

$$u_{гр} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2},$$

или, в общем случае,

$$u_{гр} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Понятно, что бесконечная монохроматическая синусоидальная волна не способна сама по себе передать сигнал. Необходимо ее локальное искажение (модуляция); скорость передачи этого искажения-сигнала определяется групповой скоростью.

48.3 Линейные и нелинейные волны Если синусоидальные волны в разложении волны сложного вида независимы, т. е. не влияют друг на друга при их распространении, то такие волновые процессы называют *линейными*. Однако далеко не всегда каждая волна распространяется так, словно других волн не существует. Например, морские волны при подходе к берегу изменяют свою форму. Это типично нелинейное поведение волн.

Указанная терминология связана с математическим видом уравнений, описывающих волновые процессы. Если амплитуды малы, то в уравнениях можно пренебречь членами, содержащими квадраты, произведения и высшие степени амплитуд, и сами уравнения становятся линейными. Если же амплитуды не малы, то отмеченное упрощение становится невозможным и необходимы нелинейные уравнения.

Количественным критерием линейности волн принимается условие

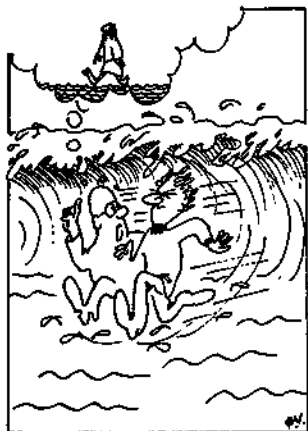
$$(2A/\lambda) \ll 1.$$

Так, у морских волн вдали от берегов высота волны меньше ее длины в десятки раз, т. е. линейными являются достаточно пологие волны.

Для нелинейных волн критерием является условие

$$(2A/\lambda) \sim 1.$$

Те же морские волны при подходе к берегу становятся высокими и крутыми; меняется их форма, возникает неустойчивость и волна частично разрушается.



48.4 Солитоны и другие нелинейные эффекты Для линейных пологих волн в среде имеют место обычные явления отражения, преломления, интерференции и дифракции. Для нелинейных крутых волн, которые не просто складываются, но и взаимодействуют между собой, наблюдается целый ряд специфических явлений.

Одно из них — так называемое *самосжатие волновых пакетов*. Простые периодические волны, напоминающие синусоидальные, но со слегка заостренными гребнями оказываются неустойчивыми. Ровный строй таких волн не может долго сохранять свой порядок, а разбивается на отдельные волновые пакеты с пониженной амплитудой

и образуется волновая толча. Указанный эффект возникает в условиях, когда рассматриваемый слой жидкости над твердой поверхностью имеет размеры $d \sim \lambda$.

В тонких слоях жидкости, когда глубина твердой подстилающей поверхности $d \sim \lambda/10$, может возникать нелинейный эффект, связанный с образованием уединенной волны, или *солитона*. Такая одиночная «солирующая» волна имеет вид несинусоидального симметричного горба, сходящего на нет в обе стороны, без впадин на поверхности.

Солитон есть локализованный волновой пакет, составленный из поверхностных (гравитационных) волн. Это самоподдерживающийся волновой пакет. В нем существует баланс между двумя конкурирующими тенденциями: волновой пакет стремится расплываться из-за дисперсии и испытывает самосжатие вследствие нелинейности. Встречаясь, солитоны проходят через друг друга, не разрушаясь.

Океанские цунами иногда формируются в виде солитона. За знаменитые ленинградские наводнения, по-видимому, также ответственны солитоны. Полагают, что красное пятно в атмосфере планеты Юпитер представляет собой долгоживущий солитон.

В последние годы понятие солитона приобрело общезначимое значение. В трудноисследуемых областях нелинейной физики понятие солитона играет такую же роль, как и понятие осциллятора в линейной физике.

48.5 Сильно возмущенные среды До сих пор мы говорили о регулярных волнах. Однако зачастую возникает ситуация, например шторм на море, когда реальная волна представляет собой случайное наложение элементарных волн разных длин, высот, фаз и направлений. В таких условиях по «законам случая» изредка возможно возникновение особенно высоких волн — «девятый вал».

Для того чтобы понять физическую сущность происходящего, необходимо сначала на основании статистики наблюдений и обобщения найти закономерности в случайном. Как известно, в газе мириады молекул хаотически движутся в разных направлениях, с разной ско-

ростью, однако средняя скорость движения молекул газа характеризуется вполне определенным значением и однозначно связана с такой характеристикой газа, как температура. Статистическая обработка результатов наблюдений за штормовыми волнами показывает, что в их поведении существуют весьма четко выраженные закономерности, но физика этих закономерностей не ясна. Дело в том, что в отличие от простого индивидуального движения молекул, движение волн — явление коллективное: волна образуется, распространяется, эволюционирует, обладая большим разнообразием форм.

Плазма является объектом, в котором существенны коллективные эффекты. В плазме, вследствие дальнедействующих кулоновских взаимодействий между составляющими ее ионами и электронами, легко возбуждаются волны всякого рода: гидродинамические, электромагнитные и т. д. Для сильно возбужденной плазмы (ее называют *турбулентной*) важны все те рассуждения, которые мы проводили для штормовых волн. Сама турбулентная плазма — это среда, образующая структуру звезд типа Солнца.

48.6 Колебания заряженной капли и деление тяжелых атомных ядер В заключение параграфа остановимся на поведении капель жидкости. При увеличении радиуса R капли, ее объем V возрастает как R^3 , а площадь поверхности как R^2 . В процессе слияния двух капель в одну объем конечной капли складывается из объемов отдельных капель (ведь жидкость практически несжимаема); поверхность же конечной капли меньше суммы поверхностей исходных капель. В результате «свободная энергия», связанная с поверхностью, уменьшается и сам процесс слияния становится термодинамически выгодным.

Пусть теперь капля электрически заряжена. Рассмотрим условие ее устойчивости по отношению к распаду на более мелкие капли. Если капля несет заряд Q , то сила, разрывающая каплю, составляет $F_E \simeq Q^2/R^2$, а разрывающее давление $p_E \simeq F_E/(4\pi R^2) = Q^2/(4\pi R^4)$. Силы же поверхностного натяжения создают давление, стягивающее каплю, а именно $p_{\text{пов}} = 2\alpha/R$, где α — поверхностное натяжение. В итоге границу устойчивости капли по отношению к распаду определяет соотношение $p_E \simeq p_{\text{пов}}$ или

$$\frac{Q^2}{4\pi R^4} \simeq \frac{2\alpha}{R}. \quad (*)$$

Оценим заряд водяной капли с размером $R = 10^{-3}$ м, при котором капля теряет устойчивость и распадается на более мелкие. Для воды $\alpha \simeq 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м, тогда из (*) имеем

$$Q \simeq \sqrt{8\pi\alpha R^3}.$$

Эта формула записана в СГС, подставив в нее соответствующие числовые значения, получим $Q \approx 10^{10}e$, где e — заряд электрона.

Много это или мало? Естественно, для этого нужно сравнить заряд капли и число молекул N в ней. Последнее найдем из соотношения

$$N = \frac{\rho V}{m_{\text{молекула воды}}}; \quad N = \frac{10^3 \cdot \frac{4}{3}\pi (10^{-3})^3}{18 \cdot 1,6 \cdot 10^{-27}} \sim 10^{20}.$$

В итоге доля нескомпенсированного заряда в капле

$$\frac{Q}{N} \sim \frac{10^{10}}{10^{26}} \sim 10^{-16}.$$

Обратимся к процессу деления тяжелых атомных ядер. Вещество тяжелых ядер можно рассматривать как нуклонную жидкость, а само ядро как каплю такой жидкости. Возьмем изотоп фермия ${}^{256}_{100}\text{Fm}$; его ядра самопроизвольно делятся с периодом полураспада 3,2 ч. Последнее означает, что через три с лишним часа от взятого количества ядер остается примерно половина. Таким образом, ядро фермия практически находится на границе устойчивости.

Ядро фермия имеет радиус $R \approx 10^{-14}$ м, его электрический заряд $Q = 100e$. Применяя формулу (*), найдем порядок величины для поверхностного натяжения ядерного вещества

$$\alpha \approx \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{R^3}.$$

Эта формула написана в СГС, числовой расчет и перевод ответа в СИ дают

$$\alpha \sim 10^{17} \text{ Н/м}.$$

Для сравнения приведем значения α для некоторых веществ

Жидкий гелий	$2,4 \cdot 10^{-4}$
Керосин	$2,4 \cdot 10^{-2}$
Вода	$7,2 \cdot 10^{-2}$
Жидкая ртуть	0,55
Жидкая платина	1,82

Теперь оценим период колебаний ядра. Сделаем это, используя соображения размерности. Пусть равновесной формой нуклонной капли является сферическая, тогда отклонения от нее можно представить как сжатый и вытянутый эллипсоиды. Пусть свободные колебания возбужденного ядра происходят лишь под влиянием поверхностного натяжения*. В результате период колебаний T может зависеть только от поверхностного натяжения α , плотности ρ и размеров R .

Далее действуем по обычным правилам (см. приложение II). Составляем единственную комбинацию искомой и рассматриваемых величин

$$T \sim \rho^x R^y \alpha^z,$$

где x, y, z — неизвестные числа. Для их нахождения выписываем размерности входящих параметров

$$s \sim (\text{кг} \cdot \text{м}^{-3})^x \cdot (\text{м})^y \cdot (\text{кг} \cdot \text{с}^{-2})^z = \text{кг}^{x+z} \cdot \text{м}^{-3x+y} \cdot \text{с}^{-2z}.$$

Сравнивая показатели степеней левой и правой частей, получаем

$$\left. \begin{aligned} x + z &= 0, \\ -3x + y &= 0, \\ -2z &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = -\frac{1}{2}.$$

* Ради простоты мы не станем учитывать заряд ядра. Как показывает точный расчет, это не скажется на порядке величины периода колебаний ядра.

В результате

$$T \sim \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^{1/2} R^{3/2}. \quad (**)$$

Для нуклонной капли — ядра величины, входящие в (**), имеют значения: $\rho \sim 10^{17} \text{ кг/м}^3$, $R \simeq 10^{-14} \text{ м}$, $\alpha \sim 10^{17} \text{ Н/м}$. Тогда для периода колебаний ядра получим $T \sim 10^{-21} \text{ с}$. Соответственно частота колебаний

$$\omega = 2\pi/T \sim 1/T \sim 10^{21} \text{ с}^{-1}.$$

§ 49. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

49.1 Обобщенная форма уравнения Бернулли До сих пор мы рассматривали движения жидкостей и газов со скоростями, много меньшими скорости распространения звука в среде. Описание таких дозвуковых течений может основываться только на законах классической механики. Однако при скоростях движения, близких к звуковым (практически с такими движениями имеют дело в газах), необходим учет сжимаемости среды (см. дальше). В этом случае сформулировать уравнения движения лишь на основе законов механики нельзя. Наряду с законами механики необходимо привлекать термодинамические закономерности.

В рамках механики уравнение Бернулли имело вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (49.1)$$

Для учета внутренней тепловой энергии в левую часть (49.1) следует добавить внутреннюю энергию единичной массы ε . В итоге получим

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varepsilon = \text{const}. \quad (49.2)$$

Уравнению (49.2) можно придать несколько иную форму, если ввести удельную массовую энтальпию

$$h = \varepsilon + \frac{p}{\rho}, \quad (49.3)$$

где $h = H/m$, см. (37.14). Тогда (49.2) запишется

$$\left(\frac{v^2}{2} + h \right) = \text{const}. \quad (49.4)$$

Это уравнение назовем *обобщенным уравнением Бернулли*.

49.2 Критерий сжимаемости среды и скорость звука Рассмотрим задачу о натекании потока на некоторое тело. Пусть h_0 — удельная энтальпия жидкой частицы (мы берем трубку тока) на значительном расстоянии перед телом, а v_0 — ее скорость. Мы выбираем такую трубку тока, в которой жидкая частица, натываясь на тело, полностью теряет скорость $v = 0$, а ее удельная энтальпия равна h . В результате, применяя (49.4), получаем соотношение, описывающее течение:

$$\frac{v_0^2}{2} + h_0 = h. \quad (49.5)$$

Пусть это стационарное течение адиабатное (изоэнтропическое), тогда $ds = 0$, где s — энтропия газа единичной массы. Из термодинамического соотношения

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho} dp$$

имеем для таких течений связь

$$dh = \frac{1}{\rho} dp. \quad (49.6)$$

Применительно к рассматриваемой задаче (49.6) запишется так:

$$h - h_0 = \frac{1}{\rho_0} (p - p_0) \equiv \frac{\Delta p}{\rho_0} = \left(\frac{dp}{dp} \right)_s \frac{\Delta p}{\rho_0};$$

мы полагаем, что в потоке жидкости или газа

$$p - p_0 \equiv \Delta p \ll p_0.$$

В результате (49.5) примет вид

$$\frac{v_0^2}{2} = \left(\frac{dp}{dp} \right)_s \frac{\Delta p}{\rho_0}. \quad (49.7)$$

Из (49.7) видно, что величина dp/dp имеет размерность квадрата скорости и связана с *сжимаемостью* вещества

$$\frac{dp}{dp} = \left(\frac{dp}{dp} \right)^{-1}, \quad (*)$$

т. е. с его способностью изменять плотность при изменении давления. Ясно, что сжимаемость определяется значениями межатомных (или межмолекулярных) взаимодействий. В жидкостях указанные взаимодействия велики, и сколько-нибудь заметные изменения расстояний между атомами (или молекулами) требуют больших силовых внешних воздействий. Для изменения плотности воды всего на 5% необходимо приложить внешнее давление в 10^3 атм, для жидкой ртути — 10^4 атм. Для изменения же плотности воздуха в том же отношении требуется давление всего в 1,05 атм.

Всякое малое изменение давления в небольшой области среды, ведущее к изменению ее плотности, не остается локализованным. Вследствие межмолекулярных взаимодействий это возмущение среды в виде волны попеременных сжатий и разрежений распространяется вдоль среды. Это так называемые *звуковые волны*, их скорость распространения определяется указанной выше связью

$$u^2 = \left(\frac{dp}{dp} \right)_s. \quad (49.8)$$

Возвращаясь к формуле (49.7), перепишем ее в виде

$$\frac{\Delta p}{\rho_0} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{u^2} \ll 1.$$

В результате при движении газа или жидкости можно пренебречь их

сжимаемостью при скоростях течения, много меньших скорости звука в среде. Изменение плотности среды существенно при околосвуковых и сверхзвуковых движениях тел в среде.

Приведем значения скоростей звука в различных средах. В воздухе при нормальных условиях она равна 330 м/с, в воде — 1450 м/с, в твердом железе — 6 км/с, в ядерном веществе — (0,1–0,2) с (здесь c — скорость света).

49.3 Течение в трубе с переменным сечением Условия течения таковы: газ изэнтропически движется по трубе медленно изменяющегося сечения; скорость потока характеризуем средним значением по сечению, течение стационарно.

В этом случае удобно исходить из закона сохранения потока массы

$$\rho v S = \text{const}, \quad (49.9)$$

где S — площадь поперечного сечения канала. Поскольку здесь порознь могут меняться все величины, возьмем логарифм от (49.9) и продифференцируем, тогда получим

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0. \quad (49.10)$$

В силу изэнтропичности течения энтропия $s = \text{const}$ для всех частей потока. Первое слагаемое в (49.10) преобразуем так:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_s \frac{dp}{\rho} = \frac{dh}{u^2}. \quad (49.11)$$

Здесь использованы формулы (49.6), (*) и (49.8). Согласно же обобщенному уравнению Бернулли (49.4)

$$dh = -v dv. \quad (49.12)$$

Подставим (49.11) и (49.12) в (49.10), тогда получим окончательное соотношение

$$\frac{dv}{v} \left(1 - \frac{v^2}{u^2} \right) = - \frac{dS}{S}. \quad (49.13)$$

Произведем анализ полученной связи (49.13).

1. Для течения дозвукового ($v < u$) имеем $(1 - v^2/u^2) > 0$:

а) если труба сужается (т. е. $dS < 0$), то $dv > 0$; это означает, что скорость течения возрастает;

б) в расширяющейся трубе дозвуковое течение замедляется.

2. Для сверхзвукового течения ($v > u$) имеем $(1 - v^2/u^2) < 0$:

а) в сужающейся ($dS < 0$) трубе получаем $dv < 0$, т. е. скорость течения падает;

б) в расширяющейся ($dS > 0$) трубе $dv > 0$, т. е. скорость потока увеличивается.

Отличие дозвуковых и сверхзвуковых течений газа в рассмотренном случае канала с переменным сечением видно особенно хорошо.

49.4 Сопло Лавала Газ, покоящийся в камере сгорания, через насадок-сопло вытекает в атмосферу (рис. 49.1). Согласно (49.13) скорость течения может достигнуть звуковой $v = u$ лишь в самом узком

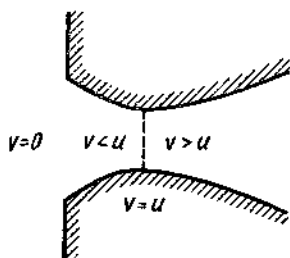


Рис. 49.1

месте сопла, т. е. при $dS = 0$. В расширяющейся части сопла поток становится уже сверхзвуковым.

Полученные результаты физически можно осмыслить так. В камере сгорания создается достаточно высокое давление. Это давление должно быть выше внешнего настолько, чтобы устремившийся в сопло поток газа мог достичь звуковой скорости в самом узком месте сопла. При этом, естественно, давление в струе непрерывно падает. В расширяющейся

части сопла дальнейшее ускорение потока происходит за счет внутренней энергии газа, и его температура стремительно падает. Таким образом, формирование сверхзвуковой струи происходит за счет повышенного давления и за счет внутренней тепловой энергии самой струи.

Именно такого рода сопла применяются в жидкостных ракетных двигателях (ЖРД), а также в авиационных воздушно-реактивных двигателях. Приведем ряд цифр для ЖРД, работающих на химическом топливе. В камерах сгорания мощных ЖРД давления достигают $(80 \div 100)$ атм, температуры — $(3000 \div 4700)$ К, скорость выбрасываемых из сопла газов — $(3 \div 4,5)$ км/с.

§ 50. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

50.1 Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа

Эффекты сжимаемости среды приводят к возникновению новой группы явлений: звуковых и ударных волн. О звуковых волнах как о распространяющихся в среде малых возмущениях речь шла у нас неоднократно. Здесь необходимо подчеркнуть следующее. Поскольку скорость звука u — это «скорость переноса картины колебаний в среде», то нетрудно понять следующий факт: если звук распространяется в среде, движущейся со скоростью v , то на скорость звука накладывается «скорость сноса» среды. В этом принципиальное отличие звуковых волн от волн электромагнитных, так как скорость последних не зависит от выбора системы отсчета.

При дозвуковых скоростях обтекания тел в потоке происходят изменения во всем пространстве вокруг тела. В этом случае возмущения, возникающие при обтекании, распространяются во всех направлениях, в том числе и впереди тела. Эти возмущения как бы «подготавливают» поток к встрече с телом. На рис. 50.1, а изображены последовательные положения в моменты времени 0, 1, ..., 4 тела, движущегося с дозвуковой скоростью, и сечения сферических фронтов звуковых волн, испущенных в разные моменты времени. Каждая окружность показывает, куда в момент времени 4 дойдет фронт волны, испущенной соответственно в моменты 0, 1, 2, 3.

При сверхзвуковом движении тел возмущения не могут распространяться впереди тела и поток «слепо» натывается на препятствие. В этом случае возмущения существуют лишь позади тела; они накладываются друг на друга и образуют огибающую их коническую

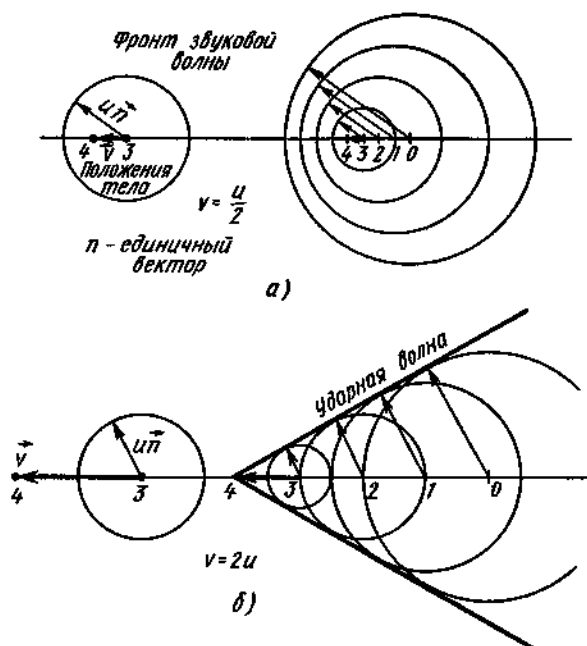


Рис. 50.1

поверхность с резко возросшими значениями плотности, давления и температуры — так называемую ударную волну (рис. 50.1, б).

Отличие закономерностей в поведении сверхзвуковых и дозвуковых потоков газа было продемонстрировано нами на примере течений в трубах с переменным сечением. Здесь же мы отмечаем принципиальную особенность сверхзвуковых течений — наличие в потоке некоторых поверхностей, на которых все величины, описывающие поток, испытывают скачок. Эти поверхности разрыва отделяют невозмущенную область потока от возмущенной. Сам возмущенный поток находится в области, ограниченной конической ударной поверхностью.

Прежде чем перейти к детальному изучению свойств потока на ударном разрыве, остановимся на ряде количественных оценок, касающихся звуковых возмущений. Покажем, что скорость распространения звука в газе близка по порядку величины к средней тепловой скорости его молекул. Используем уравнение состояния идеального газа

$$pV \equiv \frac{p}{\rho} = NkT,$$

где $V = 1/\rho$ — в данном случае удельный объем газа. Так как

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s \sim \frac{p}{\rho},$$

то, согласно (49.8), скорость звука

$$u \sim \sqrt{NkT}. \quad (50.1)$$

Этот результат показывает, что *скорость звука в газе зависит только от температуры, но не от давления или плотности.*

Воспользуемся, далее, соотношением

$$m \langle v^2 \rangle \sim kT,$$

где m — масса молекулы, а $\langle v^2 \rangle$ — ее средняя квадратическая скорость. Тогда (50.1) запишется в виде

$$u \sim \sqrt{Nm \langle v^2 \rangle}.$$

Так как, по условию, рассматривается единичная масса газа, то $Nm = 1$. В итоге для скорости звука получим

$$u \sim \langle v \rangle.$$

В связи со сделанной оценкой убедимся в том важнейшем обстоятельстве, что *течения газа со звуковыми и сверхзвуковыми скоростями можно рассматривать как лишенные вязкости.* В самом деле, кинематическая вязкость

$$\nu \sim \langle v \rangle l \sim ul,$$

где l — длина свободного пробега молекул, а $\langle v \rangle$ — средняя тепловая скорость молекул, которая, как мы видели, по порядку величины совпадает со скоростью звука u . Поскольку и скорости v макроскопического движения сравнимы со звуковой, число Рейнольдса

$$Re = \frac{vL}{\nu} \sim \frac{uL}{ul} \sim \frac{L}{l} \quad (50.2)$$

принимает очень большие числовые значения (L — характеристические размеры, в данном случае размеры обтекаемого потоком тела). Большие же значения Re соответствуют малой вязкости.

50.2 Общие соотношения для ударного скачка Как количественно описывать ударные волны? Хотя параметры газа (v , p , ρ) при прохождении через «поверхность разрыва» испытывают скачок, но соответствующие им потоки должны быть непрерывными. Это следует из законов сохранения массы, импульса и энергии.

Рассмотрим элемент поверхности ударной волны, перпендикулярной потоку, и свяжем с этим элементом систему координат с осью X , направленной по нормали к нему (рис. 50.2). Тогда вследствие сохранения вещества плотность потока массы должна быть одинаковой по обе стороны от поверхности разрыва, т. е.

$$\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}. \quad (50.3)$$

Обратимся к условию непрерывности для потока импульса на разрыве. Импульс газа единичного объема есть ρv . Казалось бы, что плотность потока импульса в направлении движения самого газа должна быть равна

$$(\rho v_x) v_x,$$

а условие на поверхности разрыва могло бы записаться как равенство этих выражений по обе стороны скачка. Однако такая



Рис. 50.2

запись была бы не полна, ибо если газ покоится, то должны быть равны давления соседних участков газа друг на друга. В результате получим

$$p_1 + \rho_1 v_{1x}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2x}^2. \quad (50.4)$$

Используя аналогичные соображения, напишем выражение для потока энергии. Полная энергия газа единичного объема имеет вид

$$\rho \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right).$$

Соответственно для плотности потока энергии получим

$$\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + h \right);$$

здесь использовалось соотношение (49.3). Само же условие непрерывности потока энергии на скачке имеет вид

$$\rho_1 v_{1x} \left(\frac{v_1^2}{2} + h_1 \right) = \rho_2 v_{2x} \left(\frac{v_2^2}{2} + h_2 \right). \quad (50.5)$$

Заметим, что условие (50.5) вследствие наличия (50.3) может быть упрощено. Имея также в виду, что при нашем выборе ориентации системы координат $v_x = v$, рассмотренные условия на поверхности разрыва могут быть переписаны в виде:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j, \quad (50.6)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (50.7)$$

$$h_1 + v_1^2/2 = h_2 + v_2^2/2. \quad (50.8)$$

Ударная волна в газе имеет конечную ширину и является переходным неравновесным слоем, разделяющим две равновесные области среды с различными значениями описывающих их термодинамических величин. Найдем соотношения, которые определяют связь между термодинамическими величинами по обе стороны ударного разрыва. Будем исходить из общих условий (50.6)–(50.8). Введем удельные объемы $V_1 = 1/\rho_1$, $V_2 = 1/\rho_2$ газа по обе стороны разрыва. Из (50.6) тогда будем иметь:

$$v_1 = jV_1, \quad v_2 = jV_2. \quad (50.9)$$

Подставляя это в (50.7), получим

$$p_1 + j^2 V_1 = p_2 + j^2 V_2, \quad (50.10)$$

или

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \quad (50.11)$$

Так как j^2 — величина положительная, то должно быть одновременно *

$$p_2 > p_1 \text{ и } V_1 > V_2. \quad (50.12)$$

* Более детальное рассмотрение показывает, что обратные неравенства в этом случае невозможны.

Таким образом, давление газа за скачком выше, чем перед скачком. То же самое относится и к плотности газа ($\rho_2 > \rho_1$).

Для скачка скоростей $v_1 - v_2$ газа по обе стороны разрыва, равного, согласно (50.9), $j(V_1 - V_2)$, можно написать, используя (50.11), выражение

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \quad (50.13)$$

Неравенства (50.12) приводят к тому, что

$$v_1 > v_2. \quad (50.14)$$

В результате скорость потока за скачком падает.

Рассмотрим теперь условие (50.8), которое перепишем в виде

$$h_1 + j^2 V_1^2/2 = h_2 + j^2 V_2^2/2; \quad (50.15)$$

здесь использованы равенства (50.9). Подставляя в (50.15) выражение (50.11), получим

$$h_1 - h_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0. \quad (50.16)$$

Значение энтальпии за скачком выше, чем перед скачком ($h_2 > h_1$).

Перейдем в (50.16) от энтальпии

$$h = \varepsilon + pV$$

к внутренней энергии ε . Тогда получим

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0. \quad (50.17)$$

Внутренняя энергия газа возрастает за скачком ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$).

Соотношения (50.16) и (50.17) являются важнейшими для теории ударных волн и определяют связь между термодинамическими величинами по обе стороны от ударной поверхности.

Что касается изменения энтропии, то при прохождении газа через ударный слой она может лишь возрасти (в силу закона возрастания энтропии), т. е.

$$s_2 > s_1. \quad (50.18)$$

Это неравенство, как кажется на первый взгляд, не находится в соответствии с тем, о чем говорилось в конце предыдущего параграфа (§ 50.1). А именно, движения газа со звуковыми и сверхзвуковыми скоростями можно рассматривать как движения «идеальной жидкости», т. е. среды, лишенной вязкости и теплопроводности. При таких движениях, как нам известно, энтропия остается постоянной. Таким образом, ударные разрывы являются механизмом возрастания энтропии в «идеальной жидкости». Другими словами, на ширине ударной волны проявятся свойства вязкости и теплопроводности среды. Поскольку же вязкость существенна для движений с малыми числами Рейнольдса, то из (50.2) следует, что ширина L ударной волны может быть лишь порядка длины свободного пробега l молекул.

Этот результат не находится в противоречии с предположением о том, что в рамках газодинамики сплошной среды ударный фронт является геометрической поверхностью. Дело в том, что сама газодинамика игнорирует молекулярную структуру среды и полагает $l \rightarrow 0$.

Что касается структуры и процессов, идущих на ширине ударного скачка, то они могут полно и последовательно изучаться методами статистической физико-химической кинетики.

В заключение этого параграфа важно подчеркнуть следующее. При выводе соотношений и неравенств, касающихся поведения термодинамических величин при переходе ударного скачка, мы не использовали уравнения состояния вещества. Это означает, что полученные соотношения и неравенства имеют общий характер и применимы при распространении ударных волн в любых средах: твердых, жидких, газообразных.

50.3 Ударные волны в идеальном газе Здесь мы конкретизируем среду: возьмем простейшую — идеальный молекулярный газ. Напомним, что под термином «идеальный газ» в статистической термодинамике разумеют газ из весьма слабо взаимодействующих частиц. Равновесные свойства такого газа нами рассматривались в гл. V. Чтобы теоретически исследовать поведение термодинамических величин газа на ударном скачке, используя общие соотношения § 50.2, нам понадобится уравнение состояния идеального газа и выражения для его внутренней энергии и энтальпии.

Предварительно получим удобные для наших целей выражения для внутренней энергии и энтальпии идеального газа. Из (37.12) следует, что для идеального газа c не зависящей от температуры теплоемкостью, с точностью до аддитивной постоянной, внутренняя энергия

$$\varepsilon = c_V T. \quad (50.19)$$

Выражая температуру из уравнения состояния (37.4) и используя для газовой постоянной ее выражение (37.18), перепишем (50.19) в виде

$$\varepsilon = \frac{c_V}{c_p - c_V} pV = \frac{pV}{\gamma - 1}, \quad (50.20)$$

где $\gamma = c_p/c_V$. Исходя из (37.15), аналогично находится энтальпия идеального газа

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pV. \quad (50.21)$$

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы приступить к расчету скачков основных величин на поверхностях разрыва в идеальном газе. При этом сам расчет будет строиться так, чтобы отношения однородных величин на скачке выражались через давление p_1 газа перед фронтом и давление p_2 газа за фронтом (может входить также начальная плотность $\rho_1 = 1/V_1$ газа). Отношение p_2/p_1 задает интенсивность ударной волны, поэтому оно является произвольно изменяемым параметром.

Итак, приступим к расчету. Подставим (50.21) в общее соотношение (50.16), тогда получим *

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) + \frac{1}{2} (V_1 + V_2) (p_2 - p_1) = 0,$$

* Напомним, что индекс 2 отмечает значение величины за фронтом, а индекс 1 — перед фронтом.

$$\text{или} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}. \quad (50.22)$$

Исходя из связи

$$p_1 V_1 / T_1 = p_2 V_2 / T_2, \quad (50.23)$$

следующей из уравнения состояния идеального газа, найдем для отношения температур с обеих сторон ударного разрыва:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2} \right]; \quad (50.24)$$

здесь в качестве V_2/V_1 использовано его выражение (50.22).

Формулу для плотности потока массы j получим, если в (50.11) подставим $V_1 - V_2$ из (50.22); в результате

$$j^2 = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}{2V_1}. \quad (50.25)$$

Для скоростей движения газа относительно поверхности разрыва получим

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{V_1}{2} [(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2], \\ v_2^2 &= \frac{V_1}{2} \frac{[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]^2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}. \end{aligned} \quad (50.26)$$

При получении (50.26) использовались связи (50.9), (50.25), причем при выводе второго равенства в (50.26) выражение для V_2^2 бралось из (50.22). Здесь же заметим, что формулы (50.26) описывают не только скорости движения газа относительно ударной поверхности, но и в равной степени скорость распространения ударной волны относительно газов впереди и позади нее.

Рассмотрим ударные волны весьма большой интенсивности, в которых $p_2 \gg p_1$. Из (50.22) в этом случае следует

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (50.27)$$

Отсюда видно, что отношение плотностей стремится к постоянному пределу. Так, для одноатомного газа, согласно (37.20),

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5/2 R}{3/2 R} = \frac{5}{3},$$

$$\text{т. е.} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{5/3 - 1}{5/3 + 1} = \frac{1}{4},$$

$$\text{или} \quad \rho_2 = 4\rho_1.$$

Для двухатомного газа, согласно (37.21),

$$\gamma = 7/5 \text{ и } \rho_2 = 6\rho_1.$$

Для отношения температур в предельном случае ударных волн большой интенсивности из (50.24) следует формула

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma - 1) p_2}{(\gamma + 1) p_1}. \quad (50.28)$$

В результате отношение T_2/T_1 неограниченно растет вместе с p_2/p_1 . Иначе говоря, скачок температуры, как и скачок давления, в ударной волне может быть сколь угодно большим.

Наконец, для скорости распространения ударной волны большой интенсивности из (50.26) получим соответственно

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} p_2 V_1}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)} p_2 V_1}. \quad (50.29)$$

Эти скорости растут пропорционально корню из давления p_2 .

Ударные волны могут возникать при взрывах. Скорость распространения ударной волны выше, чем скорость распространения звука. Это видно, например, из первого равенства формул (50.26), которое при $p_2 \rightarrow p_1$ переходит в

$$v_1 \rightarrow \sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}} = u, \quad (50.30)$$

т. е. ударные волны слабой интенсивности распространяются со скоростью, близкой к звуковой.

В сильной ударной волне давление и плотность энергии гораздо больше, чем в невозмущенном газе. Такова, например, волна с давлением 100 атм в воздухе. Эта волна сжимает воздух почти в 8 раз и распространяется со скоростью более 3 км/с, т. е. в 10 раз быстрее звука. Температура в ней достигает 3500 °С. При такой температуре заметная часть молекул воздуха уже диссоциирована, т. е. распалась на атомы. Для гораздо большей оставшейся части молекул при указанной температуре уже существенны не только поступательные и вращательные степени свободы, но и колебательные. В этом случае предельное сжатие восьмикратно в отличие от шестикратного при отсутствии колебательных состояний.

Ударная волна, в которой давление равно 1000 атм, нагревает воздух до 14000 °С. При этих температурах «в игру» вступают электронные атомные состояния (см. § 29). Возникают процессы перехода атомов из основного состояния в возбужденные; обратные переходы сопровождаются излучением атомов в видимой области спектра. В этих условиях предельное сжатие газа десятикратно. Сам нагретый воздух становится непрозрачным для собственного излучения. Поверхность фронта сильной ударной волны в газе излучает так же, как раскаленное твердое тело при той же температуре. Поверхность в 1 см² такой волны излучает в 1 с в 36 раз больше энергии, чем равная поверхность на Солнце. Напомним, что температура излучающего слоя Солнца 5700 °С.

При ядерном взрыве образуются ярко светящиеся ударные волны, огненные шары. Если огненный шар с температурой 14000 °С виден

под углом в 5,3 раза большим, чем солнечный диск, то он светит ярче тысячи солнц ($36 \cdot 5,3^2 > 1000$). Но столь яркое свечение длится недолго, меньше сотой доли секунды.

50.4 Задача о сильном взрыве в атмосфере Распространение сильных ударных волн от «точечного» источника в атмосфере (например, при ядерном взрыве) подчиняется некоторому закону подобия (см. § 46.1). Это следует понимать так, что если, скажем, радиус образующейся при взрыве сферической ударной волны увеличивается вдвое или втрое, то распределение всех газодинамических величин внутри волны остается тем же самым, если принять соответствующие величины на фронте волны за единицы измерения.

Выясним причины того, почему *сильные сферические ударные волны являются самоподобными*. Для этого рассмотрим локальный взрыв с выделением большого количества энергии E . Сам газ (атмосфера), в котором происходит распространение ударной волны высокой интенсивности, будем считать идеальным, имеющим плотность ρ . В этой задаче заведомо можно пренебречь начальной энергией и давлением воздуха. Область рассматриваемых расстояний R от «точки» взрыва (начала координат) такова, что ударные волны остаются еще достаточно сильными.

Нам надо найти закон распространения ударной волны, т. е. зависимость R от времени t при заданных параметрах E и ρ . Попробуем для этого составить безразмерную комбинацию из указанных величин. Прежде всего, так как энергия выражается в джоулях ($1 \text{ Дж} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$), а плотность в килограммах на метр кубический, то в искомое соотношение E и ρ должны входить так, чтобы килограммы сократились. Естественно поэтому взять отношение

$$\left[\frac{E}{\rho} \right] = 1 \frac{\text{м}^5}{\text{с}^2}.$$

Остается лишь домножить это отношение на t^2/R^5 , чтобы получить искомую безразмерную комбинацию

$$\left(\frac{Et^2}{\rho R^5} \right) \sim 1. \quad (*)$$

Замечательно то, что такая комбинация единственная и это обеспечивает выполнение закона подобия при распространении сильных сферических ударных волн от точечного источника. Из (*) следует, что

$$R \sim \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (50.31)$$

Для скорости распространения ударной волны находим

$$v = \frac{dR}{dt} \sim \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/5} t^{-3/5}. \quad (50.32)$$

Из (50.29) имеем для давления в сильной ударной волне

$$p = \frac{2}{\gamma + 1} \rho v^2$$

(в данном случае нами опущены все индексы) или после подстановки полученного здесь выражения для скорости

$$p \sim (E^{2/5} \rho^{3/5}) t^{-6/5}. \quad (50.33)$$

Сама же плотность, согласно (50.27), остается постоянной во времени.

Прямая экспериментальная проверка соотношений (50.31) — (50.33) измерениями при ядерных взрывах подтвердила их с хорошей точностью.

§ 51. ЭФФЕКТЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ КУМУЛЯЦИИ

В сплошных средах возможны явления так называемой *кумуляции*, в которых объемная плотность энергии самопроизвольно растет. При этом расчетные методы показывают, что возрастание плотности энергии могло бы продолжаться неограниченно. Однако из-за неустойчивости кумуляция прекращается.

К явлениям кумуляции относят схлопывание пузырьков в жидкости, сходящиеся ударные волны (образующие кумулятивные струи), выход ударных волн на поверхность звезды и др.

51.1 Кумулятивные струи Рассмотрим серию образцов зарядов взрывчатого вещества с одинаковой массой, но разной формы (рис. 51.1). Образец 1 сплошной, в образце 2 сделана коническая выемка, в образце 3 эта выемка облицована металлом (рис. 51.2). Установим заряды 1 и 2 на броневой плите, а заряд 3 расположим на некотором расстоянии от плиты. Произведем взрыв всех трех зарядов; результат взрыва показан на рис. 51.1.

При взрыве третьего заряда образуется тонкая металлическая струя с космической скоростью (~ 10 км/с). Схема ее формирования довольно проста: взрыв производит обжатие металлического конуса; ударное схлопывание оболочки конуса переводит металл в жидкое состояние; энергия концентрируется (кумулируется) вдоль оси конуса; по направлению оси происходит выброс кумулятивной жидкометаллической струи.

Как можно подойти к количественному рассмотрению этого явления? Прежде всего необходимо сделать ряд числовых оценок. Пусть коническая оболочка выполнена из железа. При взрыве скорость пластин оболочки $v \approx 1$ км/с. Для оценки давления, возникающего при столкновении пластин, воспользуемся формулой для давления в

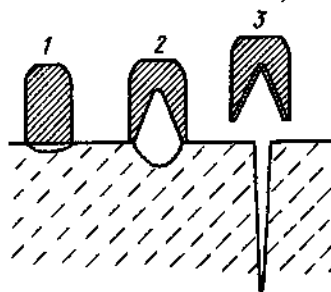


Рис. 51.1

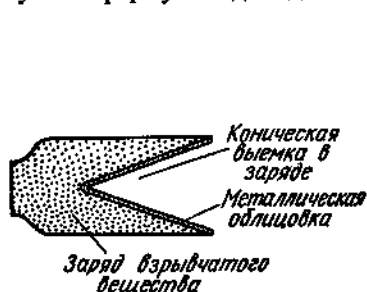


Рис. 51.2

сильной ударной волне

$$p = \rho_0 Dv, \quad (51.1)$$

где ρ_0 — начальная плотность вещества; D — скорость распространения фронта ударной волны; v — массовая скорость (скорость движения сжатого вещества). Если интересоваться только порядками величин, то $D \sim u$, где u — скорость звука в веществе, тогда $p \sim \rho_0 u^2$.

Для железа $u = 5$ км/с, $\rho_0 = 8 \cdot 10^3$ кг/м³; в итоге

$$p \sim 8 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^{10} \text{ Па} = 4 \cdot 10^5 \text{ атм.}$$

Кратко остановимся на способе получения формулы (51.1). Условия (50.6) — (50.8) на ударном разрыве записаны в системе отсчета, связанной с фронтом. Перейдем в систему отсчета, в которой вещество перед фронтом покоится, тогда вместо переменных v_1 и v_2 появятся D и $D - v$. В случае сильной ударной волны ($p_1 = 0$) равенства (50.6) и (50.7) переписутся в виде

$$\rho_1 D = \rho_2 (D - v); \quad (51.2)$$

$$\rho_1 D^2 = p_2 + \rho_2 (D - v)^2. \quad (51.3)$$

Из (51.3) при учете (51.2) получается искомое соотношение (51.1), в котором опущены все индексы.

Ранее мы делали оценки механической прочности ионных бездефектных кристаллов и получили значение $\sim 10^{10}$ Н/м². В случае реальных образцов железа значение прочности значительно ниже. Таким образом, в результате столкновения железных пластин они перейдут в жидкое состояние.

Что касается относительного сжатия металлической жидкости, то оценку его значения можно сделать по соотношению

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{v}{D} \approx \frac{v}{u} = \frac{1}{5} = 0,2;$$

оно следует из равенства (51.2). Таким поджатием можно пренебречь и считать образовавшуюся металлическую жидкость несжимаемой.

Приведенный анализ позволяет выбрать приближение идеальной несжимаемой жидкости. Кинематика движений при образовании кумулятивной струи описывается обычным уравнением Бернулли.

Воспользуемся представлениями о лабораторной системе отсчета (λ -системе) и системе центра инерции (ψ -системе). Чтобы пояснить их различие, рассмотрим распад частицы. Пусть в λ -системе до распада первичная частица двигалась со скоростью V . В ψ -системе эта частица покоится, т. е. полный импульс равен нулю. Обозначая скорости образовавшейся распадной частицы в λ - и ψ -системах соответственно v_λ и v_ψ , можно написать обычную связь

$$v_\lambda = v_\psi + V.$$

Схема образования кумулятивной струи дана на рис. 51.3, а в λ -системе. Согласно диаграмме сложения скоростей (рис. 51.3, б)

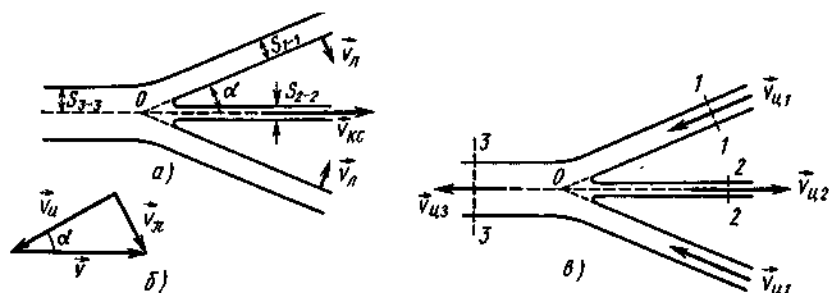


Рис. 51.3

схема течений в ψ -системе, связанной с точкой O , выглядит так, как это изображено на рис. 51.3, а. Струи из сечений 1-1, встретясь в точке O , порождают потоки влево и вправо. Для всех этих стационарных течений, как указывалось, справедливо уравнение Бернулли. Например, по отношению к сечениям 1-1 и 2-2 возможна запись

$$p_1 + \rho v_{u1}^2/2 = p_2 + \rho v_{u2}^2/2.$$

При этом для самих сечений 1-1 и 2-2, удаленных от зоны столкновения, можно положить $p_1 = p_2 = 0$, т. е. $v_{u1} = v_{u2}$. То же самое можно сказать и о сечениях 1-1 и 3-3; другими словами, $v_{u1} = v_{u3}$. Таким образом, в ψ -системе скорости всех трех струй одинаковы*.

В λ -системе скорость кумулятивной струи

$$v_{к.с} = v_{\lambda} + V,$$

где V — скорость точки O . Согласно же рис. 51.3, б имеем $V = v_{\lambda}/\sin \alpha$, а $v_{\lambda} = v_{\lambda}/\tan \alpha$; в итоге

$$v_{к.с} = \frac{v_{\lambda}}{\tan \alpha} + \frac{v_{\lambda}}{\sin \alpha} = v_{\lambda} \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (51.4)$$

Из полученного соотношения видно, что при малых углах α столкновения пластин скорость кумулятивной струи может быть весьма велика (при $\alpha \rightarrow 0$ $v_{к.с} \rightarrow \infty$).

Получим выражения для сечения кумулятивной струи и доли уносимой ею массы. Исходим из условия сохранения массы и сохранения горизонтальной составляющей импульса. Тогда в ψ -системе секундные расходы массы для всех трех сечений связаны следующим образом:

$$\rho v_{u1} S_{1-1} = \rho v_{u2} S_{2-2} + \rho v_{u3} S_{3-3}.$$

Для горизонтального компонента импульса, отнесенного к единичному времени, получим

$$-\rho S_{1-1} v_{u1}^2 \cos \alpha = \rho S_{2-2} v_{u2}^2 - \rho S_{3-3} v_{u3}^2.$$

* Симметрия задачи позволяет ограничиться рассмотрением трех струй

Последние два соотношения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S_{1-1} &= S_{2-2} + S_{3-3}; \\ -S_{1-1} \cos \alpha &= S_{2-2} - S_{3-3}. \end{aligned}$$

Сложив их, получим для доли массы, уносимой кумулятивной струей, выражение

$$\frac{S_{2-2}}{S_{1-1}} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \quad (51.5)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ эта доля становится сколь угодно малой.

Несмотря на указанное обстоятельство, кумулятивная струя забирает основную часть энергии пластин. Действительно, взяв выражения для энергии движения участков единичной длины пластин и кумулятивной струи и составив их отношение, получим

$$\frac{E_{x.c}}{E_n} = \frac{\rho S_{2-2} v_{x.c}^2}{\rho S_{1-1} v_n^2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad (51.6)$$

Здесь мы воспользовались формулами (51.4) и (51.5).

Из (51.6) видно, что при $\alpha \rightarrow 0$ отношение $(E_{x.c}/E_n) \rightarrow 1$. При этом плотность энергии в кумулятивной струе неограниченно возрастает, в этом легко убедиться из (51.4).

Итак, рассмотрение явления образования кумулятивных струй в рамках приближения идеальной несжимаемой жидкости приводит к неограниченной кумуляции энергии. Учет сжимаемости делает кумуляцию ограниченной.

Кумулятивные струи находят применение в физическом эксперименте, в частности в физике высоких давлений. Ряд астрофизических явлений большого масштаба удастся понять, применив к ним модель явления кумуляции. В военной технике кумулятивные снаряды применяются уже давно. Их действие — это узкие и глубокие пробоины в броне. Кумулятивная водяная струя от «гидропушки» легко разбивает на куски твердые породы, в частности каменноугольные пласты, что значительно облегчает его добычу.

51.2 Схлопывание пузырьков в жидкости Если в жидкости образована пустая сферическая полость, то под влиянием окружающего давления она будет стремительно заполняться. Пусть при этом движение жидкости сферически симметрично. Сама жидкость невязкая и характеризуется плотностью ρ и давлением на границе пузырька p_0 . Тогда начальная полная энергия

$$E = p_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3,$$

где R_0 — исходный радиус пузырька.

Из простейших размерностных соображений ясно, что в процессе схлопывания пузырька давление p и скорость v границы полости изменяются с изменением радиуса R по законам

$$p \sim \frac{E}{R^3} \text{ и } v^2 \sim \frac{E}{\rho R^3}.$$

В результате при $R \rightarrow 0$ (фокусировка полости) скорость движения границы и давление неограниченно возрастают. Вместе с ростом давления происходит концентрация (кумуляция) плотности энергии.

Задача о схлопывании пустой сферической полости в жидкости связана с задачей о сильном взрыве в атмосфере (см. § 50.4). Процесс схлопывания является обращением во времени процесса распространения фронта ударной волны при сильном взрыве. В итоге можно считать, что радиус полости изменяется со временем t как

$$R \sim \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/5} (-t)^{2/5},$$

а скорость границы полости

$$v \sim \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/5} (-t)^{-3/5};$$

при этом за время $t = 0$ принят момент фокусировки.

Мы рассмотрели схлопывание пустой полости в несжимаемой невязкой жидкости и пришли к явлению неограниченной кумуляции. Может быть, это случайное следствие идеализации постановки задачи? Последовательный учет вязкости среды привел к выводу, что вязкость устраняет кумуляцию только в очень маленьких пузырьках (например, у воды размеры таких пузырьков должны быть меньше $0,8 \cdot 10^{-6}$ м). Учет сжимаемости не устраняет неограниченной кумуляции. Несомненно, предел кумуляции в этом явлении устанавливает атомизм, ибо при размерах пузырьков, сравнимых с атомными, среда не может рассматриваться как сплошная и кумуляция прекращается.

Явление схлопывания пузырьков в жидкости представляет существенный практический интерес, ибо оно является одной из причин быстрого износа лопастей гребных винтов и гидротурбин, работающих с кавитацией (схлопывание пузырьков на металлической поверхности интенсивно разрушает ее). О кавитации речь будет идти в дальнейшем.

51.3 Сходящиеся сферические и цилиндрические ударные волны Другим случаем неограниченной кумуляции являются сходящиеся сферические и цилиндрические ударные волны. Здесь в процессе фокусировки плотность вещества всюду ограничена, но скорость, давление и температура стремятся к бесконечно большим значениям.

Сходящиеся ударные волны образуют вблизи центра огромные температурные градиенты и это ведет к диссипации (рассеянию) энергии за счет теплопроводности среды (и излучения). Однако последнее обстоятельство, как показывают расчеты, не может ограничить кумуляцию. Необходимы поиски других механизмов, ведущих к ограничению кумуляции.

51.4 Роль неустойчивостей в ограничении кумуляции В процессе кумуляции малые возмущения могут повести к ограничению самой кумуляции. Простым и наглядным примером может явиться следующий. Тонкая цилиндрическая оболочка из идеальной жидкости, медленно вращаясь, быстро сходится к оси. В этом процессе схождения сама оболочка постепенно утолщается (ибо вещество здесь не

исчезает), вращение усиливается (из-за сохранения момента импульса). Рост центробежной силы не позволяет оболочке дойти до оси, а далее следует разлет оболочки. Таким образом, в этом случае неограниченной кумуляции нет, и причиной тому явилось малое возмущение в виде слабого вращения, которое постепенно забрало всю энергию основного движения.

Рассмотренная задача о сходящейся к оси жидкой цилиндрической оболочки получила интересное практическое применение при создании сверхсильных магнитных полей. Медная оболочка в форме цилиндра (лайнер) окружается с внешней стороны зарядом взрывчатого вещества (ВВ). Внутри цилиндра на краткое время создается максимально возможное продольное магнитное поле и в этот же момент производится подрыв ВВ. Ударное действие ВВ на лайнер переводит его в жидкое состояние. Жидкая медь обладает высокой электропроводностью, и магнитное поле практически не может проникать в стенки лайнера (этот эффект будет нами рассмотрен в дальнейшем). В результате осевого сжатия лайнера напряженность магнитного поля повысится во столько раз, во сколько уменьшится объем внутренней полости лайнера (практически на два порядка). Таким путем удалось создать импульсные магнитные поля с напряженностью в $10^8 - 10^9$ А/м.

51.5 Выход ударной волны на поверхность звезды Рассмотренные явления кумуляции имеют особое значение в астрофизических вопросах. Когда в центральных областях звезды происходят внутренние возмущения, сопровождающиеся резким повышением давления, образуется ударная волна, которая распространяется от центра к периферии и выходит на поверхность. Распространение ударной волны по газу с падающей до нуля плотностью, как это имеет место вблизи поверхности, сопровождается концентрированием (кумуляцией) энергии. Ведь здесь энергия сообщается неограниченно уменьшающейся массе вещества, так что удельная энергия — энергия вещества единичной массы — неограниченно растет.

Имеется физическое сходство между процессами кумуляции при распространении ударной волны по газу с падающей до нуля плотностью и при сжатии ударной волны в центр. Различие состоит только в причинах уменьшения массы, на которую падает энергия. В первом случае масса уменьшается вследствие уменьшения плотности газа, во втором — вследствие уменьшения объема.

При вспышке сверхновой звезды наблюдается сброс ее оболочки и, по-видимому, образование потока частиц самых высоких энергий, вплоть до $E = 10^{17}$ эВ. Эти явления могут быть поняты в рамках рассмотренных представлений о кумуляции энергии.

В области «земных приложений» эффекты кумуляции могут оказаться существенными при создании экстремальных состояний вещества и электромагнитного поля (достижение высоких давлений, температур, напряженностей полей). Например, в такой важной и сложной проблеме, как управляемый термоядерный синтез, существует целый ряд направлений, основанных на кумуляции энергии. К ним относятся, в частности, импульсные системы, использующие для инициирования термо-

ядерной реакции сходящиеся в центр (на дейтерий-тритиевую мишень) лазерные пучки, в другом варианте — это сходящиеся релятивистские электронные пучки. К этим работам примыкает и быстрое ударное сжатие водородной плазмы внешним магнитным полем.

§ 52. КАВИТАЦИЯ В ЖИДКОСТИ

В жидкости под влиянием естественного космического корпускулярного фона излучения (это один из факторов) всегда существуют микроскопические пузырьки размерами $\sim 10^{-9} \div 10^{-8}$ м. Понижение давления над жидкостью может вызвать интенсивное парообразование внутри пузырьков и привести к их росту*. Росту пузырьков способствует и растворенный в жидкости газ (в обычных условиях это воздух).

Рост пузырьков сменяется их схлопыванием. При этом весь процесс занимает время $\sim 10^{-3}$ с. Во время схлопывания образуется ударная волна, сопровождающаяся резким повышением температуры и давления газа, содержащегося в полости пузырька. Оценки и измерения показывают, что в окружении пузырька перепад температур и давлений может составить соответственно $(500 \div 800)^\circ\text{C}$ и 4000 атм. Сам газ, находящийся в полости пузырька, под влиянием скачка уплотнения может испускать слабое видимое излучение.

При обтекании тел достаточно скоростными потоками жидкости ($\sim 40 \div 50$ м/с) в местах наибольшей скорости образуется пониженное давление и это может вызвать местное кипение в жидкости, сопровождающееся ростом и последующим схлопыванием пузырьков. Это явление в гидродинамике называют *кавитацией*.

Заметим, что беспримесная жидкость, очищенная от микроскопических пузырьков, может выдерживать отрицательные давления (всестороннее растяжение без разрыва сплошности среды) порядка 10^3 атм. Реальные же жидкости, содержащие мельчайшие газовые пузырьки, способны выдерживать отрицательные давления лишь в несколько десятков атмосфер.

Кавитация в быстротекущей жидкости может вести к образованию больших полостей (каверн) в местах пониженного давления и их «самоликвидации» в местах повышенного давления. Кавитация изменяет характер течения и вызывает уменьшение подъемной силы и рост сопротивления подводных крыльев высокоскоростных судов. Конструкционный материал гребных винтов, лопастей водяных турбин и скоростных насосов под действием кавитации подвергается эрозии и разрушению.

При количественном изучении кавитации можно исходить из уравнения Бернулли

$$p + \rho v^2/2 = \text{const},$$

соответствующего приближению идеальной несжимаемой жидкости. Для стационарных течений на основе этого уравнения вводят безраз-

* Здесь возможна аналогия с пузырьковыми камерами, служащими для регистрации частиц высоких энергий.

мерный параметр (число кавитации)

$$\sigma = \frac{p - p_{кр}}{\rho v^2 / 2}, \quad (52.1)$$

где $p_{кр}$ — давление, при котором возникает кавитация. Обычно $p_{кр}$ принимают равным давлению насыщенных паров жидкости. Именно в этом последнем случае, как известно, начинается кипение жидкости.

Ясно, что если в потоке жидкости давление $p \simeq p_{кр}$, то кавитационные явления развиты хорошо. В этом случае за телом образуется единая полость — *каверна*, содержащая пары и газы. Согласно (52.1) такие режимы обтекания тел соответствуют числам кавитации σ , близким к нулю. При малых σ размеры каверны могут значительно превосходить размеры тел.

Легко оценить, какая сила сопротивления F_k действует на возникшую кавитационную каверну, имеющую площадь поперечного сечения S_k . Если воспользоваться полученным нами ранее общим соотношением

$$F = C_p v^2 S,$$

то для кавитационного коэффициента сопротивления можно написать

$$C_k = F_k / (\rho v^2 S_k). \quad (52.2)$$

Если заметить, что в (52.1) $[p - p_{кр}] \sim F_k / S_k$, то (52.2) перепишется в виде

$$C_k = k \sigma,$$

где k зависит от типа течения и принимает значения $k = \pi/4$ для плоских течений и $k = (0,9 \div 0,95)$ для осесимметричных течений.

Явления кавитации могут искусственно создаваться тем или иным способом, например путем подачи в область разрежения около тела какого-либо газа. Это делается для того, чтобы в гидродинамических трубах моделирование явления кавитации производить не при скоростях потока больше 50 м/с, как это бывает в естественных условиях, а при скоростях лишь в несколько метров в секунду. При таком моделировании необходимо, чтобы искусственные и естественные каверны существовали при одинаковых числах кавитации* σ .

§ 53. ЯВЛЕНИЯ В СИЛЬНО РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ

Представления о процессах переноса в газах, таких, как диффузия, вязкость, теплопроводность, развитые в предыдущих параграфах, справедливы в том случае, если длины свободных пробегов молекул $l \ll L$. Под L можно разуметь размеры сосуда, в котором находится газ или размеры тела, движущегося в газе.

Рассмотрим газ в условиях, когда $l \gg L$; такой газ называют *сильно разреженным*. Изучим процесс теплопередачи в сильно разреженном газе. Для этого, например, поместим в сосуд две пластины с

* Для полного подобия необходимо также равенство чисел Рейнольдса Re и ряда других.

различными температурами T_1 и T_2 и находящиеся на расстоянии L друг от друга.

Для неразреженного газа, как известно, механизм передачи теплоты сводится к случайному блужданию носителей энергии — молекул; это «тернистый путь» через многократные межмолекулярные столкновения. Другой механизм складывается для сильно разреженного газа: здесь межмолекулярные столкновения практически отсутствуют, молекулы испытывают рассеяние непосредственно на пластинах. Получая энергию от пластины с более высокой температурой и отдавая часть своей энергии пластине с более низкой температурой, молекулы осуществляют передачу энергии.

Говорить о градиенте температуры в пространстве между пластинами для сильно разреженного газа не имеет смысла. Однако, по аналогии с соотношением $j_E = -\lambda dT/dx$, вводится

$$j_E = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L}. \quad (53.1)$$

Как оценить λ в случае сильно разреженных газов? Исходим из выражения (45.11) $\lambda \sim nc_p vl$, в котором совершаем переход

$$l \rightarrow L, \quad (53.2)$$

тогда $\lambda \sim nc_p vL. \quad (53.3)$

Отсюда видно, что λ в случае сильно разреженных газов не является характеристикой самого газа, поскольку зависит от геометрии сосуда (через L).

Еще одним аргументом в пользу вышесказанного является следующее. В неразреженных газах теплопроводность λ не зависит от плотности n числа частиц в газе. Действительно,

$$\lambda \sim nc_p vl \sim nc_p v \frac{1}{n\sigma} \sim c_p \frac{v}{\sigma};$$

здесь мы воспользовались соотношением $l \sim 1/(n\sigma)$, где σ — эффективное сечение взаимодействия молекул. В сильно разреженных газах указанная зависимость l от n отсутствует, ибо имеет место (53.2), а значит, и (53.3). Согласно же последнему изменению плотности n числа частиц ведет к изменению λ .

На практике описанная ситуация может выглядеть следующим образом. Станем измерять теплопроводность газа, заключенного между двумя стенками с различными температурами. Начнем измерения при нормальном атмосферном давлении. Постепенная откачка газа из пространства между стенками не влияет на теплопроводность. Однако по мере разрежения газа мы достигаем момента, когда длины пробега молекул сравниваются с расстоянием между стенками. При дальнейшей откачке газа теплопередача быстро падает.

Указанный эффект используют в теплоизолирующих сосудах Дьюара. Знакомый нам термос для хранения горячих или холодных напитков, сосуды для сжиженных газов имеют двойные стенки с достаточным вакуумом между ними.

Внутреннее трение в сильно разреженных газах испытывает аналогичные изменения. Рассмотрим две твердые поверхности, движущиеся друг относительно друга со скоростью u . В пространстве между поверхностями находится сильно разреженный газ. Тогда вместо (44.1) запишем

$$\Pi = -\eta \frac{u}{L}, \quad (53.4)$$

где Π — сила трения, действующая на пластину с единичной поверхностью; L — расстояние между пластинами; η — динамическая вязкость.

Оценка η основана на (45.12) с заменой l на L , т. е.

$$\eta \sim nmvL. \quad (53.5)$$

На тело, движущееся в сильно разреженной атмосфере, действует сила сопротивления

$$F \sim \Pi S \sim (nmv)uS, \quad (53.6)$$

где S — площадь поверхности тела; u — его скорость; (nmv) — плотность молекулярного импульса, передаваемого телу.

Любопытные эффекты можно наблюдать в двух сообщающихся сосудах с сильно разреженными газами, находящихся при различных температурах. В этом случае для неразреженных газов механическое равновесие установится при одинаковом давлении в обоих сосудах (только тогда не будет перетекания газа). А как будет формироваться равновесие в случае сильно разреженных газов?

Поскольку размеры отверстия малы по сравнению с длиной пробега молекул, молекулы должны покидать сосуд независимо одна от другой. При этом молекулы, выходящие из отверстия, движутся с той скоростью, с какой они подходят к отверстию. В таком «молекулярном пучке» число молекул, покидающих сосуд за 1 с, равно Snv , где S — площадь отверстия. Так как $n = p/(kT)$, а $v \sim \sqrt{kT/m}$, то

$$Snv \sim \frac{pS}{\sqrt{mkT}}. \quad (53.7)$$

Механическое равновесие сильно разреженных газов наступит, когда числа молекул, покидающих сосуды за 1 с, станут одинаковыми. Другими словами, это случится, когда суммарный перенос вещества в обоих направлениях через соединительный канал будет отсутствовать. В итоге получим

$$p_1/\sqrt{T_1} = p_2/\sqrt{T_2}. \quad (53.8)$$

Заметим, что в случае неразреженного газа мы имели бы соотношение

$$p_1 T_1 = p_2 T_2.$$

На формуле (53.7) основан один из методов разделения изотопов. Обычно поступают следующим образом: элемент переводят в газообразное состояние, причем сам газ — это естественная смесь изотопов

данного элемента. Из сосуда, заполненного разреженной газовой смесью, через малое отверстие выходит «атомный пучок». При этом, согласно (53.7), пучок обогащен легкими изотопами.

§ 54. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ

При температурах, близких к абсолютному нулю, в свойствах жидкости начинают проявляться квантовые эффекты. В действительности речь идет об единственной жидкости — гелии, точнее, об его жидком изотопе ^4He .

Условие существования жидкого состояния может быть записано в виде

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{m} \sim \langle U \rangle, \quad (54.1)$$

где p — импульс частицы. Из (54.1) следует, что при достаточно низких температурах (классический импульс p частицы пропорционален температуре) оно заведомо нарушено. Если же средняя энергия взаимодействия $\langle U \rangle$ атомов вещества весьма мала, то могут быть достигнуты настолько низкие температуры, когда (54.1) должно замениться на

$$\frac{\hbar^2}{mr^2} \sim \langle U \rangle; \quad (54.2)$$

здесь мы воспользовались квантовым соотношением неопределенностей (22.2). В (54.2) r — межатомное расстояние, которое становится порядка длины волны вероятности, связанной с тепловым движением атомов. Для жидкого гелия энергия связи $\langle U \rangle = -\text{const}/r^6$ на один атом (см. конец § 29) имеет значение $2,5 \cdot 10^{-3}$ эВ. Числовая оценка выражения $\hbar^2/m_{\text{He}}r^2$ для атомов гелия при $r \sim 10^{-10}$ м дает тот же результат. Таким образом, условие (54.2) для жидкого гелия выполняется, причем вплоть до абсолютного нуля температур, ибо температура в (54.2) не входит.

То, что жидкий гелий не замерзает при $T = 0$ К, есть квантовое явление. Но это еще не все. Спин ядер ^4He целочисленный (в отличие от ядер ^3He), а это означает, что атомы ^4He — бозе-частицы (см. § 25.2). Значительная доля таких частиц при $T = 0$ К может пребывать в основном (наинизшем) квантовом состоянии. Другими словами, любые макроскопические движения такой жидкости, которые не выводят ее из основного состояния, не сопровождаются изменениями энергии и импульса жидкости в целом, т. е. жидкость не проявляет абсолютно никакой вязкости (*сверхтекучесть*).

Как строится гидродинамика квантовой жидкости? Поскольку квантовая жидкость, как уже отмечалось, является системой, в которой макроскопическая доля частиц находится в основном квантовом состоянии, то естественно принять, что сверхтекучая жидкость состоит как бы из двух взаимопроникающих жидкостей: нормального компонента, ведущего себя классически, т. е. как обычная вязкая жидкость, и собственно сверхтекучего компонента, представляющего собой совокупность макроскопического числа частиц, согласованно движущихся в едином квантовом состоянии. При этом необходимо допустить, что

между этими обеими частями массы жидкости «нет трения», т. е. не происходит передачи импульса между указанными компонентами жидкости.

Для описания движения квантовой жидкости необходимы восемь переменных: плотность ρ_n нормального компонента, давление p , скорость v_n нормального компонента (см. § 42) и дополнительно скорость v_s сверхтекучего компонента (при этом имеется в виду, что плотность ρ_s сверхтекучего компонента определяется из равенства $\rho_s = \rho - \rho_n$, ρ — полная плотность жидкости). Так как в уравнения движения квантовой жидкости входят две скорости, ее гидродинамику называют *двухскоростной*. По той же причине более корректно говорить о двух видах движений в квантовой жидкости, каждое из которых связано со своей эффективной массой. При этом, конечно же, эффективные массы с плотностями ρ_n и ρ_s являются функциями температуры ($\rho_n = 0$ и $\rho_s = \rho$ при $T = 0$ К).

Остановимся на ряде свойств течений квантовой жидкости ^4He . В опытах по протеканию жидкого гелия сквозь капилляры и щели (шириной в 10^{-6} м) никакой вязкости не обнаружили. В опытах же по измерению вязкости жидкости с помощью крутильных колебаний диска, помещенного в нее, получены конечные значения силы трения. Ясно, что в экспериментах с капиллярами проявляется сверхтекучее движение в жидкости, а затухание колебаний диска подтверждает наличие нормального движения.

Существование двух движений в жидком гелии* особенно эффектно демонстрируется в опыте по вращению цилиндрического сосуда, наполненного ^4He . Стенки вращающегося цилиндра увлекают только нормальную часть жидкости, сверхтекучая часть остается неподвижной.

Другой особенностью сверхтекучего движения в квантовой жидкости является его неспособность к теплопереносу. Дело в том, что сверхтекучая часть эффективной массы, связанная с соответствующим движением, совершенно не возбуждена, она как бы находится при абсолютном нуле температуры. Элементарные тепловые возбуждения формируют нормальную часть соответствующей эффективной массы, а нормальное макроскопическое движение представляет собой механизм теплопроводности в квантовой жидкости. Отсюда ясно, почему теплопроводность жидкого гелия имеет рекордно высокие значения.

Указанная особенность жидкого гелия наглядно проявляется в так называемом *термомеханическом эффекте*, заключающемся в том, что при вытекании гелия из сосуда по капилляру часть жидкости, остающаяся в сосуде, нагревается.

Таким образом, сверхтекучее течение квантовой жидкости ^4He не обладает ни вязкостью, ни теплопроводностью, т. е. налицо все свойства идеальной жидкости, течения которой должны быть безвихревыми. Тело, помещенное в поток идеальной жидкости, не испытывает силы сопротивления с ее стороны.

* Речь идет о жидком гелии, испытавшем фазовый переход второго рода. Гелий конденсируется при $T = 4,2$ К; указанный же переход жидкость — жидкость имеет место при критической температуре перехода $T_K \approx 2,2$ К.

По достижении некоторых критических скоростей в жидком гелии возникают квантованные макроскопические вихри. Дело в том, что момент импульса всякой квантовомеханической системы (в данном случае всей жидкости) может изменяться лишь на целое число. В результате

$$m_{He}vr = n\hbar, \quad (54.3)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; r — расстояние атома от оси вихря; v — линейная скорость атома в вихре. Квантованный вихрь может охватить весь объем жидкости.

Уравнения движения вращающегося жидкого гелия содержат постоянную Планка \hbar . Обычно же \hbar входит в соотношения, описывающие микроскопические объекты. Таким образом, движение сверхтекучей жидкости служит демонстрацией квантовых явлений в макроскопических масштабах.

§ 55. ОБОБЩЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Одно из обобщений гидродинамики было рассмотрено выше — это двухскоростная гидродинамика квантовой жидкости.

В последние годы в физике атомного ядра возник новый раздел — *релятивистская ядерная физика*. Его задачей является изучение свойств ядерного вещества при предельно высоких энергиях. Само понятие ядерного вещества имеет какой-то смысл только для тяжелых ядер, содержащих сотни нуклонов. Крайне высокие возбуждения таких ядер могут возникнуть при их столкновении друг с другом.

Теоретические оценки показывают, что для ядерного вещества «скорость звука», определяемая через его «сжимаемость», составляет $(0,1 + 0,2)$ с. Если относительная скорость сталкивающихся тяжелых ядер превышает скорость распространения звука в ядерном веществе, то в образующемся составном сверхтяжелом ядре может возникнуть уплотнение, аналогичное ударной волне в макроскопической среде. Поставленные эксперименты показали, что гидродинамические эффекты при сверхзвуковых столкновениях тяжелых атомных ядер существуют. При этом для описания этих эффектов необходимо релятивистское обобщение гидродинамики.

В указанных экспериментах начались поиски новых форм ядерного вещества, которые могут возникнуть в экстремальных условиях — при предельно высоких температурах и больших сжатиях. Речь идет о фазовых переходах в ядерном веществе, сопровождающихся возникновением сверхплотных состояний вещества ядер. В экспериментах экстремальные условия создаются при столкновении тяжелых ионов, ускоренных до релятивистских энергий. В таких экспериментах получены состояния ядерного вещества с температурой порядка 10^{12} К. Однако пока не найдено способа определения плотности ядерного вещества во время столкновения, хотя при энергиях 10^8 эВ на нуклон налетающего ядра может быть получено уплотнение в несколько раз. Для восстановления же уравнения состояния ядерного вещества необходимо знать две величины — температуру и плотность.

Уравнение состояния нуклонной материи необходимо знать в космологии (анализ первоначальных стадий эволюции Вселенной), при исследованиях гравитационного коллапса *, при изучении нейтронных звезд и для развития самой нуклонной физики (см. гл. IX).

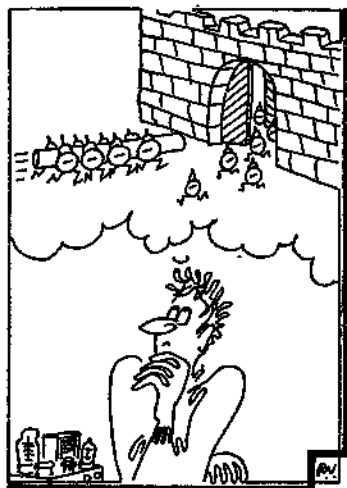
В астрофизике существуют такие крупномасштабные явления, как взрыв сверхновых звезд. Для описания такого рода явлений также требуется использовать представления релятивистской гидродинамики и соответствующей теории ударных волн. В § 50.4 рассматривалась задача о сильном «точечном» взрыве в атмосфере. Вполне корректным будет применить это решение к описанию вспышек сверхновых. Конечно, такое описание не вскрывает механизма самого взрыва, но сопутствующие явления могут быть хорошо поняты.

Изучение поведения высокоионизированного газа — плазмы в магнитных полях — привело к построению так называемой *магнитной гидродинамики* (см. § 68).

* Коллапс есть неуклонное падение вещества массивных астрофизических объектов в их центр после исчерпания внутренних источников ядерной энергии.

ГЛАВА VII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В СРЕДАХ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ, МАГНИТНЫЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА*



§ 56. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

При температурах в несколько кельвин целый ряд металлов и их сплавов обнаруживает удивительное свойство полного исчезновения *электрического сопротивления* (сопротивление — величина обратная проводимости). В течение почти полувека это явление, названное *сверхпроводимостью*, не находило объяснения (его открытие относится к 1911 г.). Создание квантовой механики в 20-х годах нашего века не продвинуло нас в понимании природы сверхпроводимости, хотя стало и ясно, что принципиальные основы для его осмысливания появились. Лишь всестороннее экспериментальное изучение сверхпроводимости дало теоретикам указание на истинный механизм этого явления.

К важнейшим экспериментам такого рода относится обнаружение так называемого *изотопического эффекта* в сверхпроводниках. Если изменить изотопный состав материала сверхпроводника, то критическая температура перехода T_k из *обычного нормального состояния металла* в сверхпроводящее состояние изменится. От массы же атомов сверхпроводника зависит скорость звука в нем. Поэтому представляется разумным предположить, что сверхпроводимость имеет какое-то отношение к взаимодействию электронов и фононов (квантов звука) — см. § 39.5. В самом деле, под действием одного из электронов решетка испытывает деформацию; эта деформация в свою очередь оказывает влияние на другой электрон. В результате эти два электрона взаимодействуют через фонон (помимо обычного кулоновского взаимодействия).

* В этой главе использована система СГС.

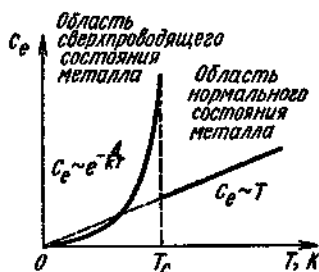


Рис. 56.1

Если кулоновское взаимодействие электронов ведет к их взаимному отталкиванию, то взаимодействие электронов через возбужденные ими же колебания решетки приводит к их притяжению. В некоторых металлах при весьма низких температурах эффективное притяжение электронов превалирует над отталкиванием, тогда образуются пары как бы связанных электронов. Энергия пар, естественно, меньше суммарной энергии свободных электронов.

В результате в энергетическом спектре электронов образуется (вблизи граничной энергии ϵ_F — см. § 39.6) «щель» между основным и возбужденными состояниями. То, что в сверхпроводниках образуется «энергетическая щель», видно из наблюдений за ходом электронной теплоемкости C_e (рис. 56.1). Кстати сказать, приведенные здесь данные по теплоемкости говорят и о том, что сверхпроводящий переход есть фазовый переход второго рода (см. конец § 40).

Спаривание электронов происходит в состояния с суммарным нулевым импульсом и суммарным нулевым спином. Спаренные состояния электронов — это бозе-образования в отличие от одиночных электронов, обладающих полуцелым спином и подчиняющихся статистике Ферми. Поскольку спаренные электроны ведут себя как бозе-частицы, они могут неограниченно скапливаться в основном квантовом состоянии, которое проявляет себя макроскопическим образом. Если в этом состоянии однажды возбудить ток, не разрушая само состояние, то он будет течь вечно (из-за наличия энергетической щели) без всяких внешних источников энергии — это и есть сверхпроводимость. Сверхпроводимость можно рассматривать как сверхтекучесть заряженной электронной жидкости, являющейся в данном случае бозе-жидкостью (см. § 54).

В заключение отметим, что при температурах T_c , достаточных для разрыва связанных пар электронов, происходит переход металла из сверхпроводящего состояния в обычное нормальное (рис. 56.1). Величина kT_c — порядка величины Δ для энергетической щели. Температура T_c пока не превышает 20 К (сплав ниобия с оловом).

§ 57. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ

Состояние свободного электрона определяется заданием только импульса p , а энергия — это функция импульса ($E = p^2/(2m)$). В силу соотношений неопределенности (22.2) задание импульса электрона проводимости делает его координаты неопределенными, т. е. все местонахождения электрона в решетке становятся равновероятными. Другими словами, решетка прозрачна для электронов проводимости; сопротивление идеальной решетки должно быть нулевым (эту ситуацию не следует путать со сверхпроводимостью).

Так как для электрона в решетке пространство обладает симметрией решетки, то он должен описываться не истинным импульсом, а квазиимпульсом (ср. аналогичные рассуждения для фононов, см. § 39.5). Это означает, что волны вероятности, описывающие распространение электронов проводимости в периодическом поле решетки, должны обладать симметрией самой решетки, т. е.

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}),$$

где \mathbf{a} — период решетки.

Существует ряд причин, которые делают невозможным равенство нулю электрического сопротивления металлов, не находящихся в сверхпроводящем состоянии, даже при $T = 0$ К. Во-первых, кристаллические решетки не могут быть строго идеальными; в них всегда содержатся всякого рода дефекты: примеси, вакансии и т. д. Это приводит к тому, что волны вероятности испытывают «рассеяние» на неоднородностях решетки. Во-вторых, существование теплового движения при $T \neq 0$ К приводит к нарушению строгой периодичности решетки, а следовательно, ведет к рассеянию электронных волн на колебаниях решетки. Указанные факторы делают электрическое удельное сопротивление ρ сложной функцией температуры T . Характерная зависимость $\rho(T)$ приведена на рис. 57.1.

Несомненно, что дефекты и тепловые нерегулярности решетки существуют и в случае сверхпроводящего состояния металла, однако здесь они несущественны. Дело в том, что основное состояние, в котором находятся практически все спаренные электроны, проявляет своеобразную «жесткость» по отношению к таким возмущениям, как структурные и тепловые нерегулярности решетки. Ведь вероятность перехода бозе-частицы в низшее квантовое состояние («конденсат») пропорциональна числу частиц в нем, а оно огромно. Все частицы «бозе-конденсата» находятся в одинаковом состоянии, и если «конденсат» как целое движется, образуя ток, то не так-то просто вывести какую-либо бозе-частицу из этого состояния. Напротив, в нормальном металле электроны в зоне проводимости хотя и являются обобщественными, но находятся каждый в отдельном квантовом состоянии (ферми-частицы). Любое возмущение вызывает рассеяние такого независимого электрона и он выходит из игры.

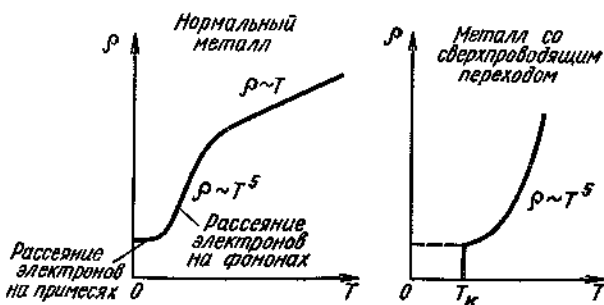


Рис. 57.1

Перейдем к количественному рассмотрению электропроводности нормальных металлов. В целях математической простоты это рассмотрение произведем на полуклассической модели электронного газа. Получающиеся при этом выражения отличаются от соответствующих квантовомеханических значениями числовых коэффициентов, совпадая по порядку величины.

В отсутствие внешнего электрического поля E электронный газ в ионной решетке находится в тепловом равновесии с ней. Наложение электрического поля на кристалл создает неравновесное распределение электронов в решетке. Процессом установления равновесия в системе явится возникновение тока электронов. При этом плотность электрического тока j_e связана с градиентом электрического потенциала

$$\frac{\vec{d}\phi}{dr} \text{ соотношением}$$

$$j_e = -\sigma \frac{\vec{d}\phi}{dr}, \quad (57.1)$$

где σ — удельная электрическая проводимость. Связь (57.1) аналогична связям (44.1), (44.2) и (44.3). Это обстоятельство вполне понятно, поскольку процессы вязкости, теплопроводности и диффузии также являются механизмами перехода в состояние равновесия при возникновении в системе соответствующих градиентов скорости, температуры, концентрации.

Выражение (57.1) может быть преобразовано к виду

$$j_e = \sigma E, \quad (57.2)$$

где E — напряженность электрического поля. При получении (57.2) использовалась формула (14.14).

Связь (57.2), равно как и (57.1), является макроскопической и по существу сугубо приближенной, если иметь в виду не только металлы, а любые произвольные проводники тока зарядов. В металлах соотношение (57.2) выполняется практически при любых напряженностях электрических полей. В газообразных проводниках (плазма), в жидких проводниках (электролиты), в полупроводниковых кристаллах имеет место соотношение (57.1) лишь для малых градиентов потенциала.

Продолжим рассмотрение нормальных металлов. Попытаемся найти выражение для плотности тока, используя микроскопический подход. Исходим из очевидной связи

$$j_e = env_D, \quad (57.3)$$

где e — заряд электрона; n — плотность электронов; v_D — скорость дрейфа (скорость сноса электронов во внешнем электрическом поле); эта скорость накладывается на тепловую скорость электронов и является чрезвычайно малой по сравнению с последней. В свою очередь, скорость дрейфа v_D электронов в электрическом поле E определится из уравнения движения заряда

$$m \frac{v_D}{\tau} \sim eE, \quad (57.4)$$

где m — масса электрона, а τ — время его свободного пробега, имеющее порядок времени релаксации (см. § 41 и 45.1). Подставив значение v_D

из (57.4) в (57.3), найдем

$$j_e \sim \frac{e^2 n \tau}{m} E. \quad (57.5)$$

Сравним теперь микроскопическое (57.5) и макроскопическое (57.2) выражения для плотности тока. Указанное сравнение дает для коэффициента электропроводности соотношение

$$\sigma \sim \frac{e^2 n}{m} \tau. \quad (57.6)$$

В результате кинетический коэффициент σ , отвечающий за перенос заряда, удалось выразить через параметры элементарных носителей.

Удельную электропроводность σ можно выразить и через длину свободного пробега l , если использовать связь, аналогичную (45.1*), т. е.

$$\tau v \sim l, \quad (57.7)$$

где v — тепловая скорость электрона; она порядка фермиевской v_F [см. (39.22)], причем

$$v_F = p_F/m = \hbar m^{1/3}/m. \quad (57.8)$$

В итоге (57.6) запишется как

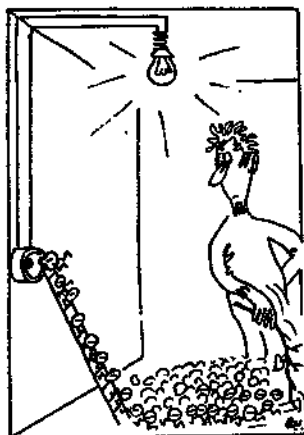
$$\sigma \sim \frac{e^2 n}{m v_F} l. \quad (57.9)$$

С электроном проводимости в решетке происходят различного рода процессы рассеяния: 1) рассеяние электрон — фонон, 2) рассеяние электрон — дефекты и т. д. Каждый тип элементарного взаимодействия характеризуется эффективным сечением рассеяния (см. § 45.1). Полное сечение рассеяния

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_{ef} + \sigma_{e.d} + \dots \quad (57.10)$$

где σ_{ef} — эффективное сечение для рассеяния электрона на коллективных квантовых колебаниях решетки, т. е. рассеяние электрон — фонон; $\sigma_{e.d}$ — сечение рассеяния электрона на дефектах решетки (причем, конечно, сечения рассеяния электрона на неоднородностях разного типа — пустых узлах в решетке — вакансиях или на примесях инородных атомов — несколько различны). В (57.10) роль того или иного процесса рассеяния электрона зависит от области температур. При температурах, близких к абсолютному нулю, когда тепловое движение решетки несущественно, главный вклад вносит процесс рассеяния электронов на дефектах (остаточное сопротивление металла при $T = 0$ К). Незначительное повышение температуры сопровождается довольно быстрым ростом теплового возбуждения решетки и преобладающим становится процесс рассеяния электрона на фононах. Описанная картина представлена графически на рис. 57.1, на котором изображена по существу зависимость $1/\sigma$ (обратная электропроводность) от температуры.

Чтобы все до конца было ясным, сделаем следующее преобразование с (57.10). Исходим из связи (45.1) между эффективным



поперечником рассеяния и соответствующей длиной свободного пробега l , тогда (57.10) переписывается в виде

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_{ef}} + \frac{1}{l_{e,d}}. \quad (57.11)$$

В результате в формулу для удельной электропроводности (57.9) вместо l должно войти соответствующее выражение из (57.11). В (57.9) величины e и m являются константами; v_F , согласно (57.8), от температуры практически не зависит; n , согласно (39.25), является слабо возрастающей линейной функцией T ; в итоге зависимость $l(T)$ является определяющей для изменения удельной электропроводности с температурой.

Интересно сравнить электронную теплопроводность металлов с их электропроводностью. Для этого составим отношение теплопроводности λ к удельной электропроводности σ . Для λ используем общее кинетическое выражение (45.11), а для σ возьмем формулу (57.9). Тогда

$$\frac{\lambda}{\sigma} \sim \frac{C_e v_F l}{\left(\frac{e^2 n}{m v_F} l \right)} = \frac{C_e m v_F^2}{e^2 n}. \quad (57.12)$$

Рассмотрим модель чисто классического электронного газа. В металлах эта модель сработала бы лишь при температурах, превышающих электронную температуру вырождения, см. (39.19). В газовой плазме эта модель вполне реальна. В рамках классического рассмотрения (см. § 37.3 и 37.4) $m v^2 \sim kT$, а $C \sim nk$; тогда (57.12) запишем как

$$\frac{\lambda}{\sigma T} \sim \left(\frac{k^2}{e^2} \right). \quad (57.13)$$

Правая часть в (57.13) есть константа. Соотношение (57.13) известно как закон Видемана — Франца.

§ 58. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Макроскопическое соотношение (57.1) называют законом Ома. Чтобы придать ему обычный вид, применим (57.1) к прямолинейному участку длиной L металлического проводника цилиндрической формы (рис. 58.1). Пусть ток I плотностью j однороден по геометрическому сечению S проводника и направлен вдоль оси симметрии цилиндра. Тогда для градиента потенциала в (57.1) получим

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right| = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L}. \quad (58.1)$$

Поскольку плотность потока заряда j_e имеет размерность Кл/(м²·с), полный поток заряда через сечение S составит

$$I = j_e S = \frac{d \sum e}{dt}. \quad (58.2)$$

Величину I называют *силой тока*.

Перепишем (57.1) в виде

$$j_e = -\sigma \left| \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L} \right|. \quad (58.3)$$

Домножим обе стороны равенства (58.3) на S и учтем тот факт, что потенциал φ падает вдоль направления тока. Используя также (58.2) и известную уже нам связь

$$\sigma = 1/\rho, \quad (58.4)$$

получим

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{(\rho L/S)} = \frac{\Delta\varphi}{R}, \quad (58.5)$$

при этом

$$R = \rho L/S, \quad (58.6)$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление проводника, а R — его полное электрическое сопротивление. Формула (58.5) есть знакомая читателю запись закона Ома, являющегося основным при анализе электрических цепей постоянного тока.

В общем случае сколь угодно сложных цепей постоянного тока их расчет удобно производить на основе **правил Кирхгофа**. Одно из этих правил является выражением закона сохранения заряда в применении к цепям. Рассмотрим какой-либо узел произвольной электрической цепи (рис. 58.2). Из закона сохранения заряда сразу следует соотношение

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

или

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

В общем случае последнее равенство запишется в виде

$$\sum_i I_i = 0. \quad (58.7)$$

Алгебраическая сумма токов в любом узле цепи должна быть нулевой.

Другое правило Кирхгофа есть не что иное, как условие стационарности процесса при прохождении постоянных токов. Оно требует, чтобы

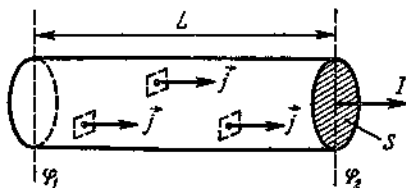


Рис. 58.1

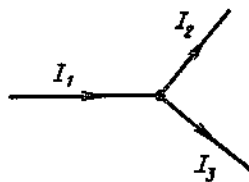


Рис. 58.2

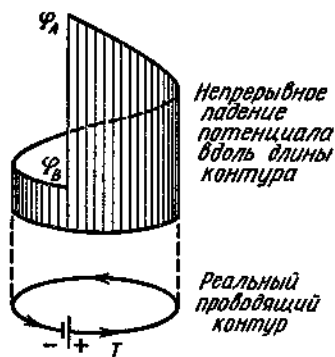


Рис. 58.3

сумма всех разностей потенциалов вдоль замкнутой цепи была равна скачку потенциала в источнике. Обратимся к рис. 58.3. Запишем количественно вышеуказанное условие

$$\sum_{\text{вдоль контура}} (\varphi_i - \varphi_k) = \Delta\varphi_{AB}, \quad (58.8)$$

где $\Delta\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$, или

$$\sum_{\text{вдоль контура}} (\varphi_i - \varphi_k) = \frac{e \Delta\varphi_{AB}}{e} \equiv \mathcal{E}. \quad (58.9)$$

Используя закон Ома в форме (58.5), перепишем (58.9) в виде

$$I \sum_i R_i + Ir = \mathcal{E}, \quad (58.10)$$

где R_i — внешнее сопротивление отдельных участков цепи; r — внутреннее сопротивление источника; \mathcal{E} — э. д. с. источника. Физический смысл \mathcal{E} следует из формул (58.9) и (14.13). Соотношения (58.9) или (58.10) в случае простых цепей применяются ко всей замкнутой цепи. В случае цепей сложных эти соотношения записывают в виде системы уравнений для всех возможных частных контуров в цепи. При этом частные контуры могут содержать или не содержать источники э. д. с.

При расчете сложных цепей число уравнений вида (58.7) для узлов и число уравнений вида (58.9) для замкнутых контуров должно быть равно числу неизвестных параметров цепи.

Остановимся на последнем замечании к этому параграфу. Ток в цепи, возникший за счет поля источника э. д. с., несет с собой поток энергии

$$J = \frac{d \sum e}{dt} \Delta\varphi = I \Delta\varphi = I^2 R. \quad (58.11)$$

В последнем звене этой цепочки формул мы использовали (58.5). Выражение (58.11) — это энергия, переносимая через полное сечение проводника за 1 с, т. е. J есть мощность тока.

Прохождение тока через проводник сопровождается тепловыми эффектами. Поэтому выражение $I^2 R$ иногда называют джоулевыми потерями.

§ 59. ПРОВОДИМОСТЬ ДИЭЛЕКТРИКОВ

59.1 Электроны и дырки. Экситонные состояния В отличие от металлов в диэлектрических кристаллах при $T = 0$ К электронная населенность в зоне проводимости отсутствует (см. рис. 39.10). Причем сама зона проводимости отделена от заполненной зоны энергетической щелью Δ . Отсюда ясно, что все диэлектрики при абсолютном нуле температуры являются изоляторами (удельное электрическое сопротивление $\rho = \infty$). Однако при температурах $T \neq 0$ К свойство проводимости диэлектрических кристаллов в сильнейшей степени зависит от ширины энергетической щели. В самом деле, ведь число носителей

заряда, преодолевающих за счет теплового возбуждения запрещенную зону и появляющихся в зоне проводимости, пропорционально $e^{-\Delta/(kT)}$. В связи с этим кристаллы с широкой запрещенной зоной относят к *диэлектрикам*, а с узкой запрещенной зоной — к *полупроводникам*.

Примером хорошего диэлектрика является алмаз, ширина его энергетической щели $\Delta = 6 \div 7$ эВ. К типичным полупроводникам относятся германий ($\Delta = 0,72$ эВ) и кремний ($\Delta \approx 1,1$ эВ).

Поскольку $1 \text{ эВ}/k = 11\,600 \text{ К}$, в диэлектриках не приходится надеяться на тепловой переброс электронов через щель в энергетическом спектре. Однако такой переброс можно осуществить, воздействуя на диэлектрик электромагнитным излучением или частицами высоких энергий. Так, для диэлектриков, имеющих ширину щели порядка 10 эВ, энергия излучения, необходимая для переброса электрона из заполненной зоны в зону проводимости, должна быть не меньше 10 эВ. Поскольку, согласно (26.4), энергия фотона $E = \hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda$, для длины волны электромагнитного излучения получаем $\lambda \approx 100 \text{ нм}$; это ультрафиолетовое излучение.

Внешнее электрическое поле, приложенное к диэлектрику, способно ускорять фотоэлектроны, появившиеся в зоне проводимости, и тем самым создавать ток. Для образования фотопроводимости в диэлектриках видимый свет обычно непригоден; необходимо, как мы видели, ультрафиолетовое излучение.

Если в металлах существует лишь *электронная проводимость*, то в полупроводниках и диэлектриках она дополняется так называемой *дырочной проводимостью*. Дело в том, что при переходе электрона из заполненной зоны в зону проводимости в самой заполненной зоне образуется вакантное место («дырка»). В результате электроны этой нижней зоны могут перераспределяться, образуя во внешнем поле «дырочный» ток. В итоге ток возникает сразу в двух зонах.

Что касается знаков носителей заряда в обеих зонах, то они должны быть противоположными. Это следует из закона сохранения заряда и из того обстоятельства, что кристалл в целом остается электрически нейтральным образованием (общий заряд его равен нулю).

Между «положительно заряженной дыркой» и отрицательным электроном в силу их кулоновского взаимодействия может образоваться связанное состояние. Такое состояние называли *экситоном*. Экситон напоминает водородный атом и имеет схожий с ним спектр значений энергии (см. рис. 24.3). Его дискретные отрицательные уровни, постепенно сходясь к нулевому значению, соответствуют экситонам с различной степенью возбуждения. Положительные квазинепрерывные значения энергии в спектре экситона соответствуют свободным электронам и дырке.

Следует помнить, что экситонное состояние является коллективным, относящимся к кристаллу в целом. Это вытекает из коллективного характера самих электронных и дырочных состояний в кристалле. Экситонное состояние в виде волны возбуждения распространяется по кристаллу. В целях же наглядности эту ситуацию обычно представляют себе как передачу энергии от одного возбужденного атома к другому. Когда энергия возбуждения достаточна для ионизации

атома, образуются свободный электрон и положительно заряженный ион.

Понятие экситонного состояния приобретает большое значение при изучении, например, биологических структур на молекулярном уровне.

59.2 Полупроводники В кристаллах с узкой энергетической щелью (полупроводниках) проводимость резко возрастает с повышением температуры. Поэтому их можно использовать в качестве *термосопротивлений*.

Решетки полупроводниковых кристаллов, например германия и кремния, довольно рыхлые и легко допускают ввод чужеродных атомов — примесей. С помощью примесей проводимость полупроводников можно изменять на много порядков.

В полупроводниках существует проводимость двух типов: электронная и дырочная. Соответственно этому примесные атомы могут быть поставщиками дополнительных электронов или дырок. Примеси, легко отдающие свои электроны, называют *донорными*, а примеси, захватывающие электроны, — *акцепторными*.

Рассмотрим кристалл германия; его решетка типа решетки алмаза. Атомы германия имеют валентность 4. Введем в решетку германия атомы мышьяка, имеющего валентность 5. Тогда, заняв свободный узел решетки, атом мышьяка из пяти своих валентных электронов истратит четыре на образование связей в решетке и один электрон останется «не у дел». Энергия связи этого лишнего электрона меньше 0,1 эВ. Наличие тепловых флуктуаций (даже при комнатной температуре) вполне достаточно, чтобы лишний электрон мышьяка перешел в свободное состояние и стал переносить заряд. В результате атом мышьяка станет донорной примесью.

В решетку германия можно внедрить и примесный атом с валентностью 3, например атом алюминия. Недостающий электрон алюминий может похитить у того же германия. В результате в атоме германия образуется дырка, которая начнет блуждать по кристаллу на правах носителя положительного заряда (ведь атом с «дыркой» это положительный ион). Таким образом, примесь алюминия станет поставщиком дырок, т. е. акцептором.

В чистом (беспримесном) полупроводнике число положительных и отрицательных носителей заряда одинаково. В полупроводнике с донорной примесью существует избыток отрицательно заряженных носителей, такой полупроводник называют полупроводником *n*-типа. Полупроводник с акцепторной примесью называют полупроводником *p*-типа, для него характерен избыток положительно заряженных носителей.

Любопытный круг явлений происходит на границе двух областей полупроводника, имеющих различные типы проводимости. В такого рода полупроводниках с *p-n*-переходом на самой границе перехода (ее ширина $\sim 10^{-6}$ м) возникает разность потенциалов. Это легко понять: ведь концентрации носителей одного и того же знака различны по обе стороны от *p-n*-перехода, а значит, должен возникнуть соответствующий диффузионный поток зарядов; этот поток нарушает электронейтральность самих областей и на ширине *p-n*-перехода воз-

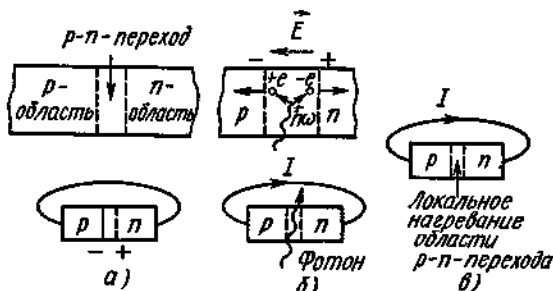


Рис. 59.1

никает электрическое поле, препятствующее дальнейшей диффузии зарядов. Естественно, что в состоянии термодинамического равновесия диффузионный поток отсутствует, а разность потенциалов в p - n -переходе не равна нулю.

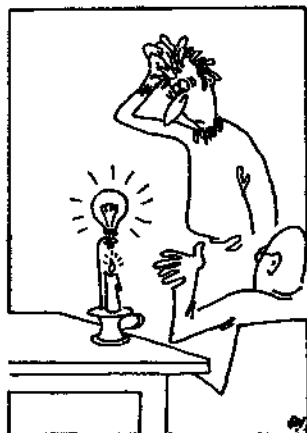
Если замкнуть концы образца полупроводника с p - n -переходом (рис. 59.1, а), то ток в такой цепи появиться не должен, ибо вся система находится в состоянии термодинамического равновесия. Однако при действии света на p - n -переход (рис. 59.1, б) в нем возникают пары электронов — дырки, которые немедленно разделяются полем (дырка направляется в область p -типа, а электрон — в область n -типа). В самой системе, которая в данном случае оказывается неравновесной, возникает ток. Энергия света переходит в энергию тока. В этом и состоит принцип солнечных батарей, так широко используемых в космических аппаратах.

На рис. 59.1, в показан принцип действия полупроводниковых термо-батарей. Они отличаются от солнечных батарей лишь тем, что неравновесные носители создаются в них потоком теплоты.

В любом источнике постоянной э. д. с. за счет внешней энергии (например, света, теплоты, энергии химических реакций) происходит разделение зарядов обоих знаков; в результате возникает разность потенциалов, которая создает и поддерживает ток в цепи.

§ 60. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

60.1 Флуктуации поля в веществе Мысленно выделим в металле весьма малый объем, содержащий еще достаточно много свободных электронов. Вследствие беспорядочного теплового движения зарядов в электронном газе металла число электронов в выделенном объеме постоянно отклоняется от среднего значения. Естественно, что эти флуктуации плотности электронов приводят к возникновению флуктуирующих электромагнитных полей. Нужно помнить, конечно, что вещество в целом электронейтрально и речь идет о весьма малых отклонениях от электронейтральности в произвольно выбранном элементе объема тела. Такие флуктуирующие самопроизвольно возникающие поля всегда присутствуют в веществе. Внешнее электрическое поле $E_{\text{внеш}}$ накладывается в проводнике на флуктуационное внутреннее



поле $\Delta\tilde{E}$. Таким образом, среднее поле в веществе

$$\langle E \rangle = E_{\text{внеш}} + \Delta\tilde{E} \quad (60.1)$$

Обычно флуктуации макроскопических величин (см. § 31), в силу своей малости, интереса не представляют. Однако иногда возникают такие ситуации, когда весь наблюдаемый эффект определяется флуктуационными явлениями. Так, порог чувствительности особо точных электроизмерительных приборов обусловлен так называемыми *шумовыми токами*. Дело в том, что даже в отсутствие внешней э. д. с. из-за флуктуаций в цепи возникают беспорядочные слабые самопроизвольные токи.

Оценим силы этих шумовых токов. Мощности, связанная с одним всплеском флуктуационного тока, может быть записана следующим образом:

$$I^2 R \sim kT/\tau, \quad (60.2)$$

где τ — время релаксации. Естественно, что средний квадрат флуктуационного тока должен определяться за время $\Delta t \gg \tau$. Поэтому из (60.2) получим

$$\langle I^2 \rangle \sim kT/(R \Delta t). \quad (60.3)$$

Флуктуации тока в цепи тем меньше, чем больше сопротивление и ниже температура.

Если взять металлический проводник определенного атомарного состава, то его электрическое сопротивление R пропорционально общему числу N частиц тела, т. е.

$$\sqrt{\langle I^2 \rangle} \sim 1/\sqrt{N}. \quad (60.4)$$

Этот результат находится в соответствии с (31.3).

60.2 Электростатическое поле в металле Внешнее электростатическое поле компенсируется внутри металла (механизм компенсации описан ниже). Поэтому внутри металла

$$\langle E \rangle = 0, \quad (60.5)$$

ибо иначе в теле возникли бы токи, а с ними связаны неизбежные джоулевы потери. Для поддержания стационарного тока нужен постоянный источник энергии, а он в данном случае отсутствует.

В металле, помещаемом во внешнее электростатическое поле, в первый момент возникает некоторое движение (перераспределение) его свободных электронов. Эти электроны располагаются на поверхности металлического тела и экранируют электростатическое поле внешних зарядов, что и обеспечивает выполнение (60.5).

Внешнее электростатическое поле перпендикулярно поверхности металла, ибо при всякой иной конфигурации поля возникла бы его

касательная составляющая $\langle E_t \rangle$ к поверхности, а значит, и поверхностный ток, что, как мы видели, невозможно. Таким образом,

$$\langle E_t \rangle = 0. \quad (60.6)$$

Рассмотрим следствие, вытекающее из (60.6). Исходим из связи (14.14), которая выражает напряженность электростатического поля через производную от потенциала по некоторому направлению. Тогда, учитывая (60.6), можно заключить, что потенциал ϕ вдоль поверхности металла остается постоянным.

Нормальный к поверхности компонент напряженности \vec{E}_n электростатического поля определяется поверхностной плотностью σ зарядов. Сама эта связь дается фундаментальным уравнением поля (13.3). Примеры нахождения электростатического поля E_n на металлических поверхностях в форме сферы, линии, плоской поверхности и плоском «конденсаторе» рассмотрены в § 14.2. При этом следует иметь в виду, что в точках, не слишком близких к поверхности тела, среднее поле $\langle E \rangle$ в пустоте фактически совпадает с истинным полем E . Значения этих двух величин отличаются друг от друга лишь в непосредственной близости от тела, где еще сказывается влияние нерегулярных атомных полей (флуктуаций поля среды).

В § 14.2 по заданному распределению зарядов на поверхности металла находилось создаваемое ими поле. В данном же случае мы ведем рассмотрение обратной задачи: металл находится в заданном электростатическом внешнем поле и требуется найти соответствующее статическое (неизменное) распределение свободных зарядов в нем.

Существование прямой и обратной задач означает, что заряды и потенциалы металлических поверхностей не могут быть заданы одновременно произвольным образом (вместо значения поля на поверхности мы говорим о постоянном потенциале самой поверхности). В силу линейности уравнений поля (13.3) связь полных зарядов Q_a с потенциалами ϕ_a металлических поверхностей тоже должна быть линейной, т. е. выражаться соотношениями вида

$$Q_a = \sum_i C_{ai} \phi_i, \quad (60.7)$$

где a — номер тела, причем суммирование по i производится по всем телам системы, включая рассматриваемое; постоянные C — так называемые электрические емкости, они имеют размерность длины и зависят от формы и взаимного расположения металлических тел. В частности, если имеется всего одно тело, то

$$Q = C\phi \quad (60.8)$$

и порядок величины емкости C совпадает с линейными размерами тела.

60.3 Электростатические поля в диэлектриках. Поляризация вещества Поскольку в диэлектрике нет свободных электронов, аргументы, использованные в применении к металлам, здесь непригодны. В самом деле, в состоянии равновесия среднее поле $\langle E \rangle$ внутри диэлектрика может быть отличным от нуля, ибо о возникновении токов здесь не приходится говорить.

Так как к диэлектрикам относятся кристаллы молекулярные, ионные и ковалентные (см. § 39.2 и 39.4), то не исключено, что в электрическом отношении их атомные или молекулярные структуры являются диполями (см. § 14.4). В ряде случаев атомные дипольные моменты могут ориентировать (поляризовать) друг друга, тогда в диэлектрике возникают области *спонтанной* (самопроизвольной) *поляризации*, так называемые *домены*. Доменную структуру имеют сегнетоэлектрики.

В сегнетоэлектриках в обычном состоянии домены вследствие теплового движения ориентированы хаотично. Внесение же сегнетоэлектрика во внешнее электростатическое поле создает в кристалле преимущественную ориентацию доменов — вещество *поляризуется*. Причем, поскольку в эффект поляризации включаются (скачками) целые области, внутреннее электрическое поле в сегнетоэлектриках может достигать больших значений.

Другой категорией диэлектриков являются *электреты*. Это вещества, которые искусственно поляризуют в жидком состоянии; затем электрет переводят в твердое состояние и убирают поляризующее внешнее электростатическое поле. В результате в теле возникает остаточная поляризация. Такое состояние есть не что иное, как электрический аналог постоянных магнитов.

Эти экзотические состояния вещества немногочисленны. Обычная же ситуация сводится к тому, что внешнее электростатическое поле поляризует независимым образом атомные или молекулярные дипольные моменты. Возникает частичная поляризация, ибо конкурирующим процессом выступает тепловое возмущение. В случаях же отсутствия дипольной структуры в диэлектрике достаточно сильное внешнее поле может «деформировать» электронные оболочки атомов или молекул и раздвинуть «центры положительных и отрицательных зарядов», т. е. дипольные состояния возникают и одновременно поляризуются.

Таким образом, характерной чертой поведения диэлектриков во внешних электростатических полях является возникновение поляризованного состояния и соответствующего собственного электрического поля. Оно ослабляет внешнее поле, внутри диэлектрика устанавливается поле напряженности

$$E_{\text{внутри}} = E_{\text{внеш}} - 4\pi P, \quad (60.9)$$

где P — дипольный момент элемента диэлектрика единичного объема.

Рассмотрим основные количественные соотношения для диэлектриков в полях на примере газа. В отсутствие полей отдельные атомы газа, находясь в основном квантовом состоянии, обладают сферической симметрией усредненного распределения электронов в пространстве вокруг ядра. Это означает, что центры положительных и отрицательных зарядов в таких атомных состояниях совпадают. Включение внешнего постоянного электрического поля создает аксиальную (осевую) симметрию в атомных состояниях, сопровождающихся возникновением дипольных электрических моментов атомов. Для простоты рассмотрим атомарный водород. На деформированный атом водорода действуют две силы: eE — воздействие внешнего поля на заряд; $m\omega_0^2 \Delta r$ — «упругая» возвращающая сила, где m — масса заряда, Δr — смещение центров

положительных и отрицательных зарядов в атоме по отношению друг к другу, ω_0 — величина с размерностью с^{-1} . Заметим, что любая упругая возвращающая сила может быть представлена в указанном виде (см. также § 39.3). Что касается величины ω_0 , то в данном случае она может быть оценена из соотношения \mathcal{E}/\hbar , где \mathcal{E} — энергия основного состояния атома, см., например, (26.1).

В результате запишем

$$eE = m\omega_0^2 \Delta r, \quad (60.10)$$

где $\omega_0 = \frac{\mathcal{E}}{\hbar}$, а $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2}$, по поводу последней формулы см. (24.8).

Равенство (60.10) позволяет найти возникший дипольный момент у атома водорода. В самом деле, дипольный момент

$$\mathbf{d} = e \Delta \mathbf{r}, \quad (60.11)$$

см. указание к (14.17). Само же смещение

$$\Delta r = \frac{eE}{m\omega_0^2} = \frac{eE}{m\left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar}\right)^2} = \frac{eE}{m\left(\frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^3}\right)^2} = 4 \frac{r_a^3}{e} E, \quad (60.12)$$

где r_a — «размеры» атома водорода, см. (24.7). Подставив выражение (60.12) в (60.11), получим

$$\mathbf{d} = 4r_a^3 \mathbf{E} \quad (60.13)$$

Дипольный момент газа единичного объема

$$\mathbf{P} = N\mathbf{d} = 4Nr_a^3 \mathbf{E}_{\text{внутри}}, \quad (60.14)$$

где N — число атомов в единичном объеме. Относительно электрического поля, входящего в (60.14), заметим следующее: в отличие от изолированного атома, находящегося во внешнем поле [см. (60.13)], для совокупности атомов следует рассматривать поле, являющееся наложением внешнего и среднего собственного поля поляризующихся атомов. Перепишем (60.9) в виде

$$\mathbf{E}_{\text{внеш}} = \mathbf{E}_{\text{внутри}} + 4\pi\mathbf{P} \quad (60.15)$$

и подставим в это соотношение найденное выражение для дипольного момента \mathbf{P} среды. Тогда

$$\mathbf{E}_{\text{внеш}} = \mathbf{E}_{\text{внутри}} + 4\pi \cdot 4Nr_a^3 \mathbf{E}_{\text{внутри}} = (1 + 16\pi r_a^3 N) \mathbf{E}_{\text{внутри}}. \quad (60.16)$$

Величину

$$\alpha \approx 16\pi r_a^3 \quad (60.17)$$

называют *поляризуемостью* атома, а величину

$$\epsilon = 1 + \alpha N \quad (60.18)$$

— *диэлектрической проницаемостью* среды. Для вакуума ($N = 0$)

$$\epsilon = 1. \quad (60.19)$$

Найдем числовое значение ϵ для атомарного водорода при нормальных условиях. Для водорода $r_a = 0,528 \cdot 10^{-10}$ м (см. § 24.1), а число атомов в 1 м³ газа равно $N = 2,69 \cdot 10^{25}$ (см. § 37.3). В результате, согласно (60.18), получим

$$\epsilon = 1 + 16\pi(0,528 \cdot 10^{-10})^3(2,69 \cdot 10^{25}) = 1,00020.$$

Экспериментальное значение диэлектрической проницаемости для молекулярного водорода

$$\epsilon_{\text{эксп}} = 1,00026.$$

Соответствие теоретических и экспериментальных значений ϵ для водорода следует считать хорошим. Действительно, во-первых, расчет производился для атомарного водорода, а эксперимент ставился на молекулярном водороде (небольшая разница должна существовать); во-вторых, сам расчет был выполнен в рамках полуклассической модели, а не последовательной квантовомеханической теории, которая для атомов водорода даст значение α , отличающееся от (60.17) числовым коэффициентом (вместо 16π получается 18π).

Остановимся на вопросе о поляризации газа с молекулами, имеющими собственный дипольный электрический момент \mathbf{d} . В отсутствие внешнего электростатического поля все молекулярные диполи \mathbf{d} вследствие теплового движения совершенно хаотизированы. Включение поля \mathbf{E} вносит некоторую преимущественную ориентацию диполей вдоль поля. Согласно (14.18), энергия диполя \mathbf{d} во внешнем поле \mathbf{E}

$$U = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}. \quad (60.20)$$

Энергия же теплового движения, связанная с отдельным молекулярным диполем, имеет порядок kT . Тепловое движение оказывает дезориентирующее влияние на диполь. В результате дипольный момент \mathbf{P} можно представить как

$$|\mathbf{P}| \sim \left(\frac{|\mathbf{d}| |\mathbf{E}|}{kT} \right) N |\mathbf{d}|. \quad (60.21)$$

Из (60.21) видно, что максимальная поляризация газа могла бы осуществиться при возможно более низких температурах и значительных напряженностях поля, т. е. когда $|\mathbf{d}| |\mathbf{E}| \approx kT$.

Точное выражение для ориентационного дипольного момента \mathbf{P} отличается от (60.21) множителем $1/3$, т. е.

$$P = \frac{Nd^2 E}{3kT}. \quad (60.22)$$

Соответственно ориентационная диэлектрическая проницаемость газа с дипольными молекулами составит

$$\epsilon - 1 = \frac{P}{E} = \frac{Nd^2}{3kT}. \quad (60.23)$$

Диэлектрическая проницаемость (точнее $\epsilon - 1$) такого газа пропорциональна плотности частиц N и обратно пропорциональна температуре.

При изучении ориентационной поляризуемости было высказано

утверждение, что молекулярные диполи ориентируются преимущественно в направлении поля. Однако, конечно, они могут ориентироваться не только вдоль, но и против поля. Если исходить из выражения (60.20) для энергии диполя в электрическом поле

$$U = -|\mathbf{d}||\mathbf{E}|\cos(\mathbf{d}\mathbf{E}), \quad (60.24)$$

то в случае, когда дипольный момент направлен параллельно напряженности поля, угол $(\mathbf{d}\mathbf{E}) = 0$ и, следовательно, $\cos(\mathbf{d}\mathbf{E}) = 1$. Если же они направлены антипараллельно, $(\mathbf{d}\mathbf{E}) = \pi$ и соответственно $\cos(\mathbf{d}\mathbf{E}) = -1$. В итоге энергия диполя при изменении угла ориентации меняется от максимального (положительного) значения $U_{\max} = |\mathbf{d}||\mathbf{E}|$ до минимального (отрицательного) значения $U_{\min} = -|\mathbf{d}||\mathbf{E}|$. Так как энергия всякой системы стремится принять наименьшее возможное в данных условиях значение, то наиболее вероятной ориентацией диполей будет их ориентация с U_{\min} т. е. в направлении электрического поля.

Чтобы определить средние числа молекулярных диполей, ориентирующихся по полю и против него, необходимо обратиться к методам статистической физики (см. гл. V). В состоянии теплового равновесия относительное число молекул с потенциальной энергией U пропорционально

$$e^{-U/kT}, \quad (60.25)$$

см. (35.3). Подставляя (60.24) в (60.25), записываем

$$n(\theta) = n_0 e^{+|\mathbf{d}||\mathbf{E}|\cos\theta/(kT)}, \quad (60.26)$$

В (60.26) мы ввели обозначение для угла $\theta \equiv (\mathbf{d}\mathbf{E})$; величина $n(\theta)$ есть среднее число молекулярных диполей, заключенных в единичном телесном угле вокруг направления θ ; n_0 — нормировочная постоянная. Поскольку в выражении (60.21) множитель в скобках при обычных физических условиях мал, экспонента в (60.26) может быть преобразована согласно (23.9). В результате (60.26) запишется как

$$n(\theta) \approx n_0 \left(1 + \frac{|\mathbf{d}||\mathbf{E}|\cos\theta}{kT} \right). \quad (60.27)$$

Из (60.27) видно, что вдоль поля ($\cos\theta = 1$) ориентируется больше диполей, чем против поля ($\cos\theta = -1$); за счет этой разницы и возникает средний дипольный момент газа.

§ 61. ВЕЩЕСТВО В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

61.1 Диамагнитный эффект Взаимодействие магнитного поля с веществом относится к области релятивистских явлений. Поскольку для атомных электронов отношение v/c является малым, весьма слабо и само влияние магнитного поля на вещество (оно пропорционально v^2/c^2). Однако существуют состояния вещества, отклик которых на внешнее магнитное воздействие значителен и своеобразен.

Природа магнитных свойств вещества может быть до конца понята лишь на квантовой основе. Известно, что в атомах суммарный механический момент (орбитальный и спиновый) всех электронов может

быть как отличным от нуля, так и равным нулю. Поскольку с механическим моментом связан соответствующий магнитный момент, атомы различных элементов или имеют магнитный момент, или не обладают таковым. Рассмотрим реакцию атомов, у которых нет «собственного» магнитного момента, на появление внешнего магнитного поля напряженностью H . Пусть магнитное поле вокруг атома медленно нарастает (рис. 61.1). В этом случае через контур, охватывающий область движения электронов, проходит переменный магнитный поток. Последний в соответствии с (13.6) порождает вихревое электрическое поле. В результате

$$\langle E_v \rangle 2\pi r = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\langle H_n \rangle \pi r^2). \quad (61.1)$$

Для средней касательной составляющей напряженности электрического поля на контуре получим

$$\langle E_v \rangle = -\frac{1}{c} \frac{r}{2} \frac{d \langle H_n \rangle}{dt}. \quad (61.2)$$

Найдем изменение механического момента атомных электронов при воздействии на них поля $\langle E_v \rangle$. Для этого обобщим классические уравнения движения (6.1)

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (61.3)$$

на случай вращательного движения. Умножив обе стороны уравнения (61.3) слева векторно на r , получим

$$\frac{d[rp]}{dt} = [rF]. \quad (61.4)$$

Здесь $[rp]$ — механический момент импульса L [см. (9.34)], а векторное произведение $[rF]$ носит название *момента силы*. В итоге (61.4) примет вид

$$\frac{dL}{dt} = [rF]. \quad (61.5)$$

Так как в рассматриваемом случае $F = -eE$ (мы учитываем геометрию рис. 61.1), то (61.5) запишется как

$$\frac{dL}{dt} = \frac{e}{2c} \frac{dH}{dt} \sum r^2, \quad (61.6)$$

где суммирование идет по всем атомным электронам. В (61.6) мы использовали (61.2). Интегрируя (61.6) по времени, начиная с нулевого магнитного поля, в течение всего промежутка изменения поля H , получим

$$\Delta L = \frac{e}{2c} H \sum r^2. \quad (61.7)$$

Равенство (61.7) описывает изменение механического момента атомных электронов за время включения магнитного поля.

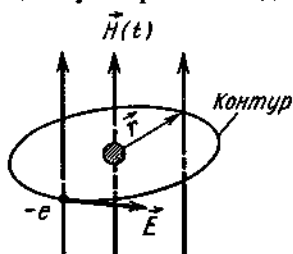


Рис. 61.1

Так как мы рассматриваем атом, в котором собственный механический момент отсутствует, то появление у него момента ΔL (в период включения магнитного поля или в резко неоднородном магнитном поле) сопровождается возникновением и соответствующего магнитного момента p_m (см. § 15.3 и 24.2). Согласно (24.13) для наведенного магнитного момента атома запишем

$$\Delta p_m = - \frac{e}{2mc} \Delta L = - \frac{e^2}{4mc^2} H \sum r^2. \quad (61.8)$$

Знак минус в выражении (61.8) показывает, что направление магнитного момента противоположно направлению внешнего магнитного поля, в связи с чем этот момент называют *диамагнитным*.

Ясно, что в формуле (61.8) должна стоять не просто $\sum r^2$, а $\sum \langle r^2 \rangle$; указанная сумма может быть найдена лишь в рамках квантовой механики (и этому может помочь, например, рис. 24.6, б).

Проявление диамагнитных эффектов в макроскопическом масштабе называют *диамагнетизмом вещества*. Типичные диамагнетики (например, висмут), помещенные в резко неоднородное магнитное поле, выталкиваются из области сильного поля.

61.2 Парамагнетики. Ориентационная намагниченность Остановимся на атомах, обладающих собственным механическим моментом. Известно, что орбитальный механический момент, а вместе с ним и магнитный момент атомного электрона испытывают пространственное квантование (см. § 24.2). Это означает, что одна из проекций момента на направление магнитного поля принимает лишь дискретный ряд значений, причем две другие проекции момента совершенно неопределенны. Указанная ситуация напоминает прецессию волчка вокруг вертикального направления.

Атомный магнитный момент p_{ma} обладает в магнитном поле напряженности H энергией

$$U = - p_{ma} H, \quad (61.9)$$

см. (24.14); входящий в выражение для p_{ma} заряд электрона обозначен здесь $-e$. Выражение (61.9) аналогично (60.20); это значит, что количественная теория ориентационной намагниченности вещества может быть построена по образцу теории ориентационной поляризуемости. Введем *намагниченность* единичного объема вещества

$$J = \sum_i p_{ma_i} = N \langle p_{ma} \rangle, \quad (61.10)$$

где N — плотность числа атомов; $\langle p_{ma} \rangle$ — средний магнитный момент атома. Тогда в соответствии с (60.22) можно написать

$$J = \frac{N \langle p_{ma} \rangle^2 H}{3kT}. \quad (61.11)$$

Таким образом, *намагниченность вещества пропорциональна напряженности внешнего магнитного поля*. Такое поведение вещества называют *парамагнетизмом*. Парамагнетизм ярче проявляется при низких температурах.

Границы применимости формулы (61.11) определяются малостью отношения $|\mu_{\text{ма}}|/|H|/(kT)$. Чтобы оценить температуры, при которых возможно наблюдать *магнитное насыщение* вещества, т. е. случай, когда все атомные магнитные моменты ориентированы вдоль поля, воспользуемся оценкой (24.14). В результате получим, что температура насыщения $T \sim 10$ К (при полях $H \sim 10^7$ А/м).

Весьма любопытен способ получения сверхнизких температур путем адиабатного размагничивания. Парамагнитное вещество охлаждают в сильном магнитном поле до температур жидкого гелия ($1+2$ К), т. е. доводят его до состояния магнитного насыщения. Затем вещество теплоизолируют и медленно выключают магнитное поле. При этом происходит понижение температуры вещества до нескольких тысячных долей кельвин.

Сущность процесса адиабатного размагничивания состоит в следующем. В условиях магнитного насыщения при $T \rightarrow 0$ вещество находится в своем наинизшем квантовом состоянии, т. е. его $\Delta\Gamma = 1$, а энтропия $S = 0$ (см. § 33). При медленном выключении магнитного поля энтропия вследствие необратимости процесса должна возрасти, а это значит, что увеличивается число $\Delta\Gamma$ микроспособов реализации данного состояния вещества. Другими словами, возникнут магнитные переходы в более высокие энергетические состояния. Этот процесс хаотизации атомных магнитных моментов, происходящий в убывающем магнитном поле, требует затрат энергии. Последняя в условиях теплоизоляции вещества забирается у теплового движения решетки.

Кратко остановимся на вопросе о том, атомы каких элементов имеют отличные от нуля магнитные моменты. Все атомы с нечетным числом электронов обладают постоянным магнитным моментом, причем этот момент близок к значению

$$\mu_{\text{ма}} = \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (61.12)$$

Подстановка числовых значений в СГС и перевод ответа в СИ дают

$$\mu_{\text{ма}} \approx 9 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл.}$$

Если сопоставить (61.12) с (25.3) и (25.4), то легко понять, что атомный магнитный момент обусловлен нескомпенсированным спином одного («нечетного») электрона в атоме. В связи с этим ясно, что молекулы большинства веществ не могут быть «атомными магнетиками». Ведь образование молекулярных соединений происходит так, что спариваются валентные электроны дополняющих друг друга атомов, имеющие противоположные спины.

Парамагнетики, помещенные в резко неоднородное магнитное поле, втягиваются в область сильного поля, т. е. их «макроскопическое поведение» противоположно поведению диамагнетиков в аналогичных внешних условиях. Следует иметь в виду, что поскольку диамагнитный эффект универсален, он присутствует и в парамагнетиках. Однако обычно дополнительный наведенный диамагнитный момент атома меньше его постоянного магнитного момента.

61.3 Спонтанная намагниченность. Ферромагнетизм Проявления эффектов диамагнетизма и парамагнетизма весьма слабы. Существуют, однако, такие «композиции вещества», магнитные свойства которых чрезвычайно сильны. Все такие материалы, как правило, содержат атомы с незаполненной внутренней электронной оболочкой. Это атомы «переходных элементов»: железо, кобальт, никель и ряд других.

В отсутствие внешнего магнитного поля маленькие кристаллы железа или никеля при температуре ниже определенной обнаруживают состояние полного самопроизвольного намагничивания вещества. Это так называемая *спонтанная намагниченность* требует своего объяснения. Возможным механизмом является следующей. В атоме, например, никеля ответственным за постоянный атомный магнитный момент является спин одного электрона из недостроенной внутренней оболочки. Оказывается, что эти спины в решетке никеля выстраиваются сами собой, в одном направлении. Предположим, что эта параллельность спинов обеспечивается их прямым магнитным взаимодействием. Оценку энергии взаимодействия спин – спин можно получить по формуле

$$U_{ss} \sim (\mu_{ms})^2/r_a^3, \quad (61.13)$$

см. (25.5). Так как межатомное расстояние в решетке порядка r_a , то, используя (24.7), запишем

$$U_{ss} \sim \frac{1}{c^2} \left(\frac{e^8 m}{\hbar^4} \right). \quad (61.14)$$

Расчет в СГС и перевод в СИ приводит к значению $U_{ss} \sim 5 \cdot 10^{-22}$ Дж. Каким температурам соответствует полученное значение энергии? Ответ можно найти, если написать соотношение

$$U_{ss} \sim kT,$$

т. е. $T \sim 10$ К.

Это означает, что тепловое возмущение решетки не даст возможности спинам выстраиваться в одном направлении. Таким образом, предположение о роли магнитного взаимодействия спинов в формировании состояния спонтанной намагниченности не достигает цели.

Другим возможным механизмом, способным выстраивать атомные спины в одном направлении, является косвенное квантовомеханическое влияние «магнитных» электронов друг на друга; это влияние связано с тем, что электроны являются ферми-частицами. Электроны могут тесно соседствовать, если их спины противоположны. Пусть такое тесное пространственное соседство существует между внутренними «магнитными» электронами и электронами проводимости (свободными). Тогда возникает ситуация, изображенная на рис. 61.2. Электроны проводимости выступают в роли посредника между «магнитными» электронами близлежащих атомов. Спин «магнитного» электрона внутренней недостроенной оболочки атома антипараллелен спину свободного электрона. Однако такая ориентация последнего обеспечивает параллельность магнитных моментов самих атомов. Интенсивность указанного квантовомеханического косвенного влияния атомных

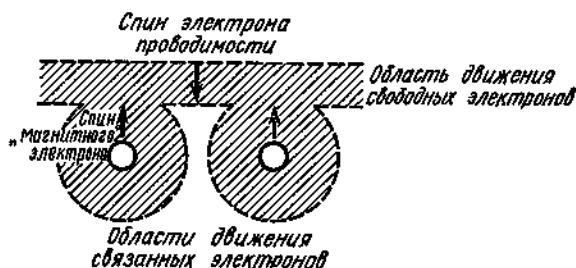


Рис. 61.2

магнитных моментов друг на друга в 10^4 раз мощнее, чем их прямое магнитное взаимодействие. Эта оценка следует из того обстоятельства, что

$$U_{ss} \sim 10^{-4} E_a \sim 10^{-4} \epsilon_F, \quad (61.15)$$

где E_a — энергия атомного электрона, см. (24.8); энергии же ϵ_F свободных электронов (посредников) сравнимы с E_a , см. (39.24). Таким образом, мы рассмотрели весьма вероятный механизм спонтанной намагниченности вещества; такова, по крайней мере, точка зрения на эти проблемы современных физиков-исследователей.

Состояние спонтанной намагниченности вещества называют *ферромагнетизмом*. Мы уже указывали, что лишь весьма маленькие кристаллы ферромагнетиков (размеры их обычно не больше 10^{-6} м) обнаруживают в отсутствие магнитных полей полное магнитное насыщение. В больших образцах ферромагнетиков без внешнего поля нет полной намагниченности. Это связано с тем, что в таких образцах происходит расщепление всего массива атомов на магнитные области — *домены*. В пределах одного домена существует полная намагниченность, однако различные домены друг относительно друга имеют различные направления намагничивания.

Маленькие кристаллы ферромагнетиков являются однодоменными. Почему же происходит образование многочисленных доменов, например, в больших монокристаллах железа? Да потому, что это выгодно термодинамически. «Свободная энергия» всякой физической системы стремится к минимуму. Если большой монокристалл железа однодоменный, то энергия сопутствующего магнитного поля вне кристалла является максимально возможной. Магнитное расслоение монокристалла на две области с взаимным антипараллельным направлением намагничивания резко уменьшит «объем поля» (а значит, и его энергию) вне кристалла (рис. 61.3).

Лишь достаточно сильное внешнее магнитное поле $H_{\text{внеш}}$ может ориентировать все домены большого образца ферромагнетика в одном направлении. Тогда внутри образца

$$H_{\text{внут}} = H_{\text{внеш}} + 4\pi J, \quad (61.16)$$

где J — намагниченность вещества, см. (61.10).

Для описания магнитных свойств вещества обычно приближенно записывают, что

$$H_{\text{внут}} = \mu H_{\text{внеш}}, \quad (61.17)$$

где μ называют абсолютной магнитной проницаемостью вещества. У диамагнетиков магнитная проницаемость $\mu \lesssim 1$ и отличается от единицы на $10^{-5} - 10^{-6}$; у парамагнетиков магнитная проницаемость $\mu \lesssim 1$ и отличается от единицы на $10^{-4} - 10^{-5}$. Для ферромагнетиков $\mu \sim 10^3$ (железо), а у сплава «супермаллой» $\mu \sim 10^6$.

Заметим, что диэлектрическая проницаемость $\epsilon > 1$ для всех веществ, причем для сегнетоэлектриков (титанат бария) $\epsilon \sim 10^5$.

Из рассмотренных данных следует, что реакция большинства твердых и жидких тел на прямое воздействие магнитным полем в 10^4 раз менее заметна, чем воздействие на них полем электрическим. Этот же вывод следует и из того, что энергия взаимодействия двух магнитных моментов составляет лишь 10^{-4} часть от энергии взаимодействия заряд — заряд, см. (61.15). К указанному отношению можно прийти и используя замечание, приведенное в начале § 61.1. В самом деле, для атомных электронов $v/c \sim 10^{-2}$, а само воздействие магнитного поля на вещество пропорционально v^2/c^2 , т. е. $(10^{-2})^2 \sim 10^{-4}$.

Особняком стоят ферромагнетики и сегнетоэлектрики; первые обладают спонтанной намагненностью, а вторые — спонтанной поляризацией. В этих состояниях вещества внешние магнитные и электрические воздействия на макротела «не уступают друг другу».

61.4 Магнитные свойства сверхпроводников. Квантование крупномасштабного магнитного потока Природа сверхпроводящего перехода в металлах описывалась нами в § 56. Полное отсутствие электрического сопротивления означает, что внешнее магнитное поле не может проникать в толщу сверхпроводника, т. е.

$$H_{\text{внут}} = 0. \quad (61.18)$$

Этот результат следует непосредственно из фундаментального уравнения поля (13.6), ибо всякое проникновение магнитного поля в среду связано с процессом его установления, т. е. с изменением во времени; согласно же (13.6) это приведет к возникновению вихревого электрического поля, а значит, и неограниченно большого тока (ведь сопротивление равно нулю). Мы пришли к физически нелепому результату, а это означает, что предположение о возможности появления магнитного поля в объеме сверхпроводника неверно.

Полученное нами выражение (61.18) имеет место независимо от предыстории становления сверхпроводящего состояния металла. Так, если образец нормального металла находится в магнитном поле и температура образца понижается, то по достижении температуры сверхпроводящего перехода магнитное поле будет «вытолкнуто» из толщи образца.

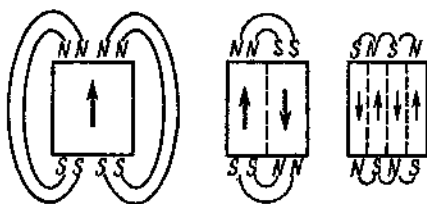


Рис. 61.3

Какова же конфигурация магнитного поля, окружающего сверхпроводник? На этот вопрос позволяет ответить другое фундаментальное уравнение поля, а именно уравнение (13.4). Так как в объеме сверхпроводника магнитное поле равно нулю, то, естественно, равен нулю и его нормальный к границе со средой компонент. Поскольку же должно выполняться общее соотношение (13.4), это означает, что нормальная к поверхности составляющая внешнего магнитного поля также равна нулю. Другими словами, *внешнее магнитное поле как бы «обтекает» образцы сверхпроводника*; у поверхности отличны от нуля лишь касательные составляющие поля.

Рассмотрим сверхпроводящее кольцо. Согласно общему уравнению поля (13.5) в толще образца сверхпроводника невозможны никакие стационарные токи, ибо $H_{\text{внут}} = 0$. Таким образом, *в сверхпроводящем кольце может существовать лишь поверхностный электрический ток*.

Последний вывод, в частности, означает, что магнитное поле должно проникать хотя бы в тонкий поверхностный слой сверхпроводника. Измерения показывают, что глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник имеет порядок величины 10^{-7} м. На такой глубине укладывается около тысячи атомных слоев вещества.

Итак, пусть в кольце существует сверхпроводящий ток. Как известно, токовое состояние в сверхпроводнике является наинизшим квантовым коллективным состоянием бозонов — электронных пар (см. § 56). Ток дважды заряженных носителей (электронных пар) является макроскопическим, причем сила тока может принимать лишь ряд дискретных значений. Крупномасштабный магнитный поток (через сверхпроводящее кольцо), создаваемый этим током, испытывает квантование.

Для количественного описания указанных явлений для простоты введем полуклассическое рассмотрение, соединяющее в себе черты классического подхода (использование механики и электродинамики) и идеи квантования. Исходим из выражения для механического момента электронной пары [см. (9.32)]

$$L = [\mathbf{r}\mathbf{p}], \quad (61.19)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор центра масс пары; \mathbf{p} — импульс переноса пары (рис. 61.4). Выразим импульс \mathbf{p} через электродинамические параметры. Магнитная часть силы Лоренца (12.3)

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

действующей на электронную пару ($Q = 2e$) в постоянном однородном магнитном поле \mathbf{H} , созданном самим сверхпроводящим током, может быть преобразована следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{Q}{2c} \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{H} \right] = \frac{Q}{2c} \frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{H}].$$

Опустим операцию d/dt слева и справа, тогда импульс электронной пары выразится как

$$\mathbf{p} = \frac{Q}{2c} [\mathbf{r}\mathbf{H}]. \quad (61.20)$$

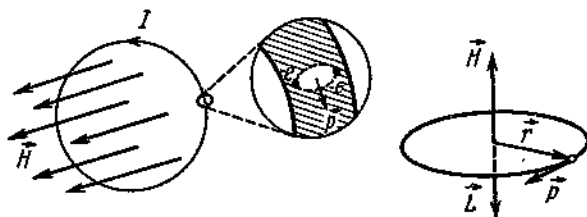


Рис. 61.4

Подставим теперь (61.20) в (61.19):

$$\mathbf{L} = \frac{Q}{2c} [\mathbf{r} [\mathbf{r} \mathbf{H}]] = \frac{Q}{2c} \mathbf{r} (\mathbf{r} \mathbf{H}) - \frac{Q}{2c} \mathbf{H} (\mathbf{r} \mathbf{r}) = - \frac{Q}{2c} \mathbf{H} r^2. \quad (61.21)$$

В (61.21) использовано правило для двойного векторного произведения

$$[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]] = \mathbf{b} (\mathbf{a} \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \mathbf{b}) \quad (61.22)$$

и то обстоятельство, что $(\mathbf{r} \mathbf{H}) = 0$, ибо $\mathbf{r} \perp \mathbf{H}$.

Перепишем (61.21) в виде

$$|\mathbf{L}| = \frac{Q}{2\pi c} H \pi r^2 = \frac{Q}{2\pi c} \Phi, \quad (61.23)$$

где Φ — магнитный поток через площадку, огибаемую сверхпроводящим кольцом с током, см. (13.1). Так как механический момент всякой квантовой системы (в данном случае макроскопической) может принимать лишь дискретный ряд значений, то (61.23) перейдет в

$$n \hbar = \frac{Q}{2\pi c} \Phi_n. \quad (61.24)$$

Здесь Φ_n — квантованный магнитный поток, причем $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Для кванта крупномасштабного магнитного потока получим значение

$$\Phi_1 = \pi \frac{\hbar c}{e}. \quad (61.25)$$

Подстановка числовых значений, выраженных в СГС, и перевод ответа в СИ дают

$$\Phi_1 \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ Вб.}$$

Такой поток вполне можно создать в колечке с размерами в 1 мм.

Конечно, указанное рассмотрение тока в сверхпроводящем кольце далеко не последовательно. Правильнее было бы использовать макроскопическую волновую функцию сверхпроводящего «конденсата» и все условия, налагаемые на эту функцию. Такой подход также приводит к формуле (61.25).

Сверхпроводящее кольцо с током напоминает атом водорода. В связи с этим заметим, что в возбужденных состояниях размеры атомов существенно возрастают. Действительно, записывая (24.9) в виде

$$e^2/r_n = e^2/(r_a n^2), \\ r_n = r_a n^2.$$

получим

Так, в свободном космическом пространстве существуют атомы водорода, возбужденные до 100–150-го состояния. При $n = 100$ радиус атома водорода возрастает в 10^4 раз, т. е. его размеры составляют около 10^{-6} м.

§ 62. ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СРЕД

62.1 Переменные поля и вещество Отклик вещества на внешнее воздействие электрическим и магнитным полями зависит не только от состояния вещества (например, его температуры), но и от частоты внешних полей (их зависимости от времени). При весьма высоких частотах ω внешнего электромагнитного поля значения диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемости вещества стремятся к их значениям в вакууме. При частотах ω , сравнимых с собственными (характерными) частотами ω_0 самого вещества, например с частотами, связанными с колебаниями молекулярных дипольных электрических моментов или магнитных атомных моментов, наступает чрезвычайно резкая зависимость проницаемостей $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ от частоты.

Остановимся сперва на таких переменных полях, в которых длина волны $\lambda \sim c/\omega$, соответствующая частоте поля ω , велика по сравнению с размерами l тела:

$$\lambda \gg l$$

или

$$\omega \ll c/l. \quad (62.1)$$

Условие (62.1) означает, что мы пренебрегаем эффектами запаздывания, связанными с конечной скоростью распространения электромагнитных возмущений. Лишь до тех пор, пока частота переменного тока удовлетворяет условию (62.1), мгновенное значение силы тока $I(t)$ в цепи определяется значением э.д.с. $\mathcal{E}(t)$ в тот же момент времени по соотношению

$$I(t) = \frac{1}{R} \mathcal{E}(t), \quad (62.2)$$

см. (58.10).

62.2 Индукционная э. д. с. Практически удобный способ получения переменной э. д. с. \mathcal{E}_i состоит в том, что вращающийся проводящий контур длиной l помещают во внешнее магнитное поле H , тогда, согласно (13.6)

$$\mathcal{E}_i \equiv \langle E_t \rangle l = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\langle H_n \rangle S) = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (62.3)$$

Здесь э. д. с. возникает в результате появления циркулирующего электрического поля E , которое совершает работу по перемещению зарядов вдоль контура l .

Расположим проводящую рамку (контур) в однородном постоянном поле H (рис. 62.1). Пусть рамка вращается с угловой скоростью ω . Положение рамки в любой момент времени t зададим углом

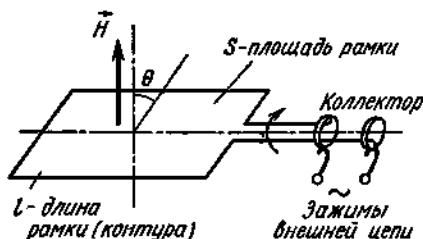


Рис. 62.1

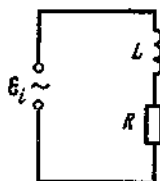


Рис. 62.2

$\theta = \omega t + \alpha$, а постоянная α определяет ориентацию рамки при $t = 0$. Поток Φ магнитного поля через плоскость рамки равен произведению его нормального компонента $H_n = H \sin \theta$ на поверхность S , охватываемую рамкой, т. е.

$$\Phi(t) = SH \sin(\omega t + \alpha). \quad (62.4)$$

В соответствии с (62.3) для наведенной (индуцированной) э. д. с. получим

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{SH\omega}{c} \cos(\omega t + \alpha), \quad (62.5)$$

или

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (62.6)$$

Если в электрическую цепь включить э. д. с. типа (62.6), то в отдельных участках цепи могут возникнуть явления, которые можно было бы назвать *самоиндукцией*. Дело в том, что периодическая э. д. с. (62.6) вызовет и периодический ток $I(t)$, см. (62.2). Сам же ток сопровождается появлением собственного магнитного поля [см., например, (15.2)], поток которого

$$\Phi_{\text{собств}}(t) = \frac{1}{c} LI(t), \quad (62.7)$$

где L — некоторый коэффициент, имеющий размерность длины и зависящий от формы и размеров проводника, причем в L «упрятаны» и магнитные характеристики μ среды, окружающей проводник. Переменный собственный магнитный поток $\Phi_{\text{собств}}(t)$ возбudit и собственную э. д. с.

$$\mathcal{E}_{\text{ia}} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi_{\text{собств}} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c} LI \right) = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}. \quad (62.8)$$

Такую э. д. с. называют э. д. с. *самоиндукции*, а коэффициент L — *коэффициентом самоиндукции*. Значение L особенно велико у проводящих катушек с железными сердечниками.

62.3 Цепи переменного тока. Решения дифференциальных уравнений Составим цепь резистора с сопротивлением R и индуктивностью L (так обозначают элемент цепи, содержащий катушку с коэффициентом самоиндукции L). Подключим цепь к внешней периодической э. д. с. \mathcal{E}_i (рис. 62.2) и изучим зависимость тока $I(t)$ в цепи от времени. Основой при составлении уравнения цепи является соотношение

(58.10). Для данного случая оно выглядит так:

$$IR = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (62.9)$$

или
$$\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_1. \quad (62.10)$$

Как найти решение $I(t)$ дифференциального уравнения (62.10)? Характер этого решения можно заранее качественно предвидеть. В самом деле, интересуясь лишь установившимся режимом в цепи и опуская все переходные процессы, можно сказать, что ток должен совершать периодические вынужденные колебания, но с некоторым сдвигом фазы по отношению к внешней периодической э.д.с. Итак, пусть решение уравнения

$$\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (62.11)$$

имеет вид
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (62.12)$$

в котором неизвестные постоянные I_0 и φ должны быть определены.

Для упрощения записи исходного уравнения и для того, чтобы пользоваться удобными в электротехнических расчетах практическими единицами: ампером, вольт, ом и т.д., перейдем к системе СИ. Для этого воспользуемся коэффициентами перевода из системы СГС в СИ (см. приложение II, табл. II, 1), а именно:

$$c^2 \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}, \quad L \rightarrow \frac{4\pi}{\mu_0} L, \quad R \rightarrow 4\pi \epsilon_0 R,$$

$$I \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi \epsilon_0}} I, \quad \mathcal{E}_0 \rightarrow \sqrt{4\pi \epsilon_0} \mathcal{E}_0.$$

В результате уравнение (62.11) принимает вид

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad (62.11a)$$

т. е. из него выпадает константа c^2 .

Итак, нам требуется найти постоянные I_0 и φ в решении (62.12). Для этого подставляем (62.12) в (62.11a):

$$-LI_0\omega \sin(\omega t + \varphi) + RI_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Воспользуемся известными формулами для синуса и косинуса суммы двух углов, тогда

$$-LI_0\omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) + RI_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Перенесем все члены этого уравнения в одну сторону и преобразуем его к виду

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = 0.$$

Так как это равенство удовлетворено, если и A , и B одновременно равны нулю, то получим

$$-LI_0\omega \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 = 0, \quad (62.13)$$

$$-LI_0\omega \cos \varphi - RI_0 \sin \varphi = 0. \quad (62.14)$$

Из выражения (62.14) для сдвига фаз между током и э.д.с. имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = -L\omega/R \quad (62.15)$$

или
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + L^2 \omega^2 / R^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}. \quad (62.16)$$

Из (62.13) для амплитуды тока получим

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R \cos \varphi - L\omega \sin \varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{R(\cos \varphi + \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi)} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \varphi = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}. \quad (62.17)$$

При преобразованиях в (62.17) мы последовательно использовали формулы (62.15), (62.16). Таким образом, поставленная задача решена.

Если э.д.с. \mathcal{E}_i мгновенно отключить, то ток (62.12) сразу не исчезнет, а начнет затухать. Полагая в (62.10) $\mathcal{E}_i = 0$, получим уравнение для переходного процесса затухания

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0. \quad (62.18)$$

Решение этого уравнения можно найти чисто формально, если произвести так называемое разделение переменных. А именно, преобразуем (62.18) к виду

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

и проинтегрируем обе стороны полученного равенства:

$$\int \frac{1}{I} dI = -\frac{R}{L} \int dt + \text{const},$$

или
$$\ln I = -(R/L)t + \text{const}. \quad (62.19)$$

Воспользуемся теперь известной формулой

$$a = \ln e^a, \quad (62.20)$$

тогда (62.19) запишется как

$$\ln I = \ln e^{-(R/L)t} + \ln e^{\text{const}} = \ln (e^{\text{const}} \cdot e^{-(R/L)t}) = \ln (\text{const}' e^{-(R/L)t}).$$

В результате

$$I = \text{const}' e^{-(R/L)t}. \quad (62.21)$$

За промежуток времени

$$\Delta t \approx L/R \quad (62.22)$$

ток в цепи практически исчезнет.

Рассмотрим цепь совершенно другого рода. Речь идет о так называемом *колебательном контуре*, т. е. цепи, состоящей из катушки индуктивности L и конденсатора с емкостью C . Пренебрежем сопротивлением R контура и сообщим заряд Q обкладкам конденсатора (рис. 62.3). Наша цель состоит в том, чтобы разобраться в тех явлениях, которые происходят при разрядке конденсатора. Прежде всего необходимо составить уравнение рассматриваемой цепи. Используя (60.8), (62.8) и правило Кирхгофа (58.10), получим

$$Q(t)/C = \mathcal{E}_L. \quad (62.23)$$

Помня, что

$$I = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (62.24)$$

[см. (58.2)], и переходя в \mathcal{E}_B от тока $I(t)$ к зарядам $Q(t)$, уравнение (62.23) перепишем в виде

$$\frac{Q(t)}{C} = -\frac{1}{c^2} L \frac{d}{dt} \left(\frac{dQ(t)}{dt} \right) = -\frac{1}{c^2} L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2},$$

или

$$\frac{1}{c^2} L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} Q(t) = 0. \quad (62.25)$$

Запишем это уравнение в системе СИ, для этого используем коэффициенты перевода (см. приложение II, табл. II.1):

$$Q \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} Q, \quad C \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} C, \quad L \rightarrow \frac{4\pi}{\mu_0} L, \quad c^2 \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}.$$

В результате получим

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = 0. \quad (62.25^*)$$

Уравнение (62.25*) является уравнением типа

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -f. \quad (62.26)$$

Последнее описывает важнейший в физике объект — гармонический осциллятор. Чтобы решить это уравнение, нужно, по существу, найти такую функцию $f(t)$, которая бы при двойном дифференцировании переходила в себя, умножившись на -1 . Этой функцией является

$$f = \cos t. \quad (62.27)$$

Действительно: $df/dt = -\sin t$, а $d^2 f/dt^2 = -\cos t = -f$.

Таким образом, решением уравнения (62.25*), приведенного к виду

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q, \quad (62.28)$$

явится функция вида

$$Q(t) = \cos \omega t. \quad (62.29)$$

Чтобы найти неизвестный параметр ω , подставим (62.29) в (62.28). Для этого сперва произведем последовательные дифференцирования:

$$\begin{aligned} dQ/dt &= -\omega \sin \omega t, \\ d^2 Q/dt^2 &= -\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

В результате (62.28) перейдет в

$$-\omega^2 \cos \omega t = -\frac{1}{LC} \cos \omega t,$$

или

$$\omega^2 = 1/(LC). \quad (62.30)$$

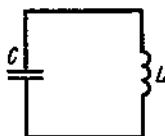
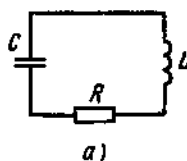


Рис. 62.3



а)

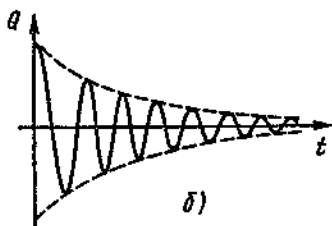


Рис. 62.4

Параметр ω является не чем иным, как *собственной частотой* колебаний заряда в контуре LC . Ее обычно обозначают

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (62.31)$$

Колебания ω_0 являются незатухающими: ведь мы пренебрегли сопротивлением R , на котором могут возникнуть джоулевы тепловые потери. Однако для возбуждения колебаний в контуре в систему необходимо ввести энергию (например, в форме энергии электрического поля конденсатора).

Что произойдет с собственными колебаниями в контуре LC , если включить в рассмотрение его сопротивление R ? Ясно, что возбужденные колебания в нем быстро затухнут. Найдем закон этого затухания. Прежде всего уравнением для контура RLC явится

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = \mathcal{E}_{\text{из}}, \quad (62.32)$$

или
$$\frac{1}{c^2} L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = 0, \quad (62.33)$$

которое в системе СИ запишется аналогично (только без константы c^2)*, т. е.

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0. \quad (62.33^*)$$

Уравнение (62.32) является обобщением (62.23).

Естественно искать решение уравнения (62.33*) в форме

$$Q(t) = A e^{-\gamma t} \cos \omega t, \quad (62.34)$$

где A , γ и ω — неизвестные постоянные.

Найдем первую и вторую производные от функции (62.34):

$$\frac{dQ}{dt} = A(-\gamma e^{-\gamma t} \cos \omega t - \omega e^{-\gamma t} \sin \omega t) = -A e^{-\gamma t} (\gamma \cos \omega t + \omega \sin \omega t),$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = A e^{-\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\gamma \omega \sin \omega t].$$

* Читатель может легко проверить это, используя соответствующие коэффициенты перевода.

Подставляя $Q(t)$, dQ/dt , d^2Q/dt^2 в (62.33*) и сокращая на множитель $Le^{-\gamma t}$, получим

$$L[(\gamma^2 - \omega^2)\cos \omega t + 2\gamma\omega \sin \omega t] - R(\gamma \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{C}\cos \omega t = 0.$$

Это выражение справедливо для любых моментов времени t , если равны нулю коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. В результате получаем два условия:

$$L(\gamma^2 - \omega^2) - R\gamma + \frac{1}{C} = 0 \quad (62.35)$$

$$\text{и} \quad L \cdot 2\gamma - R = 0. \quad (62.36)$$

Из (62.36) имеем

$$\gamma = R/(2L). \quad (62.37)$$

Подставляя найденное выражение для γ в (62.35), отыщем и

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}. \quad (62.38)$$

В предельном случае $R \rightarrow 0$ (62.38) переходит в (62.30). Величину γ называют *декрементом затухания*. Сопоставление декремента затухания (62.37) с аналогичным декрементом, входящим в (62.21), показывает, что само затухание обусловлено лишь сопротивлением R и «инерционностью» катушки L ; емкость C на затухание не влияет. Сам характер затухания колебаний в контуре RLC (рис. 62.4, а) показан на рис. 62.4, б.

Чтобы колебания в контуре RLC не были затухающими, потери энергии в нем необходимо восполнять от внешнего источника. Включение в контур RLC внешней периодической э.д.с. \mathcal{E}_1 создаст в самом контуре незатухающие колебания с частотой, равной частоте изменения э.д.с. Уравнение колебаний заряда $Q(t)$ в этом случае отличается от (62.33*) наличием э.д.с. в правой части, т. е.

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (62.39)$$

Перейдем, однако, от уравнения для заряда к уравнению для тока. При этом, используя (62.24), предварительно получим

$$dQ = I dt,$$

$$\text{или} \quad Q = \int I dt. \quad (62.40)$$

В результате (62.39) перейдет в

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (62.41)$$

Рассматривая лишь установившийся режим вынужденных колебаний, решение уравнения (62.41) будем искать в виде

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (62.42)$$

где постоянные I_0 и φ предстоит определить.

Вычислим входящий в (62.41) интеграл

$$\int I dt = \int I_0 \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{I_0}{\omega} \int \cos(\omega t + \varphi) d(\omega t + \varphi) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi).$$

В итоге (62.41) с функцией (62.42) запишется так:

$$-LI_0\omega \sin(\omega t + \varphi) + RI_0 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi) - \mathcal{E}_0 \cos \omega t = 0.$$

Раскроем выражения для синуса и косинуса суммы двух углов. Приравняв нулю коэффициенты, получающиеся при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получим два условия:

$$\left(\frac{1}{\omega C} - L\omega \right) \cos \varphi - R \sin \varphi = 0 \quad (62.43)$$

$$\text{и} \quad \left(\frac{I_0}{\omega C} - LI_0\omega \right) \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 = 0. \quad (62.44)$$

Из (62.43) найдем φ , а именно

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \frac{1}{R}. \quad (62.45)$$

Из (62.44) можно получить I_0 , однако предварительно выпишем выражения для

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1/(\omega C) - L\omega}{\sqrt{R^2 + [1/(\omega C) - \omega L]^2}}$$

$$\text{и} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + [1/(\omega C) - \omega L]^2}}.$$

Подставляя их в (62.44), получим

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + [1/(\omega C) - \omega L]^2}}. \quad (62.46)$$

Амплитуда тока I_0 максимальна, когда подкоренное выражение в (62.46) минимально, т. е. при

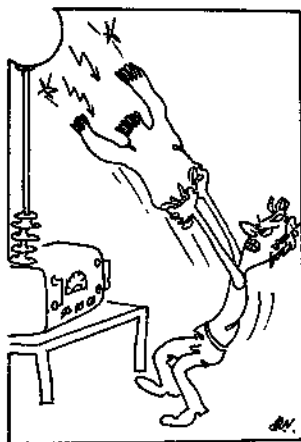
$$\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) = 0.$$

Отсюда

$$\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0. \quad (62.47)$$

Совпадение частоты ω внешнего возмущения с собственной частотой ω_0 колебаний в контуре [см. (62.31)] ведет к тому, что амплитуда колебаний тока равна \mathcal{E}_0/R . При стремлении $R \rightarrow 0$ амплитуда $I_0 \rightarrow \infty$. Это явление называют *резонансом*.

62.4 Генерация электромагнитных волн Наличие высокочастотного тока в контуре RLC означает, что электроны проводимости совершают движение с большим ускорением (ускорение пропорционально квадрату частоты, см. § 18.3). Но всякое ускоренное движение зарядов сопровождается излучением электромагнитных волн, причем интенсивность излучения пропорциональна частоте в четвертой степени,



см. (18.7). Сами же собственные частоты контура LC растут при уменьшении емкости и индуктивности [см. (62.31)]. Отсюда вытекает рецепт генерации высокочастотных электромагнитных волн: *необходимо работать с контурами, имеющими малую емкость и малую индуктивность.*

В качестве емкости обычно используют конденсаторы. Получим выражение для емкости C плоского конденсатора (рис. 62.5, а). Исходим из соотношения (60.8)

$$C = Q/\Delta\varphi.$$

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ определим по (14.14):

$$\Delta\varphi = E\Delta l,$$

где Δl — расстояние между пластинами конденсатора. Напряженность E электрического поля конденсатора нами уже вычислялась, см. (14.5):

$$E = 4\pi\sigma.$$

Здесь σ — поверхностная плотность зарядов. Последняя определяет в исходной формуле и сам заряд:

$$Q = \sigma S,$$

где S — площадь пластин конденсатора. Собрав все выражения вместе, получим

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma S}{E\Delta l} = \frac{\sigma S}{4\pi\sigma\Delta l} = \frac{S}{4\pi\Delta l}. \quad (62.48)$$

Из формулы (62.48) видно, что нужно делать, чтобы емкость конденсатора была малой: необходимо уменьшать площадь пластин и увеличивать расстояние между пластинами. Что касается индуктивности, то переход к малым значениям L означает, что нужно заменять катушки линейными проводниками. В результате «закрытый» низкочастотный колебательный контур переходит в «открытый» высокочастотный колебательный контур (рис. 62.5, б).

62.5 Некоторые законы оптики сред. Скорость распространения электромагнитных волн в среде. Отражение и преломление волн В нашем изложении оптические явления разбросаны по многим разделам. Это сделано по той причине, что, во-первых, свет неразрывно связан со множеством физических явлений; во-вторых, свет — это необычайно многоликий объект, свойства которого раскрываются по мере перехода на все более глубокие уровни исследования («от классики к релятивизму, от релятивизма к квантованию»).

Что мы уже знаем о свете? Прежде всего напомним (см. § 19), что свет — это электромагнитные волны, расположенные в определенном диапазоне частот. В § 19 рассматривались вопросы, связанные с законами распространения света в вакууме, в частности явления

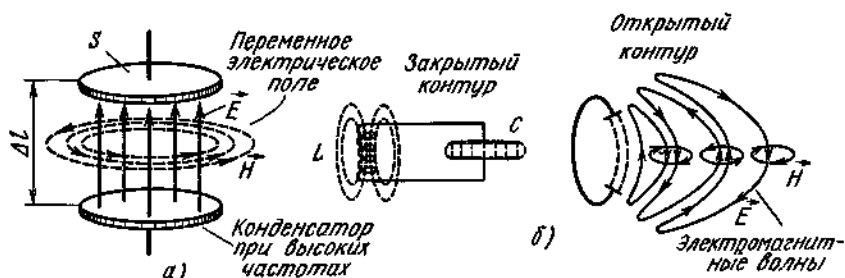


Рис. 62.5

интерференции и дифракции. Там же было показано, при каких условиях возможен переход от волновой картины распространения света к представлениям лучевой (геометрической) оптики.

Говоря об источниках излучения (света), мы остановились в § 17 на классическом бетатронном излучении свободных электронов в магнитных полях в видимой области частот. Именно таков механизм свечения «газовых» туманностей в межзвездной среде и, в частности, свечения остатков сверхновых звезд — их оболочек, образующихся при вспышках сверхновых. В § 26 изучалось дискретное излучение связанных атомных электронов, возникающее при квантовых переходах в возбужденных атомах. Нам уже известно, что именно эти линейчатые спектры излучения атомов явились базой для спектрального анализа состава вещества не только в земных условиях, но и в условиях близкого и далекого космоса.

Условия, при которых четко проявляется фотонная картина поля излучения, рассматривались в § 26. Там же отмечалась причина того, почему возможен предельный переход от фотонной картины поля излучения к классическим электромагнитным волнам. В § 26 рассматривались также экспериментальные основания для квантования поля излучения — это фотоэффект и комптон-эффект.

Равновесному тепловому излучению макроскопических тел был посвящен § 38. Здесь использовалось представление о равновесном излучении как идеальном «газе» фотонов. Было выяснено, что этот равновесный фотонный газ описывается формулой Планка, в которую входит такой параметр, как температура. Изучая частотное распределение энергии в излучении Солнца и звезд и считая это излучение тепловым, можно определять температуры этих недоступных для нас объектов. Более того, обнаружение изотропного реликтового электромагнитного радиоизлучения (см. § 77.1), имеющего планковский спектр, а значит, и тепловое происхождение, позволяет астрофизикам и космологам заглянуть в далекое прошлое нашей Вселенной и кое-что узнать о состоянии вещества в те эпохи (например, о его температуре). За время расширения Вселенной эффективная температура этого «остаточного» теплового излучения понизилась до 3 К.

Наконец, в § 59 из оптических явлений рассматривалось поглощение света в полупроводниковых кристаллах и образование экситонных состояний. В этом же параграфе изучался внутренний фотоэффект в полупроводниках, а также принцип действия солнечных батарей.

В заключение настоящего обзора, пройденного из области оптики, следует вообще отметить выдающуюся роль оптических явлений в становлении самой физики, в частности таких фундаментальных физических теорий, как теории относительности и квантовой теории. Что же касается связи оптики с новой техникой, отметим такие направления последней, как лазеры, лазерная связь, голография, оптоэлектроника, волоконная оптика и в перспективе оптические ЭВМ.

Продолжим рассмотрение оптических явлений, при этом для общности мы будем говорить об электромагнитных волнах, частным случаем которых является свет. Сейчас перед нами задача: изучить влияние среды на ход оптических явлений.

В § 62.1 уже отмечалось, что внешние переменные электромагнитные поля могут оказывать существенное влияние на свойства вещества. Это влияние проявляется в том, что, например, поляризация вещества, связанная с ориентационными колебаниями дипольных и магнитных моментов отдельных частиц, может испытывать существенную зависимость от частоты внешнего поля.

Существует и обратное влияние вещества (среды) на свойства пространства в них переменных электромагнитных полей. Так, электромагнитные волны испытывают отражение и преломление на границе двух сред. Скорость распространения электромагнитных волн в веществе иная, чем в вакууме (она меньше предельной).

В отличие от вакуума в среде возможны так называемые *нелинейные электродинамические эффекты*. Дело в том, что основные уравнения электродинамики (см. § 13) являются линейными; для них справедлив принцип наложения полей. Принцип суперпозиции ведет к тому, что электромагнитные волны не рассеиваются друг на друге. В среде же электромагнитные волны с очень высокими напряженностями полей (например, лазерные пучки) настолько сильно влияют на вещество, что диэлектрическая и магнитная проницаемости становятся функциями поля. Эти изменения $\epsilon(\omega, E)$ и $\mu(\omega, H)$ влияют, в свою очередь, на электромагнитные волны: возникают волны новых частот, являющиеся результатом «как бы взаимодействия волн исходных».

Еще один пример принципиальной роли среды в протекании электродинамических явлений. В вакууме заряды, движущиеся с постоянной скоростью, не излучают (см. § 17.2). Если в прозрачный диэлектрик влетает электрон высокой энергии, имеющий скорость выше скорости света в данной среде, то возникает излучение среды под влиянием поля электрона. Причем передний фронт этого излучения напоминает ударную волну, возникающую в среде при сверхзвуковом движении тел (см. рис. 50.1, б). Такое излучение называют *излучением Вавилова — Черенкова*.

Перейдем к количественному рассмотрению поведения электромагнитных волн (и, в частности, света) в среде. Почему свет при переходе из вакуума в прозрачную диэлектрическую среду изменяет свою скорость распространения? Дело в том, что помимо поляризации молекул (или атомов) среды быстропеременное электрическое поле световой волны вызывает столь же быстрые осцилляции индуцированных дипольных моментов. Эти вынужденные колебания всех диполей среды

являются согласованными, поскольку фронт световой волны охватывает сразу достаточно большие участки. Поскольку же колебательное движение зарядов диполей является ускоренным, в среде возникнет поле излучения. Это поле излучения самой среды интерферирует с первоначальным полем световой волны. Результатом интерференции является сдвиг фазы световой волны. В целом это проявляется как изменение фазовой скорости света в среде (о фазовой и групповой скоростях в волновых процессах см. § 48.2).

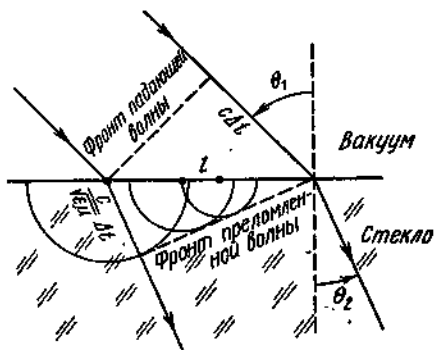


Рис. 62.6

Как известно, электрическая поляризуемость вещества определяет значение диэлектрической проницаемости среды (см. § 60.3). Поэтому естественно ожидать, что фазовая скорость v_ϕ света в однородной диэлектрической среде выражается через скорость света c в вакууме, диэлектрическую проницаемость ϵ и, в общем случае, магнитную проницаемость μ . А именно,

$$v_\phi = c/\sqrt{\epsilon\mu}. \quad (62.49)$$

В случае вакуума $\epsilon = \mu = 1$, а скорость волн равна c . В диэлектриках $\epsilon > 1$, т. е. скорость волн в них меньше c .

Поскольку на границе вакуума и диэлектрической среды скорость электромагнитных волн изменяется, это, естественно, приводит к изменению направления распространения волны, т. е. к ее *преломлению* на границе (рис. 62.6). Отношение скорости распространения c электромагнитных волн в вакууме к их скорости $c/\sqrt{\epsilon\mu}$ в среде

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (62.50)$$

называют *показателем преломления* среды.

Найдем связь между углом падения θ_1 и углом преломления θ_2 световой волны (рис. 62.6). Для этого рассмотрим два прямоугольных треугольника, образованных фронтами падающей и преломленной волн и общей гипотенузой l , совпадающей с границей раздела вакуум — среда. Тогда

$$c \Delta t = l \sin \theta_1$$

и

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \Delta t = l \sin \theta_2.$$

Деля первое равенство на второе и учитывая (62.50), получим

$$n = \sin \theta_1 / \sin \theta_2. \quad (62.51)$$

Это так называемый *закон преломления Снеллиуса*.

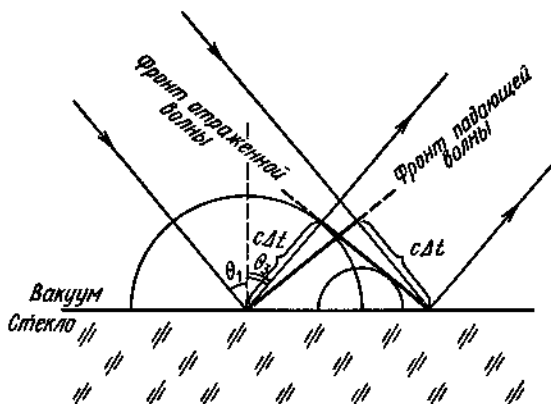


Рис. 62.7

Опыт показывает, что на границе вакуум — среда (диэлектрик), а также на границе двух прозрачных диэлектрических сред падающая волна вызывает одновременное появление преломленной и отраженной волн. Схема образования отраженной волны показана на рис. 62.7. Следовало бы рис. 62.6 и рис. 62.7 совместить в один — их разделение вызвано лишь удобством. Пользуясь теми же соображениями, что и в случае волны преломленной, получим

$$c \Delta t = l \sin \theta_1 \text{ и } c \Delta t = l \sin \theta_3,$$

или

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_3.$$

Это равенство справедливо, если

$$\theta_1 = \theta_3. \quad (62.52)$$

Для падающей и отраженной волн имеет место равенство углов падения θ_1 и углов отражения θ_3 .

Заметим, что соотношения (62.51) и (62.52) автоматически следуют из рассмотрения граничных условий для полей, поскольку на границе уравнения Максвелла должны удовлетворяться.

62.6 Показатель преломления в диэлектриках. Дисперсия света. Поглощение света Обычные диэлектрики могут проявлять диа- и парамагнитные свойства и их магнитная проницаемость μ очень близка к единице. Значения $\mu \gg 1$ встречаются у диэлектриков с ферромагнитной структурой (ферриты), но при оптических частотах электромагнитных волн их магнитная проницаемость $\mu = 1$; это обстоятельство связано с тем, что у ферромагнитных изоляторов зависимость μ от частоты проявляется уже сравнительно рано (вследствие «инерционности» массивных доменов) и сопровождается уменьшением μ практически до единицы. Таким образом, формула (62.50) может быть в очень хорошем приближении записана как

$$n^2 = \epsilon. \quad (62.53)$$

Воспользуемся выражением (60.18) для ϵ , тогда (62.53) переписывается в виде

$$n^2 = 1 + \alpha N, \quad (62.54)$$

где N — число атомов в единичном объеме, а α — атомная поляризуемость. Последняя связана с наведенным дипольным моментом атома

$$d = \frac{1}{4\pi} \alpha E; \quad (62.55)$$

при написании (62.55) использовались соотношения (60.13) и (60.17). В свою очередь,

$$d = er \quad (62.56)$$

(см. § 14.4), где e — заряд атомного электрона, а r — его смещение в электрическом поле волны.

Рассмотрим модель атома, в которой электрон совершает вынужденные колебания под влиянием периодического поля световой волны. Напишем уравнение движения таких связанных колебаний:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -m\omega_0^2 r + eE. \quad (62.57)$$

Здесь справа стоят «упругая» возвращающая сила (см. § 60.3) и силовое возмущение со стороны электрического поля световой волны. Пусть волна линейно поляризована и электрон колеблется (осциллирует) вдоль поля, тогда (62.57) запишется как

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t. \quad (62.58)$$

Решению такого рода уравнений мы посвятили много времени в § 62.3. Естественно искать смещение r электрона в виде

$$r = r_0 \cos \omega t; \quad (62.59)$$

электрон колеблется синхронно с полем. Подставляя (62.59) в (62.58), получим

$$r_0 = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0,$$

или

$$r = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E. \quad (62.60)$$

Совершим обратное «восхождение» вдоль цепочки формул (62.56) → (62.54). Для этого подставим (62.60) в (62.56), тогда

$$d = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E. \quad (62.61)$$

Сравнивая (62.61) с (62.55), получим

$$\alpha = 4\pi \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (62.62)$$

Наконец, подставляя (62.62) в (62.54), окончательно запишем

$$n^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (62.63)$$

Заметим, что все рассмотрение в настоящем параграфе носит качественный характер. Поэтому не следует удивляться, что все формулы, содержащие множитель $1/(\omega_0^2 - \omega^2)$, теряют смысл при $\omega \rightarrow \omega_0$. Указанные формулы могут стать корректными, если учесть затухание колебаний атомного электрона под влиянием его взаимодействия с окружающими соседними атомами. Зависимость (62.63) графически представлена на рис. 62.8. Реальная кривая $n(\omega)$ с учетом затухания дана на рис. 62.9.

Так как показатель преломления $n(\omega)$ оказался, согласно (62.63), функцией частоты, то естественный белый свет, представляющий собой целый набор волн с различными близкими частотами, испытает при прохождении через диэлектрик разложение (дисперсию) на свои «окрашенные» компоненты. Следует иметь в виду, что в (62.63) «собственные частоты» ω_0 атомных электронов весьма велики (у водорода, например, для основного состояния они относятся к ультрафиолетовой части спектра — см. рис. 26.1). В связи с этим, в частности, голубые лучи, являющиеся более высокочастотными по сравнению с красными, имеют, согласно (62.63), и больший показатель преломления.

При частотах ω электромагнитного излучения, близких к «собственным частотам» ω_0 вещества, происходит его резонансное поглощение веществом. По этой причине, например, обычное стекло не пропускает ультрафиолет.

62.7 Показатель преломления в металлах. Скин-эффект. Прозрачность металлов к жесткому излучению Так как в металлах в отличие от диэлектриков имеются свободные электроны, то, естественно, они и принимают практически всю энергию внешнего переменного поля на себя. Полагаем в (62.63) $\omega_0 = 0$ (для свободных электронов в уравнении движения (62.57) нет упругой возвращающей силы), тогда

$$n^2 = 1 - 4\pi \frac{N_e e^2}{m\omega^2}, \quad (62.64)$$

или
$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (62.65)$$

где
$$\omega_p = \sqrt{4\pi N_e e^2 / m}, \quad (62.66)$$

а N_e — число свободных электронов в единичном объеме.

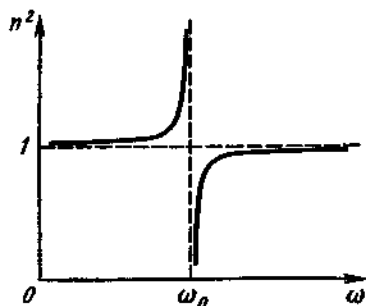


Рис. 62.8

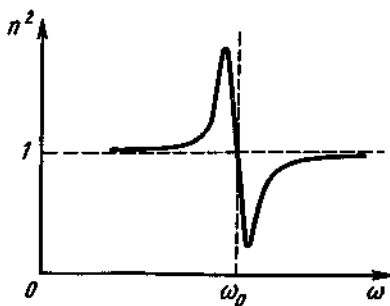


Рис. 62.9

Рассмотрим два предельных случая. При

$$\omega^2 < \omega_p^2 \quad (62.67)$$

значение n^2 становится отрицательным, т. е. показатель преломления — мнимым. Это означает, что электромагнитная волна не проходит сквозь вещество и в указанной области частот резко гасится (поглощается) в тонком поверхностном слое.

Каков механизм поглощения энергии волны в металле? Если сравнить (62.66) с (57.6), то условие (62.67) перейдет в

$$\omega^2 < 4\pi\sigma/\tau, \quad (62.68)$$

где σ — удельная электронная проводимость, а τ — среднее время между столкновениями свободных электронов с фононами (колебаниями решетки). Таким образом, при частотах поля

$$\omega \ll 1/\tau \quad (62.69)$$

за один период волны электрон проводимости успеет испытать многократные столкновения с решеткой. В результате вся поглощенная электронами энергия поля перейдет в конечном счете в теплоту. Реально это проявляется в существовании так называемого *скин-эффекта*: в высокочастотном поле поверхностный слой металла сильно разогревается, а сердцевина образца остается холодной.

В обратном предельном случае, т. е. при частотах электромагнитных волн

$$\omega \gg \omega_p, \quad (62.70)$$

показатель преломления (62.65) становится вещественным, а значит, металл — прозрачным. Каков порядок величины частот ω_p колебаний плотности свободных электронов? Так как в металлах $N_e \sim 10^{28}$ электронов/м³ (см. § 39.6), то, подставив в (62.66) значение заряда e и массы m электрона, получим

$$\omega_p \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$$

(напоминаем, что в формулу (62.66) нужно подставлять величины, выраженные в СГС, а затем ответ переводим в СИ). Эта частота соответствует ультрафиолету. Учитывая (62.70), можно заключить, что металлы прозрачны для рентгеновского излучения. Практика это подтверждает.

Причина того, что металлы почти не поглощают жесткого коротковолнового излучения, кроется в том, что в рассматриваемом случае неравенство (62.69) заменяется неравенством противоположного смысла. Это означает, что колебания электронов проводимости в быстропеременном внешнем поле происходят практически без столкновений с «соседями».

62.8 Эффекты нелинейной оптики Если напряженности электрического поля в световой волне много меньше внутриатомных напряженностей поля, то влиянием света на оптические свойства среды можно пренебречь. Оценим в качестве примера напряженность поля в атоме водорода. Воспользуемся для этого выражением (14.1), которое дает

$$E = e/r^2; \quad E = 6 \cdot 10^{11} \text{ В/м}$$

(расчет по этой формуле ведется в СГС, а затем ответ переводится в СИ). Именно такое электрическое поле действует на водородный электрон.

Световые поля от обычных тепловых источников (лампы накаливания и др.) чрезвычайно малы по сравнению со значениями порядка 10^{11} В/м; такие поля мы будем называть «слабыми». Лазеры позволяют получить световые волны с напряженностью $10^8 - 10^{10}$ В/м; эти поля уже сравнимы с внутренними полями в среде и их мы будем называть «сильными».

Слабые световые поля не могут заметно влиять на внутриатомные электроны, а значит, и оказывать воздействие на оптические характеристики среды. Например, показатель преломления останется неизменным, т. е. не будет зависеть от интенсивности волны.

Если такие характеристики среды, как ϵ , μ , n , не зависят от интенсивности светового поля, то сама световая волна, распространяясь в среде, должна описываться системой линейных дифференциальных уравнений. По этой причине закономерности всех оптических явлений в среде, полученные на базе указанных уравнений, называют *линейными*.

Чтобы показать характер влияния света большой интенсивности на оптические свойства среды, вновь, как и в § 62.6, рассмотрим модель атома, в которой электрон совершает вынужденные колебания под влиянием периодического поля световой волны. Поскольку поле сильное, эти колебания уже нельзя считать гармоническими и в качестве «упругой» возвращающей силы необходимо брать нелинейное выражение

$$F(r) = -m\omega_0^2 r - Ar^3. \quad (62.71)$$

В § 62.6 мы ограничивались лишь линейной зависимостью $F(r)$, т. е. справа в (62.71) присутствовал только первый член. Почему в качестве ангармонического (нелинейного) члена взят кубический, можно уяснить из § 39.3, см. формулу (39.7).

Будем рассматривать область частот ω поля световой волны

$$E = E_0 \cos \omega t \quad (62.72)$$

вдали от резонансных частот ω_0 атома. Тогда затуханием колебаний атомного электрона можно пренебречь и его уравнение движения запишется как

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = eE(t) - m\omega_0^2 r - Ar^3; \quad (62.73)$$

сравните это уравнение с уравнением (62.57).

Пусть поле световой волны сильное, но все же значительно меньшее внутреннего поля. В этом случае нелинейный член в уравнении (62.73) можно считать малым, а само уравнение решать *методом последовательных приближений*. Суть метода состоит в том, что решение ищется в виде

$$r = r_{(1)} + r_{(2)}, \quad (62.74)$$

причем $r_{(2)} \ll r_{(1)}$.

Функция $r_{(1)}$ (первое приближение) удовлетворяет уравнению

$$m \frac{d^2 r_{(1)}}{dt^2} + m \omega_0^2 r_{(1)} = e E(t).$$

Это уравнение совпадает с уравнением (62.57), решение которого нам известно, см. (62.60):

$$r_{(1)} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E. \quad (62.75)$$

Второе приближение $r_{(2)}$ ищется из уравнения

$$m \frac{d^2 r_{(2)}}{dt^2} + m \omega_0^2 r_{(2)} = -A r_{(1)}^3.$$

Подставляя в это уравнение выражение (62.75) для $r_{(1)}$, получим

$$m \frac{d^2 r_{(2)}}{dt^2} + m \omega_0^2 r_{(2)} = -\frac{A}{(4\pi)^3} \alpha^3(\omega) E^3(t), \quad (62.76)$$

где $\alpha(\omega)$ — атомная поляризуемость, см. (62.62). Используя в (62.76) явный вид поля световой волны (62.72), а также тригонометрическое тождество

$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t),$$

получаем

$$\frac{d^2 r_{(2)}}{dt^2} + \omega_0^2 r_{(2)} = -\frac{A}{4(4\pi)^3 m} \alpha^3(\omega) E_0^3 (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t). \quad (62.77)$$

В результате второе приближение $r_{(2)}$, как и само уравнение (62.77), состоит из двух членов: один из них изменяется с той же частотой ω , что и поле световой волны $E(t)$, а второй — с утроенной частотой 3ω .

Таким образом, исходное уравнение (62.73) для смещения $r(t)$ ангармонического осциллятора имеет решение

$$r(t) = r_{(1)}^{(\omega)}(t) + r_{(2)}^{(\omega)}(t) + r_{(2)}^{(3\omega)}(t),$$

которое в явном виде запишется как

$$r(t) = \frac{\alpha(\omega, E_0)}{e} E_0 \cos \omega t + \frac{\alpha(3\omega, E_0)}{e} E_0 \cos 3\omega t,$$

где

$$\alpha(\omega, E_0) = \alpha(\omega) - \frac{3A\alpha^3(\omega) E_0^2}{4me^2(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

и

$$\alpha(3\omega, E_0) = -\frac{A\alpha^3(\omega) E_0^2}{4me^2(\omega_0^2 - 9\omega^2)}.$$

Что означают полученные результаты? Атомные электроны, оспилируясь под влиянием сильной световой волны частоты ω , переизлучают электромагнитные волны (см. § 18.3) с той же частотой ω и дополнительно с частотой 3ω . Далее, так как атомная поляризуемость α связана с показателем преломления n [см. (62.54)], то $n(\omega, E_0)$ является функцией частоты и поля (точнее говоря, функцией квадрата частоты

и интенсивности поля). Сам же показатель преломления связан с диэлектрической проницаемостью ϵ [см. (62.53)], т. е. $\epsilon(\omega, E_0)$ — также функция частоты и интенсивности поля световой волны.

Если на прозрачный диэлектрический кристалл падает световой пучок частоты ω от обычного теплового излучателя, то прошедший через кристалл свет имеет ту же частоту ω . Если через этот кристалл проходит лазерный световой пучок частоты ω , в выходящем пучке могут быть обнаружены две составляющие с частотами ω и 3ω *.

Из других эффектов нелинейной оптики отметим изменение угла преломления светового пучка на границе двух сред при изменении его интенсивности, сжатие световых пучков при распространении в среде (*самофокусировка света*), обратимое просветление или, напротив, затемнение среды под действием падающего на нее светового пучка.

Систематическое изучение нелинейно-оптических эффектов стало возможным лишь после создания оптических квантовых генераторов — лазеров.

62.9 Лазеры В тепловых источниках света микроскопический механизм излучения сводится к спонтанному излучению (см. § 26.3) возбужденных атомов среды. При спонтанных переходах отдельные атомы излучают независимо друг от друга. В результате возникает излучение, характеризующееся большим разбросом по частоте, направлению распространения, поляризации — *некогерентное излучение*. Вследствие некогерентности волн, испускаемых при спонтанных переходах, средняя интенсивность волн, испущенных всеми атомами, равна сумме интенсивностей волн, испущенных отдельными атомами. В такого рода источниках света напряженность электрического поля волны $E \sim 0,1 \div 1,0$ кВ/м.

Когерентное излучение должно состоять из волн тождественных. Это означает, что их направления распространения совпадают, ориентации векторов напряженностей электрического и магнитного полей одинаковы, частоты одни и те же. При этом фазы волн, испускаемых всеми атомами, должны быть согласованы и, в частности, совпадать.

Такое когерентное излучение атомов приведет к тому, что результирующая амплитуда их излучения усилится пропорционально числу атомов, а интенсивность излучения окажется пропорциональной квадрату числа атомов.

Для получения интенсивных когерентных световых пучков надо воспользоваться вынужденным излучением. Напомним, в чем состоит природа вынужденного излучения атомов (см. § 26.3). Если на возбужденный атом падает фотон такого типа, который атом сам может испустить, то вероятность излучения атомом тождественного фотона резко возрастает. При этом, поскольку фотоны — бозе-частицы, они могут скапливаться в одном и том же квантовом состоянии в неограниченном количестве.

Осуществление идеи использования механизма вынужденного излучения атомов при создании источников когерентного света высокой

* В реальном эксперименте нужны специальные кристаллы, нужна определенная поляризация луча, определенная ориентация кристалла и т. д.

интенсивности натолкнулось на следующую трудность. В обычных равновесных состояниях вещества число атомов среды, «заполняющих» различные уровни энергии, чрезвычайно резко падает при переходе к высшим энергетическим уровням (см. рис. 35.1). Даже при неограниченном росте температуры среды распределение частиц по уровням энергии становится лишь равномерным (см. рис. 35.2).

Требуется активная среда с обращенным (инверсным) заполнением уровней энергии системы (см. рис. 35.2 — случай отрицательных температур). Такие состояния могут быть созданы, например, путем облучения дополнительным излучением (излучением накачки).

Рассмотрим трехуровневую квантовую систему — кристалл рубина с примесью атомов хрома. Три уровня энергии атомов хрома используют для создания состояния с отрицательной температурой. Принцип действия такого квантового генератора света во многом ясен из рис. 62.10.

Для перевода атомов хрома из невозбужденного состояния E_0 в возбужденное состояние E_2 используют газоразрядные лампы накачки, работающие обычно в импульсном режиме. Разряд лампы производят с помощью специального устройства, содержащего конденсаторы емкостью до 1 мФ. Конденсаторы заряжают от источника постоянного напряжения в несколько тысяч вольт, а затем разряжают через разрядную трубку. Длительность импульса составляет тысячные доли секунды. За один импульс потребляется энергия порядка 10^3 Дж. При этом энергия разряда преобразуется в энергию излучения накачки.

Излучение накачки приходится на голубую и зеленую области видимого спектра. Энергия излучения накачки идет на возбуждение атомов хрома — они переходят из состояния E_0 в состояние E_2 .

По поводу состояния E_2 заметим, что поскольку оно короткоживущее ($\sim 10^{-8}$ с), ему соответствует целая «полоса» состояний, т. е. уровень энергии обладает «конечной шириной». Существует общее квантовомеханическое соотношение между «уширением уровня» энергии ΔE и временем жизни Δt этого состояния: $\Delta E \Delta t \sim \hbar$. Отмеченное обстоятельство весьма важно при работе лазера, ибо оптический спектр лампы-накачки имеет значительное «уширение» и для повышения

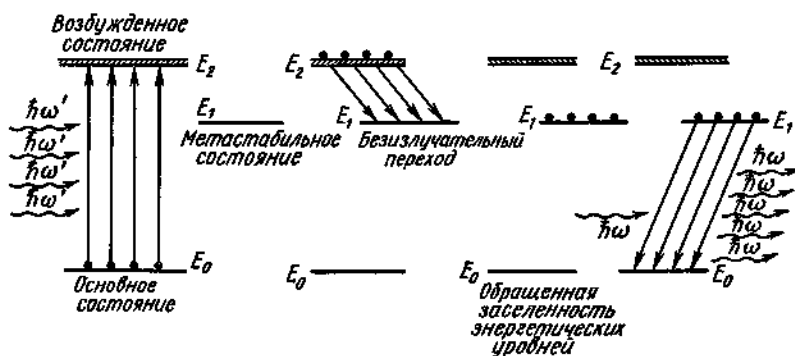


Рис. 62.10

к. п. д. лампы «уширение» возбужденных состояний E_2 весьма кстати.

За время $\sim 10^{-8}$ с атомы хрома совершают безизлучательный переход в метастабильное (долгоживущее) состояние E_1 , передав избыток энергии колебаниям кристаллической решетки.

Существование долгоживущего ($\sim 10^{-3}$ с) метастабильного состояния E_1 дает возможность «накапливать» атомы хрома в нем и тем самым создавать большую населенность метастабильного уровня E_1 по сравнению с основным уровнем E_0 . Для создания такой инверсии населенности больше половины атомов хрома переводятся на уровень E_1 за время порядка 10^{-3} с.

Наличие резонатора — двух плоскопараллельных зеркал на торцах цилиндрического кристалла рубина — позволяет резко умножить число фотонов вынужденного излучения, летящих в направлении оси резонатора.

Фотонный ливень вынужденного излучения начинается, когда атом хрома из метастабильного состояния спонтанно излучает фотон параллельно оси резонатора, ибо фотоны, испущенные в других направлениях, быстро покидают кристалл. Многократное «отражение» от зеркал ведет к росту лавины таких фотонов вынужденного излучения атомов хрома.

Одно из зеркал лазерного кристалла делают частично прозрачным, что обеспечивает выход когерентного пучка высокой интенсивности из кристалла. Само излучение рубинового лазера приходится на красную область видимого спектра, причем степень монохроматичности необычайно высока $\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-4}$ (заметим для сравнения, что у тепловых источников света $\Delta\lambda/\lambda \sim 1$). Интенсивность лазерного пучка, как уже отмечалось, достигает значений $10^8 - 10^{10}$ В/м.

Диапазон использования лазерных пучков чрезвычайно широк — от голографии до попыток создания импульсного термоядерного реактора, от тончайшего бескровного инструмента глазной хирургии до разработок вопросов космической связи.

В заключение отметим, что лазеры иногда относят к области квантовой макрофизики. В самом деле, ведь лазерный эффект можно рассматривать как макроскопическое квантовое явление по отношению к излучению в отличие от макроскопических квантовых явлений, связанных с веществом, — сверхтекучестью и сверхпроводимостью. Мы не раз отмечали, что фотоны есть бозе-частицы, а правила квантовой механики разрешают неограниченное скопление тождественных бозе-частиц в одном и том же состоянии. Лазерный луч — это большое (макроскопическое) скопление одинаковых фотонов.

ГЛАВА VIII ПЛАЗМА



§ 63. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Частично или полностью ионизованный газ образует особое состояние вещества, называемое *плазмой*. В обычных газах между составляющими его нейтральными атомами и молекулами взаимодействие проявляется в моменты столкновений, оно быстро убывает с расстоянием (потенциал взаимодействия между молекулами зависит от межмолекулярного расстояния как r^{-6}). Поскольку компоненты плазмы (электроны и ионы) электрически заряжены, а кулоновский потенциал спадает медленно ($\sim r^{-1}$), естественно ожидать, что такая система проявит некоторые коллективные свойства. Действительно, в плазме, «стянутой» как целое далекими кулоновскими силами, легко возбуждаются всякого рода «электрически упругие» колебания (плазма всегда «шумит»).

Рассмотрим некоторые свойства плазмы на примере полностью ионизованной водородной плазмы. С такого рода плазмой связывают надежды на получение управляемой термоядерной реакции. Последняя может явиться практически неисчерпаемым источником энергии для будущих поколений.

Как известно, быстропротекающие термоядерные реакции взрывного типа осуществлены. Для проведения регулируемой реакции синтеза на изотопах водорода с превращением их в ядра гелия необходима среда с невысокой плотностью, но с весьма высокой температурой. В качестве такой среды весьма удобно использовать водородную плазму. В самом деле, в высокотемпературной водородной плазме: 1) атомы водорода ионизованы (ядра оголены), 2) обеспечиваются энергичные столкновения ядер («порог реакции»), 3) плазму «легко» изолировать от стенок вакуумной камеры с помощью магнитных полей.

§ 64. КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕ. ТУННЕЛИРОВАНИЕ ЯДЕР СКВОЗЬ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

Оценим «высоту» электростатического потенциального барьера отталкивания, возникающего между двумя протонами при их тесном сближении. Полагая минимальное взаимное расстояние r сближения ядер по порядку величины равным 10^{-14} м, получим

$$U_{pp} = \frac{e^2}{r}; \quad U_{pp} \sim 10^{-14} \text{ Дж} \quad (64.1)$$

(напоминаем, что формула (64.1) записана в СГС). Соответствующую температуру водородной плазмы найдем из соотношения

$$T \sim \frac{U_{pp}}{k}; \quad T \sim \frac{10^{-14}}{10^{-23}} \sim 10^9 \text{ К.} \quad (64.2)$$

При такой температуре энергии теплового движения протонов (в действительности речь должна идти об изотопах водорода — дейтерии ^2H и тритии ^3H) достаточно для преодоления электростатического отталкивания и образования составной системы — ядра гелия ^4He с выбросом одного нейтрона n .

Эксперимент, однако, показывает, что реакция ядерного синтеза



идет уже при температурах $T \sim 10^7$ К. Последнее означает, что ядра водорода могут иногда каким-то образом преодолевать энергетический барьер, имея в 100 раз меньшую энергию движения.

Для решения указанного парадокса обратимся к квантовой механике (см. гл. IV). Пусть реальный потенциал, действующий между парой сближающихся протонов, как-то напоминает то, что изображено на рис. 64.1. Для удобства анализа сложившейся ситуации перейдем к модельному ступенчатому потенциальному барьеру, представленному на рис. 64.2, а. Положим, что частица движется слева направо с энергией $E < U_0$. В области I ее волна вероятности имеет вид (рис. 64.2, б).

$$\psi_I = e^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad (64.4)$$

где первый член — падающая волна, а второй — волна, отраженная от барьера (B — постоянная); причем

$$k_1 = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}. \quad (64.5)$$

В области II, в случае $E > U_0$, волна вероятности

$$\psi_{II} = Ae^{ik_2x} \quad (64.6)$$

изображала бы надбарьерный переход, где

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}. \quad (64.7)$$

Однако в рассматриваемом случае, когда $E < U_0$, величина k_2 — мнимая, т. е. функция (64.6) становится затухающей:

$$\psi_{II} \sim e^{-k_2x}. \quad (64.8)$$



Рис. 64.1

Если «хвост» волны (64.8) на второй стенке барьера отличен от нуля, то в области III может существовать прошедшая волна вероятности малой амплитуды. Описанное явление называют *подбарьерным переходом* или *туннельным эффектом*.

В классической механике нахождение частицы в области II при условии $E < U_0$ невозможно. Причина этого очевидна, ибо в рассматриваемом случае кинетическая энергия была бы отрицательной, а скорость мнимой, что нелепо.

Для частицы в квантовой механике возможно говорить лишь о полной энергии, но не порознь о ее кинетической и потенциальной энергиях. Дело в том, что кинетическая энергия определяется значением скорости, а потенциальная — значением координат; однако скорость и координата одновременно не имеют определенных значений. Указанное обстоятельство делает аргументы, приведенные для классической частицы, неприменимыми в квантовом случае.

Нарушения закона сохранения энергии при прохождении частицей потенциального барьера не происходит, ибо в соответствии с соотношением неопределенности (22.2) локализация частицы в области барьера делает совершенно неопределенным значение ее энергии.

Найдем вероятность w_{pp} подбарьерного перехода для сближающихся протонов при наличии интенсивного кулоновского отталкивания. Эта вероятность пропорциональна квадрату модуля выражения (64.8), т. е.

$$w_{pp} \sim |\Psi_{II}|^2 \sim e^{-2k_2 x}. \quad (64.9)$$

Пусть в (64.9) $x \sim l$ (рис. 64.2), а $k_2 = p/\hbar = 1/\lambda_p$, где λ_p — длина волны вероятности движущегося протона. Тогда (64.9) можно переписать в виде

$$w_{pp} \sim e^{-2l/\lambda_p}. \quad (64.10)$$

Из (64.10) видно, что вероятность подбарьерного перехода заметна в случае, когда ширина l барьера порядка длины λ волны вероятности частицы.

Распишем показатель экспоненты в (64.10):

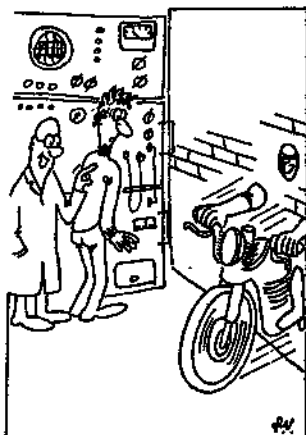
$$2 \frac{l}{\lambda_p} = 2 \frac{l}{(\hbar/p)} = 2 \frac{lmv}{\hbar} = 2 \frac{lmv^2}{\hbar v}. \quad (64.11)$$

Положим, что энергия $mv^2/2$ движущегося свободного протона в два раза меньше высоты потенциального барьера $U_{pp} = e^2/l$, тогда (64.11) переписывается как

$$4 \left(\frac{mv^2}{2} \right) \frac{l}{\hbar v} = 2 \frac{e^2}{l} \frac{l}{\hbar v} = 2 \frac{e^2}{\hbar v}.$$

В результате (64.10) примет вид

$$w_{pp} \sim e^{-2e^2/(\hbar v)}. \quad (64.12)$$



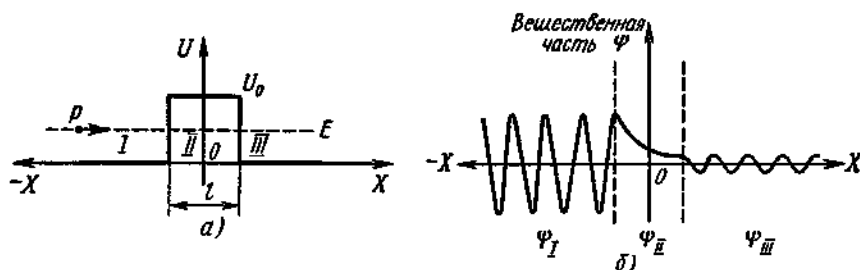


Рис. 64.2

Из (64.12) следует, что в классической механике, когда $\hbar \rightarrow 0$, вероятность w_{pp} подбарьерного перехода обращается в нуль. В квантовой механике для рассматриваемого случая водородной плазмы примерно одна частица на несколько сот тысяч испытывает туннельный переход.

Воспроизведем указанную числовую оценку. Обычно в эксперименте водородная плазма имеет плотность $(N_p/V) \sim 10^{19}$ протонов/м³, т. е. она в миллион раз более разрежена, чем газ при нормальном атмосферном давлении. Сами протоны являются сравнительно тяжелыми частицами ($m_p \sim 2 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$). Совокупность этих данных приводит к тому, что температура вырождения [см. (37.10)] водородной плазмы

$$T_b \sim \frac{\hbar^2}{m_p k} \left(\frac{N_p}{V} \right)^{2/3}; \quad T_b \sim \frac{(10^{-34})^2 \cdot (10^{19})^{2/3}}{1,7 \cdot 10^{-27} \cdot 1,4 \cdot 10^{-23}} \text{ К} \sim 10^{-5} \text{ К}. \quad (64.13)$$

Другими словами, высокотемпературная водородная плазма подчиняется законам классической статистики. В результате для определения средней тепловой скорости $\langle v_p \rangle$ протонов в плазме можно воспользоваться формулой (37.7), т. е.

$$\langle v_p \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_p}} \sim \sqrt{\frac{3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 10^7}{1,7 \cdot 10^{-27}}} \text{ м/с} = 5 \cdot 10^5 \text{ м/с}. \quad (64.14)$$

Для показателя же экспоненты в формуле (64.12), учитывая, что она записана в СГС, получим

$$2 \frac{e^2}{\hbar v} \sim 10,$$

т. е. сама вероятность

$$w_{pp} \sim e^{-10} = 4,5 \cdot 10^{-5}.$$

Оценим полное число протонов, участвующих в термоядерной реакции синтеза при $T \sim 10^7$ К (расчет ведется для объема плазмы в 1 м³). Предварительно найдем долю общего числа протонов, имеющих средние тепловые скорости $\langle v_p \rangle \sim 5 \cdot 10^5$ м/с при $T \sim 10^7$ К. Эта доля определяется выражением

$$\left(\frac{N_p}{V} \right) w(v), \quad (64.15)$$

в котором

$$w(v) \sim e^{-mv^2/(2kT)} \quad (64.16)$$

есть не что иное, как равновесное статистическое распределение протонов по скоростям, см. формулу (37.5) и рис. 37.1. Числовое значение (64.16) получим, если последовательно выполним следующие операции:

$$\frac{mv^2}{2kT} \sim \frac{1,7 \cdot 10^{-27} (5 \cdot 10^5)^2}{2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 10^7} \approx 1,5,$$

а $w(v) \sim e^{-1,5} = 0,2$, т. е. доля протонов, имеющих необходимые тепловые скорости, составит около 20%. Наконец, полное число протонов, которые испытывают элементарные акты ядерного синтеза, запишется как

$$\left(\frac{N_p}{V}\right) w(v) w_{pp}, \quad (64.17)$$

а числовое значение составит

$$10^{19} \cdot 0,2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-5} \sim 10^{14}.$$

§ 65. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ПЛАЗМЕ.

ДЕФЕКТ МАССЫ ПРИ СИНТЕЗЕ ЯДЕР И ИХ ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИЕ

Чтобы вычислить значение энергии, освобождаемой в ядерной реакции синтеза, необходимо обратиться к самым общим релятивистским соотношениям. В самом деле, ядро является не только квантовой системой, но и системой релятивистской. В этом легко убедиться, используя квантовый принцип неопределенности

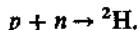
$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta r} \sim \frac{10^{-34}}{10^{-15}} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} \sim 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$$

и связь скорости с импульсом

$$v_N \sim p/m_N \sim 10^{-19}/10^{-27} \text{ м/с} \sim 10^8 \text{ м/с}.$$

Здесь m_N — масса нуклона, v_N — «скорость» нуклона в ядре; эта скорость — порядка скорости света c .

Применим результаты, полученные в § 10, к ядерной реакции синтеза. Рассмотрим простой пример образования ядра дейтерия ${}^2\text{H}$ из свободных протона p и нейтрона n :



Выпишем измеренные значения масс этих частиц:

$$m_p = 1,67243 \cdot 10^{-27} \text{ кг},$$

$$m_n = 1,67474 \cdot 10^{-27} \text{ кг},$$

$$M_{{}^2\text{H}} = 3,34321 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Рассчитаем дефект массы согласно (10.11):

$$\begin{aligned} \Delta M &= M_{{}^2\text{H}} - (m_p + m_n) = \\ &= (3,34321 - 3,34717) \cdot 10^{-27} \text{ кг} = -0,00396 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = -3,96 \cdot 10^{-30} \text{ кг}. \end{aligned}$$

Вычислим соответствующую энергию связи для ядра дейтерия, см. (10.12):

$$\Delta E = c^2 \Delta M = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 3,96 \cdot 10^{-30} \text{ Дж} = 3,564 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 2,225 \text{ МэВ.}$$

Эта энергия выделяется при синтезе ядра дейтерия.

Заметим, что в ядерной реакции типа (64.3) энергетический выход равен 17,6 МэВ. При этом практически вся энергия идет на кинетическую энергию освобожденного нейтрона.

§ 66. СТАТИСТИКА ПЛАЗМЫ. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ПЛАЗМЫ. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛАЗМЫ

Рассмотрев ряд элементарных процессов в плазме, обратимся к ее изучению как большой совокупности частиц. Какой статистикой должна описываться высокотемпературная разреженная плазма?

Общие методы статистической физики (см. гл. V, § 37.2) позволяют решить этот вопрос однозначно. В самом деле, для этого необходимо только оценить температуру вырождения T_b системы (см. конец § 37.3). Если температура системы $T \gg T_b$, то она подчиняется законам классической статистики; если же $T \lesssim T_b$ — в системе действует квантовая статистика. Для водородной плазмы, состоящей из двух подсистем: ядерной и электронной, оценка температуры вырождения должна производиться порознь для обеих подсистем. Для ядерной компоненты оценка T_b была уже сделана, см. (64.13); для электронной компоненты

$$T_b \sim \frac{\hbar^2}{m_e k} \left(\frac{N_e}{V} \right)^{2/3}; \quad T_b \sim \frac{(10^{-34})^2}{10^{-30} \cdot 10^{-23}} (10^{19})^{2/3} \text{ К} \sim 10^{-2} \text{ К.}$$

В результате оказывается, что горячая водородная плазма имеет $T \gg T_b$. Таким образом, для описания коллективных свойств плазмы достаточно пользоваться методами классической статистики.

Выше, в § 64, при оценке числа частиц в плазме, имеющих заданные скорости, мы применяли классическое равновесное распределение Максвелла (64.16). Там же при нахождении средней тепловой скорости частиц плазмы была использована формула (64.14) классической статистики.

Найдем выражение для тепловой энергии плазмы и ее термодинамическое уравнение состояния. Нельзя ли при этом воспользоваться известными соотношениями для классического идеального газа? Да, это возможно, если плазма настолько разрежена, что энергия кулоновского взаимодействия между ее частицами мала по сравнению с их кинетической энергией, т. е.

$$e^2/r \ll kT. \quad (66.1)$$

Учтем, что среднее расстояние между частицами плазмы

$$r \sim n^{-1/3}, \quad (66.2)$$

где n — плотность числа частиц. Тогда, подставляя (66.2) в (66.1), получим

$$\frac{e^2}{n^{-1/3}} \ll kT,$$

$$\text{или} \quad n \ll (kT/e^2)^3. \quad (66.3)$$

Такому критерию должна удовлетворять плотность плазмы, чтобы ее можно было считать идеальным газом частиц.

Для рассматриваемой водородной плазмы $n \sim 10^{19}$ частиц/м³, а правая часть в (66.3) имеет порядок величины

$$(kT/e^2)^3 \approx 10^{30}$$

(напоминаем, что это выражение записано в СГС). Таким образом, неравенство (66.3) удовлетворяется с большим избытком. В результате высокотемпературную разреженную плазму можно считать идеальной, т. е. ее полная тепловая энергия E сводится к сумме кинетических энергий отдельных частиц

$$E = (N_p + N_e) kT. \quad (66.4)$$

Тепловое давление плазмы

$$p \approx E/V = (n_p + n_e) kT. \quad (66.5)$$

Существенную роль в высокотемпературной плазме играет ее излучение. Попробуем оценить порядок величины температуры, при которой плотность энергии излучения $(\sigma/c) T^4$ [см. (38.16)] и плотность тепловой энергии вещества [см. (66.5)] сравниваются. Составим выражение

$$\frac{\sigma}{c} T^4 \approx nkT, \quad (66.6)$$

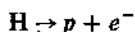
где σ — постоянная Стефана — Больцмана. Подставим в (66.6) числовые значения

$$\frac{5,7 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 10^8} T^4 \approx 10^{19} \cdot 10^{-23} T,$$

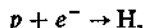
$$\text{или} \quad 10^{-16} T^4 \approx 10^{-4} T. \quad (66.7)$$

Уравнение (66.7) удовлетворяется при $T \approx 10^4$ К (читатель может это легко проверить).

При указанных температурах водородная плазма окажется лишь частично ионизованной. В ней будут происходить процессы ионизации атомов



(ибо молекулы водорода при $T \approx 10^4$ К уже диссоциированы) и процессы рекомбинации



причем атомы могут находиться как в основном, так и в различных возбужденных состояниях. Можно было бы определить равновесные концентрации всех компонентов такой низкотемпературной плазмы, однако мы не станем останавливаться на этой задаче. Нас интересует вопрос о механизмах излучения в низкотемпературной плазме. Ответ следующий: 1) возбужденные атомы испускают дискретное излучение (см. § 26.2); 2) при встрече ядра водорода с электроном и их

объединении в атом избыток энергии излучается; 3) свободные ядра и электроны, закручиваясь вдоль силовых линий внешнего стабилизирующего магнитного поля (см. дальше), испускают классическое непрерывное излучение (см. § 16.2 и 17.3).

При переходе к высокотемпературной плазме, состоящей только из ядерного и электронного идеальных газов, из всех видов излучений (дискретное, рекомбинационное, непрерывное) останется лишь классическое электромагнитное излучение со сплошным спектром, связанным с ускоренным движением свободных заряженных частиц.

При $T \sim 10^7$ К собственное излучение плазмы лежит в рентгеновской области. В этом легко убедиться, если использовать (38.7):

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{4.96kT}; \quad \lambda \approx \frac{6.3 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5 \cdot 1.4 \cdot 10^{-23} \cdot 10^7} \text{ м} \sim 10^{-10} \text{ м}.$$

При концентрации 10^{19} частиц/м³ плазма прозрачна для своего излучения и оно не находится в тепловом равновесии с веществом. По этой причине применение соотношения (66.7) к анализу ситуации весьма условно. Ясно лишь одно, что в системе должны действовать две конкурирующие тенденции. Одна из них связана с энергией вещества, которая растет пропорционально температуре; другая же связана с энергией излучения, рост которой пропорционален температуре в четвертой степени. При достаточно высоких температурах практически вся подводимая к системе энергия уносится излучением, а вещество остается «холодным». Однако необходимо учесть то обстоятельство, что при $T \sim 10^7$ К в игру вступает «скрытая энергия вещества» (релятивистская энергия покоя частиц), освобождающаяся (частично) при термоядерных реакциях синтеза. Ее вклад так нарушает энергетический баланс в системе, что реакция ядерного синтеза становится самоподдерживающейся.

§ 67. КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ. ПОДВИЖНОСТЬ ИОНОВ И ЕЕ СВЯЗЬ С ДИФФУЗИЕЙ. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ПЛАЗМЫ

В газообразной среде кинетические явления переноса сводились к процессам вязкости, теплопроводности и диффузии (см. гл. VI). В плазме наряду с этими явлениями присутствует и электропроводность.

Рассмотрим не слишком разреженную плазму, когда кинетические коэффициенты еще сохраняют свой непосредственный смысл (см. § 45). В первую очередь нас интересует электропроводность плазмы. В плазме электропроводность оказывается связанной с диффузией частиц.

Во внешнем электрическом поле E на тепловое хаотическое движение ионов накладывается их медленный снос в направлении поля — дрейф. Скорость дрейфа v_d заряженных частиц вдоль электрического поля может быть записана по аналогии с (57.4), т. е.

$$v_d \sim \frac{\tau}{m} F, \quad (67.1)$$

где

$$F = eE. \quad (67.2)$$

Обычно в (67.1) коэффициент пропорциональности между скоростью дрейфа и постоянной силой обозначают

$$b = \tau/m \quad (67.3)$$

и называют *подвижностью*; подвижность велика у легких частиц в разреженной среде. Воспользуемся теперь соотношением (45.2) для коэффициента диффузии D ; выразим D через среднее время τ между столкновениями частиц согласно (45.1*); наконец, учтем (67.3), тогда

$$D \sim v l \sim v^2 \tau \sim m v^2 b. \quad (67.4)$$

Если же обратить внимание на то, что в (67.4) $m v^2 \sim kT$ согласно (37.7), то окончательно получим

$$D = kTb. \quad (67.5)$$

Замечательно то, что полученное соотношение между подвижностью частиц и диффузией их в среде является точным.

Перейдем к рассмотрению электропроводности плазмы. Исходным количественным соотношением здесь явится соотношение (57.3)

$$j_e = en_e v_d, \quad (67.6)$$

где j_e есть плотность тока электронной компоненты плазмы; подвижность b_i ионной компоненты, согласно (67.3), на три порядка меньше. Используя (67.1)–(67.3), выражение (67.6) можно записать в виде

$$j_e = e^2 n_e b_e E. \quad (67.7)$$

Предполагая выполнение закона Ома (57.2) в плазме для ее электропроводности, получим

$$\sigma = e^2 n_e b_e. \quad (67.8)$$

Воспользуемся (67.5), тогда

$$\sigma = \frac{e^2 n_e D}{kT}. \quad (67.9)$$

При $T \sim 10^7$ К электропроводность σ водородной плазмы очень велика; она такая же, как у твердых металлов (например, меди).

§ 68. МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ. «ТОКАМАКИ»

Если плотность n числа частиц в плазме такова, что длины свободных пробегов l частиц малы по сравнению с характерными размерами L системы, то при рассмотрении явлений переноса в плазме возможен подход, описывающий плазму как сплошную среду (см. конец § 42). Казалось бы, что методов обычной гидродинамики вполне достаточно для описания неравновесных состояний плотной плазмы. Однако плотная плазма является «проводящей жидкостью» и ее движения, например, во внешнем магнитном поле существенно отличаются от движений обычной жидкости. В самом деле, если: 1) плазма движется в постоянном магнитном поле, то на ее заряженные частицы

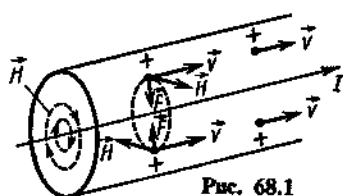


Рис. 68.1

действует электродинамическая сила Лоренца; 2) переменное внешнее магнитное поле возбуждает в плазме индукционные токи, которые сами создают собственное магнитное поле, в свою очередь влияющее на движение. В результате плотная плазма должна описываться совместной системой уравнений

гидродинамики и электродинамики. В этом заключается метод так называемой *магнитной гидродинамики*.

Каковы основные результаты магнитной гидродинамики в применении к плазме? Поскольку плазма, как мы видели, может обладать весьма высокой электрической проводимостью, то естественно ввести модель идеально проводящей ($\sigma = \infty$) жидкости. В таком случае внешнее магнитное поле не может проникать в плазму, ибо иначе в ней индуцировались бы бесконечно большие токи. В результате внешнее магнитное поле должно оказывать определенное давление на плазму. Легко написать выражение для магнитного давления, если воспользоваться формулой (18.8) для плотности энергии магнитного поля

$$p \approx E/V = H^2/(8\pi). \quad (68.1)$$

Рассмотрим эффект *самостягивающегося разряда*. Если в камере, заполненной газом, происходит электрический разряд, то, во-первых, вследствие джоулевых тепловых потерь происходит ионизация газа и образование плазмы, во-вторых, собственное магнитное поле разрядного тока отрывает образовавшуюся плазму от стенок камеры и сжимает ее в тонкий шнур (на рис. 68.1 показано, как это происходит). Сжатие плазмы возможно, если магнитное давление по порядку величины сравнимо с тепловым давлением вещества плазмы, т. е.

$$2nkT = H^2/(8\pi); \quad (68.2)$$

здесь использованы выражения (68.1) и (66.5). Для магнитного поля H_I тока существует формула [см. (15.2)]

$$H_I = 2I/(cr_0), \quad (68.3)$$

где I — ток; r_0 — радиус шнура. После подстановки (68.3) в (68.2)

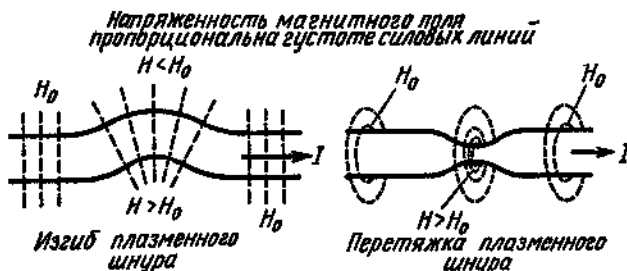


Рис. 68.2

получим

$$I^2 = 4c^2 \pi r_0^2 n k T. \quad (68.4)$$

В обычных плазменных экспериментах $I \sim 10^5$ А ($1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9$ ед. системы СГС), $r_0 \approx 0,1$ м, $n \sim 10^{19} \text{ м}^{-3}$, тогда температура образовавшегося плазменного шнура

$$T = \frac{I^2}{4c^2 \pi r_0^2 n k}.$$

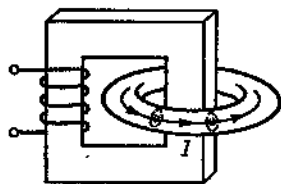


Рис. 68.3

Расчет по этой формуле ведется в СГС. В результате получаем

$$T = 5 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

Неожиданным для исследователей явилось то обстоятельство, что плазменный шнур за чрезвычайно короткое время ($\sim 10^{-6}$ с) разрушался. Причина состояла в том, что плазменный шнур находился в состоянии неустойчивого равновесия. Малое внешнее возмущение (изгиб и перетяжка плазменного шнура, см. рис. 68.2) приводило к такому локальному изменению собственного магнитного поля тока (а значит, и магнитного давления), которое усиливало отклонение от равновесной конфигурации. Для стабилизации плазменного шнура эффективно и удобно применять сильное продольное магнитное поле. Время удержания плазмы при этом резко возрастает.

К настоящему времени наиболее популярными являются экспериментальные плазменные установки типа «Токамак». «Токамак», по сути дела, представляет собой трансформатор, у которого вторичная обмотка имеет один виток (рис. 68.3). Виток этот не что иное, как замкнутая кольцевая камера, имеющая форму тора (бублика). Кольцевая камера заполняется газовой смесью дейтерия и трития при низком давлении. При пропускании тока по первичной обмотке в камере происходит пробой в газе, газ ионизуется и протекающий по нему ток нагревает его до высокой температуры. Для удержания и стабилизации плазмы используют магнитное поле, которое создается с помощью катушек, расположенных вдоль тора.

На советской плазменной установке «Токамак-10» уже получена развитая термоядерная реакция со временем удержания плазмы 0,1 с.

§ 69. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Поскольку плазма — сложная электродинамическая и гидродинамическая система, то в ней могут возбуждаться колебания и соответственно распространяться волны самых различных типов. Колебания в плазме могут быть электростатическими, электромагнитными, магнитогидродинамическими, звуковыми; в общем случае, указанные колебания в системе всегда перепутываются между собой.

Если внешнее магнитное поле отсутствует, то в плазме могут возникать лишь звуковые и электростатические колебания.

Действительно, так как в плазме имеются две группы частиц с противоположными зарядами и в целом плазма электронейтральна, то

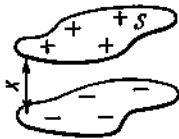


Рис. 69.1

1) совместное смещение частиц обоих знаков в одном направлении приводит к локальному возникновению области повышенного давления, а это порождает упругие (звуковые) колебания;

2) смещение разноименно заряженных частиц в противоположных направлениях (их разделение) ведет к возникновению локального электрического поля, которое и создает колебания зарядов. Ясно, что соответствующие плазменные волны могут быть лишь продольными в отличие от электромагнитных волн, являющихся поперечными, см. (17.15) и (18.1).

Найдем количественное выражение для плазменных колебаний. Представим себе, что локальное разделение зарядов в плазме произошло в некотором плоском слое (рис. 69.1). Тогда, естественно, напрашивается идея о применении формулы плоского конденсатора (62.48)

$$C = \frac{S}{4\pi x}, \quad (69.1)$$

где S — площадь поверхности; x — расстояние между плоскостями, а C — емкость «конденсатора». Заряд на пластинах плазменного конденсатора

$$Q = enSx. \quad (69.2)$$

Из определения емкости (60.8) следует, что разность потенциалов в слое

$$\Delta\phi = Q/C = 4\pi enx^2; \quad (69.3)$$

здесь использованы выражения (69.2) и (69.1). Зная $\Delta\phi$ и линейные размеры x области разделения зарядов, можно найти, согласно (14.14), электрическое поле

$$E = -\Delta\phi/x = -4\pi enx. \quad (69.4)$$

Это поле в соответствии с (16.1) сообщает каждому заряду ускорение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{eE}{m} = -\frac{4\pi e^2 n}{m} x. \quad (69.5)$$

Мы получили уравнение типа (62.26) или, точнее, (62.28). Одинаковые уравнения должны иметь и одинаковые решения, следовательно,

$$x = \cos \omega t, \quad \omega \equiv \omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n/m}. \quad (69.6)$$

В силу большой подвижности электронов обычно приходится иметь дело с электронными плазменными колебаниями, тогда частота ω_p определяется лишь плотностью n_e плазмы.

Рассмотрим прохождение электромагнитных волн (в частности, радиоволн) через плазму. В § 62.7 при написании выражения (62.64) для показателя преломления в металлах было сделано единственное предположение о наличии свободных электронов в среде. Однако такое предположение выполняется и для плазмы, а значит, для нее спра-

ведливы и все соотношения, имеющиеся в указанном параграфе. В частности, формула (62.65)

$$n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2 \quad (69.7)$$

с плазменной частотой ω_p [сравните (62.66) с (69.6)] является основной при анализе вопроса о прохождении радиоволн через плазму. Так, при $\omega^2 < \omega_p^2$ показатель преломления (69.7) становится мнимым, т. е. волна отсутствует в плазме (она либо поглощается, либо отражается). При $\omega \gg \omega_p$ показатель преломления является вещественным и слабо отличающимся от единицы, а это означает, что плазма прозрачна для таких частот излучения.

В качестве объекта приложения полученных результатов возьмем земной ионосферный слой. Ионосфера Земли является плазменным образованием; она сложна по составу, причиной же ее ионизации явилось ультрафиолетовое солнечное излучение, а также потоки быстрых заряженных частиц от Солнца. Максимальная электронная плотность ионосферы, согласно ракетным зондовым измерениям, равна 10^{12} электронов/м³. Эти данные позволяют вычислить собственные частоты плазменных колебаний в ионосфере:

$$\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n/m}.$$

Выполнив расчет в СГС, получим

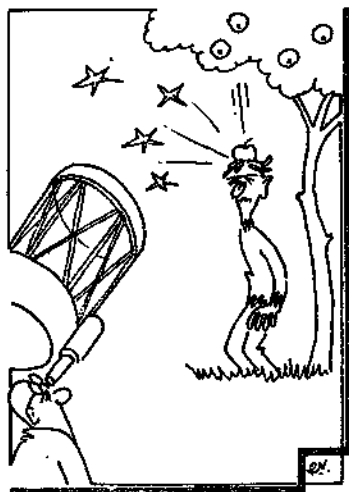
$$\omega_p \approx 6 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Найдем длину электромагнитных волн, частота которых совпадает с плазменной частотой в ионосфере. Воспользуемся формулой (18.6), тогда

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} = 6,28 \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^7} \text{ м} \approx 30 \text{ м}.$$

В результате радиоволны с $\lambda > 30$ м будут отражаться от ионосферы, как от металлического зеркала; для связи же со спутниками и орбитальными станциями нужны радиоволны с длинами волн, значительно меньшими 30 м.

У читателя, по-видимому, сложилось правильное ощущение того, что общие закономерности распространения электромагнитных волн в металлах, плазме, ионосфере Земли, атмосфере звезд одни и те же, различие состоит в конкретных значениях n , и соответственно ω_p .



ГЛАВА IX ЗВЕЗДНЫЕ И ДОЗВЕЗДНЫЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

§ 70. СОСТОЯНИЕ ВЕЩЕСТВА ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ И ПЛОТНОСТЯХ

Наряду с исследованиями обычных состояний веществ большой интерес представляет изучение вещества при крайне высоких температурах и плотностях.

Проследим качественно за изменением состояний вещества по мере постепенного увеличения температуры (предполагая, что плотность остается невысокой). Мы видели, что при этом конденсированное состояние вещества (твердое тело, жидкость) сменяется газообразным. Обычные газы — это молекулярные газы. Повышение температуры до нескольких тысяч кельвин приводит к явлению *термической диссоциации* (разрыву молекул на составляющие ее атомы), и газы становятся атомарными.

При температурах $\sim 10^4$ К происходит уже ионизация составляющих газ атомов. Ионизованное вещество — плазма — состоит уже только из ионов и электронов ($T \sim 10^6$ К).

При температурах $\sim 10^7$ К достигается полная ионизация плазмы: вещество состоит из «голых» ядер и свободных электронов. При дальнейшем повышении температуры начинаются ядерные превращения ($\sim 10^8$ К).

При температурах свыше 10^9 К ядра разрушаются; при этом вещество состоит из протонов и электронов* ($T \sim 10^{11}$ К).

* Нейтроны — нестабильные частицы, они распадаются на протоны, электроны и антинейтрино. Последние, практически не взаимодействуя с веществом, покидают систему.

Наконец, при температурах свыше 10^{13} К возможно широкое превращение элементарных частиц друг в друга. Так, для образования пар нуклон — антинуклон нужны энергии порядка $m_N c^2$, где m_N — масса нуклона. Из соотношения $m_N c^2 \sim kT$ и получаем приведенное выше значение температуры.

Выше, при рассмотрении изменения состояний вещества «вдоль стрелы температур», давление предполагалось обычным, нормальным. Проследим теперь качественно за изменением состояний вещества по мере постепенного увеличения плотности, предполагая, что температура остается невысокой.

При достаточном сжатии вещества ($\sim 10^8$ атм) электронные оболочки атомов деформируются и их внутренняя энергия сильно возрастает. Электрические поля отдельных атомных ядер все более накладываются друг на друга, вследствие чего электроны атомных оболочек все меньше становятся связанными с определенным атомом. Возможно свободное движение внешних электронов («металлизация» вещества).

Если вещества, находящиеся под действием невысоких давлений, отличаются крайним разнообразием своих свойств и обнаруживают чрезвычайно резкую и немонотонную зависимость от химического состава, то при сжатии вещества проявляется ярко выраженная тенденция «сглаживания» их свойств. Это последнее обстоятельство легко понять. В самом деле, наружные электронные оболочки атомов вещества, приводящие к отмеченной немонотонности, при давлениях порядка 10^8 атм перестают существовать, так как входящие в их состав электроны отрываются от атомов. Внутренние электронные оболочки уплотняются, и распределение плотности электронов в них сравнительно медленно меняется в пространстве.

Таким образом, при достаточном сжатии вещества ($\sim 10^{12}$ атм) роль взаимодействия электронов его атомов с ядрами становится несущественной и вещество можно рассматривать как электронный газ большой плотности (такой газ, как известно, называют вырожденным).

Когда плотность и давление газа становятся порядка 10^9 кг/м³ и 10^{18} атм соответственно*, электронный газ делается релятивистским (т. е. средняя энергия электрона становится сравнимой с $m_e c^2$).

Дальнейшее повышение плотности приводит к состояниям, в которых термодинамически выгодными оказываются ядерные реакции, заключающиеся в захвате электронов ядрами с одновременным испусканием нейтрино. В результате такой реакции уменьшается заряд ядра (при неизменной массе), что, вообще говоря, приводит к уменьшению энергии связи ядра.

При еще больших плотностях и давлениях происходит дальнейший захват электронов ядрами, сопровождающийся дальнейшим уменьшением заряда последних. В конце концов ядра, содержащие слишком много нейтронов, станут неустойчивыми и распадутся. При плотности $\sim 10^{14}$ кг/м³ и давления $\sim 10^{24}$ атм нейтроны начинают преобладать

* Для сравнительной оценки приведем плотность наиболее плотных веществ при давлении в 1 атм. Так, осмий имеет плотность $2,2 \cdot 10^4$ кг/м³ при нормальной температуре.

по своему числу над электронами, а уже при плотностях $\sim 10^{15}$ кг/м³ начинают преобладать и по создаваемому ими давлению. Здесь начинается область плотностей, в которой вещество можно рассматривать в основном как нейтронный ферми-газ (в этом газе, конечно, всегда присутствует также и некоторое количество протонов и электронов, возникающих в результате распада нейтронов).

При давлениях $\sim 10^{27}$ атм нейтронный газ имеет плотность ядерного вещества, т. е. $\sim 10^{17}$ кг/м³. Подобное состояние вещества может осуществляться вплоть до температур $\sim 10^{12}$ К.

§ 71. ЗВЕЗДА – ГАЗОВЫЙ ШАР

71.1 Расчет давления и температуры в центре звезды Состояние вещества при очень высоких температурах и плотностях реально осуществляется в звездах. К основным характеристикам звезд относят их массу M_* и радиус R_* . На способах эмпирического определения этих величин мы не останавливаемся.

Как оценить давление p в центре звезды? Воспользуемся методом анализа размерностей. Естественно выразить искомое давление через основные характеристики звезды: массу M_* и ее радиус R_* ; конечно же, сюда должна войти и гравитационная постоянная G . Комбинация рассматриваемых величин

$$p \sim G^x \cdot M_*^y \cdot R_*^z \quad (*)$$

является единственной; в нее входят неизвестные числа x, y, z , которые необходимо найти. Для этого в соотношении (*) выписываем размерности участвующих величин

$$[p] = [G]^x \cdot [M_*]^y \cdot [R_*]^z,$$

или

$$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} = (\text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2})^x \cdot (\text{кг})^y \cdot (\text{м})^z = \text{кг}^{-x+y} \cdot \text{м}^{3x+z} \cdot \text{с}^{-2x}.$$

Сравнивая показатели степеней обеих частей приведенного равенства, получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -x + y &= 1, \\ 3x + z &= -1, \\ -2x &= -2. \end{aligned} \right\}$$

Решение ее дает значения $x = 1, y = 2, z = -4$. В итоге

$$p \sim G \cdot M_*^2 \cdot R_*^{-4},$$

или

$$p \sim GM_*^2/R_*^4. \quad (71.1)$$

В (71.1) давление в центре звезды выражается через величины, определяемые в лабораторном опыте (G) и в астрономических наблюдениях (M_* и R_*).

Найдем порядок величины давления, например, в центре Солнца. Для Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ м, давление же в центре

$$p_\odot \sim \frac{6,7 \cdot 10^{-11} (2 \cdot 10^{30})^2}{(7 \cdot 10^8)^4} \text{ Па} \approx 1,1 \cdot 10^{15} \text{ Па} \approx 10^{10} \text{ атм.}$$

Хотя большинство звезд — это несомненно плазменные образования, мы будем моделировать звезду в виде газового шара с уравнением состояния

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad (71.2)$$

в котором R — газовая постоянная; M — молярная масса.

Для стационарной звезды гравитационное сжатие должно компенсироваться тепловым противодействием

$$p_{\text{грав}} \approx p_{\text{тепл.}} \quad (71.3)$$

Подставляя сюда (71.1) и (71.2), получаем

$$G \frac{M_*^2}{R_*^4} \approx \frac{\rho}{M} RT_{\text{центр.}} \quad (71.4)$$

Среднюю плотность звезды оценим как

$$\rho \sim M_*/R_*^3. \quad (71.5)$$

Используя (71.5) в (71.4), напишем выражение для температуры в центре звезды

$$T_{\text{центр}} \sim G \frac{M_* M}{R_* R}. \quad (71.6)$$

В случае Солнца $M = 1 \cdot 10^{-3}$ (водородная звезда), и для температуры в его центре получим

$$T_{\text{Оц}} \sim \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{7 \cdot 10^8 \cdot 8,3} \text{ К} \sim 2 \cdot 10^7 \text{ К}.$$

71.2 Температура поверхности и полная мощность излучения звезды Излучение звезд можно считать тепловым, равновесным — тогда к ним в полной мере применимы результаты § 38. В этом параграфе рассчитывалась температура внешних слоев Солнца, при этом использовалась формула

$$T = 0,29/\lambda_{\text{max}}$$

Эта формула записана в СГС. Расчет дает $T_{\odot} \approx 5300 \text{ К}$. Здесь учтен тот факт, что максимум энергии излучения для Солнца приходится на желто-зеленую часть спектра.

Зная температуру излучающих слоев, можно найти интенсивность излучения

$$j = \sigma T^4,$$

т. е. мощность излучения с единичной поверхности. Общая же мощность излучения звезды, называемая ее *светимостью*, составляет

$$J = 4\pi R_*^2 \sigma T^4. \quad (71.7)$$

В случае Солнца светимость

$$J_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 = 4 \cdot 3,14 (7 \cdot 10^8)^2 \cdot 5,7 \cdot 10^{-8} (5,3 \cdot 10^3)^4 \text{ Вт} = 2,8 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

71.3 Перенос энергии в звездах На примере Солнца мы видели, что температура в его центре $T_c \sim 2 \cdot 10^7$ К, а на поверхности $T_p \sim (5 \div 6) \cdot 10^3$ К. Такой перепад температур вызывает интенсивный теплообмен.

Существуют три механизма передачи теплоты: теплопроводность, конвекция и радиационный перенос. Роль теплопроводности для обычных звезд мала; у белых карликов (см. дальше) она велика. Конвекция, например, у Солнца, существует лишь для поверхностных слоев. Наиболее важный вклад в перенос энергии в звездах вносит излучение.

Вещество звезды непрозрачно для собственного излучения. Излучение поглощается и переизлучается вышележащими слоями. Механизмами поглощения являются: 1) фотоионизация легких атомов, 2) поглощение света электронными оболочками тяжелых элементов, 3) рассеяние света на свободных электронах.

Количественно поглощение света рассматривают следующим образом. Мысленно внутри звезды, вдоль ее радиуса, вырезают столбик вещества, начало которого находится в центре звезды, а конец на ее поверхности. Площадь поперечного сечения этого столбика равна 1 м^2 , длина его совпадает с радиусом R_* звезды, а плотность вещества столбика приравнивается средней плотности ρ звезды. Тогда в рассматриваемом столбике вещества

$$(\text{Доля поглощения света}) = \gamma \rho R_*,$$

где γ — коэффициент непрозрачности (для Солнца $\gamma = 2 \text{ м}^2/\text{кг}$). Сама же интенсивность прошедшего через столбик излучения

$$j \equiv \frac{J}{4\pi R_*^2} = \frac{\sigma T_{\text{центр}}^4}{\gamma \rho R_*}.$$

Используя здесь для $T_{\text{центр}}$ выражение (71.6) и для ρ формулу (71.5), получим

$$J \sim \frac{4\pi^3 G^4 M^4}{\gamma R^4} M_*^3. \quad (71.8)$$

Это известное соотношение масса — светимость. Оно выполняется для огромного числа звезд.

§ 72. ИСТОЧНИКИ ЗВЕЗДНОЙ ЭНЕРГИИ

72.1 Анализ возможных источников энергии звезд В модели звезды как горячего газового шара, стянутого силами тяготения, источником энергии может явиться собственная гравитационная энергия. По мере излучения энергии и остывания звезды сама звезда испытывает поджатие, а последнее ведет вновь к повышению температуры. Так может формально продолжаться до тех пор, пока звезда не сожмется в «точку».

Как долго может подобный механизм обеспечивать энерговыделение звезды? Для этого нужно сравнить собственную потенциальную энер-

тию тяготения звезды

$$U = G \frac{M_*^2}{R_*}$$

с мощностью J ее излучения. В случае Солнца

$$U_{\odot} \sim \frac{6,7 \cdot 10^{-11} (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} \text{ Дж} \sim 4 \cdot 10^{41} \text{ Дж}$$

и

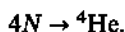
$$J_{\odot} \sim 2,8 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

Тогда

$$\frac{U_{\odot}}{J_{\odot}} \sim \frac{4 \cdot 10^{41} \text{ Дж}}{3 \cdot 10^{26} \text{ Вт}} \sim 10^{15} \text{ с} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ лет}^*.$$

Это мало, так как Солнце существует примерно 10^9 лет. Таким образом, гравитационным сжатием нельзя объяснить наблюдаемое время активной жизни звезды.

Обратимся к термоядерным реакциям как источнику энергии звезд. Реакции так называемого протон-протонного цикла являются наиболее вероятными претендентами на эту роль. Их результатом, в конечном итоге, является превращение четырех нуклонов в ядро гелия:



Займемся необходимыми подсчетами. Будем пользоваться атомными единицами массы (а. е. м.):

$$1 \text{ а.е.м.} = {}^{1/12}m_{12\text{C}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

В этих единицах

$$m_N = 1,00813 \text{ а.е.м.}; 4m_N = 4,03252 \text{ а.е.м.}; m_{\text{He}} = 4,00389 \text{ а.е.м.}$$

Дефект массы в реакции

$$\Delta m = m_{\text{He}} - 4m_N = -0,02863 \text{ а.е.м.};$$

соответствующее энергосодержание

$$\Delta E = c^2 \Delta m = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 0,02863 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ Дж} = 4,3 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

Таким образом, в рассмотренной реакции доля $\Delta m/(4m_N) = 0,007$ общей массы переходит в энергию.

Обратимся к звезде как целому. В случае Солнца, в предположении, что оно состоит только из водорода, запасы внутренней ядерной энергии составляют

$$M_{\odot} \cdot 0,007 \cdot c^2 \sim 2 \cdot 10^{30} \cdot 0,007 (3 \cdot 10^8)^2 \text{ Дж} \sim 1,3 \cdot 10^{45} \text{ Дж.}$$

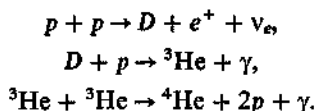
Время активной жизни «нашего светила» займет промежуток

$$\frac{M_{\odot} \cdot 0,007 c^2}{J_{\odot}} \sim 3 \cdot 10^{18} \text{ с} \approx 10^{11} \text{ лет.}$$

Это более чем достаточно для объяснения наблюдаемого.

* В среднем 1 год = $3 \cdot 10^7$ с.

72.2 Ядерные реакции протон-протонного цикла Схема этого цикла следующая:



Энергия освобождается в форме позитронов e^+ (которые, аннигилируя с электронами, рожают γ -кванты), γ -квантов, нейтрино ν_e и кинетической энергии протонов. Суммарное энергосодержание в этом цикле составляет 28,5 МэВ (оценка была сделана в § 72.1).

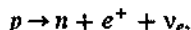
Вероятности отдельных реакций цикла, или, что все равно, средние времена хода этих реакций, распределены следующим образом:

$$\begin{aligned}(p + p) &- 10^{10} \text{ лет}, \\(D + p) &- \text{несколько секунд}, \\({}^3\text{He} + {}^3\text{He}) &- 10^6 \text{ лет}.\end{aligned}$$

Каковы условия протекания реакции $p + p$? Они отчасти уже анализировались в § 64. Для высоты кулоновского барьера отталкивания в процессе $p + p$ была получена оценка $U_{pp} \sim 10^{-14}$ Дж, а для соответствующей температуры газа частиц, способных эффективно преодолеть указанный барьер, — значение $T \sim 10^9$ К.

Однако протонный газ в центральных областях Солнца имеет температуру лишь порядка $2 \cdot 10^7$ К, и это резко снижает вероятность процесса $p + p$. Оценка вероятности этого процесса в указанных условиях, идущего путем подбарьерного туннельного перехода, была сделана также в § 64. Она оказалась равной $w_{pp} \sim 10^{-5}$, т. е. одна частица на сто тысяч способна преодолеть кулоновский электростатический барьер.

Нас интересует не просто процесс преодоления барьера, т. е. сближения двух протонов на расстояние, на котором начинают проявляться сильные взаимодействия. Необходимо еще, чтобы один из протонов за счет слабого взаимодействия испытал превращение *



т. е. перешел в нейтрон, ибо только протон p и нейтрон n могут образовать ядро дейтерия D . Такое сочетание обстоятельств — прохождение через барьер и превращение одного из протонов в нейтрон — чрезвычайно маловероятное событие.

Несмотря на фантастически малую вероятность реакции $p + p \rightarrow D$, она обеспечивает необходимую светимость Солнца J_\odot . Убедимся в этом. Число протонов на Солнце имеет порядок величины

$$\frac{M_\odot}{m_p} \sim \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{2 \cdot 10^{-27} \text{ кг}} \sim 10^{57}.$$

Ядерная реакция $p + p \rightarrow D$ происходит в среднем раз за 10^{10} лет.

* Свободный протон — частица стабильная. В тексте речь идет не о свободном протоне, а протоне, вступившем в сильное взаимодействие.

Количество отдельных актов реакций $p + p \rightarrow D$, происходящих на Солнце в 1 с, составляет

$$\frac{\text{(Общее число протонов)}}{\left(\frac{\text{Число нуклонов}}{\text{в одном цикле}}\right) \cdot \left(\frac{\text{Время ожидания}}{\text{реакции в с}}\right)} \sim \frac{10^{57}}{4 \cdot (10^{10} \cdot 3 \cdot 10^7)} \sim 10^{39} \frac{\text{актов}}{\text{с}}.$$

Для полной мощности излучения Солнца получим

$$J_{\odot} \sim 28,5 \text{ МэВ} \cdot 10^{39} \sim 28,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{39} \text{ Вт} \sim 3 \cdot 10^{27} \text{ Вт}.$$

Эта оценка сделана в рамках представлений о Солнце как чисто водородной звезде. Измерения же дают для светимости Солнца значение $J_{\odot} \approx 4 \cdot 10^{26} \text{ Дж/с}$.

§ 73. ПЛОТНЫЕ ЗВЕЗДЫ – БЕЛЫЕ КАРЛИКИ

73.1 Возможная эволюция звезд типа Солнца В центре нормальной звезды водород когда-то должен выгореть и там образуется гелиевое ядро, которое вследствие прекращения ядерных реакций сильно уплотняется. Во внешних слоях за счет запаса водорода идет pp -реакция и оболочка звезды чрезмерно расширяется, достигая размеров, сравнимых с размерами солнечной системы. Такое образование называют *красным гигантом*.

По мере остывания красного гиганта его разреженная оболочка рассеивается. Остается только плотное ядро звезды, которое и называют *белым карликом*.

Вещество белых карликов состоит в основном из ядер гелия и свободных вырожденных электронов. Электронный механизм теплопроводности белых карликов обеспечивает практически одинаковую температуру вдоль всего объема звезды. Ядерных реакций в объеме нет. Излучает звезда за счет запасов теплоты (температура падает от $T \sim 10^8 \text{ К}$ до $T \sim 0 \text{ К}$). Время остывания белого карлика – приблизительно 10^8 лет.

73.2 Плотность и размеры белых карликов Плотность звездного вещества, при которой его электронный газ уже является вырожденным (нижний предел плотности), определится из соотношения

$$10^7 \rho^{5/3} \sim \frac{R}{M} \rho T, \quad (73.1)$$

записанного в системе СИ. Здесь R – газовая постоянная, M – молярная масса.

Для получения левой части (73.1) обратимся к § 39.6, из которого следует, что давление вырожденного квантового газа электронов

$$p_e \sim \epsilon_F \left(\frac{N_e}{V} \right) \sim \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{N_e}{V} \right)^{5/3},$$

где m_e – масса электрона; N_e – полное число электронов в частично заполненной зоне квантовых состояний; ϵ_F – граничная энергия электронов. Поскольку мы считаем, что звезда состоит из гелия, то на

каждый атом приходится 1–2 свободных электрона и давление вещества

$$p \sim \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{\rho}{m_N} \right)^{5/3} \sim 10^7 \rho^{5/3}, \quad (73.2)$$

где m_N — масса нуклона; ρ — плотность вещества. Это следует из очевидных равенств

$$\frac{\rho}{m_N} = \frac{M_*}{V m_N} = \frac{N_N}{V} \approx \frac{N_e}{V}.$$

Вернемся к (73.1), из этого выражения при $M = (1-4) \cdot 10^{-3}$ имеем

$$\rho \sim \left(\frac{RT}{10^4} \right)^{3/2}.$$

Положим здесь температуру $T \sim 10^7$ К, тогда

$$\rho \sim \left(\frac{8.3 \cdot 10^7}{10^4} \right)^{3/2} \text{ кг/м}^3 \sim 10^6 \text{ кг/м}^3.$$

При таких плотностях горячего вещества его электронный газ уже является вырожденным. У Солнца при $T_\odot \sim 2 \cdot 10^7$ К плотность $\rho \gtrsim 10^5$ кг/м³, у белых карликов при тех же температурах $10^7 < \rho < 10^9$ кг/м³.

Следует иметь в виду, что для крайне вырожденного электронного газа ($T \ll T_*$) температура уже не определяет его состояния. В частности, даже при $T = 0$ К условие равновесия белого карлика определяется соотношением между гравитационным сжимающим давлением $p_{\text{грав}}$ и противодействием $p_{\text{квант}}$, которое не является тепловым, а обусловлено квантовой природой фермиевского газа электронов. В итоге

$$p_{\text{квант}} \approx p_{\text{грав}}$$

$$\text{или} \quad 10^7 \rho^{5/3} \sim G \frac{M_*^2}{R_*^4}. \quad (73.3)$$

Поскольку $\rho \sim M_*/R_*^3$, то из (73.3) следует, что

$$R_* \sim \frac{10^7}{GM_*^{1/3}}. \quad (73.4)$$

Для белых карликов $M_* \approx M_\odot$ и их радиус

$$R_* \sim \frac{10^7}{6.7 \cdot 10^{-11} (2 \cdot 10^{30})^{1/3}} \text{ м} \sim 10^4 \text{ км},$$

т. е. размеры белых карликов сравнимы с размерами Земли.

73.3 Предельная масса белых карликов В тесной двойной звезде, состоящей из белого карлика и обычной звезды, может наблюдаться так называемое явление *аккреции*. Под влиянием сильного поля тяготения белого карлика* происходит перетекание вещества с

* При данной массе звезды гравитационный потенциал ϕ в ее окрестности возрастает с уменьшением размеров звезды ($|\phi| = GM_*/R_*$).

обычной звезды на карлик. По мере роста массы белого карлика растет плотность N_e/V электронного газа, а значит, возрастет и его граничный импульс p_F , который может стать релятивистским и даже ультрарелятивистским (см. § 39.6). Это означает, что граничная энергия

$$\varepsilon_F = cp_F = c\hbar\left(\frac{N_e}{V}\right)^{1/3} \gg m_e c^2.$$

Давление электронного ультрарелятивистского газа составит

$$p_e \sim \varepsilon_F \left(\frac{N_e}{V}\right) \sim c\hbar\left(\frac{N_e}{V}\right)^{4/3},$$

а давление вещества соответственно

$$p \sim c\hbar\left(\frac{\rho}{m_N}\right)^{4/3}.$$

Условие равновесия такого сверхплотного карлика

$$c\hbar\left(\frac{\rho}{m_N}\right)^{4/3} \approx G \frac{M_*^2}{R_*^4}.$$

Учитывая здесь выражение для плотности вещества $\rho \sim M_*/R_*^3$, получим

$$M_* \approx \left(\frac{c\hbar}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_N^2}. \quad (73.5)$$

Перед нами замечательная формула, она выражает массу белого карлика (электроны которого находятся в предельном ультрарелятивистском состоянии) через мировые постоянные и массу нуклона. Эта предельная масса $M_* = 1,4M_\odot$. Существование предельной массы белого карлика означает, что при дальнейшем ее росте давление квантового ультрарелятивистского электронного газа больше не может противостоять силам тяготения — наступает новая перестройка вещества.

§ 74. СВЕРХПЛОТНЫЕ НЕЙТРОННЫЕ ЗВЕЗДЫ

74.1 Размеры нейтронных звезд При плотностях $\rho \sim 10^{12} \div 10^{13}$ кг/м³ начинается процесс *нейтронизации вещества* — электроны «вдавливаются» в ядра и превращают протоны в нейтроны (с испусканием нейтрино). Избыток нейтронов в ядрах ведет к уменьшению энергии связи и ядра разваливаются, образуя нейтронный газ.

Нейтроны, так же как и электроны, — это ферми-частицы (спин полуцелый) и давление вырожденного нейтронного газа запишется по аналогии с формулами для электронов, т. е.

$$p_n \sim \frac{\hbar^2}{m_n} \left(\frac{N_n}{V}\right)^{5/3}.$$

Давление вещества соответственно составит

$$p \sim \frac{\hbar^2}{m_n} \left(\frac{\rho}{m_n} \right)^{5/3} = 10^4 \rho^{5/3}.$$

Запись сделана в системе единиц СИ. Радиус нейтронной звезды определяется по аналогии с (73.4):

$$R_n \sim \frac{10^4}{GM_n^{1/3}}.$$

В результате для нейтронных звезд $R_n \approx 10$ км при $M_n \approx M_\odot$.

74.2 Вращение и магнитные поля нейтронных звезд Пусть при исчерпании ядерных источников энергии звезда с околосолнечной массой теряет устойчивость и под влиянием собственной гравитации сжимается, переходя в нейтронную звезду. Поскольку при таком сжатии момент импульса сохраняется, то, согласно (9.36),

$$M_\odot \omega_\odot R_\odot^2 = M_n \omega_n R_n^2, \quad (74.1)$$

где M_\odot — масса Солнца ($2 \cdot 10^{30}$ кг); ω_\odot — угловая скорость вращения Солнца ($3 \cdot 10^{-6}$ рад/с); R_\odot — радиус Солнца ($7 \cdot 10^8$ м). Тогда для угловой скорости нейтронной звезды, размеры которой $R_n \approx 10$ км = 10^4 м, получим

$$\omega_n = \omega_\odot \left(\frac{R_\odot}{R_n} \right)^2; \quad \omega_n \sim \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot (7 \cdot 10^8)^2}{(10^4)^2} \text{ рад/с} \sim 10^4 \text{ рад/с}.$$

Если рассматривать высокотемпературную плазму исходной звезды как идеальное электропроводящее тело (см. § 68), то собственное магнитное поле звезды как бы «вморожено» в ее вещество. Действительно, согласно закону электромагнитной индукции, если проводник при своем движении пересекает магнитные силовые линии, то в нем индуцируется э.д.с. В идеальном же проводнике, т. е. при бесконечной проводимости, сколь угодно малая э.д.с. должна была бы вызвать бесконечно большой ток, что невозможно. Иначе можно сказать, что магнитные силовые линии звезды как бы «приклеены» к частицам ее плазменного вещества.

В результате при гравитационном сжатии звезды ее магнитный поток [см. (13.1)] измениться не может, т. е.

$$H_\odot R_\odot^2 = H_n R_n^2, \quad (74.2)$$

где H_\odot — напряженность магнитного поля на поверхности Солнца ($\approx 10^2$ А/м); H_n — то же, для нейтронной звезды. В результате

$$H_n = H_\odot \left(\frac{R_\odot}{R_n} \right)^2; \quad H_n \sim 10^2 \frac{(7 \cdot 10^8)^2}{(10^4)^2} \frac{\text{А}}{\text{м}} \approx 10^{12} \text{ А/м}.$$

Заметим, что в физических лабораториях рекордные напряженности магнитных полей, получаемых в относительно малых объемах на краткое время ($\sim 10^{-6}$ с), имеют значение $\sim 10^8$ А/м.

74.3 Радиоизлучение пульсаров У нейтронной звезды направление магнитного момента \mathbf{p}_m , как правило, не совпадает с направле-

нием угловой скорости ω вращения. Поскольку звезда вращается, вектор p_m образует в пространстве некоторую коническую поверхность. В этих условиях нейтронная звезда может явиться источником так называемого *магнитно-дипольного излучения*. Дело в том, что суммарный электрический заряд звезды с высокой точностью равен нулю, а внутреннее распределение вещества звезды, по-видимому, сферически симметрично, а значит, у нее отсутствует электрический дипольный момент.

От каких параметров нейтронной звезды может зависеть магнитно-дипольное излучение? Эту задачу проще и естественней рассматривать, используя систему СГС. Ясно, что частота такого излучения равна частоте ω вращения. Интенсивность же J излучения должна зависеть от магнитного момента p_m и частоты вращения. Кроме того, в выражение для интенсивности электромагнитного излучения, каковым является магнитно-дипольное, обязана входить релятивистская постоянная c . В итоге J окажется зависящей от p_m , ω и c .

Найдем эту зависимость методом анализа размерностей. Для этого записываем

$$J \sim p_m^x \omega^y c^z,$$

где x , y и z — некоторые числа, которые надлежит найти. Выписываем размерности рассматриваемых величин:

$$[J] = 1 \frac{\text{Эрг}}{c} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-3};$$

$$[p_m] = 1 \frac{\text{Эрг}}{\text{Гс}} = 1 \text{ г}^{1/2} \cdot \text{см}^{5/2} \cdot \text{с}^{-1} \text{ (см. приложение III);}$$

$$[\omega] = 1 \text{ с}^{-1}, [c] = 1 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Подставляем указанные размерности в исходное равенство, тогда

$$1 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-3} = 1 \text{ г}^{1/2^x} \cdot \text{см}^{5/2^{x+z}} \cdot \text{с}^{-x-y-z}.$$

Сравнив показатели степеней при одинаковых наименованиях единиц измерения, получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} &= 1, \\ 5/2^x + z &= 2, \\ x + y + z &= 3. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы уравнений дает $x = 2$, $y = 4$, $z = -3$. В результате

$$J \sim p_m^2 \omega^4 c^{-3},$$

или

$$J \sim \frac{1}{c^3} p_m^2 \omega^4. \quad (74.3)$$

Полученное выражение для интенсивности магнитно-дипольного излучения можно преобразовать, если вспомнить [см. формулу (15.4)],

$$\text{что магнитный момент} \quad p_m \sim HR^3. \quad (74.4)$$

Подставив (74.4) в (74.3), получим

$$J \sim \frac{1}{c^3} H^2 R^6 \omega^4. \quad (74.5)$$

Это соотношение отличается от точного множителем $2/3$.

Произведем числовую оценку полной интенсивности магнитно-дипольного излучения нейтронной звезды. Соберем известные уже нам числа: $H_n \sim 10^{10}$ Э, $R_n \sim 10^6$ см, $\omega_n \sim 10^4$ с $^{-1}$. Подставив их в (74.5), в итоге получим $J \sim 10^{40}$ эрг/с = 10^{33} Вт.

Много это или мало? Совокупная мощность излучения всех радиопередатчиков у нас на Земле составляет примерно несколько тысяч мегаватт или порядка 10^9 Вт. Другими словами, мощность «космических радиопередатчиков» фантастически велика по сравнению с земными.

Само излучение нейтронной звезды имеет резко направленный характер (вдоль направления вектора p_m). Так что получается «модель вращающегося маяка», и наблюдатель на Земле фиксирует лишь отдельные импульсы излучения от такой звезды. По этой причине нейтронные звезды называют *пульсарами*.

Легко оценить время активной жизни пульсаров. В самом деле, энергия вращения $E = I\omega_n^2/2$, где $I = M_n R_n^2$ — момент инерции шара. В результате

$$E \sim M_n R_n^2 \omega_n^2 \sim 10^{30} \cdot (10^4)^2 \cdot (10^4)^2 \sim 10^{46} \text{ Дж.}$$

Для времени τ вращательного состояния пульсара получим

$$\tau \sim E/J \sim 10^{46}/10^{33} \sim 10^{13} \text{ с} \sim 10^6 \text{ лет.}$$

В течение этого времени вся энергия вращения пульсара перейдет в энергию излучения.

74.4 Внутренняя структура нейтронных звезд Прежде всего оценим плотность вещества пульсара. Она определится выражением

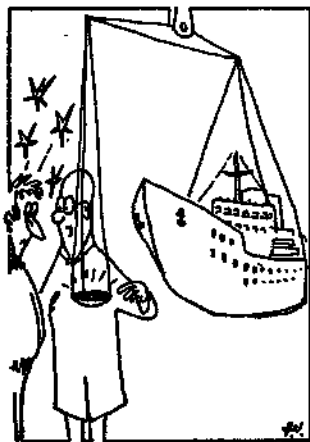
$$\rho = \frac{M_n}{\frac{4}{3}\pi R_n^3} \approx \frac{2 \cdot 10^{30}}{4(10^6)^3} \sim 5 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3.$$

Это плотность вещества атомных ядер. По этой причине иногда говорят, что пульсар — это как бы «гигантское атомное ядро».

Чтобы как-то представить себе всю колоссальность указанной плотности вещества пульсара, прикинем вес 1 м 3 этого вещества в земных условиях: он будет порядка величины

$$p_g \sim 10^{17} 10 \text{ Н} \sim 10^{18} \text{ Н} = 10^{14} \text{ тонна-сил (тс).}$$

Мы уже пользовались тем обстоятельством, что нейтронное вещество пульсара на-



ходится в вырожденном состоянии. Убедимся в этом. Согласно (37.9) система частиц подчиняется квантовым закономерностям, если квантовомеханическая длина волны частиц сравнима со средним расстоянием между частицами, т. е.

$$\frac{\hbar}{p} \sim \left(\frac{N}{V} \right)^{-1/3}. \quad (74.6)$$

Здесь p — импульс нейтрона. Поскольку нуклоны в ядре являются релятивистскими частицами, то $p \sim m_n c$. Число нейтронов в единичном объеме N/V определим из отношения ρ/m_n .

Произведем числовые оценки: $\hbar/(m_n c) \sim 10^{-34}/(10^{-27} \cdot 10^8) \text{ м} \sim 10^{-15} \text{ м}$. Плотность числа нейтронов в веществе пульсара

$$(N/V) \sim \rho/m_n \sim 10^{17}/10^{-27} \text{ нейтронов/м}^3 \sim 10^{44} \text{ нейтронов/м}^3.$$

Среднее же расстояние между нейтронами

$$\left(\frac{N}{V} \right)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{N/V}} \sim \frac{1}{(10^{44})^{1/3}} \text{ м} \sim 10^{-15} \text{ м}.$$

Таким образом, соотношение (74.6) удовлетворяется.

Так как спин у нейтронов полуцелый, то совокупность нейтронов должна описываться квантовой статистикой Ферми. Оценки показывают, что в нейтронной системе пульсаров возможно возникновение коррелированных пар нейтронов с противоположно направленными спинами, а это уже бозе-частицы (суммарный спин равен нулю). Другими словами, нейтронная жидкость может оказаться сверхтекучей.

В составе нейтронного вещества пульсара есть примесь протонов и электронов. Протоны при соответствующей парной корреляции могут перейти в коллективное сверхпроводящее состояние. Для электронов такое состояние в условиях пульсара оказывается невозможным.

Центральные области пульсаров представляют собой, по-видимому, смесь из гиперонов и мезонов. Наружные же области пульсаров, скорее всего, образуют твердую кору из ядер железа; последние наиболее плотноупакованы и, следовательно, обладают максимальной энергией связи.

Любопытно, что под влиянием сверхсильных магнитных полей с напряженностью $H \sim 10^{12} \div 10^{14} \text{ А/м}$, которые существуют на поверхности пульсаров, вещество коры существенно изменяет свой облик. Так, электронные оболочки атомов железа приобретают в направлении поля сильно вытянутую игольчатую форму и корковое вещество формируется в нечто, напоминающее структуру полимеров.

74.5 Гравитационные эффекты в окрестностях нейтронной звезды
Что касается гравитационных эффектов, то пульсары должны описываться релятивистской теорией тяготения. Покажем это с помощью самых простых средств. Введем представление о *слабом* и *сильном гравитационных полях*. Исходим из хорошо известных соотношений для движения тела в однородном поле тяготения (см. § 7):

$$v_t = gt, \quad h_t = gt^2/2.$$

Исключая из этой системы уравнений время t , получим $v^2 = 2gh$. Подставляя сюда выражение $g \sim |\phi|/h$, где ϕ — гравитационный потенциал*, будем иметь $v^2 \sim 2|\phi|/h \sim 2|\phi|$. Это соотношение можно записать в виде

$$v^2/c^2 \sim 2|\phi|/c^2. \quad (74.7)$$

Из (74.7) видно, что в случае $v^2/c^2 \ll 1$, т. е. когда применима нерелятивистская теория тяготения Ньютона, поля считаются слабыми, точнее, для этого необходимо, чтобы $|\phi| \ll c^2$. Так, на поверхности Солнца $|\phi|/c^2 \sim 10^{-6}$, на поверхности более плотных звезд — белых карликов $|\phi|/c^2 \sim 10^{-3}$.

Оценим параметр $2|\phi|/c^2$ для нейтронных звезд. Привлекая выражение для потенциала ϕ поля тяготения, запишем

$$\frac{2|\phi|}{c^2} \sim 2 \frac{G M_n}{c^2 R_n} \sim \frac{2 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 10^4} \approx 0,3.$$

Таким образом, для пульсаров $|\phi| \sim c^2$; такие поля тяготения считаются сильными, ибо в них внешние частицы и тела приобретают скорости $v \sim c$ [см. (74.7)].

Полученный результат означает, что для описания гравитационных свойств пульсара необходимо применять релятивистскую теорию тяготения Эйнштейна (ее называют также *общей теорией относительности*). Согласно же последней вблизи нейтронной звезды геометрия пространства должна быть неевклидовой, т. е. *само пространство обладает существенной кривизной*. Ход времени в окрестностях пульсара окажется замедленным.

§ 75. ГРАВИТАЦИЯ И РЕЛЯТИВИЗМ

75.1 Принцип эквивалентности Своеобразным и универсальным явлением в природе является существование полей тяготения (или гравитационных полей). Характер поля тяготения устанавливается по законам движения тел в этих полях.

Согласно уравнениям механики уравнения движения тел в слабом поле тяготения записываются как

$$m_a \mathbf{a} = m_g \mathbf{g}, \quad (75.1)$$

где \mathbf{a} — ускорение; \mathbf{g} — напряженность гравитационного поля; m_i — масса инертная, т. е. та масса, которая входит, например, в соотношения $p = mv$ или $E = mc^2$; m_g — масса тяжелая, играющая роль гравитационного заряда, создающего поле тяготения (входит, например, в закон Ньютона $F = -Gmm_1/r^2$).

Основным свойством поля тяготения является одинаковость ускорений \mathbf{a} тел в поле данной напряженности \mathbf{g} вне зависимости их от массы m . Учитывая (75.1), получаем, что указанное свойство поля

* Это выражение является аналогом хорошо известной связи $|E| = -\Delta\phi/\Delta x \sim \phi/x$ между напряженностью E и потенциалом ϕ электростатического поля.

тяготения приводит к выводу

$$m_1 = m_2, \quad (75.2)$$

т. е. инертная и тяжелая массы неотличимы (как говорят, эквивалентны).

Отмеченное свойство поля тяготения является исключительным. Заметим, например, что движущиеся в электростатическом поле заряды имеют ускорение

$$a = \frac{e}{m} E,$$

зависящее от отношения заряда к массе.

В эксперименте равенство (75.2) проверено сейчас с точностью до 10^{-12} . Это равенство позволяет провести существенную аналогию между рассмотрением движения тел в инерциальных системах отсчета (и. с. о.) при наличии гравитационного поля и описанием их движения с точки зрения неинерциальных систем отсчета (н. с. о.) в отсутствие поля тяготения.

Рассмотрим, например, движение в равномерно ускоренной н. с. о. (рис. 75.1). Введем обозначения: v — скорость частицы массы m в и. с. о. XOY , v' — скорость той же частицы с точки зрения н. с. о. $X'O'Y'$, $V(t)$ — равномерно меняющаяся во времени скорость переноса н. с. о. относительно и. с. о. Согласно классическому закону преобразования скоростей

$$v = v' + V(t).$$

Соответственно в и. с. о. уравнение движения частицы имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = F;$$

в н. с. о. оно запишется как

$$m \frac{dv'}{dt} = F - m \frac{dV(t)}{dt}.$$

Таким образом, в равномерно ускоренной н. с. о. свободные тела (когда $F = 0$) любой массы обладают относительно этой системы отсчета одним и тем же постоянным ускорением $-dV(t)/dt$ (равным и противоположным ускорению самой системы отсчета). Таким же является движение в однородном постоянном гравитационном поле,

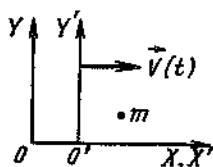


Рис. 75.1

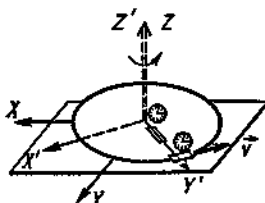


Рис. 75.2

например в поле тяготения Земли (на его небольших участках, где поле можно рассматривать как однородное). В результате движение относительно равномерно ускоренной н.с.о. эквивалентно движению в постоянном однородном внешнем поле тяготения. Имея в виду также и общий случай, это обстоятельство именуют *принципом эквивалентности*.

75.2 Геометрия и ход времени в неинерциальных системах отсчета Рассмотрим н.с.о. $X'Y'Z'$, равномерно вращающуюся относительно н.с.о. XYZ вокруг их общей оси Z (рис. 75.2). Построим окружность в плоскости $(X'Y')$ в н.с.о. с центром на оси вращения. При отсутствии вращения отношение длины окружности L к ее диаметру D было бы равно π . Но при вращении относительно н.с.о. все элементы длины, расположенные вдоль окружности, испытывают лоренцево сокращение по отношению к н.с.о., а элементы, расположенные вдоль диаметра (перпендикулярно скорости), остаются неизменными. Следовательно, L/D должно отличаться от π . Мы видим, что *геометрические соотношения в н.с.о. оказываются неевклидовыми* в противоположность тому, что имеет место в н.с.о.

Если рассматривать два экземпляра одинаковых часов (вращающихся вместе с н.с.о.): один на окружности, а другой в ее центре, то при наблюдении из н.с.о. часы на окружности будут идти медленнее, чем часы в центре. То же самое должно, следовательно, происходить и с точки зрения н.с.о. Таким образом, и *свойства времени меняются при переходе к н.с.о.*

В изложенном примере н.с.о. являлась вращающаяся система отсчета. В такой системе отсчета появляется поле центробежных сил. В центре окружности эти силы равны нулю, а на самой окружности принимают максимальные значения.

Применяя к рассмотренному принцип эквивалентности, т.е. положение о том, что всякая н.с.о. равноценна н.с.о. при наличии некоторого поля тяготения, мы можем сделать вывод, что *всякое гравитационное поле является не чем иным, как изменением геометрических свойств пространства — времени*.

75.3 Уравнения Эйнштейна Поскольку источником поля тяготения являются массы или энергии любых видов материи, сами уравнения поля должны определять пространственно-временную метрику через плотность материи. Впервые такие уравнения были написаны в 1916 г. Эйнштейном. Структура этих уравнений может быть изображена схемой, представленной на рис. 75.3.



Рис. 75.3

§ 76. РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ

76.1 Фридмановские космологические решения В предположении однородной изотропной модели Вселенной были получены решения уравнений Эйнштейна. Некоторой аналогией этих решений может явиться следующий подход: пусть тело массы m находится в поле тяготения планеты с массой M ; его начальная скорость v может варьировать свои значения; какова при этом зависимость координат R тела от времени t ? Закон сохранения энергии даст связь

$$m \frac{v^2}{2} - G \frac{mM}{R} = E,$$

или

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)^2 - G \frac{mM}{R(t)} = E.$$

Функция $R(t)$ явится решением этого уравнения, при этом ее вид зависит от значений параметра E , а именно (рис. 76.1):

$$R(t) \rightarrow \begin{cases} \text{кривая 1 при } E > 0, \\ \text{кривая 2 при } E = 0, \\ \text{кривая 3 при } E < 0. \end{cases}$$

Интерпретация этих решений в применении ко Вселенной будет дана ниже. На рис. 76.1 около каждой кривой показан соответствующий ей характер геометрии Вселенной. Там же приведена сумма внутренних углов в треугольнике при данной геометрии.

76.2 Открытие «расширения» Вселенной Результатом астрономических наблюдений явилось эмпирическое соотношение Хаббла

$$v = HL, \quad (76.1)$$

где v — скорость удаления галактик друг от друга; L — межгалактические расстояния; H — коэффициент, называемый *постоянной Хаббла*. Установлено, что

$$1/H \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ лет.}$$

Теперь удобно обратиться к интерпретации решений $R(t)$ в применении к наблюдаемому миру галактик, образующих Вселенную. Будем

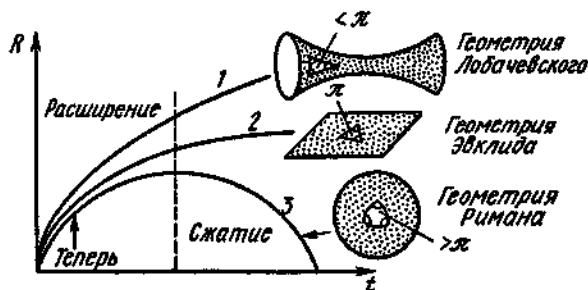


Рис. 76.1



моделировать реальное трехмерное пространство двумерной поверхностью, на которой живут двумерные существа. Тогда кривой 2 (см. рис. 76.1) соответствует плоская неограниченная поверхность, на которой справедливы все соотношения геометрии Эвклида (в частности, сумма углов треугольника равна π). При этом расстояния L между точками — галактиками на этой плоской поверхности равномерно возрастают со временем t . Чтобы лучше уяснить это, обратимся к рис. 76.2, на котором плоская поверхность представлена резиновой пленкой. Вообразите эту пленку неограниченной в размерах, и пусть ее равномерно растягивают во всех направлениях. Тогда

любое из многочисленных пятен, нанесенных на пленку, может быть выбрано за место наблюдения двумерного существа. Из рис. 76.2 видно, что чем дальше от наблюдателя находится какое-либо пятно-галактика, тем большей скоростью удаления оно характеризуется. Мы рассмотрели двумерную модель так называемой «открытой Вселенной», т. е. Вселенной, в которой расстояния L между галактиками возрастают неограниченно; естественно, при этом неограниченно возрастает со временем и радиус R Вселенной.

Рассмотрим теперь «замкнутую Вселенную». На рис. 76.1 она соответствует кривой 3 для функции $R(t)$. Двумерной моделью замкнутого трехмерного пространства явится расширяющаяся поверхность сферы. На рис. 76.3 изображен резиновый шарик с нанесенными на его поверхности точками — галактиками. Шарик раздувается и его радиус $R(t)$ увеличивается со временем t . При этом расстояния между точками вдоль поверхности возрастают ($L_2 > L_1$), возрастают и скорости v разбегания точек — галактик друг от друга. Геометрия на сфере является неевклидовой; например, сумма углов треугольника уже превышает значение π . Зависимость $R(t)$, изображенная кривой 3 на рис. 76.1, означает, что расширение Вселенной достигает некоторого максимума и затем начинается ее сжатие. Объем такой Вселенной в каждый момент времени ограничен, ограничено и количество вещества в ней.

76.3 Критическая плотность Из закона Хаббла (76.1) следует, что

$$v^2 = H^2 L^2,$$

или

$$\rho v^2 = \rho H^2 L^2.$$

Это есть не что иное, как плотность кинетической энергии галактического вещества.

Обозначим $\rho\phi$ плотность энергии взаимодействия галактик между собой, при этом ϕ — соответствующий гравитационный потенциал.

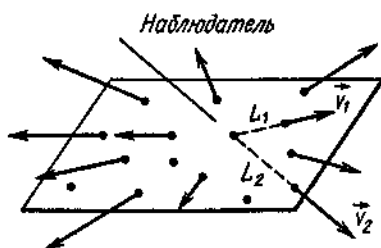


Рис. 76.2

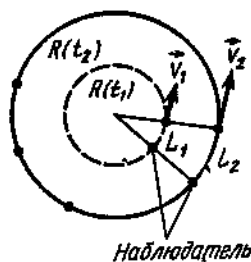


Рис. 76.3

Примем, что $\rho v^2 \sim \rho \phi$,
тогда $H^2 L^2 \sim \phi$.

Для самого потенциала $\phi = GM/L$ возможна цепочка равенств

$$\frac{\phi}{L^2} = G \frac{M}{L^3} = G\rho.$$

В результате предыдущее соотношение запишется как

$$H^2 \sim \rho G. \quad (76.2)$$

Эта важнейшая связь есть следствие закона Хаббла и фридмановской модели Вселенной.

Из последней вытекает более точное соотношение между усредненной плотностью ρ вещества в наблюдаемой Вселенной и параметрами движения H и взаимодействия G вещества. А именно, при некотором значении плотности $\rho_{кр}$, которое назовем *критической плотностью*, возможна связь

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \rho_{кр} G. \quad (76.3)$$

Откуда для критической плотности имеем

$$\rho_{кр} = \frac{H^2}{8/3\pi G}; \quad \rho_{кр} = \frac{1}{(2 \cdot 10^{10} 3 \cdot 10^7)^2 \cdot 8,37 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} \text{ кг/м}^3 = 0,5 \cdot 10^{-26} \text{ кг/м}^3.$$

Значение критической плотности лежит на границе, отделяющей представления об открытой и закрытой моделях Вселенной. Поскольку параметры H и G фиксированы, измерение значения ρ позволит сделать выбор между указанными моделями.

Условие

$$H^2 > \frac{8\pi}{3} \rho G \quad (76.4)$$

соответствует кривой 1 на рис. 76.1, т. е. на языке полукачественных представлений можно сказать, что Вселенная должна неограниченно расширяться, если энергия движения материи превосходит энергию ее взаимодействия. Обратное неравенство

$$H^2 < \frac{8\pi}{3} \rho G \quad (76.5)$$

связано с кривой 3, т. е. с закрытой моделью, в которой расширение Вселенной обязательно сменится ее сжатием. Это будет иметь место, если энергия, связанная с движением, меньше энергии взаимодействия.

Что известно в настоящее время о «размазанной» плотности Вселенной, т. е. плотности наблюдаемой материи, усредненной по всему объему видимой Вселенной? Если не учитывать возможную массивность нейтрино, не учитывать принципиально допустимые, но труднонаблюдаемые формы материи: сколлапсировавшие звезды («черные дыры») и гравитационное излучение, то для плотности следует принять значение $\rho \sim 3 \cdot 10^{-28}$ кг/м³. В результате

$$H^2 - \frac{8\pi}{3} \rho G = \left(\frac{1}{(2 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^7)^2} - 8,37 \cdot 3 \cdot 10^{-28} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \right) \text{с}^{-2} = \\ = (3 \cdot 10^{-36} - 1,67 \cdot 10^{-37}) \text{с}^{-2} > 0,$$

т. е. Вселенная только расширяется (это, конечно, предварительный вывод).

§ 77. ГОРЯЧАЯ ВСЕЛЕННАЯ

77.1 Открытие фонового теплового радиоизлучения Начиная с 1965 г. физики и радиоастрономы тщательно изучают свойства так называемого *реликтового излучения*. Это электромагнитное излучение, находящееся в радиодиапазоне с длинами волн $0,06 \text{ см} < \lambda < 50 \text{ см}$. Распределение интенсивности излучения по длинам волн имеет планковский вид, а это значит, что само излучение равновесное и связано с процессами теплового происхождения. Соответствующая эффективная температура равновесного радиоизлучения оказалась равной 2,7 К. При этом само излучение имеет характер некоторого фона, ибо заполняет все пространство и совершенно изотропно.

Если мы будем знать температуру равновесного излучения, то сможем определить все его характеристики. Для этого воспользуемся формулами § 38. Прежде всего, какова плотность этого излучения? Плотность энергии

$$\frac{E}{V} = 4 \frac{\sigma}{c} T^4 = \frac{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 10^8} (2,7)^4 \text{ Дж/м}^3 = 4 \cdot 10^{-14} \text{ Дж/м}^3. \quad (77.1)$$

Средняя энергия кванта

$$\varepsilon = 2,82kT; \quad \varepsilon = 2,82 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 2,7 \text{ Дж} = 1,05 \cdot 10^{-22} \text{ Дж}; \quad (77.2)$$

значение ε определяется положением максимума на планковской кривой $dE_\omega/d\omega$. В итоге для числа фотонов в единичном объеме получим

$$\frac{E/V}{\varepsilon} \approx 4 \cdot 10^8 \text{ фотонов/м}^3. \quad (77.3)$$

Найдем числовое соотношение между плотностью вещества и плотностью реликтового излучения во Вселенной в настоящее время. В предыдущем параграфе для усредненной по всему объему наблю-

даемой Вселенной плотности вещества приводилось значение $\rho \sim 3 \cdot 10^{-28}$ кг/м³. Тогда плотность числа протонов

$$\frac{N_p}{V} = \frac{\rho}{m_p} = 3 \cdot 10^{-28} / (1,67 \cdot 10^{-27}) \text{ протонов/м}^3 \approx 1,7 \cdot 10^{-1} \text{ протонов/м}^3.$$

В результате для отношения плотностей числа фотонов к числу протонов получим

$$n_\gamma/n_p \sim 4 \cdot 10^8 / 1,7 \cdot 10^{-1} \sim 10^9.$$

77.2 Зарядово-несимметричная модель ранней Вселенной Полученное отношение n_γ/n_p является не чем иным, как энтропией излучения, приходящейся на один нуклон. Покажем это, рассматривая плазму, в которой преобладает излучение. Исходим из общего определения температуры (34.1)

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \sim \frac{S}{E},$$

тогда энтропия

$$S \sim E/T. \quad (77.4)$$

В применении к равновесному излучению (77.4) запишется так:

$$\frac{S}{V} \sim \frac{E/V}{T}; \quad (77.5)$$

здесь мы перешли к энтропии и энергии излучения для единичных объемов. Подставляя в (77.5) выражение (77.1), получим

$$\frac{S}{V} \approx 4 \frac{\sigma}{c} T^3. \quad (77.6)$$

Отметим одно обстоятельство. В формуле (77.4) энтропия — величина безразмерная, если температура выражается в единицах энергии. Однако чтобы энтропия осталась безразмерной, а температура измерялась в кельвинах, необходимо обе стороны (77.4) разделить на постоянную Больцмана k , т. е.

$$\frac{S}{k} \sim \frac{E}{kT}. \quad (77.7)$$

Найдем значение безразмерной энтропии излучения, отнесенной к одному нуклону:

$$S_1 = \frac{S}{kn_p}, \quad (77.8)$$

где $n_p = N_p/V$ — плотность числа нуклонов, а $S \equiv S/V$. Подставляя в (77.8) выражение (77.6), получаем

$$S_1 \approx \left(4 \frac{\sigma}{ck} \right) \frac{T^3}{n_p}. \quad (77.9)$$

Теперь вернемся к написанию формулы для числа квантов на

один нуклон:

$$\frac{n_\gamma}{n_p} \equiv \frac{E/V}{\varepsilon n_p} = \frac{4\sigma T^4/c}{2,82kTn_p} = \frac{1}{2,82} \left(4 \frac{\sigma}{ck} \right) \frac{T^3}{n_p}. \quad (77.10)$$

В (77.10) были использованы выражения (77.1) и (77.2). Сравнивая (77.9) с (77.10), получим окончательно

$$\frac{n_\gamma}{n_p} \approx \frac{1}{2,82} S_1. \quad (77.11)$$

Точным выражением является

$$\frac{n_\gamma}{n_p} = \frac{1}{3,7} S_1. \quad (77.12)$$

Возвратимся к объекту рассмотрения — миру как целому. Несомненно, что расширение Вселенной происходило адиабатно, а в таком процессе энтропия сохраняется. В результате n_γ/n_p становится важнейшим параметром, характеризующим космологическое расширение. Обращаясь к ранней стадии эволюции Вселенной, мы должны записать выражение (77.12) в виде

$$S_1 = 3,7 \frac{n_\gamma}{\Delta n_N} \sim 10^9, \quad (77.13)$$

где Δn_N — избыток барионов над антибарионами. На каждый нуклон, присутствующий сегодня во Вселенной, в самую раннюю эпоху расширения, при $T > 10^{13}$ К, приходилось примерно 10^9 нуклон-анти-нуклонных пар. Последние аннигилировали (дав n_γ), теперешние нуклоны — это избыток Δn_N . Такова зарядово-несимметричная модель ранней Вселенной.

Многочисленные данные наблюдений, полученные с помощью всего арсенала средств астрофизической науки и, в частности, с использованием спутниковых систем, космических межпланетных аппаратов, не позволяют сделать утверждение о наличии в космосе анти-вещества.

77.3 Изменение плотности и температуры дозвездной материи в процессе космологического расширения Из связи

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho$$

и времени расширения Вселенной

$$t = 1/H$$

следует, что
$$\rho = \left(\frac{8\pi}{3} G t^2 \right)^{-1} \approx \frac{10^9}{t^2}. \quad (77.14)$$

Такова зависимость плотности массы материи (выраженной в кг/м^3) от времени (выраженного в с) космологического расширения.

В ранние эпохи развития мира эффективная массовая плотность излучения ρ_γ значительно превосходила массовую плотность вещества

$\rho_{\text{вещ}}$; лишь к моменту времени $t \sim 10^6$ лет массовые плотности излучения и вещества сравнялись.

Поскольку нас будут интересовать начальные этапы расширения, здесь безраздельно господствовало излучение. Массовая плотность излучения, согласно релятивистским связям, определится как

$$\rho_{\gamma} = \frac{E/V}{c^2}.$$

Воспользовавшись для плотности энергии излучения формулой (77.1), получим

$$\rho_{\gamma} = 4 \frac{\sigma}{c^3} T^4. \quad (77.15)$$

Наконец, подставляя (77.15) в общую связь (77.14), окончательно получаем

$$T = \left(\frac{3c^3}{32\pi G\sigma} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}} \approx \frac{10^{10}}{\sqrt{t}}. \quad (77.16)$$

Здесь температура T излучения выражается в К, а время t — в с.

Составим таблицу значений плотности ρ и температуры T дозвездной материи в зависимости от времени t после начала расширения Вселенной (табл. 77.1).

Таблица 77.1

t , с	ρ , кг/м ³	T , К
—	—	—
10^{-6}	10^{21}	10^{13}
10^{-4}	10^{17}	10^{12}
1	10^9	10^{10}
10^6 лет	10^{-18}	10^3
...

77.4 Состояние вещества в ранние эпохи горячей Вселенной Обратимся к первой строке числовых данных таблицы. Исходя из соотношения

$$m_{NC}^2 \sim kT,$$

можно оценить температуру, при которой рождаются нуклоны и антинуклоны:

$$T \sim \frac{m_{NC}^2}{k}; \quad T \sim \frac{1,6 \cdot 10^{-27} (3 \cdot 10^8)^2}{1,4 \cdot 10^{-23}} \text{ К} \sim 10^{13} \text{ К}.$$

Аннигиляция нуклон-антинуклонных пар даст излучение, частота этого излучения

$$\omega \sim \frac{m_{NC}^2}{\hbar}; \quad \omega \sim \frac{1,6 \cdot 10^{-27} (3 \cdot 10^8)^2}{10^{-34}} \text{ с}^{-1} \sim 10^{24} \text{ с}^{-1},$$

соответствующая длина волны

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}; \lambda \sim 6,3 \frac{3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{24}} \text{ м} \sim 10^{-15} \text{ м}.$$

В состоянии огромных значений плотностей (см. табл. 77.1), несмотря на быстрое расширение, нуклоны, антинуклоны и излучение успеют прийти в термодинамическое равновесие. Очевидно, что в этой системе будут присутствовать и частицы с массой, в 2–3 раза превышающей нуклонную, т. е. весь набор гиперонов. Такое состояние вещества реализуется в интервале времени $10^{-6} \text{ с} < t < 10^{-4} \text{ с}$ от начала расширения; этот временной интервал называют *адронной эпохой*.

Поскольку нестабильные гипероны распадаются за время порядка 10^{-10} с , в адронную эпоху должны «обитать» не только барионы, т. е. нуклоны и гипероны, но и продукты их распада: K - и π -мезоны. Последние за времена $10^{-10} - 10^{-8} \text{ с}$ распадаются на лептоны. Таким образом, адронную эпоху формировали все частицы: собственно адроны, лептоны и фотоны.

Заметим, что в адронную эпоху нуклонные ядра образовываться не могут, ибо равновесные фотоны с частотой $\omega \sim 10^{24} \text{ с}^{-1}$ обладают энергией

$$\hbar\omega \sim 10^{-34} \cdot 10^{24} \sim 10^{-10} \text{ Дж} \sim 10^9 \text{ эВ},$$

что значительно превышает энергию связи ядер (например, у ядра дейтерия, состоящего из протона и нейтрона, она имеет порядок $2 \cdot 10^6 \text{ эВ}$). Такие жесткие γ -кванты мгновенно разрушают любые ядра.

Перейдем к следующему этапу расширения (см. вторую и третью строки таблицы). В этот период температура изменяется в пределах $10^{10} \text{ К} < T < 10^{12} \text{ К}$. Для рождения адронов уже не хватает энергии; все имевшиеся гипероны и мезоны распались; соответствующие друг другу нуклон-антинуклонные пары аннигилировали. Из тяжелых частиц, согласно модели зарядово-несимметричной Вселенной, остался лишь относительно небольшой избыток Δn_N нуклонов, т. е. протонов и нейтронов. Напомним, что время жизни свободных нейтронов порядка 10^3 с .

Временной интервал $10^{-4} \text{ с} < t < 1 \text{ с}$ от начала расширения называют *лептонной эпохой*. Это оправдано, ибо в этот период подавляющую долю частиц составляют стабильные лептоны: электронно-позитронные пары, электронные нейтрино и антинейтрино. Фотоны, лептоны и оставшиеся неспаренные нуклоны находятся в тепловом равновесии.

К концу лептонной эпохи нейтрино практически перестают взаимодействовать с веществом системы. В дальнейшем нейтринный газ только охлаждается (из-за адиабатного расширения). Ко времени нашей эпохи температура нейтринного газа должна снизиться до $T \approx 2 \text{ К}^*$.

Поскольку в лептонную эпоху средние энергии теплового движения

* Обнаружение таких «холодных» нейтрино — вероятнее всего задача для экспериментаторов будущего.

заключены в интервале $10^6 \text{ эВ} < kT < 10^8 \text{ эВ}$, образованием нуклонных ядер практически можно пренебречь.

В следующую эпоху расширения, занимающую период времени $1 \text{ с} < t < 10^6 \text{ лет}$, остается в основном излучение, находящееся в равновесии с небольшой примесью электронов и нуклонов.

Временной интервал $1 \text{ с} < t < 100 \text{ с}$, когда температура изменяется в пределах $10^9 \text{ К} < T < 10^{10} \text{ К}$, связан с интенсивным образованием легчайших ядер: дейтерия (соединение протона с нейтроном), гелия (соединение двух протонов и двух нейтронов). Свободные нейтроны, не успевшие вступить в ядерные реакции синтеза, ко времени $t \sim 10^3 \text{ с}$ превращаются в протоны, т. е. ядра обычного водорода. В результате образуется, как показывают расчеты, следующее соотношение по массе между ядрами: 30 % ядер гелия и 70 % ядер водорода. Заметим, что результаты анализа данных наблюдений распространенности элементов довольно хорошо согласуются с этими предсказаниями рассмотренной горячей модели Вселенной.

В течение последующих 10^6 лет температура дозвездной среды остается еще довольно высокой (ее интервал изменения $10^3 \text{ К} < T < 10^9 \text{ К}$). Состояние вещества этой среды — плазма. Лишь при температурах 3500—4000 К начинается процесс рекомбинации: протоны, дейтоны и ядра гелия присоединяют к себе свободные электроны и становятся нейтральными атомами водорода и гелия. Равновесные фотоны с температурой $T < 3500 \text{ К}$ уже не способны к ионизации атомов водорода и гелия. Фотонный газ практически перестает взаимодействовать с веществом и составляет тот фон равновесного излучения, который, остывая при дальнейшем адиабатном расширении, принял к настоящему времени температуру $T \approx 2,7 \text{ К}$. Вот почему обнаруженное фоновое тепловое излучение называют *реликтовым*, т. е. оставшимся от далеких времен.

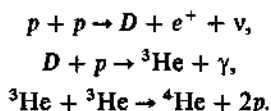
§ 78. СИНТЕЗ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗВЕЗДАХ

На определенном этапе общего космологического расширения, во всяком случае после эпохи рекомбинации, в дозвездной газовой среде должны стать эффективными не только флуктуации плотности, но и коллективные гидродинамические процессы. В условиях существенной роли тяготения указанные явления изменяют свой характер; так, достаточно большая флуктуация плотности может закончиться образованием стабильного сгустка газового вещества. Образование галактик и их скоплений, формирующих крупномасштабную ячеистую структуру Вселенной, — эти вопросы интенсивно изучаются исследователями. Здесь многое еще остается неясным.

Что касается образования звезд, то в этой более конкретной проблеме достигнуто гораздо лучшее понимание. Однако успехи теоретиков в этой области ограничены недостатком данных наблюдений. Дело в том, что зарождающиеся звезды (процесс, идущий путем гравитационной конденсации газа) еще достаточно «холодны» и испускают инфракрасное излучение. Само это излучение поглощается земной атмосферой и детекторы, чувствительные к инфракрасному диапазону, необходимо выносить за пределы атмосферы.

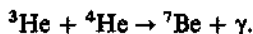
После этих замечаний, касающихся образования галактик и звезд, перейдем к вопросу синтеза ядер элементов в звездах. Мы видели, что на дозвездной стадии могли синтезироваться лишь ядра дейтерия и гелия. Таким образом, «строительным материалом» для звезд первого поколения служил водород (обычный и тяжелый), а также гелий.

Рассмотренный нами ранее протон-протонный цикл в звездах типа Солнца вел к образованию гелия из водорода. Напомним схему реакций *pp*-цикла, могущих идти даже в чисто водородной среде:

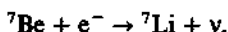


Указанный *pp*-цикл является «дополнительным поставщиком» ядер гелия и вносит небольшую поправку в данные по распространенности элементов во Вселенной.

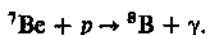
В обычных звездах, отличающихся, однако, от Солнца большей концентрацией ${}^4\text{He}$ и имеющих большую температуру недр, уже возможны реакции



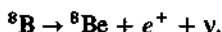
Неустойчивый изотоп бериллия ${}^7\text{Be}$ может либо захватить электрон, образуя устойчивый изотоп лития ${}^7\text{Li}$:



либо, при более высокой температуре, присоединить протон, образуя радиоактивный бор ${}^8\text{B}$:



Последний распадается по схеме

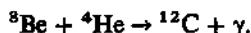


Этот распад замечателен тем, что сопровождается испусканием нейтрино высоких энергий (в среднем 8–9 МэВ), которые могут быть детектированы на Земле.

В тех звездах, в которых водород уже выгорел и ядро звезды становится на две трети гелиевым, характер эволюции резко меняется: ядро ушлотняется и его температура повышается до $T \sim 10^8$ К, а внешняя оболочка расширяется. Это красный гигант; в его ядре уже возможна реакция



Однако ядро ${}^8\text{Be}$ крайне неустойчиво и распадается за время порядка 10^{-15} с. Тем не менее, за такое короткое время ядро ${}^8\text{Be}$ могло бы захватить еще одно ядро ${}^4\text{He}$, переходя в углерод ${}^{12}\text{C}$:

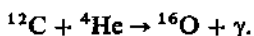


Для обеспечения быстроты этой реакции требуется наличие у ядра ${}^{12}\text{C}$ резонансного уровня энергии (т. е. уровня, чрезвычайно близкого

к энергии исходной системы ядер) со значением 7,82 МэВ. Существование такого уровня энергии у ядра ^{12}C требовали теоретики, ибо, в противном случае, обрывалась бы цепочка для образования всех других элементов периодической системы. Экспериментаторами в лаборатории этот уровень энергии у ядра углерода ^{12}C был идентифицирован.

Налицо любопытное обстоятельство. Оказывается, что весь характер нашей Вселенной в значительной степени зависит от точного значения одного энергетического уровня одного ядра.

Теперь уже беспрепятственно может идти ядерная реакция

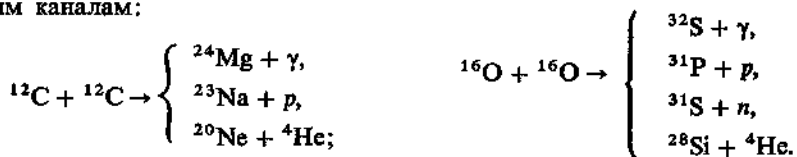


У ядра ^{16}O возбужденный уровень энергии, соответствующий этой реакции, чуть ниже резонансного и поэтому скорость реакции не столь велика. Этот факт объясняет примерно равную распространенность углерода и кислорода в природе и, в частности, делает возможной жизнь в той форме, которую мы знаем.

Заметим, что ядра ^{12}C и ^{16}O , так же как и ядро ^4He , являются весьма устойчивыми, т. е. обладают большой энергией связи на один нуклон. При этом ядра ^4He ($2p, 2n$) и ^{16}O ($8p, 8n$) относятся к категории *дважды магических* (их протонные и нейтронные оболочки целиком заполнены).

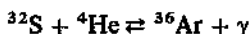
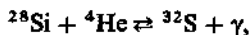
Синтез очередного более тяжелого ядра с участием ядер гелия требует все более высоких энергий ядер — участников реакции. Это естественно, ибо с ростом порядкового номера элемента растет заряд ядра, а значит, возрастает и энергетический барьер, который должен быть преодолен гелиевым ядром для слияния с ядром тяжелым.

В результате, для того чтобы могли начаться реакции горения ^{12}C и ^{16}O , необходимы температуры $T \sim 10^9$ К. Они достигаются в звездах-гигантах, в которых указанные реакции идут по многочисленным каналам:



Основным продуктом реакций горения углерода и кислорода является кремний ^{28}Si . Энергия связи на нуклон в ядре ^{28}Si особенно велика.

Переход к более высоким температурам $T > 3 \cdot 10^9$ К ведет к горению кремния



и т. д. Заметим, что в этих реакциях энергия γ -квантов, излучаемых образующимися возбужденными ядрами, достаточна для расщепления этих же ядер.

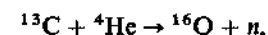
Указанные реакции, в конце концов, приводят к образованию железа ^{56}Fe и близких к нему элементов. Эти элементы характеризуют-

ся максимальной энергией связи на нуклон. Поэтому термоядерные реакции с выделением энергии заканчиваются на железе ^{56}Fe .

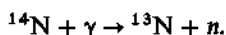
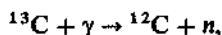
Синтез элементов тяжелее железа должен обеспечиваться другим механизмом. Таким механизмом являются реакции медленного захвата нейтронов ядрами*. В указанных реакциях свободные нейтроны захватываются ядрами достаточно редко, поэтому если образуются неустойчивые ядра, то они успевают распасться прежде чем присоединить следующий нейтрон.

В процессе наблюдений получены доказательства осуществимости ядерных реакций медленного захвата нейтронов в звездах. Так, у элемента технеция нет стабильных изотопов и в естественном состоянии на Земле он не встречается (период полураспада ^{99}Tc равен $2 \cdot 10^5$ лет). Технеций ^{99}Tc образуется в процессах медленного захвата нейтронов и обнаружен в красных гигантах. В спектрах красных гигантов присутствует и прометий ^{145}Pm (его период полураспада 18 лет). Следует вообще заметить, что красные гиганты разных типов являются настоящими «фабриками по производству элементов».

После этих замечаний, естественно, возникает вопрос: что является источником свободных нейтронов в звездах? Если брать относительно высокие температуры $T \gtrsim 10^9$ К, то источником нейтронов могут служить реакции

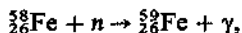
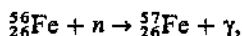


и т. д. При более низких температурах в обычных стационарных звездах могут протекать реакции



Указанные высокотемпературные реакции в звездах-гигантах производят потоки нейтронов с плотностью $\approx 10^{20}$ нейтронов/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$). Для сравнения заметим, что у нас на Земле в исследовательских ядерных реакторах (в их активной зоне) достигаются плотности нейтронных потоков $10^{17} - 10^{19}$ нейтронов/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), а в импульсных реакторах — порядка 10^{21} нейтронов/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$).

Примером цепочки последовательного медленного захвата нейтронов ядрами может служить схема:



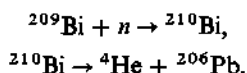
Здесь неустойчивое ядро ^{59}Fe испытывает β^- -распад, т. е. распад, в

* Для нейтрона, как для незаряженной частицы, не существует кулоновского потенциального барьера отталкивания при его проникновении в ядро.

котором нейтрон ядра претерпевает превращение

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}.$$

Сама цепочка превращений ядер ^{56}Fe в более тяжелые элементы обрывается на свинце, при этом многократный медленный захват нейтронов в этой цепочке чередуется с актами β^- -распада. Причина указанного обрыва цепочки состоит в следующем: наиболее тяжелый изотоп, который получается при медленном захвате нейтронов ядрами, — это ^{209}Bi ; ядро ^{209}Bi , присоединяя нейтрон, испытывает превращения

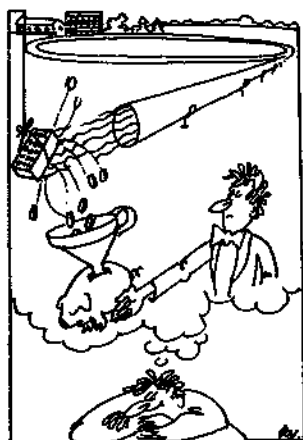


Ядра с массами, большими чем ^{209}Bi , при захвате нейтронов также испытывают не β^- -распад, а распад с участием ядер гелия. Так завершается синтез элементов в процессе эволюции стационарных звезд.

Как же образовались самые тяжелые элементы? Если повышать плотность свободных нейтронов в звездном веществе, то можно достичь условий, когда ядро элемента успевает последовательно захватить много нейтронов, прежде чем произойдет распад (если ядро нестабильно). Для того чтобы эти так называемые *реакции быстрого нейтронного захвата* стали реальностью, необходимы плотности нейтронных потоков $10^{31} - 10^{44}$ нейтронов/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$). Заметим, что плотность потоков нейтронов при искусственных ядерных взрывах на Земле достигают значений 10^{35} нейтронов/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$). Таким образом, реакции быстрого нейтронного захвата невозможны даже в самых массивных стационарных звездах. В последних, как уже указывалось, нейтронные потоки достигают лишь значений порядка 10^{20} нейтронов/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$).

Грандиозные вспышки сверхновых звезд — вот те места во Вселенной, где нейтронные потоки достигают необходимых значений для осуществления цепочки последовательных актов быстрого захвата нейтронов тяжелыми ядрами. По теперешним представлениям, сверхновые — это далеко проэволюционировавшие звезды, содержащие значительный процент тяжелых элементов. Спектры сверхновых имеют широкие линии поглощения ионизованных атомов Fe, Ca, Si и нейтрального ^4He , но не имеют ярких линий H. При вспышке сверхновой мощность излучения превосходит солнечную в 10^9 раз; скорость движения сброшенной взрывом газовой оболочки достигает значений 10–20 тыс. км/с; светящаяся сфера (фронт ударной волны) в максимуме светимости достигает размеров, в десятки раз превышающих размеры орбиты Земли.

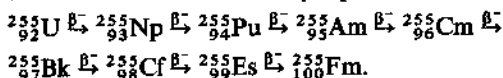
Ударная волна, выходящая на поверхность взрывающейся звезды, вызывает кумуляцию энергии в относительно тонких слоях звездного вещества (см. § 51.5). Генерируемые при этом мощные потоки нейтронов могут обеспечивать интенсивное протекание процессов быстрого захвата нейтронов ядрами с образованием самых тяжелых элементов.



Отметим, что быстрый захват многих нейтронов тяжелыми ядрами был реализован в земных условиях при подземных ядерных взрывах. Под влиянием экстремальных потоков нейтронов здесь образовывалась цепочка трансурановых элементов, вплоть до фермия. Сам процесс состоял в следующем: естественный уран захватывал нейтроны взрыва



образуя перегруженное ядро; далее следовал каскад из восьми β^- -распадов:



ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ СЛОВО АВТОРА

Вот и настало время подвести итоги нашего путешествия в «Страну Физики». В таком путешествии автор — вовсе не гид, а читатель — отнюдь не экскурсант, потому что здесь мало чего увидишь, если не поработаешь сам.

Хотя это путешествие и было кратким, автор стремился познакомить читателя со многими и многими явлениями природы. Более того, необходимо было разобраться в этих явлениях и найти каждому из них место в общей физической картине природы. Это стало возможным благодаря тому, что физика достигла такого уровня развития, когда самые разнообразные явления и процессы допускают единое описание.

Каковы главные направления развития физики и вообще естественных наук в настоящее время? Это физика элементарных частиц, астрофизика и космология, молекулярная биология. Как мы видим, эти направления внешне противоположны: изучение самого малого, самого большого и самого сложного. Однако как показывает вся история развития науки, ключ к решению самых крупных проблем — это диалектическое соединение противоположностей. Поэтому роль диалектико-материалистического мировоззрения, которое является фундаментом научного познания, значительно возрастает. Впереди нас ожидает не только технологическая эра, составляющая суть научно-технического прогресса в промышленности и сельскохозяйственном производстве. Нас ожидает и эра выдающихся открытий, проникновений в самые глубокие тайники мироздания.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Фундаментальные эксперименты в истории физики и выдающиеся изобретения в физико-технической области

Как ни парадоксально, но в выборе основополагающих экспериментов есть элемент субъективизма в отличие от перечня эпохальных теоретических достижений, обобщающих экспериментальные данные.

Механика

1. Опыты Галилея по движению тел (1638 г., Италия).

Хорошо поставленный эксперимент и правильная его математическая обработка могут дать решающие результаты для понимания явления — такова была точка зрения Галилея.

2. Открытие планеты (названной впоследствии Нептуном), существование которой вначале было предсказано теоретически (Лeverье и Галле, 1846 г., Франция и Германия).

Расчеты, выполненные Лeverье на основе механики Ньютона и закона всемирного тяготения, проверялись наблюдениями Галле.

Релятивистские принципы

1. Опыты Майкельсона и открытие независимости скорости света от движения источника (1887 г., США).

В качестве движущегося источника света бралась наша планета. Оптические измерения показали инвариантность скорости света. Она оказалась предельной скоростью.

2. Обнаружение предсказанного дефекта масс атомных ядер (Астон, 1919 г., Англия).

Это одна из многочисленных экспериментальных проверок релятивистской механики Эйнштейна. Масс-спектрография, созданная Астоном, сыграла выдающуюся роль в становлении ядерной физики.

3. Изобретение первого циклического ускорителя элементарных частиц — циклотрона (Лоуренс, 1932 г., США).

До сегодняшнего дня циклические ускорители, являющиеся релятивистскими приборами, служат базовыми инструментами в изучении физики элементарных частиц.

Электромагнетизм и оптика

1. Опыты Фарадея по электромагнетизму (1830 г., Англия).

Фарадей вначале был рабочим — переплетчиком книг. Самообразование и целеустремленность сделали его великим экспериментатором. Он был также выдающимся популяризатором знаний.

2. Опыты Герца по обнаружению предсказанного электромагнитного излучения (1888 г., Германия).

Существование поля излучения вытекало из электродинамики Максвелла. Эксперименты Герца окончательно убедили физиков в реальности поля как физической сущности.

3. Изобретение оптического микроскопа (Левенгук, 1673 г., Голландия).

Левенгук первым наблюдал новый для людей мир — мир микроорганизмов.

4. Создание электронного микроскопа (Зворыкин, 1942 г., США).

Изобретатель родился и вырос в России. Получил среднее и высшее образование у себя на родине. В 1917 г. эмигрировал в США.

5. Создание оптического телескопа (Галилей, 1608 г., Италия).

Мир новых космических тел открылся человеку благодаря этому изобретению. Крайеры Луны и спутники Юпитера — таковы первые наблюдения Галилея.

6. Радиотелескоп (Янский, 1931 г., США).

«Изображение» Вселенной в радиолучах — это эпохальное достижение в астрономии. Радиоастрономическими методами открыты квазары, пульсары, реликтовое излучение и др.

7. Создание основных электротехнических устройств (Доливо-Добровольский, 1891 г., Россия).

Создал систему трехфазного тока; построил первый трехфазный генератор переменного тока с вращающимся магнитным полем; разработал все элементы для трехфазных цепей.

8. Возникновение радиотехники (Попов, 1895 г., Россия).

Уже первые применения средств радиосвязи помогли спасти жизнь рыбакам, оказавшимся на льдине.

9. Телевидение (Зворыкин, 1931 г., США).

Как отмечалось, изобретатель выходец из России.

10. Голография (Габор, 1948 г., Англия; Денисюк, 1962 г., СССР).

Габор родом из Венгрии; создал теоретические основы голографического объемного изображения; реализация этих идей пришла с созданием лазера — источника когерентного излучения. Денисюк Ю. Н. — советский физик. Предложил голографический метод с записью в трехмерных средах, который впервые дал возможность записать амплитуду, фазу и спектральный состав волнового поля объекта и получить его неискаженное пространственное изображение. Голограммы, полученные этим методом, могут быть восстановлены обычным источником излучения со сплошным спектром.

Тяготение

1. Опыты Кавендиша по измерению гравитационной постоянной (1798 г., Англия).

Лабораторные измерения Кавендиша позволили впервые «взвесить» нашу планету.

2. Экспериментальная проверка равенства инертной и тяжелой масс (Этвеш, 1896 г., Венгрия; Брагинский, 1971 г., СССР).

Точность измерений у Этвеша составляла 10^{-9} ; точность измерений у Брагинского была порядка 10^{-12} . Эйнштейн в основу общей теории относительности — релятивистской теории тяготения — положил именно факт равенства тяжелой и инертной масс.

3. Опыты по измерению предсказанного изменения частоты фотона в поле тяготения (Паунд и Ребка, 1960 г., США).

Изменение частоты фотона было зафиксировано в вертикальной башне высотой 20 м. Точность измерений $\sim 10^{-15}$; эта фантастическая точность стала возможной благодаря эффекту резонансного поглощения гамма-излучения ядрами решетки (эффект Мессбауэра). Сама зависимость частоты фотона от значения гравитационного поля вытекала из теории тяготения Эйнштейна.

4. Наблюдение предсказанного расширения Вселенной (Хаббл, 1929 г., США).

Научные основы для изучения крупномасштабной структуры Вселенной возникли с созданием релятивистской теории тяготения. Фридман (русский математик и механик) применил уравнения общей теории относительности к рассмотрению мира как целого и в рамках однородной и изотропной модели Вселенной обнаружил ее нестационарность (1922 г., СССР).

5. Наблюдение предсказанного реликтового фонового радионизлучения (Пензиас и Вильсон, 1965 г., США).

Это излучение, как остаток от ранней эпохи сжатой и горячей Вселенной, было предсказано в 1946 г. Гамовым, русским физиком-теоретиком, много сделавшим у себя на родине (открытие в 1928 г. квантовомеханического туннельного эффекта и объясне-

ние радиоактивности ядер). Гамов — не только автор общепризнанной горячей модели Вселенной (1946 г.), но и автор расшифровки генетического кода в молекулах ДНК (1954 г.). Эмигрировав в 1934 г. в США, в конце концов остался один, без друзей; умер в 1968 г.

6. Запуск первого искусственного спутника Земли (Королев и др., 1957 г., СССР). Это начало космической эры; другими этапами были: полет человека в космос (Гагарин, 1961 г., СССР) и лунная экспедиция (Армстронг и др., 1969 г., США).

Квантовая механика

1. Опыты Резерфорда по изучению структуры атома. Открытие атомного ядра (1911 г., Англия).

Резерфорд предложил планетарную модель атома. Ее теоретическим анализом занялся Бор (1913—1923 гг.); он заложил основы нового квантового мировоззрения в физике.

2. Открытие спектральных серий атома водорода (Бальмер, 1885 г., Швейцария; Лайман, 1906 г., Германия; Пашен, 1908 г., Германия).

Из дискретности спектра излучения атомов следовало, что значения энергии в атоме квантуются. Анализ спектров явился не только исходной базой для теории, но и пробным камнем для теоретических построений.

3. Опыты Франка и Герца по измерению потенциалов возбуждения в газах (1914 г., Германия).

Это еще один экспериментальный способ, позволяющий убедиться в дискретности значений энергии в атоме.

4. Опыты Штерна и Герлаха по пространственному квантованию атомных моментов (1922 г., Германия).

Важнейшим выводом из указанных экспериментов следует считать наличие у частиц спина наряду с массой и зарядом.

5. Опыты по дифракции электронов на кристаллах (Дэвиссон и Джермер, 1927 г., США).

Любопытно, что эти фундаментальные эксперименты были поставлены уже после создания математического аппарата квантовой механики Гайзенбергом (1925 г., Германия) и Шредингером (1926 г., Австрия).

6. Изобретение мазера — квантового генератора радиоизлучения (Прохоров и Басов, 1954 г., СССР; Таунс, 1954 г., США).

7. Создание лазера (Мейман, 1960 г., США).

Квантовая электродинамика

1. Опыты Комптона по рассеянию фотонов на электронах (1923 г., США).

Эти опыты особенно убедительно показали, что квант электромагнитного излучения ведет себя как частица.

2. Обнаружение предсказанного антиэлектрона (позитрона) и явления аннигиляции (Андерсон, 1932 г., США).

Синтез теории относительности и квантовой теории позволил Дираку (английскому физико-теоретику) сделать вывод о наличии в природе мира античастиц (1928—1930 гг.).

3. Опыты Лэмба и Резерфорда по определению сверхтонкой структуры уровней атома водорода (1947 г., США).

Указанные эксперименты замечательны в двух отношениях. Во-первых, согласно Дираку, в атоме водорода для состояний $2S_{1/2}$ ($n=2, l=0, j=1/2$) и $2P_{1/2}$ ($n=2, l=1, j=1/2$) энергии должны быть одинаковы в отличие от данных эксперимента. Это противоречие было устранено путем введения представления о физическом вакууме, влияющем на свойства атомных электронов. В дальнейшем это направление теории привело

к созданию современной квантовой электродинамики (Фейнман, Швингер и Томонага, 1949 г., США и Япония). Во-вторых, сами опыты Лэмба и Ризерфорда стали возможными вследствие развития техники сверхвысоких частот и создания методов радио-спектроскопии.

Физика элементарных частиц и ядерная физика. Экстремальные состояния вещества

1. Открытие нейтрона (Чэдвик, 1932 г., Англия).

Это открытие было решающим в понимании структуры ядра.

2. Обнаружение предсказанного нейтрино (Рейнес и Коуэн, 1956 г., США).

Анализ β -распада ядер приводил к нарушению закона сохранения энергии. Паули (швейцарский физик-теоретик) в 1930 г. для спасения указанного закона сохранения вводит представление о новой частице — нейтрино. Появление мощных источников нейтрино — ядерных реакторов — сделало возможным их регистрацию.

3. Несохранение четности в слабых взаимодействиях (Ву, 1957 г., США).

Работа была выполнена по предложению Ли и Янга (физиков-теоретиков китайского происхождения, работающих в США). Эти эксперименты заставили ведущих теоретиков многих стран (Ландау в СССР, в частности) внимательно проанализировать теорию и отказаться от ряда установившихся представлений.

4. Регистрация в эксперименте массивных промежуточных бозонов (Руббин и Дарьюла, возглавившие две большие интернациональные группы физиков; 1983 г., Женева, ЦЕРН).

Работа выполнена на гигантском протон-антипротонном ускорителе на встречных пучках, построенном усилиями всех западноевропейских стран. Энергия $p\bar{p}$ -столкновения около 500 ГэВ или $5 \cdot 10^{11}$ эВ. Масса промежуточных бозонов оказалась почти в сто раз превышающей массу протона.

Экспериментальное открытие промежуточных бозонов, переносчиков слабых взаимодействий, лишь подтверждает предсказание объединенной теории электрослабых взаимодействий, созданной Вайнбергом и Глэшоу из США и Саламом из Пакистана. При энергиях порядка 100 ГэВ квантовая электродинамика нуждается в исправлении: две заряженные частицы обмениваются не только фотоном, но и нейтральным промежуточным бозоном (при низких энергиях последний механизм сильно подавлен). В результате на расстояниях порядка 10^{-16} см слабые и электромагнитные взаимодействия становятся практически одинаковыми по интенсивности и допускают единое описание. Сущность его заключается в том, что на таких малых расстояниях господствует высокая степень симметрии во взаимодействиях частиц: существует четыре равноценных безмассовых поля, которые на больших расстояниях вследствие спонтанного нарушения симметрии превращаются в три массивных промежуточных бозона W^+ , W^- , Z^0 и безмассовый фотон γ . При обычных условиях (большие масштабы) промежуточные бозоны существуют лишь виртуально и ненаблюдаемы; здесь различие слабых и электромагнитных взаимодействий огромно. Новая фундаментальная теория охватывает не только всю известную совокупность явлений, относящихся к ее компетенции, но и предсказывает новые типы явлений.

5. Обнаружение предсказанных нейтронных звезд (Хьюиш и Бэлл, 1967 г., Англия).

Теоретические представления о нейтронных звездах развивал Ландау (1932 г., СССР). Создание методов радионастроении позволило зарегистрировать периодически пульсирующие радиоисточники. Дальнейшие наблюдения и анализ показали, что это замagni-ченные быстро вращающиеся нейтронные звезды.

6. Создание ядерного реактора (Ферми, 1942 г., США; Курчатов, 1946 г., СССР).

Ядерные реакторы стали для человечества новым, практически неиссякаемым источником энергии.

7. Инструменты, основанные на эффекте Мессбауэра (1958 г., Германия).

Мы уже отмечали возможности таких инструментов.

Макрофизика. Тепловые явления

1. Опыты Перрена по распределению взвешенных частиц в жидкости. Нахождение массы атомов и постоянной Авогадро (1908 г., Франция).
Стимулом к выполнению этих опытов явилась теоретическая работа Эйнштейна по броуновскому движению (1905 г.). Работы Эйнштейна и Перрена окончательно убедили физиков в атомной структуре вещества и в том, что тепловые явления сводятся к хаотическому движению всех частиц тела.
2. Открытие сверхтекучести жидкого гелия (Капица, 1938 г., СССР).
Это фундаментальное явление в квантовой макрофизике. Его теоретическим анализом занимались Ландау (1941 г., СССР), Боголюбов (1947 г., СССР), Фейнман (1957 г., США).
3. Изобретение пузырьковой камеры (Глэзер, 1952 г., США).
Этот прибор до сих пор является основным детектором частиц в физике высоких энергий.
4. Паровая поршневая машина (Уатт, 1784 г., Англия; Ползунов, 1765 г., Россия).
5. Паровая турбина (Лаваль, 1884 г., Швеция; Парсонс, 1889 г., Англия).
6. Изобретение двигателя внутреннего сгорания (Отто, 1876 г., Германия; Костович, 1880 г., Россия).
7. Создание воздушно-реактивных двигателей (Льюлька, 1939 г., СССР; Уиттл, 1941 г., Англия; Франц, 1942 г., Германия).
8. Создание жидкостных ракетных двигателей (Годдард, 1926 г., США; Оберт, 1929 г., Германия; Глушко, 1931 г., СССР).

Физика твердого тела

1. Возникновение рентгенографии кристаллов (Лауэ, 1912 г., Германия).
Этот экспериментальный метод позволил «увидеть», что кристалл действительно представляет собой упорядоченно расположенные частицы вещества.
2. Создание полупроводникового кристалла с транзисторным эффектом (*p-n*-переходом) (Дж. Бардин, Браттейн, Шокли, 1949 г., США).
Эти работы заложили основы современной полупроводниковой микроэлектроники.

Другие важнейшие открытия и изобретения

1. Открытие двойной спирали в структуре молекулы ДНК (Уотсон и Крик, 1953 г., Англия).
Работа была выполнена в Кавендишской физической лаборатории. Уотсон — биохимик из США, а Крик — английский физик-теоретик. Эта работа заложила основы молекулярной биологии.
2. Создание первой электронно-вычислительной машины — ЭВМ (Дж. Нейман и др., 1943 г., США).
Дж. Нейман выходец из Венгрии; он сформулировал основные идеи и принципы построения ЭВМ. С созданием ЭВМ творческие возможности человека значительно расширяются; мы находимся лишь в начале этого пути.
3. Изобретение аэроплана (самолета) (Можайский, 1881 г., Россия; Братья Райт, 1903 г., США).
На самолете морского офицера Можайского был установлен тяжелый паровой двигатель; взлететь машина не смогла. Уилбур и Орвилл Райт (велосипедные мастера) пользовались гораздо более легким и эффективным двигателем внутреннего сгорания (ими же изготовленным), а также катапульты для взлета; они совершили целую серию полчасовых полетов.

4. Постройка первых аэродинамических труб (Жуковский, 1902—1906 гг., Россия; Прандтль, 1907—1909 гг., Германия).

Аэродинамические трубы и позже являются основным инструментом экспериментального изучения течений газовых и плазменных потоков и моделирования движения летательных аппаратов.

II. О мировых постоянных, анализе размерностей и системах единиц

На рис. 26.5 приведена схема взаимоотношений различных фундаментальных физических теорий и определены границы применимости физических представлений, связанных с этими теориями. Поясним подробнее идею, заложенную в этот рисунок.

Релятивистская c и квантовая \hbar постоянные являются естественными масштабами в природе. Их отношение с величинами той же размерности в данном явлении определяет характер самого явления и его принадлежность к той или иной физической области. Так, если в системе тел для их скоростей v отношение $v/c \ll 1$, то необходимо пользоваться классической механикой; случай $v/c \sim 1$ заставляет обратиться к релятивистской механике.

Если в задаче мы имеем дело с неподвижными зарядами, то постоянная c никак не может входить в искомые формулы. Взаимодействие магнитных полей с движущимися зарядами является релятивистским эффектом, поскольку с ростом скорости зарядов интенсивность этого взаимодействия растет. Связи, описывающие такого рода явления, обязательно включают отношение v/c . При наличии переменных полей и полей излучения присутствие в электродинамических соотношениях постоянной c необходимо. Фундаментальная постоянная c выступает как предельная скорость для частиц и зарядов и как скорость распространения электромагнитных возмущений.

Далее. Если в изучаемом явлении величины с размерностью [энергия \times время] или [координата \times импульс] окажутся сравнимыми с постоянной \hbar , то это означает, что явление — квантовое. Неквантовые электродинамические эффекты характеризуются в общем случае наличием постоянных c и элементарного электрического заряда e . В квантовых электродинамических процессах, как правило, фигурируют постоянные \hbar , c (для излучения) или \hbar , c , e (для зарядов).

Сами фундаментальные постоянные c , \hbar , e и гравитационная постоянная G являются едиными для всех участков Вселенной и с течением времени не меняются (об этом говорят наблюдения и стандартная теория), по этой причине их называют *мировыми постоянными*. Некоторые комбинации мировых постоянных определяют нечто важное в структуре объектов природы, а также формируют характер ряда фундаментальных теорий: так, $\hbar^2/(m_e e^2)$ определяет размер пространственной области для атомных явлений (здесь m_e — масса электрона), а $m_e c^2/\hbar^2$ — характерные энергии для этих явлений; квант для крупномасштабного магнитного потока в сверхпроводниках задается величиной $\hbar c/e$; предельная масса для стационарных астрофизических объектов определяется комбинацией $(\hbar c/G)^{3/2} m_N^{-2}$, где m_N — масса нуклона; весь математический аппарат квантовой электродинамики основан на факте существования малой безразмерной величины $e^2/(\hbar c) = 1/137$, определяющей интенсивность электромагнитных взаимодействий.

Теперь об анализе размерностей. Понятие *размерности* вводится после того, как выбраны основные физические величины и установлены единицы для их измерения. Например, в системе единиц СГС за основные величины приняты расстояние в пространстве, промежутки времени и масса. Единицами соответствующих величин являются сантиметр [см], секунда [с], грамм [г]. Выражение произвольной физической величины через основные величины данной

системы, в котором коэффициент пропорциональности принят равным единице, называется ее размерностью.

Существует ряд очевидных положений, относящихся к понятию размерностей:

1. Величины с разными размерностями не могут складываться. Так, величина с размерностью $[см/с + г]$, конечно, существовать не может.

2. Размерности обеих частей равенства, выражающего собой некоторую физическую закономерность, должны быть одинаковы.

3. Размерность произвольной физической величины может быть лишь произведением степеней размерностей основных величин.

Находить связи между величинами, используя лишь соображения размерностей, т. е. указанные выше общие положения, — в этом состоит суть *метода анализа размерностей*. Примеры применения этого метода можно найти в § 48.6, 71.1, 74.3. Другие более частные проявления метода размерностей можно найти на многих страницах этой книги. Ее читатель вполне может сам оценить поистине замечательные возможности метода.

Заметим, что соображения размерностей позволяют делать лишь оценки входящих в задачу параметров, т. е. находить их порядок величины (напомним, что параметры считаются отличающимися по порядку величины, если их отношение превышает 10).

В методе анализа размерностей существуют ограничения на однозначность получаемых результатов. Так, для того чтобы комбинация рассматриваемых физически связанных параметров была единственной, необходимо соблюдение равенства

$$N - K = 1.$$

Здесь N — общее число параметров в задаче; K — число основных физических величин в используемой системе единиц (в системе СГС их три).

Анализ размерностей не может дать зависимостей типа синуса или логарифма. Он также мало пригоден в случаях, когда какая-либо величина состоит из двух слагаемых разной природы, но имеющих одинаковый порядок величины.

Перейдем к вопросу о системах единиц. Мы будем говорить лишь о двух системах: СИ и СГС. В рамках системы СГС, возникшей еще в XIX в., изложение многих разделов фундаментальной физики полностью адекватно ее современному состоянию.

Попытки излагать основы и принципы современной физики с использованием только СИ часто приводят к затруднениям в понимании физического смысла изучаемых явлений (в особенности это относится к изложению электродинамики). Действительно, в СИ электромагнитное поле в вакууме характеризуется четырьмя векторами E , D , H , B , причем эти векторы имеют разную размерность, а самому вакууму приписываются диэлектрическая ϵ_0 и магнитная μ_0 проницаемости. Именно так было до Эйнштейна, когда в физике господствовали представления об эфире. После возникновения теории относительности, когда электродинамика получила релятивистское обоснование, поле в вакууме стало описываться только векторами E и H , причем размерности у них одинаковы, а ϵ и μ для вакуума обращаются в единицу. Представление об эфире оказалось искусственным и исчезло из арсеналов физики.

Существуют и другие обстоятельства, которые указывают на то, что использование в элементарном курсе физики только системы единиц СИ не является безусловно правильным. Во-первых, сегодняшний учащийся в дальнейшей своей деятельности обязательно встретится с несколькими системами единиц — этого не избежать, ибо различные области науки и техники оперируют различными масштабами физических величин, приспособлявая для своих нужд и

системы единиц. К такого рода жизненным сложностям учащихся нужно подготавливать уже в средней школе; по крайней мере, в старших классах учащиеся должны уметь пользоваться и системами единиц СГС, и СИ, уметь без труда переходить от одной из них к другой. Во-вторых, каждая из систем единиц имеет свои недостатки и свои преимущества. Физическая система единиц СГС хорошо приспособлена для теоретического анализа задач, ибо в этой системе в явном виде присутствуют все фундаментальные постоянные, в том числе c и \hbar . Как уже отмечалось, эти мировые константы задают масштабы явлений, определяют границы применимости различных физических представлений, а их относительное значение в той или иной задаче позволяет выбрать правильное приближение. В практической же системе СИ мировая постоянная c явно не фигурирует. Это, конечно, плохо, ибо мы теряем все то, о чем только что говорилось выше. Зато в СИ удобнее производить электротехнические расчеты (см., например, § 62.3).

Невольно напрашивается практический совет: учащемуся надо делать анализ физической ситуации и формулировать уравнения задачи в рамках СГС и лишь в конце аналитических выкладок переходить к их написанию в СИ. С этой целью мы (см. табл. II. 1) приводим таблицу коэффициентов перевода физических величин, записанных в СГС, к тем же величинам в СИ (это касается лишь электрических и магнитных величин, механические же остаются неизменными). После этого сам числовой расчет в задаче производится в единицах СИ (если таковы данные задачи).

Таблица II.1

Наименование величины	СГС	СИ
Скорость света	c	$1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$
Напряженность электрического поля, потенциал	E, φ	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} (E, \varphi)$
Электрическая индукция	D	$\sqrt{4\pi/\epsilon_0} D$
Заряд, ток, плотность тока, поляризация	Q, I, j, P	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} (Q, I, j, P)$
Магнитная индукция, магнитный поток	B, Φ	$\sqrt{4\pi/\mu_0} (B, \Phi)$
Напряженность магнитного поля	H	$\sqrt{4\pi\mu_0} H$
Магнитный момент	p_m	$\sqrt{\mu_0/(4\pi)} p_m$
Электрическая и магнитная проницаемости	ϵ, μ	ϵ, μ
Электрическая поляризуемость	α	$\frac{1}{4\pi} \alpha$
Электрическая проводимость	σ	$\sigma/(4\pi\epsilon_0)$
Сопротивление	R	$4\pi\epsilon_0 R$
Емкость	C	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} C$
Индуктивность	L	$\frac{4\pi}{\mu_0} L$

Приведем примеры перевода величин из СГС в СИ с использованием указанной таблицы. Так, закон Кулона в СГС выглядит как

$$F = Q^2/r^2. \quad (*)$$

Чтобы перейти к записи его в СИ, воспользуемся коэффициентом перевода для зарядов

$$Q \rightarrow Q/\sqrt{4\pi\epsilon_0},$$

тогда (*) запишется

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}.$$

Примером посложней является выражение для силы, действующей на движущийся заряд Q в магнитном поле H :

$$F = Q \left[\frac{v}{c} H \right]. \quad (**)$$

Здесь коэффициенты перевода следующие:

$$Q \rightarrow Q/\sqrt{4\pi\epsilon_0}, \quad c \rightarrow 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}, \quad H \rightarrow \sqrt{4\pi\mu_0} H.$$

Подставляем их в (**), тогда

$$F = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \left[\left(\frac{v}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \right) \sqrt{4\pi\mu_0} H \right] = Q \frac{\sqrt{4\pi\mu_0}}{\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0}{\epsilon_0\mu_0}}} [vH] = Q\mu_0 [vH] = Q [vB].$$

В полученной формуле мы учли то обстоятельство, что в СИ для вакуума

$$\mu_0 H = B.$$

В этом формальном соотношении физического содержания искать не следует, хотя по виду μ_0 играет роль «магнитной проницаемости вакуума», а B есть «вектор магнитной индукции в вакууме».

Что касается метода анализа размерностей, то его использование более удобно в рамках СГС.

Ниже (см. приложение III) приводится таблица для единиц физических величин в СИ и СГС; там же даны и числовые соотношения между единицами обеих систем. В приложении IV представлены некоторые внесистемные единицы, широко используемые в технике. Для удобства читателей мы помещаем также таблицу (см. приложение VI) ряда физических постоянных, причем числовые значения постоянных даем в единицах СИ и СГС.

Примером использования таблиц из приложения III может явиться решение такого рода задач: показать, что размерность напряженности магнитного поля H , которая выражается в эрстедах (в СГС), совпадает с размерностью напряженности электрического поля E , которую часто выражают в В/см; последняя единица является своеобразным кентавром из единиц СИ и СГС и широко используется в технике. Итак, покажем, что

$$1 \text{ Э} = \frac{1 \text{ В}}{1 \text{ см}}.$$

Воспользуемся данными приложения III:

$$1 \text{ Э} = \frac{1 \text{ дин}}{1 \text{ ед. СГС}_Q} = 1 \frac{\text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{г}^{1/2} \text{см}^{3/2} \text{с}^{-1}} = 1 \text{ г}^{1/2} \text{см}^{-1/2} \text{с}^{-1};$$

$$1 \frac{\text{В}}{\text{см}} \sim \frac{1 \text{ ед. СГС}_U}{1 \text{ см}} = 1 \left(\frac{1}{\text{см}} \right) \frac{\text{эрг}}{\text{ед. СГС}_Q} = 1 \left(\frac{1}{\text{см}} \right) \frac{\text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}}{\text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1}} = 1 \text{ г}^{1/2} \text{см}^{-1/2} \text{с}^{-1}$$

III. Единицы физических величин

Величина	Обозначение	Единица			Числовое соотношение между единицами обеих систем
		СИ	СТС	4	
1	2	3	4	5	
Расстояние	Δl	м (метр)	см (сантиметр)		1 м = 10 ² см
Время	t	с (секунда)	с (секунда)		1 кг = 10 ³ г
Масса	m	кг (килограмм)	г (грамм)		1 м/с = 10 ² см/с
Скорость	v	м/с	см/с		1 кг · м/с = 10 ⁵ г · см/с
Импульс	p	кг · м/с	г · см/с		1 Н = 10 ⁵ дин
Сила	F	Н (ньютон)	г · см/с ² (дина)		1 Дж = 10 ⁷ эрг
Работа, энергия	A, E	Дж (джоуль)	г · см ² /с ² (эрг)		1 Вт = 10 ⁷ эрг/с
Мощность	J	Вт (ватт)	эрг/с		1 Па = 10 дин/см ²
Давление	p	Па (паскаль)	дин/см ²		1 Кл = 3 · 10 ⁹ ед. СГСЭ _Q
Электрический заряд	Q	Кл (кулон)	ед. СГСЭ _Q [$= 1^{1/2} \text{см}^{3/2} \text{с}^{-1}$]		1 А = 3 · 10 ⁹ ед. СГСЭ _Q /с
Ток	I	А (ампер)	ед. СГСЭ _Q /с		1 А/м ² = 3 · 10 ⁵ ед. СГСЭ _Q /см ² · с
Плотность тока	j	А/м ²	ед. СГСЭ _Q /см ² · с		1 В = (1/300) ед. СГСЭ _V
Электрический потенциал	ϕ	В (вольт)	ед. СГСЭ _V [$= \frac{\text{эрг}}{\text{ед. СГСЭ}_Q}$]		

Напряженность электрического поля	E	B/м	$\frac{\text{дин}}{\text{ед. СГСЭ}_Q}; \frac{\text{ед. СГСЭ}_U}{\text{см}}$	$1 \frac{B}{M} = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \text{ ед. СГСЭ}_U/\text{см}$
Магнитная индукция	B	Тл (тесла)	$\text{Гс (гаусс)} \left[= \frac{\text{дин}}{\text{ед. СГСЭ}_Q} \right]$	1 Тл = 10^4 Гс
Напряженность магнитного поля	H	A/м	Э (эрстед) [$= \text{Гс}$]	1 A/м = $4\pi \cdot 10^{-3}$ Э
Сопротивление	R	Ом (ом)	с/см	1 Ом = 10^{-12} с/см
Удельная электрическая проводимость	σ	(Ом · м) ⁻¹	с ⁻¹	1 (Ом · м) ⁻¹ = 10^{10} с ⁻¹
Емкость	C	Ф (фарада)	см (сантиметр)	1 Ф = 10^{12} см
Индуктивность	L	Гн (генри)	см (сантиметр)	1 Гн = 10^9 см
Дипольный момент	d	Кл · м	ед. СГСЭ _Q · см	1 Кл · м = $3 \cdot 10^{11}$ ед. СГСЭ _Q × см
Магнитный момент	p_m	A · м ²	ед. СГСЭ _Q · см [$= \text{эрг/Гс}$]	1 A · м ² = 10^3 эрг/Гс
Магнитный поток	Ф	Вб (вебер)	Гс · см ²	1 Вб = 10^8 Гс · см ²

IV. Внесистемные единицы

Сила: 1 килограмм-сила (кгс) = 9,8 Н
 Давление: 1 нормальная атмосфера (атм) = 760 мм рт. ст. = 1 кгс/см².

Работа и энергия:

1 килограмм-сила-метр (кгс · м) = 9,8 Дж;

1 калория (кал) = 4,18 Дж;

1 электрон-вольт (эВ) = $1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж;

1 $\frac{\text{эВ}}{k} = 11600 \text{ К}$ (k — постоянная Больцмана);

1 $\frac{\text{эВ}}{h} = 2,4 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ (h — постоянная Планка).

Мощность: 1 лошадиная сила (л.с.) = 736 Вт.

V. Приставки и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Наименование приставок	Обозначение приставок	Множитель	Наименование приставок	Обозначение приставок	Множитель
<i>Кратные:</i>			<i>Дольные:</i>		
тера	T	10^{12}	санти	c	10^{-2}
гига	G	10^9	милли	m	10^{-3}
мега	M	10^6	микро	μк	10^{-6}
кило	k	10^3	нано	n	10^{-9}
			пико	p	10^{-12}

VI. Некоторые физические постоянные (приближенные значения)

Релятивистская постоянная (скорость света в вакууме)

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Квантовая постоянная (постоянная Планка)

$$\hbar = 1 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 1 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$$

Элементарный заряд

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_Q$$

Гравитационная постоянная

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2 = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2/\text{г}^2$$

Масса электрона

$$m_e = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг} = 0,9 \cdot 10^{-27} \text{ г}$$

Естественный масштаб атомных расстояний

$$r_a = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

Естественный масштаб атомных энергий

$$E_a \approx 4,4 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \approx 27,2 \text{ эВ} = 4,4 \cdot 10^{-11} \text{ эрг}$$

Орбитальный магнитный момент электрона в атоме водорода

$$\mu_{ml} = 9 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл} = 9 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс}$$

Спин электрона

$$s_z = \pm \hbar/2 = 0,5 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 0,5 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$$

Константа электромагнитных взаимодействий

$$\alpha \approx \frac{1}{137}$$

Квант крупномасштабного магнитного потока

$$\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-15} \text{ Вб} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$$

Электромагнитный спектр (длины волн λ , частоты ω , энергия фотонов $\hbar\omega$):

гамма-излучение

$$\lambda \sim 10^{-13} \text{ м}; \omega \sim 10^{21} \text{ с}^{-1}; \hbar\omega \sim 10^6 \text{ эВ}$$

рентгеновское излучение

$$\lambda \sim 10^{-10} \text{ м}; \omega \sim 10^{18} \text{ с}^{-1}; \hbar\omega \sim 10^3 \text{ эВ}$$

ультрафиолетовое излучение

$$\lambda \sim 10^{-8} \text{ м}; \omega \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}; \hbar\omega \sim 10 \text{ эВ}$$

видимое свечение

$$\lambda \sim 10^{-7} \text{ м}; \omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}; \hbar\omega \sim 1 \text{ эВ}$$

инфракрасное излучение

$$\lambda \sim 10^{-5} \text{ м}; \omega \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}; \hbar\omega \sim 10^{-2} \text{ эВ}$$

радиоволны

$$\lambda \sim 1 \div 10^3 \text{ м}; \omega \sim 10^8 \div 10^5 \text{ с}^{-1};$$

$$\hbar\omega \sim 10^{-7} \div 10^{-10} \text{ эВ}$$

Постоянная равновесного электромагнитного излучения (постоянная Стефана – Больцмана)

$$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} = 5,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4}$$

Постоянная Авогадро

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

Постоянная Больцмана	$k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} = 1,4 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К}$
Молярная газовая постоянная	$R = N_A k = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = 8,3 \cdot 10^7 \text{ эрг/моль} \cdot \text{К}$
Нормальная температура	$T_0 = 273 \text{ К}$
Нормальное давление	$p_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1 \text{ атм} = 1 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$
Объем 1 моль газа при нормальных условиях	$V_{\mu 0} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль} = 22,4 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{моль}$
Тепловая энергия атома или молекулы, соответствующая нормальным условиям	$kT_0 = 3,8 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 0,025 \text{ эВ} = 3,8 \cdot 10^{-14} \text{ эрг}$
Тройная точка воды	$273,16 \text{ К}$
Электрическая и магнитная постоянные (в СИ)	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \mu_0 = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$

VII. Латинский и греческий алфавиты

Греческий алфавит		Латинский алфавит	
Αα	альфа	Aa	а
Ββ	бета	Bb	бе
Γγ	гамма	Cc	це
Δδ	дельта	Dd	де
Εε	эпсилон	Ee	е
Ζζ	дзета	Ff	эф
Ηη	эта	Gg	ге
Θθ	тэта	Hh	аш
Ιι	йота	Ii	и
Κκ	каппа	Jj	йот
Λλ	ламбда	Kk	ка
Μμ	мю	Ll	эль
Νν	ню	Mm	эм
Ξξ	кси	Nn	эн
Οο	омикрон	Oo	о
Ππ	пи	Pp	пэ
Ρρ	ро	Qq	ку
Σσ	сигма	Rr	эр
Ττ	тау	Ss	эс
Υυ	ипсилон	Tt	тэ
Φφ	фи	Uu	у
Χχ	хи	Vv	ве
Ψψ	пси	Ww	дубль-ве
Ωω	омега	Xx	икс
		Yy	игрек
		Zz	зет

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аддитивные величины 116
 Адиабатное размагничивание 244
 Адронная эпоха в расширении Вселенной 308
 Адроны 9
 Аккреция 292
 Активная среда 269
 Амплитуда вероятности 88
 — волны 74
 — колебаний 74
 Аннигиляция пары 12, 109
 Антивещество 12
 Антинейтрон 12
 Античастицы 12
 Атом 14,
 —, заполнение электронных оболочек 14, 101
 —, квантовые переходы 102
 —, момент и его квантование 94
 —, энергия и ее квантование 93
 Атомная единица массы 289
 — — —, углеродная шкала 289
 Атомные спектры 102
 — часы 23
 Аэродинамическая труба 184
 Аэродинамические коэффициенты 188
 Аэродинамическое сопротивление 185, 187

 Барions 9
 Бегущая волна 74
 Безизлучательный квантовый переход 270
 Безмассовые частицы 107
 Белый свет 264
 Бернулли уравнение 169, 199
 Бета-распад свободного нейтрона 13, 312, 313
 Бетатронное излучение 73
 Био—Савара закон 70
 Бозе-газ 130
 Бозе-жидкость 221
 Бозе-частица 221
 Бозе—Эйнштейна конденсация 221
 — — распределение 138, 139
 — — статистика 100
 Больцмана постоянная 121
 — распределение 124
 Бора радиус 92
 Броуновское движение 181

 Вакансии 147
 Вакуум физический 261
 Валентная зона 149
 Ван-дер-Ваальсовы силы 114
 Векторное поле 50
 Вероятность квантового перехода 138
 — термодинамическая 124
 Вещество 14, 129
 — дозвездное 307, 308
 — звездное 286, 291, 293
 — нейтронное 296, 297
 — ядерное 198
 Взаимодействие 18
 Взрывоманитные генераторы 216
 Видемана—Франца закон 230
 Видимое излучение 102, 103
 Вихревое движение 187
 — — квантованное 223
 Вмороженность магнитного поля 294
 Внесистемные единицы 324
 Внутренняя энергия 115
 Возбужденный атом водорода, уровни энергии 93
 — — —, размеры 249, 250
 Возбужденное состояние атома 94
 Волновая оптика 77, 89, 90
 — функция 88
 Волновой вектор 194
 — пакет 194
 — —, самосжатие 196
 — —, расплывание 194
 — фронт 207, 260, 261
 Волны, дифракция 79

- , интерференция 78
- , общие характеристики 194
- , отражение и преломление 261, 262
- Волны вероятности 88
- —, дифракция электронов 82
- на поверхности жидкости 193
- Волоконная оптика 260
- Вращательные спектры 113
- Время жизни 43
- Вселенная 17, 301, 302
- , замкнутая модель 302
- , открытая модель 302
- Всемирного тяготения закон 67
- Вынужденное излучение 106
- Вынужденные колебания 252
- Вязкая жидкость 170
- Вязкость 170
- динамическая 171
- кинематическая 183

- Газ идеальный 129
- , сильно разреженный 218, 219
- Газовая молярная постоянная 131
- Галактики 17, 309
- Гамма-излучение, комптон-эффект 109
- , рождение пар 109
- , фотоэффект 108
- Гармоники 194
- Гармонический осциллятор 254
- Гелий жидкий 221
- —, квантованные вихри 223
- —, сверхтекучесть 221
- —, термомеханический эффект 222
- Геометрическая оптика 80, 89, 90
- Гиббса распределение 124
- Гидродинамика 165
- , границы применимости 166
- , закон сохранения вещества 167
- магнитная 224, 280
- релятивистская 223
- двухскоростная 222
- Гипероны 9
- Глюоны 10
- Голография 260
- «Горячая» Вселенная 18, 304
- Гравитационная масса 29
- постоянная 67
- Гравитационное взаимодействие 18, 29
- поле 29, 297, 298, 300
- Гравитационные волны на поверхности жидкости 193, 194
- Гравитационное излучение 304
- Гравитационный коллапс 224
- потенциал 298
- Групповая скорость волн 194
- Гука закон 145

- Давление сверхвысокое 284
- Даламбера парадокс 222
- Движение тела 22
- — равномерное 22
- — по инерции 22
- Дейтрон 275
- , энергия связи 276
- Декремент затухания 256
- Детального равновесия принцип 138
- Дефект массы 45, 275, 276
- Дефекты в решетке кристалла 147
- — — точечные 147
- — — линейные 147
- Деформация, сдвиг 147
- пластическая 146
- упругая 146
- Диамагнетизм 243
- Диамагнетик 242, 243
- Дислокации 147
- Дисперсии закон в кристалле 152
- — —, акустическая ветвь 153
- — —, оптическая ветвь 153
- Дисперсия волн 194
- света 264
- Диссоциация 277, 284
- Дифракция волн 79
- микрочастиц 82
- Диффузия 175, 179, 180, 181, 279
- Диэлектрики 149, 233
- , поляризация 237, 238
- , электропроводность 232, 233
- Диэлектрическая проницаемость 239
- Длина волны 75, 194
- свободного пробега 178
- Дозвездные состояния вещества 307, 308
- Дозвуковое течение газа 187, 188
- Домены сегнетоэлектрические 238
- ферромагнитные 246
- Дрейф заряженных частиц 228, 278
- Дуализм корпускулярно-волновой 88
- Дырочная проводимость 233

- Емкость электрическая 237

- Жидкость идеальная 170, 222
- квантовая 221
- несжимаемая 168

Замедление времени 43
 Замкнутая система 32
 Запрещенная зона 149
 Заряд электрический 47
 — — как источник поля 51, 52
 Заряда сохранения закон 47
 Зарядово-несимметричная модель ранней Вселенной 305
 Затухание колебаний 255, 256
 Звезды, белые карлики 158, 291, 292
 — нейтронные 293
 — нормальные 286, 287
 —, синтез элементов 310
 Звук 200
 —, скорость в различных средах 201
 — поперечный 154
 — продольный 154
 Зеркальная симметрия 104, 105
 Зеркальное отражение света 262
 Зеркальные ядра 19

 Идеальная жидкость 170, 222
 Идеальный газ 129
 — — квантовый 129, 130
 — — классический 129, 130
 — кристалл 145
 Излучательный квантовый переход 105
 Излучение вынужденное 106
 — движущегося заряда 71, 72
 — магнитное дипольное 295
 — спонтанное 106
 Излучение *Вавилова—Черенкова* 260
 — плазмы 276
 — равновесное 137
 — реликтовое 304
 Изотопический эффект 225
 Изотопов разделение 220, 221
 Изотропия пространства 39
 Изозэнтропийный процесс 200
 Импульс частицы, закон сохранения 32, 33
 — — классической 32
 — — релятивистской 45
 — электромагнитного поля 76
 Импульсный реактор 312
 — —, плотность нейтронных потоков 312
 Инвариантность заряда 47
 — массы 29, 44
 — спина 98
 Инверсия населенностей 269
 Индуктивность 251
 Индукционный разряд 280, 281
 — ток 251

Инертная масса 29, 298
 Инерциальная система отсчета 23
 Инерции закон 22
 Интенсивность излучения 72
 Интерференция волн 78
 Инфракрасное излучение 102, 103
 Ионизация 15, 93
 — термическая 284
 Испарение 160
 Источники оптического излучения, тепловые 266, 268
 — — —, лазеры 266, 268

 Кавитация 217
 Капля 197
Карно цикл 128, 137
 Квазимпульс 152
 Квазичастицы 115, 152
 Квант действия 85, 91
 — магнитного потока 249
 Квантование пространственное 95
 Квантовая когерентность в сверхтекучем гелии 221
 — — в сверхпроводящем состоянии 226, 227
 — — в лазерных пучках 270
 Квантовые числа, главное 93
 — —, орбитальное 94
 — —, магнитное 95
 — —, спиновое 97
 Квантовый генератор света 268
 Кварки 10
 Кинетическая энергия 33
 Кишение 218
Кирхгофа правила 231
 К-мезоны 9, 10
 Когерентное излучение 268
 Колебания 37
 — кристаллической решетки 152, 153
 Колебательные спектры 113
 Колебательный контур 253
 Конвекция 191
 Конденсация 160
 Конденсатор электрический 258
 Конденсированное состояние 15
 Концентрация 175
 Коэффициент полезного действия 129
 Красные гиганты 291
 Кратность вырождения 148
 Кристалл 141
 —, трансляционная симметрия 142
 —, электронные энергетические спектры 148

- Кристаллизация 160
 Кристаллическая решетка 142
 — —, типы связей 142
 — — — —, ван-дер-ваальсова 143
 — — — —, ионная 142
 — — — —, ковалентная 143
 — — — —, металлическая 143
 — —, элементарная ячейка 142
 Критическая температура перехода 162, 222, 226
 Критические значения критериев подобия в гидродинамике 188, 192
Кулона закон 57
 Кумулятивные явления 211
 Кумуляция энергии 211
 Куперовская пара 226
- Лаваля* сопло 201, 202
 Лазеры 268, 269
 Ламинарное течение 189
 Левая и правая система координат 104
 Лептоны 10
 Лептонная эпоха в расширении Вселенной 308
 Линейные волны 195
 — оптические явления 266
 Линейчатые спектры 102
 Локальная форма законов сохранения 165
 Локальное термодинамическое равновесие 164
Лоренца преобразования 41
 — сила 48
 Луч 80
 Лэмбовский сдвиг 317
- Магические ядра 12
 — —, дважды магические 311
 Магнитная гидродинамика 224, 280
 — проницаемость 247
 Магнитное давление 280
 — насыщение 244
 — охлаждение 244
 Магнитный момент атома 244
 Магнитно-дипольное излучение 295
 Магнитотормозное излучение — См.
 Бетатронное излучение
 Мазер 317
Майкельсона опыт 315
Максвелла распределение 131
 — уравнение 54
 Макроскопические тела 114
- —, спектр энергии 115
 — движения 165
 Масса инертная 29, 298
 — тяжелая 29, 298
 Массивные промежуточные бозоны 10
 — —, экспериментальное открытие 318
 Масс-спектропия 315
 Массы-светимости соотношение 288
 Материальная точка 25
 Мезоны 9
Мессбауэра эффект 316
 Металлизация вещества, высокие давления 285
 Металлы 149
 —, магнитные свойства 245
 —, механические свойства 143
 —, тепловые свойства 150
 —, электрические свойства 226
 Метастабильное состояние квантовых систем 270
 Механическое движение 25
 Мировые постоянные 320
 Моделирование 184, 185
 Модуляция волн 195
 Моды 194
 Молекулы 14, 112
 — двухатомные 112
 — —, спектр энергии 113
 Молекулярное течение 220
 Молекулярные и атомные пучки 220, 221
 Моль 131
 Момент инерции шара 296
 Момент импульса 39
 — —, квантование в атоме 94
 Момент дипольный электрический 60
 — — магнитный 62
 — силы 242
 Монохроматическое излучение 74
- Нагреватель 128
 Накачка излучением 269
 Намагниченность 243
 — спонтанная 245
 Напряженность магнитного поля 48
 — электрического поля 48
 Населенность уровней 125
 Насыщенный пар 160
 Нейтрино, масса 11, 12, 304
 —, типы 9, 19
 Нейтрон 9
 —, магнитный момент 47
 —, открытие в эксперименте 318

- Нейтронизация вещества 293
- Нейтронные звезды 17, 293, 294
- Нейтроннография 153
- Некогерентное излучение 268
- Нелинейная оптика 260, 265, 266
- Нелинейные волны 195
- Необратимые процессы 118, 119
- Неопределенностей соотношение 86
- Непрерывный спектр 123
- Неравновесное состояние 164
 - —, деформация кристалла 145
- Неустойчивости в гидродинамике 188, 215
- Нитевидные кристаллы 145, 146
- Нуклеосинтез 310
- Нуклоны 12, 13

- Обратимый процесс 119, 135
- Обратная решетка 152
 - —, вектор состояния 152, 153
- Общая теория относительности 298
- Одномоментные ферромагнитные частицы 246
- Оптика волновая 79, 80, 89, 90
 - волоконная 260
 - лучевая 80, 89, 90
 - нелинейная 265, 266
- Оптоэлектроника 260
- Орбитальный момент атома водорода 95
- Ориентационная поляризуемость 238
- Основное состояние атома 94
- Остаточное сопротивление 229
- Отбора правила 106
- Открытый колебательный контур 258
- Относительности принцип 23, 24
- Относительность электрического и магнитного полей 49
- Отражение волн 262
 - света 262
 - — зеркальное 262

- Парамагнетизм 243
- Парамагнетик 243
- Параметры состояния 135
- Перенос излучения в звездах 288
- Переноса явления — См. Вязкость, Диффузия, Теплопроводность
- Период колебаний 75
 - полураспада 13
- Периодическая система 102
- Пи-мезоны 9, 10
- Плавление 160

- Плазма 271
 - проводимость 279
- Плазменная частота 282
- Плазменные неустойчивости 281
- Плоская волна 74
- Плоскопараллельное течение 171
- Плотность критическая 303
- p — n -переход 234, 235
- Поверхностная энергия 197
- Поверхностное давление 197
 - натяжение 197
- Поглощение света 263, 264
- Пограничный слой 189
- Подбарьерный переход 273
- Подвижность носителей тока 279
- Подобия критерии в гидродинамике, число Грассгофа 192
 - — —, число Прандтля 192
 - — —, число Рейнольдса 184
 - метод 184
- Полупроводники 149, 234
 - , зонная структура 234
 - , примеси акцепторные 234
 - — донорные 234
 - , равновесные и неравновесные носители 235
 - , электроны и дырки 234, 235
- Поляризация света 111
 - среды 237, 238
- Поляризуемость атомная 239
 - ориентационная 238
- Поперечная волна 193
- Потенциал электростатический 58
- Потенциальная энергия 34
- Потенциальный барьер 272
- Поток излучения 50, 72
- Предельная скорость 40, 41
- Преломление волн 261
 - света 261
- Преломления показатель 261
- Проводимости зона 233
- Проводимость электрическая 228
 - n -типа 234
 - p -типа 234
- Продольная волна 193
- Пространственная инверсия 103, 104
 - четность 104
- Пространство и время 21
 - —, их однородность 21
 - —, неевклидовость 300
- Протон-протонный цикл 290
- Пузырьковая камера 319
- Пульсары 296
 - , радиоизлучение 296

- Работа 33
- , в термодинамике 127
- Рабочее тело 128
- Равновесие механическое 165
- — статистическое 119
- — локальное 164
- неполное 164
- термодинамическое 119
- Равновесие неустойчивое 188, 281
- Равновесный процесс 135
- Радиоспектроскопия 318
- Радиотелескоп 316
- Размерные эффекты в сильно разреженных газах 219
- Распространение радиоволн в ионосфере 283
- света в вакууме 261
- — в ν среде 261
- «Расширение» Вселенной 17, 18, 301
- Реакции быстрого нейтронного захвата 313
- Резонанс 257
- Резонансное поглощение гамма-излучения 316
- Резонансы барионные 10
- мезонные 10
- Рекомбинация 277
- Релаксация, время релаксации 164
- Реликтовое излучение 18, 304
- Релятивистская инвариантность 44
- механика 42
- постоянная 46
- энергия частицы 44, 45
- Релятивистский импульс 45
- Рентгеновское линейчатое излучение 102, 103
- Рождение пары 109
- Рубиновый лазер 269
- Самоиндукция 251
- Самостоягивающийся разряд 280
- Самофокусировка света 268
- Сверхзвуковое течение 201
- Сверхновые звезды 216, 224, 313, 314
- Сверхпроводимость 225
- Сверхпроводники в магнитном поле 247, 248
- Сверхсильные магнитные поля в нейтронных звездах 294
- — — в лаборатории 294
- Сверхтекучесть жидкого гелия 221
- нейтронного вещества в пульсарах 297
- Сверхтонкая структура 113
- — уровней энергии в атоме водорода 317, 318
- Свет 258—260
- , распространение 77
- Светимость звезд 287
- Световое давление 141
- Светящегося электрона эффект 73
- Сдвиговые волны 154, 193
- Сегнетоэлектрики 238
- Сжатие, деформация в кристалле 147
- Сжимаемость 200
- Силловые линии 51, 52
- Сильное взаимодействие элементарных частиц 18
- Симметрия кристаллов 142
- молекулы 112
- Синусоидальные волны 194
- Система отсчета 23
- —, инерциальная 23
- — лабораторная 212
- — центра инерции 212
- Скин-эффект 265
- Скорость 26
- звука 201
- предельная 40, 41
- распространения взаимодействий 46
- света 46
- Слабое взаимодействие элементарных частиц 19
- Снеллиуса закон преломления 261
- Собственное время 43
- Солитоны 196
- Солнце 193, 286, 287
- Сопrotивление гидродинамическое 188
- электрическое 232
- Сохранения заряда закон 47
- импульса закон 32, 33
- момента закон 39
- четности закон 103
- энергии закон 34
- Спектр частотный равновесного излучения 139
- энергии атома 93
- — молекулы 113
- — коллективных электронов кристалла 148, 149
- Спектральный анализ 103
- Спин элементарных частиц 98
- Спин-орбитальное взаимодействие 98
- Спин-спин взаимодействие 245
- Спонтанное излучение 106
- нарушение симметрии 318
- Стабильные частицы 11

- Статистическая интерпретация волн вероятности 88
- Стационарное состояние атома 93
- течение 168
- Стефана — Больцмана постоянная 141
- Стокса закон 186
- Столкновения упругие 35
- Стоячая волна 76
- Струя кумулятивная 211
- Суперпозиции принцип в квантовой механике 89
- — в электродинамике 55
- Текучесть жидкостей 193
- твердых тел 148
- Температура 119, 120
- вырождения 132
 - критическая 162
- Температуропроводность 182
- Тепловое излучение 137
- равновесие 119
 - расширение 192
- Тепловые нейтроны 153
- —, исследование фононных спектров 153, 154
- Тепловые процессы 135
- —, изотермический 135
 - —, изобарный 135
 - —, изохорный 135
 - —, адиабатный 136
- Теплоемкость 132
- при постоянном давлении 133
 - при постоянном объеме 133
 - решетки 150
 - электронная 157
- Теплопередача 288
- Теплопроводность 174
- Теплота, количество теплоты 127
- фазового перехода 159, 160
- Термодинамика 126
- , границы применимости 166
 - , три начала термодинамики 126, 127
- Термодинамические величины 116
- Термосопротивление 234
- Термоядерные реакции в звездах 290
- — в реакторах типа «Токамак» 281
- Течение жидкости, подобное 184
- —, ламинарное 189
 - —, турбулентное 189
- Титанат бария 247
- Тожественные частицы 99
- фотоны 268
- Ток дырочный 233
- переменный 250, 251
 - постоянный 230
 - электронный 233
- Тока плотность 61
- сила 231
- Токамак 281
- Тонкая структура уровней атома водорода 98
- Тонкой структуры постоянная 98
- Тормозное излучение 72
- Траектория 31
- Трансурановые элементы 314
- Трех частицы в пузырьковой камере 90
- Трех уровней система — См. Рубиновый лазер
- Тройная точка 162
- Трубка тока 168
- Туннельный эффект 273
- Турбулентная вязкость 191
- Турбулентное динамо 193
- течение 189
- Турбулентность плазмы 193
- развитая 189
- Тяготение 18
- , Ньютона теория 298
 - , Эйнштейна теория 298
- Тяжелая масса 29, 298
- Угловая скорость 37
- Ударная волна 202, 203
- — в идеальном газе 207, 208
- Удельная электропроводность 228
- Уединенная волна 196
- Ультрарелятивистская частица 158
- Ультрафиолетовое излучение 102, 103
- Управляемый термоядерный синтез 271
- Упрочнение металлов 147
- Упругое рассеяние частиц 35
- Уравнение состояния идеального газа 131
- — фотонного газа 140, 141
- Уровни энергии в атоме водорода 93
- — вырожденные 148
- Ускорение 26
- свободного падения 30
- Ускорители частиц 11
- Фаза в термодинамике 159
- колебаний 75
- Фазовая диаграмма 159
- скорость волн 194
 - траектория 155

Фазовое пространство 139, 155
 Фазовый объем 155
 — переход 159
 — — второго рода 163
 — — первого рода 162, 163
 Ферми поверхность в металлах 156
 — импульс 156
 — энергия 156
 Ферми-газ идеальный электронный 155
 — — ультрарелятивистский вырожденный 158
 Ферми—Дирака статистика 100
 Ферриты 262
 Ферромагнетизм 245, 246
 Флуктуации 116
 — электрические 235, 236
 Фонон 152
 Фотоионизация 108
 Фотон 10, 103
 —, поляризация 111
 —, электродипольный 105
 Фотонный газ 137
 Фотопроводимость 233
 Фотоэффект внешний 108
 — внутренний 233
 Франка—Герца опыт 317

Хаббла постоянная 301
 Холодильник 128

Центробежная сила инерции 300
 Циклотрон 315
 Циркуляция поля 50

Чандраскаровский предел 293
 Частота колебаний 38
 — — угловая 38
 — — циклическая 74
 Черная дыра 304
 Четность квантового состояния 104
 — фотона 105
 Числа заполнения 124

Ширина уровня 269
Шредингера уравнение 89, 90
Штерна—Герлаха опыт 317

Эйлера формула 87
 Эйнштейна принцип эквивалентности 299
 — уравнения тяготения 300

Экситон 233
 Эксперимент фундаментальный в истории физики 315
 Электреты 238
 Электродвижущая сила (э. д. с.) 232, 250
 Электромагнитное взаимодействие элементарных частиц 18
 Электромагнитное поле, законы преобразования 49
 Электромагнитные волны 74
 — —, их импульс и энергия 54, 76
 — —, скорость распространения 46
 Электронный микроскоп 315
 Электрон-фононное взаимодействие 229
 Электрослабое взаимодействие элементарных частиц 318
 Элементарные возбуждения 115
 — частицы 9
 Элементарный электрический заряд 47, 48
 Энергия 33
 — внутренняя, тепловая 115
 —, закон сохранения 34
 — кинетическая 33
 — покоя, релятивистская 45
 — потенциальная 34
 — связи 45
 — взаимодействия 18
 Энтальпия 133
 Энтропия 119
 —, закон возрастания 119
 Эффективное сечение столкновения 178

Ядерная физика релятивистская 223
 — энергия 275
 Ядерное вещество 198
 Ядерные модели, капальная 198
 — —, оболочечная 13
 Ядерный взрыв в атмосфере 210
 — — подземный 314
 Ядро атомное 12
 — —, массы ядер 12
 — —, заряды ядер 12
 — —, устойчивость ядер 12, 13
 — —, магические ядра 12
 — —, период полураспада 13
 — —, зеркальные ядра 19

Учебное издание
Борис Николаевич Иванов
ЗАКОНЫ ФИЗИКИ

Зав. редакцией учебно-методической литературы по физике и математике
Е. С. Грядасова. Научный редактор Л. В. Тарасов. Редактор издательства С. А. Крылов. Младшие редакторы: С. А. Доровских, Н. П. Майкова. Рисунки художника Р. Р. Витковского. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технические редакторы Н. В. Яшукова, Т. Н. Полунина. Корректор Р. К. Косинова.

ИБ № 5282

Изд. № ФМ-847. Сдано в набор 18.02.86. Подп. в печать 15.08.86. Формат 60 × 90^{1/16}. Бум. кн.-журн. Гарнитура таймс. Печать высокая. Объем 21,0 усл. печ. л. 21,0 усл. кр.-отт. 20,78 уч.-изд. л. Тираж 40 000 экз. (Доп. тир.) Зак. № 649. Цена 90 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

