

И.Н. Добротворский

# ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Учебник  
для  
ТЕХНИКУМОВ

«Радио и связь»



И.Н. Добротворский

# ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

---

*Допущено Министерством связи СССР  
в качестве учебника  
для учащихся электротехникумов связи,  
специальностей 2109, 2305, 2306, 2307*



Москва  
«Радио и связь»  
1989



ББК 32.88  
Д56  
УДК 621.372(075)

Рецензенты: П. Н. Матханов, Л. К. Жадина

Редакция литературы по радиотехнике и электрической связи

Добровольский И. Н.

Д56 Теория электрических цепей: Учебник для техникумов. — М.: Радио и связь, 1989. — 472 с.: ил.

ISBN 5-256-00266-X

Рассматриваются физические процессы и методы расчетов пассивных и активных электрических цепей. Подробно описываются временные и частотные характеристики различных цепей. Приводятся простейшие программы расчетов с использованием микроЭВМ. Большое внимание уделяется расчету и анализу активных цепей. Учебник иллюстрирован цветными графиками, схемами, диаграммами.

Для учащихся техникумов связи всех специальностей.

Д 2303020000-119 Свод. план для сред.  
046 (01) -89 спец. учебн. заведений 134-89

ББК 32.88

Учебное издание

*Добровольский Игорь Николаевич*

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Учебник

Заведующий редакцией *В. Н. Вальцев*, Редактор *В. К. Старикова*. Переплет художника *Ю. В. Архангельского*. Художественный редактор *А. В. Проценко*. Технический редактор *Л. А. Горшкова*. Корректор *Т. С. Власкина*

ИБ № 1032

Подписано в печать с оригинала-макета 05.05.89. Формат 60 X 90/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура "Пресс-роман". Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,5. Усл. кр.-отт. 116,50. Уч.-изд. л. 33,67. Тираж 25000 экз. Изд. № 20969.

Заказ № . Цена 1р. 50к.

Издательство "Радио и связь". 101000 Москва, Почтамт, а/я 693.

Типография издательства "Калининградская правда". 236000, г. Калининград обл., ул. К. Маркса, 18

ISBN 5-256-00266-X

©Издательство "Радио и связь", 1989



## ВВЕДЕНИЕ

Жизнь современного общества практически невозможна без хорошо развитой электрической связи. Телефон, телеграф, телетайп, радиовещание, телевидение, радиоэлектроника, обработка и передача данных, газетных полос, связь с подвижными объектами, управление работой устройств, находящихся на различных (порой, весьма значительных) расстояниях, электронное моделирование, радиоастрономия и т. д. — далеко не полный перечень электронных устройств и систем, широко используемых в нашей жизни. В передаче и приеме самой разнообразной информации нуждаются промышленность, транспорт, координационные и управленческие органы, предприятия культуры и образования, без связи невозможно организовать оборону страны, обеспечить необходимое общение населения друг с другом. О связи часто говорят, что это нерв страны. Без четко действующей связи деятельность практически любого учреждения или предприятия либо крайне затрудняется, либо становится просто невозможной.

Но современная связь обеспечивается совокупностью электротехнических и электронных устройств различной сложности, состоящих из элементов, к которым приложены электрические напряжения или протекают электрические токи. Сколь угодно сложные электронные устройства, в конечном счете, состоят из разнообразных электрических цепей, обладающих вполне определенными свойствами. Таким образом, чтобы разрабатывать, изготавливать или эксплуатировать различную аппаратуру связи, следует, прежде всего, знать процессы, происходящие в электрических цепях при различных условиях, а также законы, которым подчиняются эти процессы. Многие из этих законов изучаются в дисциплине "Теория электрических цепей", сокращенно ТЭЦ. Как самостоятельная дисциплина, ТЭЦ возникла в учебных заведениях в 60-е годы. До этого общие свойства цепей изучались в дисциплинах "Электротехника" или "Теоретические основы электротехники". К 60-м годам стало ясно, что сведения, которыми необходимо располагать инженерам и техникам, занимающимся передачей информации, значительно отличаются от сведений, которые необходимы для лиц, занимающихся энергетикой, электромеханикой и рядом смежных с ними отраслей техники. Энергетика базируется, прежде всего, на постоянном или периодическом переменном токе гармонической формы промышленной частоты. С помощью таких токов удобно передавать энергию, но в принципе невозможно передать какую-либо информацию. Именно поэтому еще в прошлом веке для передачи сообщений с помощью телеграфа был разработан специальный код, представляющий совокупность сигналов прямоугольной формы с различными длительностями. Заметим, что подобный код в усовершенствованном виде используется до настоящего времени. Имеется целый ряд вопросов, которые для специалистов энергетического профиля не представляют большого интереса, например спектральные свойства сигналов, для связистов же эти вопросы являются весьма существенными. При передаче энергии главную роль играют мощность и КПД системы, при передаче информации — отсутствие искажений и т. д.

Бурное развитие микроэлектронной техники дало возможность создать элементную базу, позволившую получать цепи с совершенно новыми, в ряде случаев весьма необыкновенными свойствами. С помощью операционных усилителей можно собирать цепи с характеристиками, которые невозможно получить на пассивных элементах. Микросхемы имеют малые габариты и массу, большую плотность заполнения устройств



ва, высокую надежность. Современная вычислительная техника позволяет рассчитывать весьма сложные цепи и определять оптимальные параметры и режимы работы электронных устройств. Следует, однако, иметь в виду, что новая техника требует и новых знаний, которые в ряде случаев значительно отличаются от традиционных. Например, при машинных методах расчета цепей записывают не уравнения равновесия цепи в классическом виде, а топологию цепи и т. д. Чтобы изучать любые устройства связи, необходимо сначала изучить разнообразные свойства цепей, входящих в эти устройства, т. е. освоить теорию электрических цепей. В данном учебнике разбираются временные и спектральные свойства цепей, состоящих из сопротивлений  $R$ , емкостей  $C$ , активных элементов  $A$  (в основном операционных усилителей), индуктивностей  $L$  при различных воздействиях. Цепи, геометрические размеры которых соизмеримы с длиной волны, в данной книге не рассматриваются. Таким образом, для того чтобы успешно изучать специальные дисциплины, следует прежде всего овладеть теорией электрических цепей, т. е. дисциплиной, изучающей свойства  $ARCL$ -цепей, как их сокращенно называют. Обратим внимание, что в данном сокращении элемент  $A$  всегда записывают на первом месте из-за необычайной его влажности.

Теория электрических цепей включает разделы, которые разрабатывались в различных дисциплинах, в том числе — электротехнике, радиотехнике, теории связи и некоторых других. Эта теория не имела бы современного вида, если бы многочисленные исследователи не внесли свой вклад в науку о свойствах электрических цепей и их техническом применении. Перечислим имена некоторых ученых, сыгравших видную роль в становлении теории электрических цепей. В 1831 г. замечательный английский физик М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. В 1832 г. русский ученый и изобретатель П. Л. Шиллинг создал первый электромагнитный телеграф. В 1833 г. русский физик Э. Х. Ленц сформулировал закон, с помощью которого определяют направление индукционного тока. Важнейшим этапом развития средств электрической связи явилось в 1895 г. гениальное изобретение проф. А. С. Поповым беспроводной связи. В 1907 г. проф. Б. Л. Розинг создал электронную трубку, а в 1911 г. осуществил первую в мире передачу изображений с помощью этой трубки. Чл.-кор. АН СССР М. А. Бонч-Бруевич был одним из первых советских ученых-радиотехников, им было организовано отечественное производство мощных электронных ламп. Чл.-кор. АН СССР К. А. Круг является автором крупнейших работ по теоретической электротехнике. Чл.-кор. АН СССР В. И. Сифоров — автор известных работ по проблемам передачи информации. Вице-президент АН СССР В. А. Котельников внес большой вклад в теорию помехоустойчивости радиоприема, радиолокации планет Солнечной системы. Одним из основоположников дисциплины теории электрических цепей был академик АН СССР А. А. Харкевич. Крупнейшим электротехником страны является академик АН СССР К. С. Демирчян. Большой вклад в развитие теории связи внесли профессора П. К. Акулишин, Н. А. Баев, Э. В. Зелях, И. А. Кошечев, К. Е. Кульбацкий и многие другие.

Благодаря усилиям большого отряда связистов достигнуты значительные успехи в деле создания Единой автоматизированной системы связи (ЕАСС) страны, включающей передачу информации по кабельным, радиорелейным, спутниковым системам связи. Началось внедрение электронных АТС с широким использованием ЭВМ, разрабатываются волоконно-оптические, лазерные системы связи, кабельное телевидение и многое другое.

Специалистам в области связи в своей практической работе придется заниматься устройствами, которые в настоящее время находятся еще в стадии разработки или проектирования. Будущие специалисты должны быть к этому готовы.



## 1.1. ПОНЯТИЕ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЗАРЯДЕ

Давно было замечено, что если потереть стекло о шелк, то стекло приобретает способность притягивать некоторые предметы, например, сухую бумагу, но отталкивать такое же потертое о шелк стекло. Эбонит, потертый о мех, притягивает бумагу, стекло, натертое о шелк, но отталкивает потертый о мех эбонит. Свойство притягивать или отталкивать тела было объяснено появлением зарядов, не видимых человеческим глазом, и названных электрическими. Поскольку заряженные тела вели себя по-разному: в одних случаях притягивали предметы, а в других отталкивали, то их стали различать. Заряды, появляющиеся на стекле, назвали *положительными*, а на эбоните — *отрицательными*. При изучении поведения заряженных тел стало ясно, что одноименные заряды отталкиваются, разноименные притягиваются, а незаряженные предметы притягиваются как к положительно, так и к отрицательно заряженным телам.

Значительно позже было установлено, что все тела состоят из атомов, каждый из которых имеет положительно заряженное ядро и отрицательно заряженные электроны. В тех случаях, когда положительный заряд ядра равнялся отрицательному заряду электронов, атом был электрически нейтральным. При уменьшении заряда электронов (например, трением стекла о шелк) тело становилось положительно заряженным, а при увеличении (например, трением эбонита о мех) тело приобрело отрицательный заряд. Таким образом, в телах может быть избыток или недостаток электронов, а также их равенство. Заряд электрона — самый малый электрический заряд, известный в природе. По многим причинам, которые мы выясним позднее, за единицу заряда был принят не заряд одного электрона, а заряд, равный заряду  $6\,290\,000\,000\,000\,000\,000$  электронов и названный *кулоном*. Сразу заметим, что числа с большим количеством нулей, как правило, записывают короче — в виде однозначного числа с запятой и десятичной частью, умноженной на 10 в соответствующей степени. Например, заряд в один кулон равен заряду  $6,29 \cdot 10^{18}$  электронов. Единица заряда кулон записывается сокращенно, двумя буквами — Кл, причем первая буква — большая. По ныне действующим стандартам единицы, названные именами ученых, пишутся с большой буквы. (Ш. О. Кулон (1733 — 1806) — французский инженер и физик, один из основателей электростатики). Напомним, что все физические величины (длина, масса, время, напряжение, сопротивление, ток,



скорость, сила, мощность и т. д.) объединены в одну систему единиц, названную СИ (читается ЭС—И, а не СИ), что означает "система интернациональная", т. е. международная (Système International). В соответствии со стандартом СЭВ 1052—78 и постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 25 июля 1979 г. № 2242 единицы СИ должны использоваться во всех видах деятельности, а также в учебном процессе.

Поскольку кулон является единицей СИ, то имеется строго определенная зависимость между единицей заряда и единицами, принятыми в СИ за основные (метр, килограмм, секунда, ампер). При сравнении заряда в 1 Кл, получившегося из физических законов, с зарядом электрона и оказалось соотношение  $1 \text{ Кл} = 6,29 \cdot 10^{18}$  зарядов электронов.

## 1.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДОВ

Опытным путем было установлено, что сила взаимодействия двух зарядов пропорциональна значению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Формула, по которой рассчитывается взаимодействие заряженных тел, называется *законом Кулона* и имеет вид

$$F = Q_1 Q_2 / \epsilon_a R^2, \quad (1.1)$$

где  $F$  — сила взаимодействия зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$ , измеряемая в ньютонах (Н), по имени английского физика Исаака Ньютона (1643 — 1727);  $Q_1$  и  $Q_2$  — заряды, Кл;  $R$  — расстояние между центрами заряженных тел, м;  $\epsilon_a$  — диэлектрическая проницаемость, представляющая собой произведение двух множителей,  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_r$ , из которых  $\epsilon_0$  — диэлектрическая постоянная вакуума (практически воздуха), а  $\epsilon_r$  — относительная диэлектрическая проницаемость данной среды, показывающая, во сколько раз уменьшается взаимодействие заряженных тел, если их перенести из вакуума в данную среду. Значения  $\epsilon_r$  приведены в табл. 1.1.

Таким образом, закон Кулона может быть записан так:

$$F = Q_1 Q_2 / \epsilon_0 \epsilon_r R^2. \quad (1.2)$$

Т а б л и ц а 1.1

Материал	$\epsilon_r$	Материал	$\epsilon_r$
Воздух	1	Слюда флогопит	4 ... 5,5
Пористый полиэтилен	1,5	Слюда мусковит	4,5 ... 8
Полипропилен, фторопласт,	2,2 ... 2,3	Радиофарфор	6
сплошной полиэтилен, поли-		Текстолит	7
изобутилен, бумага с диэлект-		Ультрафарфор	6,3 ... 7,5
риком, парафин		Тиконд	25 ... 80
Плексиглас	3 ... 3,6	Бензол	2,2 ... 2,3
Винипласт	4,1	Ацетон	20 ... 30
Эбонит	4,3	Вода	80
Бакелит	4 ... 4,6		

Опытным путем было установлено, что диэлектрическая проницаемость вакуума равна  $8,85 \cdot 10^{-12}$  и измеряется в единицах "фарад на метр", причем "фарад" — есть единица электрической емкости, что будет рассмотрено в § 1.5. Пока следует запомнить, что единица "фарад" сокращенно записывается большой буквой Ф. (Фарад — по имени английского физика Майкла Фарадея (1791 — 1867), почетного члена Петербургской Академии наук (1830 г.), подробнее см. гл. 4, раздел "Электромагнитная индукция").

### 1.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Около заряженных тел всегда имеется пространство, в котором оказываются притягивающие или отталкивающие силы заряженного тела. Это пространство называется пространством с электрическим полем. Можно сказать, что *электрическим полем* является особый вид материи, через который осуществляется взаимодействие электрических зарядов. Электрическое поле неизменяющихся зарядов называется электростатическим.

Каждая точка электрического поля характеризуется напряженностью электрического поля  $E$  (не следует путать с "напряжением": это совершенно различные физические понятия). Напряженность поля определяется из выражения  $E = F/q$ , где  $F$  — сила, действующая на пробный заряд  $q$ , помещенный в данной точке поля. Пробным зарядом  $q$  называется заряд, много меньший заряда  $Q$ , создающего основное поле. Знать точно величину пробного заряда нет необходимости, поскольку с увеличением заряда  $q$  увеличивается и сила взаимодействия  $F$ , поэтому отношение  $F/q$  остается постоянным, равным напряженности поля в данной точке. Так как сила измеряется в ньютонах, а заряд — в кулонах, то напряженность электрического поля измеряется в Н/Кл,

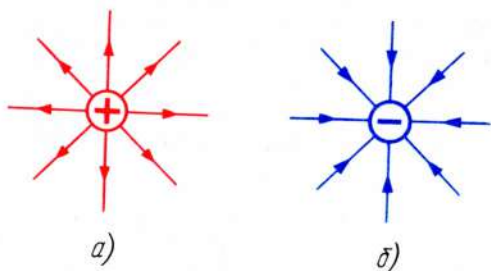


Рис. 1.1

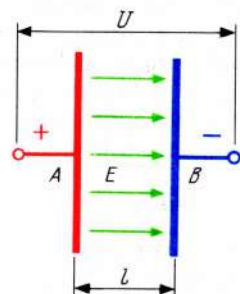


Рис. 1.3

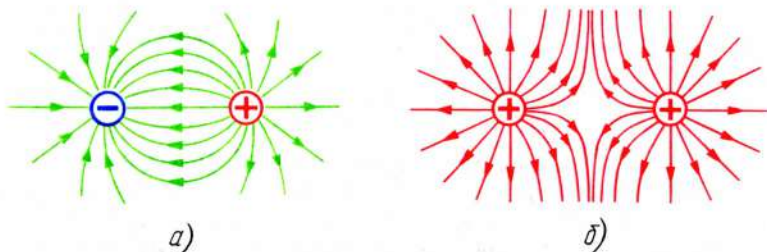


Рис. 1.2



однако данная величина во многих случаях является малоудобной, поэтому ниже будет показана иная единица, более распространенная на практике.

В соответствии с ГОСТ 19980–74 напряженность электрического поля – векторная величина, характеризующая электрическое поле и определяющая силу, действующую на заряженную частицу со стороны электрического поля. Таким образом, напряженность электрического поля есть величина векторная. За направление вектора напряженности принимают направление силы, с которой поле действует на положительный пробный заряд, помещенный в данную точку поля.

Электрическое поле изображается линиями напряженности электрического поля. На чертежах густоту линий показывают пропорциональной напряженности электрического поля. Направление поля в каждой точке совпадает с направлением касательной в этой точке. Электрическое поле, у которого во всех точках векторы напряженности поля одинаковые, называют *однородным*. Электрические силовые линии являются незамкнутыми, они начинаются на телах, обладающих положительным зарядом, и оканчиваются на телах, обладающих отрицательным зарядом. Приведем примеры электрических полей для различных зарядов. На рис. 1.1 *а, б* показаны поля точечных положительного и отрицательного зарядов, на рис. 1.2, *а, б* – поля двух точечных зарядов, на рис. 1.3 – поле между двумя параллельными пластинами.

#### 1.4. ПОТЕНЦИАЛ. НАПРЯЖЕНИЕ

Пусть имеется положительный точечный заряд  $Q$ . Вокруг заряда образует- ся электрическое поле. Будем вносить из бесконечности в данную точку поля пробный положительный заряд  $q$ . Поскольку оба заряда ( $Q$  и  $q$ ) в данном случае заряжены одноименно, то заряд  $q$  будет испытывать отталкивающую силу  $F$ , на преодоление которой необходимо затратить работу  $A$ . Таким образом, чтобы внести заряд в электрическое поле, необходимо затратить энергию  $W$ , равную совершенной работе  $A$  по перемещению заряда  $q$  из бесконечности в данную точку поля. Каждая точка поля характеризуется электрическим потенциалом  $\varphi$ , чаще называемым просто потенциалом и показывающим энергию  $W$ , которую необходимо затратить, чтобы переместить единичный пробный заряд из бесконечности в данную точку поля:

$$\varphi = W/Q. \quad (1.3)$$

Потенциал измеряется в вольтах (сокращенно записывается В – по имени итальянского физика Алессандро Вольта (1745 – 1827), одного из основателей учения об электричестве). Широкое распространение имеют кратные и дольные значения вольта: киловольт (кВ) = 1000 В (1 кВ =  $10^3$  В); милливольт (мВ) = 0,001 В, 1 В = 1000 мВ, 1 мВ =  $10^{-3}$  В; микровольт (мкВ) = 0,000001 В =  $10^{-6}$  В, 1 В =  $10^6$  мкВ. Энергия  $W$ , как и работа  $A$ , измеряется в джоулях (сокращенно записывают Дж – по имени английского физика Джеймса Джоуля (1818 – 1889), экспериментально обосновавшего закон сохранения энергии). Джоулем называется работа, совершенная силой в один ньютон на пути в один метр, т. е.  $[Дж] = Н \cdot м = кг \cdot м \cdot м/с^2 = кг \cdot м^2/с^2$ . Из (1.3) следует, что *потенциалом в 1 В называется такой потенциал, при котором на перемещение заряда в 1 Кл из данной точки поля в бесконечность затрачивается энергия в 1 Дж*. Получим зависимость напряженности электрического поля  $E$  от потенциала  $\varphi$ .  $E = F/Q$ , из выражения (1.3)  $Q = W/\varphi$ , но  $W = A = Fl$ , где  $F$  – сила, а  $l$  – путь, тогда

$$E = F/Q = F\varphi/W = F\varphi/A = F\varphi/F l = \varphi/l.$$

Следовательно, напряженность поля  $E$  равна отношению потенциала  $\varphi$  к расстоянию  $l$  и измеряется в вольтах на метр (В/м). Таким образом, единица Н/Кл то же самое, что и В/м. Напряженность поля может измеряться также в мкВ/м и мВ/м.

Выразим потенциал  $\varphi$  через напряженность электрического поля  $E$ . Из выражения  $E = \varphi/l$  следует, что  $\varphi = El$ , причем данная формула справедлива только для однородного поля, т. е. такого поля, в котором при изменении расстояния напряженность поля остается неизменной. В тех случаях, когда напряженность поля неодинаковая, приходится подсчитывать приращение потенциала  $d\varphi$  на бесконечно малом пути  $dx$ , а затем все приращения потенциалов суммировать. В этом случае  $d\varphi = E(l)dx$ , а

$$\varphi = \int_l^{\infty} E(l) dx, \quad (1.4)$$

где  $E(l)$  — закон, по которому изменяется напряженность поля при перемещении заряда из бесконечности на расстояние  $l$ .

**Пример 1.1.** Определить потенциал  $\varphi$  в точке  $l$ , если напряженность поля  $E(l)$  изменяется по закону  $E_0/x^2$ , где  $E_0$  — постоянная величина, а  $x$  — расстояние.

**Решение.**

$$\varphi = \int_l^{\infty} E(l) dx = \int_l^{\infty} \frac{E_0}{x^2} dx = E_0 \int_l^{\infty} x^{-2} dx.$$

Напомним, что

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{(n+1)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi &= E_0 \frac{1}{(-2)+1} x^{(-2)+1} \Big|_l^{\infty} = \frac{E_0}{-1} x^{-1} = \frac{E_0}{-x} \Big|_l^{\infty} = \frac{E_0}{x} \Big|_l^{\infty} = E_0/l - E_0/\infty = \\ &= E_0/l - 0 = E_0/l. \end{aligned}$$

(Обратите внимание: при изменении знака на обратный верхний и нижний пределы интегрирования меняются местами.)

Таким образом, каждая точка электрического поля характеризуется некоторым потенциалом. *Разность потенциалов двух точек называется напряжением, обозначается  $U$  и измеряется так же, как и потенциал, в вольтах.* Если, например, потенциал точки  $A$  —  $\varphi_A$ , а потенциал точки  $B$  —  $\varphi_B$ , то напряжение между этими точками определяется из выражения  $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ . Важнейшим свойством электрического поля является то, что напряжение между двумя точками зависит от разности потенциалов, но не зависит от формы пути, по которому перемещается заряд. *Напряжение между двумя точками численно равно работе  $A$ , затраченной на перемещение единичного заряда из одной точки поля в другую.* В общем случае, при неравномерных полях, напряжение

$$U = \int_{l_A}^{l_B} E(l) dx. \quad (1.5)$$

В соответствии с ГОСТ 19880–74 электрическое напряжение — скалярная величина, равная линейному интегралу напряженности электрического поля. Разность электрических потенциалов — электрическое напряжение в безвихревом поле, характеризующееся независимостью от выбора пути интегрирования.

Следует помнить важнейшее правило: чтобы увеличить потенциал некоторой точки или напряжение между двумя точками, при прочих равных условиях, необходимо затратить какую-то энергию. В последующих главах будет показано, что такой энергией может быть химическая, тепловая, световая и другие.

### 1.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ

Пусть имеются параллельные пластины, находящиеся на расстоянии много меньшем, чем линейные размеры пластин. Если эти пластины заряжены разноименными зарядами, то между ними образуется практически однородное электрическое поле с напряженностью  $E = U/l$ , где  $U$  — электрическое напряжение;  $l$  — расстояние между пластинами (см. рис. 1.3). Около краев поле оказывается неоднородным, напряженность поля в этом случае представляет величину переменную, зависящую от места данной точки, и рассчитывается по формуле  $E(l) = du/dl$ . Система, состоящая из двух пластин, способная накапливать электрические заряды, называется *конденсатором*.

Каждый конденсатор характеризуется электрической емкостью  $C$ . Емкостью называется коэффициент пропорциональности между напряжением на обкладках конденсатора  $U$  и зарядом, запасенном в конденсаторе  $Q$  ( $Q = CU$ ), откуда

$$C = Q/U. \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что чем больше емкость конденсатора, тем больше заряд, запасенный в конденсаторе при неизменном напряжении на его обкладках. Единицей электрической емкости является фарад (а не "фарада"), причем фарад — емкость такого конденсатора, в котором заряд в один кулон изменяет напряжение на один вольт. Фарад — очень большая емкость, на практике используются дольные единицы: микрофарад ( $\mu\text{Ф}$ ) =  $10^{-6}$  Ф, нанофарад ( $\text{нФ}$ ) =  $10^{-9}$  Ф, пикофарад ( $\text{пФ}$ ) =  $10^{-12}$  Ф. Определим размерность фарада. Из формулы  $C = Q/U$  следует, что  $[\text{Ф}] = \text{Кл/В}$ . Заметим, что в последующих главах будет показана еще одна размерность емкости, более удобная, чем Кл/В. Введя единицу емкости — фарад, можно определить размерность диэлектрической проницаемости вакуума  $\epsilon_0$ . По закону Кулона

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon_0 \epsilon_r R^2}, \text{ откуда } \epsilon_0 = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon_r F R^2}, \text{ или } [\epsilon_0] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Кл}}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Кл}}{\text{Дж} \cdot \text{м}} =$$

$$= \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \text{ (напомним, что } \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж, Кл/Дж} = 1/\text{В, Кл/В} = \text{Ф}) \text{ . Таким}$$



образом, диэлектрическая проницаемость вакуума измеряется в фарадах на метр:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Емкость плоского конденсатора с воздушным диэлектриком тем больше, чем больше площадь пластин конденсатора  $S$ , чем меньше расстояние между пластинами  $l$ , и определяется из выражения  $C = \epsilon_0 (S/d)$ . Если между пластинами ввести диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r$ , то емкость конденсатора возрастает в  $\epsilon_r$  раз. Таким образом, относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r$  представляет отвлеченное число, показывающее, во сколько раз увеличивается емкость конденсатора, если между пластинами ввести диэлектрик из данного материала.

**Пример 1.2.** Рассчитать емкость плоского конденсатора, имеющего две пластины с площадью каждой из них по  $5 \text{ см}^2$  при расстоянии между ними  $1 \text{ мм}$ , если диэлектриком является: а) воздух; б) титанат бария.

**Решение.** Емкость конденсатора определяется из выражения  $C = \epsilon_0 \epsilon_r S/l$ . При воздушном диэлектрике  $\epsilon_r = 1$ , в этом случае  $C_B = (8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-4}) / 1 \cdot 10^{-3} = 4,425 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 4,425 \text{ пФ}$ . (Напомним, что площадь следует выражать в квадратных метрах, а расстояние — в линейных метрах,  $5 \text{ см}^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .) Если в конденсатор ввести диэлектрик из титаната бария с  $\epsilon_r = 80$ , то емкость конденсатора увеличится в 80 раз и станет  $C_{\text{(тит. бар)}} = \epsilon_r C_B = 80 \cdot 4,425 \cdot 10^{-12} = 354 \times 10^{-12} \text{ Ф} = 354 \text{ пФ}$ . Если пластины имеют неодинаковые поверхности, то берется площадь меньшей пластины.

## 1.6. ПРОБИВНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ КОНДЕНСАТОРА

При увеличении напряжения на обкладках конденсатора увеличивается напряженность электрического поля, которое при определенных значениях может разрушить диэлектрик или, как говорят, пробить конденсатор. У каждого конденсатора различают номинальное, т. е. рабочее, напряжение и пробивное. Рабочее напряжение, как правило, в  $1,5 - 2,0$  раза меньше пробивного. Значения этого напряжения в конденсаторах, широко распространенных на практике, составляют от единиц до сотен вольт, в зависимости от их конструкции. Максимально допустимое напряжение определяется расстоянием между пластинами и физическими свойствами диэлектрика. Емкость и рабочее напряжение — важнейшие характеристики любого конденсатора. Максимально допустимое напряжение называют также электрической прочностью конденсатора.

## 1.7. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Если к источнику электрической энергии подключить конденсатор, то он заряжается, между его обкладками создается электрическое поле, в котором запасается энергия  $W$ , равная работе  $A$ , которую необходимо совершить, чтобы зарядить данный конденсатор. Эта работа

$$A = UQ. \quad (1.7)$$

Поскольку в процессе заряда конденсатора значения напряжения и количества электричества  $q$  изменяются, то сначала следует подсчитать элементарную работу  $dA$ , совершаемую при бесконечно малом изменении заряда  $q$ , а затем с помощью интегрирования просуммировать эти элементарные работы:  $dA = u_C dq = u_C d(Cu_C)$ . Так как емкость конденсатора  $C$  определяется его

конструкцией и не зависит от значения напряжения на его обкладках, то множитель  $C$  выходит за знак производной, как всякая постоянная величина, т. е.  $dA = Cu_C du_C$ . Интегрируя обе части равенства, получим  $\int dA = \int Cu_C du_C$ , или  $A = C \int u_C du_C$ , откуда (см. пример 1.1)  $A = Cu_C^2/2$ . Следовательно, энергия, запасенная в конденсаторе, определяется из выражения

$$W_3 = Cu_C^2/2. \quad (1.8)$$

**Пример 1.3.** Подсчитать электрическую энергию  $W_3$ , запасенную в конденсаторе емкостью 300 мкФ, если напряжение на обкладках конденсатора 200 В.

$$W_3 = \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{300 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^4}{2} = 6 \text{ Дж.}$$

(Напомним, что емкость следует подставлять в фарадах, причем  $300 \text{ мкФ} = 300 \times 10^{-6} \text{ Ф}$ .)

### 1.8. СОЕДИНЕНИЕ КОНДЕНСАТОРОВ

Конденсаторы на электрических схемах обозначают так, как показано на рис. 1.4. Конденсаторы можно соединять параллельно и последовательно. *Параллельным соединением* называется такое, при котором все конденсаторы включены между зажимами источника электрической энергии. При этом на всех конденсаторах имеется одно и то же напряжение, равное напряжению источника питания (рис. 1.5). Поскольку напряжение на всех конденсаторах одинаковое, а общий заряд равен сумме зарядов, имеющих в конденсаторах, общая емкость конденсаторной батареи равна арифметической сумме емкостей всех конденсаторов, соединенных параллельно. Действительно,

$$Q_{\text{эк. пар}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots = U(C_1 + C_2 + C_3 + \dots).$$

Но  $Q_{\text{эк. пар}} = UC_{\text{эк. пар}}$ , или  $UC_{\text{эк. пар}} = U(C_1 + C_2 + C_3 + \dots)$ . Сокращая обе части равенства на  $U$ , получаем  $C_{\text{эк. пар}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$  или, записывая в более общей форме,

$$C_{\text{эк. пар}} = \Sigma C, \quad (1.9)$$

т. е. *эквивалентная емкость конденсаторов, соединенных параллельно, равна арифметической сумме емкостей этих конденсаторов*. Напомним, что слово "арифметическая" означает, что все члены этой суммы берутся со знаком "плюс".



Рис. 1.4

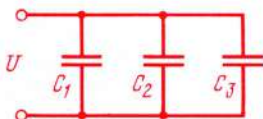


Рис. 1.5

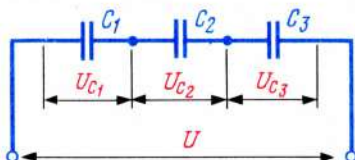


Рис. 1.6

Частный случай. Если  $n$  одинаковых конденсаторов соединены параллельно, то эквивалентная емкость батареи в  $n$  раз больше емкости каждого конденсатора:  $C_{\text{эк. пар}} = nC$ .

Последовательным соединением конденсаторов называется такое соединение, при котором отрицательно заряженная пластина одного конденсатора соединена с положительной заряженной пластиной другого (рис. 1.6). При последовательном соединении конденсаторов заряд каждого конденсатора равен заряду всей батареи, т.е.  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ . Так как  $U = U_{C_1} + U_{C_2} + U_{C_3} + \dots$ , а  $U_{C_1} = Q/C_1$ ,  $U_{C_2} = Q/C_2$ ,  $U_{C_3} = Q/C_3$ ,  $U = Q/C_{\text{эк. посл}}$ , то  $Q/C_{\text{эк. посл}} = Q/C_1 + Q/C_2 + Q/C_3 + \dots$ , или, сокращая все члены на  $Q$ , получим

$$1/C_{\text{эк. посл}} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \dots \quad (1.10)$$

Рассмотрим два важных частных случая.

Если последовательно соединены два конденсатора, то

$$1/C_{\text{эк. посл}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}, \text{ откуда } C_{\text{эк. посл}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1.11)$$

Если последовательно соединено  $n$  одинаковых конденсаторов, то  $1/C_{\text{эк. посл}} = 1/C + 1/C + 1/C + \dots = n \cdot 1/C$ , откуда

$$C_{\text{эк. посл}} = C/n. \quad (1.12)$$

Таким образом, при параллельном соединении нескольких конденсаторов их эквивалентная емкость больше емкости конденсатора с наибольшей емкостью, а при последовательном соединении — меньше емкости конденсатора с самой малой емкостью.

**Пример 1.4.** Имеются конденсаторы с емкостями  $C_1 = 2$  мкФ,  $C_2 = 3$  мкФ,  $C_3 = 5$  мкФ. Рассчитать эквивалентные емкости, напряжение на каждом конденсаторе, заряды и энергию каждого конденсатора, если конденсаторы соединены: а) параллельно; б) последовательно, а напряжение источника  $U = 100$  В.

**Решение.** Произведем расчеты, если конденсаторы соединены параллельно (см. рис. 1.5):

$$C_{\text{эк. пар}} = C_1 + C_2 + C_3 = 2 + 3 + 5 = 10 \text{ мкФ.}$$

Напряжение на каждом конденсаторе 100 В.

Рассчитаем заряды конденсатора и всей батареи:  $Q = C u_C$ , следовательно,  $Q_1 = C_1 U_C = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 2 \cdot 10^{-4}$  Кл = 200 мкКл;  $Q_2 = C_2 u_C = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 300$  мкКл;  $Q_3 = C_3 u_C = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 500$  мкКл;  $Q_{\text{эк}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 200 + 300 + 500 = 1000$  мкКл = 1 мКл.

Произведем проверку:  $Q_{\text{эк. пар}} = C_{\text{эк. пар}} u_{C_{\text{эк. пар}}} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 1000 \times 10^{-6}$  Кл =  $10^{-3}$  Кл = 1 мКл. Энергия конденсаторов рассчитывается по формуле  $W_3 = C u_C^2 / 2$ , откуда

$$W_{31} = \frac{C_1 u_{C_1}^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 0,010 \text{ Дж};$$



$$W_{э2} = \frac{C_2 u_{C_2}^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 0,015 \text{ Дж.}$$

$$W_{э3} = \frac{C_3 u_{C_3}^2}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 0,025 \text{ Дж.}$$

Общая энергия  $W_э = W_{э1} + W_{э2} + W_{э3} = 10 + 15 + 25 = 50 \text{ мДж}$ . Выполним проверку:

$$W_э = \frac{C_{\text{эк. посл}} u_C^2}{2} = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 0,05 \text{ Дж} = 50 \text{ мДж.}$$

Произведем расчеты, если конденсаторы соединены последовательно (см. рис. 1.6). Рассчитаем эквивалентную емкость  $C_{\text{эк. посл}}$ :

$$1/C_{\text{эк. посл}} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 = 1/2 + 1/3 + 1/5 = 0,5 + 0,3333 + 0,2 = 1,03333 \text{ (1/мкФ)}.$$

$$C_{\text{эк. посл}} = 1/1,03333 = 0,96774 \text{ мкФ.}$$

(Заметим, что если все емкости выражались в микрофарадах, то результирующая емкость получается в тех же единицах, т. е. в микрофарадах.) Рассчитаем заряд всей батареи и, следовательно, каждого конденсатора:

$$Q = C_{\text{эк. посл}} u_C = 0,96774 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 96,774 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} = 96,774 \text{ мкКл.}$$

Рассчитаем напряжение на каждом конденсаторе:

$$u_{C_1} = Q/C_1 = \frac{96,774 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = 48,386 \text{ В;}$$

$$u_{C_2} = Q/C_2 = \frac{96,774 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = 32,259 \text{ В;}$$

$$u_{C_3} = Q/C_3 = \frac{96,774 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}} = 19,355 \text{ В.}$$

Выполним проверку:  $u_{C_1} + u_{C_2} + u_{C_3} = 48,386 + 32,259 + 19,355 = 100 \text{ В}$ .

Рассчитаем энергию каждого конденсатора:

$$W_{э1} = C_1 u_{C_1}^2 / 2 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 48,386^2 / 2 = 2,341 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,341 \text{ мДж;}$$

$$W_{э2} = C_2 u_{C_2}^2 / 2 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 32,259^2 / 2 = 1,561 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,561 \text{ мДж;}$$

$$W_{э3} = C_3 u_{C_3}^2 / 2 = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 19,355^2 / 2 = 0,93654 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 0,93654 \text{ Дж;}$$

$$W_{\text{эк. посл}} = C_{\text{эк. посл}} u_C^2 / 2 = 0,96774 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 / 2 = 4,8386 \text{ мДж.}$$

Произведем проверку:

$$W_{э1} + W_{э2} + W_{э3} = 2,341 + 1,561 + 0,93654 = 4,8386 \text{ мДж.}$$

## 1.9. ПОНЯТИЕ О МИКРОСХЕМАХ

В реальных электронных устройствах кроме конденсаторов используются резисторы и транзисторы, назначение которых будет подробно рассмотрено в следующих главах. Каждая из названных деталей имеет определенные размеры, свои выводы, некоторую массу. Примерно до 60-х годов монтаж

электронной аппаратуры производился в основном из дискретных элементов, т. е. каждая деталь впаивалась отдельно и соединялась или проводником или дорожкой на печатной плате. Такой монтаж был громоздким, недостаточно надежным, потребление мощности устройствами также было значительным. Постепенно размеры деталей стали уменьшать и объединять эти детали в функционально законченные узлы, изготавливаемые в одном корпусе. Подобные изделия получили название микросхем. В настоящее время микросхемы являются основным видом элементов, из которых собирается электронная аппаратура. Современные микросхемы содержат от десятков до нескольких тысяч элементов, имеют малые габариты, высокую надежность. Отличительной особенностью микросхем широкого применения являются малые напряжения, необходимые для нормальной работы. Очень широкий класс микросхем имеет рабочее напряжение 5 В, некоторые микросхемы — до 15 В. Столь малые рабочие напряжения объясняются тем, что толщины диэлектриков в микросхемах чрезвычайно малы и измеряются в ряде случаев единицами микрометра (т. е. тысячными долями миллиметра). Пробивные напряжения у многих микросхем менее 10 В.

В современной электронной аппаратуре микросхемы играют доминирующую роль, поэтому учащимся следует уметь обращаться с этими деталями, не причиняя им порчи. В частности, следует паять выводы микросхем только низковольтными паяльниками (с напряжением не свыше 36 В), опасаться прикосновения статически заряженных тел.

#### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие Вам известны способы получения положительных и отрицательных зарядов?
2. Каково соотношение зарядов в 1 Кл и заряда электрона?
3. Каким образом взаимодействуют заряженные тела? В каких единицах выражается сила взаимодействия?
4. Напишите выражение закона Кулона и объясните физическое значение каждого множителя данного уравнения.
5. Какие свойства электрического поля Вы знаете? Приведите примеры.
6. Как рассчитать напряженность электрического поля? Как определить направление вектора напряженности в каждой точке электрического поля?
7. Что называется потенциалом и напряжением? В каких единицах эти величины измеряются? Приведите примеры.
8. Дайте определение напряжению в 1 В.
9. Докажите, что напряженность электрического поля измеряется в вольтах на метр.
10. Что называется электрической емкостью и конденсатором? Какая разница между этими понятиями? В каких единицах измеряется емкость?
11. Каким соотношением связаны между собой напряжение, заряд и емкость в конденсаторах?
12. Докажите, что диэлектрическая проницаемость имеет размерность фарад на метр.
13. Каков физический смысл относительной диэлектрической проницаемости материала? Приведите примеры.
14. Что называется "пробивным" и "номинальным" напряжением конденсатора?
15. Какие материалы используют в качестве диэлектрика в керамических конденсаторах?
16. От каких физических величин зависит энергия электрического поля? Как считать эту энергию?

17. Как рассчитать эквивалентную емкость конденсаторов, соединенных: а) параллельно; б) последовательно? Приведите примеры.

18. В чем состоят достоинства микросхем? Почему у этих деталей малые пробивные напряжения?

## Глава 2.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

### 2.1. ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Как было показано в гл. 1, разность потенциалов двух различных точек называется электрическим напряжением, которое для краткости называют просто "напряжением", поскольку теория электрических цепей изучает в основном электрические явления или процессы. Следовательно, если некоторым образом создать две области, потенциалы которых отличаются друг от друга, то между ними появится напряжение  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы областей того устройства, в котором за счет затраты некоторой неэлектрической энергии образуются электрические потенциалы с неодинаковыми значениями. Например, в сухом элементе имеются различные химические вещества — уголь, цинк, агломерат и другие. В результате химических реакций затрачивается энергия (в данном случае химическая), но взамен в элементе появляются зоны с различным количеством электронов, что вызывает неодинаковые потенциалы в тех частях элемента, где находятся угольный стержень и цинковый стаканчик. Следовательно, между выводами, от угольного стержня и цинкового стаканчика, оказывается напряжение. Это напряжение в разомкнутых зажимах источника называется *электродвижущей силой* (сокращенно ЭДС). Таким образом, ЭДС — это тоже напряжение, но при вполне определенных условиях. Электродвижущая сила измеряется в тех же единицах, что и напряжение, а именно — в вольтах (В) или дольных единицах — милливольт (мВ), микровольтах (мкВ), причем  $1 \text{ мВ} = 10^{-3} \text{ В}$ , а  $1 \text{ мкВ} = 10^{-6} \text{ В}$ .

Термин "ЭДС", сложившийся исторически, строго говоря, неточен, поскольку ЭДС имеет размерность напряжения, а вовсе не силы, поэтому от него в последнее время отказываются, заменяя терминами "внутреннее напряжение" (т. е. напряжение, возбуждаемое внутри источника) или "опорное напряжение". Поскольку термин "ЭДС" употребляется во множестве книг и ГОСТами не упразднен, в данном учебнике будем им пользоваться.

Следовательно, *электродвижущая сила источника (ЭДС) есть разность потенциалов, образующаяся внутри источника в результате затраты каких-то видов энергии.*

Иногда говорят, что ЭДС в источнике образуется сторонними силами, под которыми понимаются воздействия неэлектрического характера. Так, в генераторах, установленных на промышленных электростанциях, ЭДС образуется за счет затраты механической энергии, например энергии падающей воды, сжигаемого топлива и т. д. В настоящее время все более широкое распространение получают солнечные батареи, в которых световая энергия преобразуется в электрическую, и т. д.



В технике связи, радиоэлектронике и других отраслях техники электрические напряжения получают от специальных электронных устройств, называемых генераторами сигналов, в которых энергия промышленной электрической сети преобразуется в различные напряжения, снимаемые с выходных зажимов. Таким образом, генераторы сигналов потребляют электрическую энергию от промышленной сети, а выдают напряжения также электрического вида, но с совершенно иными параметрами, которые нельзя получить непосредственно от сети.

Важнейшей характеристикой любого напряжения является его зависимость от времени. В общем случае генераторы создают напряжения, значения которых изменяются при изменении времени. Это означает, что в каждый момент напряжение на выходных зажимах генератора оказывается различным. Такие напряжения называются *переменными*, в отличие от *постоянных*, значения которых остаются неизменными при изменении времени. Следует помнить, что передать какую-либо информацию (речь, музыку, телевизионное изображение, цифровые данные и т. д.) с помощью постоянных напряжений принципиально невозможно, а так как техника связи предназначена именно для передачи информации, то основное внимание в нашем курсе будет уделяться рассмотрению сигналов, изменяющихся во времени.

Напряжения в каждый момент времени называют *мгновенными*. Мгновенные значения напряжения в общем случае являются переменными, зависящими от времени, и обозначаются малыми (строчными) буквами  $u(t)$ , или, короче, —  $u$ . Совокупность мгновенных значений образует *форму сигнала*. Например, если в интервале от  $t = 0$  до  $t = t_1$  напряжения возрастают пропорционально времени, а в интервале от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  — убывают по такому же закону (рис. 2.1, а), то такие сигналы имеют треугольную форму. Очень важными в технике связи являются сигналы прямоугольной формы. У таких сигналов (рис. 2.1, б) напряжение в интервале от  $t_0$  до  $t_1$  равно нулю, в момент  $t_1$  скачком возрастает до максимального значения, в интервале от  $t_1$  до  $t_2$  остается неизменным, в момент  $t_2$  скачком уменьшается до нуля и т. д.

Электрические сигналы делятся на периодические и непериодические. *Периодическими* называют сигналы, мгновенные значения которых повторяются через одно и то же время, называемое периодом  $T$ . *Непериодические* сигналы появляются только один раз и более не повторяются. Например, на рис. 2.1, а и 2.1, б показаны непериодические сигналы треугольной и прямоугольной форм, а на рис. 2.2, а и б — периодические сигналы этих же форм. Законы, которым подчиняются периодические и непериодические сигналы,

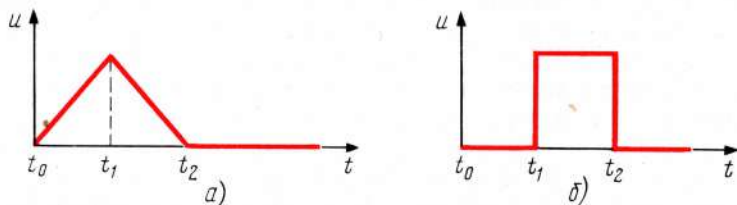


Рис. 2.1

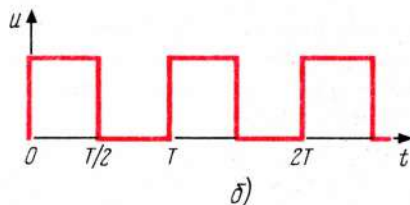
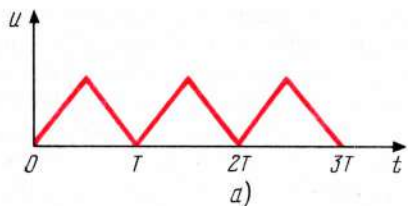


Рис. 2.2

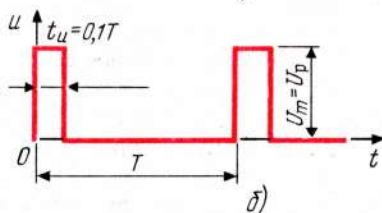
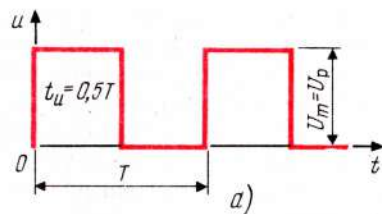


Рис. 2.3

весьма различны. Многие из них, будучи совершенно правильными для периодических сигналов, оказываются совершенно несправедливыми для непериодических и наоборот. Изучение непериодических сигналов требует значительно более сложного математического аппарата, чем для изучения периодических, поэтому в гл. 2 — 11 будут рассматриваться только периодические процессы.

Очень важными являются сигналы прямоугольной формы с паузами между импульсами, или, как их называют, "посылками" (от понятия "посылать сигналы"). Такие сигналы характеризуются *скважностью*, т. е. отношением времени периода  $T$  ко времени посылки  $t_{\text{и}}$ :

$$S = T/t_{\text{и}}.$$

Например, если время паузы равно времени импульса, т. е. посылка происходит в течение половины периода, то скважность  $S = T/t_{\text{и}} = T/0,5T = 2$ , а если время посылки составляет одну десятую часть периода, то  $S = T/t_{\text{и}} = T/0,1T = 10$  (рис. 2.3, а, б) и т. д.

Для визуального наблюдения формы напряжения используют измерительные приборы, называемые *осциллографами*. Осциллограф (так же, как и телевизор) имеет электронно-лучевую трубку, на экране которой электронный луч прочерчивает кривую того напряжения, которое подведено к входным зажимам осциллографа. При обычном включении осциллографа кривые на его экране получаются в функции времени, т. е. луч прочерчивает изображения, аналогичные показанным на рис. 2.2, а — 2.3, б. Если в одной электронно-лучевой трубке имеются устройства, создающие два луча и, таким образом, позволяющие наблюдать сразу два изображения, то такие осциллографы называются *двухлучевыми*. Двухлучевые осциллографы имеют две пары входных зажимов, называемые входами первого и второго каналов. Двухлучевые осциллографы значительно совершеннее однолучевых: с их помощью можно наглядно сравнивать процессы в двух различных устройствах, на входных и выходных зажимах одного устройства, а также

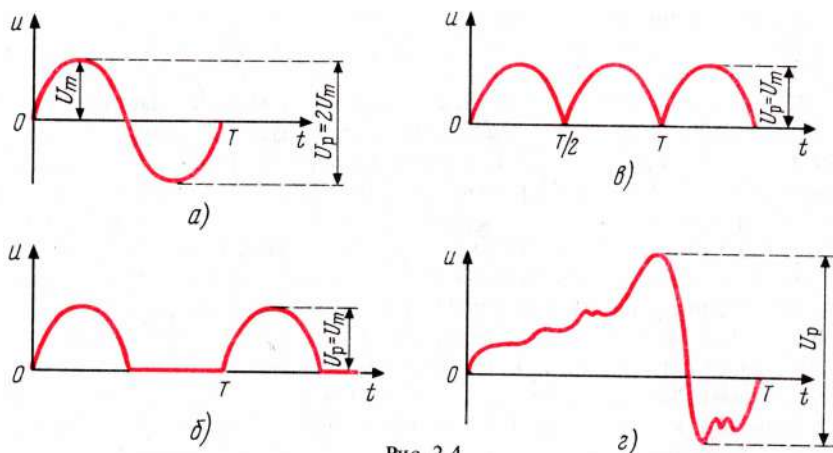


Рис. 2.4

производить ряд весьма интересных экспериментов. Осциллограф является наиболее совершенным измерительным прибором, используемым в электронной технике, с его помощью можно определять форму сигналов, измерять напряжения, частоты, фазовые сдвиги, наблюдать спектры, сравнивать процессы в различных цепях, а также производить целый ряд измерений и исследований, которые будут рассмотрены в последующих разделах. (Подробное устройство осциллографа и правила работы с ним приводятся в лабораторном практикуме по теории электрических цепей.)

Разность между наибольшим и наименьшим мгновенными значениями называется *размахом напряжения*  $U_p$  (большая буква указывает на то, что описывается величина, постоянная во времени, а индекс "р" означает слово "размах"). Может быть использовано также обозначение  $U_e$ ). Таким образом, на экране осциллографа наблюдатель видит форму исследуемого напряжения и его размах. Например, на рис. 2.4, а приведена кривая напряжения синусоидальной формы, на рис. 2.4, б — однополупериодной, на рис. 2.4, в — двухполупериодной, на рис. 2.4, г — сложной формы. Если кривая симметрична относительно горизонтальной оси, как, например, на рис. 2.4, а, то половину размаха называют максимальным значением и обозначают  $U_m$ . Если кривая односторонняя, т. е. все мгновенные значения имеют один и тот же знак, например положительный, то размах равен максимальному значению, в этом случае  $U_m = U_p$  (см. рис. 2.3, а, 2.3, б, 2.4, б, 2.4, в). Таким образом, в технике связи основными характеристиками напряжений являются: *период, форма, размах*; при любых экспериментах, расчетах, исследованиях следует, прежде всего, иметь представление об этих величинах: Разберем подробнее свойства сигналов, изменяющихся по синусоидальному закону (гармонических), постоянных по времени и прямоугольных.

## 2.2. ПОНЯТИЯ О СИГНАЛАХ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

*Синусоидальным* называется сигнал, у которого мгновенное значение пропорционально синусу той части периода, в которой оно отсчитывается.



Напомним, что  $\sin 0^\circ = 0$ ;  $\sin 45^\circ = 0,707$ ;  $\sin 60^\circ = 0,87$ ;  $\sin 90^\circ = 1$ ;  $\sin 120^\circ = 0,87$ ;  $\sin 150^\circ = 0,5$ ;  $\sin 180^\circ = 0$ ;  $\sin 210^\circ = -0,5$ ;  $\sin 240^\circ = -0,87$ ;  $\sin 270^\circ = -1$ ;  $\sin 300^\circ = -0,87$ ;  $\sin 330^\circ = -0,5$ ;  $\sin 360^\circ = 0$  и т. д. Таким образом, у синусоиды, т. е. кривой, мгновенные значения которой изменяются по синусоидальному закону, нулевые значения оказываются в начальный момент ( $0^\circ$ ), в середине периода ( $180^\circ$ ), и в последний момент периода ( $360^\circ$ ). Максимальное значение будет спустя время, равное  $1/4$  периода, т. е.  $90^\circ$ , в этом случае  $\sin 90^\circ = 1$ , минимальное — через  $3/4$  периода, т. е.  $270^\circ$  ( $\sin 270^\circ = -1$ ) и т. д. Синусоидальная кривая, построенная по точкам, показана на рис. 2,5, а. Если начало координат сдвинуть на четверть периода, то получится косинусоида (рис. 2.5, б), а если на произвольную часть периода, то кривые, занимающие промежуточные положения между синусоидой и косинусоидой. Кривые, у которых при произвольном смещении вертикальной оси начала координат можно получить синусоиду или косинусоиду, называются *гармоническими*. Таким образом, понятие "гармоническая кривая" — более общее, чем "синусоида" или "косинусоида", которые являются частными случаями кривых, изменяющихся по гармоническому закону. Примеры кривых гармонической формы показаны на рис. 2.5, в. Любые сигналы гармонической формы характеризуются *частотой*  $f$ , причем под частотой понимается величина, обратная периоду, т. е.  $f = 1/T$ . Если период выражать в секундах (с), то частота получается в герцах (Гц), если в миллисекундах (мс), то в килогерцах (кГц), если в микросекундах (мкс), то в мегагерцах (МГц), и т. д. Все сигналы гармонической формы обладают весьма важным свойством: *каждый из этих сигнала-*

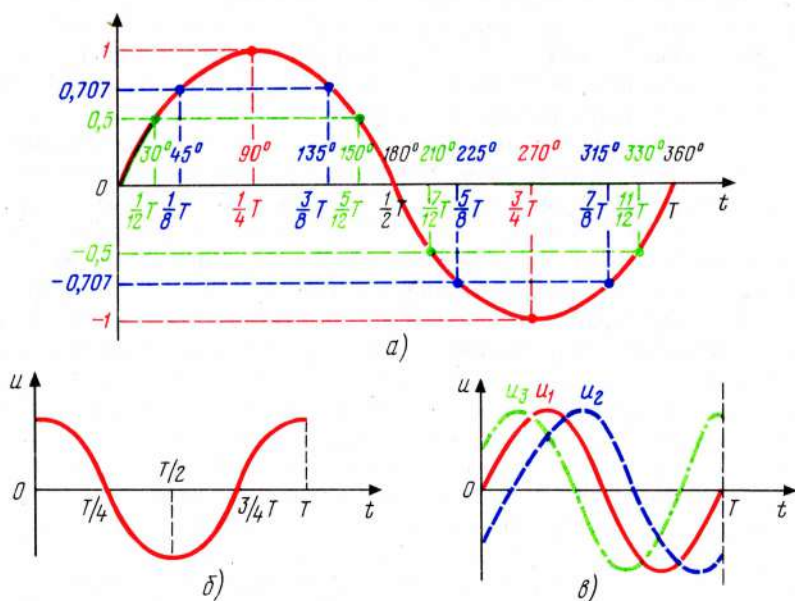


Рис. 2.5



лов состоит только из одной частоты, равной  $1/T$ . Сигналы, отличные от гармонических, в общем случае, состоят из большего количества частот, поэтому термин "частота" относится только к гармоническим сигналам и ни к каким более. Любые сигналы, отличные от гармонических, не могут характеризоваться частотой (поскольку эти сигналы состоят не из одной, а из нескольких частот), а характеризуются только периодом. Для гармонических сигналов применимы оба понятия, т. е. и период, и частота. Чтобы получить сигналы негармонической формы, например показанные на рис. 2.2, а . . . 2.3, б, 2.4, б . . . 2.4, г, необходимо сложить несколько гармонических сигналов с различными частотами и амплитудами. В зависимости от числа составляющих и их параметров, получаются сигналы различных форм. Важное правило: *все гармонические сигналы состоят только из одной частоты, все отличные от гармонических — из нескольких частот.*

Поскольку гармонические сигналы состоят из одной частоты, с помощью таких сигналов можно передать энергию, но невозможно передать какую-либо информацию.

И еще одно свойство, которое состоит в следующем:

производная и интеграл от гармонической функции есть также гармоническая функция. Действительно, если  $y = \sin x$ , то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x; \int \sin x dx = -\cos x.$$

Таким образом, если гармонический сигнал проходит обработку, выполняемую по закону производной или интеграла, то никаких дополнительных частот не появляется и, следовательно, получившиеся после обработки сигналы также не пригодны для передачи какой-либо информации.

Напряжение в любой момент  $u$  для сигналов синусоидальной формы определяется по формуле  $u = U_m \sin \omega t$ , где  $U_m$  — наибольшее из всех мгновенных значений;  $\omega$  — угловая частота, причем  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ . (Подробнее об угловой частоте см. в разделе "Гармонические колебания".)

### 2.3. СИГНАЛЫ, НЕИЗМЕННЫЕ ВО ВРЕМЕНИ

Если значения напряжений источника в любой момент остаются неизменными, то такие источники называются *источниками постоянных напряжений* (а не источниками постоянного тока, как их иногда неверно называют; об источниках тока см. в § 3.30). В источниках постоянных напряжений  $u = U_m = U_p$  (рис. 2.6). Подобные источники используются почти в каждом радиотехническом или связном устройствах для создания условий, при которых могут нормально работать различные электронные элементы (транзисторы, операционные усилители, микросхемы, реле и прочее). Приведем несколько примеров из бытовой практики. Хорошо известно, что для работы переносного магнитофона в него следует вложить и подключить соответствующим образом несколько сухих элементов. Энергия от этих элементов, представляющих источники постоянного напряжения, вращает мотор лентопротяжного механизма, создает в транзисторах такие поля, при которых эти транзисторы становятся способными усиливать переменные напряжения, появляющиеся в "головках" (специальных катушках) магни-

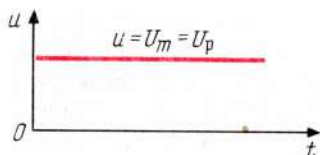


Рис. 2.6

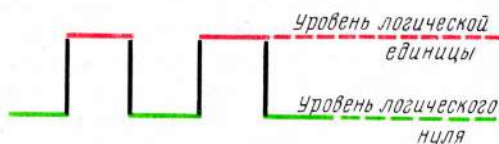


Рис. 2.7

тофона при движении магнитной ленты. Аналогично обстоит дело с портативными радиоприемниками и другой электронной аппаратурой. Постоянные напряжения необходимы для работы микросхем в электронных калькуляторах и иных вычислительных устройствах. Многие типы часов получают энергию не от заведенной пружины, а от миниатюрной батарейки. Перечень таких примеров можно продолжить. Источники постоянных напряжений сами не способны передавать информацию, но без них не могут работать устройства, предназначенные для создания, обработки и передачи информации электрическим способом.

#### 2.4. СИГНАЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Сигналы прямоугольной формы чрезвычайно широко используются в технике связи. Комбинации прямоугольных сигналов с различными характеристиками позволяют передавать информацию самого различного вида, например с помощью азбуки Морзе, телеграфного кода Бодо и других. Без прямоугольных импульсов невозможно осуществлять синхронизацию (т. е. сделать изображение неподвижным) при передаче телевидения. Работа вычислительных машин также основывается на использовании прямоугольных сигналов. Эти сигналы широко применяются в радиолокации, радиоастрономии, средствах автоматики, телемеханики и множестве иных электронных устройств. Сигналы прямоугольной формы имеют только два устойчивых состояния — минимального напряжения и максимального. Минимальное напряжение часто бывает нулевым (хотя это и не обязательно), а максимальное — на некоторое значение больше минимального. При использовании сигналов прямоугольной формы в ряде случаев применяют особую терминологию. Минимальное значение называют *логическим нулем*, а максимальное — *логической единицей*. Например, у сигнала прямоугольной формы напряжение изменяется от 0 до 5 В. Состояние, при котором напряжение равно 0, представляет логический нуль, а 5 В — логическую единицу. Если, например, напряжение изменяется от  $-1$  до  $+4$  В, то в этом случае напряжение  $-1$  В есть логический нуль, а  $+4$  В — логическая единица. Аналогично при изменении напряжения от  $-12$  до  $+12$  В первое напряжение будет логическим нулем, а второе — логической единицей (рис. 2.7).

#### 2.5. ВРЕМЕННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Каждая ЭДС или напряжение имеют определенную форму. О форме сигналов, а следовательно, и о его свойствах можно судить либо по временной, либо по спектральной характеристике этого сигнала. Временная харак-



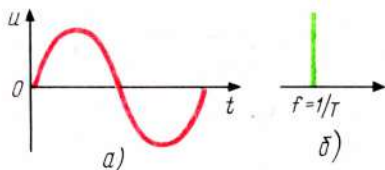


Рис. 2.8

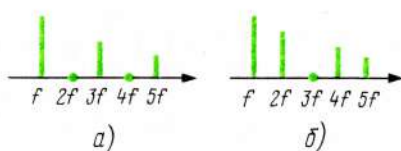


Рис. 2.9

характеристика представляет кривую, выполненную в зависимости от времени и показывающую значения ЭДС или напряжений в различные моменты. Иначе говоря, временная характеристика — есть кривая мгновенных значений. Например, графики, показанные на рис. 2.2 — 2.5, представляют типичные временные характеристики различных электрических сигналов. Спектральные характеристики показывают, из каких частот состоит электрический сигнал данной формы. Спектральные характеристики сигналов удобно наблюдать на экране прибора, похожего на осциллограф (а иногда и совмещенного с ним) и называемого анализатором спектра. По горизонтальной оси в анализаторе спектра откладывается не время, как в осциллографе, а частота, по вертикальной оси — размах напряжения. На частотах, из которых состоит подведенное ко входу анализатора спектра напряжение, будут прочерчиваться светящиеся вертикальные линии, длина каждой из которых пропорциональна размаху напряжения на данной частоте. Например, спектр синусоидального сигнала состоит из одной спектральной линии, находящейся на частоте  $f = 1/T$  (где  $T$  — период синусоидального сигнала) с длиной, пропорциональной размаху синусоидального напряжения. Временной и спектральные графики синусоидального напряжения показаны соответственно на рис. 2.8, а и б.

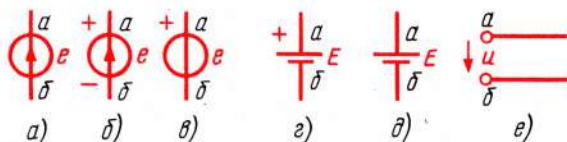
Всякий сигнал негармонической формы состоит из нескольких частот и поэтому спектры сигналов имеют несколько спектральных линий. Например, сигнал прямоугольной формы со скважностью 2 (см. рис. 2.3, а) имеет спектр, показанный на рис. 2.9, а, а со скважностью 3 спектр приобретает вид, показанный на рис. 2.9, б. Таким образом, сигналу каждой формы соответствует свой спектр, и, наоборот, каждому спектру — своя временная форма. Следует твердо помнить важное правило: *спектр гармонических сигналов состоит из одной спектральной линии, а спектр сигналов, отличных от гармонического — из нескольких. Длина спектральной линии гармонического сигнала зависит от размаха сигнала, спектр которого определяется.*

Постоянные напряжения спектром не обладают. Заметим также, что вольтметры не могут дать представление ни о форме сигнала, ни о его спектре.

## 2.6. СМЫСЛ ЗНАКОВ "+" И "—" У ИСТОЧНИКОВ

У каждого источника как постоянного, так и переменного, на схемах должно быть показано направление ЭДС, т. е. даваться указание, из которого однозначно следует, потенциал какой точки источника в данный момент выше, а какой ниже. Сразу обратим внимание, что источники и постоян-

Рис. 2.10



ного, и переменного напряжений при изучении теории электрических цепей на схемах в общем случае, обозначаются одинаково. Обозначений источников напряжения несколько, на рис. 2.10 приведены наиболее употребительные. На рис. 2.10, а показано общее обозначение источника напряжения. Стрелка внутри кружка направлена к точке, потенциал которой в данный момент выше потенциала точки, от которой исходит стрелка. Таким образом, потенциал точки а в рассматриваемый момент выше потенциала точки б. Иногда к стрелке добавляют знаки "+" и "-" (или только знак "+"), как показано на рис. 2.10, б, в.

Еще раз обращаем внимание на то, что все показанные обозначения, в том числе знаки "плюс" и "минус", ни в коей мере не свидетельствуют об источниках постоянного напряжения. Данные обозначения являются универсальными, пригодными для обозначения источников напряжения сколь угодно сложной формы, но в некоторый определенный момент. Разница между источниками постоянного и переменного напряжения состоит только в том, что у источника постоянного напряжения соотношения значений потенциалов остаются неизменными для любого момента, а у источника переменного напряжения — с изменением времени изменяются. В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть, что в качестве источника следует использовать только сухие элементы или аккумуляторы, используются обозначения рис. 2.10, г, д. На рис. 2.10, е показано обозначение не ЭДС  $\mathcal{E}$ , а напряжения  $u$ . Данное обозначение является также универсальным, пригодным для обозначения некоторого мгновенного напряжения. Стрелка между зажимами направлена от точки, потенциал которой в данный момент выше, к точке, потенциал которой ниже, т. е. имеет направление, обратное направлению ЭДС. Таким образом, при обозначении, показанном на рис. 2.10, е, потенциал точки а выше потенциала точки б.

## 2.7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

В каждом металлическом проводнике имеются свободные электроны. Если на зажимах проводника электрическое напряжение отсутствует, то электроны в проводнике движутся хаотически, в различных направлениях, причем движения одних электронов компенсируются движением других. Никакого упорядоченного движения электронов в этом случае не происходит. Если на зажимах проводника создать потенциалы с различными значениями, например путем подключения источника с ЭДС  $\mathcal{E}$ , то в проводнике появляются электрические поля, создающие упорядоченное движение электронов. При этом в каждом сечении проводника за единицу времени переносятся электрические заряды определенной величины.

Упорядоченное движение электронов, при котором происходит перенос электрических зарядов из одной точки проводника в другую, называется *электрическим током*, или просто *током*, как обыкновенно говорят для



краткости. Единицей тока является ампер (А) — по имени французского ученого Н. М. Ампера (1775 — 1836), члена Петербургской АН (1830 г.). Следовательно, чтобы определить значение тока, необходимо знать изменение заряда за определенное время. Если ток не изменяется во времени, то такой ток называется постоянным, а если изменяется, то переменным.

Ток, так же, как и напряжение, характеризуется мгновенными значениями  $i$ , размахом  $I_p$ , максимальным значением  $I_m$ . При постоянном токе  $I = Q/t$ , при переменном мгновенные значения тока  $i$  точно определяются из выражения  $i = dq/dt$ , а приближенно  $i = \Delta Q/\Delta t$ , где  $\Delta Q$  — конечное изменение заряда за конечное время  $\Delta t$ , а  $dq/dt$  — первая производная заряда по времени, т. е. приращение бесконечно малого заряда за бесконечно малое время. Чем меньше значения  $\Delta Q$  и  $\Delta t$ , тем точнее определяется ток в данный момент. Можно также сказать, что ток численно равен скорости изменения электрического заряда во времени.

Таким образом, электрический ток физически представляет движение отрицательно заряженных частиц, однако исторически сложилось, что за положительное направление тока в проводниках принимают направление движения не электронов, а положительно заряженных частиц, т. е. положительное направление тока — направление, противоположное направлению движения электронов. Направление тока на схемах показывают стрелками. Сделаем два пояснения. Читая о движении электронов или положительно заряженных частиц, учащиеся иногда считают, что электроны (или иные частицы) чисто физически перемещаются из одного места проводника в другое, иногда даже считают, что электроны, находившиеся ранее в одном конце проводника, по мере протекания тока оказываются в противоположной стороне этого проводника. Такое представление совершенно неверно. Перемещаются не сами частицы, а их взаимодействия. Представим себе, что в ряд уложены шарики одинакового размера, касающиеся друг друга (рис. 2.11). Пусть некоторый отдельный шарик ударит по последнему шарiku ряда. Собственно последний шарик переместится при этом на весьма небольшое расстояние и вовсе не станет на место предыдущих шаров, но удар от последнего шарика очень быстро пройдет по всей цепочке и дойдет до самого первого шара. И если толчки в конце ряда будут происходить по некоторому закону, то во всей цепи шаров, в том числе и в первом, будут ощущаться воздействия того же характера, что и воздействия в конце ряда шаров. Нечто подобное происходит и в реальных проводниках при подключении к зажимам источника напряжения. Собственно частицы металла перемещаются совершенно незначительно, но импульсы бегут по проводнику очень быстро, в обычных условиях со скоростью, близкой к скорости света, т. е.  $300\,000\text{ км/с} = 3 \times 10^8\text{ м/с}$ . Еще одно пояснение. Электрический ток, протекающий в проводниках, называется током проводимости, на том основании, что металлические материалы способны проводить электрический ток, т. е. образно говоря, выстраивать цепочку частиц, касающихся друг друга и способных передавать "толчки" тока от одной частицы к другой.



Рис. 2.11

Однако свободные электроны создают и определенные препятствия для передачи таких "электрических толчков". Поскольку в каждой точке проводника имеют место не только упорядоченные перемещения, порожденные напряжением, приложенным к зажимам проводника, но и хаотические, обусловленные свойствами самого проводника, протекание тока по проводнику затрудняется, проводник оказывает препятствие для прохождения тока. Свойство материалов оказывать препятствие протекающему току и тем самым ослаблять этот ток, называется *электрическим сопротивлением* (или просто *сопротивлением*) проводника или материала. Электрическое сопротивление обозначают большой буквой  $R$ , но иногда и малой  $r$ . Сопротивление измеряется в омах, по имени известного немецкого физика Георга Ома (1787 – 1854). Как всякая единица, названная именем ученого, единица сопротивления записывается сокращенно с большой буквы – Ом. Широкое распространение имеют производные единицы – кОм, т. е.  $10^3$  Ом (читается "килоом") и МОм, т. е.  $10^6$  Ом (читается "мегаом").

## 2.8. УДЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДНИКОВ

Сопротивление проводников определяется свойствами материала, из которого данный проводник изготовлен. Чтобы сравнивать материалы по их способности оказывать сопротивление электрическому току, вводится понятие удельного сопротивления, обозначаемого греческой буквой  $\rho$  (читается "ро"). *Удельным сопротивлением* называется сопротивление проводника длиной 1 м с сечением 1 м<sup>2</sup>, откуда

$$R = \rho l / S, \quad (2.1)$$

а  $\rho = RS/l$ , причем  $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}^2 / \text{м} = \text{Ом} \cdot \text{м}$ , где  $R$  – сопротивление проводника, Ом;  $l$  – длина проводника, м;  $S$  – сечение проводника, м<sup>2</sup>.

Следует заметить, что единица Ом · м, будучи полученной по принципам единой международной системы единиц СИ (читается "ЭС–И", а не "СИ"), для некоторых практических целей оказывается не совсем удобной, поскольку квадратный метр – слишком большое сечение. Поэтому в справочных таблицах удельное сопротивление часто выражают не в Ом · м, а в Ом · мм<sup>2</sup>/м, т. е. площадь выражают не в м<sup>2</sup>, а в квадратных миллиметрах, причем площадь 1 мм<sup>2</sup> в  $10^6$  меньше площади, 1 м<sup>2</sup>. Например,  $\rho_{\text{меди}} = 0,0175 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м} = 0,0175 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$ . Если  $\rho$  выражается в Ом · м, то

сечение  $S$  в формуле  $R = \rho l / S$  следует брать в м<sup>2</sup>, а если в Ом · мм<sup>2</sup>/м, то в мм<sup>2</sup>. Проводники чаще всего имеют круглое сечение. Напомним, что площадь такого сечения (т. е. площадь круга) определяется из выражения  $S_{\text{круга}} = \pi D^2 / 4$ , где  $\pi = 3,14$  – постоянная величина, а  $D$  – диаметр проводника. Если  $D$  выражать в мм, то  $S$  получается в мм<sup>2</sup>.

**Пример 2.1.** Определить сопротивление проводника из нихрома длиной 10 м сечением 0,1 мм<sup>2</sup>, если удельное сопротивление нихрома (специального сплава, используемого в электронагревательных приборах) 1,1 Ом · мм<sup>2</sup>/м.

**Решение.**  $R = \rho l / S = 1,1 \cdot 10 / 0,1 = 110 \text{ Ом}$ .

**Пример 2.2.** Рассчитать сопротивление тысячи витков медного провода диаметром 0,2 мм, намотанного на катушке со средним диаметром 6 см.

**Решение.** Определим длину провода. (Напомним, что длина одного витка  $l_0 = \pi D_K$ , где  $D_K$  – диаметр каркаса катушки, на которую наложена обмотка).

$$l_0 = \pi D_K = 3,14 \cdot 0,06 = 0,01884 \text{ м.}$$

(Обратите внимание, длина провода в формуле должна выражаться в метрах, поэтому и диаметр каркаса катушки должен выражаться также в метрах: 6 см = 0,06 м.) Рассчитаем длину проводника, намотанного на катушке, по формуле  $l = l_0 N$ , где  $N$  – число витков  $l = 0,01884 \cdot 1000 = 18,84 \text{ м.}$

Рассчитаем сечение проводника:  $S = \pi D_{\text{пр}}^2 / 4$ , где  $D_{\text{пр}}$  – диаметр проводника;  $S = 3,14 \cdot 0,2^2 / 4 = 0,0314 \text{ мм}^2$ .

Рассчитаем сопротивление катушки:

$$R = \rho l / S = 0,0175 \cdot 18,84 / 0,0314 = \frac{1,75 \cdot 10^{-2} \cdot 1,884 \cdot 10}{3,14 \cdot 10^{-2}} = 10,5 \text{ Ом.}$$

## 2.9. РЕЗИСТИВНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ПРОВОДИМОСТИ

Электрическому току при протекании через проводники или иные тела приходится преодолевать сопротивление, на что затрачивается энергия. Энергия, как известно, не исчезает, а только переходит из одного вида в другой, в данном случае электрическая энергия переходит в тепловую.

Таким образом, если по проводнику (или по иному телу), обладающему электрическим сопротивлением, протекает ток, то в этом проводнике (теле) выделяется тепло.

*Свойство проводника (тела) преобразовывать электрическую энергию в тепловую называется резистивным сопротивлением. Резистором называется деталь, обладающая этим сопротивлением.*

До сравнительно недавнего времени (примерно до начала 80-х годов) резистивные сопротивления называли "активными". В настоящее время термин "активный" относится к элементам совершенно иного вида, о чем будет подробно сказано в последующих разделах.

Резисторы на схемах обозначаются незаштрихованными прямоугольниками (рис. 2.12). Физическая величина, обратная сопротивлению, называется *проводимостью*. В резистивных цепях проводимость  $G = 1/R$ . Проводимость измеряют в сименсах (См) – по имени немецкого электротехника Э. В. Сименса (1816 – 1892), чл.-кор. Петербургской АН (1882 г.). Величина, обратная удельному сопротивлению, называется *удельной проводимостью*, обозначается  $\gamma$  (читается "гамма") и определяется из выражения  $\gamma = 1/\rho$ . Удельная проводимость измеряется в  $1/\text{Ом} \cdot \text{м}$  или  $\text{мм}^2/\text{Ом} \cdot \text{м}$ , например,  $\gamma_{\text{меди}} = 1/0,0175 \cdot 10^{-6} = 57,14 \cdot 10^6 \text{ } 1/\text{Ом} \cdot \text{м}$ , или  $57,14 \text{ мм}^2/\text{Ом} \cdot \text{м}$ ,  $\gamma_{\text{серебра}} = 1/0,016 \cdot 10^{-6} = 62,5 \cdot 10^6 \text{ } 1/\text{Ом} \cdot \text{м}$  или  $62,5 \text{ мм}^2/\text{Ом} \cdot \text{м}$  и т. д.

## 2.10. ВНУТРЕННЕЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ИСТОЧНИКА

Все физически существующие тела обладают сопротивлением электрическому току. Источники, или преобразователи электрической энергии, также обладают сопротивлением, называемым внутренним и обозначаемым  $R_i$  (иногда  $r$ ). Внутреннее сопротивление источников – весьма важная фи-

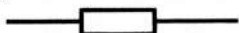


Рис. 2.12



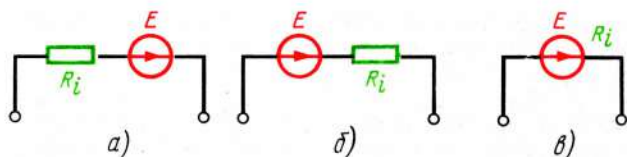


Рис. 2.13

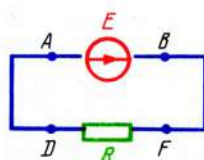


Рис. 2.14

зическая величина, в большой степени определяющая свойства этих источников. Физически внутреннее сопротивление находится внутри источника, но на схемах и чертежах оно, как правило, показывается отдельным сопротивлением около источника (рис. 2.13, а и б). Для изучения электрических процессов место включения внутреннего сопротивления (т. е. до стрелки источника или после нее) не имеет никакого значения. В ряде случаев внутреннее сопротивление на схемах не обозначают, а только указывают его значение (рис. 2.13, в).

У некоторых генераторов сигналов имеется специальный переключатель, позволяющий изменять внутреннее сопротивление генератора. У сухих элементов и аккумуляторов по мере их разряда внутреннее сопротивление возрастает. Чем больше габариты имеют сухие элементы, тем при прочих равных условиях меньше их внутреннее сопротивление.

## 2.11. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

*Электрической цепью называется совокупность элементов и устройств, образующих путь или пути для электрического тока.* Понятие "цепь" в настоящее время чрезвычайно широкое. Цепи могут быть весьма простыми, например источник напряжения, соединительные проводники и резистивное сопротивление (рис. 2.14), но могут быть и весьма сложными, например телевизор, содержащий сотни деталей. Термин "цепь" (слово "электрическая" в большинстве случаев опускается) никак не отражает сложность цепи. Им пользуются для анализа устройств самой различной сложности. Разумеется, сложные цепи могут быть разбиты на ряд более простых.

В цепях чаще всего выделяют источники электрической энергии и потребители этой энергии. Элементы, потребляющие или преобразовывающие определенным образом энергию источников, называют по-разному: нагрузкой, приемником и т. д. При расчетах различных цепей сопротивления соединительных проводников полагают равными нулю, поэтому при перемещении на схемах вдоль соединительных проводников потенциалы не изменяются. Так, в схеме рис. 2.14 потенциал точки А равен потенциалу точки D, а потенциал точки В — потенциалу точки F.

## 2.12. ПОНЯТИЕ О ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЯХ

Все резисторы делятся на линейные и нелинейные. *Линейными* называют резисторы, сопротивления которых не зависят (т. е. не изменяются) от значения протекающего тока или приложенного напряжения. В аппаратуре



связи и других электронных устройствах (радиоприемниках, транзисторах, магнитофонах и т. п.) широко используются малогабаритные линейные резисторы, например типа МЛТ (металлизированные, лакированные, термостойкие). Сопротивление этих резисторов остается неизменным при изменении приложенных к ним напряжений или протекающих через них токов и поэтому данные резисторы являются линейными.

*Нелинейными* называются резисторы, сопротивление которых изменяется в зависимости от значения приложенного напряжения или протекающего тока. Так, сопротивление осветительной лампы накаливания при отсутствии тока в 10–15 раз меньше, чем при нормальном горении. К нелинейным элементам относятся многие полупроводниковые приборы, о чем будет сказано ниже, в последующих главах.

Экспериментально было установлено, что *в линейных резистивных цепях мгновенные напряжения и токи пропорциональны друг другу*. Это означает, что при изменении напряжения в некоторое число раз ток в цепи изменяется в такое же число раз и, следовательно, форма тока, протекающего в цепи, повторяет форму напряжения, приложенного к этой цепи. Например, если к резистивной цепи приложено напряжение треугольной формы, то ток будет также треугольной формы, постоянное во времени напряжение вызывает постоянный во времени ток и т. д.

Таким образом, *в линейных резистивных цепях форма тока повторяет форму напряжения, вызвавшего этот ток*.

Могут возникнуть вопросы: "А разве не очевидно, что ток и напряжение имеют одну и ту же форму? Разве такое само собой не разумеется? Почему это обстоятельство следует оговаривать особо?". Ответим сразу на эти вопросы. Дело в том, что форма тока повторяет форму напряжения только в одном частном случае, именно в линейных резистивных цепях. В цепях с иными элементами, например с конденсаторами, форма тока, в общем случае, всегда отличается от формы приложенного напряжения, поэтому совпадение форм напряжения и тока — скорее исключение, нежели правило. Следует запомнить, что линейная резистивная цепь — это частный случай, при котором формы тока и напряжения идентичны и наличие такой идентичности оказывается сравнительно редко и вовсе не является само собой разумеющейся.

Кроме того, экспериментально было установлено, что в линейной резистивной цепи ток обратно пропорционален сопротивлению, т. е. при увеличении сопротивления в некоторое число раз (при неизменном напряжении) ток уменьшается в такое же число раз. Связь между мгновенными токами  $i$ , мгновенными напряжениями  $u$  и сопротивлением цепи  $R$  выражается формулой

$$i = u/R. \quad (2.2)$$

Данное соотношение называется законом Ома для участка цепи. Поскольку наибольшие мгновенные значения называются максимальными, закон Ома может иметь вид  $I_m = U_m/R$  и  $I_p = U_p/R$ , где  $I_m$  и  $U_m$  — максимальные значения тока и напряжения соответственно;  $I_p$  и  $U_p$  — размах тока и напряжения. В частном случае напряжения и токи могут не меняться во времени (режим постоянного тока), тогда мгновенные значения напряжения стано-

вятся величинами постоянными и их обозначают не  $u$  (т. е. малой буквой, как всякую переменную величину); а  $U$  (большая буква, величина постоянная), в этом частном случае закон Ома записывается так:

$$I = U/R. \quad (2.3)$$

Таким образом, в общем случае при напряжениях, а следовательно и токах, произвольной формы следует использовать основной вид формулы, выражающей закон Ома:  $i = u/R$  или  $u = Ri$ .

При напряжениях и токах, неизменных во времени,

$$I = U/R \text{ или } U = RI. \quad (2.4)$$

Важное правило: закон Ома для мгновенных значений справедлив только в резистивных цепях.

Резистивные элементы необратимо превращают электрическую энергию в тепловую, но не накапливают какую-либо энергию, поэтому их называют *неэнергоемкими*. Из сказанного следует, что закон Ома для мгновенных значений справедлив только в цепях с неэнергоемкими элементами.

### 2.13. РАБОТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Работа, совершаемая электрическим током, будет тем большей, чем больше напряжение на зажимах цепи, ток в цепи и время, в течение которого по цепи протекает ток и, следовательно, совершается работа. Таким образом, если напряжение и ток не изменяются во времени, то работа  $A$  определяется из выражения

$$A = UI t. \quad (2.5)$$

Произведение тока  $I$  на время  $t$  есть заряд  $Q$  ( $I t = Q$ ), поэтому  $A = UQ$ , что полностью совпадает с выражениями, приведенными в гл. 1. Формулу (2.5) можно преобразовать следующим образом. Так как  $U = RI$ , то  $A = R I I t = I^2 R t$ , или  $I = U/R = UG$ ; тогда  $A = U \frac{U}{R} t = \frac{U^2}{R} t = U^2 G t$ , где  $G$  — резистивная проводимость цепи. Таким образом, работа, совершаемая неизменным во времени током (постоянным), определяется по любому выражению:

$$A = UI t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t = U^2 G t = UQ. \quad (2.6)$$

Если напряжения и токи изменяются во времени, то сначала следует подсчитать работу, совершаемую не за конечное время  $t$ , а за бесконечно малый отрезок времени  $dt$ . Поскольку время  $dt$  весьма мало (это время, как известно, меньше любого, наперед заданного, сколь угодно малого отрезка времени), то напряжения и токи за время  $dt$  не успевают измениться и работу, совершаемую за время  $dt$ , можно рассчитать по формулам, аналогичным выражениям для определения работы на постоянном токе. Разница состоит в том, что при постоянном токе мгновенное напряжение  $u = U$ , мгновенный ток  $i = I$ , а при напряжениях и токах, меняющихся во времени, в общем виде записывают мгновенные значения  $u$  и  $i$ , а при заданной конкретной форме напряжения или тока — закон, соответствующий форме данных сигналов. Очевидно, что за время  $dt$  совершается элементарная

работа

$$dA = u i dt = i^2 R dt = \frac{u^2}{R} dt = u^2 G dt = u q dt.$$

Чтобы подсчитать работу, совершаемую за конечное время  $t$ , необходимо просуммировать все элементарные работы  $dA$ . Но операция суммирования, как известно, производится с помощью интегрирования, в этом случае сумма (т. е. интеграл) состоит из бесконечно большого числа слагаемых  $dA$ :

$$A = \int_0^t u i dt = \int_0^t i^2 R dt = \int_0^t (u^2/R) dt = \int_0^t u^2 G dt = \int_0^t u q dt.$$

Если необходимо подсчитать работу, совершаемую за период, то в этом случае в верхнем пределе время  $t$  заменяется на  $T$ , тогда

$$A = \int_0^T u i dt = R \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{R} \int_0^T u^2 dt = G \int_0^T u^2 dt = \int_0^T u q dt.$$

Очевидно, что значения  $R$  и  $G$  выносятся из-под знака интеграла как постоянные величины. Работа измеряется в джоулях (Дж) по имени английского физика Д. Джоуля (1818 – 1889). Работой 1 Дж называется работа, совершаемая током 1 А при напряжении 1 В в течение 1 с.

**Пример 2.3.** К цепи рис. 2.15 с сопротивлением  $R$  приложено напряжение гармонической формы  $u = U_m \sin \omega t$ . Определить работу, совершаемую за время, равное десяти периодам.

**Решение.** Поскольку по условию задачи даются закон мгновенных напряжений  $u$  и сопротивление  $R$ , то для расчета работы удобнее всего использовать выражение

$$A = \frac{1}{R} \int_0^t u^2 dt.$$

Рассчитаем сначала работу за один период:

$$A_T = \frac{1}{R} \int_0^T (U_m \sin \omega t)^2 dt = \frac{1}{R} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{U_m^2}{R} \int_0^T \sin^2 \omega t dt.$$

Поскольку величина  $U_m$  – постоянная, не зависящая от времени, то она выносится за знак интеграла. Чтобы взять интеграл, преобразуем подынтегральное выражение. Для этого вспомним, что  $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$ , следовательно,

$$A_T = \frac{U_m^2}{R} \left[ \int_0^T \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) dt \right].$$

Под интегралом теперь имеется два слагаемых. Разобьем интеграл на два интеграла, по

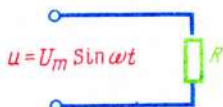


Рис. 2.15



числу слагаемых. В этом случае

$$A_T = \frac{U_m^2}{R} \left[ \int_0^T (1/2) dt - (1/2) \cos 2\omega t dt \right] = \frac{U_m^2}{R} \left[ \frac{1}{2} t \Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot 2\omega} \sin 2\omega t \Big|_0^T \right] =$$

$$= \frac{U_m^2}{R} \left[ \frac{1}{2} (T - 0) - \frac{1}{4\omega} (0 - 0) \right] = \frac{U_m^2}{2R} T.$$

Поясним, каким образом брался второй интеграл. Аргумент тригонометрической функции (в данном случае косинуса) имеет перед переменной величиной  $t$  постоянный коэффициент  $2\omega$ , поэтому чтобы взять этот интеграл, перед данным членом следует написать множитель, подставляющий единицу, деленную на производную от аргумента тригонометрической функции (в нашем случае — множитель  $1/2\omega$ ), после чего интеграл берется обычным образом. Напомним, что  $\int \cos x dx = \sin x$ . Теперь объясним, каким образом подставлялись пределы. Так как полный период соответствует  $360^\circ$ , а синус через каждые  $180^\circ$  равен нулю, то и  $\sin 720^\circ$  и  $\sin 0^\circ$  одинаково равны нулю, откуда второй интеграл равен нулю. Сделаем одно полезное замечание. При расчетах различных электрических цепей часто приходится брать интеграл за период от гармонической функции. Но тогда при подстановке как верхнего, так и нижнего пределов получается одна и та же величина, поскольку значения всех гармонических функций через период повторяются, а при вычитании из некоторого значения, равного ему, получается нуль.

Следует помнить:

*Интеграл за период от любой гармонической функции равен нулю.*

При использовании данного правила следует иметь в виду, что гармонические функции (т. е. синус и косинус) в любой степени, отличной от первой, перестают изменяться по гармоническому закону, поэтому

$$\int_0^T \sin \omega t dt = 0, \text{ а } \int_0^T \sin^2 \omega t dt \neq 0,$$

что и имело место при решении данного примера. Вернемся к нашему примеру. Было получено, что работа за период определяется из выражения  $A_T = (U_m^2/2R) T$ , причем период  $T$  в условии задачи не задан. Однако известно, что входное напряжение имеет гармоническую форму и, следовательно, мгновенные значения определяются по формуле  $u = U_m \sin \omega t$ . Но в выражениях гармонических сигналов множитель  $\omega$  представляет угловую частоту, причем  $\omega = 2\pi/T$ , откуда  $T = 2\pi/\omega$ . Таким образом, работа, совершаемая за один период, определяется из выражения

$$A_T = \frac{U_m^2}{2R} T = \frac{U_m^2 \cdot 2\pi}{2R \cdot \omega} = \frac{\pi U_m^2}{\omega R}.$$

За  $n$  периодов совершится работа в  $n$  раз большая, т. е.

$$A = n A_T = n \pi U_m^2 / \omega R.$$

$$\text{При } n = 10 \quad A = \frac{10 \cdot 3,14 U_m^2}{\omega R} = \frac{31,4 U_m^2}{\omega R} \text{ Дж.}$$

При расчете данной задачи можно было бы использовать и иные формулы, например,  $A = \int_0^T u i dt$ , в этом случае сначала следовало бы рассчитать выражения мгновен-



ных токов, после чего произвести соответствующие расчеты. Поскольку в линейных резистивных цепях форма тока повторяет форму напряжения, структура формул для мгновенных значений тока и напряжения является идентичной. Если мгновенные напряжения определяются из выражения  $u = U_m \sin \omega t$ , то мгновенные токи должны определяться соответственно из выражения  $i = I_m \sin \omega t$ . Но в резистивных цепях  $I_m = U_m/R$ , поэтому  $i = U_m/R \sin \omega t$ . Подставим значения  $u$  и  $i$  в формулу работы:

$$A = \int_0^T u i dt = \int_0^T U_m \sin \omega t I_m \sin \omega t dt = U_m I_m \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{U_m I_m T}{R} \int_0^T \sin^2 \omega t dt.$$

Получилось выражение, которое уже рассчитывалось в данном примере.

Энергией называется физическая величина, показывающая работу, которая еще не совершалась, но может быть совершена. Например, в аккумуляторе, при его заряде, запасается определенная энергия. Эта энергия — еще не работа, которая уже совершилась, но возможность совершить определенную работу. Чем большая энергия запасена в источнике (в общем случае — в некотором теле), тем большую работу может совершить этот источник.

Энергия обозначается буквой  $W$ , но имеет ту же размерность и единицы измерений, что и работа. Поэтому энергия измеряется также в джоулях.

#### 2.14. МОЩНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

*Мощностью* называется работа, совершаемая в единицу времени. При постоянном токе мощность определяется из выражений

$$P = A/t = UI = I^2 R = U^2/R = U^2 G. \quad (2.7)$$

За единицу мощности принимается ватт (Вт), по имени английского изобретателя Д. Уатта (1736 — 1819), причем ватт — мощность, при которой в каждую секунду совершается 1 Дж работы. Широко распространены производные единицы, мВт (милливатт =  $10^{-3}$  Вт), кВт (киловатт =  $10^3$  Вт), МВт (мегаватт =  $10^6$  Вт =  $10^3$  кВт). При токах, изменяющихся во времени, следует различать мгновенную мощность  $p(t)$  при просто  $p$  (малая буква, как у всякой переменной величины) и среднюю за период мощность  $P$ , которую обыкновенно называют просто мощностью.

Мгновенная мощность  $p$  есть произведение мгновенного напряжения  $u$  на мгновенный ток  $i$ :

$$p = ui. \quad (2.8)$$

Чтобы найти среднюю мощность за период, необходимо просуммировать работу, совершаемую в каждый бесконечно малый отрезок времени, а затем эту суммарную работу поделить на период  $T$ , при этом получится мощность, которая была бы, если бы в каждый момент совершалась одинаковая работа. Получим выражение для средней мощности  $P$ . Работа за время  $dt$  определяется из выражения  $u i dt$ , работа за период  $T$  — из выражения

$$\int_0^T u i dt, \text{ средняя мощность} \\ P = \frac{A}{t} = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (2.9)$$

Полученное выражение дает возможность определить среднюю мощность

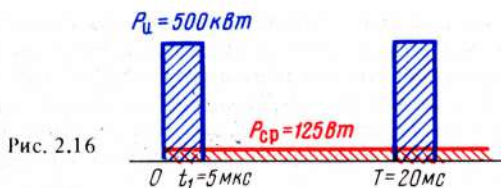


Рис. 2.16

при напряжениях и токах произвольной формы. Выше было показано, что при постоянном токе  $P = UI$ . Получим это выражение из (2.9).

При постоянном токе  $u = U$ ,  $i = I$ ; в этом случае

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt = \frac{1}{T} UI t \Big|_0^T = \frac{1}{T} UIT = UI.$$

**Пример 2.4.** Определить мощность, выделяемую в резисторе сопротивлением  $R$ , если через него протекает ток гармонической формы с мгновенными значениями  $i = I_m \sin \omega t$ .

**Решение.** Если через линейное резистивное сопротивление  $R$  протекает ток гармонической формы, то мгновенные напряжения будут изменяться также по гармоническому закону, следовательно,  $u = U_m \sin \omega t = RI_m \sin \omega t$ . Рассчитаем мощность  $P$ :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T uidt = \frac{1}{T} \int_0^T RI_m \sin \omega t I_m \sin \omega t dt = \frac{RI_m^2}{2} \frac{T}{0} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \\ &= \frac{RI_m^2}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right] dt = \frac{RI_m^2}{2T} (T - 0) = \frac{RI_m^2}{2T} (T - 0) = \frac{RI_m^2}{2} = \\ &= \frac{U_m I_m}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 2.5.** Передатчик работает в импульсном режиме, показанном на рис. 2.16. Мощность в интервале от  $t = 0$  до  $t_1 = 5$  мкс 500 кВт, в интервале от  $t_1$  до  $T$  равна нулю. Рассчитать среднюю мощность за период.

**Решение.** Рассчитаем работу, совершенную за период. В интервале от  $t = 0$  до  $t_1$   $A = Pt_1 = 500 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 2500 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 2,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 2,5$  Дж, в интервале от  $t_1$  до  $T$  работа равна нулю. Таким образом, за время  $t = T$  длительностью 20 мс совершается работа 2,5 Дж. Средняя мощность  $P_{ср} = A/T = 2,5/20 \times 10^{-3} = 125$  Вт. Следовательно, средняя мощность в  $(500 \cdot 10^3)/125 = 4000$  раз меньше мощности в импульсе.

## 2.15. ДЕЙСТВУЮЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ТОКА, НАПРЯЖЕНИЯ, ЭДС

Если по резистивной цепи сопротивлением  $R$  протекает изменяющийся во времени ток, то в каждый момент в цепи выделяется мгновенная мощность  $p = Ri^2$ . За период  $T$  при этом совершается работа  $A = \int_0^T Ri^2 dt$ . Для оценки энергетических свойств цепей вводится понятие действующего значения тока. Действующим значением переменного тока называется такой постоянный ток, который за такое же время и на таком же сопротивлении выделяет такую же энергию, которая выделяется данным переменным током.

Таким образом, для определения действующего значения переменный ток заменяется таким постоянным током, который при прочих равных условиях выделяет такую же энергию, которую выделяет данный переменный ток. Следует сразу же обратить внимание, что подобная замена справедлива только при определении энергетических свойств (например, тепловых), но никак не информационных. Это происходит потому, что переменный ток в общем случае содержит спектр частот, а энергетически эквивалентный ему постоянный ток не имеет спектра и, следовательно, обладает совершенно иными информационными свойствами. Получим выражение, связывающее мгновенные значения тока  $i$  с действующим значением  $I$ . Так как действующее значение тока — величина постоянная, то обозначается большой буквой, в данном случае без индексов.

Работа, совершаемая изменяющимся во времени током  $i$  на сопротивлении  $R$  за период  $T$ ,

$$A_{\text{var}} = \int_0^T i^2 R dt. \quad (2.10)$$

Работа, совершаемая неизменным во времени током  $I$  на том же сопротивлении  $R$  и за то же время  $T$ ,

$$A_{\text{const}} = I^2 R T. \quad (2.11)$$

Если  $I$  — действующее значение переменного тока с мгновенными значениями  $i$ , то работа, совершаемая переменным током  $A_{\text{var}}$ , и работа, совершаемая постоянным током  $A_{\text{const}}$ , равны между собой, т. е.  $A_{\text{const}} = A_{\text{var}}$ , откуда

$$I^2 R T = R \int_0^T i^2 dt$$

Величина  $R$  не зависит от времени, поэтому ее можно вынести за знак интеграла, а затем сократить:

$$I^2 R T = R \int_0^T i^2 dt \quad \text{или} \quad I^2 T = \int_0^T i^2 dt,$$

откуда  $I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$ , и в окончательном виде

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2.12)$$

Действующие значения для напряжения  $U$  и ЭДС  $E$  связаны с мгновенными значениями аналогичными выражениями:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}, \quad (2.13)$$

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}. \quad (2.14)$$

Определять действующие значения ЭДС, напряжений, токов по их мгновенным



венным значениям можно аналитически или графически. Для аналитического подсчета действующего значения, например, напряжения  $U$ , необходимо в (2.13) вместо мгновенных значений, записанных в общем виде (т. е.  $u$ ), написать закон, по которому изменяются эти мгновенные значения, и произвести соответствующие преобразования. В частности, для напряжений гармонической формы  $u = U_m \sin \omega t$ . В этом случае

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{1}{T} U_m^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt} = \\ &= U_m \sqrt{\frac{1}{T} \left( \int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\omega t dt \right)} = U_m \sqrt{\frac{1}{2T} t \Big|_0^T + 0} = \\ &= U_m \sqrt{\frac{1}{2T} (T-0)} = U_m \sqrt{\frac{T}{2T}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если напряжение изменяется по гармоническому закону, то действующее значение этого напряжения в  $\sqrt{2} = 1,41$  раза меньше максимального и в 2,82 раза меньше размаха этого напряжения. Аналогично для тока и ЭДС

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{1,41} = \frac{I_p}{2\sqrt{2}} = \frac{I_p}{2,82} = 0,707 I_m = 0,35 I_p;$$

$$E = E_m / \sqrt{2} = 0,707 E_m = E_p / 2\sqrt{2} = 0,35 E_p.$$

Из приведенных расчетов видно, что у сигналов гармонической формы отношение действующих значений к максимальным равно 0,707, т. е.  $E/E_m = U/U_m = I/I_m = 0,707$ .

Следует твердо помнить, что *отношение действующих значений к максимальным, равное 0,707, справедливо только для сигналов гармонической формы. Для каждой формы сигналов аналогичные отношения имеют свои значения.*

В ряде случаев определять отношение действующих значений к максимальным удобнее графически, чем аналитически. Покажем построения, выполненные в соответствии с выражениями вида

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}:$$

1. Нарисовать кривую мгновенных значений напряжения (тока, ЭДС).
2. Нарисовать кривую, соответствующую квадратам мгновенных значений напряжения (тока, ЭДС).

3. Подсчитать площадь за период, ограниченную координатными осями и графиком мгновенных значений. Данная площадь численно соответствует

выражению  $\int_0^T u^2 dt$ .

4. Получившуюся площадь поделить на основание, т. е. на период  $T$ . Это значение численно соответствует выражению  $\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt$ .

5. Из получившегося значения извлечь корень квадратный. Получившаяся величина численно соответствует выражению  $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$ , которое и является действующим значением данного переменного напряжения.

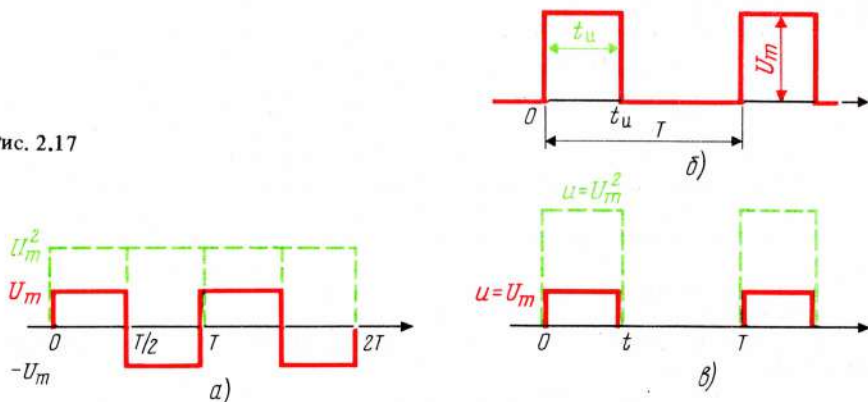
Рассмотрим важные частные случаи. Определим соотношение между действующим и максимальным значениями для двусторонних напряжений прямоугольной формы (рис. 2.17, а). Как видно из рисунка 2.17, а в интервале  $0 \dots T/2$  мгновенные значения равны  $U_m$ , а в интервале  $T/2 \dots T - U_m$ . Возведем все мгновенные значения в квадрат, т. е. построим график  $u^2 = f(t)$ . Очевидно, что в интервале  $0 \dots T$  получившийся график будет представлять прямую линию проведенную на уровне  $U_m^2$ , поскольку  $(U_m)^2 = U_m^2$ , но и  $(-U_m)^2 = U_m^2$  (на рис. 2.17, а показана штриховой линией). Площадь получившейся квадратичной фигуры равна  $U_m^2 T$  (как площадь всякого прямоугольника). Поделим это выражение на период  $T$ , извлечем квадратный корень и получим искомое действующее значение. Очевидно, в этом случае

$$U = \sqrt{U_m^2 T/T} = U_m. \quad (2.15)$$

Таким образом, для напряжений (токов, ЭДС) прямоугольной формы действующее значение равно максимальному, т. е.  $U = U_m, I = I_m, E = E_m$ .

Рассчитаем действующие значения напряжений (токов, ЭДС) с максимальным значением  $U_m$  и скважностью  $S = T/t_u$ . Кривая, изображенная на рис. 2.17, б, представляет кривую мгновенных значений, у которых в интервале  $0 \dots t_u$   $u = U_m$ , а в интервале  $t_u \dots T$   $u = 0$ . Построим график квадрата мгновенных значений (рис. 2.17, в). Подсчитаем площадь получившейся квадратичной фигуры:  $U_m^2 t_u$ . Поделим получившееся выражение на период  $T$ :  $U_m^2 (t_u/T)$ . Извлечем квадратный корень из последнего выражения:  $U_m \sqrt{t_u/T}$ , что и будет действующим значением данного напряжения (ЭДС, тока).

Рис. 2.17



Таким образом, для сигналов прямоугольной формы со скважностью действующее значение определяется из выражения

$$U = U_m \sqrt{t_n/T}. \quad (2.16)$$

Аналогично,  $I = I_m \sqrt{t_n/T}$ ,  $E = E_m \sqrt{t_n/T}$ .

Например, при скважности 1 (т. е. при  $t_n = T$ )  $U = U_m$ , при скважности 10 (т. е. при  $t_n = 0,1 T$ )  $U = 0,316 U_m$ , при скважности 100  $U = 0,01 U_m$ , т. е. отношение действующего значения к максимальному действительно зависит от формы переменного напряжения. Обратим также внимание на то обстоятельство, что по действующему значению нельзя судить о надежности деталей на пробой. Пусть, например, имеется конденсатор с пробивным напряжением 30 В. Спрашивается, пробьется или не пробьется данный конденсатор, если действующее значение приложенного к нему напряжения 10 В? На подобный вопрос учащиеся часто отвечают утвердительно, так как считают, что конденсатор не пробьется, поскольку приложенное напряжение в 3 раза меньше пробивного. Такая точка зрения может быть совершенно неверной, поскольку пробивает конденсатор (или какую-либо иную деталь) не действующее, а наибольшее из всех мгновенных значений, и если неизвестна форма напряжения, то сказать что-либо о возможностях пробоя в данном случае совершенно не представляется возможным. Действительно, если приложенное к конденсатору напряжение имеет прямоугольную форму, то максимальное значение равно действующему, т. е. 10 В и запас прочности в этом случае будет  $U_{\text{проб}}/U_m = 30/10 = 3$ , т. е. трехкратный. Если приложенное напряжение имеет синусоидальную форму, то  $U_m = 1,41 U = 14,1$  В, запас пробивной прочности станет близким к двухкратному. Если напряжение имеет форму импульсов со скважностью 10, то  $U_m = U \sqrt{T/t_n} = 10 \sqrt{10} = 31,6$  В, т. е. в этом случае конденсатор пробьется, а при скважности 100  $U_m = U \sqrt{100} = 10 \cdot 10 = 100$  В, т. е. максимальное значение напряжения на конденсаторе превысит пробивное более чем в 3 раза.

Таким образом, о пробивной надежности деталей (конденсаторов, микросхем и т. д.) можно судить только по соотношению пробивного напряжения детали и максимального (а не действующего) значения напряжения, приложенного к этой детали.

#### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется ЭДС источника, в каких единицах ЭДС измеряется?
2. Какие электрические напряжения являются постоянными и какие переменными?
3. Что называется мгновенным значением: ЭДС; напряжения?
4. Какие сигналы называются периодическими? Чем эти сигналы отличаются от непериодических?
5. Нарисуйте сигналы прямоугольной формы со скважностями 2, 4, 10.
6. Что такое осциллограф, каковы его основные возможности?
7. Что называется размахом напряжения?
8. Какие напряжения называются гармоническими?
9. Как связаны между собой частота и период в гармонических сигналах? В каких единицах они измеряются?
10. Каков спектр сигналов гармонической формы?



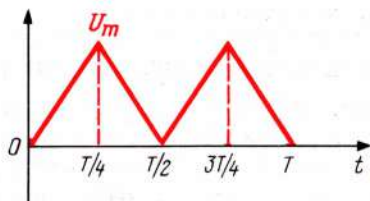


Рис. 2.18

11. Напишите выражения мгновенных значений напряжения синусоидальной формы.
12. Приведите примеры использования источников напряжения (постоянного).
13. Можно ли измерить напряжение сухих элементов с помощью: вольтметра; осциллографа? Если можно, то каким образом снимаются отсчеты показаний этих приборов?
14. Объясните понятия: "логический нуль" и "логическая единица". В каких случаях они используются?
15. Чем отличаются спектры гармонических и негармонических сигналов?
16. Объясните смысл знаков "+" и "-" у источников напряжения.
17. Как связаны между собой электрический ток, заряд и время? В каких единицах ток измеряется?
18. Что такое электрическое сопротивление цепи? В каких единицах оно измеряется?
19. Что называется удельным сопротивлением проводников? В каких единицах оно измеряется?
20. Что такое электрическая проводимость цепи? В каких единицах оно измеряется?
21. Что понимается под электрической цепью? Приведите примеры цепей.
22. Какие резисторы являются линейными и какие нелинейными? Приведите примеры.
23. Как определить форму тока в линейной резистивной цепи, зная форму напряжения на зажимах этой цепи?
24. Могут ли быть случаи, когда форма тока в цепи оказывается отличной от формы напряжения, приложенного к цепи? Приведите примеры.
25. Напишите выражения закона Ома для мгновенных, максимальных значений и размахов. В чем сущность этого закона? В каких случаях этот закон применим?
26. Напишите выражения, с помощью которых можно подсчитать работу электрического тока при постоянном напряжении. В каких единицах измеряется работа электрического тока?
27. Как рассчитать работу электрического тока при переменном напряжении?
28. Что такое мощность электрического тока? В каких единицах она измеряется?
29. Как рассчитать мощности: мгновенную, среднюю?
30. Что понимается под действующим значением ЭДС, напряжения, тока?
31. Выведите выражение, связывающее действующее значение тока с мгновенным?
32. Рассчитайте действующее значение напряжения прямоугольной формы со скважностями:  $S = 2$ ,  $S = 20$ .
33. Рассчитайте аналитически действующее значение напряжения, показанного на рис. 2.18.

## 3.1. НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Все цепи делятся на неразветвленные и разветвленные. *Неразветвленными* называются цепи, в которых нет ни одной точки, к которой было бы подсоединено более двух проводников. Неразветвленная цепь не имеет каких-либо ответвлений, поэтому во всех ее точках значение тока одно и то же.

Если неразветвленная цепь содержит только один источник напряжения, то ток во внешней цепи в каждый момент протекает от точки, потенциал которой выше (к ней подключен плюсовой вывод источника), к той точке цепи, потенциал которой ниже (к ней подключен минусовой вывод источника) (рис. 3.1, а). В общем случае в неразветвленной цепи может быть включено  $m$  источников напряжения и  $n$  резисторов (рис. 3.1, б).

Соединение, при котором по всем элементам течет один и тот же ток (запомним, не равный, а именно один и тот же!), называется *последовательным*. Например, в цепи, показанной на схеме рис. 3.1, б, имеется два источника напряжения и пять резисторов, из которых два ( $R_{i1}$  и  $R_{i2}$ ) являются внутренними сопротивлениями источников, а три ( $R_1, R_2, R_3$ ) — внешними. Поскольку данная цепь — неразветвленная, ток во всех элементах цепи одинаковый и, следовательно, все элементы, входящие в данную цепь, соединены между собой последовательно.

## 3.2. РАСЧЕТ ТОКА В НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ

Если в цепи имеется только один источник напряжения при любом количестве резисторов, как показано на рис. 3.2, то ток  $i$  течет от положительного вывода источника (точка А) через резисторы  $R_1, R_2$  к отрицательному зажиму источника (точка В).

Рассмотрим структуру данной цепи подробнее. Внутреннее сопротивление источника  $R_i$  физически находится внутри источника, но так как в неразветвленной цепи (или неразветвленном участке цепи) ток один и тот же, то для расчетных целей совершенно безразлично, в каком месте цепи находится резистор  $R_i$ . Его можно показать в любом месте цепи, например между точками В и S. Мощность, выделяемая в резисторе  $R_i$ , будет одинаковой вне зависимости от места его включения. Сопротивления соединительных проводников считают равными нулю. Мгновенные значения токов в данной цепи

$$i = \frac{e}{R_i + R_1 + R_2} = \frac{e}{\Sigma R}, \quad (3.1)$$

где  $\Sigma R$  — арифметическая сумма сопротивлений данной цепи. Напомним, что арифметической называется сумма, в которой все члены имеют знак плюс. Поскольку в резисторах электрическая энергия необратимо преобразуется в тепловую, то сопротивления таких резисторов являются положительными.

Если в цепи имеется несколько источников (см. рис. 3.1, б), то для расчета тока необходимо проделать следующее.

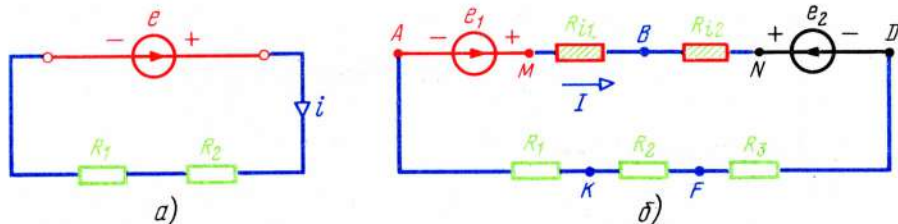


Рис. 3.1

1. Задаться предполагаемым направлением тока в цепи. Заметим, что термин "предполагаемый" несколько нестрогий, более точным является термин "положительный" ток. Положительным током можно задаваться либо по часовой стрелке, либо против нее. Оба направления совершенно равноценны, но рекомендуется выбирать направление по часовой стрелке. Условимся показывать предполагаемый ток незаштрихованной стрелкой, нарисованной около провода.

2. Составить уравнение для тока в данной цепи в соответствии с выражением

$$i = \Sigma e / \Sigma R, \quad (3.2)$$

где  $\Sigma e$  — алгебраическая сумма мгновенных ЭДС цепи;  $\Sigma R$  — арифметическая сумма сопротивлений цепи.

Напомним, что алгебраической называется сумма, в которой члены могут быть со знаками как плюс, так и минус. Покажем, какие ЭДС следует брать со знаком плюс, а какие со знаком минус. Для этого следует руководствоваться следующим правилом: все ЭДС, направления которых совпадают с направлением предполагаемого тока, являются положительными, а ЭДС, направления которых противоположны — отрицательными. Под направлением ЭДС понимается направление, по которому стал бы протекать ток от данного источника, при выполнении двух условий: 1) никаких иных источников, кроме данного, в цепи нет и 2) цепь замкнута. Таким образом, ЭДС  $e_1$  (см. рис. 3.1, б) направлена по часовой стрелке, ее направление совпадает с направлением предполагаемого тока и в (3.2) эта ЭДС должна записываться со знаком плюс. Направление ЭДС  $e_2$  противоположно направлению предполагаемого тока и поэтому она имеет знак минус. Таким образом, в цепи, изображенной на рис. 3.1, б, мгновенные токи  $i = (e_1 - e_2) / (R_{i1} + R_{i2} + R_1 + R_2 + R_3)$ .

3. Подставить числовые значения и произвести арифметические подсчеты. Если окажется, что рассчитываемый ток положительный, то это означает, что действительное направление тока совпадает с предполагаемым. Если ток получается отрицательным, то действительное направление тока в данный момент противоположно предполагаемому. Действительные (т. е. положительные) направления тока показывают на схемах незаштрихованными стрелками на проводах. Таким образом, по начертанию токовых стрелок видно, какой ток показывается — предполагаемый или действительный.

Итак, с помощью формулы  $i = \Sigma e / \Sigma R$  можно рассчитать мгновенные значения токов в данной цепи. Расчет мгновенных значений представляет



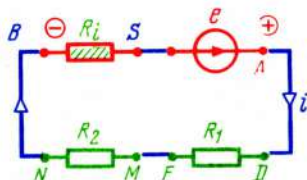


Рис. 3.2

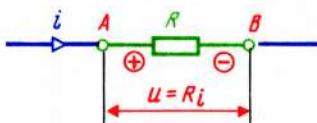


Рис. 3.3

основной вид расчета цепей, поскольку, зная закон, по которому изменяются мгновенные значения, можно определить и другие характеристики тока — действующие, максимальные, размах и ряд других. Однако иногда необходимо рассчитать непосредственно одно из перечисленных значений, в этом случае можно использовать следующие формулы:

$$I = \Sigma E / \Sigma R; I_m = \Sigma E_m / \Sigma R; I_p = \Sigma E_p / \Sigma R, \quad (3.3)$$

где  $\Sigma E$ ,  $\Sigma E_m$ ,  $\Sigma E_p$  — алгебраические суммы действующих, максимальных значений и размахов ЭДС источников напряжений, входящих в данную цепь. Следует усвоить весьма важное правило: в резистивных цепях расчеты токов и напряжений можно производить для мгновенных, действующих, максимальных значений, а также для размахов. Указанное правило справедливо только для цепей, не содержащих накопителей энергии. В цепях с накопителями энергии (например, конденсаторами) эти правила совершенно иные, что будет подробно рассмотрено в гл. 5.

### 3.3. ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА

Если по резистивным элементам протекает ток, то на каждом резисторе происходит падение напряжения, причем эти напряжения, так же, как и токи, могут быть мгновенными  $u$ , действующими  $U$ , максимальными  $U_m$ , размахом  $U_p$ . В соответствии с законом Ома указанные напряжения рассчитываются по формулам

$$u = Ri; U = RI; U_m = RI_m; U_p = RI_p, \quad (3.4)$$

где  $R$  — сопротивление резистора, по которому протекает ток (рис. 3.3). Покажем, каким образом определяют полярность падения напряжения на резисторах. Ток в любой момент протекает от точки, потенциал которой выше, к точке, потенциал которой ниже. Например, если на рис. 3.3 показано, что ток  $i$  течет от точки  $A$  через резистор сопротивлением  $R$  к точке  $B$ , то это означает, что в рассматриваемый момент потенциал точки  $A$  выше потенциала точки  $B$ . На этом основании можно написать, что  $u = \varphi_A - \varphi_B$ . Если ток не изменяется во времени, то  $U = \varphi_A - \varphi_B$ . Таким образом, если по резистору сопротивлением  $R$  протекает ток  $i$ , то потенциалы точек на зажимах резистора отличаются друг от друга на значение  $Ri$ , причем потенциал точки резистора, от которой течет ток, будет выше, а потенциал точки, к которой течет ток, будет ниже на значение  $Ri$ .

Так, если в цепи на рис. 3.3 потенциал точки  $B$  принять за нулевой, то потенциал точки  $A$  будет  $\varphi_A = \varphi_B + Ri$ , в данном случае  $\varphi_A = Ri$ . Если за

нулевой принять потенциал точки  $A$ , то  $\varphi_B = \varphi_A - Ri = -Ri$ . Следовательно, ток в цепи рис. 3.3 можно определять из выражений:

$$i = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R}; I = \frac{\Psi_A - \Psi_B}{R}; I_m = \frac{\varphi_{mA} - \varphi_{mB}}{R}; I_p = \frac{\varphi_{pA} - \varphi_{pB}}{R}, \quad (3.5)$$

где  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  — мгновенные значения;  $\Psi_A$  и  $\Psi_B$  — действующие;  $\varphi_{mA}$  и  $\varphi_{mB}$  — максимальные значения;  $\varphi_{pA}$  и  $\varphi_{pB}$  — размах потенциалов точек  $A$  и  $B$ .

Рассчитаем падения напряжения на сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$  в цепи рис. 3.1, а:

$$u_{R1} = R_1 i = R_1 \left( \frac{e}{R_1 + R_2} \right); u_{R2} = R_2 i = R_2 \left( \frac{e}{R_1 + R_2} \right).$$

Определим алгебраическую сумму этих падений напряжений:

$$u_{R1} + u_{R2} = \frac{eR_1}{R_1 + R_2} + \frac{eR_2}{R_1 + R_2} = e \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \right) = e.$$

Как видно из полученного выражения, алгебраическая сумма падений напряжений на всех элементах цепи равна ЭДС источника напряжения, включенного в данную цепь.

Выполним аналогичную проверку для цепи рис. 3.1, б. Обозначим  $\Sigma R = R_{i1} + R_{i2} + R_1 + R_2 + R_3$ . Так как

$$i = \frac{e_1 - e_2}{\Sigma R}, \text{ то } u_{Ri1} = \frac{R_{i1}(e_1 - e_2)}{\Sigma R}; u_{Ri2} = \frac{R_{i2}(e_1 - e_2)}{\Sigma R};$$

$$u_{R1} = R_1 \left( \frac{e_1 - e_2}{\Sigma R} \right); u_{R2} = R_2 \left( \frac{e_1 - e_2}{\Sigma R} \right); u_{R3} = R_3 \left( \frac{e_1 - e_2}{\Sigma R} \right).$$

$$\begin{aligned} \Sigma u &= u_{Ri1} + u_{Ri2} + u_{R1} + u_{R2} + u_{R3} = \frac{R_{i1}(e_1 - e_2)}{\Sigma R} + \frac{R_{i2}(e_1 - e_2)}{\Sigma R} + \\ &+ \frac{R_1(e_1 - e_2)}{\Sigma R} + \frac{R_2(e_1 - e_2)}{\Sigma R} + \frac{R_3(e_1 - e_2)}{\Sigma R} = \frac{R_{i1} + R_{i2} + R_1 + R_2 + R_3}{\Sigma R} \times \\ &\times (e_1 - e_2) = e_1 - e_2. \end{aligned}$$

Из произведенного расчета видно, что алгебраическая сумма мгновенных ЭДС в замкнутой цепи равна алгебраической сумме мгновенных падений напряжений на всех элементах данной цепи. В резистивных цепях (только в резистивных) выполняются аналогичные условия для действующих, максимальных значений, размахов, т. е. справедливыми также являются выражения

$$\Sigma E = \Sigma U; \Sigma E_m = \Sigma U_m; \Sigma E_p = \Sigma U_p. \quad (3.6)$$

Закон, устанавливающий равенство между алгебраической суммой мгновенных значений ЭДС в замкнутом контуре и алгебраической суммой мгно-

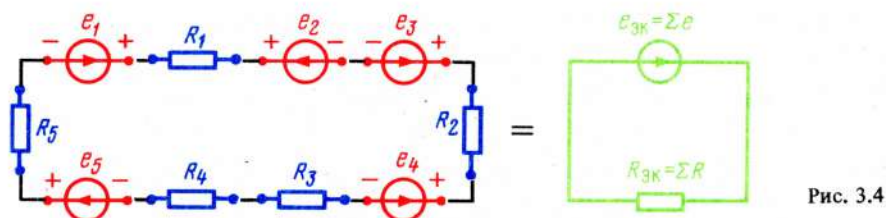


Рис. 3.4

венных падений напряжений на всех элементах этого же контура, называется *вторым законом Кирхгофа*. Обратим теперь внимание на следующую подробность. Иногда считают, что последовательное — это такое соединение, при котором элементы цепи должны обязательно быть соединенными непосредственно друг с другом. Можно даже встретить утверждение, что при последовательном соединении конец одного сопротивления (или резистора) должен быть соединен с началом другого сопротивления (резистора). Говоря об источниках, в некоторых случаях утверждают, что при последовательном соединении плюс одного источника должен соединяться с минусом другого и т. д. В подобных рассуждениях есть ряд неточностей. Во-первых, критерием последовательного соединения элементов является вовсе не их непосредственное соединение друг с другом, а наличие одного и того же тока, протекающего по всем этим элементам. Во-вторых, термины "начало" и "конец" сопротивления (резистора) неточны, поскольку в линейных резистивных элементах сопротивление не зависит от направления тока и потому не может быть "начала" или "конца". В-третьих, при последовательном соединении источников, даже при их непосредственном соединении, положительный зажим одного источника вовсе не обязательно должен соединяться с отрицательным зажимом другого. Источники могут быть соединены и однополюсными зажимами. Просто в этом случае получается соединение последовательное встречное в отличие от последовательного согласного, оказывающегося в том случае, когда плюс одного источника соединен с минусом другого. Например, в цепи рис. 3.4, все элементы цепи, т. е. и источники напряжения и резистивные сопротивления соединены между собой последовательно, поскольку по всем этим элементам протекает один и тот же ток. При определении тока данную схему можно заменить эквивалентной схемой замещения, т. е. такой схемой, в которой имеется минимальное количество источников и резисторов. Схема замещения цепи, показанной на рис. 3.4, состоит из одного источника напряжения  $e_{ЭК}$ , ЭДС которого равна алгебраической сумме ЭДС всех источников и сопротивления  $R_{ЭК}$ , равного арифметической сумме сопротивлений всех резисторов, соединенных последовательно. Таким образом,

$$e_{ЭК\text{ посл}} = \sum e = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5; R_{ЭК\text{ посл}} = \sum R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5.$$

Аналогично схему, показанную на рис. 3.1, б, можно заменить схемой замещения (т. е. эквивалентной), в которой  $e_{ЭК} = e_1 - e_2$  (если  $e_1$  больше  $e_2$ ), или  $e_2 - e_1$  (если  $e_2$  больше  $e_1$ ), а  $R_{ЭК\text{ посл}} = R_{i1} + R_{i2} + R_1 + R_2 + R_3$ .



### 3.4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ

**Пример 3.1.** В цепи рис. 3.1, б ЭДС обоих источников неизменны во времени, т. е.  $e_1 = E_1$ , а  $e_2 = E_2$ , причем  $E_1 = 50$  В;  $E_2 = 30$  В,  $R_{i1} = 5$  Ом,  $R_{i2} = 15$  Ом,  $R_1 = 30$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 40$  Ом. Рассчитать мгновенные значения тока в цепи.

**Решение.** Прежде всего, следует определить форму эквивалентной ЭДС. Поскольку ЭДС каждого источника постоянна, а цепь резистивная, ток будет также неизменным во времени, т. е. постоянным. Покажем на рис. 3.5 график значений ЭДС в функции времени. Рассчитаем значения мгновенных токов в цепи:

$$i = \frac{\Sigma e}{\Sigma R} = \frac{e_1 + e_2}{R_{i1} + R_{i2} + R_1 + R_2 + R_3} = \frac{50 + (-30)}{5 + 15 + 30 + 10 + 40} = \frac{20}{100} = 0,2 \text{ А.}$$

Таким образом, в данной цепи ток в любой момент равен  $0,2 \text{ А} = 200 \text{ мА}$  и направлен так же, как и ЭДС  $e_1$ , т. е. по часовой стрелке. Рассчитаем мгновенные падения напряжения на каждом резисторе:

$$u_{Ri1} = R_{i1}i = 5 \cdot 0,2 = 1 \text{ В}; u_{Ri2} = R_{i2}i = 15 \cdot 0,2 = 3 \text{ В}; u_{R1} = R_1i = 30 \cdot 0,2 = 6 \text{ В}; u_{R2} = R_2i = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ В}; u_{R3} = R_3i = 40 \cdot 0,2 = 8 \text{ В.}$$

Проверим выполнение второго закона Кирхгофа в данной цепи:

$$\Sigma e = e_1 - e_2 = 50 - 30 = 20 \text{ В};$$

$$\Sigma u = u_{Ri1} + u_{Ri2} + u_{R1} + u_{R2} + u_{R3} = 1 + 3 + 6 + 2 + 8 = 20 \text{ В.}$$

Как видно из данной проверки, второй закон Кирхгофа выполняется, следовательно, расчеты произведены правильно.

В данном примере все ЭДС и токи неизменны во времени, поэтому в такой цепи все мгновенные значения токов и напряжений в каждый момент времени равны действующим, максимальным значениям, а также размаху этих величин.

**Пример 3.2.** В цепи рис. 3.1, б ЭДС  $e_1$  имеет прямоугольную форму с периодом 20 мс, максимальным значением  $U_m = 240$  В при скважности  $S = 4$ , а ЭДС  $e_2$  имеет форму, неизменную во времени, причем  $e_2 = E_2 = 80$  В. Рассчитать мгновенные, действующие, максимальные значения токов на всех элементах, а также их размах.

**Решение.** Определим графически форму эквивалентной ЭДС. Для этого построим графики  $e_1 = f(t)$ ,  $e_2 = f(t)$ ,  $e_{\Sigma} = f(t)$  (рис. 3.6, а). Так как  $S = T/t_{\text{и}}$ , то  $t_{\text{и}} = T/S = 20/4 = 5$  мс. В любой момент  $e_{\Sigma}$  представляет алгебраическую сумму значений  $e_1$  и  $e_2$ . Как видно из рис. 3.6, а, эквивалентная ЭДС имеет следующие значения: в интервале от  $t = 0$  до  $t = T/4 = 5$  мс  $e_{\Sigma} = 240 + (-80) = 160$  В; в интервале от  $t = T/4 = 5$  мс до  $T = 20$  мс  $e_{\Sigma} = 0 + (-80) = -80$  В, затем все значения повторяются. Рассчитать ток в резистивной цепи — значит определить форму тока и значения этого тока в каждый момент. Данная цепь резистивная, поэтому форма тока повторяет форму напряжения в соответствующем масштабе. Так как в интервале от  $t = 0$  до  $t = T/4 = 5$  мс все мгновенные значения ЭДС  $e_{\Sigma}$  одинаковы и равны 160 В, то все мгновенные значения тока  $i_1$  в этом интервале будут так же одинаковыми и равными  $i_1 = e_{\Sigma}/\Sigma R = 160/100 = 1,6$  А. Аналогично, в интервале от  $t = T/4 = 5$  мс до  $t = T = 20$  мс  $i_2 = e_{\Sigma}/\Sigma R = -80/100 = -0,8$  А (рис. 3.6, б).

Рассчитаем действующее значение тока  $I$ . Для этого следует возвести все мгновенные значения в квадрат, подсчитать площадь за период, разделить получившуюся площадь на основание (т. е. на период) и извлечь квадратный корень. Получившийся результат численно равен действующему значению данного изменяющегося во времени тока, т. е. представляет такой постоянный ток, который на том же сопротивлении и за то же время выде-

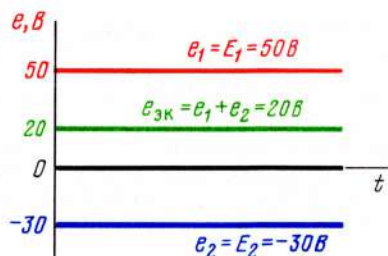
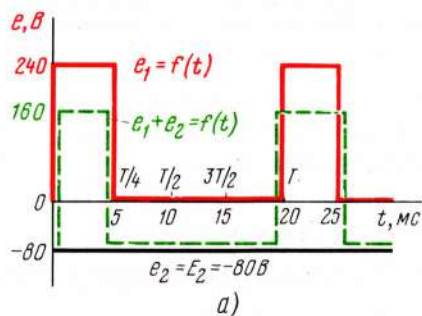
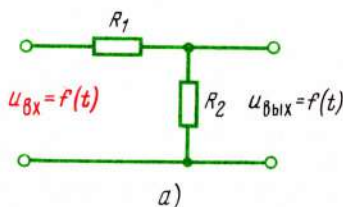
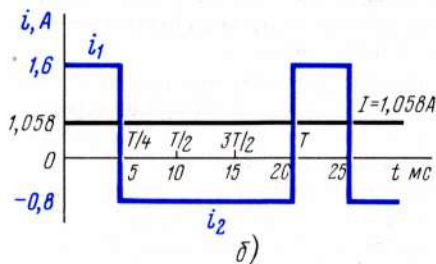


Рис. 3.5

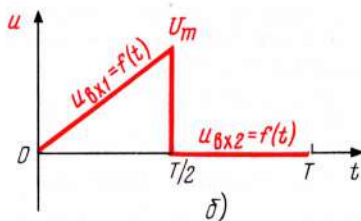


a)

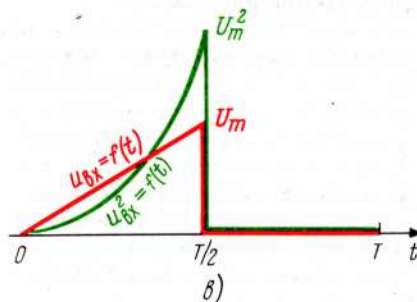


б)

Рис. 3.6



а)



б)

Рис. 3.7

ляет такую же энергию, которую выделяет данный изменяющийся во времени ток. В интервале  $0 \dots T/4$   $i_1^2 = 1,6^2 = 2,56 \text{ A}^2$ , а в интервале  $T/4 \dots T$   $i_2^2 = (-0,8)^2 = +0,64 \text{ A}^2$ . Подсчитаем численное значение площади получившейся квадратичной фигуры:  $i_1^2 T/4 + i_2^2 T/4 = (i_1^2 + 3i_2^2) T/4$ . Поделим получившееся значение на основание фигуры, т. е. на период  $T$  и извлечем корень:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T}{4} (i_1^2 + 3i_2^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2,56 + 3 \cdot 0,64} = 0,5 \sqrt{2,56 + 1,92} = 0,5 \sqrt{4,48} = 0,5 \cdot 2,1166 = 1,058 \text{ A.}$$

Таким образом, ток данной формы выделяет в резистивных сопротивлениях за период такую же энергию, которую выделил бы постоянный ток — 1,058 А. Еще раз обращаем внимание, что постоянный ток  $I = 1,058$  А и изменяющийся ток, показанный на рис. 3.6, б, эквивалентны только по выделяемой энергии и ни в чем более. В частности, информационные свойства данного переменного тока совершенно иные, чем у эквивалентного ему по мощности постоянного тока, различаются также максимальные значения и размах. Действительно, у исследуемого изменяющегося тока — прямое максимальное значение (т. е. при положительной полярности)  $U_{m\text{пр}} = 1,6$  А, обратное максимальное значение (т. е. при отрицательной полярности)  $I_{m\text{обр}} = 0,8$  А, размах тока  $I_p = 1,6 - (-0,8) = 2,4$  А. У эквивалентного по средней мощности постоянного тока  $I_{m\text{пр}} = 1,058$  А,  $I_{m\text{обр}} = 0$ ,  $I_p = 1,058$  А. Из приведенных расчетов видно, что ориентироваться на эквивалентные значения токов или напряжений следует с большой осторожностью, поскольку замена переменного тока постоянным справедлива только в некоторых частных случаях и несправедлива по большинству различных электрических параметров.

**Пример 3.3.** Рассчитать закон мгновенных токов в цепи и напряжений на сопротивлении  $R_2$ , а также действующее значение входного напряжения для цепи (рис. 3.7, а). Форма входного напряжения показана на рис. 3.7, б.

**Решение.** Из рис. 3.7, б видно, что в интервале  $0 \dots T/2$  мгновенные значения входного напряжения изменяются по закону  $u_{\text{вх}1}(t)$ , а в интервале  $T/2 \dots T$  — по закону  $u_{\text{вх}2}(t)$ . Запишем аналитические выражения этих напряжений. В интервале  $0 \dots T/2$  мгновенные напряжения возрастают по линейному закону, следовательно, выражение для мгновенных значений напряжений в данном интервале представляет уравнение, которым описывают прямую линию, проходящую через начало координат. Как известно, это уравнение имеет вид  $y = kx$ , где  $y$  — определяемая функция (в нашем случае это мгновенные значения напряжения  $u$ );  $k$  — тангенс угла наклона прямой (в нашем случае  $k = U_m/(T/2)$ , т. е. отношение катета противолежащего углу к катету, прилежащему к этому же углу);  $x$  — переменная величина (в нашем случае время  $t$ ). Таким образом, мгновенные напряжения  $u_{\text{вх}1} = (2U_m/T)t$ . В интервале  $T/2 \dots T$  — тангенс угла наклона между прямой мгновенных значений и осью времени равен нулю, следовательно,  $u_{\text{вх}2} = 0$ .

В общем случае мгновенные значения тока в цепи  $i = u/R$ , где  $u$  — закон, по которому изменяются мгновенные напряжения на зажимах цепи;  $R$  — резистивное сопротивление цепи. Следовательно, в интервале  $0 \dots T/2$

$$i = u/R = \left( \frac{2U_m}{T}t \right) / (R_1 + R_2) = 2U_m t / [T(R_1 + R_2)].$$

В интервале  $T/2 \dots T$   $i = 0$ . Мгновенные напряжения на сопротивлении  $R_2$  определяются из выражений: в интервале  $0 \dots T/2$   $u_{R2} = u_{\text{вых}} = R_2 i = [2U_m R_2 / T(R_1 + R_2)]t$ , в интервале  $T/2 \dots T$   $u = 0$ .

Рассчитаем действующее значение входного напряжения. Нарисуем графики  $u_{\text{вх}} = f(t)$ ,  $u_{\text{вх}}^2 f(t)$  (рис. 3.7, в) и запишем их аналитические выражения:

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{2U_m}{T}t, \quad u_{\text{вх}}^2(t) = \frac{4U_m^2}{T^2}t^2.$$

Чтобы найти площадь получившейся квадратичной фигуры, следует всю площадь раз-



бить на бесконечно большое количество бесконечно малых площадок  $dS$ , а затем эти площадки просуммировать

$$dS = u_{\text{вх}}^2 dt, \quad S_1 = \int_0^{T/2} u_{\text{вх}}^2 dt = \int_0^{T/2} \frac{4U_m^2}{T^2} t^2 dt.$$

Множитель  $4U_m^2/T^2$  представляет величину постоянную, не зависящую от времени, поэтому выносится из-под интеграла, после чего получается

$$S = \frac{4U_m^2}{T^2} \int_0^{T/2} t^2 dt.$$

Напомним, что  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ , следовательно,

$$S_1 = \frac{4U_m^2}{T^2} \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^{T/2} = \frac{4U_m^2}{T^2} \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{T}{2}\right)^3 - 0 \right] = \frac{4U_m^2 T^3}{T^2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{U_m^2 T}{6}.$$

Площадь  $S_2 = 0$ , общая площадь за период  $S = S_1 + S_2 = S_1 = U_m^2 T/6$ . Для нахождения действующего (среднеквадратического) значения  $U$  получившуюся площадь следует поделить на период  $T$  и извлечь квадратный корень:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} S} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{U_m^2 T}{6}} = \frac{U_m}{2,4495} = 0,4082 U_m.$$

Заметим, что подсчет площадей для кривых с достаточно сложными профилями чаще всего выполняют с помощью ЭВМ, о чем будет сказано в последующих параграфах.

### 3.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ В ЦЕПИ

Рассмотрим распределение потенциалов в замкнутой цепи. Потенциалы точек цепи изменяются, если происходит переход: 1) через источник напряжения с ЭДС  $e$  и 2) через сопротивление, по которому протекает ток. При переходе с минусового зажима источника на плюсовой, потенциал увеличивается на значение ЭДС этого источника, а при переходе с плюсового зажима на минусовой — соответственно понижается на ЭДС  $e$ . Значение тока на изменении потенциалов никак не сказывается, изменение потенциалов определяется только ЭДС источника. При переходе через сопротивление потенциал изменяется на  $Ri$ , причем в точке, от которой по сопротивлению протекает ток, потенциал выше, чем в точке, в которую ток втекает (см. рис. 3.3).

Таким образом, чтобы рассчитать потенциалы точек в цепи, необходимо: рассчитать токи, протекающие по сопротивлению цепи; обозначить буквами точки, в которых один элемент соединяется с другим; принять потенциал одной из точек (безразлично, какой) за начальный, например нулевой; рассчитать потенциалы каждой точки по правилам, изложенным выше.

### 3.6. РАСЧЕТ ТОКОВ НА УЧАСТКЕ РЕЗИСТИВНОЙ ЦЕПИ С ИСТОЧНИКОМ НАПЯЖЕНИЯ

Пусть имеется участок электрической цепи, содержащий резистивное сопротивление  $R$  и источник напряжения с мгновенным значением ЭДС  $e$  (рис. 3.8, а). Напряжение на зажимах цепи в рассматриваемый момент  $u$ ,

полярности напряжения и ЭДС такие, как показаны на рисунке. Чтобы рассчитать мгновенный ток на данном участке цепи  $i$ , необходимо использовать следующую методику.

1. Задаться предполагаемым мгновенным током так, как стал бы протекать этот ток, если бы источника  $e$  в цепи не было. Очевидно, что в этом случае ток стал бы протекать от точки, потенциал которой выше, к точке, потенциал которой ниже, т. е. в рассматриваемой цепи от точки с положительным потенциалом  $B$  к точке с отрицательным потенциалом  $A$ . Показать предполагаемый ток стрелкой около провода.

2. Записать выражение закона Ома для данной цепи, полагая  $e = 0$ . В этом случае  $i = u/R$ .

3. Добавить в числитель формулы ЭДС  $e$ , причем, если направление ЭДС совпадает с направлением предполагаемого тока, то со знаком плюс, а если противоположное, то со знаком минус. Например, в цепи рис. 3.8,  $a$  указанные направления противоположны, поэтому  $i = (u - e)/R$ .

4. Подставить числовые значения напряжения, ЭДС, сопротивления и произвести вычисления. Если ток получается величиной положительной, то действительное направление тока совпадает с предполагаемым, а если отрицательным, то противоположно. Например, если в данный момент  $u = 10$  В,  $e = 20$  В,  $R = 100$  Ом, то  $i = (u - e)/R = (10 - 20)/100 = -10/100 = -0,1$  А =  $-100$  мА. Следовательно, в данный момент ток имеет значение  $100$  мА и протекает от точки  $A$  к точке  $B$ .

Если на рассматриваемом участке имеется несколько резисторов и несколько источников, то сначала следует найти эквивалентные сопротивления и ЭДС, а затем производить расчеты указанным способом.

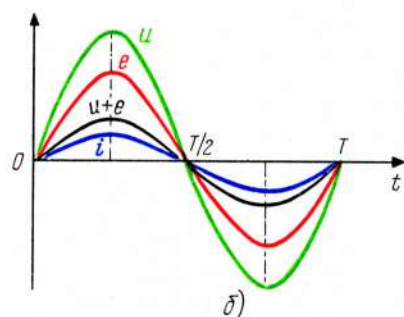
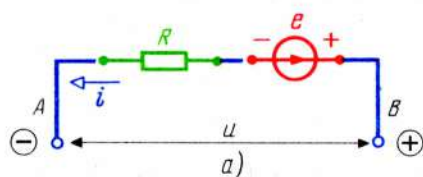


Рис. 3.8

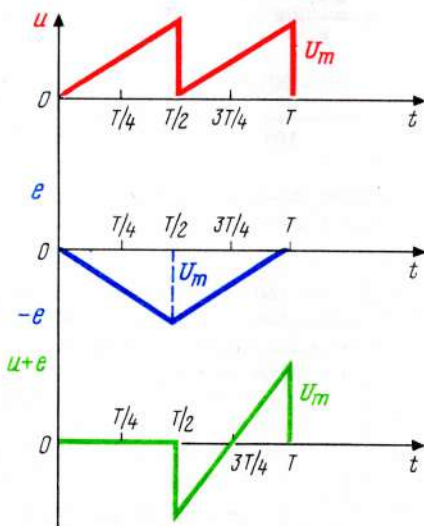


Рис. 3.9

Поскольку в резистивных цепях расчеты можно производить не только для мгновенных, но и для действующих, максимальных значений и размахов, то справедливыми являются следующие выражения:

$$I = (U \pm E) / \Sigma R; I_m = (U_m \pm E_m) / \Sigma R; I_p = (U_p \pm E_p) / \Sigma R. \quad (3.7)$$

Если формы ЭДС и напряжения одинаковые, то форма тока будет такой же, как во всякой резистивной цепи, а если формы ЭДС и напряжения различные, то форма тока будет определяться алгебраической суммой мгновенных значений ЭДС источника и напряжения на зажимах цепи.

В более общем виде мгновенный ток  $i$  на участке цепи с резистивным сопротивлением

$$i = (u + e) / \Sigma R, \quad (3.8)$$

где  $u$  — мгновенные напряжения на зажимах участка цепи;  $e$  — мгновенные ЭДС источника на данном участке цепи.

**Пример 3.4.** Мгновенные напряжения на зажимах резистивной цепи сопротивлением  $R = 100$  Ом изменяются по синусоидальному закону и определяются из выражения  $u = U_m \sin \frac{2\pi}{T} t = 50 \sin \frac{2\pi}{T} t$ . Электродвижущая сила источника имеет также синусоидальную форму с одинаковым периодом  $T$   $e = E_m \sin \frac{2\pi}{T} t = -20 \sin \frac{2\pi}{T} t$ . Рассчитать аналитически закон изменения мгновенных значений тока в цепи.

**Решение.** Напряжение и ЭДС в данном случае имеют одинаковую синусоидальную форму, поэтому алгебраическая сумма  $u + e$  и ток в цепи будут изменяться по одному и тому же закону:

$$\begin{aligned} i &= \frac{u + e}{R} = \frac{U_m \sin \frac{2\pi}{T} t + E_m \sin \frac{2\pi}{T} t}{R} = \frac{(U_m + E_m) \sin \frac{2\pi}{T} t}{R} = \\ &= \frac{(50 - 20) \sin \frac{2\pi}{T} t}{100} = 0,3 \sin \frac{2\pi}{T} t, \text{ рис. 3.8, б.} \end{aligned}$$

**Пример 3.5.** В цепи, изображенной на рис. 3.8, а,  $u = 0$ , значения ЭДС во времени не изменяются,  $e = E = 10$  В,  $R = 1$  кОм. Определить ток в цепи.

**Решение.** Так как  $u = 0$ , то  $i = e/R = E/R = 10/1000 = 0,01$  А = 10 мА. Значения ЭДС не меняются во времени, поэтому и значения тока также будут постоянными. Направление тока определяется направлением ЭДС.

**Пример 3.6.** Рассчитать графически форму тока в цепи рис. 3.8, а, если напряжение имеет пилообразную форму (рис. 3.9), а ЭДС — треугольную с такой же амплитудой.

**Решение.** Построим кривые мгновенных значений напряжения  $u$ , ЭДС  $e$  и алгебраической суммы  $u + e$ . В интервале  $0 \dots T/2$  мгновенные значения в каждый момент равны нулю, поскольку, как видно из рис. 3.9, в этом интервале  $e = -u$ , откуда  $u + e = 0$ . В момент  $t = T/2$   $u = 0$ ,  $e = -U_m$ ,  $u + e = -U_m$ ; в момент  $t = 3T/4$   $u = 0,5 U_m$ ,  $e = -0,5 U_m$ ,  $u + e = 0$ , в момент  $t = T$   $u = U_m$ ,  $e = 0$ ,  $u + e = U_m$ . Форма тока в резистивной цепи будет повторять форму кривой  $u + e$ , т. е. в течение половины периода ток будет равен нулю, в момент  $T/2$  — скачком уменьшается до  $-U_m$ , затем по линейному закону увеличится до  $U_m$ , после чего кривая повторяется в течение каждого периода.



### 3.7. БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ

Известно, что энергия не исчезает, а только переходит из одного вида в другой в равных количествах, поэтому энергия, отдаваемая источниками, равна энергии, потребляемой в резистивных сопротивлениях, т. е.  $\sum W_{\text{и}} = \sum W_{\text{н}}$ , или  $\sum P_{\text{и}} t = \sum P_{\text{н}} t$ , откуда  $\sum P_{\text{и}} = \sum P_{\text{н}}$ , где  $\sum P_{\text{и}}$  — алгебраическая сумма мощностей, отдаваемых источниками, а  $\sum P_{\text{н}}$  — арифметическая сумма мощностей, рассеиваемых в резистивных сопротивлениях цепи. Равенство выражений мощностей источников и мощностей в сопротивлениях называют уравнением баланса мощностей. Мощность, отдаваемая источниками напряжения  $P_{\text{и}} = EI$ , где  $E$  — действующее значение ЭДС источника, а  $I$  — действующее значение тока, протекающего через этот источник, причем если действительное (положительное) направление тока совпадает с направлением ЭДС, то мощность такого источника положительная, а если противоположно, то отрицательная. Мощность в резистивном сопротивлении  $P_{\text{н}} = I^2 R$  и всегда является положительной, поскольку мощность, затрачиваемая на нагрев резистора, не зависит от направления тока в резисторе. На это же указывает и то обстоятельство, что ток в формуле мощности оказывается в квадрате и, следовательно, при любом знаке есть величина положительная.

**Пример 3.7.** Записать уравнение баланса мощностей для цепи рис. 3.1, б, если положительный ток направлен по часовой стрелке.

**Решение.** Прежде всего, следует иметь в виду, что расчет баланса мощностей производится для действующих значений токов и напряжений, поэтому знать форму напряжений и токов необходимо только для расчета их действующих значений. Если же действующие значения известны (или уже найдены), то формы сигналов не имеют значения, поскольку эти сигналы уже заменены источником постоянного напряжения. Расчет баланса мощностей — это тот сравнительно редкий случай в теории цепей, когда источник с произвольной формой напряжения требуется заменять источником постоянного напряжения.

Мощности источников

$$\sum P_{\text{и}} = E_1 I - E_2 I.$$

Потребляемая мощность

$$\sum P_{\text{н}} = I^2 R_{i1} + I^2 R_{i2} + I^2 R_1 + I^2 R_2 + I^2 R_3.$$

### 3.8. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ

*Разветвленными* называются цепи, содержащие узлы, т. е. точки, к которым подходит не менее трех проводников. Поскольку энергия в узлах накапливаться не может, сумма токов, притекающих в любой момент к узлу, равна сумме токов, утекающих от узла. Например, в цепи, изображенной на рис. 3.10,

$$i_{\text{пр}1} + i_{\text{пр}2} + i_{\text{пр}3} = i_{\text{ут}1} + i_{\text{ут}2}. \quad (3.9)$$

Данное правило называется *первым законом Кирхгофа*. В резистивных цепях мгновенные напряжения и токи пропорциональны друг другу, поэтому первый закон Кирхгофа справедлив не только для мгновенных, но и для действующих, амплитудных значений, а также для размаха токов. Если в (3.8) все члены перенести в левую часть равенства, то

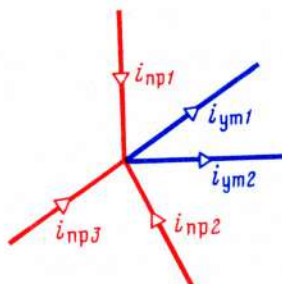


Рис. 3.10

$$i_{np1} + i_{np2} + i_{np3} - i_{ym1} - i_{ym2} = 0, \text{ или, короче } \Sigma i = 0, \quad (3.10)$$

т. е. алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле равна нулю. При этом токи, притекающие к узлу, записываются с одним знаком, а утекающие от узла — с другим.

Таким образом, в резистивных цепях первый закон Кирхгофа может быть записан в виде одного из следующих выражений:

$$\Sigma i_{np} = \Sigma i_{yt}; \Sigma I_{np} = \Sigma I_{yt}; \Sigma I_{m np} = \Sigma I_{m yt}; \Sigma I_{p np} = \Sigma I_{p yt},$$

или

$$\Sigma i = 0; \Sigma I = 0; \Sigma I_m = 0; \Sigma I_p = 0; \quad (3.11)$$

причем в первых четырех уравнениях в левой части равенства записываются арифметические суммы токов, притекающих к узлу, а в правой части — арифметическая сумма токов, утекающих от узла. В последних четырех уравнениях в левой части равенства записывают алгебраические суммы токов в узле.

Сделаем еще два замечания.

1. Точки цепи, к которым подходят не менее трех проводников, чаще всего называют просто "узлами", но в последнее время, в связи с развитием электронно-вычислительной техники, такие узлы стали называть также "сложными" или "неустраняемыми". Таким образом, точки цепи, к которым подходят не менее трех проводников к каждой, могут называться или "узлом" или "сложным узлом", или "неустраняемым узлом".

2. Уравнения, составленные на основании первого закона Кирхгофа, могут быть составлены не только для узлов, но и для сечений, о чем будет сказано ниже.

### 3.9. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ РЕЗИСТОРОВ

*Параллельным* называется такое соединение, при котором на зажимах всех элементов цепи имеется одно и то же напряжение (заметьте, не равное, а именно одно и то же). При параллельном соединении нескольких сопротивлений всегда имеется два узла, между которыми эти сопротивления включены. Весьма полезно помнить, что если элементы цепи соединены последовательно, то, как правило, удобнее оперировать с сопротивлениями этих элементов, а если параллельно, то проводимостями, поэтому в цепи, состоящей из нескольких резисторов, соединенных между собой параллельно, для определения общего сопротивления цепи следует сначала найти

проводимости каждого элемента  $G$ , затем сложить все проводимости и только после этого рассчитать эквивалентное сопротивление цепи из выражения

$$R_{\text{эк}} = 1/G_{\text{эк}}. \quad (3.12)$$

Например, чтобы рассчитать сопротивление цепи между точками  $AB$  (рис. 3.11,  $a$ ), необходимо проделать следующее.

1. Определить проводимость каждого резистивного сопротивления:  $G_1 = 1/R_1$ ;  $G_2 = 1/R_2$ ;  $G_3 = 1/R_3$ .

2. Найти общую проводимость цепи:

$$G_{\text{эк}} = \Sigma G = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3}.$$

3. Рассчитать эквивалентное сопротивление цепи:

$$R_{\text{эк}} = \frac{1}{G_{\text{эк}}} = \frac{1}{\left( \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3} \right)} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (3.13)$$

Прокомментируем схему рис. 3.11,  $a$ . Обозначим зажимы резистора  $R_1$  буквами  $D$  и  $F$ ; резистора  $R_2$  — буквами  $M$  и  $N$ , резистора  $R_3$  — буквами  $P$  и  $S$ , общие зажимы цепи — буквами  $A$  и  $B$ . Следует иметь в виду, что поскольку между точками  $A, P, M, D$  нет никаких источников или сопротивлений, то все эти точки являются однопотенциальными, т. е.  $\varphi_A = \varphi_D = \varphi_M = \varphi_P$  и обозначать эти точки различными буквами не требуется, поскольку точки  $D, M, P$  образуют один электрический узел. Всю левую сторону цепи можно обозначить одной буквой, например  $A$ . Аналогично с правой стороны цепи точки  $F, N, S$  также образуют один узел, потенциал которого равен потенциалу точки  $B$ . Схему рис. 3.11,  $a$  можно изобразить в несколько ином начертании, например так, как показано на рис. 3.11,  $b$ , где все токи и напряжения будут такими же, как и в цепи рис. 3.11,  $a$ . Поскольку каждое резистивное сопротивление обладает положительной проводимостью, проводимость цепи будет больше проводимости любого из сопротивлений и, следовательно, общее сопротивление цепи, состоящей из нескольких резистивных сопротивлений, соединенных параллельно друг другу, будет меньше меньшего из сопротивлений, соединенных параллельно. (Для срав-

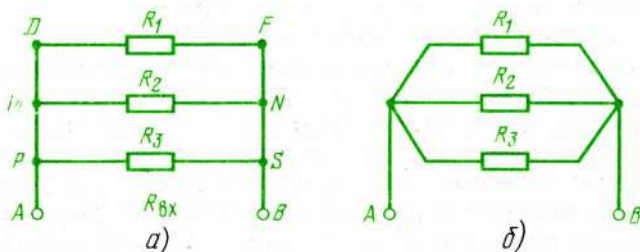


Рис. 3.11



нения заметим, что общее сопротивление цепи, состоящей из резисторов, соединенных последовательно, больше, чем сопротивление резистора с самым большим сопротивлением.) Например, резисторы с сопротивлениями  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 200 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 300 \text{ Ом}$  соединены параллельно. Рассчитать эквивалентное сопротивление цепи  $R_{\text{эк}}$ . На основании вышеизложенного правила можно утверждать, не делая никаких расчетов, что общее сопротивление такой цепи будет менее 100 Ом, т. е. самого малого из всех трех сопротивлений, соединенных параллельно. Рассчитаем  $R_{\text{эк, пар}}$ :

$$R_{\text{эк, пар}} = R_1 R_2 R_3 / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) = 100 \cdot 200 \cdot 300 / (100 \cdot 200 + 100 \cdot 300 + 200 \cdot 300) = 600/11 = 54,5 \text{ Ом}.$$

Если эти же сопротивления соединить последовательно, то общее сопротивление будет больше 300 Ом. Действительно, в этом случае  $R_{\text{эк, посл}} = R_1 + R_2 + R_3 = 100 + 200 + 300 = 600 \text{ Ом}$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Рассчитаем общее сопротивление цепи, состоящей из двух сопротивлений ( $R_1$  и  $R_2$ ), соединенных параллельно (рис. 3.12). Произведем расчет по общему правилу:

$$G_{\text{эк}} = G_1 + G_2 = 1/R_1 + 1/R_2 = (R_1 + R_2)/R_1 R_2;$$

$$R_{\text{эк, пар}} = 1/G_{\text{эк}} = \frac{1}{(R_1 + R_2)/R_1 R_2} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2).$$

Таким образом, если два сопротивления соединены параллельно, то их эквивалентное сопротивление равно дроби, у которой в числителе — произведение, а в знаменателе — сумма этих сопротивлений.

2. Рассчитаем общее сопротивление цепи, состоящей из  $n$  одинаковых резисторов, соединенных параллельно:

$$G_{\text{эк, пар}} = nG = n(1/R); \quad R_{\text{эк, пар}} = 1/G_{\text{эк}} = R/n,$$

где  $R$  — сопротивление каждого резистора. Общая мощность, которую можно рассеять в цепи, в данном случае возрастает в  $n$  раз. Например, требуется включить в цепь резистор сопротивлением 100 Ом с допустимой мощностью рассеяния 5 Вт, однако в наличии имеются резисторы по  $R = 500 \text{ Ом}$  с допустимой мощностью  $P_{\text{доп}} = 1 \text{ Вт}$ . Каким образом следует соединить имеющиеся в наличии резисторы, чтобы удовлетворить заданные требования? Очевидно, что необходимо соединить параллельно пять резисторов по 500 Ом, общее сопротивление при этом станет  $R_{\text{эк}} = R/n = 500/5 = 100 \text{ Ом}$ , а мощность рассеяния  $P_{\text{эк}} = P_{\text{доп}} n = 1 \cdot 5 = 5 \text{ Вт}$ .

Введем понятия — ветвь, контур, двухполюсник, входные параметры. *Ветвью* называется часть цепи, заключенная между любыми двумя узлами. Так, цепи, изображенные на рис. 3.11, а и 3.11, б, имеют по три ветви (ветви с  $R_1$ , с  $R_2$  и  $R_3$ ), а цепь, показанная на рис. 3.12 — две ветви. *Контуром* называется любой замкнутый путь, образованный одним или несколькими ветвями. Неразветвленная цепь содержит только один контур, а разветвленная — несколько контуров. *Двухполюсником* называется цепь, содержащая два зажима, например цепи (рис. 3.11, а, 3.11, б, 3.12). *Входным сопротивлением* двухполюсника называется сопротивление между его входными

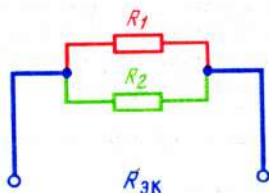


Рис. 3.12

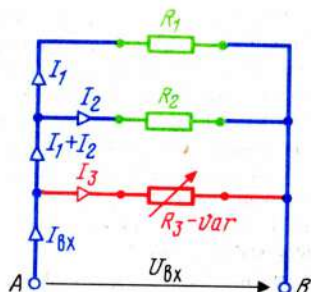


Рис. 3.13

зажимами. Эти сопротивления могут быть названы "общими", "эквивалентными", но наиболее точный термин — входные. При анализе цепей рис. 3.11 и 3.12 преднамеренно использовались термины "общие" и "эквивалентные", чтобы показать возможность применения этих терминов, но в дальнейшем будет в основном использоваться термин "входное сопротивление"  $R_{\text{вх}}$  или "входная проводимость"  $G_{\text{вх}}$ . Например, в цепи рис. 3.12

$$R_{\text{вх}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \quad \text{или} \quad G_{\text{вх}} = (R_1 + R_2) / R_1 R_2.$$

Аналогично входное сопротивление цепи рис. 3.11, б, как видно из (3.12), составляет 54,5 Ом.

*Входным напряжением* называется напряжение, приложенное к входным зажимам цепи, а *входным током* — ток во входной ветви цепи.

**Пример 3.8.** Рассчитать входное сопротивление цепи  $R_{\text{вх}}$ , показанной на рис. 3.13, и действующие значения токов во всех ветвях, если значение сопротивления  $R_3$  изменяется от нулевого до бесконечно большого, а действующее значение входного напряжения —  $U_{\text{вх}}$ . Условимся, что если около какого-то элемента имеется обозначение var, то значение этого элемента может изменяться, в общем случае от нуля до бесконечности.

**Решение.** Определим путем рассуждений пределы изменений входного сопротивления цепи  $R_{\text{вх}}$  (т. е. сопротивления между точками А, В) при изменении сопротивления  $R_3$  от 0 до  $\infty$ . Если  $R_3 = 0$ , то  $R_{\text{вх}} = 0$ , поскольку при параллельном соединении нескольких резисторов входное сопротивление цепи меньше меньшего сопротивления, а при нулевом значении одного из сопротивлений — также равно нулю, так как входные зажимы цепи при этом замкнуты коротко. При  $R_3 = \infty$  третья ветвь оказывается разомкнутой, при этом  $R_3$  не существует и цепь получается состоящей из сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , соединенных параллельно, при этом  $R_{\text{вх}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . Таким образом, при изменении сопротивления  $R_3$  от 0 до  $\infty$  входное сопротивление должно изменяться от 0 до  $R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

Произведем все расчеты аналитически. По (3.13) при трех сопротивлениях, соединенных параллельно,

$$R_{\text{вх}} = R_1 R_2 R_3 / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3).$$

Положим  $R_3 = 0$ ; в этом случае числитель обращается в нуль, а знаменатель — в конечное значение  $R_1 R_2$ . Но нуль, деленный на конечное число, есть нуль. Таким образом, при  $R_3 = 0$   $R_{\text{вх}} = 0$ , что и должно было иметь место. Подставим  $R_3 = \infty$ . В этом случае

$$R_{\text{вх}} = R_1 R_2 \infty / (R_1 R_2 + R_1 \infty + R_2 \infty) = \infty / \infty,$$

т. е. получается неопределенность вида "бесконечность, деленная на бесконечность". Раскрывать подобную неопределенность, как известно, следует по правилу Лопителя, т. е. брать производные от числителя и знаменателя до тех пор, пока не получится конечное значение. Однако при расчетах подобных выражений в ряде случаев можно обойтись без взятия производных, с помощью чисто алгебраических преобразований. Обращаем внимание, что раскрывать неопределенность вида  $\infty/\infty$  учащимся придется весьма часто, поэтому необходимо разобраться в данных преобразованиях и затем ими постоянно пользоваться.

Раскрывать неопределенность вида  $\infty/\infty$  алгебраическим образом необходимо в такой последовательности:

1. Написать формулу, по которой производятся расчеты.
2. Посмотреть, какую наибольшую степень имеет член, обращающийся в  $\infty$ .
3. Вынести из числителя и знаменателя за скобку множитель, образующийся в бесконечность, в той степени, которая в данном выражении является наибольшей.
4. Сократить множители, вынесенные в числителе и знаменателе за скобку. После произведенных преобразований переменная величина окажется в знаменателях слагаемых и при подстановке вместо нее бесконечности станет обращаться в нуль, после чего в выражении останутся только члены с конечными значениями. Проведем преобразования по приведенной методике. Искомое входное сопротивление рассчитывают по формуле

$$R_{BX} = R_1 R_2 R_3 / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3).$$

Переменной величиной является  $R_3$ , причем наибольшая степень члена  $R_3$  — первая. Вынесем из числителя и знаменателя  $R_3$  за скобки:

$$R_{BX} = \frac{R_3 (R_1 R_2)}{R_3 \left( \frac{R_1 R_2}{R_3} + R_1 + R_2 \right)} = \frac{R_1 R_2}{\frac{R_1 R_2}{R_3} + R_1 + R_2}.$$

Подставим  $R_3 = \infty$ , в этом случае

$$R_{BX} = \frac{R_1 R_2}{\frac{R_1 R_2}{\infty} + R_1 + R_2}.$$

Так как  $R_1 R_2 / \infty = 0$ , то  $R_{BX} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ , что и должно было получиться.

Рассчитаем токи в ветвях:

$I_1 = U_{BX} / R_1$ , при изменении  $R_3$  остается неизменным, поскольку  $R_3$  в данное выражение не входит;

$I_2 = U_{BX} / R_2$ , при изменении  $R_3$  остается неизменным по тем же причинам;

$I_1 + I_2 = U_{BX} / R_1 + U_{BX} / R_2 = U_{BX} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)$ , от  $R_3$  не зависит.

$I_3 = U_{BX} / R_3$ , при изменении  $R_3$  от 0 до  $\infty$   $I_3$  меняется от  $\infty$  до 0

$$I_{BX} = I_1 + I_2 + I_3 = U_{BX} / R_1 + U_{BX} / R_2 + U_{BX} / R_3 = U_{BX} \left( \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3} \right).$$

Исследуем изменение тока  $I_{BX}$  при изменении сопротивления  $R_3$ . При  $R_3 = 0$

$$I_{BX} = U_{BX} \left( \frac{R_1 R_2}{0} \right) = \infty.$$

(Напомним, что частное от деления величины с конечным значением на бесконечно малую есть величина с бесконечно большим значением.)



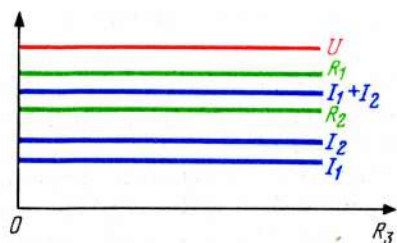


Рис. 3.14

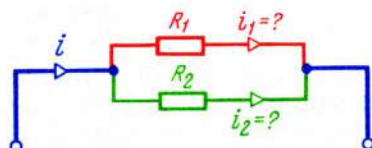


Рис. 3.15

Для исследования случая  $R_3 = \infty$  следует произвести преобразования, аналогичные выполненным ранее:

$$I_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} \left[ \frac{R_3 (R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3})}{R_3 (R_1 R_2)} \right]. \text{ При } R_3 = \infty \quad I_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right).$$

Графики напряжений, сопротивлений и токов показаны на рис. 3.14.

### 3.10. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЕТВЯХ

Пусть в цепи, состоящей из двух сопротивлений, соединенных параллельно, известны ток в неразветвленной части цепи  $i$  и сопротивления ветвей  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 3.15). Требуется рассчитать токи в ветвях  $i_1$  и  $i_2$ . Так как сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  соединены параллельно, то для любого момента будет справедливо равенство  $u_{R1} = u_{R2}$  или  $R_1 i_1 = R_2 i_2$ . Но по первому закону Кирхгофа  $i_2 = i - i_1$ ; тогда  $R_1 i_1 = R_2 (i - i_1) = R_2 i - R_2 i_1$ , т. е.  $R_1 i_1 + R_2 i_1 = R_2 i$ . Вынеся  $i_1$  за скобку, получим  $(R_1 + R_2) i_1 = R_2 i$ , откуда

$$i_1 = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3.14)$$

Проделав аналогичные преобразования, получим  $i_2 = i \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ . Поскольку данная цепь резистивная, аналогичные выражения можно написать также для действующих, максимальных значений и размаха, т. е.

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad I_{m1} = I_m \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_{m2} = I_m \frac{R_1}{R_1 + R_2};$$

$$I_{p1} = I_p \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_{p2} = I_p \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (3.15)$$

Из полученных выражений видно, что ток в ветви равен току в неразветвленной части цепи, умноженному на дробь, у которой в знаменателе — сумма сопротивлений параллельных ветвей, а в числителе — сопротивление противоположной ветви.

### 3.11. СОЕДИНЕНИЕ РЕЗИСТОРОВ ТРЕУГОЛЬНИКОМ И ЗВЕЗДОЙ

Если имеется три сопротивления, образующих три узла, то такие сопротивления составляют пассивный треугольник (рис. 3.16, а), а если имеется только один узел — то пассивную звезду (рис. 3.16, б). Слово "пассивный" означает, что внутри данной цепи отсутствуют какие-либо источники электрической энергии. Обозначим сопротивления в цепи треугольника — большими (прописными) буквами ( $R_{AB}$ ,  $R_{BD}$ ,  $R_{DA}$ ), а в цепи звезды — малыми ( $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_D$ ). Схему пассивного треугольника сопротивлений можно заменить эквивалентной схемой пассивной звезды, при этом все токи в ветвях, не подвергавшихся преобразованию (т. е. все, что на рис. 3.16, а и 3.16, б находится за пределами штриховой кривой), остаются без всяких изменений. Например, если к узлам  $A$ ,  $B$ ,  $D$  в схеме треугольника притекали (или утекали) токи  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_D$ , то и в схеме эквивалентной звезды к точкам  $A$ ,  $B$ ,  $D$  будут притекать (или утекать) те же самые токи  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_D$ .

Расчет сопротивлений в схеме звезды  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_D$  по известным сопротивлениям треугольника производится по формулам

$$\begin{aligned} r_A &= R_{AB} R_{DA} / (R_{AB} + R_{BD} + R_{DA}); \\ r_B &= R_{AB} R_{BD} / (R_{AB} + R_{BD} + R_{DA}); \\ r_D &= R_{BD} R_{DA} / (R_{AB} + R_{BD} + R_{DA}), \text{ где } r_A = r_1; r_B = r_2; r_D = r_3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Данные выражения образуются по следующим правилам. Знаменатели у всех выражений одинаковые и представляют сумму сопротивлений треугольника, каждый числитель является произведением тех сопротивлений, которые в схеме треугольника примыкают к точке, к которой примыкают сопротивления звезды, определяемые в данном выражении. Например, сопротивление  $r_A$  в схеме звезды примыкает к точке  $A$  (см. рис. 3.16, б). Следовательно, в числителе следует написать произведение сопротивлений  $R_{AB}$  и  $R_{DA}$ , поскольку в схеме треугольника эти сопротивления примыкают к этой же точке  $A$  и т. д. Если известны сопротивления звезды  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_D$ ,

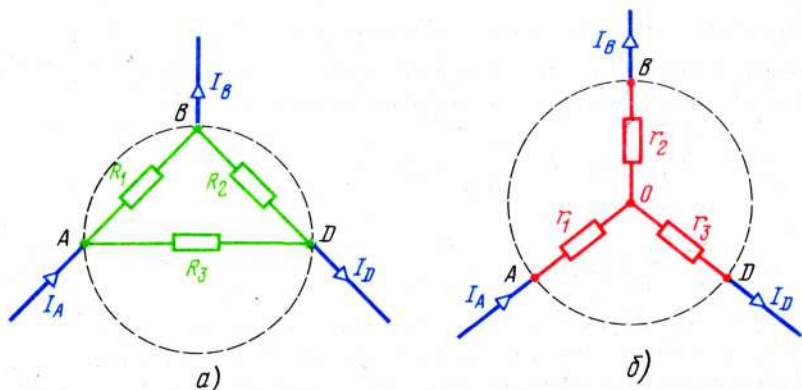


Рис. 3.16

то можно рассчитать сопротивления эквивалентного треугольника  $R_{AB}$ ,  $R_{BD}$ ,  $R_{DA}$  по формулам

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{AB}} &= \frac{1/r_A + 1/r_B + 1/r_D}{1/r_A + 1/r_B + 1/r_D}; \quad \frac{1}{R_{BD}} = \frac{1/r_B + 1/r_D}{1/r_A + 1/r_B + 1/r_D}; \\ \frac{1}{R_{DA}} &= \frac{1/r_D + 1/r_A}{1/r_A + 1/r_B + 1/r_D}, \quad R_{AB} = r_A + r_B + \frac{r_A r_B}{r_D}; \\ R_{BD} &= r_B + r_D + \frac{r_B r_D}{r_A}; \quad R_{DA} = r_D + r_A + \frac{r_D r_A}{r_B}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из приведенных формул видно, что числители всех выражений одинаковые и представляют парные сочетания сопротивлений звезды, а в знаменателе записывается сопротивление, примыкающее к той точке звезды, к которой не примыкает искомое сопротивление треугольника. Например, следует определить  $R_1$ , т. е. сопротивление, примыкающее в схеме треугольника к точкам  $A$  и  $B$ , следовательно, в знаменателе должно быть сопротивление  $r_3 = r_D$ , поскольку это сопротивление в схеме звезды не примыкает ни к точке  $A$ , ни к точке  $B$  и т. д.

### 3.12. ПОНЯТИЕ О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРАФАХ ЦЕПИ

*Топологическим графом цепи* или просто *графом*, называется графическое изображение совокупности узлов цепи и соединительных путей между ними (т. е. ветвей), без указания элементов, входящих в каждую ветвь. Такое структурное изображение цепей в ряде случаев весьма удобно, особенно в тех случаях, когда необходимо показать количество узлов, контуров, провести различные сечения и т. д. В названных и многих других случаях все закономерности остаются неизменными вне всякой зависимости от вида и количества элементов, включенных в каждую ветвь. Например, из рис. 3.17 видно, что цепь, изображенная в виде графа, имеет четыре узла ( $A, B, D, F$ ), шесть ветвей (1, 2, 3, 4, 5, 6), три простых контура ( $ABFA, FBDF, AFDA$ ). Заметим, что "простыми" называются контуры с кратчайшими периметрами. Простые контуры иногда называются также "элемен-

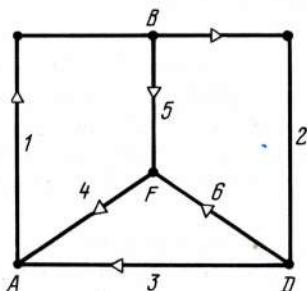


Рис. 3.17

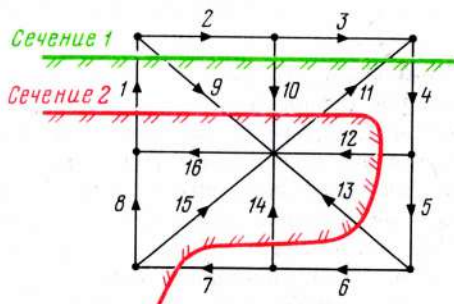


Рис. 3.18



тарными". Обратим внимание, что всего в графе рис. 3.17 шесть контуров:  $ABDA$ ,  $ABFA$ ,  $ABDFA$ ,  $AFBDA$ ,  $AFDA$ ,  $DFBD$ , но простых из них только три. На графах можно показать стрелками направления токов как предполагаемых, так и действительных. Например, на рис. 3.17 видно, что ток первой ветви направлен от точки  $A$  к точке  $B$ , второй — от точки  $B$  к точке  $D$  и так далее.

### 3.13. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА ДЛЯ СЕЧЕНИЙ

Уравнения, основанные на первом законе Кирхгофа, можно составлять либо для узлов, либо для сечений, проведенных произвольным образом. Сечения весьма удобно показывать на графах цепей. *Сечением* называется воображаемая плоскость бесконечно больших размеров, пересекающая граф в произвольных направлениях. На схеме каждой цепи можно провести любое число различных сечений. Условимся, что одну сторону секущей плоскости будем называть "внешней", а другую — "внутренней". В соответствии с первым законом Кирхгофа сумма мгновенных значений токов, притекающих к некоторой стороне плоскости, равна сумме мгновенных значений токов, утекающих от той же стороны плоскости. Например, граф, изображенный на рис. 3.18, имеет 9 узлов и 16 ветвей. Стрелками показаны направления токов в ветвях. Сечения нанесены цветными линиями, причем внутренняя сторона секущей плоскости для удобства заштрихована. Как видно из рис. 3.18, секущая плоскость 1 пересекает ветви 1, 9, 10, 11, 4. Будем считать токи, направленные к внутренней стороне плоскости, притекающими, а от внутренней стороны — утекающими. Можно обозначать и наоборот, что совершенно безразлично. В этом случае уравнение первого закона Кирхгофа для данной плоскости  $i_1 + i_{11} = i_9 + i_{10} + i_4$ . Плоскость может быть не только прямой, но и изогнутой произвольным образом, например так, как показано на сечении 2. Тогда  $i_1 + i_{11} = i_9 + i_{10} + i_{12} + i_{13} + i_{14} + i_7$ .

Таким образом, первый закон Кирхгофа следует формулировать следующим образом: *сумма мгновенных токов, притекающих к узлу или сечению, равна сумме мгновенных токов, утекающих от узла или сечения*. Первый закон Кирхгофа может иметь и такую формулировку: *алгебраическая сумма мгновенных токов в узле или с некоторой стороны сечения равна нулю*.

### 3.14. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ РЕЗИСТИВНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ИСТОЧНИКИ НАПРЯЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ КИРХГОФА

Уравнения, составленные по первому и второму законам Кирхгофа, называются *уравнениями электрического равновесия цепи*. В общем случае законы Кирхгофа справедливы только для мгновенных значений токов и напряжений, но в резистивных цепях уравнения, составленные на основании данных законов, справедливы не только для мгновенных значений, но и для действующих, максимальных и размахов.

Рассчитать цепь — это значит определить токи, протекающие во всех ветвях цепи, и падения напряжений на всех элементах цепи. В разветвленных цепях, т. е. цепях, содержащих узлы, в каждой ветви протекает свой ток и, таким образом, число неизвестных токов в цепи равно числу ветвей, имею-

щихся в цепи. Обозначим число ветвей  $k$ , узлов —  $n$ , простых контуров —  $m$ . Можно показать, что в цепи, содержащей источники напряжения и нагрузочные элементы, можно записать  $n - 1$  независимых уравнений по первому закону Кирхгофа и  $m$  уравнений по второму, причем  $(n - 1) + m = k$ . Например, цепь рис. 3.17 содержит четыре узла и три простых контура, следовательно, для данной цепи можно составить систему из шести уравнений: три по первому закону Кирхгофа и три по второму. Общее число уравнений равно числу ветвей, в данном случае — шести, следовательно, получается система из шести уравнений с шестью неизвестными, что дает возможность определить токи во всех ветвях.

Аналогично в цепи рис. 3.18 имеется 16 ветвей и, следовательно, имеется 16 различных токов. Очевидно, что в данной цепи можно составить восемь независимых уравнений по первому закону Кирхгофа, поскольку в цепи девять узлов, и восемь уравнений по второму, поскольку в цепи восемь простых контуров. Обратим внимание, что при составлении уравнений можно выбирать любые узлы и любые контуры, причем вовсе не обязательно составлять уравнения по простым контурам, можно по любым, важно только чтобы по первому закону Кирхгофа уравнений было  $n - 1$ , а по второму —  $m$ .

### 3.15. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ТОКОВ ПО ЗАКОНАМ КИРХГОФА

Чтобы составить уравнения по законам Кирхгофа, необходимо проделать следующее.

1. Определить по схеме цепи число ветвей, узлов и простых контуров.

2. В каждой ветви задаться предполагаемым (положительным) током. Заметим, что никаких ограничений при этом не накладывается. В частности, вполне возможно все токи направить к узлу, как например, показано на рис. 3.19, *а*. Могут возникнуть сомнения, можно ли направлять токи подобным образом? Ведь в этом случае к узлу токи только протекают и совсем не утекают, не противоречит ли такое направление токов первому закону Кирхгофа? Подобные опасения совершенно напрасны. Дело в том, что на данном этапе расчета показываются не действительные токи, а только пред-

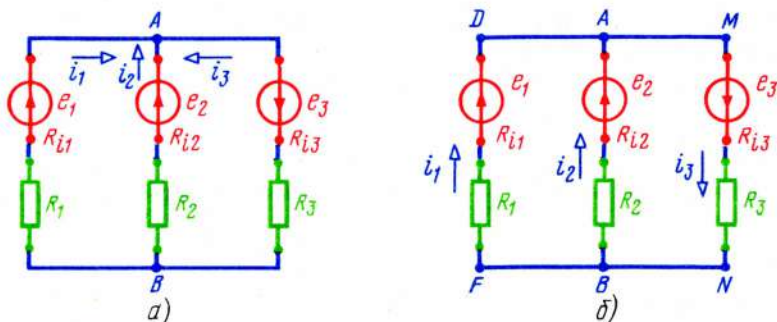


Рис. 3.19

полагаемые, которые можно изображать в любом направлении. Разумеется, в этом случае при выполнении расчетов, по крайней мере, один из токов окажется отрицательным и его действительное направление будет противоположным предполагаемому.

3. Выбрать  $n - 1$  узлов и составить для них уравнения по первому закону Кирхгофа.

4. Выбрать контуры, для которых будут составлены уравнения по второму закону Кирхгофа. Этих контуров должно быть столько, сколько имеется простых контуров в данной цепи.

5. Задаться направлением обхода в каждом контуре.

6. Составить  $m$  уравнений по второму закону Кирхгофа. При этом все ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода по контуру, записывают со знаком плюс, а все ЭДС, направление которых противоположно — со знаком минус. Если падение напряжения образуется током, предполагаемое направление которого совпадает с направлением обхода, то такое напряжение имеет знак плюс, а противном случае — минус.

7. Подставить числовые значения и решить получившуюся систему уравнений. Если ток получился положительным, то это означает, что действительное направление данного тока совпадает с предполагаемым, а если отрицательным, то противоположно. Расчеты можно производить либо ручным способом, либо с помощью вычислительной техники.

8. Рассчитать падения напряжений на всех сопротивлениях. Как и во всякой резистивной цепи, расчеты можно производить для мгновенных, действующих, максимальных значений и для размахов. Например, для цепи рис. 3.19, б можно составить следующие уравнения:

для мгновенных значений токов и напряжений

$$i_1 + i_2 = i_3,$$

$$e_1 - e_2 = (R_{i1} + R_1)i_1 - (R_{i2} + R_2)i_2,$$

$$e_2 + e_3 = (R_{i2} + R_2)i_2 + (R_{i3} + R_3)i_3,$$

для действующих значений

$$I_1 + I_2 = I_3,$$

$$E_1 - E_2 = (R_{i1} + R_1)I_1 - (R_{i2} + R_2)I_2,$$

$$E_2 + E_3 = (R_{i2} + R_2)I_2 + (R_{i3} + R_3)I_3.$$

Подобным же образом составляются аналогичные системы уравнений для максимальных значений и для размахов токов и напряжений.

### 3.16. РАСЧЕТ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ С ПОМОЩЬЮ ПМК

При расчете токов и напряжений в разветвленных цепях весьма часто возникает необходимость в решении системы уравнений с тремя неизвестными вида

$$a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1,$$

$$a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2,$$

$$a_3X + b_3Y + c_3Z = d_3,$$



где  $X, Y, Z$  — значения, которые необходимо рассчитать, а  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$  — постоянные коэффициенты, заданные в системе уравнений. Данный расчет наиболее удобно выполнить с помощью программируемого калькулятора (ПМК). Приводим программу 3.1 для решения системы трех уравнений с тремя неизвестными применительно к распространенным калькуляторам типов Б-3-34, МК-54, МК-56, МК-61. Сначала следует включить питание калькулятора и набрать служебные команды

F
/—/
B/O
F
BП

Эти команды подготавливают калькулятор для приема соответствующей программы. После набора указанной комбинации в правой части индикатора станут светиться цифры 00, показывающие порядковый номер числа ячеек, занятых данной программой. При нажатии какой-либо клавиши (или группы клавиш, это указывается в программе), число, находящееся в правой части индикатора, увеличивается на единицу, а в левой части появляется число, соответствующее коду данной клавиши (или клавиш) и подтверждающее правильность введенной команды. Пользователь при вводе должен проверять правильность введенных команд.

Программа 3.1 для расчета системы линейных уравнений с тремя неизвестными  $X, Y, Z$

F
/—/
B/O
F
BП

Второй знак кода

Первый знак кода		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	П → x4 64	П → x8 68	x 12	П → x7 67	П → x5 65	x 12	— 11	x → П5 45	П → x4 64	П → x9 69
	1	x 12	П → x7 67	П → x6 66	x 12	— 11	x → П6 46	П → x4 64	П → x0 60	x 12	П → x7 67
	2	П → xA 6—	x 12	— 11	x → ПА 4—	П → x1 61	П → x8 68	x 12	П → x7 67	П → x2 62	x 12
	3	— 11	x → П2 42	П → x1 61	П → x9 69	x 12	П → x7 67	П → x3 63	x 12	— 11	x → П3 43
	4	П → x1 61	П → x0 60	x 12	П → x7 67	П → xB 6L	x 12	— 11	x → ПB 4L	П → x2 62	П → x6 66
	5	x 12	П → x5 65	П → x3 63	x 12	— 11	x → П3 43	П → x2 62	П → xA 6—	x 12	П → x5 65
	6	П → xB 6L	x 12	— 11	П → x3 63	÷ 13	x → П3 43	П → x6 66	x 12	П → xA 6—	— 11
	7	П → x5 65	÷ 13	/—/ 0L	x → П2 42	П → x8 68	x 12	П → x9 69	П → x3 63	x 12	+ 10
	8	П → x0 60	— 11	П → x7 67	÷ 13	/—/ 0L	x → П1 41	С/П 50	БП 51	00 00	F /—/

*Примечание.* При нажатии соответствующей клавиши (или комбинации клавиш) в левой части экрана появляется код команды, т. е. число, указанное в этой же клетке программы. Числа в правой части экрана показывают номер клетки программы, которую следует вводить в ПМК. После ввода программы следует вводить исходные данные. Значение коэффициента  $a_1$  следует ввести в седьмой регистр. Делают это следующим образом. Набирают число коэффициента  $a_1$ , клавиши  $[x \rightarrow \Pi]$  и  $[7]$  (регистр, в который заносится информация о числе  $a_1$ ). Аналогично значение  $b_1$  заносят в восьмой регистр,  $c_1$  — в девятый,  $a_2$  — в четвертый,  $b_2$  — в пятый,  $c_2$  — в шестой,  $a_3$  — в первый,  $b_3$  — во второй,  $c_3$  — в третий,  $d_1$  — нулевой,  $d_2$  — в регистр  $A$ ,  $d_3$  — в регистр  $B$ . Указание о таком вводе исходных числовых значений записываются в виде

$$\begin{aligned} a_1 &= RG7; \quad b_1 = RG8; \quad c_1 = RG9; \\ a_2 &= RG4; \quad b_2 = RG5; \quad c_2 = RG6; \\ a_3 &= RG1; \quad b_3 = RG2; \quad c_2 = RG3; \\ d_1 &= RG0; \quad d_2 = RGA; \quad d_3 = RGB. \end{aligned}$$

Пуск программы производится нажатием клавиш  $[B/O]$  и  $[C/\Pi]$  (нажатие клавиши  $[B/O]$  означает, что программа будет выполняться, начиная с нулевой ячейки, а  $[C/\Pi]$  является командой к началу счета.) Примерно через 35 с на индикаторе высветится значение переменной  $X$ . Чтобы высветить переменную  $Y$ , следует нажать клавиши  $[\Pi \rightarrow x]$  и  $[2]$  (что означает "извлечь из памяти второго регистра и передать в регистр  $X$ , а следовательно, и вывести на индикатор"); переменную  $Z$  выводят на индикатор нажатием клавиш  $[\Pi \rightarrow x]$  и  $[3]$ . Указания к таким операциям записываются следующим образом:

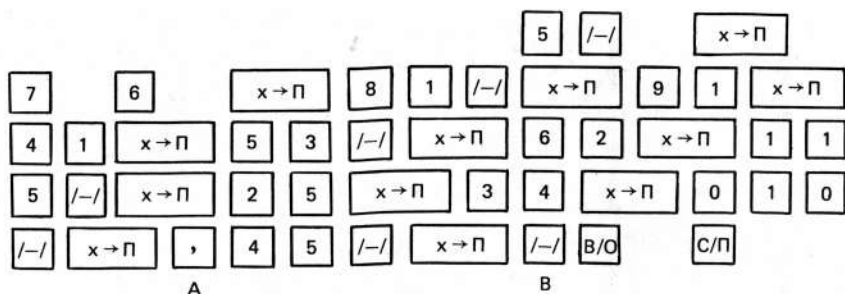
$$RGX = RG1 = X; \quad RG2 = Y; \quad RG3 = Z.$$

Если необходимо просчитать систему с иными исходными данными, то следует ввести в регистры эти новые данные и произвести счет. При вводе отрицательных чисел следует сначала вводить числовое значение, и только после этого знак минус, а не наоборот, как делается при ручном счете.

Контрольный пример

$$\begin{cases} -5I_1 + 6I_2 - I_3 = 4, \\ I_1 + I_2 - 3I_3 = -10, \\ 2I_1 - 15I_2 + 5I_3 = -45. \end{cases}$$

Введем исходные числовые значения:



Через 33 с на индикаторе появится цифра 5, представляющая значение тока  $I_1$ , находящееся в первом регистре (в программах записывается:  $RGX = RG1 = I_1$ ). Значение тока  $I_2$  находится во втором регистре (т. е.  $RG2 = I_2$ ). Чтобы это значение вывести на индикатор, необходимо нажать клавиши  $\boxed{\Pi \rightarrow x}$   $\boxed{2}$ , при этом на индикаторе высвечивается значение тока  $I_2$ , равное в нашем примере 6. Поскольку в данной программе  $RG3 = I_3$ , то для индигирования значения третьего тока  $I_3$  следует нажать клавиши  $\boxed{\Pi \rightarrow x}$   $\boxed{3}$  на индикаторе высветится число 7.

Таким образом, решение показывает, что в данном примере  $I_1 = 5, I_2 = 6, I_3 = 7$ . Подстановка полученных результатов в исходные уравнения подтверждает правильность произведенных операций.

### 3.17. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПИ

В связи с широким развитием электронно-вычислительной техники большое значение приобретают специальные виды записи уравнений, в том числе матричный метод. *Матрицей* называется таблица прямоугольной формы, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов. Матрица записывается в прямоугольных скобках (иногда используются иные формы записи), например матрица  $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$  имеет две строки ( $a_1 \ a_2 \ a_3, \ b_1 \ b_2 \ b_3$ ) и три столбца ( $a_1 \ b_1, \ a_2 \ b_2, \ a_3 \ b_3$ ). Буквы или цифры, записываемые внутри матрицы, отделяются друг от друга просто промежутками, а не запятыми, или какими-либо иными знаками. Один из возможных видов записи уравнений в матричной форме покажем на примере уравнений электрического равновесия цепи, изображенной на рис. 3.20, *а* (на рис. 3.20, *б* показана структурная схема, т. е. граф этой цепи). Как видно из схемы, данная цепь содержит пять ветвей (1, 2, 3, 4, 5), три узла (A, B, D) и три простых контура (ABNMA, ADBA, ASDA). Следовательно, в такой цепи протекают пять различных токов ( $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ ). Нумерацию токов можно выполнить, разумеется, любым образом, но лучше всего первым называть ток, протекающий в первой ветви, вторым — протекающий по второй ветви и т. д. Действующие значения предполагаемых токов  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  нанесены на схеме незаштрихованными стрелками около проводов (точнее, линий, соединяющих элементы цепи). Для нахождения пяти неизвестных токов, очевидно, следует соста-



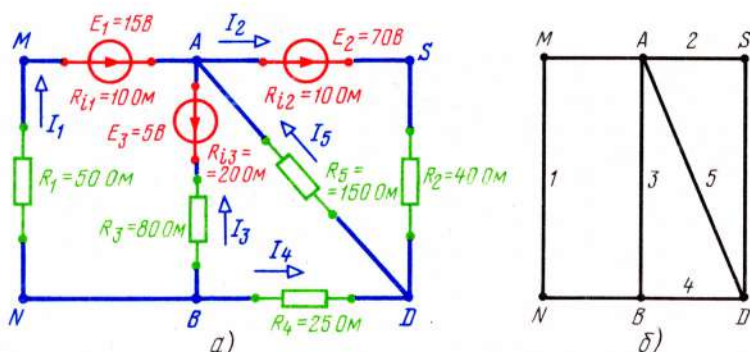


Рис. 3.20

вить систему пяти уравнений с пятью неизвестными, из которых два следует составить по первому закону Кирхгофа (поскольку в цепи три узла) и три — по второму (в цепи три простых контура). Запишем уравнения равновесия токов для узлов A и B, и уравнения равновесия напряжений для простых контуров, в алгебраической форме:

$$\begin{cases} I_1 + I_3 + I_5 = I_2, \\ I_1 + I_3 + I_4 = 0, \\ E_1 + E_3 = (R_{i1} + R_1)I_1 - (R_{i3} + R_3)I_3, \\ -E_3 = (R_{i3} + R_3)I_3 - R_5I_5 - R_4I_4, \\ E_2 = (R_{i2} + R_2)I_2 + R_5I_5. \end{cases} \quad (3.18)$$

Покажем, каким образом следует перейти к матричной форме записи этих уравнений. В рассматриваемой системе имеются члены трех видов: неизвестные токи, известные постоянные коэффициенты при токах (т. е. сопротивления) и известные ЭДС источников. Перепишем систему уравнений так, чтобы в левой части были записаны токи со своими коэффициентами, а в правой — ЭДС, причем если какой-то ток в уравнении отсутствует, то он все равно должен записываться, но с нулевым коэффициентом. Аналогично при отсутствии в данной строке уравнения ЭДС, в правую часть уравнения заносят 0. Таким образом, система (3.18) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 1I_1 - 1I_2 + 1I_3 + 0I_4 + 1I_5 = 0, \\ 1I_1 + 0I_2 + 1I_3 + 1I_4 + 0I_5 = 0, \\ (R_{i1} + R_1)I_1 + 0I_2 - (R_{i3} + R_3)I_3 + 0I_4 + 0I_5 = E_1 + E_3, \\ 0I_1 + 0I_2 - (R_{i3} + R_3)I_3 + R_4I_4 + R_5I_5 = E_3, \\ 0I_1 + (R_{i2} + R_2)I_2 + 0I_3 + 0I_4 + R_5I_5 = E_2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Можно сказать, что данная система уравнений состоит из пяти строк и шести столбцов, причем в каждой строке первого столбца записан ток  $I_1$  со своими коэффициентами, во втором столбце — ток  $I_2$ , также со своими коэффициентами и т. д. Но если в каждой строке повторяются одни и те

же токи, то гораздо проще их не писать в каждой строке, а записать только один раз в каком-то ином определенном месте. Если записать всю левую часть получившихся уравнений, но без указаний токов, получится матрица сопротивлений данной цепи или, по более общему названию, матрица коэффициентов при токах, которую часто называют матрицей  $A$ . Таким образом, в данной цепи

$$A = R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ (R_{i1} + R_1) & 0 & -(R_{i3} + R_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(R_{i3} + R_3) & R_4 & R_5 \\ 0 & (R_{i2} + R_2) & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Теперь нужно показать токи, соответствующие различным столбцам. Названия токов записывают не строкой, а столбцом, при этом получается матрица-столбец токов ветвей

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Данная запись указывает на то, что все члены первого столбца матрицы  $A$  следует перемножить на член, находящийся в первой строке матрицы  $I$ , все члены второго столбца матрицы  $A$  — на член, находящийся во второй строке матрицы  $I$ , и т. д. (При перемножении матриц члены, состоящие в столбце одной матрицы, перемножаются на члены, стоящие в строке другой матрицы). Например,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 9 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 & (-6) \cdot 0 & 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 & (-6) \cdot (-1) & 1 \cdot 9 \\ 2 \cdot 8 & (-6) \cdot 1 & 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Правая часть уравнения (3.19) образует матрицу-столбец ЭДС цепи  $E$ . В данном примере

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_1 + E_3 \\ E_3 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Таким образом, систему уравнений (3.19) можно записать в матричном виде:

$$A I = E \text{ или } R I = E, \text{ если } A = R. \quad (3.22)$$

### 3.18. ПРОВЕРКИ ПРОИЗВЕДЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Выполним числовые расчеты токов цепи рис. 3.20 ручным методом. В соответствии с (3.18) составляется система уравнений:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 + I_5 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} I_1 + I_3 + I_4 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 60I_1 - 100I_3 = 20, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -100I_3 + 25I_4 + 150I_5 = 5, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 50I_2 + 150I_5 = 70. \end{cases} \quad (5)$$

Для решения этой системы целесообразно произвести возможные упрощения. Произведем сокращения, для чего обе части равенства строки (3) поделим на 20, строки (4) – на 5 и строки (5) – на 10. После произведенных сокращений система принимает вид

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 + I_5 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} I_1 + I_3 + I_4 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 3I_1 - 5I_3 = 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -20I_3 + 5I_4 + 30I_5 = 1, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 5I_2 + 15I_5 = 7. \end{cases} \quad (5)$$

Далее следует систему из пяти уравнений сократить до четырех. Для этого выразим из какой-то строки одно неизвестное и подставим во все остальные строки. Например, из строки (1) выразим ток  $I_2 = I_1 + I_3 + I_5$  и подставим в строку (5); тогда уравнения принимают вид

$$\begin{cases} I_1 + I_3 + I_4 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 3I_1 - 5I_3 = 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -20I_3 + 5I_4 + 30I_5 = 1, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 5(I_1 + I_3 + I_5) + 15I_5 = 7. \end{cases} \quad (5)$$

После такого преобразования число неизвестных и число строк в уравнениях уменьшилось на единицу. Проделаем аналогичное преобразование еще раз. Выразим из строки (2) ток  $I_4 = -I_1 - I_3$  и подставим в строку (4), после чего уравнения принимают вид

$$\begin{cases} 3I_1 - 5I_3 = 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -20I_3 + 5(-I_1 - I_3) + 30I_5 = 1, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 5I_1 + 5I_3 + 20I_5 = 7. \end{cases} \quad (5)$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$\begin{cases} 3I_1 - 5I_3 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5I_1 - 25I_3 + 30I_5 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5I_1 + 5I_3 + 20I_5 = 7. \end{cases}$$

Получилась система трех уравнений с тремя неизвестными, которую легко решить ручным способом или с помощью программируемого калькулятора и программы 3.1.

Решив эту систему, получим  $I_1 = 0,5$  А;  $I_3 = 0,1$  А;  $I_5 = 0,2$  А. Ток  $I_4 = -I_1 - I_3 = -0,5 - 0,1 = -0,6$  А; ток  $I_2 = I_1 + I_3 + I_5 = 0,5 + 0,1 + 0,2 = 0,8$  А. Таким образом,



действительное направление токов  $I_1, I_2, I_3, I_5$  совпадает с предполагаемым, а тока  $I_4$  — противоположно. Покажем получившиеся значения токов на схеме рис. 3.21.

Рассчитаем действующие значения падения напряжений на всех сопротивлениях  $U_{MN} = R_1 I_1 = 50 \cdot 0,5 = 25$  В, причем поскольку действительный ток протекает от точки  $N$  к точке  $M$ , потенциал точки  $N$  выше потенциала точки  $M$ , следовательно, на той точке сопротивления  $R_1$ , которая примыкает к точке  $N$  будет плюс падения напряжения, а на точке  $M$  — минус. Знаки "+" и "-" нанесены на схеме в кружках. Аналогичным образом рассчитаем падения напряжения на всех остальных сопротивлениях цепи. Получается  $U_{Ri1} = 5$  В (+ на точке  $M$ );  $U_{Ri2} = 8$  В (+ на точке  $A$ );  $U_{R2} = 32$  В (+ на точке  $S$ );  $U_{R4} = 15$  В (+ на точке  $H$ );  $U_{R3} = 8$  В (+ на точке  $B$ );  $U_{R4} = 15$  В (+ на точке  $D$ );  $U_{R5} = 30$  В (+ на точке  $D$ ). Чтобы убедиться в правильности расчета, необходимо проверить выполнение первого закона Кирхгофа в каждом узле, второго — в каждом контуре (хотя бы в простом) и баланса мощностей — во всей цепи. При каждой проверке следует рассчитывать процент расхождения обеих частей равенства. В конечном счете критерием правильности расчета является малый процент расхождения обеих частей равенства. На практике удовлетворительным можно считать расчет, в котором ни одна относительная погрешность не выходит за пределы единиц процентов. Для выполнения проверок следует составить уравнения для действительных токов (а не для предполагаемых!), а после подстановки числовых данных перенести члены в такие части равенства, где все знаки оказываются только положительными.

Произведем проверку выполненного расчета. Проверим выполнение первого закона Кирхгофа в узлах цепи.

Узел  $A$ .  $I_1 + I_3 + I_5 = I_2$ ;  $0,5 + 0,1 + 0,2 = 0,8$ ;  $0,8 = 0,8$ .

Относительная погрешность в данном узле

$$\delta = \{[(I_1 + I_3 + I_5) - I_2] / (I_1 + I_3 + I_5)\} 100 = [(0,8 - 0,8) / 0,8] 100 = 0 \, \%.$$

В данном примере все промежуточные значения чисел делились нацело, поэтому погрешность оказалась нулевой, что на практике бывает достаточно редко, так как в подавляющем большинстве случаев вычисления производятся с ограниченной точностью. Например, если бы подсчет суммы  $I_1 + I_2 + I_5$  показал значение  $0,783$  А, а подсчет тока  $I_2 = 0,806$  А, то погрешность была бы  $\delta = (0,783 - 0,806) / 0,783 \cdot 100 = -2,94 \, \%$ . Такую погрешность можно было бы считать допустимой, хотя качество подсчета и не слишком высоким.

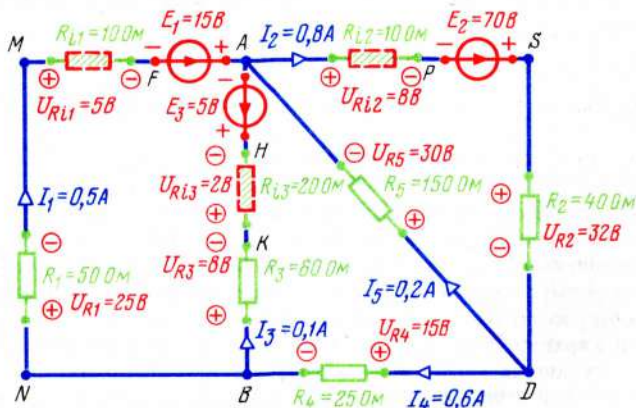


Рис. 3.21

Узел  $B$ .  $I_4 = I_1 + I_3 = 0,6 = 0,5 + 0,1$ ;  $0,6 = 0,6$ ;  $\delta = 0$ .

Узел  $D$ .  $I_2 = I_4 + I_5 = 0,8 = 0,6 + 0,2$ ;  $0,8 = 0,8$ ;  $\delta = 0$ .

Первый закон Кирхгофа во всех узлах выполняется.

Проверим выполнение второго закона Кирхгофа.

Контур  $NMABN$ .  $E_1 + E_2 = -U_{Ri3} - U_{R3} + U_{R1} + U_{Ri1} = 15 + 5 = -2 - 8 + 25 + 5$ ; для расчета погрешности перенесем члены таким образом, чтобы все члены были со знаком плюс:

$$15 + 5 + 2 + 8 = 25 + 5; 30 = 30; \delta = [(30 - 30) / 30 \cdot 100 = 0 \%.]$$

Контур  $BADB$ .  $-E_3 = -U_5 + U_{R4} + U_{R3} + U_{Ri3}$ ;  $-5 = -30 + 15 + 8 + 2$ ;  $-5 = -5$ ;  $\delta = -5 + 5 / -5 \cdot 100 = 0 \%$ .

Контур  $ASDA$ .  $E_2 = U_{R2} + U_{R5} + U_{Ri2}$ ;  $70 = 32 + 30 + 8$ ;  $70 = 70$ ;  $\delta = 0 \%$ .

Второй закон Кирхгофа для всех простых контуров выполняется. Проверим также выполнение второго закона Кирхгофа для еще двух контуров цепи.

Контур  $NMASDBN$ .  $E_1 + E_2 = U_{R1} + U_{Ri1} + U_{Ri2} + U_{R2} + U_{R4} = 15 + 70 = 25 + 5 + 8 + 32 + 15$ ;  $85 = 85$ ;  $\delta = 0 \%$ .

Контур  $NMADBN$ .  $E_1 = U_{R1} + U_{Ri1} - U_{R5} + U_{R4} = 15 = 25 + 5 - 30 + 15$ ;  $15 = 15$ . Второй закон Кирхгофа выполняется во всех контурах.

Проверим баланс мощностей

$$\Sigma P_{\text{и}} = \Sigma P_{\text{н}}; E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_3 I_3 = I_1^2 (R_{i1} + R_1) + I_2^2 (R_{i2} + R_2) + I_3^2 (R_{i3} + R_3) + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5.$$

Заметим, что мощности, отдаваемые источниками  $E_1$  и  $E_2$ , положительные, поскольку направления действительных токов, текущих через эти источники, совпадают с направлением ЭДС этих источников. Мощность источника  $E_3$  отрицательна, поскольку действительное направление тока  $I_3$  противоположно направлению ЭДС  $E_3$ . Физически это означает, что источник  $E_3$  не отдает энергию в цепь, а потребляет ее от других источников, поэтому общая мощность, отдаваемая источниками  $E_1$  и  $E_2$ , уменьшается на величину, потребляемую источником  $E_3$ . Подставим числовые значения:

$$15 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,8 - 5 \cdot 0,1 = 0,5^2 \cdot (50 + 10) + 0,8^2 \cdot (10 + 40) + 0,1^2 \cdot (20 + 80) + 0,6^2 \cdot 25 + 0,2^2 \cdot 150, \text{ т. е. } 7,5 + 56 - 0,5 = 0,25 \cdot 60 + 0,64 \cdot 50 + 0,01 \cdot 100 + 0,36 \cdot 25 + 0,04 \cdot 150;$$

$$63 = 15 + 32 + 1 + 9 + 6; 63 \text{ Вт} = 63 \text{ Вт}.$$

Таким образом, все источники отдают мощность 63 Вт, которая рассеивается в резисторах.

Первый закон Кирхгофа выполняется во всех узлах, второй закон — во всех контурах и баланс мощностей — в цепи, поэтому задача решена правильно.

Подобные проверки следует выполнять после каждой решенной задачи. Обратим внимание, что в данном примере были заданы действующие значения ЭДС, поэтому при расчете получились действующие значения токов. При подсчете баланса мощностей в расчетные формулы можно было подставлять имеющиеся числовые значения токов и ЭДС. Если бы рассчитывались мгновенные значения токов, то проверять первый и второй законы Кирхгофа было бы возможно для получившихся мгновенных значений, поскольку эти законы являются справедливыми для любого момента. Для проверки баланса мощностей в этом случае сначала следовало бы, зная закон изменения мгновенных значений, рассчитать действующие значения ЭДС и токов, и только после этого подсчитывать мощности источников и в нагрузках.



### 3.19. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Допустим, имеется разветвленная цепь (рис. 3.22). Как видно из схемы, в первой ветви протекает ток  $I_1$ , в третьей ветви ток  $I_3$ , а во второй ветви алгебраическая сумма этих токов. Представим, что во второй ветви протекает два различных тока:  $I_1$  и  $I_2$ . Но в этом случае можно считать, что во всех элементах контура  $NMABN$  протекает один и тот же ток, называемый *контурным*. Обозначим этот контурный ток  $I_A$ . Аналогично можно считать, что по всем элементам контура  $ADFBA$  протекает контурный ток  $I_B$ . Таким образом, зная два контурных тока,  $I_A$  и  $I_B$ , можно определить токи всех трех ветвей, причем ток первой ветви  $I_1$  равен контурному току  $I_A$ , а ток второй ветви  $I_2$  — алгебраической сумме контурных токов  $I_A$  и  $I_B$ , т. е.  $I_1 = I_A$ ,  $I_2 = I_A + I_B$ ,  $I_3 = I_B$ . Количество контурных токов определяется числом простых контуров цепи и, следовательно, независимых контурных уравнений можно составить столько, сколько составляется уравнений по второму закону Кирхгофа. Таким образом, метод контурных токов дает возможность рассчитать токи в цепи с помощью столько же уравнений, сколько их составляется по второму закону Кирхгофа.

Чтобы рассчитать токи в цепи методом контурных токов, необходимо проделать следующее:

1. Задаться в каждом простом контуре контурным током, причем контурные токи принято обозначать буквами (например,  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_D$  и т. д.). Контурные токи могут быть направлены либо по часовой стрелке, либо против нее.

При операциях с контурными токами следует помнить, что контурные токи — это еще не токи в ветвях, которые, в конечном счете, необходимо определить, но это такие токи, с помощью которых можно достаточно просто определить токи в ветвях.

2. Составить уравнения по второму закону Кирхгофа для каждого простого контура. В общем случае должны составляться уравнения для мгновенных значений, но в резистивных цепях можно составлять уравнения также для действующих или максимальных значений, а также для размахов.

3. Подставить в уравнения числовые значения и произвести соответствующие расчеты.

4. Определить токи в ветвях, причем если контурный ток имеет отрицательное значение, то действительный ток в ветви имеет противоположное направление, а если положительное, то то же. Если по одному элементу протекает два контурных тока в противоположных направлениях, то ток в ветви равен разности этих токов, а если в одном направлении — то сумме.

5. Произвести все проверки и определить процент расхождения токов в узлах, напряжений в контурах и мощностей в цепи.

**Пример 3.9.** С помощью контурных токов рассчитать токи в ветвях цепи, изображенной на рис. 3.23, а.

**Решение.** Как видно из схемы, в данной цепи имеется три простых контура, и, следовательно, следует задаться тремя контурными токами ( $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_D$ ). Выберем

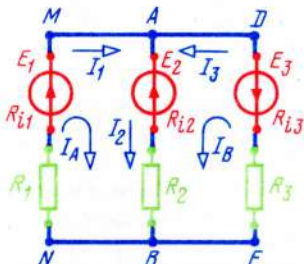


Рис. 3.22



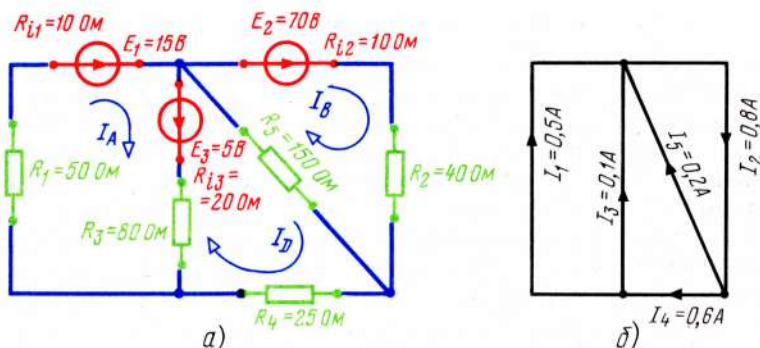


Рис. 3.23

направление всех контурных токов по часовой стрелке. В этом случае по второму закону Кирхгофа можно составить три уравнения для контурных токов:

$$\text{для контура } A \quad E_1 + E_3 = (R_1 + R_{i1} + R_{i3} + R_3) I_A - (R_{i3} + R_3) I_D;$$

$$\text{для контура } B \quad E_2 = (R_{i2} + R_2 + R_5) I_B - R_5 I_D;$$

$$\text{для контура } D \quad -E_3 = (R_3 + R_{i3} + R_5 + R_4) I_D - (R_{i3} + R_3) I_A - R_5 I_B.$$

Такая запись показывает, что по сопротивлениям  $R_1$ ,  $R_{i1}$ ,  $R_{i3}$ ,  $R_3$  протекает контурный ток  $I_A$  в некотором направлении, но по сопротивлениям  $R_{i3}$  и  $R_3$  в противоположном направлении протекает также контурный ток  $I_D$ . Аналогично по сопротивлениям  $R_{i2}$ ,  $R_2$  и  $R_5$  протекает контурный ток  $I_B$ , но по сопротивлению  $R_5$  в противоположную сторону протекает контурный ток  $I_D$ . По сопротивлениям  $R_3$ ,  $R_{i3}$ ,  $R_5$  и  $R_4$  протекает контурный ток  $I_D$ , но по сопротивлению  $R_5$  в противоположном направлении протекает контурный ток  $I_B$ , а по сопротивлениям  $R_3$  и  $R_{i3}$  также в противоположном направлении — контурный ток  $I_A$ .

После подстановки числовых значений получается система уравнений:

$$\begin{cases} 160I_A - 100I_D = 20, \\ 200I_B - 150I_D = 70, \\ -100I_A - 150I_B + 275I_D = -5. \end{cases}$$

Добавив недостающие члены с нулевыми коэффициентами и произведя сокращения, получим

$$\begin{cases} 8I_A + 0I_B - 5I_D = 1, \\ 0I_A + 20I_B - 15I_D = 7, \\ 20I_A + 30I_B - 55I_D = 1. \end{cases}$$

Решение данной системы приводит к значениям  $I_A = 0,5 \text{ А}$ ,  $I_B = 0,8 \text{ А}$ ,  $I_D = 0,6 \text{ А}$ , откуда:  $I_1 = I_A = 0,5 \text{ А}$ ;  $I_2 = I_B = 0,8 \text{ А}$ ;  $I_3 = I_A - I_D = 0,5 - 0,6 = -0,1 \text{ А}$ ;  $I_4 = -I_D = 0,6 \text{ А}$ ,  $I_5 = I_B - I_D = 0,8 - 0,6 = 0,2 \text{ А}$ .

Таким образом, ток в первой ветви  $I_1$  совпадает по направлению с током  $I_A$ , ток  $I_2$  — с током  $I_B$ , ток  $I_3$  имеет направление, противоположное току  $I_A$ , ток  $I_4$  совпадает с током  $I_D$ , ток  $I_5$  — совпадает с током  $I_B$ . Действительные токи в ветвях показаны на структурной схеме (т. е. на графе) цепи (рис. 3.23, б).

В более общем виде уравнения контурных токов для цепи рис. 3.23 имеют вид

$$e_1 + e_3 = (R_1 + R_{i1} + R_{i3} + R_3) i_A - (R_{i3} + R_3) i_D,$$

$$e_2 = (R_{i2} + R_2 + R_5) i_B - R_5 i_D,$$

$$-e_3 = (R_3 + R_{i3} + R_5 + R_4) i_D - (R_{i3} + R_3) i_A - R_5 i_B,$$

откуда  $i_1 = i_A$ ;  $i_2 = i_B$ ;  $i_3 = i_A - i_D$ ;  $i_4 = i_D$ ;  $i_5 = i_B - i_D$ .

Аналогично можно написать уравнения контурных токов для максимальных значений токов и напряжений, а также для их размахов.

### 3.20. МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ)

Метод узловых напряжений (узловых потенциалов) дает возможность рассчитать токи в цепи с помощью  $n - 1$  уравнений, где  $n$  — число узлов, т. е. столько уравнений, сколько составляется по первому закону Кирхгофа. Чтобы рассчитать токи в ветвях цепи методом узловых напряжений (узловых потенциалов), необходимо проделать следующее:

1. Обозначить буквами все узловые точки цепи и потенциалы этих точек.
2. Задаться предполагаемыми токами во всех ветвях цепи.
3. Записать  $n - 1$  уравнений по первому закону Кирхгофа.
4. Ток в каждой ветви выразить через напряжения, имеющиеся на зажимах ветви или через потенциалы узлов на зажимах ветви, ЭДС и сопротивлений, находящихся в данной ветви. При составлении этих выражений следует помнить, что ток течет от точки, потенциал которой выше, к точке, потенциал которой ниже. Если направление ЭДС совпадает с направлением предполагаемого тока, то такая ЭДС записывается со знаком плюс, а если противоположно, то со знаком "минус".
5. Потенциал одного из узлов принять за начальный (например, нулевой).
6. Подставить числовые значения и рассчитать потенциалы остальных узловых точек.
7. Зная потенциалы всех узлов, ЭДС и сопротивления ветвей, рассчитать токи во всех ветвях.
8. Произвести проверки и определить расхождение токов в узлах, напряжений в контурах и мощностей в цепи.

**Пример 3.10.** Рассчитать токи во всех ветвях цепи рис. 3.23 методом узловых напряжений.

**Решение.** 1. Как видно из схемы, цепь содержит три узла, обозначим их  $A, B, D$ , рис. 3.24.

2. Зададимся предполагаемыми направлениями токов во всех ветвях (синие стрелки на рис. 3.24).

3. Составим уравнения по первому закону Кирхгофа для любых двух узлов, например  $A$  и  $B$ :

$$\begin{cases} I_1 + I_3 + I_5 = I_2, \\ I_4 = I_1 + I_3. \end{cases}$$

4. Выразим каждый ток через потенциалы узлов. Предполагаемый ток  $I_1$  показан на схеме текущим от узла  $B$  к узлу  $A$ , следовательно, потенциал точки  $B$  выше потенциала точки  $A$ , направления  $I_1$  и  $E_1$  совпадают, сопротивление первой ветви составляет  $R_{i1} + R_1$ , поэтому ток

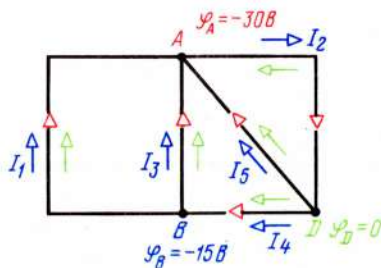


Рис. 3.24

$$I_1 = \frac{\varphi_B - \varphi_A + E_1}{R_{i1} + R_1},$$

$$\text{аналогично } I_3 = \frac{\varphi_B - \varphi_A - E_3}{R_{i3} + R_3};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_D - \varphi_A}{R_5}, I_2 = \frac{\varphi_A - \varphi_D + E_2}{R_{i2} + R_2},$$

$$I_4 = \frac{\varphi_D - \varphi_B}{R_4}.$$

5. Примем потенциал точки D за нулевой ( $\varphi_D = 0$ ); в этом случае уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\varphi_B - \varphi_A + E_1}{R_{i1} + R_1} + \frac{\varphi_B - \varphi_A - E_3}{R_{i3} + R_3} + \frac{-\varphi_A}{R_5} = \frac{\varphi_A + E_2}{R_{i2} + R_2}, \\ -\frac{\varphi_B}{R_4} = \frac{\varphi_B - \varphi_A + E_1}{R_{i1} + R_1} + \frac{\varphi_B - \varphi_A - E_3}{R_{i3} + R_3}. \end{cases}$$

6. Подставим числовые значения, тогда

$$\begin{cases} \frac{\varphi_B - \varphi_A + 15}{10 + 50} + \frac{\varphi_B - \varphi_A - 5}{20 + 80} - \frac{\varphi_A}{150} = \frac{\varphi_A + 70}{10 + 40}, \\ -\frac{\varphi_B}{25} = \frac{\varphi_B - \varphi_A + 15}{10 + 50} + \frac{\varphi_B - \varphi_A - 5}{20 + 80}. \end{cases}$$

Приведем каждую строку к общему знаменателю, который в обеих строках равен 300, и отбросив его, получим систему

$$\begin{cases} 5\varphi_B - 5\varphi_A + 75 + 3\varphi_B - 3\varphi_A - 15 - 2\varphi_A = 6\varphi_A + 420, \\ -12\varphi_B = 5\varphi_B - 5\varphi_A + 75 + 3\varphi_B - 3\varphi_A - 15, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 16\varphi_A - 8\varphi_B = -360, \\ 8\varphi_A - 20\varphi_B = 60 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\varphi_A - \varphi_B = -45, \\ -2\varphi_A + 5\varphi_B = -15. \end{cases}$$

Сложив обе строки, получим  $4\varphi_B = -60$ , т. е.  $\varphi_B = -15$  В. Из первой строки последней системы уравнений

$$\varphi_A = (-45 + \varphi_B)/2 = [-45 + (-15)]/2 = -30 \text{ В.}$$

Таким образом,  $\varphi_A = 30$  В,  $\varphi_B = -15$  В,  $\varphi_D = 0$ .

7. Рассчитаем токи в каждой ветки.

Теперь снова следует задаться положительными направлениями токов в ветвях (не путать с теми, для которых записывались уравнения по первому закону Кирхгофа;



эти токи были необходимы только для того, чтобы определить потенциалы узлов, данные токи "свое дело сделали" и больше ни для чего не нужны). Новые положительные токи должны быть направлены от точки, потенциал которой выше, к точке, потенциал которой ниже, т. е. ток  $I_1$  — от точки  $B$ , потенциал которой  $-15$  В, к точке  $A$ , потенциал которой  $-30$  В;  $I_2$  от  $D$  к  $A$ ;  $I_3$  — от  $B$  к  $A$ ;  $I_4$  — от  $D$  к  $B$ ;  $I_5$  — от  $D$  к  $A$ .

В этом случае (зеленые стрелки на рис. 3.24).

$$I_1 = \frac{\varphi_B - \varphi_A + E_1}{R_{i1} + R_1} = \frac{-15 - (-30) + 15}{60} = 0,5 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_D - \varphi_A - E_2}{R_{i2} + R_2} = \frac{0 - (-30) - 70}{10 + 40} = -0,8 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_B - \varphi_A - E_3}{R_{i3} + R_3} = \frac{(-15) - (-30) - 5}{20 + 80} = 0,1 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_D - \varphi_B}{R_4} = \frac{0 - (-15)}{25} = 0,6 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_D - \varphi_A}{R_5} = \frac{0 - (-30)}{150} = 0,2 \text{ A}.$$

Таким образом, действительные направления токов  $I_1$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  совпадают с выбранными положительными, а тока  $I_2$  — противоположно. Легко видеть, что токи получились такими же, как и при расчетах с помощью законов Кирхгофа (см. рис. 3.20).

Итак, при расчетах цепей методом узловых напряжений (узловых потенциалов) приходится оперировать с токами трех направлений:

предполагаемыми, необходимыми для составления уравнений по первому закону Кирхгофа (синие стрелки);

предполагаемыми (в отличие от первых предполагаемых токов они назывались "положительными", хотя, разумеется, каждый предполагаемый ток есть ток "положительный"), которые необходимы для выражений токов в ветвях через потенциалы узлов и направляются от узла с более высоким потенциалом к узлу с меньшим потенциалом (зеленые стрелки);

действительными, получающимися в ветвях.

Покажем все токи на структурной схеме рис. 3.24, причем токи первого вида ("предполагаемые") покажем синими стрелками около провода, токи второго вида ("положительные") — зелеными линиями около проводов и токи третьего вида стрелками на проводах.

### 3.21. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

Метод наложения (этот метод иногда называют методом суперпозиции) применим только в линейных цепях, т. е. в таких цепях, в которых сопротивления элементов цепи не изменяются при изменении протекающего через них тока или приложенного к ним напряжения. В более общем виде линейные цепи следует определять как цепи, процессы в которых описыва-

ются уравнениями первой степени. Например, напряжения и токи в резистивных цепях связаны уравнением  $U = RI$ , а ток и мощность — уравнением  $P = I^2 R$ . Следовательно, рассчитывать напряжение и токи методом наложения можно, а мощность нельзя.

Расчет методом наложения основывается на том, что в ветвях цепи определяют токи от каждого источника в отдельности, а затем эти токи складывают. Токи от каждого источника называются частичными. Чтобы рассчитать токи в цепях методом наложения, необходимо проделать следующее:

1. Все ЭДС, имеющиеся в цепи, кроме одной, положить равными нулю. Внутренние сопротивления этих источников остаются неизменными.

2. Рассчитать во всех ветвях токи, получающиеся от одного первого источника. Эти токи обозначают двумя индексами, причем нижний показывает номер ветви, в которой протекает этот ток, а верхний — в виде одного штриха, указывает на то, что данный ток является частичным от первого источника. Обращаем внимание, что поскольку в данном случае в цепи имеется только один источник, расчеты производят, как правило, не решением системы уравнений, а элементарными методами, например с помощью использования правил для последовательного или параллельного соединения элементов, преобразования звезды в треугольник, разветвлением тока на две ветви и т. д. Разумеется, расчеты более общими методами здесь не исключены, но к ним при наличии одного источника в цепи стараются не прибегать.

3. Аналогичным образом определить частичные токи от второго источника ( $I'_1, I'_2, I'_3$ ), от третьего ( $I''_1, I''_2, I''_3$ ) и так далее. Количество частичных схем, подлежащих расчету, определяется числом источников в цепи.

4. Определить токи в каждой ветви как алгебраическую сумму всех частичных токов в данной ветви, причем токи, направления которых совпадают, следует брать с одним знаком, а направленные противоположно — с другим.

5. Произвести все проверки и определить процент расхождения токов в узлах, напряжений в контурах и мощностей в цепи.

**Пример 3.11.** Рассчитать токи в цепи рис. 3.25, а методом наложения.

**Решение.** В данной цепи два источника ( $E_1$  и  $E_2$ ), поэтому необходимо составить и рассчитать две частичные цепи (рис. 3.25, б и в). Рассчитаем ток  $I'_1$ . Поскольку

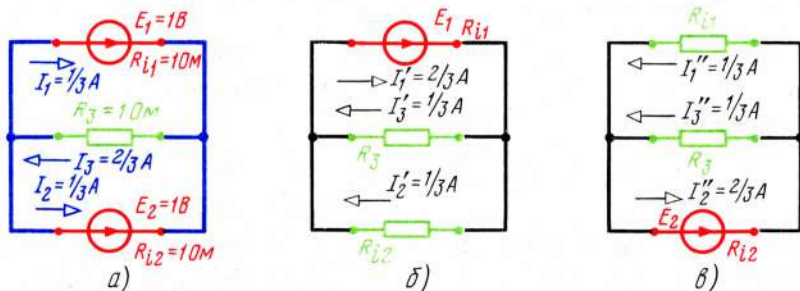


Рис. 3.25

сопротивления  $R_{i2}$  и  $R_3$  соединены между собой параллельно, а сопротивление  $R_{i1}$  — с ними последовательно, то

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_{i1} + [(R_{i2}R_3)/(R_{i2} + R_3)]} = \frac{1}{1 + [1 \cdot 1/(1+1)]} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \text{ А.}$$

Зная ток  $I'_1$ , можно рассчитать токи  $I'_2$  и  $I'_3$  из выражений

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_{i2} + R_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{3} \text{ А.}$$

(Напомним, что если ток разветвляется на две ветви, то ток в ветви равен току в неразветвленной части цепи, умноженной на дробь, у которой в знаменателе — сумма сопротивлений ветвей, на которые ток разветвляется, а в числителе — сопротивление противоположной ветви).

$$\text{Аналогично } I'_3 = I'_1 \frac{R_{i2}}{R_{i2} + R_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1+1} = \frac{1}{3} \text{ А.}$$

$$I''_2 = \frac{E_2}{R_{i2} + R_{i1}R_3/(R_{i1} + R_3)} = \frac{1}{1 + 1 \cdot 1/(1+1)} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \text{ А;}$$

$$I''_3 = I''_2 \frac{R_{i1}}{R_{i1} + R_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{3} \text{ А;}$$

$$I''_1 = I''_2 \frac{R_3}{R_{i1} + R_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{3} \text{ А.}$$

Нанесем числовые значения на схемах рис. 3.25, б и в. Определим токи в исходной цепи. В первой ветви протекают токи  $I'_1$  и  $I''_1$ , причем в противоположные стороны, следовательно,  $I_1 = I'_1 - I''_1 = 2/3 - 1/3 = 1/3$  А. Во второй ветви  $I_2 = I'_2 - I''_2 = 2/3 - 1/3 = 1/3$  А. В третьей ветви частичные токи текут в одну сторону, поэтому  $I = I'_3 + I''_3 = 1/3 + 1/3 = 2/3$  А.

Нанесем получившиеся токи на схему рис. 3.25, а, сделаем проверки.

Для узла А:  $I_3 = I_1 + I_2$ ;  $2/3 = 1/3 + 1/3$ ;  $2/3 = 2/3$ ;  $\delta = 0$ .

Для узла В:  $I_1 + I_2 = I_3$ ;  $1/3 + 1/3 = 2/3$ ;  $2/3 = 2/3$ ;  $\delta = 0$ .

Для верхнего контура:  $E_1 = R_{i1}I_1 + R_3I_3$ ;  $1 = 1 \cdot 1/3 + 1 \cdot 2/3$ ;  $1 = 1$ ,  $\delta = 0$ .

Для нижнего контура:  $E_2 = R_{i2}I_2 + R_3I_3$ ;  $1 = 1/3 \cdot 1 + 1 \cdot 2/3$ ;  $1 = 1$ ;  $\delta = 0$ .

Баланс мощностей:

$$E_1I_1 + E_2I_2 = I_1^2R_{i1} + I_2^2R_{i2} + I_3^2R_3;$$

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1;$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}; \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}; \quad \delta = 0.$$



### 3.22. МЕТОД ДВУХ УЗЛОВ

Если имеется несколько ветвей, соединенных параллельно, в каждой из которых находятся источники напряжения и резистивные сопротивления (рис. 3.26, а), то все эти ветви можно заменить одной с некоторой эквивалентной ЭДС  $E_{\text{ЭК}}$  и эквивалентным внутренним сопротивлением  $R_{i\text{ЭК}}$  (рис. 3.26, б). Расчет производится по формулам

$$E_{\text{ЭК}} = \Sigma EG / \Sigma G; \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{R_{i\text{ЭК}}} = \Sigma \frac{1}{R_i}, \quad (3.24)$$

где  $\Sigma EG$  — алгебраическая сумма произведений ЭДС ветви на резистивную проводимость этой ветви.

Рассчитаем  $E_{\text{ЭК}}$  и  $R_{i\text{ЭК}}$  для цепи рис. 3.26, б. Прежде чем составлять уравнения, следует перенести на новый чертеж точки  $AB$ , сопротивление  $R_H$  и задаться полярностью ЭДС  $E_{\text{ЭК}}$ . Пусть, например, эквивалентная ЭДС направлена к точке  $A$  (можно сказать несколько упрощенно: "... предположим, что плюс эквивалентного напряжения будет на точке  $A$ , а минус — на точке  $B$ "). В этом случае в формуле  $E_{\text{ЭК}} = \Sigma EG / \Sigma G$  со знаком плюс следует писать те ЭДС, которые в исходной схеме направлены стрелками к точке  $A$ , а со знаком минус — те, стрелки которых направлены к точке  $B$ . Все резистивные проводимости имеют знак плюс. На этом основании в схеме рис. 3.26, б

$$E_{\text{ЭК}} = \frac{\Sigma EG}{\Sigma G} = \frac{E_1 \left( \frac{1}{R_{i1} + R_1} \right) - E_2 \left( \frac{1}{R_{i2} + R_2} \right) + E_3 \left( \frac{1}{R_{i3} + R_3} \right)}{\left( \frac{1}{R_{i1} + R_1} \right) + \left( \frac{1}{R_{i2} + R_2} \right) + \left( \frac{1}{R_{i3} + R_3} \right)}.$$

Затем подставляют числовые значения и производят арифметические расчеты. Если рассчитываемая ЭДС  $E_{\text{ЭК}}$  получается со знаком плюс, то это означает, что предполагаемая полярность источника  $E_{\text{ЭК}}$  выбрана правильно, а если со знаком минус, то действительная полярность противоположна

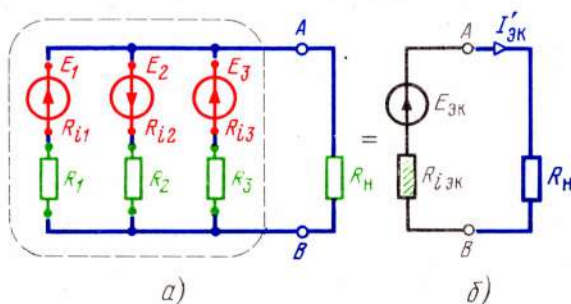


Рис. 3.26

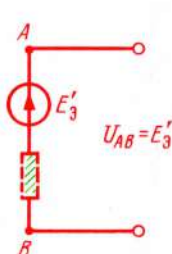


Рис. 3.27

выбранной. После проведенных преобразований получается неразветвленная цепь, в которой, зная ЭДС  $E_{\text{ЭК}}$ , эквивалентное внутреннее сопротивление  $R_{\text{ЭК}}$ , сопротивление нагрузки  $R_{\text{Н}}$ , можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа;  $E_{\text{ЭК}} = U_{R_{\text{ЭК}}} + U_{R_{\text{Н}}}$  (для мгновенных значений  $e_{\text{ЭК}} = u_{R_{\text{ЭК}}} + u_{R_{\text{Н}}}$ ), откуда  $E_{\text{ЭК}} = R_{\text{ЭК}} I_{\text{ЭК}} + R_{\text{Н}} I_{\text{ЭК}} = (R_{\text{ЭК}} + R_{\text{Н}}) I_{\text{ЭК}}$ ,

$$a \quad I_{\text{Н}} = \frac{E_{\text{ЭК}}}{R_{\text{ЭК}} + R_{\text{Н}}} \quad (i_{\text{Н}} = \frac{e_{\text{ЭК}}}{R_{\text{ЭК}} + R_{\text{Н}}}),$$

после чего легко определить напряжение на узлах  $AB$ , а затем токи в ветвях (см. § 3.6). Операцию по расчету напряжения на узлах цепи можно сократить, если ветвь с нагрузочным сопротивлением представить как ветвь с ЭДС, равной нулю (например,  $E_4 = 0$ ). В этом случае вся цепь превращается в разомкнутую ветвь с ЭДС  $E_{\text{ЭК}}$ , но в разомкнутой ветви напряжение на внешних зажимах равно ЭДС источника, т. е.  $U_{AB} = E_{\text{ЭК}}$  (рис. 3.27). Следовательно, в цепи рис. 3.26

$$U_{AB} \left( \frac{\sum EG}{\sum G} \right) = \frac{\left( \frac{E_1}{R_{i1} + R_1} \right) - \left( \frac{E_2}{R_{i2} + R_2} \right) + \left( \frac{E_3}{R_{i3} + R_3} \right)}{\left( \frac{1}{R_{i1} + R_1} \right) + \left( \frac{1}{R_{i2} + R_2} \right) + \left( \frac{1}{R_{i3} + R_3} \right) + \frac{1}{R_{\text{Н}}}}.$$

Зная напряжение  $U_{AB}$ , рассчитывают ток в ветвях.

### 3.23. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА (МЕТОД ХХ И КЗ)

Метод эквивалентного генератора дает возможность рассчитать ток в одной ветви цепи. Для этого необходимо проделать следующее:

1. Разомкнуть ветвь, ток в которой необходимо определить.
2. Любым методом рассчитать разность потенциалов между точками разрыва. Как правило, для этого приходится определять токи, получившиеся в цепи, после разрыва ветви. Но так как после разрыва одной ветви, контуров в цепи становится меньше, рассчитывать эти токи становится легче, чем в исходной схеме. Напряжение между точками разрыва часто называют "холостым" и обозначают  $U_{\text{Х}}$ .
3. Электродвижущую силу всех источников положить равным нулю (внутренние сопротивления источников остаются неизменными) и рассчитать сопротивление между точками разрыва. Это сопротивление часто называют "коротким" и обозначают  $R_{\text{К}}$ .
4. Определить ток в данной ветви из выражения  $I = U_{\text{Х}}/R_{\text{К}}$ .

**Пример 3.12.** Рассчитать методом эквивалентного генератора ток в третьей ветви цепи, изображенной на рис. 3.28, а.

**Решение.** Разомкнем третью ветвь, точки разрыва обозначим  $M$  и  $N$ . Схема принимает вид рис. 3.28, б. В получившейся цепи протекают токи  $I_A = E_1/(R_1 + R_2)$  и  $I_B = E_5/(R_4 + R_5)$ . Примем потенциал точки  $M$  за нулевой. В этом случае потенциал точки  $S$  будет  $\varphi_S = -R_2 I_A = -E_1 R_2/(R_1 + R_2)$ , (поскольку ток  $I_A$  протекает от точки  $M$  к точке  $S$ , потенциал точки  $S$  ниже потенциала точки  $M$ ). Ток  $I_B$  протекает от точки

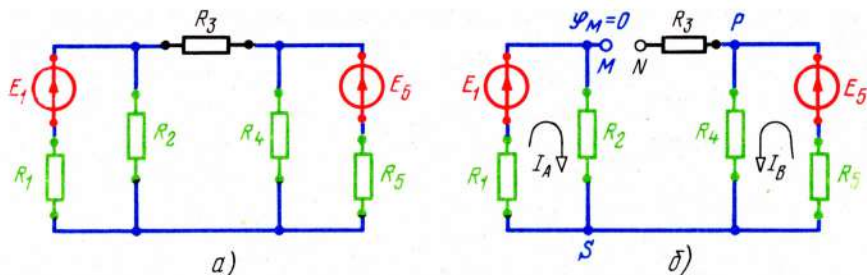


Рис. 3.28

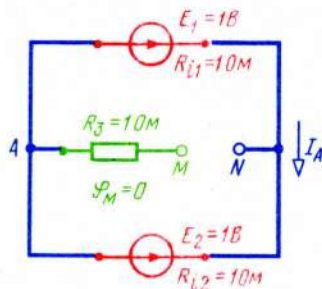


Рис. 3.29

$P$  к точке  $S$ , поэтому потенциал точки  $P$  выше потенциала точки  $S$  на значение падения напряжения на сопротивлении  $R_4$ , следовательно,  $\varphi_P = \varphi_S + R_4 I_B = -E_1 R_2 / (R_1 + R_2) + E_5 R_4 / (R_4 + R_5)$ . По сопротивлению  $R_3$  ток не протекает, поэтому потенциал точки  $N$  равен потенциалу точки  $P$ , т. е.  $\varphi_N = E_5 R_4 / (R_4 + R_5) - E_1 R_2$ . Напряжение между точками разрыва  $U_X = U_{MN} = \varphi_N$ .

Рассчитаем теперь сопротивление между точками  $MN$ . Положив  $E_1 = E_5 = 0$ , получим  $R_{MN}^K = R_{MN} = R_3 + R_4 R_5 / (R_4 + R_5) + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . Ток  $I_3 = U_X / R_K$ . Если  $\varphi_N > \varphi_M$ , то ток  $I_3$  в исходной цепи будет протекать от точки  $P$  к точке  $N$ , а если  $\varphi_N < \varphi_M$ , то в противоположном направлении.

**Пример 3.13.** Рассчитать методом эквивалентного генератора ток  $I_3$  в схеме рис. 3.25, а.

**Решение.** После размыкания третьей ветви схема принимает вид рис. 3.29. В данной цепи оказывается только один ток  $I_A = (E_1 - E_2) / (R_{i1} + R_{i2}) = (1 - 1) / (1 + 1) = 0$ . Примем потенциал точки  $M$  за нулевой ( $\varphi_M = 0$ ); в этом случае потенциал точки  $A$  также равен нулю, поскольку через сопротивление  $R_3$  ток не протекает. Потенциал точки  $N$  выше потенциала точки  $A$  на величину  $E_1$  (или  $E_2$ , в данном случае это безразлично), т. е.  $\varphi_N = 1$  В. Рассчитаем сопротивление между точками  $MN$ :  $R_{MN} = R_3 + R_{i1} R_{i2} / (R_{i1} + R_{i2}) = 1 + 1 \cdot 1 / (1 + 1) = 1,5$  Ом. Определим ток  $I_3$ :  $I_3 = U_{NM} / R_{NM} = 1 / 1,5 = 0,67$  А. Так как потенциал точки  $N$  оказался выше потенциала точки  $M$ , то ток через сопротивление  $R_3$  в исходной схеме будет протекать от точки  $N$  к точке  $A$ , что полностью совпадает с результатами, полученными ранее.

### 3.24. ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ (ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ)

Принцип взаимности справедлив для линейных пассивных цепей. Существуют две формулировки этого принципа. Первая: если источник напряжения включить в  $k$ -ю ветвь цепи, то в  $q$ -й ветви этой же цепи станет протекать некоторый ток. Но если этот же источник включить в  $q$ -ю ветвь, то в  $k$ -й ветви станет протекать тот ток, который в первом случае протекал в  $q$ -й ветви. Вторая формулировка (дуальная первой): если к некоторым точкам электрической цепи (например,  $MN$ ) подключить источник ЭДС с нулевым внутренним сопротивлением, то между другими точками этой же цепи (например,  $PS$ ) окажется некоторое напряжение. Но если тот же источник под-



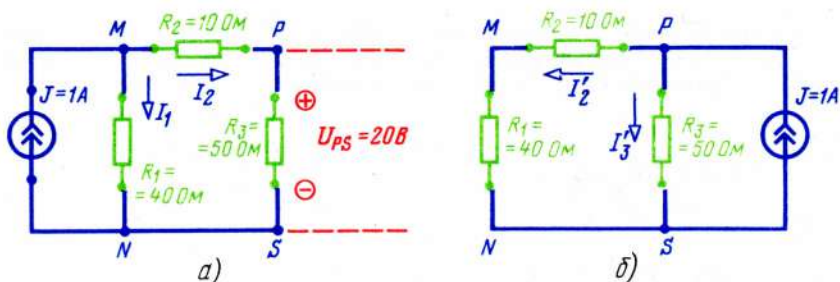


Рис. 3.30

ключить к точкам  $PS$ , то между точками  $MN$  окажется напряжение, которое в первом случае было между точками  $PS$ .

**Пример 3.14.** В цепи рис. 3.25,  $\epsilon$  ЭДС  $E_2 = 1$  В, включенная во вторую ветвь, вызывает в первой ветви ток  $I_1'' = 0,333$  А. Но если бы источник  $E_2$  был включен в первую ветвь, то во второй ветви стал протекать ток 0,333 А.

**Пример 3.15.** В цепи рис. 3.30,  $a$  источник, ток которого  $J = 1$  А, подключен к точкам  $MN$ . Подсчитаем напряжение, которое окажется между точками  $PS$ :  $I_2 = JR_1 / (R_1 + R_2 + R_3) = 1 \cdot 40 / (40 + 10 + 50) = 0,4$  А;  $U_{PS} = R_3 I_2 = 50 \cdot 0,4 = 20$  В. Отключим источник  $J$  от точек  $MN$  и подключим к точкам  $PS$  (рис. 3.30,  $б$ ). По теореме взаимности между точками  $MN$  должно оказаться напряжение 20 В.

Выполним проверку:  $I_2' = JR_3 / (R_1 + R_2 + R_3) = 1 \cdot 50 / (40 + 10 + 50) = 0,5$  А;  $U_{MN} = R_1 I_2' = 40 \cdot 0,5 = 20$  В. Как видно из произведенных расчетов, принцип взаимности полностью выполняется.

### 3.25. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВХОДНЫХ И ВЗАИМНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ (ПРОВОДИМОСТЕЙ) ЦЕПЕЙ

В общем случае в каждой цепи можно различать столько входных сопротивлений, сколько ветвей имеет данная цепь. Чтобы рассчитать входное сопротивление цепи относительно  $k$ -й ветви, необходимо проделать следующее:

1. Электродвижущие силы всех источников, имеющих в цепи, положить равными нулю (внутренние сопротивления источников остаются неизменными).
2. В ветвь, относительно которой следует рассчитывать внутреннее сопротивление, включить источник напряжения с ЭДС  $E$  произвольного значения.
3. Любым методом рассчитать ток  $I$ , получающийся в ветви, в которую включен источник.
4. Входное сопротивление цепи относительно данной ветви рассчитывают по формуле  $R_{вх} = E/I$ , а входную проводимость — по формуле  $G_{вх} = I/E$ .

**Пример 3.16.** В цепи рис. 3.25,  $a$  рассчитать входные сопротивления относительно первой, второй и третьей ветвей.

**Решение.** Как видно из схемы рис. 3.25,  $б$ , при ЭДС в первой ветви, равной 1 В, ток в этой ветви равен  $2/3$  А, следовательно,  $R_{вх(1)} = E_1/I_1 = 1 / (2/3) = 3/2$  Ом, а  $G_{вх(2)} = 2/3$  См.

Как видно из схемы рис. 3.25, в, входные сопротивления и проводимости относительно входной ветви оказываются одинаковыми. Определим  $R_{\text{вх}}(3)$ . Если источник с ЭДС  $E$  поместить в третью ветвь, а из первой и второй ветвей источник исключить, то

$$I_3 = \frac{E_3}{R_3 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)} = E_3 (R_1 + R_2) / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3),$$

откуда

$$R_{\text{вх}}(3) = \frac{E_3}{I_3} = \frac{E_3 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{E_3 (R_1 + R_2)} = \frac{3}{2} \text{ Ом}, \quad G_{\text{вх}}(3) = \frac{3}{2} \text{ См}.$$

Из полученного выражения видно, что ЭДС  $E$  при определении входных сопротивлений сокращается, поэтому ее значение совершенно безразлично. Так как в данном примере сопротивления всех ветвей одинаковые, то и входные сопротивления (проводимости) оказались также одинаковыми.

### 3.26. ВЗАИМНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ (ПРОВОДИМОСТИ) ЦЕПЕЙ

Чтобы рассчитать взаимные сопротивления (проводимости) между двумя ветвями цепи, необходимо проделать следующее:

1. ЭДС всех источников положить равными нулю (внутренние сопротивления источников остаются неизменными).

2. В одну из ветвей поместить ЭДС  $E$  и любым методом рассчитать получающийся при этом ток в другой ветви (например, источник помещают в  $k$ -ю ветвь, а ток определяют в  $q$ -й ветви).

3. Взаимное сопротивление между этими ветвями определяют из выражения  $R_{(k-q)} = E_k / I_q$ , а взаимную проводимость — из выражения  $G_{(k-q)} = I_q / E_k$ .

**Пример 3.17.** Рассчитать взаимные сопротивления и проводимости между первой и второй ветвями в цепи рис. 3.25. Как видно из рис. 3.25, б  $R_{(1-2)} = E_1 / I'_2 = \frac{1}{1/3} = 3 \text{ Ом}$ . Разумеется, источник можно было бы поместить во вторую ветвь, рассчитать ток, получающийся при этом в первой ветви, и взять их отношение. Как видно из схемы рис. 3.25, в, результат получился бы тем же самым:  $E_2 / I'_1 = E_1 / I'_2 = 3 \text{ Ом}$ .

### 3.27. ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Пусть имеется неразветвленная цепь, в которой ЭДС  $E$ , внутреннее сопротивление  $R_i$  — величины постоянные, а внешнее сопротивление  $R$  — переменное, изменяющееся от нуля до бесконечности (рис. 3.31). Исследуем, каким образом будут изменяться ток  $I$  в цепи, напряжение на сопротивлении  $R$  (т. е. между точками  $AB$ ) —  $U$ , мощность, рассеиваемая во внешнем сопротивлении  $P$ , коэффициент полезного действия цепи КПД  $\eta$  при изменении сопротивления  $R$  от нуля до бесконечности. Так как  $I = E / (R_i + R)$ , то при  $R_i = 0$ ,  $I = E / R$ , причем в этом случае оказывается наибольший ток, который можно получить в данной цепи  $I_{\text{max}}$ . При  $R = R_i$   $I = E / 2R =$

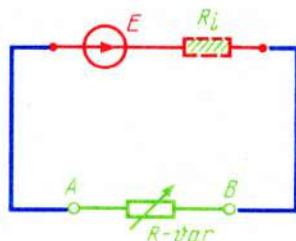


Рис. 3.31

$= 0,5 I_{max}$ . При  $R = \infty$   $I = E/\infty = 0$  (напомним, что чем больше знаменатель, тем меньше частное от деления). Напряжение на внешнем сопротивлении  $R$  определяется из выражения  $U = RI = RE/(R_i + R)$ . При  $R = 0$   $U = 0$ , при  $R = R_i$   $U = R_i E/(R_i + R_i) = R_i E/2R_i = 0,5 E$ . При  $R = \infty$  получается выражение вида  $\infty/\infty$ , что представляет собой неопределенность. Чтобы раскрыть эту неопределенность, следует в числителе и знаменателе вынести за скобку член, обращающийся в бесконечность. После такого преобразования члены, равные бесконечности, оказываются в знаменателях слагаемых и обращаются в нули. Проведем такое преобразование:

$$U = RI = RE/(R_i + R) = R(E)/R(1 + R_i/R) = E/(1 + R_i/R).$$

При  $R = \infty$   $U = E/(1 + R_i/\infty) = E/(1 + 0) = E$ .

Исследуем, как будет изменяться мощность, рассеиваемая в сопротивлении  $R$ , при его изменении от нуля до бесконечности. Мощность  $P$  определяют из выражения  $P = I^2 R$ . Очевидно, что при  $R = 0$ ,  $P = 0$ . При  $R = \infty$   $I = 0$ , но при отсутствии тока в цепи мощность выделяться не может, таким образом, при  $R = \infty$   $P = 0$ . Доказать это можно и с помощью математических выкладок. Произведем необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} P = I^2 R &= \left( \frac{E}{R_i + R} \right)^2 R = \frac{E^2 R}{R_i^2 + 2R_i R + R^2} = \frac{R^2 (E^2/R)}{R^2 (R_i^2/R^2 + 2R_i/R + 1)} = \\ &= \frac{E^2/\infty}{(R_i^2/\infty) + (2R_i/\infty) + 1} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристика  $P = f(R)$  начинается с нуля и кончается нулем, а в этом случае кривая обязательно имеет максимум. Для нахождения сопротивления, при котором мощность, выделяемая в этом сопротивлении, будет максимальной, необходимо взять производную от выражения, определяющего мощность, по переменной величине, в данном случае, внешнему сопротивлению  $R$ . Получившуюся производную следует приравнять нулю и решить получившееся уравнение относительно искомой переменной величины. В данном случае необходимо решить уравнение

$$\frac{dP}{dR} = 0, \text{ или } \frac{d}{dR} \left( \frac{E^2 R}{R_i^2 + 2R_i R + R^2} \right) = 0.$$

Напомним, что если  $y = u/v$ , то  $y' = (u'v - v'u)/v^2$ . Возьмем производную и приравняем ее нулю:



$$\frac{(E^2 R)' (R_i^2 + 2R_i R + R^2) - (R_i^2 + 2R_i R + R^2)' E^2 R}{(R_i^2 + 2R_i R + R^2)^2} = 0$$

или

$$\frac{E^2 (R_i^2 + 2R_i R + R^2) - (2R_i + 2R) E^2 R}{(R_i^2 + 2R_i R + R^2)^2} = 0.$$

Вынесем член  $E^2$  за скобку и раскроем скобки:

$$\frac{E^2 (R_i^2 + 2R_i R + R^2 - 2R_i R - 2R^2)}{(R_i^2 + 2R_i R + R^2)^2} = \frac{E^2 (R_i^2 - R^2)}{(R_i^2 + 2R_i R + R^2)^2} = 0.$$

Дробь равна нулю, если знаменатель равен бесконечности или числитель равен нулю. В данном случае внешнее сопротивление  $R$  не может быть бесконечным, поскольку при этом мощность оказывается нулевой, а не максимальной. Таким образом, предположение, что  $R = \infty$ , не соответствует условию задачи. Но если знаменатель дроби не равен бесконечности, а дробь равна нулю, то это означает, что числитель равен нулю. Так как  $E^2$  представляет величину, отличную от нуля, то  $R_i^2 - R^2 = 0$ , откуда  $R^2 = R_i^2$  и  $R = \pm \sqrt{R_i^2} = \pm R_i$ . Поскольку в пассивных цепях сопротивления с отрицательным значением физического смысла не имеют,  $R = R_i$ . Таким образом, в цепи, показанной на рис. 3.31, во внешнем сопротивлении выделяется наибольшая мощность в том случае, если внешнее сопротивление  $R$  равно внутреннему сопротивлению  $R_i$ . Чтобы рассчитать максимальную мощность  $P_{max}$ , следует в выражение мощности вместо  $R$  подставить  $R_i$  и подсчитать получившееся выражение

$$P_{max} = E^2 R_i / (R_i + R_i)^2 = E^2 R_i / 4R_i^2 = E^2 / 4R_i.$$

Выделить во внешнем сопротивлении  $R$  мощность большую, чем  $E^2 / 4R_i$ , не представляется возможным.

Исследуем, как будет изменяться коэффициент полезного действия цепи  $\eta$  при изменении внешнего сопротивления  $R$  от нуля до бесконечности. Коэффициентом полезного действия (КПД) называется отношение полезной мощности  $P$ , т. е. мощности, рассеиваемой во внешнем сопротивлении  $R$ , к мощности, отдаваемой источником  $P_{ист}$ :

$$\eta = P / P_{ист} = I^2 R / EI = IR / E = U / E = IR / [I(R_i + R)] = R / (R_i + R) = 1 / (1 + R_i / R).$$

Коэффициент полезного действия цепи можно подсчитать с помощью любой из приведенных формул. Исследуем данные выражения. При  $R = 0$   $\eta = 0$ , при  $R = R_i$   $\eta = 0,5 = 50\%$ , при  $R = \infty$   $\eta = 1 = 100\%$ . Таким образом, при изменении в цепи рис. 3.31 внешнего сопротивления  $R$  от 0 до  $\infty$  ток изменяется от  $E/R_i$  до 0, напряжение на внешнем сопротивлении увеличивается от 0 до ЭДС  $E$ , мощность сначала возрастает от 0 до  $E^2 / 4R_i$ , а затем снова уменьшается до 0, КПД изменяется от 0 до 1 (рис. 3.32, а).

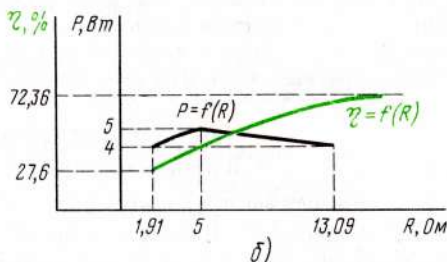
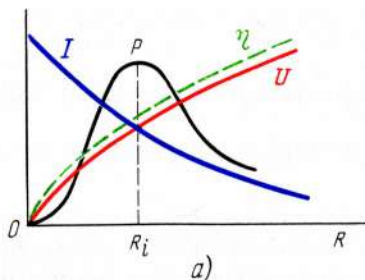


Рис. 3.32

**Пример 3.18.** Определить наибольшую мощность, которую можно рассеять во внешнем сопротивлении, подключенном к источнику с  $E = 10$  В,  $R_i = 5$  Ом:

$$P_{max} = E^2 / 4R_i = 10^2 / (4 \cdot 5) = 5 \text{ Вт.}$$

Рассчитаем внешнее сопротивление  $R$ , при котором в этом сопротивлении выделяется мощность  $P = 4$  Вт.

Решение.

$$P = E^2 R / (R_i + R)^2 = E^2 R / (R_i^2 + 2R_i R + R^2), \text{ т. е. } P(R_i^2 + 2R_i R + R^2) = E^2 R$$

или

$$PR_i^2 + 2R_i PR + PE^2 - E^2 R = 0, \quad PR^2 - (E^2 - 2R_i P)R + PR_i^2 = 0.$$

Поделим все члены уравнения на множитель  $P$ :  $R^2 - (E^2/P - 2R_i)R + R_i^2 = 0$ .

Подставив числовые значения  $R^2 - (10^2/4 - 2 \cdot 5)R + 5^2 = 0$ , получим квадратное уравнение  $R^2 - 15R + 25 = 0$ , откуда

$$R_{1,2} = 7,5 \pm \sqrt{(7,5)^2 - 25} = 7,5 \pm \sqrt{56,25 - 25} = 7,5 \pm \sqrt{31,25} = 7,5 \pm 5,59;$$

следовательно,  $R_1 = 13,09$  Ом,  $R_2 = 1,91$  Ом. Таким образом, расчет показывает, что мощность 4 Вт в данной цепи будет выделяться при двух значениях сопротивления  $R$ , 13,09 и 1,91 Ом. В первом случае внешнее сопротивление в  $13,09/5 = 2,62$  раза больше внутреннего, а во втором и такое же число раз ( $5/1,92 = 2,62$ ) меньше внутреннего. Произведем проверку:

$$P_1 = E^2 R_1 / (R_i + R_1)^2 = 10^2 \cdot 13,09 / (5 + 13,09)^2 = 4 \text{ Вт};$$

$$P_2 = E^2 R_2 / (R_i + R_2)^2 = 10^2 \cdot 1,91 / (5 + 1,91)^2 = 4 \text{ Вт},$$

т. е. в обоих случаях мощность во внешнем сопротивлении оказывается одинаковой, равной, как и было поставлено по условию, 4 Вт. Рассчитаем КПД цепи для обоих случаев:  $\eta = R / (R_i + R)$ ,  $\eta_1 = R_1 / (R_i + R_1) = 13,09 / (5 + 13,09) = 72,36\%$ ;  $\eta_2 = R_2 / (R_i + R_2) = 1,91 / (5 + 1,91) = 27,64\%$ .

Таким образом, заданную мощность 4 Вт можно получить при двух значениях внешнего сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , но при  $R_1$  КПД цепи составляет 72,36 %, а при  $R_2$  — только 27,64 %. Происходит это потому, что при большом внешнем сопротивлении для получения некоторой мощности достаточно небольшого тока, при этом мощность, выделяющаяся на внутреннем сопротивлении, будет небольшой, КПД высоким. Для получения этой же мощности, но при меньшем сопротивлении, ток должен быть большим, но при этом возрастает мощность потерь на внутреннем сопротивлении, что приводит к понижению КПД. Рассчитаем ток, который должен отдавать источник в обоих случаях. Так как  $P = I^2 R$ , то  $I = \sqrt{P/R}$ , откуда  $I_1 = \sqrt{4/13,09} = 0,5528$  А, а  $I_2 = \sqrt{4/1,91} = 1,447$  А, т. е. в 2,62 раза больший, чем в первом случае. Проверим мощ-

ности в сопротивлениях:  $P_1 = I_1^2 R_1 = 0,5528^2 \cdot 13,09 = 4 \text{ Вт}$ ;  $P_2 = I_2^2 R_2 = 1,447^2 \times 1,91 = 4 \text{ Вт}$ . Рассчитаем мощности, отдаваемые источниками:  $P_{\text{ист}} = P/\eta$   $P_{\text{ист}1} = 4/0,7236 = 5,53 \text{ Вт}$ ,  $P_2 = 4/0,276 = 14,47 \text{ Вт}$ .

Характеристики  $P = f(R)$  и  $\eta = f(R)$  для данного примера показаны на рис. 3.32, б.

### 3.28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЦЕПИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В общем случае приходится анализировать цепи более сложные, чем показаны на рис. 3.31. В цепи, кроме собственно внутреннего сопротивления источника  $R_i$ , могут быть другие сопротивления, включенные различными способами. Сразу возникает вопрос, каким должно быть внешнее сопротивление  $R$ , чтобы в нем выделилась возможно большая мощность? Принцип резистивной цепи остается неизменным: сопротивление внешнее должно равняться сопротивлению внутреннему, причем внутренним сопротивлением является не собственно внутреннее сопротивление источника, а эквивалентное сопротивление всех сопротивлений цепи, кроме того сопротивления, в котором определяется мощность. Таким образом, чтобы определить эквивалентное внутреннее сопротивление цепи, необходимо проделать следующее:

1. Электродвижущие силы всех источников положить равными нулю (собственно внутреннее сопротивление источников остается при этом неизменным).

2. Отключить от цепи внешнее сопротивление (т. е. сопротивление, мощность которого определяется) и рассчитать сопротивление между точками, к которым было подключено внешнее сопротивление. Получившееся сопротивление является эквивалентным внутренним сопротивлением цепи. Если внешнее сопротивление  $R$  равно эквивалентному внутреннему сопротивлению  $R_{\text{эк}}$ , то в сопротивлении  $R$  будет выделяться максимальная мощность.

**Пример 3.19.** Определить сопротивление резистора  $R$  в цепи рис. 3.33, а, при котором выделяется наибольшая мощность.

**Решение.** Если положить  $E = 0$ , отключить от цепи сопротивление  $R$ , то между точками  $AB$  окажется сопротивление  $R_{\text{эк}} = R_i + R_1$ , следовательно, в сопротивлении  $R$ , подключенном к точкам  $AB$ , наибольшая мощность выделяется при  $R = R_i + R_1$ . Аналогично в цепи рис. 3.33, б наибольшая мощность в сопротивлении  $R$  выделится в том случае, если  $R = R_i R_1 / (R_i + R_1)$ . Разумеется, это соотношение можно получить весьма строго. Рассчитаем ток  $I_{\text{вх}}$ , текущий через источник:

$$I_{\text{вх}} = E / (R_i + R_1 R / (R_1 + R)) = E (R_1 + R) / (R_i R_1 + R_i R + R_1 R).$$

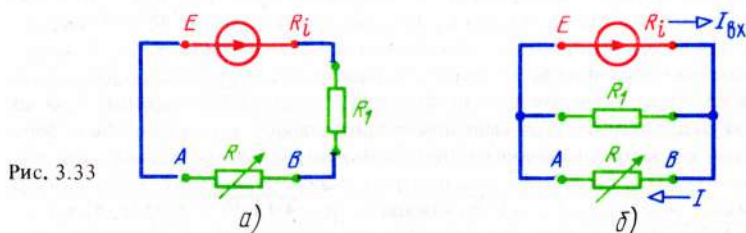


Рис. 3.33



Определим ток  $I$ , протекающий через сопротивление  $R$ :

$$I = I_{\text{вх}} \left( \frac{R_1}{R_1 + R} \right) = \frac{E (R_1 + R) R_1}{(R_1 + R) (R_i R_1 + R_i R + R_1 R)} = \frac{E R_1}{R_i R_1 + R_i R + R_1 R}.$$

Получим выражение мощности  $P_R$ , рассеиваемой в сопротивлении  $R$ :

$$P_R = I^2 R = E^2 R_1^2 R / (R_i R_1 + R_i R + R_1 R)^2 = E^2 R_1^2 R / (R_i^2 R_1^2 + R_i^2 R^2 + R_1^2 R^2 + 2R_i^2 R_1 R + 2R_i R_1^2 R + 2R_i R_1 R^2).$$

Исследуем получившееся выражение на экстремум:

$$\frac{dP_R}{dR} = \frac{E^2 R_1^2 (R_i^2 R_1^2 + R_i^2 R^2 + R_1^2 R^2 + 2R_i^2 R_1 R + 2R_i R_1^2 R + 2R_i R_1 R^2) - (2R_i^2 R_1 R + 2R_i R_1^2 R + 2R_i R_1 R^2) E^2 R_1^2}{(R_i R_1 + R_i R + R_1 R)^4} = 0.$$

Так как знаменатель не равен бесконечности (в этом случае ток и мощность в сопротивлении  $R$  равнялись бы нулю), то нулю равен числитель. Множитель  $E^2 R_1^2$ , не равный нулю, вынесем за скобку, в этом случае

$$E^2 R_1^2 (R_i^2 R_1^2 + R_i^2 R^2 + R_1^2 R^2 + 2R_i^2 R_1 R + 2R_i R_1^2 R + 2R_i R_1 R^2 - 2R_i^2 R^2 - 2R_i^2 R^2 - 2R_i^2 R_1 R - 2R_i R_1^2 R - 4R_i R_1 R^2) = 0$$

или

$$R_i^2 R_1^2 - R_i^2 R^2 - R_1^2 R^2 - 2R_i R_1 R^2 = 0,$$

откуда

$$(R_i^2 + R_1^2 + 2R_i R_1) R^2 = R_i^2 R_1^2, \text{ т. е. } R^2 = (R_i R_1)^2 / (R_i^2 + R_1^2 + 2R_i R_1) = (R_i R_1)^2 / (R_i + R_1)^2$$

и, следовательно,  $R = R_i R_1 / (R_i + R_1)$ , что было получено непосредственно по виду схемы.

### 3.29. ПОНЯТИЕ О ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАХ. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ

Цепи, имеющие две пары внешних зажимов, называются *четырёхполусниками*. У четырёхполусников различают входные и выходные зажимы (рис. 3.34). Действующее напряжение на входных зажимах обозначают обычно  $U_1$ , а на выходных —  $U_2$ . Коэффициентом передачи цепи по напряжению  $K$  называется любое из отношений

$$U_2/U_1 = U_{m2}/U_{m1} = U_{p(2)}/U_{p(1)}.$$

Коэффициент передачи является важнейшей характеристикой цепи и дает возможность рассчитать напряжение на выходе по известному напряжению на входе. Очевидно, что

$$U_2 = K U_1, U_{m2} = K U_{m1}, U_{p2} = K U_{p1}. \quad (3.25)$$

(Для краткости все последующие выкладки будем производить для действующих значений, хотя с равным успехом их можно было бы проводить и

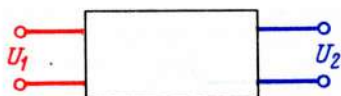


Рис. 3.34

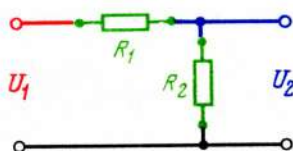


Рис. 3.35

для максимальных значений и для размаха.) *Коэффициент передачи любой линейной цепи не зависит от входного напряжения, а зависит только от параметров элементов, из которых состоит цепь, и способа их соединения.* Чтобы рассчитать в линейной цепи коэффициент передачи по напряжению (для краткости слова "по напряжению" в дальнейшем тексте будем опускать), необходимо проделать следующее:

1. Задаться произвольным напряжением на входе  $U_1$ .
2. Любым методом рассчитать напряжение на выходе  $U_2$ .
3. Взять отношение  $U_2/U_1$ , входное напряжение при этом сократится. Получившееся выражение не зависит от входного напряжения  $U_1$  и является коэффициентом передачи цепи по напряжению. Аналогичным образом можно определять коэффициент передачи по току  $K_I = I_2/I_1$  или по мощности  $K_P = P_2/P_1$ .

Рассмотрим важный частный случай. Рассчитаем коэффициент передачи  $K$  четырехполюсника Г-образного вида (рис. 3.35). Зададимся напряжением на входе  $U_1$ , при этом действующий ток в цепи будет  $I = U_1/(R_1 + R_2)$ , действующее напряжение на выходных зажимах  $U_2 = R_2 I = U_1 R_2/(R_1 + R_2)$ , коэффициент передачи  $K = U_2/U_1 = R_2/(R_1 + R_2)$ . Таким образом, в Г-образных четырехполюсниках коэффициент передачи равен отношению выходного сопротивления четырехполюсника  $R_2$  к входному  $(R_1 + R_2)$ :  $K = R_{\text{вых}}/R_{\text{вх}}$ .

*Входным сопротивлением* четырехполюсника называется сопротивление между входными зажимами, а *выходным* — между выходными в режиме холостого хода. Обратим внимание, что выражение  $K = R_2/(R_1 + R_2)$  справедливо только для четырехполюсников вида рис. 3.35. Для четырехполюсников с иной конфигурацией рассчитывать коэффициент передачи следует по общему правилу.

### 3.30. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ В МОСТОВОЙ СХЕМЕ

Рассчитаем коэффициент передачи  $K$  для мостовой цепи в режиме холостого хода, т. е. при разомкнутых вторичных зажимах (рис. 3.36, а). Зададимся входным напряжением  $U_1$ . В этом случае через сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  протекает ток  $I_1 = U_1/(R_1 + R_4)$ , а через  $R_2$  и  $R_3$  — ток  $I_2 = U_1/(R_2 + R_3)$ . Примем потенциал точки  $F$  за нулевой. Если положительное направление тока такое, как показано на рис. 3.36, а, то потенциал точки  $A$  выше потенциала точки  $F$  на величину падения напряжения на сопротивлении  $R_3$  (поскольку при указанной полярности напряжения источника положительный ток течет от точки  $A$  к точке  $F$ ), т. е.

$$\varphi_A = R_3 I_2 = U_1 R_3 / (R_2 + R_2).$$

Так как через сопротивление  $R_1$  ток течет от точки  $A$  к точке  $D$ , то потенциал точки  $D$  ниже потенциала точки  $A$  на величину падения напряжения на резисторе  $R_1$ , откуда

$$\varphi_D = \varphi_A - R_1 I_1 = \frac{U_1 R_3}{R_2 + R_3} - \frac{U_1 R_1}{R_1 + R_4} = U_1 \left[ \frac{R_3 R_4 - R_1 R_2}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)} \right].$$

Выходное напряжение

$$U_2 = \varphi_D - \varphi_F = U_1 \left[ \frac{R_3 R_4 - R_1 R_2}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)} \right],$$

а коэффициент передачи

$$K = U_2 / U_1 = \frac{R_3 R_4 - R_1 R_2}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)}. \quad (3.26)$$

Из полученного выражения видно, что коэффициент передачи цепи действительно зависит только от параметров цепи и не зависит от приложенного к ней напряжения.

Исследуем, каким образом будет изменяться коэффициент передачи данного четырехполюсника, если сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_4$  оставлять неизменными, а сопротивление  $R_3$  изменять от 0 до  $\infty$ . При  $R_3 = 0$   $K(0) = -R_1 / (R_1 + R_4)$ . Если в выражение  $K = (R_3 R_4 - R_1 R_2) / [(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)]$  подставить  $R_3 = \infty$ , то получается неопределенность вида  $\infty / \infty$ . Чтобы избавиться от неопределенности, вынесем из числителя и знаменателя множитель  $R_3$ . Тогда

$$K = \frac{R_4 - (R_1 R_2 / R_3)}{[1 - (R_2 / R_3)](R_1 + R_4)}.$$

При  $R_3 = \infty$   $K(\infty) = R_4 / (R_1 + R_4)$ . Таким образом, в цепи рис. 3.36, а при изменении  $R_3$  от 0 до  $\infty$  коэффициент передачи изменяется от  $-R_1 / (R_1 + R_4)$  до  $R_4 / (R_1 + R_4)$  (рис. 3.36, б).

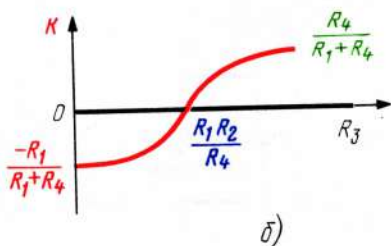
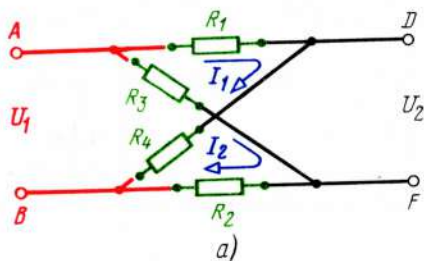


Рис. 3.36



Определим  $R_3$ , при котором  $K = 0$ . Коэффициент передачи равен нулю, если числитель выражения равен нулю, т. е.  $R_3 R_4 - R_1 R_2 = 0$ , откуда  $R_3 = R_1 R_2 / R_4$ . Следовательно, в цепи вида показанной на рис. 3.36, а, при  $0 < R_3 < (R_1 R_2 / R_4)$  коэффициент передачи является величиной отрицательной, а это означает, что полярность выходного напряжения оказывается противоположной по сравнению с полярностью входного. При  $R_3 = (R_1 R_2 / R_4)$  коэффициент передачи равен нулю, т. е. при указанных соотношениях потенциалы точек  $D$  и  $F$  равны между собой, выходное напряжение  $U_2$ , а следовательно, и коэффициент передачи в этом случае также равны нулю. При  $(R_1 R_2 / R_4) < R_3 < \infty$  коэффициент передачи  $K$  становится величиной положительной, т. е. полярности входного и выходного напряжений оказываются одинаковыми, а коэффициент передачи возрастает от 0 до значения  $R_4 / (R_1 + R_4)$ . Аналогичным образом можно исследовать коэффициент передачи четырехполюсников различных конфигураций при изменении значений каждого элемента цепи.

### 3.31. ДЕЛИТЕЛЬ НАПЯЖЕНИЯ С ПЛАВНОЙ РЕГУЛИРОВКОЙ

Четырехполюсник, коэффициент передачи которого меньше единицы называется делителем напряжения.

Исследуем коэффициент передачи делителя напряжения с плавной регулировкой (рис. 3.37, а). Делитель напряжения имеет три точки: точка  $A$  — входная, точка  $D$  — выходная и точка  $B$  — общая. Входное напряжение прикладывается к точкам  $AB$ , при этом через резистор  $R$  протекает ток, создающий на нем падение напряжения. Выходное напряжение  $U_2$  снимается с той части резистора, которая заключена между движком и общей точкой делителя, т. е. с сопротивления  $r$ . Очевидно, что чем меньше величина  $r$ , т. е. чем ниже установлен движок, тем меньше напряжение на выходе делителя, а чем выше — тем больше. Если движок находится в нижнем положении, то сопротивление между движком и нижней точкой, а также выходное напряжение  $U_2$  и коэффициент передачи  $K$  равны нулю. Если движок установлен в верхнее положение, то  $U_2 = U_1$ ,  $K = 1$ . Таким образом, в делителях напряжения, собранных по схеме рис. 3.37, а, коэффициент передачи может плавно изменяться от 0 до 1. В реальных устройствах к выходным зажимам делителя, как правило, подключают некоторый резистор, сопротивление которого есть входное сопротивление того устройства, на вход которого подается напряжение, снимаемое с делителя. Определим зависимость коэффициента передачи плавного делителя напряжения, нагруженного на резис-

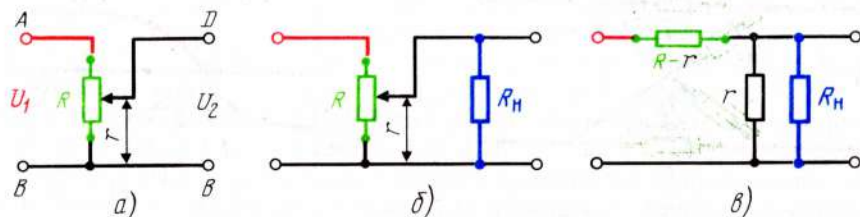


Рис. 3.37

тор с сопротивлением  $R_H$  (рис. 3.37, б) в зависимости от угла поворота движка, т. е. от отношения  $r/R$ .

Для удобства анализа представим схему делителя в виде Г-образного четырехполюсника (рис. 3.37, в). У таких четырехполюсников коэффициент передачи равен отношению выходного сопротивления к входному:

$$K = \frac{R_{\text{вых}}}{R_{\text{вх}}} = \frac{rR_H / (r + R_H)}{R - r + [rR_H / (r + R_H)]} = \frac{rR_H}{(Rr - r^2 + RR_H)} = \frac{r}{\frac{Rr}{R_H} - \frac{r^2}{R_H} + R}.$$

Конструктивно переменные резисторы часто выполняют в виде круглой подложки, на которую нанесен мастичный слой, обладающий заданным сопротивлением. Ползунок с токосъемным контактом может поворачиваться на угол порядка  $300 \dots 320^\circ$ . В подобной конструкции сопротивление  $r$ , а следовательно и отношение  $r/R$ , пропорциональны углу поворота  $\alpha$  ползунка. Подобные переменные резисторы широко используются в разнообразной электронной аппаратуре — в качестве регуляторов громкости, яркости, контрастности и т. д.

Если  $R_H = \infty$  (режим холостого хода), то  $K = r/R$ , т. е. коэффициент передачи пропорционален углу поворота движка. Но если сопротивление  $R_H$  сравнимо с сопротивлением  $R$ , то коэффициент передачи изменяется не пропорционально значению  $r/R$ , иначе говоря, углу поворота движка. Это происходит потому, что выходное сопротивление  $rR_H / (r + R_H)$  меньше сопротивления  $r$ , а выходное напряжение пропорционально выходному сопротивлению делителя. Однако при  $r = R$  коэффициент передачи становится равным единице при любых значениях  $R_H \neq 0$ . Поэтому при наличии резистора  $R_H$  выходное напряжение сначала медленно нарастает, а затем резко увеличивается. Это же вытекает из анализа выражения

$$K = \frac{r}{R + [(Rr/R_H) - (r^2/R_H)]}. \quad (3.27)$$

При  $R_H = \infty$   $K = r/R$ , а при  $R_H$ , равном конечной величине, пропорциональность нарушается. Например, если  $R_H = R$ , то при установке движка в среднее положение коэффициент передачи будет только 0,4, а для получения  $K = 0,5$  угол поворота  $\alpha$  должен быть не  $0,5\alpha_{\text{max}}$ , а  $0,61\alpha_{\text{max}}$ . Аналогично при  $R_H = 0,5R$  и  $\alpha = r/R = 0,5$   $K = 0,33$ , а для получения  $K = 0,5$  угол поворота должен быть  $0,7\alpha_{\text{max}}$ . При  $R_H = 0,1R$  и  $\alpha = 0,5\alpha_{\text{max}}$  коэффициент передачи составляет всего 14 %, для получения  $K = 0,5$  угол поворота должен быть около 90 % (рис. 3.38).

**Пример 3.20.** Рассчитать и построить характеристики  $K = f(r/R)$  цепи рис. 3.37, б для случаев: а)  $R_H = \infty$  и б)  $R_H = 0,1R$ . Результаты расчетов занести в табл. 3.1.

**Решение.** При  $R_H = \infty$   $K_1 = r/R$ . При  $R_H = 0,1R$

$$K_2 = \frac{r}{R + [(Rr/0,1R) - (r^2/0,1R)]} = \frac{r/R}{1 + 10[(r/R) - (r/R)^2]}.$$

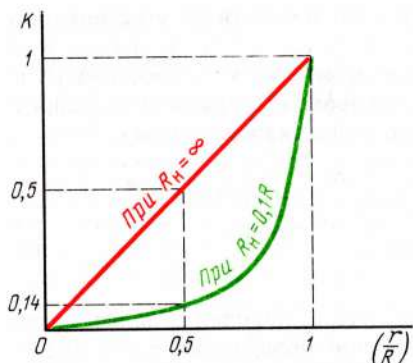


Рис. 3.38

Таблица 3.1

$r/R$	$K_1$ при $R_H = \infty$	$K_2$ при $R_H = 0,1R$
0	0	0
0,1	0,1	0,05263
0,2	0,2	0,07692
0,3	0,3	0,09617
0,4	0,4	0,1176
0,5	0,5	0,1428
0,6	0,6	0,1765
0,7	0,7	0,2258
0,8	0,8	0,3077
0,9	0,9	0,4737
1,0	1,0	1,0

Как видно из рис. 3.38 и табл. 3.1, при  $r/R = 0$  и  $r/R = 1$  обе характеристики совпадают, но при любых иных значениях  $r/R$  коэффициенты передачи оказываются в обоих случаях различными. Определим, при каком отношении  $r/R$  разность ординат характеристик коэффициентов передачи  $\Delta K$  будет наибольшей. Для удобства записи обозначим отношение  $r/R$  греческой буквой  $\nu$  (читается "ню"). В этом случае

$$\Delta K = r/R - \frac{r/R}{1 + 10[(r/R) - (r/R)^2]} = \nu - \frac{\nu}{1 + 10\nu - 10\nu^2} = \frac{\nu + 10\nu^2 - 10\nu^3 - \nu}{1 + 10\nu - 10\nu^2} =$$

$$= \frac{10\nu^2(1 - \nu)}{1 + 10\nu(1 - \nu^2)}.$$

Чтобы найти значение  $\nu$ , при котором разность ординат  $\Delta K$  будет наибольшей, необходимо исследовать данное выражение на экстремум, т. е. взять производную  $d\Delta K/d\nu$ , приравнять ее нулю и решить относительно  $\nu$  полученное уравнение. Проведем все выкладки. Напомним, что если  $y = u/v$ , то  $y' = (u'v - uv')/v^2$ . Следовательно,

$$\frac{d\Delta K}{d\nu} = \frac{(10\nu^2 - 10\nu^3)'(1 + 10\nu - 10\nu^2) - (10\nu^2 - 10\nu^3)(1 + 10\nu - 10\nu^2)'}{(1 + 10\nu - 10\nu^2)^2} =$$

$$= \frac{(20\nu - 30\nu^2)(1 + 10\nu - 10\nu^2) - (10\nu^2 - 10\nu^3)(10 - 20\nu)}{(1 + 10\nu - 10\nu^2)^2} =$$

$$= \frac{20\nu - 30\nu^2 + 200\nu^2 - 300\nu^3 - 200\nu^3 + 300\nu^4 - 100\nu^2 + 100\nu^3 + 200\nu^3 - 200\nu^4}{(1 + 10\nu - 10\nu^2)^2} =$$

$$= \frac{100\nu^4 - 200\nu^3 + 70\nu^2 + 20\nu}{(1 + 10\nu - 10\nu^2)^2} = \frac{10\nu(10\nu^3 - 20\nu^2 + 7\nu + 2)}{(1 + 10\nu - 10\nu^2)^2} = 0.$$



Дробь, как известно, равна нулю в двух случаях: если знаменатель равен бесконечности или числитель равен нулю. В нашем примере переменной величиной является член  $\nu$ . Но, по условиям задачи, наибольшим значением  $\nu = r/R$  является единица, поэтому знаменатель в данной задаче не может равняться бесконечности, но в этом случае числитель равен нулю, т. е.  $10\nu^3 - 20\nu^2 + 7\nu + 2 = 0$ . Если произведение двух множителей равно нулю, то один из них обязательно равен нулю (произведение двух множителей, отличных от нуля каждый, не может равняться нулю). Но  $10 \neq 0$ ,  $\nu$  также не может равняться нулю, так как при  $\nu = 0$   $\Delta K = 0$ , а не  $\Delta K_{max}$ , которое определяется. Следовательно, нулю равно выражение, находящееся в скобках, т. е.  $10\nu^3 - 20\nu^2 + 7\nu + 2 = 0$ . Чтобы решить уравнение третьей степени, необходимо произвести расчеты с помощью программируемого калькулятора. Приводим программу 3.2 для решения приведенного кубического уравнения вида  $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ .

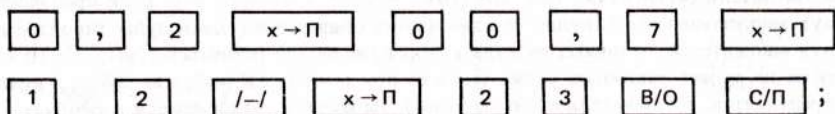
Программа 3.2 для решения уравнений третьей степени.

	F	/-/	В/О	F	ВП					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x → ПА 4 ~	Cx 0Г	xy 14	F↑ 0	↑ 0E	↑ 0E	П → x2 62	+	x → П6 46	x 12
1	П → x1 61	+	x → П3 43	x 12	П → x0 60	+	Fx < 0 5 [	22 22	FA 25	П → xA 6 ~
2	+	↑ 0E	FA 25	П → xA 6 ~	2 02	÷ 13	x → ПА 4 ~	-	x → П9 49	-
3	Fx = 0 5E	03 03	П → x6 66	/-/	2 02	÷ 13	x → П4 44	Fx 22	П → x3 63	-
4	Fx < 0 5 [	47 47	/-/	F -	x → П5 45	4 04	C/П 50	F -	x → П5 45	П → x4 64
5	+	x → П7 47	П → x4 64	П → x5 65	-	x → П8 48	7 07	C/П 50	F	/-/

В в о д и с х о д н ы х д а н н ы х:  $a_0 = RG0$ ,  $a_1 = RG1$ ,  $a_2 = RG2$ , набрать на клавиатуре значение  $1 + |a_{max}|$ , где  $|a_{max}|$  — модуль наибольшего из всех значений коэффициентов  $a$ . После ввода исходных данных нажать клавиши **В/О** и **С/П**.

В ы в о д р е з у л ь т а т о в. Если на индикаторе светится цифра 7, то это означает, что корни уравнения — вещественные, в этом случае  $x_1 = \boxed{\text{П} \rightarrow x} \boxed{7}$ ,  $x_2 = \boxed{\text{П} \rightarrow x} \boxed{8}$ ,  $x_3 = \boxed{\text{П} \rightarrow x} \boxed{9}$ . Если на индикаторе светится цифра 4, то это означает, что два корня будут сопряженно комплексными ( $x_{12} = d \pm jm$ ), а один вещественным. В этом случае  $d = \boxed{\text{П} \rightarrow x} \boxed{4}$ ,  $m = \boxed{\text{П} \rightarrow x} \boxed{5}$ ,  $x_3 = \boxed{\text{П} \rightarrow x} \boxed{9}$ . Время счета около 4 мин. В нашем примере получилось уравнение  $10\nu^3 - 20\nu^2 + 7\nu + 2 = 0$ , его следует сделать

приведенным. Для этого все члены уравнения необходимо поделить на коэффициент при переменной в высшей степени, в нашем примере 10. Уравнение приобретает вид  $\nu^3 - 2\nu^2 + 0,7\nu + 0,2 = 0$ . Введем числовые исходные данные



после счета получаются результаты:  $x_1 = 1,39588$ ,  $x_2 = 0,7863316$ ,  $x_3 = -1,8221169$ . Первый и третий корни, очевидно, являются посторонними, поскольку  $\nu$  не может быть ни больше единицы, ни отрицательным. Таким образом, расчет показывает, что при  $\nu = r/R = 0,7863316 \approx 0,786$  разность между обеими характеристиками  $\Delta K$  будет наибольшей. Рассчитаем  $\Delta K_{max}$ . Для этого в выражение  $\Delta K = f(\nu)$  подставим получившееся значение  $\nu$ :

$$\Delta K = \frac{10\nu^2(1-\nu)}{1+10\nu(1-\nu)} = \frac{10 \cdot 0,786^2(1-0,786)}{1+10 \cdot 0,786(1-0,786)} = 0,492939.$$

Произведем проверку. При  $\nu = 0,786$   $K_1 = 0,786$

$$K_2 = \frac{\nu}{1+10\nu(1-\nu)} = \frac{0,786}{1+10 \cdot 0,786(1-0,786)} = 0,2934.$$

$$\Delta K = \Delta K_{max} = K_1 - K_2 = 0,786 - 0,2934 = 0,492.$$

### 3.32. ИСТОЧНИКИ ТОКА

Все источники делятся на источники тока и источники напряжения. *Источником напряжения* называется источник, ЭДС которого не зависит от сопротивления цепи, подключенной к этому источнику. *Источником тока* называется источник, ток которого не зависит от сопротивления цепи, к которой подключен источник. У идеального источника напряжения внутреннее сопротивление  $R_i$  равно нулю, а у идеального источника тока — бесконечности. Реальный источник напряжения можно представить в виде идеального источника напряжения, последовательно с которым включено внутреннее сопротивление. Аналогично реальный источник тока можно представить в виде проводимости  $G_i$ , включенной параллельно с идеальным источником тока. У источников тока мгновенные токи обозначают буквой  $j$  (читается "жи"), действующие значения —  $J$  (большая буква "жи"), максимальные

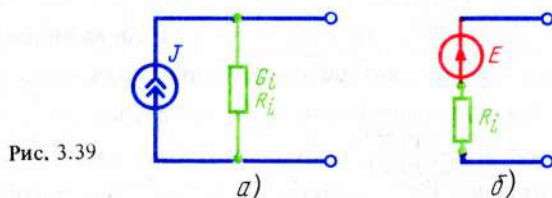


Рис. 3.39

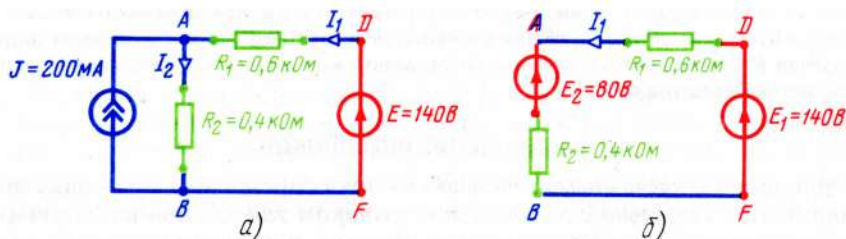


Рис. 3.40

значения  $J_m$ , размах —  $J_p$ . Обозначение источника тока показано на рис. 3.39, а. Источники напряжения и тока можно взаимно пересчитывать. Это значит, что по известным параметрам источника тока можно рассчитать параметры эквивалентного ему источника напряжения и наоборот. Пересчет производится по формулам  $E = J/G_i = R_i J$ ;  $J = E/R_i$  (рис. 3.39, а, б). Сопротивление, включенное параллельно источнику тока, и сопротивление, включенное последовательно с источником напряжения, равны между собой, т. е. сопротивление  $R_i$  переходит из цепи источника тока в цепь источника напряжения без какого-либо изменения.

**Пример 3.21.** Рассчитать токи в цепи рис. 3.40, а, используя преобразование источника тока в источник напряжения.

**Решение.** Напомним правило построения эквивалентных схем: сначала следует перенести буквы, расставленные в местах соединения элементов схемы (в нашем случае  $A, B, D, F$ ), затем перерисовать участки цепи, не подвергавшиеся изменениям (ветвь  $ADFB$ ) с источником  $E$  и сопротивлением  $R_1$ ), и после этого перерисовать участок цепи, подвергшийся изменению (ветви с источником тока  $J$  и сопротивлением  $R_2$ ). Очевидно, что в данном случае значение сопротивления  $R_2$  остается прежним, а последовательно с сопротивлением  $R_2$  включается источник напряжения с ЭДС  $E = R_2 J = 0,2 \cdot 400 = 80$  В. После преобразования схема приобретает вид рис. 3.40, б, в которой ток рассчитывается на основании второго закона Кирхгофа:  $E_1 - E_2 = I_1 (R_1 + R_2)$ , откуда  $I_1 = (E_1 - E_2) / (R_1 + R_2) = (140 - 80) / (400 + 600) = 0,06$  А = 60 мА. Поскольку ветвь  $ADFB$  не подвергалась преобразованиям, ток  $I_1$  в основной схеме будет таким же, как и в преобразованной. Таким образом, в схеме рис. 3.40, а к узлу  $A$  притекают токи  $J$  и  $I_1$ , следовательно, ток  $I_2$ , утекающий от узла  $A$ , равен сумме этих токов, т. е.  $I_2 = J + I_1 = 0,2 + 0,06 = 0,26$  А = 260 мА. Проверим выполнение второго закона Кирхгофа в контуре  $ADFB$ :  $E = R_1 I_1 + R_2 I_2$ ;  $140 = 600 \cdot 0,06 + 400 \cdot 0,26 = 36 + 104 = 140$  В. (Заметим, что можно было ток выразить не в амперах, а в миллиамперах, сопротивления при этом следует выражать в килоомах. Действительно,  $140 = 0,6 \cdot 60 + 0,4 \cdot 260 = 36 + 104 = 140$ .) Проверим баланс мощностей. Мощность, отдаваемая источником тока, определяется как произведение действующего значения тока источника тока на действующее значение напряжения, имеющегося на зажимах источника тока, причем если стрелка источника тока направлена к точке с более высоким потенциалом (обозначается знаком плюс), то мощность источника тока положительная, а если к минусовой, то отрицательная. Таким образом, в цепи рис. 3.40, а мощность, отдаваемая источниками,  $P_{ист} = E_1 I_1 + J U_{AB} = E_1 I_1 + J R_2 I_2 = 140 \cdot 0,06 + 0,2 \cdot 400 \cdot 0,26 = 8,4 + 20,8 = 29,2$  Вт. Мощность, рассеиваемая в резистивных сопротивлениях,  $P_R = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 0,06^2 \cdot 600 + 0,26^2 \cdot 400 = 2,16 + 27,04 = 29,2$  Вт, т. е. баланс мощностей выполняется. Ток  $I_2$  протекает в резисторе  $R_2$  от точки  $A$  к



точке  $B$ , т. е. потенциал точки  $A$  выше потенциала точки  $B$ , при этом оказывается, что стрелка источника тока направлена к точке с "плюсом" падения напряжения на сопротивлении  $R_2$ , следовательно, мощность, отдаваемая источником тока, в данном случае получается положительной.

### 3.33. РАСЩЕПЛЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ

Для цепей с идеальными источниками тока справедливо следующее правило: *последовательно с идеальным источником тока можно включить любое количество таких же источников. Никаких изменений режимов в цепи при этом не происходит.* Действительно, допустим, что имеется идеальный источник тока. Поскольку это источник тока, а не напряжения, ток в ветви, в которую включен данный источник, может иметь только значение  $J$ , определяемое источником и не зависящем от сопротивления цепи. Источник тока идеальный, поэтому его внутреннее сопротивление велико. Если последовательно с данным источником тока включить несколько таких же источников, то ток в цепи останется током  $J$ , а внутреннее сопротивление источников — бесконечно большим, т. е. все параметры источников останутся прежними. Последовательное подключение нескольких одинаковых идеальных источников тока называется *расщеплением* источника тока. Таким образом, выражение "расщепим источник" означает, что к данному идеальному источнику тока следует подключить еще один или несколько таких же источников тока. Расщеплять можно источники как тока, так и напряжения. Для расщепления идеального источника напряжения параллельно ему следует подключить один или несколько одинаковых источников напряжения. Прибегать к расщеплению источников тока приходится в ряде случаев, например если необходимо преобразовать источник тока в источник напряжения в такой цепи, в которой параллельно идеальному источнику тока подключена цепочка, состоящая из нескольких сопротивлений, по каждому из которых протекают различные токи (рис. 3.41, *а*). Как видно из рисунка, источник тока в данном случае нельзя непосредственно преобразовать в источник напряжения, поскольку параллельно ему включено не одно, а несколько сопротивлений с различными токами в каждом сопротивлении. Расщепим источник тока, т. е. подключим последовательно ему такой же источник с током  $J$ , схема приобретает вид рис. 3.41, *б*. Соединим точки  $M$  и  $B$ . Так как в узле  $M$  притекает и утекает одинаковый ток  $J$ , то в перемычке  $MB$  ток равен нулю и, следовательно, наличие такой перемычки никак не влияет на распределение токов в ветвях цепи. Но теперь видно, что верхний источник тока соединен параллельно с сопротивлением  $R_1$ , а нижний — с сопротивлением  $R_2$ . Следовательно, каждый из них можно заменить эквивалентным источником напряжения. Сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  при этом остаются на своих местах неизменными, а последовательно с сопротивлением  $R_1$  включается источник напряжения  $E_1 = R_1 J$ . Аналогично последовательно с сопротивлением  $R_2$  — источник напряжения  $E_2 = R_2 J$ . После указанных преобразований схема приобретает вид рис. 3.41, *в* и представляет собой двухконтурную цепь, токи в которой можно рассчитать различными методами, например с помощью законов Кирхгофа, методом контурных напряжений, двух узлов и т. д. Третья, четвертая и пятая ветви не подвергались преобразованиям, поэтому токи  $I_3$ ,  $I_4$  и  $I_5$  в исходной

схеме оказываются такими же, как в схеме рис. 3.41, в. Но поскольку первая и вторая ветви подвергались преобразованиям, токи  $I_1$  и  $I_2$  в исходной схеме будут совсем иные, чем токи, текущие через резисторы  $R_1$  и  $R_2$  в преобразованной схеме. Чтобы найти токи  $I_1$  и  $I_2$  в исходной схеме, следует составить уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов  $A$  и  $D$ . В каждом из этих узлов по два тока являются известными, следовательно, можно найти исходные токи  $I_1$  и  $I_2$ . После этого следует проверить выполнение первого закона Кирхгофа во всех узлах, второго закона Кирхгофа в контурах  $BAFB$  и  $BFDB$ , а также баланс мощностей во всей цепи.

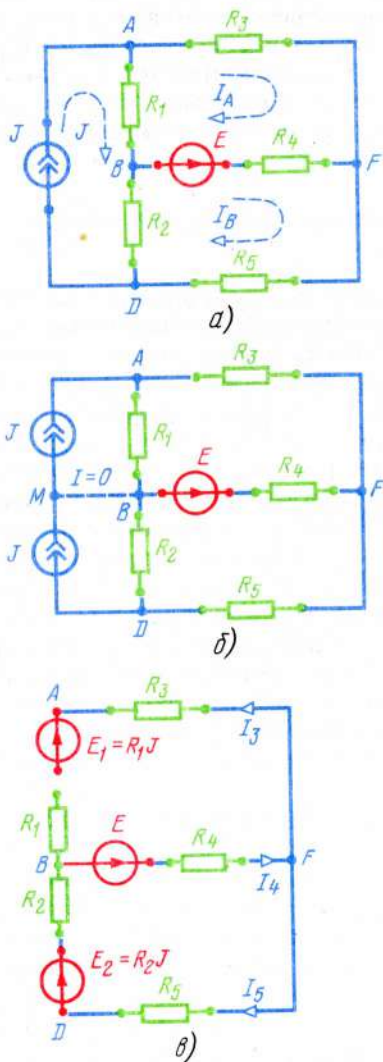


Рис. 3.41

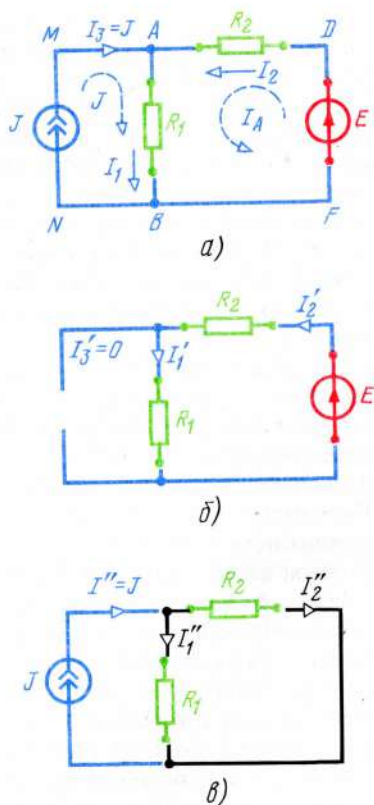


Рис. 3.42

Для расчета баланса мощностей необходимо знать направления токов в ветвях и значения этих токов. Пусть в сопротивлении  $R_1$  ток течет сверху вниз (т. е. от точки  $A$  к точке  $B$ ), а в сопротивлении  $R_2$  — вверх (т. е. от точки  $D$  к точке  $B$ ). Для определения мощности источника тока следует определить действующее значение напряжения на зажимах этого источника (т. е. напряжение между точками  $A$  и  $B$ ). Примем потенциал точки  $D$  за нулевой, т. е. положим  $\varphi_D = 0$ . Если ток  $I_2$  протекает в данной цепи от точки  $D$  к точке  $B$  (как мы условились), то это означает, что потенциал точки  $B$  ниже потенциала точки  $D$  на величину падения напряжения на сопротивлении  $R_2$ , откуда  $\varphi_B = \varphi_D - R_2 I_2 = -R_2 I_2$ . Аналогично  $\varphi_A = \varphi_B + R_1 I_1 = -R_2 I_2 + R_1 I_1$ . Так как  $U_{AD} = \varphi_A - \varphi_D$ , то напряжение на зажимах источника тока  $U_{AD} = R_1 I_1 - R_2 I_2$ , а мощность источника тока в данной цепи  $P_{и.т} = JU_{AD} = J(R_1 I_1 - R_2 I_2)$ . Если  $R_1 I_1 > R_2 I_2$ , то мощность, отдаваемая источником тока, положительная, а если  $R_2 I_2 > R_1 I_1$ , то отрицательная. Мощности источника напряжения и рассеиваемые в резисторах, определяются обычным образом.

### 3.34. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ИСТОЧНИКИ ТОКА

Расчеты цепей с источниками тока имеют ряд специфических особенностей, вытекающих из того, что в ветвях с источниками тока значения токов уже известны, поэтому определять приходится меньшее число токов, чем в аналогичных цепях с источниками напряжения. Прежде чем рассматривать приемы расчетов цепей, содержащих источники тока, укажем на важное правило: *нельзя составлять уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров, имеющих источники тока*. Это правило вытекает из того обстоятельства, что второй закон Кирхгофа связывает ЭДС источников с падением напряжения на элементах цепи. Но падение напряжения на источнике тока есть величина переменная, зависящая от режима работы цепи, поэтому составлять уравнения второго закона Кирхгофа для цепей с источниками тока не представляется возможным. Например, в цепи рис. 3.41, *a* можно составлять уравнения для контуров  $BAFB$ ,  $DBFD$ ,  $AFDBA$ , но нельзя составлять уравнения для контуров  $ABDA$  (через источник тока) или  $AFDA$  (также через источник тока). Аналогично в цепи рис. 3.42, *a* можно для контуров  $ADFBA$ , но нельзя для контуров  $MABNM$  и  $MADFBNM$ .

На примере расчета цепи рис. 3.42, *a* покажем методику расчета цепей, содержащих источник тока.

**Расчеты цепей с помощью законов Кирхгофа.** В цепи рис. 3.42, *a* имеются три ветви, по которым протекают три различных тока. Если бы в данной цепи оба источника были источниками напряжения, то потребовалось бы составить три уравнения, из которых одно было бы составлено по первому закону Кирхгофа и два по второму. Так как в ветви  $AMNB$  находится источник тока, то ток в этой ветви известен, его значение не может быть никаким, кроме  $J$ , поэтому определять следует только два тока,  $I_1$  и  $I_2$ , для чего необходимо составить два уравнения: для узла  $A$  (или  $B$ ) — по первому закону Кирхгофа, и для контура  $ADFBA$  — по второму. Получаются уравнения



$$I_1 = I_2 + J, E = R_2 I_2 + R_1 I_1, \text{ откуда } I_1 = \frac{E + R_2 J}{R_1 + R_2}, I_2 = \frac{E - R_1 J}{R_1 + R_2}.$$

**Метод контурных токов.** В цепях с источниками напряжения по второму закону Кирхгофа составляется столько уравнений, сколько простых контуров имеется в схеме. При наличии источников тока число уравнений уменьшается на число ветвей, в которые включены источники тока. Например, если бы в цепи рис. 3.42, а оба источника были бы источниками напряжения, то было бы необходимо составить два контурных уравнения, но так как в одной ветви находится источник тока, то число уравнений уменьшается на единицу, в этом случае необходимо составить только одно уравнение. В ветви *BNMA* протекает ток *J*, следовательно, контурный ток левого контура может быть только током, который известен. Ток, протекающий в контуре *ADFBA*, назовем контурным током  $I_A$  (контурные токи *J* и  $I_A$  на рис. 3.42, а показаны штриховой линией). Составим для контура *ADFBA* уравнение по второму закону Кирхгофа:  $E = (R_1 + R_2) I_A + R_1 J$ , откуда  $I_A = (E - R_1 J) / (R_1 + R_2)$ . Но ток  $I_2 = I_A$ , следовательно,  $I_2 = (E - R_1 J) / (R_1 + R_2)$ . Ток  $I_1 = I_2 + J = (E - R_1 J) / (R_1 + R_2) + J = (E + R_2 J) / (R_1 + R_2)$ , что и получилось ранее.

**Метод наложения.** В линейных цепях можно производить расчеты методом наложения при наличии источников как напряжения, так и тока. При исключении идеальных источников напряжения вместо них включают короткозамкнутую ветвь, а при исключении источников тока — разомкнутую ветвь (ток источника тока можно сделать нулевым только путем размыкания ветви). Таким образом, частичные схемы имеют вид рис. 3.42, б и в. Очевидно, что

$$\begin{aligned} I_1' &= I_2' = E / (R_1 + R_2); \quad I_1'' = J R_2 / (R_1 + R_2); \\ I_2'' &= R_1 J / (R_1 + R_2); \quad I_1 = I_1' + I_1'' = [E / (R_1 + R_2)] + [R_2 J / (R_1 + R_2)] = (E + R_2 J) / (R_1 + R_2); \\ I_2 &= I_2' - I_2'' = [E / (R_1 + R_2)] - [R_1 J / (R_1 + R_2)]; \quad I_3 = I_3' + I_3'' = J. \end{aligned}$$

Эти же выражения получались и при расчете данной цепи иными методами.

**Метод двух узлов.** В цепях с источниками напряжения узловое напряжение определяется из выражения  $U_{\text{ЭК}} = \Sigma EG / \Sigma G$ , а в цепях с источниками тока — из выражения  $U_{\text{ЭК}} = (\Sigma EG + \Sigma I) / \Sigma G$ , причем если стрелка источника тока направлена к узлу, на котором предполагается плюс эквивалентного напряжения, значение тока берется со знаком плюс, и наоборот. Если предположить, что плюс результирующего напряжения в схеме рис. 3.42, а окажется в точке *A*, то напряжение между точками *AB* следует рассчитывать из выражения

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \frac{\Sigma EG + \Sigma I}{\Sigma G} = \frac{E/R_2 + J}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1 R_2 (E + R_2 J)}{(R_1 + R_2) R_2} = \\ &= \frac{R_1 (E + R_2 J)}{R_1 + R_2}, \text{ откуда } I_1 = U_{AB} / R_1 = \frac{R_1 (E + R_2 J)}{R_1 (R_1 + R_2)} = \frac{E + R_2 J}{R_1 + R_2}; \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{E - U_{AB}}{R_2} = \frac{E - \frac{R_1(E + R_2J)}{R_1 + R_2}}{R_2} = \frac{ER_1 + ER_2 - ER_1 - R_1R_2J}{R_2(R_1 + R_2)} =$$

$$= \frac{E - R_1J}{R_1 + R_2}$$

**Пример 3.22.** Составить уравнения для расчета токов в цепи рис. 3.41, а методом контурных токов.

**Решение.** В данной цепи три простых контура и одна ветвь с источником тока, поэтому следует составить два уравнения:

$$\begin{cases} -E = I_A(R_1 + R_3 + R_4) - I_B R_4 - J R_1, \\ E = I_B(R_2 + R_4 + R_5) - I_A R_4 - J R_2. \end{cases}$$

Определив токи  $I_A, I_B$  и зная ток  $J$ , находят токи во всех ветвях. Если, например,  $I_A > I_B > J$ , то  $I_1 = I_A - J$ ;  $I_2 = I_B - J$ ;  $I_3 = I_A$ ;  $I_4 = I_A - I_B$ ;  $I_5 = I_B$ .

### 3.35. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА СОПРОТИВЛЕНИЙ С ИСТОЧНИКОМ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭКВИВАЛЕНТНУЮ ЗВЕЗДУ

Пусть имеется цепь (рис. 3.43, а). Требуется преобразовать данный треугольник в звезду. Если бы в схеме не было источника  $E$ , то преобразование можно было произвести с помощью формул преобразования пассивно-

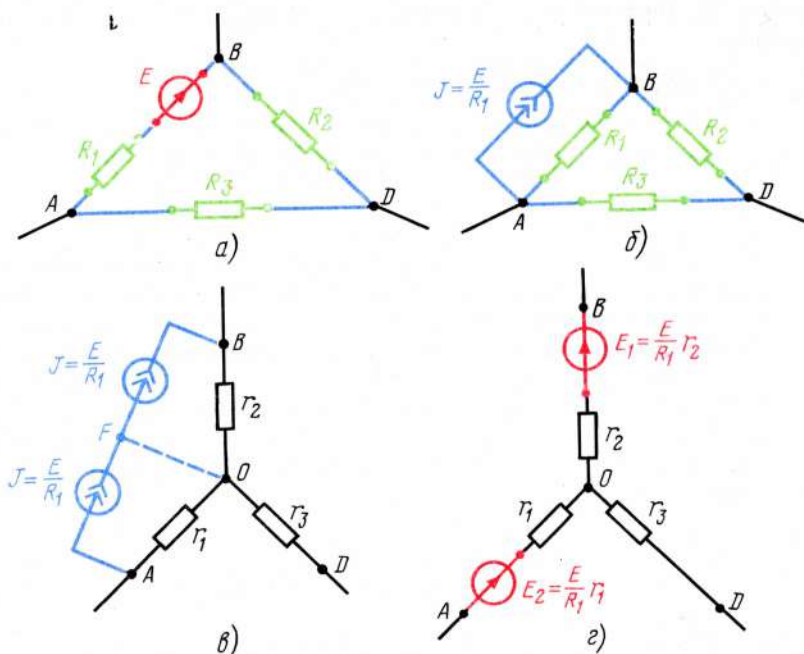


Рис. 3.43

го треугольника в пассивную звезду. Однако данные формулы справедливы только для пассивных цепей, поэтому в цепях с источниками необходимо проделать ряд преобразований. Заменим источник напряжения  $E$  эквивалентным источником тока; цепь рис. 3.43, *а* приобретает вид рис. 3.43, *б*. В результате преобразования получился пассивный треугольник  $R_1, R_2, R_3$ , который можно превратить в эквивалентную пассивную звезду, причем

$$r_1 = r_A = \frac{R_{AB} R_{DA}}{R_{AB} + R_{BD} + R_{DA}}, r_2 = r_B = \frac{R_{AB} R_{BD}}{R_{AB} + R_{BD} + R_{DA}};$$

$$r_3 = r_D = \frac{R_{BD} R_{DA}}{R_{AB} + R_{BD} + R_{DA}}.$$

Между точками  $AB$  остается неизменным источник  $J = E/R_1$ . Расцепим источник  $J$  и соединим точку  $F$  с точкой  $O$  (на рис. 3.43, *в* показано штриховой линией). Теперь источники тока можно заменить эквивалентными источниками напряжения, при этом получается схема эквивалентной звезды с источниками напряжения (рис. 3.43, *г*).

### 3.36. ЗАВИСИМЫЕ (УПРАВЛЯЕМЫЕ) ИСТОЧНИКИ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА

Источники напряжения и тока, в свою очередь, делятся на независимые и зависимые (управляемые). *Независимыми* называются источники, ЭДС которых (в источниках напряжения) или ток (в источниках тока) не зависят от напряжений или токов в любых ветвях цепи. *Зависимыми* (управляемыми) называются источники, ЭДС или ток которых зависят от напряжений или токов в некоторых ветвях цепи. Например, переносной магнитофон питается от сухих элементов, ЭДС которых определяется только их конструкцией и никак не зависит от напряжений или токов в каких-либо цепях магнитофона. Такой источник является типично независимым источником напряжения. Аналогичным образом независимыми являются аккумулятор в автомобиле, солнечная батарея в микрокалькуляторе (при неизменном освещении), напряжение, подводимое к телефонному аппарату от станции и т. д. Заметим, что во всех схемах, используемых до данного раздела, источники напряжения или тока были только независимыми. Зависимые (управляемые) источники могут быть четырех видов: источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН) (рис. 3.44, *а*) источник тока, управляемый напряжением (ИТУН) (рис. 3.44, *б*); источник напряжения, управляемый током (ИНУТ) (рис. 3.44, *в*); источник тока, управляемый током (ИТУТ) (рис. 3.44, *г*).

В источниках тока, управляемых напряжением, ЭДС  $e_3$  зависит от напряжения  $u_{ab}$ , имеющегося между точками  $a - b$  цепи. Коэффициент пропорциональности между напряжением  $u_{ab}$  и зависимой ЭДС  $e_3$  обозначим  $\mu$  (греческая буква, читается "мю"). Величина  $\mu$  определяется конструкцией данного зависимого источника. Если, например,  $\mu = 100$ , то это означает, что ЭДС  $e_3$  в 100 раз больше напряжения  $u_{ab}$ . Но если напряжение  $u_{ab}$  в какой-то момент равно нулю, то и ЭДС будет равно нулю. Зависимое напряжение



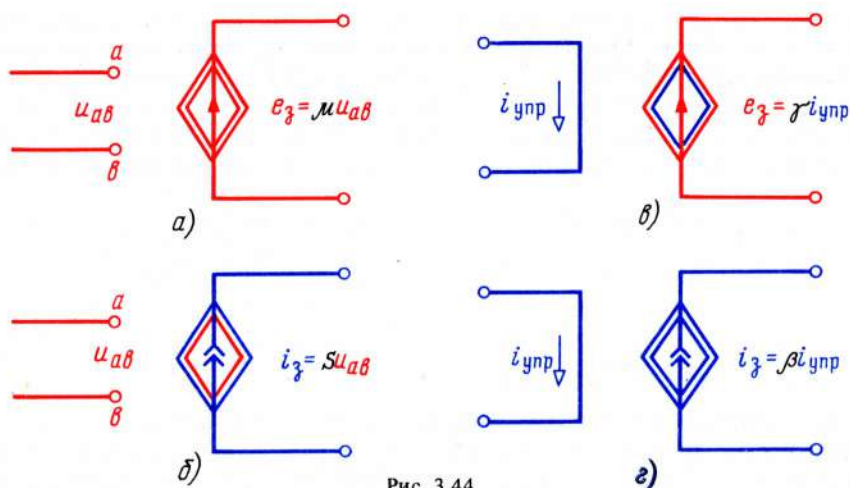


Рис. 3.44

(или ток) отлично от нуля, когда отлично от нуля управляемое напряжение. Управляемые источники имеют такую конструкцию, при которой зависимая ЭДС  $e_3$  существует только тогда, когда существует управляющее напряжение, в данном случае  $u_{ab}$ . (Учащиеся пока могут не задаваться вопросом, каково устройство реальных зависимых источников, эти устройства будут показаны ниже. Пока необходимо только понять идею работы зависимых источников.) Чтобы зависимые источники на схемах легко можно было бы отличать от независимых, их обозначают по-разному: независимые рисуются в кружках, а зависимые — в ромбиках (см. рис. 3.44).

В зависимых источниках класса ИТУН ток управляемого источника  $i_3$  зависит от напряжения  $u_{ab}$ , имеющегося между некоторыми точками цепи. Коэффициент пропорциональности  $S = i_3/u_{ab}$  имеет размерность проводимости и показывает, на какое значение изменяется ток зависимого источника, если управляемое напряжение изменяется на единицу напряжения (например, на 1 В). В схеме ИНУТ коэффициент пропорциональности  $\gamma$  имеет размерность сопротивления и показывает изменение зависимой ЭДС  $e_3$  при изменении управляющего тока на единицу. Величина  $\beta$  в схеме ИТУТ есть величина безразмерная, показывающая, во сколько раз ток  $i_3$  больше управляющего тока  $i_{ynp}$ . Величины  $\mu$ ,  $S$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  часто называют коэффициентами управления зависимых источников —  $K_{ynp}$ . Например, если в схеме ИТУН при изменении напряжения на 0,5 В ток  $i_3$  изменяется на 50 мА, то коэффициент управления в данной цепи  $K_{ynp} = \Delta i_3 / \Delta u_{ynp} = 50/0,5 = 100$  мА/В (греческой буквой  $\Delta$  — читается "дельта" — обыкновенно обозначают изменения или приращения различных физических величин).

### 3.37. РАСЧЕТЫ ЦЕПЕЙ С ЗАВИСИМЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Все уравнения при расчете цепей с зависимыми источниками составляются так же, как и при наличии независимых источников. В качестве примера рассмотрим методику расчета двухконтурной цепи с помощью законов

Кирхгофа (рис. 3.45). Как видно из схемы, источник  $E_1$  является независимым, т. е. ЭДС этого источника равна 1 В вне всякой зависимости от значений напряжений или токов в любой ветви цепи. Источник  $E_2$  является управляемым, его ЭДС зависит от тока  $I_3$ , протекающего через сопротивление  $R_3$ .

Рассчитаем токи во всех ветвях цепи при различных значениях коэффициента пропорциональности  $\gamma$ , например в пределах  $0 \dots 8$ . Составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2, \\ E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3, \\ E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3. \end{cases}$$

Подставим вместо ЭДС  $E_2$  член  $\gamma I_3$  и числовые значения  $E_1 = 1$  В,  $R_1 = R_2 = R_3 = 1$  Ом. Уравнения в этом случае приобретают вид

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2, & (1) \\ 1 = I_1 + I_3, & (2) \\ \gamma I_3 = I_2 + I_3. & (3) \end{cases}$$

Из (1) выразим  $I_1 = I_3 - I_2$  и подставим в (2) и (3):

$$\begin{cases} 1 = I_3 - I_2 + I_3, & \text{или} \\ \gamma I_3 = I_2 + I_3 \end{cases} \quad \begin{cases} -I_2 + 2I_3 = 1, \\ I_2 + I_3 - \gamma I_3 = 0. \end{cases}$$

Сложив обе строки, получим  $I_3 (2 + 1 - \gamma) = 1$ , откуда

$$I_3 = 1/(3 - \gamma); \quad I_2 = 2I_3 - 1 = 2/(3 - \gamma) - 1 = (2 - 3 + \gamma)/(3 - \gamma) = (\gamma - 1)/(3 - \gamma);$$

$$I_1 = [1/(3 - \gamma)] - [(\gamma - 1)/(3 - \gamma)] = [(1 - \gamma + 1)/(3 - \gamma)] = (2 - \gamma)/(3 - \gamma).$$

Рассчитаем токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и ЭДС  $E_2$  для значений  $\gamma = 0 - 1 - 2 - 4 - 8$ . Результаты расчетов сведем в табл. 3.2.

Легко убедиться, что законы Кирхгофа и баланс мощностей выполняются в каждом случае.

Таблица 3.2

$\gamma$	0	1	2	4	8
$I_1$ , А	2/3	1/2	0	2	1,2
$I_2$ , А	-1/3	0	1	-3	-1,4
$I_3$ , А	1/3	1/2	1	-1	-0,2
$E_2 = \gamma I_3$ , В	0	0,5	2	-4	-1,6

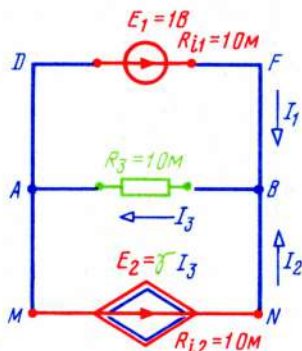


Рис. 3.45

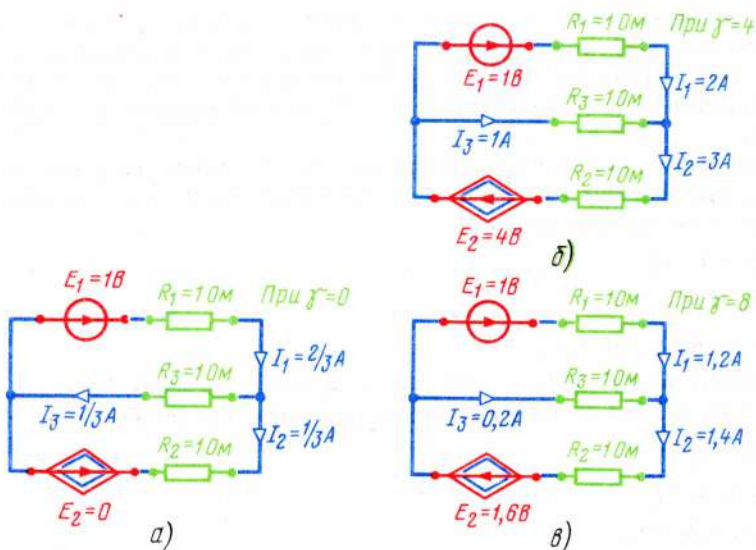


Рис. 3.46

Произведем проверку для  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 4$  и  $\gamma = 8$ . Все числовые значения нанесены на рис. 3.46.

При  $\gamma = 0$

$$I_1 = I_2 + I_3, 2/3 = 1/3 + 1/3;$$

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3, 1 = 1 \cdot (2/3) + 1 \cdot (1/3) = 1;$$

$$E_1 - E_2 = E_1 - \gamma I_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2, 1 - 0 = 1 \cdot (2/3) + 1 \cdot (1/3) = 1;$$

$$-E_2 = -\gamma I_3 = -R_3 I_3 + R_2 I_2, 0 = -1 \cdot (1/3) + 1 \cdot (1/3) = 0;$$

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3, 1 \cdot (2/3) - 0 = (2/3)^2 \cdot 1 + (1/3)^2 \cdot 1 + (1/3)^2 \cdot 1 = 2/3.$$

При  $\gamma = 4$

$$I_1 + I_3 = I_2, 2 + 1 = 3;$$

$$E_1 = R_1 I_1 - R_3 I_3, 1 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1;$$

$$E_2 = \gamma I_3 = R_3 I_3 + R_2 I_2, 4 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4;$$

$$E_1 + E_2 = E_1 + \gamma I_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2, 1 + 4 \cdot 1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3, 5 = 5;$$

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3, 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1, 14 = 4 + 9 + 1 = 14.$$

При  $\gamma = 8$

$$I_1 + I_3 = I_2, 1,2 + 0,2 = 1,4;$$

$$E_1 = R_1 I_1 - R_3 I_3, 1 = 1 \cdot 1,2 - 1 \cdot 0,2 = 1;$$

$$E_2 = \gamma I_3 = R_3 I_3 + R_2 I_2, 8 \cdot 0,2 = 1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 1,4, 1,6 = 0,2 + 1,4 = 1,6;$$

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3;$$

$$1 \cdot 1,2 + 0,2 \cdot 8 \cdot 1,4 = 1,2^2 \cdot 1 + 1,4^2 \cdot 1 + 0,2^2 \cdot 1,$$

$$1,2 + 2,24 = 1,44 + 1,96 + 0,04, 3,44 = 3,44.$$

Как видно из произведенных расчетов, все проверки полностью выполняются.



### 3.38. РАСЧЕТ ТОКОВ В ЦЕПЯХ С ЗАВИСИМЫМИ ИСТОЧНИКАМИ МЕТОДОМ НАЛОЖЕНИЯ

При расчете цепей с зависимыми источниками методом наложения существуют особенности, состоящие в том, что при составлении частичных схем исключаются все, кроме одного, независимые источники (напряжения или тока), а все зависимые остаются на своих местах неизменными. Так как коэффициент пропорциональности определяется конструкцией источника, которая при исключении источников никаких изменений не претерпевает, то коэффициенты пропорциональности всех зависимых источников также остаются неизменными.

**Пример 3.23.** Рассчитать токи в цепи рис. 3.47, а методом наложения.

**Решение.** В данной цепи три источника: независимый источник напряжения  $E$ , независимый источник тока  $J$  и зависимый источник напряжения  $E_3$ , причем ЭДС источника  $E_3$  пропорциональна току, текущему через сопротивление  $R_1$ . Составим первую частичную схему, для этого оставим независимый источник напряжения  $E$  и исключим независимый источник тока  $J$ . Зависимый источник  $E_3$  остается на своем месте неизменным (рис. 3.47, б). Из схемы видно, что  $I'_1 = I'_2 = \frac{E + E'_3}{R_1 + R_2 + R_H} = (E + \gamma I'_1)/(R_1 + R_2 + R_H)$ , откуда  $I'_1 = E/(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)$ . (Через сопротивление  $R_1$  в данной цепи протекает ток  $I'_1$ , поэтому зависимый источник  $E'_3 = \gamma I'_1$ .)

Составим вторую частичную схему. При этом независимый источник тока исключается, а зависимый остается, схема приобретает вид, рис. 3.47, в. Условимся ток, текущий через сопротивление  $R_1$ , называть  $I''_1$ . В данной схеме управляющий ток течет не от точки  $A$  к точке  $B$ , а в обратную сторону, поэтому ток такого направления приобретает знак минус. Во второй частичной схеме  $E''_3 = \gamma(-I''_1)$ . Рассчитаем токи методом контурных токов. В данной схеме два простых контура при одном источнике тока, следовательно, в одном контуре должен протекать контурный ток, равный току источника тока  $J$ , а в другом, не содержащем источник тока, — неизвестный контурный ток  $I''_A$ . Пусть контурный ток  $J$  протекает по контуру  $BADFB$ , а контурный ток  $I''_A$  — по контуру  $ABMNFDA$ . Составим уравнение для контура  $ABMNFDA$ :

$$E''_3 = (R_1 + R_2 + R_H)I''_A - R_1 J.$$

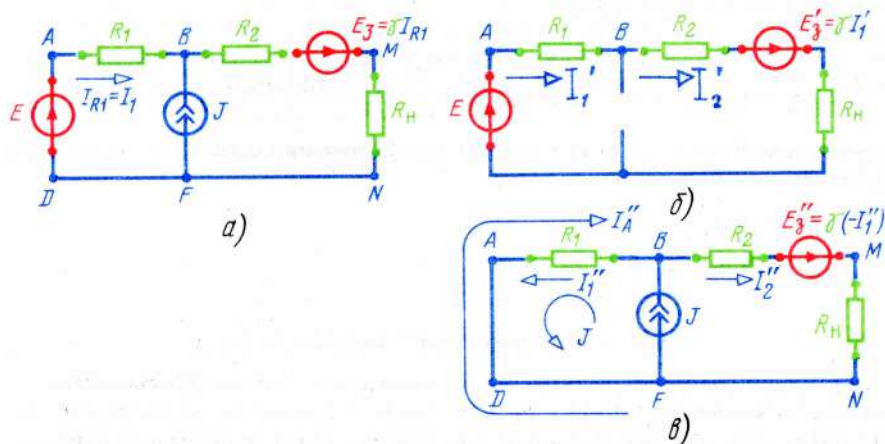


Рис. 3.47

Так как  $-I_1'' = I_A'' - J$ , и, следовательно,  $E_3'' = \gamma(I_A'' - J)$ , то  $\gamma I_A'' - \gamma J = (R_1 + R_2 + R_H)I_A'' - R_1 J$ , откуда

$$I_A'' = \frac{(R_1 - \gamma)J}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} = I_2''; \quad I_1'' = J - I_A'' = J - \frac{(R_1 - \gamma)J}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} =$$

$$= \frac{(R_1 + R_2 + R_H - R_1 + \gamma)J}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} = \frac{R_2 + R_H}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} J.$$

Рассчитаем токи в исходной цепи:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = \frac{E}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} - \frac{(R_2 + R_H)J}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} = \frac{E - J(R_2 + R_H)}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)};$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = \frac{E}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} + \frac{(R_1 - \gamma)J}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} = \frac{E + J(R_1 - \gamma)}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)}.$$

Произведем проверку. Как видно из схемы рис. 3.47, а, ток во второй ветви должен равняться сумме токов  $I_1$  и  $J$ , т. е.  $I_1 + J = I_2$ , или

$$\frac{E - R_2 J + R_H J}{R_1 + R_2 + R_H - \gamma} + J = \frac{E - R_2 J - R_H J + R_1 J + R_2 J + R_H J - \gamma J}{R_1 + R_2 + R_H - \gamma} = \frac{E + J(R_1 - \gamma)}{R_1 + R_2 + R_H - \gamma} = I_2.$$

Рассчитаем ЭДС  $E_3 = \gamma I_1$ . Подставив значение  $I_1$ , получим

$$E_3 = \frac{\gamma [E - J(R_2 + R_H)]}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)}.$$

Проверим выполнение второго закона Кирхгофа для контура  $ABMNFDA$ :

$$E + E_3 = R_1 I_1 + (R_2 + R_H) I_2;$$

$$E + \frac{\gamma E - \gamma J(R_2 + R_H)}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} = R_1 \left[ \frac{E - J(R_2 + R_H)}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} \right] + (R_2 + R_H) \left[ \frac{E + J(R_1 - \gamma)}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)} \right].$$

Раскрыв скобки и произведя элементарные преобразования, получим, что каждая часть уравнения равна выражению

$$\frac{E(R_1 + R_2 + R_H) - \gamma J(R_2 + R_H)}{(R_1 + R_2 + R_H - \gamma)}.$$

### 3.39. ПОНЯТИЕ ОБ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Все элементы цепей делятся на пассивные и активные. *Пассивными* называются элементы, которые ни при каких условиях не могут отдать во внешнюю цепь энергию большую той, которая была подведена к данному элементу. *Активными* называются элементы, у которых энергия в выход-

ной цепи четырехполюсника больше энергии во входной цепи. Все элементы, рассматривавшиеся до данного раздела, являлись элементами пассивными. Заметим, что конденсаторы — это типичные пассивные элементы, поскольку энергия, которую конденсатор отдает другим элементам цепи, не может превышать энергию, поступившую к конденсатору извне, от каких-либо источников. Весьма распространенными резистивными активными элементами являются электронные приборы, обладающие усилительным эффектом: электронные лампы, транзисторы, операционные усилители. Для нормальной работы каждого из этих активных элементов к ним обязательно должно быть подведено постоянное напряжение, которое создает внутри этих элементов такие электрические поля, при которых выходное напряжение (ток) повторяет форму входного напряжения (тока), но с большей амплитудой.

Покажем принцип действия наиболее распространенных активных элементов. Электронные лампы в реальной аппаратуре в настоящее время имеют ограниченное применение, хотя в некоторых устройствах они будут использоваться еще достаточно долго. Но принцип действия электронных ламп весьма характерен для понимания действия активных элементов, поэтому кратко на нем остановимся. Электронная лампа рис. 3.48, а представляет собой  $AR$ -цепь и имеет три электрода: анод, катод, управляющую сетку. Между анодом и катодом от внешнего источника прикладывается постоянное напряжение, называемое анодным. Катод в лампе подогревается от специального источника, вследствие чего излучаются электроны, которые притягиваются к положительно заряженному аноду. В анодной цепи лампы при этом протекает неизменный во времени ток, определяемый напряжением источника  $U_a$ , нагрузочным сопротивлением  $R_A$  и внутренним сопротивлением лампы  $R_i$ . На сопротивлении  $R_A$  создается падение напряжения, повторяющее форму анодного тока. Разделительный конденсатор не пропускает постоянную составляющую выходного напряжения, поэтому при отсутствии переменного напряжения между управляющей сеткой и катодом лампы напряжение на выходе данной активной цепи равно нулю. Если между управляющей сеткой и катодом прикладывать изменяющееся во времени напряжение, то потенциал сетки будет изменяться, электроны, испускаемые катодом, испытывать либо отталкивание, если потенциал сетки отрицателен относительно потенциала катода, либо, наоборот, большее притяжение, если потенциал сетки — положительный, в результате чего внутреннее сопротивление лампы, а следовательно, ток в цепи, падение на-

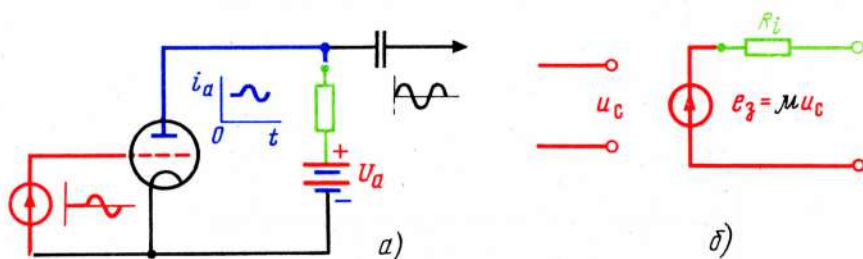


Рис. 3.48



пряжения на сопротивлении  $R_A$  и напряжение на выходе цепи станут изменяться.

Следовательно, до тех пор, пока переменное напряжение между входными зажимами активной цепи отсутствует, его нет и на выходных зажимах, а если на входе имеется напряжение, то оно будет и на выходе данного активного четырехполюсника. Таким образом, электронная лампа является типичным зависимым источником, в котором выходное напряжение управляется входным, т. е. напряжением, подведенным между управляющей сеткой и катодом. Эквивалентная схема электронной лампы для малых сигналов показана на рис. 3.48, б. В данной схеме  $\mu$  — коэффициент усиления лампы, а также коэффициент пропорциональности между напряжениями  $u_c$  и  $e_3$ .

Сопротивление  $R_i$  представляет внутреннее сопротивление лампы. Значения  $\mu$  и  $R_i$  берут из паспортных данных, они зависят от конструкции лампы, а иногда и от режима ее работы. Аналогично происходит и в транзисторах, представляющих твердотельные элементы, состоящие чаще всего из кремния с различными добавками.

Транзисторы делятся на две большие группы: биполярные и полевые, отличающиеся друг от друга значениями входных сопротивлений и некоторыми другими параметрами, что для курса ТЭЦ малосущественно, поскольку схемы замещения этих транзисторов схожие. Биполярные транзисторы представляют зависимые источники тока, управляемые токами, т. е. источники класса ИТУТ, а полевые — зависимые источники тока, управляемые напряжением, т. е. источники класса ИТУН. У биполярных транзисторов электроды называются: эмиттер, база, коллектор, а у полевых — исток, затвор, сток. Схема включения биполярного транзистора показана на рис. 3.49, а, схема электродов полевого транзистора — на рис. 3.49, б, а эквивалентная схема для низких частот — на рис. 3.49, в. Значения сопротивлений  $R_э$ ,  $R_б$ ,  $R_к$  и коэффициент пропорциональности между зависимым

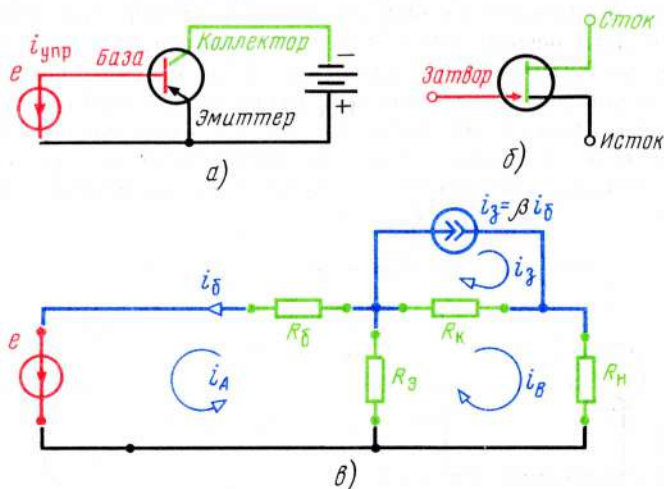


Рис. 3.49

источником тока и током базы  $\beta$  берут (или рассчитывают) по паспортным данным транзистора. Расчет цепи можно произвести по различным правилам, справедливым для расчета цепей, например методом контурных токов. В данной цепи имеется три простых контура и один источник тока, следовательно, для расчета такой цепи необходимо показать контурный ток, равный току источника тока, задаться двумя неизвестными контурными токами (например  $i_A$  и  $i_B$ ) и составить два независимых контурных уравнения, помня, что составлять уравнения по второму закону Кирхгофа можно только для тех контуров, в которые не входят источники тока. Для данной схемы получаются уравнения

$$\begin{cases} e = i_A (R_3 + R_6) + i_B R_3, \\ 0 = i_B (R_3 + R_K + R_H) + i_A R_3 - i_3 R_K. \end{cases}$$

Подставив вместо тока  $i_3$  значение  $\beta i_6$ , которое, как видно из схемы, равно выражению  $\beta i_A$ , получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} (R_3 + R_6) i_A + R_3 i_B = e, \\ (R_3 - \beta R_K) i_A + (R_3 + R_K + R_H) i_B = 0, \end{cases}$$

из которых находят контурные токи  $i_A$  и  $i_B$ , а затем токи в ветвях.

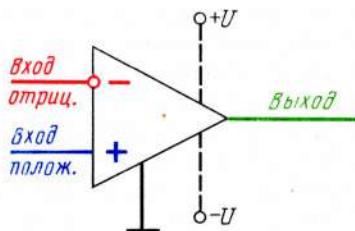
#### 3.40. ПОНЯТИЕ ОБ ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЯХ

В последние годы при проектировании различных электрических цепей получили широкое распространение активные зависимые источники напряжения, называемые *операционными усилителями*. Операционный усилитель представляет элемент, изготовленный по микрoeлектронной технологии, в котором находится много транзисторов, резисторов, конденсаторов. Операционный усилитель (ОУ) является чрезвычайно совершенным и весьма универсальным активным элементом, используемым в самых различных электронных цепях и устройствах. Операционный усилитель обладает усилительными свойствами, но используется часто не для целей получения усилительного эффекта, а для придания электрическим цепям весьма своеобразных свойств, получить которые без ОУ невозможно или достаточно затруднительно.

Для нормальной работы ОУ к нему необходимо подвести постоянное питающее напряжение, чаще всего двустороннее со значениями  $\pm (10 \dots 15)$  В при токе единицы или десятки миллиампер. Цепи питания на схемах обыкновенно не изображают поскольку они имеются в любом ОУ. На схеме рис. 3.50, а цепи питания нанесены штриховой линией, на последующих схемах эти цепи показываться не будут. Не будут также указываться и некоторые выводы ОУ, используемые в усилительных устройствах, но не имеющие существенного значения при изучении свойств электрических цепей с активными элементами. Графическое обозначение ОУ в простейшем случае имеет вид треугольника с тремя выводами: двумя входными и одним выходным. В некоторых случаях может быть показан и четвертый вывод, который соединяют с общей точкой схемы, чаще всего корпусной. Один из входных зажимов называют отрицательным (инверсным), а второй — положительным.



Рис. 3.50



Отрицательный входной зажим обозначают кружочком, иногда около него ставится знак "—" (минус). Около положительного входа или указывается знак "+" (плюс), или не указывается никакого знака.

Рассмотрим работу ОУ в упрощенном виде. Не будем учитывать влияния конденсаторов, имеющихся внутри ОУ, что справедливо в диапазоне низких частот. В этом случае ОУ представляет  $AR$ -цепь. Пусть положительный входной зажим ОУ соединен с общей точкой цепи. В этом случае входное напряжение подводится между отрицательным входным зажимом и общей точкой цепи или, по не точному выражению, "подается на отрицательный вход" ОУ. На выходе (т. е. между выходным зажимом и общей точкой схемы) при этом окажется напряжение в  $\mu$  раз большее, чем на входе, где  $\mu$  — коэффициент усиления ОУ. Весьма существенным отличием ОУ от транзисторов является то, что коэффициент усиления ОУ в тысячи раз больше, чем у транзисторов, например у транзистора среднего качества — 50, а у ОУ — 50 000. Учащимся практически никогда не приходится задаваться вопросом: каково  $\mu$  у данного конкретного операционного усилителя? Значение этой величины на практике точно, как правило, никогда не бывает известным, поскольку значение  $\mu$  меняется в широких пределах в зависимости от экземпляра, температуры, питающего напряжения и некоторых других факторов. Однако знать точное значение  $\mu$  нет никакой необходимости. Дело в том, что если у ОУ  $\mu$  равно, например, 50 000, то это очень большая величина и во всех расчетах она будет приниматься за бесконечность. Но если  $\mu$  будет, например, в 5 раз меньше и составит только 10 000, то и такое значение является весьма большим и во всех расчетах также будет приниматься, опять-таки, за бесконечность.

Если коэффициент усиления транзистора изменится в 5–10 раз, то это весьма заметно скажется на работе устройства, в которое транзисторы включены, а если изменить  $\mu$  операционного усилителя в такое же число раз, то свойства цепи, в которую включен данный ОУ, могут остаться практически почти неизменными. Чтобы изучать эти свойства, требуется только составлять эквивалентные схемы ОУ, которые очень просты. Для построения эквивалентной схемы цепи с ОУ необходимо помнить, что коэффициент усиления операционного усилителя весьма велик, все остальные формулы и соотношения получаются на основании законов электротехники.

### 3.41. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ОУ

Как было показано выше, максимальное выходное напряжение, снимаемое с ОУ, не может превышать напряжения источника питания, и, следовательно, равно примерно 10...15 В. Определим входное напряжение, кото-



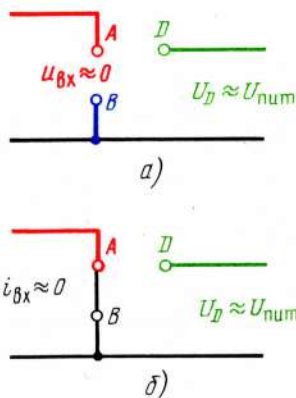


Рис. 3.51

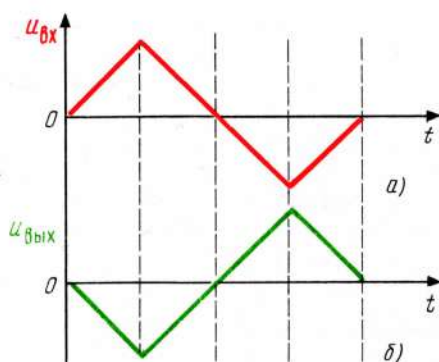


Рис. 3.52

рое необходимо подвести ко входу ОУ, чтобы выходное напряжение было максимальным. Так как  $u_{вх} = \mu u_{вых}$ , то  $u_{вх} = u_{вых} / \mu$ . Если  $\mu \rightarrow \infty$ , то  $u_{вх} \rightarrow 0$ . Поскольку  $\mu$  в реальных ОУ меньше бесконечности,  $u_{вх}$  несколько больше нуля, но во всех случаях имеет достаточно малое значение, составляющее практически единицы милливольт или еще меньшее. Поэтому входное напряжение ОУ представляет величину, близкую к нулю, измерить которую практически почти не представляется возможным. Но если входное напряжение примерно равно нулю, то и входной ток ОУ также близок нулю.

Таким образом, операционный усилитель представляет активный элемент, у которого выходное напряжение имеет конечное значение при входном напряжении (или входном токе), близком к нулевому. Условимся входные зажимы операционного усилителя обозначать буквами *A* и *B*, а выходной зажим — буквой *D*. Эквивалентных схем ОУ может быть две: 1) входные зажимы разомкнуты, напряжение между ними равно примерно, нулю (рис. 3.51, *а*) и 2) входные зажимы накоротко замкнуты, ток во входной цепи близок нулю (рис. 3.51, *б*). Эквивалентные схемы называют также схемами замещения. Поскольку входное напряжение в нашем случае прикладывается между отрицательным входом ОУ и общей точкой цепи, выходное напряжение оказывается "инвертированным" (т. е. "перевернутым") относительно входного. Например, если напряжение на входе ОУ имеет вид рис. 3.52, *а*, то на выходе — рис. 3.52, *б*.

#### 3.42. ПОНЯТИЕ ОБ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

По множеству причин операционные усилители почти никогда не используют без отрицательной обратной связи. Отрицательной обратной связью (сокращенно ООС) называют цепь, а в простейшем случае только один элемент, включаемый между выходным зажимом ОУ (точкой *D*) и входным отрицательным зажимом (точка *A*) (рис. 3.53, *а*). Отрицательная обратная связь резко уменьшает усиление, даваемое устройством, но значительно улучшает ряд характеристик цепи, которые будут раскрываться по мере изучения курса ТЭЦ и последующих дисциплин. В данной схеме сопро-

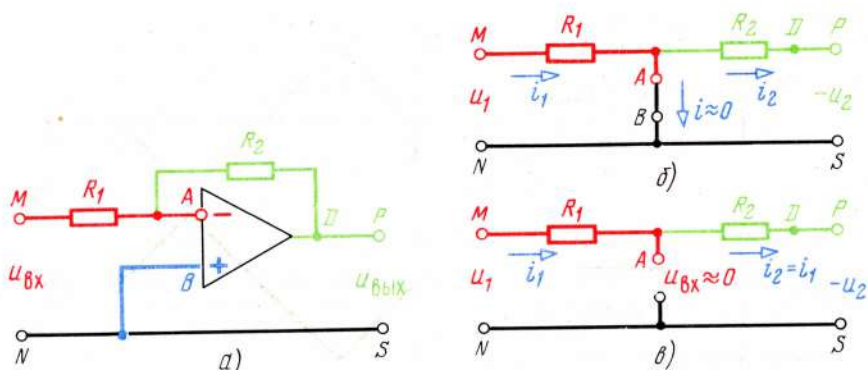


Рис. 3.53

тивление  $R_2$  образует цепь ООС, а  $R_1$  является входным сопротивлением. Составим эквивалентную схему данной цепи, рис. 3.53, б. Для этого перерисуем точки  $MNDPS$  и все элементы цепи, не входящие в операционный усилитель (в нашем случае сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ ), а вместо ОУ нарисуем три точки —  $A$ ,  $B$  и  $D$ . Заметим, что точки  $N$ ,  $B$  и  $S$  — однопотенциальные и поэтому можно ограничиться одной буквой, но для большей наглядности напомним буквы в соответствии с конфигурацией схемы. Аналогично однопотенциальными являются точки  $D$  и  $P$ . Примем эквивалентную схему с короткозамкнутыми входными зажимами.

Рассчитаем коэффициент передачи получившейся цепи. Как видно из схемы рис. 3.53, б,  $i_1 = u_1/R_1$ ,  $i_2 = -u_2/R_2$ . Так как  $i \approx 0$ , то  $i_2 \approx i_1$  или  $-u_2/R_2 = u_1/R_1$ , откуда  $u_2/u_1 = -R_2/R_1$ . Но отношение  $u_2/u_1$  есть коэффициент передачи  $K$ . Следовательно, в цепи рис. 3.53, б  $K = -R_2/R_1$ , а модуль коэффициента передачи  $|K| = R_2/R_1$ . Рассчитаем входное сопротивление данной цепи. Точки  $A$ ,  $B$  и  $N$  — однопотенциальные, поэтому  $R_{MA} = R_{MN}$ , т. е.  $R_{вх} = R_1$ . Проверим получившиеся соотношения с помощью эквивалентной схемы с разомкнутыми входными зажимами (рис. 3.53, в). Поскольку  $u_{AB} \approx 0$ , точки  $A$  и  $B$  однопотенциальны и, следовательно,  $i_1 =$

$u_1/R_1$ ,  $i_2 = i_1 = -u_2/R_2$ , откуда  $K = -\frac{u_2}{u_1} = -\frac{R_2}{R_1}$ ,  $R_{вх} = R_1$ . Наличие

одинакового результата расчета подтверждает, что обе схемы замещения ОУ совершенно равноценны. При дальнейшем анализе цепей с ОУ будем использовать ту эквивалентную схему, которая в данном конкретном случае оказывается более наглядной.

Как видно из произведенных выкладок, коэффициент передачи цепи с ОУ не зависит от параметров собственно ОУ, выполнение расчетов цепей с ОУ не требует знания схемы, находящейся "внутри" ОУ, важно только то, что коэффициент усиления собственно ОУ весьма велик, а это дает возможность пренебречь напряжением или током во входной цепи ОУ. Если бы вместо ОУ был включен элемент с ограниченным коэффициентом усиления, например, транзистор, то принять за нулевые входное напряжение или входной ток не представлялось бы возможным, формулы для определения

коэффициента передачи получились бы совершенно иными, в эти формулы уже входили бы параметры активных элементов, которые отсутствуют в цепях с ОУ.

Легко видеть, что если в рассматриваемой цепи  $R_1 = R_2$ , то  $|K| = 1$ , т. е. цепь не обладает усилительными свойствами. Еще раз обращаем внимание, что ОУ часто используются для преобразования свойств цепей, а не для получения чисто усилительного эффекта, поэтому они совершенно необходимы ТЭЦ. При  $R_1 = R_2$  напряжение на входе цепи, т. е. между точками  $MN$  (а не на входе ОУ), может достигать значения напряжения источника питания. По мере увеличения отношения  $R_2/R_1$ , например путем увеличения сопротивления отрицательной обратной связи, коэффициент усиления цепи возрастает и напряжение на входе следует уменьшать, чтобы выходное напряжение не превышало значения напряжения источника питания. В этом случае форма выходного напряжения является инвертированной относительно формы входного напряжения, но искажения не возникают, т. е. если, например, напряжение на входе цепи имеет синусоидальную форму, то кривая напряжения на выходе будет также синусоидальной. Если значение напряжения на входе такое, при котором  $u_{вх}K > U_{пит}$ , то все процессы в ОУ резко меняются. Причину этих изменений рассмотрим на рис. 3.54. До тех пор, пока  $u_{вых} < Ku_{вх}$ , мгновенные значения выходного напряжения изменяются пропорционально мгновенным значениям входного напряжения, кривая выходного напряжения повторяет форму входного, искажения при этом не возникают. Если же входное напряжение имеет значения, при которых  $u_{вх}K > U_{пит}$ , то в течение части периода входные мгновенные напряжения изменяются, а выходное напряжение остается неизменным, поскольку оно достигает значения напряжения источника питания и ни в какой момент не может его превзойти. При этом происходит явление ограничения выходного сигнала, т. е. появляются искажения. Операционный усилитель устроен таким образом, что входное напряжение и входной ток остаются близкими нулю до тех пор, пока выходное напряжение меньше напряжения источника питания, т. е. пока не наступает ограничение и выходной сигнал не оказыва-

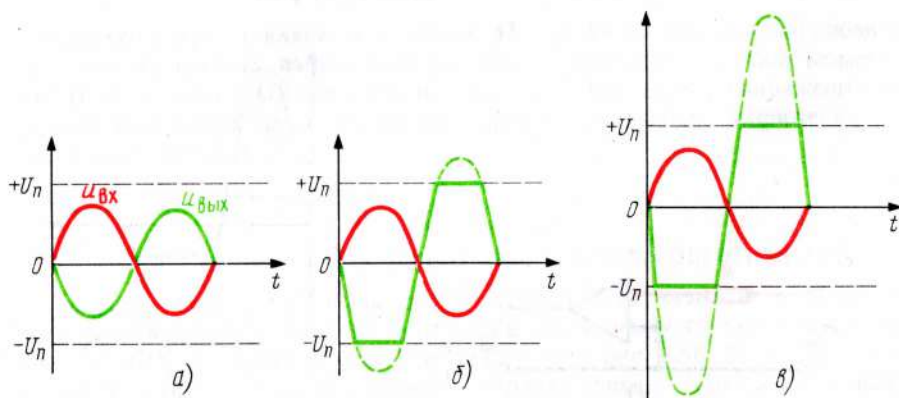


Рис. 3.54



ется искаженным относительно входного. В этом режиме справедливы все формулы и соотношения, полученные выше. Но как только появляется ограничение, т. е. выходной сигнал оказывается искаженным по сравнению с входным, напряжение и ток на входе перестают быть близкими нулю, все соотношения, полученные для цепи с ОУ, становятся несправедливыми.

Таким образом, следует помнить важное правило: входное напряжение, приложенное к цепи с операционным усилителем, должно иметь такие значения, при которых ограничение не наступает и искажения в выходном сигнале отсутствуют. При таком режиме схема замещения ОУ имеет вид рис. 3.53, б или рис. 3.53, в. Если форма выходного напряжения отличается от формы входного, то это означает, что входное напряжение велико и для правильной работы цепи его следует уменьшить.

### 3.43. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ В СИГНАЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

На практике часто возникает необходимость преобразовать напряжения синусоидальной формы в напряжения прямоугольной формы. Такое преобразование можно легко осуществить с помощью ОУ без цепи обратной связи (рис. 3.55, а). В цепи без ООС коэффициент усиления оказывается чрезвычайно большим и при входном напряжении со значениями от долей до единиц вольт ограничение оказывается столь значительным, что синусоидальный сигнал превращается в прямоугольный (рис. 3.55, б). Например, если  $U_{m\text{вх}} = 1$  В, а  $\mu = 10\,000$ , то синусоида обрезается на уровне 0,001 своего максимального значения, при этом вертикальные линии выходного напряжения оказываются практически прямыми, а не наклонными. Заметим, что использование ОУ без обратной связи — случай в схемотехнике крайне редкий, встречающийся только при необходимости получить чрезвычайно сильное ограничение. На данном принципе можно преобразовать формы самых различных сигналов. Ограничение амплитуды — важный вид преобразования, широко используемый в различных электронных устройствах. Например, на вход буквопечатающего аппарата (телетайпа) приходят сигналы прямоугольной формы. В зависимости от комбинации этих сигналов на

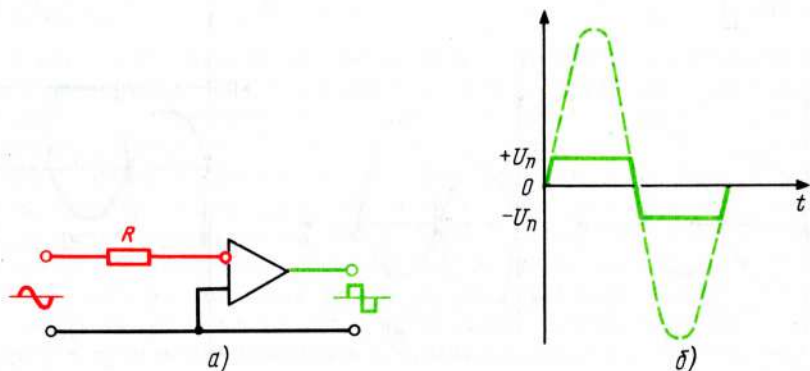


Рис. 3.55

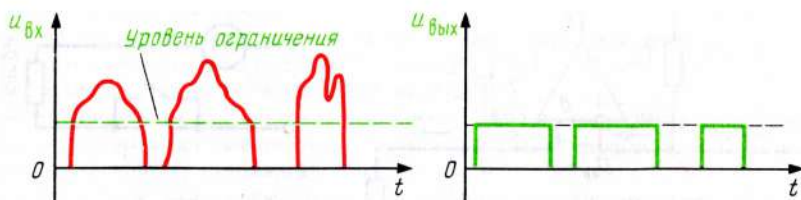


Рис. 3.56

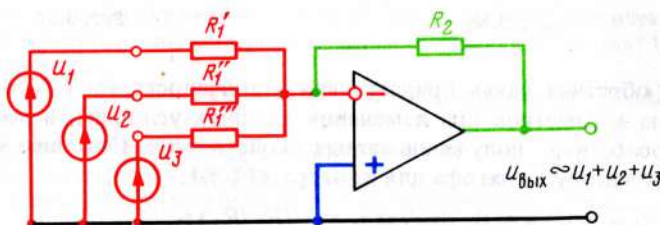


Рис. 3.57

телетайпе печатается та или иная буква. Поскольку сигналы, приходящие от различных передатчиков, имеют неодинаковые амплитуды, в работе теле- тайпов могут происходить различные сбои или появляться ошибки. Чтобы избежать этого, все приходящие сигналы предварительно пропускают через ограничитель, после чего их амплитуды становятся одинаковыми. Таким же образом устраняется ряд помех, накладывающихся на прямоугольные им- пульсы при прохождении сигналов, например по линиям связи или каким- либо иным устройствам (рис. 3.56). Ограничители используют в телеви- зорах, приемниках для ультракоротковолнового диапазона и в различной иной аппаратуре.

#### 3.44. СУММАТОРЫ

Сумматор представляет цепь класса  $AR$  (активно-резистивную), позво- ляющую складывать напряжения различных сигналов в любой момент. Схема сумматора с ОУ показана на рис. 3.57. Мгновенные напряжения на выходе сумматора пропорциональны сумме мгновенных напряжений на входах сумматора, т. е.

$$u_{\text{вых}} = -(R_2/R_1) (u_1 + u_2 + u_3).$$

#### 3.45. КОНВЕРТОРЫ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Конверторами отрицательных сопротивлений (КОС) называются  $AR$ -цепи, знак входного сопротивления которых обратен знаку сопротивления, на который КОС нагружен. Схема КОС показана на рис. 3.58. В данной схеме имеются две цепи обратных связей – отрицательная (с выхода на отрица- тельный вход) и положительная (с выхода на положительный вход). Отри-

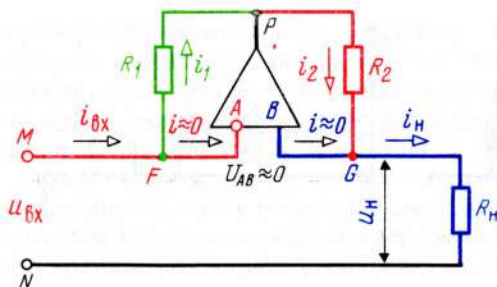


Рис. 3.58

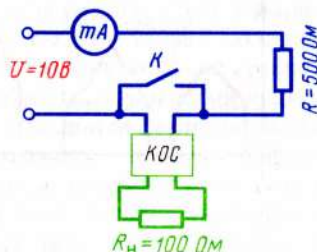


Рис. 3.59

цательная обратная связь придает цепи устойчивость (т. е. способствует сохранению параметров при изменении внешних условий), а положительная — способствует получению новых свойств цепи. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура  $AFGBA$ :

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = u_{AB} \approx 0, \text{ откуда } i_1 = -(R_2/R_1) i_2.$$

Входное сопротивление цепи (т. е.  $R_{MN}$ ) есть отношение входного напряжения к входному току:  $R_{BX} = u_{BX}/i_{BX}$ . Поскольку в ОУ  $u_{AB} \approx 0$ , то  $u_{BX} \approx u_H$ ,  $i_{BX} = i_1$ ,  $i_2 = i_H$ , тогда

$$R_{BX} = u_{BX}/i_{BX} = u_H/i_H = \frac{u_H}{-i_2 (R_2/R_1)} = -\frac{R_1}{R_2} \frac{u_H}{i_H}.$$

Но отношение напряжения  $u_H$  к току  $i_H$  есть сопротивление нагрузки  $R_H$ , откуда  $R_{BX} = -(R_1/R_2) R_H$ . Если  $R_1 = R_2$ , то  $R_{BX} = -R_H$ . Таким образом, входное сопротивление КОС равно по модулю сопротивлению нагрузки, но с противоположным знаком. Получилась цепь с отрицательным резистивным сопротивлением, обозначаемая  $R_{(-)}$ . Природой отрицательные резистивные сопротивления не созданы, их можно получить только искусственно, например с помощью КОС. Используя отрицательные резистивные сопротивления, можно уменьшать потери в различных цепях.

**Пример 3.24.** Рассчитать показания миллиамперметра в цепи, рис. 3.59 при замкнутом и разомкнутом ключе  $K$  по данным, указанным на схеме.

**Решение.** При включенном ключе  $K$  входные зажимы КОС замкнуты накоротко и в цепи остается только сопротивление  $R = 500 \text{ Ом}$ . В этом случае  $I = U/R = 10/500 = 0,02 \text{ А} = 20 \text{ мА}$ . При разомкнутом ключе последовательно с сопротивлением  $R$  включается входное сопротивление КОС  $R_{(-)} = -100 \text{ Ом}$ . Общее сопротивление цепи  $R_{\text{общ}}$  при этом становится равным  $R + R_{(-)} = 500 + (-100) = 400 \text{ Ом}$ , ток в цепи возрастает до значения  $I_1 = U/R_{\text{общ}} = 10/400 = 0,025 \text{ А} = 25 \text{ мА}$ . Таким образом, включение в цепь КОС уменьшает общее сопротивление цепи и увеличивает ток в ней.

#### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие цепи называются неразветвленными?
2. Какое соединение элементов называется последовательным?
3. Что понимается под "направлением" ЭДС?
4. В чем разница между предполагаемым направлением тока и действительным?



5. В чем сущность закона Ома?
6. Как связаны потенциалы точек с напряжением между этими же точками?
7. В чем сущность второго закона Кирхгофа?
8. Что значит "Рассчитать ток в резистивной цепи"?
9. Что понимается под понятием действующее значение напряжения (тока)? Каким образом рассчитывают действующее значение? В каких случаях необходимо знать действующие значения напряжений (токов)?
10. Рассчитайте действующее значение напряжения, показанного на рис. 3.7, б.
11. Каковы правила определения потенциалов точек в различных цепях?
12. Какие цепи называются разветвленными?
13. В чем сущность первого закона Кирхгофа?
14. Какое соединение элементов называется параллельным? Каким образом рассчитывают эквивалентные сопротивления при таком соединении элементов? Что называется проводимостью?
15. Что понимается под понятиями "входное сопротивление" и "входная проводимость" цепи?
16. Как рассчитать токи в двух параллельных ветвях?
17. Напишите выражения, с помощью которых пассивные сопротивления, соединенные треугольником, пересчитывают в пассивные сопротивления, соединенные звездой, и наоборот.
18. Что называется топологическим графом цепи?
19. Каким образом записывается первый закон Кирхгофа для сечений цепи? Приведите примеры.
20. Каким образом рассчитывают токи в цепях с помощью законов Кирхгофа?
21. Каковы принципы матричной формы записи уравнений?
22. Как производят расчет токов в разветвленных цепях методом контурных токов?
23. Как производят расчет токов в разветвленных цепях методом узловых напряжений?
24. В каких цепях можно рассчитывать токи методом наложения? Каким образом производят расчеты данным методом?
25. В каких цепях можно рассчитывать токи методом двух узлов? Каковы правила выполнения этих расчетов?
26. Каким образом производят расчеты методом эквивалентного генератора?
27. Сформулируйте принцип взаимности. Приведите примеры.
28. Каким образом рассчитывают взаимные сопротивления (проводимости)? Приведите примеры.
29. При каком значении сопротивления  $R_i$  (по схеме рис. 3.48) оказывается наибольшим: а) ток в цепи; б) напряжение на внешнем сопротивлении; в) мощность во внешнем сопротивлении; г) КПД в цепи?
30. Что называется коэффициентом передачи цепи по напряжению? Каким образом он рассчитывается?
31. Получите выражение коэффициента передачи для: а) цепи Г-образного вида в режиме холостого хода; б) цепи Г-образного вида, нагруженной на сопротивление  $R_H$ ; в) цепи мостового вида в режиме холостого хода.
32. Какой источник называется источником тока? Каковы основные характеристики источников тока? Чем источники тока отличаются от источников напряжения?
33. Чем отличаются расчеты в цепях с источниками тока от расчета цепей с источниками напряжения?
34. Что называют расщеплением источников? В каких случаях он используется? Приведите примеры.
35. Покажите преобразование активного треугольника в активную звезду.
36. В чем особенность расчета цепей с зависимыми источниками методом наложения?

37. Какие элементы и цепи называют активными? Приведите примеры активных цепей.
38. Покажите схемы замещения трехэлектродной лампы и транзисторов.
39. Что называется операционным усилителем, каковы его основные свойства?
40. Почему при расчете цепей с ОУ не требуется знать коэффициент усиления ОУ?
41. Каковы эквивалентные схемы цепей с операционными усилителями?
42. В чем сущность отрицательной обратной связи? Как изменяются свойства цепей при наличии ООС?
43. Какая разница в параметрах цепей для случаев: а)  $u_{вх}K < U_{пит}$  и б)  $u_{вх}K > U_{пит}$ ?
44. В чем сущность явления ограничения выходного сигнала? Нарисуйте схему, с помощью которой напряжение синусоидальной формы преобразовывают в напряжение прямоугольной формы.
45. Нарисуйте схему сумматора. Чему равны мгновенные выходные напряжения на выходе сумматора?
46. Что такое конвертор отрицательных сопротивлений? Докажите, что в КОС  $R_{вх} = -R_{ц}$ . Приведите примеры использования КОС.

## Глава 4.

## ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### 4.1. ПОНЯТИЕ О МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Экспериментально было установлено, что в природе существуют тела, около которых имеется область, обладающая рядом весьма своеобразных свойств. В этой области притягиваются железные (стальные) предметы; проводник, по которому протекает электрический ток, испытывает силу, стремящуюся вытолкнуть его из данного пространства; при перемещении проводника на его зажимах появляется электродвижущая сила. Часть пространства, в которой обнаруживались указанные явления, стали называть областью с магнитным полем, или, короче, просто *магнитным полем*. Тела, вокруг которых существуют такие поля, получили название магнитов. Каждый магнит имеет два полюса: северный, обозначаемый буквой  $N$ , и южный, обозначаемый буквой  $S$ . Магнитное поле состоит из магнитных силовых линий, которые выходят из северного полюса и входят в южный. Конфигурация магнитных силовых линий можно видеть по расположению железных опилок, насыпанных около магнита (рис. 4.1, а, б).

Магнитное поле бывает однородным и неоднородным. *Однородным* называется поле, в каждой точке которого направление и плотность магнит-

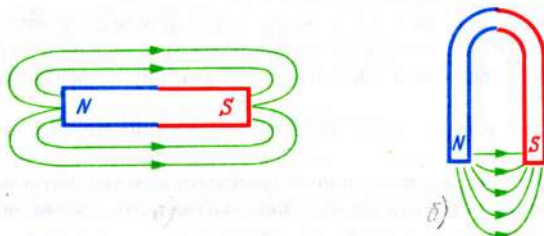


Рис. 4.1



ных силовых линий одинаковые. *Неоднородным* магнитным полем называется поле, в котором магнитные силовые линии имеют неодинаковое направление или плотность. Физическая величина, пропорциональная количеству магнитных силовых линий, называется *магнитным потоком*. Магнитный поток обозначают буквой  $\Phi$  и измеряют в веберах (Вб) — по имени немецкого физика В. Э. Вебера (1804 — 1891), члена Петербургской академии наук (1853 г.);  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ с}$ , т. е.  $[\text{Вб}] = \text{В} \cdot \text{с}$ . Когда говорят о магнитном потоке, то обыкновенно указывают, какую площадь  $S$  пересекает данный поток. В одних случаях эта площадь может быть ничем не ограниченной, т. е. теоретически бесконечно большой, а в других — имеющей конечные размеры. Если магнитный поток  $\Phi$  пересекает  $N$  проводников, то используют важную в электротехнике расчетную величину — *потокосцепление*, обозначаемую греческой буквой  $\psi$  (читается "пси");  $\psi = \Phi N$ . Так как число витков — величина безразмерная, то потокосцепление, так же, как и магнитный поток, измеряется в веберах.

Первоначально для получения магнитных полей пользовались теми магнитами, которые обнаруживали в природе, чаще всего при разработках различных руд. Позже выяснилось, что магнитное поле имеется вокруг любого проводника, по которому протекает электрический ток, причем если по проводнику течет постоянный ток, то образуется постоянное магнитное поле, а если переменный, то переменное. Таким образом, оказалось, что электрический ток не может существовать без магнитного поля. Всякое перемещение электрических зарядов в проводнике обязательно вызывает магнитные явления.

Итак, магнитное поле представляет особый вид материи, характеризующейся, в частности, способностью возбуждать ЭДС в проводнике, перемещающемся в данном магнитном поле и обладающей рядом иных свойств.

## 4.2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

Если по проводнику протекает ток, то магнитные силовые линии, вызванные этим током, имеют вид концентрических окружностей, расположенных в плоскости, перпендикулярной проводнику. Направление магнитных силовых линий определяют по правилу буравчика в соответствии с которым направление магнитных силовых линий вокруг провода с током совпадает с направлением вращения рукоятки буравчика, если поступательное движение буравчика совпадает с направлением тока в проводе. Например, если в некоторый момент ток в проводнике течет от наблюдателя, то буравчик следует ввинчивать, магнитные силовые линии направлены при этом по часовой стрелке (рис. 4.2, а). Напомним, что направление тока "от нас" на чертежах обозначают крестиком (рис. 4.2, б), а "к нам" — точкой, (рис. 4.2, в). Интенсивность магнитного поля в каждой его точке характеризуется *магнитной индукцией*, обозначаемой буквой  $B$ . Магнитная индукция имеет направление и является, следовательно, величиной векторной. Направление вектора магнитной индукции  $B$  совпадает с направлением касательной в каждой точке поля. В единицах СИ магнитная индукция измеряется в теслах (Тл) — по имени известного югославского ученого Николы Тесла (1856 — 1943). Ниже будет доказано, что  $1 \text{ Тл} = \text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ . Тесла —



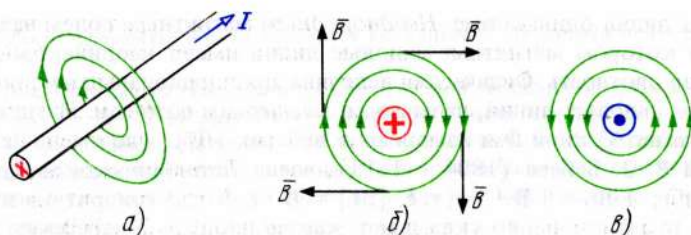


Рис. 4.2

довольно крупная величина; в устройствах связи часто приходится иметь дело с индукциями, измеряемыми долями теслы. Если проводник, длина которого много больше его радиуса; находится в воздухе, то значение индукции  $B$  в различных точках, находящихся на расстоянии  $l$  от центра проводника (при  $l > r$ , где  $r$  — радиус проводника, по которому протекает ток), определяется из выражения  $B = (2I/l) \cdot 10^{-7}$ , причем  $B = \text{Тл}$ ,  $I = \text{А}$ ,  $l = \text{м}$ .

**Пример 4.1.** Определить магнитную индукцию на расстояниях  $r$ ,  $2r$ ,  $4r$ ,  $8r$  от центра проводника достаточно большой длины, находящегося в воздухе, если по проводнику протекает ток  $I = 100 \text{ мА}$ , а радиус проводника  $0,1 \text{ мм}$ .

**Решение.**  $B = (2I/l) \cdot 10^{-7}$ . При  $l = r = 0,1 \text{ мм} = 10^{-4} \text{ м}$   $B = \frac{2 \cdot 0,1}{10^{-4}} 10^{-7} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ ; при  $l = 2r = 0,2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$   $B = 10^{-4}$ ; при  $l = 4r$   $B = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ ; при  $l = 8r$   $B = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$  и т. д. Из данного примера видно, что магнитная индукция убывает по мере удаления от проводника, т. е. магнитное поле прямолинейного проводника с током является полем неравномерным, или, как его часто называют, неоднородным.

#### 4.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАТУШКИ С ТОКОМ

Как было видно из предыдущего примера, магнитное поле одиночного проводника сравнительно невелико (хотя в ряде случаев пренебрегать им совершенно недопустимо). Поле значительно усиливается, если проводник намотать в виде катушки, поскольку магнитные силовые линии образуются вокруг каждого витка и магнитный поток увеличивается пропорционально числу витков. Следовательно, в любой катушке причиной, вызывающей появление магнитного потока, является ток, текущий по катушке. Проведем некоторое сравнение между цепями электрическими и магнитными. В электрической цепи причиной, вызывающей в ней ток, является электродвижущая сила, в магнитной цепи — ток, умноженный на число витков, т. е. величина  $IW$ , называемая магнитодвижущей силой (МДС). Число витков является величиной безразмерной, поэтому МДС измеряется в амперах. Таким образом, в амперах измеряются две физические величины: в электрических цепях — ток, в магнитных — магнитодвижущая сила. В электрической цепи ЭДС при наличии проводимости вызывает ток, в магнитной цепи МДС вызывает магнитный поток. Следовательно, аналогом тока в магнитных цепях является магнитный поток  $\Phi$ .

Введем еще несколько физических величин, используемых в магнитных цепях. Весьма необходимой для расчетов является напряженность магнитного поля  $H$ , под которой понимают МДС, приходящуюся на единицу длины

катушки или какого-либо магнитопровода. Так как в СИ ток измеряют в амперах, а длину в метрах, то напряженность магнитного поля имеет размерность  $[A/m]$ . Произведение напряженности магнитного поля на длину  $l$  является магнитным напряжением  $U_m$ . Очевидно, что магнитное напряжение измеряется в амперах, так же, как и магнитодвижущая сила. Второй закон Кирхгофа для магнитных цепей при неизменном токе имеет вид:  $\sum I W = \sum H l$ , а при изменяющемся  $\sum i W = \sum H l$ , где  $i$  и  $H$  – мгновенные токи и напряженности магнитного поля соответственно. Очень важной физической величиной является магнитное сопротивление  $R_m$ . Оно образуется аналогично электрическому сопротивлению  $R = \rho l/S = l/\sigma S$ , где  $\rho$  – электрическое удельное сопротивление, а  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость проводников. В магнитных цепях эту величину называют не “удельная проводимость”, а “удельная проницаемость”, или, иначе, “магнитная проницаемость”. Таким образом, удельная проводимость  $\sigma$  в электрических цепях показывает способность материала проводить электрический ток, а магнитная проницаемость  $\mu_a$  – магнитный поток. Чем больше  $\mu_a$ , тем меньше электрическое сопротивление цепи и больше, при прочих равных условиях, ток. Аналогично, чем больше  $\mu_a$ , тем меньше магнитное сопротивление цепи и тем больше магнитный поток. Магнитное сопротивление, так же, как и электрическое, увеличивается с увеличением длины пути, проходимого магнитным потоком, и уменьшается с увеличением сечения магнитопровода.

Следовательно,

$$R_m = l/\mu_a S. \quad (4.1)$$

В электрической цепи сопротивление представляет отношение электрического напряжения к электрическому току. Магнитное сопротивление аналогично представляет отношение магнитного напряжения  $U_m$  к магнитному потоку  $\Phi$ , т. е.  $R_m = U_m/\Phi = Hl/\Phi$  или  $l/\mu_a S = Hl/\Phi$ . Определим размерность магнитной проницаемости:  $\mu_a = \Phi/SH$ , откуда

$$[\mu_a] = \frac{В \cdot с}{м^2 А/м} = \frac{В \cdot с}{А \cdot м} = \frac{с \cdot Ом}{м}.$$

Единица, определяемая произведением времени 1 с на сопротивление в 1 Ом, называется генри (Гн), по имени американского физика Ф. Генри (1797 – 1878). Таким образом, магнитная проницаемость  $\mu_a$  измеряется в Гн/м.

Определим размерность магнитного сопротивления:

$$R_m = l/\mu_a S, \quad [R_m] = \frac{м}{(Гн/м) \cdot м^2} = 1/Гн. \quad (4.2)$$

Обратим внимание, что природа магнитных явлений отлична от электрических (хотя эти явления между собой и связаны), поэтому размерности и единицы магнитных величин отличаются от размерностей и единиц аналогичных электрических величин. Действительно, размерность ЭДС и электрического напряжения – В, а МДС и магнитного напряжения – А; электрического тока – А, а магнитного потока –  $Вб = В \cdot с$  (вебер, равен вольту, умноженному на секунду); электрического сопротивления – Ом, а магнит-



ного сопротивления —  $1/\text{Гн} = 1/(\text{с} \cdot \text{Ом})$ ; удельной электрической проводимости —  $\text{Ом} \cdot \text{м}$ , а магнитной проницаемости —  $\text{Гн/м}$ . Магнитная индукция  $B$  аналогична плотности электрического тока  $J$ , т. е. отношению тока к площади ( $J = I/S$ ), причем  $[J] = \text{А/мм}^2$ . Магнитная индукция  $B$  представляет отношение магнитного потока  $\Phi$  к площади  $S$  ( $B = \Phi/S$ ), откуда  $[B] = \text{Вб/м}^2 = \text{В} \cdot \text{с/м}^2 = \text{Тл}$ , на что было указано выше.

#### 4.4. МАГНИТНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Между электрическими и магнитными цепями имеются сходства, но имеются и различия. Одно из различий состоит в том, что через воздух электрический ток в обычных условиях практически не протекает, электрическое сопротивление воздуха чрезвычайно велико. Магнитное же сопротивление воздуха тоже велико, но не настолько, чтобы магнитные силовые линии по воздуху совершенно не проходили. Магнитную проницаемость вакуума (практически воздуха) обозначают  $\mu_0$ . Исследования показали, что  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ . Если в катушку ввести сердечник из материала, магнитная проницаемость которого в  $\mu_r$  больше, чем у воздуха, то магнитное сопротивление в  $\mu_r$  раз уменьшится, а магнитный поток в такое же число раз возрастет. Таким образом, во все формулы в качестве магнитной проницаемости следует подставлять  $\mu_a$ , представляющее произведение двух множителей —  $\mu_0$  и  $\mu_r$ , где  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума, а  $\mu_r$  — безразмерная величина, показывающая, во сколько раз уменьшается магнитное сопротивление цепи, если в катушку ввести замкнутый сердечник из материала с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_r$ :

$$\mu_a = \mu_0 \mu_r. \quad (4.3)$$

Для множества материалов (воздух, алюминий, марганец, платина, медь, латунь, серебро, графит, висмут и т. д.) значение  $\mu_r$  близко к единице. Материалы, у которых относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  много больше единицы, называются *ферромагнитными*. Они делятся на три большие группы: низкочастотные электротехнические стали и сплавы, магнитодиэлектрики и ферриты. Электротехнические стали используются в энергетической аппаратуре (трансформаторы, дроссели, моторы и пр.), работающей на промышленной частоте 50 Гц. Относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  этих материалов чаще всего 100...300. В аппаратуре связи электротехнические стали применяются, как правило, только в силовых трансформаторах, используемых в выпрямителях, преобразующих переменный ток в постоянный.

В последние годы отчетливо видна тенденция отказываться от традиционных силовых трансформаторов в выпрямительных устройствах и преобразовывать переменный ток частотой 50 Гц в постоянный с помощью электронных устройств, для которых трансформаторы с сердечниками из электротехнической стали оказываются непригодными. В электромагнитных реле и некоторых устройствах часто используются специальные сорта железа и различные сплавы, относительная магнитная проницаемость которых 500...2000, а иногда и более. В аппаратуре связи широко используют высокочастотные магнитные материалы — магнитодиэлектрики и ферри-



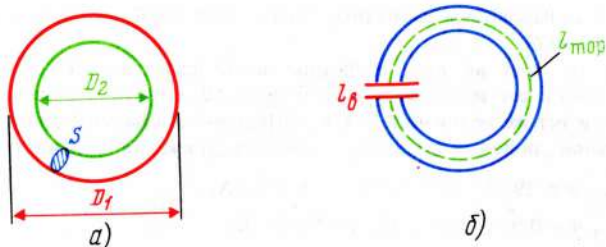


Рис. 4.3

ты. У магнитодиэлектриков магнитная проницаемость равна  $20 \dots 60$ , а у ферритов  $600 \dots 2000$  и более. Подробнее эти материалы будут рассмотрены ниже.

**Пример 4.2.** Рассчитать магнитное сопротивление  $R_m$  тороида (т. е. магнитопровода, имеющего вид кольца) с сечением  $S = 2 \text{ см}^2$ , внешним диаметром  $D_1 = 18 \text{ см}$ , а внутренним  $D_2 = 14 \text{ см}$  (рис. 4.3, а), для случаев, когда длина воздушного зазора  $l_B$  равна  $0,1; 0,5; 1; 2; 4 \text{ см}$ , а  $\mu_r = 2000$ .

**Решение.**  $R_m = l / \mu_0 \mu_r S$ . Определим средний диаметр магнитопровода. Если внешний диаметр тороида  $D_1$ , а внутренний  $D_2$ , то средний диаметр  $D_{\text{ср}} = (D_1 + D_2) / 2 = (18 + 14) / 2 = 16 \text{ см} = 0,16 \text{ м}$ . Рассчитаем среднюю длину магнитопровода  $l_{\text{ср}}: l_{\text{ср}} = \pi D_{\text{ср}} = 0,16\pi$ .

Рассчитаем магнитное сопротивление тороида при отсутствии воздушного зазора. Напомним, что  $2 \text{ см}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ :

$$R_m = \frac{l_{\text{ср}}}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{0,16\pi}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2000 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 10^6 \text{ 1/Гн} = 1 \text{ (1/мкГн)}.$$

Приставка "микро" (мк) означает  $10^{-6}$ , таким образом  $10^6 \text{ (1/Гн)} = 1 \text{ (1/мкГн)}$ .

Рассчитаем магнитное сопротивление магнитопровода при воздушном зазоре  $l_B = 0,1 \text{ см} = 0,001 \text{ м}$  (рис. 4.3, б). В этом случае общее магнитное сопротивление  $R_m$  общ складывается из магнитного сопротивления воздушного зазора  $R_{mB}$  и магнитного сопротивления тороида  $R_{mT}$ .

Рассчитаем каждое из данных магнитных сопротивлений:

$$R_{mB} = l_B / \mu_0 S = 0,001 / 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 3,96 \cdot 10^6 \approx 4 \cdot 10^6 \text{ 1/Гн} = 4 \text{ (1/мкГн)};$$

$$R_{mT} = l_T / \mu_0 \mu_r S = 16\pi \cdot 10^{-2} / 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 9,9947 \cdot 10^6 \text{ (1/Гн)} \approx 1 \text{ (1/мкГн)},$$

т. е. воздушный зазор длиной всего  $0,1 \text{ см}$ , имеет магнитное сопротивление в 4 раза большее, чем тороид длиной  $50 \text{ см}$ , т. е. магнитопровод длиной в 500 раз большей, чем воздушный зазор, имеет сопротивление в 4 раза меньше. При длине воздушного зазора  $l_B = 0,5 \text{ см}$  магнитное сопротивление зазора возрастает в 5 раз и становится  $20 \text{ (1/мкГн)}$  при  $l_B = 1 \text{ см}$ ,  $R_m \approx 40 \text{ (1/мкГн)}$  и т. д.

Из данного примера видно, что при наличии воздушных зазоров магнитное сопротивление резко возрастает, в большинстве случаев магнитным сопротивлением сердечника можно пренебрегать и приближенно считать, что общее магнитное сопротивление всей магнитной цепи определяется магнитным сопротивлением воздушного зазора.

**Пример 4.3.** На тороид, рассмотренный в предыдущем примере, наложена обмотка, имеющая  $w = 2000$  витков, по которой протекает ток  $I = 1 \text{ А}$ . Рассчитать магнитные падения напряжения  $U_m$ , если длина воздушного зазора  $1 \text{ см}$ , магнитопровода  $49 \text{ см}$ .

**Р е ш е н и е.** Рассчитаем магнитный поток:  $\Phi = IW/R_m = 2000/40 \cdot 10^6 \approx 50 \times 10^{-6} \text{ Вб} = 50 \text{ мкВб}$ .

Подобно тому, как во всех сопротивлениях неразветвленной электрической цепи протекает один и тот же ток  $I$ , в неразветвленной магнитной цепи на всех участках проходит один и тот же магнитный поток  $\Phi$ . Перемножив магнитный поток на магнитное сопротивление, получим магнитное падение напряжения на данном участке цепи:

$$U_{mB} = R_{mB} \Phi = 39,78 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 1950 \text{ А};$$

$$U_{mT} = R_{mT} \Phi = 0,9947 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \approx 50 \text{ А}.$$

Выполним проверку:

$$I = U_{mB} + U_{mT} = 2000 = 1950 + 50; 2000 = 2000.$$

Из данного примера видно, что при наличии воздушных зазоров в магнитопроводе основная часть магнитного падения напряжения оказывается на воздушном зазоре, поэтому в первом приближении, общее магнитное сопротивление цепи определяют сопротивлением именно воздушного зазора.

Из приведенных расчетов следует, что даже небольшие воздушные зазоры в магнитопроводе резко увеличивают магнитное сопротивление цепи и соответственно уменьшают магнитный поток. Поэтому широкое распространение получили магнитопроводы, выполненные в виде сплошных тороидальных колец, воздушные зазоры в которых отсутствуют.

#### 4.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИЕЙ И НАПРЯЖЕННОСТЬЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для сравнения магнитных полей различных источников необходимо знать значение магнитного потока  $\Phi$ , приходящегося на единицу площади  $S$ , т. е. магнитную индукцию  $B$ . Если поток равномерный, а вектор магнитной индукции перпендикулярен площадке, то определять магнитную индукцию  $B$  можно из выражения  $B = \Phi/S$ , где  $[B]$ , Тл;  $[\Phi]$ , Вб;  $[S]$ , м<sup>2</sup>.

Очевидно, что  $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб}/1 \text{ м}^2 = B \cdot \text{с}/\text{м}^2$ . В этом случае магнитная индукция в каждой точке пространства, ограниченного площадью  $S$ , имеет одно и то же значение. Если поток неравномерный, то магнитная индукция в каждой точке оказывается различной и определять ее следует из выражения  $B = d\Phi/dS$ . Таким образом, если по катушке протекает ток, то образуется *магнитный поток*, который в каждой точке поверхности характеризуется вектором магнитной индукции. Зная параметры катушки и значение протекающего через нее тока, можно определить напряженность магнитного поля  $H$ . Магнитная индукция  $B$  и напряженность магнитного поля  $H$  в вакууме связаны между собой соотношением  $B = \mu_0 H$ .

Если в катушку ввести замкнутый сердечник, относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  которого много больше единицы, то магнитный поток  $\Phi$ , а следовательно, и магнитная индукция  $B$  возрастают в  $\mu_r$  раз. Следовательно, в общем случае связь напряженности магнитного поля с магнитной индукцией определяют из выражения  $B = \mu_0 \mu_r H = \mu_a H$ , где  $\mu_a = \mu_0 \mu_r$ .

Для вакуума (практически воздуха)  $\mu_0$  есть величина постоянная, не зависящая от напряженности магнитного поля. Все материалы,  $\mu_r$  которых близко к единице, также не изменяют значения магнитной проницаемости в зависимости от тока в катушке, длины катушки и числа витков, т. е. опять-таки от напряженности магнитного поля. Поэтому в таких материа-



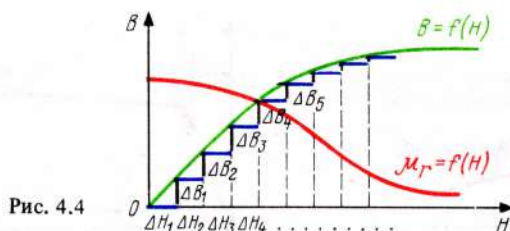


Рис. 4.4

лах магнитная индукция пропорциональна напряженности магнитного поля, а следовательно, и току, протекающему по катушке. Например, если ток в катушке изменяется в 5 раз, то магнитная индукция, при прочих равных условиях, изменится также в 5 раз.

Если же магнитопровод, по которому проходит магнитный поток, имеет  $\mu_r \gg 1$ , то практически у всех материалов относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  изменяется при изменении напряженности магнитного поля. Как правило, при увеличении  $H$  значение  $\mu_r$  уменьшается. Поскольку вычислять относительную магнитную проницаемость по многим причинам неудобно, на практике пользуются кривыми  $B = \mu(H)$ , показывающими, какое значение магнитной индукции оказывается в замкнутом магнитопроводе, собранном из данного материала при заданных напряженностях магнитного поля. Кривую  $B = f(H)$  называют основной кривой намагничивания (рис. 4.4). У этой кривой при малых напряженностях поля  $B$  растет пропорционально  $H$ . По мере увеличения напряженности поля рост магнитной индукции замедляется и  $B$  растет медленнее, чем  $H$ . Говорят, что материал "начинает насыщаться". При весьма больших значениях напряженности поля увеличение магнитной индукции вообще прекращается, это означает, что материал достиг "полного насыщения". Насытить воздух не представляется возможным. Техника не создала полей, при которых рост магнитной индукции в воздухе мог бы замедлиться. Практически во всех ферромагнитных материалах при определенных значениях напряженностей полей происходит насыщение. Разница состоит в том, что у одних материалов насыщение начинает сказываться при небольших напряженностях полей, а у других — только при больших значениях  $H$ .

#### 4.6. ЗАВИСИМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ОТ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Из выражения  $B = \mu_0 \mu_r H$  можно рассчитать относительную магнитную проницаемость:  $\mu_r = B/\mu_0 H$ . Так как  $\mu_0$  — величина постоянная, то  $\mu_r$  пропорционально отношению  $\Delta B/\Delta H$ , где  $\Delta B$  и  $\Delta H$  — приращения магнитной индукции и напряженности магнитного поля соответственно. Рассмотрим вид кривой  $\mu_r = f(H)$  для материалов с постепенным насыщением (рис. 4.4). Разобьем горизонтальную ось на одинаковые отрезки  $\Delta H$  и для удобства рассуждений пронумеруем эти отрезки:  $\Delta H_1, \Delta H_2, \Delta H_3 \dots$ . Из рисунка видно, что на линейном участке характеристики различным  $\Delta H$  соответствуют одинаковые приращения  $\Delta B$ , следовательно, на этом участке значение  $\mu_r$  остается постоянным. По мере насыщения материала кривая  $B = f(H)$  идет



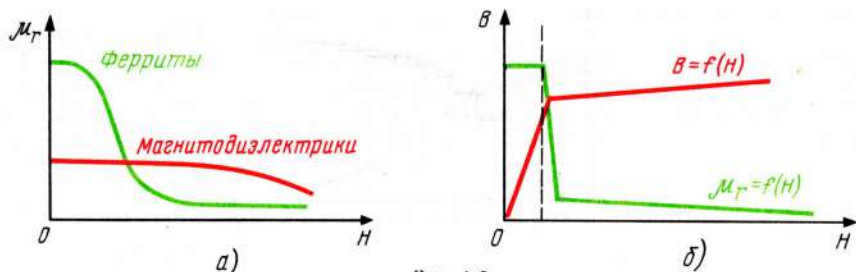


Рис. 4.5

все более полого и одинаковым приращениям  $\Delta H$  соответствуют все меньшие приращения  $\Delta B$ , следовательно, значения  $\mu_r$  при этом уменьшаются.

Магнитодиэлектрики (например, альсиферы, карбонильное железо и пр.) имеют небольшие  $\mu_r$ , чаще всего 20 ... 60, но значения  $\mu_r$  остаются постоянными при значительных изменениях напряженности поля. Ферриты имеют весьма большие значения начальной магнитной проницаемости (например, 600 ... 2000), но уже при небольших напряженностях их  $\mu_r$  значительно падает (рис. 4.5, а).

У высокочастотных магнитных материалов чаще всего наблюдается закономерность: чем больше начальная магнитная проницаемость, тем сильнее изменяется  $\mu_r$  при изменениях напряженности магнитного поля и температуры. Такие закономерности обуславливаются внутренним строением этих материалов. Важную группу составляют магнитные материалы с основной кривой намагничивания, близкой к прямоугольной. У таких материалов при небольших напряженностях поля происходит резко выраженное насыщение, при этом магнитная проницаемость, а следовательно, и магнитное сопротивление цепи, резко падают (рис. 4.5, б).

#### 4.7. ГИСТЕРЕЗИС

Пусть имеется тороид с обмоткой, в которой можно изменять, как значение, так и направление тока. Если образец предварительно был полностью размагничен, то при увеличении тока в обмотке напряженность поля и магнитная индукция в тороиде станут возрастать по закону основной кривой намагничивания. Но если затем ток уменьшать, то магнитная индукция будет уменьшаться не по основной кривой намагничивания, а по иной кривой, идущей выше основной кривой намагничивания. При токе, а следовательно, и напряженности магнитного поля, равным нулю, магнитная индукция оказывается не нулевой, а равной некоторому значению. Магнитная индукция, которая остается в материале после выключения тока в обмотке, называется *остаточной* и обозначается  $B_r$ . Для размагничивания образца необходимо создать некоторую напряженность поля с обратным знаком. Напряженность поля, при которой магнитная индукция в образце становится равной нулю, называют *коэрцитивной силой* и обозначают  $H_c$  (рис. 4.6, а). Явление запаздывания изменений магнитной индукции от изменений напряженности магнитного поля называется *магнитным гистерезисом*. Кривая  $B = f(H)$  при многократном перемагничивании образца называется *гистерезисным циклом* или *петлей гистерезиса*. Площадь гистерезисного цикла пропорциональна потерям в образце, т. е. мощности, затрачиваемой на нагревание сердечника при его перемагничивании. Материалы с большой коэрцитивной силой называют магнитотвердыми, а с малой – магнитомягкими. Постоянные магниты изготавливают из сплавов

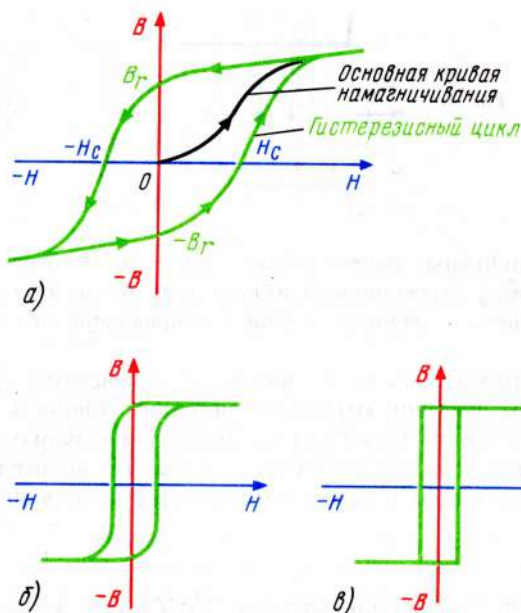


Рис. 4.6

с большой коэрцитивной силой (рис. 4.6, а), а магнитопроводы сердечников, по которым протекают магнитные потоки – из магнитомягких (рис. 4.6, б). Часто говорят, что у магнитомягких материалов "петля узкая". В современных электронных устройствах важную роль играют материалы с прямоугольной формой гистерезиса (рис. 4.6, в). Качество прямоугольных свойств материала оценивают коэффициентом прямоугольности  $K_{пр}$ , представляющим отношение остаточной индукции  $B_r$  к индукции при напряженности поля 1000 А/м:

$$K_{пр} = B_r/B \text{ при } H = 1000 \text{ А/м} \quad (4.4)$$

Прямоугольными обыкновенно называют материалы, у которых  $K_{пр}$  не менее 0,9.

#### 4.8. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДНИК С ТОКОМ

Если проводник, по которому протекает ток, поместить между полюсами магнита, то общее магнитное поле будет состоять из двух полей: поля постоянного магнита, в котором магнитные силовые линии идут от северного полюса к южному, и поля, вызванного током, текущим по проводнику и имеющему вид концентрических окружностей. При этом оказывается, что с одной стороны проводника магнитные силовые линии и магнита и тока идут в одном направлении, а с другой – в противоположных направлениях. Например, если направления полей такие, как показано на рис. 4.7 (северный полюс сверху, а ток течет от наблюдателя), то правее проводника магнитные линии идут в одну сторону, что вызывает увеличение их плотности. Левее проводника плотность уменьшается, поскольку силовые линии

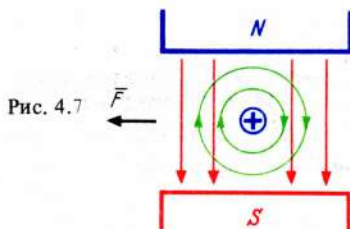


Рис. 4.7

идут в противоположных направлениях. При этом проводник испытывает механическую силу, стремящуюся вытолкнуть его из области с большой плотностью магнитных силовых линий в направлении области с меньшей плотностью.

Сила  $F$ , с которой внешнее магнитное поле действует на проводник с током, зависит от значения магнитной индукции  $B$  поля, в которое помещен проводник, значения тока  $I$  в проводнике, длины проводника  $l$ , находящегося в магнитном поле, и  $\sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между направлением вектора магнитной индукции поля и направлением тока в проводнике. Таким образом,

$$F = B I \sin \alpha,$$

где  $F$  — сила, Н;  $B$  — магнитная индукция, Тл;  $I$  — ток, А;  $l$  — длина проводника, м. Направление действия силы удобно определять правилом левой руки, которое формулируется следующим образом. Если расположить левую руку так, чтобы магнитные силовые линии входили в ладонь, вытянутые четыре пальца указывали направление тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление действия силы.

Докажем строго, что магнитная индукция  $B$  измеряется в  $\text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = \text{Тл}$ , а магнитный поток  $\Phi$  — в  $\text{В} \cdot \text{с} = \text{Вб}$ . Из выражения  $F = B I l$  следует, что  $B = F/I l$ , где  $F$  — механическая сила, Н;  $I$  — ток, А;  $l$  — длина, м. Но  $F = ma$ , где  $m$  — масса, кг;  $a$  — ускорение,  $\text{м}/\text{с}^2$ . Следовательно,  $B = ma/I l$ . Выразим массу  $m$  через электротехнические величины. Для этого напомним выражение механической работы:  $A_{\text{м}} = Fl = mal$  (где  $l$  — путь) и электрической работы:  $A_{\text{э}} = U I t$ . Так как любая работа измеряется в одних и тех же единицах (джоулях), и имеет одну и ту же размерность, то  $A_{\text{м}} = A_{\text{э}}$ , т. е.  $mal = U I t$ , откуда  $m = U I t / a l$ . Подставим получившееся выражение массы в формулу магнитной индукции:  $B = ma/I l = U I t a / a l I l = U t / l^2$ . Определим размерность магнитной индукции  $B$ :  $[B] = \text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = \text{Вб}/\text{м}^2 = \text{Тл}$ . Магнитный поток  $\Phi = B S$ , т. е.  $[\Phi] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб} \cdot \text{м}^2/\text{м}^2 = \text{Вб} = \text{В} \cdot \text{с}$ , что и требовалось доказать.

На принципе взаимодействия проводника с током основана работа различных технических устройств: приборов магнитоэлектрической системы, моторов постоянного тока и т. д. Прибор магнитоэлектрической системы имеет постоянный магнит, полюсные наконечники и цилиндр, изготовленные из материала с большим  $\mu_r$ , рамку, по виткам которой протекает измеряемый ток, возвратную пружину, стрелку, шкалу с делениями, крепежные детали (оси, подпятники и т. д.) (рис. 4.8). Полюсные наконечники имеют такую форму, при которой магнитные силовые линии при любом положении рамки направлены перпендикулярно проводникам катушки. В этом случае  $\sin \alpha = 1$ . Цилиндр уменьшает магнитное сопротивление цепи, что увеличивает магнитный



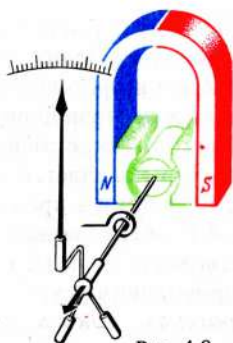


Рис. 4.8

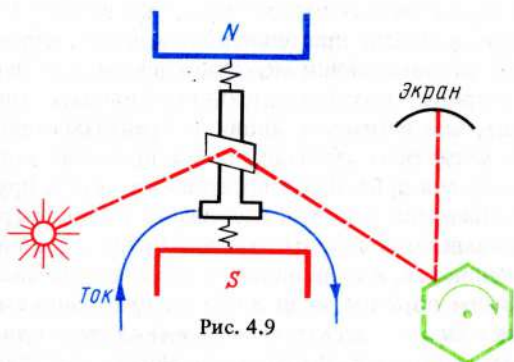


Рис. 4.9

поток, магнитную индукцию и, следовательно, повышает чувствительность прибора. Пружинка создает противодействующий момент и возвращает стрелку в исходное положение. Приборы магнитоэлектрической системы реагируют на среднее за период значение измеряемого тока  $\alpha = K \frac{1}{T} \int_0^T i dt$ , где  $\alpha$  – угол отклонения;  $K$  – коэффициент

пропорциональности;  $T$  – период;  $i$  – мгновенные значения измеряемого тока.

При неизменном во времени (т. е. постоянном) токе угол отклонения пропорционален значению тока, протекающего через прибор. При переменном токе направление действия силы изменяется  $f$  раз в секунду, где  $f$  – частота переменного тока. Поскольку подвижная система из-за инерционности не успевает совершать такого количества колебаний, практически стрелка дрожит около нулевой отметки.

Существуют приборы магнитоэлектрической системы, с чрезвычайно малым моментом инерции. Подвижная система в них выполнена в виде узкой петли, на которой крепится маленькое зеркало. Вместо стрелки в таких приборах используют световой луч от точечного источника света, который, отражаясь от зеркала, попадает на вращающийся зеркальный многогранный барабан, а оттуда на специальный экран (рис. 4.9). Петля с зеркальцем, по которой протекает ток, называется шлейфом или вибратором, весь прибор – шлейфовым (или вибраторным) осциллографом. Электромеханические осциллографы могут работать только на низких частотах, порядка десятка – сотен герц, но в таких осциллографах имеется по несколько вибраторов, что дает возможность наблюдать сразу за несколькими, иногда и за многими процессами. Например, в аппаратуре, предназначенной для геологических исследований, устанавливают до 48 вибраторов. Аналогичную аппаратуру используют при исследованиях разнообразных конструкций. В этом случае электрические сигналы от датчиков, установленных в различных точках исследуемого устройства (вагон, самолет, автомобиль, станок и т. д.), подводят к шлейфовому осциллографу, изображения в котором обыкновенно фотографируют, а затем расшифровывают.

На принципе выталкивания проводника с током из магнитного поля работают моторы постоянного тока. В моторах имеется неподвижная часть – статор и вращающаяся – ротор. В статоре создается магнитное поле, а по виткам, намотанным на ротор, протекает ток. Появляющаяся при этом сила вращает ротор мотора.

#### 4.9. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ С ТОКОМ

Рассмотрим магнитное поле, образуемое двумя параллельными проводниками, по которым протекают токи. Пусть по каждому проводнику течет ток в одном направлении, например от наблюдателя (рис. 4.10, а). Направ-

ления магнитных силовых линий определяются по правилу буравчика. Как видно из рисунка, при одинаковом направлении токов в проводниках магнитные силовые линии между проводниками направлены в противоположные стороны, поэтому плотность силовых линий между проводниками меньше, чем плотности линий за пределами проводников. Такое распределение магнитных силовых линий приводит к тому, что появляется сила, стремящаяся приблизить проводники друг к другу. Если токи в проводниках направлены в противоположные стороны (рис. 4.10, б), то между проводниками поля складываются, плотность линий становится больше, чем за проводниками, и появляется сила, отталкивающая проводники друг от друга. Таким образом, *если по двум проводникам протекают токи в одном направлении, то электродинамическая сила притягивает проводники друг к другу, а если в разных направлениях, то отталкивает (рис. 4.11). Взаимодействие проводников с током является одним из фундаментальных явлений природы.*

На принципе электродинамического действия тока устроены так называемые токовые весы, представляющие Государственный эталон тока, находящийся во Всесоюзном научно-исследовательском институте метрологии (метрология — наука об измерениях) в Ленинграде. Токовые весы представляют две катушки точно определенных размеров, по которым протекают токи. В соответствии с электродинамическим эффектом подвижная катушка втягивается в неподвижную. Силу втягивания уравнивают гирями, при этом весьма точно рассчитывают ток, протекающий в катушках.

Напомним, что в единицах СИ ампер определяется как сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

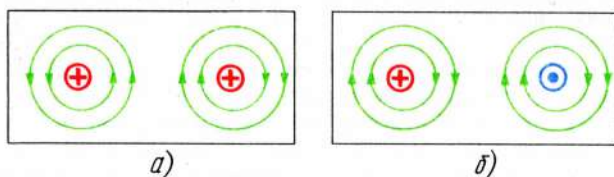


Рис. 4.10

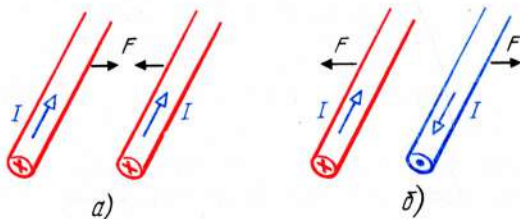


Рис. 4.11



#### 4.10. ЭЛЕКТРОМАГНИТЫ

Как было показано выше, если по катушке протекает ток, то вокруг катушки образуется магнитное поле. Направление этого поля определяют правилом обхвата, которое формулируется следующим образом:

*если правой рукой обхватить катушку так, чтобы четыре пальца были бы направлены по току, то отогнутый большой палец покажет направление магнитного поля* (рис. 4.12, а). Очевидно, что с левой стороны катушки при этом будет северный полюс, а с правой — южный. Если в катушку ввести ферромагнитный сердечник (рис. 4.12, б), то поле между полюсами сердечника значительно усиливается. Получившееся устройство называют *электромагнитом*. Сердечники электромагнитов изготавливают из магнитомягких материалов; это делается для того, чтобы при выключении тока сердечник оставался ненамагниченным. С помощью электромагнитов можно регулировать силу притяжения в широких пределах. В технике связи получили большое распространение конструкции, работающие на принципе электромагнитов. Для электромагнитов со стержневой формой сердечника сила притяжения (подъемная сила)  $F = (B^2 S / 8\pi) 10^7$ , а для подковообразной —  $F = (B^2 S / 4\pi) 10^7$ , где  $F$  — сила, Н;  $B$  — индукция, Тл;  $S$  — площадь сердечника,  $\text{м}^2$ .

#### 4.11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

В 1831 г. английский физик Майкл Фарадей сделал важное открытие. Им было установлено, что если магнитные силовые линии пересекают проводник, то в проводнике наводится электродвижущая сила. Это явление было названо *электромагнитной индукцией*. Направление индуцированной в проводнике ЭДС определяется правилом правой руки, которое формулируется следующим образом: *если расположить правую руку так, чтобы магнитные силовые линии входили в ладонь, отогнутый большой палец показывал направление движения проводника, то вытянутые четыре пальца покажут направление индуцированной в проводнике ЭДС* (рис. 4.13). Эта ЭДС определяется из выражения

$$e = Blv \sin \alpha, \quad (4.5)$$

где  $e$  — ЭДС, В;  $B$  — магнитная индукция, Тл;  $v$  — механическая скорость, м/с;  $\alpha$  — угол между направлением вектора магнитной индукции и направлением движения проводника. Из данной формулы видно, что при вращении в магнитном поле проводника по окружности с равномерной скоростью

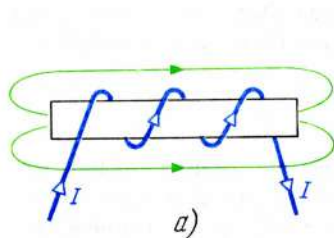


Рис. 4.12

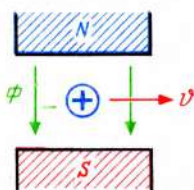
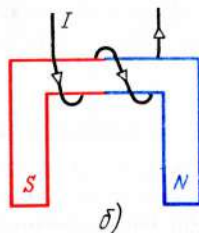


Рис. 4.13



наводимая в проводнике ЭДС, изменяется по синусоидальному закону, поскольку  $B$ ,  $l$  и  $v$  — величины постоянные и изменение ЭДС во времени, следовательно, определяется членом  $\sin \alpha$ . По этому принципу работают, в частности, на электростанциях генераторы, преобразующие механическую или тепловую энергию в электрическую, используемую в энергетических целях.

Электромеханический генератор — пример технического устройства очень большой мощности, работающего на принципе электромагнитной индукции. Но в технике широко используются устройства, работающие на этом же принципе, но с ничтожно малыми мощностями. Например, современный звукоосниматель представляет крошечный магнитик, вокруг которого имеется также весьма маленькая катушка. Держатель магнита жестко соединен с иглой, которая при вращении патефонной пластинки колеблется в соответствии с изгибами звуковой дорожки на диске. Происходит аналогичный процесс: игла, а вместе с ней и магнитик колеблется по закону изгибов бороздки диска, при этом в катушке наводится ЭДС, мгновенные значения которых повторяют закон, по которому изгибается звуковая дорожка. Электродвижущая сила, наводимая в катушке звукооснимателя, подается на усилитель и громкоговоритель. В магнитофоне магнитная лента перематывается с одной катушки на другую и при этом касается магнитных головок, представляющих катушку с сердечником из специального высокочастотного материала. На магнитную ленту наложен тонкий слой магнитного порошка. При записи на ленту магнитный слой намагничивается по закону записываемой информации (например, музыка, речь, а в видеомэгнитофонах также и изображение). При воспроизведении магнитный поток движущейся ленты пересекает витки катушки магнитной головки, в которой опять-таки наводится ЭДС.

Аналогичным образом работают и микрофоны электродинамического типа. Воздух колеблет диффузор, на котором укреплена катушка, находящаяся в поле постоянного магнита, в витках катушки наводится ЭДС, повторяющая закон движения диффузора.

Электродвижущая сила, наводимая в катушках электромагнитного звукооснимателя или магнитофона — очень мала, всего единицы микровольт  $(2-5) \cdot 10^{-6}$  В, в электродинамических микрофонах — несколько большая. Мощности, развиваемые в подобных "генераторах", измеряются долями микроватт (мкВт). Таким образом, диапазон мощностей различных технических устройств отличается на много порядков (от тысяч киловатт в промышленных генераторах до долей микроватт в электронных устройствах), но принцип действия всех названных устройств один и тот же — это электромагнитная индукция экспериментально открытая Фарадеем и описанная математически крупнейшим английским физиком Джеймсом Максвеллом (1831 — 1879).

#### 4.12. ЗАКОН ЛЕНЦА

Рассмотрим процессы, происходящие в проводнике, замкнутом на некоторое сопротивление при пересечении этого проводника магнитным полем. Известный русский физик, академик Э. Х. Ленц (1804 — 1864), основываясь на законе сохранения энергии, установил правило, названное его именем,

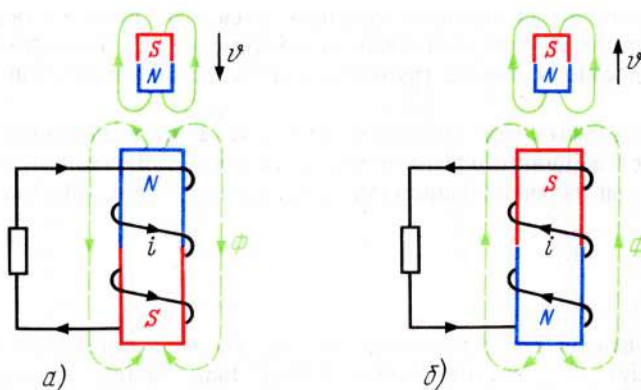


Рис. 4.14

смысл которого состоит в том, что ЭДС, наводимая в замкнутом проводнике, имеет такое направление, при котором ток, образованный этой ЭДС, создает магнитное поле, препятствующее изменению основного магнитного поля, вызвавшего ЭДС в проводнике. Разберем это правило на примере схемы, показанной на рис. 4.14. Пусть сначала магнитного поля около катушки не было. Тогда магнитные силовые линии не пересекали витки катушки, ЭДС и ток в них отсутствовали. Станем теперь приближать к катушке постоянный магнит, например северным полюсом к катушке. По мере приближения магнита его магнитное поле начинает пересекать витки катушки и в витках наводится ЭДС. Поскольку до приближения магнита около катушки магнитного поля не было, а с приближением магнита это поле стало нарастать, ток в катушке должен протекать в таком направлении, при котором создается препятствие увеличению магнитного поля около катушки. Но для этого магнитное поле тока должно иметь направление, при котором в верхней части катушки оказывается полюс, одноименный с полюсом постоянного магнита, в данном случае — северный. Тогда оба поля будут направлены навстречу друг другу и общее поле окажется меньше поля постоянного магнита. Полярность магнитного потока и направление тока в катушке связаны правилом обхвата (см. § 4.10). Направление токов и потоков, получающихся при приближении магнита, показаны на рис. 4.14, а.

Если от катушки отодвигать постоянный магнит, то его поле станет убывать, в этом случае поле катушки должно иметь направление, компенсирующее убывание магнитного поля постоянного магнита, т. е. в верхней части катушки теперь должен оказаться южный полюс (рис. 4.14, б). Представление, что по закону Ленца индуцированный ток имеет магнитное поле, всегда направленное навстречу основному полю, вызвавшему этот ток, совершенно неверно. Индуцированный ток создает поток, направленный не против основного потока, а против изменения этого основного потока, что совершенно не одно и то же.

Нарастающему потоку индуцированный ток препятствует, а спадающему, наоборот, помогает. Закон Ленца, в сущности, есть разновидность всеобщего физического закона об инерционности систем. Как известно из курса физики, всякое тело стремится сохранить то состояние, в котором оно находится: если тело неподвижно, то оно стремится сохранить состояние



относительного покоя, но если тело находится в состоянии движения, то стремится двигаться прямолинейно и равномерно. (Вспомните задачу о вагоне или поезде, который трудно разогнать, но не менее трудно остановить.)

Электродвижущая сила индукции возникает в проводнике во всех случаях, когда проводник сцеплен с изменяющимся магнитным потоком. В общем случае при наличии неоднородного магнитного поля ЭДС, наводимая в катушке,

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.6)$$

где  $e$  — мгновенная ЭДС в катушке;  $\Phi$  — закон изменения магнитного потока во времени;  $w$  — число витков катушки. Знак "минус" отражает физическую сущность закона Ленца, выражение  $d\Phi/dt$  представляет скорость изменения магнитного потока.

Таким образом, *электродвижущая сила магнитной индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пересекающего проводник*. Так как произведение числа витков  $w$  на магнитный поток  $\Phi$  называется потокосцеплением  $\psi$ , то формулу ЭДС индукции можно представить в виде

$$e = -d\psi/dt, \quad (4.7)$$

т. е. электродвижущая сила магнитной индукции равна скорости изменения потокосцепления.

Электродвижущая сила, наводимая в контуре, не зависит от материала, из которого контур выполнен. В частности, уравнение (4.7) справедливо не только для проводников, но и для диэлектриков. В проводящей среде индуцированная ЭДС вызывает ток проводимости, а в диэлектриках — ток смещения. Напомним, что под *током смещения* понимается изменение напряженности электрического поля во времени.

Следует обратить внимание, что *если магнитный поток не изменяется, то производная  $d\Phi/dt$  становится равной нулю, поэтому неизменный магнитный поток ЭДС в проводнике не наводит*. Весьма существенным является то, что *форма индуцированной ЭДС в общем случае отличается от формы переменного магнитного потока, поскольку математические выражения потока и его производной интерпретируются совершенно различными кривыми*.

**Пример 4.4.** Магнитный поток изменяется по закону  $\Phi(t) = At^2 - Bt$ , определить закон изменения ЭДС в катушке, имеющей четыре витка, в интервале  $0 \dots 15$  с, если  $A = 20 \cdot 10^{-3}$  В/с, а  $B = 0,25$  В.

**Решение.** Запишем выражения мгновенных значений магнитного потока  $\Phi$  и ЭДС  $e$   $\Phi(t) = 20 \cdot 10^{-3} t^2 - 0,25 t$ ;  $e(t) = -w (d\Phi/dt) = -4 \frac{d}{dt} [20 \cdot 10^{-3} t^2 - 0,25 t] = -4 (20 \cdot 2 \cdot 10^{-3} t - 0,25) = -4 \cdot 10^{-3} (40t - 250)$ .

Будем подставлять значения  $t = (0 - 2,5 - 5 - 7,5 - 10 - 12,5 - 15)$  с. Результаты расчетов занесем в табл. 4.1 и построим кривые  $\Phi = f(t)$  и  $e = f(t)$  (рис. 4.15).

Из сравнения кривых видно, что законы изменения магнитного потока и наведенной ЭДС совершенно различные. График  $\Phi = f(t)$  имеет весьма сильную кривизну, а график  $e = f(t)$  представляет прямую линию. При  $t =$



Таблица 4.1

$t, c$	$\Phi, мВб$	$e, мВ$
0	0	-1000
2,5	-500	-600
5	-750	-200
6,25	-781,25	0
7,5	-750	200
10	-500	600
12,5	0	1000
15	750	1400

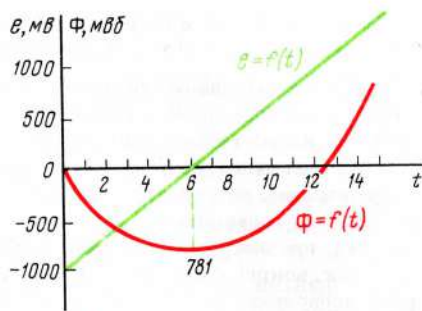


Рис. 4.15

$= 6,25$  с кривая  $\Phi = f(t)$  имеет экстремум, значение ЭДС в этот момент равно нулю, что и должно быть, поскольку в точках с экстремальными значениями функции производная от выражения, описывающая эту кривую, обязательно равна нулю.

#### 4.13. ВИХРЕВЫЕ ТОКИ

Пусть имеется сердечник из металлического материала. Поместим на этот сердечник катушку, по которой пропустим переменный ток. Вокруг катушки окажется переменный магнитный ток, пересекающий сердечник. При этом в сердечнике станет наводиться индуцированная ЭДС, которая, в свою очередь, вызывает в сердечнике токи, называемые *вихревыми*. Эти вихревые токи нагревают сердечник. Так как электрическое сопротивление сердечника невелико, то наводимые в сердечниках индуцированные токи могут оказываться достаточно большими, а нагрев сердечника — значительным. Мощность, затрачиваемая на нагрев сердечника, бесполезно снижает КПД технических устройств электромагнитного типа. Чтобы уменьшить мощность вихревых токов, увеличивают электрическое сопротивление магнитопровода, для этого сердечники набирают из отдельных тонких (0,1 ... 0,5 мм) пластин, изолированных друг от друга с помощью специального лака или окислы. В материал сердечника вводят специальные добавки, также увеличивающие его электрическое сопротивление.

В ряде случаев, применяя вихревые токи, можно использовать технологические операции, которые невозможно применить без токов высокой частоты. Например, при изготовлении вакуумных приборов (радиоламп, кинескопов и т. д.) из баллона необходимо тщательно откачать воздух и иные газы. Однако в металлической арматуре, находящейся внутри баллона, имеются остатки газа, которые можно удалить только после заваривания баллона. Для полного обезгаживания арматуры вакуумный прибор помещают в поле высокочастотного генератора, в результате действия вихревых токов арматура нагревается до сотен градусов, остатки газа при этом нейтрализуются.

Множество металлических деталей (например, шестерни, коленчатые валы и пр.) должны быть закаленными по поверхности. Такая закалка производится также токами высокой частоты (чем выше частота, тем больше ЭДС вихревых токов и тем сильнее нагрев). С помощью вихревых токов сваривают различные диэлектрики (пластмассы и пр.). Чаще всего вихревые токи, образующиеся в устройствах, работающих на промышленной частоте 50 Гц, вызывают нежелательные явления. Для получения полезного эффекта используют, как правило, токи с большими частотами (десятки — сотни кГц, иногда даже мегагерцы, например при сушке древесины, обработке пластмасс). Для быстрого приготовления пищи используются генераторы с еще более высокими частотами (так называемые "микроволновые печи").

#### 4.14. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Пусть в однородном магнитном поле находится проводник, замкнутый на резистивное сопротивление  $R$ , а внешняя механическая сила передвигает проводник со скоростью  $v$ , например слева направо (рис. 4.16). Проводник при этом пересекает магнитные силовые линии, поэтому в нем наводится ЭДС  $E$ , а так как проводник замкнут на сопротивление, то в образовавшейся цепи будет протекать ток, направление которого, так же, как и направление ЭДС, определяется правилом правой руки. Как видно из рисунка, ток оказывается направленным от наблюдателя. Но как только по цепи потечет ток, вокруг проводника образуется свое магнитное поле, при этом с правой стороны проводника (см. рис. 4.16) магнитные силовые линии оказываются идущими в одну сторону с полем постоянного магнита, а с левой – противоположные. При этом появляется сила  $F_{\text{выт.}}$ , стремящаяся вытолкнуть проводник из магнитного поля. Выталкивающая сила всегда направлена из области, где магнитные силовые линии имеют густоту большую, в ту область, где густота магнитных силовых линий меньшая. В данном случае проводник будет испытывать силу, стремящуюся вытолкнуть проводник в левую сторону, т. е. в направлении, противоположном направлению движения проводника. Направление выталкивающей силы можно было бы определить и по правилу левой руки, результат, разумеется, получился бы тем же самым. Таким образом, при перемещении проводника в магнитном поле приходится преодолевать сопротивление выталкивающей силы, причем чем больше ток, текущий в проводнике, тем больше эта противодействующая сила. Иначе, конечно, и быть не могло. Раз в электрической цепи совершается работа, значит должна затрачиваться какая-то энергия, в противном случае, закон сохранения энергии был бы нарушен, чего быть, естественно, не может.

Механическая мощность, затрачиваемая на передвижение проводника в магнитном поле  $Fv$ , равна электрической мощности, вырабатываемой в генераторе,  $EI$ , откуда  $F = EI/v$ . Итак, устройство, в котором проводники пересекают магнитное поле, представляет преобразователь механической энергии в электрическую и обратно. Следует иметь в виду, что электрический генератор и электрический мотор – устройства обратимые. В каждом из них имеется магнитное поле и проводники, способные пересекать это поле. Если к проводникам (якорю) подвести напряжение от некоторого источника электрической энергии, то якорь станет вращаться, в этом случае машина станет преобразовывать электрическую энергию в механическую. Но если с помощью какого-то внешнего механического источника вращать якорь, то эта же машина будет работать, как генератор, т. е. преобразовывать энергию механическую в электрическую.

#### 4.15. ИНДУКТИВНОСТЬ

Как было показано в предыдущих главах при наличии электрического тока всегда оказывается магнитное поле. Однако значение этого поля зависит от конфигурации проводников или конструкции катушки, по которой

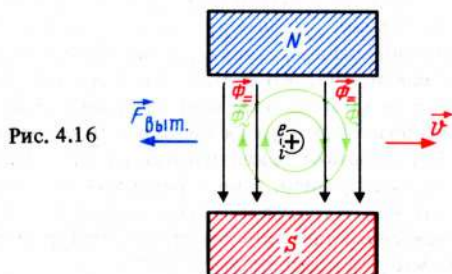


Рис. 4.16



этот ток протекает. Наименьшее поле получается у одиночного проводника. Если же проводник свернуть в витки катушки, то поле при этом же токе значительно возрастает; если в катушку ввести сердечник из магнитного материала, то магнитное поле возрастает еще более.

Следовательно, необходимо иметь параметр, который показывал бы значение поля при некотором, вполне определенном токе, иначе говоря, коэффициент пропорциональности между током и магнитным потоком. Такой коэффициент пропорциональности называют *индуктивностью* проводника (катушки) и обозначают большой буквой  $L$  (читается "эль"). Поскольку воздух невозможно насытить, в катушках без сердечника магнитный поток всегда пропорционален току, индуктивность катушки при изменении тока остается постоянной:

$$\Phi = LI, \text{ откуда } L = \Phi/I. \quad (4.8)$$

Определим размерность индуктивности:  $[L] = \text{Вб}/\text{А} = \text{В} \cdot \text{с}/\text{А} = \text{с} \cdot \text{Ом}$ . Ранее (см. § 4.3) было показано, что произведение  $\text{с} \cdot \text{Ом}$  называется генри (обозначается Гн). Таким образом, индуктивность измеряется в генри, или производных — мГн (миллигенри =  $10^{-3}$  Гн) и мкГн (микрогенри =  $10^{-6}$  Гн). Других приставок с единицей Гн на практике не употребляют. Генри — довольно крупная единица, хотя в низкочастотных устройствах индуктивность некоторых катушек бывает более одного генри, однако изготавливать катушки с такой индуктивностью довольно сложно. В электронных цепях чаще всего используются катушки с индуктивностями значительно менее 1 Гн. Как следует из (4.8), индуктивностью 1 Гн называется индуктивность такой катушки, в которой при протекании тока 1 А образуется магнитный поток 1 Вб. Если в катушку ввести сердечник из магнитного материала, то магнитное сопротивление уменьшится, поток возрастет, а следовательно, увеличится и индуктивность катушки. Магнитное сопротивление цепи при внесении в катушку замкнутого сердечника уменьшается в  $\mu_r$  раз, поэтому в такое же число раз увеличивается магнитный поток и индуктивность катушки. Следовательно, *относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  представляет число, показывающее, во сколько раз увеличивается индуктивность катушки при введении в нее замкнутого сердечника из данного материала.*

В некоторых случаях индуктивность катушки можно рассчитать, хотя чаще ее измеряют экспериментально, о чем будет сказано ниже. Приводим расчетные формулы для некоторых частных случаев.

Индуктивность одиночного уединенного провода  $L$  определяется из выражения

$$L \text{ (мкГн)} = 2l \left( 2,3 \lg \frac{4l}{d} - 0,75 \right) \cdot 10^{-3}, \quad (4.9)$$

где  $l$  — длина провода, см;  $d$  — диаметр провода, см. Приближенно можно считать, что 1 м уединенного проводника имеет индуктивность 2 мкГн.

Индуктивность длинного одиночного горизонтального провода, подвешенного над землей, рассчитывается по формуле

$$L \text{ (мкГн)} = 4,6l [\lg(4h/d)] \cdot 10^{-3}, \quad (4.10)$$

где  $l$  — длина провода, см;  $d$  — диаметр провода, см;  $h$  — высота подвеса провода над землей, см.



Индуктивность двухпроводной линии из двух параллельных проводников (при  $l \gg D$ )

$$L \text{ (мкГн)} = 9,2 l [\lg (2D/d)] \cdot 10^{-3}, \quad (4.11)$$

где  $l$  – длина проводников, см;  $D$  – расстояние между проводами, см;  $d$  – диаметр провода, см. Индуктивность коаксиального кабеля

$$L \text{ (мкГн)} = 2l (2,3 \lg \frac{D}{d} + m) \cdot 10^{-3}, \quad (4.12)$$

где  $l$  – длина кабеля, см;  $D$  – диаметр оплетки, см;  $d$  – диаметр внутренней жилы, см. При низких частотах  $m = 0,25$ , при высоких  $m = 0$ .

Покажем вывод формулы для определения индуктивности катушки, намотанной на замкнутый сердечник (рис. 4.17):

$$L = \psi/I = \Phi w/I = BS w/I.$$

$$\text{Так как } B = \mu_a H = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r I w/l, S = \pi D^2/4,$$

$$\text{то } L = \frac{\mu_0 \mu_r I w \pi D^2 w}{l_{\text{ср}} I \cdot 4} = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \mu_r w^2 \pi D^2}{4 l_{\text{ср}}}.$$

Известно, что  $\pi^2 = 9,8696 \approx 10$ , поэтому

$$L = \frac{\mu_r w^2 D^2}{l_{\text{ср}}} 10^{-6} \text{ (Гн)} = \frac{\mu_r w^2 D^2}{l_{\text{ср}}} \text{ (мкГн)}, \quad (4.13)$$

где  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость;  $w$  – число витков;  $D$  – диаметр магнитопровода, м;  $l_{\text{ср}}$  – длина средней линии магнитопровода.

Если  $l$  и  $D$  выразить не в метрах, а в сантиметрах, то формула принимает вид:

$$L \text{ (мкГн)} = (\mu_r w^2 D^2_{\text{(см)}}/l_{\text{(см)}}) \cdot 10^{-2}. \quad (4.14)$$

Индуктивность однослойной катушки без сердечника

$$L \text{ (мкГн)} = k w^2 D^2_{\text{(см)}}/l_{\text{ср}} \text{ (см)}, \quad (4.15)$$

где  $D$  – диаметр катушки;  $l_{\text{ср}}$  – длина намотки (рис. 4.18);  $k$  – коэффициент, зависящий от отношения  $l/D$ , берется из табл. 4.2.

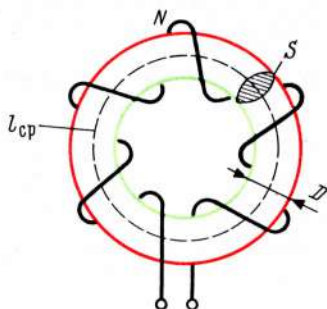


Рис. 4.17

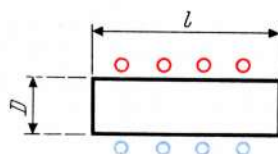


Рис. 4.18

Таблица 4.2

$l/D$	0,1	0,5	1	5	10
$k$	0,2	0,5	0,8	0,9	1

При  $l/D \geq 10$   $k = 1$ .

#### 4.16. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШЕК С НЕЗАМКНУТЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

Широкое распространение имеют катушки, в которые введен магнитный сердечник длиной, равной или несколько меньшей длины намотки. Такие сердечники называют незамкнутыми. Индуктивность катушек с незамкнутыми сердечниками больше, чем у катушек без сердечника, но меньше, чем у катушек с замкнутым сердечником. При расчете индуктивностей этих катушек приходится вводить понятие относительной эффективности магнитной проницаемости  $\mu_{r\text{эфф}}$ . Под этой величиной понимается такая магнитная проницаемость, которая была бы у замкнутого сердечника с таким же магнитным сопротивлением, как и у данного, незамкнутого сердечника. Значение  $\mu_{r\text{эфф}}$  зависит от начальной магнитной проницаемости  $\mu_r$  и отношения  $l/d$ . Кривые  $\mu_{r\text{эфф}} = f(l/d)$  для некоторых распространенных типов ферритов приведены на рис. 4.19, а.  $L (\text{мкГн}) = \mu_{r\text{эфф}} L' w^2 d$ , где  $L'$  — поправочный коэффициент, зависящий от отношения  $l/d$ , берется из рис. 4.19, б;  $d$  — диаметр катушки, см.

Если длина намотки больше диаметра катушки в 5–10 раз, то индуктивность катушки с незамкнутым сердечником возрастает примерно в  $10/d$  раз, т. е.

$$L_H = L_6 (10/d), \quad (4.16)$$

где  $L_6$  — индуктивность катушки без сердечника.

При использовании ферритовых сердечников распространенных типов индуктивность возрастает приблизительно, в 30–50 раз:

$$L_H \approx (30 - 50) L_6.$$

Индуктивность катушек пропорциональна квадрату числа витков, поэтому в катушках с  $l/d = 5-10$  при введении ферритовых сердечников число витков можно уменьшить в 5–7 раз при неизменной индуктивности, что по множеству причин, которые будут показаны ниже, чрезвычайно желательно.

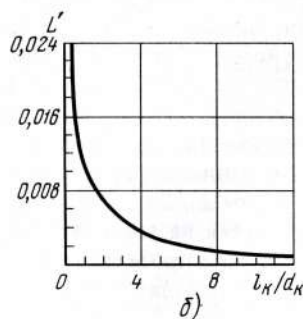
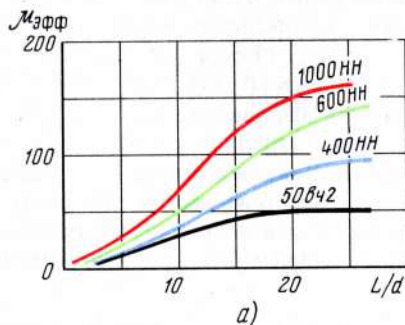


Рис. 4.19

При изучении цепей с индуктивными элементами следует помнить, что термин "индуктивность" может употребляться как название: 1) идеализированного элемента электрической цепи, 2) параметра, количественно характеризующего свойства этого элемента и 3) основного параметра индуктивной катушки.

#### 4.17. СВЯЗЬ МЕЖДУ МГНОВЕННЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ТОКАМИ В ИНДУКТИВНОСТИ

Если по катушке (проводнику) протекает изменяющийся во времени ток  $i$ , то вокруг катушки (проводника) образуется переменный магнитный поток  $\Phi$ , который, изменяясь, наводит в витках этой же катушки (проводнике) переменную во времени ЭДС. Эту наведенную ЭДС называют ЭДС самоиндукции и обозначают  $e_L$ . Мгновенные ЭДС  $e_L$  связаны с мгновенными значениями магнитного потока  $\Phi$  соотношением  $e_L = -d\Phi/dt$ . Но  $\Phi = Li$ , следовательно,  $e_L = -\frac{d}{dt}[Li]$ . В тех режимах, при которых относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  остается постоянной, индуктивность  $L$  также постоянна, следовательно, множитель  $L$  можно вынести за знак производной, т. е.  $e_L = -L\frac{di}{dt}$ . По второму закону Кирхгофа напряжение на зажимах цепи в каждый момент равно по значению и противоположно по знаку ЭДС, имеющейся в цепи, следовательно,  $u_L = -e_L$ , откуда

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad (4.17)$$

Полученное выражение связывает мгновенные значения тока в цепи с мгновенными значениями напряжения на зажимах катушки. Из него следует, что напряжения на зажимах катушки пропорциональны не току, а скорости изменения тока; в тех случаях, когда ток не изменяется, напряжение на индуктивном элементе равно нулю, вне зависимости от значения тока. Медленно изменяющийся ток вызывает малое падение напряжения  $u_L$ , а быстро изменяющийся — большое. Для определения размаха напряжения на катушке важнейшее значение приобретают понятия "скорость нарастания фронта сигнала" и "крутизна фронта сигнала". Например, ток в катушке изменяется от 0 до 100 мА в одной цепи за 0,5 мс, а в другой — за 5 мс при прочих равных условиях. Очевидно, что скорость нарастания тока в первом случае в 10 раз больше, чем во втором, поскольку для достижения одного и того же значения тока потребовалось в 10 раз меньшее время. Под крутизной характеристики тока понимается отношение приращения тока к приращению времени  $\Delta i/\Delta t$ , т. е. величина, пропорциональная тангенсу угла наклона фронта сигнала (рис. 4.20). Очевидно, что  $\operatorname{tg} \alpha_1 \sim \Delta i/\Delta t_1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 \sim \Delta i/\Delta t_2$ . Очень важным является то обстоятельство, что форма напряжения на зажимах катушки индуктивности в общем случае отличается от формы протекающего тока, поскольку кривые функции и ее производной не совпадают друг с другом.

**Пример 4.5.** Определить в интервале 0 ... 1000 мс закон изменения напряжения на катушке индуктивностью 0,5 Гн, если ток в катушке изменяется по закону  $i = e^{-t}$  —



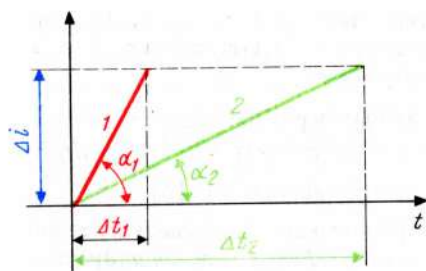


Рис. 4.20

Таблица 4.3

$t, \text{мс}$	0	250	500	693	750	1000
$i, \text{мА}$	0	172	238	249	249	232
$u_L, \text{мВ}$	500	217	64,5	0	-13	-47

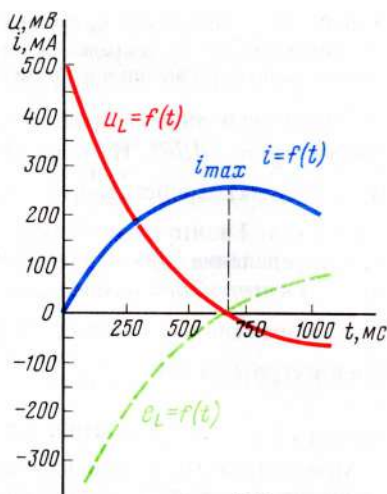


Рис. 4.21

—  $e^{-2t}$  (напомним, что буквой  $e$  обозначается основание натурального логарифма,  $e = 2,718$ ).

Решение. Напишем выражение  $u_L = f(t)$ , произведем преобразования, подставим числовые значения. Результаты расчетов занесем в табл. 4.3.

Кривые  $i = f(t)$  и  $u_L = f(t)$  показаны на рис. 4.21. Проанализируем получившиеся кривые. В начальный момент (при  $t = 0$ ) мгновенное значение тока равно нулю, но напряжение на индуктивности не только не равно нулю, но, наоборот, имеет наибольшее значение. (Не путать индуктивные цепи с резистивными. В резистивных цепях мгновенные напряжения и токи пропорциональны друг другу  $u = Ri$ . В таких цепях при нулевом токе действительно будет нулевое напряжение. В индуктивных цепях это совершенно не так, поскольку в цепи мгновенные напряжения и токи связаны не линейной зависимостью, а через производную  $u_L = L di/dt$ . В индуктивных цепях мгновенные напряжения пропорциональны не значению тока, а скорости его изменения, на что неоднократно указывалось выше.)

По мере увеличения времени скорость нарастания тока уменьшается, это означает, что за одно и то же время ток изменяется на меньшее значение. Например, в интервале  $0 \dots 250$  мс ток изменился от 0 до 175 мА, т. е. на 175 мА. В интервале  $500 \dots 750$  мс, т. е. также за 250 мс, ток изменился от 172 до 249 мА, т. е. всего на 77 мА. Скорость изменения тока заметно уменьшилась, поэтому и напряжения на катушке стали так же значительно меньшими. При  $t = 693$  мс ток вообще не изменяется, и напряжение на катушке в этот момент равно нулю. В интервале  $0 \dots 693$  мс ток нарастал, следовательно, ЭДС  $e_L$ , наводимая в катушке, имела такой знак, при котором ток, вызванный индуцированной ЭДС, имел направление, противоположное току, вызвавшему эту ЭДС. Таким образом, при нарастании тока ЭДС  $e_L$  имела противоположное направление и была отрицательной, а внешнее напряжение  $u_L$ , уравновешивающее ЭДС  $e_L$ , — положительным. В момент, при котором ток по абсолютному значению был максимальным (в данном примере при  $t = 693$  мс), изменение тока не происходило, и ЭДС  $e_L$ , а следовательно, и внешнее напряжение  $u_L$  равнялись нулю. В последующие интервалы времени ток уменьшался, наводимая ЭДС в соответствии с законом Ленца имела такое направление, при котором ток от наведенной ЭДС имел такое же направление, как и ток, вызвавший наводимую ЭДС. При этом индуцированный ток "поддерживал"

убывающий основной ток  $i$ , таким образом, препятствовал его изменению. Знак индуцированной ЭДС  $e_L$  совпадал со знаком основного тока, т. е. был положительным, а уравновешивающее внешнее напряжение – отрицательным.

Аналогично можно проанализировать любые кривые, построенные по закону  $u_L = L di/dt$ . Из выражения  $u_L = L di/dt$  следует, что  $L = u_L dt/di$ . Проверим размерность индуктивности из данного уравнения:  $[L] = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{с} \cdot \text{Ом} = \text{Гн}$ , что было получено и ранее. Из последнего уравнения удобно дать определение единицы индуктивности – генри. *Генри – такая индуктивность, в которой при изменении тока на 1 А в 1 с наводится ЭДС 1 В.*

Из выражения  $u_L = L di/dt$  следует, что  $i = \frac{1}{L} \int u_L dt + I_0$ , где  $I_0$  – постоянная интегрирования.

#### 4.18. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Мгновенная мощность индуктивности  $p_L$  определяется произведением мгновенных значений напряжения  $u_L$  и тока  $i$ :

$$p_L = i u_L = i L di/dt.$$

Мощность  $p_L$  может быть положительной (знаки  $u_L$  и  $i$  одинаковые), или отрицательной (знаки  $u_L$  и  $i$  – различные). В то время, когда мгновенная мощность  $p_L$  положительна, индуктивность потребляет энергию от других источников и накапливает ее в виде магнитного поля. В те моменты, когда  $p_L < 0$ , индуктивность отдает во внешнюю цепь ранее запасенную энергию. Энергия, запасенная в индуктивности при возрастании тока от 0 до значения  $I$ ,

$$W_L = \int_0^t p_L dt = \int_0^t i u_L dt = \int_0^t i L \frac{di}{dt} dt = L \int_0^t i di = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI^2}{2}. \quad (4.18)$$

Таким образом, запас магнитной энергии в индуктивности пропорционален квадрату тока, протекающего через нее. Наличие магнитного поля, в частности, дает возможность иметь напряжения, отличные от нуля, при токе, равном нулю (см. рис. 4.21).

#### 4.19. БИФИЛЯРНАЯ НАМОТКА

В ряде случаев необходимо иметь катушку с резистивным сопротивлением, но не обладающую индуктивностью, например для магазинов сопротивлений, добавочных сопротивлений к измерительным приборам и т. д.

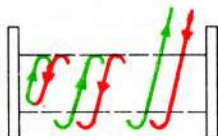


Рис. 4.22

В таких случаях обмотку выполняют бифилярным способом. Это означает, что катушки наматывают двумя проводами, по которым токи текут в противоположные стороны (рис. 4.22). При бифилярной обмотке индуктивность катушки значительно уменьшается, но увеличивается паразитная емкость, уменьшается пробивное напряжение, усложняется конструкция катушки. Иногда прибегают к еще более сложным видам намотки. Например, для уменьшения паразитной междувитковой емкости катушки делают секционированными или намотку выполняют с "принудительным шагом", т. е. накладывают витки на некотором расстоянии друг от друга.

#### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется магнитным полем, какими свойствами оно обладает?
2. Какова связь между электрическим током и магнитным полем? В чем сущность правила буравчика?
3. Что называют напряженностью магнитного поля? В каких единицах она измеряется?
4. Получите выражение магнитного сопротивления цепи. В каких единицах оно измеряется?
5. Произведите сравнение электрических и магнитных величин. Сравните их размерности.
6. Что называют абсолютной и относительной магнитной проницаемостями?
7. Что называют магнитной индукцией? Какова ее связь с магнитным потоком и напряженностью магнитного поля?
8. Как изменяется магнитная проницаемость материала в зависимости от напряженности магнитного поля?
9. Что называют основной кривой намагничивания и гистерезисным циклом? Приведите примеры для различных материалов.
10. Что называют остаточной магнитной индукцией и коэрцитивной силой?
11. Как взаимодействуют магнитное поле и проводник с током, находящийся в этом поле? В чем состоит правило левой руки?
12. Докажите, что магнитная индукция измеряется в  $\text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ .
13. Какие Вы знаете технические устройства, основанные на взаимодействии магнитного поля и проводника с током?
14. Каким образом взаимодействуют два параллельных проводника, по которым протекают токи?
15. Дайте определение току 1 А.
16. Как работают электромагниты?
17. Что называют электромагнитной индукцией? Приведите примеры технических устройств, использующих явление электромагнитной индукции?
18. В чем сущность закона Ленца?
19. Как связаны между собой ЭДС, магнитный поток и время?
20. Какие токи называют вихревыми? Приведите примеры их технического использования?
21. Какую работу совершает проводник, замкнутый на сопротивление при перемещении его в магнитном поле?
22. Что называется индуктивностью? Каким образом она рассчитывается?
23. Как связаны между собой мгновенные значения напряжений и токов в индуктивности?
24. Как рассчитать энергию магнитного поля?



Пассивные электрические цепи состоят из резисторов, конденсаторов и катушек индуктивностей. Резисторы обладают электрическим сопротивлением  $R$ , конденсаторы — емкостью  $C$ , катушки — индуктивностью  $L$ . Резисторы при протекании через них электрического тока не накапливают энергию, а конденсаторы и катушки — накапливают. В конденсаторах приложенное электрическое напряжение образует электрическое поле, а в катушках протекающий ток — магнитное, поэтому резисторы называют *неэнергоемкими*, а конденсаторы и катушки — *энергоемкими* элементами. В резисторах электрический ток необратимо переходит в тепловую энергию, но без образования каких-либо полей. В конденсаторах и катушках индуктивности образуются обратимые поля, но не происходит выделения тепла. Конденсаторы и катушки индуктивности часто называют также *накопителями энергии*.

В резистивных линейных элементах, обладающих сопротивлением  $R$ , мгновенные напряжения  $u$  и токи  $i$  пропорциональны друг другу, связь между ними определяется законом Ома. Поскольку пропорциональность между  $u$  и  $i$  соблюдается в любой момент, то *формы откликов в резистивных цепях повторяют формы воздействий*. Например, к резистивной цепи приложено напряжение прямоугольной формы, следовательно, ток, вызванный этим напряжением, будет иметь также прямоугольную форму. В данном случае приложенное напряжение является воздействием, а появившийся вследствие этого ток — откликом. Если через резистор протекает ток (воздействие) некоторой сложной (например, импульсной) формы, то и падение напряжения, вызванное данным током (отклик), будет иметь такую же импульсную форму. В резистивных цепях закон Ома справедлив для мгновенных ( $u$  и  $i$ ), действующих ( $U$  и  $I$ ), максимальных ( $U_m$  и  $I_m$ ) значений и для размахов ( $U_p$  и  $I_p$ ). На этом основании для  $R$ -цепи (рис. 5.1) можно записать следующие выражения:

$$u = Ri; U = RI; U_m = RI_m; U_p = RI_p.$$

Рассмотрим, каким образом связаны мгновенные напряжения  $u_C$ , имеющиеся на зажимах конденсатора емкостью  $C$ , с током  $i$ , текущим через конденсатор. При постоянном токе заряд  $Q$  есть произведение напряжения  $U$  на емкость конденсатора (см. гл. 1):  $Q = CU$ , но  $Q = It$ , откуда  $It = CU$  или  $I = C(U/t)$ . Если напряжения и токи изменяются во времени, то в формулу вместо постоянного тока  $I$  следует записать мгновенный ток  $i$ , а вместо отно-

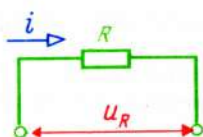


Рис. 5.1

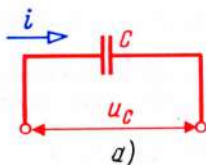
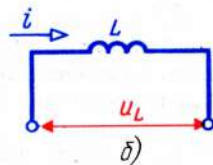


Рис. 5.2



шения конечных величин  $U/t$  — приращения бесконечно малых величин  $\frac{du_C}{dt}$ .

Таким образом мгновенные напряжения и токи в конденсаторах связаны зависимость

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (5.1)$$

Из выражения (5.1) получим формулу для расчета напряжения на конденсаторе  $u_C$ :  $du_C = \frac{1}{C} i dt$ , или, интегрируя обе части равенства,

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt + U_0. \quad (5.2)$$

Объясним появление слагаемого  $U_0$ . Поскольку берется неопределенный интеграл, то в решении имеется постоянная интегрирования, которую в математике обозначают буквой "C" (от слова constant). Но буквой C в электротехнике обозначается емкость, поэтому постоянную интегрирования следует записывать другой буквой. Размерность этого члена может быть только напряжением, поскольку складывать можно члены только с одинаковой размерностью. Следовательно, постоянная интегрирования  $U_0$  представляет то постоянное напряжение, которое могло быть на конденсаторе до прохождения через него переменного тока  $i$ . Если конденсатор предварительно заряжен не был, то  $U_0 = 0$ . Обратим внимание на полную аналогию выражений  $i = C \frac{du_C}{dt}$  и  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ,  $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$  и  $i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$ , из которых следует, что мгновенные токи в конденсаторе изменяются по такому же закону, по которому изменяются мгновенные напряжения в индуктивности, а мгновенные напряжения в конденсаторах аналогичны мгновенным токам в индуктивностях.

Энергия, накапливающаяся в конденсаторах,  $W_C = Cu_C^2/2$  [см. (1, 8)]. Таким образом, в C- и L-цепях мгновенные напряжения и токи связаны выражениями: в C-цепи  $i = C \frac{du_C}{dt}$  (рис. 5.2, а), в L-цепи  $u_L = L \frac{di}{dt}$  (рис. 5.2, б).

Из приведенных соотношений следует, что *мгновенные значения напряжений и токов в энергоемких цепях не пропорциональны друг другу и, следовательно, формы воздействия и отклика различны. В цепях с накопителями энергии мгновенные напряжения и токи не подчиняются закону Ома, но законы Кирхгофа являются справедливыми для любых цепей в любой момент.*

Покажем, каким образом определяют форму откликов в цепях C или L по заданной форме воздействия. В цепи C мгновенный ток, протекающий через конденсатор, в любой момент пропорционален не значению приложенного в этот момент напряжения, а производной по времени этого напряжения. Таким образом, мгновенный ток в конденсаторе будет тем больше, чем больше производная  $du_C/dt$ , т. е. чем сильнее изменение мгновенного напряжения во времени. Производная, как известно, представляет величину, пропорциональную (а не равную!) тангенсу угла наклона между касательной, проведенной в данной точке кривой, и осью переменной величины. Например, в цепи рис. 5.3, а к конденсатору емкостью C приложено напряжение треугольной формы. Определим форму тока в C-цепи. Отметим мо-



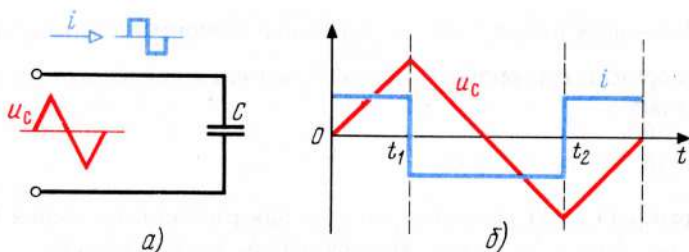


Рис. 5.3

менты  $t_1$  и  $t_2$ , в которые производная  $du_C/dt$  претерпевает изменения. Как видно из рис. 5.3, б, от 0 до  $t_1$  угол наклона характеристики  $u_C$ , а значит тангенс этого угла и производная  $du_C/dt$  остаются неизменными. Следовательно, ток  $i$  в этом интервале оказывается постоянным, т. е., несмотря на изменение напряжения  $u_C$ , значения тока будут одинаковыми. В момент  $t_1$  знак угла скачком изменяется на отрицательный, но абсолютное значение угла остается прежним. Следовательно, ток  $i$  также скачком изменится с положительного на отрицательный и т. д. Следовательно, если к  $C$ -цепи приложить напряжение треугольной формы, то ток будет иметь не треугольную, как было бы в резистивной цепи, а прямоугольную форму.

Если напряжение  $u_C$  имеет пилообразную форму (рис. 5.4), т. е. в интервале  $0 \dots t_1$  напряжение измеряется медленно (угол наклона характеристики, тангенс угла и производная по времени малы), а в интервале  $t_1 \dots t_2$  изменяется быстро (угол наклона, тангенс угла и производная  $du_C/dt$  велики), то токи в эти моменты будут во столько раз больше тока при прямом ходе кривой  $u_C$ , во сколько тангенс угла наклона характеристики  $u_C = f(t)$  при обратном ходе кривой больше аналогичной величины при прямом ходе. Таким образом, пилообразное напряжение в  $C$ -цепи вызывает ток с узкими, короткими, как часто говорят, "выбросами".

Если бы к конденсатору было приложено напряжение идеально прямоугольной формы (рис. 5.5), то в интервале  $0 \dots t_1$  ток равнялся бы 0, так как производная  $du_C/dt$  на данном интервале равна 0. В момент  $t_1$  угол между  $u_C$  и осью времени скачком возрастает до  $90^\circ$ , тангенс угла наклона, а следовательно, и производная (т. е. ток  $i$ ) возрастают до  $\infty$ . Но через время  $t \rightarrow 0$  угол наклона, а следовательно, и ток в цепи становятся снова равными 0.

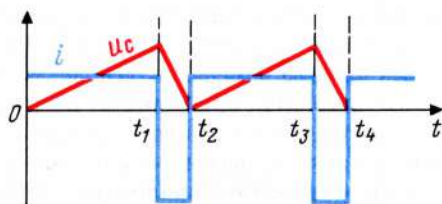


Рис. 5.4

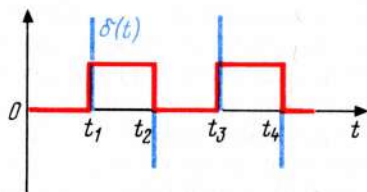


Рис. 5.5



Из изложенного видно, что если бы цепь была бы чисто емкостной, а входное напряжение имело строго прямоугольную форму, то ток представлял бы импульсы бесконечно малой длительности с бесконечно большой амплитудой. Заметим, что такие импульсы называются  $\delta$ -функциями (читается: дельта-функция). В технике связи подобные характеристики часто называют *импульсными*. Поскольку физически создать ток бесконечно большой величины не представляется возможным, то напряжения (или токи) с идеально прямоугольной формой создать также невозможно. Любой физически существующий сигнал прямоугольной формы имеет небольшие скосы фронтов.

В реальных инженерных устройствах качество прямоугольных сигналов оценивается временем нарастания фронта этого сигнала. Чем меньше время, необходимое для достижения максимального значения напряжения  $t_n$  (рис. 5.6, а), тем аппаратура, как правило, совершеннее. Форма тока, получающегося в С-цепи при реальных напряжениях прямоугольной формы, показана на рис. 5.6, б).

Обратим внимание на еще одно весьма важное обстоятельство. Если угол наклона фронта прямоугольного сигнала изменится, например, от  $89^\circ 30'$  до  $84^\circ$ , то ток в цепи уменьшится в 10 раз, поскольку  $\operatorname{tg} 89^\circ 30' = 100$ , а  $\operatorname{tg} 84^\circ = 10$ . Приборы же стрелочных типов практически любых систем не отметят какой-либо разницы в этих сигналах, в то время как ток, вызванный этими двумя напряжениями, будет отличаться на целый порядок. Вот почему производить измерения в электронной аппаратуре следует, как правило, только осциллографами, поскольку, не зная форму воздействующего сигнала, в большинстве случаев нельзя судить и о форме получающихся откликов.

Посчитаем максимальное значение тока, если напряжение на конденсаторе емкостью 0,1 мкФ нарастает от 0 до 10 В за 5 мс. Так как

$$i = C \frac{du}{dt}, \text{ то } i \approx C \frac{\Delta u}{\Delta t} = 0,1 \cdot 10^{-6} \frac{10}{5 \cdot 10^{-3}} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 0,2 \text{ мА} = 200 \text{ мкА}.$$

Столь малый ток в указанном случае является следствием чрезвычайно медленного нарастания фронта напряжения. Если значение  $U_m = 10$  В будет достигнуто за 5 мкс, то  $i = 10^{-7} \frac{10}{5 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ мА}$ , т. е. увеличится в

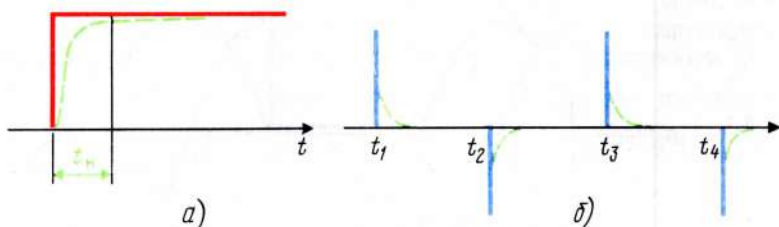


Рис. 5.6

1000 раз. В современной электронной аппаратуре изменение напряжения от 0 до 10 В происходит примерно за  $5 \text{ нс} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ . В этом случае максимальный ток в рассматриваемой цепи достигнет значения  $200 \text{ мА} = 0,2 \text{ А}$ . Таким образом, если время нарастания фронта прямоугольного сигнала уменьшить с 5 мс до 5 нс, то максимальное значение тока увеличится в миллион раз, несмотря на то, что максимальное значение приложенного к емкости напряжения остается одним и тем же (в нашем примере  $U_m = 10 \text{ В}$ ).

Рассмотрим еще пример. Пусть напряжение на входе С-цепи имеет вид однополупериодной кривой (рис. 5.7). Определим форму тока в цепи. В интервале  $0 \dots t_1$  производная  $du_C/dt = 0$ , в момент  $t_1$  угол между касательной к кривой  $u_C$  и осью времени скачком возрастает, но не менее, чем до  $90^\circ$ , поэтому тангенс угла, производная  $du_C/dt$  и ток  $i$  в цепи также скачком возрастает до некоторого конечного значения. По мере изменения времени от  $t_1$  до  $t_2$  угол наклона касательной, а следовательно, и ток уменьшается. В момент  $t_2$  касательная к кривой  $u_C = f(t)$  идет параллельно оси времени, ток становится равным 0 (заметьте, в интервале  $t_1 \dots t_2$  напряжение возрастало, а ток в цепи уменьшался, в момент  $t_2$  напряжение по абсолютному значению наибольшее, а ток при этом оказывается равным 0. Ничего общего с законом Ома!). В интервале  $t_2 \dots t_3$  знак производной меняется от  $t_3$  и далее все повторяется.

Если воздействием является ток  $i$ , а откликом — напряжение  $u_C$ , то расчет производится в соответствии с (5.2). Строить кривую, пропорциональную интегралу от переменной величины, труднее, чем кривую, пропорциональную производной. Кривая  $u_C$  будет иметь такую форму, при которой производная от кривой напряжения  $u_C$  повторяет кривую тока  $i$ . Например, если кривая тока  $i$  имеет прямоугольную форму, то кривая  $u_C$  — треугольную, поскольку производная от сигнала треугольной формы есть сигнал прямоугольной формы. В цепи  $Lu_L = L \frac{di}{dt}$ , а  $i = \frac{1}{L} \int u_L dt$ . Кривые напряжений и токов в индуктивных цепях строятся аналогичным образом. Следует иметь в виду, что все кривые, относящиеся в С-цепях к напряжению, в L-цепях относятся к току, а кривые тока в С-цепях аналогичны кривым напряжения в L-цепях. Это следует из сравнения выражений

$$i = C \frac{du_C}{dt} \text{ и } u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt \text{ и } i = \frac{1}{L} \int u_L dt.$$

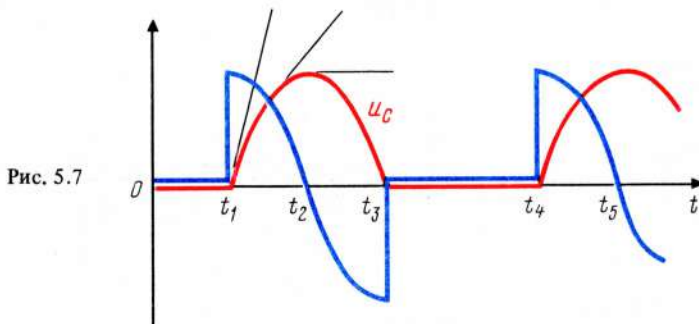


Рис. 5.7

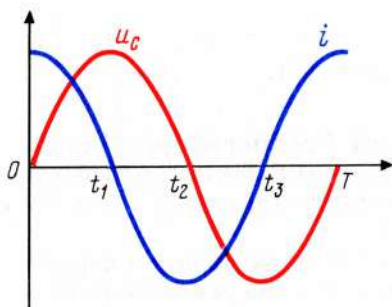


Рис. 5.8

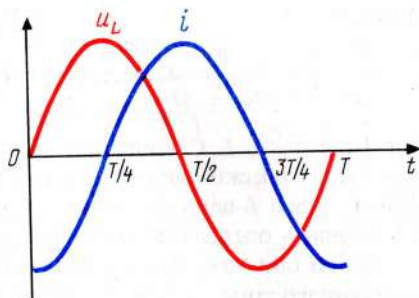


Рис. 5.9

Заметим, что цепи, в которых замена  $C$  на  $L$  позволяет применять те же формулы, если в них  $u$  заменить на  $i$ , называются *дуальными*.

Остановимся на важном частном случае. Определим форму тока в  $C$ -цепи, если ко входу цепи приложено напряжение синусоидальной формы:  $u = U_m \sin \omega t$ . Мгновенные значения тока в этом случае определяются из выражения

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_m \sin \omega t) = \omega C U_m \cos \omega t.$$

Определим размерность множителя  $\omega C U_m$ .

$$[\omega C U_m] = \frac{1 \cdot \text{с} \cdot \text{В}}{\text{с} \cdot \text{Ом}} = \text{В/Ом} = \text{А}.$$

Поскольку множитель  $\omega C U_m$  имеет размерность тока, обозначим его  $I_m = \omega C U_m$ . Известно, что  $\cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$ . Таким образом, если к цепи приложить напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , то ток в цепи окажется  $i = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$ . Значит, в том частном случае, при котором на зажимах конденсатора имеется напряжение синусоидальной формы, ток в этом конденсаторе имеет также синусоидальную форму, но опережает напряжение на четверть периода, т. е.  $90^\circ$  (рис. 5.8). Явление опережения тока на  $90^\circ$  означает, что в тот момент, когда напряжение равно нулю, ток уже достигнет максимума (момент  $t = 0$ ). В момент  $t_1 = T/4$  напряжение только достигает максимума, а ток уже уменьшается до 0, в момент  $t_2 = T/2$  напряжение уменьшается до нуля, а ток уже достигнет минимума и так далее. Заметьте, что и в этом случае ток и напряжение не пропорциональны друг другу, т. е. закон Ома для мгновенных значений является несправедливым. В  $L$ -цепи  $i = \frac{1}{L} \int u_L dt$ . Если напряжение, приложенное к катушке индуктивности, имеет синусоидальную форму:  $u = U_m \sin \omega t$ , то ток в катушке определяется из выражения

$$i = \frac{1}{L} \int U_m \sin \omega t = -\frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ).$$



Так как

$$\left[ \frac{U_m}{\omega L} \right] = \frac{В}{1/с \cdot с \cdot Ом} = А, \text{ то } i = I_m \sin(\omega t - 90^\circ),$$

где  $I_m = U_m / \omega L$ . Следовательно, если к  $L$  или  $C$ -цепям приложить напряжение гармонической формы, то ток в них будет иметь также гармоническую форму, но в  $L$ -цепи он станет отставать от напряжения на  $90^\circ$  (рис. 5.9), а в  $C$ -цепи — опережать на  $90^\circ$  (см. рис. 5.8).

Таким образом, форма приложенного напряжения совпадает с формой вызванного этим напряжением тока только в чисто резистивных цепях. В цепях с емкостями или индуктивностями формы напряжения и тока отличаются друг от друга. При гармоническом воздействии отличие тока от напряжения состоит в том, что эти процессы оказываются с различными начальными фазами. В резистивных цепях при гармоническом воздействии напряжение и ток совпадают по фазе.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В каких цепях закон Ома для мгновенных значений напряжений и токов справедлив и в каких нет?

#### Вопросы 2–9 для $C$ -цепи

2. Докажите, что  $i = C \frac{du_C}{dt}$ .

3. Нарисуйте кривую мгновенных значений тока, если  $u_C = at^2$ , где  $a$  — постоянная величина.

4. Нарисуйте кривую мгновенных значений тока, если напряжение изменяется в соответствии с кривыми, показанными на рис. 5.10 и 5.11.

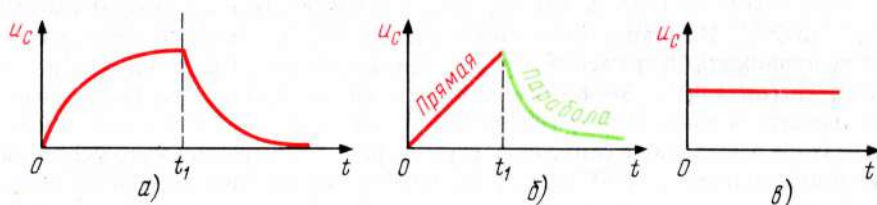


Рис. 5.10

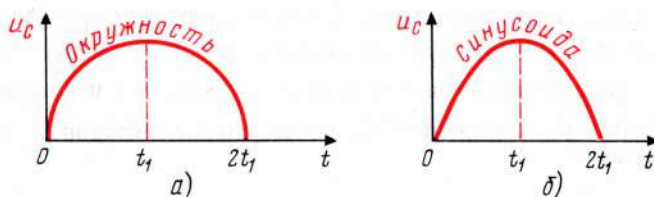


Рис. 5.11

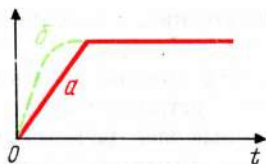


Рис. 5.12

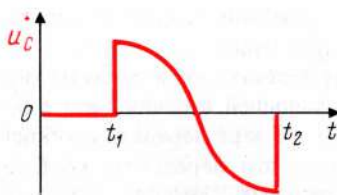


Рис. 5.13

5. Напряжение изменяется в соответствии с кривыми *а* и *б* рис. 5.12. Нарисуйте кривые мгновенных значений тока.

6. Напряжение изменяется по трапециевидному закону. Нарисуйте кривую  $u_C/i$ .

7. Напряжение изменяется по кривой, близкой к прямоугольной. При каком времени нарастания фронта напряжения импульс тока в цепи окажется 10 мА, если  $C = 1$  мкФ?

8. В интервале  $-\pi/3 \dots \pi/3$  периода, напряжение имеет форму тангенсоиды. Рассчитайте и постройте кривую тока в цепи.

9. Какую форму имеет напряжение, если ток в цепи изменяется в соответствии с кривой рис. 5.13, причем, в интервале  $t_1 \dots t_2$  кривая имеет форму косинусоиды?

10. Постройте кривые мгновенных токов и отношений  $u_C/i$  в  $R$ -цепи для напряжений, указанных в пунктах 3–9 данного вопросника.

11. Докажите, что в  $L$ -цепи  $i = \frac{1}{L} \int u_L dt$ .

12. Постройте кривые мгновенных напряжений в  $L$ -цепи, если ток имеет: а) прямоугольную, б) синусоидальную формы. Нарисуйте кривые  $u_L/i$  для обоих случаев.

## Глава 6

## ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### 6.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Как было показано в гл. 2, гармоническими называются напряжения (токи), мгновенные значения которых изменяются по синусоидальному или косинусоидальному законам.

Гармонические колебания представляют частный случай всего многообразия колебаний с различными формами. Однако у гармонических колебаний имеется важная особенность, которой нет ни у каких иных сигналов. Эта особенность состоит в том, что сигнал гармонической формы во всех случаях состоит только из одной частоты  $f = 1/T$ . Сигналы с любыми формами, отличными от гармонической, состоят из нескольких частот, о чем уже упоминалось в гл. 2 и что будет рассмотрено подробно в гл. 10. Вследствие этого с помощью сигналов гармонической формы удобно переносить энергию, но в принципе невозможно передать какую-либо информацию. Промышленные сети переменного тока используют почти исключительно напряжения и токи синусоидальной формы, так как это весьма удобно по множеству причин, хотя в ряде случаев и в энергетических системах исполь-

зуют напряжения (токи), отличные от гармонических, в первую очередь в цепях управления.

В устройствах связи сигналы гармонической формы используются, но в гораздо меньшей степени, чем в энергетических устройствах. Уже в прошлом веке, на заре передачи сообщений с помощью электрических явлений, стало ясно, что передавать сообщения следует сигналами, отличными от синусоидальных. Именно поэтому появился специальный телеграфный код, известный под названием азбуки Морзе, состоящий из комбинаций прямоугольных сигналов с различными длительностями.

В машинных генераторах, устанавливаемых на электростанциях, витки провода вращаются в сильном магнитном поле и в них наводится ЭДС, изменяющаяся по закону, близкому к синусоидальному. Следует, однако, иметь в виду, что использовать сетевое напряжение в качестве источника напряжения синусоидальной формы не представляется возможным, поскольку в кривой сетевого напряжения имеются небольшие ступенчатости, практически не влияющие на работу энергетических устройств (моторов, осветительной или нагревательной аппаратуры и пр.), но вносящие значительные искажения при работе в электронных цепях. Для получения напряжения, изменяющегося точно по синусоидальному закону, используют специальные электронные генераторы, у которых в широких пределах можно изменять выходное напряжение, частоту, а в ряде случаев и внутреннее сопротивление.

## 6.2. ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕМЕННОГО НАПЯЖЕНИЯ (ТОКА) ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Кривые гармонической формы симметричны относительно горизонтальной оси, поэтому максимальные значения ЭДС, напряжений, токов равны половине размаха этих величин, т. е.  $E_m = E_p/2$ ,  $U_m = U_p/2$ ,  $I_m = I_p/2$ . В гл. 2 было показано, что действующее значение ЭДС, напряжений, токов гармонической формы в  $\sqrt{2}$  раз меньше их максимальных значений, т. е.  $E = E_m/\sqrt{2} = 0,707 E_m$ ;  $U = U_m/\sqrt{2}$ ;  $I = I_m/\sqrt{2} = 0,707 I_m$ .

В цепях с гармоническими воздействиями широко используют понятие "фазный угол" или короче "фаза". *Фазой* (фазным углом) называется величина, определяемая частью периода, заключенной между началами двух гармонических колебаний. Фаза измеряется в частях периода, градусах или радианах. Всякая фаза обязательно должна быть "между чем-то и чем-то". Нельзя, например, сказать: "фаза (фазный угол) в такой-то точке". Обязательно следует сказать: "Фазный угол между такими-то точками". (Подобно тому, как не может быть напряжения в некотором проводе, напряжение может быть только между проводами). Если имеется в виду угол между началом колебания и началом координат, то такой угол называют начальным и обозначают греческой буквой  $\psi$  (читается "пси"). Иначе говоря, фазный угол представляет разность начальных фаз двух колебательных процессов. Прибор, показывающий эту разность фаз, называется *фазометром*. Использовать фазометры можно только при гармонических напряжениях и токах. Разность начальных фаз обозначается чаще всего греческой буквой



$\varphi$  (читается "фи"), но могут использоваться также греческие буквы  $\xi$  ("кси"),  $\Theta$  ("тета") и некоторые другие.

На рис. 6.1 показаны три кривые синусоидальной формы, имеющие одинаковый период, частоту, амплитуду и отличающиеся только временем начала колебательного процесса. Та синусоида, начало которой совпадает с началом координат, имеет нулевую начальную фазу ( $\psi = 0$ ). Закон, по которому изменяются мгновенные значения, определяется выражением  $u_1 = U_m \sin \omega t$ . Напомним, что в данном выражении  $U_m$  — максимальное, т. е. наибольшее из всех мгновенных значений;  $\omega$  — угловая частота, причем  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ . Угловая частота измеряется числом радиан в секунду, но так как радиан — величина безразмерная, то угловая частота  $\omega$  измеряется в 1/с. Множитель, стоящий под знаком  $\sin$  или  $\cos$ , является аргументом функции, поэтому, когда начало процесса совпадает с началом координат, аргументом функции  $u = f(t)$  или  $i = f(t)$  является множитель  $\omega t$ .

Если колебание начинается раньше начала координат, то к аргументу следует прибавить начальную фазу  $\psi$  со знаком плюс, а если позже, то со знаком минус. Таким образом, уравнения мгновенных значений синусоид напряжения, показанных на рис. 6.1, следующие:  $u_1 = U_m \sin \omega t$ ,  $u_2 = U_m \sin(\omega t - \psi_2)$ ,  $u_3 = U_m \sin(\omega t + \psi_3)$ . Если процесс начинается раньше момента, от которого ведется отсчет (т. е. от начала координат), то такой процесс называется *опережающим*, а начальные фазы считаются положительными. Если процесс начинается позже, то кривая считается отстающей, а начальная фаза — отрицательной. Начальную фазу можно также определять, как аргумент гармонической функции при  $t = 0$ . Действительно, при  $t = 0$  аргумент выражения  $u_1$  равен нулю, выражения  $u_2$  —  $(-\psi_2)$ , а выражения  $u_3$  —  $(+\psi_3)$ .

Поскольку начало координат можно перемещать вдоль оси времени, значение начальной фазы при каждом новом положении начала координат, будет изменяться. Например, если провести начало координат, как показано на рис. 6.1 штриховой линией, то  $\psi_2 + \psi_3 = \varphi$  и уравнения мгновенных значений становятся такими:  $u_3 = U_m \sin \omega t$ ,  $u_1 = U_m \sin(\omega t - \psi_3)$ ,  $u_2 = U_m \sin(\omega t - \psi_3 - \psi_2) = U_m \sin(\omega t - \varphi)$ .

Таким образом, чтобы записать выражение, позволяющее определять мгновенные значения в любой момент, необходимо знать амплитудное зна-

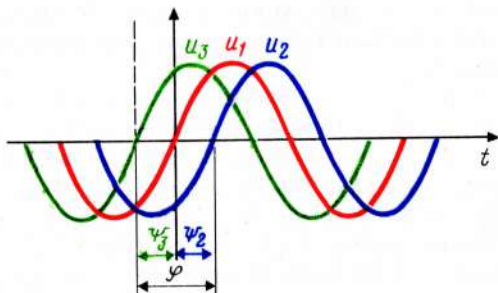


Рис. 6.1

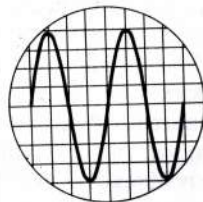


Рис. 6.2

чение ( $E_m$ ,  $U_m$ ,  $I_m$ ), закон изменения функции (синусоидальный или косинусоидальный), угловую частоту  $\omega$  и фазный угол  $\psi$  или  $\varphi$ .

**Пример 6.1.** Записать уравнение мгновенных значений напряжения синусоидальной формы, если действующее значение этого напряжения  $U = 10$  В, а частота  $f = 50$  Гц.

**Решение.** Уравнение мгновенных значений при сигналах гармонической формы  $u = U_m \sin \omega t$ . Форма напряжения гармоническая, поэтому максимальное значение напряжения в  $\sqrt{2} = 1,41$  больше действующего, следовательно,  $U_m = U\sqrt{2} = 10 \cdot 1,41 = 14,1$  В. Так как  $\omega = 2\pi f$ , то  $\omega = 6,28 \cdot 50 = 314$  1/с, искомое уравнение  $u = 14,1 \times \sin 314 t$ .

**Пример 6.2.** Записать уравнение мгновенных значений напряжения по изображению на экране осциллографа, если известно, что цена деления клетки по вертикали 2 В, а по горизонтали — 100 мкс (рис. 6.2).

**Решение.** Как видно из рис. 6.2, размах изображения занимает восемь клеток, следовательно,  $U_p = C_v N_v = 2 \cdot 8 = 16$  В, где  $C_v$  и  $N_v$  — цена деления и число клеток по вертикали. Максимальное значение напряжения, приложенного ко входу осциллографа,  $U_m = 0,5 U_p = 0,5 \cdot 16 = 8$  В; определим время периода  $T$ . Как видно из рис. 6.2, период кривой занимает четыре клетки, следовательно,  $T = C_t N_t = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 4 = 400 \times 10^{-6}$  с = 400 мкс, где  $C_t$  и  $N_t$  — цена деления и число клеток по горизонтали. Частота колебаний  $f = 1/T = 1/400 \cdot 10^{-6} = 2500$  Гц = 2,5 кГц. Угловая частота  $\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 15700$  1/с =  $1,57 \cdot 10^4$  1/с. Напряжение, имеющееся на экране осциллографа,  $u = 8 \sin 15700 t$ . Решим теперь вопрос о начальной фазе напряжения. Если вертикальная координатная ось отсутствует (как показано на рис. 6.2), то мысленно ее можно провести произвольным образом и записать начальную фазу с любым значением. Например, если предположить, что вертикальная ось проходит через центр изображения (или четырем клеткам левее), то  $\psi = 0$  и  $u = U_m \sin \omega t$ . Но если считать, что координатная ось проходит, например, на одну клетку левее центра, то  $u = -U_m \cos \omega t$ . При вертикальной оси, проходящей левее центра на две клетки,  $u = -U_m \sin \omega t$ , при трех клетках —  $u = U_m \cos \omega t$  или  $u = U_m \sin(\omega t - 90^\circ)$ , что одно и то же. Если бы вертикальная ось проходила левее центра на 3,5 клетки, то  $u = U_m \sin(\omega t + 45^\circ)$  и т. д. На практике обычно мысленно проводят вертикальную ось так, чтобы начальная фаза равнялась нулю, поскольку арифметические расчеты при этом упрощаются.

### 6.3. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

В любой линейной цепи вне зависимости от вида элементов, входящих в цепь, гармоническое напряжение вызывает гармонический ток и, наоборот, гармонический ток порождает напряжения на зажимах этих элементов также гармонической формы. Обратим внимание, что индуктивности катушек и емкости конденсаторов, рассматриваемые в данном параграфе, предполагаются также величинами линейными.

В более общем случае можно сказать, что в линейных цепях при гармонических воздействиях все отклики имеют также гармоническую форму. Следовательно, в любой линейной цепи (поскольку в данном параграфе изучаются только линейные цепи, то слово "линейные" для краткости в последующем тексте будем опускать) все мгновенные напряжения и токи имеют одну и ту же гармоническую форму. Если цепь содержит хотя бы несколько элементов, то синусоидальных кривых становится достаточно много, эти временные диаграммы накладываются друг на друга, чтение их сильно затрудняется, изучение становится предельно неудобным. По указан-



ным причинам изучение процессов, происходящих в цепях при гармонических воздействиях, производят не на кривых синусоидальной формы, а с помощью векторов, длины которых берутся пропорциональными максимальным значениям кривых, а углы, под которыми откладываются векторы, равными углам между началами двух кривых или началом кривой и началом координат. Таким образом, вместо временных диаграмм, занимающих много места, приводят их изображения в виде векторов, т. е. прямых линий со стрелками на концах, причем у векторов напряжения стрелки показывают заштрихованными, а у векторов тока оставляют незаштрихованными.

Совокупность векторов напряжений и токов в цепи называется *векторной диаграммой*. Правило отсчета углов на векторных диаграммах следующее: если необходимо показать вектор, отстающий от начального положения на некоторый угол, то поворачивают вектор на данный угол по часовой стрелке. Вектор, повернутый против часовой стрелки, означает опережение на указанный угол. Например, на схеме рис. 6.3 показаны три временные диаграммы с одинаковыми амплитудами, но различными начальными фазами. Следовательно, длины векторов, соответствующих этим гармоническим напряжениям, должны быть одинаковыми, а углы — разными. Проведем взаимно перпендикулярные координатные оси, за начало отсчета примем горизонтальную ось с положительными значениями, в этом случае вектор первого напряжения должен совпадать с положительной частью горизонтальной оси, вектор второго напряжения — быть повернутым по часовой стрелке на угол  $\psi_2$ , а вектор третьего напряжения — против часовой стрелки на угол  $\psi_3$  (рис. 6.3). Длины векторов зависят от выбранного масштаба, иногда их проводят произвольной длины с соблюдением пропорций. Поскольку максимальные и действующие значения всех гармонических величин отличаются всегда в одно и то же число раз (в  $\sqrt{2} = 1,41$ ), то на векторных диаграммах можно откладывать как максимальные, так и действующие значения. Временная диаграмма показывает значение гармонической функции в любой момент в соответствии с уравнением  $u = U_m \sin \omega t$ . На векторной диаграмме также можно показать значения в каждый момент времени. Для этого необходимо представить вектор вращающимся в направлении против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  и брать проекцию этого вектора на вертикальную ось. Получившиеся длины проекций будут подчиняться закону  $u = U_m \sin \omega t$  и, следовательно, представлять мгновенные значения в том же масштабе. Направление вращения вектора против часовой стрелки считают положительным, а по часовой стрелке — отрицательным.

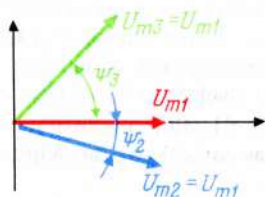


Рис. 6.3

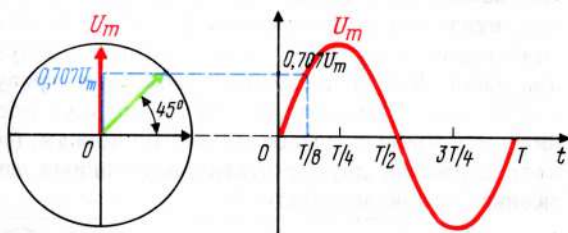


Рис. 6.4



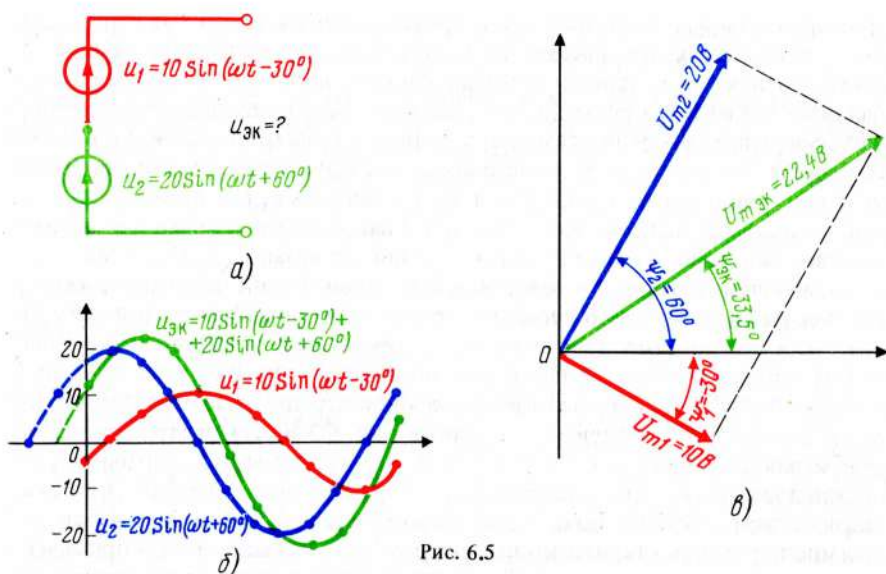


Рис. 6.5

Рассмотрим пример определения мгновенных значений напряжений с помощью векторной диаграммы. В правой части рис. 6.4 показана диаграмма временная, а в левой части — векторная. Пусть начальный фазный угол равен нулю. В этом случае в момент  $t = 0$  мгновенное значение напряжения равно нулю, а вектор, соответствующий этой временной диаграмме, совпадает с положительным направлением оси абсцисс, проекция этого вектора на вертикальную ось в этот момент также равна нулю, т. е. длина проекции совпадает с мгновенным значением синусоиды. Через время  $t = T/8$  фазный угол становится равным  $45^\circ$ , а мгновенное значение  $U_m \sin \omega t = U_m \sin 45^\circ = 0,707 U_m$ . Но радиус-вектор за это время повернется также на угол  $45^\circ$  и проекция этого вектора станет также  $0,707 U_m$ . Через  $t = T/4$  мгновенное значение кривой достигнет  $U_m$ , но и радиус-вектор поворачивается также на  $90^\circ$ . Проекция на вертикальную ось в этот момент станет равной самому вектору, длина которого пропорциональна максимальному значению. Аналогичным образом можно определить мгновенные значения в любой момент.

Таким образом, все операции, которые тем или иным образом приходится производить с синусоидальными кривыми, сводятся к операциям, выполняемым не с самими синусоидами, а с их изображениями, т. е. с соответствующими им векторами. Например, имеется цепь рис. 6.5, а, в которой необходимо определить эквивалентную кривую мгновенных значений напряжения. Чтобы построить суммарную кривую графическим способом, необходимо произвести весьма громоздкую операцию графического сложения двух кривых, выполняемых по точкам (рис. 6.5, б). Для аналитического сложения двух синусоид необходимо найти максимальное значение эквивалентной синусоиды:

$$U_{m \text{ эк}} = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2 U_{m1} U_{m2} \cos(\widehat{U_{m1} U_{m2}})} \quad (6.1)$$

и начальную фазу

$$\psi_{\text{эк}} = \frac{U_{m1} \sin \psi_1 + U_{m2} \sin \psi_2}{U_{m1} \cos \psi_1 + U_{m2} \cos \psi_2}. \quad (6.2)$$

(В данном примере  $U_{m\text{эк}}$  получается равным 22,36, а  $\psi_{\text{эк}} = 33^\circ$ .) Обе формулы громоздки, крайне неудобны для расчетов, поэтому на практике ими пользуются достаточно редко.

Заменяем теперь временные синусоиды их изображениями, т. е. векторами. Выберем масштаб и отложим вектор  $U_{m1}$ , отстоящим от начала координат на  $30^\circ$ , и вектор  $U_{m2}$ , имеющий длину в 2 раза большую, чем вектор  $U_{m1}$ , опережающий начало координат на  $60^\circ$  (рис. 6.5, в). Чертеж после подобной замены резко упрощается, но все расчетные формулы остаются прежними, поскольку векторное изображение синусоидальных величин не изменяет существа дела: упрощается только чертеж, но не математические соотношения в нем (иначе замена временных диаграмм векторными была бы просто неправомерной.)

Таким образом, замена гармонических величин их векторными изображениями еще не облегчает технику расчетов, если производить эти расчеты приходится по законам косоугольных треугольников [(т. е. по (6.1) и (6.2)]. Чтобы резко упростить технологию расчетов векторных величин, был разработан символический метод расчета.

#### 6.4. ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ СИМВОЛИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Символический метод операций с векторными величинами основывается на весьма простой идее: каждый вектор раскладывают на две составляющие: одну — горизонтальную, идущую по оси абсцисс, а вторую — вертикальную, идущую по оси ординат. В этом случае все горизонтальные составляющие идут по одной прямой, и их можно складывать с помощью простого алгебраического сложения, аналогичным образом складывают и вертикальные составляющие. При таком подходе в общем случае получаются две результирующие составляющие — горизонтальная и вертикальная, которые всегда находятся друг к другу под одним и тем же углом, равным  $90^\circ$ . По этим составляющим можно найти их равнодействующую, т. е. произвести их геометрическое сложение. Составляющие под прямым углом представляют катеты прямоугольного треугольника, а их геометрическая сумма — гипотенузу. Можно также сказать, что геометрическая сумма численно равна диагонали параллелограмма, построенного на составляющих, как на его сторонах. Если горизонтальную составляющую обозначить  $A_r$ , а вертикальную —  $A_v$ , то геометрическая сумма

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_v^2}. \quad (6.3)$$

Находить геометрическую сумму прямоугольных треугольников гораздо легче, чем косоугольных. Легко видеть, что (6.1) превращается в (6.3), если угол между составляющими составляет  $90^\circ$ . Поскольку  $\cos 90^\circ = 0$ , последний член в подкоренном выражении (6.1) исчезает, вследствие чего выражение резко упрощается. Обратим внимание на то, что перед словом "сумма" обязательно следует добавлять одно из трех слов: "арифметичес-

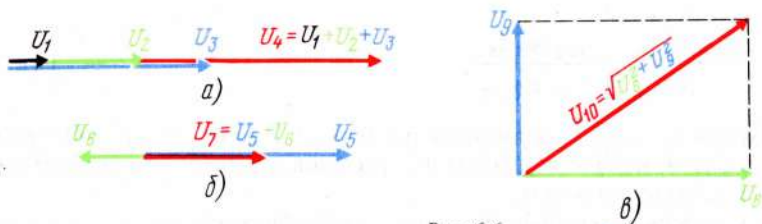


Рис. 6.6

кая", "алгебраическая", "геометрическая". Слово "сумма" без указания, какая именно, приводит к неопределенности, а в ряде случаев и к грубым ошибкам.

Напомним, что результирующий вектор равен арифметической сумме векторов в том случае, когда все векторы идут по одной прямой (или параллельно друг другу) в одинаковом направлении. При этом все векторы имеют знак плюс (рис. 6.6, а). Если векторы идут по одной прямой, но направлены в противоположные стороны, то их равнодействующая равна алгебраической сумме векторов, в этом случае одни члены имеют знак плюс, а другие минус. Например, в схеме рис. 6.6, б  $U_6 = U_5 - U_5$ . Можно также сказать, что арифметическую сумму используют в тех случаях, когда угол между векторами равен нулю, алгебраическую, когда углы составляют 0 и 180°. Во всех остальных случаях сложение производят векторно, т. е. определяют геометрическую сумму (рис. 6.6, в).

**Пример 6.3.** Определить параметры эквивалентной синусоиды для цепи рис. 6.5, а символическим методом.

**Решение.** Нарисуем векторы  $U_{m1}$ ,  $U_{m2}$  и разложим их на составляющие (рис. 6.7, а). Из чертежа видно, что каждая горизонтальная составляющая представляет значение вектора, умноженное на косинус фазного угла, а вертикальная — значение вектора, умноженное на синус фазного угла. В данном случае

$$U_{m1r} = U_{m1} \cos \psi_1 = 10 \cdot \cos(-30^\circ) = 10(0,87) = 8,7B;$$

$$U_{m2r} = U_{m2} \cos \psi_2 = 20 \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10B;$$

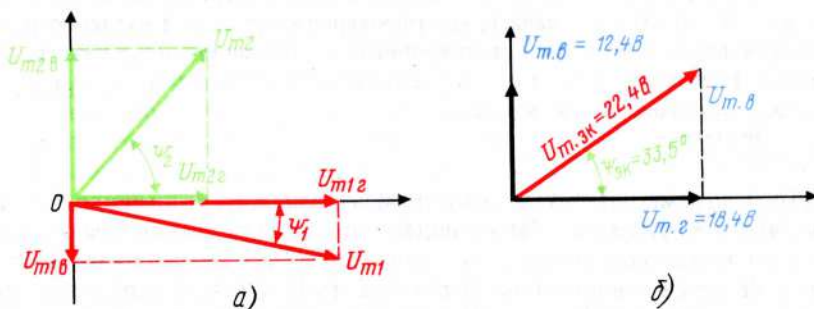


Рис. 6.7



$$U_{m1B} = U_{m1} \sin \psi_1 = 10 \sin (-30^\circ) = 10 (-0,5) = -5 \text{ В};$$

$$U_{m2B} = U_{m2} \sin \psi_2 = 20 \sin 60^\circ = 20 \cdot 0,87 = 17,4 \text{ В}.$$

Очевидно, что общие горизонтальные и вертикальные составляющие равны алгебраическим суммам соответствующих составляющих. В данном случае

$$U_{mГ} = U_{m1Г} + U_{m2Г} = 8,7 + 10 = 18,7 \text{ В};$$

$$U_{mB} = U_{m2B} - U_{m1B} = 17,4 - 5 = 12,4 \text{ В}.$$

Получившиеся составляющие покажем на рис. 6.7, б. Определим значение  $U_m$ , для этого вычислим геометрическую сумму обеих составляющих:

$$U_{m\text{эк}} = \sqrt{U_{mГ}^2 + U_{mB}^2} = \sqrt{18,7^2 + 12,4^2} = 22,4.$$

Определим эквивалентный фазный угол  $\psi_{\text{эк}}$ . Из рис. 6.7, б видно, что отношение вертикальной составляющей к горизонтальной представляет тангенс эквивалентного фазного угла  $\text{tg } \psi_{\text{эк}} = U_{mB}/U_{mГ}$ , откуда  $\psi_{\text{эк}} = \text{arctg}(U_{mB}/U_{mГ}) = \text{arctg}(12,4/18,7) = \text{arctg } 0,663 = 33,5^\circ$ .

Таким образом, результирующая синусоида имеет амплитуду 22,4 В, начальную фазу  $33,5^\circ$  с таким же периодом, который имели составляющие. Заметим, что складывать можно только синусоиды с одинаковыми частотами поскольку при сложении синусоидальных кривых с различными частотами, результирующая кривая перестает быть синусоидальной и все понятия, приложимые только к гармоническим сигналам, становятся в этом случае неправомерными.

Проследим еще раз всю цепочку преобразований, которые приходится проделывать с математическими описаниями сигналов гармонической формы при выполнении различных расчетов. Сначала временные функции заменяют векторными изображениями, затем каждый вектор раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие, после чего просчитывают отдельно горизонтальные и вертикальные составляющие и, наконец, определяют значения результирующего вектора и его начальной фазы. Такой путь расчета избавляет от необходимости графически складывать (а в ряде случаев делать и более сложные операции, например, перемножать, делить, извлекать корни и т. д.) синусоидальные кривые и прибегать к расчетам с помощью формул косоугольных треугольников.

Однако рассчитывать отдельно горизонтальные и вертикальные составляющие — операции достаточно громоздкие. При подобных расчетах очень удобным является такой математический аппарат, с помощью которого можно просчитать сразу обе составляющие. Уже в конце прошлого века был разработан метод, позволяющий одновременно производить расчеты над числами, отложенными на взаимно перпендикулярных осях. Числа, откладываемые по горизонтальной оси, называли вещественными, а по вертикальной оси — мнимыми. При расчетах этих чисел к вещественным добавляют множитель  $\pm 1$ , а к мнимым —  $\pm j$  (читается "жи"). Числа, состоящие из вещественной и мнимой частей, называли *комплексными*, а метод расчетов, выполняемых с их помощью — *символическим*. Поясним термин "символический". Те функции, которые подлежат расчету (в данном случае гармонические), являются оригиналами, а те выражения, которыми заменяют оригиналы — изображениями или символами. При использовании символического метода все расчеты производят не над самими оригиналами, а над их символами (изображениями), которые в нашем случае представляют соответствующие комплексные числа, поскольку производить операции над изображениями значительно легче, чем над самими оригиналами. По окончании всех операций над изображениями по результирующему изобра-

жению записывают оригинал, соответствующий получившемуся изображению. Подобным методом производят подавляющее большинство расчетов в электрических цепях, которые будут подробно показаны ниже.

## 6.5. ТРИ ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим формы записи комплексных чисел. Пусть имеется вектор длиной  $A$ , проведенный под углом  $\psi$  к началу координат (рис. 6.8). Значение вектора без указания угла, под которым проведен данный вектор, называется *модулем*. Комплексное число показывает модуль и угол, под которым проведен вектор. Чтобы по виду записи отличать модуль от комплексного, их записывают по-разному. Комплексное число или подчеркивают снизу, или ставят точку сверху. Например, запись  $\underline{U}$  означает комплексное напряжение, в отличие от модуля этого же напряжения, записываемого без точки  $U$ . Аналогично запись  $\underline{A}$  показывает комплексную величину, а  $A$  — модуль этой величины. Из последующего материала станет ясно, в каких случаях в комплексных обозначениях следует ставить точку, а в каких случаях — черту. Иногда знак модуля показывают двумя вертикальными прямыми линиями, например  $|A|$ .

Комплексные числа могут быть записаны в трех формах: алгебраической, показательной и тригонометрической. В алгебраической форме комплексное число представляют в виде алгебраической суммы двух составляющих — вещественной и мнимой. Вещественные составляющие часто обозначают той же буквой, которой обозначено комплексное число, но с одним штрихом, а мнимые — с двумя штрихами. Например, вектор  $\underline{A}$ , показанный на рис. 6.8, в алгебраической форме записывают  $\underline{A} = A' + jA''$ . Но  $A'$  — геометрически есть катет, прилежащий к фазному углу;  $A''$  — катет, противолежащий этому же углу;  $A$  — гипотенуза. Так как отношение прилежащего катета к гипотенузе есть косинус угла, а противолежащего к гипотенузе — синус, то  $A'/A = \cos \psi$ ,  $A''/A = \sin \psi$ , откуда  $A' = A \cos \psi$ ,

$$A'' = A \sin \psi, \text{ или } \underline{A} = A' + jA'' = A \cos \psi + jA \sin \psi = A (\cos \psi + j \sin \psi). \quad (6.4)$$

Получившееся выражение представляет тригонометрическую форму комплексного числа или выражения. Для получения показательной формы комплексного числа обозначим для краткости выражение  $\cos \psi + j \sin \psi = v$  и возьмем производную  $dv/d\psi$ :

$$\frac{dv}{d\psi} = \frac{d}{d\psi} (\cos \psi + j \sin \psi) = -\sin \psi + j \cos \psi = j(\cos \psi + j \sin \psi),$$

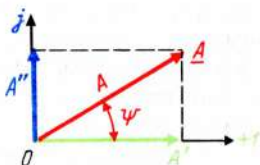


Рис. 6.8



т. е.

$$dv/d\psi = jv, \text{ или } dv/v = jd\psi.$$

Проинтегрировав обе части равенства, получим  $\int \frac{dv}{v} = \int jd\psi$ , т. е.  $\ln v = j\psi$ , откуда  $v = e^{j\psi}$ . Следовательно,  $\underline{A} = A(\cos \psi + j \sin \psi) = Ae^{j\psi}$ .

Член  $\psi$  называется *аргументом* комплексного числа. Приведенное преобразование известно под названием преобразования Эйлера — по имени Леонарда Эйлера (1707 — 1783), крупнейшего математика, академика Петербургской академии наук. Из рис. 6.8 видно, что модуль  $A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}$ ,  $\tan \psi = A''/A'$ , или  $\psi = \arctg(A''/A')$ .

Итак, при операциях с комплексными числами можно использовать следующие выражения:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= A' + jA'' = A \cos \psi + jA \sin \psi = A e^{j\psi} = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2} \times \\ &\times e^{j \arctg(A''/A')}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

#### 6.6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

**Сложение и вычитание.** При сложении двух комплексных чисел,  $\underline{A}$  и  $\underline{B}$ , следует использовать алгебраическую форму; при выполнении операции сложения складывают порознь части вещественные и мнимые:

$$\underline{D} = \underline{A} + \underline{B} = (A' + jA'') + (B' + jB'') = (A' + B') + j(A'' + B'') = D' + jD'',$$

где  $D' = A' + B'$ ,  $D'' = A'' + B''$ .

Вещественную часть комплексного числа обозначают индексом  $\text{Re}$  (от слова Real, что означает "вещественный"). Мнимую часть комплексного числа обозначают индексом  $\text{Im}$  (от слова Imaginable (читается "Имэджи-нэбл"), что означает "мнимый". Таким образом, предыдущее равенство можно записать в виде

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \underline{A} + \underline{B} = (\text{Re } \underline{A} + j \text{Im } \underline{A}) + (\text{Re } \underline{B} + j \text{Im } \underline{B}) = (\text{Re } \underline{A} + \text{Re } \underline{B}) + \\ &+ j(\text{Im } \underline{A} + \text{Im } \underline{B}) = \text{Re } \underline{D} + j \text{Im } \underline{D}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом производят операцию вычитания комплексных чисел. Например,  $\underline{A} = 5 + j3$ ;  $\underline{B} = -9 + j13$ .

Рассчитаем комплексное выражение  $\underline{D} = \underline{A} - j\underline{B}$ :

$$\begin{aligned} \underline{D} &= (5 + j3) - (-9 + j13) = 5 + j3 + 9 - j13 = (5 + 9) + j(3 - 13) = \\ &= 14 - j10. \end{aligned}$$

**Умножение и деление.** При выполнении умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня следует использовать показательную форму комплексных чисел. При умножении (делении) комплексных чисел следует перемножить (поделить) модули и сложить (вычесть) аргументы. Например,

$$\underline{A} = Ae^{j\psi_A}, \underline{B} = Be^{j\psi_B}, \underline{D} = \underline{A}\underline{B} = Ae^{j\psi_A} \cdot Be^{j\psi_B} = AB e^{j(\psi_A + \psi_B)},$$

где  $D = AB$ ,  $\psi_D = \psi_A + \psi_B$ .





рацию деления, комплексное выражение из алгебраической формы следует прежде всего перевести в показательную:

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \frac{\sqrt{A^2 + B^2} e^{j \arctg(B/A)}}{\sqrt{D^2 + F^2} e^{j \arctg(F/D)}} = \frac{\sqrt{12^2 + 16^2} e^{j \arctg(16/12)}}{\sqrt{4^2 + 3^2} e^{j \arctg(3/4)}} = \\ &= \frac{\sqrt{20} e^{j 53^\circ 10'}}{5 e^{j 36^\circ 50'}} = \sqrt{4} e^{j 16^\circ 20'} = 2 e^{j 8^\circ 10'} \end{aligned}$$

**Понятие о сопряженных комплексных выражениях.** Комплексным выражением, *сопряженным* с данным, называется комплексное выражение, отличающееся знаком у мнимой части (в алгебраической форме), или у аргумента (в показательной форме). У сопряженного комплексного выражения ставится знак "звездочка". Например, если  $\dot{A} = A' + jA'' = A e^{j\psi}$ , то сопряженное с ним комплексное выражение ("сопряженный комплекс", как часто для краткости говорят) будет  $\dot{A}^* = A' - jA'' = A e^{-j\psi}$  (рис. 6.10). Например, если  $\underline{Z} = -5 + j9$ , то  $\underline{Z}^* = -5 - j9$ . Если  $\underline{Y} = 46,2 - j54,7$ , то  $\underline{Y}^* = 46,2 + j54,7$  и т. д. (Примечание. Сопряженные комплексные величины можно обозначать  $\underline{A}''$ .) При выполнении операций с сопряженными комплексными выражениями следует иметь в виду следующие важные правила:

1. Арифметическая сумма двух сопряженных комплексных чисел представляет действительное число, равное удвоенному значению вещественной части комплексного числа. Действительно, если  $\dot{A} = A' + jA''$ , а  $\dot{A}^* = A' - jA''$ , то

$$\dot{A} + \dot{A}^* = A' + jA'' + A' - jA'' = 2A', \text{ т. е. } \dot{A} + \dot{A}^* = 2 \operatorname{Re} [\dot{A}]. \quad (6.6)$$

2. Произведение двух сопряженных комплексных чисел есть вещественное число

$$\dot{A} \dot{A}^* = (A' + jA'')(A' - jA'') = (A')^2 - (-A'')^2 = (A')^2 + (A'')^2.$$

Можно записать это же произведение в иной форме:

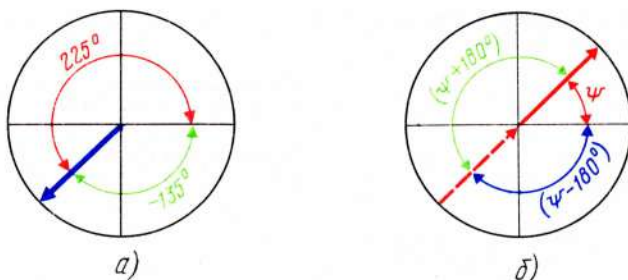
$$\dot{A} \dot{A}^* = [\operatorname{Re} \dot{A}]^2 + [\operatorname{Im} \dot{A}]^2. \quad (6.7)$$

**Отрицательные углы.** Углы можно отсчитывать либо против часовой стрелки, и в этом случае они являются положительными, либо по часовой стрелке, и в этом случае — становятся отрицательными. Углы принято отсчитывать в таком направлении, при котором их абсолютные значения не превышают  $180^\circ$ . Например, угол  $\psi = 225^\circ$  следует записывать как угол  $\psi = -135^\circ$  (рис. 6.11, а). Аналогично угол  $300^\circ$  равен углу  $-60^\circ$  и т. д.

**Изменение знака у модуля комплексного числа на обратный.** Чтобы изменить знак у модуля на обратный, к аргументу следует прибавить или отнять от него  $180^\circ$ . Например,  $\underline{A} = 5e^{-j45^\circ} = -5e^{-j(45^\circ + 180^\circ)} = -5e^{-j(45^\circ - 180^\circ)} = -5e^{j135^\circ} = -5e^{-j225^\circ}$

Поясним, почему так происходит. Положительными являются те векторы, стрелки которых направлены от центра к периферии (т. е. от центра к

Рис. 6.11



линии окружности). Векторы, стрелки которых направлены к центру, являются отрицательными. Нарисуем вектор  $\underline{A}$ , направленный от центра, и имеющий, следовательно, знак плюс (рис. 6.11, б). Но векторы, как известно, можно передвигать по линии их приложения. Действия векторов от этого не меняются. Переместив вектор на расстояние радиуса, получим вектор, направленный от линии окружности к центру (штриховая линия) и, следовательно, отрицательный, но и аргумент (т. е. угол) при этом изменится на  $180^\circ$ , откуда и вытекает правило, указанное выше.

#### 6.7. ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ИХ ВРЕМЕННЫМ ОРИГИНАЛАМ

Чтобы записать изображение (т. е. комплексное выражение) по его оригиналу (т. е. временному выражению), необходимо максимальное значение функции представить в виде модуля комплексного выражения, а фазный угол — в виде аргумента. Получившееся при этом комплексное выражение называется *комплексной амплитудой*. Если исходное выражение зависит от времени, то соответствующее ему комплексное обозначают большой буквой с точкой наверху. Комплексную амплитуду также обозначают большой буквой потому, что в выражении отсутствует время, следовательно, комплексная амплитуда является величиной постоянной.

**Пример 6.5.** Временная функция выражения имеет вид  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ . Записать комплексную амплитуду этого выражения.

**Решение.**  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = U_m \cos \psi + j U_m \sin \psi$ . Если, например,  $u = 100 \sin(\omega t - 30^\circ)$ , то  $\dot{U}_m = 100 e^{-j30^\circ} = 100 \cos(-30^\circ) + j 100 \sin(-30^\circ) = 100 \cdot 0,87 - j 100 \times 0,5 = 87 - j 50$ .

**Пример 6.6.**  $\dot{I}_m = 5 e^{-j37^\circ}$ . Записать оригинал этого комплексного выражения.

**Решение.**  $i = 5 \sin(\omega t - 37^\circ)$ .

#### 6.8. ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ ОТ КОМПЛЕКСНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Если  $u = U_m \sin \omega t$ , где независимой переменной является время  $t$ , то производная по времени  $du/dt = U_m \omega \cos \omega t$ . Но  $\cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$ , т. е.  $du/dt = \omega U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$ . Из полученного выражения следует, что для записи производной гармонической функции во временной форме следует заданную функцию умножить на множитель  $\omega$  и повернуть вектор на  $90^\circ$  в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки). Поворот



вектора на  $90^\circ$  в комплексном виде выражается умножением этого вектора на множитель  $j$ . Таким образом, чтобы взять производную в комплексном виде, необходимо заданную временную функцию записать в комплексном виде и полученное комплексное выражение умножить на множитель  $j\omega$ .

Пусть во временной форме гармоническая функция имеет вид  $u = U_m \times \sin \omega t$ . Тогда в комплексной форме получается  $\dot{U}_m = U_m e^{j0^\circ} = U_m$ . Вычислим выражение

$$\int U_m \sin \omega t = - \frac{U_m}{\omega} \sin (\omega t + 90^\circ).$$

В комплексном виде выражение имеет вид  $-j(U_m/\omega)$ . Умножим числитель и знаменатель на множитель  $j$ :

$$-j \frac{j}{j} \frac{U_m}{\omega} = - \frac{-1}{j\omega} U_m = \frac{U_m}{j\omega}.$$

(Напомним, что  $j^2 = -1$ .) Следовательно, чтобы взять интеграл в комплексном виде, необходимо заданную временную функцию записать в комплексной форме и получившееся комплексное выражение умножить на множитель  $1/j\omega$ .

Заметим, что брать производную, а тем более интеграл в комплексной форме значительно легче, чем во временной, поэтому расчеты различных цепей при гармонических воздействиях выполняют, как правило, именно в комплексном виде.

Есть еще одно важное соображение. Если воздействие имеет форму, отличную от гармонической, то применяют не комплексный, а, так называемый, *операторный* метод расчета, весьма схожий с комплексным. При операторном методе расчета временную функцию также заменяют соответствующим ей изображением, с той лишь разницей, что изображения в этом случае образуют по несколько иным правилам, чем при получении комплексных выражений. Затем все преобразования производят над оригиналами так же, как и при использовании комплексного метода. По окончании расчетов записывают ту временную функцию, которая соответствует получившемуся изображению. Рассчитывать операторные выражения несравненно легче, чем соответствующие этим изображениям временные оригиналы.

Комплексный метод расчета представляет частный случай операторного метода, так как комплексный метод можно применять только при периодических гармонических воздействиях, а операторный — при любых. Подробно расчеты цепей с использованием операторного метода будут рассмотрены в гл. 12.

#### 6.9. РАСЧЕТЫ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Поскольку при выполнении расчетов комплексным методом векторы раскладывают на составляющие, идущие по одному направлению, для выполнения любых расчетов можно применять те же формулы, правила и

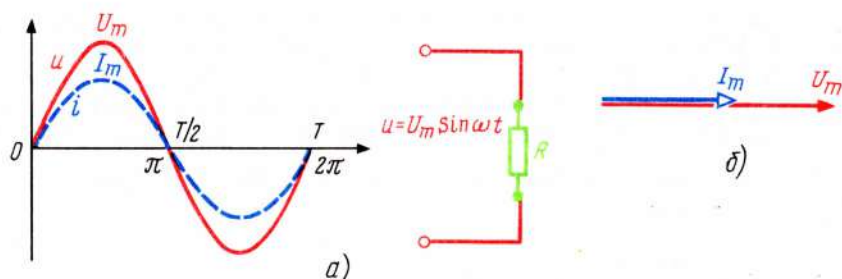


Рис. 6.12

приемы, которые использовались при операциях в резистивных цепях, но только в комплексном виде.

Рассмотрим расчеты цепей различного вида комплексным методом.

**R-цепь.** Пусть к резистивной цепи (R-цепи) приложено напряжение синусоидальной формы  $u = U_m \sin \omega t$ . Как было показано в гл. 3, в любом линейном резистивном элементе форма тока повторяет форму напряжения, следовательно, в те моменты, когда мгновенные значения напряжения равны нулю, мгновенные токи также равны нулю; в те моменты, когда мгновенные значения напряжения максимальны, мгновенные значения тока также максимальны и т. д. (рис. 6.12, а). Такие процессы называют *совпадающими по фазе*. Действительно, если начальная фаза напряжения равна некоторой величине, то при совпадении форм начальная фаза тока также равна этой же величине. Так как в резистивных цепях максимальные напряжения и токи пропорциональны друг другу, то  $I_m = U_m/R$ , а уравнение мгновенных токов имеет вид  $i = I_m \sin \omega t = (U_m/R) \sin \omega t$ . Покажем векторные диаграммы, соответствующие временным диаграммам. Отложим в некотором направлении вектор, длина которого пропорциональна максимальному значению напряжения. В том же направлении следует отложить вектор, длина которого пропорциональна максимальному значению тока (рис. 6.12, б).

Максимальное значение комплексного тока  $\dot{I}_m = \dot{U}_m/R$ . При гармонических воздействиях максимальное значение тока  $I_m = I\sqrt{2}$ , а максимальное значение напряжения  $U_m = U\sqrt{2}$ , поэтому  $I\sqrt{2} = U\sqrt{2}/R$  или, сокращая обе части равенства на  $\sqrt{2}$ , получим  $\dot{I} = \dot{U}/R$ , где  $\dot{I}$  и  $\dot{U}$  — комплексные действующие значения тока и напряжения. Таким образом, расчеты цепей при гармонических воздействиях можно производить либо для максимальных, либо для действующих значений напряжений и токов, но обязательно в комплексном виде.

**L-цепь.** Пусть через катушку с индуктивностью  $L$  протекает ток гармонической формы  $i = I_m \sin \omega t$ . Определим закон мгновенных напряжений на зажимах данной катушки (рис. 6.13, а).

В гл. 4 показано, что мгновенные напряжения  $u_L$  и мгновенный ток  $i$  в индуктивности  $L$  связаны соотношением

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_m \sin \omega t].$$

Выражение тока в комплексной форме имеет вид  $\dot{I}_m = I_m e^{j0^\circ} = I_m$ , или  $\dot{I} = I$ . Запишем комплексное напряжение на индуктивности. Для этого вместо мгновенного напряжения  $u_L$  следует записать аналогичную комплексную величину  $\dot{U}_{mL}$ , индуктивность  $L$  перенести из мгновенного выражения в комплексное без изменений, поскольку  $L$  – величина, не зависящая от времени, вместо производной  $d/dt$  записать множитель  $j\omega$ , максимальное значение тока  $I_m$  также становится величиной комплексной  $\dot{I}_m$  (хотя может быть с нулевой начальной фазой).

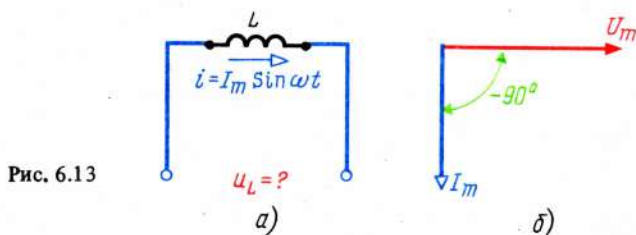
Таким образом, временное выражение  $u_L = L \frac{d}{dt} [I_m \sin \omega t]$  в комплексном виде запишется так:  $\dot{U}_{mL} = j\omega L \dot{I}_m$  или

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I} = \omega L \dot{I} e^{j90^\circ}. \quad (6.8)$$

Проанализируем данное выражение. Перенесем множитель  $\dot{I}$  из правой части равенства в левую, получается комплексное выражение  $\dot{U}_L/\dot{I} = j\omega L$ . Но отношение комплексного напряжения  $\dot{U}_L$  к комплексному току  $\dot{I}$  есть комплексное сопротивление цепи, которое обозначают  $\underline{Z}_L$ . Обратим внимание, что комплексные напряжения и токи записывают с точками наверху, а комплексные сопротивления подчеркивают чертой внизу. В общем случае комплексное сопротивление обозначают буквой  $\underline{Z}$ , но в ряде случаев к букве  $Z$  добавляют индекс, показывающий некоторые свойства этого комплексного сопротивления. Например, сопротивление индуктивного элемента может быть обозначено  $\underline{Z}_L$ , емкостного  $\underline{Z}_C$ , резистивного  $\underline{Z}_R$  и т. д. Таким образом, сопротивление индуктивного элемента гармоническому току с частотой  $\omega$  в комплексном виде определяют из выражения  $\underline{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j90^\circ}$ . Член  $\omega L$  называют индуктивным реактивным сопротивлением и обозначают буквой  $X_L$ . Следовательно, модуль индуктивного сопротивления есть  $X_L = \omega L$ , а комплексное сопротивление  $\underline{Z}_L$  можно рассчитать с помощью любого из выражений:

$$\underline{Z}_L = jX_L = j\omega L = X_L e^{j90^\circ} = \omega L e^{j90^\circ} \quad (6.9)$$

Слово "реактивное" указывает на то, что в данном сопротивлении электрическая энергия переходит не в тепло, а в энергию магнитного поля. Объясним смысл реактивного индуктивного сопротивления. При протекании по индуктивной катушке переменного тока в катушке образуется ЭДС, направленная против тока, вызвавшего ее. Однако для расчетных целей удобнее считать, что уменьшение тока происходит не из-за наличия противоЭДС, а





вследствие увеличения сопротивления в цепи. Следует помнить, что теория электрических цепей — не физика, а совершенно иная наука. В ТЭЦ изучают часто не сами явления или устройства, как в физике, а их эквиваленты или даже математические модели. Реактивное сопротивление есть типичный пример такого эквивалента.

Определим теперь выражение мгновенных напряжений в индуктивности и сравним его с выражением мгновенных токов. Так как комплексное напряжение на катушке  $\dot{U}_L = j \omega L \dot{I}_m$ , то мгновенные напряжения определяют из выражения  $u_L = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$ . Но поскольку в общем случае  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ , множитель, стоящий перед знаком синуса, есть максимальное значение напряжения, т. е.  $\omega L I_m = U_m$ , откуда  $\omega L = U_m / I_m$ , что уже получено выше.

Таким образом, напряжение  $u_L = U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$  вызывает в индуктивности  $L$  мгновенный ток  $i = I_m \sin \omega t$ . Следовательно, ток в индуктивности при гармоническом воздействии (и только при нем!) отстает по фазе от своего напряжения на  $90^\circ$ . Очевидно, что если мгновенные напряжения имеют нулевую начальную фазу, то мгновенные токи имеют фазу  $-90^\circ$ , т. е. если

$$\begin{aligned} u_L &= U_m \sin \omega t, \text{ то } i_L = I_m \sin(\omega t - 90^\circ) = \frac{U_m}{X_L} \sin(\omega t - 90^\circ) = \\ &= \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ). \end{aligned}$$

Покажем на рис. 6.13, б векторную диаграмму цепи  $L$ . Запишем уравнения напряжения и тока в комплексном виде:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mL} &= U_{mL} e^{j0^\circ} = U_{mL}, \dot{I}_{mL} = I_{mL} e^{-j90^\circ} = \frac{U_m}{X_L} e^{-j90^\circ} = \\ &= \frac{U_m}{\omega L} e^{-j90^\circ} = j \frac{U_m}{X_L} = j \frac{U_m}{\omega L}. \end{aligned}$$

Еще раз обратим внимание на то важнейшее обстоятельство, что *сопротивление элементов, накапливающих энергию, зависит от формы приложенного к ним напряжения или протекающего через них тока. В частности, катушка индуктивностью  $L$  обладает сопротивлением  $\omega L$  только при гармоническом воздействии, при токах с иными формами сопротивление этой же индуктивности определяется по совершенно иным формулам, причем для каждой формы сигнала существует своя расчетная формула.*

**С-цепь.** Пусть мгновенные напряжения на емкости  $C$  изменяются по синусоидальному закону  $u = U_m \sin \omega t$ , т. е.  $\dot{U}_m = U_m e^{j0^\circ}$ . Так как мгновенные токи в конденсаторе определяются выражением  $i = C \frac{du}{dt}$ , то в комплексном виде  $\dot{I}_m = j \omega C \dot{U}_m$ , откуда

$$Z_C = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{1}{j \omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ} = -j X_C = X_C e^{-j90^\circ}, \quad (6.10)$$

где  $X_C = 1/\omega C$  — модуль комплексного емкостного сопротивления. Запишем выражение мгновенных значений тока. Поскольку  $\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m$ ,

$$i = U_m \omega C \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + 90^\circ),$$

где  $I_m = U_m \omega C$  или  $I = U \omega C$ , т. е.  $Z_C = X_C = 1/\omega C$ , причем  $Z_C$  — комплексное значение емкостного сопротивления, а  $Z_C$  — его модуль.

Изменение электрического заряда происходит по синусоидальному закону в соответствии с приложенным напряжением  $u$ . При этом попеременное накопление положительных и отрицательных электрических зарядов на пластинах конденсатора обуславливает прохождение в цепи синусоидального тока  $i$ . Значение этого тока определяется скоростью изменения заряда на емкости  $dQ/dt$ . Из сравнения выражений  $u_C = U_m \sin \omega t$  и  $i_C = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$  видно, что ток в емкости опережает свое напряжение на  $90^\circ$  (рис. 6.14). Данное соотношение справедливо, разумеется, только при напряжениях гармонической формы.

**RL-цепь.** В пассивной последовательной RL-цепи (рис. 6.15, а) входное комплексное сопротивление  $Z_{вх}$  представляет геометрическую сумму резистивного сопротивления  $R$  и реактивного сопротивления  $jX_L$ :

$$\begin{aligned} Z_{вх} &= R + jX_L = Z e^{j\psi_{Z_{вх}}} = \sqrt{R^2 + X^2} e^{j \arctg(X_L/R)} = \sqrt{R^2 + (\omega^2 L^2)} \times \\ &\times e^{j \arctg(\omega L/R)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Если ко входу цепи приложено напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi) = U\sqrt{2}X \sin(\omega t + \psi)$ , то в комплексном виде оно имеет вид  $\dot{U} = U e^{j\psi_U}$ . Рассчитаем комплексный ток в данной цепи. В комплексном виде все расчеты производят по формулам, справедливым для резистивных цепей, поэтому комплексные сопротивления обозначают либо поэлементно, как показано на рис. 6.15, а, либо в виде прямоугольника, т. е. так, как обозначаются обычные резистивные сопротивления (рис. 6.15, б). Рассчитаем комплексный ток в этой цепи:

$$\dot{I} = \dot{U}/Z = \frac{U e^{j\psi_U}}{Z e^{j\psi_Z}} = \frac{U}{Z} e^{j(\psi_U - \psi_Z)} = I e^{j\varphi}.$$

где  $I = U/Z$ ,  $\varphi = \psi_U - \psi_Z$ .

Таким образом, модуль тока в данной цепи  $I = U/Z$ , а аргумент  $\varphi = \psi_U - \psi_Z$ . Мгновенное значение тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_U - \psi_Z) = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi).$$

Векторная диаграмма данной цепи показана на рис. 6.15, в.

**Пример 6.6.** К цепи рис. 6.15, а приложено напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ . Рассчитать мгновенные токи в данной цепи, если  $R = 20$  Ом,  $X_L = 60$  Ом.

**Решение.** Входное напряжение в комплексном виде  $\dot{U}_{вх} = U_m e^{j\psi_{вх}}$ . Комплексное входное сопротивление цепи

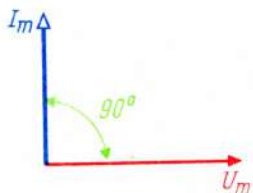


Рис. 6.14

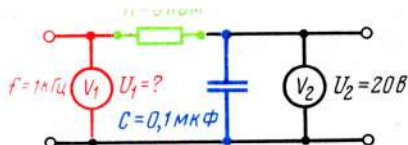


Рис. 6.16

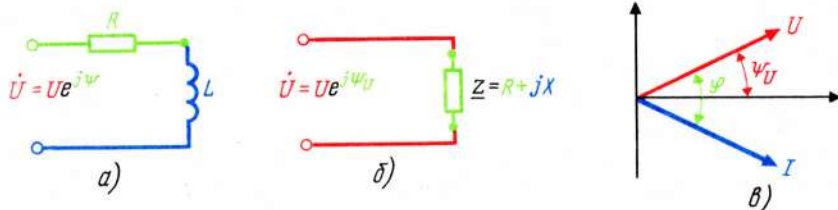


Рис. 6.15

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= R + jX_L = 20 + j60 = \sqrt{20^2 + 60^2} e^{j \arctg(60/20)} = \sqrt{400 + 3600} \times \\ &\times e^{j \arctg 3} = 63,25 e^{j 71^\circ 34'}. \end{aligned}$$

Комплексный ток в цепи

$$\dot{I}_m = \dot{U}_{m\text{вх}} / Z_{\text{вх}} = \frac{100 e^{j 30^\circ}}{63,25 e^{j 71^\circ 34'}} = 1,58 e^{j(30^\circ - 71^\circ 34')} = 1,58 e^{-j 41^\circ 34'}.$$

Таким образом, в данной цепи модуль тока составляет 1,58 А, а ток отстает от напряжения на угол  $41^\circ 34'$ . Если фазу напряжения принять за нулевую, то фаза тока станет  $-71^\circ 34'$ . Следовательно, если считать, что  $u = 100 \sin(\omega t + 30^\circ)$ , то  $i = 1,58 \times \sin(\omega t - 41^\circ 34')$ .

Если принять, что  $u = 100 \sin \omega t$ , то  $i = 1,58 \sin(\omega t - 71^\circ 34')$ . Угол между напряжением и током, разумеется, остается одним и тем же (в нашем примере  $71^\circ 34'$ ) вне зависимости от выбора начального угла входного напряжения. Поэтому начало координат стараются проводить так, чтобы начальный угол воздействующей величины был бы, как правило, равным нулю. Расчеты при этом становятся более наглядными. Рассчитаем комплексные падения напряжений на резистивном сопротивлении  $R$  и реактивном  $X_L$  (входное напряжение считаем  $\dot{U}_{m\text{вх}} = 100 e^{j 30^\circ}$ ):

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m(R)} &= \dot{I}_m Z_R = 1,58 e^{-j 41^\circ 34'} \cdot 20 e^{j 0^\circ} = 31,62 e^{-j 41^\circ 34'}; \\ \dot{U}_{m(L)} &= \dot{I}_m Z_L = \dot{I}_m j X_L = \dot{I}_m X_L e^{j 90^\circ} = 1,58 e^{-j 41^\circ 34'} \cdot 60 e^{j 90^\circ} = \\ &= 94,86 e^{j 48^\circ 26'}. \end{aligned}$$

Произведем проверку. Геометрическая сумма комплексных напряжений на резистивном и индуктивном сопротивлениях должна равняться комплексному входному напряжению, т. е.  $\dot{U}_R + \dot{U}_L = \dot{U}_{\text{вх}}$ , а в числовых значениях сумма  $31,62 e^{-j 41^\circ 34'} +$



$+ 94,86e^{j48^\circ 26'} = 100e^{j30^\circ}$ . Две комплексные величины равны между собой, если вещественная часть первого комплексного числа равна вещественной части второго комплексного числа и аналогичным образом равны их мнимые части. Комплексные выражения также будут равны, если соответственно равны их модули и аргументы. Поскольку для выполнения проверки в данном примере приходится складывать два комплексных числа, их необходимо из показательной формы превратить в алгебраическую. Прделаем указанные преобразования:  $31,62 \cos(-41^\circ 34') + j31,62 \times \times \sin(-41^\circ 34') + 94,86 \cos(48^\circ 26') + j94,86 \sin(48^\circ 26') = 31,62 \cdot 0,749 - j31,62 \times \times 0,6626 + 94,86 \cdot 0,6626 + j94,86 \cdot 0,749 = 23,68 - j20,95 + 62,85 + j71,05 = 87,53 + + j50,1 = 100e^{j30^\circ}$ , т. е. сумма комплексных падений напряжений на всех элементах цепи действительно равна комплексному входному напряжению.

Обратите внимание, что складывать можно только комплексные выражения, но не их модули. Действительно,  $31,62 + 94,86 \neq 100$ .

**РС-цепь.** Расчеты в пассивной *RC*-цепи производят аналогично тому, как производились расчеты в *RL*-цепи, следует только помнить, что у комплексных емкостных сопротивлений множитель  $j$  ставится в знаменателе или в числителе, но со знаком минус:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j \frac{1}{\omega C} = R + \frac{X_C}{j} = R - jX_C = Ze^{-j\psi} = \sqrt{R^2 + X_C^2} \times \times e^{-j \arctg(X_C/R)} = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} e^{-j \arctg(1/\omega RC)}.$$

**Пример 6.7.** В цепи рис. 6.16 вольтметр  $V_2$  показывает напряжение  $U_2 = 20$  В. Сколько покажет вольтметр  $V_1$ , если  $R = 3$  кОм,  $f = 1$  кГц,  $C = 0,1$  мкФ? Каков модуль коэффициента передачи данной цепи?

**Решение.** Так как вольтметры переменного тока показывают модули действующего напряжения, а расчеты цепей при гармоническом воздействии можно производить только в комплексном виде (даже в том случае, если необходимо определить модуль напряжения в некоторых точках цепи), то напряжение на конденсаторе прежде всего следует записать в комплексном виде, а для этого необходимо задаться начальной фазой напряжения на емкости. Начальная фаза, как известно, может быть любой величиной, но для простоты расчетов ее чаще всего принимают за нулевую, поэтому  $U_2 = 20$  В, а  $\dot{U}_2 = 20e^{j0^\circ}$ . Рассчитаем модуль сопротивления конденсатора:

$$X_C = 1/\omega C = 1/2\pi fC = 1/(6,28 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}) = (10 \cdot 10^3)/6,28 = = 1,59 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 1,59 \text{ кОм}.$$

Комплексное емкостное сопротивление  $\underline{Z}_C = -jX_C = -j1590 = 1590e^{-j90^\circ}$ . Комплексный действующий ток в цепи

$$\begin{aligned} \dot{I} = \dot{U}_2 / \underline{Z}_C &= \frac{20e^{j0^\circ}}{1590e^{-j90^\circ}} = \frac{20}{1,59 \cdot 10^3 e^{-j90^\circ}} = 12,57 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \text{ А} = \\ &= 12,57 e^{j90^\circ} \text{ мА}. \end{aligned}$$

Входное комплексное действующее напряжение  $\dot{U}_1 = \dot{I} \underline{Z}_{\text{ц}} = 12,57 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} (3 \times \times 10^3 - j1,59 \cdot 10^3) = 12,57 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \cdot 10^3 \sqrt{3^2 + 1,59^2} e^{-j \arctg(1,59/3)} = 12,57 \times \times 3,4 e^{j90^\circ} e^{-j \arctg 0,53} = 42,74 e^{j(90^\circ - 28^\circ)} = 42,74 e^{j62^\circ}$ .

Поскольку вольтметр  $V_1$  показывает модуль действующего напряжения, его показание будет 42,74 В. Мгновенные значения напряжений на входе и выходе данной цепи:  $u_1 = 42,74 \sqrt{2} \sin(6280t + 62^\circ)$ ,  $u_2 = 20 \sqrt{2} \sin 6280t$ . Модуль коэффициента передачи есть отношение модуля выходного напряжения (действующего или максимального — это безразлично) к аналогичному значению входного напряжения  $K = U_2/U_1 = 20/42,74 = 0,47$ . Таким образом, в рассматриваемой цепи модуль выходного напряжения составляет 47 % от модуля входного напряжения.

#### 6.10. КОМПЛЕКСНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Величина, обратная комплексному сопротивлению, называется комплексной проводимостью и обозначается  $\underline{Y} = G \mp jB$ , где  $G$  и  $B$  — вещественная и мнимая части комплексной проводимости соответственно.

Комплексная проводимость  $RL$ -цепи (см. 6.15, а)  $\underline{Y} = 1/\underline{Z} = 1/(R + jX_L)$ . Чтобы дробь, имеющую комплексное сопротивление в знаменателе, привести к виду  $\underline{Y} = \operatorname{Re}[\underline{Y}] + j \operatorname{Im}[\underline{Y}]$ , необходимо избавиться от мнимости в знаменателе, а затем получившееся выражение разложить на две части — вещественную и мнимую. Чтобы превратить знаменатель в вещественное число, необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на комплексное выражение, сопряженное с комплексом знаменателя. Как было показано выше, произведение комплексного числа на сопряженное с ним есть величина вещественная. Проведем все выкладки подробно:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{R + jX_L} = \frac{(R - jX_L)}{(R + jX_L)(R - jX_L)} = \frac{R - jX_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} - \\ &- j \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X_L}{Z^2} = G - jB, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где  $G = \frac{R}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{Z^2}$ ;  $B_L = -\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = -\frac{X_L}{Z^2}$ .

Таким образом, вещественная составляющая проводимости последовательной  $RL$ -цепи есть  $R/(R^2 + X_L^2)$ , а вовсе не величина, обратная  $R$ , как иногда неверно думают. Знак минус у мнимой составляющей проводимости указывает на ее индуктивный характер. Реактивная индуктивная составляющая есть  $-X_L/(R^2 + X_L^2)$ , а не величина, обратная значению  $X_L$ .

Проводимости для  $RC$ -цепи находятся аналогичным образом, причем емкостная проводимость имеет знак плюс. Как всякая комплексная величина, проводимость может быть представлена в алгебраической или показательной форме:

$$\underline{Y} = G \mp jB = Y e^{\mp j \arctg(B/G)} = \sqrt{G^2 + B^2} e^{\mp j \arctg(B/G)}, \quad (6.13)$$

причем минус относится к индуктивной проводимости, а плюс к емкостной. Последовательную  $RL$ -цепь можно заменить эквивалентной параллельной (рис. 6.17). При расчетах комплексных проводимостей следует иметь в виду, что если имеется уединенный элемент, т. е. элемент, последователь-

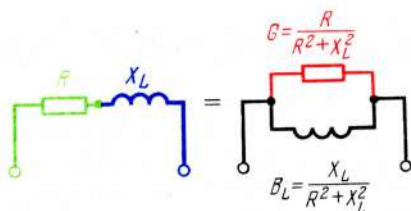


Рис. 6.17

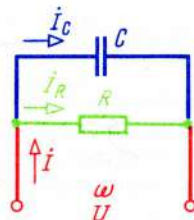


Рис. 6.18

но с которым не соединено никаких других элементов, то проводимость такой цепи представляет величину, обратную сопротивлению этого элемента. Действительно, если в цепи рис. 6.17  $X_L = 0$ , то, как видно из (6.12),  $G = 1/R$ , а если  $R = 0$ , то  $B = 1/X_L$ .

### 6.11. РАСЧЕТЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ $RL$ - И $RC$ -ЦЕПЕЙ

Если элементы в цепи соединены последовательно, то при расчетах чаще всего удобнее оперировать сопротивлениями и напряжениями, а если параллельно, то проводимостями и токами, хотя в ряде случаев можно поступать и иным образом, все зависит от конкретной задачи.

**Пример 6.8.** Рассчитать угол между входным напряжением и входным током в цепи рис. 6.18.

**Решение.** Рассчитаем входное комплексное сопротивление цепи, поделим комплексное входное напряжение на комплексное входное сопротивление и возьмем аргумент получившегося выражения:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{R \cdot 1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{Rj\omega C}{j\omega C(1 + j\omega RC)} = \frac{R}{1 + j\omega RC};$$

$$\dot{I} = \dot{U}/Z_{\text{вх}} = \frac{Ue^{j0^\circ}(1 + j\omega RC)}{R} = \frac{U}{R}(1 + j\omega RC).$$

Переведем данное комплексное выражение из алгебраической формы в показательную. Множитель  $U/R$  можно без всяких изменений переносить из одной формы в другую:

$$\dot{I} = \frac{U}{R} \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2} e^{j \arctg \omega RC}. \quad (6.14)$$

Поскольку входное напряжение имеет нулевую фазу, а фаза входного тока  $\psi_I = \arctg \omega \times RC$ , угол  $\varphi$  между входным напряжением  $\psi_U$  и входным током  $\psi_I$  определяется из выражения  $\varphi = \psi_U - \psi_I = 0 - \arctg \omega RC = -\arctg \omega RC$ . Отрицательный знак у фазного угла указывает на емкостный характер цепи.

Определить комплексный ток  $\dot{I}$  можно и несколько иным образом. Можно рассчитать комплексные токи  $\dot{I}_R$  и  $\dot{I}_C$ , а затем их сложить:

$$\dot{I}_R = \dot{U}/Z_R = U/R e^{j0^\circ} = U/R; \quad \dot{I}_C = \dot{U}j\omega C = \dot{U}\omega C e^{j90^\circ}$$



$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = U/R + j\omega C \dot{U} = \frac{U}{R} (1 + j\omega RC) = \frac{U}{R} \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2} e^{j \arctg \omega RC}.$$

Проанализируем полученное выражение. Если  $\omega = 0$ , то модуль емкостного сопротивления станет бесконечно большим ( $X_C = 1/\omega C$ , при  $\omega = 0$   $X_C = 1/0 = \infty$ ). Но это означает, что емкостная ветвь будет разомкнутой и цепь станет чисто резистивной. В этом случае модуль входного тока должен иметь значение  $U/R$  при нулевой фазе. Подставим в (6.13)  $\omega = 0$ . При этом  $\dot{I} = (U/R)e^{j0^\circ} = U/R$ , что и должно получиться. Если  $\omega = \infty$ , емкостное сопротивление становится равным 0, проводимость — бесконечно большой, модуль тока во входной цепи бесконечно большим, а входной фазный угол равным  $-90^\circ$ . Такие значения получаются, если в (6.13) подставить  $\omega = \infty$ .

## 6.12. МОЩНОСТЬ

При переменных воздействиях различают следующие виды мощностей: мгновенная  $p$  или  $p(t)$ , активная  $P$  или  $P_a$  (т. е. средняя), реактивная  $P_r$  или  $P_a$ , полная  $P_S$ , комплексная  $\underline{P}$ . Активную мощность часто называют просто "мощностью". Разберем эти понятия подробнее.

Мгновенная мощность  $p$  есть переменная величина, показывающая значение мощности в любой момент  $p = ui$ . Например, в резистивной цепи при  $u = U_m \sin \omega t$ ,  $i = I_m \sin \omega t$

$$p = ui = U_m I_m \sin^2 \omega t.$$

Поскольку

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad p = ui = U_m I_m \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right).$$

В цепи с чисто реактивным элементом (например,  $L$ ) при  $u = U_m \sin \omega t$ ,  $i = I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$

$$p = ui = U_m \sin \omega t I_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Так как  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ , то

$$\begin{aligned} p &= U_m I_m \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t + 90^\circ) - \cos(\omega t + \omega t - 90^\circ)] = \frac{1}{2} U_m I_m \times \\ &\times [\cos 90^\circ - \cos(2\omega t - 90^\circ)] = \frac{1}{2} U\sqrt{2} I\sqrt{2} [\cos(2\omega t + 90^\circ)] = \\ &= UI \cos(2\omega t + 90^\circ). \end{aligned}$$

В резистивно-реактивных цепях (например,  $RL$ ) при  $u = U_m \sin \omega t$ ,  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$

$$\begin{aligned} p &= U_m I_m \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \omega t - 90^\circ)] = U\sqrt{2} I\sqrt{2} \times \\ &\times [\cos \varphi - \cos(2\omega t - 90^\circ)] = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + 90^\circ). \end{aligned}$$

Мощностью  $P$  (или активной мощностью  $P_a$ ) называется среднее за период значение от мгновенных мощностей  $p(t)$ :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt. \quad (6.15)$$

(Подробнее см. гл. 2, формулы (2.8) – (2.9), пример 2.1.) В  $R$ -цепи  $P = U_m I_m / 2 = UI$ . В  $L$ - или  $C$ -цепях

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos(2\omega t + 90^\circ) dt = 0,$$

поскольку интеграл за период от любой гармонической функции равен 0. В  $RL$ - или  $RC$ -цепях

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t + 90^\circ)] dt = UI \cos \varphi = I^2 R = U^2 / R.$$

Реактивная мощность  $P_p = UI \sin \varphi = I^2 X = U^2 / X$  измеряется в вар. Единица "вар" является внесистемной, но по стандарту СЭВ–1052–78 допущенной к употреблению в электротехнике без ограничения времени использования.

Полная мощность  $P_S = \sqrt{P_a^2 + P_p^2}$  измеряется в вольтах умноженных на ампер ( $V \cdot A$ ).

Комплексная мощность, отдаваемая источником

$$\underline{P} = \dot{U} \dot{I}^* = P_a + jP_p, \quad (6.16)$$

где  $\dot{U}$  – комплексное действующее значение напряжения источника;  $\dot{I}^*$  – комплексное действующее значение тока, сопряженное с током, протекающим через источник;  $P_a$  и  $P_p$  – активная и реактивная мощности источника, причем положительное значение члена  $P_p$  указывает на индуктивный характер реактивной мощности, а отрицательное – на емкостный.

### 6.1.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

Два двухполюсника являются эквивалентными, если у них активные и реактивные мощности равны. Следует, однако, иметь ввиду, что эквивалентными эти цепи являются только по энергетическим свойствам, спектральные характеристики и все информационные свойства этих цепей совершенно различные. Так как  $P_a = U^2 / R$ , а  $P_p = U^2 / X$ , то при одном и том же входном напряжении эквивалентность цепей сводится к условиям  $\operatorname{Re} [Z_{\text{вх}1}] = \operatorname{Re} [Z_{\text{вх}2}]$  и  $\operatorname{Im} [Z_{\text{вх}1}] = \operatorname{Im} [Z_{\text{вх}2}]$ , т. е. к равенствам вещественных и мнимых составляющих входных комплексных сопротивлений обеих цепей. Введем понятие "схема замещения". *Схемой замещения* называется схема эквивалентного двухполюсника с минимальным числом элементов. Как правило, схема замещения состоит из одного резистивного и одного реактивного сопротивлений, соединенных последовательно или параллельно. Для нахождения схемы замещения необходимо: 1) записать

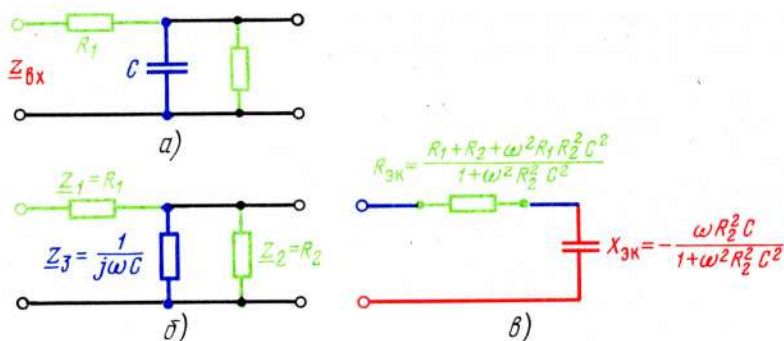


Рис. 6.19

выражение комплексного входного сопротивления исходной цепи; 2) привести это выражение к виду  $R_{\text{эк}} + jX_{\text{эк}}$ ; 3) нарисовать схему, соответствующую получившемуся эквивалентному комплексному сопротивлению  $R_{\text{эк}} + jX_{\text{эк}}$ .

**Пример 6.9.** Рассчитать схему замещения цепи, изображенной на рис. 6.19, а.

**Решение.** Перерисуем схему рис. 6.19, а в виде схемы рис. 6.19, б, в которой входное комплексное сопротивление  $Z_{\text{вх}} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$ . Подставим  $Z_1 = R_1$ ,  $Z_2 = R_2$ ,  $Z_3 = 1/j\omega C$  и произведем необходимые преобразования:

$$Z_{\text{вх}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot 1/j\omega C}{R_2 + 1/j\omega C} = R_1 + \frac{R_2 j\omega C}{j\omega C (1 + j\omega R_2 C)} = \frac{(R_1 + R_2) + j(\omega R_1 R_2 C)}{1 + j\omega R_2 C}.$$

Чтобы привести данное выражение к виду  $Z_{\text{вх}} = R_{\text{эк}} + jX_{\text{эк}}$ , необходимо избавиться от мнимости в знаменателе, для этого числитель и знаменатель умножим на комплексное выражение, сопряженное с комплексным выражением знаменателя, т. е. на  $(1 - j\omega R_2 C)$ ; тогда

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= \frac{[(R_1 + R_2) + j\omega R_1 R_2 C] (1 - j\omega R_2 C)}{(1 + j\omega R_2 C) (1 - j\omega R_2 C)} = \\ &= \frac{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C - j\omega R_1 R_2 C - j\omega R_2^2 C + \omega^2 R_1 R_2^2 C^2}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} = \\ &= \frac{R_1 + R_2 + \omega^2 R_1 R_2^2 C^2}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} - j \frac{\omega R_2^2 C}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$R_{\text{эк}} = \frac{R_1 + R_2 + \omega^2 R_1 R_2^2 C^2}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}, \quad X_{\text{эк}} = -\frac{\omega R_2^2 C}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}$$



(рис. 6.19, в). Знак минус в реактивной составляющей указывает на то, что эквивалентная реактивная составляющая имеет емкостный характер.

Как видно из полученных выражений, эквивалентное резистивное сопротивление зависит не только от сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  исходной цепи, но и от частоты  $\omega$  и значения емкости  $C$ . Аналогично реактивное сопротивление  $X_{\text{эк}}$  зависит не только от  $\omega$  и  $C$ , но и от резистивного сопротивления  $R_2$ . Объясним, почему так происходит. Пусть в исходной цепи рис. 6.19, а изменяется частота  $\omega$  или емкость  $C$ . При этом изменяется сопротивление ветви с конденсатором, а это приводит к перераспределению токов в ветвях цепи и, следовательно, к изменению мощностей в каждом элементе цепи. Поэтому сопротивление  $R_{\text{эк}}$  зависит от значения всех элементов, входящих в цепь, а не только от резистивных элементов. Аналогичным образом образуется сопротивление  $X_{\text{эк}}$ .

#### 6.14. ТРЕУГОЛЬНИКИ РЕЗИСТИВНЫХ, РЕАКТИВНЫХ И ПОЛНЫХ ВЕЛИЧИН

При расчете цепей приходится оперировать с напряжениями, сопротивлениями, токами, проводимостями, мощностями и рядом других электротехнических величин. Каждая из них может быть резистивной, реактивной и полной. При гармонических воздействиях резистивная и реактивная составляющие обязательно находятся под углом  $90^\circ$  друг к другу (рис. 6.20). Поэтому, вне зависимости от того, какая именно электротехническая величина находится, всегда можно пользоваться соотношениями, которые в общем виде выражаются следующими формулами:

$$\text{модуль полной величины (слово "величина" для краткости будем опускать)} = \sqrt{(\text{резистивная})^2 + (\text{реактивная})^2}; \quad (6.17)$$

$$\text{тангенс фазного угла} = \frac{\text{реактивная}}{\text{резистивная}}; \quad (6.18)$$

$$\text{косинус фазного угла} = \frac{\text{резистивная}}{\text{полная}}; \quad (6.19)$$

$$\text{синус фазного угла} = \frac{\text{реактивная}}{\text{полная}} \quad (6.20)$$

Если элементы цепи соединены последовательно, то оперировать следует с сопротивлениями и напряжениями, а если параллельно, то с проводимостями и токами. Например, для цепи рис. 6.19, в будут справедливы соотношения (для краткости записи индекс "эк" во всех выражениях опустим)

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \text{tg } \varphi = X/R;$$



Рис. 6.20

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{R}{Z}; \quad \sin \varphi = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{X}{Z};$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = U_X/U_R;$$

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{\sqrt{U_R^2 + U_X^2}} = \frac{U_R}{U_Z}; \quad \sin \varphi = \frac{U_X}{\sqrt{U_R^2 + U_X^2}} = \frac{U_X}{U_Z}.$$

Аналогичные соотношения можно выразить и через мощности:

$$P_S = \sqrt{P_a^2 + P_p^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{P_p}{P_a};$$

$$\cos \varphi = \frac{P_a}{\sqrt{P_a^2 + P_p^2}} = \frac{P_a}{P_S}; \quad \sin \varphi = \frac{P_p}{\sqrt{P_a^2 + P_p^2}} = \frac{P_p}{P_S}.$$

Для цепи рис. 6.18 справедливы выражения

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \text{где } G = 1/R, B = \omega C;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = B/G = I_B/I_G = P_p/P_a;$$

$$\cos \varphi = \frac{G}{\sqrt{G^2 + B^2}} = \frac{G}{Y} = \frac{I_G}{\sqrt{I_G^2 + I_B^2}} = \frac{P_a}{P_S};$$

$$\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{G^2 + B^2}} = \frac{B}{Y} = \frac{I_B}{\sqrt{I_G^2 + I_B^2}} = \frac{P_p}{P_S}$$

и т. д.

#### 6.15. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

При расчете цепей комплексным методом можно использовать все законы, правила и приемы, которые применялись при расчете резистивных цепей, но в комплексной форме, в том числе закон Ома, законы Кирхгофа, методы контурных токов, узловых напряжений, наложения, все виды преобразований и т. д. Например, закон Ома в комплексной форме имеет вид

$$\dot{I} = \dot{U}/Z, \quad (6.21)$$

первый закон Кирхгофа формулируется следующим образом: *сумма комплексных токов, притекающих к узлу или сечению, равна сумме комплексных токов, утекающих от узла или сечения:*

$$\Sigma \dot{I}_{\text{пр}} = \Sigma \dot{I}_{\text{ут}}. \quad (6.22)$$

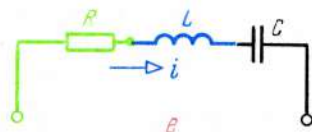


Рис. 6.21

Может иметь место и такая формулировка: *алгебраическая сумма комплексных токов в узлах или сечениях равна нулю:*

$$\sum \dot{I} = 0. \quad (6.23)$$

По второму закону Кирхгофа *алгебраическая сумма комплексных значений ЭДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме комплексных падений напряжений в этом же контуре:*

$$\sum \dot{E} = \sum \dot{U}. \quad (6.24)$$

Законы Кирхгофа справедливы для комплексных значений, но совершенно несправедливы для модулей этих выражений, на что уже обращалось внимание. Например,  $5e^{j37^\circ} + 10e^{-j53^\circ} = 11,2e^{-j26^\circ 30'}$ , но  $5 + 10 \neq 11,2$ .

Составим комплексное уравнение по второму закону Кирхгофа для последовательной RLC-цепи (рис. 6.21). В общем случае уравнение равновесия данной цепи имеет вид

$$u = u_R + u_L + u_C, \text{ или } e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (6.25)$$

Запишем комплексное изображение этого выражения. Для этого вместо мгновенных ЭДС и тока  $e$  и  $i$  следует записать соответствующие им комплексные напряжения  $\dot{E}$  и  $\dot{I}$ , величины, не зависящие от времени ( $R, L, C$ ), переписать без изменений, вместо производной по времени  $d/dt$  записать множитель  $j\omega$ , а вместо интеграла  $\int dt$  — множитель  $1/j\omega$ . Тогда уравнение (6.25) приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{E} &= R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}, \text{ или} \\ \dot{E} &= R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \dot{I} \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \dot{I} [R + j(X_L - X_C)] = \\ &= \dot{I} [R + jX] = \dot{I} \underline{Z}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Из (6.26) видно, что при составлении уравнений в комплексной форме перед резистивными сопротивлениями предполагается множитель "1", а перед реактивными "j". Затем производят операции по правилам расчета комплексных чисел.

**Пример 6.10.** Рассчитать комплексные токи в ветвях цепи рис. 6.22.

**Решение.** Рассчитаем входное комплексное сопротивление цепи.

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = R_1 + jX_1 + \frac{(R_2 + jX_2)(R_3 - jX_3)}{(R_2 + R_3) + j(X_2 - X_3)} = 10 + j6 +$$



$$\begin{aligned}
 &+ \frac{(15 + j20)(24 - j7)}{39 + j13} = 10 + j6 + \frac{25e^{j53^\circ 10'} \cdot 25e^{-j16^\circ 15'}}{41,1e^{j18^\circ 26'}} = 10 + j6 + \\
 &+ 15,2e^{j18^\circ 30'} = 10 + j6 + 15,2 \cos 18^\circ 30' + j15,2 \sin 18^\circ 30' = 10 + j6 + 14,4 + j4,82 + \\
 &+ 24,4 + j10,82 = 26,7e^{j23^\circ 55'}.
 \end{aligned}$$

Из полученного расчета следует, что схема замещения исследуемой цепи представляет резистивное сопротивление 24,4 Ом и индуктивное сопротивление 10,82 Ом, соединенные последовательно. Комплексный ток во входной цепи

$$\dot{I}_{\text{вх}} = \dot{I}_1 = \dot{U} / \underline{Z}_{\text{вх}} = 120e^{j0^\circ} / 26,7e^{j23^\circ 55'} = 4,5e^{-j23^\circ 55'}$$

Зная комплексный ток  $\dot{I}_1$ , а также сопротивления  $\underline{Z}_2$  и  $\underline{Z}_3$ , на которые ток  $\dot{I}_1$  разветвляется, можно рассчитать комплексные токи  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$ :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,5e^{-j23^\circ 55'} \frac{25e^{j53^\circ 10'}}{41,1e^{j18^\circ 26'}} = 2,734e^{-j58^\circ 35'}$$

$$\text{Аналогично } \dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{25e^{j53^\circ 10'}}{41,1e^{j18^\circ 26'}} = 2,734e^{j10^\circ 55'}.$$

Мгновенные токи  $i_1 = 4,5\sqrt{2} \sin(\omega t - 23^\circ 55')$ ;  $i_2 = 2,734\sqrt{2} \sin(\omega t - 58^\circ 35')$ ;  $i_3 = 2,734\sqrt{2} \sin(\omega t + 10^\circ 50')$ .

Проверим выполнение первого закона Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= \dot{I}_1; \quad 2,734e^{-j58^\circ 35'} + 2,734e^{j10^\circ 55'} = 2,734 \cos(-58^\circ 35') + j2,734 \times \\
 &\times \sin(10^\circ 55') = 2,734(0,522 - j0,853 + 0,9819 + j0,189) = 2,734(1,5039 - \\
 &- j0,6639) = 2,734 \cdot 1,6439e^{-j23^\circ 55'} = 4,5e^{-j23^\circ 55'} = \dot{I}_1.
 \end{aligned}$$

Аналогично можно проверить выполнение второго закона Кирхгофа.

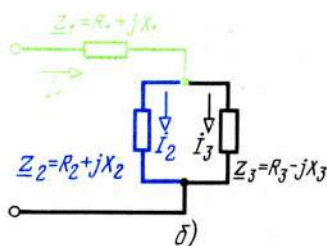
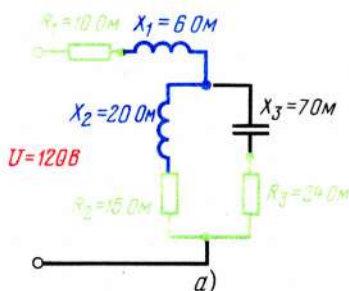


Рис. 6.22

Проверим баланс мощностей. Рассчитаем комплексную мощность, отдаваемую генератором:

$$\underline{P} = \dot{U} \dot{I}^* = 120 \cdot 4,5 e^{j23^\circ 55'} = 540 e^{j23^\circ 55'} = 540 \cos 23^\circ 55' + j 540 \sin 23^\circ 55' = 540 \cdot 0,914 + j 540 \cdot 0,405 = 493,5 + j 219.$$

Таким образом, генератор отдает 493,5 Вт активной мощности и 219 вар индуктивной реактивной мощности.

Мощность, рассеиваемая в резистивных сопротивлениях,

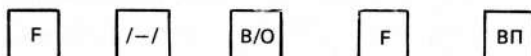
$$P_{a.n} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 4,5^2 \cdot 10 + 2,734^2 \cdot 15 + 2,734 \cdot 24 = 202 + 291,5 = 493,5 \text{ Вт.}$$

$$P_{Q.n} = I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 - I_3^2 X_3 = 4,5^2 \cdot 6 + 2,734^2 \cdot 20 - 2,734^2 \cdot 7 = 121,2 + 97,8 = 219 \text{ вар.}$$

#### 6.16. РАСЧЕТЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММИРУЕМОГО МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА

Расчеты комплексных чисел удобно производить с помощью программируемого калькулятора. Приводим универсальную программу 6.1, позволяющую выполнять операции сложения, вычитания, умножения, деления, нахождения обратных величин, перехода от алгебраической формы комп-

Программа 6.1 для операций с комплексными числами



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x → П2 42	КБП2 82	П → xC 6Г	/-/ 0Г	x → ПС 4Г	П → xД 6Г	/-/ 0Г	x → ПД 4Г	П → xД 6Г	П → xВ 6Г
1	+ 10	x → ПВ 4Г	П → xA 6-	П → xC 6Г	+ 10	x → ПА 4-	С/П 50	ПП 53	20 20	С/П 50
2	П → xC 6Г	F x 22	П → xД 6Г	F x 22	+ 10	F ÷ 23	↑ 0Е	П → xД 6Г	/-/ 0Г	x 12
3	x → ПД 4Г	xy 14	П → xC 6Г	x 12	x → ПС 4Г	В/О 52	ПП 53	20 20	П → xВ 6Г	П → xД 6Г
4	x 12	П → xВ 6Г	П → xC 6Г	x 12	П → xA 6-	П → xД 6Г	x 12	+ 10	x → ПВ 4Г	F A 25
5	П → xA 6-	П → xC 6Г	x 12	- 11	/-/ 0Г	x → ПА 4-	С/П 50	П → xA 6-	F x 22	П → xВ 6Г
6	F x 22	+ 10	F - 21	x → П1 41	F С/П 57	82 82	П → xВ 6Г	xy 14	÷ 13	F 4 19
7	x → ПО 40	П → xA 6-	F x < 0 5Г	80 80	1 01	8 08	0 00	П → x0 60	- 11	x → ПО 40
8	П → x1 61	С/П 50	x → ПО 40	x → П1 41	С/П 50	П → x0 60	F 7 1Г	П → x1 61	x 12	x → ПВ 4Г
9	П → x0 60	F 8 1Г	П → x1 61	x 12	x → ПА 4-	С/П 50	F	/-/		

лексного числа к показательной и обратно. Будем использовать следующие обозначения:

при сложении  $(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (d + jm)$ ;

при вычитании  $(a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (d + jm)$ ;

при умножении  $(a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (d + jm)$ ;

при делении  $(a_1 + jb_1) : (a_2 + jb_2) = (d + jm)$ ;

при нахождении обратных величин  $1/(a_0 + jb_0) = (d + jm)$ ;

при переходе алгебраической формы в показательную  $(a_0 + jb_0) = Me^{j\psi}$ ;

при переходе из показательной формы в алгебраическую  $Me^{j\psi} = (d + jm)$ .

Ввод исходных данных для операций сложения, вычитания, умножения, деления:  $a_1 = RGA$ ,  $b_1 = RGB$ ,  $a_2 = RGC$ ,  $b_2 = RGD$ . Запуск на счет: сложение  $\boxed{9} \boxed{B/O} \boxed{C/\Pi}$ ; вычитание  $\boxed{3} \boxed{B/O} \boxed{C/\Pi}$ , умножение  $\boxed{3} \boxed{9} \boxed{B/O} \boxed{C/\Pi}$ ; деление  $\boxed{3} \boxed{7} \boxed{B/O} \boxed{C/\Pi}$ . Вывод результатов для всех указанных операций:  $d$  – на индикаторе,  $m = RGB$  (т. е.  $d = RGA = RGX$ ,  $m = RGB$ ).

Для операции обращения (т. е. нахождения величины, обратной данному комплексному выражению) ввод:  $a_0 = RGC$ ,  $b_0 = RGD$ , запуск  $\boxed{1} \boxed{8} \boxed{B/O} \boxed{C/\Pi}$ , вывод:  $d$  – на индикаторе,  $m = RGD$  (т. е.  $RGC = RGX = d$ ,  $RGD = m$ ).

Перевод из формы алгебраической в показательную. Ввод:  $a_0 = RGA$ ,  $b_0 = RGB$ , запуск  $\boxed{5} \boxed{8} \boxed{B/O} \boxed{C/\Pi}$ , вывод:  $M$  – на индикаторе,  $\psi = RG0$  (т. е.  $RG1$ ,  $RGX = M$ ,  $RG0 = \psi$ ).

Перевод из формы показательной в алгебраическую. Ввод:  $M = RG1$ ,  $\psi = RG0$ , запуск  $\boxed{8} \boxed{6} \boxed{B/O} \boxed{C/\Pi}$ , вывод:  $d$  – на индикаторе,  $m = RGB$  (т. е.  $RGA = RGX = d$ ,  $RGB = m$ ).

#### 6.17. РАСЧЕТЫ С ПОМОЩЬЮ ПМК ЦЕПЕЙ, ТРЕБУЮЩИХ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КОМПЛЕКСНЫХ УРАВНЕНИЙ

В ряде случаев для расчета цепей необходимо решить систему уравнений с комплексными коэффициентами. Например, уравнения для цепи рис. 6.22, составленные методом контурных токов, представляют систему двух комплексных уравнений с двумя неизвестными (токи  $\dot{I}_A$  и  $\dot{I}_B$ ), а при составлении уравнений по законам Кирхгофа – три уравнения с тремя неизвестными. Действительно, по методу контурных токов

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{I}_A (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \dot{I}_B \underline{Z}_2, \\ 0 = \dot{I}_B (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \dot{I}_A \underline{Z}_1, \end{cases}$$

а по законам Кирхгофа

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3, \\ \dot{U} = \dot{I}_1 \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2, \\ 0 = -\dot{I}_2 \underline{Z}_2 + \dot{I}_3 \underline{Z}_3. \end{cases}$$



Расчеты уравнений с комплексными коэффициентами ручными методами требуют больших затрат времени, повышенной внимательности. Использование вычислительной техники резко сокращает трудоемкость вычислительных работ, повышает точность и достоверность при значительной экономии времени.

Приводим программу 6.2 для расчета системы двух уравнений и программу 6.3 для расчета трех уравнений с комплексными коэффициентами.

Программа 6.2 дает возможность рассчитать корни двух алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами вида

$$\begin{cases} \underline{A}_1 \underline{X}_1 + \underline{B}_1 \underline{X}_2 = \underline{D}_1, \\ \underline{A}_2 \underline{X}_1 + \underline{B}_2 \underline{X}_2 = \underline{D}_2. \end{cases}$$

Программа 6.2 для расчета системы двух уравнений с комплексными коэффициентами

	F		/-/		B/O		F		BП	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	П → xA 6 —	x → П7 47	П → xB 6L	x → П4 44	ПП 53	44 44	x → П8 48	П → xB 6L	x → П5 45	П → x1 61
1	x → ПА 4—	П → x0 60	x → ПB 4L	П → x2 62	x → ПC 4C	П → x3 63	x → ПД 4Г	ПП 53	44 44	П → x8 68
2	x → ПC 4C	П → x5 65	x → ПД 4Г	ПП 53	53 53	x → П2 42	П → xB 6L	x → П3 43	П → x7 67	x → ПC 4C
3	П → x4 64	x → ПД 4Г	ПП 53	68 68	x → ПC 4C	П → xB 6L	x → ПД 4Г	П → x1 61	x → ПА 4—	П → x0 60
4	x → ПB 4L	ПП 53	44 44	C/П 50	П → xB 6L	П → xД 6Г	— 11	x → ПB 4L	П → xA 6—	П → xC 6C
5	— 11	x → ПА 4—	B/O 52	П → xC 6C	F x 22	П → xД 6Г	F x 22	+ 10	F ÷ 23	↑ 0E
6	П → xД 6Г	/-// 0L	x 12	x → ПД 4Г	xу 14	П → xC 6C	x 12	x → ПC 4C	П → xB 6L	П → xД 6Г
7	x 12	П → xB 6L	П → xC 6C	x 12	П → xA 6—	П → xД 6Г	x 12	+ 10	x → ПB 4L	F A 25
8	П → xA 6—	П → xC 6C	x 12	— 11	/-// 0L	x → ПА 4—	B/O 52	ПП 53	53 53	C/П 50
9	ПП 53	68 68	C/П 50	F	/-// 0L					

Заданные уравнения, прежде всего, следует преобразовать, поделив все члены первой строки на коэффициент  $\underline{A}_1$ , а все члены второй строки на  $\underline{A}_2$ , т. е. привести к виду

$$\underline{X}_1 + \frac{\underline{B}_1}{\underline{A}_1} \underline{X}_2 = \frac{\underline{D}_1}{\underline{A}_1}; \quad \underline{X}_1 + \frac{\underline{B}_2}{\underline{A}_2} \underline{X}_2 = \frac{\underline{D}_2}{\underline{A}_2}.$$

Обозначим  $q_1 = B_1/A_1$ ;  $q_{10} = D_1/A_1$ ;  $q_2 = B_2/A_2$ ;  $q_{20} = D_2/A_2$ ; тогда уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \underline{X}_1 + \underline{q}_1 \underline{X}_2 = \underline{q}_{10}, \\ \underline{X}_1 + \underline{q}_2 \underline{X}_2 = \underline{q}_{20}, \end{cases}$$

причем  $\underline{q}_1 = q_1' + jq_1''$ ;  $\underline{q}_{10} = q_{10}' + jq_{10}''$ ;  $\underline{q}_2 = q_2' + jq_2''$ ;  $\underline{q}_{20} = q_{20}' + jq_{20}''$ .

Для деления комплексных чисел можно использовать эту же программу в соответствии с уравнениями  $(a_1 + jb_1) : (a_2 + jb_2) = (d + jm)$ .

Исходные данные для операции деления вводятся следующим образом:

$$a_1 = RGA, b_1 = RGB, a_2 = RGC, b_2 = RGD.$$

Пуск производится нажатием клавиш  $\boxed{\text{БП}}$   $\boxed{8}$   $\boxed{7}$   $\boxed{\text{С/П}}$ . По окончании счета на индикаторе высвечивается значение  $d$ , находящееся в  $RGA$ , значение  $m$  находится в  $RGB$  (т. е.  $RGX = RGA$ ,  $RGA = d$ ,  $RGB = m$ ). Приведя уравнения к нормальному виду, следует ввести исходные данные для решения системы

$$q_1' = RGA, q_1'' = RGB, q_{10}' = RG1, q_{10}'' = RG0,$$

$$q_2' = RGC, q_2'' = RGD, q_{20}' = RG2, q_{20}'' = RG3.$$

Пуск программы выполняется нажатием клавиш  $\boxed{\text{В/О}}$   $\boxed{\text{С/П}}$ . При останове на индикаторе высвечивается вещественная часть первой переменной ( $X_1'$ ), находящейся в регистре  $RGA$  (т. е.  $X_1' = RGX = RGA$ ), остальные результаты находятся:  $RGB = X_1''$ ,  $RG2 = X_2'$ ,  $RG3 = X_2''$ . Время счета порядка 45 с.

Приведенная программа позволяет также производить умножение комплексных чисел в соответствии с выражениями  $(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (d + jm)$ . Ввод исходных данных:  $a_1 = RGA$ ,  $b_1 = RGB$ ,  $a_2 = RGC$ ,  $b_2 = RGD$ .

Пуск на умножение производится с клавиш  $\boxed{\text{БП}}$   $\boxed{9}$   $\boxed{0}$   $\boxed{\text{С/П}}$ . При останове счета на индикаторе высвечивается вещественная часть  $d$ , находящаяся в регистре  $A$  (т. е.  $d = RGX = RGA$ ), мнимая составляющая  $m$  находится в регистре  $B$  ( $m = RGB$ ).

Контрольный пример:

$$\begin{cases} \underline{X}_1 + (3 - j4)\underline{X}_2 = (21 + j7), \\ \underline{X}_1 + (-5 + j2)\underline{X}_2 = -(19 + j13). \end{cases}$$

Решение данной системы приводит к выражениям  $\underline{X}_1 = -1 + j3$ ;  $\underline{X}_2 = 2 + j4$ .

Программа 6.3 предназначена для определения комплексных значений переменных  $\underline{X}_1$ ,  $\underline{X}_2$  и  $\underline{X}_3$  в системе

$$\begin{cases} a_{11} \underline{X}_1 + a_{12} \underline{X}_2 + a_{13} \underline{X}_3 = b_1, & (C1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} \underline{X}_1 + a_{22} \underline{X}_2 + a_{23} \underline{X}_3 = b_2, & (C2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} \underline{X}_1 + a_{32} \underline{X}_2 + a_{33} \underline{X}_3 = b_3. & (C3) \end{cases}$$

Для краткости первую строку системы будем называть (C1), вторую (C2), третью (C3).

Поскольку программа решения такой задачи занимает более 98 шагов и в память калькулятора помещена быть не может, данная задача решается по частям. Для этого исходная система со строками (C1), (C2), (C3), заменяется двумя подсистемами (H1) и (H23) вида

$$\underline{X}_1 + \underline{S}_2 \underline{X}_2 + \underline{S}_3 \underline{X}_3 = \underline{S}_0, \quad (\text{H1})$$

$$\begin{cases} \underline{X}_2 + \underline{d}_{23} \underline{X}_3 = \underline{d}_{20}, \\ \underline{X}_2 + \underline{d}_{33} \underline{X}_3 = \underline{d}_{30}. \end{cases} \quad (\text{H2})$$

$$(\text{H3})$$

Как видно из приведенных уравнений, система (H23) содержит только две переменные,  $\underline{X}_2$  и  $\underline{X}_3$ , и, следовательно, может быть рассчитана по предыдущей программе. Зная  $\underline{X}_2$  и  $\underline{X}_3$ , можно найти  $\underline{X}_1$  из выражения  $\underline{X}_1 = \underline{S}_0 - \underline{S}_2 \underline{X}_2 - \underline{S}_3 \underline{X}_3$ , что следует из уравнения (H1). Задача, таким образом, сводится прежде всего к тому, чтобы по заданным комплексным значениям  $a_{11}, a_{12}, \dots, b_2, b_3$  найти новые комплексные значения  $\underline{S}_2, \underline{S}_3, \underline{S}_0, \underline{d}_{23}, \underline{d}_{20}, \underline{d}_{33}, \underline{d}_{30}$ . Запишем в память калькулятора программу.

Программа 6.3 для расчета системы трех уравнений с комплексными коэффициентами

F    /-/    В/О    F    ВП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	ПП 53	62 62	ПП 53	78 78	П→x7 67	— 11	x→П7 47	П→xB 6L	П→x4 64	— 11
1	x→П4 44	П→x2 62	x→ПА 4—	П→x3 63	x→Пв 4L	ПП 53	78 78	П→x8 68	— 11	x→П8 48
2	П→xB 6L	П→x5 65	— 11	x→П5 45	П→x1 61	x→ПА 4—	П→x0 60	x→Пв 4L	ПП 53	78 78
3	П→x9 69	— 11	x→П9 49	П→xB 6L	П→x6 66	— 11	x→П6 46	С/П 50	F С/П 57	00 00
4	П→x7 67	x→ПС 4C	П→x4 64	x→ПД 4Г	ПП 53	62 62	П→x8 68	x→ПА 4—	П→x5 65	x→Пв 4L
5	ПП 53	78 78	x→П2 42	П→xB 6L	x→П3 43	П→x9 69	x→ПА 4—	П→x6 66	x→Пв 4L	ПП 53
6	78 78	С/П 50	П→xC 6C	F x 22	П→xD 6Г	F x 22	+ 10	F ÷ 23	↑ 0E	П→xD 6Г
7	/-/ 0L	x 12	x→ПД 4Г	xу 14	П→xC 6C	x 12	x→ПС 4C	В/О 52	П→xB 6L	П→xD 6Г
8	x 12	П→xB 6L	П→xC 6C	x 12	П→xA 6—	П→xD 6Г	x 12	+ 10	x→Пв 4L	F A 25
9	П→xA 6—	П→xC 6C	x 12	— 11	/-/ 0L	x→ПА 4—	В/О 52	F	/-/ 0L	

Запишем ноль в регистры RG4, RG5, RG6, RG7, RG8, RG9, для этого следует нажать клавиши

0    x→П    4    x→П    5    x→П    6    x→П    7    x→П    8    x→П    9



Занесем в память калькулятора комплексные коэффициенты и правую часть уравнения C1:  $\underline{a}_{11} = a'_{11} + ja''_{11}$ ,  $\underline{a}_{12} = a'_{12} + ja''_{12}$ ,  $\underline{a}_{13} = a'_{13} + ja''_{13}$ ,  $\underline{b}_1 = b'_1 + jb''_1$ , причем  $a'_{11} = RGC$ ,  $a''_{11} = RGD$ ,  $a'_{12} = RGA$ ,  $a''_{12} = RGB$ ,  $a'_{13} = RG2$ ,  $a''_{13} = RG3$ ,  $b'_1 = RG1$ ,  $b''_1 = RG0$ .

Пуск на счет производится нажатием клавиш  $\boxed{B/O}$   $\boxed{C/\Pi}$ . Произведенный счет дает комплексные коэффициенты уравнения H1:

$$\underline{S}_2 = \underline{S}'_2 + j\underline{S}''_2, \underline{S}_3 = \underline{S}'_3 + j\underline{S}''_3, \underline{S}_0 = \underline{S}'_0 + j\underline{S}''_0, \text{ причем } RG7 = \underline{S}'_2, RG4 = \underline{S}'_3, RG8 = \underline{S}'_3, RG5 = \underline{S}''_3, RG9 = \underline{S}'_0, RG6 = \underline{S}''_0.$$

Запишем подсчитанные результаты и составим уравнение (H1). Занесем в память калькулятора комплексные коэффициенты и правую часть уравнения C2:  $\underline{a}_{21} = a'_{21} + ja''_{21}$ ,  $\underline{a}_{22} = a'_{22} + ja''_{22}$ ,  $\underline{a}_{23} = a'_{23} + ja''_{23}$ ,  $\underline{b}_2 = b'_2 + jb''_2$ , причем  $a'_{21} = RGC$ ,  $a''_{21} = RGD$ ,  $a'_{22} = RGA$ ,  $a''_{22} = RGB$ ,  $a'_{23} = RG2$ ,  $a''_{23} = RG3$ ,  $b'_2 = RG1$ ,  $b''_2 = RG0$ .

Зашлем ноль в операционный регистр X и пустим программу на счет; для этого следует нажать клавиши  $\boxed{0}$   $\boxed{C/\Pi}$ . После останова запишем в операционный регистр X число, отличное от нуля (например, 5) и пустим программу на счет нажатием клавиш  $\boxed{5}$   $\boxed{C/\Pi}$ . После выполнения счета и останова будут получены комплексные коэффициенты уравнения H2:  $\underline{d}_{23} = d'_{23} + jd''_{23}$ ,  $\underline{d}_{20} = d'_{20} + jd''_{20}$ , причем  $RG2 = d'_{23}$ ,  $RG3 = d''_{23}$ ,  $RGA = d'_{20}$ ,  $RGB = d''_{20}$ .

Занесем в память комплексные коэффициенты и правую часть уравнения (H1), причем  $\underline{S}'_2 = RG7$ ,  $\underline{S}''_2 = RG4$ ,  $\underline{S}'_3 = RG8$ ,  $\underline{S}''_3 = RG5$ ,  $\underline{S}'_0 = RG9$ ,  $\underline{S}''_0 = RG6$ . Занесем в память комплексные коэффициенты и правую часть уравнения (C3):  $\underline{a}_{31} = a'_{31} + ja''_{31}$ ,  $\underline{a}_{32} = a'_{32} + ja''_{32}$ ,  $\underline{a}_{33} = a'_{33} + ja''_{33}$ ,  $\underline{b}_3 = b'_3 + jb''_3$ , причем  $a'_{31} = RGC$ ,  $a''_{31} = RGD$ ,  $a'_{32} = RGA$ ,  $a''_{32} = RGB$ ,  $a'_{33} = RG2$ ,  $a''_{33} = RG3$ ,  $b'_3 = RG1$ ,  $b''_3 = RG0$ .

Пустим программу на счет нажатием клавиш  $\boxed{B/O}$   $\boxed{C/\Pi}$ . После останова запишем в операционный регистр X число, отличное от нуля (например, 5) и пустим программу на счет нажатием клавиш  $\boxed{5}$   $\boxed{C/\Pi}$ . После останова вывести из регистров и записать комплексные коэффициенты и правую часть уравнения (H3):  $\underline{d}_{33} = d'_{33} + jd''_{33}$ ,  $\underline{d}_{30} = d'_{30} + jd''_{30}$ , причем  $RG2 = d'_{33}$ ,  $RG3 = d''_{33}$ ,  $RGA = d'_{30}$ ,  $RGB = d''_{30}$ .

После произведенных вычислений на калькуляторе набирают программу для решения двух уравнений с комплексными членами (см. Программу 6.2) и находят переменные  $\underline{X}_2$  и  $\underline{X}_3$ . Зная  $\underline{X}_2$  и  $\underline{X}_3$ , из уравнения (H1) легко подсчитать переменную  $\underline{X}_1$ .

Контрольный пример:

$$\begin{cases} (5+j3)\dot{I}_1 - (2+j5)\dot{I}_2 + (1-j2)\dot{I}_3 = -(7+j36), \\ -(2+j5)\dot{I}_1 + (5-j3)\dot{I}_2 + (3-j4)\dot{I}_3 = -(3+j28), \\ (1-j2)\dot{I}_1 + (3-j4)\dot{I}_2 + (6-j4)\dot{I}_3 = -(4+j48). \end{cases}$$

Выполнив вычисления по программе 6.3, получим преобразованные уравнения:

$$\begin{aligned} & -\dot{I}_1 + (0,7352941 + j0,55882352)\dot{I}_2 + (0,0291176 + j0,38235293)\dot{I}_3 = \\ & = (4,2058822 + j4,6764705); \dot{I}_2 + (0,68467155 + j0,0671533)\dot{I}_3 = \\ & = (5,2686132 - j2,7386861); \dot{I}_2 + (1,0703269 + j0,32572482)\dot{I}_3 = \\ & = 6,3028989 - j4,2813075). \end{aligned}$$

На калькуляторе должны получиться значения:

$$\dot{I}_1 = 1,0000002 - j1,9999999; \dot{I}_2 = 5,0000006 + j10^{-7}; \dot{I}_3 = -9 \cdot 10^{-7} - j3,9999998, \text{ т. е. } \dot{I}_1 = 1 - j2; \dot{I}_2 = 5; \dot{I}_3 = -j4.$$

#### 6.18. ПАССИВНЫЕ ФАЗОСДВИГАЮЩИЕ ЦЕПИ

*Фазосдвигающими* цепями называются четырехполюсники, у которых начальная фаза выходного напряжения  $\psi_{U2}$  сдвинута относительно начальной фазы входного напряжения  $\psi_{U1}$ . Четырехполюсники, у которых можно в широких пределах изменять разность начальных фаз, называют *фазовращателями*. Как правило, бывает желательно, чтобы фазу выходного напряжения можно было бы изменять не менее чем на  $90^\circ$ , при неизменном значении модуля коэффициента передачи.

**Простая пассивная фазосдвигающая цепь.** Каждая цепь, содержащая индуктивность или емкость, в определенной степени сдвигает фазу выходного напряжения относительно входного. Например, в цепи рис. 6.23 комплексный коэффициент передачи  $\underline{K}$  определяют из выражения

$$K = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega C}{j\omega C(1 - \omega RC)} = \frac{1}{1 - j\omega RC},$$

откуда модуль передаточной функции  $K = 1/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ , а аргумент  $\varphi_K = -\arctg \omega RC$ .

Из данных выражений видно, что при изменении любого параметра цепи ( $R$  или  $C$ ) изменение фазного угла сопровождается изменением модуля коэффициента передачи. Чем больший необходимо получить фазный угол, тем меньшим оказывается модуль коэффициента передачи и тем труднее работать с таким фазовращателем.

Для получения в данной цепи фазного угла  $90^\circ$  необходимо увеличивать  $R$  или  $C$  до бесконечности, что в реальных условиях также мало удобно.

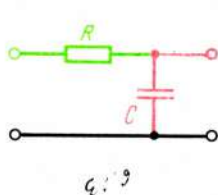


Рис. 6.23

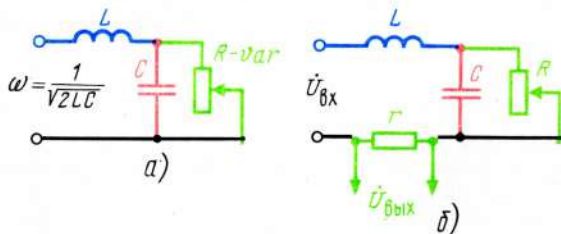


Рис. 6.24

К тому же при  $R = \infty$   $K = 0$ , поэтому цепь теряет свой смысл. Подобные простейшие цепи используются в качестве фазосдвигающих в ограниченных случаях.

**Пассивный фазовращатель на постоянной частоте.** С помощью цепи, показанной на рис. 6.24, а, можно получить сдвиг фаз в широких пределах при постоянном модуле коэффициента передачи, но только на одной, вполне определенной частоте  $\omega = 1/\sqrt{2LC}$ . Покажем, что при изменении сопротивления  $R$  от 0 до  $\infty$  фазный угол между входным напряжением и входным током в данной цепи изменяется от  $+90^\circ$  до  $-90^\circ$  при неизменном значении тока во входной цепи. Запишем комплексное входное сопротивление цепи:  $Z_{\text{вх}} = j\omega L + (R \parallel j\omega C) / (R + 1/j\omega C)$ . После простых алгебраических преобразований оказывается

$$Z_{\text{вх}} = \frac{0,5R + j\omega L}{1 + j\omega RC}, \quad (6.27)$$

откуда

$$Z_{\text{вх}} = \sqrt{\frac{R^2/4 + \omega^2 L^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Подставив  $\omega^2 = 1/2LC$  и произведя преобразования, получим

$$Z_{\text{вх}} = \sqrt{\frac{(2L + R^2 C) 2L}{4C(2L + R^2 C)}} = \sqrt{\frac{L}{2C}} = \text{const},$$

т. е. модуль входного сопротивления не зависит от сопротивления  $R$ . Как известно, если

$$Z_{\text{вх}} = \frac{A + jB}{D + jF} = \frac{(AD + BF) + j(BD - AF)}{D^2 + F^2}, \quad (6.28)$$

$$\text{то } \varphi_{Z_{\text{вх}}} = \arctg \left[ \frac{BD - AF}{AD + BF} \right]. \quad (6.29)$$

Подставив в (6.29) значения из (6.27), получим

$$\varphi_{Z_{\text{вх}}} = \arctg \left[ \frac{\omega L - 0,5R\omega RC}{0,5R + \omega L\omega RC} \right].$$

После подстановки  $\omega = 1/\sqrt{2LC}$  и преобразований оказывается

$$\varphi_{Z_{\text{вх}}} = \arctg \left[ \frac{2L - R^2 C}{2R\sqrt{2LC}} \right] = \arctg \left[ \frac{(2L/R^2) - C}{2/R\sqrt{2LC}} \right]. \quad (6.30)$$

При  $R = 0$   $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = \arctg \infty = 90^\circ$ . При  $R = \infty$   $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = \arctg(-\infty) = -90^\circ$ . При  $R = \sqrt{2L/C}$   $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = 0$ . Таким образом, при изменении в цепи рис. 6.24, а сопротивления  $R$  от 0 до  $\infty$  фазный угол между напряжением и током во входной цепи изменяется от  $+90^\circ$  до  $-90^\circ$ . Полученные соотношения будут справедливыми, если резистивное сопротивление катушки индуктивности равно 0, а частота  $\omega$  фиксированна и равна  $1/\sqrt{2LC}$ . Чтобы с помощью данной цепи изменить фазный угол между входным и выходным напряжениями, необходимо во входную ветвь включить резистивное сопротивление  $r$ , с



которого снять выходное напряжение, совпадающее по фазе с током в этой ветви (рис. 6.24, б). Однако сопротивление  $r$  должно быть достаточно малым, т. е. таким, при котором выполняется условие  $r \ll \omega L = \sqrt{L/2C}$ . Только в этом случае включение сопротивления практически не изменяет соотношений, полученных выше. Но при малом сопротивлении  $r$  падение напряжения на нем получается также малым, т. е. коэффициент передачи такого фазовращателя оказывается значительно меньше единицы, что влечет за собой ряд неудобств.

### 6.19. АКТИВНЫЙ ФАЗОВРАЩАТЕЛЬ

От недостатков, присущих пассивным фазовращателям, свободен активный четырехполюсник, схема которого показана на рис. 6.25, а, а эквивалентная схема — на рис. 6.25, б. Рассчитаем комплексный коэффициент передачи данной цепи. По второму закону Кирхгофа

$$R_3 \dot{I}_1 - R_1 \dot{I}_2 = 0. \quad (6.31)$$

По закону Ома

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_3 + 1/j\omega C} = \frac{j\omega C \dot{U}_1}{1 + j\omega R_3 C}, \quad (6.32)$$

$$\dot{I}_2 = (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)/(R_1 + R_2).$$

Так как в схеме фазовращателя  $R_1 = R_2 = R$ , то

$$\dot{I}_2 = (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)/2R. \quad (6.33)$$

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим

$$\frac{R_3 j\omega C \dot{U}_1}{1 + j\omega R_3 C} = \frac{R (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)}{2R}.$$

В каждой дроби произведение крайних членов равно произведению средних, т. е.

$$j2\omega R_3 C \dot{U}_1 = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 + j\omega R_3 C \dot{U}_1 - j\omega R_3 C \dot{U}_2, \quad \text{или} \\ \dot{U}_2 (1 + j\omega R_3 C) = \dot{U}_1 (1 - j\omega R_3 C).$$

Комплексный коэффициент передачи

$$\underline{K} = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = \frac{1 - j\omega R_3 C}{1 + j\omega R_3 C},$$

откуда модуль коэффициента передачи

$$K = \sqrt{\frac{1 + (\omega R_3 C)^2}{1 + (\omega R_3 C)^2}} = 1 = \text{const.}$$

Определим выражение для разности начальных фаз между выходным и входным напряжениями, т. е. закон аргумента комплексного коэффициента передачи  $\varphi_K = \psi_{U2} - \psi_{U1}$ . Поскольку начальную фазу входного напряжения принимаем за нулевую ( $\psi_{U1} = 0$ ),

$$\varphi_K = \psi_{U2} = -\arctg \omega R_3 C - \arctg \omega R_3 C = -2 \arctg \omega R_3 C.$$

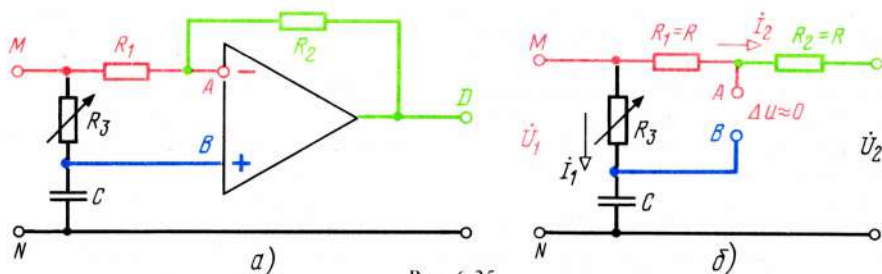


Рис. 6.25

Таким образом, при изменении  $R_3$  от 0 до  $\infty$  передаточная фазочастотная характеристика изменяется от 0 до  $-180^\circ$ . Регулировку фазы производят чаще всего изменением резистивного сопротивления  $R_3$ . Для получения сдвига  $90^\circ$  значение  $R_3$  необходимо изменять от 0 до  $1/\omega C$ , что значительно проще, чем от 0 до  $\infty$ , как требуется в пассивных фазосдвигающих цепях.

**Пример 6.11.** Рассчитать сопротивление  $R$ , при котором  $\varphi_K = |90^\circ|$ , если  $f = 2$  кГц,  $C = 30$  нФ.

**Решение.**  $R = 1/2\pi fC = 1/6,28 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-9} = 2,6$  кОм.

Приведем сравнительные характеристики пассивных и активных фазовращателей:

#### Пассивный

1. Модуль коэффициента передачи постоянен только при частоте  $\omega = 1/\sqrt{2LC}$  и имеет значение много меньше единицы.
2. Необходима индуктивность с точно определенным значением.
3. В микронном исполнении выполнен быть не может.
4. Для получения сдвига фаз на  $90^\circ$  необходимо изменять резистивное сопротивление от 0 до  $\infty$ .

#### Активный

1. Модуль коэффициента передачи постоянен при любой частоте и равен единице.
2. Индуктивность не требуется.
3. Может быть выполнен в микронном исполнении.
4. Для получения сдвига фаз на  $90^\circ$  резистивное сопротивление необходимо изменять от 0 до  $1/\omega C$ .

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие напряжения (токи) называют гармоническими?
2. Каков принцип действия машинных генераторов синусоидального напряжения? Каковы недостатки кривых напряжений (токов), вырабатываемых машинными генераторами?
3. Как связаны частота  $f$  и период  $T$  гармонических сигналов?
4. Как связаны между собой размах, максимальное и действующее значения напряжения (токов) при гармонической форме?
5. Что называют фазой гармонического напряжения (тока), что принимают под понятием "начальная фаза"? Нарисуйте кривые гармонических сигналов, сдвинутые относительно друг друга по фазе. Объясните, какие кривые являются опережающими и какие отстающими.

6. Каким образом экспериментально с помощью осциллографа определяют частоту напряжения переменного тока?
7. Как строят векторные диаграммы гармонических напряжений (токов)?
8. Как определяют мгновенные значения напряжений (токов) с помощью векторных диаграмм?
9. В чем состоят принципы операций с векторами символическим методом?
10. Чем отличаются арифметическая, алгебраическая, геометрическая суммы друг от друга? Приведите примеры.
11. Чем отличаются комплексные значения величины от его модуля?
12. Какие комплексные величины называются сопряженными? Приведите примеры.
13. Покажите алгебраическую, показательную и тригонометрическую формы комплексного числа. Приведите примеры.
14. Покажите, каким образом складывают, вычитают, умножают и делят комплексные числа? Приведите примеры.
15. Комплексные величины  $\pm j$  запишите в показательной форме.
16. Запишите в алгебраической форме комплексные выражения:  $\dot{A} = \pm A e^{\pm j\psi}$
17. Докажите, что  $j = \sqrt{-1}$ .
18. Каким образом можно изменить знак у комплексного числа на противоположный?
19. Как записать уравнение мгновенных значений напряжений (токов) синусоидальной формы по комплексной форме записи данного выражения?
20. Как записать производную по времени и интеграл в комплексной форме?
21. Докажите, что при гармоническом воздействии с частотой  $\omega$  индуктивное сопротивление есть  $\omega L$ , а емкостное  $-1/\omega C$ . Запишите индуктивное и емкостное сопротивления в комплексном виде.
22. Нарисуйте и объясните ход векторов в цепях  $R, L, C$ .
23. Получите выражения комплексной проводимости.
24. Какие виды мощностей Вы знаете?
25. Какие двухполюсники являются энергетически эквивалентными?
26. Нарисуйте разветвленную цепь  $RL$  или  $RC$  и рассчитайте ее схему замещения.
27. Сформулируйте закон Ома и законы Кирхгофа в комплексном виде.
28. Как можно рассчитать фазные углы в цепях с накопителями энергии?
29. Получите выражение входного комплексного сопротивления неразветвленной цепи  $RLC$ .
30. Приведите примеры расчетов неразветвленных и разветвленных цепей комплексным методом.
31. Приведите примеры расчета цепей при гармоническом воздействии с помощью программируемого микрокалькулятора.

## Глава 7.

## ЦЕПИ $RL$ - И $RC$ - ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТЕ

### 7.1. ВХОДНЫЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ И ФАЗОЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Под входной частотной характеристикой цепи понимают зависимость  $Z_{вх} = f(\omega)$  или  $Y_{вх} = f(\omega)$ , где  $Z_{вх}$  — комплексное входное сопротивление, а  $Y_{вх}$  — комплексная входная проводимость двухполюсника. Характеристика  $Z_{вх} = f(\omega)$ , в свою очередь, состоит из двух характеристик:  $Z_{вх} =$



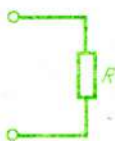


Рис. 7.1

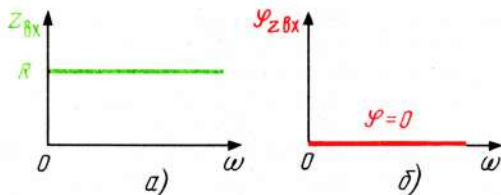


Рис. 7.2



Рис. 7.3

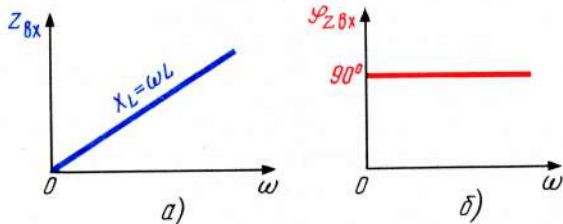


Рис. 7.4



Рис. 7.5

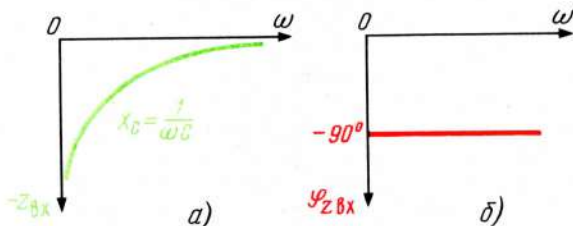


Рис. 7.6

$= f(\omega)$  и  $\varphi_{Z_{BX}} = f(\omega)$ . Характеристика  $Z_{BX} = f(\omega)$ , показывающая зависимость модуля входного сопротивления двухполюсника от частоты, называется *входной амплитудно-частотной (АЧХ)*, а характеристика  $\varphi_{Z_{BX}} = f(\omega)$  — *входной фазочастотной (ФЧХ)*. Для краткости эти характеристики часто называют входными "амплитудной" и "фазной". Для нахождения аналитического выражения  $Z_{BX} = f(\omega)$  необходимо или записать комплексное входное сопротивление цепи непосредственно по виду схемы, или подсчитать выражение  $Z_{BX} = \dot{U}_{BX} / \dot{I}_{BX}$ , для чего необходимо знать входное напряжение  $\dot{U}_{BX}$  и получающийся при этом входной ток  $\dot{I}_{BX}$  двухполюсника. Полученные выражения обыкновенно приводят к виду  $Z_{BX} = F_1(j\omega) / F_2(j\omega)$ , где  $F_1(j\omega)$  и  $F_2(j\omega)$  — полиномы (т. е. многочлены), зависящие от частоты. Выражение  $Z_{BX} = f(\omega)$  записывают в показательной форме:  $Z_{BX} = Z_{BX} e^{j\varphi_{Z_{BX}}}$  и строят кривые АЧХ и ФЧХ.

*Входное сопротивление в линейных цепях зависит от элементов цепи и вида их соединения, и не зависит от значения входного напряжения. В R-цепи (рис. 7.1) значения сопротивлений от частоты не зависят, поэто-*

му  $Z_{вх} = R$ ,  $\varphi_{Z_{вх}} = 0$  (рис. 7.2, а, б). В  $L$ -цепи (рис. 7.3)  $Z_{вх} = j\omega L = \omega L e^{j90^\circ}$ , АЧХ и ФЧХ цепи показаны на рис. 7.4, а, б. В  $C$ -цепи (рис. 7.5)  $Z_{вх} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ}$ , АЧХ и ФЧХ цепи показаны на рис. 7.6, а, б.

## 7.2. НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ $RL$ - И $RC$ -ЦЕПИ

В неразветвленных  $RL$ - и  $RC$ -цепях удобно использовать понятие: граничная частота ( $\omega_{гр}$ ). Граничной называется частота, при которой  $R = |X|$ . Так как при  $\omega_{гр} R = \omega_{гр} L$  и  $R = 1/\omega_{гр} C$ , то в  $RL$ -цепи  $\omega_{гр} = R/L$ , а в  $RC$ -цепи  $\omega_{гр} = 1/RC$ .

Рассчитаем АЧХ и ФЧХ для  $RL$ -цепи (рис. 7.7, а). Определим сначала качественно ход АЧХ и ФЧХ. Нарисуем данную схему на предельных частотах, т. е. при  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ . Резистивное сопротивление не зависит от частоты, поэтому во всех схемах значение  $R$  остается неизменным. Индуктивное сопротивление  $X_L = \omega L$ , поэтому при  $\omega = 0$   $X_L = 0$  (рис. 7.7, б), а при  $\omega = \infty$   $X_L = \infty$  (рис. 7.7, в). Следовательно, при изменении частоты от 0 до  $\infty$  модуль входного сопротивления  $Z_{вх}$  изменяется от  $R$  до  $\infty$  (рис. 7.8, а). Поскольку цепь представляет собой резистивное и реактивное сопротивления, соединенные последовательно, входной фазный угол  $\varphi_{Z_{вх}} = \arctg X / (X_L/R) = \arctg(\omega L/R)$ . Из данного выражения видно, что при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  входной фазный угол изменяется от 0 до  $90^\circ$  (рис. 7.8, б).

Произведем подсчет входных АЧХ и ФЧХ аналитически. Напишем комплексное входное сопротивление цепи и вынесем член  $R$  за скобку:

$$Z_{вх} = R + j\omega L = R \left( 1 + j\omega \frac{L}{R} \right).$$

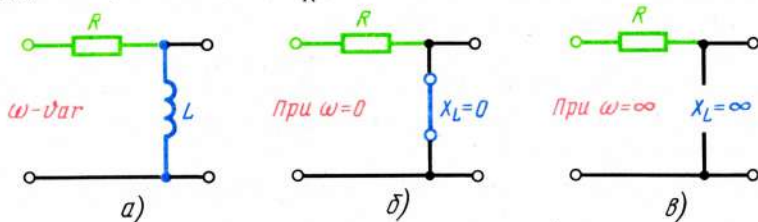


Рис. 7.7

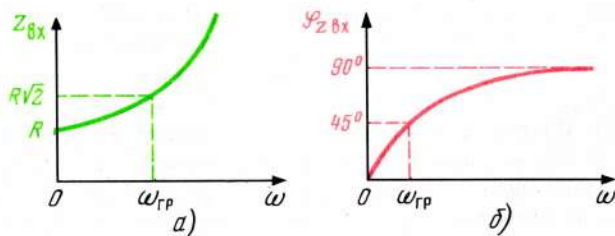


Рис. 7.8

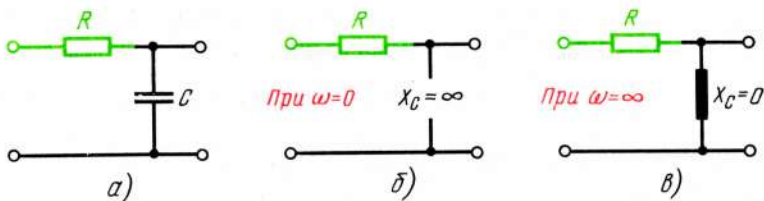


Рис. 7.9

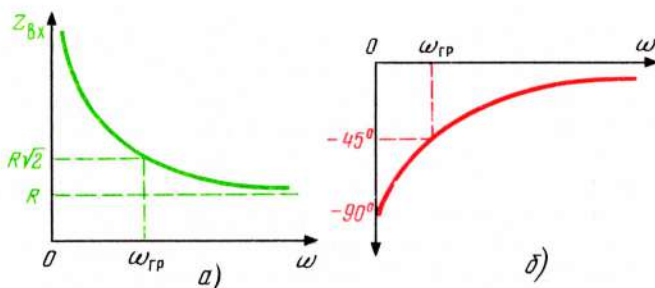


Рис. 7.10

Но  $L/R = 1/\omega_{гр}$ , поэтому  $Z_{вх} = R(1 + j(\omega/\omega_{гр}))$ . Определим модуль данного комплексного сопротивления:  $Z_{вх} = R\sqrt{1 + (\omega/\omega_{гр})^2}$ . По выражению модуля рассчитаем входную АЧХ. При  $\omega = 0$   $Z_{вх} = R$ , при  $\omega = \omega_{гр}$   $Z_{вх} = R\sqrt{2}$ , при  $\omega = \infty$   $Z_{вх} = \infty$ , т. е. оказалась та же характеристика, которая была получена выше путем рассуждений. Рассчитаем ФЧХ:  $\varphi_{Z_{вх}} = \arctg(\omega/\omega_{гр})$ . Следовательно, при  $\omega = 0$   $\varphi_{Z_{вх}} = 0$ , при  $\omega = \omega_{гр}$   $\varphi_{Z_{вх}} = 45^\circ$ , при  $\omega = \infty$   $\varphi_{Z_{вх}} = 90^\circ$ .

Аналогичным образом построим АЧХ и ФЧХ для RC-цепи (рис. 7.9, а):

$$\underline{Z}_{вх} = R - j \frac{1}{\omega C} = R \left(1 - j \frac{1}{\omega RC}\right) = R(1 - j\omega_{гр}/\omega).$$

При  $\omega = 0$  цепь приобретает вид рис. 7.9, б, а при  $\omega = \infty$  – вид рис. 7.9, в. Сопротивление  $Z = R\sqrt{1 + (\omega_{гр}/\omega)^2}$ , следовательно, при  $\omega = 0$   $Z = \infty$ , при  $\omega = \omega_{гр}$   $Z = R\sqrt{2}$ , при  $\omega = \infty$   $Z = R$  (рис. 7.10, а).  $\varphi_{Z_{вх}} = -\arctg(\omega_{гр}/\omega)$ . При  $\omega = 0$   $\varphi_{Z_{вх}} = -90^\circ$ , при  $\omega = \omega_{гр}$   $\varphi_{Z_{вх}} = -45^\circ$ , при  $\omega = \infty$   $\varphi_{Z_{вх}} = 0$  (рис. 7.10, б). Из произведенных выкладок следует, что в неразветвленных цепях первого порядка при любом сочетании элементов на граничной частоте  $\omega_{гр}$  модуль входного сопротивления равен  $R\sqrt{2}$ , а входной фазный угол по абсолютному значению равен  $45^\circ$ . Цепями первого порядка называются RL- и RC-цепи, поскольку процессы, происходящие в них, описываются уравнениями первой степени.



### 7.3. ВХОДНЫЕ АЧХ И ФЧХ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ С ОДНИМ НАКОПИТЕЛЕМ ЭНЕРГИИ

В разветвленных цепях понятие "граничная частота" может быть использовано, но значения входных сопротивлений и фазы на граничной частоте не являются определенными, как это имело место в неразветвленных. К тому же выражения для  $\omega_{\text{ГР}}$  становятся достаточно громоздкими. Например, если в схеме рис. 6.19  $R_{\text{ЭК}}$  приравнять к  $X_{\text{ЭК}}$  и получившееся уравнение решить относительно  $\omega_{\text{ГР}}$ , то

$$\omega_{\text{ГР}} = \frac{1}{2R_1 C} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \sqrt{R_2^2 - 4R_1 R_2 - 4R_1^2} \right).$$

Отсюда видно, что при расчете граничной частоты в разветвленных цепях усложняется математический аппарат, поэтому часто ограничиваются качественным построением АЧХ и ФЧХ таких цепей. Для этого, как обычно, рисуют схемы для  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  и путем рассуждений строят соответствующие кривые. В качестве примера построим входные АЧХ и ФЧХ для цепи рис. 6.19. При  $\omega = 0$  схема приобретает вид рис. 7.11, а, а при  $\omega = \infty$  — рис. 7.11, б. При изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  модуль входного сопротивления изменяется от  $R_1 + R_2$  до  $R_1$  (рис. 7.12, а). Определим характер входной ФЧХ. При  $\omega = 0$  емкостное сопротивление бесконечно велико, емкостная ветвь оказывается разомкнутой, входное сопротивление цепи имеет чисто резистивный характер, входной фазный угол равен 0. Но и при  $\omega = 0$   $\varphi_{Z_{\text{ВХ}}} = 0$ , поскольку сопротивление  $R_2$  в этом случае замкнуто накоротко ( $X_C = 0$ ), входное сопротивление цепи равно  $R_1$  и является также чисто резистивным. Следовательно, при изменении частоты от 0 до  $\infty$  входная фа-

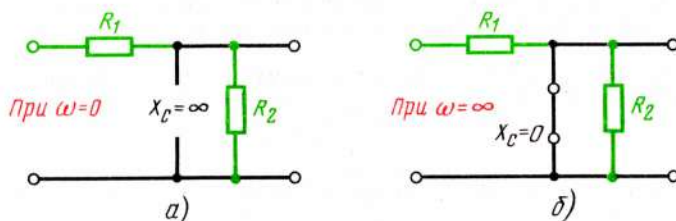


Рис. 7.11

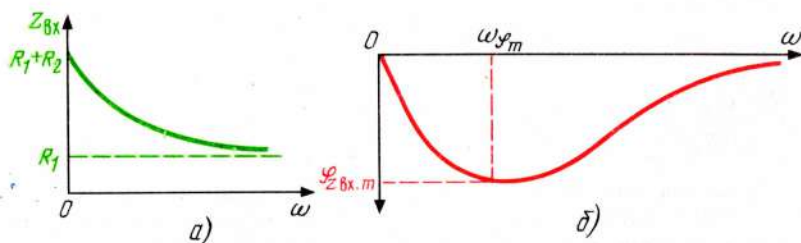


Рис. 7.12

за изменяется от 0 до 0. Но при любой частоте, отличной от предельной, емкостное сопротивление имеет конечное значение, следовательно, в этом случае ФЧХ имеет емкостный характер и соответственно идет в сторону отрицательных значений. Поскольку всякая кривая, начинающаяся и оканчивающаяся нулевыми значениями, имеет экстремум, характер фазочастотной характеристики цепи рис. 6.19 имеет вид рис. 7.12, б. Как видно из данного рисунка, при частоте 0 входной фазный угол равен 0, затем, по мере увеличения частоты, возрастает до значения  $\varphi_{Z_{вхт}}$  при частоте  $\omega_{\varphi m}$ , при дальнейшем увеличении частоты снова уменьшается до 0.

Рассчитать частоту  $\omega_{\varphi m}$  и значение  $\varphi_{Z_{вхт}}$  можно аналитически. Для этого необходимо проделать следующее.

1. Рассчитать схему замещения данной цепи, т. е. заменить данную цепь эквивалентной (см. рис. 6.19, а и в).

2. Записать выражение входного фазного угла для получения схемы замещения:

$$\varphi_{Z_{вх}} = \arctg \left( \frac{X_{эк}}{R_{эк}} \right) = -\arctg \left( \frac{\omega R_2^2 C}{\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2} \right) \quad (7.1)$$

(знаменатели у членов  $R_{эк}$  и  $X_{эк}$  одинаковые и поэтому сокращаются).

3. Исследовать выражение  $\varphi_{Z_{вх}} = f(\omega)$  на экстремум. Поскольку угол будет максимальным при максимальном значении аргумента, исследовать на экстремум можно не все выражения, а только его аргумент. Обозначим его буквой

$$S = \frac{\omega R_2^2 C}{\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2}.$$

В этом случае для нахождения частоты, при которой фазный угол наибольший, необходимо взять производную  $dS/d\omega$ , приравнять ее 0 и решить получившееся выражение относительно частоты  $\omega$ . Пределаем это преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\omega} &= \frac{(\omega R_2^2 C)'(\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2) - (\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2)' \omega R_2^2 C}{(\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2)^2} = \\ &= \frac{R_2^2 C(\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2) - 2\omega R_1 R_2^2 C^2 \omega R_2^2 C}{(\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2)^2} = \\ &= \frac{R_2^2 C(\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2 - 2\omega^2 R_1 R_2^2 C^2)}{(\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2)^2} = \\ &= \frac{R_2^2 C(R_1 + R_2 - \omega^2 R_1 R_2^2 C^2)}{(\omega^2 R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Дробь, как известно, равна 0 в двух случаях: при знаменателе, равном  $\infty$ , или числителе, равном 0. Так как при  $\omega = \infty$   $\varphi_{Z_{вх}} = 0$ , а не максимуму, то предположение, что знаменатель равен  $\infty$ , отпадает, в этом случае остается верным то, что числитель равен 0. В данной дроби числитель представляет произведение двух множителей:

$R_2^2 C$  и выражения, записанного в скобках. Так как  $R_2$  и  $C$  — величины конечные, не равные 0, то 0 равно выражение, находящееся в скобках, т. е.  $R_1 + R_2 - \omega^2 R_1 R_2^2 C^2 = 0$ , или

$$\omega_{\varphi m}^2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2^2 C^2},$$

откуда

$$\omega_{\varphi m} = (1/R_2 C) \sqrt{1 + R_2/R_1}. \quad (7.2)$$

Чтобы рассчитать значение наибольшего фазного угла, необходимо в (7.1) подставить значение  $\omega_{\varphi m}$ , полученное в (7.2):

$$\varphi_{Z_{\text{вх}m}} = -\arctg \left[ \frac{\frac{1}{R_2 C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1}} R_2^2 C}{\frac{1}{R_2^2 C^2} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) R_1 R_2^2 C^2 + R_1 + R_2} \right]$$

Проделив элементарные алгебраические преобразования, получим

$$\varphi_{Zm} = \arctg \left[ \frac{R_2}{2 \sqrt{R_1 (R_1 + R_2)}} \right] = \arctg \left[ \frac{1}{2 \sqrt{\left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{R_1}{R_2} \right)}} \right] \quad (7.3)$$

Рассмотрим частные случаи данной цепи.

1) При  $R_1 = R_2 = R$

$$\omega_{\varphi m} = \frac{1}{RC} \sqrt{2}, \quad \varphi_{Zm} = \arctg 0,35 = 19^\circ 20'.$$

Из полученного следует, что если сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  выбрать одинаковыми, то ни при каких условиях нельзя получить входной фазный угол больше  $19^\circ 20'$

2) При  $R_1 = R, R_2 = 2R$

$$\omega_{\varphi m} = \frac{1}{RC} \sqrt{1 + 2R/R} = 0,866/RC, \quad \varphi_{Zm} = \arctg \left[ \frac{1}{2 \sqrt{(0,5)^2 + 0,5}} \right] = 0,577,$$

$$\varphi_{Zm} = 30^\circ.$$

3) При  $R_1 = R, R_2 = \infty$

$$\omega_{\varphi m} = \frac{1}{R_2 C} \sqrt{1 + R_2/R_1} = \sqrt{\frac{1}{R_2^2 C^2} + \frac{1}{R_1 R_2 C^2}} = \sqrt{\frac{1}{(\infty)^2} + \frac{1}{\infty}} = 0,$$

$$\varphi_{Zm} = \arctg \frac{1}{2 \sqrt{\left( \frac{R_1}{\infty} \right)^2 + \left( \frac{R_1}{\infty} \right)}} = \arctg \left[ \frac{1}{2 \sqrt{0 + 0}} \right] = \arctg(\infty) = 90^\circ.$$

Таким образом, при увеличении сопротивления  $R_2$  частота, при которой входной фаз-



ный угол максимален, уменьшается, а абсолютное значение угла  $\varphi_{Z_{вхт}}$  увеличивает-ся. При  $R_2 = \infty$  разветвленная цепь превращается в неразветвленную.

#### 7.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Комплексной передаточной функцией (КПФ) по напряжению  $\underline{H}_U$  называется отношение комплексного выходного напряжения  $U_2$  к комплексно-му входному напряжению  $\dot{U}_1$  при изменении частоты. Для краткости записи индекс "U" обыкновенно опускают и обозначают  $\underline{H}$ . Отношение  $\dot{U}_2/\dot{U}_1$  на некоторой определенной частоте называют комплексным коэффициентом передачи и обозначают  $\underline{K}$ . Таким образом, комплексный коэффициент пере-дачи есть частный случай комплексной передаточной функции. Передаточ-ная функция охватывает все многообразие значений, получающихся при изменении частоты от 0 до  $\infty$ . *Передаточная функция выявляет закономер-ности изменений амплитуды и фазы в зависимости от частоты.* Как всякая комплексная величина, передаточная функция состоит из двух характерис-тик: амплитудно-частотной и фазочастотной. Чтобы рассчитать КПФ четырех-полюсника, в общем случае необходимо проделать следующее:

1. Задаться произвольным напряжением на входе  $\dot{U}_1$ .  
2. Любым методом рассчитать комплексное напряжение на выходе це-пи  $\dot{U}_2$ .

3. Взять отношение  $\dot{U}_2/\dot{U}_1$ , входное напряжение при этом сокращается, получившееся выражение будет комплексной передаточной функцией по напряжению  $\underline{H}$ .

4. Получившееся комплексное выражение записать в показательной форме:  $\underline{H} = H e^{j\varphi_H}$  или  $H(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi_H(\omega)}$ .

5. Записать выражение  $H = f(\omega)$ , подставлять различные частоты и по-строить передаточную АЧХ цепи. Модуль передаточной функции есть отно-шение модулей выходного и входного напряжений  $H = U_2/U_1$  при различ-ных частотах. В ряде случаев АЧХ записывают в виде  $H(\omega) = U_2(\omega)/U_1(\omega)$ . Знак  $\omega$  указывает на то, что все значения зависят от частоты.

6. Записать выражение ФЧХ, т. е. аргумента передаточной функции от частоты  $\varphi_H = f(\omega)$ . Передаточная ФЧХ представляет разность начальных фаз выходного и входного напряжений  $\varphi_H = \varphi_{U_2} - \varphi_{U_1}$ . Это выражение иногда записывают в более общем виде:

$$\varphi_H(\omega) = \varphi_{U_2}(\omega) - \varphi_{U_1}(\omega).$$

Для цепей Г-образного вида КПФ можно записать непосредственно по виду схемы цепи. Например, в схеме рис. 7.9, а

$$\underline{H} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1/j\omega C}{j\omega C(1 + j\omega RC)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Чтобы рассчитать передаточную АЧХ, необходимо записать модуль получив-шегося комплексного выражения. Напомним, что

$$\underline{H} = \frac{A + jB}{D + jF} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{D^2 + F^2}} e^{j(\arctg \frac{B}{A} - \arctg \frac{F}{D})} = H e^{j\varphi_H}. \quad (7.4)$$

Фазочастотная характеристика, построенная по (7.4), представляет разность двух кривых — ФЧХ числителя и ФЧХ знаменателя. В ряде случаев передаточную фазочастотную характеристику удобнее иметь в виде одного выражения и, соответственно, одной кривой  $\varphi_H = f(\omega)$ , а не  $\varphi_{\text{ч}}(\omega) - \varphi_{\text{зн}}(\omega)$ .

Преобразуем выражение (7.4) так, чтобы получилось выражение  $\varphi_H = f(\omega)$ . Сначала необходимо избавиться от мнимости в знаменателе, для чего следует числитель и знаменатель умножить на комплекс, сопряженный с комплексом знаменателя:

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{A + jB}{D + jF} = \frac{(A + jB)(D - jF)}{(D + jF)(D - jF)} = \frac{AD + jBD - jAF + BD}{D^2 + F^2} = \\ &= \frac{(AD + BF) + j(BD - AF)}{D^2 + F^2} = \sqrt{\frac{(AD + BF)^2 + (BD - AF)^2}{(D^2 + F^2)^2}} e^{j \arctg\left(\frac{BD - AF}{AD + BF}\right)}. \end{aligned}$$

Преобразуем числитель подкоренного выражения:

$$(AD + BF)^2 + (BD - AF)^2 = A^2 D^2 + 2ABDF + B^2 D^2 - 2ABDF + A^2 F^2 = A^2 (D^2 + F^2) + B^2 (D^2 + F^2) = (A^2 + B^2) (D^2 + F^2).$$

Модуль данного выражения

$$H = \sqrt{\frac{(A^2 + B^2) (D^2 + F^2)}{(D^2 + F^2)^2}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{D^2 + F^2}}.$$

Комплексное выражение передаточной функции

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{A + jB}{D + jF} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{D^2 + F^2}} e^{j(\arctg B/A - \arctg F/D)} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{D^2 + F^2}} \times \\ &\times e^{j \arctg\left(\frac{BD - AF}{AD + BF}\right)}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

откуда

$$\varphi_H = \arctg\left(\frac{BD - AF}{AD + BF}\right). \quad (7.6)$$

Рассчитаем АЧХ и ФЧХ цепи рис. 7.9, а. Так как в данной цепи  $\underline{H} = 1/(1 + j\omega RC)$ , то

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{\text{гр}})^2}} \quad (\text{рис. 7.13, а}),$$

$$\begin{aligned} \varphi_H &= \varphi_{\text{ч}} - \varphi_{\text{зн}} = \arctg(0/1) - \arctg(\omega RC/1) = -\arctg \omega RC = \\ &= -\arctg(\omega/\omega_{\text{гр}}) \quad (\text{рис. 7.13, б}). \end{aligned}$$

Построим передаточную АЧХ. При  $\omega = 0$   $H = 1$ , при  $\omega = \omega_{\text{гр}}$   $H = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,41} = 0,707$ . При  $\omega = \infty$   $H = 0$ .

Построим передаточную ФЧХ. При  $\omega = 0$   $\varphi_H = 0$ , при  $\omega = \omega_{\text{гр}}$   $\varphi_H = -45^\circ$ , при  $\omega = \infty$   $\varphi_H = 90^\circ$ .

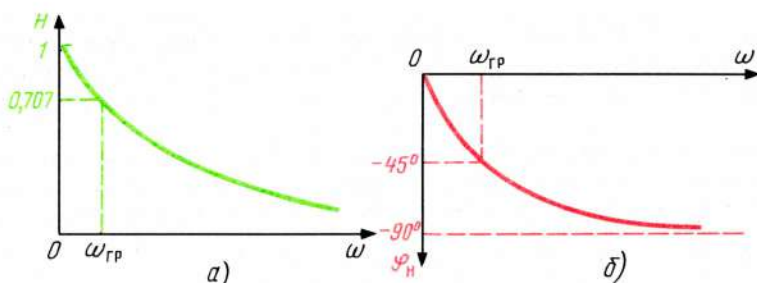


Рис. 7.13

Данные построения можно произвести путем логических рассуждений. Для этого следует нарисовать (или мысленно представить) вид схемы цепи при  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  (см. рис. 7.9). На нулевой частоте  $X_C = \infty$ , следовательно, ток в цепи и падение напряжения на сопротивлении  $R$  равны 0. Но по второму закону Кирхгофа, напряжение, приложенное извне к зажимам цепи, должно равняться сумме (в общем случае геометрической) падений напряжений на всех элементах цепи. Следовательно, падение напряжений на сопротивлении  $R$  плюс падение напряжения на  $X_C$  должны равняться напряжению, приложенному ко входу цепи. Но падение напряжения на сопротивлении  $R$  равно 0, значит все напряжение, приложенное к входным зажимам цепи, будет падать на сопротивлении  $X_C$ , т. е. на выходных зажимах цепи. Отсюда напряжение на входе  $U_1$  равно напряжению на выходе  $U_2$ , а это означает, что при  $\omega = 0$  модуль коэффициента передачи равен 1. По мере увеличения частоты сопротивление  $X_C = 1/\omega C$  уменьшается, ток в цепи увеличивается, падение напряжения на  $R$  увеличивается, а так как входное напряжение на входе неизменно, то напряжение на  $X_C$ , а следовательно, и модуль коэффициента передачи будут уменьшаться. При  $\omega = \infty$   $X_C = 0$ , входное напряжение падает на сопротивлении  $R$ , напряжение на  $X_C$ , а значит и коэффициент передачи становятся равными 0. Получается та же кривая рис. 7.13, а, которая была рассчитана строгими математическими выкладками.

## 7.5. ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФЧХ

Разберем методику построения передаточных ФЧХ четырехполюсников. Чтобы чисто качественно (только по характерным точкам, без выполнения подробных расчетов) построить кривую  $\varphi_H = f(\omega)$ , необходимо проделать следующее.

1. Построить характеристику  $\varphi_{Z_{ВХ}} = f(\omega)$ .
2. Построить характеристику  $\varphi_{I_{ВХ}} = f(\omega)$ . При этом следует иметь в виду, что кривая  $\varphi_{I_{ВХ}} = f(\omega)$  представляет зеркальное отображение кривой  $\varphi_{Z_{ВХ}} = f(\omega)$ , поскольку

$$\dot{I}_{ВХ} = I_{ВХ} e^{j\varphi_{I_{ВХ}}} = \dot{U}/Z_{ВХ} = U e^{j0^\circ}/Z e^{j\varphi_{Z_{ВХ}}} = I e^{-j\varphi_{Z_{ВХ}}}, \text{ откуда } \varphi_{I_{ВХ}} = -\varphi_{Z_{ВХ}}.$$



3. Построить характеристику  $\Delta\varphi = f(\omega)$ , где  $\Delta\varphi$  – угол между комплексными выходным напряжением и входным током, причем  $\Delta\varphi = \varphi_{U_{\text{ВЫХ}}} - \varphi_{I_{\text{ВХ}}}$ . Очевидно, что если выходной элемент представляет резистивное сопротивление, то  $\Delta\varphi = 0$ ; если чистую индуктивность, то  $+90^\circ$ , при чистой емкости –  $(-90^\circ)$ . Если выходное напряжение снимают с цепочки, состоящей из  $R_{\text{ВЫХ}}$  и  $X_{\text{ВЫХ}}$ , соединенных последовательно, то  $\Delta\varphi = \arctg [X_{\text{ВЫХ}}/R_{\text{ВЫХ}}]$ , а если соединенных параллельно, то  $\Delta\varphi = \arctg [B_{\text{ВЫХ}}/G_{\text{ВЫХ}}]$  и т. д. Очевидно, если выходной элемент состоит только из одного сопротивления (резистивного или реактивного), то  $\Delta\varphi$  не зависит от частоты, а если из резистивного и реактивного, соединенного любым образом, то зависит.

4. Построить передаточную ФЧХ четырехполюсника, представляющую алгебраическую сумму фазной характеристики входного тока  $\varphi_{I_{\text{ВХ}}}$  и разности начальных фаз между выходным напряжением и входным током  $\Delta\varphi$ , т. е.  $\varphi_{U_{\text{ВЫХ}}} = \varphi_{I_{\text{ВХ}}} + \Delta\varphi$ . Передаточная фаза есть разность между начальными фазами выходного и входного комплексных напряжений:  $H_\varphi = \varphi_{U_{\text{ВЫХ}}} - \varphi_{U_{\text{ВХ}}}$ . Если входное напряжение имеет нулевую начальную фазу, то ФЧХ передаточной функции есть ФЧХ выходного напряжений, т. е.

$$\varphi_H = \varphi_{U_{\text{ВЫХ}}} \quad \text{или} \quad \varphi_H = \varphi_{U_2}.$$

Рассмотрим примеры на построение передаточных ФЧХ.

**Пример 7.1.** Построить передаточную ФЧХ для цепи рис. 7.9. Проделаем все построения подробно.

**Решение.**

1. Построим кривую  $\varphi_{Z_{\text{ВХ}}} = f(\omega)$ . Как было показано выше, данная характеристика изменяется от  $-90^\circ$  до  $0^\circ$  (рис. 7.14).

2. Построим кривую  $\varphi_{I_{\text{ВХ}}} = f(\omega)$ . Поскольку данная характеристика представляет зеркальное отображение характеристики  $\varphi_{Z_{\text{ВХ}}} = f(\omega)$ , фазная кривая входного тока при изменении частоты от 0 до  $\infty$  будет изменяться от  $+90^\circ$  до  $0^\circ$  (штриховая кривая на рис. 7.14).

3. Построим кривую  $\Delta\varphi = f(\omega)$ . Так как выходное напряжение в цепи рис. 7.9 снимается с емкостного элемента, то это напряжение при любой частоте отстает от входного тока по фазе (т. е. тока, вызвавшего это напряжение) на  $90^\circ$ . Таким образом, характеристика  $\Delta\varphi = f(\omega)$  в данной цепи имеет постоянное значение, равное  $-90^\circ$ .

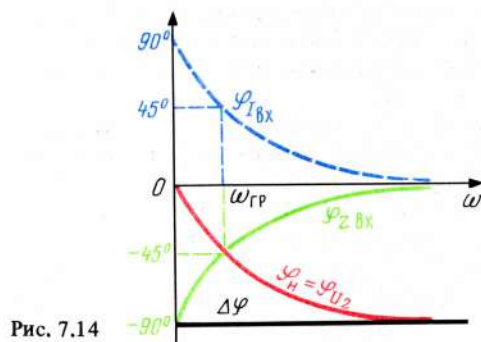


Рис. 7.14

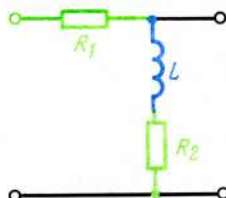


Рис. 7.15

4. Фазочастотная характеристика выходного напряжения  $\varphi_{U2} = f(\omega)$  представляет собой алгебраическую сумму фазочастотных характеристик входного тока  $\varphi_{I_{ВХ}}$  и разности начальных фаз между выходным напряжением и входным током  $\Delta\varphi$ , т. е.  $\varphi_{U2} = \varphi_{I_{ВХ}} + \Delta\varphi$ . Так как входное напряжение имеет нулевую начальную фазу, то фаза передаточной функции равна фазе выходного напряжения. Следовательно, передаточная ФЧХ данной цепи равна ФЧХ выходного напряжения. Как видно из рис. 7.14, при изменении частоты от 0 до  $\infty$  передаточная ФЧХ рассматриваемой цепи изменяется от 0 до  $-90^\circ$ . Поскольку данная цепь неразветвленная, можно однозначно показать значения всех характеристик на граничной частоте. Из графиков рис. 7.14 видно, что при  $\omega = \omega_{гр}$   $\varphi_{Z_{ВХ}} = -45^\circ$ ,  $\varphi_{I_{ВХ}} = +45^\circ$ ,  $\varphi_H = -45^\circ$ . Таким образом, в неразветвленных цепях все фазные характеристики на граничной частоте имеют углы, абсолютные значения которых равны  $45^\circ$ . Передаточные характеристики можно построить и аналитически. Для этого следует получить комплексное выражение передаточной функции и записать ее в показательной форме. Модуль передаточной функции является АЧХ, а аргумент – ФЧХ. Поскольку цепь рис. 7.9 имеет Г-образную конфигурацию,

$$\underline{H} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1/j\omega C}{j\omega C(1 + j\omega RC)} = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

откуда

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{гр})^2}},$$

$$\varphi_H = -\arctg \omega RC = -\arctg (\omega/\omega_{гр}).$$

**Пример 7.2.** Рассчитать и построить передаточную АЧХ и ФЧХ-цепи рис. 7.15.

**Решение.** В данной цепи

$$\varphi_{Z_{ВХ}} = \arctg \left( \frac{\omega L}{R_1 + R_2} \right), \quad \varphi_{I_{ВХ}} = -\arctg \left( \frac{\omega L}{R_1 + R_2} \right).$$

Выходное напряжение снимается с цепочки  $R_2 L$ , поэтому оно опережает ток на угол  $\Delta\varphi = \arctg (\omega L/R_2)$ . Следовательно,

$$\varphi_H = \varphi_{I_{ВХ}} + \Delta\varphi = -\arctg \left( \frac{\omega L}{R_1 + R_2} \right) + \arctg \left( \frac{\omega L}{R_2} \right). \quad (7.7)$$

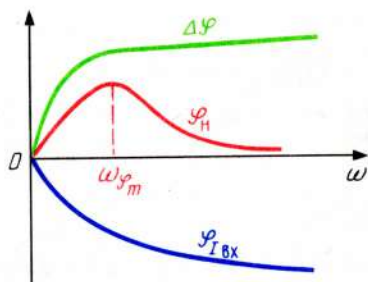
Проанализируем полученное выражение. При  $\omega = 0$  оба члена равны 0, поэтому  $\varphi_H = 0$ . При  $\omega = \infty$   $\varphi_H = -90^\circ + 90^\circ = 0$ . При увеличении частоты второй член растет быстрее первого, поскольку числители аргументов у обоих членов одинаковы, а знаменатель, не зависящий от частоты, у второго члена меньше, чем у первого. Поэтому кривая  $\varphi_H = f(\omega)$  начинается с 0, идет в область положительных значений, проходит через максимум и снова уменьшается до 0 (рис. 7.16).

Определим частоту, при которой передаточный угол будет максимальным. Для этого выражение (7.7) следует проанализировать на экстремум. Поскольку при

$$y = \arctg x \quad y' = \frac{1}{1+x^2} x',$$

$$\frac{d\varphi_H}{d\omega} = \left[ -\frac{1}{1 + \left( \frac{\omega L}{R_1 + R_2} \right)^2} \cdot \frac{L}{(R_1 + R_2)} \right] + \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega L}{R_2} \right)^2} \cdot \frac{L}{R_2} \right] = 0.$$

Рис. 7.16



После простых алгебраических преобразований получается

$$\omega_{\text{экс}} = \frac{1}{L} \sqrt{R_2 (R_1 + R_2)}. \quad (7.8)$$

Однако исследовать характеристики, представляющие разность арктангенсов двух выражений, не слишком удобно из-за некоторой громоздкости преобразований. Выражения получаются проще, если комплексную передаточную функцию привести к виду  $\underline{H} = H e^{j\psi_H}$ , после чего исследовать на экстремум аргумент получившегося выражения. В цепи рис. 7.15  $\underline{H} = (R_2 + j\omega L) / (R_1 + R_2 + j\omega L)$ ; после умножения числителя и знаменателя на множитель, сопряженный с выражением знаменателя и выполнения простых алгебраических преобразований, получим

$$\underline{H} = \frac{R_1 R_2 + R_2^2 + \omega^2 L^2 + j\omega R_1 L}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}, \quad (7.9)$$

откуда

$$\varphi_H = \text{arctg} \left[ \frac{\omega R_1 L}{R_1 R_2 + R_2^2 + \omega^2 L^2} \right] = \text{arctg} N, \quad (7.10)$$

где  $N$  – выражение аргумента.

Исследуем аргумент  $N$  на экстремум:

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{R_1 L (R_1 R_2 + R_2^2 + \omega^2 L^2) - \omega R_1 L 2\omega L^2}{(R_1 R_2 + R_2^2 + \omega^2 L^2)^2} = 0,$$

откуда  $R_1 R_2 + R_2^2 + \omega^2 L^2 - 2\omega^2 L^2 = 0$ , или  $\omega_{\varphi m} = \frac{1}{L} \sqrt{R_2 (R_1 + R_2)}$ , что и было получено в (7.8). Подставив значение  $\omega_{\varphi m}$  в (7.10), получим

$$\varphi_{Hm} = \text{arctg} \left[ \frac{R_2}{2 \sqrt{R_2 (R_1 + R_2)}} \right]. \quad (7.11)$$

Например, если  $L = 10$  мГн,  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 0,5$  кОм, то наибольший передаточный фазный угол будет при угловой частоте:

$$\omega_{\varphi m} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-3}} \sqrt{500 \cdot 1500} = 86.600 \text{ 1/с},$$



т. е. на частоте

$$f_{\varphi m} = \frac{\omega_{\varphi m}}{2\pi} = \frac{86.600}{6,28} = 13,790 \text{ Гц} = 13,79 \text{ кГц.}$$

Определим значение  $\varphi_{Hm}$ :

$$\varphi_{Hm} = \arctg \left[ \frac{1000}{2 \sqrt{500 \cdot 1500}} \right] = \arctg 0,577 = 30^\circ.$$

Таким образом, передаточная ФЧХ данной цепи в диапазоне частот  $0 \dots 13,79 \text{ кГц}$  возрастает от 0 до  $30^\circ$ , а в диапазоне  $13,79 \text{ кГц} \dots \infty$  убывает от  $30^\circ$  до 0. Чтобы подсчитать фазный угол на любой частоте, следует в выражение (7.10) подставить исходные данные. Например, при частоте  $f = 50 \text{ кГц}$   $\varphi_H = 17^\circ$ , при  $f = 100 \text{ кГц}$   $\varphi_H = 9^\circ$  и т. д.

#### 7.6. РАСЧЕТЫ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ

При анализе частотных характеристик сложных цепей математический аппарат, описывающий процессы в цепях, оказывается столь громоздким, что выполнение подобных расчетов ручными методами становится практически невозможным. Поэтому для расчета АЧХ и ФЧХ разветвленных цепей используют вычислительную технику, в первую очередь микроЭВМ, например класса ДВК. Идеология расчетов с помощью ЭВМ значительно отличается от идеологии расчетов цепей ручными методами. При ручных методах расчета сначала для исследуемой цепи составляют уравнения по законам электротехники, затем в получившееся уравнение подставляют числовые значения, после этого производят все необходимые алгебраические преобразования и собственно вычисления.

Работа с машиной основывается на совершенно иных принципах: пользователь вводит в машину топологии цепи (т. е. информацию, из которой однозначно следует, каким образом соединены между собой элементы в данной цепи), а также значения параметров всех элементов. На основании предварительно составленной программы и сведений о конфигурации цепи машина самостоятельно, без участия оператора, составляет уравнения, описывающие процессы в цепи, подставляет исходные данные, выполняет все необходимые расчеты и выдает результаты либо на дисплей, либо на буквопечатающее устройство, либо на то и другое вместе. Возможности машинных методов расчета несопоставимы с ручными методами, поэтому для выполнения расчетов и их анализа следует максимально использовать имеющуюся вычислительную технику.

В межвузовской методической лаборатории разработана и рекомендована для использования в учебном процессе универсальная программа, названная ПАУС (разработчик к. т. н. В. Ю. Лапидус, научный руководитель и. о. проф. Б. А. Калабеков), позволяющая выполнять машинными методами расчеты по различным разделам дисциплины ТЭЦ, в том числе анализировать частотные характеристики сложных цепей.

Однако прежде чем выполнять расчеты частотных характеристик, пользователю желательно убедиться в том, что машина правильно сформировала необходимые уравнения и готова к выполнению расчетов по данной про-

грамме. Для такой проверки необходимо ручным образом получить так называемую матрицу главных сечений исследуемой цепи и сравнить ее с аналогичной матрицей, сформированной машиной. Обратим внимание, что матрица главных сечений представляет важную характеристику цепи и ее следует знать не только для расчета частотных характеристик цепей, но и для многих иных расчетов, выполняемых с помощью ЭВМ.

#### 7.7. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТОПОЛОГИИ ЦЕПЕЙ. СОСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ГЛАВНЫХ СЕЧЕНИЙ

Рассмотрим манипуляции, которые необходимо производить для получения матрицы главных сечений цепи. Многие из них будут использованы непосредственно для подготовки данных по расчету частотных характеристик. Пусть имеется цепь рис. 7.17. Обозначим арабскими цифрами в кружках узлы цепи как устранимые, так и неустранимые. Напомним, что *устранимыми узлами* называются точки, к которым подводится по два проводника, а *неустранимыми* — точки, к каждой из которых подводятся не менее трех проводников. Выбор узлов и их нумерацию можно производить совершенно произвольно. Например, в цепи рис. 7.17 узлы 1, 2, 4, 5 являются устранимыми, а узлы 3 и 6 — неустранимыми. После такой разметки каждый элемент цепи оказывается заключенным между некоторыми двумя узлами. Например, индуктивность  $L_2$  — между узлами 3 и 4, источник  $E_1$  — между узлами 1 и 6 и т. д. Часть цепи, заключенная между любыми двумя узлами (как устранимыми, так и неустранимыми) называется *ветвью*. Следовательно, при подобной разметке узлов в каждой ветви оказывается всегда один элемент. Нумеровать ветви следует в той последовательности, которая была принята при составлении программы. Например, в программе ПАУС принята такая последовательность: сначала нумеруются ветви с независимыми источниками напряжения, затем с зависимыми, далее идут ветви с емкостями, затем ветви с сопротивлениями, индуктивностями, независимыми источниками тока и, наконец, ветви с зависимыми источниками тока. Каждой ветви задается направление. По существу, направление ветви есть направление положительного тока, однако, при машинном анализе называют не "направление тока", а "направление ветви". В ветвях с источником тока направление ветви следует выбирать совпадающим с направлением

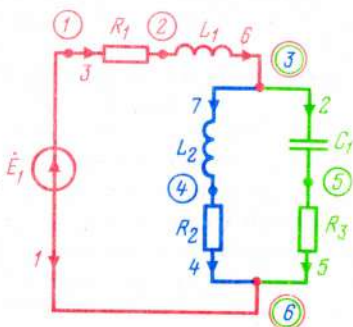


Рис. 7.17

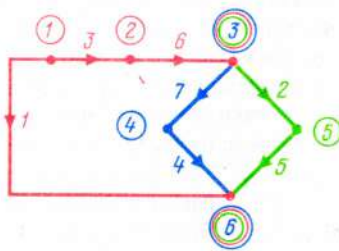


Рис. 7.18



тока, а в ветвях с источниками напряжения, противоположным направлением ЭДС. Направление ветвей с  $C$ ,  $R$ ,  $L$  можно выбирать произвольно.

На основании изложенных соображений пронумеруем ветви цепи рис. 7.17 следующим образом: ветвь с ЭДС  $E_1$  назовем ветвью первой, ветвь с емкостью  $C_1$  — второй, ветвь с сопротивлением  $R_1$  — третьей, ветвь с сопротивлением  $R_2$  — четвертой, ветвь с сопротивлением  $R_3$  — пятой, ветвь с индуктивностью  $L_1$  — шестой, ветвь с индуктивностью  $L_2$  — седьмой. Очевидно, что ветвь 1 заключена между узлами 1 и 6, ветвь 2 — между узлами 3 и 5, и т. д. Заметим также, что направления ветвей 3 и 6 не обязательно должны совпадать, их можно направить как в одном направлении, так и в противоположном, хотя какой-либо целесообразности в выборе противоположных направлений, как правило, не встречается.

После разметки узлов и ветвей следует построить направленный граф этой цепи. *Направленным графом* (или просто "графом" цепи) называется чертеж, на котором показывают все узлы и все ветви без указания элементов, находящихся в этих ветвях. Граф цепи рис. 7.17 показан на рис. 7.18. Заметим, что линии на графах можно рисовать как прямыми, так и искривленными. Имея граф цепи, следует составить дерево этого графа. *Деревом графа* называется граф, содержащий все узлы, но не образующий ни одного замкнутого контура. Чтобы построить дерево, необходимо отбросить такие ветви, которые приводят к замкнутым контурам. При построении деревьев, как правило, получается несколько вариантов. Некоторые варианты деревьев показаны на рис. 7.19. Ветви, вошедшие в дерево, называются *ребрами*, а не вошедшие — *хордами*. Например, в схеме рис. 7.19, а ветви 1, 2, 3, 6, 7 — ребра, а ветви 4, 5 — хорды, аналогично в схеме рис. 7.19, д — ветви 1, 2, 3, 4, 5 — ребра, а ветви 6 и 7 — хорды и т. д.

В принципе все деревья равноценны, но при составлении матрицы главных сечений следует выбирать дерево, отвечающее последовательности, для которой составлялась программа для расчета. Например, при использовании программы ПАУС следует отбрасывать ветви, начиная с наибольших номеров, поэтому дальнейшие операции по построению матрицы главных сечений будем показывать на примере рис. 7.19, д, поскольку в этой схеме ребрами являются ветви с наибольшими номерами. Перерисуем дерево рис. 7.19, д на рис. 7.20, причем ребра покажем непрерывными линиями, а хорды — штриховыми. Нанесем на граф рис. 7.20 главные сечения. *Главными сечениями* называются сечения, пересекающие только одно ребро дерева и любое количество хорд. Главных сечений будет в цепи столько, сколько получается ветвей без учета устранимых узлов. Например, в цепи рис. 7.17 и 7.18 таких ветвей будет три (между узлами 3 и 6 через ветви 6, 3, 1; между ветвями 3 и 6 через ветви 7, 4; между ветвями 3 и 6 через ветви 2 и 5). Следовательно, в данной цепи будет три главных сечения. Сечения покажем замкнутыми линиями и обозначим римскими цифрами. Ни одну ветвь сечения не могут пересекать дважды. Каждое главное сечение должно включать хотя бы одну ветвь, которой нет в других главных сечениях. Проведем первое главное сечение через ребро 3 и хорду 6, второе — через ребро 2, хорду 6 и хорду 7, третье — через ребро 4 и хорду 7. Сечение через ребро 1 и хорду 6 равносильно первому сечению и поэтому не может быть использовано. Нанеся главные сечения, составим для всех узлов, входящих в сече-



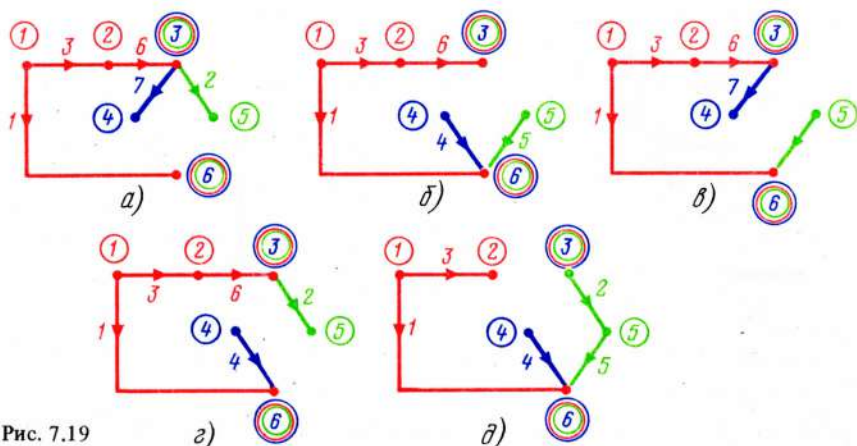


Рис. 7.19

ния, уравнения по первому закону Кирхгофа. Условимся токи, притекающие к узлу, считать положительными, а утекающие от узла — отрицательными. В этом случае получаются уравнения

$$\text{для узла 2} \quad i_3 - i_6 = 0,$$

$$\text{для узла 3} \quad i_6 - i_2 - i_7 = 0,$$

$$\text{для узла 4} \quad i_7 - i_4 = 0.$$

Заметим, что в каждом уравнении могут быть токи только одного ребра и любого числа хорд. Выразим токи ребер через токи хорд:

$$i_3 = i_6,$$

$$i_2 = i_6 - i_7, \quad (7.12)$$

$$i_4 = i_7.$$

Запишем получившиеся уравнения в матричной форме. Покажем, каким образом составляется данная матрица. В левой части матрицы пишется столбец, содержащий токи в ребрах, в данной цепи ребрами являются ветви 1, 2, 3, 4, 5. В правой части матрица имеет столько строк, сколько ребер содержит цепь, в нашем случае — две (ветви 6 и 7). В каждой строке записывают столько различных чисел, сколько хорд имеет цепь. Так как в данной цепи имеется две хорды, то в каждой строке будет по два числовых значения. Таким образом, в нашем случае левая колонка матрицы относится к ветви 6, а следующая (т. е. записанная правее) — к ветви 7. Если в ток данного ребра входит ток некоторой хорды со знаком плюс, то в строке матрицы ставится 1, если со знаком минус, то  $-1$ , если не входит, то 0. Составим матрицу по уравнениям (7.12). Как видно из данных уравнений, ток  $i_1$  не связан с токами  $i_6$  и  $i_7$ , поэтому в верхней строке матрицы (т. е. против тока  $i_1$ ) поставим нули. Ток  $i_2$  связан с положительным током  $i_6$  и отрицательным током  $i_7$ , поэтому на пересечении строки  $i_2$  и хорды 6 ставим 1, а на пересечении с хордой 7 —  $-1$ . Аналогичным образом заполняются остальные строки матрицы.

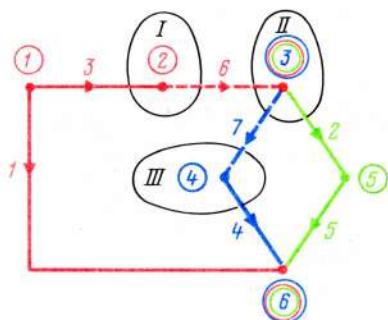


Рис. 7.20

Связь с хордами

Ребра	6	7	Хорды
$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} i_6 \\ i_7 \end{bmatrix}$	

(7.13)

По ряду причин чисто вычисленного характера из матрицы следует вынести знак минус, тогда (7.13) приобретает вид

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Уравнение (7.14) можно записать в виде

$$\mathbf{I}_p = -\mathbf{F} \mathbf{I}_X,$$

где  $\mathbf{I}_p$  — вектор токов ребер;  $\mathbf{F}$  — матрица главных сечений;  $\mathbf{I}_X$  — вектор токов хорд.

Аналогичным образом можно составить матрицу главных контуров.

## 7.8. ВВОД В МАШИНУ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Ввод элементов в машину производят в той последовательности, которая определяется программой, например для программы ПАУС последовательность ввода:  $E - E_{\text{зав}} - C - R - L - I - I_{\text{зав}}$ . Элементы вводят по схеме: что — где — сколько. Это означает, что для каждого элемента следует показать название и порядковый номер данного элемента, затем дать пробел, после этого ввести номер узла, из которого выходит ветвь, опять дать пробел, ввести номер узла, к которому подходит ветвь, снова дать пробел, ввести значение величины и нажать клавишу "Возврат каретки". При расчетах частотных характеристик значения источников напряжения и тока берут по 1. Значения величин вводят в тех единицах, которые предусмотрены программой. В частности, в программе ПАУС напряжение следует вводить в вольтах, емкости — в микрофарадах, сопротивления — в килоомах, индуктивности — в генри, токи — в миллиамперах, частоты — в килогерцах, время — в миллисекундах. Например, если в цепи (рис. 7.17)  $R_1 = 1,5 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 0,3 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 0,5 \text{ кОм}$ ,  $L_1 = 50 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 100 \text{ мГн}$ ,  $C = 30 \text{ нФ}$ , то исходные данные вводят в машину следующим образом:

$E1 \sqcup 1 \sqcup 6 \sqcup 1 \quad \langle \text{BK} \rangle$   
 $C1 \sqcup 3 \sqcup 5 \sqcup 0,03 \quad \langle \text{BK} \rangle$   
 $R1 \sqcup 1 \sqcup 2 \sqcup 1,5 \quad \langle \text{BK} \rangle$   
 $R2 \sqcup 4 \sqcup 6 \sqcup 0,3 \quad \langle \text{BK} \rangle$   
 $R3 \sqcup 5 \sqcup 6 \sqcup 0,5 \quad \langle \text{BK} \rangle$   
 $L1 \sqcup 2 \sqcup 3 \sqcup 0,05 \quad \langle \text{BK} \rangle$   
 $L2 \sqcup 3 \sqcup 4 \sqcup 0,1 \quad \langle \text{BK} \rangle$

В данной таблице первая строка означает: источник —  $E_1$ , место источника — между узлами 1 и 6, значение источника — 1 В. Вторая строка: конденсатор  $C_1$  находится между узлами 3 и 5, значение емкости — 0,03 мкФ и т. д.

Введя в машину топологию исследуемой цепи, следует набрать код, определяемый программой (в программе ПАУС — код 1), при вводе которого на дисплее высвечивается матрица главных сечений, данной цепи. Если матрица, подсчитанная машиной, совпадает с матрицей, полученной ручным образом, то можно переходить к расчету частотных характеристик. В машину следует ввести ряд дополнительных данных, необходимых для расчета, в том числе начальную и конечную частоты, шаг (или число точек), указать ветвь, относительно которой рассчитываются передаточные АЧХ и ФЧХ, и ввести код, соответствующий расчету частотных характеристик (в программе ПАУС — код 6), после чего на экране дисплея, а если необходимо, то и на буквопечатающем устройстве появляется распечатка частот, модулей и аргументов передаточных характеристик. По указанию пользователя машина может построить график исследованной частотной характеристики.

**Пример 7.3.** Определить матрицу главных сечений цепи рис. 7.21.

**Решение.** Пронумеруем узлы и ветви, как показано на этом рисунке. На рис. 7.22 изображен граф этой цепи, причем ветви 1–6 являются ребрами, а ветви 7–11 —

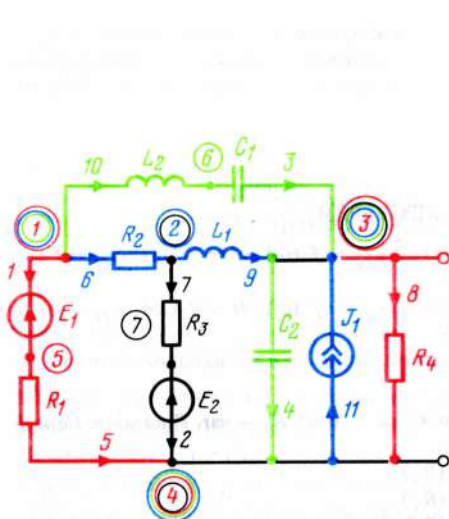


Рис. 7.21

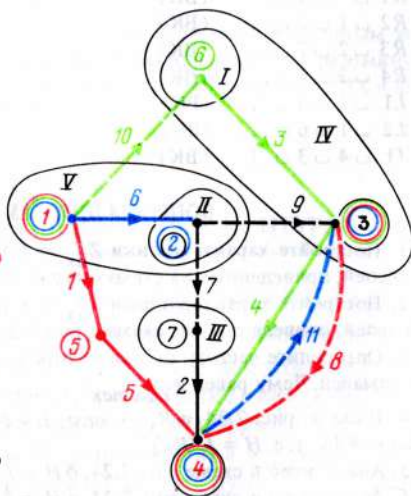


Рис. 7.22



хордами. Нанесены пять главных сечений. Сечение I пересекает ребро 3 и хорду 10, сечение II – ребро 6 и хорды 7 и 9, сечение III – ребро 2 и хорду 7, сечение IV – ребро 4 и хорды 8, 9, 10, 11, сечение V – ребро 1 и хорды 7, 9, 10. Составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 6, 2, 7, 3, 1, 5. Будем записывать по внешней стороне сечения (см. гл. 3). Обратим внимание, что  $i_3 = i_{10}$ ,  $i_6 = i_7 + i_9$ ,  $i_5 = i_1 = -i_7 - i_9 - i_{10}$ .

$$\begin{aligned} i_{10} - i_3 &= 0, & i_3 &= i_{10}, \\ i_6 - i_7 - i_9 &= 0, & i_6 &= i_7 + i_9, \\ i_7 - i_2 &= 0, & i_2 &= i_7, \\ i_{10} + i_9 - i_4 - i_8 + i_{11} &= 0, & i_4 &= -i_8 + i_9 + i_{10} + i_{11}, \\ -i_1 - i_7 - i_9 - i_{10} &= 0, & i_1 &= -i_7 - i_9 - i_{10}, \\ -i_5 - i_7 - i_9 - i_{10} &= 0, & i_5 &= -i_7 - i_9 - i_{10}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

откуда

Составим матрицу главных сечений.

$$\begin{array}{c} \text{Связь с хордами} \\ \text{Ребра} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{Хорды} \\ \begin{bmatrix} i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \quad (7.16)$$

Если из матрицы вынести знак минус, то получится та же матрица, которую формирует машина. Исходные данные должны быть введены в машину по следующей схеме:

E1 ⊂ 1 ⊂ 5 ⊂ 1 < BK>  
 E2 ⊂ 7 ⊂ 4 ⊂ 1 < BK>  
 C1 ⊂ 6 ⊂ 3 ⊂ ... < BK>  
 C2 ⊂ 9 ⊂ 4 ⊂ ... < BK>  
 R1 ⊂ 5 ⊂ 4 ⊂ ... < BK>  
 R2 ⊂ 1 ⊂ 2 ⊂ ... < BK>  
 R3 ⊂ 2 ⊂ 7 ⊂ ... < BK>  
 R4 ⊂ 3 ⊂ 4 ⊂ ... < BK>  
 L1 ⊂ 2 ⊂ 3 ⊂ ... < BK>  
 L2 ⊂ 1 ⊂ 6 ⊂ ... < BK>  
 J1 ⊂ 4 ⊂ 3 ⊂ 1 < BK>

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Постройте характеристики  $Z_{\text{вх}} = f(\omega)$ ,  $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = f(\omega)$ ,  $H = f(\omega)$ ,  $\varphi_H = f(\omega)$  для цепей, приведенных на схемах рис. 7.23.
2. Постройте характеристики  $Z_{\text{вх}} = f(\omega)$ ,  $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = f(\omega)$ ,  $H = f(\omega)$ ,  $\varphi_H = f(\omega)$  для цепей, приведенных на схемах, рис. 7.24.
3. Определите частоту  $\omega$ , при которой в схеме рис. 7.24, а и г входной фазный угол максимален. Чему равен  $\varphi_{Z_{\text{вх max}}}$ ?
4. В схеме рис. 7.24, а  $R_1 = \text{const}$ ,  $L = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ ,  $R_2 = \text{var}$ . Постройте передаточную АЧХ, т. е.  $H = f(R_2)$ .
5. Аналогично в схеме рис. 7.24, б  $H = f(R_1)$ .
6. Аналогично в схеме рис. 7.24, в  $H = f(R_1)$ .
7. Аналогично в схеме рис. 7.24, г  $H = f(R_2)$ .
8. Постройте передаточную АЧХ и ФЧХ для схем рис. 7.25.

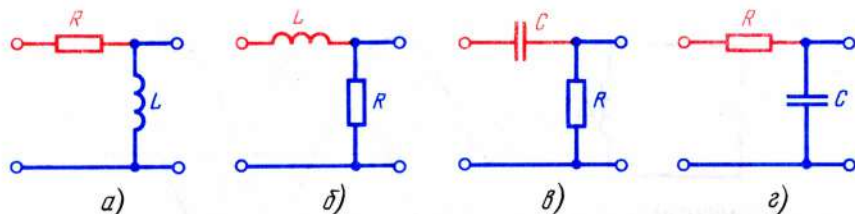


Рис. 7.23

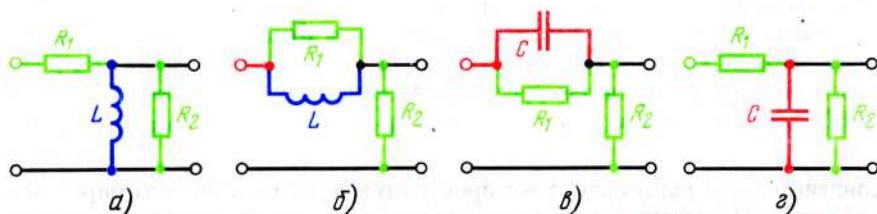


Рис. 7.24

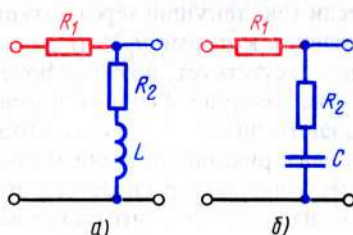


Рис. 7.25

9. Составьте матрицы главных сечений для цепей рис. 7.24, если к входным зажимам подключен источник напряжения  $E_1$ , а вторичные зажимы остаются разомкнутыми. Составьте таблицу ввода исходных данных для расчета передаточных АЧХ и ФЧХ.

## Глава 8.

## РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОДИНОЧНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРАХ

### 8.1. ПОНЯТИЕ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В $LC$ -ЦЕПИ

Пусть имеется конденсатор емкостью  $C$ , заряженный до напряжения  $U_m$ . Энергия, запасенная к конденсаторе,  $W_{m3} = CU_m^2/2$ . В некоторый момент, назовем его нулевым, подключим конденсатор к катушке с индуктивностью  $L$ , не имеющей потерь (рис. 8.1, а). Очевидно, что по образовавшейся цепи станет протекать ток, конденсатор будет разряжаться, а вокруг катушки образуется магнитное поле. Поскольку поле в катушке будет нарастающим, ЭДС самоиндукции, имеющая направление в соответствии с законом Ленца, будет препятствовать нарастанию тока и магнитного поля, поэтому разряд

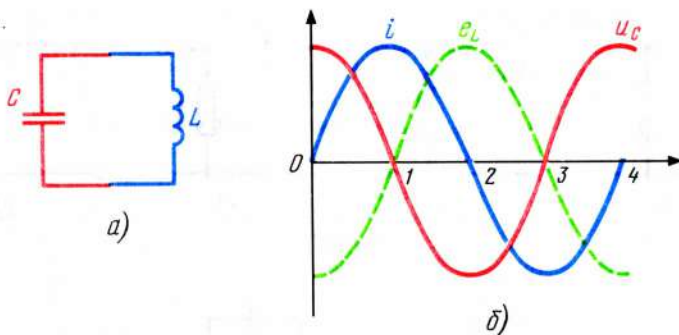


Рис. 8.1

конденсатора и нарастание тока произойдут не мгновенно, а за определенное время. Постепенно конденсатор разрядится, вся энергия из электрической перейдет в магнитную  $W_{m\text{м}} = LI_m^2/2$ . Так как потери в цепи отсутствуют, то  $W_{m\text{м}} = W_{m\text{э}}$ . Но максимальный запас магнитной энергии может быть только в том случае, если ток, текущий через катушку, будет также максимальным. Назовем момент, в который  $u_C = 0$ , а  $i = i_m$  — первым. Напряжение на зажимах катушки отсутствует, поэтому поле катушки убывает, в ее витках наводится ЭДС, на зажимах катушки и конденсатора появится напряжение противоположного знака. В момент второй (рис. 8.1, б), ток в цепи станет равным 0, а напряжение на конденсаторе — наибольшим, но с обратным знаком, затем конденсатор снова станет разряжаться, а ток нарастать. В третий момент напряжение опять станет равным 0, а ток — максимальным, но в противоположном направлении, затем напряжение начнет нарастать, ток уменьшаться. В четвертый момент система приходит к тому же состоянию, в котором была в нулевой момент, т. е. напряжение на конденсаторе максимальное, ток — нулевой, после чего все повторяется. Поскольку потери в цепи отсутствуют, общий запас энергии остается постоянным, а амплитуда колебаний — неизменной. Таким образом, в любой момент суммарная энергия в данной цепи  $w_{\text{э}} + w_{\text{м}} = \text{const} = W_{m\text{э}} = W_{m\text{м}} = CU_m^2/2 = LI_m^2/2$ .

Колебания, происходящие в LC-цепи под воздействием первоначального запаса энергии, называются *незатухающими*, т. е. происходящими с неизменной амплитудой. Колебательный процесс все время повторяется, свободные колебания, следовательно, имеют периодический характер, т. е. момент времени, обозначенный как первый, представляет четверть периода —  $T/4$ , второй — половину периода —  $T/2$ , третий — три четверти периода  $3T/4$ , четвертый — период  $T$ . Мгновенные напряжения изменяются по косинусоидальному, а мгновенные токи — по синусоидальному законам, поэтому угол между ними  $90^\circ$ , а это возможно, только если напряжения и токи имеют гармоническую форму. Определим угловую частоту этих колебаний. При гармонических колебаниях максимальное значение тока в индуктивности  $I_m = U_m/\omega L$ , поэтому  $CU_m^2/2 = LU_m^2/2 \omega_{\text{св}}^2 L^2$  или  $\omega_{\text{св}}^2 = 1/LC$ , откуда



$$\omega_{\text{св}} = 1/\sqrt{LC}. \quad (8.1)$$

Таким образом, в  $LC$ -цепи

$$f_{\text{св}} = \frac{\omega_{\text{св}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad T_{\text{св}} = 1/f_{\text{св}} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (8.2)$$

## 8.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ $RLC$ -ЦЕПЬ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассмотрим последовательную  $RLC$ -цепь (рис. 8.2, а) при гармоническом воздействии с переменной частотой  $\omega$ . Цепь  $RLC$  обладает тем свойством, что среди многообразия частот имеется частота, на которой входное сопротивление имеет чисто резистивный характер, несмотря на наличие в цепи индуктивностей и емкостей. Такая частота называется *резонансной* и обозначается  $\omega_0$ .

Входные и передаточные характеристики цепи на резонансной частоте и в ее окрестностях имеют много особенностей, которые будут показаны ниже. Объясним, почему на резонансной частоте входное сопротивление оказывается чисто резистивным. Рассмотрим частотные характеристики реактивных сопротивлений, входящих в цепь. Индуктивное сопротивление имеет положительное значение  $X_L = \omega L$ , а емкостное — отрицательное  $X_C = 1/\omega C$ . Нанесем частотные характеристики этих сопротивлений на график (рис. 8.2, б) и построим результирующую частотную характеристику, т. е. частотную характеристику реактивной составляющей входного сопротивления. При нулевой частоте  $X_L = 0$ ,  $X_C = -\infty$ ,  $X = X_L + X_C = -\infty$ . При бесконечной частоте  $X_L = \infty$ ,  $X_C = 0$ ,  $X = X_L + X_C = \infty$ . Таким образом, при изменении частоты от 0 до  $\infty$ , входное реактивное сопротивление изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , следовательно, имеется частота, при которой  $X = 0$ . Нулевое реактивное сопротивление оказывается на частоте, при которой реактивное индуктивное сопротивление по абсолютному значению равно емкостному. Эта частота и является резонансной, поскольку на ней общее реактивное сопро-

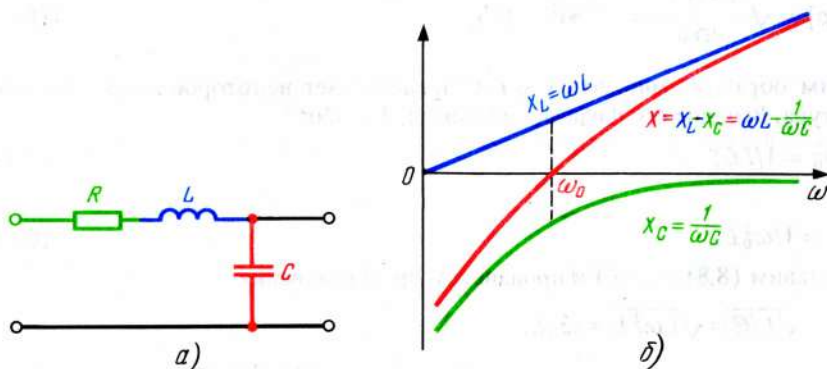


Рис. 8.2

тивление равно 0 и входное сопротивление цепи определяется сопротивлением резистивного элемента.

Рассчитаем резонансную частоту  $\omega_p$ . Так как при резонансе  $|X_L| = |X_C|$ , то  $\omega_p L = 1/\omega_p C$ , т. е.  $\omega_p^2 = 1/LC$ , откуда

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC}. \quad (8.3)$$

Но частота  $1/\sqrt{LC}$  есть частота свободных колебаний. Следовательно, резонанс наступает тогда, когда частота внешнего источника, подключенного к цепи, равна частоте свободных колебаний этой цепи. В этом случае  $\omega_p = \omega_0$ .

### 8.3. ДОБРОТНОСТЬ

В общем случае под добротностью контура понимают величину

$$Q = 2\pi(W_{mp}/W_{aT}), \quad (8.4)$$

где  $W_{mp}$  — максимальное значение реактивной энергии, запасенной в контуре при резонансе;  $W_{aT}$  — активная энергия, поглощаемая в контуре за период.

Максимальная реактивная энергия в последовательном контуре равна сумме мгновенных энергий магнитного и электрических полей:  $W_{mp} = w_{\dot{\varphi}} + w_{\dot{\psi}}$ . На резонансной частоте  $W_{mp} = LI_m^2/2$ . Активная энергия, рассеиваемая в контуре за период,  $W_{aT} = I^2 RT_0 = I_m^2 RT_0/2$ . Подставив данные выражения в (8.4), получим

$$Q = \frac{2\pi LI_m^2/2}{I_m^2 RT_0/2} = \frac{2\pi L}{RT_0}.$$

Так как  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ , то

$$Q = \frac{2\pi L}{R 2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{L^2/LC} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}. \quad (8.5)$$

Обозначим  $\rho = \sqrt{L/C}$  и определим размерность:

$$[\rho] = \sqrt{\frac{c \cdot \text{Ом}}{c/\text{Ом}}} = \sqrt{\text{Ом}^2} = \text{Ом}. \quad (8.6)$$

Таким образом, множитель  $\sqrt{L/C}$  представляет некоторое сопротивление контура. Выявим его физический смысл. Так как

$$\omega_0^2 = 1/LC, \quad (8.7)$$

то

$$C = 1/\omega_0^2 L. \quad (8.8)$$

Подставим (8.8) в (8.6) и произведем преобразования:

$$\rho = \sqrt{L/C} = \sqrt{L\omega_0^2 L} = \omega_0 L.$$

Получим еще одно соотношение. Из (8.7)  $L = 1/\omega_0^2 C$ . Подставив в (8.6), получим

$$\rho = \sqrt{1/\omega_0^2 C \cdot C} = 1/\omega_0 C.$$

Но  $\omega_0 L$  — есть сопротивление индуктивного, а  $1/\omega_0 C$  — емкостного элемента на резонансной частоте. Следовательно,  $\rho = \sqrt{L/C}$  есть сопротивление одного из реактивных элементов контура на резонансной частоте. Это сопротивление называют *характеристическим сопротивлением контура*. Таким образом,

$$\rho = \sqrt{L/C} = \omega_0 L = X_{L0} = 1/\omega_0 C = X_{C0}. \quad (8.9)$$

Отношение характеристического сопротивления контура к его резистивному сопротивлению есть *добротность контура*  $Q$ :

$$Q = \rho/R = \sqrt{L/C}/R. \quad (8.10)$$

Таким образом, *добротность* — параметр, характеризующий качество электрической цепи. Добротность можно выражать через отношение энергий или сопротивлений контура. Ниже будет показано, каким образом выражать добротность через напряжения и токи. Добротность контуров, используемых в технике связи, чаще всего составляет десятки единиц (10–100). Величину, обратную добротности, называют *затуханием* и обозначают  $d$ . Итак

$$d = 1/Q \quad (8.11)$$

или  $Q = 1/d$ .

Цепи  $RLC$  с добротностями больше единицы называют колебательными контурами (слово "колебательные" для краткости нередко опускают).

#### 8.4. ЗАМЕНА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ $RC$ -ЦЕПИ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ

Всякий двухполюсник, состоящий из резистивного и реактивного элементов, соединенных параллельно, можно заменить эквивалентной цепью, состоящей из аналогичных элементов, соединенных последовательно. Например, двухполюсник рис. 8.3, а можно заменить двухполюсником рис. 8.3, б. При этом должно выполняться условие

$$\underline{Z}_{\text{вх. посл}} = \underline{Z}_{\text{вх. пар}}, \quad \text{где } \underline{Z}_{\text{вх. посл}} = R_{\text{посл}} + 1/j\omega C_{\text{посл}};$$

$$\underline{Z}_{\text{вх. пар}} = \frac{R_{\text{пар}} (1/j\omega C_{\text{пар}})}{R_{\text{пар}} + 1/j\omega C_{\text{пар}}}.$$

Приравняв эти уравнения и проделав необходимые преобразования, получим

$$R_{\text{посл}} = \frac{R_{\text{пар}}}{1 + \omega^2 R_{\text{пар}}^2 C_{\text{пар}}^2};$$

$$C_{\text{посл}} = \frac{1 + \omega^2 R_{\text{пар}}^2 C_{\text{пар}}^2}{\omega^2 R_{\text{пар}}^2 C_{\text{пар}}}.$$

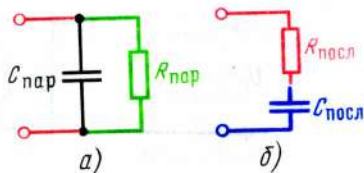


Рис. 8.3.



Если  $R_{\text{пар}} \gg 1/\omega C_{\text{пар}}$ , т. е.  $\omega R_{\text{пар}} C_{\text{пар}} \gg 1$ , то

$$C_{\text{посл}} \approx C_{\text{пар}} \approx C,$$

$$R_{\text{посл}} = 1/\omega^2 R_{\text{пар}} C^2_{\text{пар}} = L/R_{\text{пар}} C = \rho^2/R_{\text{пар}}. \quad (8.12)$$

### 8.5. ДОБРОТНОСТЬ НАГРУЖЕННОГО КОНТУРА

Неразветвленную  $RLC$ -цепь используют чаще всего как четырехполюсник, выходное напряжение в котором снимают с емкости. В реальных условиях параллельно конденсатору контура, как правило, оказывается включенным сопротивление  $R_{\text{н}}$ , являющееся входным сопротивлением следующего за контуром каскада или устройства, т. е. цепи, на которую контур нагружен (рис. 8.4, а). Поскольку в сопротивлении  $R_{\text{н}}$  рассеивается мощность, добротность контура с подключенным сопротивлением  $R_{\text{н}}$  будет меньше, чем при отключенном. Мощность, рассеиваемую в сопротивлении  $R_{\text{н}}$ , определяют из выражения  $P_{\text{н}} = U^2_2/R_{\text{н}}$ . Следовательно, в режиме холостого хода (т. е. при  $R_{\text{н}} = \infty$ ) мощность  $P_{\text{н}}$  равна нулю, а по мере уменьшения сопротивления  $R_{\text{н}}$  — увеличивается. (Не следует путать влияние сопротивления  $R$ , включенного последовательно с конденсатором  $C$ , с сопротивлением  $R_{\text{н}}$ , включенным параллельно. С увеличением последовательного сопротивления  $R$  мощность в нем увеличивается, поскольку в этом случае  $P = I^2 R$ , добротность контура, следовательно, уменьшается. При сопротивлении  $R_{\text{н}}$ , включенном параллельно, мощность, рассеиваемая на нем,  $P = U^2_2/R_{\text{н}}$ , поэтому при увеличении сопротивления  $R_{\text{н}}$  мощность уменьшается, а добротность растет.) Обозначим добротность ненагруженного контура  $Q$ , а добротность нагруженного —  $Q_{\text{ц}}$ , (т. е. добротность цепи). Емкостное сопротивление контура  $\rho$ . Если  $R_{\text{н}} \gg \rho$  (на практике хотя бы  $R_{\text{н}} > 3\rho$ ), что в реальных цепях в большинстве случаев имеет место, то параллельную цепь  $R_{\text{н}} C$  можно заменить эквивалентной последовательной цепью  $rC$ , причем расчет производить по упрощенной формуле (8.12). Таким образом, схему рис. 8.4, а можно заменить эквивалентной схемой рис. 8.4, б, причем  $r = \rho^2/R_{\text{н}} = L/R_{\text{н}} C$ . Очевидно, что  $r$  — сопротивление, в котором рассеивается такая же мощность как и в резисторе  $R_{\text{н}}$ . Добротность цепи  $Q_{\text{ц}}$  при этом оказывается меньше добротности собственно контура:

$$Q_{\text{ц}} = \frac{\rho}{R + r} = \frac{\rho}{R(1 + r/R)} = \frac{Q}{1 + r/R} = \frac{Q}{1 + \rho^2/R_{\text{н}} R}. \quad (8.13)$$

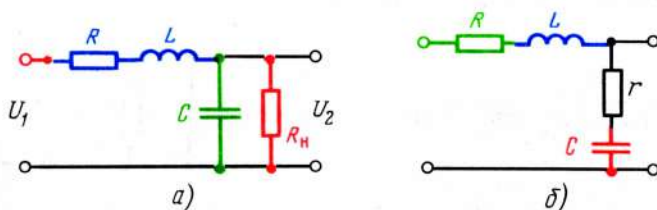


Рис. 8.4

## 8.6. РЕЗОНАНСНАЯ ЧАСТОТА НАГРУЖЕННОГО КОНТУРА

В цепи, содержащей реактивные элементы, произойдет резонанс, если цепь имеет чисто резистивный характер, т. е. напряжение и ток в ней совпадают по фазе. Это условие выполняется, если мнимая составляющая входного сопротивления равна 0:

$$\operatorname{Im} [Z_{\text{вх}}] = 0. \quad (8.14)$$

Таким образом, чтобы определить резонансную частоту цепи  $\omega_p$ , необходимо проделать следующее:

1. Записать комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{\text{вх}}$ .
2. Привести данное выражение к виду  $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}$ .
3. Множитель  $X_{\text{вх}}$  приравнять 0 и решить получившееся уравнение относительно частоты  $\omega$ .

Определим резонансную частоту цепи (рис. 8.4, а):

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= R + j\omega L + \frac{R_{\text{н}} 1/j\omega C}{R_{\text{н}} + 1/j\omega C} = R + j\omega L + \frac{R_{\text{н}} j\omega C}{j\omega C (1 + j\omega R_{\text{н}} C)} = \\ &= \frac{(R + j\omega L + j\omega R R_{\text{н}} - \omega^2 R_{\text{н}} LC + R_{\text{н}})}{(1 + j\omega R_{\text{н}} C)}. \end{aligned}$$

Чтобы данное выражение привести к виду  $Z_{\text{вх}} = \operatorname{Re} [Z_{\text{вх}}] + j \operatorname{Im} [Z_{\text{вх}}]$ , необходимо числитель и знаменатель умножить на множитель  $(1 - j\omega R_{\text{н}} C)$ ; в этом случае знаменатель становится величиной вещественной, не равной бесконечности. Для получения уравнения  $\operatorname{Im} [Z_{\text{вх}}] = 0$  необходимо числитель перемножить на многочлен  $(1 - j\omega R_{\text{н}} C)$ , выбрать члены, имеющие множитель  $j$ , и приравнять их 0:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [(R + j\omega L + j\omega R R_{\text{н}} C - \omega^2 R_{\text{н}} LC + R_{\text{н}}) (1 - j\omega R_{\text{н}} C)] &= \\ = \omega L + \omega R R_{\text{н}} C - \omega R R_{\text{н}} C + \omega^3 R_{\text{н}}^2 LC^2 - \omega R_{\text{н}}^2 C &= 0 \text{ или } \omega (\omega^2 R_{\text{н}}^2 LC^2 - \\ - R_{\text{н}}^2 C + L) &= 0. \end{aligned}$$

Так как  $\omega \neq 0$ , то  $\omega^2 R_{\text{н}}^2 LC^2 - R_{\text{н}}^2 C - L = 0$ , откуда  $\omega^2 = 1/LC (1 - L/C/R_{\text{н}}^2)$ , т. е.

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - (\rho/R_{\text{н}})^2}. \quad (8.15)$$

Таким образом, резонансная частота в разветвленных цепях несколько отличается от выражения  $1/\sqrt{LC}$ , однако если  $R_{\text{н}} \gg \rho$  (на практике хотя бы в 3 раза), то член  $(\rho/R_{\text{н}})^2$  оказывается много меньше 1, им можно пренебречь и считать резонансную частоту контура близкой частоте свободных колебаний  $\omega_0$ . Следовательно, если добротность цепи превышает несколько единиц, то резонансную частоту  $\omega_p$  можно принимать за значение  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . При  $R_{\text{н}} = \rho$  резонансная частота становится равной 0, а при  $R_{\text{н}} < \rho$  подкоренное выражение становится отрицательным. Это указывает на то, что контур перестает быть колебательным и резонансной частоты не существует.

## 8.7. РАССТРОЙКИ

При работе с колебательными контурами всегда важно знать, совпадает частота генератора с резонансной частотой контура или нет. Если частота генератора, подключенного к контуру, равна резонансной частоте этого контура, то говорят, что контур настроен на частоту источника, а если частота генератора отличается от частоты контура, то расстроен. Настроить контур (имеется в виду в резонанс) — значит так изменить значения реактивного элемента (или элементов), чтобы резонансная частота контура оказалась бы равной частоте генератора. Следует, однако, иметь в виду, что в контурах, состоящих из только пассивных элементов, настройка производится изменением параметров реактивных элементов, но в активных цепях (см. ниже) настройка может осуществляться совершенно иным образом.

Введем понятия: абсолютная, относительная и обобщенная расстройки.

*Абсолютной расстройкой*  $\Delta f$  (или  $\Delta\omega$ ) называют разность между данной частотой  $f(\omega)$  и резонансной частотой  $f_0(\omega_0)$ :

$$\Delta f = f - f_0; \Delta\omega = \omega - \omega_0. \quad (8.16)$$

Абсолютные расстройки могут быть как положительными, так и отрицательными. *Относительной расстройкой* называется отношение  $\Delta f/f_0$  или соответственно  $\Delta\omega/\omega_0$ . При расчетах частотных характеристик контуров часто приходится оперировать с выражением  $\epsilon = (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$ . Покажем, что величина  $\epsilon$  близка к удвоенной относительной расстройке:

$$\epsilon = (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega}.$$

При малых расстройках  $\omega + \omega_0 \approx 2\omega$ , тогда

$$\epsilon = 2\Delta\omega \omega / \omega_0 \omega = 2\Delta\omega / \omega_0 = 2\Delta f / f_0.$$

Строго говоря, выражения  $(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$  и  $2\Delta\omega/\omega_0$  несколько отличаются друг от друга, но разница эта невелика, погрешность, получившаяся за счет такого приближения, близка к значению  $\epsilon$ . Если при выполнении расчетов допустимая погрешность не оговаривается, то при  $\epsilon \leq 0,1$  пользуются приближенным выражением  $\epsilon \approx 2\Delta f/f_0$ , а при  $\epsilon > 0,1$  — полным. Например, если  $f_0 = 5000$  Гц, а  $f = 5100$  Гц, то

$$\epsilon = 2\Delta f/f_0 = 2 \left( \frac{f - f_0}{f_0} \right) = 2 \left( \frac{5100 - 5000}{5000} \right) = 0,04 = 4\%.$$

Очевидно, что в данном случае использование приближенного выражения для  $\epsilon$  вполне допустимо. Встречается и другое приближение:

$$\epsilon = \frac{\omega^2}{\omega_0 \omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega_0 \omega} \approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

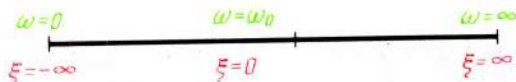
Таким образом,

$$\epsilon = (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) \approx 2\Delta f/f_0 \approx 1 - (\omega_0/\omega)^2. \quad (8.17)$$

*Обобщенной расстройкой*  $\xi$  называется отношение сопротивлений всех реактивных элементов контура к резистивному сопротивлению, т. е. тангенс



Рис. 8.5



входного фазного угла, или произведение добротности  $Q$  на удвоенную относительную расстройку  $\epsilon$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} X/R &= \operatorname{tg} \varphi_{Z_{\text{вх}}} = \frac{1}{R} (\omega L - 1/\omega C) = \frac{\omega_0 L}{R} \left( \frac{\omega L}{\omega_0 L} - \frac{1}{\omega C \omega_0 L} \right) = \\ &= Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0^2}{\omega_0 \omega} \right) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \epsilon = \xi. \end{aligned} \quad (8.18)$$

При резонансе все расстройки равны нулю, при  $\omega < \omega_0$  расстройки отрицательны, а при  $\omega > \omega_0$  положительны. Определим значение  $\xi$  в характерных точках. При  $\omega = 0$  (т. е. при постоянном токе)  $\xi = Q(0/\omega_0 - \omega_0/0) = Q(0 - \infty) = -\infty$ . При  $\omega = \omega_0$   $\xi = Q(\omega_0/\omega_0 - \omega_0/\omega_0) = Q(1 - 1) = 0$ .

При  $\omega = \infty$   $\xi = Q(\infty/\omega_0 - \omega_0/\infty) = Q(\infty - 0) = \infty$  (рис. 8.5).

Таким образом, добротность цепи  $Q$  характеризует качество контура, а обобщенная расстройка  $\xi$  — удаленность от резонансной частоты. Этими параметрами при анализе частотных характеристик контуров и следует пользоваться. Заметим также, что понятие  $X$  (т. е. реактивное сопротивление) при переменной частоте становится малоудобным и при анализе контуров используется всяма ограниченно.

#### 8.8. ВХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАССИВНОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОНТУРА

В последовательной пассивной  $RLC$ -цепи (рис. 8.6) комплексное входное сопротивление

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jX = R(1 + jX/R) = R(1 + j\xi) = \\ &= R \sqrt{1 + \xi^2} e^{j \operatorname{arctg} \xi} = R \sqrt{1 + \xi^2} e^{j \varphi_{Z_{\text{вх}}}}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Следовательно, входная АЧХ определяется из выражения  $Z_{\text{вх}} = R \sqrt{1 + \xi^2}$  и имеет вид рис. 8.7, а. Определим значения кривой в характерных точках. При  $\omega = 0$   $\xi = -\infty$ ,  $Z_{\text{вх}} = \infty$ , при  $\omega = \omega_0$   $\xi = 0$ ,  $Z_{\text{вх}} = R$ , при  $\omega = \infty$   $\xi = \infty$ ,  $Z_{\text{вх}} = \infty$ .

На резонансной частоте входное сопротивление минимально и равно резистивному сопротивлению контура, с увеличением расстройки модуль входного сопротивления возрастает.

Входная ФЧХ представляет аргумент входного комплексного сопротивления

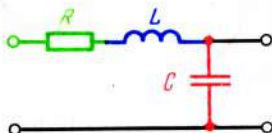


Рис. 8.6

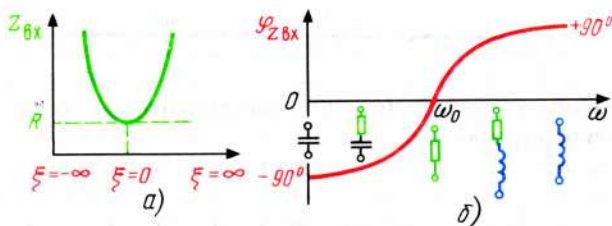


Рис. 8.7

$$\varphi_{Z_{BX}} = \arctg \xi. \quad (8.20)$$

Рассчитаем характерные точки кривой. При  $\omega = 0$   $\xi = -\infty$ ,  $\varphi_{Z_{BX}} = \arctg(-\infty) = -90^\circ$ , при  $\omega = \omega_0$   $\varphi_{Z_{BX}} = 0$ , при  $\omega = \infty$   $\xi = 0$ ,  $\varphi_{Z_{BX}} = 90^\circ$  (рис. 8.7, б). Проанализируем полученные характеристики. При  $\omega = 0$  индуктивное сопротивление равно 0, а емкостное — бесконечно велико по модулю и отрицательно по знаку, поэтому при постоянном токе цепь эквивалентна чистой емкости. В диапазоне частот  $0 \dots \omega_0$  аргумент имеет отрицательный знак, но угол по абсолютному значению меньше  $90^\circ$ , следовательно, контур эквивалентен  $RC$ -цепи. На резонансной частоте контур представляет  $R$ -цепь, в диапазоне  $\omega_0 \dots \infty$   $-RL$ -цепь, при  $\omega = \infty$   $-L$ -цепь.

### 8.9. ВХОДНОЙ ТОК В КОНТУРЕ

В пассивном последовательном  $RLC$ -контуре

$$\dot{I}_{BX} = \dot{U}_{BX} / Z_{BX} = U_1 e^{j0^\circ} / (Z_{BX} e^{j\varphi_{Z_{BX}}}) = I_{BX} e^{j\varphi_{I_{BX}}},$$

откуда модуль входного тока

$$I = U_1 / Z_{BX} = U_1 / (R\sqrt{1 + \xi^2}) = I_0 / \sqrt{1 + \xi^2}, \quad (8.21)$$

где  $I_0$  — действующее значение тока в контуре при резонансе. Кривая действующего (максимального) значения входного тока в зависимости от частоты или расстройки называется *резонансной кривой контура* (рис. 8.8, а). При нулевой и бесконечной частотах ток равен 0, а при резонансной частоте становится наибольшим:  $U_{BX}/R$ .

Выражение аргумента входного тока, как видно из (8.10), представляет зеркальное отображение ФЧХ входного сопротивления, поскольку  $\varphi_I = -\varphi_Z$  (рис. 8.8, б).

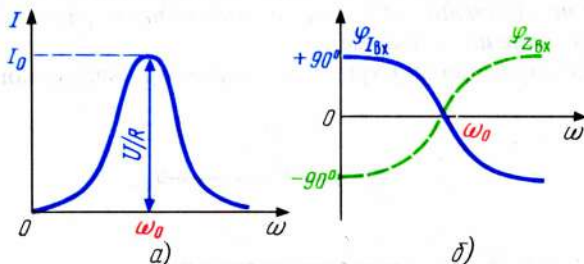


Рис. 8.8

## 8.10. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАССИВНОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОНТУРА

Определим передаточную функцию  $\underline{H}$  пассивного последовательного колебательного контура в зависимости от расстройки. Комплексная передаточная функция  $\underline{H}$  равна отношению комплексного выходного напряжения  $\dot{U}_2$  и комплексному входному напряжению  $\dot{U}_1$ . Примем начальную фазу входного напряжения за нулевую. В этом случае

$$\underline{H} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = U_2 e^{j\varphi_2} / U_1 e^{j0^\circ} = U_2 e^{j\varphi_2} / U_1.$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}(1/j\omega C) = \frac{U_1}{R\sqrt{1+\xi^2}} e^{j\varphi_I} \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ} = \frac{U_1}{\omega RC\sqrt{1+\xi^2}} \times e^{j(\varphi_I - 90^\circ)}, \quad (8.22)$$

откуда  $U_2 = U_1 / \omega RC \sqrt{1+\xi^2}$ .

Умножим и поделим знаменатель на частоту  $\omega_0$ , при этом

$$U_2 = \frac{U_1}{(\omega/\omega_0)\omega_0 RC\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{U_1 Q}{\nu\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (8.23)$$

где  $Q = 1/\omega_0 RC$ ;  $\nu = \omega/\omega_0$ .

При малых расстройках  $\nu \approx 1$ , тогда  $U_2 = QU_1/\sqrt{1+\xi^2}$ . При резонансе  $\xi = 0$

$$U_{20} = QU_1. \quad (8.24)$$

Таким образом, в пассивной последовательной RLC-цепи при резонансе напряжение на выходе в  $Q$  раз больше, чем на входе. Следовательно, добротность контура  $Q$  можно определять как  $U_{20}/U_1$ , т. е. как отношение модуля выходного напряжения при резонансе к входному. Последовательный контур представляет высокочастотный трансформатор, преобразующий малое входное напряжение  $U_1$  в большое выходное  $U_{20} = QU_1$ . При этом происходит и преобразование сопротивлений. Входное сопротивление последовательного контура при резонансе равно  $R$ , а выходное  $1/\omega_0 C = \rho$ , т. е. выходное сопротивление контура при резонансе в  $\rho/R = Q$  раз больше входного. На вход последовательного контура необходимо подключить источник с малым напряжением, но отдающим достаточно большой ток, что определяется малым входным сопротивлением контура. На выходе контура получается большее напряжение при соответственно меньшем выходном токе.

Передаточная АЧХ определяется из выражения

$$H = U_2/U_1 = Q/\nu\sqrt{1+\xi^2};$$

при малых расстройках

$$H = Q/\sqrt{1+\xi^2}; \quad (8.25)$$

на резонансной частоте

$$H_0 = Q. \quad (8.26)$$

Так как в реальных устройствах связи  $Q \gg 1$ , то последовательный пассивный колебательный контур дает большой коэффициент усиления по на-



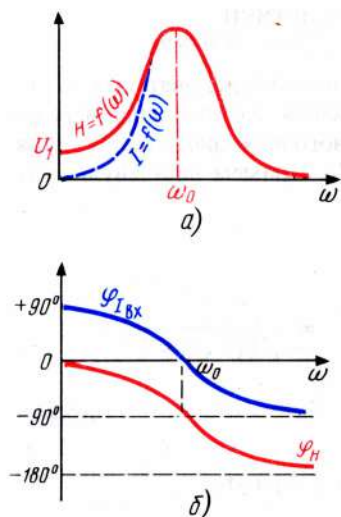


Рис. 8.9

пряжению, чем широко пользуются на практике, но малое входное сопротивление в ряде случаев ограничивает возможности использования последовательного контура, поскольку при его включении сильно шунтируется выходное сопротивление предыдущего каскада. Кривая  $H/H_{max} = f(\omega)$  при больших добротностях мало отличается от кривой  $I/I_{max} = f(\omega)$ . Вблизи от резонансной частоты, где  $\nu = \omega/\omega_0 \approx 1$  эти кривые практически тождественны. Наибольшее отличие оказывается при  $\omega = 0$ , на этой частоте  $I = 0$ , а  $U_C = U_1$  (рис. 8.9, а). Таким образом, под понятием "резонансная кривая" понимают зависимости  $I = f(\omega)$ ,  $U_2 = f(\omega)$ ,  $H = f(\omega)$ . Эти кривые практически отличаются только масштабом.

Строго говоря, напряжение на конденсаторе  $U_C$  максимально не при резонансной частоте, а при несколько меньшей. Из выражения  $dU_C/d\omega = 0$  получается, что

$$\omega_{U_{Cmax}} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/2Q^2}, \quad (8.27)$$

однако при добротностях всего в несколько единиц разница в частотах оказывается весьма малой. Практически считают, что при  $\omega = \omega_0$   $U_C = U_{Cmax}$ .

В соответствии с (8.22) передаточная ФЧХ пассивного последовательно-колебательного контура  $\varphi_H = \varphi_{U_2} - \varphi_{U_1} = (\varphi_{I_{вх}} - 90^\circ) - 0^\circ = -\varphi_{Z_{вх}} - 90^\circ = -(\arctg \xi + 90^\circ)$  и имеет вид рис. 8.9, б. Очевидно, что при  $\omega = 0$   $\varphi_H = 0$ , при  $\omega = \omega_0$   $\varphi_H = -90^\circ$ , при  $\omega = \infty$   $\varphi_H = -180^\circ$ .

### 8.11. НАПРЯЖЕНИЕ НА ИНДУКТИВНОСТИ И РЕЗИСТИВНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

Комплексное напряжение на индуктивности

$$\dot{U}_L = \dot{I}j\omega L = \frac{\nu Q U_1}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{j(\varphi_I + 90^\circ)}, \quad (8.28)$$

откуда  $U_{L0} = QU_1$ . При малых расстройках

$$U_L = QU_1/\sqrt{1 + \xi^2}, \quad \varphi_{UL} = -\arctg \xi + 90^\circ. \quad (8.29)$$

Таким образом, при резонансе модуль действующего (максимального) значения напряжения на каждом реактивном элементе в  $Q$  раз больше модуля действующего (максимального) входного напряжения, поэтому резонанс в последовательной цепи называют *резонансом напряжения*. Напряжение на участке  $L-C$  при резонансе равно 0, так как  $X_0 = \omega_0 L - 1/\omega_0 C = 0$ . Комплексное действующее (максимальное) напряжение на

резистивном сопротивлении  $R$   $\dot{U}_R = \dot{I}R = U_1/\sqrt{1+\xi^2} e^{j\varphi_I}$ , откуда

$$U_R = U_1/\sqrt{1+\xi^2}, \quad \varphi_{UR} = \varphi_I = -\arctg \xi.$$

При резонансе  $U_{R0} = U_1$ .

Если резистивное сопротивление контура определяется резистивным сопротивлением катушки, то нельзя измерить напряжение отдельно на  $R$  и на  $L$ . Модуль действующего (максимального) напряжения на катушке представляет геометрическую сумму модулей падений напряжений на сопротивлении  $R$  и индуктивности  $L$ . При резонансе напряжения на участке  $R-L$

$$U_{(RL)0} = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{L0}^2} = \sqrt{U_1^2 + (QU_1)^2} = U_1 \sqrt{1+Q^2}.$$

Если  $Q$  превышает несколько единиц, то  $U_{(RL)0} \approx U_{L0}$ .

## 8.12. ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ

Коэффициент передачи по напряжению в последовательном колебательном контуре зависит от частоты, поэтому при подведении на вход контура спектра частот с одинаковыми амплитудами на выходе получается спектр тех же частот, но с различными амплитудами. Чем больше частота внешнего источника отличается от резонансной частоты контура, тем меньше коэффициент передачи на данной частоте. Степень уменьшения коэффициента передачи определяется видом резонансной кривой: чем круче склоны резонансной кривой, тем больше разница в коэффициентах передачи для различных частот и наоборот (рис. 8.10, а).

Для определения диапазона частот, пропускаемого контуром, введено понятие "полоса пропускания контура". *Полосой пропускания* называется диапазон частот, в котором коэффициент передачи уменьшается не более чем в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с максимальным коэффициентом передачи. Следует различать абсолютное значение полосы пропускания  $\Pi$  и относительное  $S_0$ .

Абсолютная полоса пропускания

$$\Pi = 2\Delta f_{\text{гр}} = f_2 - f_1. \quad (8.30)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — нижняя и верхняя граничные частоты. *Граничными* называются частоты, на которых коэффициент передачи составляет  $1/\sqrt{2} = 0,707$  от коэффициента передачи на резонансной частоте (рис. 8.10, б). Строго говоря, резонансная кривая не является симметричной кривой, относительно вертикальной оси, проведенной через частоту  $\omega_0$ , однако при  $Q \gg 1$  эта

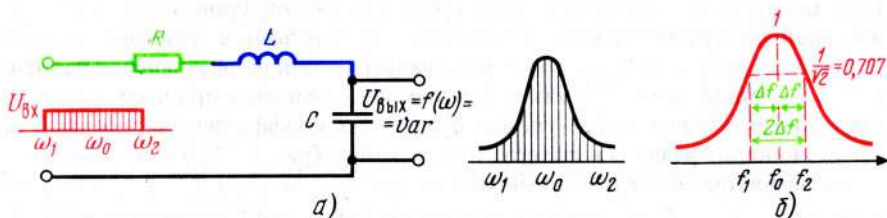


Рис. 8.10

асимметрия невелика, поэтому

$$\Delta f \approx f_0 - f_1 \approx f_2 - f_0. \quad (8.31)$$

Относительная полоса пропускания

$$S_0 = \Pi/f_0 = (f_2 - f_1)/f_0 = 2\Delta f_{\text{гр}}/f_0. \quad (8.32)$$

Граничные частоты можно рассчитать из уравнения:

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 (f/f_0 - f_0/f)^2}},$$

откуда

$$f_{12} = \frac{f_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} \mp 1). \quad (8.33)$$

Покажем связь между относительной полосой пропускания  $S_0$  и добротностью  $Q$ . На граничной частоте  $I_0/\sqrt{2} = I_0/\sqrt{1 + \xi_{\text{гр}}^2}$ , откуда  $\sqrt{2} = \sqrt{1 + \xi_{\text{гр}}^2}$ , или  $2 = 1 + \xi_{\text{гр}}^2$ , т. е.  $\xi_{\text{гр}} = \pm 1$ . Но  $\xi_{\text{гр}} = Q\epsilon_{\text{гр}} = 1$ , т. е.  $Q \times \frac{2\Delta f_{\text{гр}}}{f_0} = 1$ , или  $Q \frac{\Pi}{f_0} = 1$ :

$$QS_0 = 1, S_0 = 1/Q = d. \quad (8.34)$$

Следовательно, в любом одиночном контуре (только одиночном!) на нижней граничной частоте  $\xi_{\text{гр}} = -1$ , на верхней  $\xi_{\text{гр}} = +1$ . Относительная полоса пропускания одиночного контура  $S_0$  (опять-таки, только одиночного!) численно равна затуханию контура  $d$  или величине, обратной добротности  $Q$ . Так как  $H_0 = Q$ , а  $S_0 = 1/Q$ , то с увеличением добротности цепи коэффициент передачи увеличивается, а ширина полосы пропускания уменьшается в такое же число раз. Очевидно, что  $H_0 S_0 = 1 = \text{const}$ . Это обстоятельство весьма существенно и его всегда следует иметь в виду.

Граничные частоты  $f_1$  и  $f_2$  можно определять также из выражений

$$f_1 = f_0 - \Pi/2 = f_0 - f_0/2Q; f_2 = f_0 + \Pi/2 = f_0 + f_0/2Q. \quad (8.35)$$

Если с помощью резонансной кривой необходимо показать зависимость коэффициента передачи при различных добротностях, следует строить кривые  $H = F(f)$  при  $Q = \text{var}$  (рис. 8.11, а). На таких характеристиках хорошо видна разница в коэффициентах передачи (или напряжениях  $U_2$ ) в зависимости от  $Q$ , но гораздо менее наглядна разница в полосах пропускания. Если необходимо сравнить полосы пропускания контуров, то следует строить кривые относительного коэффициента передачи в функции частоты  $H/H_{\text{max}} = F(f)$ , где  $H_{\text{max}}$  — коэффициент передачи на резонансной частоте, а  $H$  — на данной частоте. У таких кривых максимальные ординаты одинаковые, поэтому в них менее удобно сравнивать коэффициенты передачи, но наглядно видна разница в полосах пропускания (рис. 8.11, б).

В пассивном последовательном контуре  $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = \arctg \xi$ , а  $\xi_{\text{гр}} = \pm 1$ , поэтому  $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = \pm 45^\circ$ . Поскольку в пределах  $-45^\circ \dots +45^\circ$  тангенсоида близка к прямой, ФЧХ в полосе пропускания практически линейна, а производная



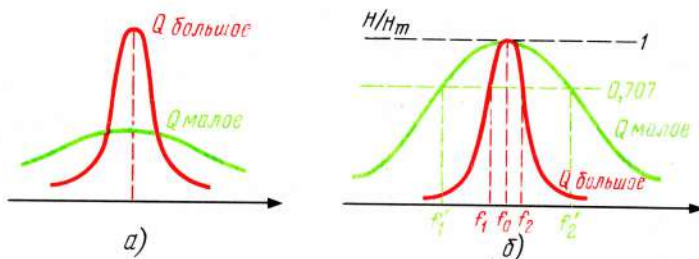


Рис. 8.11

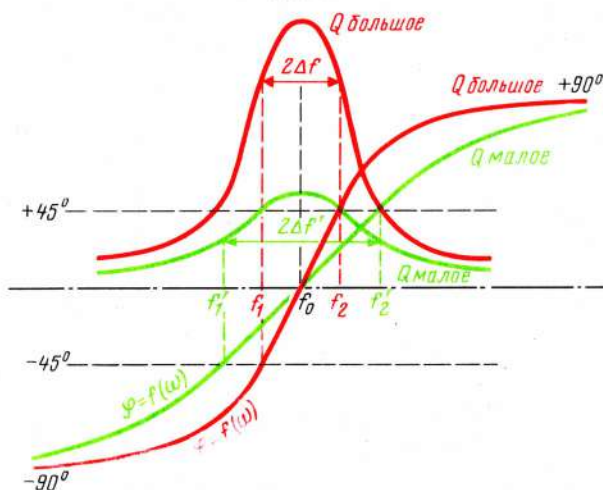


Рис. 8.12

$d\varphi/d\omega$ , представляющая время задержки, — постоянна. Чем больше добротность контура, тем круче идет ФЧХ в области резонансной частоты, а чем меньше, тем положе (рис. 8.12). Поскольку в каждом одиночном контуре на граничной частоте  $\varphi_{\text{ЗВХ}} = \pm 45^\circ$ , а с увеличением добротности полоса сужается, то ФЧХ с увеличением добротности должна идти круче, а с уменьшением — положе.

### 8.13. ИЗБИРАТЕЛЬНОСТЬ КОНТУРА

*Избирательностью* называется способность контура усиливать напряжения на различных частотах в неодинаковое число раз. Контур как бы "выбирает" из спектра напряжения на тех частотах, которые близки к резонансной. Соотношение между амплитудами сигналов различных частот на выходе контура отличается от соотношения аналогичных амплитуд на его входе. Очевидно, что чем больше добротность контура, тем круче идет резонансная кривая и тем больше избирательность контура. Избирательность  $B$  при заданной расстройке оценивается в децибелах (дБ) и определяется по формуле

$$B = 20 \lg \frac{U_{C0}}{U_C} = 20 \lg \frac{U_{C0}}{U_{C0}/\sqrt{1+\xi^2}} = 20 \lg \sqrt{1+\xi^2}. \quad (8.36)$$

Избирательность, в принципе, можно оценивать и в размах, но децибел — единица несравненно более удобная. На практике избирательность оценивается всегда в децибелах. Покажем, как переводить "разы" в децибелы. В общем случае

$$B_{\text{дБ}} = 20 \lg A_{\text{раз}}. \quad (8.37)$$

Таким образом, 10 раз составляют 20 дБ, 100 раз — 40 дБ, 1000 раз — 60 дБ и т. д. В технической практике не говорят, например, "усилитель с коэффициентом усиления 1000 раз", а говорят "усилитель с коэффициентом усиления 60 дБ".

**Пример 8.1.** Выразить в децибелах относительные величины: 20 раз, 50 раз, 200 раз, 500 раз.

**Решение.**  $B_{\text{дБ}} = 20 \lg A_{\text{раз}}$ ;  $B_{\text{дБ}} = 20 \lg 20 = 20 \cdot 1,3 = 26 \text{ дБ}$ ;  $B_{\text{дБ}} = 20 \lg 50 = 20 \cdot 1,7 = 34 \text{ дБ}$ ;  $B_{\text{дБ}} = 20 \lg 200 = 20 \cdot 2,3 = 46 \text{ дБ}$ ;  $B_{\text{дБ}} = 20 \lg 500 = 20 \cdot 2,7 = 54 \text{ дБ}$ .

**Пример 8.2.** Выразить в размах 52 дБ.

**Решение.**  $52 = 20 \lg A$ , т. е.  $\lg A = 52/20 = 2,6$ , откуда  $A = 398 \approx 400$  раз.

#### 8.14. ИЗБИРАТЕЛЬНОСТЬ КОНТУРА НА ГРАНИЧНОЙ ЧАСТОТЕ

Выразим ослабление коэффициента передачи на граничной частоте в децибелах:

$$B_{\text{Гр}} = 20 \lg \sqrt{1+\xi_{\text{Гр}}^2} = 20 \lg \sqrt{1+1} = 20 \lg 1,41 = 20 \lg 0,15 = 3 \text{ дБ}. \quad (8.38)$$

Таким образом, *полосу пропускания можно определять как диапазон частот, в пределах которого ослабление не превышает 3 дБ*. Иногда говорят сокращенно, что полоса пропускания отсчитывается "на уровне 0,707", или "на уровне -3 дБ", или "с ослаблением в 3 дБ". Следует, однако, иметь в виду, что уровень 0,707 — далеко не единственный критерий для определения полос пропускания устройств. Например, в телевизионной технике полосы отсчитываются на уровне не 0,707, а 0,5, что соответствует ослаблению в 6 дБ:  $B_{\text{дБ}} = 20 \lg (1/0,5) = 20 \lg 2 = 20 \cdot 0,3 = 6 \text{ дБ}$ .

В различных устройствах могут встречаться и иные критерии допустимых неравномерностей.

**Пример 8.3.** В цепи рис. 8.10  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 100 \text{ мкГн}$ ,  $C = 100 \text{ пФ}$ . Какую избирательность обеспечит данный контур при расстройке на  $\Delta f = 50 \text{ кГц}$ ?

**Решение.** Рассчитаем резонансную частоту  $f_0$  и добротность  $Q$  контура:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28 \sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} = \frac{1000 \cdot 10^6}{628} = 1,59 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 1,59 \cdot 10^3 \text{ кГц} = 1590 \text{ кГц};$$

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}}}}{10} = 100.$$

Обобщенная расстройка

$$\xi = Q \frac{2 \Delta f}{f_0} = \frac{100 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 10^3}{1590 \cdot 10^3} = 6,28.$$

Избирательность  $B_{\text{дБ}} = 20 \lg \sqrt{1 + \xi^2} = 20 \lg \sqrt{1 + (6,28)^2} = 20 \lg 6,3 = 20 \cdot 0,8 = 16$  дБ. Таким образом, если напряжения на входе контура на всех частотах были одинаковые, а напряжение на выходе на резонансной частоте (т. е. при  $f = 1590$  кГц =  $= 1,59$  МГц) принять за единицу, то напряжение на частоте, отличающейся на 50 кГц (т. е. 1640 или 1540 кГц), будет ослаблено в 6,3 раза, т. е. на 16 дБ.

**Пример 8.4.** Радиовещательный передатчик работает на частоте  $f_0 = 150$  кГц. Какую добротность  $Q$  должен иметь контур, чтобы обеспечить избирательность по соседнему каналу в 32 дБ?

**Решение.** Для радиовещательных станций в диапазоне длинных, средних и коротких волн отводятся полосы по 10 кГц. Таким образом, "соседним каналом" в этом случае называются частоты, отстоящие на 10 кГц от данной.  $B_{\text{дБ}} = 20 \lg \sqrt{1 + \xi^2}$ . Обозначим  $A = \sqrt{1 + \xi^2}$ , тогда  $B = \lg A$  или  $32 = 20 \lg A$ , т. е.  $\lg A = 32/20 = 1,6$ , откуда  $A = 40$ . Таким образом,  $40 = \sqrt{1 + \xi^2}$ ,  $1600 = 1 + \xi^2$ ,  $\xi^2 = 1599$ ,  $\xi = 40$ , но  $\xi = Q(2 \Delta f / f_0)$ , следовательно,  $Q = f_0 \xi / 2 \Delta f = (150 \cdot 10^3 \cdot 40) / (2 \cdot 10 \cdot 10^3) = 300$ .

## 8.15. ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ДИАПАЗОНОВ ЧАСТОТ РАЗЛИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛОВ

Рассмотрим несколько примеров на определение диапазонов частот различных источников сигналов и технических устройств. Для телефонного канала отводится диапазон частот 300 ... 3400 Гц. Устройства, пропускающие полосу телефонного канала, не претендуют на художественность воспроизведения передачи, но обеспечивают разборчивость артикуляции и возможность узнавания собеседника по тембру голоса. Переносные транзисторные радиоприемники пропускают полосу примерно 0,125 ... 4 кГц, стационарные приемники в диапазонах длинных, средних и коротких волн — 0,060 ... 6 кГц, в диапазоне УКВ — 0,050 ... (12 ... 14 кГц). Высококачественные магнитофоны воспроизводят частоты от 30 ... 50 Гц по 14 ... 20 кГц. Передача телевизионных изображений требует полосу от 50 Гц до 6,5 МГц, т. е. примерно в тысячу раз большую, чем для передачи звуковых программ.

Поскольку ширина полосы телевизионного сигнала составляет 6,5 МГц, несущая частота (т. е. резонансная) должна быть в  $Q$  раз больше. При добротности всего 8, несущая частота составляет более 50 МГц. Вот почему передача телевизионных сигналов возможна только в диапазоне ультракоротких волн, под которыми понимают частоты 30 ... 300 МГц. Этот диапазон называют также диапазоном метровых волн, поскольку в свободном пространстве длина волны  $\lambda = c/f$ , где  $c$  — скорость света  $= 3 \cdot 10^8$  м/с. При  $f = 30$  МГц  $\lambda = 3 \cdot 10^8 / 30 \cdot 10^6 = 10$  м; при  $f = 300$  МГц  $\lambda = 3 \cdot 10^8 / 300 \cdot 10^6 = 1$  м. В частности, первый телевизионный канал имеет несущую частоту около 50 МГц, т. е. длину волны около 6 м. Столь широкая полоса, не-



обходимая для передачи телевидения, обуславливается принципом передачи телевизионных изображений.

Упрощенно передача телевидения происходит следующим образом: в каждый момент на экране светится только одна точка, но луч передающей и приемной трубок перемещается столь быстро, что наблюдателю весь экран кажется светящимся одновременно. Для этого необходимо, чтобы электрические импульсы, величины которых пропорциональны яркости передаваемых точек, передавались очень быстро. Увеличивать же скорость передачи информации, при прочих равных условиях, можно только расширением полосы пропускания, для чего необходимо уменьшать добротность избирательных цепей. Уменьшение добротности влечет уменьшение коэффициента усиления контура. В телевидении крупные детали передаются низкочастотными составляющими, а мелкие — высокочастотными. Таким образом, если уменьшать полосу частот, пропускаемых телевизионным приемником, то крупные детали будут оставаться примерно неизменными, а качество передачи мелких деталей станет резко ухудшаться.

Видеотелефон рассчитан на передачу крупных изображений, поэтому в нем достаточно обеспечить ширину полосы порядка  $0,5 \text{ МГц} = 500 \text{ кГц}$ , однако в данном частотном диапазоне можно разместить около ста телефонных каналов. Этим, в частности, объясняется то обстоятельство, что видеотелефон не получил пока широкого распространения. Междугородные связи производятся в большинстве случаев по специальным кабелям, пропускающим полосу частот порядка  $8,5 \text{ МГц}$ . В этом частотном диапазоне можно разместить или около 2000 телефонных каналов (в широко распространенных системах типа К-1920 размещается 1920 телефонных каналов), или один телевизионный канал и около 300 телефонных. Спутниковая связь обеспечивает пропускание нескольких телевизионных полос и большое число телефонных каналов.

**Пример 8.5.** Выбрать параметры контура, при которых резонансная частота  $f_0 = 180 \text{ кГц}$ , а полоса пропускания обеспечивает полосу телефонного канала (т. е.  $\Pi = 3,4 \text{ кГц}$ ). Определить избирательность по соседнему телефонному каналу и расстройку, при которой избирательность составляет 20 дБ.

**Решение.** Добротность, при которой на частоте  $180 \text{ кГц}$  обеспечивается полоса пропускания  $3,4 \text{ кГц}$ ,  $Q = f_0/\Pi = 180/3,4 = 53$ . Таким образом, задача сводится к тому, чтобы выбрать параметры контура, при которых резонансная частота оказывается  $180 \text{ кГц}$ , а добротность 53. Поскольку в цепи три элемента ( $R, L, C$ ), а условий два, то одним параметром можно задаться произвольно. Выберем, например,  $R = 25 \text{ Ом}$ . Тогда можно составить систему уравнений:

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}, \quad (1)$$

$$Q = \sqrt{L/C}/R. \quad (2)$$

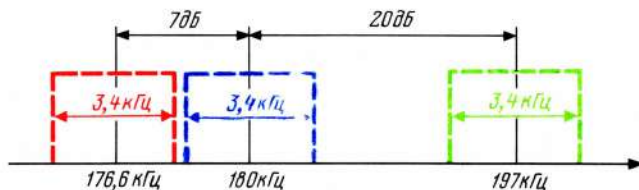
Выразим из строки (2) индуктивность  $L$  и подставим в (1):

$$\sqrt{L/C} = QR, \quad L = Q^2 R^2 C, \quad (3)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{Q^2 R^2 C C}} = \frac{1}{2\pi QRC},$$

откуда  $C = 1/2\pi Q R f_0 = 1/(6,28 \cdot 53 \cdot 25 \cdot 180 \cdot 10^3) = 0,667 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 0,667 \text{ нФ}$ . Най-

Рис. 8.13



дем  $L = Q^2 R^2 C = 53^2 \cdot 25^2 \cdot 0,667 \cdot 10^{-9} = 1,17 \cdot 10^{-3}$  Гн = 1,17 мГн. Произведем проверки:  $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC} = 1/6,28 \sqrt{1,17 \cdot 10^{-3} \cdot 0,667 \cdot 10^{-9}} = 180 \cdot 10^3$  Гц = 180 кГц;  $Q = \sqrt{L/C}/R = \sqrt{1,17 \cdot 10^{-3}/0,667 \cdot 10^{-9}}/25 = 53$ .

Избирательность по соседнему телефонному каналу, т. е. при расстройке на  $\Delta f = 3,4$  кГц,

$$B_{\text{дБ}} = 20 \lg \sqrt{1 + \xi^2}; \quad \xi = Q \frac{2\Delta f}{f_0} = \frac{53 \cdot 2 \cdot 3,4 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^3} = 2;$$

$$B = 20 \lg \sqrt{1 + 2^2} = 20 \lg 2,24 = 20 \cdot 0,3495 = 7 \text{ дБ.}$$

Определим абсолютную расстройку  $\Delta f$ , при которой избирательность окажется 20 дБ и обобщенную расстройку  $\xi$ , при которой обеспечивается избирательность  $B = 20$  дБ:  $20 = 20 \lg \sqrt{1 + \xi^2}$ ; обозначим  $A = \sqrt{1 + \xi^2}$ , тогда  $1 = \lg A$ , откуда  $A = 10$ , т. е.  $\sqrt{1 + \xi^2} = 10$  или  $1 + \xi^2 = 100$ , т. е.  $\xi^2 = 99$ ,  $\xi = 9,9499 \approx 10$ .  $\xi = Q \frac{2\Delta f}{f_0}$ , следовательно,  $\Delta f = \xi f_0 / 2Q = 10 \cdot 180 / 2 \cdot 53 = 17$  кГц.

Таким образом, чтобы при выбранных параметрах обеспечить избирательность 20 дБ, несущие (т. е. резонансные) частоты следует разнести на 17 кГц. Если один телефонный передатчик работает на частоте 180 кГц, то другой в этом случае может работать на частоте либо  $180 + 17 = 197$  кГц, либо  $180 - 17 = 163$  кГц (рис. 8.13).

#### 8.16. ПРОХОЖДЕНИЕ ЧЕРЕЗ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР СИГНАЛОВ НЕГАРМОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

В гл. 2 было показано, что сигналы гармонической формы состоят только из одной частоты, а сигналы любой формы, отличной от гармонической — из нескольких частот. Например, сигнал прямоугольной формы содержит частоты  $f_1 = 1/T$ ,  $f_3 = 3/T$ ,  $f_5 = 5/T$  и т. д. (Строгое доказательство этого будет приведено в гл. 10.) На рис. 8.14, а показан спектр такого сигнала. Если добротность контура составляет всего несколько единиц, то полоса пропускания контура все равно значительно меньше расстояния между составляющими спектра. Например, при добротности  $Q = 10$   $\Pi = f_0/Q = f_0/10 = 0,1 f_0$ , т. е. в 30 раз меньше ближайшей частоты, входящей в спектр входного сигнала. Рассчитаем ослабление на частоте  $3f$ :  $B = 20 \lg \sqrt{1 + \xi^2}$ ;  $\xi = Q \frac{2\Delta f}{f_0} = (10 \cdot 2 \cdot 3f_0)/f_0 = 60$ . В этом случае  $B = 20 \lg 60 = 20 \times 1,778 = 35,5$  дБ. При добротности  $Q = 5$   $B = 29,5$  дБ, при  $Q = 2$   $B = 21,6$  дБ и т. д. Таким образом, практически через контур проходит сигнал только одной частоты — именно той, на которую контур настроен. Но сигнал, состоящий из одной частоты, имеет, как известно, гармоническую форму. Следовательно, если ко входу контура приложить напряжение негармонической формы, то напряжение на выходе контура будет иметь гармоническую форму (рис. 8.14, б). Благодаря наличию избирательных свойств контур отфильтровывает частоты, отличные от резонансной, и преобразует сигналы негармонической формы в гармонические. Если в контуре сильно

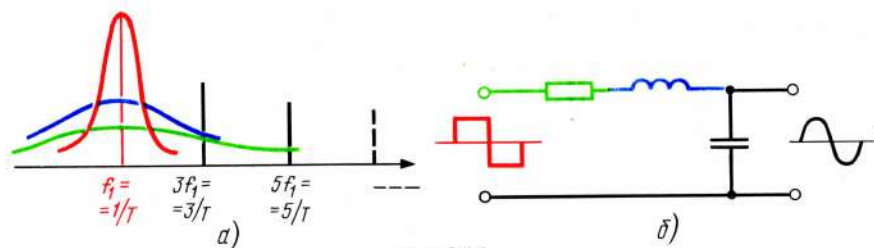


Рис. 8.14

увеличивать сопротивление  $R$ , то добротность станет уменьшаться, полоса пропускания, соответственно, расширяться, ослабление соседних частот — уменьшаться, сопротивление контура для соседних частот также станет уменьшаться и появится явление "просачивания" напряжений с иными частотами, кривая выходного напряжения станет искажаться. Таким образом, чем выше добротность контура, тем точнее воспроизводится синусоидальная кривая на выходе контура при несинусоидальном сигнале на входе.

### 8.17. НАСТРОЙКА ПАССИВНЫХ КОНТУРОВ

Если ко входу контура подведено напряжение  $U_1$  с частотой  $\omega$ , то для настройки контура в резонанс следует так изменить параметры реактивного элемента (или элементов), чтобы входное реактивное сопротивление оказалось бы равным 0. На практике обыкновенно удобнее менять емкость конденсатора, хотя в некоторых случаях целесообразнее регулировать индуктивность катушки, особенно при небольших подстройках частоты. Пусть в контуре рис. 8.15, а  $U_1 = \text{const}$ ,  $\omega_{\text{внешн}} = \text{const}$ . Рассмотрим ход кривых  $U_1 = f(C)$  и  $I = f(C)$  при изменении емкости  $C$  от 0 до  $\infty$ . При  $C = 0$   $X_C = 1/\omega C = \infty$ ,  $I = 0$ ,  $U_L = 0$ ,  $U_C = U_1$  (рис. 8.15, б). При  $C = C_0$   $1/\sqrt{LC_0} = \omega_{\text{внешн}}$ , т. е. имеет место резонанс; при этом  $U_C = QU_1$ ,  $I = I_m = U_1/R$ . При  $C = \infty$   $1/\omega C = 0$ ,  $I = U_1/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ . Так как  $R$  и  $L$  — величины постоянные, то  $U_R$  и  $U_L$  пропорциональны току, следовательно, кривая  $I = f(C)$  представляет кривые  $U_R = f(C)$  и  $U_L = f(C)$  в соответствующем масштабе. Можно показать, что

$$\xi = Q\epsilon = Q \frac{2 \Delta f}{f_0} = Q \left( \frac{C - C_0}{C_0} \right) = \frac{\Delta C}{C_0} Q,$$

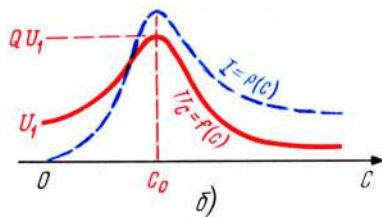
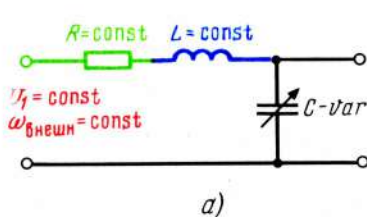


Рис. 8.15



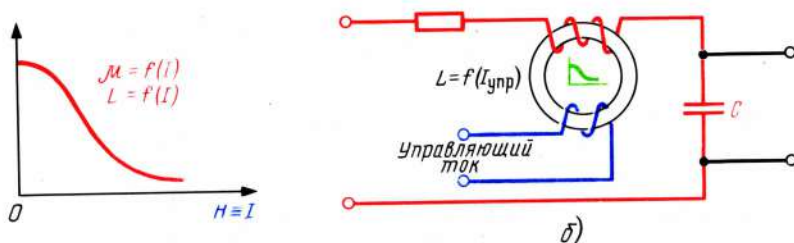


Рис. 8.16

где  $C_0$  — емкость конденсатора при резонансе;  $C$  — емкость конденсатора при расстройке. После простых преобразований получается

$$U_2 = QU_1 / \sqrt{1 + Q^2 (\Delta C/C_0)^2}, \quad (8.39)$$

где  $Q = C_0 / (C_{\text{гр}} - C_0)$ ;  $C_{\text{гр}}$  — емкость, при которой  $H = 0,707 H_{\text{max}}$ .

Изменять емкость конденсатора можно чисто механическим способом: ротор с подвижными пластинами можно поворачивать относительно неподвижного статора, при этом меняется действующая площадь пластин и, соответственно, емкость конденсатора. У ряда полупроводниковых диодов значительно изменяется их междуэлектродная емкость при изменении напряжения, приложенного к диоду. Изменение емкости влечет изменение резонансной частоты контура и его настройки на частоту сигнала. Подобный способ настройки имеет большие преимущества: можно использовать дистанционное управление, схемы в микронном исполнении, не требуются громоздких механических систем, легко осуществлять автоподстройку и т. д.

Настройку контура производят иногда изменением индуктивности, например положения сердечника внутри цилиндрической катушки. Регулировать индуктивность можно также путем дополнительного подмагничивания сердечника. Для этого на тороидальный сердечник наматывают специальную обмотку, по которой пропускают ток от отдельного источника. Чем больше ток в обмотке подмагничивания, тем меньше магнитная проницаемость, а следовательно, и индуктивность катушки (рис. 8.16, а). Подобный способ также находит применение в различных схемах, в том числе при автоподстройке (рис. 8.16, б). На практике иногда задается не частота генератора (например, радиопередатчика)  $f$ , а длина волны  $\lambda$ . Если радиоволна распространяется без проводов, в свободном пространстве, то длина волны  $\lambda$  и частота  $f$  связаны соотношением  $f = c/\lambda$ , где  $c$  — скорость света ( $c = 3 \times 10^8$  м/с).

#### 8.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ И ДОБРОТНОСТИ ЦЕПИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

О свойствах цепи можно судить по виду знаменателя выражения передаточной функции цепи. Например, в неразветвленной  $RLC$ -цепи (рис. 8.17), как было показано выше,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , а  $Q = \sqrt{L/C/R}$ . Составим передаточную функцию этой цепи. Будем снимать выходное напряжение не с конденсатора, как обычно делается в контурах, а с резистора. В этом случае вы-

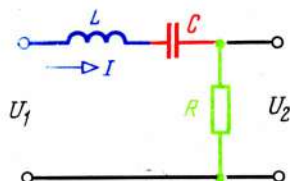


Рис. 8.17

ходное напряжение, а следовательно, и передаточная функция будут точно повторять закон изменения тока в зависимости от частоты:

$$\underline{H} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1; \quad \dot{U}_2 = RI = R(U_1 / (R + j\omega L + 1/j\omega C)) = \frac{RU_1 j\omega C}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1}.$$

Обратим внимание, что анализировать можно только приведенные выражения, т. е. такие, у которых коэффициент при переменной в высшей степени равен 1, поэтому из знаменателя за скобку вынесем множитель  $LC$ . Тогда

$$\underline{H} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \frac{j\omega RC}{LC(-\omega^2 + j\omega(R/L) + 1/LC)} = \frac{j\omega(R/L)}{-\omega^2 + j\omega(R/L) + 1/LC}.$$

Обозначим  $A = R/L$ ,  $B = 1/LC$ ; в этом случае комплексное выражение передаточной функции

$$\underline{H} = \frac{j\omega A}{-\omega^2 + j\omega A + B}. \quad (8.40)$$

Таким образом, если знаменатель передаточной функции цепи имеет структуру  $-\omega^2 + j\omega A + B = (j\omega)^2 + j\omega A + B$ , где  $A$  и  $B$  — постоянные величины, зависящие от элементов цепи, то передаточная функция данной цепи имеет вид резонансной кривой. Выявим физический смысл коэффициентов  $A$  и  $B$ . В данной цепи  $B = 1/LC$ . Так как  $1/LC = \omega_0^2$ , то, следовательно, резонансная частота цепи  $\omega_0 = \sqrt{B}$ . В данной цепи  $A = R/L$ . Умножим числитель и знаменатель на частоту  $\omega_0$ ; в этом случае  $A = R\omega_0/\omega_0 L = \omega_0/Q$  (так как  $Q = \omega_0 L/R$ ), откуда  $Q = \omega_0/A = \sqrt{B}/A$ . Таким образом, чтобы в общем случае определить передаточные свойства цепи, необходимо проделать следующее:

1. Составить выражение передаточной функции цепи и записать знаменатель в приведенном виде.
2. Определить резонансную частоту как корень квадратный из свободного члена, а добротность — из отношения корня из свободного члена к коэффициенту перед вторым членом. Если напряжение снимать не с резистора, а с конденсатора, то комплексное выражение передаточной функции

$$\underline{H} = \frac{1/LC}{-\omega^2 + j\omega(R/L) + 1/LC}, \quad (8.41)$$

т. е. знаменатель остается тот же, поскольку коэффициент передачи по-прежнему имеет вид той же резонансной кривой, а числитель становится иным, так как он зависит от элемента, с зажимов которого выходное напряжение

снимается. Из сравнения выражений (8.40) и (8.41) видно, что если в числителе передаточной функции есть множитель  $j$ , то сопротивление между выходными зажимами имеет резистивный характер, а если в числителе его нет, то реактивный.

### 8.19. ЭЛЕКТРОННЫЙ АНАЛОГ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА

Использование деталей в микроэлектронном исполнении находит самое широкое применение в разнообразной электронной аппаратуре. Пассивные колебательные контуры требуют наличия катушек индуктивности, которые в микроэлектронном исполнении изготовлены быть не могут, что накладывает серьезные ограничения на их применение. Получить передаточные АЧХ вида резонансной кривой можно с помощью активной цепи (ARC-цепи), выполненной с помощью операционного усилителя (рис. 8.18, а). Исследуем характеристики этой цепи. Составим эквивалентную схему данной ARC-цепи. Напомним, что для этого необходимо все элементы, не входящие в операционный усилитель, перерисовать без изменений, а вместо операционного усилителя нарисовать две разомкнутые точки,  $A$  и  $B$ , напряжение между которыми положить близким к 0. Точки  $AB$  можно нарисовать также короткозамкнутыми, в этом случае между ними будет ток, близкий к 0 (рис. 8.18, б). Примем потенциал точки  $N$  за нулевой ( $\varphi_N = 0$ ). В этом случае потенциал точки  $M$  равен  $\dot{U}_2$  ( $\dot{\varphi}_M = \dot{U}_2$ ), а потенциал точки  $S$  будет  $E_1$  ( $\dot{\varphi}_S = \dot{E}_1$ ). Точка  $B$  однопотенциальна с точкой  $N$ , поэтому  $\varphi_B = 0$ . Потенциал точки  $A$ , строго говоря, имеет значение  $U_2/\mu$ , но так как  $U_2$  — конечная величина, не превышающая напряжения источника питания (см. гл. 3), а  $\mu$  имеет значения в десятки тысяч раз, то потенциал точки  $A$  также близок 0, поэтому  $\varphi_A \approx 0$ . Зададимся комплексными значениями токов в ветвях. Поскольку в общем случае  $U_2 > U_1$ , токи направим от выходных зажимов к входным. Индексы у токов выберем по названию элементов, по которым ток протекает (см. рис. 8.18, б). Для определения передаточной функции данной цепи следует составить уравнения по любым законам электрического равновесия цепи. В данной цепи легче всего произвести расчеты методом узловых потенциалов. Составим по первому закону Кирхгофа уравнения токов для узлов  $F$  и  $A$ :

$$\begin{aligned} \text{узел } F \quad & \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{C2} = \dot{I}_{R1} + \dot{I}_{R3}, & (1) \\ \text{узел } A \quad & \dot{I}_{R2} = \dot{I}_{C1}. & (2) \end{aligned} \quad (8.42)$$

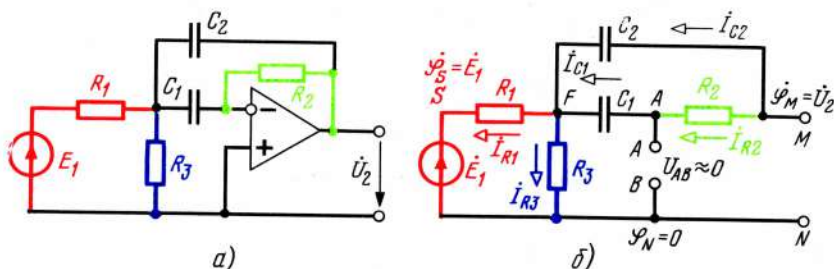


Рис. 8.18



Выразим каждый ток через потенциалы на зажимах участка цепи и сопротивления цепи. В этом случае уравнения (8.42) принимают вид.

$$\begin{cases} (\dot{\varphi}_A - \dot{\varphi}_F)j\omega C_1 + (\dot{\varphi}_M - \dot{\varphi}_F)j\omega C_2 = \frac{(\dot{\varphi}_F - \dot{\varphi}_S)}{R_1} + \frac{(\dot{\varphi}_F - \dot{\varphi}_N)}{R_3}, \\ \frac{(\dot{\varphi}_M - \dot{\varphi}_A)}{R_2} = (\dot{\varphi}_A - \dot{\varphi}_F)j\omega C_1. \end{cases} \quad (1)$$

$$\quad (2)$$

Так как  $\dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_N = 0$ ,  $\dot{\varphi}_M = \dot{U}_2$ ,  $\dot{\varphi}_S = \dot{E}_1$ , то

$$\begin{cases} -j\omega C_1 \dot{\varphi}_F + j\omega C_2 \dot{U}_2 - j\omega C_2 \dot{\varphi}_F = \dot{\varphi}_F/R_1 - \dot{E}_1/R_1 + \dot{\varphi}_F/R_3, \\ -j\omega C_1 \dot{\varphi}_F = \dot{U}_2/R_2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\quad (2)$$

Выразим из (2) член  $\dot{\varphi}_F$  и подставим в (1):

$$-\dot{\varphi}_F = \dot{U}_2/j\omega R_2 C_1;$$

$$\frac{j\omega C_1 \dot{U}_2}{j\omega R_2 C_1} + j\omega C_2 \dot{U}_2 + \frac{j\omega C_2 \dot{U}_2}{j\omega R_2 C_1} = -\frac{U_2}{j\omega R_1 R_2 C_1} - \frac{\dot{E}_1}{R_1} - \frac{\dot{U}_2}{j\omega R_2 R_3 C_1}.$$

Приведем все члены к общему знаменателю и отбросим этот знаменатель. Общим знаменателем будет выражение  $j\omega R_1 R_2 R_3 C_1$ . Получается уравнение  $(j\omega C_1 \dot{U}_2)(R_1 R_3) + (j\omega C_2 \dot{U}_2)(j\omega R_1 R_2 R_3 C_1) + (j\omega C_2 \dot{U}_2)(R_1 R_3) = (-\dot{U}_2)(R_3) - (\dot{E}_1)(j\omega R_2 R_3 C) - (\dot{U}_2)(R_1)$ .

Раскроем скобки, перенесем члены, содержащие  $\dot{U}_2$ , в левую часть уравнения, расположим члены по убывающим степеням и вынесем  $\dot{U}_2$  за скобку:

$$\dot{U}_2 (-\omega^2 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 + j\omega R_1 R_3 C_1 + j\omega R_1 R_3 C_2 + R_1 + R_3) = -\dot{E}_1 j\omega R_2 R_3 C.$$

В реальных схемах  $C_1 = C_2 = C$ , а  $R_3 \ll R_1$ . Последнее неравенство вытекает из того, что напряжение на входе операционного усилителя весьма мало по сравнению с напряжением генератора (например, в стендах ЛКТЦ  $R_1 = 100$  кОм, а  $R_3 = 1$  кОм). Пренебрежем  $R_3$  по сравнению с  $R_1$ . С учетом указанных условий уравнение приобретает вид  $\dot{U}_2 (-\omega^2 R_1 R_2 R_3 C^2 + j2\omega R_1 R_3 C + R_1) = -\dot{E}_1 j\omega R_2 R_3 C$ . Перенесем множитель перед  $\dot{U}_2$  в правую часть равенства, а  $\dot{E}_1$  — в левую. Тогда

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_1} = \frac{-j\omega R_2 R_3 C}{(-\omega^2 R_1 R_2 R_3 C^2 + j2\omega R_1 R_3 C + R_1)}.$$

Но отношение  $\dot{U}_2/\dot{E}_1$  есть передаточная функция  $\underline{H}$ . Чтобы выражение было пригодно к анализу, оно должно быть приведенным, т. е. иметь коэффициент перед переменной в высшей степени равным 1. Вынесем из знаменателя за скобку множитель  $R_1 R_2 R_3 C^2$ . После простых преобразований получается

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{-j\omega \left( \frac{R_2 R_3 C}{R_1 R_2 R_3 C^2} \right)}{-\omega^2 + \omega \frac{2}{R_2 C} + \frac{1}{R_2 R_3 C^2}}, \text{ т. е.} \\ \underline{H} &= \frac{-j\omega (1/R_1 C)}{-\omega^2 + j\omega A + B} \end{aligned} \quad (8.43)$$

и, следовательно, полученное выражение представляет уравнение резонансной кривой. Так как  $\omega_0 = \sqrt{B}$ , то в данной цепи

$$\omega_0 = 1/(C\sqrt{R_2 R_3}); \quad (8.44)$$

$$Q = \sqrt{B}/A = R_2 C / (C\sqrt{R_2} \sqrt{R_3} \cdot 2) = 0,5 \sqrt{R_2/R_3}. \quad (8.45)$$

Таким образом, используя общие передаточные свойства цепи, можно рассчитать резонансную частоту и добротность самых различных цепей. Наличие множителя  $j\omega$  в числителе указывает на то, что выходное сопротивление данной электронной цепи имеет чисто резистивный характер, а знак "минус" в числителе — на поворот фазы выходного напряжения относительно входного, что обуславливается подачей сигнала на отрицательный вход операционного усилителя. Рассчитаем передаточную АЧХ цепи. Так как

$$\underline{H} = -j \left( \frac{C\omega (1/R_1)}{-\omega^2 + j\omega (\omega_0/A) + \omega_0^2} \right),$$

то модуль передаточной функции

$$H = \frac{(1/R_1 C) \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \omega_0/Q)^2}}. \quad (8.46)$$

Из сравнения выражений (8.43) и (8.41) видно, что АЧХ данной активной цепи повторяет АЧХ пассивного  $RLC$ -контура с точностью до постоянного множителя. При  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$   $H = 0$ . На резонансной частоте  $\omega = \omega_0$

$$H_0 = H_{max} = \frac{\omega Q}{R_1 C \omega \omega_0} = \frac{\sqrt{R_2} C \sqrt{R_3} \sqrt{R_2}}{2 R_1 C \sqrt{R_3}} = 0,5 \left( \frac{R_2}{R_1} \right),$$

следовательно, цепь обладает избирательными свойствами, а амплитудно-частотная характеристика имеет вид резонансной кривой. Следует, однако, иметь в виду, что коэффициент передачи на резонансной частоте в активном контуре не есть значение  $Q$ , как в последовательной  $RLC$ -цепи, а определяется из отношения  $R_2/2R_1$ . Полоса пропускания и избирательные свойства активного контура определяются добротностью  $Q$  так же, как и в пассивном контуре. В  $ARC$ -цепи абсолютная полоса пропускания

$$\Pi = f_0/Q = \frac{2 \sqrt{R_3}}{2\pi C \sqrt{R_2 R_3} \sqrt{R_2}} = 1/(\pi R_2 C),$$

а относительная  $S_0 = \Pi/f_0 = 1/Q = 2 \sqrt{R_3/R_2}$ .

Как видно из приведенных выражений, избирательные свойства рассматриваемой активной цепи определяются величинами  $R_2, R_3, C$ .

Большим недостатком пассивного последовательного  $RLC$ -контура является его малое входное сопротивление на резонансной частоте. Активный электронный контур лишен этого недостатка, поскольку его входное сопротивление практически равно сопротивлению резистора  $R_1$ , которое может быть достаточно большим. Выходное сопротивление пассивной  $RLC$ -цепи при частотах, близких к резонансной, определяется характеристическим

сопротивлением  $\rho$ , составляющим в реальных контурах чаще всего сотни ом. Наличие резистора  $R_n$ , включенного на выход  $RLC$ -контура, понижает его добротность на  $100 Q\rho/R_n$  процентов. Чтобы добротность нагруженного контура,  $Q_{\text{ц}}$ , отличалась от добротности ненагруженного,  $Q$ , например, не более чем на 10 %, необходимо, чтобы нагрузочное сопротивление  $R_n$  было не менее  $100\rho$ , что составляет сотни килоом или даже единицы мегом. Для обеспечения  $Q_{\text{ц}} = 0,99Q$  должно выполняться соотношение  $R_n \geq 100Q\rho$  и т. д.

Иметь нагрузочный резистор с большим входным сопротивлением по ряду причин неудобно, а в ряде случаев и невозможно. У электронного  $ARC$ -контура выходное сопротивление гораздо меньше, чем у аналогичного пассивного, поэтому такой контур можно нагружать на сопротивления много меньшие, чем в пассивной  $RLC$ -цепи, без ухудшения избирательных свойств, что является очевидным преимуществом активного контура по сравнению с пассивным. Большим преимуществом активного контура является и то, что настройка производится изменением не емкости или индуктивности, как в пассивном контуре, а резистивного сопротивления, что в конструктивном отношении выполняется гораздо проще. Определенным недостатком рассматриваемой активной цепи является то, что при регулировании сопротивления  $R_2$  или  $R_3$  изменяется не только резонансная частота  $f_0$ , но также добротность и коэффициент передачи. Чтобы перестраивать только резонансную частоту, не изменяя добротности, необходимо изменять в одно и то же число раз сопротивления  $R_2$  и  $R_3$ , а для изменения добротности при  $f_0 = \text{const}$  сопротивление  $R_3$  следует уменьшать во столько же раз, во сколько увеличивается сопротивление  $R_2$  (или наоборот). Следует, однако, иметь в виду, что пассивный  $RLC$ -контур обладает аналогичными недостатками. Действительно, при изменении резонансной частоты путем регулирования, например, емкости, изменяется добротность  $Q = \sqrt{L/C}/R$ , а следовательно, и коэффициент передачи контура.

Зная резонансную частоту  $f_0$ , полосу пропускания  $\Pi$ , коэффициент передачи на резонансной частоте  $H_0$  и емкость  $C$ , можно рассчитать сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$   $ARC$ -контура. Из выражений для  $f_0$  и  $Q$  получается  $R_2 = Q/\pi f_0 C$ ,  $R_3 = 1/4\pi f_0 Q C$ . Так как  $H_0 = R_2/2R_1$ , то  $R_1 = R_2/2H_0$ , где  $H_0$  — коэффициент передачи на резонансной частоте.

Передаточная ФЧХ описывается уравнением

$$\varphi_H = -[90^\circ - \text{arctg} \frac{ff_0}{Q(f_0^2 - f^2)}] = -[90^\circ - \text{arctg} \frac{2\sqrt{R_2 R_3}}{(R_3 - R_{30})}] =$$

$$= -[90^\circ - \text{arctg} \frac{2\sqrt{R_2 R_3}}{(R_2 - R_{20})}],$$

где  $R_{20}$ ,  $R_2$ ,  $R_{30}$ ,  $R_3$  — сопротивление второго и третьего резисторов на резонансной частоте и при расстройке соответственно.

Вывод уравнений для  $ARC$ -контура сделан весьма подробно также и потому, что аналогично анализируется ряд активных фильтров.



## 8.20. ПАССИВНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

*Пассивным параллельным колебательным контуром* называется электрическая цепь, в которой катушка индуктивности и конденсатор включены параллельно источнику энергии (рис. 8.19, а). Векторная диаграмма параллельного контура показана на рис. 8.19, б. Ток в индуктивной ветви  $\vec{I}_1$  отстает от напряжения на угол  $\varphi_1$ . Этот ток можно разложить на две составляющие: резистивную  $\vec{I}_{1R}$ , совпадающую по фазе с напряжением, и реактивную  $\vec{I}_{1L}$ . Поскольку потери в конденсаторе малы, ток  $\vec{I}_2$  опережает свое напряжение на  $90^\circ$  и является чисто реактивным, т. е.  $I_2 = I_{2C}$ .

Если выбрать такие параметры цепи, при которых реактивные составляющие токов по модулю равны между собой, то алгебраическая сумма реактивных составляющих токов окажется равной 0, ток в неразветвленной части цепи при этом определяется резистивной составляющей тока индуктивной ветви и совпадает по фазе с напряжением, приложенным ко входным зажимам контура. Но если напряжение и ток во входной цепи совпадают по фазе, то это означает, что в цепи имеется резонанс. Так как  $|I_{1L}| = U_1 |B_L|$ ,  $|I_{2C}| = U_1 |B_C|$ , а напряжение и ток во входной цепи совпадают по фазе при  $|I_{1L}| = |I_{2C}|$ , т. е. при  $|U_1 B_L| = |U_1 B_C|$ , то условием параллельного резонанса является равенство  $|B_L| = |B_C|$ , где  $|B_L|$  и  $|B_C|$  — модули индуктивной и емкостной проводимостей соответственно. Таким образом, в пассивном одиночном параллельном колебательном контуре резонанс оказывается тогда, когда модули реактивных составляющих токов равны друг другу, или (что одно и то же), если реактивные проводимости ветвей по абсолютному значению равны между собой. Для получения резонанса в параллельной цепи необходимо, чтобы выполнялось условие  $\text{Im}[Y_{вх}] = 0$ , т. е. мнимая часть входной комплексной проводимости цепи должна равняться 0 (в последовательном контуре 0 должна равняться мнимая часть входного комплексного сопротивления).

Рассчитаем резонансную частоту  $\omega_p$ . Так как  $|B_L| = \omega L / (R^2 + \omega^2 L^2)$ , а  $|B_C| = \omega C$ , то резонансная частота определяется из уравнения  $\omega_p L / (R^2 + \omega_p^2 L^2) = \omega_p C$ , или

$$\omega_p R^2 C + \omega_p^3 L^2 C = \omega_p L. \quad (8.47)$$

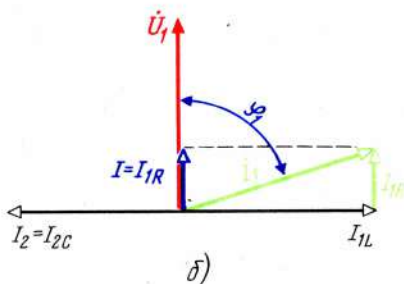
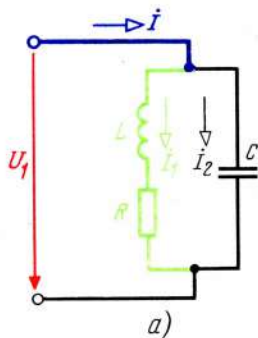


Рис. 8.19

Сокращая обе части равенства и переставляя члены, получаем

$$\omega_p^2 L^2 C = L - R^2 C, \text{ т. е. } \omega_p^2 = \frac{1}{LC} \left( \frac{L - R^2 C}{L} \right) = \frac{1}{LC} \left( 1 - \frac{R^2}{L/C} \right) = \\ = \frac{1}{LC} \left[ 1 - \left( \frac{R}{\rho} \right)^2 \right],$$

откуда

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}. \quad (8.48)$$

Из полученного выражения видно, что при добротностях, превышающих несколько единиц,  $1/Q^2 \ll 1$ , тогда  $\omega_p = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ . Таким образом, при добротностях  $Q \geq 3$  резонансная частота параллельного контура практически равна резонансной частоте последовательного контура, собранного из тех же элементов.

Покажем, что выражение резонансной частоты получается тем же самым, если исходить из более общего правила ее определения, т. е. из условия  $\text{Im}[Y_{BX}] = 0$ :

$$Y_{BX} = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{(1 + j\omega RC - \omega^2 LC)(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)}.$$

Знаменатель получившегося выражения — величина чисто вещественная, не равная бесконечности. Следовательно, мнимую часть выражения числителя следует приравнять нулю, т. е. записать  $\omega_p R^2 C - \omega_p L + \omega_p^3 L^2 C = 0$ , что совпадает с (8.47).

Из общего определения добротности [см. (8.4)], можно вывести, что в параллельном колебательном контуре  $Q = \sqrt{L/C}/R$ . Отсюда ясно, что добротность последовательного и параллельных контуров, собранных из одинаковых элементов, имеет одно и то же значение.

#### 8.21. ВХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНТУРА

На резонансной частоте напряжение и ток во входной ветви контура совпадают по фазе, поэтому входное сопротивление при резонансе  $Z_{BX0}$  имеет чисто резистивный характер:

$$Z_{BX0} = U/I = U/I_{1R} = U/UG_1 = 1/G_1.$$

Так как  $G = R/(R^2 + \omega^2 L^2)$ , то  $Z_{BX0} = (R^2 + \omega_0^2 L^2)/R$ . Подставив  $\omega_0^2 = (1/LC)(1 - R^2 C/L)$  и произведя простые преобразования, получим

$$Z_{BX0} = \frac{R^2 + L^2 \left( \frac{1}{LC} \right) (1 - R^2 C/L)}{R} = (R^2 + L/C - R^2)/R = L/RC = \rho^2/R.$$

Умножив числитель и знаменатель на  $R$ , получим

$$Z_{\text{вх}0} = \frac{\rho^2}{R \cdot R} R = Q^2 R = Q \frac{\rho}{R} R = Q \rho.$$

Таким образом, входное сопротивление параллельного контура при резонансе можно рассчитать с помощью любого из следующих выражений

$$Z_{\text{вх}0} = \frac{L}{RC} = \frac{\rho^2}{R} = Q^2 R = Q \rho. \quad (8.49)$$

Из приведенных формул видно, что входное сопротивление пассивного параллельного контура в  $Q^2$  раз больше резистивного сопротивления контура. В контуре без потерь  $R = 0$ , следовательно,  $Z_{\text{вх}0} = \infty$ . Для сравнения напомним, что входное сопротивление идеального последовательного контура равно 0.

Входное сопротивление параллельного контура при расстройке

$$Z_{\text{вх}} = \frac{(R + j\omega L) 1/j\omega C}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}.$$

При больших добротностях  $R \ll \omega L$ , поэтому

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= \frac{L/C}{R + jX} = \frac{L}{RC} \frac{1}{1 + j(X/R)} = \frac{Z_{\text{вх}0}}{1 + j\xi} = \frac{Z_{\text{вх}0} (1 - j\xi)}{1 + \xi^2} = \\ &= \frac{Z_{\text{вх}0}}{1 + \xi^2} - j \frac{\xi Z_{\text{вх}0}}{1 + \xi^2}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Из полученного выражения следует, что при расстройке входное сопротивление параллельного контура представляет комплексное сопротивление  $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}$ , где  $R_{\text{вх}}$  — эквивалентное входное резистивное сопротивление  $R_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}0}/(1 + \xi^2)$ , а  $X_{\text{вх}}$  — эквивалентное входное реактивное сопротивление:

$$X_{\text{вх}} = - \frac{\xi Z_{\text{вх}0}}{(1 + \xi^2)}.$$

(Не следует путать  $R_{\text{вх}}$  с резистивным сопротивлением контура!) Таким образом, параллельный контур можно заменить последовательной схемой замещения (рис. 8.20, а). Определим выражение модуля входного сопротивления в зависимости от расстройки. Так как

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}0}/(1 + j\xi), \text{ то}$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_{\text{вх}0}}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad (8.51)$$

$$\varphi_{Z_{\text{вх}}} = -\arctg \xi,$$

т. е. кривая модуля входного сопротивления имеет вид резонансной кривой, а входная ФЧХ параллельного контура представляет зеркальное отображение



входной ФЧХ последовательного колебательного контура (рис. 8.20, б).

Нанесем на одном графике кривые  $Z_{BX} = f(\xi)$ ,  $R_{BX} = f(\xi)$ ,  $X_{BX} = f(\xi)$  и сравним их. Кривая  $R_{BX} = f(\xi)$  идет круче резонансной кривой, поскольку у кривой  $Z_{BX} = f(\xi)$  при  $\xi = 1$   $Z_{BX}/Z_{BX0} = 0,707$ , а у кривой  $R_{BX} = f(\xi)$   $R_{BX}/R_{BX0} = 0,5$ . При  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  обе кривые стремятся к нулевым значениям. Проанализируем ход кривой  $X_{BX} = f(\xi)$ :

$$X_{BX} = f(\xi) = -\frac{\xi Z_{BX0}}{1 + \xi^2} = \frac{\xi^2 (Z_{BX0}/\xi)}{\xi^2 (1/\xi^2 + 1)} = \frac{Z_{BX0}/\xi}{(1/\xi^2) + 1}. \quad (8.52)$$

Как видно из выражений (8.52), кривая  $X_{BX} = f(\xi)$  равна 0 при  $\omega = 0$  (т. е.  $\xi = -\infty$ ), при  $\omega = \omega_0$  (т. е. при  $\xi = 0$ ) и при  $\omega = \infty$  (т. е. при  $\xi = \infty$ ). В диапазоне  $0 \dots \omega_0$  значения  $X_{BX}$  — положительные, а в диапазоне  $\omega_0 \dots \infty$  — отрицательные. Поскольку кривая изменяется от 0 до 0, то следовательно, имеется максимум. Определим  $\xi$ , при котором кривая  $X_{BX} = f(\xi)$  имеет экстремальные значения:

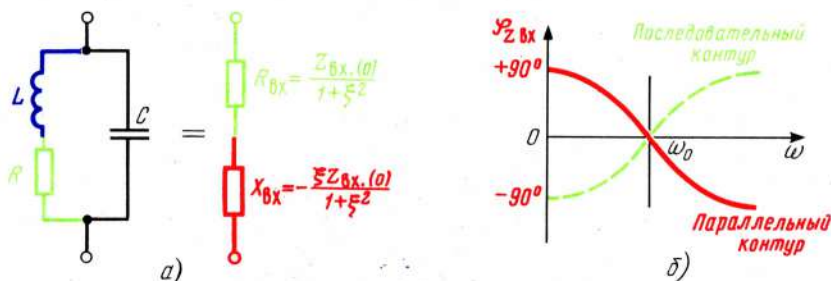


Рис. 8.20

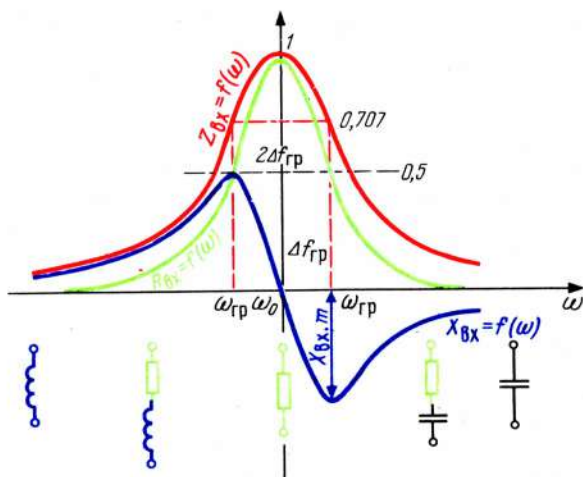


Рис. 8.21

$$\frac{dX_{\text{вх}}}{d\xi} = - \left[ \frac{Z_{\text{вх}0} (1 + \xi^2) - 2\xi^2 Z_{\text{вх}0}}{(1 + \xi^2)^2} \right] = 0.$$

Так как при  $\xi = \infty$   $X_{\text{вх}} = 0$ , а не максимуму, то предположение, что знаменатель равен  $\infty$ , неосновательно, но в этом случае остается верным то, что числитель равен 0, т. е.  $Z_{\text{вх}0} (1 + \xi^2 - 2\xi^2) = 0$ . Так как  $Z_{\text{вх}0} \neq 0$ , то  $1 + \xi^2 - 2\xi^2 = 0$ , откуда  $\xi_{\text{экс}} = \pm 1$ . Таким образом, при  $\xi = \pm 1$  кривая  $X_{\text{вх}}$  имеет максимальное (при  $\xi = +1$ ) или минимальное (при  $\xi = -1$ ) значение. Рассчитаем  $X_{\text{экс}}$ . Для этого в выражение  $X_{\text{вх}} = -\xi Z_{\text{вх}0} / (1 + \xi^2)$  подставим  $\xi = \pm 1$ , получается  $X_{\text{вх.экс}} = 0,5 Z_{\text{вх}0}$ .

Из проведенного анализа видно, что реактивная составляющая входного сопротивления при расстройке резко растет и достигает наибольшего значения на граничной частоте. Нанесем кривые на один график (рис. 8.21). Из них видно, что при  $\omega = 0$  цепь имеет характер  $L$ -цепи, в диапазоне  $0 \dots \omega_0$  — характер  $RL$ -цепи, при  $\omega = \omega_0$  —  $R$ -цепи, в диапазоне  $\omega_0 \dots \infty$  —  $RC$ -цепи, при  $\omega = \infty$  —  $C$ -цепи.

## 8.22. ИДЕАЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОНТУР

В пассивном параллельном колебательном контуре на резонансной частоте  $Z_{\text{вх}0} = L/RC$ . Очевидно, что с уменьшением  $R$  входное сопротивление цепи возрастает и в контуре без потерь (т. е. при  $R = 0$ ) становится бесконечно большим. Частотные характеристики сопротивлений и проводимостей элементов идеального параллельного контура показаны на рис. 8.22, а, а входная ФЧХ — на рис. 8.22, б.

Рассчитаем входное сопротивление идеального параллельного контура, состоящего из индуктивности  $L$  и емкости  $C$  при расстройке контура на  $\Delta\omega$ . В этом случае

$$Z_{\text{вх}} = \frac{j\omega L \cdot 1/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} = \frac{jL(\omega_0 + \Delta\omega)}{1 - (\omega_0 + \Delta\omega)^2 LC}.$$

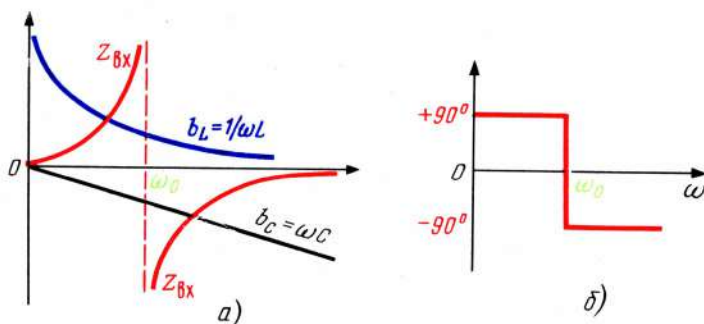


Рис. 8.22

После простых алгебраических преобразований

$$Z_{\text{вх}} = -j \left[ \frac{1 + \Delta\omega/\omega_0}{C[(2\Delta\omega + \Delta\omega)^2/\omega_0]} \right], \quad (8.53)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Множитель  $j$  указывает на чисто реактивный характер входного сопротивления.

**Пример 8.5.** Параллельный контур без потерь состоит из индуктивности  $L = 100$  мкГн и емкости  $C = 100$  пФ. Рассчитать входное сопротивление контура при угловых частотах  $\omega = 10^8, 1,1 \cdot 10^7; 10^6; 10^3; 0$  1/с.

**Решение.** Резонансная частота контура  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = \sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 10^7$  1/с. При  $\omega = 10^8$  1/с  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 10 \cdot 10^7 - 10^7 = 9 \cdot 10^7$  1/с;

$$Z_{\text{вх}} = -j \left[ \frac{1 + (9 \cdot 10^7/10^7)}{100 \cdot 10^{-12} (2 \cdot 9 \cdot 10^7 + 81 \cdot 10^{14}/10^7)} \right] = -j \left[ \frac{10 \cdot 10^{10}}{10^7 (18 + 81)} \right] =$$

$$= -j \cdot 100 \text{ Ом.}$$

При  $\omega = 1,1 \cdot 10^7$  1/с  $\Delta\omega = 0,1 \cdot 10^7$  1/с;

$$Z_{\text{вх}} = -j \left[ \frac{1 + 0,1 (10^7/10^7)}{10^{-10} (0,2 \cdot 10^7 + 0,01 \cdot 10^{14}/10^7)} \right] = -j 5240 \text{ Ом.}$$

При  $\omega = 10^6$  1/с  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 10^6 - 10 \cdot 10^6 = -0,9 \cdot 10^7$  1/с;

$$Z_{\text{вх}} = -j \left[ \frac{1 - (0,9 \cdot 10^7/10^7)}{10^{-10} (-2 \cdot 0,9 \cdot 10^7 + 0,81 \cdot 10^{14}/10^7)} \right] = -j \left[ \frac{0,1 \cdot 10^3}{-1,8 + 0,81} \right] = j 101 \text{ Ом} \approx$$

$$\approx j 100 \text{ Ом.}$$

При  $\omega = 10^3$  1/с  $Z_{\text{вх}} = j 0,1$  Ом; при  $\omega = 0$   $Z_{\text{вх}} = 0$ . Выполненные расчеты подтверждают кривую  $Z_{\text{вх}} = f(\omega)$ , приведенную на рис. 8.36.

**Пример 8.6.** Определить частоту, при которой модуль входного сопротивления контура с параметрами, приведенными в примере 8.5, составляет 10 кОм.

**Решение.** Из выражения

$$Z_{\text{вх}} = \frac{-(1 + \Delta\omega/\omega_0)}{C[2\Delta\omega + (\Delta\omega)^2/\omega_0]}$$

получаем

$$Z_{\text{вх}} \cdot C \left[ 2\Delta\omega + \frac{(\Delta\omega)^2}{\omega_0} \right] = -1 - \Delta\omega/\omega_0,$$

откуда

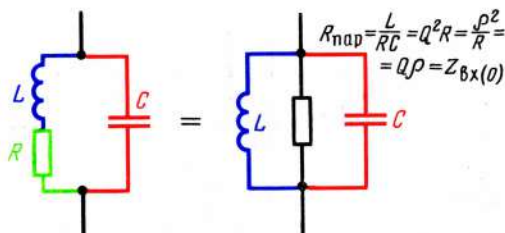
$$2Z_{\text{вх}} C \omega_0 \Delta\omega + Z_{\text{вх}} C (\Delta\omega)^2 = -\omega_0 - \Delta\omega;$$

$$Z_{\text{вх}} C (\Delta\omega)^2 + (2Z_{\text{вх}} C \omega_0 + 1) \Delta\omega + \omega_0 = 0;$$

$$(\Delta\omega)^2 + \left( \frac{2Z_{\text{вх}} C \omega_0 + 1}{Z_{\text{вх}} C} \right) \Delta\omega + \omega_0/Z_{\text{вх}} C = 0.$$



Рис. 8.23



После подстановки числовых значений получится выражение:

$$(\Delta\omega)^2 + \left( \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot 10^7 + 1}{10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} \right) \Delta\omega + \frac{10^7}{10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 0,$$

или  $(\Delta\omega)^2 + 21 \cdot 10^6 \cdot \Delta\omega + 10 \cdot 10^{12} = 0$ , откуда  $\Delta\omega = -0,5 \cdot 10^6$  1/с.

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega = 10^7 - 0,5 \cdot 10^6 = 9,5 \cdot 10^6 \text{ 1/с.}$$

Реальный параллельный контур (т. е. контур с потерями) на резонансной частоте можно представить в виде идеального, т. е. без потерь, параллельно которому включено резистивное сопротивление  $Z_{\text{вх}0}$  (рис. 8.23). Данную схему часто называют параллельной схемой замещения.

### 8.23. ТОКИ В ВЕТВЯХ

Модуль действующего значения тока в неразветвленной цепи

$$I = \frac{U_1}{Z_{\text{вх}}} = \frac{U_1}{Z_{\text{вх}0}} \sqrt{1 + \xi^2} = I_{0\text{ пар}} \sqrt{1 + \xi^2} = \frac{U_1}{Q\rho} \sqrt{1 + \xi^2}, \quad (8.54)$$

где  $I_{0\text{ пар}}$  — модуль тока в неразветвленной цепи при резонансе. Модуль тока в емкостной ветви

$$I_2 = \frac{U_1}{1/\omega C} = U_1 \omega C \frac{\omega_0}{\omega_0} = \nu I_{20} = \nu U_1/\rho, \quad (8.55)$$

где  $\nu = \omega/\omega_0$ , а модуль тока в ветви с индуктивностью

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U_1}{R \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} = \frac{U_1}{R \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_0} \cdot \frac{\omega L}{R}\right)^2}} = \\ &= \frac{U_1}{R \sqrt{1 + (\nu Q)^2}}. \end{aligned} \quad (8.56)$$

На частотах, при которых  $R \leq 3\omega L$ ,  $I_1 \approx U/\omega L$ . Кривые  $I = f(\omega)$ ,  $I_1 = f(\omega)$ ,  $I_2 = f(\omega)$  показаны на рис. 8.24. Отношение модулей токов в емкостной ветви к току в неразветвленной цепи при резонансе

$$I_{20}/I_0 = U_1 Q \rho / \rho U_1 = Q. \quad (8.57)$$

Таким образом, в параллельном контуре ток в реактивном элементе при резонансе в  $Q$  раз больше, чем ток во входной ветви, т. е.  $I_{20} = Q I_0$ . (В по-

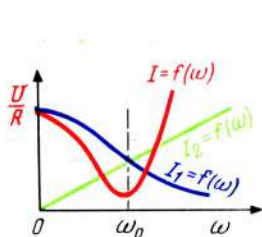


Рис. 8.24

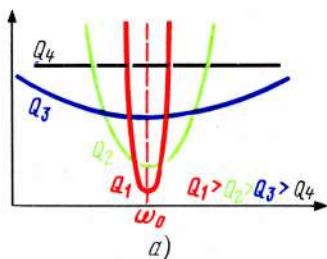
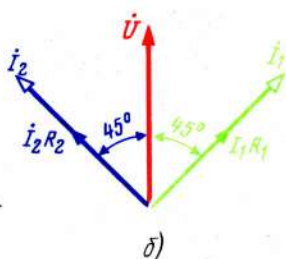


Рис. 8.25



следовательно контуре при резонансе напряжение на реактивном элементе в  $Q$  раз больше входного напряжения.) Резонанс в параллельной цепи называют *резонансом токов*. Поскольку  $U_1$  — величина постоянная, а  $Z_{\text{вх}} = f(\omega)$  имеет характеристику резонансной кривой, то кривая  $I = f(\omega)$  имеет вид, обратный резонансной. Чем больше добротность контура, тем меньше величина  $I_{0\text{пар}}$  и тем круче идет кривая  $I = f(\omega)$ . С уменьшением добротности кривые идут положе (рис. 8.25, а). При  $R_1 = R_2 = \sqrt{L/C} = \rho$  и  $U_{\text{вх}} = \text{const}$  модуль тока во входной цепи становится одинаковым на всех частотах, несмотря на наличие реактивных элементов в цепи. Такой случай получил название "безразличного" резонанса. При этом токи  $I_1$  и  $I_2$  оказываются сдвинутыми между собой на  $90^\circ$  при любой частоте (рис. 8.25, б).

#### 8.24. ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНТУРА

В реальных устройствах выходное напряжение снимается чаще всего с конденсатора контура (рис. 8.26). Если внутреннее сопротивление генератора мало (т. е. источник работает в режиме источника напряжения), то выходное напряжение равно входному, коэффициент передачи на всех частотах постоянен и равен 1, избирательностью по напряжению такой контур не обладает. Чтобы параллельный контур стал избирательным по напряжению, необходимо иметь схему, в которой значения тока в неразветвленной цепи при изменении частоты оказываются практически одинаковыми. В этом случае выходное напряжение станет изменяться по закону изменения сопротивления контура, характеристика  $U_{\text{вых}} = f(\omega)$  будет иметь вид резонансной кривой. Чтобы ток в цепи оставался практически постоянным при различных частотах (т. е. источник работал бы в режиме источника тока), необходимо последовательно с источником напряжения включить столь большое сопротивление, при котором выполняется условие  $R_i \gg Z_{\text{вх}0}$  (рис. 8.27). Тогда  $I = U/R_i + Z_{\text{вх}} \approx U/R_i = I = \text{const}$ . Однако наличие резистора  $R_i$  изменяет добротность цепи, поскольку в нем рассеивается мощность, а значит уменьшается эквивалентная добротность цепи. Рассчитаем  $Q_{\text{ц}}$ . Для этого ветвь с источником напряжения и внутренним сопротивлением  $R_i$  (рис. 8.27) заменим эквивалентным источником тока. Как известно, при подобной замене сопротивление остается прежним, равным  $R_i$ , а источник тока  $J$  получается равным  $U_1/R_i$ , схема цепи приобретает вид рис. 8.28, а.

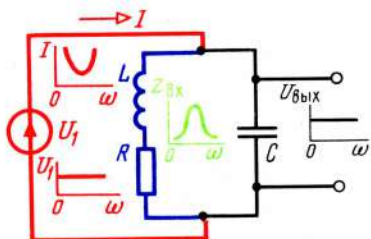


Рис. 8.26

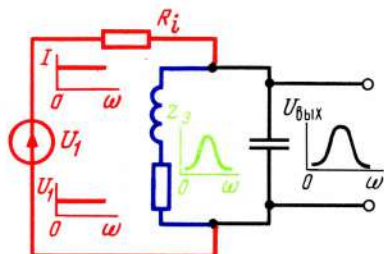


Рис. 8.27

Из данной схемы видно, что резистор  $R_i$  включен параллельно конденсатору  $C$ , следовательно, параллельное сопротивление  $R_i$  можно пересчитать в последовательное сопротивление  $R_{доб}$  (рис. 8.28, б). Очевидно, что в сопротивлении  $R_{доб}$  рассеивается такая же мощность, которая рассеивалась в  $R_i$ . Так как  $R_i \gg \rho$ , то  $R_{доб}$  можно рассчитать по упрощенной формуле:  $R_{доб} = \rho^2 / R_i$ . Добротность  $Q_{ц}$  в этом случае определяется из выражения

$$Q_{ц} = \frac{\rho}{R + R_{доб}} = \frac{\rho}{R \left(1 + \frac{R_{доб}}{R}\right)} = \frac{Q}{1 + \rho^2 / R_i R_i} = \frac{Q}{1 + Z_{вх0} / R_i}. \quad (8.58)$$

В реальных устройствах  $R_i$  выбирают в пределах  $3 \dots 8 Z_{вх0}$ , добротность цепи  $Q_{ц}$  при этом оказывается  $0,75 \dots 0,9$  добротности собственно контура. Цепь рис. 8.28, а можно представить в виде цепи рис. 8.28, в.

Модуль передаточной функции

$$H = \frac{U_2}{U_1} = \frac{IZ_{вх}}{U_1} = \frac{U_1}{U_1 R_i} \frac{Z_{вх0}}{\sqrt{1 + \xi_{ц}^2}} = \frac{Z_{вх0}}{R_i} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{ц}^2}}, \quad (8.59)$$

где  $\xi_{ц} = Q_{ц} \epsilon$ . Так как  $Z_{вх0} \ll R_i$ , а  $(1 / \sqrt{1 + \xi_{ц}^2}) \leq 1$ , то  $H \ll 1$ .

Таким образом, избирательные свойства по напряжению в пассивном параллельном колебательном контуре приобретаются только ценой малого коэффициента передачи, поскольку для получения избирательных свойств необходимо иметь большое сопротивление  $R_i$ ; в этом случае коэффициент

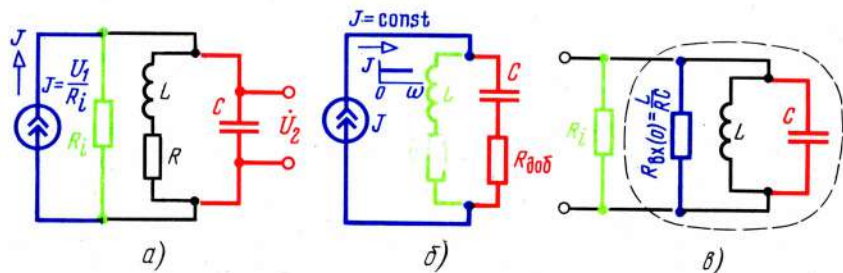


Рис. 8.28



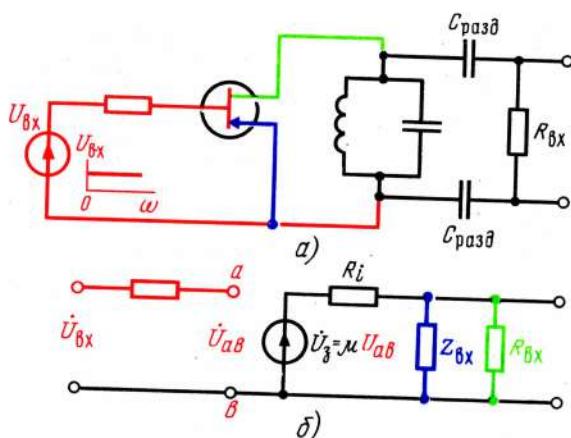


Рис. 8.29

передачи даже на резонансной частоте резко уменьшается. Пассивный параллельный колебательный контур имеет большое входное сопротивление ( $Z_{вх0} = Q\rho$ ) и в  $Q$  раз меньшее выходное. Для питания параллельного контура требуется большое напряжение при малом токе, поэтому параллельный контур удобно использовать в цепях с управляемыми источниками, имеющими большой коэффициент усиления, например транзисторами полевого типа (рис. 8.29, а).

В реальных устройствах колебательный контур часто включают в выходную цепь электронного прибора. Схема работает следующим образом. Между входными зажимами электронного прибора (например, полевого транзистора) подводят спектр частот, из которого следует выделить полосу определенных частот. Источником переменных напряжений может служить, например, приемная антенна, в которой наводятся ЭДС различных частот от передающих радиостанций. Для простоты рассуждений положим, что ЭДС на всех частотах одинаковы. Электронный прибор характеризуется различными параметрами, в том числе коэффициентом усиления  $\mu$  и внутренним сопротивлением  $R_i$ . Эквивалентная схема цепи показана на рис. 8.29, б. Если  $R_i$  велико, то источник работает в режиме неизменного тока, что как раз необходимо для получения избирательности по напряжению. На выходе контура напряжение на различных частотах  $U_{вых}$  оказывается неодинаковым, это напряжение подается на следующий каскад, который в свою очередь усиливает эти сигналы и т. д.

Избирательность контура  $B_{дБ} = 20 \lg (U_{C0}/U_C)$ , где  $U_{C0}$  — выходное напряжение на резонансной частоте;  $U_C$  — выходное напряжение при расстройке.

Сопротивление  $R_{вх}$  (имеется в виду входное сопротивление последующего каскада) оказывается включенным параллельно контуру и шунтирует его. При этом  $Z_{вх0}$  превращается в

$$Z_{вх0ц} = Z_{вх0} \cdot R_{вх} / (Z_{вх0} + R_{вх}),$$

добротность становится

$$Q_{\text{ц}} = \frac{1}{1 + (Z_{\text{вх}0}/R_i) + (Z_{\text{вх}0}/R_{\text{вх}})}, \quad (8.60)$$

модуль передаточной функции приобретает вид

$$H = \frac{Z_{\text{вх}0\text{ц}}}{R_i} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{ц}}^2}}. \quad (8.61)$$

Чем меньше сопротивление  $R_{\text{вх}}$ , тем сильнее падает эквивалентная добротность и коэффициент передачи на каждой частоте. На практике сопротивления  $R_{\text{вх}}$  выбирают равным  $3 \dots 10 Z_{\text{вх}0}$ .

### 8.25. КОНТУРЫ С АВТОТРАНСФОРМАТОРНЫМ (НЕПОЛНЫМ) ВКЛЮЧЕНИЕМ

Если внутреннее сопротивление источника  $R_i$  (см. рис. 8.27) недостаточно велико и по каким-то причинам не может быть увеличено, то добротность цепи  $Q_{\text{ц}}$  сильно падает по сравнению с добротностью собственно контура  $Q$ . Например, если  $R_i = Z_{\text{вх}0}$ , то, как следует из выражения (8.58),  $Q_{\text{ц}} = 0,5 Q$ . Данное соотношение можно улучшить, если использовать автотрансформаторное (неполное) включение контура, т. е. включение, при котором часть индуктивности остается в первой ветви, а часть переносится во вторую (емкостную) ветвь (рис. 8.30). При этом резонансная частота и добротность остаются неизменными, а входное сопротивление контура уменьшается в  $p^2$  раз, где  $p$  — коэффициент включения контура, представляющий отношение индуктивности в первой ветви к суммарной индуктивности контура:

$$p = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{L_1}{L}. \quad (8.62)$$

При резонансе  $Z_{\text{вх}0} p = p^2 Z_{\text{вх}0}$ , а при расстройке

$$Z_{\text{вх}p} = Z_{\text{вх}0} p / \sqrt{1 + \xi^2}. \quad (8.63)$$

Например, если катушка разделена на две части, т. е.  $L_1 = L_2 = 0,5 L$ , то  $p = 0,5$ . Тогда входное сопротивление контура уменьшается в 4 раза и прежнее сопротивление  $R_i$  оказывается значительно меньшее шунтирующее действие, чем при полном включении контура.

Если  $R_i = Z_{\text{вх}0}$ ,  $Q_{\text{ц}} = 0,5 Q$ ,

но используется неполное включение с  $p = 0,5$ ,  
то

$$Q_{\text{ц}} = \frac{Q}{1 + p^2 Z_{\text{вх}0}/R_i} = \frac{Q}{1 + 0,25 R_i/R_i},$$

т. е. возрастает на 60 % и т. д.

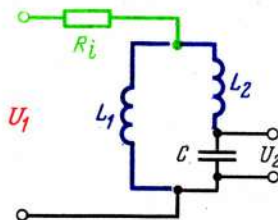


Рис. 8.30

Изменение схемы контура приводит к тому, что кроме параллельного резонанса (токов) на частоте  $\omega_{\text{рез.т}} = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C}$  появляется еще последовательный резонанс (напряжений) на частоте  $\omega_{\text{рез.н}} = 1/\sqrt{L_2 C}$ .

Аналогично можно всю индуктивность поместить в первую ветвь, а емкость разбить между первой и второй ветвями. При этом коэффициент включения  $p^2 = C_2/(C_1 + C_2)$ . Распределяя индуктивности или емкости между ветвями, можно изменять входное сопротивление цепи, не изменяя резонансной частоты и добротности контура.

## 8.26. ЭЛЕМЕНТЫ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА.

### ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Конденсаторы практически любой конструкции имеют подводящие проводники, которые обладают некоторой индуктивностью (см. § 4.16). Следовательно, эквивалентная схема конденсатора представляет не "чистую" емкость, как часто изображают на схемах, а последовательную цепочку, состоящую из собственно емкости  $C$  паразитной индуктивности  $L_C$ , охваченной сопротивлением потерь  $R_C$  (рис. 8.31, а).

При сравнительно низких частотах индуктивное сопротивление  $\omega L_C$  много меньше емкостного сопротивления  $1/\omega C$ , поэтому членом  $\omega L_C$  можно пренебрегать по сравнению с сопротивлением  $\omega L_C$  и считать конденсатор содержащим только емкость  $C$ . С увеличением частоты член  $\omega L_C$  растет, становится соизмеримым с членом  $1/\omega C$ , а при их равенстве возникают резонансные явления. При еще больших частотах цепь приобретает индуктивный характер и конденсатор оказывается не только не емкостью, но даже индуктивностью. Усилению этого явления в большой степени способствуют монтажные проводники, различные соединительные кабели и т. д., поэтому следует знать частоты, при которых конденсатор еще можно уверенно использовать как чистую емкость. Аналогичные явления происходят в катушках индуктивностей. Поскольку между любыми соседними витками имеются междувитковые емкости, эквивалентная схема катушки в общем случае имеет вид рис. 8.31, б.

При не слишком больших частотах проводимостью емкостной ветви чаще всего можно пренебречь, но по мере увеличения частоты эта составляющая возрастает, при некоторой частоте наступает резонанс, а при еще больших частотах катушка ведет себя как конденсатор. Увеличению паразитной емкости и снижению собственной резонансной частоты катушек в большой степени способствуют емкости монтажа, емкости между деталями, которые во многих случаях добавляются к междувитковым емкостям катушек. Использовать катушки можно только на частотах, много меньших, чем резонансная.

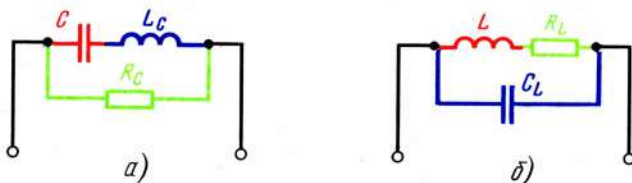


Рис. 8.31



## 8.27. ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ С "ЭЛЕКТРОННОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ"

Активная цепь с двумя ИТУН на входе и выходе, токи которых пропорциональны напряжениям выхода и входа, называется *гиратором*. Гиратор позволяет имитировать индуктивность с помощью ARC-цепи. В гираторах нет катушек, поэтому их можно изготавливать в виде микрорелектронных схем. Покажем, что входное сопротивление гиратора, собранного по схеме рис. 8.32, а, имеет индуктивный характер, хотя схема состоит из резисторов, конденсатора и операционных усилителей. Входные зажимы операционных усилителей представим в виде короткозамкнутых перемычек с током, равным 0. Потенциал точки *B* примем за нулевой ( $\varphi_B = 0$ ). В этом случае потенциалы точек *D* и *F* равны  $\dot{U}_1$  ( $\dot{\varphi}_F = \dot{\varphi}_D = \dot{U}_1$ ), а потенциалы точек *N* и *M* равны  $\dot{U}_2$  ( $\dot{\varphi}_N = \dot{\varphi}_M = \dot{U}_2$ ), (рис. 8.32, б).

Составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов *D, F, M* соответственно:

$$\dot{I}_{Bx} + \dot{I}_2 = \dot{I}_1, \quad (1)$$

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_4, \quad (2)$$

$$\dot{I}_6 = \dot{I}_5, \quad (3)$$

$$\dot{I}_7 = \dot{I}_4 + \dot{I}_H. \quad (4)$$

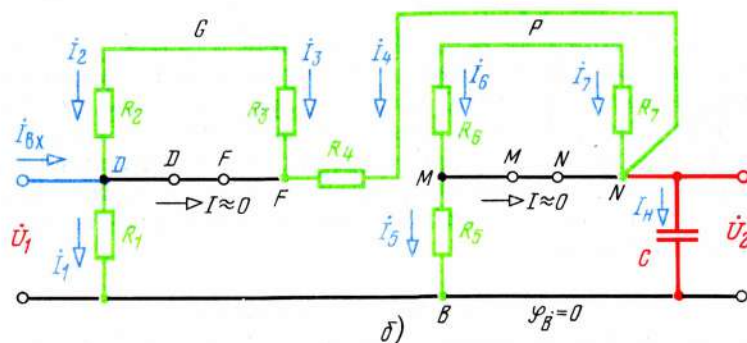
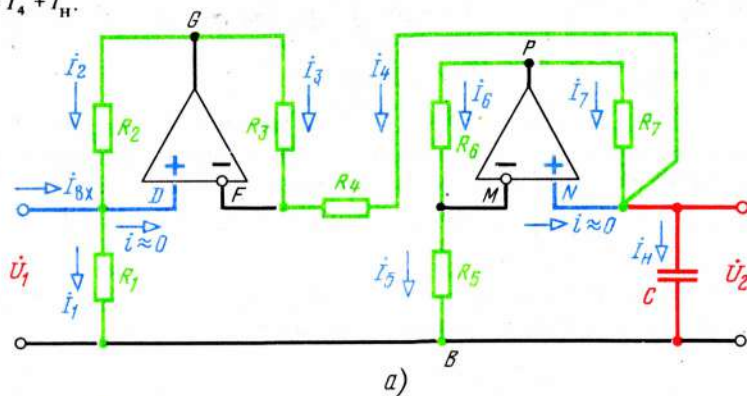


Рис. 8.32

Выразим токи через потенциалы точек. Тогда уравнения принимают вид

$$\dot{I}_{\text{вх}} + \frac{\dot{\varphi}_G - \dot{\varphi}_D}{R_2} = \frac{\dot{\varphi}_D}{R_1}, \quad (1)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_G - \dot{\varphi}_F}{R_3} = - \frac{\dot{\varphi}_N - \dot{\varphi}_F}{R_4}, \quad (2)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_P - \dot{\varphi}_M}{R_6} = \frac{\dot{\varphi}_M}{R_5}, \quad (3)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_P - \dot{\varphi}_N}{R_7} = \frac{\dot{\varphi}_N - \dot{\varphi}_F}{R_4} + \dot{I}_N. \quad (4)$$

Все сопротивления выберем одинаковыми ( $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R$ ), приведем каждую строку к общему знаменателю и отбросим его. Уравнения приобретают вид

$$R\dot{I}_{\text{вх}} + \dot{\varphi}_G - \dot{\varphi}_D = \dot{\varphi}_D \quad \text{или} \quad R\dot{I}_{\text{вх}} = 2\dot{\varphi}_D - \dot{\varphi}_G, \quad (1)$$

$$\dot{\varphi}_G - \dot{\varphi}_F = -\dot{\varphi}_M + \dot{\varphi}_F \quad \text{или} \quad \dot{\varphi}_G = 2\dot{\varphi}_D - \dot{\varphi}_M, \quad (2)$$

$$\dot{\varphi}_P - \dot{\varphi}_M = \dot{\varphi}_M \quad \text{или} \quad \dot{\varphi}_P = 2\dot{\varphi}_M, \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}_P - \dot{\varphi}_N = \dot{\varphi}_N - \dot{\varphi}_F + R\dot{I}_N \quad \text{или} \quad \dot{\varphi}_P = 2\dot{\varphi}_M - \dot{\varphi}_D + \dot{I}_N. \quad (4)$$

Значение  $\dot{\varphi}_G$  из строки (2) подставим в строку (1), а значение  $\dot{\varphi}_P$  из строки (3) подставим в строку (4), при этом получаются уравнения

$$R\dot{I}_{\text{вх}} = 2\dot{\varphi}_D - 2\dot{\varphi}_D + \dot{\varphi}_M = \dot{\varphi}_M = \dot{U}_2 \quad \text{или} \quad \dot{I}_{\text{вх}} = \dot{U}_2/R;$$

$$R\dot{I}_N = \dot{\varphi}_D - 2\dot{\varphi}_M + 2\dot{\varphi}_M = \dot{\varphi}_D = \dot{U}_1$$

Входное сопротивление цепи (т. е. сопротивление между точками DB) есть отношение входного напряжения к входному току:

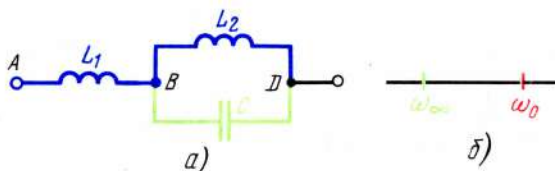
$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \dot{U}_1/\dot{I}_{\text{вх}} = \frac{R\dot{I}_N R}{\dot{U}_2} = \frac{R_2 \dot{U}_2}{\dot{U}_2 \underline{Z}_N}.$$

Так как  $\underline{Z}_N = 1/j\omega C_N$ , то  $\underline{Z}_{\text{вх}} = R^2 j\omega C = j\omega R^2 C = j\omega L_{\text{эк}}$ . Множитель  $j$  указывает на индуктивный характер входного сопротивления. Эквивалентная индуктивность  $L_{\text{эк}} = R^2 C$ . Например, при  $R = 1$  кОм и  $C = 1$  мкФ  $L_{\text{эк}} = R^2 C = (10^3)^2 \cdot 10^{-6} = 1$  Гн. При  $R = 10$  кОм и  $C = 1$  мкФ  $L_{\text{эк}} = (10^4)^2 \cdot 10^{-6} = 100$  Гн. Подобные индуктивности, выполненные в виде катушек, имели бы весьма большие габариты и малые добротности. "Электронные индуктивности" изготавливают в микроэлектронном виде, поэтому их габариты весьма малы.

## 8.28. РЕАКТИВНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

*Реактивными двухполюсниками* называются цепи, имеющие два входных зажима и состоящие из индуктивностей и емкостей. Двухполюсники, в которых число индуктивностей и емкостей или равны или отличаются на

Рис. 8.33

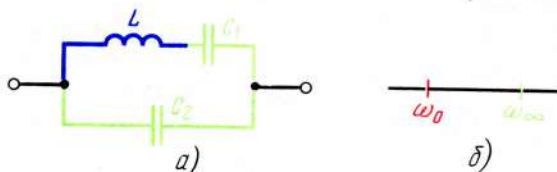


единицу, называются *приведенными*. Будем анализировать только приведенные схемы, поскольку каждую неприведенную схему путем различных преобразований всегда можно заменить эквивалентной приведенной. Так как реактивные двухполюсники представляют цепи без потерь, то их входное сопротивление при резонансе напряжений равно 0, а при резонансе токов —  $\infty$ . Частоты, при которых входное сопротивление цепи равно 0, называют *нулевыми* и обозначают  $\omega_0$ , а частоты, при которых входное сопротивление бесконечно велико — *полюсными* и обозначают  $\omega_\infty$ . Если в цепи несколько нулевых и полюсных частот, то каждая из них имеет соответствующий цифровой индекс. Можно строго доказать, что в приведенных схемах резонансных частот на единицу меньше, чем реактивных элементов, а нулевые и полюсные частоты обязательно чередуются.

Исследуем цепь рис. 8.33, а. Данная цепь — приведенная и содержит три реактивных элемента, поэтому резонансных частот в ней две: нулевая и полюсная. Определим, какая из них имеет меньшее, и какая большее значение.

Чтобы ответить на данный вопрос, следует рассмотреть фазочастотные характеристики цепи. Рассматривать ФЧХ следует изнутри схемы, начиная с участка или ветви, в которой имеются только два элемента. На этом основании в цепи рис. 8.33, а следует рассматривать ФЧХ участка  $BD$ , а в цепи рис. 8.34, а — первой ветви. Участок  $BD$  представляет параллельный контур без потерь, и ФЧХ этой цепи имеет вид рис. 8.35. Очевидно, что резонансная частота в данном случае является полюсной  $\omega_\infty$ . Участок  $AB$  соединен последовательно с участком  $BD$ , следовательно, в цепи  $AD$  может быть резонанс напряжений. Но для этого необходимо, чтобы участок  $BD$  имел емкостный характер, а это может быть только при частотах больших, чем частота  $\omega_\infty$ . Следовательно, в цепи рис. 8.33, а сначала оказывается частота полюсная, а затем — нулевая (рис. 8.33, б). В цепи рис. 8.34, а первая ветвь имеет ФЧХ вида показанного на рис. 8.36. Следовательно, параллельный резонанс может быть только при частотах, на которых первая ветвь имеет индуктивный характер, поскольку вторая ветвь является емкостной при любой частоте. Для этого необходимо, чтобы частота была больше нулевой, поскольку при  $\omega > \omega_0$  первая ветвь приобретает индуктивный характер. Следовательно, в цепи рис. 8.34, а меньшей резонансной частотой является нулевая,

Рис. 8.34





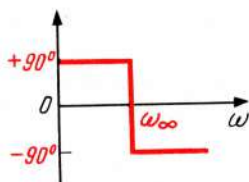


Рис. 8.35

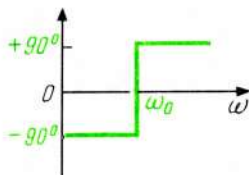


Рис. 8.36

а — бóльшая — полюсная (рис. 8.34, б). Чтобы рассчитать эти частоты, необходимо записать комплексное выражение входного сопротивления, привести его к нормальному виду, т. е. к виду, при котором выражение представляет дробь, в числителе и знаменателе которой имеются полиномы (т. е. многочлены) соответствующих степеней. Так как при нулевых частотах входное сопротивление равно 0, а при полюсных частотах —  $\infty$ , то для нахождения "нулей" (как иногда говорят для краткости) следует числитель приравнять 0 и решить получившееся уравнение относительно частоты  $\omega$ . Для нахождения "полюсов" следует приравнять 0 знаменатель и решить получившееся уравнение относительно частоты.

Определим нулевые и полюсные частоты цепи рис. 8.33:

$$\begin{aligned} Z_{вх} &= j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \cdot 1/j\omega C}{j\omega L_2 + 1/j\omega C} = j\omega L_1 + \frac{L_2 \cdot j\omega C}{C(1 - \omega^2 L_2 C)} = \\ &= j \left( \frac{\omega L_1 - \omega^3 L_1 L_2 C + \omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C} \right). \end{aligned}$$

Если приравнять 0 числитель, частота  $\omega$  становится нулевой  $\omega_0$ :  $\omega_0 L_1 - \omega_0^3 L_1 L_2 C + \omega_0 L_2 = 0$ ;  $\omega(\omega_0^2 L_1 L_2 C - L_1 - L_2) = 0$ . Так как  $\omega \neq 0$ , то  $\omega_0^2 L_1 L_2 C = L_1 + L_2$ , или  $\omega_0^2 = (L_1 + L_2)/L_1 L_2 C$ , откуда

$$\omega_0 = 1/\sqrt{\left(\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\right) C}. \quad (8.64)$$

Определим полюсную частоту. Из выражения  $\omega_\infty^2 L_2 C = 1$  находим

$$\omega_\infty = 1/\sqrt{L_2 C}. \quad (8.65)$$

Сравним (8.64) и (8.65). Емкость  $C$  у них одинаковая, а  $L_2 > L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$ , поскольку последний член представляет индуктивность катушек  $L_1$  и  $L_2$ , соединенных параллельно. Следовательно, в данной цепи  $\omega_0 > \omega_\infty$ , что уже было получено ранее (см. рис. 8.33, б).

Аналогично можно определить резонансные частоты для цепи 8.34, а:

$$Z_{вх} = \frac{(j\omega L + 1/j\omega C_1) 1/j\omega C_2}{j\omega L + 1/j\omega C_1 + 1/j\omega C_2} = \frac{(1 - \omega^2 L C_1)}{(-\omega^2 L C_1 C_2 + C_1 + C_2)},$$

откуда

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC_1}, \quad \omega_\infty = 1/\sqrt{L \left( \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right)}.$$

Так как  $C_1 C_2 / (C_1 + C_2) < C_1$ , то  $\omega_\infty > \omega_0$ , что также было установлено ранее (см. рис. 8.34, б).

Чтобы начертить кривые  $Z_{вх} = f(\omega)$ , необходимо использовать следующие правила:

1. Поскольку входное сопротивление реактивного двухполюсника может иметь либо индуктивный, либо емкостный характер, на частоте  $\omega = 0$  входное сопротивление может принимать только два значения: 0 или  $-\infty$ . Если для постоянного тока имеется замкнутая цепь, то характер цепи индуктивный и кривая начинается с нулевого сопротивления. Если для постоянного тока цепь разомкнута, то кривая начинается из  $-\infty$ .

2. Сопротивления цепей, состоящих из  $L$  и  $C$ , при увеличении частоты имеют только возрастающий характер, т. е. могут изменяться или от 0 до  $\infty$  или от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

3. Резонансных частот на единицу меньше, чем элементов в цепи.

4. Нулевые и полюсные частоты чередуются.

5. На весьма большой частоте (т. е. большей, чем частота последнего резонанса) характер цепи определяется так: если входное сопротивление оказывается большим, то характер цепи на этих частотах является индуктивным и кривая входного сопротивления стремится к  $\infty$ , а если малое, то характер цепи емкостный и сопротивление из области отрицательных значений стремится к 0.

Построим входные частотные характеристики цепи рис. 8.33, а. На нулевой частоте индуктивные сопротивления равны 0, постоянный ток по цепи может проходить, следовательно, характеристика начинается с нулевого значения. Так как с увеличением частоты сопротивления могут только нарастать, то кривая будет возрастающей. После нулевого сопротивления ближайшая резонансная частота может быть только полюсной, поэтому кривая уйдет в  $\infty$ , а затем станет нарастать из  $-\infty$ . После полюсной частота обязательно должна быть нулевой, при ней кривая пересечет горизонтальную ось. При больших частотах участок  $BD$  почти замкнут, поскольку емкость на этой частоте имеет малое сопротивление, а индуктивность  $L_1$  — большое, поэтому на высоких частотах характер цепи будет индуктивным и кривая входного сопротивления станет стремиться к  $\infty$  (рис. 8.37, красная кривая.)

Построим входную ФЧХ цепи. Так как потери в реактивных двухполюсниках отсутствуют, то фазный угол может принимать только два значения:

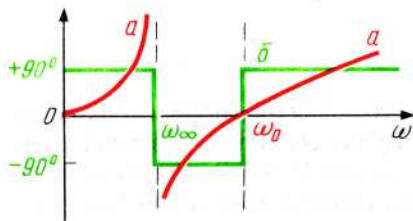


Рис. 8.37

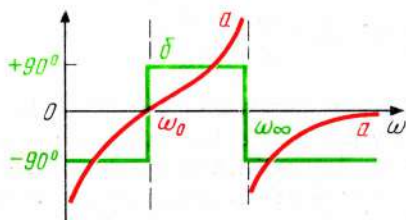


Рис. 8.38

$+90^\circ$  или  $-90^\circ$ . Если входное сопротивление цепи положительное, то цепь эквивалентна некоторой индуктивности, угол будет  $+90^\circ$ , при отрицательном сопротивлении цепь эквивалентна емкости, угол будет  $-90^\circ$ . Таким образом, для цепи рис. 8.33, *a* в интервалах  $0 \dots \omega_\infty$  и  $\omega_0 \dots \infty$   $\varphi_{Z_{вх}} = +90^\circ$ , а в интервале  $\omega_\infty \dots \omega_0$   $\varphi_{Z_{вх}} = -90^\circ$  (рис. 8.37, зеленая кривая). Построим АЧХ и ФЧХ цепи рис. 8.34, *a*. На нулевой частоте цепь представляет разрыв, а на большой частоте — малое сопротивление, обусловленное емкостью  $C_2$ , следовательно, кривая АЧХ начинается с  $-\infty$ , проходит через две резонансные частоты, и кончается  $-0$  (рис. 8.38, красная кривая); ФЧХ данной цепи имеет вид зеленой кривой рис. 8.38.

## 8.29. СТАНДАРТНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ВХОДНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Входные сопротивления реактивных двухполюсников принято записывать в форме, при которой в это выражение в явном виде входят все резонансные частоты. На примере преобразования выражения входного сопротивления цепи рис. 8.33, *a* покажем стандартную форму записи этого сопротивления:

$$Z_{вх} = j \left( \frac{\omega L_1 + \omega L_2 - \omega^3 L_1 L_2 C}{1 - \omega^2 L_2 C} \right),$$

вынесем из числителя за скобку множитель  $\omega L_1$  и изменим знаки в числителе и знаменателе на обратные. Тогда

$$\begin{aligned} Z_{вх} &= j\omega L_1 \left[ \frac{\omega^2 L_2 C - (1 + L_2/L_1)}{\omega^2 L_2 C - 1} \right] = \\ &= j\omega L_1 \left\{ \frac{L_2 C \left[ \omega^2 - \frac{1}{C} (1/L_2 + L_2/L_1 L_2) \right]}{L_2 C [\omega^2 - 1/L_2 C]} \right\} = j\omega L_1 \left[ \frac{\omega^2 - \left( \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C} \right)}{\omega^2 - \left( \frac{1}{L_2 C} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Но выражение  $(L_1 + L_2)/L_1 L_2 C$  есть квадрат нулевой частоты, а выражение  $1/L_2 C$  — квадрат полюсной частоты. Следовательно, комплексное входное сопротивление

$$Z = j\omega L_1 \left[ \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_\infty^2} \right].$$

Выявим физический смысл множителя, находящегося перед скобкой. Из схемы рис. 8.33, *a*, видно, что  $j\omega L_1$  представляет собой входное сопротивление исследуемой цепи на весьма высокой частоте. На таких частотах участок *BD* закорачивается малым сопротивлением емкости и входное сопротивление цепи оказывается  $j\omega L_1$ .



Распространяя данный расчет на цепи с большим числом элементов, можно получить правило записи входных сопротивлений реактивных двухполюсников. В общем случае входное комплексное сопротивление есть произведение комплексного входного сопротивления данной цепи на большой частоте (при которой емкостные сопротивления малы, а индуктивные велики) на дробь, у которой в числителе столько скобок, сколько оказывается нулевых частот в цепи, а в знаменателе, сколько получается полюсных частот. Структура каждой скобки числителя  $\omega^2 - \omega_0^2$ , а каждой скобки знаменателя  $\omega^2 - \omega_\infty^2$ , где  $\omega$  — текущая частота, а  $k$  — целое положительное число. На основании данного правила запишем входное сопротивление цепи рис. 8.34, а. На высоких частотах верхняя ветвь практически разомкнута из-за большого индуктивного сопротивления, и ее проводимостью можно пренебречь. Множитель перед дробью определяется сопротивлением конденсатора  $C_2$ , поэтому

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{1}{j\omega C_2} \left[ \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_\infty^2} \right].$$

**Пример 8.8.** Записать выражение входного сопротивления реактивного двухполюсника, изображенного на рис. 8.39, а.

**Решение.** Поскольку в данной цепи восемь реактивных элементов, в цепи будет семь резонансных частот. Конденсатор  $C_1$  не пропускает постоянный ток, поэтому

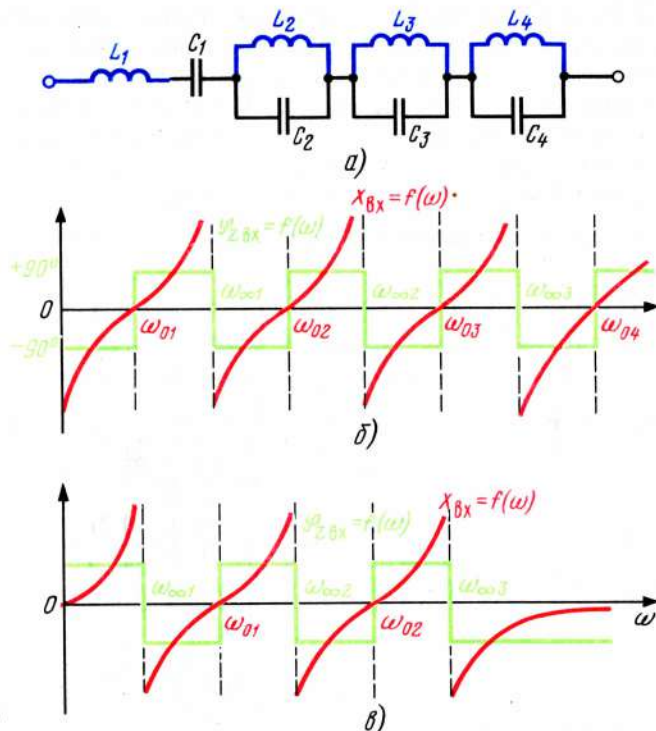


Рис. 8.39

АЧХ начинается с минус бесконечного сопротивления. На больших частотах индуктивности  $L_2, L_3, L_4$  замкнуты малыми сопротивлениями емкостей и входное сопротивление на высоких частотах определяется индуктивностью  $L_1$ . Входные АЧХ и ФЧХ при этом имеют вид рис. 8.39, б:

$$Z_{вх} = j\omega L_1 \left[ \frac{(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2)(\omega^2 - \omega_{03}^2)(\omega^2 - \omega_{04}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)(\omega^2 - \omega_{\infty 2}^2)(\omega^2 - \omega_{\infty 3}^2)} \right].$$

**Пример 8.9.** Нарисовать входные АЧХ и ФЧХ, записать входное сопротивление цепи рис. 8.39, а при замкнутом участке  $L_1 C_1$ .

**Решение.** Так как в цепи остается шесть реактивных элементов, то резонансных частот будет пять. Характеристика начинается с 0, поскольку индуктивности  $L_2, L_3, L_4$  образуют цепь для постоянного тока. На больших частотах проводимости индуктивных ветвей пренебрежимо малы, поэтому входное сопротивление определяется емкостями  $C_1, C_2, C_3$ , соединенными последовательно. Входные АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 8.39, в:

$$Z = \frac{1}{j\omega} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \left[ \frac{(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)(\omega^2 - \omega_{\infty 2}^2)(\omega^2 - \omega_{\infty 3}^2)} \right].$$

### 8.30. ПРОГРАММЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НУЛЕВЫХ И ПОЛЮСНЫХ ЧАСТОТ С ПОМОЩЬЮ ПМК

При определении нулевых и полюсных частот приходится находить корни полиномов высоких порядков, что возможно только с помощью вычислительной техники. Корни полиномов второго – пятого порядков можно находить с помощью программируемых микрокалькуляторов, а полиномов выше пятого порядка – с помощью микроЭВМ. Приводим программы для нахождения корней полиномов с помощью микрокалькуляторов типа Б-3-34, МК-54, МК-56, МК-61. Определение нулевых и полюсных частот в цепях второго порядка требует решения уравнения вида  $a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0$ .

Программа 8.1 для нахождения корней уравнения второй степени.

	F		/-/		В/О		F		ВП	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	П → x1 61	/-/ 0L	П → x2 62	+	2 02	+	x → П4 44	Fx 22	П → x0 60	П → x2 62
1	+	-	Fx < 0 5L	18 18	/-/ 0L	F - 21	4 04	С/П 50	F - 21	x → П3 43
2	П → x4 64	+	x → П7 47	П → x4 64	П → x3 63	- 11	7 07	С/П 50	F	/-/

В в о д:  $a_0 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{0}$ ,  $a_1 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{1}$ ,  $a_2 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{2}$ . После ввода данных нажать клавиши **В/О** и **С/П**.

**Вывод результатов.** Если на индикаторе высветится 7, т. е. в регистре  $X$  находится число 7, то корни уравнения вещественные. В этом случае  $X_1 = \boxed{\Pi \rightarrow x} \boxed{Y}$ ,  $X_2 = \boxed{\Pi \rightarrow x} \boxed{7}$ . Если светится 4, то корни комплексно-сопряженные,  $m = \boxed{\Pi \rightarrow x} \boxed{Y}$ ,  $d = \boxed{\Pi \rightarrow x} \boxed{4}$ .

**Примечание.** Чтобы вывести на дисплей значение из регистра  $Y$ , необходимо нажать клавишу  $\boxed{XY}$ .

**Контрольные примеры**

$$2X^2 - 5X - 10 = 0,$$

$$X_1 = -1,3117376; X_2 = 3,8117376.$$

$$X_2 + 2X + 15 = 0,$$

$$X_{12} = -1 \pm j3,7416573.$$

Программа для расчета цепей третьего порядка приведена в примере 3.22.

Для расчета цепей четвертого порядка необходимо определить корни полинома вида  $X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$ .

Программа 8.2 для нахождения корней уравнения четвертой степени

	<div>F</div>	<div>/-/</div>	<div>B/O</div>	<div>F</div>	<div>BП</div>					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\Pi \rightarrow x3$ 63	$/-/\$ 0L	2 02	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi Д$ 4Г	$\Pi \rightarrow xД$ 6Г	$\uparrow$ 0E	$\uparrow$ 0E	$\Pi \rightarrow x3$ 63	$+$ 10
1	$x \rightarrow \Pi 6$ 46	X 12	$\Pi \rightarrow x2$ 62	$+$ 10	$x \rightarrow \Pi 5$ 45	X 12	$\Pi \rightarrow x1$ 61	$+$ 10	$F X = 0$ 5E	65 65
2	$\Pi \rightarrow x1$ 61	$\Pi \rightarrow x3$ 63	$\div$ 13	$\uparrow$ 0E	$F X$ 22	$\Pi \rightarrow x0$ 60	$-$ 11	$F \geq 0$ 59	65 65	$F -$ 21
3	$+$ 10	$x \rightarrow \Pi 7$ 47	$\Pi \rightarrow xД$ 6Г	2 02	$\div$ 13	$\uparrow$ 0E	$F X$ 22	$\Pi \rightarrow x7$ 67	$-$ 11	$F X < 0$ 5C
4	50 50	$/-/\$ 0L	$F -$ 21	0 00	$\div$ 13	$Cx$ 0Г	$F A$ 25	$XY$ 14	$БП$ 51	54 54
5	$F -$ 21	$+$ 10	$\div$ 13	$F \uparrow$ 0	$C/\Pi$ 50	$\Pi \rightarrow x3$ 63	$/-/\$ 0L	$\Pi \rightarrow xД$ 6Г	$-$ 11	$x \rightarrow \Pi Д$ 4Г
6	$\Pi \rightarrow x0$ 60	$\Pi \rightarrow x7$ 67	$\div$ 13	$БП$ 51	31 31	$XY$ 14	$\Pi \rightarrow x6$ 66	$+$ 10	$F X \neq 0$ 57	84 84
7	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi 7$ 47	$\uparrow$ 0E	$\Pi \rightarrow x5$ 65	$-$ 11	X 12	$\Pi \rightarrow x0$ 60	$+$ 10	$F X < 0$ 5C	84 84
8	$\Pi \rightarrow xД$ 6Г	$\Pi \rightarrow xA$ 6 -	$-$ 11	$x \rightarrow \Pi Д$ 4Г	$\Pi \rightarrow xA$ 6 -	2 02	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi A$ 4 -	$\Pi \rightarrow xД$ 6Г	$+$ 10
9	$x \rightarrow \Pi Д$ 4Г	$F \uparrow$ 0	$-$ 11	$F x = 0$ 5E	05 05	$\Pi \rightarrow x7$ 67	$БП$ 51	32 32	F	$/-/\$



В в о д:  $a_0 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{0}$ ,  $a_1 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{1}$ ,  $a_2 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{2}$ ,  $a_3 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{3}$ ,  
 $2(1 + |a_{max}|) = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{A}$ , где  $|a_{max}|$  — модуль наибольшего из коэффициентов полинома. Нажать клавиши  $\boxed{B/O}$  и  $\boxed{C/\Pi}$ .

В ы в о д р е з у л ь т а т о в. Могут быть два случая. Если после счета на экране появляется число, то это есть первый корень (действительный), тогда  $X_1 = X$ , для вывода на экран второго корня (также действительного) следует нажать клавишу  $\boxed{XY}$ . Если на экране появится надпись ЕГГОГ, то это означает, что первые два корня комплексно-сопряженные. В этом случае следует нажать клавишу  $\boxed{C/\Pi}$ , вещественная часть  $X_1$  и  $X_2$  появится на экране, а для нахождения мнимой части следует нажать клавишу  $\boxed{XY}$  (т. е.  $d_{12} = X$ ,  $m_{12} = Y$ ). Для нахождения третьего и четвертого корней следует нажать клавишу  $\boxed{C/\Pi}$  и проделать такие же манипуляции, как и при нахождении двух первых корней. Время счета около 8 мин.

### К о н т р о л ь н ы е п р и м е р ы

$$X^4 + 9X^3 + 31X^2 + 59X + 60 = 0,$$

$$\underline{X}_{12} = -1 \pm j2; X_3 = -3; X_4 = -4.$$

$$X^4 - 5X^3 - 4X^2 + 10X + 20 = 0,$$

$$X_1 = 5,2617176, X_2 = 2; \underline{X}_{34} = -1,1308587 \pm j0,78846623.$$

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = 0,$$

$$\underline{X}_{12} = 0,309017 \pm j0,95105651; \underline{X}_{34} = -0,809017 \pm j0,58778524.$$

Для расчета цепей пятого порядка необходимо определять корни полинома вида  $X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$ .

Программа 8.3 для нахождения корней уравнения пятого порядка

F
/-/
B/O
F
BП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	Cx 0Г	x→ПC 4Г	XY 14	F↑ 0	↑ 0E	↑ 0E	П→x4 64	+	x→П8 48	X 12
1	П→x3 63	+	x→П7 47	X 12	П→xC 6Г	F X = 0 5E	63 63	F A 25	П→x2 62	+
2	x→П6 46	X 12	П→x1 61	+	x→П5 45	X 12	П→x0 60	+	F X < 0 5Г	34 34
3	F A 25	П→xA 6-	+	↑ 0E	F A 25	П→xA 6-	2 02	÷ 13	x→ПA 4-	- 11
4	x→П9 49	- 11	F X = 0 5E	03 03	П→xC 6Г	F X = 0 5E	76 76	П→xB 6Г	x→ПA 4-	x→ПC 4Г
5	П→x9 69	x→ПД 4Г	П→x5 65	x→П0 40	П→x7 67	x→П3 43	П→x8 68	x→П4 44	/-/	2 02
6	÷ 13	БП 51	35 35	F A 25	П→x6 66	+	XY 14	П→x8 68	+	÷ 13
7	x→П5 45	↑ 0E	П→x7 67	- 11	БП 51	25 25	П→x0 60	П→x5 65	÷ 13	x→П5 45
8	П→x4 64	/-/	П→x9 69	- 11	x→П9 49	2 02	÷ 13	↑ 0E	F X 22	П→x5 65
9	- 11	F- 21	+	÷ 13	F↑ 0	C/П 50	F	/-/		

В в о д:  $a_0 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{0}$ ,  $a_1 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{1}$ ,  $a_2 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{2}$ ,  $a_3 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{3}$ ,  
 $a_4 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{4}$ ,  $2(1 + |a_{max}|) = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{A} = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{B}$ . Нажать кла-  
 виши B/O и C/П.

**В ы в о д р е з у л ь т а т о в .**

1. Если на экране появится число, то это означает, что первые три корня вещественные; тогда  $X_1 = X$  (т. е. число, которое выведено на экран). Для вывода значения второго корня следует нажать клавишу XY, а для третьего – нажать клавишу

П→x Д, т. е.  $X_1 = X$ ,  $X_2 = Y$ ,  $X_3 = \boxed{\Pi \rightarrow x} \boxed{Д}$ .

2. Если после счета на экране появляется надпись ЕГГОГ, то это означает, что первые два корня комплексно-сопряженные. В этом случае следует нажать клавишу XY, на экране появится значение  $d_{12}$ , нажав клавиши XY /-/ F √, получим  $m_{12}$ . Для получения  $X_3$  необходимо нажать

клавиши  $\boxed{\Pi \rightarrow x}$   $\boxed{Д}$ , в этом случае  $\underline{X}_{12} = d_{12} \pm jm_{12}$ ,  $X_3 = \boxed{\Pi \rightarrow x}$   $\boxed{Д}$ .  
Получив первые три корня, следует выводить значения четвертого и пятого корней. Для этого следует нажать клавиши  $\boxed{БП}$   $\boxed{7}$   $\boxed{6}$   $\boxed{C/П}$ . Может оказаться, что  $X_4 = X$ ,  $X_5 = Y$  либо появится надпись ЕГГОГ, тогда следует нажать клавишу  $\boxed{XY}$  и получить  $d_{45}$ , затем, нажав клавиши  $\boxed{XY}$   $\boxed{/ - /}$   $\boxed{F}$   $\boxed{\sqrt{\phantom{x}}}$ , определить  $m_{45} \cdot \underline{X}_{45} = d_{45} + jm_{45}$ . Время счета около 13 мин.

**К о н т р о л ь н ы е п р и м е р ы**

$$X^5 + 8X^4 + 31X^3 + 80X^2 + 94X + 20 = 0,$$

где  $\underline{X}_{12} = -1 \pm j3$ ;  $X_3 = -3,7320507$ ;  $X_4 = -0,2679458$ ;  $X_5 = -2$ .

$$X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 12X^2 + 10X + 4 = 0,$$

где  $X_1 = 2$ ;  $X_2 = 1,7059517$ ;  $X_3 = -0,28705809$ ;  $\underline{X}_{45} = -0,20944685 \pm j2,010026$ .

$$X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 12X^2 + 10X - 4 = 0,$$

где  $\underline{X}_{12} = 0,5200339 \pm j0,44823818$ ;  $X_3 = 2,3975831$ ;  $\underline{X}_{45} = -0,21882545 \pm j1,8685836$ .

#### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Разберите процессы, проходящие в LC-цепи без потерь, если конденсатор предварительно был заряжен.
2. Какие колебания называются свободными? Почему свободные колебания имеют гармоническую форму?
3. Запишите выражение для определения периода и частоты свободных колебаний?

#### Вопросы 4–30 для последовательного контура

4. Объясните, почему в RLC-цепи на резонансной частоте входное сопротивление цепи чисто резистивное?
5. Что называется добротностью цепи? Выразите добротность через энергию и характеристическое сопротивление. Каков физический смысл характеристического сопротивления контура?
6. Как пересчитать  $R$  и  $C$ , соединенные параллельно, в  $R$  и  $C$ , соединенные последовательно, если  $R \gg 1/\omega C$ ?
7. Рассчитайте резонансную частоту и добротность нагруженного колебательного контура.
8. Что называется расстройкой? Какие виды расстройек Вы знаете? Напишите их выражения.
9. Получите значения обобщенной расстройки  $\xi$  для значений  $\omega = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega = \infty$ .
10. Покажите входные АЧХ и ФЧХ. Напишите их выражения, нарисуйте кривые, укажите характерные точки на этих кривых.
11. Как изменяется модуль тока в последовательном колебательном контуре при изменении частоты? Укажите характерные точки на кривой.
12. Какие передаточные характеристики в последовательном колебательном конту-



ре вы знаете? Напишите выражения и нарисуйте соответствующие кривые. Каков коэффициент передачи при резонансе?

13. Как определить напряжения на  $R, L, C, RL$ : а) при резонансе; б) при расстройке?

14. Что называется абсолютной и относительной полосами пропускания контура? Как связана относительная полоса пропускания с добротностью контура?

15. Как определить граничные частоты в последовательном контуре?

16. На некоторой частоте  $X = X_L - X_C = 2R$ . Определите  $Z_{вх}, I_{вх}, \varphi_{Z_{вх}}$ .

17. Каким должно быть отношение  $\Delta f/P$ , при котором  $I = 0,5I_0$ , где  $\Delta f$  – абсолютная расстройка;  $P$  – полоса пропускания;  $I_0$  – ток при резонансе?

18. Определите  $I/I_0$  при  $\Delta f = 1,5P$ .

19. Напишите выражение для мгновенных токов  $i$  и мгновенных напряжений на конденсаторе, если частота генератора равна: а) резонансной  $f_0$ ; б) нижней граничной частоте контура  $f_1$ ; в) верхней граничной частоте контура  $f_2$ .

20. Изменится ли, и если изменится, то во сколько раз, абсолютная полоса пропускания контура  $P$  при уменьшении в 2 раза: а) индуктивности  $L$ ; б) емкости  $C$ ; в) сопротивления  $R$ ?

21. В цепи рис. 8.2, а контур был настроен в резонанс. На какое значение  $\Delta C$  следует изменить емкость  $C$ , чтобы контур был настроен не на резонансную, а на граничную частоту?

22. Выберите  $R, L, C$  так, чтобы обеспечить  $f_0 = 5$  кГц при  $Q = 50$ .

23. Определите коэффициент перекрытия контура (т. е.  $f_{0max}/f_{0min}$ , если  $L = 253$  мкГн, а емкость изменяется от  $C_1 = 25$  пФ до  $C_2 = 400$  пФ).

24. Найдите резонансную частоту контура  $f_0$ , если при изменении емкости  $C = 100$  пФ на  $\Delta C = 10$  пФ контур расстраивается на  $\Delta f = 55$  кГц.

25. Найдите  $U_C/U_{C_0}$ , если  $f = 0,95f_0$ , а  $Q = 20$ .

26. Что понимают под понятием "избирательность контура"? В каких единицах избирательность измеряется? Какова избирательность контура на граничной частоте?

27. В цепи рис. 8.2, а  $L = 100$  мкГн,  $C = 100$  пФ. Рассчитайте и постройте кривую  $B_{дБ} = f(R)$ , если контур расстроен на  $\Delta f = 150$  кГц, а сопротивление контура изменяется от 5 до 100 Ом.

28. Разберите процессы, происходящие в контуре, если ко входным зажимам приложено напряжение негармонической формы.

29. Нарисуйте и объясните ход кривых  $u_C = f(C)$  при  $U_1 = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ .

30. Каким образом по выражению знаменателя передаточной функции определить резонансную частоту и добротность контура?

### Вопросы 31–35 для электронного контура

31. Нарисуйте схему электронного аналога колебательного контура и его эквивалентную схему.

32. Докажите, что в цепи рис. 8.18 резонансная частота  $\omega_0 = 1/C \sqrt{R_2 R_3}$ , а добротность  $Q = 0,5 \sqrt{R_2 R_3}$ . Определите абсолютную  $P$  и относительную  $S_0$  полосы пропускания?

33. Каковы достоинства активного контура по сравнению с пассивным?

34. Какие элементы электронного контура следует регулировать, чтобы при изменении резонансной частоты добротность контура оставалась неизменной?

35. Рассчитайте  $R_2, R_3, C$ , если  $R_1 = 100$  кОм,  $f_0 = 5$  кГц,  $Q = 10$ ,  $H_0 = 0,1$ .

### Вопросы 36–51 по схеме рис. 8.19, а

36. Нарисуйте схему и векторную диаграмму параллельного колебательного контура. Определите резонансную частоту  $\omega_p$ . В каких случаях  $\omega_p \approx \omega_0$ ?

37. Каково условие получения резонанса в параллельном колебательном контуре?

38. Получите выражения и нарисуйте кривые входных характеристик параллельного контура, сравните с входными характеристиками последовательного колебательного контура.

39. Докажите, что реактивная составляющая входного сопротивления параллельного колебательного контура имеет максимальное значение на граничной частоте и равно по модулю резистивной составляющей входного сопротивления.

40. Рассчитайте входное сопротивление параллельного контура без потерь при расстройке.

41. Рассчитайте токи в ветвях параллельного контура: а) при резонансе; б) при расстройке.

42. Выразите ток  $I_0$  через токи в ветвях  $I_{10}$  и  $I_{20}$ , если  $f = f_0$ .

43. На какой частоте: а)  $\varphi_{Z_{вх}} = +45^\circ$ ; б)  $\varphi_{Z_{вх}} = -45^\circ$ ?

44. На какой частоте  $I = \sqrt{1,64} \cdot I_0$ , если  $Q = 20$ ?

45. Выразите  $I_2$  через  $I$  при  $f = f_0 + \Pi$ .

46. Рассчитайте: а)  $R_{эк}$ ; б)  $X_{эк}$ , если  $f = f_0 \pm f_0/2Q$ .

47. Рассчитайте: а)  $I/I_0$ ; б)  $I_2/I_{20}$ , если  $R_{эк} = |X_{эк}|$ .

48. Что изменится, если емкость  $C$  увеличить в 2 раза?

49. Рассчитайте добротность  $Q$ , если при  $\Delta f = f_0/40$   $Z_{эк} = Z_{э0}/1,08$ ?

50. Как следует изменить сопротивление  $R$ , чтобы относительная полоса резонансной кривой: а) уменьшилась в 2 раза; б) увеличилась в 2 раза?

51. Как изменится абсолютная полоса пропускания резонансной кривой, если емкость контура  $C$ : а) увеличить в 3 раза; б) уменьшить в 3 раза?

52. Покажите и проанализируйте схему параллельного контура, обладающую избирательностью по напряжению. Почему в общем случае  $Q_{ц}$  цепи меньше  $Q$  собственно контура? Как рассчитать  $Q_{ц}$  и коэффициент передачи: а) при резонансе; б) при расстройке?

#### Вопросы 53–57 по схеме рис. 8.27

53. Что изменится, если сопротивление  $R_i$ : а) увеличивать до  $\infty$ ; б) уменьшать до 0?

54. Рассчитайте модуль коэффициента передачи при  $f = f_0$  если  $R_i = 9 Z_{вх0}$ .

55. При резонансе  $U_{20} = 3,36$  В, а при расстройке  $U_2 = 0,04$  В. Выразите избирательность, даваемую контуром на данной частоте, в децибелах.

56. Во сколько раз изменится  $Q_{ц}$ , если  $R_i$  изменить от  $R_i = Z_{вх0}$  до  $R_i = 2 Z_{вх0}$ ?

57. Что изменится, если сопротивление  $R$ : а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 2 раза?

58. Для каких целей применяют контуры с автотрансформаторным (неполным) включением? Что называется коэффициентом включения контура?

59. Оцените границы применения катушек индуктивностей и конденсаторов в реальной аппаратуре. Покажите их эквивалентные схемы.

60. Что называется гиратором? Как подсчитать эквивалентную индуктивность, даваемую гиратором? Каковы достоинства "электронных индуктивностей" по сравнению с пассивными катушками индуктивностей?

61. Какие цепи называются реактивными двухполюсниками? Как определить в них нулевые и полюсные частоты?

62. Каковы правила построения АЧХ и ФЧХ реактивных двухполюсников? Приведите примеры.

63. Объясните правило построения стандартной формы записи входных сопротивлений реактивных двухполюсников.

## 9.1. ПОНЯТИЕ О ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

Если имеются две катушки, расположенные таким образом, что магнитный поток первой пересекает витки второй, а поток второй, соответственно, пересекает витки первой, то между этими катушками имеется взаимная индуктивность. *Наличие ЭДС, наводимой потоком своей катушки, свидетельствует об индуктивности, а наличие ЭДС, наводимой потоком другой катушки, – взаимоиндуктивности.* Взаимную индуктивность обозначают буквой  $M$ . Взаимная индуктивность измеряется в генри (Гн) или долях генри. Индуктивность, как известно, есть коэффициент пропорциональности между магнитным потоком и током, протекающим по этой же катушке. Аналогично *взаимная индуктивность – есть коэффициент пропорциональности между током, протекающим по одной катушке, и магнитным потоком, сцепленным с витками другой.* Мгновенное напряжение на зажимах второй катушки  $u_2$  связано с мгновенным током в первой катушке  $i_1$  соотношением (рис. 9.1)

$$u_2 = M di_1/dt. \quad (9.1)$$

Данная формула показывает, что при изменении тока в первой катушке, на зажимах второй появляется напряжение  $u_2$ . Направление магнитных потоков зависят от направления намотки катушки, поэтому на схемах следует указывать разметку начала и концов обмотки. Для этого используют буквы "Н" и "К", знаки: звездочка (\*), точка (•), треугольник ( $\Delta$ ) и другие. Если токи в обеих обмотках направлены относительно помеченных зажимов одноименно, то такое включение катушки называют *согласным*, при этом магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции складываются, коэффициент взаимной индукции  $M$  является величиной положительной. Если катушки включены так, что потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены навстречу друг другу, то такое включение называется *встречным*, коэффициент взаимной индуктивности при этом является величиной отрицательной.

9.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ЦЕПЬ  
С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Пусть имеется цепь, изображенная на рис. 9.2. Составим уравнения для мгновенных значений по второму закону Кирхгофа:

$$u = u_{R_1} + u_{L_1} + u_{M(2-1)} + u_{M(1-2)} + u_{L_2} + u_{R_2}, \quad (9.2)$$

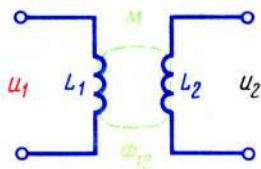


Рис. 9.1

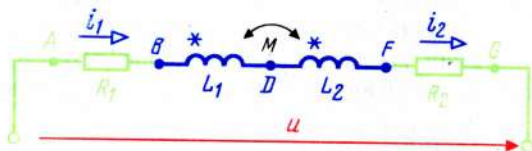


Рис. 9.2



где  $u$  — мгновенное напряжение, приложенное к цепи;  $u_1$  и  $u_2$  — мгновенные падения напряжения на сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$  соответственно;  $u_{L_1}$  — мгновенное падение напряжения, уравнивающее ЭДС, наводимую в катушке  $L_1$  магнитным потоком этой же катушки;  $u_{M_{21}}$  — мгновенное падение напряжения, уравнивающее ЭДС, наводимую в первой катушке магнитным потоком второй катушки;  $u_{M_{12}}$  — мгновенное падение напряжения, уравнивающее ЭДС, наводимую во второй катушке магнитным потоком первой катушки;  $u_{L_2}$  — мгновенное падение напряжения, уравнивающее ЭДС, наводимую во второй катушке потоком этой же катушки. Мгновенные токи  $i_1$  и  $i_2$ , текут в первой и второй катушках соответственно, причем в данной цепи  $i_1 = i_2 = i$ . Однако при составлении уравнений гораздо нагляднее различать токи, текущие по одной и другой катушкам,  $L_1$  и  $L_2$ , а затем каждый из них заменить током  $i$ .

Выразим (9.2) через мгновенные токи  $i_1$  и  $i_2$ :

$$\begin{aligned} u &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{21} \frac{di_2}{dt} \pm M_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = \\ &= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 \pm M_{21} \pm M_{12}) \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

По принципу взаимности (подробнее см. гл. 3)  $M_{21} = M_{12} = M$ , поэтому (9.3) приобретает вид

$$u = (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt},$$

откуда

$$L_{\text{эк. посл}} = L_1 + L_2 \pm 2M. \quad (9.4)$$

Знаки "+" и "-" — перед множителем  $M$  определяются включением катушек. Например, на рис. 9.2 катушки включены согласно, поскольку ток как в первой, так и во второй катушках протекает одноименно — от начала катушки, помеченного знаком "\*", к ее концу. Но если начало катушки  $L_2$  было бы не в точке  $D$ , а в точке  $F$  (или у первой катушки не в точке  $B$ , а в точке  $D$ ), то включение оказалось бы встречным, поскольку при таком включении ток в одной катушке протекает от начала к ее концу, а в другой наоборот. В последнем случае взаимная индуктивность становится величиной отрицательной, так как магнитный поток, наводимый в первой катушке током второй катушки, направлен против потока, вызванного током первой катушки. Аналогичные явления происходят и во второй катушке. При согласном включении катушек общий поток увеличивается, что свидетельствует об увеличении эквивалентной индуктивности, а при встречном включении уменьшается. Множитель перед производной  $di/dt$  в (9.4) есть эквивалентная индуктивность  $L_{\text{эк}}$ . При включении

$$\left. \begin{aligned} \text{согласном } L_{\text{эк.с}} &= L_1 + L_2 + 2M, \\ \text{встречном } L_{\text{эк.в}} &= L_1 + L_2 - 2M. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Если приложенное к цепи напряжение имеет гармоническую форму, то (9.4) можно записать в комплексном виде:

$$\dot{U} = (R_1 + R_2) \dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M) \dot{I} = R_{\text{эк}} \dot{I} + j\omega L_{\text{эк}} \dot{I} = \dot{I}(R_{\text{эк}} + j\omega L_{\text{эк}}) = \dot{I}(R_{\text{эк}} + jX_{\text{эк}}), \quad (9.6)$$

откуда

$$\dot{I} = \dot{U} / (R_{\text{эк}} + j\omega L_{\text{эк}}) = \dot{U} / Z_{\text{эк}}. \quad (9.7)$$

Введем понятие: коэффициент связи между катушками  $K$ . В § 9.9 будет строго доказано, что в цепях со взаимной индуктивностью коэффициент связи определяется из выражения  $K = M / \sqrt{L_1 L_2}$ . При магнитной связи коэффициент связи показывает, какая часть магнитного потока одной катушки сцеплена с витками другой катушки. *Полной* называется связь, при которой весь магнитный поток одной катушки сцеплен с витками второй катушки. При этом  $K = 1$ . Если поток одной катушки не пересекает витки другой, то  $K = 0$  и система из связанной превращается в несвязанную. *Потоком рассеяния* называют величину  $\sigma = 1 - K^2$ . При полной связи  $\sigma = 0$ , при нулевой  $\sigma = 1$ .

### 9.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ $M$ И $K$

Так как  $L_c = L_1 + L_2 + 2M$ , а  $L_b = L_1 + L_2 - 2M$ , то, вычитая из первого выражения второе, получим  $L_c - L_b = 4M$ , откуда

$$M = (L_c - L_b) / 4. \quad (9.8)$$

Зная  $M$ ,  $L_1$  и  $L_2$ , легко рассчитать коэффициент связи из выражения  $K = M / \sqrt{L_1 L_2}$ . Таким образом, задача экспериментального определения  $M$  и  $K$  сводится к определению индуктивности двух катушек при их согласном и встречном включениях, а также каждой из них в отдельности. Измерять индуктивности можно различными способами, например с помощью мостов переменного тока, методом трех вольтметров, резонансным методом и т. д. Разберем подробнее способ измерения индуктивностей резонансным методом. Для этого необходимо иметь генератор синусоидальных сигналов, конденсатор с известной емкостью, вольтметр или осциллограф. Индуктивность измеряют по схеме рис. 9.3. Частоту генератора  $\Gamma$  изменяют до тех пор, пока осциллограф или вольтметр покажут наибольшее напряжение на конденсаторе, что является признаком резонанса в цепи. Зная частоту генератора  $f_0$  и емкость  $C$ , можно рассчитать индуктивность цепи. Так как  $f_0 = 1 / 2\pi \sqrt{LC}$ , то

$$L = 1 / 40 f_0^2 C. \quad (9.9)$$

Если разметка выводов катушек неизвестна, то сначала соединяют катушки произвольно, измеряют получившуюся индуктивность, затем меняют выводы у одной из катушек и повторяют измерение. Очевидно, что соединение, при котором индуктивность оказывается большей, является согласным, а при котором меньшей — встречным. Аналогичным образом измеряют каждую катушку в отдельности и рассчитывают параметры  $M$  и  $K$ .

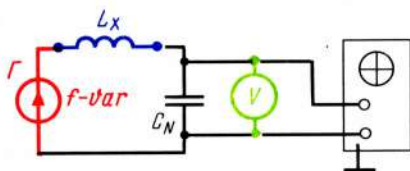


Рис. 9.3

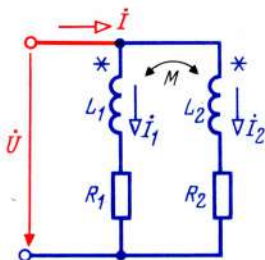


Рис. 9.4

**Пример 9.1.** В цепи рис. 9.3 при измерении индуктивностей  $L_1$ ,  $L_2$  и одним из соединений обеих катушек, резонансные частоты оказались одинаковыми и равными 4 кГц, при другом соединении – 2,31 кГц. Определить  $M$  и  $K$ , если емкость  $C = 30$  нФ.

**Решение.** Поскольку при меньшей резонансной частоте индуктивность будет большей,  $L_c = 1/40 \cdot (2,31 \cdot 10^3)^2 \cdot 30 \cdot 10^{-9} = 156$  мГн,  $L_B = 1/40 (4 \cdot 10^3)^2 \cdot 30 \times 10^{-9} = 52$  мГн. Рассчитаем  $M$ :  $M = (L_c - L_B)/4 = (156 - 52)/4 = 26$  мГн. Определим  $K$ :  $K = M/\sqrt{L_1 L_2} = 26/\sqrt{52 \cdot 52} = 0,5 = 50\%$ .

#### 9.4. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ КАТУШЕК С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Определим токи во всех ветвях, входное сопротивление и эквивалентную индуктивность цепи, показанной на рис. 9.4. Данная цепь представляет цепь с зависимыми источниками. Действительно, в катушке  $L_1$  наводится напряжение от тока  $I_2$  через сопротивление взаимной индуктивности, а в катушке  $L_2$  аналогичным образом – от тока  $I_1$ . Если, например, ток  $I_2$  мал, то напряжение, наводимое им в катушке  $L_1$ , также мало, т. е. в каждой ветви, по существу, присутствуют зависимые источники класса ИНУТ. Но в цепях с зависимыми источниками нельзя записывать выражение входного сопротивления непосредственно по виду схемы цепи. До тех пор, пока взаимная индуктивность между катушками отсутствует, напряжения зависимых источников равны нулю, в этом случае входное сопротивление цепи определяют, как при двух параллельных ветвях, т. е.

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2), \quad (9.10)$$

где  $\underline{Z}_1$  – комплексное сопротивление первой ветви, а  $\underline{Z}_2$  – соответственно второй, что вытекает непосредственно из конфигурации цепи. При наличии взаимной индуктивности  $\underline{Z}_{вх}$  является отличным от сопротивления, указанного в выражении (9.10). Эта же закономерность выполнялась и в последовательной цепи с взаимной индуктивностью. Действительно, в цепи рис. 9.2 при  $M = 0$

$$\underline{Z}_{вх}(M=0) = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2),$$

а при  $M \neq 0$ , т. е. при наличии зависимых источников,

$$\underline{Z}_{вх} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M).$$

Таким образом, в любой цепи  $\underline{Z}_{вх}(M=0) \neq \underline{Z}_{вх}(M \neq 0)$ . В цепях с зависимыми



ми источниками для определения входного сопротивления цепи необходимо проделать следующее:

1. Задаться произвольным напряжением на входе цепи  $\dot{U}_{вх}$ .
2. Любым методом рассчитать ток во входной ветви  $\dot{I}_{вх}$ .
3. Определить  $\underline{Z}_{вх}$  из отношения  $\dot{U}_{вх}/\dot{I}_{вх}$ .

Если цепь линейная, то входное напряжение сократится, получившееся выражение определится только схемой цепи и параметрами входящих в нее элементов. Проведем данные операции. Обозначим комплексные сопротивления первой ветви  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ , сопротивление второй ветви  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$  и сопротивление связи  $\underline{Z}_M = j\omega M$ . Обратим внимание на терминологию: не говорят "сопротивление взаимной индуктивности", а говорят "сопротивление связи".

Поскольку в цепи рис. 9.4 три ветви, следует составить три уравнения: одно по первому и два по второму законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{U} &= (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \underline{Z}_1\dot{I}_1 + \underline{Z}_M\dot{I}_2 \quad \left| \quad \underline{Z}_2; \right. \\ \dot{U} &= (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 = \underline{Z}_M\dot{I}_1 + \underline{Z}_2\dot{I}_2 \quad \left| \quad -\underline{Z}_M. \right. \end{aligned}$$

Умножим первую строку на  $\underline{Z}_2$ , вторую на  $-\underline{Z}_M$  и сложим оба уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{U}\underline{Z}_2 &= \underline{Z}_1\underline{Z}_2\dot{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{Z}_M\dot{I}_2; \\ -\dot{U}\underline{Z}_M &= -\underline{Z}_M^2\dot{I}_1 - \underline{Z}_2\underline{Z}_M\dot{I}_2 \end{aligned}$$

или

$$\dot{U}(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) = \dot{I}_1(\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2),$$

откуда

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \text{аналогично} \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

Сложив токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ , получим

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

Определим  $\underline{Z}_{вх}$ :

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{(\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M)}. \quad (9.11)$$

Если катушки включены встречно, то  $\underline{Z}_M = -j\omega M$ . Знак у  $\underline{Z}_M^2$  в числителе при этом остается без изменения, поскольку  $\underline{Z}_M$  находится во второй степени, а знак у слагаемого  $2\underline{Z}_M$  в знаменателе меняется на обратный. Таким образом, комплексное входное сопротивление цепи рис. 9.4

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}, \quad (9.12)$$

причем знак минус в знаменателе относится к согласному включению, а знак плюс — к встречному. Такое расположение знаков вполне соответствует физике явлений: при согласном включении общая индуктивность возрастает, что и получается при знаке минус в знаменателе, а при встречном — уменьшается, что соответствует увеличению знаменателя. Определим эквивалентную индуктивность катушек со взаимной индуктивностью в параллельной цепи. Для этого положим  $R_1 = R_2 = 0$  и подсчитаем входное сопротивление:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{j\omega L_1 \cdot j\omega L_2 - j\omega M \cdot j\omega M}{j\omega L_1 + j\omega L_2 \mp j2\omega M} = j\omega \left[ \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \right].$$

Следовательно,

$$L_{\text{эк.пар}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}. \quad (9.13)$$

### 9.5. ВОЗДУШНЫЙ ТРАНСФОРМАТОР

Устройство, состоящее из двух или нескольких индуктивно связанных катушек, называется *трансформатором*. Трансформаторы могут иметь или не иметь ферромагнитный сердечник. Если сердечник отсутствует, то такой трансформатор называют воздушным. Обмотка трансформатора, к которой подключают источник питания, называется первичной, а обмотка, к которой подключают нагрузку — вторичной. Будем рассматривать двухобмоточные воздушные трансформаторы (рис. 9.5). Рассчитать токи в контурах можно тремя основными способами: по законам Кирхгофа, с помощью вносимых сопротивлений и использованием схем замещения. Рассмотрим каждый метод в отдельности. Во всех случаях будем считать входное напряжение гармоническим и, следовательно, производить все расчеты в комплексной форме. Поскольку узлов в цепи, показанной на рис. 9.5, нет, а контуров два, то для расчета токов, следует составить два уравнения по второму закону Кирхгофа:

для первичного контура

$$\dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 - \underline{Z}_M \dot{I}_2, \quad (9.14)$$

для вторичного контура

$$0 = (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = -\underline{Z}_M \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2, \quad (9.15)$$

где  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ ,  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ ,  $\underline{Z}_M = j\omega M$ .

Получилась система двух уравнений с двумя неизвестными, которые можно рассчитать относительно токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ . Следует отметить, что данный метод является достаточно громоздким и на практике используется сравни-

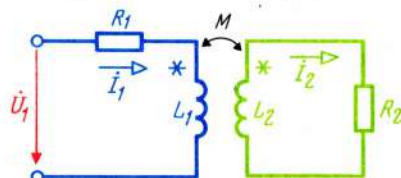


Рис. 9.5

тельно редко. Основным методом расчета токов в индуктивно связанных системах является метод замены двухконтурной системы эквивалентной одноконтурной через вносимые сопротивления.

Сущность этого метода состоит в том, что исходную двухконтурную схему заменяют эквивалентной одноконтурной, в которой все элементы первичного контура остаются без изменений, а вместо элементов вторичного контура включают в первичный контур два сопротивления — одно резистивное, называемое вносимым резистивным  $R_{\text{вн}}$ , и одно реактивное, называемое вносимым реактивным  $X_{\text{вн}}$ . Вносимые сопротивления обладают тем свойством, что в них рассеиваются такие же, активная и реактивная, мощности, которые рассеиваются в элементах вторичного контура. Эквивалентная схема связанной системы представлена на рис. 9.6. Определим вносимые сопротивления  $R_{\text{вн}}$  и  $X_{\text{вн}}$ , для этого запишем уравнения (9.14) – (9.15) и определим из них ток  $\dot{I}_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_1 \dot{I}_1 - \underline{Z}_M \dot{I}_2 & \left| \begin{array}{l} \underline{Z}_2; \\ 0 = -\underline{Z}_M \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 \end{array} \right. & \underline{Z}_M. \end{aligned}$$

Умножим первую строку на  $\underline{Z}_2$ , вторую строку на  $\underline{Z}_M$  и сложим полученные выражения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \dot{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{Z}_M \dot{I}_2; \\ 0 &= -\underline{Z}_M^2 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_M \dot{I}_2 \end{aligned}$$

или

$$\dot{U}_1 \underline{Z}_2 = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2) \dot{I}_1, \text{ откуда } \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

Поделив числитель и знаменатель на  $\underline{Z}_2$ , получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_2}. \quad (9.16)$$

Как видно из (9.16), знаменатель представляет алгебраическую сумму двух комплексных сопротивлений,  $\underline{Z}_1$  и  $-\underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_2$ . Комплексное сопротивление  $\underline{Z}_1$  есть сопротивление элементов первичного контура, а комплексное сопротивление  $-\underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_2$  представляет собой вносимое сопротивление, состоящее из резистивного сопротивления  $R_{\text{вн}}$  и реактивного  $X_{\text{вн}}$ . Определим  $R_{\text{вн}}$  и  $X_{\text{вн}}$ ; для этого представим член  $\underline{Z}_{\text{вн}}$  в алгебраической форме:

$$\underline{Z}_{\text{вн}} = -\underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_2 = -(j\omega M)^2 / (R_2 + jX_2).$$

Умножим числитель и знаменатель на комплексное выражение, сопряженное с комплексным выражением знаменателя:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вн}} &= -\frac{(-\omega^2 M^2) (R_2 - jX_2)}{(R_2 + jX_2) (R_2 - jX_2)} = \frac{\omega^2 M^2 (R_2 - jX_2)}{R_2^2 + X_2^2} = \frac{\omega^2 M^2}{(R_2^2 + X_2^2)} \times \\ &\times R_2 - j \frac{\omega^2 M^2}{(R_2^2 + X_2^2)} X_2 = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2 - j \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} X_2 = R_{\text{вн}} + jX_{\text{вн}}, \end{aligned}$$



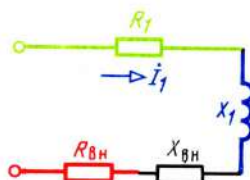


Рис. 9.6

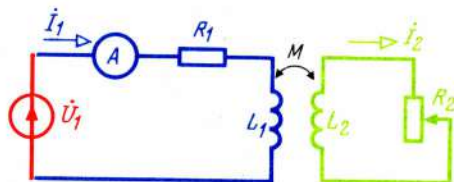


Рис. 9.7

откуда

$$R_{\text{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2^2} R_2, \quad X_{\text{вн}} = -\frac{(\omega M)^2}{Z_2^2} X_2. \quad (9.17)$$

Таким образом, *вносимое резистивное сопротивление*  $R_{\text{вн}}$  есть отношение квадрата сопротивления связи к квадрату модуля сопротивлений элементов вторичного контура, умноженное на резистивное сопротивление вторичного контура. Аналогично *вносимое реактивное сопротивление*  $X_{\text{вн}}$  есть отношение квадрата сопротивления связи к квадрату модуля сопротивлений элементов вторичного контура, умноженное на реактивное сопротивление вторичного контура, взятое с обратным знаком. Зная сопротивления  $R_1$ ,  $X_1$ ,  $R_{\text{вн}}$ ,  $X_{\text{вн}}$  и напряжение на входе  $U_1$ , можно рассчитать ток  $I_1$  в эквивалентной схеме:

$$I_1 = \frac{\dot{U}_1}{(R_1 + R_{\text{вн}}) + j(X_1 + X_{\text{вн}})}. \quad (9.18)$$

По току  $I_1$ , сопротивлениям  $Z_M$  и  $Z_2$  можно с помощью выражения (9.15) рассчитать ток  $I_2$ :

$$I_2 = I_1 Z_M / Z_2. \quad (9.19)$$

Определим физический смысл вносимых сопротивлений  $R_{\text{вн}}$  и  $X_{\text{вн}}$ . *Резистивное сопротивление*  $R_{\text{вн}}$  есть такое сопротивление, в котором при токе  $I_1$  рассеивается такая же мощность, которая рассеивается в резистивных сопротивлениях, включенных во вторичный контур, при токе  $I_2$ . Следовательно, справедливым является равенство  $R_{\text{вн}} I_1^2 = R_2 I_2^2$ , откуда  $R_{\text{вн}} = R_2 (I_2 / I_1)^2$ . С помощью схемы рис. 9.7 выявим физический смысл вносимого реактивного сопротивления  $X_{\text{вн}}$ . Пусть сначала сопротивление  $R_2$  будет разомкнутым. Тогда ток вторичного контура  $I_2$ , а следовательно, и магнитный поток, создаваемый вторичным током, будут равны 0 и магнитный поток всего трансформатора станет определяться магнитным потоком первичной обмотки. Индуктивность первичной обмотки, а значит и индуктивное сопротивление пропорциональны магнитному потоку. Ток в первичном контуре  $I_1$  обратно пропорционален сопротивлению первичного контура цепи.

Замкнем теперь вторичную обмотку на большое сопротивление  $R_2$ . По вторичному контуру станет протекать ток  $I_2$ , который образует магнитный поток  $\Phi_2$ , направленный по закону Ленца, против того основного потока, ко-

торый данный поток вызвал, т. е. против потока  $\Phi_1$ . По вторичному контуру потечет ток  $I_2$ , который станет выделять в сопротивлении  $R_2$  мощность, но при этом магнитный поток индуктивности первичного контура уменьшится, поскольку поток  $\Phi_2$  направлен против потока  $\Phi_1$ . Уменьшение магнитного потока равносильно уменьшению индуктивности  $L_1$ , а значит и индуктивного сопротивления  $X_1 = \omega L_1$ . При уменьшении входного сопротивления входной ток возрастает, мощность, потребляемая от источника, возрастает на значение той мощности, которая потребляется в сопротивлении  $R_2$ . Если последнее уменьшить, то ток  $I_2$  и магнитный поток  $\Phi_2$  возрастут, размагничивающее действие вторичного контура усилится, общий поток системы, равный  $\Phi_1 - \Phi_2$ , снизится, входное индуктивное сопротивление также уменьшится, ток в первичном контуре возрастет. Таким образом, вторичный контур вызывает уменьшение индуктивного сопротивления первичного контура. *Реактивное вносимое сопротивление представляет тот элемент, который учитывает размагничивающее действие вторичного контура на первичный.* Именно поэтому вносимое сопротивление имеет знак минус. Выявим характер вносимого реактивного сопротивления, для большей ясности рассуждений положим  $R_2 = 0$ , тогда

$$X_{\text{вн}} = -(\omega^2 M^2 / \omega^2 L_2^2) \omega L_2 = -\omega(M^2 / L_2). \quad (9.19)$$

График зависимости вносимого реактивного сопротивления  $X_{\text{вн}}$  от частоты показан на рис. 9.8. Для сравнения нанесем кривые индуктивного  $\omega L$  и емкостного  $1/\omega C$  сопротивлений в функции частоты, из которых видно, что характеристика  $X_{\text{вн}} = f(\omega)$  представляет зеркальное отображение характеристики  $X_L = f(\omega)$  и поэтому реактивный вносимый элемент представляет отрицательную индуктивность, а не емкость, как иногда неверно считают. (Версия о том, что если вторичный контур имеет индуктивный характер, то вносимое реактивное сопротивление представляет емкостный элемент, основано только на том неверном представлении, что "элементы, уменьшающие индуктивное сопротивление, являются емкостями". Но индуктивное сопротивление уменьшают не только последовательно включенные емкости, но и отрицательные индуктивности. Чтобы элемент имел емкостный характер, его частотная характеристика должна иметь вид, показанный на рис. 9.8 зеленой кривой. Вносимые сопротивления на схемах обозначают прямоугольниками, так же резистивные или комплексные сопротивления.

**Пример 9.2.** Рассчитать токи  $I_1$  и  $I_2$  в цепи рис. 9.9, а. Исходные данные указаны на схеме.

**Решение.** Заменим двухконтурную индуктивно-связанную цепь эквивалентной одноконтурной (рис. 9.9, б). Рассчитаем  $R_{\text{вн}}$  и  $X_{\text{вн}}$ :

$$R_{\text{вн}} = \frac{X_M^2 (R_2 + R)}{(R_2 + R)^2 + (X_2 - X_C)^2} = \frac{(20)^2 (15 + 5)}{(15 + 5)^2 + (70 - 10)^2} = \frac{400 \cdot 20}{400 + 3600} = 2 \text{ Ом.}$$

$$X_{\text{вн}} = -\frac{X_M^2 (X_2 - X_C)}{(R_2 + R)^2 + (X_2 - X_C)^2} = -\frac{20^2 \cdot (70 - 10)}{20^2 + 60^2} = -6 \text{ Ом.}$$

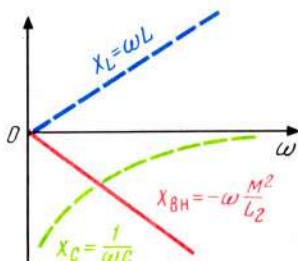


Рис. 9.8

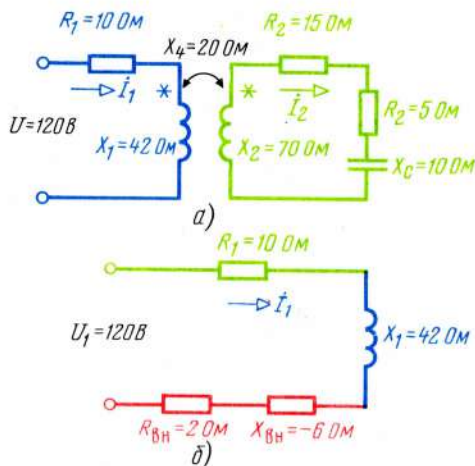


Рис. 9.9

Проанализируем полученные результаты. Резистивное сопротивление вторичного контура составляет 20 Ом, а вносимое – только 2 Ом, следовательно, ток в первичном контуре должен оказаться в  $\sqrt{20/2} = 3,16$  раз больше тока вторичного контура, поскольку только в этом случае мощности в сопротивлениях  $(R_2 + R) = 20$  Ом и  $R_{BH} = 2$  Ом будут одинаковыми. Индуктивное сопротивление первичного контура из-за наличия вторичного контура уменьшается с 42 до  $(42 - 6) = 36$  Ом. Уменьшение реактивного сопротивления контура свидетельствует об уменьшении магнитного потока, происходящего в результате размагничивающего действия вторичного контура на первичный.

Рассчитаем ток  $\dot{I}_1$ . Примем начальную фазу входного напряжения за нулевую:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{(R_1 + R_{BH}) + j(X_1 + X_{BH})} = \frac{120 e^{j0^\circ}}{(10 + 2) + j(42 - 6)} = \frac{120}{12 + j36} =$$

$$= \frac{120}{37,95 e^{j71^\circ 34'}} = 3,16 e^{-j71^\circ 34'} \text{ А.}$$

Из уравнения (9.15) определим ток  $\dot{I}_2$ :

$$0 = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 - \underline{Z}_M \dot{I}_1,$$

$$\text{откуда } \dot{I}_2 = \dot{I}_1 (\underline{Z}_M / \underline{Z}_2) = \frac{3,16 e^{-j71^\circ 34'} \cdot 20 e^{j90^\circ}}{(R_2 + R) + j(X_2 - X_C)} = \frac{3,16 \cdot 20 e^{j18^\circ 26'}}{20 + j60} =$$

$$= \frac{63,2 e^{j18^\circ 26'}}{63,2 e^{j71^\circ 35'}} = 1 \cdot e^{-j53^\circ 10'} \text{ А.}$$

Модули первичного и вторичного токов действительно оказались отличающимися в 3,16 раза, что и было установлено ранее.



## 9.6. РАСЧЕТ БАЛАНСА МОЩНОСТЕЙ В ЦЕПЯХ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Комплексная мощность, отдаваемая источником, рассчитывается по обычным формулам, т. е.  $\underline{P} = \underline{\dot{U}} \cdot \underline{\dot{I}}^*$ . Произведем числовые расчеты по данным примера 9.2:  $\underline{P}_{\text{ист}} = 120 \cdot 3,16 e^{j 71^\circ 34'} = 379,2 \cos 71^\circ 34' + j 379,2' \times \times \sin 71^\circ 34' = 120 + j 360$ , т. е. генератор отдает 120 Вт активной и 360 вар индуктивной мощностей. Рассчитаем активную мощность, потребляемую цепью:  $P = I_1^2 R_1 + I_2^2 (R_2 + R) = 3,16^2 \cdot 10 + 1^2 \cdot 20 = 10 \cdot 10 + 20 = 120$  Вт.

Реактивная мощность рассеивается в реактивных сопротивлениях первичного и вторичного контуров, а также в сопротивлении связи. Реактивные мощности в катушках и конденсаторах рассчитывают обычным способом, реактивная мощность в сопротивлении связи

$$P_{Q_{\text{св}}} = \pm 2 I_1 I_2 \cos(\hat{I}_1 \hat{I}_2) X_{\text{св}}, \quad (9.20)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — модули токов в первичном и вторичном контурах соответственно;  $\cos(\hat{I}_1 \hat{I}_2)$  — косинус угла между векторами токов  $\hat{I}_1$  и  $\hat{I}_2$ ;  $X_{\text{св}}$  — модуль сопротивления связи. Знак плюс ставится при согласном включении, а минус — при встречном.

Реактивная мощность данной цепи

$$P_Q = I_1^2 X_1 + I_2^2 (X_2 - X_C) - 2 I_1 I_2 \cos(\hat{I}_1 \hat{I}_2) X_M.$$

Покажем векторную диаграмму напряжения и токов (рис. 9.10). Как видно из диаграммы, угол между векторами токов  $\hat{I}_1$  и  $\hat{I}_2$  составляет  $71^\circ 34' - 53^\circ 10' = 18^\circ 24'$ . (Так как косинус — функция четная, то знаки значения не имеют.) Произведем числовые расчеты:  $P_Q = 3,16^2 \cdot 42 + 1^2 (70 - - 10) - 2 \cdot 3,16 \cdot 1 \cdot \cos 18^\circ 24' \cdot 20 = 420 + 60 - 2 \cdot 3,16 \cdot 0,949 \cdot 20 = 480 - - 120 = 360$  вар. Баланс мощностей выполняется.

**Пример 9.3.** Рассчитать резонансную частоту в цепи рис. 9.11, а при разомкнутом и замкнутом ключе, если индуктивности катушек одинаковы, равны  $L$ , а коэффициент связи между катушками  $K$ .

**Р е ш е н и е.** При разомкнутом ключе ток по вторичному контуру не протекает, магнитное поле вторичной катушки отсутствует, резонансная частота  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

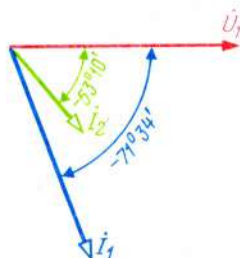


Рис. 9.10

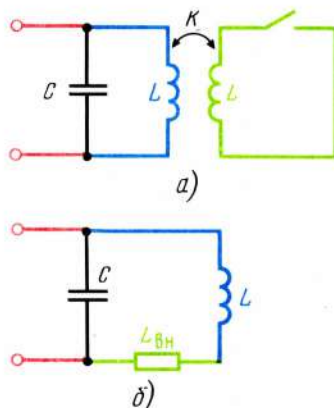


Рис. 9.11

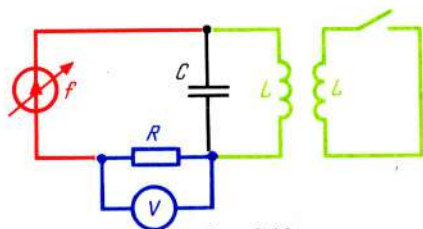


Рис. 9.12

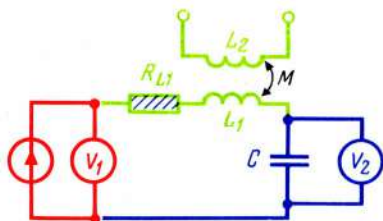


Рис. 9.13

При замкнутом ключе получается связанная система, которую можно представить эквивалентной схемой (рис. 9.11, б). Так как резистивные сопротивления во вторичном контуре равны 0, то  $R_{\text{вн}}$  также равно 0. Подсчитаем  $L_{\text{вн}}$ :  $X_{\text{вн}} = -(\omega^2 M^2 / Z_2^2) X_2$ . Поскольку  $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$ , а при одинаковых катушках  $L_1 = L_2 = L$ ,  $k = M/L$ , откуда  $M = kL$ . Как видно из схемы,  $Z_2 = \omega L$ , тогда  $X_{\text{вн}} = -(\omega^2 k^2 L^2 / \omega^2 L^2) \omega L = -\omega k^2 L$ , откуда  $\omega L_{\text{вн}} = -\omega k^2 L$  или  $L_{\text{вн}} = -k^2 L$ , резонансная частота цепи

$$\omega_0 = 1 / \sqrt{(L - L_{\text{вн}})C} = 1 / \sqrt{(L - k^2 L)C} = 1 / \sqrt{L(1 - k^2)C}. \quad (9.21)$$

На основании рассмотренного примера следует, что с помощью аналогичных экспериментов можно определять взаимную индуктивность  $M$  и коэффициент связи  $k$ . Для этого необходимо собрать схему, изображенную на рис. 9.12, и определить резонансную частоту при разомкнутом ( $f_0$ ) и замкнутом ( $f_{01}$ ) ключе. Очевидно, что  $f_{01} > f_0$ . Поскольку индуктивность  $L$  и емкость  $C$  соединены параллельно, ток во входной ветви при резонансе будет минимальным. Емкость  $C$  должна быть известной. При разомкнутом ключе  $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ , при замкнутом ключе  $f_{01} = 1/2\pi\sqrt{L(1 - k^2)C}$ , откуда  $L = 1/40 f_0^2 C$ ,

$$k = \sqrt{1 - (f_0/f_{01})^2}, \quad M = kL. \quad (9.22)$$

## 9.7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНОСИМЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Вносимые сопротивления можно определить экспериментально с помощью схемы рис. 9.13. Сначала при разомкнутой катушке  $L_2$  находят резонансную частоту  $f_0$  по максимальному напряжению на конденсаторе. Пусть  $L_1 = L_2 = L$ . В этом случае  $f_0 = 1/2\pi\sqrt{L_1 C}$ . Замкнем катушку  $L_2$  накоротко. Так как  $R_2 = 0$ , то  $R_{\text{вн}} = 0$ . Вносимое реактивное сопротивление в схеме рис. 9.13 уменьшает индуктивность первичного контура. Следовательно, при замыкании вторичной обмотки резонансная частота увеличится и станет  $f_{01} = 1/2\pi\sqrt{(L_1 - L_{\text{вн}})C}$ . Зная  $f_0, f_{01}$  и  $C$ , можно по (9.22) рассчитать вносимую отрицательную индуктивность, а следовательно, и реактивное вносимое сопротивление. Для определения вносимого резистивного сопротивления  $R_{\text{вн}}$  необходимо замкнуть вторичную обмотку на большое по значению сопротивление  $R_2$ , при этом  $X_{\text{вн}}^2$  оказывается пренебрежимо малым (из-за большого знаменателя  $Z_2^2 = R_2^2 + X_2^2$ ), а  $R_{\text{вн}}$  — конечной величиной. Входное сопротивление цепи увеличится на значение  $R_{\text{вн}}$  и станет  $(R + R_{\text{вн}})$ , а добротность  $Q$  и напряжение  $U_2$  соответственно уменьшатся

(при неизменном напряжении  $U_1$ ). Таким образом, зная отношение напряжений  $U_2/U_1$  при разомкнутом и замкнутом ключе, можно рассчитать резистивное сопротивление цепи  $R$  и вносимое резистивное сопротивление  $R_{вн}$ .

#### 9.8. Т-ОБРАЗНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ВОЗДУШНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

Воздушный трансформатор, представляющий два индуктивных контура, электрически не связанных между собой (рис. 9.14, а), можно заменить эквивалентной схемой, в которой контуры имеют не индуктивную, а электрическую связь. Эквивалентных схем может быть несколько. Наибольшее распространение получила Т-образная схема замещения (рис. 9.14, б). Такую схему формируют следующим образом. Вместо двух обмоток трансформатора показывают три индуктивности, собранные по Т-образной схеме, а все остальные элементы оставляют без изменения. Убедимся, что уравнения, составленные по законам Кирхгофа, одинаковы для обеих схем:

для схемы рис. 9.14, а

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\dot{I}_2 \omega M, \\ 0 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\dot{I}_1 \omega M; \end{cases}$$

для схемы рис. 9.14, б

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2, \\ 0 = R_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1. \end{cases}$$

Поскольку уравнения оказались одинаковыми, схемы обеих цепей эквивалентны друг другу.

#### 9.9. КОЭФФИЦИЕНТ СВЯЗИ

Два контура являются связанными, если изменение тока в одном из них вызывает изменение напряжения или тока в другом. Представим связанную двухконтурную систему в виде эквивалентной схемы рис. 9.15. В этой схеме через  $\underline{Z}_1$  обозначены элементы, входящие только в первичный контур, через  $\underline{Z}_2$  — элементы, входящие только во вторичный контур, и через  $\underline{Z}_{св}$  — элементы, являющиеся общими для обоих контуров. Сопротивление общих элементов называют сопротивлением связи. Связь между контурами может осуществляться через взаимоиндуктивность (см. рис. 9.14, а), индуктив-

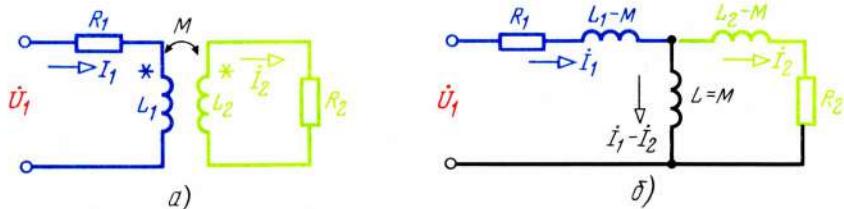


Рис. 9.14



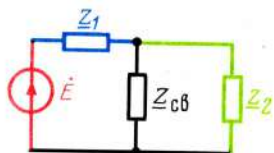


Рис. 9.15

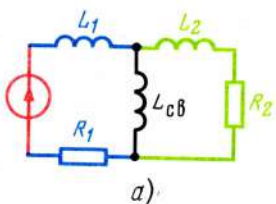
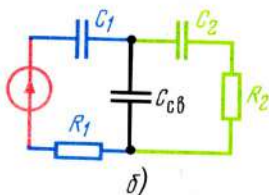


Рис. 9.16



ность (рис. 9.16, а), емкость (рис. 9.16, б) или более сложную комбинацию этих элементов. Взаимное влияние контуров друг на друга определяется коэффициентом связи  $k$ . Коэффициентом связи называется среднее геометрическое значение между величинами  $k_1$  и  $k_2$ , где  $k_1$  — коэффициент передачи из первого контура во второй для цепи, состоящей из элементов, однородных с элементом связи, и работающей в режиме холостого хода. Величина  $k_2$  — коэффициент передачи из второго контура в первый при аналогичных условиях. Таким образом, чтобы определить величину  $k_1$ , необходимо проделать следующее:

1. Исключить из схемы все элементы, неоднородные с элементом связи, и поставить получившуюся схему в режим холостого хода. Например, в схеме рис. 9.14, а для этого сопротивление  $R_1$  следует закортить, а сопротивление  $R_2$  разомкнуть. Тогда в схеме останутся только индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  — элементы, однородные со взаимной индуктивностью  $M$  (рис. 9.17, а). Аналогично схему с емкостной связью (рис. 9.16, б) следует заменить схемой рис. 9.17, б и т. д.

2. Рассчитать коэффициент передачи для получившейся схемы. Для этого следует задаться произвольным напряжением на входе  $U_1$ , любым методом рассчитать напряжение на выходе  $U_2$  и взять их отношение:  $k_1 = U_2/U_1$ .

3. Аналогичным образом определить  $k_2$ , т. е. коэффициент передачи из второго контура в первый  $k_2 = U_1/U_2$ .

4. Определить коэффициент связи связанной системы  $k$  из выражения

$$k = \sqrt{k_1 k_2}. \quad (9.23)$$

Рассчитаем коэффициент связи  $k$  в схеме рис. 9.14, а. После исключения резисторов схема приобретает вид рис. 9.17, а. Приложим к входным зажимам напряжение  $U_1$ , тогда по катушке  $L_1$  потечет ток  $\dot{I}_1 = \dot{U}_1/j\omega L_1$  и на зажимах вторичной катушки окажется напряжение  $\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \cdot jX_{св} = \dot{U}_1 \cdot j\omega M/j\omega L_1 =$

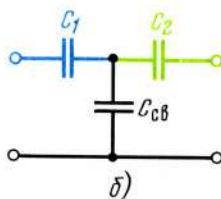
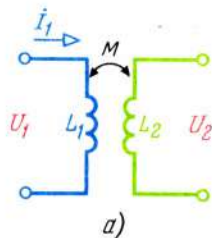


Рис. 9.17

$= U_1 M / L_1$ , откуда  $k_1 = U_2 / U_1 = U_1 M / U_1 L_1 = M / L_1$ . Аналогичным образом получаем  $k_2 = M / L_2$ . Так как  $k = \sqrt{k_1 k_2}$ , то  $k = \sqrt{M \cdot M / L_1 L_2} = M / \sqrt{L_1 L_2}$ , что было без доказательства показано ранее. Еще раз обращаем внимание, что в схеме с трансформаторной связью коэффициент связи цепи рис. 9.17, а численно совпадает с отношением той части потока одной катушки, которая сцеплена с витками другой катушки, ко всему потоку катушки. В общем случае коэффициент связи есть коэффициент передачи цепи при вполне определенных условиях. Такое определение применимо к цепям, состоящим из любых элементов.

**Пример 9.4.** Рассчитать коэффициент связи для цепи рис. 9.16, б.

**Решение.** Чтобы рассчитать коэффициент связи в цепи рис. 9.16, б, необходимо определить коэффициент передачи цепи рис. 9.17, б. Так как через конденсатор  $C_1$  ток не протекает, то падения напряжения на нем нет, следовательно, выходным является напряжение на конденсаторе  $C_{св}$ , т. е.

$$k_1 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}_1 j \omega C_{св}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1 (1/j \omega C_1 + 1/j \omega C_{св})} \cdot \frac{1}{j \omega C_{св}} = \frac{j \omega C_1 C_{св}}{j \omega C_{св} (C_1 + C_{св})} \\ = \frac{C_1}{(C_1 + C_{св})}.$$

Аналогично  $k_2 = C_2 / (C_2 + C_{св})$ , откуда

$$k = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_{св})(C_2 + C_{св})}}.$$

Если  $C_1 = C_2 = C$ , то

$$k = C / (C + C_{св}). \quad (9.24)$$

## 9.10. РЕЗОНАНСЫ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ

Пусть имеется связанная система, в которой можно изменять резонансную частоту каждого контура и значение связи между контурами (рис. 9.18, а). Нарисуем одноконтурную схему замещения данной цепи (рис. 9.18, б), поскольку характер каждого реактивного сопротивления может изменяться в зависимости от настройки, сопротивления всех элементов обозначим прямоугольниками, что вполне допустимо. При резонансе ток во входной цепи совпадает по фазе с входным напряжением, что возможно только при выполнении условия  $X_1 + X_{вн} = 0$ . При этом схема приобретает вид рис. 9.18, в. Входной ток  $I_1$  становится чисто резистивным, а

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1 + R_{вн}} = \frac{U_1}{R_1 + (\omega^2 M^2 / Z_2^2) R_2} = \frac{U_1 Z_2^2}{R_1 Z_2^2 + R_2 \omega^2 M^2}. \quad (9.25)$$

Комплексный ток во вторичном контуре  $\dot{I}_2$  определяется из выражения  $0 = \dot{I}_2 Z_2 - \dot{I}_1 Z_M$ , откуда

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 Z_M / Z_2 = U_1 Z_2^2 j \omega M / (R_1 Z_2^2 + R_2 \omega^2 M^2) (R_2 + j X_2).$$

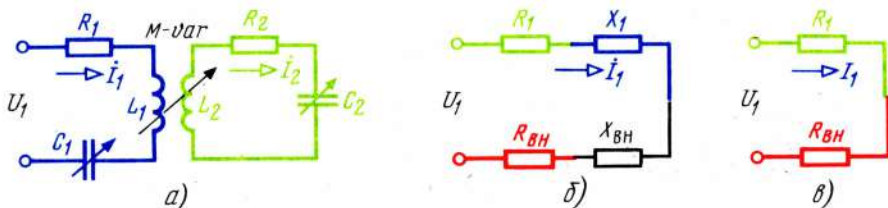


Рис. 9.18

После алгебраических преобразований получается

$$I_2 = U_1 \omega M Z_2 / (R_1 Z_2^2 + \omega^2 M^2 R_2). \quad (9.26)$$

Изменяя связь между катушками, можно найти значение  $M$ , при котором ток во вторичном контуре окажется наибольшим. Для этого выражение вторичного тока следует исследовать на экстремум, т. е. взять производную  $dI_2/dM$ , приравнять ее 0 и решить получившееся уравнение

$$\frac{dI_2}{dM} = \frac{U_1 \omega Z_2 (R_1 Z_2^2 + \omega^2 M^2 R_2) - U_1 \omega M Z_2 \cdot 2 \omega^2 M R_2}{(R_1 Z_2^2 + \omega^2 M^2 R_2)^2} = 0,$$

откуда  $U_1 \omega Z_2 (R_1 Z_2^2 + \omega^2 M^2 R_2 - 2 \omega^2 M^2 R_2) = 0$ . Так как  $U_1 \omega Z_2 \neq 0$ , то  $R_1 Z_2^2 - \omega^2 M^2 R_2 = 0$ , т. е.

$$M_{opt}^2 = R_1 Z_2^2 / \omega^2 R_2 \quad (9.27)$$

или

$$M_{opt} = \frac{Z_2}{\omega} \sqrt{R_1 / R_2}. \quad (9.28)$$

Следовательно, наибольший ток во вторичном контуре получается при

$$M_{opt} = \frac{Z_2}{\omega} \sqrt{R_1 / R_2},$$

а вовсе не при возможно бóльшей связи, как может интуитивно показаться. Из выражения (9.27) видно, что  $R_1 = (\omega^2 M_{opt}^2 / Z_2^2) R_2$ . Но получившееся значение  $R_1$  есть резистивное вносимое сопротивление  $R_{вн}$ , следовательно, ток во вторичном контуре оказывается максимальным при такой связи, при которой вносимое резистивное сопротивление  $R_{вн}$  равно резистивному сопротивлению первичного контура  $R_1$  (рис. 9.18, б). Это, разумеется, и должно было быть, поскольку нагрузкой в данном случае являются сопротивления вторичного контура, пересчитанные в сопротивление  $R_{вн}$ , а сопротивление  $R_1$ , не входящее во вносимое, является в отношении сопротивления  $R_{вн}$  внутренним. Но наибольшая мощность, а следовательно, и наибольший ток в нагрузке получается, как известно, при равенстве внешнего и внутреннего сопротивлений. Поэтому для получения наибольшего тока  $I_2$  необходимо иметь связь, при которой  $R_{вн} = R_1$ . Определим значение наибольшего вторичного тока  $I_{2m}$ . Для этого в (9.26) подставим  $M$  из выражения (9.28):



$$I_{2m} = \frac{U_1 \omega \frac{Z_2}{\omega} \sqrt{R_1/R_2}}{R_1 Z_2^2 + \omega^2 \frac{Z_2^2 R_1}{\omega^2 R_2}}.$$

После простых преобразований и сокращений получим  $I_{2m} = U_1 / (2\sqrt{R_1 R_2})$ .  
При  $R_1 = R_2 = R$

$$I_{2m} = U_1 / 2R. \quad (9.29)$$

Для достижения резонанса необходимо, чтобы  $X_{Bx} = X_1 + X_{Bn} = 0$ . Данное условие выполняется в двух случаях: либо каждый контур расстроен, но  $X_1 + X_{Bn} = 0$ , либо каждый контур настроен в резонанс, тогда  $X_1 = X_2 = X_{Bn} = X_{Bx} = 0$ . При настроенных контурах сопротивление вторичного контура  $Z_2$  превращается в  $R_2$ , взаимная индуктивность  $M_{opt} = (1/\omega) \times \sqrt{R_1 R_2}$ , а при одинаковых контурах, т. е. при  $R_1 = R_2 = R$ ,

$$M_{opt} = R/\omega. \quad (9.30)$$

Выражение (9.26) в этом случае принимает вид

$$I_2 = U_1 \omega M / (R_1 R_2 + \omega^2 M^2). \quad (9.31)$$

Если  $M$  из (9.30) подставить в (9.31) и произвести несложные преобразования, то получится такой же ток  $I_2 = U_1 / 2\sqrt{R_1 R_2}$ , что и в предыдущем случае.

Обобщим полученные результаты. Так, если максимальный ток во вторичном контуре  $I_{2m} = U_1 / 2\sqrt{R_1 R_2}$  оказывается при расстроенных контурах, т. е. при  $X_1 \neq 0$ ,  $X_2 \neq 0$ ,  $X_{Bn} \neq 0$ ,  $X_{Bx} = X_1 + X_{Bn} = 0$ ,  $R_{Bn} = R_1$ , то резонанс называют *сложным*. Для получения тока  $I_{2m}$  в этом случае требуется иметь взаимную индуктивность между контурами

$$M_{opt\text{ сл}} = \frac{Z_2}{\omega} \sqrt{R_1/R_2}.$$

Если максимальный ток во вторичном контуре  $I_{2m}$  получают при настроенных контурах, т. е. при  $X_1 = X_2 = X_{Bn} = X_{Bx} = 0$ ,  $R_{Bn} = R_1$ , то резонанс называют *полным*. При полном резонансе получается такой же максимальный ток  $I_{2m}$ , но при связи  $M_{opt\text{ п}}$ , которая в  $Z_2/R_2$  раз меньше связи при сложном резонансе. Если контуры одинаковые, то

$$M_{opt\text{ п}} = R/\omega. \quad (9.32)$$

Получить во вторичном контуре ток  $I_2$  больше, чем  $U_1 / 2\sqrt{R_1 R_2}$ , не представляется возможным ни при какой связи. Если каждый из контуров настроен в резонанс, но связь между контурами отлична от оптимальной, т. е.  $R_{Bn} \neq R_1$ , то резонанс называется *основным* или *индивидуальным*. Следовательно, полный резонанс есть частный случай основного.

#### 9.11. КРИТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ

Пусть в связанной системе, состоящей из одинаковых контуров, имеется полный резонанс. В этом случае  $M = M_{\text{п}} = R/\omega$ . Определим коэффициент связи между контурами. При одинаковых индуктивностях  $k = M/L$ . Под-

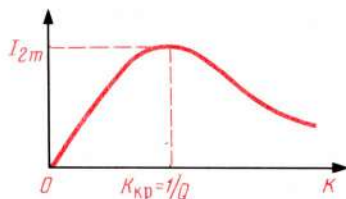


Рис. 9.19

ставив в данное выражение значение  $M$ , получим  $k_{\Pi} = M/L = R/\omega L$ . Но  $R/\omega L = 1/Q = d$ , следовательно,  $k_{\Pi} = 1/Q = d$ . Коэффициент связи при полном резонансе называется *критической связью*  $k_{кр}$ .

Критическая связь между контурами — важнейший параметр связанной колебательной системы. Таким образом, критическая — это та наименьшая связь, при которой во вторичном контуре можно получить максимальный ток (иногда в литературе этот ток называют "максимум — максиморум"). Критическая связь численно равна затуханию каждого контура, т. е. величине, обратной добротности контуров. (При различных контурах  $k_{кр} = \sqrt{d_1 d_2}$ ). Например, при  $Q = 50$   $k_{кр} = 1/Q = 1/50 = 0,02 = 2\%$ . Следовательно, наибольший ток во вторичном контуре будет в том случае, если два процента магнитных силовых линий одной катушки сцеплены с витками другой катушки. Если связь сделать больше критической, то ток во вторичном контуре не только не возрастет, но даже уменьшится и станет менее  $I_{2m} = U_1/2R$ .

Рассчитаем ток  $I_2$  при  $M = 0$  и  $M = \infty$ :

$$I_2 = \frac{U_1 \omega M}{R_1 R_2 + \omega^2 M^2} = \frac{M^2 (U_1 \cdot \omega / M)}{M^2 (R_1 R_2 / M^2 + \omega^2)} = \frac{U_1 \omega / M}{(R_1 R_2 / M^2) + \omega^2}. \quad (9.33)$$

Подставив в (9.33)  $M = 0$  и  $M = \infty$ , получим, что в обоих случаях  $I_2 = 0$ . Кривая  $I_2 = f(k)$  показана на рис. 9.19.

## 9.12. ПАРАМЕТР СВЯЗИ

Амплитудно-частотные характеристики избирательных цепей рассчитывают с помощью трех безразмерных коэффициентов, каждый из которых есть отношение некоторого реактивного сопротивления к резистивному. Два из них уже использовались при расчетах одиночных контуров. Напомним их. Первым безразмерным коэффициентом является добротность  $Q$ , представляющая отношение сопротивления одного из реактивных элементов к резистивному сопротивлению цепи:  $Q = X_{L0}/R = X_{C0}/R$ . В реальных устройствах  $Q \gg 1$ . Вторым коэффициентом является обобщенная расстройка  $\xi$ , представляющая отношение всех реактивных сопротивлений цепи к резистивному сопротивлению  $\xi = X/R = 1/R(X_L - X_C) = Q\xi$ .

В реальных устройствах значение  $\xi$  колеблется вокруг 0 в пределах нескольких единиц. Напомним, что в одиночном контуре при резонансе  $\xi = 0$ , а на граничных частотах  $\xi = \pm 1$ . Третий, также безразмерный параметр, используют только в связанных системах. Этот параметр представляет отношение реактивного сопротивления связи к резистивному сопротивлению любого из контуров (если контуры различные, то к среднему гео-

метрическому значению их резистивных сопротивлений) и называется параметром связи  $P_{\text{св}}$ . Таким образом, в общем случае  $P_{\text{св}} = X_{\text{св}}/\sqrt{R_1 R_2}$ , а при одинаковых контурах  $P_{\text{св}} = X_{\text{св}}/R$ . В цепях с трансформаторной связью  $P_{\text{св}} = \omega M/R$ . Умножим числитель и знаменатель на индуктивность  $L$ , в этом случае

$$P_{\text{св}} = (\omega M/R) \cdot (L/L) = (\omega L/R) \cdot (M/L) = Qk$$

(напомним, что  $\omega L/R$  — есть добротность контура  $Q$ , а отношение  $M/L$  — коэффициент связи  $k$ ). Но  $Q = 1/d$ , а  $d = k/k_{\text{кр}}$ , т. е.  $P_{\text{св}} = kQ = k/d = k/k_{\text{кр}}$ . Таким образом, параметр связи  $P_{\text{св}}$  можно определить с помощью любого из следующих выражений:

$$P_{\text{св}} = X_{\text{св}}/R = k/k_{\text{кр}} = kQ. \quad (9.34)$$

В несвязанной системе  $P_{\text{св}} = 0$ , при критической связи  $P_{\text{св}} = 1$ . Если, например, критическая связь  $k_{\text{кр}} = 2\%$ , а коэффициент связи в данной цепи  $k = 4,8\%$ , то  $P_{\text{св}} = k/k_{\text{кр}} = 4,8/2 = 2,4$  и т. д. Система параметров  $Q - \xi - P_{\text{св}}$  весьма удобна для оценки свойств цепи. Действительно, добротность  $Q$  характеризует качество контура, обобщенная расстройка  $\xi$  — удаление от резонансной частоты, параметр связи  $P_{\text{св}}$  — влияние одного контура на другой.

### 9.13. ВНОСИМЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ФУНКЦИИ $Q, \xi, P_{\text{св}}$

Выражения для вносимых сопротивлений  $R_{\text{вн}} = X_{\text{св}}^2 R_2/Z_2^2$  и  $X_{\text{вн}} = -X_{\text{св}}^2 X_2/Z_2^2$  характеризуют энергетические соотношения в связанных контурах и используются, в основном, при постоянной частоте. Для определения АЧХ и ФЧХ цепей эти выражения неудобны, поскольку при изменении частоты меняются реактивные сопротивления цепи, при этом расчеты становятся громоздкими и малонаглядными. Выразим  $R_{\text{вн}}$  и  $X_{\text{вн}}$  через  $Q, \xi, P_{\text{св}}$ :

$$R_{\text{вн}} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2 = \frac{X_{\text{св}}^2 R_2}{(R_2^2 + X_2^2)} = \frac{X_{\text{св}}^2 R_2}{R_2^2 (1 + X_2^2/R_2^2)} \cdot \frac{R_1}{R_1} = \frac{X_{\text{св}}^2 R_1}{R_1 R_2 (1 + \xi_2^2)}.$$

Так как  $P_{\text{св}} = X_{\text{св}}/\sqrt{R_1 R_2}$ , то  $X_{\text{св}}^2/R_1 R_2 = P_{\text{св}}^2$ . В этом случае

$$R_{\text{вн}} = P_{\text{св}}^2 R_1 / (1 + \xi_2^2). \quad (9.35)$$

Аналогично  $X_{\text{вн}} = -\omega^2 M^2 X_2/Z_2^2 = -[X_{\text{св}}^2 X_2/R_2^2 (1 + \xi_2^2)] \cdot R_1/R_1$ . Имея в виду, что  $\xi = X/R$ , откуда  $X = \xi R$ , получим

$$X_{\text{вн}} = -\xi_2 R_1 \frac{P_{\text{св}}^2}{(1 + \xi_2^2)}. \quad (9.36)$$

Таким образом, связанную двухконтурную систему можно заменить эквивалентной одноконтурной, у которой

$$R_{\text{вх}} = R_1 + R_{\text{вн}} = R_1 \left(1 + \frac{P_{\text{св}}^2}{1 + \xi_2^2}\right); \quad X_{\text{вх}} = X_1 + X_{\text{вн}} = \xi_1 R_1 \left[1 - \frac{P_{\text{св}}^2}{(1 + \xi_2^2)} \cdot \frac{\xi_2}{\xi_1}\right]. \quad (9.37)$$



#### 9.14. ВХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ

Характеристики, построенные по (9.35) – (9.37), изображены на рис. 9.20, а и б. Кривая  $R_{\text{вх}} = f(\xi)$  начинается со значения  $R_1$  и идет круче резонансной кривой (аналогично кривой  $R_{\text{вх}} = f(\xi)$  в параллельном колебательном контуре, см. рис. 8.21); характеристика  $X_1 = f(\xi)$  представляет собой прямую линию, проходящую через точку  $\xi = 0$  (поскольку  $X = \xi R$ ), кривая  $X_{\text{вн}} = f(\xi)$  аналогична кривой  $X_{\text{вх}}$  в параллельном колебательном контуре, кривая  $X_{\text{вх}} = f(\xi)$  представляет алгебраическую сумму  $X_1$  и  $X_{\text{вн}}$  (см. рис. 9.20, б). Кривая модуля входного сопротивления связанной системы  $Z_{\text{вх}} = \sqrt{R_{\text{вх}}^2 + X_{\text{вн}}^2}$  показана на рис. 9.20, в. Объясним ход этой кривой. На частотах, далеких от резонансной (при больших  $\xi$ )  $R_{\text{вх}}$  – мало, а  $X_{\text{вх}}$  – велико. По мере приближения к резонансной частоте  $X_{\text{вх}}$  убывает, а  $R_{\text{вх}}$  нарастает еще незначительно, поскольку кривая  $R_{\text{вх}} = f(\xi)$  нарастает круто вблизи резонансной частоты. При приближении к резонансной частоте  $X_{\text{вх}}$  продолжает уменьшаться, но увеличивается  $R_{\text{вх}}$ . Затем все значения симметрично повторяются. Кривая модуля входного тока имеет вид обратный кривой  $Z_{\text{вх}}$ , поскольку  $I_{\text{вх}} = U_{\text{вх}}/Z_{\text{вх}}$ . Таким образом, при сильной связи характеристика входного тока имеет вид двугорбой кривой, причем чем сильнее связь, тем резче выражены горбы, а чем слабее, тем менее. При связи в два раза меньше критической вторичный контур слабо влияет на первичный и кривая входного тока из двугорбой превращается в одnogорбую с полосой несколько большей, чем у одиночного контура. При  $P_{\text{св}} = 0$  кривая входного типа превращается в кривую  $Z_{\text{вх}}$  одиночного последовательного контура. Входную ФЧХ определяют как всякую ФЧХ в последовательной цепи, т. е. из выражения

$$\varphi_{Z_{\text{вх}}} = \arctg \frac{X_{\text{вх}}}{R_{\text{вх}}}.$$

Для уменьшения громоздкости вычислений положим контуры одинаковыми. В этом случае, как видно из (9.37),

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_{\text{вх}}} &= \arctg \left[ \frac{\xi R_1 [1 - P_{\text{св}}^2 / (1 + \xi^2)]}{R_1 [1 + P_{\text{св}}^2 / (1 + \xi^2)]} \right] = \arctg \left[ \frac{\xi (1 + \xi^2 - P_{\text{св}}^2)}{(1 + \xi^2 + P_{\text{св}}^2)} \right] = \\ &= \arctg \left[ \frac{\xi (1/\xi^2 + 1 - P_{\text{св}}^2/\xi^2)}{(1/\xi^2 + 1 + P_{\text{св}}^2/\xi^2)} \right]. \end{aligned} \quad (9.38)$$

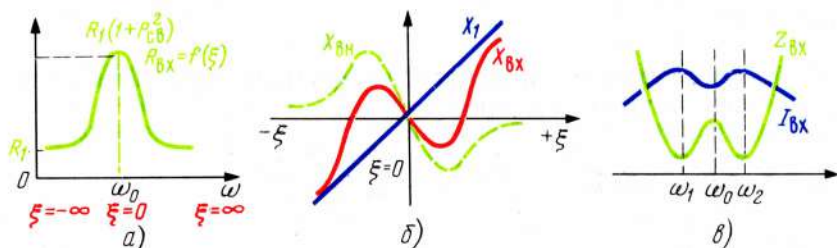
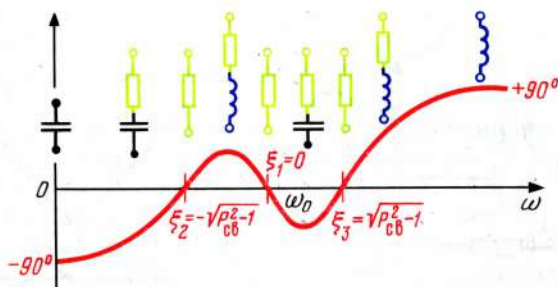


Рис. 9.20

Рис. 9.21



Проанализируем полученное выражение. При  $\omega = 0$   $\xi = -\infty$ ,  $\varphi_{Z_{BX}} = -\arctg \infty = -90^\circ$ . При  $\omega = \infty$   $\xi = \infty$   $\varphi_{Z_{BX}} = \arctg \infty = 90^\circ$ . Определим значения  $\xi$ , при которых  $\varphi_{Z_{BX}} = 0$ . Входной угол равен 0, если аргумент арктангенса равен 0, что имеет место при  $\xi_1 = 0$  и при  $1 + \xi^2 - P_{CB}^2 = 0$ , т. е. на резонансной частоте и при расстройках  $\xi_{23} = \pm \sqrt{P_{CB}^2 - 1}$ . Таким образом, при сильной связи входная ФЧХ начинается с  $-90^\circ$ , проходит через нулевые значения при  $\xi = -\sqrt{P_{CB}^2 - 1}$ , на резонансной частоте, и при  $\xi = \sqrt{P_{CB}^2 - 1}$ , а затем стремится к  $+90^\circ$  (рис. 9.21). Если связь между контурами меньше критической, то  $P_{CB} < 1$ , в этом случае значения  $\xi_2$  и  $\xi_3$  становятся мнимыми, т. е. физически несуществующими. Следовательно, при связи меньше критической кривая ФЧХ пересекает горизонтальную ось только в одной точке, при  $\xi = 0$ , и по мере уменьшения связи все более приближается ко входной ФЧХ одиночного контура. Если исследовать данное выражение на экстремум, то

$$\xi_{экс} = \pm \sqrt{-(1 + P_{CB}^2) \pm \sqrt{1 + 4P_{CB}^2 + 5P_{CB}^4}}, \quad (9.39)$$

т. е. место экстремальных фазных углов зависит только от параметра связи  $P_{CB}$ . Например, при  $P_{CB} = 2$  характерные точки оказываются следующими: при  $\xi = -\infty$   $\varphi_{Z_{BX}} = -90^\circ$ , при  $\xi = -\sqrt{5} = -2,24$   $\varphi_{Z_{BX}} = 0$ , при  $\xi = -0,8932 \approx -0,9$   $\varphi_{Z_{BX}} = \varphi_{Z_{BX}m} = 20^\circ 36'$ , при  $\xi = 0$   $\varphi_{Z_{BX}} = 0$ , при  $\xi = 0,9$   $\varphi_{Z_{BX}} = -20^\circ 23'$ , при  $\xi = 0$   $\varphi = 0$ , при  $\xi = 0,9$   $\varphi_{Z_{BX}} = -20^\circ 36'$ , при  $\xi = -2,24$   $\varphi_{Z_{BX}} = 0$ , при  $\xi = \infty$   $\varphi_{Z_{BX}} = 90^\circ$ .

#### 9.15. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ СВЯЗАННОЙ ЦЕПИ ПРИ РЕЗОНАНСЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА СВЯЗИ

Пусть имеется связанная система (рис. 9.22, а). С помощью переменных конденсаторов настроим каждый контур в резонанс. В этом случае эквивалентная схема цепи будет состоять из двух резистивных сопротивлений: первичного контура  $R_1$  и вносимого  $R_{вн} = P_{CB}^2 R_1$  (рис. 9.22, б).

Рассчитаем токи  $I_1$ ,  $I_2$  в зависимости от параметра связи  $P_{CB}$  при неизменном напряжении на входе цепи. Все кривые нанесем на график (рис. 9.22, в). Резистивное сопротивление первичного контура  $R_1$  не зависит от значения параметра связи. Вносимое резистивное сопротивление  $R_{вн}$  при настроенных контурах (т. е. при  $\xi = 0$ ) определяется из выражения  $R_{вн} =$

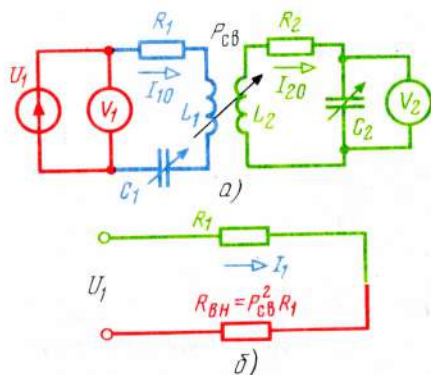
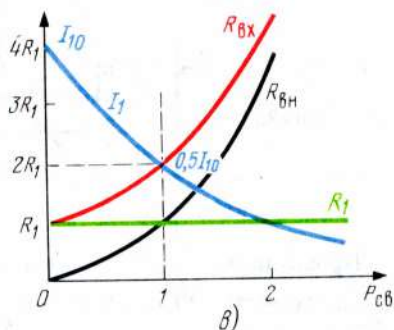


Рис. 9.22



$= P_{св}^2 R_1$ . Следовательно, при  $P_{св} = 0$   $R_{вн} = 0$ , при  $P_{св} = 1$  (т. е. при критической связи)  $R_{вн} = R_1$ , при  $P_{св} = 2$   $R_{вн} = 4R_1$ , при  $P_{св} = 10$   $R_{вн} = 100R_1$  и т. д. Общее входное сопротивление имеет чисто резистивный характер и равно арифметической сумме сопротивлений  $R_1$  и  $R_{вн}$ ;  $R_{вх} = R_1 (1 + P_{св}^2)$ . При  $P_{св} = 1$   $R_{вх} = 2R_1$ , при  $P_{св} = 2$   $R_{вх} = 5R_1$ , при  $P_{св} = 10$   $R_{вх} = 101R_1$ . Входной ток  $I_1 = U_1 / R_{вх}$ . При  $R_{св} = 0$   $I_1 = U_1 / R_1 = I_{10}$ , при  $P_{св} = 1$   $I_1 = U_1 / 2R_1 = 0,5I_{10}$ , при  $P_{св} = 2$   $I_1 = U_1 / 5R_1 = 0,2I_{10}$ , при  $P_{св} = 10$   $I_1 = U_1 / 100R_1$ .

Определим закон тока  $I_2$ :  $0 = \dot{I}_2 Z_2 - \dot{I}_1 Z_M$ , откуда

$$I_2 = I_1 (Z_M / Z_2). \quad (9.40)$$

Так как ток  $I_1$  и сопротивление  $Z_2$  — величины чисто резистивные, то модуль вторичного тока

$$I_2 = I_1 (Z_M / Z_2). \quad (9.41)$$

Поскольку  $Z_M = X_{св}$ ,  $Z_2 = R$ ,  $X_{св} / R = P_{св}$ ,  $I_1 = U_1 / R_1 (1 + P_{св}^2)$ , выражение (9.41) приобретает вид

$$I_2 = \frac{U_1 P_{св}}{R_1 (1 + P_{св}^2)} = \frac{I_{10} P_{св}}{1 + P_{св}^2} = \frac{I_{10} / P_{св}}{(1 / P_{св}^2) + 1}. \quad (9.42)$$

При  $P_{св} = 0$  и  $P_{св} = \infty$   $I_2 = 0$ . Кривая вторичного тока начинается с 0 и оканчивается 0, поэтому у нее имеется максимум. Определим  $P_{св}$ , при котором  $I_2 = I_{2m}$ :

$$dI_2 / dP_{св} = [I_{10} (1 + P_{св}^2) - I_{10} P_{св} \cdot 2P_{св}] / (1 + P_{св}^2)^2 = 0.$$

Знаменатель не равен  $\infty$  (ибо при  $P_{св} = \infty$   $I_2 = 0$ , а не  $I_{2m}$ ), поэтому 0 равен числитель, т. е.  $I_{10} (1 + P_{св}^2 - 2P_{св}^2) = 0$ , но  $I_{10} \neq 0$ , и  $1 + P_{св}^2 - 2P_{св}^2 = 0$ , т. е.  $1 - P_{св}^2 = 0$ , откуда  $P_{св} = 1$ . Определим  $I_{2m}$ . Подставив в (9.42)  $P_{св} = 1$ , получим наибольший ток вторичного контура:

$$I_{2m} = I_{01} / (1 + 1) = 0,5I_{01}. \quad (9.43)$$

Таким образом, вторичный ток оказывается наибольшим при  $P_{св} = 1$ , т. е. в случае критической связи. При такой связи первичный ток равен вто-



ричному, несмотря на то, что первичный и вторичный контуры электрически изолированы друг от друга. Рассмотрим, почему при увеличении связи больше критической ток во вторичном контуре не увеличивается, а уменьшается.

Отодвинем вторичный контур от первичного на бесконечно большое расстояние, при этом магнитный поток первой катушки не пересекает витки второй, взаимная индуктивность  $M$ , коэффициент связи  $k$  и параметр связи  $P_{св}$  оказываются равными 0. При сближении катушек параметры  $M$ ,  $k$  и  $P_{св}$  увеличиваются, что влечет за собой увеличение коэффициента передачи цепи, вносимого сопротивления и соответственно уменьшение тока в первичном контуре. Но коэффициент передачи растет пропорционально параметру связи, а вносимое сопротивление — пропорционально квадрату параметра связи. Пока параметр связи остается меньше единицы, член  $P_{св}$  растет быстрее, чем  $P_{св}^2$ , поэтому пока связь меньше критической коэффициент связи растет быстрее, чем увеличивается вносимое сопротивление и, соответственно, уменьшается ток в первичном контуре. В связи с этим при изменении  $P_{св}$  от 0 до 1 ток во вторичном контуре растет от 0 до  $I_{2m}$ .

При дальнейшем увеличении связи, т. е. при  $P_{св} > 1$ , член  $P_{св}^2$  растет быстрее  $P_{св}$ , вследствие чего вносимое сопротивление продолжает расти, ток в первичном контуре падает быстрее, чем растет коэффициент передачи, что влечет за собой уменьшение тока во вторичном контуре. Например, при увеличении связи  $P_{св}$  от 1 до 2 коэффициент передачи возрастает в 2 раза, а ток в первичном контуре уменьшается в 2,5 раза. При возрастании  $P_{св}$  от 1 до 3 коэффициент передачи увеличивается в 3 раза, а ток  $I_1$  — уменьшается в 10 раз и т. д. Определим напряжение на конденсаторе и коэффициент передачи цепи при критической связи:

$$U_{2кр} = I_{2кр} (1/\omega_0 C) = U_1 \rho / 2R.$$

При этом коэффициент передачи

$$K_{(P_{св}=1)} = U_{2(кр)} / U_1 = U_1 \rho / U_1 2R = Q/2.$$

Таким образом, наибольший коэффициент передачи, который можно получить в связанной системе, составляет  $Q/2$ , т. е. оказывается в 2 раза меньше, чем у одиночного контура.

#### 9.16. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Исследуем передаточные свойства связанной системы (рис. 9.23). Определим комплексную передаточную функцию  $\underline{H}$ . Для простоты расчетов положим контуры одинаковыми. Индексацию элементов оставим только для удобства составления уравнений. Обозначим

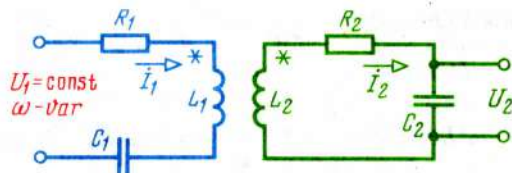


Рис. 9.23

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 + 1/j\omega C_1, \quad \underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 + 1/j\omega C_2, \quad Z_M = j\omega M$$

и составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 - \underline{Z}_M \dot{I}_2 \\ 0 = -\underline{Z}_M \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 \end{cases} \begin{matrix} \underline{Z}_M; \\ \underline{Z}_1. \end{matrix}$$

Умножим первую строку на  $\underline{Z}_M$ , вторую на  $\underline{Z}_1$  и сложим получившиеся строки:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 \underline{Z}_M &= \underline{Z}_1 \underline{Z}_M \dot{I}_1 - \underline{Z}_M^2 \dot{I}_2; \\ 0 &= -\underline{Z}_1 \underline{Z}_M \dot{I}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \dot{I}_2 \end{aligned}$$

или

$$\dot{U}_1 \underline{Z}_M = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2) \dot{I}_2, \text{ откуда } \dot{I}_2 = \dot{U}_1 \underline{Z}_M / (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2).$$

Так как контуры одинаковые, то

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1 \cdot j\omega M}{\underline{Z}^2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \dot{U}_2 = (1/j\omega C) \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1 j\omega M}{j\omega C (\underline{Z}^2 - \underline{Z}_M^2)}.$$

Комплексная передаточная функция  $\underline{H} = M/C (\underline{Z}^2 - \underline{Z}_M^2)$ .

Напомним, что  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ . Так как  $\underline{Z} = R + j\omega L + 1/j\omega C$ , то

$$\underline{H} = M / [C(R^2 - \omega^2 L^2 - 1/\omega^2 C^2 + j2\omega RL - j2\frac{R}{\omega C} + 2\frac{L}{C} + \omega^2 M^2)].$$

Получившееся уравнение является типично электротехническим. Покажем, каким образом можно преобразовать данное выражение, чтобы параметрами передаточной функции стали добротность  $Q$ , обобщенная расстройка  $\xi$  и параметр связи  $P_{св}$ . Для этого множитель  $C$  внесем под скобку, а  $L$  — вынесем за скобку:

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{M}{L(R^2 C/L - \omega^2 L^3 C/L - C/\omega^2 C^2 L + j2\omega RL C/L - j2RC/\omega CL + \\ &\quad + 2LC/CL + \omega^2 M^2 C/L)} = \frac{M/L}{\left[ \frac{R^2}{L/C} - \omega^2 LC - 1/\omega^2 LC + j2\omega RC(1 - 1/\omega^2 LC) + \right. \\ &\quad \left. \frac{M/L}{\omega^2 M^2 C} \right]}. \end{aligned}$$

Произведем преобразования и замены. При одинаковых контурах отношение  $M/L$  есть коэффициент связи  $k$  ( $k = M/L$ );  $\frac{R^2}{L/C} = \frac{R^2}{\rho^2} = \frac{1}{Q^2} = d^2$ . Напомним, что  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , а  $\omega_0^2 = 1/LC$ ; тогда

$$-(\omega^2 LC - 2 + 1/\omega^2 LC) = -\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = -(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2 = -\epsilon^2.$$

Так как  $Q = X_{C_0}/R \approx X_C/R = 1/\omega RC = 1/d$ ,  
то  $\omega RC = d$ ; тогда

$$j2\omega RC(1 - 1/\omega^2 LC) = j2d(1 - \omega_0^2/\omega^2) = j2d\epsilon.$$

Член  $\omega^2 M^2 C/L = M^2 C/LC \cdot L = M^2/L^2 = k^2$ .

С учетом произведенных преобразований комплексная передаточная функция цепи приобретает вид

$$\underline{H} = k/(d^2 + k^2 - \epsilon^2 + j2d\epsilon).$$

Умножим числитель и знаменатель на  $Q^2$ , тогда

$$\underline{H} = \frac{kQ \cdot Q}{d^2 Q^2 + k^2 Q^2 - \xi^2 Q^2 + j2dQ \cdot \epsilon Q}.$$

Напомним, что  $kQ = P_{св}$ ,  $dQ = 1$ ,  $\epsilon Q = \xi$ , следовательно

$$\underline{H} = \frac{P_{св}Q}{1 + P_{св}^2 - \xi^2 + j2\xi} \quad (9.44)$$

Получилась комплексная передаточная функция цепи, выраженная через  $Q$ ,  $\xi$ ,  $P_{св}$ . Определим передаточную АЧХ цепи, для этого запишем выражение модуля передаточной функции:

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_{св}Q}{\sqrt{(1 + P_{св}^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} = \frac{P_{св}Q}{\sqrt{1 + P_{св}^4 + \xi^4 + 2P_{св}^2 - 2\xi^2 - 2P_{св}^2\xi^2 + 4\xi^2}} = \\ &= \frac{P_{св}Q}{\sqrt{(1 + 2P_{св}^2 + P_{св}^4) - 2\xi^2(P_{св}^2 - 1) + \xi^4}}. \\ H &= \frac{P_{св}Q}{\sqrt{(1 + P_{св}^2)^2 - 2\xi^2(P_{св}^2 - 1) + \xi^4}}. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Определим вид данной кривой. При  $\omega = 0$   $\xi = -\infty$ ,  $H = 0$ ; при  $\omega = \infty$   $\xi = \infty$ ,  $H = 0$ . Так как кривая начинается и оканчивается нулевыми значениями, то следовательно, имеется максимум. Для определения экстремальных значений следует взять производную по  $\xi$  от подкоренного выражения, т. е.  $-4\xi(P_{св}^2 - 1) + 4\xi^3 = 0$  или  $-4\xi(P_{св}^2 - 1 - \xi^2) = 0$ , откуда  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_{23} = \pm \sqrt{P_{св}^2 - 1}$ . Из полученного результата следует, что при связи больше критической (т. е. при  $P_{св} > 1$ ) кривая имеет три экстремальных (т. е. максимальных и минимальных) значения, а при связи меньше критической — только одно, поскольку значения  $\xi_{23}$  в этом случае становятся мнимыми. При трех экстремумах кривая имеет два максимума и один минимум, что указывает на двугорбую форму кривой (рис. 9.24, а). При одном экстремуме кривая имеет одностороннюю форму (рис. 9.24, б). Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  называют верхней ( $\omega_2$ ) и нижней ( $\omega_1$ ) частотами связи. Таким образом, при

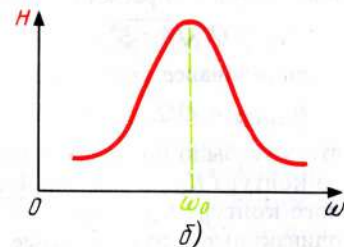
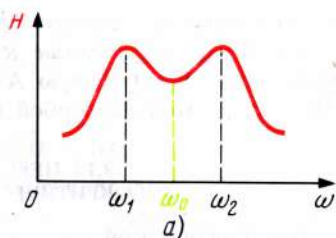


Рис. 9.24



связи больше критической передаточная АЧХ имеет форму двугорбой кривой, а при связи меньше критической — одногорбой. Не следует путать входную и передаточную АЧХ. Строгий анализ показывает, что входная АЧХ становится двугорбой при  $P_{св} = 0,49$ , а передаточной — при  $P_{св} = 1$ .

### 9.17. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПРИ КРИТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

При критической связи  $P_{св} = 1$  и модуль передаточной функции (т. е. выражения для расчета передаточной АЧХ)

$$H_{кр} = Q/\sqrt{4 + \xi^4}, \quad (9.46)$$

а при резонансе (т. е. при  $\xi = 0$ )

$$H_{кр(0)} = Q/2, \quad (9.47)$$

что уже было получено ранее. Сравним коэффициенты передачи одиночного контура  $K_{од}$  и связанной системы при критической связи  $k_{кр}$ . У одиночного контура  $K_{од} = Q/\sqrt{1 + \xi^2}$ . Поскольку числители у обоих выражений одинаковые, сравнительные характеристики АЧХ вытекают из сравнения знаменателей обоих выражений. У одиночного контура  $\xi^2$  сравнивается с единицей, а у связанной системы  $\xi^4$  — с четырьмя. Очевидно, что пределы изменений  $\xi$ , при которых коэффициент передачи меняется еще незначительно, у одиночного контура гораздо уже, чем у связанной системы. Но это означает, что полоса пропускания связанной системы шире, чем у одиночного контура. Например, если считать допустимым пренебрегать вторым слагаемым знаменателя по сравнению с первым, пока второй член меньше первого хотя бы в 10 раз, то это будет составлять в одиночном контуре  $10\xi_{од}^2 = 1$ , откуда  $\xi_{од}^2 = 0,1$ ,  $\xi_{од} = 0,316$ , а в связанной системе при критической связи  $10\xi_{кр}^4 = 4$ , откуда  $\xi_{кр}^4 = 0,4$ ,  $\xi_{кр}^2 = 0,63$ ,  $\xi_{кр} = 0,795 \approx 0,8$ . Чтобы коэффициент передачи практически оставался неизменным, в одиночном контуре можно доводить расстройку  $\xi$  до 0,3, а в связанной системе — до 0,8. В связанной системе вершина АЧХ получается более плоской, чем у одиночного контура. При расстройках более единицы член  $\xi^4$  растет гораздо быстрее, чем  $\xi^2$ , поэтому коэффициент передачи у связанных контуров падает гораздо быстрее, чем у одиночного контура. Например, при  $\xi = 2$  коэффициент передачи в одиночном контуре уменьшается в 2,25 раза, а в связанной системе — в 4,12 раза.

Таким образом, у связанной системы полоса пропускания шире, а склоны АЧХ идут круче, чем у одиночного контура с такой же добротностью (рис. 9.25). Большая крутизна склонов АЧХ обеспечивает лучшую избирательность. Например, при расстройках, соответствующих  $\xi = 2$ , избиратель-

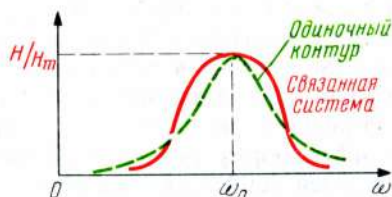


Рис. 9.25

ность в одиночном контуре

$$B_{\text{од}} = 20 \lg \sqrt{1 + \xi^2} = 20 \lg \sqrt{1 + 2^2} = 20 \lg 2,24 = 20 \cdot 0,35 = 7 \text{ дБ},$$

а в связанной системе при критической связи

$$B_{\text{кр}} = 20 \lg \sqrt{4 + \xi^4} = 20 \lg \sqrt{4 + 2^4} = 20 \lg \sqrt{20} = 20 \lg 4,47 = 13 \text{ дБ}.$$

Недостатком связанных систем является их большая сложность и необходимость в точной настройке, но по всем остальным параметрам связанные системы значительно превосходят одиночные контуры.

#### 9.18. МАКСИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕДАЧИ У СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Уже было показано, что при критической связи коэффициент передачи на резонансной частоте равен  $Q/2$ . При дальнейшем сближении катушек связь увеличивается и становится больше критической, передаточная АЧХ приобретает форму двугорбой кривой. Определим коэффициент передачи на частотах связи или, как иногда не вполне строго говорят, "на частотах горбов". Для этого следует в выражении передаточной функции вместо  $\xi^2$  поставить  $(P_{\text{св}}^2 - 1)$  и произвести необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_{\text{св}} Q}{\sqrt{(P_{\text{св}}^2 + 1)^2 - 2\xi^2(P_{\text{св}}^2 - 1) + \xi^4}} = \\ &= \frac{P_{\text{св}} Q}{\sqrt{(P_{\text{св}}^2 + 1)^2 - 2(P_{\text{св}}^2 - 1)(P_{\text{св}}^2 - 1) + (P_{\text{св}}^2 - 1)}} = \\ &= \frac{P_{\text{св}} Q}{\sqrt{P_{\text{св}}^4 + 2P_{\text{св}}^2 + 1 - 2P_{\text{св}}^4 + 4P_{\text{св}}^2 - 2 + P_{\text{св}}^4 - 2P_{\text{св}}^2 + 1}} = \\ &= P_{\text{св}} Q / \sqrt{4P_{\text{св}}^2} = Q/2. \end{aligned}$$

Таким образом, при связи больше критической (т. е. при  $P_{\text{св}} > 1$ ), максимальный коэффициент передачи оказывается на частотах связи, а не на резонансной частоте, на которой коэффициент передачи  $H_0 = P_{\text{св}} Q / (P_{\text{св}}^2 - 1)$ . Легко доказать, что при  $P_{\text{св}} = 1$   $H_0 = Q/2$ , а при  $P_{\text{св}} > 1$   $H_0 < (Q/2)$  (рис. 9.26). При связи меньше критической ( $P_{\text{св}} < 1$ ), второй член знаменателя оказывается со знаком плюс, поэтому  $H_0$  получается меньше  $Q/2$ .

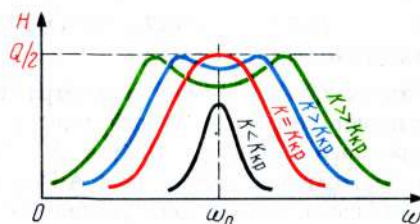


Рис. 9.26

## 9.19. ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Для определения полосы пропускания любой системы необходимо найти расстройку  $\xi$ , при которой коэффициент передачи уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с наибольшим коэффициентом передачи. Для этого требуется решить относительно  $\xi$  уравнение  $H_{гр}/H_m = 1/\sqrt{2}$  или

$$\frac{P_{св} Q \cdot 2}{Q \sqrt{(P_{св}^2 + 1)^2 - 2\xi_{гр}^2 (P_{св}^2 - 1) + \xi_{гр}^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат и проделав простые алгебраические преобразования, получим

$$\xi_{гр} = \pm \sqrt{P_{св}^2 + 2P_{св} - 1}. \quad (9.48)$$

Определим  $\xi_{гр}$  при критической связи, для этого в (9.48) подставим  $P_{св} = 1$ :

$$\xi_{гр.кр} = \sqrt{2} = \pm 1,41. \quad (9.49)$$

Из полученного выражения видно, что *полоса пропускания связанной системы при критической связи в 1,41 раза шире полосы пропускания одиночного контура при такой же добротности.*

При увеличении связи больше критической горбы "расползаются", а следовательно, седловина опускается (см. рис. 9.26). Очевидно, что седловина может опускаться до уровня 0,707, поскольку при большем  $P_{св}$  связанная система распадается на два одиночных контура с различными резонансными частотами. Определим  $P_{св}$ , при котором  $H_0 = 0,707 H_m = Q/2\sqrt{2}$ :

$$\frac{P_{св} m \cdot Q}{1 + P_{св}^2 m} = \frac{Q}{2\sqrt{2}}, \quad (9.50)$$

откуда  $P_{св} m = 2,41$ .

Следовательно, увеличивать связь можно до 2,41 критической. При дальнейшем увеличении связи провал на резонансной частоте превышает 3 дБ, что не всегда допустимо. Определим полосу пропускания при  $P_{св} = 2,41$ :

$$\xi_{гр} m = \sqrt{P_{св}^2 + 2P_{св} - 1} = \sqrt{2,41^2 + 2 \cdot 2,41 - 1} = 3,1.$$

Таким образом, относительная полоса пропускания при максимальной связи в 3,1 раза шире, чем у одиночного контура при одинаковых добротностях. Аналогично можно показать, что при  $P_{св} = 0,67$   $\xi_{гр} = \pm 1$ , т. е. в этом случае полоса пропускания связанной системы равна полосе пропускания одиночного контура.

## 9.20. ХАРАКТЕРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА СВЯЗИ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ

Систематизируем характерные значения параметра связи  $P_{св}$ . При  $P_{св} = 0$  система представляет собой одиночный контур, связь отсутствует, коэффициент передачи равен 0. При  $P_{св} = 0,49$  АЧХ входного тока из одnogорбой переходит в двугорбую. Передаточная АЧХ остается одnogорбой. При  $P_{св} = 0,67$  относительная полоса пропускания связанной системы ста-



новится равной относительной полосе пропускания одиночного контура. При  $P_{св} = 1$  коэффициент передачи на резонансной частоте становится максимальным, равным  $Q/2$ , передаточная АЧХ имеет наиболее плоскую вершину из всех однокорбых кривых и переходит в двукорбную кривую, относительная полоса пропускания в 1,41 раз шире относительной полосы пропускания одиночного контура. При  $P_{св} = 2,41$  коэффициент передачи на резонансной частоте составляет 0,707 ( $Q/2$ ), наибольшие значения коэффициента передачи, равные  $Q/2$ , оказываются на частотах связи, определяемых из соотношения

$$\xi_{горб} = \pm \sqrt{P_{св}^2 - 1} = \pm \sqrt{2,41^2 - 1} = \pm 2,19.$$

Относительная полоса пропускания в 3,1 раза шире, чем у одиночного контура с одинаковой добротностью.

## 9.21. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФАЗОЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Поскольку комплексная передаточная функция связанной системы имеет вид

$$H = \frac{P_{св} Q}{(1 + P_{св}^2 - \xi^2) + j2\xi},$$

передаточная фазочастотная характеристика определяется из выражения

$$\varphi_H = -\arctg \left( \frac{2\xi}{1 + P_{св}^2 - \xi^2} \right). \quad (9.51)$$

При критической связи  $P_{св} = 1$ , в этом случае

$$\varphi_{Hкр} = \arctg \left( \frac{2\xi}{\xi^2 - 2} \right) = \arctg \left( \frac{2/\xi}{1 - 2/\xi^2} \right). \quad (9.52)$$

Определим ход данной кривой. При  $\omega = 0$   $\xi = -\infty$ ,  $\varphi_H = 0^\circ$ . На нижней граничной частоте  $\omega = \omega_{н.гр}$   $\xi = -\sqrt{2}$ ,  $\varphi_H = -\arctg \infty = -90^\circ$ ; при  $\omega = \omega_0$   $\xi = 0$ ,  $\varphi_H = \arctg(-0) = -180^\circ$ . На верхней граничной частоте  $\omega = \omega_{в.гр}$   $\xi = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = \arctg(\infty) = -270^\circ$ ; при  $\omega = \infty$   $\xi = \infty$ ,  $\varphi = \arctg(0) = -360^\circ$ .

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что понимают под взаимной индуктивностью двух катушек?
2. Какое соединение катушек называют согласным и какое встречным?
3. Напишите уравнение для мгновенных значений по второму закону Кирхгофа последовательной цепи при наличии взаимной индуктивности. Объясните физический смысл каждого члена уравнения. Запишите данное уравнение в комплексном виде.
4. Как можно экспериментально определить взаимную индуктивность  $M$  и коэффициент связи  $K$ ?
5. Какие особенности расчета входного сопротивления цепи при наличии взаимных индуктивностей?
6. Докажите, что при параллельном соединении катушек со взаимной индуктивностью  $L_{эк} = (L_1 L_2 - M^2) / (L_1 + L_2 \mp 2M)$ .

7. Составьте уравнения по законам Кирхгофа для воздушного трансформатора.
8. Что понимают под понятием "вносимые сопротивления" из вторичного контура в первичный? Каков физический смысл сопротивлений  $R_{вн}$  и  $X_{вн}$ ?
9. Покажите способы расчета индуктивно связанных цепей при замене двухконтурной схемы эквивалентной одноконтурной.
10. Покажите расчет баланса мощностей в цепях со взаимной индуктивностью.
11. Как можно определить экспериментально вносимые сопротивления?
12. Покажите Т-образную схему замещения воздушного трансформатора. Приведите доказательство его эквивалентности.
13. Что называется коэффициентом связи цепи? Приведите примеры определения коэффициента связи в различных цепях.
14. Покажите условия для получения: а) сложного, б) основного (индивидуального); в) полного резонансов.
15. Какая связь называется критической?
16. Что называется параметром связи? Какие характерные значения Вы знаете?
17. Начертите входные характеристики связанной системы, т. е. кривые  $R_1 = f(\xi)$ ,  $R_{вн} = f(\xi)$ ,  $R_{вх} = f(\xi)$ ,  $X_1 = f(\xi)$ ,  $X_{вн} = f(\xi)$ ,  $X_{вх} = f(\xi)$ ,  $Z_{вх} = f(\xi)$ ,  $I_{вх} = f(\xi)$ , и объясните их ход.
18. Нарисуйте кривую входной ФЧХ (т. е.  $\varphi_{Z_{вх}} = f(\omega)$  или  $\varphi_{Z_{вх}} = f(\xi)$ ), поясните характер цепи при различных частотах или расстройках.
19. Нарисуйте и объясните ход кривых  $I_1 = f(P_{св})$  и  $I_2 = f(P_{св})$  в настроенных контурах. Докажите, что кривая вторичного тока имеет максимум при критической связи.
20. Почему при увеличении связи больше критической ток во вторичном контуре не увеличивается, а уменьшается?
21. Напишите выражение модуля передаточной функции в индуктивно связанной цепи. В каком случае передаточная АЧХ имеет вид однокоробой, а в каких случаях — двугорбой кривой?
22. Напишите выражение АЧХ связанной системы при критической связи и сравните с выражением АЧХ одиночного контура.
23. Как рассчитать частоты связи? Каков коэффициент передачи на частотах связи при связи больше критической? Нарисуйте на одном графике АЧХ при различных значениях связи.
24. Определите полосу пропускания связанной системы: а) при равной критической; б) при  $P_{св} = 1,6$ .
25. Какую избирательность обеспечивает связанная система при расстройке на  $\Delta f = 50$  кГц, если  $L_1 = L_2 = L = 1$  мГн,  $C_1 = C_2 = C = 1$  нФ,  $R_1 = R_2 = R = 20$  Ом.
26. Сравните достоинства и недостатки связанной системы по сравнению с одиночным контуром.

### 10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ГАРМОНИЧЕСКИЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Все периодические сигналы (т. е. напряжения или токи), отличные от гармонических, называются *негармоническими*. Каждый негармонический сигнал характеризуется периодом  $T$ , формой и размахом напряжения или тока

( $U_p$  или  $I_p$ ). Так как негармонических сигналов существует неограниченное множество, то разработана методика, позволяющая анализировать любые сигналы, независимо от их формы. Данная методика состоит в том, что подбирают ряд гармонических (т. е. синусоидальных или косинусоидальных) сигналов с такими амплитудами, частотами и начальными фазами, алгебраическая сумма ординат которых в любой момент равна ординате исходного несинусоидального сигнала. Так, напряжение 1 на рис. 10.1 можно заменить напряжениями 2 и 3, поскольку мгновенные значения напряжений  $u_1$  и  $u_2$  в любой момент равны мгновенным значениям напряжения  $u$ .

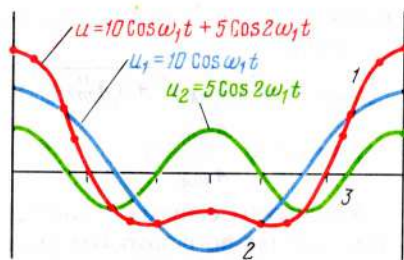


Рис. 10.1

Рассмотрим, как можно определить амплитуды, частоты и начальные фазы гармонических составляющих, которыми заменяют заданный негармонический сигнал. Чтобы выполнить данную замену, необходимо применять несколько правил, известных из курса математики. Сущность этих правил состоит в следующем. *Для воспроизведения данной негармонической кривой можно использовать не любые синусоиды (косинусоиды), а только те, частоты которых в целое число раз отличаются от величины  $1/T$ , где  $T$  – период негармонического сигнала.* Например, если имеется несколько периодических негармонических сигналов с различными формами, но одинаковым периодом  $T$ , допустим по 1 мс, то для формирования таких негармонических сигналов пригодны только синусоидальные сигналы с частотами, кратными значению  $1/T = 1/10^{-3} = 10^3$  Гц = 1 кГц, т. е. 2, 3, 4 кГц и т. д., но совершенно непригодны любые синусоиды с частотами, отличными от  $k (1/T)$ , где  $k$  – целое положительное число. Гармоническая составляющая, период которой равен периоду негармонического сигнала, называют *первой* или *основной гармоникой* данного негармонического сигнала, в некоторых случаях – частотой повторения, а иногда – частотой следования. Все остальные составляющие называются *высшими гармониками* или *высшими гармоническими составляющими*, причем гармоника, частота которой в два раза больше частоты основной гармоники, называется “второй гармоникой”, гармоника, частота которой в три раза больше – “третьей гармоникой” и т. д. Каждая гармоника может состоять либо только из синусоиды с соответствующей частотой, но с ненулевой начальной фазой, либо из синусоиды и косинусоиды, но с нулевыми начальными фазами каждая. В последнем случае называют: “синусоидальная составляющая  $k$ -й гармоники” и “косинусоидальная составляющая  $k$ -й гармоники”. Это обстоятельство вытекает из известного тригонометрического соотношения

$$\begin{aligned} A_m \sin(\omega t + \psi) &= A_m \cos \psi \sin \omega t + A_m \sin \psi \cos \omega t = \\ &= A'_m \sin \omega t + A''_m \cos \omega t, \end{aligned} \quad (10.1)$$

где  $A'_m = A_m \cos \psi$ ,  $A''_m = A_m \sin \psi$ .

На практике сначала находят амплитуды синусоидальной  $A'_{mk}$  и косинусоидальной  $A''_{mk}$  составляющих каждой гармоники, а затем определяют ам-



плитуду  $A_{mk}$  и начальную фазу  $\psi_k$  общей синусоидальной кривой данной гармоники:

$$A_{mk} = \sqrt{(A'_{mk})^2 + (A''_{mk})^2}; \quad (10.2)$$

$$\psi_k = \operatorname{arctg} \frac{A''_{mk}}{A'_{mk}}. \quad (10.3)$$

Амплитуды синусоидальной  $A'_{mk}$  и косинусоидальной  $A''_{mk}$  составляющих находят по формулам, известным из математики как формулы для определения коэффициентов ряда Фурье [Жан Фурье (1772–1837) французский математик и физик, в 1829 г. избран почетным членом Петербургской академии наук], т. е.

$$A'_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k \omega_1 t dt; \quad (10.4)$$

$$A''_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k \omega_1 t dt, \quad (10.5)$$

где  $k$  — номер гармоники;  $f(t)$  — математическое выражение, описывающее закон, по которому изменяются мгновенные значения той негармонической кривой, для которой определяются гармоники;  $T$  — период негармонической кривой;  $\omega_1$  — угловая частота первой гармоники негармонической кривой ( $\omega_1 = 2\pi/T$ ).

Кроме гармонических составляющих может быть постоянная составляющая данного негармонического сигнала

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (10.6)$$

Таким образом, мгновенные значения любого периодического негармонического сигнала записывают в виде математического выражения, представляющего сумму гармонических составляющих и постоянной составляющей, известного под названием ряда Фурье. Заметим, что постоянную составляющую часто рассматривают как гармонику с нулевым номером и поэтому говорят только о гармонических составляющих, не упоминая отдельно о постоянной составляющей сигнала. Если мгновенные напряжения некоторого негармонического сигнала имеют значения  $u(t)$ , то такое негармоническое напряжение можно представить рядами Фурье

$$\begin{aligned} u(t) = & U_0 + U_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + U_{m2} \sin(2\omega_1 t + \psi_2) + U_{m3} \sin(3\omega_1 t + \\ & + \psi_3) + \dots + U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_k) = U_0 + U'_{m1} \sin \omega_1 t + \\ & + U'_{m2} \sin 2\omega_1 t + \dots + U'_{mk} \sin k\omega_1 t + U''_{m1} \cos \omega_1 t + \\ & + U''_{m2} \cos 2\omega_1 t + \dots + U''_{mk} \cos k\omega_1 t. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Покажем ряды, получившиеся при разложении некоторых типовых сигналов.

Синусоидальная кривая (рис. 10.2, а) представляет частный случай негармонического сигнала, у которого при разложении в ряд амплитуды всех высших гармоник равны 0:

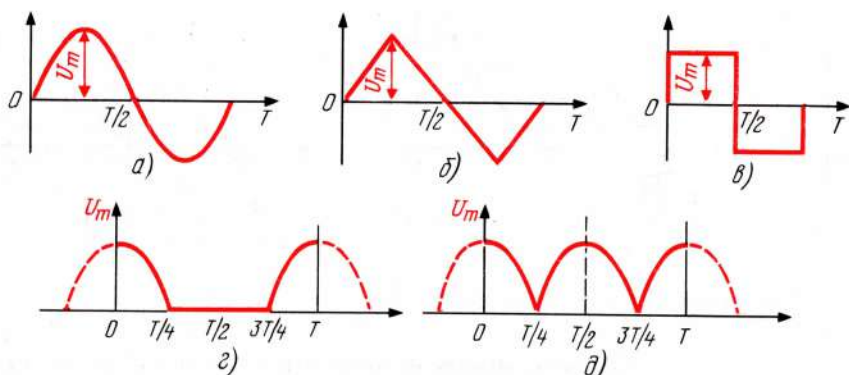


Рис. 10.2

$$u = U_m \sin \omega_1 t. \quad (10.8)$$

Кривая треугольной формы (рис. 10.2, б);

$$u = [8 U_m / \pi^2] (\sin \omega_1 t - \frac{1}{9} \sin 3 \omega_1 t + \frac{1}{25} \sin 5 \omega_1 t + \dots + \frac{1}{k^2} \times \sin k \omega_1 t). \quad (10.9)$$

Кривая прямоугольной формы (рис. 10.2, в):

$$u = [4 U_m / \pi] (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_1 t + \dots + \frac{1}{k} \times \sin k \omega_1 t), \quad (10.10)$$

где  $k$  — целое нечетное число.

Кривая однополупериодной формы (рис. 10.2, г):

$$u = [U_m / \pi] (1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega_1 t + \frac{2}{3} \cos 2 \omega_1 t - \frac{2}{15} \cos 4 \omega_1 t + \frac{2}{35} \times \cos 6 \omega_1 t + \dots). \quad (10.11)$$

Кривая двухполупериодной формы (рис. 10.2, д):

$$u = [2 U_m / \pi] (1 + \frac{2}{3} \cos 2 \omega_1 t - \frac{2}{15} \cos 4 \omega_1 t + \frac{2}{35} \cos 6 \omega_1 t + \dots) \quad (10.12)$$

## 10.2. ВИДЫ СИММЕТРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ КРИВЫХ

**Симметрия относительно горизонтальной оси.** Кривые, удовлетворяющие условию  $f(t) = -f(t + T/2)$ , являются симметричными относительно горизонтальной оси (рис. 10.3, а). Данную симметрию можно представить следующим образом: если часть кривой, находящейся над осью времени, переместить на половину периода и при этом окажется, что перемещенная часть представляет зеркальное отображение части кривой, находящейся

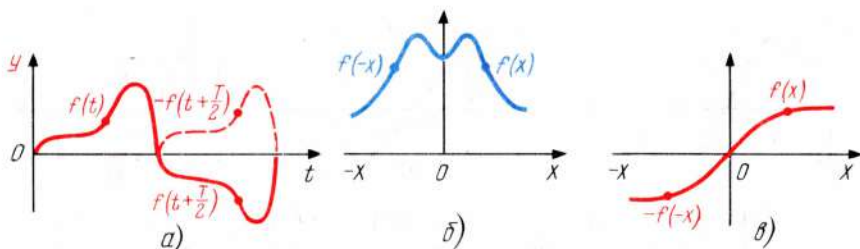


Рис. 10.3

под осью, то такая кривая симметрична относительно горизонтальной оси. У таких кривых коэффициенты четных гармоник (в том числе и постоянной составляющей) равны нулю.

Следовательно, ряд, описывающий мгновенные значения кривых, симметричных относительно горизонтальной оси, состоит только из нечетных гармоник. Сигналы, показанные на рис. 10.1 – 10.3, – типичные кривые, симметричные относительно горизонтальной оси, поэтому они состоят из гармоник только с нечетными номерами (1, 3, 5, 7, 9 и т. д.).

**Симметрия относительно вертикальной оси.** Кривые, удовлетворяющие условию  $f(t) = f(-t)$ , являются симметричными относительно вертикальной оси (рис. 10.3, б). Симметрию относительно вертикальной оси можно представить следующим образом: если чертеж перегнуть по вертикальной оси и при этом окажется, что перегнутая часть накладывается на неперегнутую, то это означает, что данная кривая симметрична относительно вертикальной оси. У кривых, симметричных относительно вертикальной оси, коэффициенты при синусоидальных составляющих равны 0. Следовательно, ряд, описывающий мгновенные значения кривых, симметричных относительно вертикальной оси, состоит только из косинусоидальных составляющих с нулевыми начальными фазами каждая и постоянной составляющей. У кривых рис. 10.2, г и 10.2, д начала координат выбраны так, что эти кривые симметричны относительно вертикальной оси. Именно поэтому ряды обеих кривых содержат постоянные и косинусоидальные составляющие. У однополупериодной кривой  $U_0 = U_m/\pi$ , а у двухполупериодной  $U_0 = 2U_m/\pi$ .

**Симметрия относительно начала осей координат.** Кривые, удовлетворяющие условию  $f(t) = -f(-t)$ , являются симметричными относительно начала осей координат (рис. 10.3, в). Симметрию относительно начала осей координат можно представить следующим образом: если нарисовать кривую, представляющую зеркальное отображение верхней половины относительно вертикальной оси, и эта кривая оказывается зеркальным отображением функции относительно горизонтальной оси, то это означает, что кривая симметрична относительно начала осей координат. У кривых, симметричных относительно начала осей координат, постоянная составляющая и косинусные коэффициенты равны 0. Следовательно, кривые, симметричные относительно начала осей координат, состоят только из синусоид с нулевыми начальными фазами каждая. Синусоидальная, треугольная и



прямоугольные кривые (рис. 10.2, *а–в*) имеют по два вида симметрии каждая: относительно горизонтальной оси (пропадают все четные гармоники) и относительно начала осей координат (пропадают все косинусные составляющие). Поэтому данные сигналы состоят только из нечетных синусоид с нулевой начальной фазой каждая, что соответствует рядам (10.8)–(10.10). Умение оценивать виды симметрии во многом облегчает разложение кривых различных сигналов и определение гармонических составляющих, из которых состоят сигналы различных форм. В некоторых случаях важно знать, каких составляющих нет в данном сигнале.

### 10.3. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

На практике кривые негармонических сигналов чаще всего фотографируют с экрана осциллографа или получают на ленте самопишущих приборов. Эти кривые, как правило, не имеют геометрически правильных форм и их аналитические выражения бывают неизвестны. Разложение таких кривых производят графоаналитическим методом, сущность которого состоит в том, что аналитические выражения для определения коэффициентов ряда Фурье заменяют приближенными, интегрирование производят графоаналитически. Раскладывать негармонические сигналы удобно с помощью программируемых микрокалькуляторов. Допустим, что требуется определять гармонический состав кривой напряжения, показанной на рис. 10.4. Весь период разбивают на  $n$  четных частей. С увеличением числа  $n$  точность расчета повышается. На практике  $n$  часто выбирают равным 20 или 36, в первом случае каждый отрезок соответствует  $18^\circ$ , а во втором  $10^\circ$ . Отрезок  $\Delta t = T/n$  называется *интервалом дискретизации*. Постоянная составляющая определяется из выражения

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt.$$

Покажем, каким образом точные аналитические выражения заменяют приближенными. Вместо интеграла, т. е. суммы бесконечно малых значений, пишут знак  $\Sigma$  (греческая буква "сигма", означающая сумму конечных значений), вместо закона, по которому изменяется кривая  $u(t)$ , берут значения ординат кривой ( $u_1, u_2, u_3, \dots$ ) в различные моменты, вместо приращения бесконечно малых величин используют приращение конечных

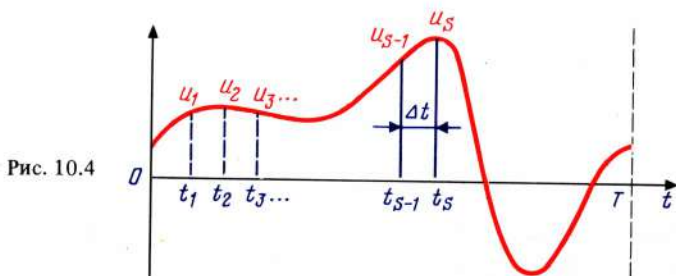


Рис. 10.4

значений  $\Delta t = T/n$ . С учетом указанных замен формула для определения постоянной составляющей приобретает вид

$$U_0 = \frac{1}{T} \sum_{S=1}^S u(T/n) = \frac{1}{n} \sum_{S=1}^S u_S. \quad (10.13)$$

Аналогично получают приближенные выражения для определения синусных и косинусных коэффициентов ряда:

$$\begin{aligned} A'_{mS} &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega_1 t dt \approx \frac{2}{T} \sum_{S=1}^S u_S \sin k\omega_1 t \cdot \frac{T}{n} = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{S=1}^S u_S \sin k\omega_1 t. \end{aligned} \quad (10.14)$$

$$A''_{mS} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega_1 t dt \approx \frac{2}{n} \sum_{S=1}^S u_S \cos k\omega_1 t. \quad (10.15)$$

Программа 10.1. Для определения коэффициентов ряда Фурье периодических кривых, заданных графически

	F	/-/	B/O	F	ВП					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x→ПВ 4L	1 01	0 00	x→П1 41	5 05	x→П0 40	F П→x 5Г	19 19	П→xA 6-	П→xB 6L
1	+ 10	x→ПА 4-	П→xC 6[	П→xD 6Г	+ 10	x→ПC 4[	C/П 50	БП 51	00 00	П→x0 60
2	0 00	+ 10	П→xC 6□	x 12	F 8 1Г	ПП 53	37 37	П→x0 60	0 00	+ 10
3	П→xC 6□	x 12	F 7 1□	ПП 53	37 37	БП 51	06 06	П→xB 6L	x 12	KП→x1 Г 1
4	+ 10	1 01	П→x1 61	+ 10	x→П1 41	F A 25	Kx→П1 L 1	B/O 52	F	/-/

После ввода программы необходимо заслать нули в регистры А, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для этого следует набрать:

    . . .    

А

Переключатель углов поставить в положение "Г" ("градусы") и заслать в регистр С число, показывающее угол первой отсчетной точки. В регистр D занести число  $360/n$ , где  $n$  — число точек, на который разбит период. Например, если период был разбит на 20 частей, то в регистры С и D следует заслать по  $18^\circ$ . Это означает, что отсчет начинается с  $18^\circ$  и шаг отсчета составляет также  $18^\circ$ . Затем следует набрать число мгновенного значения иссле-

дуемой кривой при первой отсчетной точке (т. е. в данном случае при  $18^\circ$ , и нажать клавиши **В/О** и **С/П**. Экран погаснет, а через 74 с на экране высветится значение следующего угла, равного  $(\omega t_1 + \Delta\varphi)$ , мгновенное значение при котором (ординату) следует ввести на клавиатуре. Далее нажать клавишу **С/П**, а по окончании счета и высвечивания нового угла ввести мгновенное значение кривой для момента, соответствующего углу, который светится на дисплее. Снова нажать клавишу **С/П** и вводить столько значений ординат исследуемой кривой, на сколько частей разбит период. Последнее значение вводится, когда на дисплее высвечивается угол  $360^\circ$ . Дождаться окончания счета (при этом высветится очередной угол, больший, чем  $360^\circ$ ) и вывести на дисплей результаты расчетов. Число, находящееся в регистре  $A$ , есть  $nA_0$ , число, находящееся в регистре 2, есть  $0,5nA'_1$  аналогично  $RG3 \rightarrow 0,5nA''_1$ ,  $RG4 \rightarrow 0,5nA'_2$ ,  $RG5 \rightarrow 0,5nA''_2$ ,  $RG6 \rightarrow 0,5nA'_3$ ,  $RG7 \rightarrow 0,5nA''_3$ ,  $RG8 \rightarrow 0,5nA'_4$ ,  $RG9 \rightarrow 0,5nA''_4$ .

Таким образом, коэффициенты ряда находят из следующих выражений:

$$A_0 = \frac{1}{n} RGA, A'_1 = \frac{2}{n} RG2, A''_1 = \frac{2}{n} RG3, A'_2 = \frac{2}{n} RG4, A''_2 = \frac{2}{n} RG5,$$

$$A'_3 = \frac{2}{n} RG6, A''_3 = \frac{2}{n} RG7, A'_4 = \frac{2}{n} RG8, A''_4 = \frac{2}{n} RG9.$$

Зная синусоидальные  $A'_{mk}$  и косинусоидальные  $A''_{mk}$  коэффициенты, можно рассчитать общий коэффициент для каждой гармонической составляющей  $A_{mk} = \sqrt{(A'_{mk})^2 + (A''_{mk})^2}$  и аргумент каждой гармоники  $\psi_k = \arctg(A''_{mk}/A'_{mk})$ . Искомый ряд Фурье становится следующим:

$$f(t) = A_0 + A_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{m2} \sin(2\omega_1 t + \psi_2) + A_{m3} \sin(3\omega_1 t + \psi_3) + A_{m4} \sin(4\omega_1 t + \psi_4). \quad (10.16)$$

Чтобы рассчитать амплитуды и аргументы последующих четырех гармоник, необходимо в программе, введенной в калькулятор, сделать исправления по адресам 20 и 28, записав в память калькулятора вместо 0 число 4. Для этого в исходную программу следует добавить:

F	/-/	БП	2	0	F	ВП	4
F	/-/	БП	2	8	F	ВП	4
F	/-/						

снова ввести все исходные данные и аналогичным образом вывести результаты. Все номера гармоник увеличиваются при этом на 4. Если кривая сим-

20\*



метрична относительно начала осей координат, то следует использовать программу 10.2, позволяющую определить коэффициенты  $A'_{mk}$  сразу для восьми гармонических составляющих.

Программа 10.2 для определения коэффициентов ряда Фурье для восьми гармоник

	F	/-/	В/О	F	ВП					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x→ПВ 4┐	1 01	0 00	x→П1 41	9 09	x→П0 40	F→x0 5┐	15 15	П→xC 6┐	П→xD 6┐
1	+ 10	x→ПC 4┐	C/П 50	БП 51	00 00	П→x0 60	П→xA 6-	+ 10	П→xC 6┐	x 12
2	F 7 1┐	П→xB 6┐	x 12	КП→x1 ┐ 1	+ 10	1 01	П→x1 61	+ 10	x→П1 41	F A 25
3	Kx→П1 ┐ 1	БП 51	06 06	F	/-/					

Ввод:  $\boxed{0} = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{A}$ ,  $\boxed{0} = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{2}$ ,  $\boxed{0} = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{3}$ , ...  
 $\boxed{0} = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{8}$ ,  $\boxed{0} = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{9}$  (т. е. заслать нули в регистры А, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9);  $360/n = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{Д}$ ,  $\omega t_1 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{С}$ . Затем следует ввести мгновенное значение при первой отсчетной точке (т. е. при  $\omega t_1$ ), нажать клавиши  $\boxed{В/О}$  и  $\boxed{С/П}$ , дождаться высвечивания следующего угла, ввести соответствующее мгновенное значение, нажать клавишу  $\boxed{С/П}$  и т. д. до тех пор, пока будут введены ординаты всех отрезков.

Вывод: поочередно нажать клавиши  $\boxed{\Pi \rightarrow x} \boxed{2}$ ,  $\boxed{\Pi \rightarrow x} \boxed{3}$  ...  
 $\boxed{\Pi \rightarrow x} \boxed{8}$ ,  $\boxed{\Pi \rightarrow x} \boxed{9}$ . Коэффициенты ряда определяются из формул

$$A'_{m1} = \frac{2}{n} RG2, A'_{m2} = \frac{2}{n} RG3, A'_{m3} = \frac{2}{n} RG4 \dots A'_{m7} = \frac{2}{n} RG8,$$

$$A'_{m8} = \frac{2}{n} RG9. \quad (10.17)$$

Для получения коэффициентов 9–16 гармоник необходимо в регистр А занести число 8, в регистры 2–9 – заслать нули и снова ввести исходные данные. Следует, однако, иметь в виду, что чем выше номер гармоники, для которой производится расчет, тем на большее число отрезков следует делить

исходную кривую. Например, если поделить период на 36 частей, то каждый отрезок для первой гармоники составляет  $10^\circ$ , для второй гармоники — уже  $20^\circ$ , для седьмой гармоники  $70^\circ$  и т. д. Поэтому с увеличением номера гармоники точность расчетов понижается.

С помощью программы 10.3 можно рассчитать коэффициенты  $A'_m$  и  $A''_m$  для одной гармоники. В этом случае счет каждой точки происходит гораздо быстрее — около 12 с.

Программа 10.3 для нахождения коэффициентов одной гармоники

	F		/-/		B/O		F		BП	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x → ПЗ 43	П → xA 6—	+ 10	x → ПА 4—	П → x1 61	П → x0 60	X 12	x → П2 42	F 7 1□	П → x3 63
1	x 12	П → xB 6□	+ 10	x → ПB 4□	П → x2 62	F 8 1□	П → x3 63	x 12	П → xC 6□	+ 10
2	x → ПC 4□	П → x1 61	П → xD 6□	+ 10	x → П1 41	C/П 50	БП 51	00 00	F	/-/

В в о д исходных данных: номер гармоники, для которой рассчитываются коэффициенты  $k$ , занести в регистр 0 (т. е.  $k = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{0}$ ), заслать нули в регистры A, B, C (т. е.  $\boxed{0} = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{A}$ ,  $\boxed{0} = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{B}$ ,  $\boxed{0} = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{C}$ ), угол, соответствующий первой точке отсчета, — в регистр 1 ( $\omega t_1 = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{1}$ ), шаг угла  $\Delta \omega t$  — в регистр D ( $\Delta \omega t = \boxed{x \rightarrow \Pi} \boxed{D}$ ). Занести мгновенное значение кривой в первой отсчетной точке, нажать клавиши  $\boxed{B/O}$  и  $\boxed{C/П}$ , по окончании счета ввести следующее значение ординаты кривой, нажать клавишу  $\boxed{C/П}$  и т. д. аналогично тому, как это делалось в программах 10.1 и 10.2.

$$\text{Вывод: } A_0 = \frac{1}{n} RGA, A'_m = \frac{2}{n} RGB, A''_m = \frac{2}{n} RGC.$$

#### 10.4. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ

Совокупность гармонических составляющих, образующих сигнал не-синусоидальной формы, называется *спектром* этого негармонического сигнала. В принципе спектры можно было бы показывать графически, в виде временных кривых, как, например, на рис. 10.1, однако такое изображение спектра весьма громоздко, малонаглядно и им на практике не пользуются. Вместо каждой временной кривой рисуют вертикальную линию, длина которой пропорциональна амплитудному значению данной составляющей, а

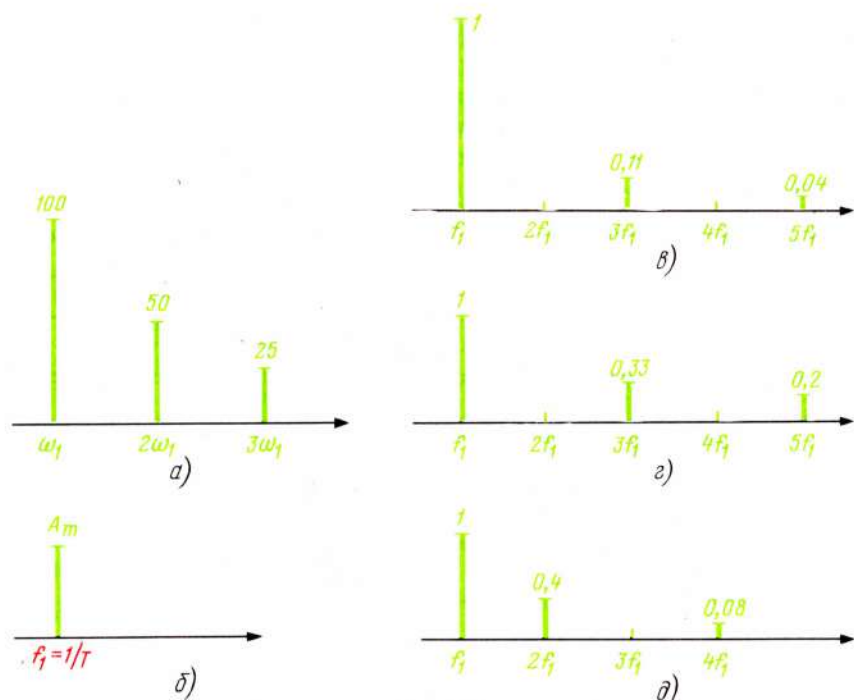


Рис. 10.5

место на горизонтальной оси определяется частотой данной составляющей. Например, если мгновенные значения некоторого периодического несинусоидального сигнала описываются рядом  $u = 100 \sin \omega_1 t + 50 \sin 2\omega_1 t + 25 \sin 3\omega_1 t$ , то спектр данного сигнала имеет вид, показанный рис. 10.5, а. На данном спектре показана амплитуда каждой спектральной составляющей, поэтому такой спектр называют амплитудным спектром.

Аналогично существуют фазные спектры, на которых по горизонтальной оси откладывают частоты, а по вертикальной — начальные фазы гармонических составляющих. Так как ряд любого периодического сигнала состоит из гармонических составляющих, отличающихся в целое число раз от частоты первой гармоники, то спектральные линии, в общем случае, находятся на расстоянии  $\Delta f$  друг от друга, где  $\Delta f$  — частотный интервал, равный частоте первой гармоники  $f_1$ . Спектры, состоящие из отдельных линий, называют *дискретными* или *линейчатыми*. Таким образом, дискретные спектры периодических сигналов имеют спектральные составляющие с кратными частотами ( $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, 5f_1$  и т. д.).

Приведем примеры спектров некоторых периодических сигналов. Сигнал гармонической формы содержит только первую гармонику, поэтому спектр этого сигнала состоит из одной спектральной линии (рис. 10.5, б), на что неоднократно указывалось ранее. Как видно из выражения (10.9), сигналы треугольной формы состоят из гармонических составляющих с нечет-



ными номерами, амплитуды некоторых убывают пропорционально квадрату номера гармоники. Следовательно, если амплитуду первой гармоники принять за 1, то амплитуда второй гармоники равна 0 ( $A_{m2} = 0$ ), амплитуда третьей гармоники — в 9 раз меньше, т. е.  $A_{m3} = 0,11$ , амплитуда четвертой гармоники равна 0 ( $A_{m4} = 0$ ), амплитуда пятой гармоники — в 25 раз меньше ( $A_{m5} = 0,04$ ) и т. д. (рис. 10.5, в). Из выражения (10.10) следует, что у сигналов прямоугольной формы со скважностью 2 амплитуды нечетных гармонических составляющих убывают пропорционально номерам гармоник, амплитуды гармоник с четными номерами равны 0, т. е. если принять  $A_{m1} = 1$ , то  $A_{m2} = 0$ ,  $A_{m3} = 0,33$ ,  $A_{m4} = 0$ ,  $A_{m5} = 0,2$ ,  $A_{mk} = \frac{1}{k} A_{m1}$ , где  $k$  — нечетное число (рис. 10.5, з). Если у кривой однополупериодного вида амплитуду первой гармоники принять за 1, то, как видно из ряда (10.11),  $A_{m2} = 0,42$ ,  $A_{m3} = 0$ ,  $A_{m4} = 0,084$ . Постоянная составляющая составляет 0,637 амплитуды первой гармоники, или 0,318 амплитуды того гармонического сигнала, из которого получена данная однополупериодная кривая (рис. 10.5, д). Таким образом, чтобы построить спектр любого периодического сигнала, необходимо знать закон мгновенных значений, т. е. ряд Фурье для данного сигнала.

#### 10.5. СПЕКТРЫ СИГНАЛОВ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

Пусть имеются периодические сигналы прямоугольной формы с периодом  $T$ , длительностями импульсов  $t_n$  и максимальным значением  $U_m$ . Разложим данный сигнал в ряд. Выберем начало координат так, как показано на рис. 10.6.

В этом случае функция оказывается симметричной относительно вертикальной оси, все коэффициенты при синусоидальных составляющих равны 0, необходимо подсчитать только косинусоидальные коэффициенты ряда, которые являются также и общими коэффициентами членов ряда:

$$A_{mk} = A_{mk}'' = \frac{2}{T} \cdot 2 \int_0^{t_n/2} U_m \cos k \omega_1 t dt = \frac{4 U_m}{T k \omega_1} \times$$

$$\times \sin k \omega_1 t \Big|_0^{t_n/2} = \frac{4 U_m}{T k 2\pi/T} \sin k \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{t_n}{2} = \frac{2 U_m}{k \pi} \sin k \pi \frac{t_n}{T}. \quad (10.18)$$

Постоянная составляющая

$$A_0 = \frac{1}{T} \cdot 2 \int_0^{t_n} U_m dt = \frac{1 \cdot 2 U_m}{T} \cdot \frac{t_n}{2} = U_m \frac{t_n}{T}. \quad (10.19)$$

Постоянная составляющая представляет среднее значение за период, т. е. разность площадей над и под горизонтальной осью, деленную на основание, равное периоду  $T$ . При обозначениях, показанных на рис. 10.7,  $A_0 = (S_1 - S_2)/T$ , где  $S_1$  — площадь над горизонтальной осью, а  $S_2$  — площадь под горизонтальной осью. В сигнале рис. 10.6 площадь под горизонтальной

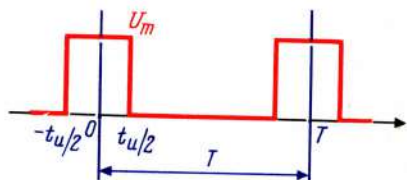


Рис. 10.6

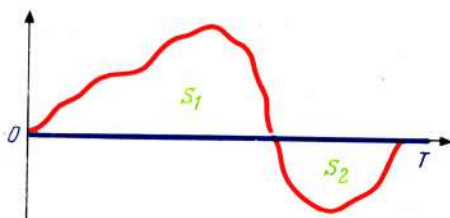


Рис. 10.7

осью равна 0, поэтому площадь  $S_1 = U_m t_u$ , а деленная на основание  $-U_m \times (t_u/T)$ , что получилось при строгих вычислениях.

Разберем построение спектральных характеристик. Частота первой гармоники (частота повторения) определяется из выражения  $f_1 = 1/T$ , где  $T$  — период прямоугольного сигнала. Расстояние между гармониками  $\Delta f$  равно частоте первой гармоники, т. е.  $\Delta f = f_1$ . Если номер гармоники  $k$  таков, при котором аргумент, находящийся под знаком синуса  $k\pi(t_u/T)$ , равен  $180^\circ$ , то амплитуда этой гармоники первый раз обращается в 0. Но  $180^\circ$  есть  $\pi$  радиан, поэтому  $A_{mk} = 0$  при  $k\pi(t_u/T) = \pi$ , откуда  $k = T/t_u$ . Номер гармоники, при котором амплитуда гармонической составляющей первый раз обращается в 0, называют "первым нулем" и обозначают буквой  $N$ , чтобы подчеркнуть особые свойства гармоники с данным номером

$$N = T/t_u. \quad (10.20)$$

Но отношение периода  $T$  к длительности импульса  $t_u$  есть скважность  $S$ . Таким образом, "первый нуль" численно равен скважности импульса. Так как синус выражения (10.18) становится равным нулю при всех значениях, кратных  $180^\circ$ , то амплитуды всех гармоник, номера которых кратны номеру "первого нуля", также имеют нулевые значения. Следовательно,  $A_{mk} = 0$  при  $k = nN$ , где  $n$  — любое целое число. Из выражения (10.10) видно, что ряд сигналов прямоугольной формы со скважностью  $S = 2$  состоит только из нечетных гармоник. Разберем, почему так получается.

Если скважность сигнала  $S = 2$ , то, следовательно, "первый нуль" приходится на вторую гармонику. Но нулевыми будут также коэффициенты всех гармоник, номера которых кратны двум. Аналогично при скважности  $S = 3$  нулевые амплитуды будут у 3, 6, 9, 12, ... гармоник, при  $S = 4$  не будет 4, 8, 12, 16, ... гармоник и т. д.

По мере увеличения скважности "первый нуль" перемещается в область гармоник с большими номерами и, следовательно, скорость убывания амплитуд гармоник уменьшается.

**Пример 10.1.** Рассчитать спектры сигналов прямоугольной формы со скважностями  $S = 2, 3, 4, 5, 10$  для первых десяти гармоник, если амплитуда сигнала  $U_m = 100$  В.

**Решение.** Амплитуды составляющих для сигналов прямоугольной формы определяются из выражения  $U_{mk} = (2U_m/k\pi) \sin k\pi(t_u/T)$ , где  $k$  — номер гармоники. Результаты расчетов занесем в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Номер гармоники	$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$	$S = 5$	$S = 10$
1	63,7	55,13	45	37,4	19,7
2	0	27,7	32	30,43	18,8
3	-21,1	0	15	20,16	17,15
4	0	-13,86	0	9,4	15,2
5	12,73	9,55	-6,36	0	12,7
6	0	0	-10,5	-6,17	9,99
7	-9,1	7,8	-6,36	-8,56	7,28
8	0	6,93	0	-7,6	4,7
9	7,1	0	4,95	-4,11	2,16
10	0	-5,51	6,37	0	0

Для  $S = 2$   $U_{mk} = \frac{2 \cdot 100}{k \cdot 3,14} \sin k \cdot 180^\circ \left( \frac{T/2}{T} \right) = \frac{64}{k} \sin k \cdot 90^\circ$ .

При  $k = 1$   $U_{m1} = 64 \cdot \sin 90^\circ = 64$ . При  $k = 2$   $U_{m2} = 0$ .

При  $k = 3$   $U_{m3} = (64/3) \sin 270^\circ = -21,1$  и т. д.

Для  $S = 3$   $U_{mk} = (64/k) \sin k \cdot 180 \left( \frac{T/3}{T} \right) = (64/k) \sin k \cdot 60^\circ$ .

Для  $S = 4$   $U_{mk} = (64/k) \sin k \cdot 45^\circ$ .

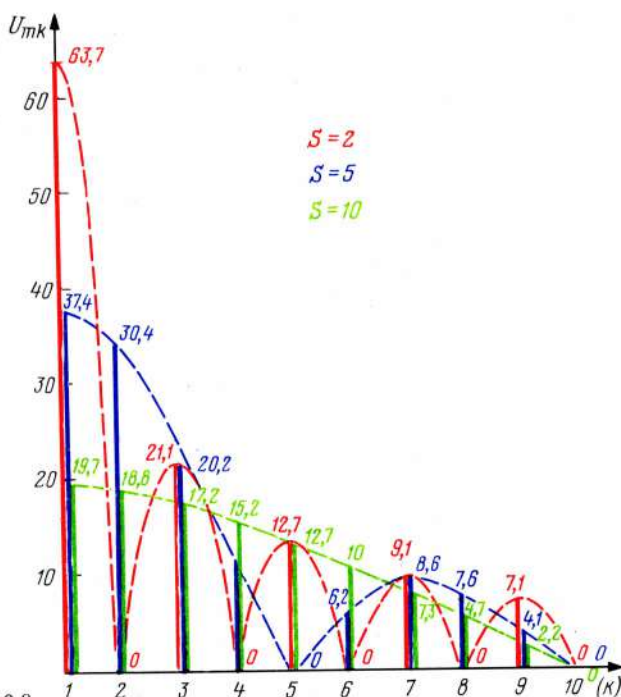


Рис. 10.8



Для  $S = 5$   $U_{mk} = (64/k) \sin k \cdot 36^\circ$ .

Для  $S = 10$   $U_{mk} = (64/k) \sin k \cdot 18^\circ$ .

Построим спектры для  $S = 2$ ,  $S = 5$ ,  $S = 10$  (рис. 10.18). Из данного расчета видно, что чем больше скважность прямоугольного сигнала, тем меньше абсолютное значение имеет амплитуда напряжения первой гармоники, но тем медленнее уменьшаются амплитуды гармонических составляющих, т. е. тем равномернее становится спектр. Например, при скважности  $S = 2$  ряд имеет вид

$$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \left[ \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right],$$

из которого видно, что отношение амплитуды пятой гармоники  $U_{m5}$  к амплитуде первой гармоники  $U_{m1}$  равно 0,2. При скважности  $S = 10$  ряд описывается выражением

$$u(t) = 0,156 \frac{4U_m}{\pi} \left[ \cos \omega_1 t + \frac{1}{3} \cdot 2,9 \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cdot 4,5 \cos 5\omega_1 t + \dots \right]$$

и отношение  $U_{m5}/U_{m1}$  в этом случае становится 0,9, т. е. скорость затухания для пятой гармоники уменьшается в 4,5 раза и т. д.

#### 10.6. СПЕКТРЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСА И ПЕРИОДА СИГНАЛА

Скважность  $S = T/t_{\text{и}}$  можно регулировать двумя способами: либо изменением длительности импульса  $t_{\text{и}}$  при постоянном периоде  $T$ , либо изменением периода  $T$  при постоянной длительности импульса  $t_{\text{и}}$ . В обоих случаях спектры получаются различными. Рассмотрим сначала вариант  $T = \text{const}$ ,  $t_{\text{и}} = \text{var}$ . Здесь частота первой гармоники  $f_1$  и расстояния между гармониками  $\Delta f$  остаются неизменными, равными  $1/T$ . "Первый нуль" равен  $T/t_{\text{и}}$  и по мере укорочения импульса  $t_{\text{и}}$  передвигается в сторону гармоник с большими номерами. При  $t_{\text{и}} \rightarrow 0$  "первый нуль" стремится в бесконечность, спектр получается дискретным с частотой дискретизации  $f_1 = 1/T$ , бесконечно широкий с бесконечно малыми амплитудами.

**Пример 10.2.** Период прямоугольного сигнала  $T = 200$  мкс  $= 200 \cdot 10^{-6}$  с,  $U_m = 100$  В. Построить и сравнить между собой спектры для длительностей импульсов  $t_{\text{и}1} = 25$  мкс и  $t_{\text{и}2} = 12,5$  мкс.

**Решение.** При  $T = 200$  мкс частота первой гармоники (частота повторения) составляет  $1/T = 1/200 \cdot 10^{-6} = 5000$  Гц  $= 5$  кГц. При  $t_{\text{и}1} = 25$  мкс скважность  $S = T/t_{\text{и}} = 200/25 = 8$ . В этом случае амплитуды составляющих спектра рассчитывает по (10.18), т. е.  $U_{mk} = \frac{2U_m}{k\pi} \sin k\pi \frac{t_{\text{и}}}{T} = (64/k) \sin k \cdot 22,5^\circ$ . При  $t_{\text{и}} = 12,5$  мкс  $U_{mk} = (64/k) \times \sin k \cdot 11,25^\circ$ . Результаты расчетов сведены в табл. 10.2 и показаны на рис. 10.9, а, б.

Рассмотрим теперь случай, когда  $t_{\text{и}} = \text{const}$ ,  $T = \text{var}$ . Будем увеличивать период  $T$ , при этом частота первой гармоники  $f_1$ , а следовательно, и расстояния между спектральными линиями  $\Delta f$  — станут уменьшаться; поскольку

Таблица 10.2

Номер гармоники	1	2	3	4	5	6	7	8
Частота, кГц	5	10	15	20	25	30	35	40
$U_{mk}$ при $t_{u_1} = 25$ мкс	24,5	22,6	19,7	16,0	11,8	7,4	3,4	0
$U_{mk}$ при $t_{u_2} = 12,5$ мкс	12,5	12,25	11,83	11,31	10,8	9,7	8,83	8,0

Окончание табл. 10.2

Номер гармоники	9	10	11	12	13	14	15	16
Частота, кГц	45	50	55	60	65	70	75	80
$U_{mk}$ при $t_{u_1} = 25$ мкс	-2,8	-4,5	-5,27	-5,33	4,2	2,29	1,6	0
$U_{mk}$ при $t_{u_2} = 12,5$ мкс	6,87	5,91	4,82	3,82	2,78	1,75	0,83	0

ку  $\Delta f = f_1 = 1/T$ , спектральные линии сместятся в область более низких частот и станут ближе друг к другу. Говорят, что "густота" спектра при этом возрастает.

**Пример 10.3.** Сравнить спектры периодических прямоугольных сигналов, у которых  $t_H = 25$  мкс,  $T_1 = 200$  мкс,  $T_2 = 400$  мкс.

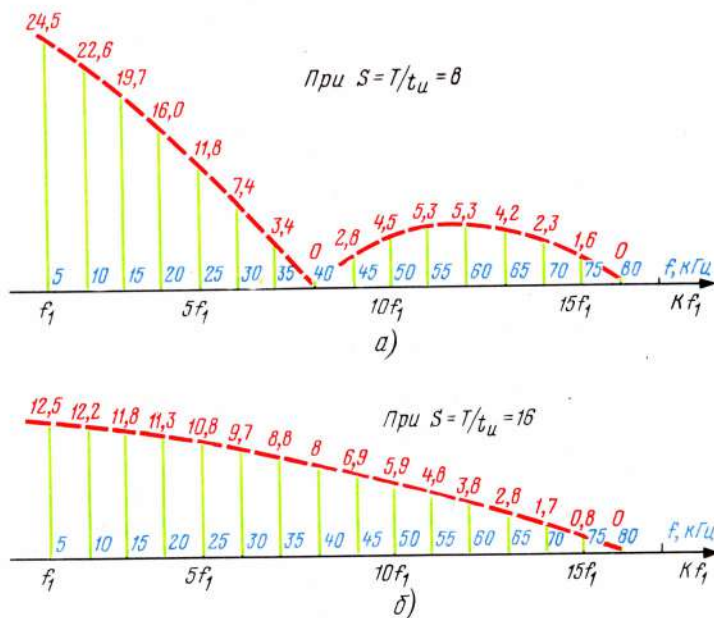


Рис. 10.9

**Решение.** В первом случае скважность  $S_1 = 8$ , во втором  $S_2 = 16$ . Для случая  $S_1 = 8$  спектр рассмотрен в примере 10.2. Построим спектр сигнала при  $T = 400$  мкс,  $t_{\text{и}} = 25$  мкс.

Частота первой гармоники (частота повторения)  $f_1$  и расстояние между спектральными линиями  $\Delta f$ , равное  $1/T$ , составляют  $1/400 \cdot 10^{-6} = 2500$  Гц = 2,5 кГц (вместо 5 кГц, которые были при  $T = 200$  мкс).

Частота "первого нуля" останется, как и было при  $T = 200$  мкс, на частоте 40 кГц, но если 40 кГц для сигнала с  $T = 200$  мкс была частотой 8-й гармоники, то для  $T = 400$  мкс эти же 40 кГц становятся 16-й гармоникой, поскольку первая гармоника в этом случае оказывается на частоте 2,5 кГц и спектральные линии идут также через 2,5 кГц (рис. 10.10). Частота 80 кГц в этом случае становится частотой 32-й гармоники и т. д.

Таким образом, если, не изменяя периода  $T$ , укорачивать длительность импульса  $t_{\text{и}}$ , то частота первой гармоники (частота следования) и расстояние между спектральными линиями остаются неизменными, частота "первого нуля" увеличивается, амплитуда первой гармоники уменьшается, спектр становится более равномерным. Если, не изменяя длительности импульса  $t_{\text{и}}$ , увеличивать период  $T$ , то частота первой гармоники и расстояние между спектральными линиями уменьшаются, прежние частоты становятся соответственно гармониками с большими номерами, численное значение частоты "первого нуля" остается без изменения, но эта частота является гармоникой с большим номером. По мере увеличения периода  $T$  спектральные линии идут все чаще, густота спектра возрастает. *При увеличении периода  $T$  до бесконечности сигнал из периодического превращается в непериодический, т. е. не повторяющийся во времени. В этом случае частота первой гармоники и расстояния между гармониками становятся равными 0, следовательно, спектр из дискретного превращается в непрерывный, состоящий из бесконечно большого числа спектральных линий, находящихся на бесконечно малых расстояниях друг от друга.*

Обратим внимание на важнейшее правило: *периодические сигналы порождают дискретные (линейчатые) спектры, а непериодические — сплошные (непрерывные).*

Амплитуды спектральных составляющих определяются с помощью ряда Фурье. Если в выражении ряда Фурье положить  $T = \infty$ , то ряд Фурье вырождается в математическое выражение, называемое интегралом Фурье, который будет рассмотрен в гл. 12. Совокупность амплитуд непрерывного спектра на различных частотах называется *спектральной плотностью*. Таким образом, амплитуды отдельных гармонических составляющих рассчитывают с помощью ряда Фурье, а амплитудные значения спектральных плотностей — с помощью интеграла Фурье. Однако чтобы легко рассчитывать спектральные плотности, необходимо использовать специальный математический аппарат, который будет разобран в гл. 12.

Получим еще одно весьма важное соотношение. Пусть имеется непериодический сигнал прямоугольной формы длительностью  $t_{\text{и}}$ . Спектр такого сигнала, очевидно, будет сплошным, но конечной ширины, поскольку при  $t_{\text{и}} > 0$  номер частоты "первого нуля" меньше  $\infty$ . Можно показать, что практическая ширина спектра  $\Delta f$  короткого одиночного импульса близка к значению  $1/t_{\text{и}}$ , причем это соотношение тем точнее, чем короче длительность импульса (рис. 10.11).



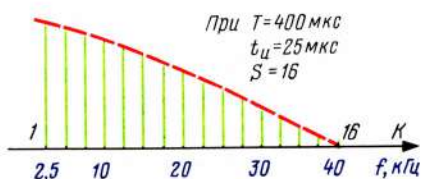


Рис. 10.10

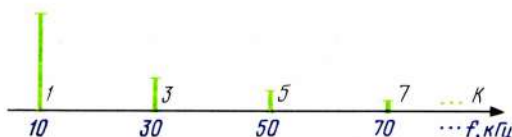


Рис. 10.12

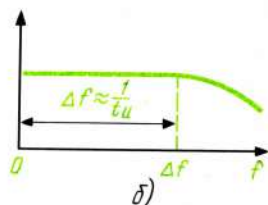
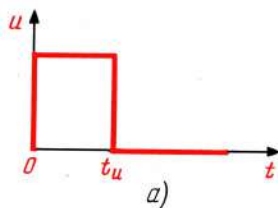


Рис. 10.11

Строго говоря, для импульсов различных форм произведение  $\Delta f \cdot t_{\text{и}}$  может несколько отличаться от единицы, но в большинстве случаев эта разница невелика и при приближенных вычислениях ширину спектра коротких непериодических сигналов оценивают как величину, обратную длительности импульса, вне зависимости от его формы.

Прокомментируем еще на одном примере разницу между периодическими и непериодическими сигналами. Допустим, что имеется периодический сигнал прямоугольной формы со скважностью  $S = 2$ , периодом 100 мкс. В этом случае спектр этого сигнала будет дискретным (сигнал периодический), с частотой первой гармоники 10 кГц ( $f_1 = 1/T = 1/100 \cdot 10^{-6} = 10^4$  Гц = 10 кГц), с амплитудами, уменьшающимися по линейному закону (у прямоугольных сигналов со скважностью 2  $U_{mk} = (1/k) U_{m1}$  (рис. 10.12)). Наличие такого спектра означает, что если приемник настроен на частоту 10 кГц, то он почувствует наличие некоторого напряжения на этой частоте. Но на частотах от несколько большей 10 кГц до несколько меньшей 30 кГц, приемник никакого напряжения не обнаружит. На частоте 30 кГц приемник почувствует напряжение в 3 раза меньшее, чем на 10 кГц, а затем снова от 30 до 50 кГц никаких напряжений не будет. На 50 кГц возмущение будет в 5 раз меньше, чем на 10 кГц, а затем будет снова провал до 70 кГц и т. д.

Совершенно иным получается спектр при непериодическом сигнале. Пусть длительность импульса составляет также 100 мкс. В этом случае образуется сплошной спектр, занимающий диапазон  $0 \dots \approx 10$  кГц и приемник будет обнаруживать напряжения на любой частоте данного диапазона. Если длительность импульса будет не 100 мкс, а, например, только 1 мкс, то спектр станет в 100 раз шире и будет иметь ширину  $0 \dots \approx 1$  МГц ( $10^6$  Гц). Таким образом, чем короче непериодический сигнал, тем более широкий спектр он порождает.

Чтобы передать без искажений импульс длительностью 1 мс необходимо иметь устройство, обеспечивающее полосу пропускания всего 1 кГц, а для

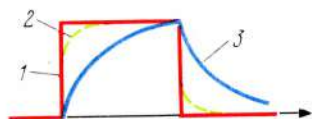


Рис. 10.13

неискаженной передачи импульса длительностью 1 мкс необходим тракт с полосой в 1000 раз шире, т. е. 1 МГц. Следовательно, чем короче импульс, который необходимо передать без искажений, тем более широкая полоса пропускания должна быть обеспечена техническим устройством. Передавать без искажений короткие импульсы труднее, чем длинные. Если тракт или какое-то устройство имеет недостаточно широкую полосу пропускания, то сигнал на выходе будет искаженным по сравнению с сигналом на входе. В частности, искажения сигналов прямоугольной формы состоят в "затягивании" фронтов (рис. 10.13). Если полоса пропускания устройства не уже спектра передаваемого сигнала, то кривая на выходе повторяет кривую на входе (кривая 1); если полоса пропускания устройства несколько меньше спектра сигнала, то появятся незначительные искажения (кривая 2); при еще более узкой полосе — искажения возрастают (кривая 3). В частности, при работе с осциллографами всегда следует знать его полосу пропускания, в противном случае изображение на экране может оказаться искаженным по сравнению с сигналом, подведенным ко входу осциллографа.

## 10.7. ПРАКТИЧЕСКАЯ ШИРИНА СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ

Передавать сигналы без искажений — важная задача для множества цепей. Но для передачи без искажений необходимо знать спектр передаваемых сигналов. Теоретически спектры большинства сигналов бесконечно широкие, но на практике составляющие с малыми амплитудами отбрасывают как не играющие существенной роли в образовании формы сигнала и считают ширину спектра величиной конечной.

На практике существует несколько критериев, определяющих практическую ширину спектров сигналов. Довольно строгим является критерий, по которому отбрасываются составляющие с амплитудами менее 1 % составляющей с наибольшей амплитудой. В соответствии с данным критерием ряды сигналов прямоугольной формы со скважностью  $S = 2$  следует ограничить ста гармониками, поскольку у таких сигналов амплитуды уменьшаются пропорционально номеру гармоники. Аналогично ряды сигналов треугольной формы можно ограничивать десятью гармониками, поскольку у сигналов треугольной формы амплитуды затухают пропорционально квадрату номера гармоники и т. д. Например, если имеется периодическое напряжение синусоидальной формы с периодом  $T = 1$  мс, то для передачи этой синусоиды требуется полоса, пропускающая только частоту 1 кГц ( $f = 1/T = 1/1 \cdot 10^{-3} = 1$  кГц). Чтобы передать без искажений сигнал треугольной формы с тем же периодом, требуется иметь устройство с полосой пропускания 1 ... 10 кГц, а для передачи сигналов прямоугольной формы с периодом  $T = 1$  мс, т. е. частотой следования 1 кГц — полосу 1 ... 100 кГц и т. д. В некоторых случаях довольствуются менее жестким критерием — отбрасывают гармоники, амплитуды которых отличаются на порядок. При



этом основная форма сигнала сохраняется, но участки с крутыми изломами передаются "затянутыми" (рис. 10.13, кривые 2 и 3).

Существует совершенно иной подход — энергетический, сущность которого состоит в том, что основная часть энергии спектра сосредоточена в области частот от первой гармоники до "первого нуля". Этим критерием часто пользуются при скважностях более 10. При непериодических коротких сигналах, как уже было показано, ширину спектра принимают за величину  $1/t_{\text{и}}$ .

Рассмотрим некоторые критерии для качественной оценки ширины спектра сигналов. В ряде случаев нет необходимости в точной количественной оценке спектральных составляющих сигнала. Часто необходимо уметь оценивать качественные изменения в ширине спектра, иногда даже удается ограничиваться сугубо приближенными оценками типа "спектр узкий" или "спектр широкий" и т. д. Укажем на некоторые факторы, способствующие расширению или сужению спектра сигнала. Первым из них является крутизна фронта сигнала. *Если фронт нарастает полого, то амплитуды гармонических составляющих затухают быстро, а если фронт сигнала крутой, то гораздо медленнее.* Сравним мгновенные значения сигналов треугольной и прямоугольной форм. У сигналов треугольной формы фронты нарастают полого, на достижение максимального значения уходит большое время, поэтому амплитуды гармоник затухают быстро, по квадратичному закону. У сигналов прямоугольной формы фронты нарастают круто, за малое время, поэтому амплитуды гармонических составляющих затухают гораздо медленнее — уже по линейному закону. Вторым фактором, влияющим на ширину спектра, является значение скважности. *Чем больше пауза между импульсами, тем больше скважность сигнала, тем больше становится частота "первого нуля", и тем медленнее уменьшаются амплитуды гармонических составляющих.* Например, если принять амплитуду первой гармоники за единицу, то амплитуда пятой гармоники в сигналах треугольной формы уменьшится в 25 раз, прямоугольной формы со скважностью 2 — в 5 раз; а прямоугольной формы со скважностью 10 — всего на 10 %.

## 10.8. ИЕРАРХИЧЕСКИЙ РЯД СИГНАЛОВ

Систематизируем сведения о ширине спектров различных сигналов. Расположим сигналы в иерархический ряд, т. е. в последовательности, соответствующей расширяющимся спектрам.

Периодический гармонический сигнал (рис. 10.14, а) является самым узкополосным, вся полоса состоит из одной частоты  $f = 1/T$ . Увеличим несколько крутизну склонов, придадим сигналу треугольную форму. В этом случае появляются высшие гармоники, затухающие по квадратичному закону. Увеличим крутизну фронтов, превратим сигнал в прямоугольный со скважностью 2. При этом амплитуды гармоник уменьшаются по линейному закону и спектр соответственно расширяется. При увеличении периода  $T$  и неизменном  $t_{\text{и}}$  скважность увеличивается, "первый нуль" перемещается в область более высоких частот, спектр расширяется. Укоротим время импульса  $t_{\text{и}}$ , частота "первого нуля" при этом останется прежней, но спектр расширится в области низких частот и станет более частым. При сохранении дли-



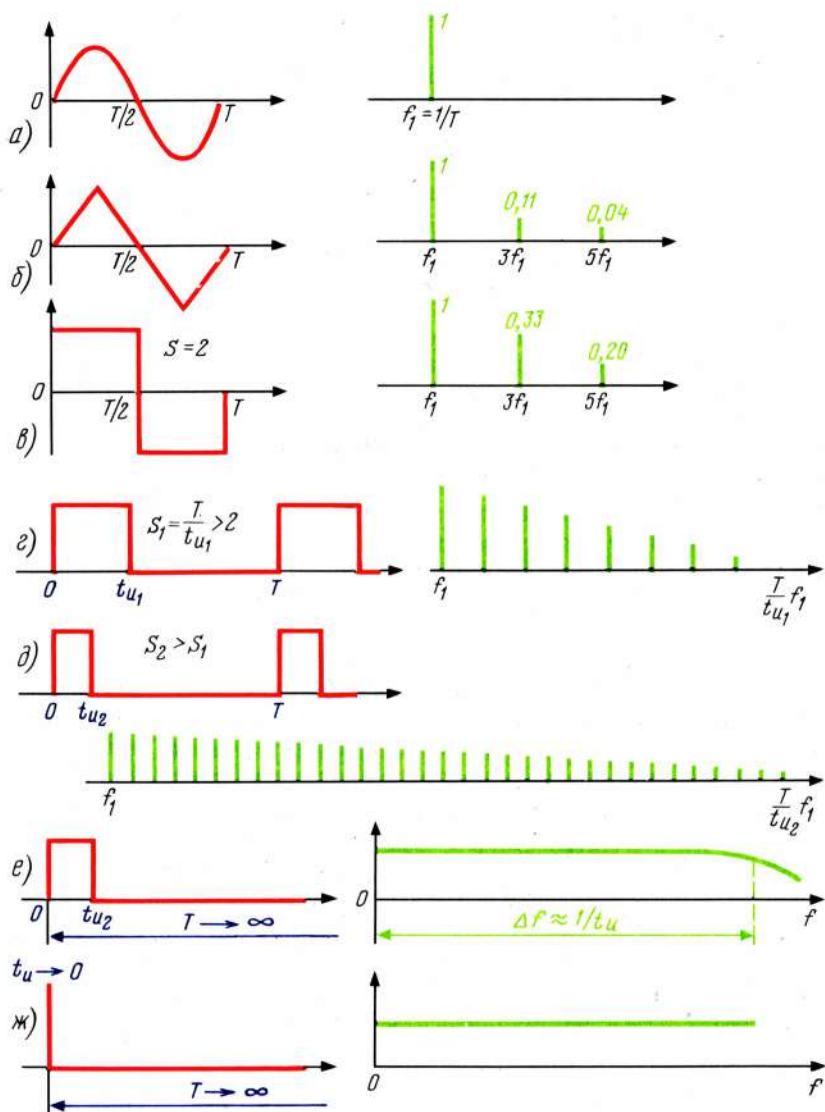


Рис. 10.14

тельности импульса прежним и увеличении периода до бесконечности спектр превращается в сплошной, шириной примерно  $1/t_u$ . При уменьшении длительности импульса до бесконечно малого значения "первый нуль" перемещается в  $\infty$ , спектр, следовательно, становится непрерывным, равномерным и неограниченно широким. Импульс, бесконечно короткий, с бесконечно большой амплитудой и площадью импульса, равной 1, называется *импульсной функцией* или  *$\delta$ -функцией* (читается "дельта-функция"). Таким обра-

Рис. 10.15



зом, периодический сигнал гармонической формы – самый узкополосный сигнал, состоящий всего из одной частоты, а непериодический импульсный сигнал – самый широкополосный, состоящий из бесконечно большого числа частот.

Четырехполюсник, не искажающий сигналы вида  $\delta$ -функции, пропускает без искажений сигнал любой формы. Разумеется,  $\delta$ -функция является идеализированным сигналом, на практике для получения широких спектров с амплитудами, близкими к постоянным, используют короткие импульсы с большой скважностью. Как следует из вышеизложенного, испытания различных четырехполюсников (в том числе усилителей и др.) с помощью гармонических сигналов во многих случаях малоэффективны. Испытания следует производить по схеме рис. 10.15. На вход испытуемого четырехполюсника подводят сигнал, близкий к  $\delta$ -функции, и по изображению напряжения на выходе четырехполюсника судят о полосе его пропускания (способы получения узких коротких сигналов будут рассмотрены в гл. 13).

#### 10.9. КОЭФФИЦИЕНТ ИСКАЖЕНИЙ

Коэффициентом искажений  $K_{\text{и}}$  называется отношение геометрической суммы амплитуд высших гармонических составляющих к амплитуде первой гармоники. Коэффициент искажений выражается в относительных числах или процентах:

$$K_{\text{и}} = \frac{\sqrt{A_{m2}^2 + A_{m3}^2 + \dots + A_{mk}^2}}{A_{m1}} \cdot 100\%. \quad (10.20)$$

Подсчитаем коэффициент искажений для сигналов различных форм. Для сигналов треугольной формы

$$u = \frac{8U_m}{\pi^2} \left[ \sin \omega_1 t - \frac{1}{9} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{25} \sin 5\omega_1 t + \dots \right];$$

$$K_{\text{и}} = \sqrt{1/9^2 + 1/25^2} \cdot 100 = \sqrt{0,01235 + 0,0016} \cdot 100 = 11,8 \, \%.$$

Для сигналов прямоугольной формы со скважностью 2

$$u = \frac{4U_m}{\pi} \left[ \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right];$$

$$K_{\text{и}} = \sqrt{1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots} \cdot 100 = \sqrt{0,11 + 0,04 + 0,0204} \cdot 100 = 41,4 \, \%.$$

Для сигналов прямоугольной формы со скважностью 10 (см. табл. 10.1)

$$K_{\text{и}} = \frac{\sqrt{U_{m2}^2 + U_{m3}^2 + U_{m4}^2 + U_{m5}^2 + U_{m6}^2 + U_{m7}^2 + U_{m8}^2 + U_{m9}^2}}{U_{m1}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{\sqrt{18,8^2 + 17,15^2 + 15,2^2 + 12,7^2 + 10^2 + 7,3^2 + 4,7^2 + 2,16^2}}{19,7} \cdot 100 =$$

$$= 177,2 \%$$

#### 10.10. ФОРМА ТОКА В $RL$ - И $RC$ -ЦЕПЯХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть имеется  $L$ -цепь, ко входу которой приложено напряжение прямоугольной формы со скважностью 2 (рис. 10.16, *а*). Для частоты первой гармоники  $\omega_1$  сопротивление индуктивности  $\omega_1 L$ , а для частоты  $k$ -й гармоники соответственно  $k\omega_1 L$ . Если напряжение сигнала прямоугольной формы на частоте первой гармоники  $U_{m1}$ , то на частоте  $k$ -й гармоники оно  $\frac{1}{k} U_{m1}$ , поскольку у напряжений прямоугольной формы со скважностью 2 амплитуды гармонических составляющих уменьшаются пропорционально номеру гармоники.

Определим амплитуды гармонических составляющих тока. На первой гармонике  $I_{m1} = U_{m1}/\omega_1 L$ , на  $k$ -й гармонике  $I_{mk} = U_{m1}/k \cdot k\omega_1 L = I_{m1}/k^2$ , т. е. амплитуды гармонических составляющих тока убывают пропорционально квадрату номера гармоники, а это означает, что ток имеет треугольную форму.

Таким образом, в индуктивной цепи напряжение прямоугольной формы со скважностью 2 вызывает ток треугольной формы (рис. 10.16, *б*), а при напряжении со скважностью более 2 — ток пилообразной формы (рис. 10.16, *в*).

Индуктивность вследствие увеличения сопротивления с повышением номера гармоник оказывает на ток сглаживающее действие, поэтому коэффициент искажений тока в  $L$ -цепи меньше, чем коэффициент искажения напряжения  $K_{и(I)} < K_{и(U)}$ . Так как в резистивной цепи ( $R$ -цепи) форма тока повторяет форму напряжения, то в  $RL$ -цепи при изменении резистивного сопротивления  $R$  от 0 до значения много большего, чем индуктивное сопротивление, форма тока изменяется от треугольной до прямоугольной.

Определим форму тока в емкостной цепи ( $C$ -цепи) при прямоугольном воздействии (рис. 10.17, *а*). Сопротивление емкостного элемента на частоте

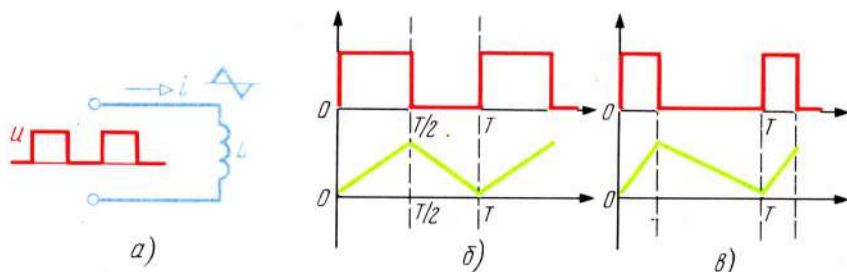


Рис. 10.16



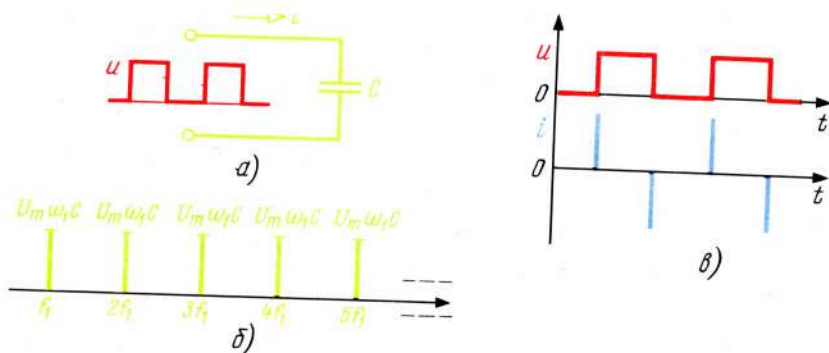


Рис. 10.17

первой гармоники  $1/\omega_1 C$ , на  $k$ -й гармонике  $1/k\omega_1 C$ . Амплитуда тока на первой гармонике  $I_{m1} = U_{m1} \omega_1 C$ , а на  $k$ -й гармонике

$$I_m(k) = U_m(k)/X_C(k) = \frac{U_{m1} \cdot k \omega_1 C}{k} = U_{m1} \omega_1 C = I_{m1}.$$

Из произведенных расчетов видно, что амплитудные значения составляющих тока не зависят от номера гармоники и на каждой гармонике имеют одинаковое значение, равное  $U_{m1} \omega_1 C$ .

Так как ко входу цепи приложено периодическое напряжение с периодом  $T$ , то спектральные составляющие тока будут дискретными, с частотным интервалом  $\Delta f = 1/T$  друг от друга (рис. 10.17, б). Определим форму тока, при которой получается спектр, показанный на этом рисунке. Спектр тока линейчатый, следовательно, форма тока периодическая, с периодом  $T = 1/f_1$ . Поскольку амплитуды спектральных составляющих одинаковые, "первый нуль" находится в бесконечности, т. е.  $T/t_n = \infty$ . Но так как  $T$  — величина конечная, то данное соотношение может быть только при  $t_n \rightarrow 0$ . Таким образом, если напряжение, приложенное к емкости, имеет прямоугольную форму, то ток имеет форму узких, коротких импульсов (рис. 10.17, в). В резистивной цепи ток повторяет форму напряжения, следовательно, в  $RC$ -цепи при изменении резистивного сопротивления  $R$  от 0 до весьма большого значения форма тока изменяется от коротких импульсов до прямоугольной, т. е. до формы приложенного напряжения.

Коэффициент передачи избирательных цепей на различных частотах имеет неодинаковое значение. Поэтому при прохождении негармонических сигналов через колебательные контуры спектр выходного напряжения будет отличным от спектра входного. *Модуль выходного напряжения на частоте каждой гармонической составляющей  $U_2$  есть модуль напряжения данной частоты на входе  $U_1$ , умноженный на модуль коэффициента передачи контура  $H$  для этой же частоты:*

$$U_2(k) = U_1(k) H(k). \quad (10.21)$$

Аргумент выходного напряжения  $\varphi_2(k)$  есть аргумент входного напряжения  $\varphi_1(k)$ , сложенный с аргументом передаточной функции цепи на дан-

ной частоте:

$$\varphi_{U2}(K) = \psi_{U1}(K) + \varphi_H(K). \quad (10.22)$$

#### 10.11. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ (ТОКОВ) ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В гл. 2 [см. (2.12), (2.13)] было показано, что действующее значение любого периодического сигнала определяется из выражений

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}, \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

При сигналах негармонической формы мгновенные значения описываются рядами Фурье. Если вместо мгновенных значений  $u$  или  $i$  в (2.12) и (2.13) подставить соответствующие ряды и произвести необходимые алгебраические преобразования, то получатся выражения

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{m1}^2}{2} + \frac{U_{m2}^2}{2} + \dots + \frac{U_{mk}^2}{2}}; \quad (10.23)$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m2}^2}{2} + \dots + \frac{I_{mk}^2}{2}}, \quad (10.24)$$

где  $U_0$  и  $I_0$  — постоянные составляющие;  $U_m(k)$  и  $I_m(k)$  — максимальные значения гармонических составляющих.

Таким образом, чтобы рассчитать действующие значения напряжений или токов негармонической формы, следует знать выражения мгновенных значений, т. е. ряды напряжений или токов данных сигналов.

**Пример 10.5.** Рассчитать действующее значение периодического напряжения прямоугольной формы со скважностью 2 и 10, если  $U_m = 100$  В.

**Решение.** Запишем ряд данного напряжения

$$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \left[ \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \dots + \frac{1}{k} \sin k\omega_1 t \right].$$

Рассчитаем действующее значение при  $S = 2$ :

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{m1}^2}{2} + \frac{U_{m2}^2}{2} + \dots} = \frac{4U_m}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{9 \cdot 2} + \frac{1}{25 \cdot 2} + \dots} =$$

$$= 1,273 U_m \sqrt{0,6169} = 1,273 \cdot 0,7854 U_m = U_m.$$

Таким образом, действующее значение периодического напряжения прямоугольной формы со скважностью 2 равно максимальному значению  $U_m$ , что было получено графическим способом ранее [(см. (2.15))].

Рассчитаем  $U$  при скважности 10. По (2.16) действующее значение напряжения прямоугольной формы  $U = U_m \sqrt{t_n/T}$ , следовательно, при  $S = 10$   $U = U_m \sqrt{0,1} = 0,316 U_m$ . Произведем подсчет по (10.23). Ограничимся первыми десятью членами ряда, тогда

$$U = \sqrt{10^2 + \frac{(19,67)^2}{2} + \frac{(18,8)^2}{2} + \frac{(17,2)^2}{2} + \frac{(15,2)^2}{2} + \frac{(12,7)^2}{2} + 10^2/2 + \frac{(7,3)^2}{2} + \frac{(4,7)^2}{2} + \frac{(2,16)^2}{2}} = 30,1.$$

Если увеличить число членов до весьма большого значения, то  $U = 0,316 U_m = 31,613$ .

**Пример 10.6.** Рассчитать действующее значение напряжения однополупериодной формы с максимальным значением тока  $I_m = 100$  мА (см. рис. 10.2, з).

**Решение.** Запишем ряд для сигнала однополупериодной формы:

$$i(t) = \frac{I_m}{\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega_1 t + \frac{2}{3} \cos 2\omega_1 t - \frac{2}{15} \cos 4\omega_1 t + \dots \right];$$

$$I = \frac{I_m}{\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{15}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \dots} = 1,57 \frac{I_m}{\pi} = 0,5 I_m = 50 \text{ мА}.$$

#### 10.12. СРЕДНЕЕ ЗА ПЕРИОД ЗНАЧЕНИЕ СИГНАЛОВ НЕГАРМОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

*Средним за период значением сигнала произвольной формы* называется величина, численно равная разности площадей над и под горизонтальной осью, деленная на период (рис. 10.7):

$$A_{\text{ср}} = \frac{|S_1| - |S_2|}{T}. \quad (10.25)$$

Аналитически среднее за период значение определяется из выражения

$$A_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (10.26)$$

Так как  $f(t) = A_0 + A_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{m2} \sin(2\omega_1 t + \psi_2) + \dots$ , то  $A_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \left[ \int_0^T A_0 dt + \int_0^T A_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_1) dt + \dots \right]$ . Как известно (см. гл. 2), интеграл за период от любой гармонической функции равен 0, поэтому

$$A_{\text{ср}} = \frac{1}{T} A_0 \int_0^T dt = \frac{1}{T} A_0 (T - 0) = A_0. \quad (10.27)$$

Таким образом, среднее за период значение негармонической функции численно равно постоянной составляющей этой функции.

**Пример 10.7.** Определить среднее значение за период напряжения однополупериодной формы, если  $U_m = 100$  В.

**Решение.** Так как постоянная составляющая напряжения однополупериодной формы равна  $U_m/\pi$ , то  $U_{\text{ср}}$  этого сигнала составляет  $100/3,14 = 31,8$  В.

#### 10.13. ЦЕПИ С ОТКРЫТЫМ И ЗАКРЫТЫМ ВХОДАМИ

*Цепями с открытым входом* называются цепи, в которых отсутствуют элементы, препятствующие прохождению постоянной составляющей тока (рис. 10.18, а), а *цепями с закрытым входом* — цепи, в которых постоянная



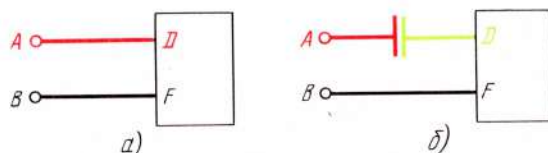


Рис. 10.18

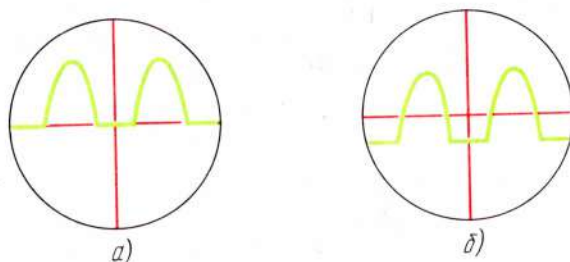


Рис. 10.19

составляющая тока протекать не может чаще всего из-за конденсатора, включенного последовательно с входными зажимами цепи (рис. 10.18, б). Поскольку конденсатор для постоянной составляющей тока представляет бесконечно большое сопротивление, среднее значение напряжений и токов в различных точках цепи после конденсатора равно 0, т. е. площади кривых над и под горизонтальной осью должны быть одинаковыми. Но такое равенство площадей произойдет только в том случае, если ось времени сместится на величину постоянной составляющей. Например, на входе цепи, т. е. на точках  $AB$ , имеется напряжение однополупериодной формы, у которого линии с нулевыми мгновенными значениями совпадают с горизонтальной осью на экране осциллографа (рис. 10.19, а), а если теперь в цепи с закрытым входом подключить осциллограф к точкам  $DF$ , то изображение сместится вниз на величину постоянной составляющей этого сигнала, в данном случае на  $0,318 U_m$ . Площади над и под горизонтальной осью станут при этом равными (рис. 10.19, б).

#### 10.14. МАКСИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СИГНАЛОВ НЕГАРМОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

В сигналах негармонической формы (рис. 10.20) следует различать следующие максимальные значения.

Максимальное значение при прямом включении  $A_{m\text{пр}}$  (можно обозначать  $\hat{A}$ ), представляет собой наибольшее по модулю из всех мгновенных

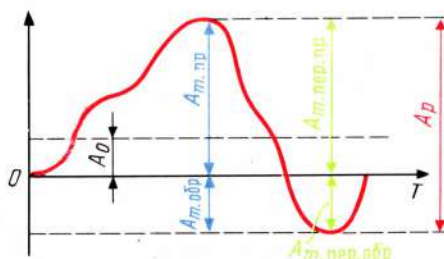


Рис. 10.20.

положительных значений за период. Аналогично максимальным значением при обратном включении  $A_{mобр}$  ( $A$ ) называется наибольшее по модулю из всех мгновенных отрицательных значений. Значения  $U_{mпр}$  и  $U_{mобр}$  пропорциональны показаниям амплитудных вольтметров и осциллографов с открытым входом при прямом и обратном включениях соответственно. Максимальное значение переменной составляющей при прямом включении  $U_{mпер.пр}(\hat{U}_a)$  определяется как разность  $U_{mпр} - U_0$ . Максимальное значение переменной составляющей при обратном включении  $U_{mпер.обр}(\hat{U}_a)$  представляет сумму  $U_{mпр} + U_0$ . Значениям  $U_{mпер.пр}$  и  $U_{mпер.обр}$  пропорциональны показания амплитудных вольтметров и осциллографов с закрытыми входами. Если постоянная составляющая отсутствует, то  $A_{mпер.пр} = A_{mпр}$ , а  $A_{mпер.обр} = A_{mобр}$ . Если сигнал состоит только из нечетных гармоник, то  $A_{mпр} = A_{mпер.пр} = A_{mобр} = A_{mпер.обр} = A_m$ . В этом частном случае индексы "пер", "пр" и "обр" опускают и называют короче – "максимальное значение".

Размах сигнала  $A_p$  представляет сумму модулей максимальных значений при прямом и обратном включениях:

$$(A_p = |U_{mпр}| + |U_{mобр}| = |U_{mпер.пр}| + |U_{mпер.обр}|)$$

(можно обозначать  $\hat{U}$ , или  $U_e$ ), или разность максимального и минимального значений ( $U_p = u_{max} - u_{min}$ ). Размах изображения на экране осциллографа пропорционален размаху напряжения, подведенного к входным зажимам осциллографа.

#### 10.15. РАСЧЕТЫ ЦЕПЕЙ ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В линейных  $RLC$ -цепях при негармонических воздействиях отклики следует рассчитывать для каждой гармоники в отдельности, а затем эти отклики сложить. При расчетах следует иметь в виду, что сопротивления резистивных элементов от частоты не зависят, сопротивления индуктивных элементов определяются из выражения  $X_{Lk} = k\omega_1 L$ , а сопротивления емкостных элементов – из выражения  $X_{Ck} = 1/k\omega_1 C$ , где  $k$  – номер гармоники.

**Пример 10.8.** Рассчитать мгновенные напряжения на выходе цепи рис. 10.21, если напряжение на входе имеет вид односторонних прямоугольных импульсов с размахом 100 В при скважности 2 и периодом  $T = 100$  мкс.

**Решение.** Частота первой гармоники

$$f_1 = 1/T = 1/10^{-4} = 10^4 \text{ Гц} = 10 \text{ кГц.}$$

Постоянная составляющая данного сигнала в соответствии с (10.19)

$$U_0 = U_p/S = 100/2 = 50 \text{ В.}$$

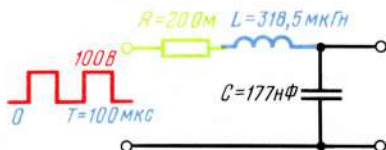


Рис. 10.21

Запишем ряд входного напряжения:

$$u = U_0 + \frac{2U_m}{\pi} \left[ \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right].$$

[Заметим, что у односторонних сигналов прямоугольной формы коэффициент перед скобкой  $2U_m/\pi$ , а не  $4U_m/\pi$ , как у двусторонних, см. (10.10) и (10.18).] Рассчитаем сопротивления реактивных элементов на частоте первой гармоники. На нулевой частоте  $X_C = \infty$ , поэтому ток первой гармоники равен 0. Комплексное максимальное значение тока на частоте  $\omega_1$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m(1)} &= \dot{U}_{m(1)} / \underline{Z}_{(1)} = 64 e^{j0^\circ} / [R + j(X_{L(1)} - X_{C(1)})] = 64 / [20 + j(20 - 90)] = \\ &= 64 / (20 - j70) = 64 / 72,8 e^{-j74^\circ} = 0,879 e^{j74^\circ}. \end{aligned}$$

Максимальное комплексное напряжение на емкости  $C$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mC(1)} &= \dot{I}_{m(1)} \underline{Z}_{C(1)} = 0,879 e^{j74^\circ} \cdot 90 e^{-j90^\circ} = 79,12 e^{-j16^\circ}, \quad u_{C(1)} = \\ &= 79,12 \sin(\omega_1 t - 16^\circ). \end{aligned}$$

Для частоты третьей гармоники  $X_{L(3)} = 3 \cdot 20 = 60 \text{ Ом}$ ,  $X_{C(3)} = 90/3 = 30 \text{ Ом}$ ;  
 $\dot{I}_{m(3)} = \dot{U}_{m(3)} / \underline{Z}_{(3)} = 21,1 e^{j0^\circ} / [20 + j(60 - 30)] = 21,1 / (20 + j30) = 21,1 / 36 e^{j56^\circ} =$   
 $= 0,586 e^{-j56^\circ}$ ;  $\dot{U}_{C(3)} = \dot{I}_{m(3)} \underline{Z}_{C(3)} = 0,586 e^{-j56^\circ} \cdot 30 e^{-j90^\circ} = 17,6 e^{-j146^\circ} =$   
 $= -17,6 e^{j34^\circ}$ .  $u_{C(3)} = -17,6 \sin(3\omega_1 t + 34^\circ)$ .

Для частоты пятой гармоники  $X_{L(5)} = 5 \cdot 20 = 100 \text{ Ом}$ ;  $X_{C(5)} = X_{C(1)}/5 =$   
 $= 90/5 = 18 \text{ Ом}$ .  $\dot{I}_{m(5)} = \dot{U}_{m(5)} / \underline{Z}_{(5)} = 13 e^{j0^\circ} / [20 + j(100 - 18)] = 13 / (20 + j82) =$   
 $= 13 / 84,4 e^{j76^\circ} = 0,154 e^{-j76^\circ}$ .  $U_{C(5)} = \dot{I}_{m(5)} \underline{Z}_{C(5)} = 0,154 e^{-j76^\circ} 18 e^{-j90^\circ} =$   
 $= 2,77 e^{-j166^\circ} = -2,77 e^{j14^\circ}$ ;  $u_{C(5)} = -2,77 \sin(5\omega_1 t + 14^\circ)$  и т. д. Уравнение вы-

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= u_{C(1)} + u_{C(3)} + u_{C(5)} = 79,12 \sin(\omega_1 t - 16^\circ) - 17,6 \sin(3\omega_1 t + 34^\circ) - \\ &- 2,77 \sin(5\omega_1 t + 14^\circ) + \dots \end{aligned}$$

## 10.16. МОЩНОСТЬ ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В линейных цепях при негармонических воздействиях активные и реактивные мощности рассчитываются для каждой гармоники в отдельности.

**Пример 10.9.** Произвести проверку активных и реактивных мощностей в цепи рис. 10.21.

**Решение.** Расчеты по первой гармонике:

$$P_{Г1} = (U_{mГ1} \cdot I_{m1} / 2) \cos \varphi_1 = \left( \frac{64 \cdot 0,879}{2} \right) \cos 74^\circ = 7,72 \text{ Вт.}$$

$$P_{Н1} = I_{m1}^2 R / 2 = (879^2 \cdot 20 / 2) = 7,72 \text{ Вт.}$$

$$P_{QГ1} = (U_{mГ1} I_{mГ1} / 2) \sin \varphi_1 = \left( \frac{64 \cdot 0,879}{2} \right) \sin(-74^\circ) = -27 \text{ вар.}$$

$$P_{QH1} = [I_{m1}^2 (X_{L1} - X_{C1})] / 2 = (0,879^2 / 2) (-70) = -27 \text{ вар.}$$



По третьей гармонике:

$$P_{r3} = (U_{m3} I_{m3}/2) \cos \varphi_3 = (21,1 \cdot 0,586/2) \cos 56^\circ = 3,45 \text{ Вт.}$$

$$P_{n3} = I_{m3}^2 R/2 = (0,586^2 \cdot 20/2) = 3,43 \text{ Вт.}$$

$$P_{Q3} = (U_{m3} \cdot I_{m3}/2) \sin \varphi_3 = (21,1 \cdot 0,586/2) \sin 56^\circ = 5,12 \text{ вар.}$$

$$P_{Qn3} = I_{m3}^2 (X_{L3} - X_{C3})/2 = [0,586^2 (60 \cdot 30)/2] = 5,15 \text{ вар.}$$

По пятой гармонике:

$$P_{r5} = (U_{m5} I_{m5}/2) \cos \varphi_5 = (13 \cdot 0,154/2) \cos 76^\circ = 0,24 \text{ Вт.}$$

$$P_{n5} = I_{m5}^2 R/2 = 0,154^2 \cdot 20/2 = 0,237 \text{ Вт.}$$

$$P_{Qr5} = (U_{m5} I_{m5}/2) \sin \varphi_5 = (13 \cdot 0,154/2) \sin 76^\circ = 0,97 \text{ вар.}$$

$$P_{Qn5} = I_{m5}^2 (X_{L5} - X_{C5})/2 = (0,154^2/2) (90 - 18) = 0,97 \text{ вар.}$$

Активная мощность, отдаваемая генератором,  $P_r = P_{r1} + P_{r3} + P_{r5} + \dots = 7,72 + 3,43 + 0,237 = 11,387 \text{ Вт.}$

Активная мощность, потребляемая цепью,  $P_n = P_{n1} + P_{n3} + P_{n5} + \dots = 7,72 + 3,43 + 0,237 = 11,387 \text{ Вт.}$

Рассчитаем процент расхождения:

$$\delta \% = \frac{P_r - P_n}{P_r} 100 = \frac{(11,41 - 11,387)}{11,41} \cdot 100 = 0,2 \%,$$

что вполне допустимо.

#### 10.17. КОЭФФИЦИЕНТ АМПЛИТУДЫ

Коэффициентом амплитуды  $K_A$  называется отношение максимального значения сигнала к действующему значению этого же сигнала:

$$K_A = U_m/U.$$

У сигналов гармонической формы  $K_{A\omega} = U_{m\omega}/U_{\omega} = 1,41 U/U = 1,41$ . Сигналы, у которых коэффициент амплитуды менее  $\sqrt{2}$ , часто называют "тупыми", а сигналы, у которых  $K_A > \sqrt{2}$ , — "острыми". Коэффициент амплитуды для двусторонних сигналов прямоугольной формы  $K_{A\Box} = U_{m\Box}/U_{\Box} = U_m/U_m = 1$ . У "тупых" сигналов максимальное значение первой гармоники больше максимального значения всего сигнала. Например, у двусторонних сигналов прямоугольной формы максимальное значение первой гармоники  $4U_m/\pi = 1,27 U_m$ , т. е. на 27 % больше максимального значения сигнала.

Коэффициент амплитуды сигналов треугольной формы

$$K_{A(\Delta)} = U_{m\Delta}/U_{\Delta} = \frac{U_m}{(8 U_m/\pi^2) \sqrt{1/2 + 1/(81 \cdot 2) + \dots}} = 1,73.$$

В принципе, коэффициент амплитуды может быть использован для оценки сигналов с любыми видами симметрии, но на практике используется чаще всего для характеристики сигналов, симметричных относительно горизонтальной оси.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Каким образом кривые негармонической формы заменяются совокупностью кривых гармонической формы? Какие принципы при этом должны выполняться?
2. Как рассчитать синусоидальные и косинусоидальные коэффициенты членов ряда Фурье?
3. Как рассчитывают общие коэффициенты и начальные фазы гармонических составляющих несинусоидальных сигналов?
4. Запишите ряды для токов следующих форм: синусоидальной, треугольной, прямоугольной, однополупериодной, двухполупериодной.
5. Из каких членов состоят ряды сигналов, симметричных относительно: а) горизонтальной оси; б) вертикальной оси; в) начала осей координат?
6. Покажите способы разложения негармонических сигналов в ряд графоаналитическим способом.
7. Что называется амплитудным спектром периодических сигналов? Каким образом строят данные спектры?
8. В чем состоит разница между спектрами периодических гармонических и периодических негармонических сигналов?
9. Докажите, что номер гармоники, на которой амплитуда спектральной составляющей в сигналах прямоугольной формы первый раз принимает нулевое значение, численно равно скважности этого сигнала.
10. Как изменяется спектр сигнала прямоугольной формы при а)  $T = \text{const}$ ,  $t_{\text{и}} - \text{var}$ ; б)  $t_{\text{и}} = \text{const}$ ,  $T - \text{var}$ ?
11. Какая принципиальная разница между спектрами периодических и непериодических сигналов?
12. Как приблизительно определить ширину спектра короткого одиночного непериодического сигнала?
13. Что произойдет при прохождении сигнала, если полоса пропускания контура уже полосы сигнала, например, прямоугольной формы?
14. Какие вы знаете критерии для практического определения ширины спектров сигналов?
15. Нарисуйте сигналы с возрастающей шириной спектра.
16. Какой сигнал называется  $\delta$ -функцией? Каков спектр этого сигнала?
17. Как рассчитать коэффициент искажений сигнала? Приведите примеры.
18. Какую форму имеет ток в  $L$ -цепи и  $C$ -цепи при напряжении прямоугольной формы?
19. Разберите прохождение сигналов негармонической формы через колебательные контуры. Как изменяется амплитудный и фазный спектры при прохождении сигнала через различные цепи?
20. Как определяют действующее значение напряжения (тока) негармонической формы? Приведите примеры.
21. Рассчитайте и постройте кривую зависимости действующего значения напряжения прямоугольной формы в зависимости от скважности при изменении скважности от 2 до 5.
22. Как рассчитать среднее за период значение напряжений (токов) негармонической формы?
23. Какая разница между цепями с открытым и закрытым входами?
24. Какие максимальные значения у сигналов негармонической формы вы знаете? Приведите примеры.
25. В каких случаях  $U_{m\text{пер.пр}} = U_{m\text{пр}}$ , а  $U_{m\text{пер.обр}} = U_{m\text{обр}}$ ? Могут ли быть случаи, и если могут, то при каких условиях, чтобы  $U_{m\text{пр}} = U_{m\text{пер. пр}} = U_{m\text{обр}} = U_{m\text{пер.обр}}$ ?

26. Как подсчитать коэффициент амплитуды сигнала? Приведите примеры.
27. Как рассчитываются активные и реактивные мощности в цепях при гармонических воздействиях? Приведите примеры.

## Глава 11.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

### 11.1. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Все резистивные сопротивления делятся на две группы: линейные и нелинейные. *Линейными* называются сопротивления, значения которых не изменяются в зависимости от протекающего через них тока или приложенного к ним напряжения. Например, резисторы типа МЛТ являются типично линейными, поскольку их сопротивления определяются только конструкцией и не зависят от режима работы. *Нелинейными* называются сопротивления, значения которых изменяются при изменении напряжений или токов. Нелинейные элементы могут быть металлическими (такие элементы будут рассмотрены ниже), но в электронных цепях гораздо чаще используют нелинейные элементы полупроводникового типа, например диоды, транзисторы, стабилитроны, различные микросхемы, операционные усилители и т. д. Большинство из этих элементов в одних режимах ведут себя практически как линейные, а в других — как нелинейные.

Для каждого элемента существует своя вольт-амперная характеристика, показывающая зависимость между напряжениями на зажимах элемента, и токами, текущими через этот элемент. У пассивных линейных элементов вольт-амперная характеристика (сокращенное название — ВАХ) имеет вид прямой линии, проходящей через начало координат (отсюда и термин — «линейные» элементы) (рис. 11.1, красная), а у нелинейных соответственно, отличные от прямой (рис. 11.1 синяя и зеленая). Линейная ВАХ показывает графически пропорциональность между напряжением и током в элементе, т. е. соответствует закону Ома для линейных резистивных цепей. С помощью ВАХ можно определять сопротивление элементов при различных режимах. Так как  $R = u/i$ , то для определения сопротивления элемента или цепи необходимо значение напряжения в данной точке характеристики поделить на значение тока в этой же точке (рис. 11.2, а). Но отношение отрезка, соответствующего напряжению  $u$ , к отрезку, соответствующему току  $i$ ,

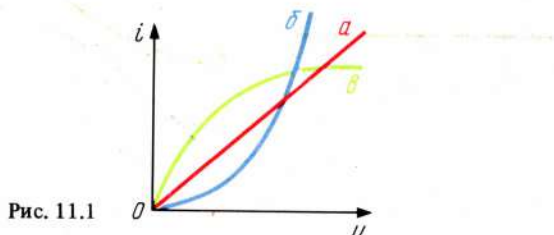


Рис. 11.1



на графике есть тангенс угла наклона между касательной в данной точке характеристики и вертикальной осью. Если ВАХ линейная, то касательная в любой точке характеристики совпадает с самой характеристикой, в этом случае  $R = (\kappa_u / \kappa_i) \operatorname{tg} \alpha = \kappa_R \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\kappa_u$  — масштаб по горизонтальной оси, а  $\kappa_i$  — по вертикальной. Поскольку  $\kappa_u$  имеет размерность В/кл, а  $\kappa_i$  — А/кл, то  $[\kappa] = \frac{\text{В} \cdot \text{кл}}{\text{кл} \cdot \text{А}} = \text{Ом}$ . Таким образом, сопротивление цепи в любой

точке пропорционально (а не равно, как иногда неверно считают!) тангенсу угла наклона между касательной, проведенной в данной точке характеристики, и осью тока. Если ВАХ нелинейная, то в каждой точке характеристики тангенс угла наклона оказывается различным, следовательно, и сопротивления будут также различными. Например, если ВАХ имеет вид, показанный на рис. 11.2, б, то из такой характеристики видно, что у данного нелинейного элемента с увеличением напряжения сопротивление цепи растет, поскольку растет угол наклона характеристики. Например, если при напряжении  $u_1$  угол  $\alpha_1$  составляет  $45^\circ$ , а при напряжении  $u_2 = 63^\circ 26'$ , то сопротивление цепи при напряжении  $u_2$  оказывается в 2 раза больше сопротивления при  $u_1$ , поскольку  $\operatorname{tg} 63^\circ 26' = 2$ , а  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ . Чтобы выразить сопротивления в омах, необходимо знать коэффициент пропорциональности  $\kappa_R$ , зависящий от масштаба напряжений и токов. Так, если при  $u_1 = 10$  В ток  $i_1 = 5$  мА, а при  $u_2 = 40$  В  $i_2 = 10$  мА, то это означает, что при изменении напряжения от 10 до 40 В сопротивление цепи возрастает от  $R_1 = 10/5 \times 10^{-3} = 2$  до  $R_2 = 40/10 \cdot 10^{-3} = 4$  кОм. Очевидно, что вследствие увеличения сопротивления цепи ток растет медленнее, чем напряжение. Действительно, при возрастании напряжения в 4 раза ток в данной цепи увеличивается только в 2 раза и т. д.

Вольт-амперные характеристики можно описывать аналитически, в виде алгебраических уравнений. Линейные ВАХ описываются уравнением первой степени, представляющим, в сущности, закон Ома  $i = Gu$ , где  $G$  — проводимость цепи. Нелинейные ВАХ описываются полиномами (т. е. многочленами) более высоких порядков (т. е. больших степеней):

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + a_5 u^5 + \dots, \quad (11.1)$$

где  $a_0$  — постоянная составляющая тока;  $a_1 \dots a_5$  — постоянные коэффици-

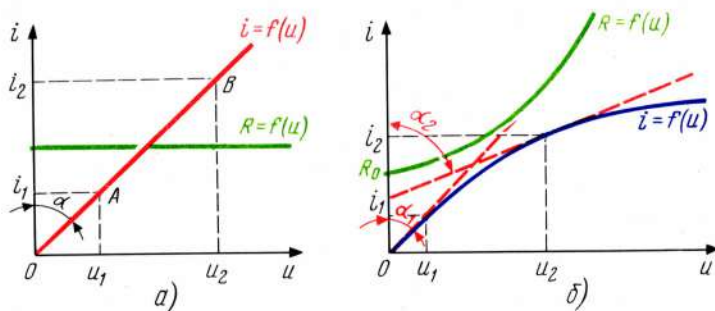


Рис. 11.2

енты с размерностью проводимости в соответствующих степенях и зависящие от вида ВАХ. Чем сильнее ВАХ отличается от прямой линии, тем полиномами более высоких порядков она описывается и тем сильнее изменяются сопротивления при изменении приложенного к нелинейной цепи напряжения или протекающего через них тока.

## 11.2. ФОРМА ТОКА В НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Пусть имеется резистивная линейная цепь, к зажимам которой приложено напряжение произвольной формы. При неизменном сопротивлении ток повторяет форму приложенного напряжения. Так, при синусоидальном напряжении ток имеет также синусоидальную форму. Но если при изменении мгновенных значений напряжений сопротивление цепи изменяется, то мгновенный ток будет изменяться по некоторому новому закону, отличному от синусоидального, и кривая тока, следовательно, будет состоять не из одной, а из нескольких частот, как всякая негармоническая кривая. Таким образом, в нелинейной цепи напряжение некоторой формы порождает ток иной формы, т. е. в откликах нелинейной цепи появляются частоты, которых нет в воздействующем напряжении. Покажем, каким образом определяют частоты, из которых состоит ток, если входное напряжение имеет синусоидальную форму  $u = U_m \sin \omega_1 t$ . Пусть ВАХ цепи определяется полиномом второго порядка и описывается уравнением  $i = a_1 u + a_2 u^2$ . Подставив вместо  $u$  выражение  $U_m \sin \omega_1 t$ , получим  $i = a_1 U_m \sin \omega_1 t + a_2 U_m \sin^2 \omega_1 t$ . Так как  $\sin^2 \omega_1 t = (1 - \cos 2\omega_1 t)/2$ , то

$$i = a_1 U_m \sin \omega_1 t + \frac{1}{2} a_2 U_m - \frac{1}{2} a_2 U_m \sin 2\omega_1 t, \quad (11.2)$$

т. е. напряжение на входе цепи состоит только из одной синусоидальной составляющей с частотой  $\omega_1$ , а ток, вызванный этим напряжением, содержит постоянную составляющую  $(1/2)a_2 U_m$ , гармоническую составляющую с частотой воздействующего напряжения  $a_1 U_m \sin \omega_1 t$  и гармоническую составляющую с удвоенной частотой —  $(1/2)a_2 U_m \sin 2\omega_1 t$ . Проведя аналогичные расчеты для ВАХ более высоких порядков, можно строго показать, что частоты гармоник тока определяются степенями ряда, описывающего ВАХ цепи. Например, если ВАХ цепи представляет уравнение  $i = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_5 u^5$ , то при гармоническом напряжении с частотой  $f_1$  ток будет содержать первую, вторую, третью и пятую гармоники. Поскольку в уравнении тока члены с четвертой, шестой и всеми последующими степенями отсутствуют, гармоник с такими номерами в токе также не будет. Этому правилу подчиняются, разумеется, и линейные ВАХ. Эти уравнения имеют вид  $i = a_1 u$ , т. е. содержат члены только первой степени, поэтому в токе будут гармонические составляющие одной первой гармоники, а в резистивных линейных цепях форма тока повторяет форму приложенного напряжения, на что указывалось ранее.

Рассмотрим построение формы кривой тока по заданной вольт-амперной характеристике цепи. Пусть напряжение синусоидальной формы приложено к цепи с ВАХ, показанной на рис. 11.3. В момент  $t = 0$  напряжение  $u = 0$ , как видно из ВАХ,  $i = 0$ . В момент  $t_1$   $u = u_1$ ,  $i = i_1$ . Аналогично в момент



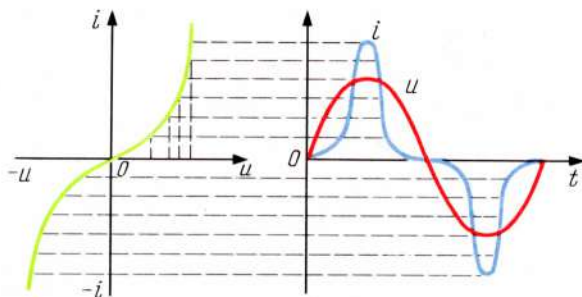


Рис. 11.3

$t_2 u = u_2, i = i_2$  и т. д. Из чертежа видно, что чем сильнее изогнута кривая ВАХ, тем сильнее форма тока отличается от формы напряжения. Аналитические расчеты (которые здесь не приводятся из-за их громоздкости) показывают, что амплитуды гармонических составляющих тока связаны с уравнением полинома ВАХ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \text{на частоте } f_1 \quad I_{m1} &= a_1 U_m + (3/4)a_3 U_m^3 + (5/8)a_5 U_m^5; \\ f_2 = 2f_1 \quad I_{m2} &= (1/2)a_2 U_m^2 + (1/2)a_4 U_m^4; \\ f_3 = 3f_1 \quad I_{m3} &= (1/4)a_3 U_m^3 + (5/16)a_5 U_m^5; \\ f_4 = 4f_1 \quad I_{m4} &= (1/8)a_4 U_m^4; \\ f_5 = 5f_1 \quad I_{m5} &= (1/16)a_5 U_m^5, \end{aligned} \quad (11.3)$$

где  $U_m$  и  $f_1$  — амплитуда и частота воздействующего напряжения. Из полученных уравнений видно, что амплитуды гармоник с нечетными номерами определяются только членами ВАХ с нечетными степенями, а амплитуды гармоник с четными номерами — соответственно членами ряда с четными степенями.

**Пример 11.1.** К нелинейному резистивному сопротивлению с ВАХ  $i = 1 \cdot u - (8/3)u^3 + (16/5)u^5$  приложено синусоидальное напряжение с максимальным значением 1 В. Определить форму тока, протекающего по данному сопротивлению.

**Решение.** Рассчитаем максимальное значение первой гармоники тока  $I_{m1} = a_1 U_m + (3/4)a_3 U_m^3 + (5/8)a_5 U_m^5$ . Так как в данной ВАХ  $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -8/3, a_4 = 0, a_5 = 16/5, U_m = 1$ , то  $I_{m1} = 1 \cdot 1 + (3/4)(-8/3) \cdot 1 + (5/8)(16/5) \cdot 1 = 1 - 2 + 2 = 1$ . Аналогично  $I_{m3} = (1/4)a_3 U_m^3 + (5/16)a_5 U_m^5 = (1/4)(-8/3) \cdot 1 + (5/16)(16/5) \cdot 1 = -2/3 + 1 = 1/3; I_{m4} = 0, I_{m5} = (1/16)a_5 U_m^5 = (1/16)(16/5) \cdot 1 = 1/5$ .

Таким образом, спектр тока состоит из гармонических составляющих с нечетными номерами, амплитуды которых уменьшаются пропорционально номеру гармоники. Как известно, такой спектр имеется у двусторонних сигналов прямоугольной формы. Следовательно, в данной цепи напряжение синусоидальной формы вызывает ток прямоугольной формы.

Обратим внимание на принципиальную разницу между откликами в линейной и нелинейной цепях. В линейных цепях форма тока тоже может отличаться от формы напряжения, но отличия в формах обуславливаются только непропорциональностью между амплитудами напряжений и токов, получающейся из-за изменения сопротивлений реактивных элементов при различных гармониках, а не из-за появления новых частот. Например, в



$L$ -цепи напряжение прямоугольной формы вызывает ток треугольной формы, но и прямоугольные и треугольные сигналы состоят из одних и тех же частот и если в спектре напряжения отсутствуют гармоники с четными номерами, то их не будет и в спектре тока. В нелинейной цепи напряжение синусоидальной формы, состоящее только из одной частоты, может вызвать ток с самыми различными частотами, в зависимости от формы вольт-амперной характеристики цепи.

### 11.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВАХ

Снимать экспериментально вольт-амперные характеристики различных элементов или цепей можно несколькими способами, например с помощью вольтметра и миллиамперметра (рис. 11.4, *а*). Для получения ВАХ с помощью данной схемы изменяют положение движка делителя и записывают показания приборов, измеряющих ток в нелинейном элементе (НЭ) и значение напряжения на нем. Такой способ обладает рядом существенных недостатков: трудоемкая работа по снятию точек характеристики, невозможно получить фотографические снимки ВАХ, недостаточна наглядность, особенно при исследовании ВАХ в динамическом режиме, и т. д. От этих недостатков свободен осциллографический метод получения ВАХ. Для визуального наблюдения за ВАХ собирают цепь по схеме рис. 11.4, *б*. Сопротивление  $R_{ш}$  выбирают много меньше сопротивления исследуемого элемента в любом режиме. Напряжение на резисторе  $R_{ш}$ , пропорциональное току, текущему через данный элемент, подводят к вертикальному каналу осциллографа. Размер вертикального отклонения луча пропорционален мгновенному значению тока в цепи. Напряжение на нелинейном элементе (падением напряжения на сопротивлении  $R_{ш}$  пренебрегаем из-за его малости) подводят к горизонтальному каналу осциллографа, при этом кривая, получающаяся на экране осциллографа, представляет зависимость  $i = f(u)$  и, следовательно, является ВАХ исследуемого элемента или цепи.

Чтобы знать количественные значения токов и напряжений, осциллограф предварительно калибруют, т. е. определяют цены делений шкалы по горизонтали и вертикали.

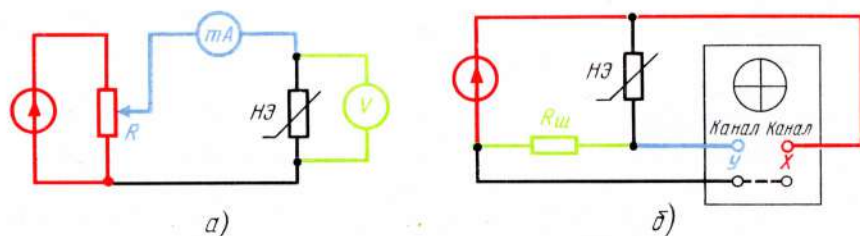


Рис. 11.4

#### 11.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ВАХ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Для экспериментального определения коэффициентов ряда, описывающего ВАХ, необходимо иметь спектр тока, текущего через нелинейный элемент, и знать максимальное значение напряжения источника. Спектральные изображения можно получить, например, на экране осциллографа стенда ЛКТС, предназначенного для выполнения лабораторных работ по дисциплине ТЭЦ, или с помощью какого-либо внешнего анализатора спектра, а напряжение источника гармонических сигналов — с помощью вольтметра V1, находящегося в стенде, или с помощью осциллографа. Если выражения (11.3) решить относительно коэффициентов  $a_1 \dots a_5$ , то получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{I_{m1} - 3I_{m3} + 5I_{m5}}{U_m}; & a_2 &= \frac{2(I_{m2} - 4I_{m4})}{U_m^2}; \\ a_3 &= \frac{4(I_{m3} - 5I_{m5})}{U_m^3}; & a_4 &= \frac{8I_{m4}}{U_m^4}; & a_5 &= \frac{16I_{m5}}{U_m^5}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

**Пример 11.2.** С помощью анализатора спектра установлено, что спектр тока в нелинейном элементе содержит спектральные линии на частотах  $f_1, 3f_1, 5f_1$ . Амплитуды спектральных составляющих относятся, как 1:0,33:0,20, максимальное значение напряжения 1 В. Рассчитать коэффициенты полинома ВАХ данного нелинейного элемента.

**Решение.** Так как спектр состоит из первой, третьей и пятой гармоник, что ряд полинома имеет члены первой, третьей и пятой степеней. Определим коэффициенты ряда ВАХ:

$$a_1 = \frac{I_{m1} - 3I_{m3} + 5I_{m5}}{U_m} = 1 - 3(1/3) + 5(1/5) = 1.$$

$$a_3 = \frac{4(I_{m3} - 5I_{m5})}{U_m^3} = 4[1/3 - 5(1/5)] = -4(2/3) = -8/3.$$

$$a_5 = 16I_{m5}/U_m^5 = 16(1/5) = 16/5.$$

Таким образом, ВАХ данного элемента описывается рядом  $i = 1u - (8/3)u^3 + (16/5)u^5$ , что согласуется с результатами, полученными в примере 11.1.

#### 11.5. ТИПОВЫЕ ВАХ

Вольт-амперные характеристики можно объединить в несколько типовых групп.

**Линейные ВАХ**, в этом случае при гармоническом напряжении входной ток имеет гармоническую форму (рис. 11.5, а).

**Нелинейные ВАХ, описываемые полиномами, состоящими из членов с нечетными степенями.** Вольт-амперная характеристика симметрична относительно горизонтальной оси. Ток при гармоническом воздействии состоит из нечетных гармоник, кривые тока также симметричны относительно горизонтальной оси (рис. 11.5, б).

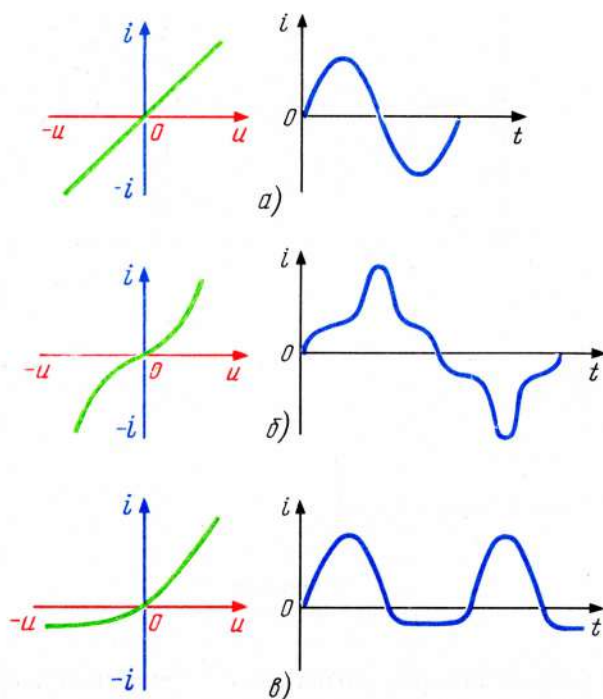


Рис. 11.5

*Нелинейные ВАХ, описываемые полиномами, состоящими из членов, содержащих четные степени. Вольт-амперные характеристики несимметричны относительно горизонтальной оси. Ток при гармоническом воздействии содержит четные гармоники, кривые токов также несимметричны относительно горизонтальной оси (рис. 11.5, в).*

#### 11.6. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ С УПРАВЛЯЕМОЙ ВАХ

В настоящее время получили широкое распространение нелинейные элементы с управляемыми ВАХ. Принцип действия таких элементов основывается на том, что если управляющее напряжение меньше значения, определенного для данного типа элемента, то сопротивление этого элемента достаточно велико и ток источника питания, протекающий через него, оказывается малым. Как только управляющее напряжение достигает определенного значения, сопротивление элемента скачком уменьшается. При этом ток в цепи также скачком возрастает и остается неизменным до тех пор, пока управляющее напряжение снова не уменьшится до напряжения срабатывания. Таким образом, ток в цепи может принимать только два значения — малое и большое, т. е. меняться по закону сигналов прямоугольной формы. Ток, протекающий через нагрузочное сопротивление  $R$ , создает на нем падение напряжения прямоугольной формы. Нелинейные устройства подобного типа называются *компараторами*, изготавливаются в микронном исполнении и широко применяются в электронных цепях. Размер современных компараторов — несколько миллиметров, масса около десятка грамм.



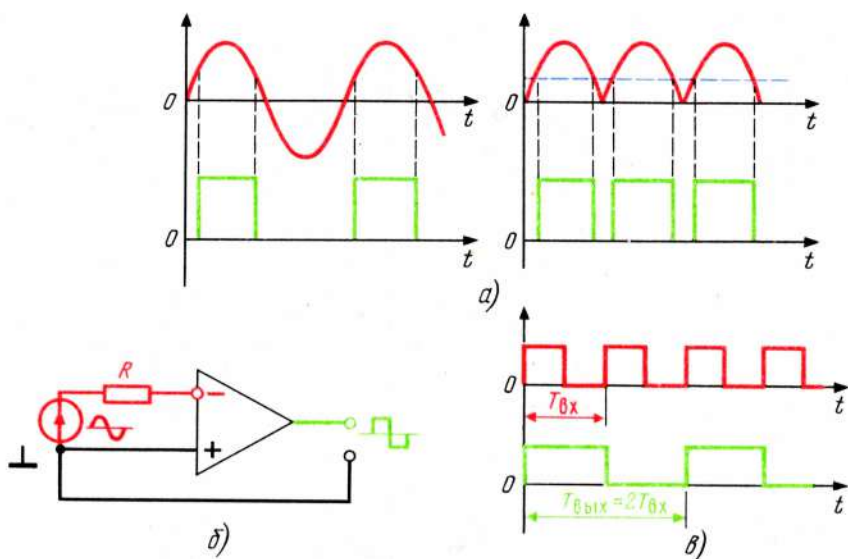


Рис. 11.6

С помощью компараторов удобно преобразовывать сигналы одних форм в другие, например синусоидальную в прямоугольную (рис. 11.6, а). Преобразовывать напряжения синусоидальной формы в напряжения прямоугольной формы можно с помощью операционного усилителя без обратной связи (рис. 11.6, б). Коэффициент усиления оказывается чрезвычайно большим, поэтому получается резкое ограничение сигнала (подробнее см. § 3.43), и синусоидальное напряжение становится прямоугольным. Существуют нелинейные элементы, позволяющие получать на выходе сигналы прямоугольной формы, период которых  $T_{\text{вых}}$  в 2 раза больше, чем на входе  $T_{\text{вх}}$  (рис. 11.6, в). Микросхемы с такими характеристиками называются *делителями частоты*. Данный термин основан на том, что частота следования (т. е. частота первой гармоники) в таких микросхемах на выходе в 2 раза меньше частоты следования на входе. Соединив  $n$  делителей частоты можно уменьшить частоту следования в  $2^n$  раз, где  $n$  — целое положительное число.

### 11.7. УМНОЖИТЕЛИ ЧАСТОТЫ

Элементы с нелинейными ВАХ используют в устройствах, позволяющих преобразовывать формы сигналов, осуществлять выпрямление переменного тока, производить ограничение сигналов, стабилизацию напряжения (тока), выполнять преобразование частоты, модуляцию сигналов, детектирование и т. д. Осуществление указанных и многих других процессов с помощью линейных цепей в принципе невозможно. Рассмотрим один из способов умножения частоты с помощью цепи, содержащей нелинейные элементы. Для умножения частоты собирают схему, показанную на рис. 11.7, а.

Гармоническое напряжение с частотой  $f_1$  подводят ко входу преобразователя, представляющего нелинейный элемент, полином которого содержит член со степенью, численно равной коэффициенту умножения частоты  $k$ . Например, если необходимо удвоить частоту, то удобно использовать диод, т. е. элемент, пропускающий ток только в одном направлении. Вольт-амперная характеристика идеального диода показана на рис. 11.7, б (красная линия). Так как ВАХ диода описывается уравнением  $i = 0,5u + 0,08u^2 + 0,32u^4$ , то амплитуда тока второй гармоники составляет 40 % амплитуды тока первой гармоники:

$$I_{m(2)}/I_{m(1)} = \sqrt{a_2/a_1} = \sqrt{0,08/0,5} = \sqrt{0,16} = 0,4 = 40 \%$$

Для утروения частоты применяют элементы, ВАХ которых симметричны относительно горизонтальной оси и имеют резкие изломы (зеленая кривая на рис. 11.7, б). После преобразователя получается спектр частот: при НЭ диодного типа —  $f_1, 2f_1, 4f_1$ , а при НЭ типа ограничителя —  $f_1, 3f_1, 5f_1$  и т. д. Колебательный контур, работающий в режиме питания источником тока (из-за большого сопротивления  $R_i$ ), настраивают на частоту гармоники с номером, равным коэффициенту умножения частоты. Например, при удвоении частоты контур настраивают на вторую гармонику, при утроении — на третью, при умножении в пять раз на пятую и т. д. Для частоты, на которую контур настроен, сопротивление контура велико ( $Z_{вх0} = Q^2 R = Q\rho$ ), а для всех остальных частот — мало, поэтому на выходе контура выделяется напряжение с той частотой, на которую контур настроен, т. е. с частотой, в  $k$  раз большей, чем частота исходного гармонического сигнала. В данном случае колебательный контур фактически является фильтром, не пропускающим колебания частот, отличных от резонансной частоты контура.

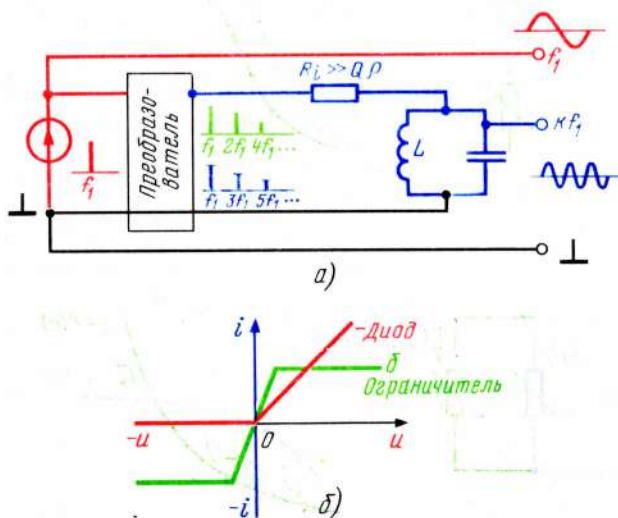


Рис. 11.7

# 11.8. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ.

Вольт-амперные характеристики нелинейных элементов часто описываются полиномами высоких степеней, поэтому аналитические расчеты напряжений и токов в нелинейных цепях становятся весьма громоздкими и мало наглядными. В связи с этим расчеты нелинейных цепей производят графически. Точность расчетов при этом, естественно, уменьшается, но во многих случаях остается достаточной для практических целей. Покажем, каким образом определяют падения напряжения на нескольких нелинейных элементах, соединенных последовательно. Пусть имеется цепь (рис. 11.8, а), ко входу которой приложено напряжение  $u_{вх}$ . Вольт-амперные характеристики элементов НЭ<sub>1</sub> и НЭ<sub>2</sub> показаны на рис. 11.8, б. Проведем ряд горизонтальных штриховых линий на уровне токов  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$ . Из чертежа видно, что при токе  $i_1$  на элементе НЭ<sub>1</sub> падает напряжение  $u'_1$ , а на элементе НЭ<sub>2</sub> —  $u''_1$ , следовательно, общее напряжение  $u_1 = u'_1 + u''_1$ . Аналогично определяют напряжение на зажимах всей цепи, т. е. получают результирующую ВАХ. Зная приложенное к цепи напряжение, определяют ток и падение напряжения на каждом элементе. Например, если в некоторый момент напряжение на входе цепи равно  $u_k$ , то ток в цепи будет  $i_k$ , падение напряжения на НЭ<sub>1</sub> —  $u'_k$ , а на НЭ<sub>2</sub> —  $u''_k$ . Второй закон Кирхгофа выполняется при любых значениях входного напряжения.

Таким же образом определяют токи, если нелинейные сопротивления соединены параллельно (рис. 11.9, а). В этом случае тоже строят результи-

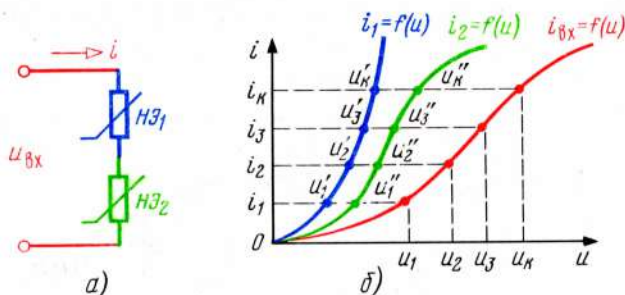


Рис. 11.8

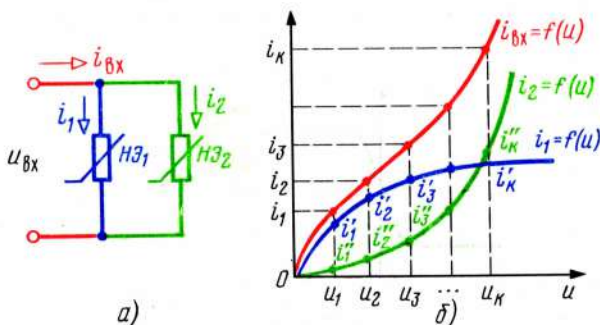


Рис. 11.9



рующую ВАХ, а затем определяют токи в ветвях и во входной ветви цепи при различных входных напряжениях (рис. 11.9, б). Например, к цепи приложено напряжение  $u_k$ , в этом случае ток в первой ветви равен  $i'_k$  во второй  $-i''_k$  в неразветвленной части цепи  $-i_k$ .

### 11.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОЧИХ ТОЧЕК НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Если последовательно соединены два нелинейных сопротивления, к зажимам которых приложено постоянное напряжение  $U$ , то определить падение напряжения на каждом нелинейном элементе можно проще, чем показано на рис. 11.8, б. Вольт-амперные характеристики  $i_1 = f(u)$  строят из начала координат, а вместо характеристики  $i_2 = f(u)$  из точки  $U_{вх}$  проводят кривую, представляющую зеркальное отображение кривой  $i_2 = f(u)$ . Точка пересечения обеих кривых показывает ток в цепи и напряжение на каждом элементе (рис. 11.10, а).

Важным является частный случай, встречающийся в различных электронных цепях, при котором нелинейный элемент соединен последовательно с линейным резистивным сопротивлением  $R$ . При этом построения производят следующим образом. Из начала координат проводят ВАХ нелинейного элемента, а точки  $U_{вх}$  и  $U_{вх}/R$  соединяют прямой линией, пересечение обеих характеристик показывает ток в цепи и напряжение на линейном  $U_R$  и нелинейном  $U_{н.э.}$  элементах (рис. 11.10, б). Прямую, проведенную через точки  $U_{вх}$  и  $U_{вх}/R$ , называют *нагрузочной характеристикой цепи*. Очевидно, что чем больше сопротивление  $R$ , тем нагрузочная характеристика идет положе, а чем меньше, тем круче. При любых характеристиках второй закон Кирхгофа обязательно выполняется.

### 11.10. ПОНЯТИЕ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Аппроксимацией характеристик нелинейных элементов* называется замена сложных выражений или кривых более простыми, которые приближенно отражают характер кривых или уравнений. Например, ВАХ транзистора имеет вид плавной кривой, описываемой полиномом пятого порядка (рис.

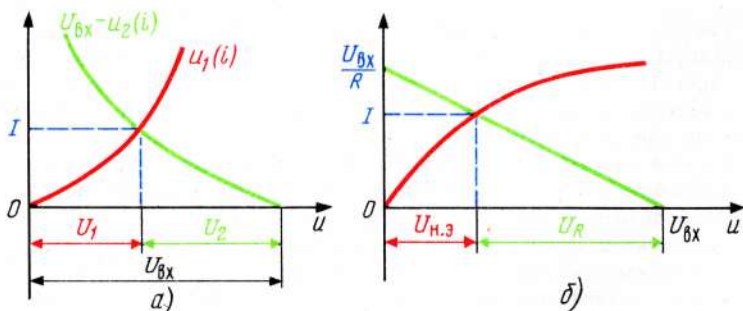


Рис. 11.10

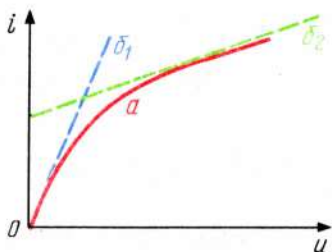


Рис. 11.11

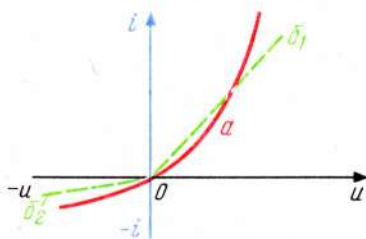


Рис. 11.12

11.11, красная линия). Данную плавную кривую заменяют двумя прямыми (синей и красной), уравнения которых достаточно просты. В этом случае говорят, что "вольт-амперная характеристика аппроксимируется двумя прямыми линиями". (Слово "аппроксимация" означает — приближение.) Разумеется, что при аппроксимации реальной характеристики приближенной появляется погрешность, поэтому стараются найти такие аппроксимирующие функции, при которых погрешность от замены действительной характеристики приближенной, находится в допустимых пределах.

**Пример 11.3.** Произвести аппроксимацию ВАХ диодного элемента, имеющего характеристику, показанную на рис. 11.12.

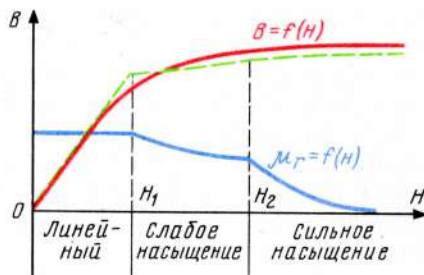
**Решение.** Реальную ВАХ диода заменим двумя отрезками прямой, рис. 11.12, причем проведем эти прямые так, чтобы разность между действительной и аппроксимирующей характеристиками была бы минимальной, например, как показано на рис. 11.12,  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Могут быть и иные варианты, например отрезок  $\delta_2$  можно положить равным нулю. В этом случае аппроксимация будет более простой, но менее точной. Если данную характеристику аппроксимировать с помощью отрезков трех прямых, то точность возрастает, но увеличивается сложность вычислений. Часто простых аппроксимирующих функций бывает достаточно еще и потому, что характеристики различных экземпляров деталей одного вида имеют определенные разбросы, в справочниках приводятся усредненные характеристики элементов данного типа. Окончательную настройку аппаратуры часто производят непосредственно по измерительным приборам.

#### 11.11. КАТУШКА С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ. РЕЖИМЫ РАБОТЫ

Как уже указывалось в гл. 4, катушки без ферромагнитного сердечника представляют линейную систему, в которой напряжение и ток пропорциональны друг другу в весьма широком диапазоне значений. Такая пропорциональность объясняется тем, что насытить воздух практически невозможно, поэтому магнитный поток изменяется в такое же число раз, в которое меняется намагничивающий ток. Если в катушку поместить замкнутый магнитный сердечник, то зависимость между намагничивающим током и магнитным потоком в общем случае становится нелинейной и определяется основной кривой намагничивания данного материала (см. § 4.5).

Основную кривую намагничивания условно делят на два или три участка и соответственно аппроксимируют двумя или тремя прямыми линиями (рис. 11.13). На первом участке при напряжениях  $0 \dots H_1$  катушка представляет практически линейную систему, магнитная проницаемость  $\mu_r$ , индуктивность  $L$  и индуктивное сопротивление  $X_L$  остаются неизменными. На втором участке (при напряжениях  $H_1 \dots H_2$ ) насы-

Рис. 11.13



щение начинает сказываться, но не слишком сильно. Значения величин  $\mu_r$ ,  $L$ ,  $X_L$  уменьшаются, но  $\mu_r$  остается еще значительно больше единицы. В третьей области (от  $H = H_2$  и более) насыщение сказывается весьма сильно,  $\mu_r$  уменьшается до значений, близких к единице, цепь становится резко нелинейной. Длина линейного участка зависит от свойств материала. Наиболее короткий линейный участок имеется у ферритов, а наиболее длинный — у магнитоэлектриков. Ферриты имеют весьма большие начальные магнитные проницаемости, которые резко падают с увеличением напряженности магнитного поля. Начальная магнитная проницаемость магнитоэлектриков невелика, но остается практически постоянной в широком диапазоне напряженностей магнитного поля, т. е. токов, протекающих по катушке (см. рис. 4.5).

#### 11.12. ПОТОКИ РАССЕЯНИЯ

Как было показано в § 4.3, магнитные потоки распределяются обратно пропорционально магнитным сопротивлениям участков цепи. Если в катушку ввести замкнутый сердечник из ферромагнитного материала, то основная часть магнитного потока станет замыкаться через сердечник, а некоторая часть — по воздуху. Поток, замыкающийся по воздуху, во столько раз меньше потока, замыкающегося через сердечник, во сколько раз магнитное сопротивление сердечника меньше магнитного сопротивления воздуха. Магнитные потоки, замыкающиеся по воздуху, называют потоками *рассеяния* и обозначают  $\Phi_{md}$  (рис. 11.14, а).

Потоки рассеяния уменьшают основной поток, текущий по сердечнику, и ухудшают реактивные свойства катушки. Для уменьшения потока рассеяния необходимо, чтобы магнитное сопротивление сердечника было бы возможно меньше, а для этого надо, чтобы магнитная проницаемость материала была бы как можно больше. С уменьшением толщины обмотки потоки рассеяния также уменьшаются. Встречаются, однако, устройства, в которых потоки рассеяния преднамеренно увеличивают. Например, для сохранения

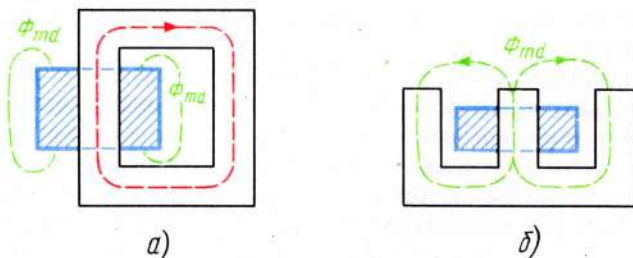


Рис. 11.14



чистоты цвета в цветных телевизорах катушку кинескопа (его "маску") необходимо периодически размагничивать. Делают это с помощью так называемого "размагничивающего дросселя", представляющего катушку с незамкнутым сердечником (рис. 11.14, б). Катушку подключают к промышленной сети переменного тока, при этом создается сильный переменный магнитный поток, перемагничивающий катушку кинескопа. Дроссель медленно удаляют от экрана, остаточные намагничивания при этом устраняются. Аналогично размагничивают магнитные головки магнитофонов и все детали, которые касаются магнитной ленты.

### 11.13. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШКИ С ЗАМКНУТЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

Начальная индуктивность катушки, намотанной на тороидальном сердечнике,

$$L = 1,26 \mu_r w^2 \frac{S}{l_{\text{ср}}} 10^{-8}, \quad (11.4)$$

где  $L$  — индуктивность, Гн;  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость;  $w$  — число витков;  $S$  — сечение сердечника, см<sup>2</sup>;  $l_{\text{ср}}$  — длина средней линии магнитопровода, см.

**Пример 11.4.** Определить число витков  $w$ , которые необходимо намотать на тороид с сечением  $S = 2$  см<sup>2</sup>, средним диаметром 3,18 см, имеющим магнитную проницаемость  $\mu_r = 1000$ , для получения индуктивности  $L = 20$  мГн.

**Решение.** Рассчитаем длину средней линии тороида;  $l_{\text{ср}} = \pi D_{\text{ср}} = 3,14 \cdot 3,18 = 10$  см. Из (11.4) число витков

$$w = \sqrt{\frac{L \cdot l_{\text{ср}} \cdot 10^8}{1,26 \cdot \mu_r \cdot S}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^8}{1,26 \cdot 1000 \cdot 2}} = 89 \text{ витков.}$$

### 11.14. ТРАНСФОРМАТОР С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

*Трансформатором* называется статическое устройство, предназначенное для передачи энергии из одной части цепи в другую, основанное на использовании взаимной индуктивности. С помощью трансформаторов можно преобразовывать напряжения, токи и сопротивления, но не мощности. Трансформатор состоит из нескольких индуктивно связанных обмоток, размещенных на общем ферромагнитном сердечнике. Обмотку, к которой подключают источник энергии, называют первичной, остальные обмотки — вторичными.

Трансформаторы делятся на идеальные, совершенные и реальные. *Идеальными* называются трансформаторы, у которых индуктивности обмоток бесконечно велики, потоки рассеяния равны 0, коэффициенты связи соответственно равны 1, резистивные сопротивления обмоток равны 0, входное сопротивление первичной обмотки при разомкнутых вторичных обмотках бесконечно велико, входные емкости равны 0, токи холостого хода равны 0, т. е.  $L_1 = \infty$ ,  $L_2 = \infty$ ,  $k = 1$ ,  $X_{L1} = X_{L2} = \infty$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ ,  $I_x = 0$ . Разу-

меется, что идеальный трансформатор физически реализован быть не может, он имеет предельные значения параметров, к которым следует стремиться. Напомним, что  $k = 1 - \sigma^2$ , где  $\sigma$  — безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом рассеяния и представляющий отношение потока рассеяния к потоку, текущему по сердечнику. При  $\Phi_{md} = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $k = 1$ .

*Совершенным* называется трансформатор, индуктивности обмоток в котором имеют конечные значения, потоки рассеяния равны 0, коэффициент связи соответственно равен 1, резистивные сопротивления обмоток, потери в сердечнике и входная емкость равны 0, ток холостого хода больше 0 и имеет чисто индуктивный характер, т. е.  $L_1 < \infty$ ,  $L_2 < \infty$ ,  $k = 1$ ,  $X_{L1} < \infty$ ,  $X_{L2} < \infty$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ ,  $I_x > 0$ .

*Реальным* называется трансформатор, у которого индуктивности обмоток есть величины конечные, поток рассеяния больше 0, коэффициент связи — меньше 1, резистивные сопротивления обмоток, потери в сердечнике и входные емкости — больше 0, ток холостого хода больше 0 и имеет комплексный характер.

Значения индуктивностей, которые необходимо иметь в каждой обмотке, определяются в зависимости от конкретных условий. Как правило, индуктивности обмоток должны быть такими, при которых ток холостого хода оказывается много меньшим, чем ток первичной обмотки нагруженного трансформатора.

В совершенном трансформаторе коэффициентом трансформации называют отношение  $w_1/w_2$ , где  $w_1$  — число витков первичной обмотки, а  $w_2$  — соответственно вторичной. В реальных трансформаторах

$$n = w_1/w_2 = \Phi_{m12}/(\Phi_{m12} + \Phi_{md1}),$$

где  $n$  — коэффициент трансформации;  $\Phi_{m12}$  — максимальное значение магнитного потока, текущего по сердечнику;  $\Phi_{md1}$  — максимальное значение магнитного потока рассеяния первичной обмотки (рис. 11.15).

Если трансформатор имеет такую конструкцию, при которой потоками рассеяния можно пренебречь, то приближенно считают, что

$$n = w_1/w_2 = U_1/U_2. \quad (11.5)$$

Коэффициент трансформации можно определять также с помощью выражений

$$n = \sqrt{L_1/L_2} = L_1/M = M/L_2. \quad (11.6)$$

Напряжение на зажимах вторичной обмотки в режиме холостого хода (т. е. при разомкнутой вторичной обмотке)

$$U_2 = U_1/n. \quad (11.7)$$

Поскольку в совершенном трансформаторе мощность не затрачивается  $P_1 = P_2$ , причем  $P_1 = \dot{U}_1 \dot{I}_1$ ,  $P_2 = \dot{U}_2 \dot{I}_2$ , откуда  $\dot{U}_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \dot{I}_2$  или  $\dot{I}_2/\dot{I}_1 = \dot{U}_1/\dot{U}_2 = n$ . Следовательно, если число витков вторичной обмотки больше числа витков первичной, то  $n < 1$ , такой трансформатор называют *повышающим*, если  $w_2 < w_1$ , то соответственно *понижающим*. У повышающего трансформатора напряжение на вторичной обмотке больше, чем на первичной, но ток в такое же число раз меньше. У понижающего трансформатора — наоборот.

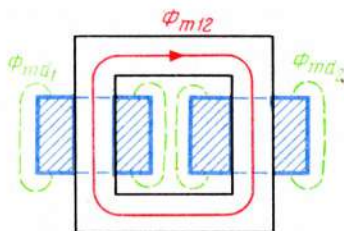


Рис. 11.15

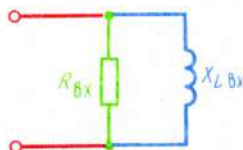


Рис. 11.16

В идеальном трансформаторе напряжение и ток первичной обмотки имеют такие же начальные и мгновенные фазы, как напряжение и ток вторичной обмотки, и отличаются от них только по амплитуде (действующему значению):

$$u_1/u_2 = i_2/i_1 = \dot{U}_1/\dot{U}_2 = \dot{I}_2/\dot{I}_1 = \dot{I}_2^*/\dot{I}_1^* = n. \quad (11.8)$$

Так как трансформатор преобразует напряжения и токи, то происходит и преобразование сопротивлений, что является важнейшим свойством всякого трансформатора. Пусть имеется идеальный трансформатор, нагруженный на комплексное сопротивление,  $\underline{Z} = \dot{U}_2/\dot{I}_2$ . Входное сопротивление трансформатора

$$\underline{Z}_{вх} = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = \frac{n \dot{U}_2 \cdot n}{\dot{I}_2} = n^2 \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = n^2 \underline{Z}_н. \quad (11.9)$$

Таким образом, входное сопротивление идеального трансформатора имеет такой же характер, как и сопротивление нагрузки, и отличается от него по модулю в  $n^2$  раз.

**Пример 11.5.** Внутреннее сопротивление электронного генератора  $R_i = 4,8$  кОм. Подключить к данному генератору нагрузку с сопротивлением  $R_H = 3$  Ом, чтобы в нем выделялась бы наибольшая мощность.

**Решение.** Для выделения в нагрузочном сопротивлении максимальной мощности необходимо чтобы сопротивление нагрузки равнялось внутреннему сопротивлению генератора. Так как в данном случае сопротивления  $R_i$  и  $R_H$  не равны, то  $R_H$  следует подключить к генератору через трансформатор с таким коэффициентом трансформации, при котором входное сопротивление трансформатора равно внутреннему сопротивлению генератора, т. е.  $R_i = n^2 R_H$ , откуда

$$n = \sqrt{R_i/R_H} = \sqrt{4800/3} = 40.$$

Таким образом, чтобы сопротивление  $R_H = 3$  Ом преобразовать в сопротивление 4800 Ом, необходимо это нагрузочное сопротивление подключить к генератору через понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации  $n = 40$ . Например, если на первичной обмотке трансформатора имеется 1000 витков, то на вторичной должно быть в 40 раз меньше, т. е.  $1000/40 = 25$  витков.

У реального трансформатора характер входного сопротивления несколько отличается от характера сопротивления нагрузки. Например, если трансформатор нагружен на чисто резистивное сопротивление, то входное сопротивление трансформатора имеет вид рис. 11.16. Индуктивная составляющая



$X_{L_{вх}}$  определяется током намагничивания, который при конечном значении индуктивностей обмоток не равен 0. Резистивная составляющая входного сопротивления определяется резистивными сопротивлениями нагрузки и обмоток. В идеальном трансформаторе намагничивающий ток бесконечно мал, входная индуктивная проводимость равна 0, сопротивление  $X_{L_{вх}} = \infty$ . Входное сопротивление оказывается чисто резистивным (при нагрузке вторичной обмотки на резистивное сопротивление  $R_H$ ) и определяется из выражения  $R_{вх} = n^2 (R_H + R_2)$ , где  $R_2$  — резистивное сопротивление вторичной обмотки трансформатора. В совершенных трансформаторах индуктивная проводимость имеет конечное значение, но если  $X_{L_{вх}} \geq 3R_{вх}$ , то реактивной составляющей можно пренебрегать и считать входное сопротивление трансформатора практически чисто резистивным.

Чтобы экспериментально измерить входное сопротивление реального трансформатора, необходимо знать модуль входного напряжения, модуль входного тока и фазный угол между ними. Резистивная составляющая входного тока  $I_{рез.вх} = I_{вх} \cos \varphi_{вх}$ , реактивная  $I_{р.вх} = I_{вх} \sin \varphi_{вх}$ , где  $I_{вх}$  — модуль входного тока, откуда

$$R_{вх} = \frac{U_{вх}}{I_{рез.вх}} = \frac{U_{вх}}{I_{вх} \cos \varphi_{вх}}; \quad X_{вх} = \frac{U_1}{I_{р.вх}} = \frac{U_1}{I_{вх} \sin \varphi_{вх}},$$

где  $U_{вх}$  — модуль напряжения, приложенного ко входным зажимам трансформатора.

#### 11.15. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРАНСФОРМАТОРА

Рассмотрим схему замещения трансформатора с ферромагнитным сердечником. Пусть к первичной обмотке трансформатора подключен источник напряжения с внутренним сопротивлением  $R_i$ , а ко вторичной обмотке — резистивное нагрузочное сопротивление  $R_H$ . В этом случае схема замещения цепи имеет вид рис. 11.17, а. В данной схеме:  $R_1$  и  $R_2$  — резистивные сопротивления обмоток;  $L_{d1}$  и  $L_{d2}$  — индуктивности полей рассеяния;  $L_{осн}$  — индуктивность, пропорциональная магнитному потоку, проходящему по сердечнику;  $R_c$  — сопротивление потерь в сердечнике магнитопровода.

Трансформаторы с ферромагнитными сердечниками используются чаще всего в диапазоне звуковых частот, т. е. от десятков герц до начала десятков килогерц. Этот диапазон обыкновенно делят на три области: низких, средних и высоких частот. Низкими частотами в данном случае называют частоты от 20 ... 50 до 400 ... 800 Гц, средними — от 400 ... 800 Гц до 2 ... 4 кГц, высокими — от 2 ... 4 до 12 ... 16 кГц. Данная разбивка, конечно, достаточно условная, в отдельных случаях могут встречаться и иные пределы областей, но в большинстве случаев на практике используют указанные значения.

Трансформатор должен иметь такую конструкцию, при которой в области средних частот током  $I_0$  можно пренебрегать по сравнению с током  $I_2$ , сопротивлениями индуктивностей рассеяния  $X_{Ld}$  и резистивными сопро-

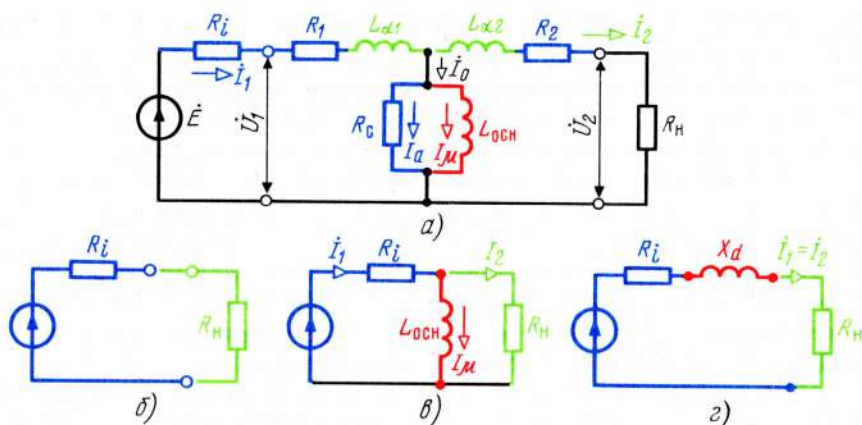


Рис. 11.17

тивлениями обмоток  $R_1$  и  $R_2$  — также пренебрегать по сравнению с сопротивлениями  $R_i$  и  $R_{\text{н}}$ . Потери в сердечнике должны быть малы во всем рабочем диапазоне частот.

При указанных соотношениях схема замещения трансформатора в диапазоне средних частот приобретает вид рис. 11.17, б. В области средних частот трансформатор имеет практически чисто резистивный характер, коэффициент передачи не зависит от частоты, передаточная фазочастотная характеристика равна 0, как во всякой резистивной цепи.

По мере уменьшения частоты сопротивление индуктивностей  $L_{\text{осн}}$  уменьшается, проводимость увеличивается, ток  $I_{\mu}$  — возрастает, пренебрегать им становится недопустимо, ток  $I_1$ , а следовательно, и падение напряжения на внутреннем сопротивлении увеличивается, напряжение на нагрузке и коэффициент передачи уменьшаются (рис. 11.17, в). Говорят, что частотная характеристика трансформатора "заваливается". С увеличением реактивной составляющей тока увеличивается и фазовый угол. При уменьшении частоты до 0 проводимость индуктивности  $L_{\text{осн}}$  возрастает до  $\infty$ , сопротивление нагрузки  $R_{\text{н}}$  оказывается замкнутым накоротко, коэффициент передачи падает до 0, ФЧХ достигает  $90^\circ$ . Нулевой коэффициент передачи при частоте  $\omega = 0$  полностью соответствует физике процесса: на постоянном токе перемagnичивание сердечника не происходит, постоянный ток, как известно, не



Рис. 11.18



трансформируется. Следовательно, схема замещения полностью учитывает процессы, происходящие в устройстве. Сопротивления индуктивностей рассеяния должны быть пренебрежимо малыми уже на средних частотах, с уменьшением частоты эти сопротивления становятся еще меньше. При увеличении частоты сопротивление индуктивности  $L_{осн}$  растет, ток  $I_\mu$  уменьшается и даже в области средних, а тем более высоких частот становится пренебрежимо малым. Но с увеличением частоты растут сопротивления индуктивностей рассеяния  $X_d = \omega L_d$ . Вследствие этого ток  $\dot{I}_2 = \dot{I}_1$  уменьшается, следовательно, уменьшается напряжение на сопротивлении нагрузки и коэффициент передачи цепи (рис. 11.17, з).

Таким образом, на низких частотах уменьшение коэффициента передачи трансформатора происходит вследствие увеличения тока в индуктивности первичной обмотки, а на высоких частотах — увеличения сопротивлений индуктивностей рассеяния и соответственно уменьшения тока в нагрузке. Физически влияние индуктивностей рассеяния можно представить следующим образом: ток первичной обмотки создает магнитный поток, большая часть которого проходит по сердечнику и сцепляется с витками вторичной обмотки, а меньшая часть замыкается по воздуху и не передает энергию во вторичную обмотку. С увеличением частоты часть потока, замыкающаяся по воздуху, растет, а часть потока, проходящая по сердечнику, соответственно уменьшается, при этом уменьшается энергия, передаваемая во вторичный контур, и падает коэффициент передачи цепи. Передаточные АЧХ и ФЧХ показаны на рис. 11.18.

За полосу пропускания трансформатора принимают диапазон частот, в котором уменьшение коэффициента передачи по сравнению с коэффициентом передачи на средних частотах не превышает 3 дБ. Следовательно, индуктивность первичной обмотки определяется заданной амплитудно-частотной характеристикой трансформатора: чем меньшие частоты необходимо пропускать через трансформатор, тем большую индуктивность должна иметь первичная обмотка трансформатора. Зная необходимую индуктивность и размеры сердечника, определяют число витков первичной обмотки, и зная необходимый коэффициент трансформации, — число витков вторичной обмотки.

## 11.16. АВТОТРАНСФОРМАТОР

Автотрансформатор представляет сердечники из ферромагнитного материала, на котором намотана катушка с одним или несколькими отводами (рис. 11.19). Пусть входное напряжение приложено к зажимам 1–1', а выходное снимается с зажимов 2–2'. В этом случае катушка  $L_1$  является одновременно и первичной, и частью вторичной обмотки. Поскольку в обмотках трансформатора ток течет в разные стороны, то по катушке  $L_1$  протекает ток  $I_1 - I_2$ , который меньше тока  $I_1$  в трансформаторе, следовательно, катушка  $L_1$  может иметь провод меньшего сечения, чем у трансформатора с такой же номинальной мощностью. Габариты и масса при этом также уменьшаются. Автотрансформаторы дают заметную экономию материала при коэффициентах трансформации от 1 до 2 и используются чаще всего в энер-



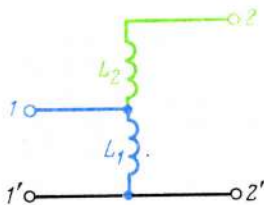


Рис. 11.19

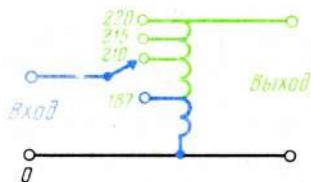


Рис. 11.20

гетических цепях. Большим недостатком автотрансформаторов является наличие электрической связи между обмотками.

**Пример 11.6.** Напряжение  $U_1 = 127$  В необходимо преобразовать в напряжение  $U_2 = 220$  В при мощности  $P = 500$  Вт. Требуется определить, во сколько раз масса провода трансформатора больше массы провода автотрансформатора. Потерями в обоих случаях можно пренебречь.

Решение. Коэффициент трансформации  $n = U_1/U_2 = 127/220 = 0,577$ . Токи в обмотках  $I_1 = P/U_1 = 500/127 = 3,94$  А;  $I_2 = P/U_2 = 500/200 = 2,72$  А. Примем допустимую плотность тока  $J = 2$  А/мм<sup>2</sup>. Сечение проводов обмоток  $S_1 = I_1/J = 3,94/2 = 1,97$  мм<sup>2</sup>;  $S_2 = I_2/J = 2,72/2 = 1,36$  мм<sup>2</sup>. Число витков каждой обмотки  $w_1 = \epsilon U_1 = 127\epsilon$ ,  $w_2 = \epsilon U_2 = 220\epsilon$ , где  $\epsilon$  – число витков на каждый вольт напряжения. Длина проводов обмоток  $l_1 = l_{cp} w_1 = 127\epsilon l_{cp}$ ,  $l_2 = l_{cp} w_2 = 220\epsilon l_{cp}$ , где  $l_{cp}$  – средняя длина витка обмотки. Объем обмоток  $v_1 = l_1 S_1 = 1,97 \cdot 127\epsilon l_{cp} = 250\epsilon l_{cp}$ ;  $v_2 = l_2 S_2 = 1,36 \cdot 220\epsilon l_{cp} = 299\epsilon l_{cp}$ ;  $v = v_1 + v_2 = 549\epsilon l_{cp}$ .

Массу обмоток  $m = v D = 549\epsilon l_{cp} D$ , где  $D$  – плотность материала обмоток (для меди 8,93 г/см<sup>3</sup>, для алюминия – 2,7 г/см<sup>3</sup>).

Произведем расчет для автотрансформатора. По катушке  $L_1$  течет разностный ток обмоток, т. е.  $I_L = I_1 - I_2 = 3,94 - 2,72 = 1,22$  А. Сечение провода катушки  $L_1$ :  $S_{L_1} = I_L/J = 1,22/2 = 0,61$  мм<sup>2</sup>. Напряжение на катушке  $L_2$ :  $U_{L_2} = U_2 - U_{L_1} = 220 - 127 = 93$  В. Число витков катушек  $L_1$  и  $L_2$  автотрансформатора:  $w_{L_1} = \epsilon U_1 = 127\epsilon$ ,  $w_{L_2} = \epsilon (U_2 - U_1) = 93\epsilon$ .

Длина проводов катушек  $L_1$  и  $L_2$ :  $l_{L_1} = l_{cp} w_{L_1} = 127\epsilon l_{cp}$ ,  $l_{L_2} = l_{cp} w_{L_2} = 93\epsilon l_{cp}$ . Объем обмоток автотрансформатора:

$$v_{L_1} = l_{L_1} S_{L_1} = 0,61 \cdot 127\epsilon l_{cp} = 77,47\epsilon l_{cp},$$

$$v_{L_2} = l_{L_2} S_{L_2} = l_{L_2} S_2 = 1,36 \cdot 93\epsilon l_{cp} = 126,48\epsilon l_{cp},$$

$$v_{ат} = v_{L_1} + v_{L_2} = 77,47\epsilon l_{cp} + 126,48\epsilon l_{cp} = 203,95\epsilon l_{cp}.$$

$$\text{Масса обмоток автотрансформатора } m_{ат} = v_{ат} D = 203,95\epsilon l_{cp} D.$$

Определим отношение массы обмоток автотрансформатора к массе обмоток трансформатора

$$m_{ат}/m = \frac{203,95\epsilon l_{cp} D}{549\epsilon l_{cp} D} = 0,371.$$

Таким образом, масса обмоточного материала в автотрансформаторе оказалась почти в 3 раза меньше, чем в трансформаторе, при равной мощности, а в действительности несколько больше, поскольку из-за более тонкого провода в обмотке  $L_1$  средняя длина витка в автотрансформаторе меньше, чем в трансформаторе. Экономия в сечении проводов влечет за собой экономию в размерах и массе сердечника. Экономичность автотрансформатора определяется тем, что ток первичной обмотки в трансформаторе

равен 3,94 А, а в катушке  $L_1$  автотрансформатора — только 1,22 А, т. е. в 3,22 раза меньше, отсюда — меньшая толщина проводов, уменьшение габаритов, массы и пр.

При коэффициенте трансформации, равном 2, диаметр провода обеих обмоток оказывается одинаковым, при  $n < 2$  диаметр провода обмотки  $L_1$  меньше диаметра провода катушки  $L_2$ . Если  $n > 2$ , то сечение провода катушки  $L_1$  оказывается больше сечения провода катушки  $L_2$ , при этом достоинства автотрансформатора уменьшаются.

Достоинства автотрансформатора становятся особенно очевидными в устройствах, позволяющих регулировать напряжение в сравнительно узких пределах, например при колебаниях напряжения осветительной сети до 15 % (от 220 до 187 В). В этом случае от катушки делают отводы, например через 5 В (рис. 11.20).

При мощности также 500 Вт ток в секции 0 — 187 В равен  $(500/187 - 500/220) = 2,67 - 2,27 = 0,4$  А.

Таким образом, в данном случае 85 % всей обмотки следует мотать проводом на ток всего 0,4 А, т. е. в 5,6 раз меньший, чем ток в нагрузке.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие элементы являются линейными и какие нелинейными?
2. Какой вид имеют линейные и нелинейные ВАХ?
3. Как с помощью ВАХ можно определять сопротивления элементов в различных режимах?
4. Какой вид имеют аналитические выражения, описывающие вольт-амперные характеристики линейных и нелинейных элементов?
5. Как определить спектр тока в нелинейном элементе при гармоническом воздействии?
6. Нарисуйте схему, с помощью которой можно получать ВАХ на экране осциллографа. Объясните работу данной схемы.
7. Как можно определить коэффициенты ряда нелинейной ВАХ по спектру тока в цепи?
8. Какие Вы знаете способы преобразования сигналов гармонической формы в сигналы прямоугольной формы? Нарисуйте схемы преобразователей и объясните принцип их действия.
9. Покажите схему умножителей частоты гармонических сигналов, объясните работу таких схем.
10. Как рассчитать падения напряжений на нелинейных элементах, соединенных последовательно?
11. Как рассчитать токи в нелинейных элементах, соединенных параллельно?
12. Покажите способы определения рабочих точек в цепи, состоящей из линейных и нелинейных элементов, соединенных последовательно.
13. Что понимается под аппроксимацией характеристик нелинейных элементов?
14. Чем отличаются режимы работы катушек с ферромагнитными сердечниками и без сердечника?
15. Нарисуйте на одном графике кривые  $\mu_r = f(H)$  для ферритов и магнитодиэлектриков. Объясните разницу в этих характеристиках.
16. Что называется потоками рассеяния? Какие факторы способствуют увеличению этих потоков?
17. Как рассчитать индуктивность катушек, намотанных на замкнутом сердечнике?
18. Как определить коэффициент трансформации трансформаторов?
19. Какие трансформаторы называются идеальными, совершенными и реальными?
20. Как можно преобразовывать сопротивления с помощью трансформатора?
21. Покажите АЧХ и ФЧХ трансформатора в области низких, средних и высоких частот.
22. Как работает автотрансформатор, каковы его достоинства и недостатки? Приведите примеры.

## 12.1. ПОНЯТИЕ О ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

Во всех предыдущих главах рассматривались цепи, в которых выполнялись два условия: 1) источники были подключены к цепи теоретически бесконечно давно и 2) никаких изменений в состоянии цепи не производилось. Режимы работы, имеющиеся при этих условиях, называются *установившимися, вынужденными* или *принужденными*. (Все три названных слова имеют одинаковый смысл и полностью заменяют друг друга.) При иных режимах, изучаемых в данной главе, законы, которым подчиняются токи и напряжения, оказываются совершенно иными, чем законы установившихся режимов. Следовательно, говоря о напряжениях, токах, сопротивлениях или каких-либо иных параметрах цепи, необходимо всегда четко представлять, о работе в каком режиме идет речь — в режиме установившемся или в каком-то ином. Не зная режима, в котором работает электрическая цепь, нельзя судить о законах, которым подчиняются напряжения, сопротивления, токи в данной цепи, а это может привести к грубым ошибкам.

Пусть имеется цепь рис. 12.1, а, к которой подключается источник постоянного напряжения с ЭДС  $E$ . До замыкания ключа  $K$  ток в цепи был равен 0, а через большое время после замыкания ключа ток в цепи становится  $I = E/R$  (сопротивление индуктивности для постоянного тока, как известно, равно 0) (рис. 12.1, б). Следовательно, после замыкания ключа ток по некоторому закону изменяется от нулевого до конечного, которое является установившимся значением, в данном примере равным  $E/R$ . Изменение тока от начального до конечного происходит в общем случае за некоторое время. В течение времени, пока все отклики (т. е. токи во всех ветвях и напряжения на всех элементах) изменяются от начальных значений до конечных, цепь находится в *режиме переходного процесса* (в *переходном режиме*). Введем понятие: коммутация. Под *коммутацией* понимают подключение, отключение, переключение источников или каких-либо элементов цепи. Любая коммутация влечет перераспределение напряжений и токов в цепи и, следовательно, сопровождается переходными процессами. После любой коммутации режим работы цепи на некоторое время становится переходным, постепенно превращающимся в установившийся. Переход к новому установившемуся состоянию происходит всегда постепенно, за некоторое определенное время.

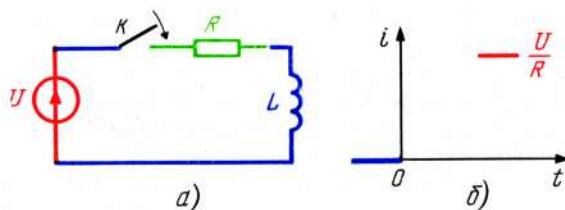


Рис. 12.1



Многие тела или системы способны накапливать энергию. Например, движущееся механическое тело обладает запасом кинетической энергии  $W_{\text{мех}} = mv^2/2$ , заряженный конденсатор имеет энергию  $W_{\text{э}} = CU^2/2$ , энергия магнитного поля  $W_{\text{м}} = LI^2/2$  и т. д. Мощность  $P$ , как известно, определяется изменением энергии в единицу времени  $P = \Delta W/\Delta t$ . Очевидно, что любое изменение энергии на конечную величину за бесконечно малое время требует источника с бесконечно большой мощностью, так как  $\Delta W/0 = \infty$ . *Поскольку источников бесконечно большой мощности в природе не существует, то ни в какой системе никакая энергия никогда не может изменяться скачком, т. е. на конечную величину за бесконечно малое время.* Например, железнодорожный состав невозможно ни мгновенно разогнать до некоторой скорости, ни мгновенно остановить, поскольку в обоих случаях для этого потребовался бы источник бесконечно большой мощности. Любую печь нельзя ни мгновенно нагреть, ни мгновенно охладить, поскольку тепло — это тоже энергия, и изменить ее скачком, следовательно, не представляется возможным. По той же причине скачком не может изменяться энергия электрического поля в конденсаторе и энергия магнитного поля в катушке. Но энергия в конденсаторе определяется из выражения  $W_{\text{э}} = CU^2/2$ , а в катушке  $W_{\text{м}} = LI^2/2$ . Следовательно, напряжение на конденсаторе и ток в катушке не могут изменяться скачкообразно, т. е. за бесконечно малое время, поскольку для этого опять-таки потребовался бы источник бесконечно большой мощности. Сделаем два важных замечания.

1. Следует обратить внимание, что *законы природы не позволяют изменяться скачкообразно только энергии, а не напряжениям или токам.* Если, например, имеется система, состоящая из двух катушек, токи в которых изменяются таким образом, что поле одной катушки уменьшается, а поле другой катушки увеличивается на такое же значение, и магнитное поле всей системы остается при этом неизменным, то в этом случае токи в катушках могут изменяться скачкообразно, поскольку эти изменения токов не влекут изменения энергии. *В уединенных же катушках изменение тока обязательно влечет за собой изменение энергии, поэтому скачкообразного изменения тока в уединенной катушке быть не может.* Условимся, что для краткости слово “уединенная” будем опускать и, говоря о катушках, будем иметь в виду именно уединенные, т. е. такие катушки, в которых изменение тока влечет изменение магнитного поля. Аналогично и для конденсаторов.

2. Обратим внимание, что носителем энергии в конденсаторе является напряжение, а не ток, поскольку ток в формулу энергии не входит. Возникает вопрос, может ли в конденсаторе ток изменяться скачком? Ответ на этот вопрос совершенно однозначный: *поскольку изменение тока в конденсаторе не влечет изменения энергии, ток в конденсаторе может изменяться скачкообразно, т. е. на конечную величину за бесконечно малое время.* При этом иногда появляется еще один вопрос: “А разве изменение тока в конденсаторе не влечет за собой изменения напряжения на этом конденсаторе?” Напомним еще раз: мгновенные напряжения и токи повторяют друг друга только в одном-единственном частном случае — в резистивных элементах, поскольку эти элементы не накапливают энергию. Но в элементах, накапли-

вающих энергию, напряжение одной формы, в общем случае, вызывает ток совершенно иной формы. Таким образом, изменение тока в конденсаторе может совершенно не изменять напряжения, а следовательно и энергии в нем, поэтому скачкообразному изменению тока в конденсаторе ничто не препятствует. Аналогично обстоит дело с напряжением в индуктивности. Поскольку носителем энергии магнитного поля в индуктивности является ток, напряжение на индуктивном элементе может изменяться скачкообразно.

Обобщим полученные результаты. Закон природы, не допускающий ни в какой системе скачкообразных изменений энергии, называется *законом непрерывности энергии*. На основании этого закона напряжение на емкостях и ток в индуктивности изменяться скачками не могут. Ток в емкостях и напряжение на индуктивности носителями энергии не являются и потому могут изменяться как плавно, так и скачкообразно.

### 12.3. ПОНЯТИЯ $t = -0$ И $t = +0$

Введем понятия  $t = -0$  и  $t = +0$ . Под моментом  $t = -0$  понимают последний момент времени перед коммутацией, а под моментом  $t = +0$  (или  $t = 0$ ) — первый момент времени после коммутации. Математика не умеет различать значения " $-0$ " и " $+0$ ", чтобы отличить значения напряжений и токов в эти моменты, следует помнить, что в момент  $t = -0$  все напряжения и токи находятся в состоянии установившихся значений для той цепи, которая имела до коммутации. В момент  $t = +0$  в цепи начинается переходный процесс, сопротивления некоторых элементов резко меняются, эквивалентная схема цепи приобретает совершенно иной вид, все законы вынужденных режимов становятся несправедливыми, цепь начинает подчиняться законам переходных процессов. Таким образом, *свойства цепей в последний момент перед коммутацией и в первый момент после коммутации оказываются совершенно различными, а в некоторых случаях даже противоположными*. По мере изучения данной главы будут раскрываться свойства цепей в переходном режиме.

### 12.4. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПИ ПРИ КОММУТАЦИЯХ

Во время переходного процесса, даже при источниках постоянного напряжения, все отклики (т. е. все токи в ветвях и все напряжения на любых участках цепи) изменяются от одних значений до других и являются, таким образом, величинами переменными. Следовательно, составлять любые уравнения можно только для мгновенных значений напряжений и токов. Понятие действующих значений в переходных режимах просто теряет свой смысл и практически никогда не используется.

Рассмотрим подробно методику расчета мгновенных напряжений и мгновенных токов на примере цепи рис. 12.1. Определим законы, которым подчиняются мгновенные напряжения, токи и сопротивления при подключении  $RL$ -цепи к источнику постоянного напряжения  $U$ . До коммутации, т. е. в интервале от  $t = -\infty$  до  $t = -0$ , ключ был разомкнут, источник отключен, ток в цепи и напряжения на всех элементах равнялись 0. Уравнения для



определения напряжений и токов в переходном режиме следует составлять для такого состояния цепи, которое оказывается после коммутации. В цепи рис. 12.1 после коммутации источник уже подключен, при этом получается замкнутая неразветвленная цепь, для которой можно записать уравнение по второму закону Кирхгофа:  $u_{\text{вх}} = u_R + u_L$ . Выразим мгновенные значения напряжений на элементах цепи через мгновенные токи. Так как  $u_R =$

$$= Ri, u_L = L \frac{di}{dt}, u_{\text{вх}} = U, \text{ то уравнение приобретает вид}$$

$$U = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (12.1)$$

Получившееся уравнение обязательно будет дифференциальным, поскольку мгновенные напряжения и мгновенные токи в индуктивностях и емкостях связаны через производные ( $u_L = L \frac{di}{dt}$ ,  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , подробнее

см. гл. 5). В цепях с одним накопителем энергии, например  $RL$  и  $RC$ , процессы описываются дифференциальными уравнениями первой степени, или, как чаще говорят, дифференциальными уравнениями "первого порядка". Поэтому  $RL$ - и  $RC$ -цепи называют цепями первого порядка. Получившееся уравнение необходимо привести к нормальному виду, т. е. члены, содержащие переменную величину (в данном случае ток  $i$ ), записать в левой части уравнения, а члены, не содержащие переменной, — в правой. Члены в левой части равенства следует расположить по убывающим производным, а коэффициент при производной в высшей степени должен равняться единице. Запишем уравнение (12.1) в нормальном виде. Переставим слагаемые и поделим все члены уравнения на множитель  $L$ :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U, \text{ т. е. } \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = U/L. \quad (12.2)$$

Получилось дифференциальное уравнение первого порядка с правой частью. Из курса математики должно быть известно, что решением такого уравнения является сумма двух решений — общего и частного, но в электротехнике эти члены называются по-другому: составляющая вынужденная  $i_{\text{вын}}$  (установившаяся, принужденная) и составляющая свободная  $i_{\text{св}}$ , т. е.  $i = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}}$ . Вынужденная составляющая показывает значение, которое принимает искомая переменная величина теоретически через бесконечно большое время, т. е. по окончании переходного процесса. Но по окончании переходного процесса ток перестает изменяться и становится постоянной величиной, производная от постоянной величины, как известно, равно 0. Таким образом, чтобы определить вынужденную составляющую искомой переменной величины, следует все производные положить равными 0 и решить получившееся после этого уравнение. Если в уравнении (12.2) положить  $di/dt = 0$ , то получается  $(R/L) i_{\text{вын}} = U/L$ , откуда  $i_{\text{вын}} = U/R$ . Таким образом, по окончании переходного процесса, в цепи рис. 12.1 установится ток  $i_{\text{вын}} = U/R$ , что и должно быть, поскольку сопротивление индуктивного элемента постоянному току равно нулю и сопротивление всей цепи определяется сопротивлением резистивного элемента.



Будем определять теперь свободную составляющую тока. *Свободной* называется составляющая тока, изменяющаяся по такому закону, который обуславливается свойствами самой системы, а не какими-либо внешними воздействиями или причинами. Поясним свободную составляющую следующим примером. Пусть имеется натянутая струна. Колебать эту струну можно двумя различными способами: можно взять эту струну в руку и, не отрывая руки от струны, колебать ее в разные стороны. В этом случае получается типично принужденный режим — струна подчиняется внешнему воздействию и колеблется с той частотой и амплитудой, которая задается внешним воздействием, в данном случае силой руки. Существует и совершенно иной режим: струну можно оттянуть и отпустить, в этом случае струна станет колебаться с частотой и амплитудой, которая определяется свойствами самой струны. Этот режим является типично свободным, поскольку происходит под воздействием только энергии, запасенной в системе, без всяких внешних воздействий. Нечто аналогичное происходит и в любой цепи с накопителями энергии (т. е. индуктивностями или емкостями). Чтобы определить законы свободной составляющей (в данном случае тока), следует в уравнении, описывающем закон искомой величины, исключить внешнее воздействие, т. е. положить внешнее напряжение  $U$  равным 0 и решить получившееся после этого уравнение. Более строго говорят: положить правую часть дифференциального уравнения равной 0 и решить получившееся уравнение. Проведем эту операцию. Положим в уравнении (12.2)  $U = 0$ , в этом случае ток  $i$  превращается в свободную составляющую тока  $i_{\text{св}}$ :

$$\frac{di_{\text{св}}}{dt} + \frac{R}{L} i_{\text{св}} = 0. \quad (12.3)$$

Покажем один раз подробно решение дифференциального уравнения данного вида, а в последующих примерах будем писать решение подобных уравнений в готовом виде. Перенесем член  $(R/L)i_{\text{св}}$  в правую часть равенства, тогда  $(di_{\text{св}}/dt) = -(R/L)i_{\text{св}}$ . Перенесем множитель  $dt$  в правую, а множитель  $i_{\text{св}}$  — в левую части, при этом получается выражение  $di_{\text{св}}/i_{\text{св}} = -(R/L)dt$ . Возьмем неопределенный интеграл от обеих частей равенства  $\int \frac{di_{\text{св}}}{i_{\text{св}}} = \int -\frac{R}{L} dt$ . Напомним, что  $\int \frac{di_{\text{св}}}{i_{\text{св}}} = \ln i_{\text{св}}$ , следовательно,  $\int -\frac{R}{L} dt = -\frac{R}{L} t + \text{const}$ , т. е.  $\ln i_{\text{св}} = -\frac{R}{L} t + \text{постоянная величина}$ , получающаяся при взятии каждого неопределенного интеграла. Обозначим эту постоянную величину через  $\ln A$ , где  $A$  — такая постоянная величина, натуральный логарифм которой равен постоянной величине, названной выше const. Получается выражение  $\ln i_{\text{св}} = -(R/L)t + \ln A$  или  $\ln i_{\text{св}} - \ln A = -(R/L)t$ . Напомним, что разность логарифмов двух величин равна логарифму отношения этих величин, т. е.  $\ln(i_{\text{св}}/A) = -(R/L)t$ . Как известно, если  $\alpha = \beta$ , то справедливым является равенство  $e^\alpha = e^\beta$  (такая операция называется потенцированием). Очевидно, что  $e^{\ln(i_{\text{св}}/A)} = e^{[-\frac{R}{L}t]}$ , но потенцирование и логарифмирование — операции взаимно обратные, поэтому получается  $i_{\text{св}}/A = e^{-\frac{R}{L}t}$ , откуда

$$i_{\text{св}} = A e^{-\frac{R}{L} t} \quad (12.4)$$

Таким образом, чтобы сразу записать решение дифференциального уравнения вида (12.3), необходимо в левой части написать искомую переменную величину (в данном случае  $i_{\text{св}}$ ), а в правой — постоянную интегрирования  $A$  и множитель  $e$  в степени, равной второму коэффициенту приведенного дифференциального уравнения, взятому с обратным знаком (в нашем случае  $-R/L$ ) и умноженному на время  $t$ . Например, решением дифференциального уравнения  $\frac{di_{\text{св}}}{dt} + 4i_{\text{св}} = 0$  является выражение  $i_{\text{св}} = A e^{-4t}$ , а уравнения

$$\frac{du_{\text{св}}}{dt} + \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{L(R_1 + R_3)} i_{\text{св}} = 0$$

$$\text{выражение } u_{\text{св}} = A e^{-\left[\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{L(R_1 + R_3)}\right] t} \text{ и т. д.}$$

Обратим внимание, что во всех данных выражениях постоянная интегрирования  $A$  представляет величину неизвестную, которую еще предстоит определять.

Получив выражение для вынужденной и свободной составляющих, запишем общее выражение искомой переменной величины, в нашем случае тока  $i$ . Так как  $i = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}}$ , то в данном случае

$$i = U/R + A e^{-\frac{R}{L} t} \quad (12.5)$$

Теперь следует определить постоянную интегрирования  $A$ . Для определения постоянной интегрирования необходимо использовать граничные условия, т. е. свойство неизменности при коммутации тока в индуктивности и напряжения на емкости. Эти условия записывают следующим образом:  $i(+0) = i(-0)$  и  $u_C(+0) = u_C(-0)$ . Чтобы записать значение тока в первый момент после коммутации, т. е.  $i(+0)$ , следует взять решение исходного дифференциального уравнения (в нашем случае выражение 10.5) и положить в нем  $t = 0$ , т. е.  $i(+0) = U/R + A e^{-0}$ . Но, как известно, любое число в нулевой степени, независимо от знака, равно 1, поэтому  $i(+0) = U/R + A$ . Значение тока в последний момент перед коммутацией, т. е.  $i(-0)$ , следует определять по виду схемы исходя из того, что до коммутации в цепи был установившийся режим. Например, как видно из схемы рис. 12.1, до коммутации ключ находился в разомкнутом состоянии, ток в цепи при этом не протекал, поэтому  $i(-0) = 0$ , откуда  $U/R + A = 0$  или  $A = -U/R$ . Подставив значение  $A$  в выражение (12.5), получим

$$i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}) = I_{\text{вын}} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}) \quad (12.6)$$

Таким образом, член  $U/R$  представляет вынужденную составляющую тока  $i_{\text{вын}}$ , а член  $-(U/R) e^{-\frac{R}{L} t}$  — свободную составляющую  $i_{\text{св}}$ . Нарисуем кривые токов в цепи рис. 12.2. Определим время, через которое переходный

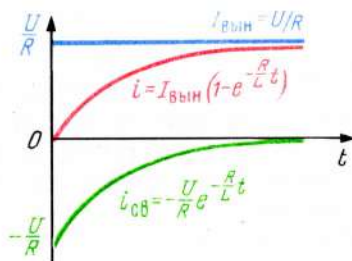


Рис. 12.2

процесс закончится. Очевидно, что ток достигает своего вынужденного значения тогда, когда свободная составляющая оказывается равной нулю. Но множитель  $e^{-\frac{R}{L}t} = 1/e^{\frac{R}{L}t}$  становится равным нулю только тогда, когда член  $e^{\frac{R}{L}t}$  оказывается бесконечно большим, а это происходит только через время  $t$ , равное бесконечности. Таким образом, *переходной процесс в любой цепи с накопителями энергии теоретически протекает неограниченно большое время.*

#### 12.5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА. ПОСТОЯННАЯ ВРЕМЕНИ ЦЕПИ

Введем очень важную физическую величину — постоянную времени цепи. *Постоянной времени цепи  $\tau$*  (греческая буква, читается "тау") называется время, за которое свободная составляющая тока или напряжения уменьшается в  $e$  раз. Определим  $\tau$  в зависимости от параметров цепи. Если  $t = \tau$ , то  $e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-1}$ , но если равны основания, то равны и степени, следовательно,  $-(R/L)\tau = -1$ , откуда  $\tau = L/R$ . Как видно из (12.2), второй коэффициент приведенного дифференциального уравнения, описывающего процессы в цепи после коммутации, есть величина, обратная постоянной времени. Действительно, в неразветвленной  $RL$ -цепи  $\tau = L/R$ , а второй коэффициент приведенного уравнения равен  $R/L$ , т. е. величине, обратной постоянной времени. Следовательно, уравнение (12.2) можно записать в виде  $di/dt + (1/\tau)i = U/L$ , а свободную составляющую этого уравнения

$$i_{св} = A e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.6)$$

В разветвленных цепях выражения постоянной времени могут быть достаточно громоздкими, поэтому степень числа  $e$  обыкновенно записывают именно через  $\tau$ , т. е. так, как показано в выражении (12.6). Определим зависимость значений свободной составляющей от времени. Примем установившееся значение тока за 1. В этом случае при  $t = 0$   $i_{св} = -1$ ,  $i_{вын} = 1$ ,  $i = i_{вын} + i_{св} = 0$ . Через время  $t = \tau$  свободная составляющая уменьшается в  $e = 2,718$  раза и становится  $1/e = 1/2,718 = 0,368 \approx 0,37$ , следовательно, за время  $\tau$  свободный ток уменьшается на  $(1 - 0,37) = 0,63$ , а общий ток возрастает на эту же величину и достигает  $0,63$  своего вынужденного значения. Через время  $t = 2\tau$  свободная составляющая уменьшается еще в  $e$  раз и ста-



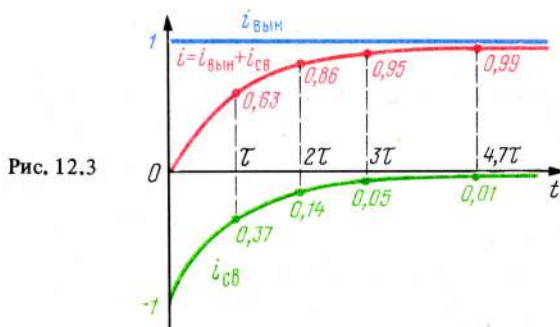


Рис. 12.3

новится  $1/2,718^2 = 0,135 \approx 0,14$ , а общий ток достигает 0,86 вынужденного значения. Через время  $t = 3\tau$  свободная составляющая уменьшается еще в 5 раз и становится  $1/e^3 = 0,05$ , а общий ток достигает 0,95 вынужденного значения. При  $t = 4,7\tau$  свободная составляющая составляет только 1 %, а общий ток достигает 99 % вынужденного значения. При  $t = 5\tau$   $i_{св} < 1\%$ , а  $i > 99\%$  от  $I_{вын}$ . Таким образом, теоретически переходной процесс в любой цепи протекает бесконечно долго, а практически переходной процесс считают законченным через время  $t = 3 \dots 5\tau$ . Через время  $t = 3\tau$  переменная величина достигает при нарастании 95 % своего вынужденного значения, а при спадании — остается 5 % от начального значения (рис. 12.3). В любой цепи первого порядка (т. е.  $RL$  или  $RC$ ) свободная составляющая представляет экспоненту, изменяющуюся по закону  $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ . Практическое время существования каждой экспоненты составляет  $3 \dots 5\tau$ , где  $\tau$  — постоянная времени цепи.

Постоянная времени определяется параметрами всех элементов, входящих в цепь, а не какого-либо одного элемента, поэтому постоянная времени одна для всей цепи, сколь бы сложной эта цепь не была. В общем случае, чтобы определить постоянную времени цепи, необходимо составить дифференциальное уравнение, определяющее процесс в какой-то ветви или на каком-то элементе, привести это уравнение к нормальному виду и взять величину, обратную второму коэффициенту.

## 12.6. НАПРЯЖЕНИЯ НА РЕЗИСТИВНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ И ИНДУКТИВНОСТИ

Продолжим рассмотрение процессов, происходящих в цепи рис. 12.1, а. Определим закон изменения мгновенных напряжений на резистивном сопротивлении  $R$ . Так как  $u_R = Ri$ , то

$$u_R = R \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (12.7)$$

Очевидно, что кривая  $u_R = f(t)$  повторяет кривую  $i = f(t)$  в соответствующем масштабе. Определим закон изменения мгновенных напряжений на

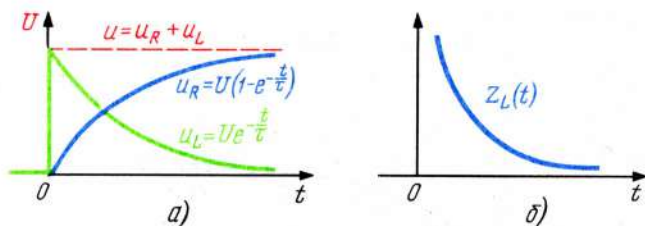


Рис. 12.4

индуктивности  $u_L = f(t)$ . Напомним, что  $\frac{d}{dt}(e^{at}) = ae^{at}$ . Так как  $u_L = L \frac{di}{dt}$ , то

$$u_L = L \frac{d}{dt} \left[ \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right] = L \left( -\frac{U}{R} \right) \left( -\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = U e^{-\frac{R}{L}t} = U e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.8)$$

Проанализируем ход кривой  $u_L = f(t)$ . До момента  $t = -0$  ключ был разомкнут и напряжение на индуктивности равнялось 0. Начиная с момента  $t = +0$  справедливым становится уравнение (12.8), из которого видно, что при  $t = +0$   $u_L = U$ . Следовательно, после коммутации (в данном случае замыкании ключа) напряжение на индуктивности скачком подскакивает до значения  $U$  (а ток останется без изменения), по мере увеличения времени напряжение на индуктивности уменьшается и теоретически через  $t = \infty$ , а практически через  $t = 3 \dots 5\tau$  становится равным 0 (рис. 12.4). Проверим выполнение второго закона Кирхгофа. Очевидно, что в любой момент алгебраическая сумма мгновенных значений падений напряжений на всех элементах цепи должна равняться мгновенному значению напряжения, приложенного к цепи, т. е.  $u_R + u_L$  должно равняться внешнему напряжению  $U$ . Произведем проверку  $U - Ue^{-\frac{t}{\tau}} + Ue^{-\frac{t}{\tau}} = U$ , что и должно быть.

## 12.7. СОПРОТИВЛЕНИЕ ИНДУКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ ПЕРЕХОДНОМ ПРОЦЕССЕ

Ранее неоднократно указывалось, что *сопротивление неэнергоемких элементов, например резистивных сопротивлений, не зависит от формы приложенного к ним напряжения или протекающего через них тока. Сопротивление энергоемких элементов (индуктивностей, емкостей) зависит от формы приложенного напряжения или протекающего тока.* Например, для периодического синусоидального напряжения сопротивление индуктивного элемента определяется из выражения  $\omega L$ , а для постоянного напряжения (тока) равно 0. При подключении к цепи источника входное напряжение скачкообразно изменяется от 0 до значения  $U$ . Поскольку закон изменения напряжения в этом случае совершенно отличен от периодического гармонического, то и выражение, по которому рассчитывается сопротивление индуктивного элемента, будет не  $X_L = \omega L$ , а некоторым иным. Чтобы определить закон, по которому изменяется сопротивление индуктивности, необходимо выражение мгновенных напряжений на индуктивности поделить на

выражение мгновенных токов в индуктивности, т. е.

$$Z_L(t) = u_L(t)/i_L(t), \quad (12.9)$$

где  $Z_L(t)$  — сопротивление индуктивного элемента при скачкообразном напряжении на входе цепи:

$$\begin{aligned} Z_L(t) = u_L(t)/i_L(t) &= \frac{U e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} = R \left[ \frac{1}{e^{t/\tau} (1 - e^{-t/\tau})} \right] = \\ &= \frac{R}{e^{t/\tau} - 1}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Проанализируем получившееся выражение:

$$\text{при } t = 0 \quad Z_L(0) = \frac{R}{e^0 - 1} = \frac{R}{1 - 1} = \frac{R}{0} = \infty;$$

$$\text{при } t = \infty \quad Z_L(\infty) = \frac{R}{\infty - 1} = R/\infty = 0.$$

Таким образом, сопротивление индуктивности ведет себя следующим образом. До замыкания ключа, т. е. до момента  $t = -0$ , в цепи имеется установившийся режим, при котором сопротивление индуктивности равнялось 0. После замыкания ключа, т. е. в момент  $t = +0$ , индуктивное сопротивление скачком увеличивается до  $\infty$ , а затем теоретически через бесконечно большое время, а практически через  $t = 3 \dots 5\tau$ , постепенно, по экспоненциальному закону, уменьшается до 0 (рис. 12.4, б). Следовательно, а первый момент после замыкания ключа индуктивный элемент представляет бесконечно большое сопротивление или, как говорят, "образует разрыв цепи", вследствие чего ток в цепи с индуктивностью, в первый момент времени после коммутации, равен 0. Следует четко знать и всегда помнить, что свойства цепи во время переходного процесса совершенно отличны от свойств цепи в установившемся режиме. Действительно, сопротивление индуктивного элемента постоянному току в вынужденном режиме равно 0, а в начале переходного процесса —  $\infty$ , ток в вынужденном режиме в цепи рис. 12.1 равен  $U/R$ , а в начале переходного процесса равен 0 и т. д.

## 12.8. ХАРАКТЕР СВОБОДНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ В ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обратим внимание на еще одно обстоятельство. В любых цепях первого порядка (т. е.  $RL$ - и  $RC$ -цепях), вне зависимости от их сложности, все процессы — как то: изменение напряжений, сопротивлений, токов (как свободных составляющих, так и их полных значений) происходят по экспоненциальным законам, причем все указанные процессы являются непериодическими, т. е. неповторяющимися по времени. Действительно, после включения ключа напряжение на входе цепи скачкообразно изменяется от 0 до  $U$ ,



но процесс такого изменения происходит только один раз и более не повторяется. Аналогично ток в цепи изменяется от 0 до  $U/R$ , но также без каких-либо повторений, то же происходит и со всеми остальными параметрами цепи. Расчеты неперiodических процессов требуют более сложного математического аппарата, чем расчеты периодических процессов. Именно этим и объясняется наличие дифференциальных уравнений, с помощью которых описываются процессы при неперiodических режимах.

## 12.9. ВКЛЮЧЕНИЕ $RC$ -ЦЕПИ НА ПОСТОЯННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Поскольку  $RC$ -цепь имеет один накопитель энергии, т. е. является также цепью первого порядка, методика расчета процессов в переходном режиме весьма схожа с методикой расчета в  $RL$ -цепи. Подключим  $RC$ -цепь к источнику постоянного напряжения (рис. 12.5, а). После замыкания ключа будет справедливым уравнение  $U = u_R + u_C = Ri + u_C$ . Так как в цепи с емкостью  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , то  $U = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$ , или

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{U}{RC}, \dots, \quad (12.11)$$

откуда  $\tau = RC$ ;  $u_C = u_{C\text{вын}} + u_{C\text{св}}$ . При  $t = \infty$  переходные процессы оканчиваются, напряжение на конденсаторе  $u_C$  перестает изменяться и становится величиной постоянной, производная  $du_C/dt$  становится равным 0, вынужденная составляющая напряжения на емкости определяется из выражения  $(1/RC)u_{C\text{вын}} = U/RC$ , откуда  $u_{C\text{вын}} = U$ . Действительно, по окончании переходного процесса постоянный ток перестает протекать через емкость, падение напряжения на сопротивлении  $R$  становится равным 0 и напряжение на конденсаторе оказывается равным напряжению источника.

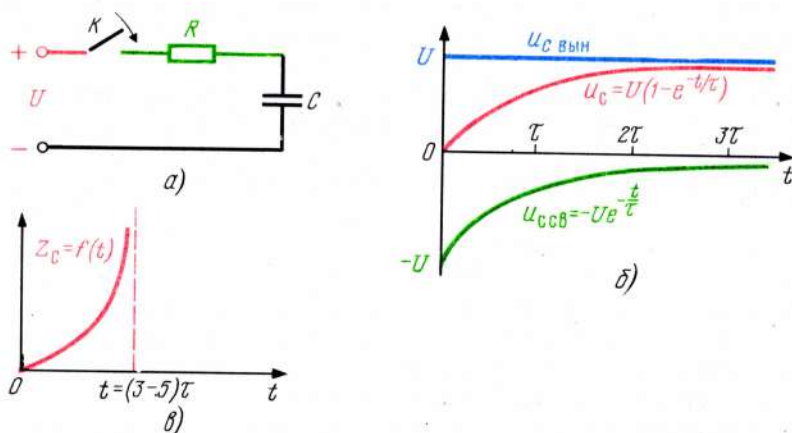


Рис. 12.5

Определим свободную составляющую напряжения на конденсаторе. Для этого правую часть уравнения (12.11) положим равным 0, в этом случае  $\frac{du_{C\text{св}}}{dt} + \frac{1}{RC} u_{C\text{св}} = 0$ . Решение такого уравнения, как было показано выше, имеет вид

$$u_{C\text{св}} = A e^{-\frac{t}{RC}} = A e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ т. е. } u_C = U + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Для нахождения постоянной интегрирования  $A$  используем граничные условия. Так как напряжение на емкости не может изменяться скачком, то  $u_C(+0) = u_C(-0)$ , или  $U + A e^0 = 0$ , поскольку до коммутации источник был отключен и напряжение на конденсаторе равнялось 0, т. е.  $U + A = 0$ , откуда  $A = -U$ ,

$$u_C = U - U e^{-t/\tau} = U(1 - e^{-t/\tau}), \text{ рис. 12.5, б.} \quad (12.12)$$

Ток в цепи

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (U - U e^{-t/RC}) = C(-U) \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}} = \\ &= \frac{U}{R} e^{-t/RC}. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Закон изменения сопротивления емкостного элемента в переходном режиме

$$\begin{aligned} Z_C(t) &= \frac{u_C(t)}{i_C(t)} = \frac{U(1 - e^{-t/\tau})}{\frac{U}{R} e^{-t/\tau}} = R e^{t/\tau} (1 - e^{-t/\tau}) = \\ &= R(e^{t/\tau} - 1). \end{aligned} \quad (12.14)$$

Проанализируем полученное выражение:

при  $t = 0$   $Z_C(0) = R(e^0 - 1) = R(1 - 1) = 0$ ;

при  $t = \infty$   $Z_C(\infty) = R(e^\infty - 1) = \infty$ .

Таким образом, до замыкания ключа сопротивление емкостного элемента равняется  $\infty$ , в первый момент после коммутации падает до 0, а затем, теоретически через  $t = \infty$ , а практически — через  $t = 3 \dots 5\tau$ , снова увеличивается до  $\infty$  (рис. 12.5, в). Выражение (12.13) также подтверждает то обстоятельство, что сопротивление незаряженного (только незаряженного!) конденсатора в первый момент после коммутации равно 0. Действительно, при

$t = 0$   $i = \frac{U}{R} e^0 = \frac{U}{R} \cdot 1 = \frac{U}{R}$ . Но ток в цепи рис. 12.5, а может равняться

$U/R$  только в том случае, если никаких иных сопротивлений, кроме  $R$ , в цепи нет, следовательно, сопротивление емкостного элемента в начальный момент равно 0.

## 12.10. ПРОТИВОРЕЧИЕ МЕЖДУ ВЫБОРАМИ ПАРАМЕТРОВ ЦЕПИ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ И ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМОВ

Как было показано в предыдущих разделах, законы, которым подчиняются процессы в установившемся и переходном режимах, совершенно различные. В энергетических цепях работа устройств происходит, как правило, в вынужденном режиме. Например, на электростанции к действующей энергетической сети необходимо подключить еще один генератор. После необходимой коммутации сначала оказывается переходной режим, но по его окончании в цепи устанавливается вынужденный режим, который затем в течение длительного времени может не претерпевать каких-либо изменений. Как известно, напряжение в осветительных сетях поддерживают достаточно неизменным. Совсем иное дело — передача информации. Информация передается изменениями параметров сигналов, и если постоянная времени цепи соизмерима с длительностью сигналов, то цепь будет работать все время в переходном режиме. Например, при передаче телеграфных сигналов, т. е. импульсов прямоугольной формы с различными длительностями, происходит, по-существу, то включение, то выключение источника (рис. 12.6, а). Устройства, вырабатывающие сигналы прямоугольной формы, часто называют электронными ключами, поскольку появление напряжения равносильно замыканию ключа в цепи источника, а исчезновение напряжения — размыканию, с той лишь разницей, что внутреннее сопротивление источника при электронной коммутации остается неизменным. Изменяется в этом случае только ЭДС источника, а внутреннее сопротивление остается постоянным. В цепи с механическим ключом отключается источник, что равносильно увеличению его внутреннего сопротивления до  $\infty$  и что, в свою очередь, приводит к ряду весьма своеобразных явлений. Если, например, ко входу цепи рис. 12.6, б приложено напряжение вида рис. 12.6, а с длительностями, указанными на чертеже, а параметры цепи  $R = 1 \text{ кОм}$ ,  $C = 5 \text{ мкФ}$ , то режим работы цепи будет все время переходным. Подсчитаем постоянную времени цепи и сравним ее с длительностями импульсов:  $\tau = RC = 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ мс}$ . В момент  $t_0$  на входе цепи появляется напряжение, которое остается неизменным в течение 5 мс. Но в течение этого времени напряжение на конденсаторе все время изменяется и через 5 мс

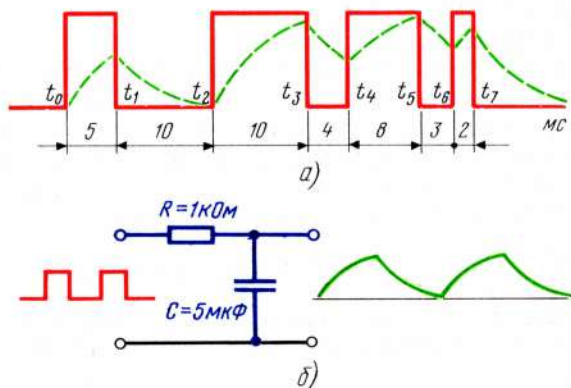


Рис. 12.6



достигнет только 63 % входного напряжения, поскольку длительность 5 мс равна постоянной времени данной цепи. В момент  $t_1$  напряжение на входе цепи уменьшается до 0, а напряжение на выходе начинает медленно уменьшаться, но оно не успевает приблизиться к 0, поскольку на это требуется  $3 \dots 5\tau$ , т. е. 15 ... 25 мс, а время паузы  $t_1 - t_2$  составляет всего 10 мс. В момент  $t_2$  напряжение снова скачком увеличивается до максимума и остается неизменным в течение 10 мс, но напряжение на конденсаторе и в этом случае не успевает достичь максимального значения и т. д.

Таким образом, при указанных параметрах цепь работает все время в переходном режиме, вследствие чего форма выходного напряжения значительно отличается от формы входного. Поскольку цепь в данном случае находится в переходном режиме, то ее параметры изменяются в зависимости от времени, что и приводит к искажениям выходного напряжения относительно входного (рис. 12.6, б).

Подсчитаем постоянную времени цепи, при которой цепь оказалась бы в режиме, близком к вынужденному, и искажения оказались бы малыми. Для этого необходимо, чтобы постоянная времени цепи была в 5–10 раз меньше длительности самого короткого импульса, т. е. в нашем примере составляла бы  $2/(5 - 10) = 0,2 \dots 0,4$  мс = 200 ... 400 мкс. При сопротивлении  $R = 1$  кОм  $C = \tau/R = (200 \dots 400) \cdot 10^{-6}/10^3 = (200 \dots 400) \cdot 10^{-9}$  Ф = 200 ... 400 нФ. При такой малой постоянной времени конденсатор практически будет успевать перезаряжаться со скоростью, близкой к изменению импульсов входного напряжения. В резистивной цепи  $C = 0$ ,  $\tau = 0$ , переходной процесс отсутствует, поэтому форма тока и выходного напряжения повторяет форму входного напряжения. Во входных цепях усилительных каскадов уменьшение коэффициента передачи, т. е. завал частотной характеристики на низких частотах (в вынужденном режиме, обратите на это внимание!) оказывается тем меньше, чем больше емкость разделительного конденсатора  $C$  (рис. 12.7), т. е. чем больше постоянная времени цепи. Но в этом случае резко ухудшаются свойства цепи в переходном режиме, ибо чем больше постоянная времени, тем больше инерционность цепи и тем сильнее искажается выходное напряжение по сравнению с входным во время переходного процесса.

Разберем еще один пример. Пусть имеется каскад, в котором динамический говоритель включен через выходной трансформатор (рис. 12.8). В § 11.15 было показано, что для того чтобы трансформатор лучше пропускал низкие частоты (а это как раз те частоты, которые придают звуку красивый "бархатистый" оттенок), необходимо, чтобы индуктивность первич-

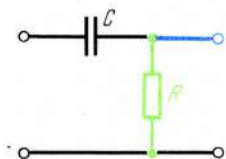


Рис. 12.7

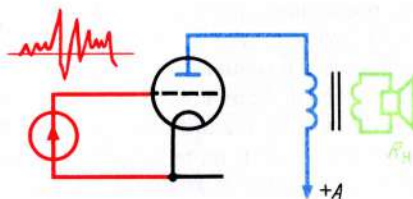


Рис. 12.8

ной обмотки была бы возможно большей, а ее резистивное сопротивление — возможно меньшим. При таких параметрах в вынужденном режиме трансформатор действительно хорошо пропускает низкие частоты. Но в индуктивной цепи  $\tau = L/R$ , поэтому при большом  $L$  и малом  $R$  получается большая постоянная времени, а это означает, что ток в цепи изменяется медленно, с большой инерционностью и во многих случаях не может успевать за изменениями входного напряжения, что неизбежно приводит к появлению искажений. Например, передача музыки, а в особенности звуков от ударных инструментов, создающих, как говорят, "звучность" оркестра, сопровождается быстрыми, крутыми импульсами напряжений на входе усилительного каскада. Но ток в цепи с большой постоянной времени не может изменяться быстро, форма тока поэтому будет сильно отличаться от формы приложенного напряжения и звук окажется глухим, некрасивым, виной чему является большая постоянная времени трансформатора.

Постоянную времени цепи, т. е. изменения напряжения на емкости (или токов в индуктивности) на практике часто оценивают понятиями "широкополосность", "быстродействие", "скорость нарастания фронта" и некоторыми другими. Все эти понятия показывают, в сущности, способность цепи изменять запас энергии в единицу времени или мощность, которой должен обладать источник, чтобы изменять энергию в накопителях с заданной скоростью. В частности, в гл. 5 было показано, что напряжение на конденсаторе могло бы иметь прямоугольный фронт (т. е. изменяться скачком) только при бесконечно большом токе, для чего опять-таки необходим источник бесконечно большой мощности. В современной измерительной аппаратуре выходное напряжение изменяется от 0 до 10 В за 5 ... 15 нс, т. е. в среднем на 1 В/нс, или  $10^9$  В/с. Для сравнения укажем, что в цепи, показанной на рис. 12.6, б, напряжение на конденсаторе достигает вынужденного значения только за 15 ... 25 мс, т. е. в несколько миллионов раз медленнее, чем в современной измерительной аппаратуре. Чем больше быстродействие схемы, тем меньше ее постоянная времени, тем шире диапазон частот, пропускаемый цепью и тем меньше частотные искажения, создаваемые такой цепью.

Таким образом, требования к параметрам цепей, работающих в вынужденном и переходном режимах, совершенно различные. Те параметры, которые хороши для вынужденных режимов, могут быть совершенно неудовлетворительными при работе цепи в переходных режимах и наоборот. Поэтому прежде чем выбирать параметры цепей каких-то электронных устройств, всегда следует четко представлять, в каком режиме будет работать цепь — в вынужденном или переходном. Только зная режим работы цепи, можно правильно выбрать ее параметры. Приведем еще один пример. Всякая ЭВМ работает все время в переходном режиме, поскольку счет в машине происходит изменениями напряжений (токов) от логического 0 до логической 1. Из-за наличия различных емкостей, в том числе и паразитных (между деталями и корпусом устройства, между проводниками и т. д.), постоянная времени цепи не может равняться 0, а это ограничивает быстродействие ЭВМ. Чем меньше входные (и другие) емкости микросхем, тем меньше постоянные времени цепей и тем больше их быстродействие. Закон, утверждающий, что напряжение на емкости не может изменяться скачком, спра-

ведлив в любой цепи. Наличие энергоемких элементов обязательно уменьшает полосу пропускания цепей, а следовательно, и их быстродействие. Современные детали, и в частности микросхемы, часто оценивают именно быстродействием, т. е. скоростью изменения напряжений (а следовательно, и зарядов) в конденсаторах, которая, в конечном счете, определяется постоянной времени детали или цепи.

Объясним, почему с увеличением постоянной времени цепи уменьшается полоса пропускания устройств. При большом  $\tau$  успевают изменить напряжение на конденсаторах только медленные колебания, т. е. напряжения с большим периодом и, следовательно, малой частотой. У высокочастотных сигналов время периода мало, следовательно, высокочастотные колебания пропускают только цепи с весьма малой постоянной времени. Таким образом, чем меньше постоянная времени цепи, тем шире полоса пропускания, тем более высокочастотные составляющие сигнала проходят через цепь без искажений. Например, чем меньше постоянная времени цепей в телевизоре, тем более мелкие детали видны на экране с достаточной четкостью.

Уменьшить постоянную времени цепи можно уменьшением емкостей или резистивных сопротивлений, однако при уменьшении сопротивлений по цепи течет больший ток, следовательно, затрачивается большая мощность, что вызывает нагрев деталей, необходимость в отодвигании их друг от друга, что, в свою очередь, влечет удлинение соединительных проводников и, следовательно, новое увеличение паразитных емкостей, увеличение габаритов устройств и т. д. При  $R = 0$   $\tau = 0$ , но так как сопротивление емкостей в начальный момент также равно 0, то ток в эти моменты оказался бы бесконечно большим, что потребовало бы источника с внутренним сопротивлением, равным 0, и возможностью отдавать бесконечно большую мощность.

Таким образом, для того чтобы увеличить быстродействие цепей, необходимо уменьшить емкости и резистивные сопротивления цепи. Для уменьшения емкостей следует монтаж проводить наиболее рациональным способом, в частности вместо навесных деталей использовать микросхемы, соединительные проводники делать возможно короткими, детали отодвигать от шасси и т. д. Следует помнить, что соединительные проводники обладают индуктивностями, что еще более усложняет переходные процессы (в  $RLC$ -цепях, см. ниже). Уменьшение резистивных сопротивлений требует более мощных транзисторов и соответственно более мощных источников тока.

#### 12.11. РАЗРЯД КОНДЕНСАТОРА НА РЕЗИСТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Пусть имеется конденсатор емкостью  $C$ , заряженный до напряжения  $U_0$ . В момент  $t = 0$  замкнем конденсатор на сопротивление  $R$ . Определим закон изменения мгновенных напряжений на конденсаторе после коммутации (рис. 12.9, а). Зададимся положительным направлением тока в цепи.

Положительными в цепи с емкостями являются токи, увеличивающие заряд конденсатора. На этом основании ток, направленный к положительно заряженной пластине, записывается со знаком плюс, т. е.  $i = C \frac{du_C}{dt}$ . Состав-



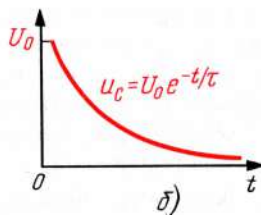
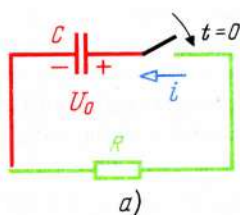


Рис. 12.9

вим уравнение по второму закону Кирхгофа. Поскольку источников в цепи нет,  $u_C + u_R = 0$ , или  $Ri + u_C = 0$ . Подставив значение  $i$ , получаем  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ . Приведем уравнение к нормальному виду: для этого поделим все его члены на коэффициент при высшей производной, т. е. на  $RC$  и уравнение принимает вид

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0. \quad (12.15)$$

В этом уравнении правая часть равна 0. Это указывает на то, что вынужденное значение напряжения на конденсаторе равно 0, что полностью соответствует физике процесса. Действительно, ток от заряженного конденсатора является свободным, по мере разряда конденсатора ток уменьшается и через  $3 \dots 5\tau$  практически прекращается. В общем случае  $u_C = u_{C\text{вын}} + u_{C\text{св}}$ . Поскольку  $u_{C\text{вын}} = 0$ , в данном случае  $u_C = u_{C\text{св}}$ . Ранее было показано, что решением уравнения вида (12.15) является выражение  $u_C = Ae^{-t/RC}$ , где  $A$  — постоянная интегрирования. Постоянную  $A$  найдем из граничных условий, состоящих в данной цепи в том, что  $u_C(+0) = u_C(-0)$ . Очевидно, что  $u_C(+0) = Ae^{-0/RC} = A$ , а  $u_C(-0) = U_0$ , поскольку до коммутации конденсатор был заряжен до напряжения  $U_0$ . Следовательно,  $A = U_0$ , а  $u_C = U_0 e^{-t/RC} = U_0 e^{-t/\tau}$  (рис. 12.9, б). Таким образом, напряжение на конденсаторе является свободным и уменьшается по экспоненциальному закону до 0, теоретически за бесконечно большое время, а практически за  $3 \dots 5\tau$ , где  $\tau$ , как видно из (12.15), равно  $RC$  (напомним, что  $\tau$  — величина, обратная второму коэффициенту приведенного дифференциального уравнения, описывающего напряжения или тока в цепи).

Приведем еще несколько аналогий свободным процессам, т. е. процессам, происходящим по законам, определяемым только свойствами системы. Пусть на горизонтальном участке пути электровоз толкает перед собой вагон, не сцепленный с электровозом. В некоторый момент времени электровоз останавливается, а вагон по инерции продолжает катиться вперед. Как только вагон отойдет от электровоза, его движение становится свободным, поскольку оно определяется энергией, запасенной в движущемся вагоне, и сопротивлением, оказываемым внешней средой (трение колес о рельсы, сопротивление воздуха и т. д.). Характер движения вагона будет аналогичен характеру изменения напряжения в конденсаторе.

Несмотря на внешнее различие вагона на рельсах и конденсатора, подключенного к сопротивлению, в характере происходящих процессов есть много общего. В самом

деле, вагон обладает начальной энергией, приданной внешним источником (электро-возом), и конденсатор также обладает начальной энергией, полученной при заряде конденсатора от некоторого источника; вагон лишен внешнего воздействия (электро-воз остановился), и конденсатор тоже лишен внешнего воздействия (источник отключен), движение вагона определяется его параметрами и механическим сопротивлением, которое приходится преодолевать, изменение заряда определяется емкостью конденсатора и сопротивлением цепи, скорость движения вагона уменьшается по экспоненциальному закону, напряжение на конденсаторе изменяется по этому же закону и т. д.

Совершенно аналогично ведет себя, например, любое нагретое тело: скорость понижения температуры определяется только параметрами тела и свойствами окружающей среды. Уменьшение температуры происходит также по экспоненциальному закону, следовательно, закон изменения температуры описывается дифференциальным уравнением первого порядка без правой части.

Продолжим анализ цепи рис. 12.9, *a*. Закон тока в цепи

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_0 e^{-t/RC}) = CU_0 \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-t/RC} = \\ &= -\frac{U}{R} e^{-t/RC}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Знак минус показывает, что действительное направление тока в цепи противоположно положительному, т. е. предполагаемому, что и должно было быть, поскольку при разряде конденсатора ток течет от положительно заряженной пластины конденсатора через цепь к отрицательно заряженной пластине. До коммутации в конденсаторе была запасена энергия  $W_0 = CU_0^2/2$ . После разряда конденсатора энергия в нем становится равной 0. Но энергия не может исчезать, а может только переходить из одного вида в другой в равных количествах. Очевидно, что при протекании тока через сопротивление  $R$ , в нем будет выделяться тепло. Покажем, что энергия, выделяемая в сопротивлении, равна энергии, которая имелаась в конденсаторе.

Поскольку ток в сопротивлении все время изменяется, следует подсчитать энергию за бесконечно малое время  $dt$ , а затем произвести суммирование этих бесконечно малых энергий за время, в течение которого в цепи протекает ток. Элементарная энергия за время  $dt$  подсчитывается из выражения  $dW = i^2 R dt = \left[ \left(-\frac{U}{R}\right)^2 e^{-2t/RC} \right] R dt$ . Энергия за время переходного процесса

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty dw = \int_0^\infty \frac{U_0^2}{R^2} R e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{U_0^2}{R(-2/RC)} e^{-\frac{2}{RC}t} \Big|_0^\infty = \\ &= -\frac{CU_0^2}{2} e^{-\frac{2}{RC}t} \Big|_0^\infty = -\frac{CU_0^2}{2} (0 - 1) = \frac{CU_0^2}{2}, \end{aligned}$$

т. е. энергия, выделяемая в сопротивлении  $R$  после коммутации, равна энергии, которая была запасена в конденсаторе до коммутации. Рассмотрим несколько примеров на расчеты переходных процессов в цепях первого порядка.

**Пример 12.1.** Определить время, через которое напряжение на конденсаторе в цепи рис. 12.9, *а* уменьшится в два раза по сравнению с напряжением, которое имелось на конденсаторе до коммутации.

**Решение.** Так как  $u_C = U_0 e^{-t/\tau}$ , то при уменьшении напряжения на конденсаторе в два раза получается выражение  $U_0/2 = U_0 e^{-t/\tau}$ , откуда  $e^{-t/\tau} = 1/2$ , или  $1/e^{t/\tau} = 1/2$ , т. е.  $e^{t/\tau} = 2$ . Логарифмируя обе части равенства, получаем  $\ln(e^{t/\tau}) = \ln 2$ , следовательно,  $t/\tau = \ln 2$ , или  $t = \tau \ln 2 = RC \cdot 2,3 \lg 2 = 2,3 \cdot 0,3 RC = 0,7 RC$ .

Например, если  $R = 10 \text{ кОм}$ ,  $C = 0,1 \text{ мкФ}$ , то  $\tau = RC = 10 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} = 10^{-3} \text{ с} = 1 \text{ мс} = 1000 \text{ мкс}$ . Напряжение на конденсаторе уменьшается в 2 раза через время  $t = 0,7\tau = 0,7 \cdot 1000 = 700 \text{ мкс} = 0,7 \text{ мс}$ .

**Пример 12.2.** Определить закон изменения напряжения на вольтметре после размыкания ключа, если индуктивность катушки  $L = 2 \text{ Гн}$ , сопротивление катушки  $R = 20 \text{ Ом}$ , сопротивление вольтметра  $R_V = 5 \text{ кОм}$ , напряжение источника  $U = 100 \text{ В}$  (рис. 12.10, *а*). До момента  $t_0$  ключ был замкнут, в цепи имелся установившийся режим, через катушку протекал ток  $i_{\text{до ком}} = U/R_L = 100/20 = 5 \text{ А}$ , вольтметр был подключен параллельно источнику и показывал напряжение 100 В, через вольтметр протекал ток  $I_V = U/R_V = 100/5 \cdot 10^3 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 20 \text{ мА}$ . После размыкания ключа источник отключается, но ток через катушку измениться скачком не может, поэтому в первый момент после коммутации ток в катушке останется прежним, равным 5 А. Но всякий ток течет по некоторой замкнутой цепи. До коммутации ток проходил через источник, после коммутации ток может проходить только через вольтметр, поскольку иного пути у него нет. Следовательно, в первый момент после коммутации ток в вольтметре скачком изменяется от 20 мА до 5 А, т. е. увеличивается в 250 раз и начинает протекать в обратном направлении. Напряжение на зажимах вольтметра в момент  $t(0)$  оказывается  $u_V(0) = R_V \cdot i(0) = 5 \cdot 10^3 \cdot 5 = 25 \cdot 10^3 \text{ В} = 25 \text{ кВ}$  (25 тысяч вольт!). При такой перегрузке даже сравнительно кратковременной, прибор, как правило, бывает испорчен.

Определим время, через которое напряжение на вольтметре достигает номинального значения, т. е. 100 В:  $u_{RV} = R_V i(0) e^{-\frac{R}{L}t} = 5 \cdot 10^3 5 e^{-\frac{5 \cdot 10^3}{2}t} = 25 \cdot 10^3 e^{-2500t}$ ;  $100 = 25 \cdot 10^3 e^{-2500t}$ , т. е.  $e^{2500t} = \frac{25 \cdot 1000}{100} = 250$ , или  $2500t = \ln 250 = 2,3 \cdot \lg 250 = 2,3 \cdot 2,4 = 5,52$ , откуда  $t = 5,52/2500 = 2 \text{ мс}$  (рис. 12.10, *б*).

В данной схеме также имеются противоречия между требованиями к параметрам вольтметра, в вынужденном и переходном режимах. При работе вольтметра в установившемся режиме сопротивление вольтметра должно быть возможно большим, при этом вольтметр потребляет малый ток и практически не изменяет параметры цепи,

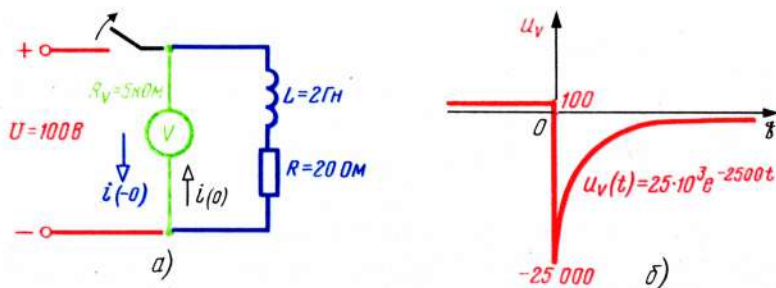


Рис. 12.10



к которой подключен. Но в переходном режиме все должно быть как раз наоборот, поскольку чем больше сопротивление вольтметра, тем больше оказывается на нем напряжение после коммутации. Например, если в рассмотренном примере внутреннее сопротивление вольтметра выбрать не 5 кОм, а 50 кОм, то напряжение на нем окажется не 25, а 250 киловольт. Следовательно, чтобы обезопасить прибор в момент отключения источника, внутреннее сопротивление прибора следует выбирать малым, что совершенно неприемлемо при работе в установившемся режиме. Поскольку подобные противоречия встречаются весьма часто, необходимо хорошо понимать процессы, происходящие в цепях, правильно выбрать аппаратуру и ее параметры в зависимости от режимов работы различных технических устройств.

## 12.12. ОТКЛЮЧЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ОТ ЦЕПИ

Проблема отключения источников от цепи весьма часто вызывает большие сложности, поскольку в индуктивностях и емкостях остается энергия, которую необходимо предварительно каким-то образом истратить. Отбор в системе энергии часто представляет технически достаточно трудную задачу. Например, чтобы разогнать поезд до определенной скорости, необходимо затратить энергию, но для остановки поезда всю накопленную им энергию необходимо некоторым образом истратить. Во многих случаях энергию движущегося состава совершенно бесполезно превращает в тепловую путем трения ободов колес о тормозные колодки. Ракету столь же трудно опустить, как и поднять, тем более, что перевод энергии летящей ракеты в тепло достаточно затруднителен. При посадке самолет также должен "освободиться" от энергии, истраченной на его подъем, и т. д.

Таким образом, при отключении электрического источника энергии, всегда следует решать вопрос, каким образом накопленную энергию отобрать, чтобы не произошло каких-либо перенапряжений, сверхтоков, т. е. явлений, аналогичных показанным в примере 12.2. Это тем более существенно, что во время переходного процесса может происходить трансформация напряжений и токов. Объясним, почему в цепи рис. 12.10, а напряжение и ток в вольтметре резко превышают номинальные. Энергия магнитного поля в катушке накапливалась за время, определяемое параметрами зарядной цепи, т. е. индуктивностью и резистивным сопротивлением катушки, в данном случае  $\tau_{зар} = L/R_L = 2/20 = 0,1 \text{ с} = 100 \text{ мс}$ . Убывание магнитного поля происходит в другой цепи со скоростью, определяемой параметрами цепи разряда, т. е. индуктивностью катушки и резистивным сопротивлением вольтметра  $R_V$ :  $\tau_{разр} = L/(R_L + R_V) = 2/5 \cdot 10^3 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 0,4 \text{ мс}$ , откуда скорость уменьшения магнитного поля в  $\tau_{зар}/\tau_{разр} = 100/0,4 = 250$  раз больше скорости, с которой поле накапливалось. Таким образом, магнитное поле катушки накапливалось медленно, а отдавалось быстро. Но чтобы отдать ту же энергию за меньшее время, ее следует отдавать с большим током, откуда и появляются перегрузки и перенапряжения во время переходного процесса.

Рассмотрим процессы, происходящие в неразветвленной цепи при отключении питающего источника рис. 2.10, а при  $R_V = \infty$ . Так как ток в индуктивности измениться скачком не может, а никакого иного пути кроме разомкнутых контактов у него нет, то ток вынужден проходить через воздушный промежуток, имеющийся между разомкнутыми контактами. Поскольку сопротивление воздуха весьма велико, то в воздушном зазоре

возникает большое напряжение, которое ионизирует воздух, делает его электропроводным, что, в свою очередь, приводит к искрению, обгоранию контактов и ряду других нежелательных явлений. Чтобы избежать подобных явлений, принимают специальные меры, например сначала замыкают катушку на малое сопротивление, постоянная времени цепи при этом оказывается большой, поле убывает медленно, перенапряжений не происходит. Существуют и другие приемы, которые будут рассмотрены ниже.

### 12.13. ТРАНСФОРМАЦИЯ ИМПУЛЬСОВ ТОКА С ПОМОЩЬЮ $RC$ -ЦЕПИ

В предыдущих параграфах было показано, что с помощью  $RL$ -цепей можно получать напряжения импульсного вида с размахом много большим, чем размах напряжения питающего источника. Преобразования напряжений или токов называют обыкновенно *трансформацией*, но это вовсе не преобразование, производимое с помощью обычного трансформатора. Преобразующими свойствами обладают многие цепи, устроенные совершенно иначе, нежели известный трансформатор с железным сердечником. Например, последовательный колебательный контур преобразует малое входное напряжение в большое выходное и поэтому является также трансформирующим устройством. Термин "трансформирующий" широко используется в смысле "преобразовывать". Рассмотрим прием, с помощью которого можно трансформировать импульсы тока, используя переходные процессы в  $RC$ -цепи.

Получение больших импульсных напряжений в  $RL$ -цепях основывается на том, что ток в катушке не может изменяться скачком и, следовательно, при увеличении сопротивления, по которому течет ток, увеличивается и падение напряжения на этом сопротивлении. В первый момент после коммутации  $RL$ -цепь представляет источник, значение тока в котором не зависит от сопротивления внешней цепи. В  $RC$ -цепи напряжение на конденсаторе не может изменяться скачком и, следовательно, если заряжать конденсатор через большое сопротивление, а разряжать через малое, то ток в первый момент разряда будет во столько раз больше тока, который был в первый момент заряда, во сколько постоянная времени цепи заряда больше постоянной времени цепи разряда. Разберем это на примере.

Пусть имеется цепь рис. 12.11, в которой сопротивление  $R$  имеет большое значение, а сопротивление  $r$  — малое, т. е. выполняется условие  $R > r$ . Установим ключ  $K$  в положение "Заряд". В первый момент после коммутации сопротивление конденсатора равно 0 и ток, текущий через сопротивление  $R$ ,  $i(0) = U/R$ . Чем больше сопротивление  $R$ , тем меньше начальный зарядный

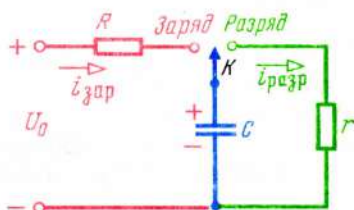


Рис. 12.11



ток, тем больше постоянная времени цепи заряда  $\tau$  и тем большее требуется время для заряда конденсатора. По мере нарастания электрического поля, т. е. накопления зарядов в конденсаторе, ток в цепи уменьшается и через время  $3 \dots 5\tau$  практически прекращается ( $i = (U/R)e^{-t/\tau}$ ). При заряде ток протекает от положительного зажима источника, при этом верхняя (по рис. 12.11) пластина конденсатора заряжается положительно, а нижняя — отрицательно. Зарядный ток конденсатора можно определять также из выражения  $i = (U_0 - u_C)/R$ . Так как в начальный момент  $u_C = 0$ , то ток  $i(0) = U/R$ , т. е. оказывается таким, который получается при нулевом сопротивлении конденсатора. После заряда напряжение на конденсаторе увеличивается до  $U_0$ , поэтому  $i(\infty) = (U_0 - U_0)/R = 0$ , что свидетельствует о бесконечно большом сопротивлении конденсатора. Еще раз обращаем внимание, что после каждой коммутации сопротивление конденсатора падает до 0, а за время переходного процесса увеличивается до  $\infty$ .

Итак, по мере заряда конденсатора его сопротивление возрастает до  $\infty$ , и ток заряда прекращается. Переведем ключ в положение "Разряд". Поскольку при переключении происходит коммутация, сопротивление конденсатора падает до 0, но напряжение на конденсаторе скачком измениться не может, поэтому ток в разрядной цепи в первый момент  $i(0) = U_0/r$ , который в  $R/r$  раз больше начального тока при заряде, т. е.  $i(0)_p = (R/r)i(0)_z$ . Поскольку конденсатор разряжается, ток в цепи уменьшается по закону  $i_p = (U_0/r) \times e^{-t/RC}$ . Уменьшение тока в цепи можно рассматривать либо как уменьшение напряжения источника (в данном случае конденсатора), либо как увеличение сопротивления конденсатора. Физически причиной увеличения или уменьшения токов в цепи является изменение полей или зарядов в энергонакапливающих элементах, но для расчетных целей весьма удобно использовать понятия изменяющихся сопротивлений конденсатора или катушки индуктивности. В этом случае процессы, происходящие в цепях, удобно анализировать с помощью распространенных законов электротехники, например законов Кирхгофа. Сравним максимальные мощности в зарядной и разрядной цепях. При заряде наибольшая мгновенная мощность определяется из выражения  $p_{\max z} = U_0 \cdot i(0)_z = U_0 \cdot U_0/R = U_0^2/R$ , а максимальная разрядная — из выражения  $p_{\max p} = U_0 \cdot i(0)_p = U_0^2/r$ . Очевидно, что мощность в импульсе при разряде в  $R/r$  раз больше аналогичной мощности при заряде.

**Пример 12.3.** Напряжение  $U = 100$  В, зарядное сопротивление  $R = 1$  МОм, разрядное  $r = 10$  Ом. Сравнить импульсные мощности при заряде и разряде конденсатора.

**Решение.**  $p(0)_z = U_0^2/R = 100^2/10^6 = 10^{-2}$  Вт = 0,01 Вт;  $p(0)_p = U_0^2/r = 100^2/10 = 10^3$  Вт = 1 кВт;  $p(0)_p/p(0)_z = 10^3/10^{-2} = 10^5$  раз.

Таким образом, цепь, питающаяся от источника с мощностью всего 0,01 Вт, отдает в импульсе мощность 1 кВт, т. е. в сто тысяч раз большую. Разумеется, что время заряда конденсатора в данном случае также в  $10^5$  раз больше времени разряда. Поэтому мощность при установившемся процессе называют средней, а мощность в некоторый момент переходного процесса — импульсной.

**Пример 12.4.** Определить закон изменения мгновенных напряжений и токов в цепи рис. 12.12, а после размыкания ключа. Исходные данные показаны на схеме.

**Решение.** Вследствие коммутации изменяется резистивное сопротивление, поэтому в цепи происходит переходный процесс. Составим уравнение по второму закону



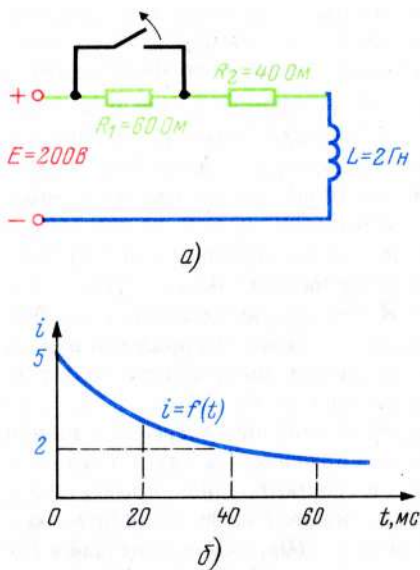


Рис. 12.12

Кирхгофа для мгновенных значений. Напомним, что уравнение (или уравнения) составляют для той цепи, которая получается после коммутации, в данном случае  $E = u_R + u_{R1} + u_L$ . Так как  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ,  $u_R + u_{R1} = (R + R_1)i$ , то  $E = (R + R_1)i + L \frac{di}{dt}$ . Приведем уравнение к нормальному виду:  $L \frac{di}{dt} + (R + R_1)i = E$  или

$$\frac{di}{dt} + \frac{(R + R_1)}{L} i = \frac{E}{L}. \quad (12.17)$$

Получилось дифференциальное уравнение с правой частью. Решение этого уравнения представляет сумму двух составляющих – вынужденной и свободной, т. е.  $i = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}}$ . Чтобы найти вынужденную составляющую, необходимо переходный процесс считать закончившимся и все производные положить равными 0 (см. §12.5). В этом случае  $((R + R_1)/L) i_{\text{вын}} = E/L$ , откуда  $i_{\text{вын}} = E/(R + R_1)$ , что полностью подтверждается видом схемы, получающейся после коммутации. Действительно, в установившемся режиме сопротивление индуктивности постоянному току равно 0, и входное сопротивление цепи определяется суммой резистивных сопротивлений  $R$  и  $R_1$ . Чтобы определить свободную составляющую тока  $i_{\text{св}}$ , правую часть уравнения следует положить равной 0, при этом получается уравнение  $\frac{di_{\text{св}}}{dt} + \frac{(R + R_1)}{L} i_{\text{св}} = 0$ . Решение

такого уравнения, как было показано выше, имеет вид  $i_{\text{св}} = A e^{-\frac{(R + R_1)}{L} t} = A e^{-t/\tau}$ , где  $A$  – постоянная интегрирования, а  $\tau$  – выражение, обратное второму коэффициенту приведенного дифференциального уравнения, описывающего процессы в цепи.

В данном случае  $\tau = L/(R + R_1)$ . Таким образом,  $i = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}} = \frac{E}{(R + R_1)} + A e^{-t/\tau}$ .

Постоянную  $A$  определим из граничных условий. До коммутации ключ был замкнут, в цепи имелся установившийся режим, при котором  $i(-0) = E/R$ . Так как ток в индуктивности не может измениться скачком, то при  $t = +0$ , ток останется таким же, каким он был при  $t = -0$ , т. е.  $i(+0) = i(-0)$ , или

$$\frac{E}{R} = \frac{E}{(R + R_1)} + A e^{-0 \cdot t}, \quad A = \frac{E}{R} - \frac{E}{(R + R_1)} = E \left[ \frac{(R + R_1 - R)}{R(R + R_1)} \right] = E \frac{R_1}{R(R + R_1)},$$

откуда

$$i = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}} = \frac{E}{R + R_1} + \frac{E R_1}{R(R + R_1)} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R + R_1} \left( 1 + \frac{R_1}{R} e^{-t/\tau} \right).$$

Произведем проверку. При  $t = 0$   $i(0) = \frac{E}{R + R_1} \left( 1 + \frac{R_1}{R} \right) = \frac{E(R + R_1)}{(R + R_1)R} = \frac{E}{R}$ . При  $t = \infty$   $i(\infty) = E/(R + R_1)$  ( $1 = E/(R + R_1)$ ). Граничные условия выполняются.

Просчитаем числовые значения:  $E = 200$  В;  $R = 40$  Ом;  $R_1 = 60$  Ом;  $L = 2$  Гн.  $i(0) = E/R = 200/40 = 5$  А;  $i(\infty) = E/(R + R_1) = 200/(40 + 60) = 2$  А;  $\tau = L/(R + R_1) = 2/(40 + 60) = 2/100 = 0,020$  с = 20 мс =  $20 \cdot 10^{-3}$  с.

Следовательно, за время  $(3 \dots 5) \cdot 20 = (60 \dots 100)$  мс, ток в цепи изменяется на 3 А — от 5 до 2 А (рис. 12.12, б). Через  $t = \tau = 20$  мс ток уменьшается на  $(1 - 1/e) \times [i(0) - i(\infty)] = (1 - 1/2,71)(5 - 2) = 0,63 \cdot 3 = 1,89$  А и становится равным 3,11 А. Аналогично через время  $t = 2\tau = 40$  мс ток становится равным 2,42 А, а через  $t = 3\tau = 60$  мс — 2,15 А и т. д. В любой момент ток в цепи

$$i = \frac{E}{(R + R_1)} \left( 1 + \frac{R_1}{R} e^{-t/\tau} \right) = \frac{200}{(40 + 60)} \left( 1 + \frac{60}{40} e^{-50t} \right) = 2 \left( 1 + 1,5 e^{-50t} \right) = (2 + 3 e^{-50t}) \text{ А.}$$

Очевидно, что при  $t = 0$   $i = 2 + 3 = 5$  А, при  $t = \infty$   $i = 2$  А, что было получено ранее.

Рассчитаем падение напряжений на сопротивлениях  $R_2$  и  $R_1$ :  $u_{R_2} = R_2 \cdot i = R_2 (2 + 3 e^{-50t}) = 40(2 + 3 e^{-50t}) = (80 + 120 e^{-50t})$  В;  $u_{R_1} = R_1 \cdot i = (120 + 180 e^{-50t})$  В. Закон напряжения на индуктивности во время переходного процесса:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} [(2 + 3 e^{-50t})] = (-50) \cdot 2 \cdot 3 e^{-50t} = -300 e^{-50t}.$$

Произведем проверки. До коммутации  $u_{\text{вх}} = 200$  В;  $u_{R_1} = 0$  (так как ключ был замкнут);  $u_{R_2} = R_2 \cdot i(-0) = R_2 (u_{\text{вх}}/R_2) = u_{\text{вх}}$ , откуда  $u_{\text{вх}} = u_{R_2}$ . В момент  $t = +0$   $u_{\text{вх}} = 200$  В ток остался без изменений, поскольку индуктивность не дает возможности ему скачком измениться, очевидно, что  $i(+0) = i(-0) = 5$  А. Напряжение на сопротивлении  $R_2$  останется прежним, равным  $R_2 i(-0) = 40 \cdot 5 = 200$  В, напряжение на сопротивлении  $R_1$  скачком увеличится до значения  $R_1 i(-0) = 60 \cdot 5 = 300$  В, напряжение на индуктивности скачком изменится до значения  $u_L = -300$  В.  $u_{\text{вх}} = u_{R_1} + u_{R_2} + u_L$ ;  $200 = 300 + 200 - 300$ , т. е.  $200$  В =  $200$  В. По окончании переходного процесса, т. е. теоретически через  $t = \infty$   $u_{R_1} = R_1 \cdot i_{\text{вын}} = 60 \cdot 2 = 120$  В,  $u_{R_2} = R_2 \cdot i_{\text{вын}} = 40 \cdot 2 = 80$  В,  $u_L = 0$ ,  $200 = 120 + 80$ ,  $200$  В =  $200$  В.

Таким образом, второй закон Кирхгофа выполняется в любой момент. Кривые напряжений на различных элементах цепи представлены на рис. 12.12, в.

Из вышеуказанного следует, что величины, которые не могут изменяться скачком, т. е. ток в индуктивности и напряжение на емкости, рассчитывают-

ся по формуле

$$dx/dt + ax = b, \quad (12.18)$$

а величины, которые могут изменяться скачком, т. е. напряжение на индуктивности и ток в емкости, — по формуле

$$f(t) = Ae^{-at}. \quad (12.19)$$

**Пример 12.5.** Определить законы, по которым изменяются токи во всех ветвях и напряжения на всех элементах в цепи рис. 12.13, а после замыкания ключа.

**Решение.** Составим уравнения по законам Кирхгофа для цепи после коммутации:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ U_{\text{вх}} = u_{R_1} + u_L + u_{R_2}, \\ 0 = -u_{R_2} - u_L + u_{R_3}. \end{cases}$$

Так как  $u_{\text{вх}} = U$ ,  $u_L = L \frac{di_2}{dt}$ , а  $u_R = Ri$ , то уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3, & (1) \\ u_{\text{вх}} &= R_1 i_1 + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2, & (2) \\ 0 &= -R_2 i_2 - L \frac{di_2}{dt} + R_3 i_3. & (3) \end{aligned} \right\} \quad (12.20)$$

Данные уравнения следует решить относительно одного из токов, в принципе безразлично, относительно какого, но уравнения решать легче, если сначала определить тот ток, который скачком изменяться не может, в данном случае  $i_2$ . Выразим из строки (3) ток  $i_3$  и подставим в строку (1). Уравнения преобразуют вид

$$\begin{aligned} R_3 i_3 &= R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt}, \\ i_3 &= \frac{R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt}}{R_3} = \frac{R_2}{R_3} i_2 + \frac{L}{R_3} \frac{di_2}{dt} = 0,3 i_2 + 0,2 \frac{di_2}{dt}, \\ i_1 &= i_2 + \frac{R_2}{R_3} i_2 + \frac{L}{R_3} \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Получившееся выражение подставим в строку (2):

$$\begin{aligned} U &= R_1 \left( i_2 + \frac{R_2}{R_3} i_2 + \frac{L}{R_3} \frac{di_2}{dt} \right) + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = \left( \frac{R_1 L}{R_3} + L \right) \frac{di_2}{dt} + \\ &+ \left( R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_3} + R_2 \right) i_2 = \left( \frac{R_1 L + R_3 L}{R_3} \right) \frac{di_2}{dt} + \left( \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3} \right) i_2. \end{aligned}$$

Приведем получившееся уравнение к нормальному виду. Для этого все члены поделим на коэффициент при производной, т. е. на множитель  $\left( \frac{R_1 L + R_3 L}{R_3} \right)$ , при этом получается

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) R_3}{R_3 (R_1 L + R_3 L)} i_2 = \frac{U R_3}{L (R_1 + R_3)}$$



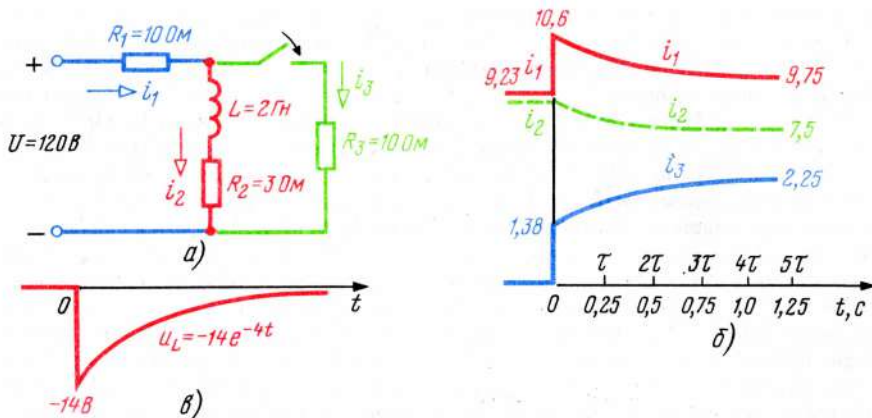


Рис. 12.13

или

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{L(R_1 + R_3)} i_2 = \frac{UR_3}{L(R_1 + R_3)}. \quad (12.22)$$

Данное уравнение — приведенное, поэтому коэффициент при втором члене есть величина, обратная постоянной времени цепи, следовательно,

$$\tau = \frac{L(R_1 + R_3)}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = \frac{2(10 + 10)}{10 \cdot 3 + 10 \cdot 10 + 3 \cdot 10} = \frac{40}{160} = 0,25 \text{ с.}$$

Таким образом, токи во всех ветвях и напряжения на всех элементах устанавливаются в данной цепи за время  $t = (3 \dots 5)\tau = (3 - 5) \cdot 0,25 = 0,75 \dots 1,25$  с, т. е. примерно за 1 с.

Подставим числовые значения в (12.21):

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{(10 \cdot 3 + 10 \cdot 10 + 3 \cdot 10)}{2(10 + 10)} i_2 = \frac{120 \cdot 10}{2(10 + 10)}, \text{ т. е. } \frac{di_2}{dt} + 4i_2 = 30.$$

Поскольку получилось уравнение с правой частью, то  $i_2 = i_{2\text{вын}} + i_{2\text{св}}$ . Через  $t = \infty$   $di_2/dt = 0$ ,  $4i_{2\text{вын}} = 30$ , откуда  $i_{2\text{вын}} = 30/4 = 7,5$  А. Положив правую часть уравнения равной нулю, получим  $di_{2\text{св}}/dt + 4 \cdot i_{2\text{св}} = 0$ , следовательно,  $i_{2\text{св}} = Ae^{-4t}$ , тогда  $i_2 = 7,5 + Ae^{-4t}$ , где  $A$  — постоянная интегрирования. Так как ток  $i_2$  не может измениться скачком, то  $i_2(+0) = i_2(-0)$ . До коммутации ключ был разомкнут, при этом  $i_2(-0) = U/(R_1 + R_2) = 120/13 = 9,23$  А. Следовательно, в момент  $t = +0$  выражение (12.24) равно 9,23 А, т. е.  $7,5 + Ae^0 = 9,23$ . Так как  $e^0 = 1$ , то  $A = 9,23 - 7,5 = 1,73$ . Таким образом, ток во второй ветви изменяется по закону

$$i_2 = 7,5 + 1,73e^{-4t}.$$

Подставив в уравнение (12.21) выражение тока  $i_2$ , получим  $i_3 = 0,3(7,5 + 1,73e^{-4t}) + 0,2 \left[ \frac{d}{dt}(7,5 + 1,73e^{-4t}) \right] = 0,3 \cdot 7,5 + 0,3 \cdot 1,73e^{-4t} + 0,2(-4) \cdot 1,73e^{-4t} = 2,25 + 0,519e^{-4t} - 1,384e^{-4t} = 2,25 - 0,865e^{-4t}$ . Ток  $i_1 = i_2 + i_3 = 7,5 + 1,73e^{-4t} + 2,25 - 0,865e^{-4t} = 9,75 + 0,865e^{-4t}$ . Построим кривые и проанализируем получившиеся

выражение. Ток  $i_1$  до коммутации равен 9,231 А, в момент  $t(+0)$   $i_1(0) = 9,75 + 0,865 = 10,615$  А, в момент  $t(\infty)$   $i_{1\text{вын}} = 9,75$  А. Ток  $i_2$  до коммутации также был равен 9,23 А, в первый момент после коммутации  $i_2(+0) = 7,5 + 1,73 = 9,23$  А, по окончании переходного процесса  $i_{2\text{вын}} = 7,5$  А. Ток  $i_3$  до коммутации равен 0, при  $t = +0$   $i_3(0) = 2,25 - 0,865 = 1,385$  А, после окончания переходного процесса  $i_{3\text{вын}} = 2,25$  А. Таким образом, ток  $i_1$  до коммутации равнялся 9,23 А, в момент коммутации скачком увеличивается на 0,865 А и становится равным 10,615 А. За время переходного процесса ток  $i_1$  уменьшается до 9,75 А. Ток  $i_2$  до коммутации был равен 9,23 А, при коммутации остается неизменным, что и должно быть, поскольку ток в индуктивности не может изменяться скачком, а затем уменьшается до 7,5 А. Ток  $i_3$  до коммутации был равен 0, так как ключ был разомкнут, при коммутации скачком увеличивается до 1,385, а затем за время переходного процесса растет до 2,25 А. Кривые токов изображены на рис. 12.13, б. В любой момент, разумеется, выполняются законы Кирхгофа. Действительно, в момент  $t(-0)$   $i_1 = i_2 + i_3$ ,  $9,23 = 9,23 + 0$ . В момент  $t = +0$  ключ был замкнут, ток  $i_3$  скачком увеличивается на 1,38 А, а так как ток  $i_2$  остается без изменений, то ток  $i_1$  также скачком увеличивается на это же значение:  $i_1(+0) = i_2(+0) + i_3(+0)$ ,  $10,615 = 9,23 + 1,385$ . Так как ток  $i_1$  после коммутации возрастает, то увеличивается падение напряжения на сопротивлении  $R_1$ , а следовательно, понижается напряжение на зажимах второй и третьей ветвей, что приводит к уменьшению тока во второй ветви. Но уменьшение тока  $i_2$  приводит к уменьшению тока  $i_1$ , а следовательно, уменьшению падения напряжения на сопротивлении  $R_1$ , при этом увеличивается напряжение на зажимах третьей ветви, что вызывает увеличение тока  $i_3$  от 1,38 до 2,25 А. При  $t = \infty$   $i_{1\text{вын}} = i_{2\text{вын}} + i_{3\text{вын}}$ ,  $9,75 = 7,5 + 2,25$ , т. е.  $9,75 = 9,75$ .

Законы мгновенных напряжений на всех элементах цепи следующие:  $u_{R1} = R_1 i_1 = 10 \cdot (9,75 + 0,865e^{-4t}) = 97,5 + 8,65e^{-4t}$ ;  $u_{R2} = R_2 i_2 = 3 \cdot (7,5 + 1,73e^{-4t}) = 22,5 + 5,19e^{-4t}$ ;  $u_{R3} = R_3 i_3 = 10 \cdot (2,25 - 0,865e^{-4t}) = 22,5 - 8,65e^{-4t}$ .

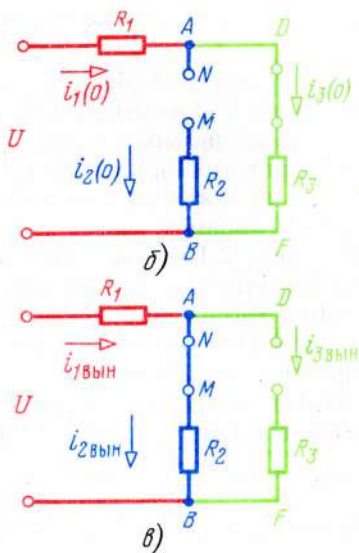
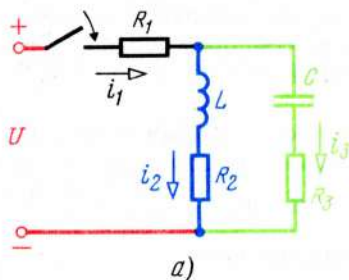
Кривые напряжений на резистивных сопротивлениях повторяют кривые тока в соответствующем масштабе. Определим закон напряжения на индуктивности  $L$ :  $u_L = L \frac{di_1}{dt} = L \frac{d}{dt} (7,5 + 1,73e^{-4t}) = 2 \cdot 1,73(-4)e^{-4t} = -13,85e^{-4t}$ . До коммутации напряжение на индуктивности равнялось 0, поскольку в вынужденном режиме постоянный ток напряжения на индуктивности не вызывает. В первый момент после коммутации напряжение на индуктивности скачком изменяется до  $-13,85$  В, а затем постепенно приближается к 0 (рис. 12.13, в). Проверим выполнение второго закона Кирхгофа для моментов  $t = 0$  и  $t = \infty$ :  $U = u_{R1}(0) + u_L(0) + u_{R2}(0) = 97,5 + 8,65 - 13,85 + 22,5 + 5,19 = 120$  В;  $U = u_{R1\text{вын}} + u_{L\text{вын}} + u_{R2\text{вын}} = 97,5 + 0 + 22,5 = 120$  В.

**Пример 12.6.** Определить, от каких и до каких значений изменяются токи во всех ветвях и напряжениях на всех элементах цепи рис. 12.14, а после замыкания ключа.

**Решение.** До замыкания ключа сопротивление индуктивного элемента равнялось 0, а емкостного  $-\infty$ , как при всяком установившемся режиме. При отключенном источнике все токи и падения напряжений равны 0. В первый момент после коммутации сопротивление индуктивного элемента скачком увеличивается до  $\infty$ , а емкостного  $-\infty$  падает до 0. Для момента  $t = +0$  схема приобретает вид рис. 12.14, б, при этом  $i_1(0) = i_3(0) = U/(R_1 + R_3)$ . Определим падения напряжения на всех элементах цепи в данный момент. На резистивных сопротивлениях (только на резистивных!) мгновенные напряжения пропорциональны мгновенным токам, поэтому  $u_{R1}(0) = R_1 i_1(0) = u_{R1}/(R_1 + R_3)$ ;  $u_{R2}(0) = 0$ ;  $u_{R3}(0) = R_3 i_3(0) = u_{R3}/(R_1 + R_3)$ .

Поскольку сопротивление емкости  $C$  в начальный момент равно 0,  $u_C(0) = 0$ . Напряжение на индуктивности, а данным случае на бесконечно большом сопротивлении, определяют из следующих соображений. Напряжение на зажимах третьей ветви равно напряжению на резисторе  $R_3$ , т. е.  $u_{DF}(0) = u_{R3}(0)$ . Так как  $\varphi_A = \varphi_D$ , а  $\varphi_B = \varphi_F$ , то

Рис. 12.14



напряжение на второй и третьей ветвях равны между собой, т. е.  $u_{AB}(0) = UR_3 / (R_1 + R_3)$ . Но  $u_{R_2}(0) = 0$ , следовательно, напряжение на индуктивности в момент  $t = +0$  равно  $UR_3 / (R_1 + R_3)$ .

Определим токи и напряжения, получающиеся при  $t = \infty$ . За время переходного процесса сопротивление индуктивного элемента падает до 0, а емкостного — возрастает до  $\infty$ . Схема приобретает вид рис. 12.14, б. Как видно из схемы,  $i_{1\text{вын}} = i_{2\text{вын}} = U / (R_1 + R_2)$ ,  $i_{3\text{вын}} = 0$ . Падения напряжения на всех элементах в вынужденном режиме:  $u_{R_1\text{вын}} = R_1 i_{1\text{вын}} = UR_1 / (R_1 + R_2)$ ;  $i_{2\text{вын}} = R_2 i_{2\text{вын}} = UR_2 / (R_1 + R_2)$ ;  $u_{R_3} = 0$ . Напряжение на третьей ветви равно напряжению на второй ветви. Так как  $u_{R_3\text{вын}} = 0$ , то  $u_{C\text{вын}} = UR_2 / (R_1 + R_2)$ . Пусть  $R_1 < R_2 < R_3$ . В этом случае поведение токов в цепи будет следующим. До коммутации ток  $i_1 = 0$ , после замыкания ключа скачком увеличивается до  $U_1 / (R_1 + R_3)$ , за время переходного процесса изменяется до  $U_1 / (R_1 + R_2)$ . До коммутации ток  $i_2 = 0$ , в первый момент после замыкания ключа остается равным 0, за время переходного процесса увеличивается до значения  $U / (R_1 + R_2)$ . Ток  $i_3$  до коммутации также равен 0, после замыкания ключа скачком возрастает до значения  $U / (R_1 + R_3)$ , за время переходного процесса уменьшается до 0. Напряжение на индуктивности до коммутации равно 0, при замыкании ключа скачком увеличивается до  $U / (R_1 + R_3)$ , за время переходного процесса уменьшается до 0. Напряжение на конденсаторе до коммутации равно 0, после замыкания ключа остается неизменным, за время переходного процесса увеличивается до  $U / (R_1 + R_2)$ . Напряжения на резистивных сопротивлениях изменяются по тем же законам, что и токи. Легко убедиться, что в любой момент выполняются первый и второй законы Кирхгофа. Например, при  $t = +0$

$$U = u_{R_1}(0) + u_L(0) + u_{R_2}(0) = [UR_1 / (R_1 + R_3)] + [UR_3 / (R_1 + R_3)] + 0 = [U(R_1 + R_3) / (R_1 + R_3)] = U.$$

$$\text{Или } 0 = -u_{R_2}(0) - u_L(0) + u_C(0) + u_{R_3}(0) = -0 - [UR_3 / (R_1 + R_3)] + 0 + [UR_3 / (R_1 + R_3)] = 0. \text{ Аналогично } U = u_{R_1\text{вын}} + u_{L\text{вын}} + u_{R_2\text{вын}} = [UR_1 / (R_1 + R_2)] + 0 + [UR_2 / (R_1 + R_2)] = [U(R_1 + R_2) / (R_1 + R_2)] = U; 0 = -u_{R_2\text{вын}} - u_{L\text{вын}} + u_{C\text{вын}} + u_{R_3\text{вын}} = [-UR_2 / (R_1 + R_2)] - 0 + [UR_2 / (R_1 + R_2)] + 0 = 0 \text{ и т. д.}$$



## 12.14. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим свободные процессы в цепях второго порядка. *Цепями второго порядка* называются цепи, свободные процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями второго порядка. Иногда считают, что цепями второго порядка являются  $RLC$ -цепи. Это не совсем точно. Цепями второго порядка являются любые цепи, в которых имеется два накопителя энергии. Например, цепь, рис. 12.14, *a* является цепью второго порядка, но и цепь рис. 12.15 также является цепью второго порядка, поскольку в этой цепи имеются два конденсатора, которые нельзя заменить одним эквивалентным. Рассмотрим сначала свободные процессы, происходящие в неразветвленной цепи, состоящей из индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и резистивного сопротивления  $R$  (рис. 12.16).

Пусть до коммутации конденсатор был заряжен до напряжения  $U_0$ . После замыкания ключа образуется цепь, для которой справедливо уравнение  $u_C + u_L + u_R = 0$ , а после подстановки  $u_R = Ri$  и  $u_L = L \frac{di}{dt}$   $L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$ . Так как  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , то уравнение принимает вид

$$L \frac{d}{dt} \left( C \frac{du_C}{dt} \right) + R \left( C \frac{du_C}{dt} \right) + u_C = 0,$$

или  $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ . Поделив все члены уравнения на коэффициент при члене с высшей производной, получим

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0. \quad (12.23)$$

Правая часть получившегося дифференциального уравнения, описывающего закон напряжения на конденсаторе после коммутации, равна 0, следовательно, все процессы в цепи происходят без внешнего воздействия, а напряжение на конденсаторе состоит только из свободной составляющей, поэтому в данной цепи  $u_C = u_{C\text{св}}$ . Чтобы решить дифференциальное уравнение вида (12.26), сначала следует составить характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному. Для этого вторую производную заменяют множителем  $k^2$ , первую производную — множителем  $k$  нулевую производную — 1. Получается выражение

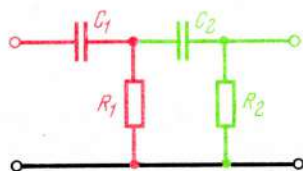


Рис. 12.15

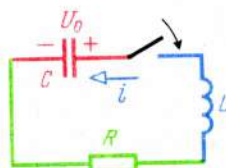


Рис. 12.16

$$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0. \quad (12.24)$$

Таким образом, характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением, степень которого равна порядку того дифференциального уравнения, для которого данное характеристическое уравнение составлено.

Решением приведенного дифференциального уравнения второго порядка является выражение вида

$$f(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}, \quad (12.25)$$

где  $f(t)$  — искомая переменная величина;  $k_1$  и  $k_2$  — корни характеристического уравнения;  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий. Например, решением уравнения (12.26) является выражение

$$u_C = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}. \quad (12.26)$$

Найдем корни характеристического уравнения (12.27):

$$k_{12} = -R/2L \pm \sqrt{(R^2/4L^2) - 1/LC}. \quad (12.27)$$

При этом могут оказаться три случая:

$$(R^2/4L^2) < (1/LC), \text{ т. е. } R < 2\sqrt{L/C}, \text{ или } R < 2\rho;$$

$$(R^2/4L^2) > (1/LC), \text{ т. е. } R > 2\sqrt{L/C}, \text{ или } R > 2\rho;$$

$$(R^2/4L^2) = (1/LC), \text{ т. е. } R = 2\sqrt{L/C}, \text{ или } R = 2\rho.$$

Цепь, в которой  $R < 2\rho$ , называют цепью с малым затуханием, а цепь, в которой  $R > 2\rho$ , — цепью с большим затуханием.

#### 12.15. СВОБОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПИ С МАЛЫМ ЗАТУХАНИЕМ

Определим размерность члена  $\sqrt{(R^2/4L^2) - (1/LC)}$ :

$$\begin{aligned} [\sqrt{(Om^2/Gn^2) - (1/Gn \cdot \Phi)}] &= [\sqrt{(Om^2/Om^2 \cdot c^2) - (1/c \cdot Om) (\frac{1}{c/Om})}] = \\ &= [\sqrt{1/c^2 - 1/c^2}] = [1/c]. \end{aligned}$$

Размерность  $1/c$  является размерностью угловой частоты  $\omega$ . Так как уравнение (12.26) описывает свободные процессы в контуре, то получившаяся частота  $\omega$  является угловой частотой свободных колебаний, т. е. частотой, с которой происходят колебания в контуре, не имеющем внешнего источника. Если  $(1/LC) > (R^2/4L^2)$ , то подкоренное выражение оказывается отрицательным. Проведем следующие преобразования:

$$\sqrt{(R^2/4L^2) - (1/LC)} = \sqrt{(-1) (\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2})} = j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = j\omega_{св}.$$

Обозначим  $a = R/2L$ . Тогда выражение (12.27) можно записать в виде

$$k_{12} = -a \pm j\omega_{св}. \quad (12.28)$$

Если в решение (12.26) вместо членов  $k_1$  и  $k_2$  подставить выражение (12.28), из граничных условий  $u_C(0) = u_C(-0)$  (из-за невозможности скачкообразного изменения напряжения на конденсаторе) и  $i(0) = i(-0)$  (из-за невоз-

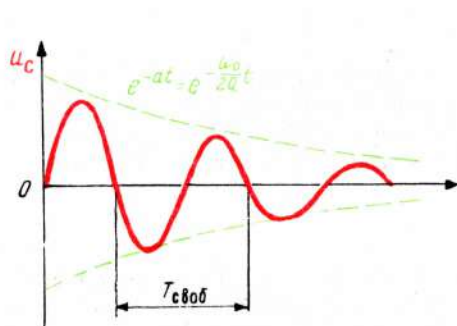


Рис. 12.17

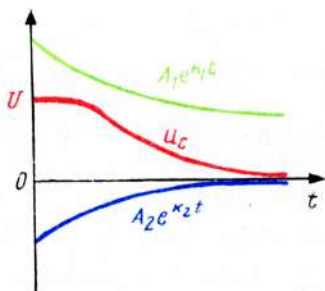


Рис. 12.18

возможности скачкообразного изменения тока в цепи с индуктивностью) определить постоянные  $A_1$ ,  $A_2$  и проделать преобразования, которые мы не приводим из-за их громоздкости, получается выражение

$$u_C = U_0 e^{-at} \sin(\omega_{св} t + \xi), \quad (12.29)$$

где  $u_C$  — мгновенное напряжение на конденсаторе в любой момент  $t$  после коммутации;  $U_0$  — напряжение на конденсаторе до коммутации;  $\omega_{св}$  — угловая частота свободных колебаний;  $\xi$  — начальная фаза свободных колебаний, определяемая из выражения  $\xi = \omega_{св}/a$ . Преобразуем множитель  $a$ . Умножим числитель и знаменатель на  $\omega_0$ ; тогда получается

$$a = \frac{R}{2L} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} = (R/2\omega_0 L) \cdot \omega_0 = (\omega_0/2Q).$$

Выражение (12.29) показывает, что напряжение на конденсаторе есть произведение двух множителей: экспоненты  $e^{-at} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t}$  и синусоиды  $U_0 \times \sin(\omega_{св} t + \xi)$  (рис. 12.17). Получившуюся кривую иногда называют "затухающей синусоидой". Заметим, что термин "затухающая синусоида" неточен, поскольку синусоида — кривая незатухающая, однако названное выражение имеет на практике определенное распространение.

Определим число свободных колебаний  $N$ , совершающихся за время переходного процесса. Практическое время существования переходного процесса определяется временем существования экспоненты  $e^{-at}$ , которая, как было показано выше, составляет  $(3 - 5) 1/a$ , где  $a$  — постоянный множитель в степени числа  $e$ . Следовательно, переходный процесс практически существует в течение времени  $t_{пер} = (3 - 5) 1/a = (3 - 5) 1/(\omega_0/2a) = (3 - 5) (2Q/\omega_{св}) = (6 - 10) Q/\omega_{св}$ . Время одного периода свободных колебаний  $T_{св} = 2\pi/\omega_{св}$ . Так как при малых затуханиях  $\omega_{св} \approx \omega_0$ , то  $T_{св} = 2\pi/\omega_0$ .

Определим число колебаний  $N$ , совершаемых за время  $t_{пер}$ , если период одного колебания  $T_{св}$ :



$$N = \frac{t_{\text{пер}}}{T_{\text{св}}} = \frac{(6 \dots 10) Q \omega_0}{\omega_0 \cdot 2\pi} \approx Q. \quad (12.30)$$

Таким образом, за время переходного процесса свободная составляющая напряжения или тока совершает примерно  $Q$  колебаний, где  $Q$  – добротность  $RLC$ -цепи.

Произведем еще одно исследование, выявим физический смысл отношения мнимой части корня к вещественной:  $\omega_{\text{св}}/a = \omega_0 2Q/\omega_0 = 2Q$ , откуда

$$Q \approx 2\omega_{\text{св}}/a. \quad (12.31)$$

Следовательно, зная корни характеристического уравнения, можно определить добротность цепи  $Q$  или, зная добротность  $Q$  и вещественную часть корня  $a$ , – частоту свободных колебаний  $\omega_{\text{св}}$ :

$$\omega_{\text{св}} = aQ/2. \quad (12.32)$$

Итак, если оказывается, что корни характеристического уравнения комплексные, то это означает, что:

1) свободная составляющая напряжений (токов) имеет колебательный характер и затухает во времени;

2) мнимая часть корня представляет угловую частоту свободных колебаний  $\omega_{\text{св}}$ , а вещественная часть характеризует скорость убывания амплитуд свободной составляющей. Чем больше по абсолютному значению вещественная часть корня, тем быстрее происходит переходный процесс и тем меньше время переходного процесса в цепи;

3) число свободных колебаний, происходящих за время переходного процесса близко к значению добротности цепи;

4) отношение удвоенного значения мнимой части корня к вещественной близко к добротности цепи  $Q$ . Дальнейший анализ показывает, что если  $(R^2/4L^2) > (1/LC)$ , т. е.  $R > 2\sqrt{L/C}$ , или  $R > 2\rho$ , то корни характеристического уравнения оказываются вещественными и разными. Добротность цепи при этом меньше 0,5, а свободная составляющая изменяется по закону, близкому к экспоненциальному (точно:  $u_C = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$ ), где  $k_{12}$  – вещественные корни характеристического уравнения (рис. 12.18). При  $(R^2/4L^2) = (1/LC)$ , т. е.  $R = 2\sqrt{L/C}$ , или  $R = 2\rho$ , корни получаются вещественными и равными:  $k_1 = k_2 = a$ . Добротность при этом оказывается близкой к 0,5, а режим – критическим, т. е. пограничным между колебательным (при  $R < 2\rho$ ) и аperiodическим (т. е. неколебательным, при  $R > 2\rho$ ).

#### 12.16. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В $RLC$ -ЦЕПИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим процессы, происходящие в  $RLC$ -цепи при воздействии напряжениями прямоугольной формы (рис. 12.19). Наличие источника напряжения прямоугольной формы равносильно подключению источника постоянного напряжения без изменения сопротивления цепи. Напряжение на конденсаторе состоит при этом из двух составляющих – вынужденной и свободной, т. е.  $u_C = u_{\text{свын}} + u_{\text{св}}$ . Так как в вынужденном режиме  $Z_L = 0$ , а  $Z_C = \infty$ , то  $i_{\text{вын}} = 0$ ,  $u_{R\text{вын}} = u_{L\text{вын}} = 0$ ,  $u_{\text{свын}} = U$ , следовательно, вы-

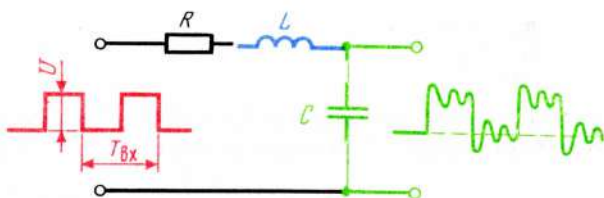


Рис. 12.19

нужденная составляющая напряжения на емкости повторяет форму напряжения воздействующего источника и имеет также прямоугольную форму. Но к вынужденному напряжению прибавляется свободная составляющая, имеющая, как было показано выше, колебательный характер с затухающей амплитудой. Таким образом, если напряжение на входе цепи имеет форму, показанную на рис. 12.20, а, то при малых затуханиях цепи выходное напряжение получается отличной от формы входного напряжения, т. е. в цепи появляются искажения, причем они оказываются тем заметнее, чем больше добротность цепи  $Q$  (рис. 12.20, б). При увеличении резистивного сопротивления добротность цепи падает, число свободных колебаний уменьшается, искажения также уменьшаются.

Чтобы форма выходного напряжения повторяла форму входного и искажения отсутствовали, необходимо выполнение условия  $R/2\rho$ , режим в этом случае становится критическим (рис. 12.20, в).

При дальнейшем увеличении резистивного сопротивления режим переходит в аperiodический, выходное напряжение приобретает форму рис. 12.20, г, искажения снова увеличиваются, но становятся иного характера — не колебательные, как при больших добротностях, а имеющие вид "затягивающихся" фронтов. Таким образом, чтобы при переходных режимах искажения отсутствовали, необходимо обеспечить критический режим работы цепи.

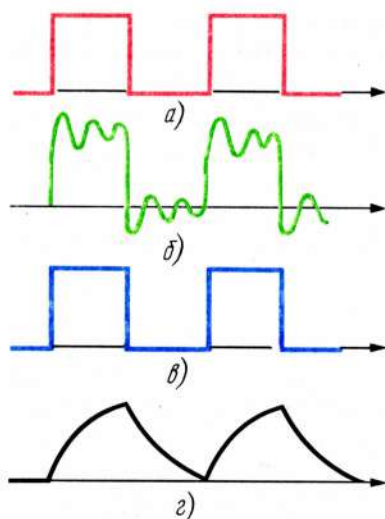


Рис. 12.20

Уже обращалось внимание на то, что параметры цепей, являющиеся удовлетворительными для вынужденных и переходных режимов, совершенно различные, типичный пример тому  $RLC$ -цепь. Действительно, для обеспечения хорошей избирательности в вынужденном режиме контур должен обладать высокой добротностью. Но чем больше добротность, тем больше искажения в переходном режиме и наоборот. Поскольку передача информации происходит преимущественно в переходных режимах, то выбирать параметры це-

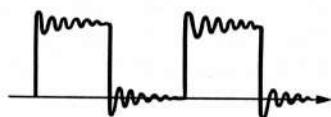


Рис. 12.21

пей для неискаженной передачи приходится чаще всего, из соображений малых искажений, именно в этих режимах.

Обратим внимание еще на один случай, встречающийся на практике. Выходное напряжение в  $RC$ -цепях при прямоугольном воздействии часто имеет вид, изображенный на рис. 12.21. После крутых нарастаний или спаданий фронтов появляются частые колебания с малыми амплитудами. Эти колебания, имеющие, как правило, значительную частоту, порождаются емкостью цепи и индуктивностями соединительных проводников. При малых  $L$  частота свободных колебаний оказывается достаточно большой, а критическое сопротивление  $R = 2\sqrt{L/C}$  — малым. Перевести цепь в критический режим часто удастся путем включения в нее резистивного сопротивления, при котором колебания отсутствуют.

#### 12.17. ВЫХОДНОЕ НАПЯЖЕНИЕ НА ИНДУКТИВНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Прямоугольное напряжение в вынужденном режиме постоянно, поэтому сопротивление индуктивного элемента в этом режиме равно 0, следовательно, выходное напряжение на индуктивности также равно 0. В переходном режиме выходное напряжение состоит из свободной составляющей, которая при малых затуханиях имеет форму колебаний с уменьшающейся амплитудой (рис. 12.22). При уменьшении добротности цепи число колебаний уменьшается, но первый "выброс" чаще всего, остается, даже при весьма малых добротностях.

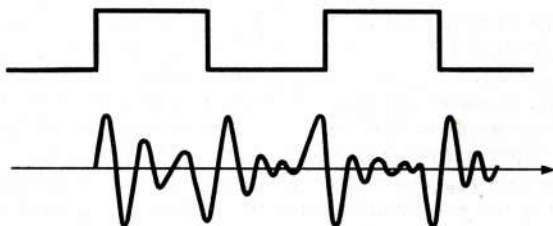
Конфигурация цепи в некоторых случаях бывает такой, при которой в цепи оказывается несколько колебаний с различными частотами и затуханиями. Например, индуктивность катушки и емкость конденсатора порождают колебания со сравнительно низкой частотой, а индуктивность соединительных проводников с емкостью того же конденсатора — с гораздо большей. Могут быть также колебания от индуктивностей проводников и емкостей монтажа, их частота может быть еще большей. Индуктивности проводников монтажа и колебания, вызванные этими элементами, часто называют "паразитными".

**Пример 12.7.** В цепи рис. 12.19  $L = 100$  мГн,  $C = 253$  нФ, период входного прямоугольного напряжения  $T_{вх} = 40$  мс. Определить форму выходного напряжения для случаев  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 60$  Ом,  $R_3 = 0,25 R_{кр}$ ,  $R_4 = R_{кр}$ ,  $R_5 = 5R_{кр}$ .

**Решение.** Критическое сопротивление цепи

$$R_{кр} = 2\rho = 2\sqrt{L/C} = 2\sqrt{100 \cdot 10^{-3}/253 \cdot 10^{-9}} = 2\sqrt{\frac{100 \cdot 10^9}{253 \cdot 10^3}} = 2 \cdot 628 = 1257 \text{ Ом.}$$

Рис. 12.22





Поскольку сопротивление  $R_1$  меньше критического ( $20 < 1257$ ), свободная составляющая выходного напряжения имеет колебательный характер с затухающей амплитудой. Вынужденная составляющая повторяет форму входного напряжения. Подсчитаем добротность цепи  $Q$  и корни характеристического уравнения:

$$Q = \rho/R = \sqrt{L/C}/R = \frac{\sqrt{100 \cdot 10^{-3}/253 \cdot 10^{-9}}}{20} = \frac{\sqrt{0,395 \cdot 10^6}}{20} = \frac{0,6287 \cdot 10^3}{20} = 31,4.$$

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{20}{2 \cdot 0,1} \pm \sqrt{\frac{20^2}{4(0,1)^2} - \frac{1}{0,1 \cdot 253 \cdot 10^{-9}}} = -100 \pm j6280.$$

Корни оказались комплексными, что подтверждает колебательный характер свободной составляющей. Определим практическое время существования переходного процесса и период свободных колебаний  $T_{св}$ :

$$t_{пер} \approx 3 \frac{1}{a} = 3 \cdot \frac{1}{100} = 0,03 \text{ с} = 30 \text{ мс};$$

$$T_{св} = \frac{2\pi}{6280} = \frac{6,28}{6,28 \cdot 10^3} = 10^{-3} \text{ с} = 1 \text{ мс}.$$

Очевидно, что за время переходного процесса выходное напряжение совершает  $N = t_{пер}/T_{св} = 30/1 = 30$  полных колебаний, что близко к значению добротности контура. Так как период входного напряжения  $T_{вх} = 40$  мс, то фронт входного сигнала изменяется через каждые 20 мс (рис. 12.23, а). Но за время 20 мс переходный процесс даже не успевает закончиться, следовательно, при данных параметрах цепь все время работает в переходном режиме. Форма выходного напряжения для этого случая показана на рис. 12.23, кривая б. При увеличении резистивного сопротивления цепи до 60 Ом затухание  $a = R/2L$  увеличивается в 3 раза, а собственная частота контура  $\omega_{св}$  практически остается без изменения, время переходного процесса уменьшается в 3 раза и составляет 10 мс. Добротность также уменьшается и становится  $Q \approx 10$ . Период свободных колебаний остается прежним, равным 1 мс. Скорость затухания свободных колебаний уменьшается, поскольку определяется членом  $e^{-\omega_0/2Q}$ . Время переходного процесса составляет при этом половину времени импульса и, соответственно, имеет вид, показанный на рис. 12.36, кривая в. При подобных расчетах следует иметь в виду, что период и собственная частота свободных колебаний практически не зависят от значения резистивного сопротивления цепи при добротностях от 3 и более. При  $R = 0,25 R_{кр} = 315$  Ом,  $Q = 2$ ,  $a = R/2L = 315/0,2 = 1575$ ,

$$\omega_{св} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{0,1 \cdot 253 \cdot 10^{-9}} - \frac{(3,15 \cdot 10^2)^2}{4(100 \cdot 10^{-3})^2}} = 6000 \text{ 1/с}.$$

Как видно из данного расчета, даже при добротности  $Q = 2$  собственная частота уменьшается с 6280 до 6000 1/с, т. е. менее, чем на 5 %, поэтому можно считать, что при  $Q = 2$   $T_{св} \approx T_0$ , а  $\omega_{св} \approx \omega_0$ . Переходный процесс занимает около 2 мс. За это время совершается два колебания, т. е. в этом случае переходный процесс занимает примерно 10 % времени импульса (рис. 12.23, кривая г). При дальнейшем увеличении резистивного сопротивления добротность падает еще более, свободная частота  $\omega_{св}$  уменьшается, период  $T_{св}$  увеличивается, время переходного процесса и число колебаний уменьшаются. При  $Q = 0,5$  процесс из колебательного переходит в аperiodический,

колебания прекращаются, форма выходного напряжения повторяет форму входного, искажения отсутствуют. При дальнейшем увеличении резистивного сопротивления  $R$  фронты выходного напряжения начинают "затягиваться", кривая выходного напряжения становится схожей с экспоненциальной. Например, при  $R = 5 \cdot R_{кр} = 5 \cdot 628 = 3140$  Ом практическое время переходного процесса составляет примерно 5 мс, т. е. занимает около 25 % времени импульса (рис. 12.23, кривая  $\delta$ ). При дальнейшем увеличении сопротивления  $R$  "затягивание" фронтов становится еще более заметным (рис. 12.23, кривая  $\epsilon$ ). Таким образом, чем добротность цепи ближе к значению 0,5, тем меньше искажения в переходном режиме. Но для получения хорошей избирательности в вынужденном режиме, добротность контура должна быть во много раз больше, а в этом случае неизбежно увеличение искажений во время переходного режима.

В реальных конструкциях (например, в телевизорах) применяют схемы с переменной добротностью, для этого используют электронные устройства, которые в момент коммутации автоматически увеличивают сопротивление цепи (или, наоборот, шунтируют контур малым сопротивлением, практически это одно и то же), а по окончании переходного процесса — изменяют это сопротивление до номинального. Цепи, или устройства, автоматически изменяющие добротность цепи, часто называют *демпферами*.

Простейшим демпфером может быть диод, т. е. элемент, имеющий малое сопротивление при одном направлении тока и большое сопротивление — при обратном (рис. 12.24). При нарастании фронта входного напряжения (т. е. при увеличении напряжения) диод обладает малым сопротивлением и цепь оказывается замкнутой на сопротивление демпфера, равное критическому и искажения отсутствуют. При спадении входного напряжения сопро-

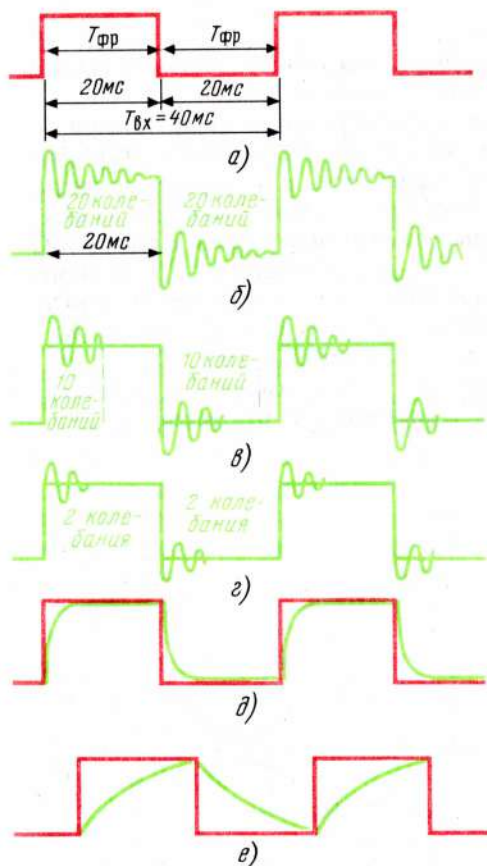


Рис. 12.23

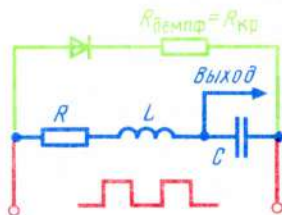


Рис. 12.24

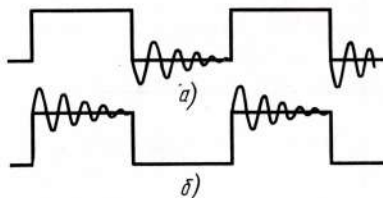


Рис. 12.25

тивление диода увеличивается, демпфирующая цепь при этом отключается. В подобной цепи устраняются колебания от переднего фронта сигнала, но остаются от заднего, т. е. от спада сигнала (рис. 12.25, кривая *а*). Если включить диод в противоположном направлении, то устраняются колебания при включении цепи, но появляются при включении (рис. 12.25, кривая *б*). С помощью более сложных демпфирующих устройств можно устранить колебания в обоих случаях.

## 12.18. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР С ИСТОЧНИКОМ НАПРЯЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

При подключении *RLC*-цепи к источнику гармонического напряжения, частота которого  $\omega$  равна частоте свободных колебаний контура  $\omega_{\text{св}}$ , амплитуды гармонических колебаний выходного напряжения нарастают по экспоненциальному закону. Воображаемая линия, соединяющая амплитудные значения колебаний, называется *огibaющей*. Таким образом, можно сказать, что при равенстве внешней и собственной (т. е. свободной) частот *огibaющая* выходного напряжения изменяется по экспоненциальному закону (рис. 12.26):

$$U_{m \text{ вых}} = Q U_{m \text{ вх}} (1 - e^{-at}), \quad (12.33)$$

(Напомним, что в вынужденном режиме при резонансе амплитуда выходного напряжения в  $Q$  раз больше амплитуды входного.)

Если частоты  $\omega$  и  $\omega_{\text{св}}$  несколько отличаются друг от друга, то в одни моменты мгновенные значения свободной и вынужденной составляющих складываются, а в другие моменты — вычитаются, в результате чего на выходе цепи появляются биения с частотой  $\Omega = (\omega - \omega_{\text{св}})/2$  (рис. 12.27). Если входное напряжение представляет импульсы прямоугольной формы с высокочастотным заполнением (рис. 12.28, *а*), то наличие таких импульсов равносильно подключению и отключению цепи от

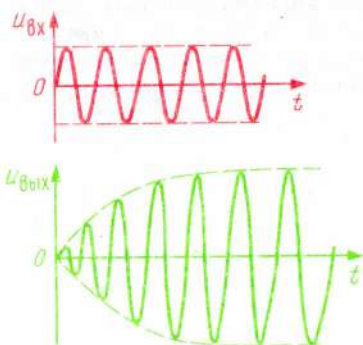


Рис. 12.26

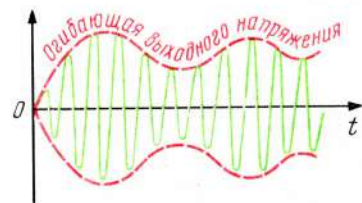


Рис. 12.27

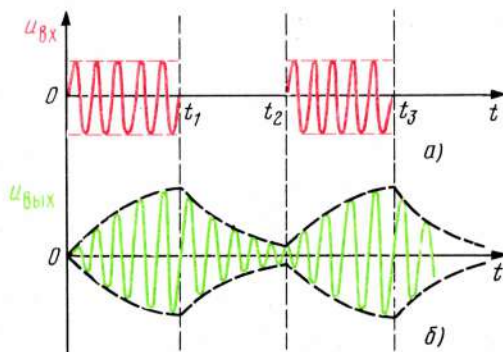


Рис. 12.28



источника напряжения гармонической формы. Если  $\omega = \omega_{\text{св}}$ , то нарастание и спадание огибающей выходного напряжения происходит по экспоненциальному закону. Очевидно, что чем больше добротность цепи, тем медленнее нарастает и соответственно медленнее спадает огибающая, что опять-таки приводит к искажениям выходного напряжения относительно входного рис. 12.28, б.

## 12.19. ПОНЯТИЕ ОБ ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Математические выкладки при расчете мгновенных напряжений и токов в переходном режиме достаточно сложны, поскольку уравнения, описывающие процессы в цепи, всегда оказываются дифференциальными или интегральными. Это происходит потому, что в цепях с накопителями энергии мгновенные напряжения и токи связаны между собой через производную или интеграл. Действительно, в  $C$ -цепях  $i = C \frac{du_C}{dt}$ ,  $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$ ; в  $L$ -цепях  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ,  $i = \frac{1}{L} \int u_L dt$ . Кстати, расчеты мгновенных напряжений и токов при гармонических процессах в вынужденных режимах также достаточно неудобны, поскольку в общем случае требуют использования законов косугольных треугольников.

Чтобы облегчить эти расчеты, как известно, был введен символический метод расчета, основывающийся на том, что производная по времени  $d/dt$  заменяется членом  $j\omega$ , интеграл — членом  $1/j\omega$ , мгновенные переменные во времени величины ( $u$  или  $i$ ) заменяются соответствующими комплексными постоянными величинами ( $\dot{U}$  или  $\dot{I}$ ), а постоянные величины ( $R, L, C$ ) остаются неизменными. Уравнения, состоящие из временных величин, называются *оригиналами*, а соответствующие им комплексные выражения — *изображениями*. Принципы использования операторного метода для расчета цепей в переходном режиме весьма схожи с принципами расчета цепей в стационарном режиме комплексным методом. В обоих случаях исходные, т. е. временные, выражения заменяют более простыми — алгебраическими, которые в данном случае называются *операторными*. Совершенно аналогично временные выражения называются оригиналами, а соответствующие им операторные — изображениями. Так же, как и при комплексном методе расчета, постоянные величины, не зависящие от времени ( $R, L, C$ ), переходят из оригинала в изображение и обратно без каких-либо изменений. В комплексном методе производная  $d/dt$  изображается членом  $j\omega$ , а в операторном — множителем (оператором)  $p$ ; в комплексном виде  $\int dt$  изображается членом  $1/j\omega$ , а в операторном —  $1/p$ . Вместо комплексного напряжения  $\dot{U}$  и комплексного тока  $\dot{I}$  записывают операторные напряжение  $U(p)$  и ток  $I(p)$ .

Некоторая разница в записи источников напряжения или тока. Постоянное напряжение  $U$  в операторной форме записывается членом  $U/p$ , а постоянный ток  $I$  — членом  $1/p$ .

Таким образом, технология записи операторных уравнений сводится к следующему: вместо множителей  $j\omega$  в индуктивных и емкостных сопротивлениях записывают множитель  $p$ , а вместо напряжения  $U$  (или ЭДС  $E$ ) —

операторное напряжение  $U/p$  (или  $E/p$ ). Затем определяют операторный ток  $I(p)$  и операторные напряжения на всех элементах  $U(p)$ .

**Пример 12.8.** Записать операторное сопротивление  $Z(p)$  и операторный ток  $I(p)$  для цепи рис. 12.29.

**Решение.** Запишем сначала комплексное входное сопротивление данной цепи  $Z = R + j\omega L + 1/j\omega C$ . Заменяем множитель  $j\omega$  на оператор  $p$ , получим входное операторное сопротивление цепи  $Z(p) = R + pL + 1/pC$ .

Комплексный ток  $\dot{I}$  определяется из выражения  $\dot{I} = \dot{E} / (R + j\omega L + 1/j\omega C)$ , а операторный ток  $I(p)$ , соответственно из выражения  $I(p) = E(p) / (R + pL + 1/pC)$ . Если  $E$  – ЭДС источника, значение которого неизменно во времени, то  $E(p) = E/p$ , в этом случае  $I(p) = \frac{E}{p(R + pL + 1/pC)}$ . Операторные напряжения на каждом элементе цепи определяются из выражений

$$U_R(p) = RI(p) = \frac{ER}{p(R + pL + 1/pC)};$$

$$U_L(p) = Z_L(p) \cdot I(p) = \frac{pL \cdot E}{p(R + pL + 1/pC)} = \frac{EL}{R + pL + 1/pC};$$

$$U_C(p) = Z_C(p) \cdot I(p) = \frac{E}{pC \cdot p(R + pL + 1/pC)} = \frac{E}{C \cdot p^2(R + pL + 1/pC)}.$$

По второму закону Кирхгофа

$$U(p) = U_R(p) + U_L(p) + U_C(p).$$

Чтобы по получившемуся операторному выражению (изображению) найти соответствующее ему временное выражение (оригинал), необходимо иметь таблицы для перевода изображений в оригиналы и обратно. Данные таблицы составляются на основании преобразования, носящего имя Лапласа (Пьер Симон Лаплас (1749–1827) – французский математик, физик, астроном. В 1802 г. избран почетным членом Петербургской академии наук). Преобразование Лапласа позволяет получить изображения математических выражений по заданным оригиналам. Преобразование производится с помощью выражения

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

часто называемого интегралом Лапласа. В данном выражении  $f(t)$  – временная функция (оригинал), а  $F(p)$  – соответствующее ему операторное выражение (изображение). Покажем, что если  $f(t) = U$ , то  $F(p) = U/p$ . Подставим  $f(t)$  в интеграл Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} U e^{-pt} dt = U \frac{1}{(-p)} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{U}{(-p)} (0 - 1) = \frac{U}{p}.$$

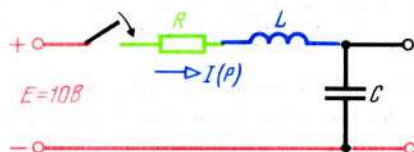


Рис. 12.29

Получим изображение экспоненциальной функции  $f(t) = e^{at}$ :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{-(p-a)} e^{-(p-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-(p-a)} \times \\ \times (0 - 1) = \frac{1}{p-a}.$$

Таким образом, временная функция  $e^{at}$  изображается операторным выражением  $1/(p-a)$ . Аналогично получают изображения самых различных функций, которыми пользуются как справочным материалом (табл. 12.1).

В справочниках приводится большое количество операторных изображений и их оригиналов.

**Пример 12.9.** Рассчитать операторным методом закон выходного напряжения цепи рис. 12.30, а.

**Решение.** Нарисуем операторную схему цепи, получающуюся после коммутации (рис. 12.30, б).

Операторный ток в цепи

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{U}{p(R + 1/pC)} = \frac{UpC}{p(pRC + 1)} = \frac{UC}{RC(p + 1/RC)} = \frac{U}{R(p + 1/RC)}.$$

Таблица 12.1

Номер п/п	Оригиналы $f(t)$	Изображения $F(p)$
1	$1(t)$	$1/p$
2	$A(t)$	$A/p$
3	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{(p \mp a)}$
4	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
5	$\frac{1}{(a-b)}(e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
6	$\frac{1}{(a-b)}(ae^{-at} - be^{-bt})$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
7	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{(b-a)}\left(\frac{1}{b}e^{-bt} - \frac{1}{a}e^{-at}\right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
8	$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cdot \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
9	$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cdot \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$



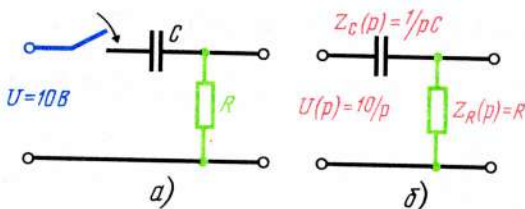


Рис. 12.30

Операторное выходное напряжение

$$U_2(p) = R \cdot I(p) = \frac{UR}{R(p + 1/RC)} = U \cdot \frac{1}{(p + 1/RC)}.$$

Получим оригинал операторного выходного напряжения. Множитель  $U$  переходит из изображения в оригинал без изменений, а член  $1/(p + 1/RC)$ , как видно из строки 3 табл. 12.1, соответствует временному выражению  $e^{-(1/RC)t}$ . Таким образом, если  $F(p) = U/(p + 1/RC)$ , то  $f(t) = Ue^{-t/RC}$ , что было получено и ранее.

**Пример 12.10.** Рассчитать напряжение на выходе цепи рис. 12.31, а для случаев:

- 1)  $u_1 = U$ ; 2)  $u_1 = Ue^{-bt}$ .

Решение. Случай 1.

$$U_2(p) = I(p) Z_C(p) = \frac{U(p)}{(R + 1/pC)} \cdot \frac{1}{pC} = \frac{UpC}{pC(RC + 1)} = \frac{U}{RC} \cdot \frac{1}{p(p + 1/RC)}.$$

Из строки 4 табл. 12.1 изображение вида  $1/p(p + a)$  соответствует временному выражению  $(1/a)(1 - e^{-at})$ . Очевидно, что в данном примере  $a = 1/RC$ , тогда

$$u_2(t) = \frac{U}{RC} \cdot \frac{1}{1/RC} (1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Кривая  $u_2(t)$  показана на рис. 12.31, б.

Случай 2.

$$U_2(p) = I(p) Z_C(p) = \frac{U(p)}{(R + 1/pC)} \cdot \frac{1}{pC}.$$

Поскольку  $u_1 = Ue^{-bt}$ ,  $U_1(p) = U \frac{1}{(p + b)}$ , тогда

$$U_2(p) = \frac{UpC}{(p + b)(pRC + 1)pC} = \frac{U}{RC(p + 1/RC)(p + b)} = \frac{U}{RC} \cdot \frac{1}{(p + 1/RC)(p + b)}.$$

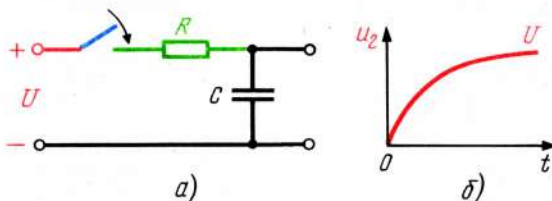
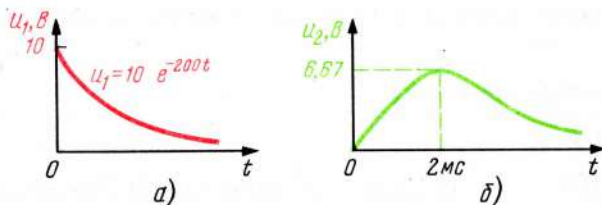


Рис. 12.31

Рис. 12.32



Из строки 5 табл. 12.1 видно, что изображение вида  $\frac{1}{(p+a)(p+b)}$  соответствует оригиналу  $\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$ . Очевидно, что в данном случае  $a = 1/RC$ , тогда

$$u_2(t) = \frac{U}{RC} \left[ \frac{1}{(1/RC - b)} (e^{-bt} - e^{-\frac{t}{RC}}) \right] = \frac{U}{(1 - bRC)} (e^{-bt} - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Рассчитаем числовые значения, если  $U = 10$  В,  $b = 200$  1/с,  $R = 1$  кОм,  $C = 1$  мкФ:

$$u_2(t) = \frac{10}{(1 - 200 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6})} (e^{-200t} - e^{-\frac{t}{10^3 \cdot 10^{-6}}}) = \frac{10}{0,8} (e^{-200t} - e^{-1000t}) = 12,5 (e^{-200t} - e^{-1000t}).$$

Построим кривые  $u_1 = f(t)$  и  $u_2 = f(t)$ ,  $u_1(t) = 10e^{-200t}$ . При  $t = 0$   $u_1(0) = 10$ , при  $t = \infty$   $u_1(\infty) = 0$  (рис. 12.32, кривая а),  $u_2(t) = 12,5 (e^{-200t} - e^{-1000t})$ . При  $t = 0$   $u_2(0) = 12,5 (e^0 - e^0) = 12,5 (1 - 1) = 0$ .

Напряжение на конденсаторе в начальный момент равно 0, поскольку это напряжение не может изменяться скачком. При  $t = \infty$   $u_2(\infty) = (e^{-\infty} - e^{-\infty}) = 12,5 (0 - 0) = 0$ . Нулевое напряжение на конденсаторе в вынужденном режиме объясняется уменьшением до 0 входного напряжения. Таким образом, кривая  $u_2 = f(t)$  начинается с 0 и кончается 0, следовательно, она имеет максимум. Чтобы определить время, через которое напряжение на конденсаторе будет максимальным, необходимо решить относительно  $t$  уравнение  $du_2/dt = 0$ , т. е.  $12,5 (-200e^{-200t} + 1000e^{-1000t}) = 0$ , откуда  $1000e^{-1000t} = 2000e^{-200t}$ , или  $5/e^{1000t} = 1/e^{200t}$ . Логарифмируя обе части равенства, получаем  $\ln 5 - 1000t = \ln 1 - 200t$ , или  $800t = \ln 5 - \ln 1$ ,  $800t = 1,6 - 0$ , откуда  $t = 1,6/800 = 0,002$  с = 2 мс. Определим  $u_2$  через время  $t = 0,002$  с:

$$u_{C \max} = u_C(0,002) = 12,5 (e^{-200 \cdot 0,002} - e^{-1000 \cdot 0,002}) = 12,5 (e^{-0,4} - e^{-2}) = 12,5 \left( \frac{1}{e^{0,4}} - \frac{1}{e^2} \right) = 12,5 \left( \frac{1}{1,49} - \frac{1}{7,34} \right) = 12,5 (0,67 - 0,14) = 6,67 \text{ В}.$$

Следовательно, напряжение на конденсаторе начинается с 0, при  $t = 2$  мс достигает максимального значения 6,67 В, а затем снова уменьшается до 0 (рис. 12.32, б).

## 12.20. НАХОЖДЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ (ОРИГИНАЛОВ) ПО ОПЕРАТОРНЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

Получить оригинал  $f(t)$  по операторному изображению  $F(p) = F_1(p)/F_2(p)$  можно с помощью не только переводных таблиц, но и специального математического выражения, называемого формулой разложения. Существует

несколько видов записи этой формулы. Наиболее удобным является выражение

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p=p_k)}{F_2'(p=p_k)} e^{p_k t}, \quad (12.34)$$

в котором  $f(t)$  — искомая временная функция (оригинал);  $F_1(p=p_k)$  — числитель изображения, в который вместо оператора  $p$  подставлен корень уравнения  $F_2(p) = 0$ ;  $F_2'(p=p_k)$  — производная знаменателя по  $p$ , в которую вместо множителя  $p$  подставлен корень уравнения  $F_2(p) = 0$ ;

$p_k$  — корень уравнения  $F_2(p) = 0$ . Знак  $\sum_{k=1}^n$  показывает, что выражение  $\frac{F_1(p=p_k)}{F_2'(p=p_k)} e^{p_k t}$  следует просчитать столько раз, сколько корней имеет уравнение  $F_2(p) = 0$ , подставляя каждый раз иной корень.

**Пример 12.11.** Найти оригинал операторного изображения тока

$$I(p) = (p+10)/p(p+100). \quad (12.35)$$

**Решение.** Поскольку числитель операторного изображения обозначают  $F_1(p)$  а знаменатель  $F_2(p)$ , в данном примере  $F_1(p) = p+10$ ,  $F_2(p) = p(p+100)$ . Для нахождения оригинала  $f(t)$  (в данном случае  $i(t)$ ), прежде всего необходимо знаменатель  $F_2(p)$  приравнять нулю и найти корни получившегося уравнения:  $F_2(p) = p(p+100) = 0$ , откуда  $p_1 = 0$ ,  $p_2 + 100 = 0$ , или  $p_2 = -100$ . Затем следует найти производную знаменателя  $F_2'(p)$ . Так как  $F_2(p) = p^2 + 100p$ , то  $F_2'(p) = 2p + 100$ . Поскольку знаменатель изображения имеет два корня ( $p_1 = 0$  и  $p_2 = -100$ ), искомый оригинал  $f(t)$  представляет сумму двух членов — выражения (12.34), в которое подставлен первый корень, и это же выражение, в которое подставлен второй корень. В числителе первого слагаемого члены, отличные от  $p$ , следует переписать без изменения, а вместо оператора  $p$  подставить значение первого корня. В знаменателе следует записать производную знаменателя оригинала, в которую вместо оператора  $p$  подставлено значение первого корня, и т. д. Следовательно, в данном примере

$$i(t) = \frac{10+0}{2 \cdot 0+100} e^{0 \cdot t} + \frac{10+(-100)}{2(-100)+100} e^{-100t} = \frac{10}{100} + \frac{(-90)}{(-100)} e^{-100t} = 0,1 + 0,9e^{-100t}.$$

Построим кривую  $i(t)$ . При  $t = 0$   $i(0) = 0,1 + 0,9 = 1$  А, при  $t = \infty$   $i_{\text{вын}} = 0,1$  А (рис. 12.33).

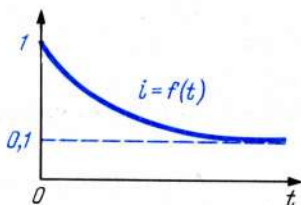


Рис. 12.33

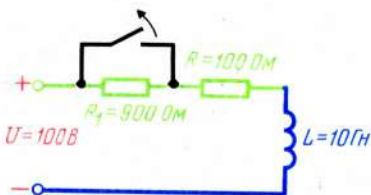


Рис. 12.34



Проанализируем получившееся выражение. Очевидно, что до коммутации ток в цепи был равен 1 А, а после коммутации уменьшался по экспоненциальному закону до 0,1 А. Свободная составляющая изменяется по экспоненте, поэтому данная цепь является цепью первого порядка. Так как ток после коммутации изменяется не скачкообразно, а плавно, то цепь является  $RL$ -цепью. Коэффициент в степени числа  $e$  равен 100, постоянная времени цепи  $\tau = 1/100$  с.  $0,01$  с = 10 мс, поэтому практическое время переходного процесса 30...50 мс. Можно составить большое число схем, отвечающих указанным требованиям, например схема рис. 12.34, с параметрами  $U = 100$  В,  $R = 100$  Ом,  $R_1 = 900$  Ом,  $L = 10$  Гн. В этом случае  $\tau = L/R = 10/1000 = 0,01$  с,  $i(0) = U/R = 100/100 = 1$  А,  $i_{\text{вын}} = U/(R + R_1) = 100/1000 = 0,1$  А.

## 12.21. СОСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЦЕПЯХ С НЕНУЛЕВЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Следует различать два случая состояния цепи до коммутации: с начальными нулевыми или ненулевыми условиями. Цепями с начальными нулевыми условиями (или: без начальных условий, это одно и то же) называются цепи, в которых до коммутации напряжения на конденсаторах и токи в катушках индуктивностей равняются 0, как, например, в схемах рис. 12.5, *a*, 12.14, *a*. Если до коммутации конденсаторы были заряжены до некоторого напряжения или по катушкам индуктивностей протекали токи, то такие условия называются ненулевыми, например в схемах на рис. 12.9, *a*, 12.10, *a*, 12.12, *a*, 12.13, *a*, 12.16, 12.34. Подобные цепи называют также цепями с начальными условиями. Покажем, каким образом составляют операторные схемы цепей при наличии начальных условий. Если по индуктивности до коммутации протекал ток  $i(0)$ , то эквивалентная операторная схема представляет индуктивность с операторным сопротивлением  $pL$ , последовательно с которой включен источник напряжения с операторным напряжением  $Li(0)$ . Направление операторной ЭДС этого источника совпадает с направлением тока в индуктивности до коммутации (рис. 12.35, *a*). Конденсатор, заряженный до напряжения  $u_C(0)$ , заменяют эквивалентной схемой, в которой последовательно с незаряженным конденсатором включен источник с операторным напряжением  $u_C(0)/p$ , направление которого показано на рис. 12.35, *б*. После составления эквивалентной операторной схемы записывают операторные уравнения по любым законам электротехники.

**Пример 12.12.** Нарисовать эквивалентную операторную схему цепи рис. 12.34 и записать операторный ток в этой цепи.

**Решение.** После коммутации операторная схема цепи имеет вид показанный на рис. 12.36. До коммутации ключ был замкнут и ток в цепи  $i(0) = U/R = 100/100 = 1$  А. Рассчитаем операторный ток  $I(p)$ :

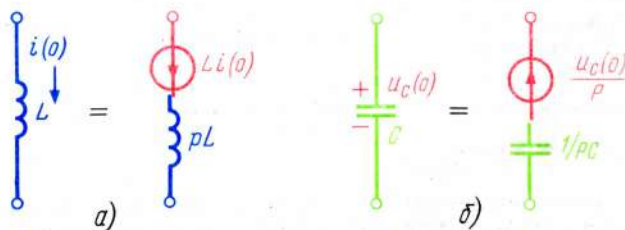


Рис. 12.35

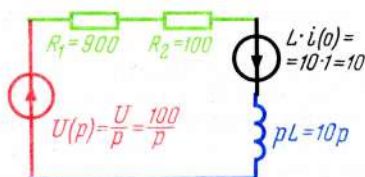


Рис. 12.36

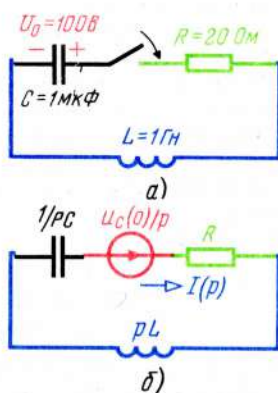


Рис. 12.37

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0)}{R_1 + R + pL} = \frac{(100/p) + 10 \cdot 1}{900 + 100 + 10} = \frac{10p + 100}{p(10p + 1000)}.$$

Уравнения обязательно следует привести к нормальному виду, т. е. преобразовать выражения таким образом, чтобы коэффициенты при операторе  $p$  были равны 1:

$$I(p) = \frac{10(p + 10)}{10p(p + 100)} = \frac{p + 10}{p(p + 100)},$$

т. е. получилось выражение (12.35), что, как видно из примера 12.11, и должно было получиться.

**Пример 12.13.** Рассчитать операторным методом ток в цепи рис. 12.37, а, если конденсатор был заряжен до напряжения  $U_0 = 100$  В.

**Решение.** Составим операторную схему цепи и рассчитаем операторный ток  $I(p)$  (рис. 12.37, б). Так как данная цепь имеет ненулевые начальные условия (поскольку до коммутации напряжение на конденсаторе отлично от 0), то на операторной схеме вместо заряженного конденсатора следует показать незаряженный конденсатор с операторным сопротивлением  $Z_C(p) = 1/pC$ , последовательно с которым включен источник с операторным напряжением  $U_C(p) = u_C(0)/p$ . Тогда

$$I(p) = U(p)/Z(p) = \frac{u_C(0)/p}{R + pL + 1/pC} = \frac{u_C(0) \cdot pC}{p(p^2 LC + pRC + 1)}.$$

Приведем выражение к нормальному виду:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{u_C(0) \cdot C}{LC(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC})} = \frac{u_C(0)}{L} \cdot \frac{1}{(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC})} = \\ &= \frac{100}{1} \cdot \frac{1}{(p^2 + \frac{20}{1}p + \frac{1}{1 \cdot 10^{-6}})} = 100 \cdot \frac{1}{(p^2 + 20p + 10^6)}. \end{aligned} \quad (12.36)$$

Обратим внимание, что в знаменателе получилось уравнение, полностью совпадающее с характеристическим для этой же цепи. Однако при составлении уравнений операторным методом нет необходимости составлять и преобразовывать уравнения в диф-

ференциальной форме. Корни характеристического уравнения, равные корням операторного уравнения, в данном случае находятся гораздо проще. Приравняем знаменатель 0 и найдем корни данного уравнения:  $p_{1,2} = -10 \pm \sqrt{10^2 - 10^2} = -10 \pm j1000$ . Обозначим  $a = (-10 + j1000)$ ,  $b = (-10 - j1000)$ ; в этом случае операторный ток можно записать в виде  $I(p) = 100 \cdot (1/(p+a)(p+b))$ . Как видно из строки 5 табл.

12.1, операторное выражение вида  $1/(p+a)(p+b)$  соответствует оригиналу  $\frac{1}{(a-b)} \times (e^{-bt} - e^{-at})$ . На этом основании

$$i(t) = 100 \left[ \frac{1}{(-10 + j1000 + 10 + j1000)} (e^{(-10 + j1000)t} - e^{(-10 - j1000)t}) \right] = \\ = \frac{100}{j1000} e^{-10t} (e^{j1000t} - e^{-j1000t}) = \frac{100}{500} e^{-10t} \left( \frac{e^{j1000t} - e^{-j1000t}}{j2} \right).$$

Так как  $\left( \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \right) = \sin \alpha$ , то  $i(t) = 0,2e^{-10t} \sin 1000t$ . Из полученного выражения видно, что ток в данной цепи содержит только свободную составляющую с параметрами  $\omega_{св} = 1000$  1/с,  $t_{пер} = 3(1/a) = 0,3$  с = 300 мс, число свободных колебаний  $N = \omega_{св}/2a = 1000/2 \cdot 10 = 50$ . Заметим, что выполнить данный расчет операторным методом гораздо проще, чем классическим, т. е. путем расчета дифференциальных уравнений, поскольку нахождение постоянных интегрирования связано с громоздкими преобразованиями и вычислениями.

## 12.22. ОПЕРАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

Так как производная по времени  $d/dt$  в операторной форме изображается оператором  $p$ , то операция дифференцирования сводится к умножению заданной функции  $F(p)$  на оператор  $p$ . Например, если  $F(p) = 1/p(p+a)$ , то  $F'(p) = p(1/p(p+a)) = 1/(p+a)$ .

Сделаем проверку. Как уже было показано выше, изображение  $F(p) = 1/p(p+a)$  соответствует оригиналу  $f(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$ , производная по времени от которого  $df(t)/dt = (1/a)(-a)(e^{-at}) = -e^{-at}$ . Но оригинал от операторной функции  $F(p) = 1/(p+a)$  также равен  $e^{-at}$ . Следовательно, выражение  $1/(p+a)$  действительно является операторной производной от операторного выражения  $1/p(p+a)$ . Аналогично, чтобы взять интеграл в операторной форме, необходимо заданное операторное выражение поделить на оператор  $p$ . Например, некоторая временная функция изображается выражением  $F_1(p) = p/(p^2 + 1)$ , следовательно, операторный интеграл от данного операторного выражения будет  $1/(p^2 + 1)$ . Действительно,  $p/(p^2 + 1)$  есть изображение  $\cos t$  а  $1/(p^2 + 1)$  — изображение  $\sin t$ . Таким образом, математическая операция  $\int \cos t = \sin t$  заменяется более простой:

$$\frac{p}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{(p^2 + 1)}.$$

**Пример 12.14.** Найти операторную производную  $F_2(p)$  от функции  $F_1(p) = 1/(p+a)(p+b)$ .



Решение.  $F_2(p) = pF_1(p) = p/(p+a)(p+b)$ . Сделаем проверку. Из табл. 12.1 видно, что

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{1}{(a-b)}(e^{-bt} - e^{-at}), \quad (12.37)$$

а

$$\frac{p}{(p+a)(p+b)} = \frac{1}{(a-b)}(-be^{-bt} + ae^{-at}). \quad (12.38)$$

Выражение (12.38), действительно, представляет производную по времени от выражения (12.37).

### 12.23. ДОСТОИНСТВА ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА РАСЧЕТОВ ЦЕПЕЙ В ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

Операторный метод расчета переходных процессов имеет много достоинств по сравнению с расчетом классическим способом. Сравним достоинства и недостатки каждого метода.

#### Метод классический

1. Математические операции производят с дифференциальными или интегральными уравнениями. Вынужденную и свободную составляющие рассчитывают каждую в отдельности

2. Требуется определять постоянные интегрирования, что приводит к громоздким вычислениям

3. Корни характеристического уравнения определяют режим работы цепи, но не показывают вынужденное значение исследуемой функции

4. Последовательность расчета должна быть строго определенной, сначала следует определять  $u_C$ , затем  $i$  и после этого  $u_L$

5. Дифференцирование и интегрирование функций производятся по правилам выполнения этих операций

#### Метод операторный

1. Математические операции производят с алгебраическими уравнениями. Операторные уравнения схожи с комплексными и образуются заменой множителя  $j\omega$  на оператор  $p$ , постоянного напряжения  $U$  на операторное напряжение  $U/p$ , временного тока  $i(t)$  на операторный ток  $I(p)$ . Вынужденная и свободная составляющие определяются вместе.

2. Определять постоянные интегрирования не требуется

3. Корни знаменателя операторного уравнения определяют режим работы цепи и показывают вынужденное значение исследуемой функции

4. Последовательность расчета может быть любой

5. Для операторного дифференцирования данную операторную функцию следует умножить на оператор  $p$ , а для интегрирования — поделить на  $p$

6. Связь между мгновенными значениями и спектральными характеристиками весьма сложна

7. По полученным комплексным выражениям требуется определять временные оригиналы

6. От операторных выражений весьма просто переходить к спектральным

7. По полученным операторным изображениям требуется определять временные оригиналы

#### 12.24. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КОРНЕЙ ЗНАМЕНАТЕЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Остановимся еще на нескольких важных свойствах, выявляющихся при расчетах цепей в переходном режиме операторным методом. Как было показано выше, операторные выражения  $F(p)$  обыкновенно приводят к виду  $F(p) = F_1(p)/F_2(p)$ . Корни уравнения  $F_2(p) = 0$  определяют свойства исследуемых цепей. Эти свойства состоят в следующем. При подстановке в формулу разложения корня  $p = 0$  получается значение вынужденной составляющей. Если имеется корень, выражающийся отрицательным вещественным числом, то это означает, что свободная составляющая убывает по экспоненциальному закону. Если оказываются два отрицательных вещественных корня, то это означает, что свободная составляющая представляет разность двух экспонент, одна из которых затухает по закону  $e^{p_1 t}$ , а вторая — по закону  $e^{p_2 t}$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — вещественные корни уравнения  $F_2(p) = 0$ . Если корни оказываются комплексными сопряженными вида  $p_{12} = -a \pm j\omega_{св}$ , то это означает, что свободная составляющая изменяется по колебательному закону с круговой частотой, равной значению мнимой части корня, а амплитуда уменьшается по закону  $e^{-at}$ , где  $a$  — вещественная часть корня.

Практическое время переходного процесса составляет  $(3 - 5) 1/a$ . При определении временных оригиналов в колебательном режиме часто приходится использовать преобразования

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}; \quad \cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}. \quad (12.39)$$

#### 12.25. ЕДИНИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

*Единичной* функцией называется скачкообразное изменение напряжения от 0 до 1 (рис. 12.38, а). Единичную функцию обозначают  $\sigma(t)$  или  $1(t)$ . Физически подключение цепи к источнику постоянного напряжения 1 В есть воздействие в виде единичной функции. Например, если в цепях рис. 12.1, 12.5, а входное напряжение  $U$  положить равным 1 В, то замыкание ключа и есть подключение цепи к источнику с единичным значением, т. е. единичной функции. Строго говоря, следует говорить: "Подключить цепь к источнику с воздействием в виде единичной функции", но на практике иногда говорят короче и менее строго; "Подключить единичную функцию", или "Подать единичную функцию", или "На входе единичная функция" или "При единичной функции" и т. д. Все эти упрощенные в стилистическом отношении обороты, означают подключение цепи к источнику постоянного напряжения

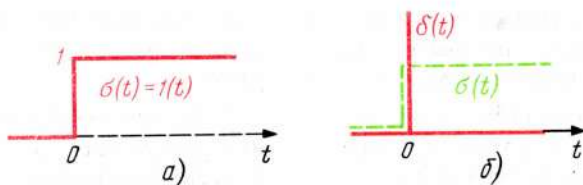


Рис. 12.38

со значением 1 В (или каким-либо иным значением, принятым за единицу). Таким образом единичная функция во временном виде записывается  $\sigma(t) = 1$ , а в операторном виде  $\sigma(p) = 1/p$ .

## 12.26. ИМПУЛЬСНАЯ ФУНКЦИЯ

Импульсной функцией  $\delta(t)$  (дельта-функцией) называется производная по времени от единичной функции, т. е.

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad \text{или} \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} [1(t)]. \quad (12.40)$$

В операторном виде

$$\delta(p) = p\sigma(p) = p \frac{1}{p} = 1. \quad (12.41)$$

Разберем форму дельта-функции. До момента  $t = 0$  единичная функция равнялась 0, производная, а следовательно и импульсная функция, также равнялась 0. В момент  $t = 0$  единичная функция скачком изменяет свое значение, при этом угол возрастает до  $90^\circ$ , а тангенс соответственно до  $\infty$ . Дельта-функция приобретает бесконечно большое значение. Но через бесконечно малое время тангенс угла наклона вновь уменьшается до 0, следовательно, через  $\Delta t \rightarrow 0$  дельта-функция снова падает до 0 (рис. 12.38, б).

Подсчитаем площадь  $\delta$ -функции. Так как  $\delta(t) = \frac{d}{dt} [1(t)]$ , то  $\int \delta(t) dt = 1$ . Но  $\int \delta(t) dt$  и есть площадь импульса, которая оказалась равной 1.

Таким образом, импульсной функцией называется сигнал с бесконечно большой амплитудой, бесконечно малой длительностью и площадью, равной 1.

## 12.27. ПЕРЕХОДНАЯ И ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ

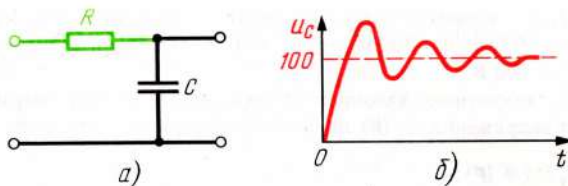
Переходной характеристикой цепи по напряжению  $k(t)$  называют закон, по которому изменяется выходное напряжение цепи при единичной функции на входе. Следовательно, чтобы определить переходную характеристику цепи, следует любым образом рассчитать выражение выходного напряжения при подключении цепи к постоянному напряжению со значением  $U$ , а затем положить это напряжение равным 1.

**Пример 12.15.** Определить переходную характеристику цепи рис. 12.39, а.

**Решение.** При подключении данной цепи к постоянному напряжению  $U$  выходное напряжение  $u_C$  определяется из выражения  $u_C = U(1 - e^{-t/RC})$  [см. (12.12)]. Если положить  $U = 1$ , то получится переходная характеристика  $k(t) = 1 - e^{-t/RC}$ .



Рис. 12.39



Операторная переходная характеристика  $K(p)$  подсчитывается аналогично комплексной передаточной функции. В комплексном виде

$$\underline{K} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

в операторном виде — аналогично

$$K(p) = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p + 1/RC}.$$

Импульсная характеристика цепи  $h(t)$  представляет закон выходного напряжения, если напряжение на входе представляет импульсную функцию  $\delta(t)$ . Так как импульсная функция есть производная по времени от единичной функции, то импульсная характеристика цепи  $h(t)$  есть производная по времени от переходной характеристики  $k(t)$ . Таким образом,

$$h(t) = \frac{d}{dt} [k(t)], \quad (12.42)$$

а в операторном виде

$$H(p) = p \cdot K(p). \quad (12.43)$$

Например, импульсная характеристика цепи рис. 12.39, а во временной форме оказывается

$$h(t) = \frac{d}{dt} [k(t)] = \frac{d}{dt} [1 - e^{-t/RC}] = (-1/RC) (-e^{-t/RC}) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}.$$

В операторной форме

$$H(p) = p \cdot K(p) = p \left( \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p + 1/RC} \right) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{p}{p + 1/RC}.$$

**Пример 12.16.** Рассчитать операторные переходную и импульсную характеристики цепи рис. 12.19.

**Решение.** Рассчитаем операторную переходную характеристику цепи  $K(p)$ . Поскольку данная цепь имеет вид Г-образного четырехполюсника,

$$K(p) = \frac{1/pC}{R + pL + 1/pC} = \frac{1 \cdot pC}{pC(p^2 LC + pRC + 1)} = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC})}.$$

Импульсная характеристика цепи

$$H(p) = p \cdot K(p) = \frac{1}{LC} \cdot \frac{p}{(p^2 + \frac{R}{L}p + 1/LC)}.$$

**Пример 12.17.** Рассчитать закон мгновенных напряжений на выходе цепи (рис. 12.19) при  $R = 20$  Ом,  $L = 100$  мГн;  $C = 253$  нФ, если цепь подключается к входному напряжению  $U = 100$  В.

**Решение.** Операторное выходное напряжение  $U_2(p)$  есть произведение операторного входного напряжения  $U_1(p)$  на операторную переходную характеристику  $K(p)$ :

$$U_2(p) = U_1(p) K(p);$$

$$U_1(p) = U/p = 100/p; \quad K(p) = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{(p^2 + \frac{R}{L}p + 1/LC)} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-3} \cdot 253 \cdot 10^{-9}} \times \\ \times \frac{1}{(p^2 + \frac{20}{0,1}p + \frac{1}{0,1 \cdot 253 \cdot 10^{-9}})} = 39,53 \cdot 10^6 \frac{1}{(p^2 + 200p + 39,53 \cdot 10^6)}; \quad (12.44)$$

$$U_2(p) = U_1(p) \cdot K(p) = \frac{100}{p} \left[ 39,53 \cdot 10^6 \frac{1}{(p^2 + 200p + 39,53 \cdot 10^6)} \right] = \\ = 3953 \cdot 10^6 \left[ \frac{1}{p(p^2 + 200p + 3956 \cdot 10^4)} \right].$$

Приравняем 0 знаменатель и определим его корни:

$$p(p^2 + 2 \cdot 10^2 p + 3953 \cdot 10^4) = 0,$$

откуда  $p_1 = 0$ ,  $p_{2,3} = -10^2 \pm \sqrt{10^4 - 3953 \cdot 10^4} = -100 \pm \sqrt{-3952 \cdot 10^4} = -100 \pm j6280$ .

Обозначим корни  $a = (100 - j6280)$  и  $b = (100 + j6280)$ . В этом случае знаменатель приобретает вид  $p(p+a)(p+b)$ .

Проанализируем полученные результаты. Поскольку имеется корень  $p = 0$ , то следовательно, вынужденное значение искомой величины отлично от 0. Комплексно-сопряженные корни  $p_{2,3}$  указывают на колебательно-затухающий характер свободной составляющей. Обратите внимание, что в примере 12.13 определялся ток свободной составляющей, вынужденное значение которого равнялось 0, поэтому корня  $p = 0$  в этом случае не было. В данном примере определяется напряжение на конденсаторе, вынужденная составляющая которого отлична от 0, поэтому корень  $p = 0$  в данном случае имеется.

Если определять напряжение на индуктивности, то вынужденная составляющая будет равна 0 и корень  $p = 0$  снова будет отсутствовать (у операторного сопротивления  $Z_C(p) = 1/pC$ , оператор  $p$  находится в знаменателе, а у  $Z_L(p) = pL$  — в числителе, поэтому множитель  $p$  в знаменателе сократится, что свидетельствует об отсутствии вынужденной составляющей напряжения на индуктивности). Параметры свободной составляющей такие же, как и в примере 12.13, т. е.  $\omega_{св} = 6280$  1/с,  $t_{пер} = 3(1/a) = 3(1/100) = 0,03$  с = 30 мс и т. д.

Из строки 7 табл. 12.1 выписываем

$$\frac{1}{p(p+a)(p+b)} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{b} e^{-bt} - \frac{1}{a} e^{-at} \right)$$

и определяем  $u_2(t)$ :

$$u_2(t) = 3953 \cdot 10^6 \left[ \frac{1}{(100 - j6280)(100 + j6280)} + \frac{1}{(100 + j6280) - (100 - j6280)} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{1}{(100 + j6280)} e^{-(100 + j6280)t} - \frac{1}{(100 - j6280)} e^{-(100 - j6280)t} \right) = \\
& = 3953 \cdot 10^6 \left[ \frac{1}{100^2 + 6280^2} + \frac{1 e^{-100t}}{j2 \cdot 6280} \left( \frac{1}{6280 e^{j89^\circ}} e^{j6280t} - \frac{1}{6280 e^{-j89^\circ}} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times e^{-j6280t} \right) \right] = \frac{3953 \cdot 10^6}{3953 \cdot 10^4} + \frac{3953 \cdot 10^6}{3953 \cdot 10^4} e^{-100t} \times \\
& \times \left( \frac{e^{j(6280t - 89^\circ)} - e^{-j(6280t - 89^\circ)}}{j2} \right) = 100 + 100e^{-100t} \sin(6280t - 89^\circ).
\end{aligned}$$

Проверка. При  $t = 0$   $u_C(0) = 100 + 100e^{-0 \cdot t} \sin(0 - 89^\circ) = 100 + 100 \cdot 1 \cdot (-1) = 200 - 100 = 0$ , что и должно быть, поскольку напряжение на конденсаторе скачком изменяться не может и, следовательно, в первый момент равно 0. При  $t = \infty$   $u_{C\text{вын}} = 100$ , так как  $e^{-\infty} = 0$ . Кривая  $u_C = f(t)$  показана на рис. 12.39, б.

## 12.28. СПЕКТРЫ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Периодические сигналы, как известно, порождают спектры дискретные (линейчатые), а непериодические — сплошные (непрерывные). Так как непериодический сигнал можно представить как периодический с периодом, равным бесконечности, то частота первой гармоники оказывается равной 0. Но расстояния между гармониками равны частоте первой гармоники. Следовательно, при непериодических сигналах оказывается бесконечно большое количество гармоник, находящихся на бесконечно малых расстояниях друг от друга. Таким образом, если при периодических сигналах спектральные линии оказываются только на некоторых частотах, то при непериодических (т. е. неповторяющихся) сигналах спектральные линии имеются на любых частотах. Совокупность амплитуд спектральных составляющих на различных частотах называют *спектральной плотностью* и в общем случае обозначают  $F(\omega)$  или  $U_m(\omega)$ .

Каждая спектральная составляющая имеет свой аргумент. Математические выражения, позволяющие определять амплитуду и фазу спектральных составляющих непериодических сигналов, называются комплексной спектральной плотностью  $F(j\omega)$  или  $U(j\omega)$ . Значения гармонических составляющих периодических сигналов, как известно, определяется с помощью ряда Фурье (см. гл. 10). Если расстояния между гармониками становятся бесконечно малым, то ряд Фурье вырождается в интеграл Фурье:

$$F(j\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (12.45)$$

Таким образом, чтобы рассчитать комплексную спектральную плотность некоторого непериодического сигнала  $f(t)$  необходимо уравнение мгновенных значений подставить в интеграл Фурье и выполнить все необходимые математические операции. Такой способ определения спектральных плотностей для практики крайне неудобен: рассчитать сложные интегральные выражения еще сложнее, чем дифференциальные, поэтому спектральные



плотности непериодических сигналов определяют иным способом. Операторные изображения, приведенные в табл. 12.1 и в различных справочниках, представляют решения интеграла Лапласа. Но интеграл Фурье  $\int_0^\infty f(t)e^{-j\omega t} dt$  совершенно идентичен интегралу Лапласа  $\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ , с той лишь разницей, что в операторном преобразовании используется множитель  $p$ , а в спектральном  $-j\omega$ . Следовательно, если взять операторное изображение некоторой функции и член  $p$  заменить на  $j\omega$ , то получится выражение комплексной спектральной функции, с помощью которой можно легко рассчитать амплитуды и фазы спектров непериодических сигналов на любых частотах.

Итак, чтобы рассчитать спектральную плотность непериодического сигнала, необходимо проделать следующее.

1. Записать временное выражение данного непериодического сигнала  $f(t)$ .

2. По таблицам (или иным способам) определить операторное выражение данной временной функции.

3. В получившемся операторном выражении множитель  $p$  заменить на множитель  $j\omega$ . При этом получится комплексное выражение  $F(j\omega)$ .

4. Определить модуль этого выражения в функции частоты. Получившееся выражение  $F(\omega)$  представляет амплитудно-частотную характеристику данного непериодического сигнала, иначе говоря, спектральную плотность этого сигнала.

6. Рассчитать аргумент данного комплексного выражения в функции частоты, т. е. фазочастотную характеристику, или фазную плотность.

**Пример. 12.16.** Определить спектральную плотность непериодического напряжения, изменяющегося по экспоненциальному закону,  $u(t) = U_m e^{-bt}$ .

**Решение.** 1) Запишем операторное изображение данной функции. Очевидно, что  $U(p) = U_m(1/(p+b))$  (см. строку 3 табл. 12.1).

2) Заменяем оператор  $p$  на множитель  $j\omega$ , тогда  $U(j\omega) = U_m/(b+j\omega)$ . Заметим, что оператор  $p$  принято записывать на первом месте, а  $j\omega$  — на последнем. Получившееся комплексное выражение есть комплексная спектральная функция (т. е. АЧХ и ФЧХ) непериодического напряжения  $U_m e^{-bt}$ .

3) Определим спектральную плотность сигнала, т. е. его АЧХ. Для этого необходимо записать модуль получившегося комплексного выражения  $U(\omega) = U_m/\sqrt{b^2 + \omega^2}$ . Подставляя различные значения частоты, получим спектральные составляющие на заданных частотах. Очевидно, что при  $\omega = 0$   $U(\omega) = U_m/b$ , при  $\omega = \infty$   $U(\omega) = 0$  (рис. 12.40, а).

4) Определим ФЧХ (т. е. фазную плотность). Для этого следует найти закон аргумента в зависимости от частоты:  $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega/b)$ . Следовательно, при  $\omega = 0$   $\varphi(\omega) = 0$ , при  $\omega = b$   $\varphi(\omega) = -45^\circ$ , при  $\omega = \infty$   $\varphi(\omega) = -90^\circ$  (рис. 12.40, б).

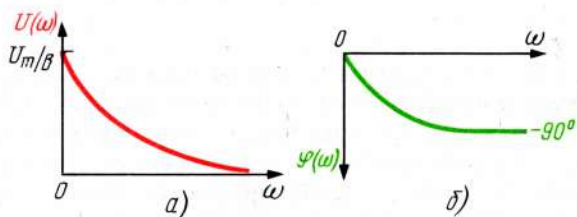


Рис. 12.40

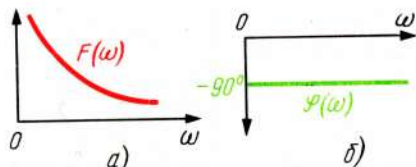


Рис. 12.41

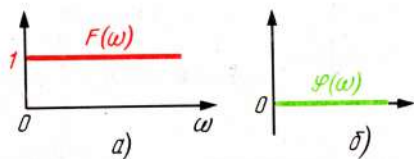


Рис. 12.42

**Пример 12.17.** Рассчитать спектр единичной функции. Прделаем все необходимые операции без комментариев:  $f(t) = 1$ ,  $F(p) = 1/p$ ,  $F(j\omega) = 1/j\omega$ ,  $F(\omega) = 1/\omega$ ,  $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega/0) = -\arctg \infty = -90^\circ$  (рис. 12.41).

**Пример 12.18.** Определить спектр  $\delta$ -функции.

**Решение.**  $f(t) = \delta(t)$ ,  $F(p) = 1$  (см. параграф 12.26),  $F(j\omega) = 1$ ,  $F(\omega) = 1$ ,  $\varphi(\omega) = 0$  (рис. 12.42). Таким образом, спектр импульсной функции ( $\delta$ -функция) – бесконечно широкий, с постоянной амплитудой, равной единице, и нулевой начальной фазой. Всякий четырехполюсник, пропускающий сигнал  $\delta$ -функции без искажений, пропустит без искажений любой, сколь угодно сложный сигнал, поскольку у каждого реального сигнала амплитуды спектральных составляющих постепенно уменьшаются, а у сигнала вида  $\delta$ -функции – остаются неизменными. В § 10.6 было показано, что длительность импульса  $t_{\text{и}}$  и ширина спектра  $\Delta f$  связана приближенным соотношением  $\Delta f \approx 1/t_{\text{и}}$ , причем было указано, что данное выражение тем точнее, чем короче длительность импульса. Действительно, при импульсной функции, т. е. сигнале с  $\Delta t \rightarrow 0$   $\Delta f = 1/0 = \infty$ , чем длиннее импульсы, тем больше они отличаются от  $\delta$ -функции и тем менее точным оказывается данное выражение.

## 12.29. СПЕКТР ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Переходные характеристики цепей представляют некоторые непериодические временные функции. Следовательно, переходные характеристики цепей имеют сплошные спектры и для них можно рассчитывать спектральные плотности.

**Пример 12.19.** Найти спектральную плотность переходной характеристики цепи рис. 12.43.

**Решение.** Запишем переходную характеристику в операторной форме:

$$K(p) = \frac{R}{R + 1/pC} = \frac{pRC}{(pRC + 1)} = \frac{pRC}{RC(p + 1/RC)} = \frac{p}{p + 1/RC}.$$

Комплексная спектральная плотность

$$K(j\omega) = \frac{j\omega}{1/RC + j\omega} = \frac{j\omega}{\omega[(1/\omega RC) + j]} = \frac{j}{(1/\omega RC) + j}.$$

Определим АЧХ цепи:

$$K(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{(1/R^2 C^2) + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(\omega RC)^2}}.$$

При  $\omega = 0$   $K(\omega) = 0$ , при  $\omega = 1/RC$   $K(\omega) = 0,707$ , при  $\omega = \infty$   $K(\omega) = 1$  (рис. 12.44, а). Рассчитаем ФЧХ цепи:  $\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg \omega RC$ . При  $\omega = 0$   $\varphi(\omega) = 90^\circ$ , при  $\omega = 1/RC$   $\varphi(\omega) = 45^\circ$ , при  $\omega = \infty$   $\varphi(\omega) = 0$  (рис. 12.44, б).

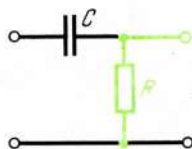


Рис. 12.43

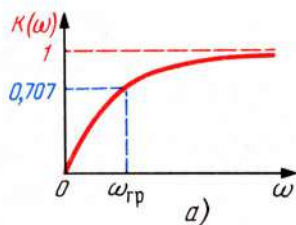
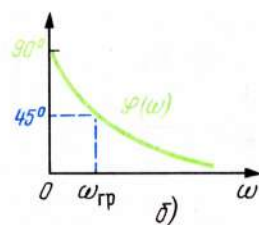


Рис. 12.44



**Пример 12.20.** Рассчитать спектр выходного напряжения цепи рис. 12.43, если ко входу приложено напряжение вида  $\delta$ -функции.

**Решение.**  $U_2(j\omega) = U_1(j\omega) \cdot K(j\omega)$ . Так как  $U_1(j\omega) = 1$ , то спектр выходного напряжения совпадает со спектром переходной характеристики.

**Пример 12.21.** Рассчитать спектр выходного напряжения  $U_2(j\omega)$ , если ко входу четырехполюсника, переходная характеристика которого описывается временным выражением  $k(t) = (e^{-bt} - e^{-at}) = (e^{-100t} - e^{-200t})$ , подключают постоянное напряжение  $U = 100$  В.

**Решение.** Получим спектральное комплексное входное напряжение  $u_1(t) = 100$ ;  $U_1(p) = 100/p$ ;  $U_1(j\omega) = \dot{U}_1/j\omega = 100/j\omega$ . Рассчитаем спектральное комплексное выражение переходной характеристики цепи. Так как разность оригиналов равна разности изображений, то при  $k(t) = e^{-bt} - e^{-at}$

$$K(p) = \frac{1}{p+b} - \frac{1}{p+a} = \frac{p+a-p-b}{(p+a)(p+b)} = \frac{a-b}{(p+a)(p+b)}.$$

Рассчитаем  $K(j\omega)$ :

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{a-b}{(a+j\omega)(b+j\omega)} = \frac{a-b}{ab+j(a+b)\omega-\omega^2} = \\ &= \frac{200-100}{200 \cdot 100 + j300\omega - \omega^2} = \frac{100}{(2 \cdot 10^4 - \omega^2) + j300\omega}. \end{aligned}$$

Комплексный спектр выходного напряжения

$$\begin{aligned} U_2(j\omega) &= U_1(j\omega) K(j\omega) = \frac{100}{j\omega} \cdot \frac{100}{(2 \cdot 10^4 - \omega^2) + j300\omega} = \\ &= \frac{10^4}{-300\omega^2 + j2 \cdot 10^4\omega - j\omega^3} = \frac{10^4}{-\omega[(300\omega) + j(\omega^2 - 2 \cdot 10^4)]}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(\omega) &= \frac{10^4}{\omega \sqrt{(2 \cdot 10^4 - \omega^2)^2 + (300\omega)^2}} = \frac{10^4}{\omega \sqrt{4 \cdot 10^8 - 4 \cdot 10^4 \omega^2 + \omega^4 + 9 \cdot 10^4 \omega^2}} = \\ &= \frac{10^4}{\omega \sqrt{\omega^4 + 5 \cdot 10^4 \omega^2 + 4 \cdot 10^8}}. \end{aligned}$$



$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\omega^3 - 2 \cdot 10^4 \omega}{300\omega^2} \right] = \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega^2 - 2 \cdot 10^4}{300\omega} \right).$$

Подставляя различные значения  $\omega$ , можно рассчитать АЧХ и ФЧХ выходного напряжения.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой режим работы цепи называется установившимся (вынужденным, принужденным)?
2. Какой режим работы цепи называется переходным?
3. Сформулируйте законы коммутации. Приведите примеры. Почему напряжение на индуктивности может изменяться скачком, а ток не может?
4. Какие электрические величины в конденсаторе могут изменяться скачком, а какие не могут? Почему?
5. Что понимается под понятиями: время  $t = -0$  и  $t = +0$ . Как отличить эти моменты?
6. Почему уравнения для мгновенных напряжений или мгновенных токов в цепях с накопителями энергии оказываются дифференциальными или интегральными?
7. Каков физический смысл вынужденной и свободной составляющих напряжения (тока)?
8. Каков физический смысл постоянной времени цепи  $\tau$ ?
9. Рассчитайте постоянные времени  $\tau$  для цепей рис. 12.1, а; 12.5, а; 12.7; 12.9, а; 12.10, а; 12.12, а; 12.13, а. Как практически оценивается время переходного процесса в цепи?
10. Докажите, что в цепи с нулевыми начальными условиями сопротивление индуктивности во время переходного процесса изменяется от  $\infty$  до 0, а емкости от 0 до  $\infty$ .
11. Какой характер имеет свободная составляющая напряжения или тока в цепях первого порядка?
12. Нарисуйте кривую выходного напряжения в цепи рис. 12.7 при различных значениях постоянной времени цепи, если ко входу цепи приложено напряжение прямоугольной формы. Что называется быстродействием цепи? От чего оно зависит? Как связаны между собой быстродействие цепи и полоса пропускания?
13. Какие Вы знаете противоречия между оптимальными параметрами цепи в вынужденном и переходном режимах? Приведите примеры.
14. Разберите процессы, происходящие в RC-цепи при замыкании заряженного конденсатора на резистивное сопротивление.
15. Определите время, через которое напряжение на конденсаторе в цепи рис. 12.5, а составит: а) 0,5 U, б) 0,75 U; в) 0,95 U.
16. Почему напряжение на вольтметре в цепи рис. 12.10, а при отключении источника может резко возрасти? Как можно избежать этого перенапряжения?
17. Можно ли, и если можно, то как получить импульс тока много больший, чем ток, отдаваемый источником?
18. Разберите качественно процессы, происходящие в цепи рис. 12.13, а после замыкания ключа.
19. Рассчитайте значения тока во всех ветвях и напряжений на всех элементах в цепи рис. 12.14, а для моментов  $t = +0$  и  $t = \infty$ , если  $R_3 = 0$ .
20. Какой физический смысл корней характеристического уравнения?
21. В цепи на рис. 12.19  $R = 20 \text{ Ом}$ ,  $L = 16,6 \text{ мГн}$ ,  $C = 5,92 \text{ мкФ}$ . Рассчитайте практическое время переходного процесса и число периодов свободной составляющей за время переходного процесса.
22. В цепи рис. 12.16  $R = 5 \sqrt{L/C}$ . Нарисуйте кривую тока в цепи после замыкания ключа. Через какое время этот ток будет иметь наибольшее значение?
23. Докажите, что число свободных колебаний цепи близко к добротности контура

$Q$ , а отношение мнимой части корня характеристического уравнения к вещественной – близко к  $0,5 Q$ .

24. Какой режим работы называется критическим? Каковы свойства цепи в критическом режиме?

25. Нарисуйте кривую напряжения на конденсаторе и на катушке индуктивности в  $RLC$ -цепи с различными добротностями, если на входе цепи имеется периодическое напряжение прямоугольной формы.

26. Нарисуйте кривую выходного напряжения  $RLC$ -цепи с малым затуханием, если напряжение на входе имеет гармоническую форму для случаев: а)  $\omega = \omega_{св}$ ; б)  $\omega$  близко к  $\omega_{св}$ .

27. В чем сущность расчета цепей в переходном режиме операторным методом? Как составляют операторные уравнения состояния цепи?

28. Какие вы знаете способы получения оригиналов функций по их изображениям? Приведите примеры.

29. Как с помощью формулы разложения рассчитать оригинал функции по ее заданному изображению?

30. Рассчитайте  $u(t)$ , если  $U(p) = \frac{p + 10}{p(p^2 + 4p + 13)}$ .

31. Как составить эквивалентную операторную схему цепи при наличии начальных условий? Приведите примеры.

32. Как выполнить операторные дифференцирование и интегрирование?

33. В чем состоят достоинства операторного метода расчета переходных процессов по сравнению с расчетами классическим методом?

34. Каков физический смысл корней операторных или характеристических уравнений?

35. Какая функция называется единичной? Каков ее физический смысл?

36. Какая функция называется импульсной? Каков ее физический смысл?

37. Что называется переходной функцией цепи? Каким образом она находится?

38. Что называется импульсной функцией цепи? Каковы ее свойства?

39. Чем спектры непериодических сигналов отличаются от спектров периодических сигналов?

40. Каким образом определяют спектральную плотность непериодических сигналов? Приведите примеры.

41. Каковы спектры единичной и импульсной функций?

42. Рассчитайте спектры выходного напряжения. Приведите примеры расчетов.

## Глава 13.

## ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ И ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

### 13.1. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ЦЕПИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*Дифференцирующими* называют четырехполюсники, мгновенные напряжения на выходе  $u_2(t)$  которых пропорциональны производной по времени от мгновенных напряжений на входе  $u_1(t)$  (рис. 13.1). В качестве пассивных дифференцирующих цепей на практике чаще всего используют  $RC$ -цепи. Покажем, что если в цепи рис. 13.2  $R \ll X_C$ , то такая цепь является практически дифференцирующей. По второму закону Кирхгофа  $u_1 = u_C + u_R = u_C + Ri$ . В цепи с емкостью  $i = C(du_C/dt)$ . Если  $X_C \gg R$ , то  $u_C \gg u_R$ . В этом случае  $u_1 \approx u_C$ , тогда



Рис. 13.1

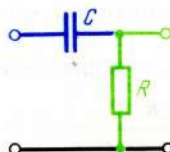


Рис. 13.2

$$u_2 = u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt} \approx RC \frac{du_1}{dt} = \tau \frac{du_1}{dt}. \quad (13.1)$$

Очевидно, что идеальное дифференцирование могло бы быть, если бы  $u_1 = u_C$ , но это возможно только при  $R = 0$ . Так как выходное напряжение при этом равно 0, то цепь практически теряет смысл. Таким образом, чем меньше сопротивление  $R$  по сравнению с сопротивлением  $X_C$ , тем ближе выходное напряжение к производной по времени от входного напряжения, но тем меньше коэффициент передачи цепи и соответственно меньше значение выходного напряжения. Поскольку идеальное дифференцирование невозможно, устанавливают критерии, показывающие, какие цепи можно считать практически дифференцирующими. Чаше всего исходят из критерия, что пренебрежимо малыми являются сопротивления, значения которых на порядок меньше емкостного сопротивления  $X_C$ , т. е.  $R \leq 0,1 X_C$ , тогда

$$RC \leq \frac{1}{10 \cdot 2\pi f}, \text{ или } \tau_{(c)} = \frac{1}{20\pi f (\Gamma_{\text{ц}})},$$

откуда

$$\tau_{(\text{мкс})} \leq \frac{10^6}{20\pi f (\Gamma_{\text{ц}})} = \frac{15,9}{f (\kappa \Gamma_{\text{ц}})}, \quad (13.2)$$

где  $\tau$  — постоянная времени дифференцирующей цепи. Так как период  $T = 1/f$ , то выражение (13.2) можно представить в виде  $\tau_{(c)} = T_{(c)}/20\pi = 15,9 \cdot 10^{-3} T$ , или  $\tau_{(\text{мс})} = T_{(\text{мс})}/20\pi = 15,9 \cdot 10^{-3} T_{(\text{мс})}$ , откуда

$$R_{(\text{Ом})} = \tau_{(c)}/C_{(\text{Ф})} = \tau_{(\text{мкс})}/C_{(\text{мкФ})}. \quad (13.3)$$

Таким образом, если имеется  $RC$ -цепь, в которой  $\tau \leq 1/20\pi f = T/20\pi$ , то для всех сигналов в диапазоне частот  $0 \dots 1/(20\pi\tau)$  такая цепь является практически дифференцирующей. При выполнении условий (13.2) и (13.3) обеспечивается хорошее качество дифференцирования, но с весьма малым коэффициентом передачи. Коэффициент передачи цепи при этом много меньше единицы, выходное напряжение оказывается значительно меньше входного. Иногда можно допустить худшее дифференцирование, но с большим коэффициентом передачи. В связи с этим на практике встречается иной критерий для дифференцирующих цепей, состоящий в том, что постоянная времени  $\tau$  должна иметь такую величину, при которой коэффициент передачи четырехполюсника  $K \leq 0,707$ . Этот критерий соответствует случаю  $R = X_C$ . Заметим, что цепи с такими параметрами иногда называют "квази-дифференцирующими", что означает "частично дифференцирующие". Опре-



делим постоянную времени  $\tau$ , при которой цепь является квазидифференцирующей.

Рассчитаем комплексный коэффициент передачи в цепи рис. 13.2:

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1 R}{R + 1/j\omega C} = \dot{U}_1 \left( \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right); \quad \underline{K} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

Модуль коэффициента передачи

$$K = U_2 / U_1 = (\omega RC) / \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (13.4)$$

При  $K = 0,707 = 1/\sqrt{2}$   $1/\sqrt{2} = (\omega RC) / \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ ; тогда  $1 + \omega^2 R^2 C^2 = 2\omega^2 R^2 C^2$ , или  $\omega^2 R^2 C^2 = 1$ , откуда

$$\omega_{\text{гр}} = 1/RC = 1/\tau, \quad (13.5)$$

где  $\omega_{\text{гр}}$  — граничная частота цепи  $RC$ .

Иначе говоря,

$$\tau_{\text{(кв)}} \leq 1/\omega_{\text{гр}} = 1/2\pi f = T/2\pi. \quad (13.6)$$

Таким образом, если постоянная времени  $\tau$  не превышает значения  $1/(20\pi f)$ , то такая цепь является дифференцирующей, и если не превышает  $1/(2\pi f)$ , то квазидифференцирующей. Разумеется, между дифференцирующими и квазидифференцирующими цепями нет резкой границы, переход происходит постоянно, по мере увеличения постоянной времени цепи.

Всякий реальный сигнал представляет спектр частот. Очевидно, что для того, чтобы цепь дифференцировала сигнал данной формы, необходимо, чтобы условия (13.2) и (13.3) выполнялись для самой высокочастотной составляющей спектра, в этом случае для низкочастотных составляющих условие дифференцирования будет тем более выполняться. Спектр сигналов негармонической формы может быть выражен в виде ряда Фурье. На практике наиболее высокочастотной составляющей спектра считается частота, амплитуда которой меньше хотя бы на порядок, чем амплитуда с наибольшим значением. Например, сигнал пилообразной формы (рис. 13.3, а) описывается рядом

$$u = \frac{2U_m}{\pi} \left[ \sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{K} \sin K\omega_1 t \right]. \quad (13.7)$$

Спектр сигнала пилообразной формы практически можно считать состоящим из десяти гармоник, поскольку амплитуда десятой гармоники этого сигнала на порядок меньше амплитуды первой гармоники. Сигнал однополупериодной формы (рис. 13.3, б) раскладывается в ряд

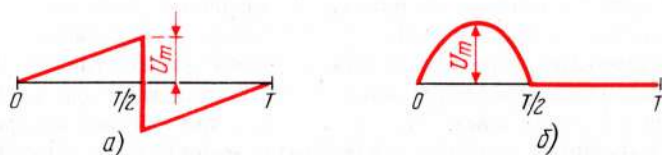


Рис. 13.3

$$u = \frac{U_m}{\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega_1 t + \frac{2}{3} \cos 2 \omega_1 t - \frac{2}{15} \cos 4 \omega_1 t + \right. \\ \left. + \frac{2}{35} \cos 6 \omega_1 t + \dots \right]. \quad (13.8)$$

Спектр такого сигнала практически можно считать состоящим из четырех гармоник, поскольку  $U_{m(4)}/U_{m(1)} = 2 \cdot 2/15\pi = 0,085 < 0,1$ , где  $U_{m(1)}$  и  $U_{m(4)}$  — амплитудные (или пропорциональные им) значения первой и четвертой гармоник соответственно. Если, например, частота первой гармоники обоих сигналов равна 1 кГц, то высшая частота спектра сигнала пилообразного вида (т. е. частота десятой гармоники) составляет 10 кГц, а высшая частота спектра сигнала однополупериодной формы — только 4 кГц. Следовательно, для дифференцирования сигналов пилообразной формы следует иметь RC-цепь с постоянной времени  $\tau < 1/(62,8 \cdot 10^3) = 1,59$  мкс, а однополупериодной формы  $1/(62,8 \cdot 4 \cdot 10^3) = 6,4$  мкс.

Для определения формы сигнала на выходе дифференцирующей цепи необходимо графически построить производную от входного сигнала. Производная, как известно, представляет величину, пропорциональную тангенсу угла наклона между касательной, проведенной в данной точке и осью времени. Следовательно, для построения кривой, получающейся на выходе четырехполосника, следует в ряде точек кривой напряжения, подведенного ко входу дифференцирующей цепи, провести касательные и построить кривые, мгновенные значения которых пропорциональны тангенсу угла наклона. Примеры кривых показаны на рис. 13.4.

Если напряжение на входе дифференцирующей цепи нарастает скачкообразно, то ток в C-цепи, а следовательно, и выходное напряжение  $u_R$  нарастают также скачкообразно. Но при скачкообразном уменьшении напряжения конденсатор разряжается по экспоненциальному закону, причем чем больше постоянная времени цепи, тем медленнее разряжается конденсатор и тем кривая на выходе сильнее отличается от производной по времени. Например, если на вход дифференцирующей цепи подано напряжение прямоугольной формы, то на выходе получаются напряжения, показанные на рис. 13.5.

Если параллельно сопротивлению  $R$  включена емкость  $C_H$ , например входная емкость следующего каскада (рис. 13.6), то при этом происходят следующие изменения:

1) постоянная времени эквивалентной цепи увеличивается и становится  $R(C + C_H)$ ;

2) вследствие наличия емкости  $C_H$  выходное напряжение нарастает не скачком, а также по экспоненте, поскольку напряжение на емкости  $C_H$  не может изменяться скачком. Из-за этого вершины импульсов получаются более округленными, уменьшается крутизна нарастания переднего фронта, увеличивается длительность импульса, уменьшается амплитуда выходного напряжения (рис. 13.6, б). На практике параметры дифференцирующих цепей следует выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие  $C_H \ll \ll C$ . В дальнейших выкладках емкость  $C_H$  будем считать пренебрежимо малой. Если увеличивать значение сопротивления  $R$  или емкости  $C$ , то постоянная времени цепи будет возрастать, емкостное сопротивление  $X_C$  по

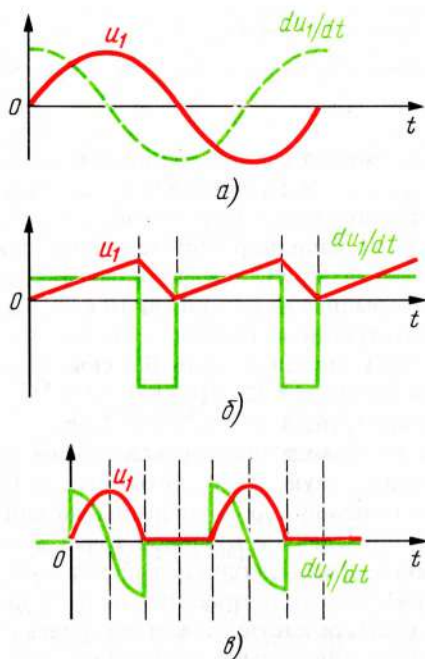


Рис. 13.4

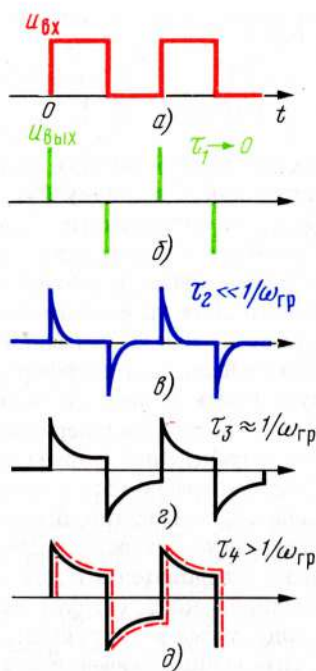


Рис. 13.5

сравнению с резистивным станет уменьшаться, характер цепи — все ближе приближаться к резистивному, форма выходного напряжения — все больше приближаться к форме входного. Такую цепь называют *разделительной*. Разделительная цепь пропускает сигнал без заметных искажений и служит только для разделения переменной и постоянной составляющих сигнала. Очевидно, что  $u_2 \approx u_1$ , если

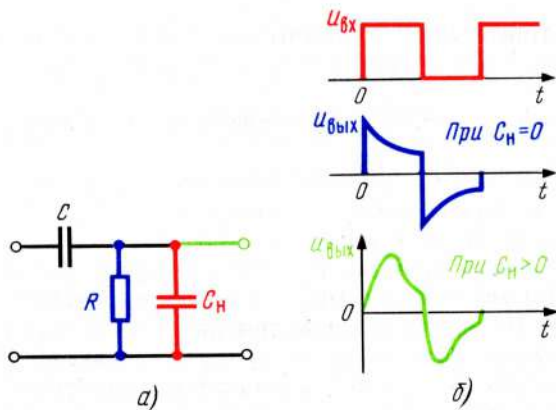


Рис. 13.6

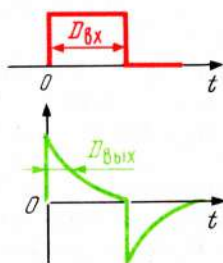


Рис. 13.7



$$R \geq 10 \frac{1}{\omega_n C}, \quad (13.9)$$

(где  $\omega_n$  — низшая частота спектра), поскольку если цепь пропускает практически без ослабления сигнал с низшей частотой, то тем более пропускает все высшие частоты спектра. Из выражения (13.9) получаем

$$\tau_{\text{разд}} \geq \frac{1,6}{f_n} = 1,6 T, \quad (13.10)$$

где  $\tau_{\text{разд}}$  — постоянная времени разделительной цепи.

Таким образом, если в  $RC$ -цепи постоянная времени  $\tau$  меньше  $0,16/f_n$ , где  $f_n$  — высшая частота спектра, то такая цепь является практически дифференцирующей, если постоянная времени больше  $1,6/f_n$ , где  $f_n$  — низшая частота спектра, то разделительной. В остальном диапазоне — квазидифференцирующей, т. е. частично дифференцирующей.

Условие дифференцирования цепи можно определить и несколько иным способом. Так как производная по времени  $d/dt$  изображается в комплексном виде членом  $j\omega$ , а в операторном виде — оператором  $p$ , то дифференцирующей является любая цепь, комплексный или операторный коэффициент передачи которой пропорционален в комплексном виде множителю  $j\omega$ , а в операторном виде — множителю  $p$ , т. е.  $\underline{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \propto j\omega A$ , или  $K(p) = (U_2(p)/U_1(p)) \propto pA$ , где  $A$  — постоянная величина.

Дифференцирующие цепи используют чаще всего для получения коротких импульсов с крутыми фронтами, а вовсе не для математического дифференцирования, как иногда неверно считают. Длительность импульса отсчитывают на уровне 0,5. Коэффициентом укорочения  $K_{\text{ук}}$  называется отношение длительности сигнала на выходе цепи  $D_2$  к длительности сигнала на входе цепи  $D_1$ :

$$K_{\text{ук}} = D_2/D_1 \quad (13.11)$$

(рис. 13.7).

### 13.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ЦЕПИ ПРИ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассмотрим процессы, происходящие в пассивных  $RC$ -цепях при непериодических воздействиях. Пусть имеется  $RC$ -цепь, ко входу которой приложен непериодический сигнал прямоугольной формы с амплитудой  $U_m$  и длительностью  $t_n$  (рис. 13.8). Рассмотрим сначала качественную сторону процесса, происходящего в цепи. В момент  $t=0$  входное напряжение скачком увеличивается до значения  $U_m$ . Так как незаряженный конденсатор в начальный момент представляет нулевое сопротивление, то условие дифференцирования в этот момент не выполняется, цепь работает как разделительная, напряжение на выходе повторяет напряжение на входе. Поэтому при  $t=0$   $u_2 = u_1$ . По мере увеличения времени сопротивление конденсатора растет по закону  $Z_C(t) = R(e^{t/\tau} - 1)$  (см. выражение (12.14)) и через время  $t_{\text{диф}}$  становится в  $K$  раз больше сопротивления  $R$ , где  $K$  — напе-

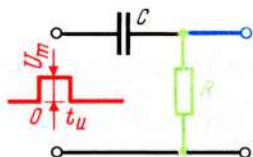


Рис. 13.8

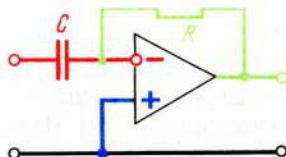


Рис. 13.9

ред заданное положительное число, показывающее, во сколько раз емкостное сопротивление больше резистивного. Определим время  $t_{\text{диф}}$ :  $Z_C = KR$  или  $KR(e^{t/\tau} - 1) = R$ , т.е.  $e^{t/\tau} = 1 + 1/K$ . Логарифмируя обе части равенства, получаем  $t/\tau = \ln(1 + 1/K)$ , откуда  $t_{\text{диф}} = 2,3 \lg(1 + 1/K)$ . Если положить  $K = 10$ , то время, через которое цепь оказывается дифференцирующей, получается  $t = 2,3 \cdot 0,0414 = 0,095\tau \approx 0,1\tau$ .

Таким образом, при  $t = 0$  данная цепь является "повторяющей" (в том смысле, что напряжение на выходе повторяет напряжение на входе). При  $0 < t_{\text{диф}} < 0,1\tau$  цепь является квазидифференцирующей, в интервале  $0,1\tau \dots \dots \tau$  — практически дифференцирующей, при  $t > 5\tau$  — идеально дифференцирующей, поскольку к этому времени сопротивление емкостного элемента возрастает до  $\infty$ . Однако коэффициент передачи цепи при этом падает до 0, как при всяком идеальном дифференцировании.

### 13.3. АКТИВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

Как было показано в предыдущем параграфе для получения эффекта дифференцирования с помощью пассивных элементов необходимо иметь  $RC$ -цепь с весьма малым коэффициентом передачи, что на практике представляет значительные неудобства. От указанного недостатка свободны активные дифференцирующие цепи, т.е. цепи класса  $ARC$ . Как известно, коэффициент передачи такой цепи  $\underline{K} = \underline{Z}_2 / \underline{Z}_1$ . Если в качестве элемента  $\underline{Z}_1$  включить конденсатор емкостью  $C$ , а в качестве элемента  $\underline{Z}_2$  — резистор сопротивлением  $R$ , то схема приобретает вид рис. 13.9, коэффициент передачи в которой  $\underline{K} = \underline{Z}_2 / \underline{Z}_1 = R / (1/j\omega C) = j\omega RC$ . Но всякая цепь, комплексный коэффициент передачи которой пропорционален  $j\omega$ , представляет дифференцирующую цепь, причем если в пассивной дифференцирующей цепи коэффициент передачи цепи значительно меньше 1, то в активной цепи коэффициент передачи может быть либо близким к 1, либо даже  $> 1$  при одинаковом качестве дифференцирования. Дифференцирующие цепи класса  $ARC$  значительно совершеннее дифференцирующих цепей класса  $RC$  и являются ныне основными, предназначенными для получения узких коротких импульсов с крутыми фронтами. Частотный диапазон дифференцирующих цепей шире, чем у  $RC$ -цепей. В гл. 12 было показано, что импульсная функция имеет сплошной спектр бесконечно большой ширины. Узкие короткие импульсы, получаемые на выходе дифференцирующих цепей, имеют не бесконечные, но весьма широкие спектры и успешно используются в разнообразной электронной аппаратуре, а также в различных технических устройствах.



### 13.4. ПАССИВНЫЕ ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

*Интегрирующими* называются четырехполюсники, мгновенные напряжения на выходе которых пропорциональны интегралу от входного напряжения, т. е.  $u_2 \propto \int u_1 dt$ . Покажем, что  $RC$ -цепь (рис. 13.10), в которой  $R \gg X_C$ , является интегрирующей. По второму закону Кирхгофа  $u_1 = u_R + u_C$ , причем  $u_C = u_2$ . Если  $R \gg X_C$ , то  $u_2 \ll u_R$ , при этом  $u_1 \approx u_R$  или  $i \approx u_1/R$ . Выходное напряжение  $u_2 = u_C$ , но

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int \frac{u_1}{R} dt = \frac{1}{RC} \int u_1 dt = \frac{1}{\tau} \int u_1 dt,$$

следовательно, в  $RC$ -цепи при  $R \gg X_C$

$$u_2(t) = \frac{1}{\tau} \int u_1(t) dt. \quad (13.12)$$

Идеальное интегрирование может быть, только если  $u_R = u_1$ , т. е. при коэффициенте передачи, равном 0, что лишено физического смысла. Практически хорошее интегрирование оказывается при  $R \geq 10X_C = 10/2\pi f_n C$  или  $\tau \geq 1,6/f_n = 1,6T_n$ , где  $f_n$  и  $T_n$  — частота и период первой гармоники спектра входного сигнала. Очевидно, что если условие интегрирования выполняется для первой гармоники, то оно тем более будет выполнено для высших гармоник. При  $R \leq 0,1 X_{Cв} = 1/2\pi f_{в} C$  или  $\tau \leq 160/f_{в} = 160T_{в}$ , где  $f_{в}$  и  $T_{в}$  — высшие частота и период спектра соответственно, цепь становится проходной. В диапазоне  $1,6T_n \dots 160T_{в}$  цепь является квазиинтегрирующей, т. е. частично интегрирующей. Выходное напряжение в интегрирующей цепи имеет такую форму, при которой производная по времени от выходного напряжения повторяет входное напряжение. Например, если напряжение на входе интегрирующей цепи имеет прямоугольную форму, то выходное будет треугольным, при узких коротких импульсах на входе — пилообразным, при косинусоидальном на входе — синусоидальным и т. д. Длительность сигналов на выходе интегрирующей цепи больше длительности входных сигналов, поэтому интегрирующие цепи иногда называют "удлиняющими". Интегрирующие цепи выполняют разнообразные функции, например позволяют уменьшить воздействие импульсных помех, преобразуют сигналы, отличающиеся по длительности, в сигналы, отличающиеся по амплитуде. При воздействии короткого импульса конденсатор не успевает зарядиться, а при воздействии длинного — успевает, за счет чего возникает разница в напряжениях на выходе цепи (рис. 13.11).

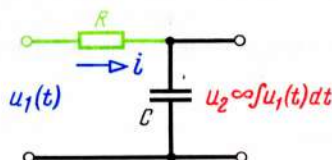


Рис. 13.10

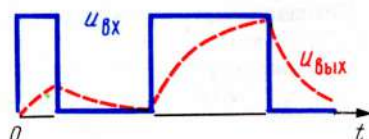


Рис. 13.11



### 13.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Пусть имеется  $RC$ -цепь, напряжение на входе которой имеет вид единичной функции. В первый момент сопротивление конденсатора равно 0, цепь представляет идеальный интегратор, выходное напряжение которого равно 0. При увеличении времени сопротивление  $Z_C(t)$  возрастает и до тех пор, пока выполняется условие  $R \gg Z_C(t)$ , цепь является практически интегрирующей. По мере дальнейшего увеличения времени сопротивление  $Z_C(t)$  возрастает еще более, условие интегрирования перестает выполняться, при  $Z_C(t) \gg R$  цепь превращается в проходную. Определим время  $t_{\text{инт}}$ , в течение которого цепь является практически интегрирующей. Так как в цепи рис. 13.12  $Z_C(t) = R(e^{t/\tau} - 1)$ , то условие интегрирования будет соблюдаться до тех пор, пока выполняется неравенство  $R \geq 10R(e^{t_{\text{инт}}/\tau} - 1)$ , т.е.  $e^{t_{\text{инт}}/\tau} = 1,1$ , или  $t_{\text{инт}}/\tau = \ln 1,1 = 2,3 \lg 1,1 = 2,3 \cdot 0,013 = 0,0953$ , откуда  $t_{\text{инт}} \leq 0,0953\tau \approx 0,1\tau$ . Время  $t_{\text{п}}$ , через которое цепь становится проходной, определяется из выражения  $10R \leq R(e^{t_{\text{п}}/\tau} - 1)$ , т.е.  $e^{t_{\text{п}}/\tau} = 11$  или  $t_{\text{п}} = \tau \ln 11 = 2,4\tau$ . Таким образом, в диапазоне времен  $0 \dots 0,1\tau$  цепь является практически интегрирующей, в диапазоне  $0,1\tau \dots 2,4\tau$  — квазиинтегрирующей, в диапазоне  $2,4\tau \dots \infty$  — проходной.

**Пример 13.1.** В цепи на рис. 13.10  $R=1$  кОм,  $C=1$  мкФ; определить форму выходного напряжения.

**Решение.** В интервале  $0 \dots 0,1\tau = 0,1RC = 0,1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 10^{-4}$  с = 100 мкс цепь является практически интегрирующей, а с момента  $t = 2,4\tau = 2,4 \cdot 10^{-3}$  с = 2,4 мс — проходной. Рассчитаем выходное напряжение для моментов  $t = 0,1\tau$  и  $t = 2,4\tau$ :

$$u_C(\text{при } t=0,1\tau) = U(1 - e^{-t/\tau}) = U(1 - e^{-0,1\tau/\tau}) = U(1 - e^{-0,1}) = U(1 - 1/e^{0,1}) = U(1 - 1/1,1) \approx 0,1U.$$

$$u_C(\text{при } t=2,4\tau) = U(1 - e^{-2,4\tau/\tau}) = U(1 - 1/e^{2,4}) = U(1 - 0,09) \approx 0,9U.$$

Таким образом, в течение первых ста микросекунд выходное напряжение нарастает по линейному закону и достигает  $0,1U$ . В течение времени от 100 мкс до 2,4 мс. напряжение растет по экспоненциальному закону и достигает  $0,9U$ , после чего растет практически по линейному закону до значения, равного  $U$  (рис. 13.13).

Остановимся на активных интегрирующих цепях. Удовлетворительное интегрирование происходит в пассивных  $RC$ -цепях только при малых коэффициентах передачи. Активные цепи обеспечивают хорошее качество интегрирования при коэффициенте передачи, близком к 1 или даже большем. В цепи рис. 13.14  $K = (1/j\omega C)/R = 1/j\omega R$ . Так как комплексный коэффициент передачи цепи пропорционален  $1/j\omega$ , то цепь является интегрирующей. Диапазон частот, в котором активная цепь работает как интегратор,

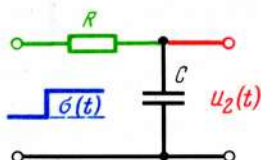


Рис. 13.12



Рис. 13.13

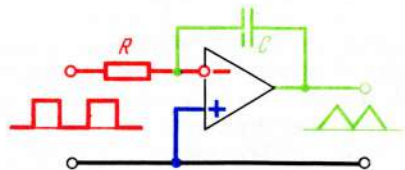


Рис. 13.14

определяется качеством операционного усилителя. Большинство современных ОУ работает в диапазоне сотен килогерц — единиц мегагерц. Интеграторы с активными элементами значительно совершеннее интеграторов на пассивных элементах.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие четырехполосники называются дифференцирующими?
2. При каких условиях цепь рис. 13.2 является: а) дифференцирующей; б) квазидифференцирующей; в) разделительной?
3. На вход цепи рис. 13.2 подано периодическое напряжение прямоугольной формы с частотой следования 10 кГц. Рассчитайте  $R$ , при котором цепь является: а) дифференцирующей; б) квазидифференцирующей; в) разделительной, если  $C = 1$  нФ.
4. Нарисуйте кривые выходного напряжения цепи рис. 13.2, если сопротивление  $R$  изменяется от 0 до  $\infty$ , а напряжение на входе имеет форму: а) прямоугольную; б) треугольную; в) пилообразную; г) синусоидальную; д) однополупериодную.
5. Почему цепи, комплексный коэффициент передачи которых пропорционален  $j\omega$ , являются дифференцирующими? Приведите доказательства.
6. Как сказывается емкость, включенная на выход дифференцирующей цепи? Приведите примеры.
7. Что понимается под понятием "коэффициент укорочения цепи"? Приведите примеры.
8. При каких соотношениях между  $T$  и  $\tau$  цепь становится разделительной? Для каких целей применяются разделительные цепи?
9. Для каких целей применяются дифференцирующие цепи? Что называется коэффициентом укорочения? Приведите примеры.
10. Разберите процессы и приведите необходимые соотношения для  $RC$ -цепи при неперiodических воздействиях. В какие интервалы времени цепь оказывается: а) дифференцирующей; б) квазидифференцирующей; в) проходной?
11. Покажите схему активной дифференцирующей цепи. В чем состоит преимущество  $ARC$ -дифференцирующих цепей по сравнению с пассивными  $RC$ -цепями?
12. Разберите работу пассивной интегрирующей  $RC$ -цепи. При каких соотношениях цепь является: а) интегрирующей; б) квазиинтегрирующей; в) проходной?
13. Какова форма напряжения на выходе интегрирующей цепи? Приведите примеры.
14. Каким образом происходит преобразование сигналов, отличающихся по длительности, в сигналы, отличающиеся по амплитуде?
15. Нарисуйте схему интегрирующей  $ARC$ -цепи. Каковы достоинства интегрирующих  $ARC$ -цепей по сравнению с  $RC$ -цепями?

**Прходные пассивные четырехполюсники.** *Прходными* четырехполюсниками называются цепи, имеющие пару входных и пару выходных зажимов (рис. 14.1). Поскольку в данной главе рассматриваются только проходные четырехполюсники, то слово "проходные" для краткости будем опускать. Четырехполюсники делят на пассивные и активные. *Активными* называются четырехполюсники, в состав которых входят активные элементы, т.е. электронные лампы, транзисторы, операционные усилители с источниками питания. *Пассивными* называются четырехполюсники, содержащие только пассивные элементы (т.е.  $R, L, C$ ). Если в режиме холостого хода между какими-то зажимами имеется напряжение, отличное от нуля, то такой четырехполюсник называют *автономным*, а если не имеется, то *неавтономным*. Таким образом, к неавтономным относятся все пассивные четырехполюсники, а также те активные, которые не содержат независимых источников энергии. Четырехполюсники, не содержащие нелинейных элементов, называются *линейными*, а содержащие хотя бы один нелинейный элемент — *нелинейными*. Четырехполюсники, у которых входные (т.е. первичные) и выходные (т.е. вторичные) зажимы можно поменять местами без какого-либо изменения напряжений и токов в любых ветвях, не входящих в четырехполюсник, называются *симметричными*. Четырехполюсники, не обладающие такими свойствами, называют *несимметричными*.

**Уравнения четырехполюсников.** Уравнениями четырехполюсников называют комплексные уравнения, связывающие напряжения  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  на входе четырехполюсника с напряжением  $\dot{U}_2$  и током  $\dot{I}_2$  на его выходе (см. рис. 14.1). Если четырехполюсник состоит из линейных элементов и не содержит источников энергии, то уравнения, связывающие напряжения и токи, являются линейными, т.е. уравнениями первой степени. Например, уравнения четырехполюсника в  $H$ -параметрах имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + \dot{H}_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}H_{11} &= (\dot{U}_1/\dot{I}_1) \text{ при } U_2=0; \\ H_{12} &= (\dot{U}_1/\dot{U}_2) \text{ при } I_1=0; \\ H_{21} &= (\dot{I}_2/\dot{I}_1) \text{ при } U_2=0; \\ H_{22} &= (\dot{I}_2/\dot{U}_2) \text{ при } I_1=0.\end{aligned}$$

Уравнения четырехполюсника в  $A$ -параметрах:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A_{11} &= (\dot{U}_1/\dot{U}_2) \text{ при } I_2=0; \\ A_{12} &= (\dot{U}_1/\dot{I}_2) \text{ при } U_2=0; \\ A_{21} &= (\dot{I}_1/\dot{U}_2) \text{ при } I_2=0; \\ A_{22} &= (\dot{I}_1/\dot{I}_2) \text{ при } U_2=0.\end{aligned}$$

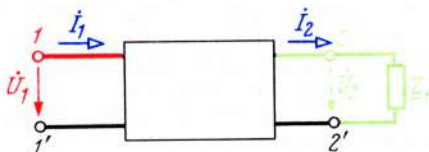


Рис. 14.1



Очевидно, что для получения  $I_2 = 0$  вторичные зажимы следует разомкнуть, а для получения  $U_2 = 0$  — замкнуть накоротко.

Постоянные коэффициенты  $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$  зависят от значения элементов, входящих в четырехполюсник и конфигурации цепи. Кроме  $H$ - и  $A$ -параметров существуют  $Z$ -,  $Y$ -,  $F$ - и  $B$ -параметры. Таким образом, имеется шесть форм записи уравнений четырехполюсников со своими областями применения. Например, в цепях с транзисторами удобнее применять систему  $H$ -параметров, при расчетах пассивных фильтров —  $A$ -параметры и т.д. Параметры четырехполюсников одной системы можно легко пересчитать в параметры всех остальных систем с помощью специальных сравнительных таблиц. Например, зная  $A$ -параметры четырехполюсников, можно определить  $H$ -параметры из выражений  $H_{11} = A_{12}/A_{22}$ ;  $H_{12} = 1/A_{22}$ ;  $H_{21} = -1/A_{22}$ ;  $H_{22} = A_{21}/A_{22}$ . При записи уравнений в системе  $A$ -параметров следует иметь в виду, что параметр  $A_{11}$  часто называют коэффициентом  $A$ ;  $A_{12}$  — коэффициентом  $B$ ;  $A_{21}$  — коэффициентом  $C$ ;  $A_{22}$  — коэффициентом  $D$ .

Таким образом, уравнения четырехполюсника в системе  $A$ -параметров имеет вид

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.$$

Выясним физический смысл коэффициентов  $A, B, C, D$ . Если разомкнуть вторичные зажимы, то ток  $I_2$  станет равным 0, уравнения принимают вид  $\dot{U}_1 = A\dot{U}_2, \dot{I}_1 = C\dot{U}_2$ , откуда  $A = \dot{U}_1/\dot{U}_2$  при  $I_2 = 0$ , т.е. коэффициент  $A$  представляет безразмерную величину, показывающую отношение напряжения на входе четырехполюсника к напряжению на выходе в режиме холостого хода, т.е. при разомкнутых вторичных зажимах. Коэффициент  $A$  называют также *коэффициентом трансформации четырехполюсника по напряжению в режиме холостого хода*. Очевидно, что коэффициент  $A$  представляет величину, обратную коэффициенту передачи цепи. Аналогичным образом можно определить физический смысл остальных коэффициентов четырехполюсников. В симметричных четырехполюсниках  $D = A$ .

**Схемы замещения.** Можно показать, что сопротивления цепи рис. 14.2 связаны с коэффициентами четырехполюсника уравнениями

$$\begin{aligned} A &= 1 + Z_{1T}/Z_{2T}; B = Z_{1T} + \frac{Z_{1T}Z_{3T}}{Z_{2T}} + Z_{3T}; \\ C &= 1/Z_{2T}; D = 1 + Z_{3T}/Z_{2T}; \\ Z_{1T} &= (A - 1)/C; Z_{2T} = 1/C; Z_{3T} = (D - 1)/C. \end{aligned}$$

В несимметричных четырехполюсниках выполняется соотношение  $AD - BC = 1$ , а в симметричных  $A^2 - BC = 1$ . Определить параметры четырехполюсников можно с помощью опытов ХХ и КЗ. В симметричных четырехполюсниках  $A = \sqrt{Z_x/(Z_x - Z_k)}$ ;  $B = AZ_k$ ;  $C = A/Z_x$ , где  $Z_x$  — сопротивление между входными зажимами при разомкнутых выходных, а  $Z_k$  — при замкнутых.

**Характеристическое сопротивление четырехполюсника.** *Характеристическим* сопротивлением четырехполюсника  $Z_c$  называется сопротивление, на которое следует нагрузить четырехполюсник, чтобы входное сопротивление этого четырехполюсника равнялось сопротивлению нагрузки, т.е. характеристическому сопротивлению  $Z_c$ . В симметричных четырехполюсниках  $Z_c = \sqrt{B/C} = \sqrt{Z_x Z_k}$ .

**Входное сопротивление четырехполюсника.** В симметричных четырехполюсниках  $Z_{вх} = (AZ_n + B)/(CZ_n + A)$ , где  $Z_n$  — сопротивление, на которое нагружен четырехполюсник. Так как все параметры четырехполюсника и сопротивление нагрузки в общем случае частотно-зависимы, то входное сопротивление четырехполюсников также зависит от частоты и, следовательно, имеет входные АЧХ и ФЧХ. Аналогично можно рассчитать входное сопротивление четырехполюсника со стороны вторичных зажимов.

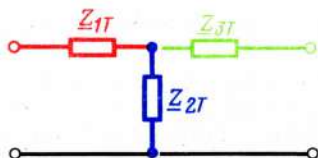


Рис. 14.2

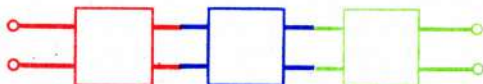


Рис. 14.3

**Характеристическая постоянная передачи четырехполюсников.** Постоянная передачи четырехполюсника  $\underline{\Gamma} = \ln(\dot{U}_1/\dot{U}_2)$ , или  $e^{\underline{\Gamma}} = \dot{U}_1/\dot{U}_2$ , где  $\underline{\Gamma} = A + jB$ . Можно показать, что в симметричных четырехполюсниках  $\underline{A} = \text{Ch}\underline{\Gamma}$ ,  $\underline{B} = \underline{Z}_C \text{Sh}\underline{\Gamma}$ ,  $\underline{C} = (1/\underline{Z}_C) \text{Sh}\underline{\Gamma}$ , при этом уравнения четырехполюсника приобретают вид

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \text{Ch}\underline{\Gamma} + \dot{I}_2 \underline{Z}_C \text{Sh}\underline{\Gamma}; \\ \dot{I}_1 &= \dot{U}_2 (1/\underline{Z}_C) \text{Sh}\underline{\Gamma} + \dot{I}_2 \text{Ch}\underline{\Gamma}.\end{aligned}$$

Если четырехполюсник нагружен на сопротивление, равное характеристическому, то  $e^A = U/U_2$ , или  $A = \ln(U_1/U_2)$ , а  $B = \psi_1$ . Параметр  $A$  называется характеристическим ослаблением четырехполюсника и измеряется в неперах (Нп), – по имени шотландского математика Д. Непера (1550 – 1617), причем  $1 \text{ Нп} = 8,68 \text{ дБ}$ , а  $1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}$ .

Параметр  $B$ , называющийся фазовой постоянной, представляет разность начальных фаз входного и выходного напряжений и измеряется в радианах. Таким образом, зная характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_C$  и постоянную передачи  $\underline{\Gamma}$  четырехполюсника, можно определить входные напряжения  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  по заданным выходным напряжению  $\dot{U}_2$  и току  $\dot{I}_2$ , или напряжению  $\dot{U}_2$  и сопротивлению нагрузки  $\underline{Z}_H$ . Постоянную передачи  $\underline{\Gamma}$  можно определить либо через параметры четырехполюсника, либо по опытам XX и КЗ. В несимметричных четырехполюсниках  $\underline{\Gamma} = \ln(\sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}})$ ,  $\text{th}\underline{\Gamma} = \text{sh}\underline{\Gamma}/\text{ch}\underline{\Gamma} = \sqrt{(\underline{BC})/(\underline{AD})} = \sqrt{\underline{Z}_{1K}/\underline{Z}_{1X}} = \sqrt{\underline{Z}_{2K}/\underline{Z}_{2X}}$ , а в симметричных  $\underline{\Gamma} = \ln(\underline{A} + \sqrt{\underline{BC}}) = \text{arth}\sqrt{\underline{Z}_X/\underline{Z}_K}$ .

**Коэффициент передачи цепи в функции А-параметров.** Коэффициент передачи по напряжению  $\underline{K} = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = \underline{Z}_H/(\underline{AZ}_H + \underline{B})$ ; коэффициент передачи по току  $\underline{K}_I = \dot{I}_2/\dot{I}_1 = 1/(\underline{CZ}_H + \underline{D})$ ; передаточное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{пер}} = \dot{U}_2/\dot{I}_1 = \underline{Z}_H/(\underline{CZ}_H + \underline{D})$ ; передаточная проводимость  $\underline{Y}_{\text{пер}} = \dot{I}_2/\dot{U}_1 = 1/(\underline{AZ}_H + \underline{B})$ .

**Каскадное соединение четырехполюсников.** Каскадным, или цепочным соединением четырехполюсников называется такое соединение, при котором выходные зажимы предыдущего четырехполюсника соединены с входными зажимами последующего (рис. 14.3); при этом

$$\begin{aligned}\underline{\Gamma}_{\text{ц}} &= \Sigma \underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}_1 + \underline{\Gamma}_2 + \underline{\Gamma}_3 + \dots; \\ \underline{A}_{\text{ц}} &= \Sigma \underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 + \dots; \\ \underline{B}_{\text{ц}} &= \Sigma \underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2 + \underline{B}_3 + \dots; \\ \underline{Z}_{\text{цзв}} &= \underline{Z}_{\text{сзв}}.\end{aligned}$$

**Рабочее ослабление и рабочая постоянная передачи.** Характеристические параметры дают возможность сравнительно легко определять напряжения и токи в том случае, когда четырехполюсник нагружен на сопротивление, равное характеристическому. Если  $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_C$ , то расчеты затрудняются, в этом случае следует использовать рабочие параметры четырехполюсника. Рабочим ослаблением  $A_p$  называют величину  $A_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{S0}}{P_{Sн}}$ , где  $P_{S0}$  – максимальная полная мощность, которую генератор может от-



дать в нагрузку, а  $P_{\Sigma H}$  — полная мощность, которую нагрузка, включенная через четырехполюсник, получает от генератора. Напомним, что наибольшая мощность в нагрузке выделяется в том случае, если ее сопротивление равно внутреннему сопротивлению источника. Если внутреннее сопротивление генератора  $R_i$  имеет чисто резистивный характер, то  $P_{\max} = E^2/4R_i$ . Рабочее ослабление в этом случае

$$A_p = (1/2) \ln \left[ (E^2/4R_i) / I_2^2 R_n \right].$$

Так как ослабление на 1 Нп означает уменьшение напряжения или тока в  $e=2,718$  раз, то ослабление по мощности оказывается при этом в  $e^2=7,39$  раз.

В общем случае рабочая постоянная передачи  $\Gamma$  определяется из выражения

$$\Gamma_p = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\dot{U}_0 \dot{I}_0}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(E^2/4Z_i)}{I_2^2 Z_n} \right] = \ln \left( \frac{E}{2\dot{U}_2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{Z_n}{Z_i} \right] = A_p + jB_p,$$

где  $\dot{U}_0$  и  $\dot{I}_0$  — комплексные напряжения и ток на нагрузке, включенной непосредственно к генератору без четырехполюсника, а  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  — с четырехполюсником. При использовании данного выражения следует учитывать, что произведения  $\dot{U}_0 \dot{I}_0$  и  $\dot{U}_2 \dot{I}_2$  — не есть комплексные мощности (поскольку  $P_S = \dot{U} \dot{I}^*$ ), более того, выражение  $\dot{U} \dot{I}$  не имеет какого-либо физического смысла, это просто произведение двух комплексных величин, хотя модуль этого произведения численно равен полной мощности цепи (действительно,  $P_S = |\dot{U} \dot{I}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ ).

Вещественная часть рабочей постоянной передачи представляет рабочее ослабление, а мнимая часть рабочую фазную постоянную, определяемую по формуле  $B_p = \frac{1}{2} (\psi_{U_0} + \psi_{I_0} - \psi_{U_2} - \psi_{I_2})$ . Если внутреннее сопротивление генератора равно сопротивлению нагрузки, то выражение рабочей постоянной приобретает более простой вид:  $\Gamma = \ln(E/2\dot{U}_2) = A_p + jB_p$ , где  $A_p = \ln(E/2\dot{U}_2)$ , или  $A_p(\text{дБ}) = 20 \lg(E/2\dot{U}_2)$ .

## ВОПРОСЫ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие четырехполюсники являются симметричными и какие несимметричными?
2. Запишите уравнения четырехполюсников в  $H$ - и  $A$ -параметрах. Каков физический смысл коэффициентов четырехполюсников?
3. Запишите коэффициенты четырехполюсника в матричной форме.
4. Получите сопротивление Т-образной схемы замещения через  $A$ -параметры и наоборот. Докажите, что в несимметричном четырехполюснике  $\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1$ .
5. Каким образом можно определить коэффициенты четырехполюсника с помощью опыта холостого хода и короткого замыкания?
6. Рассчитайте  $A$ -параметры простейших четырехполюсников.
7. Что называется характеристическим сопротивлением четырехполюсника? Каким образом его можно определить: а) с помощью опытов ХХ и КЗ; б) через коэффициенты четырехполюсника?
8. Что называется характеристической постоянной передачи четырехполюсников? Каким образом ее можно определить: а) с помощью экспериментов ХХ и КЗ; б) через коэффициенты четырехполюсника?
9. Запишите уравнение четырехполюсника в гиперболических функциях.
10. Объясните физический смысл постоянной ослабления  $A$  и фазовой постоянной  $B$ . Приведите примеры.
11. Дайте определение единицы непер. Как неперы переводят в децибелы и обратно?
12. Как изменяются ослабление и фазовые характеристики при каскадном соединении четырехполюсников?



## 15.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Электрическими частотными фильтрами (сокращенно "фильтрами") называются четырехполюсники, ослабление которых в некоторой полосе частот мало, а в другой полосе частот — велико. Диапазон частот, в котором ослабление мало, называется *полосой пропускания*, а диапазон частот, в котором ослабление велико — *полосой задерживания*. Между этими полосами часто вводят полосу перехода. Например, на рис. 15.1,а показан график, из которого видно, что в диапазоне частот  $\omega_1 \dots \omega_2$  затухание мало (полоса пропускания), а в диапазоне частот  $\omega_3 \dots \omega_4$  велико (полоса задерживания). Амплитудно-частотная характеристика такого фильтра показана на рис. 15.1,б. Фильтры называют по полосе пропускания: пропускающие малые частоты и задерживающие большие частоты (см. рис. 15.1) — *фильтрами нижних* (а не низких!) частот (ФНЧ), пропускающие большие и задерживающие малые (рис. 15.2,а) — *фильтрами верхних* (а не высоких!) частот (ФВЧ), пропускающие только полосу частот (рис. 15.2,б) — *полосовыми* (ПФ); задерживающие только полосу частот (рис. 15.2,в) — *режекторными* или *заграждающими* (РФ или ЗФ).

Фильтры могут быть пассивными, состоящими из индуктивностей и емкостей (пассивные LC-фильтры), пассивными, состоящими из сопротивлений и емкостей (пассивные RC-фильтры), активными (ARC-фильтры), кварцевыми, магнитострикционными, с переключающими конденсаторами, цифровыми (с использованием ЭВМ) и некоторыми другими. Фильтры LC имеют широкое распространение, но в настоящее время интенсивно вытесняются ARC-фильтрами. Чрезвычайно перспективными являются фильтры с

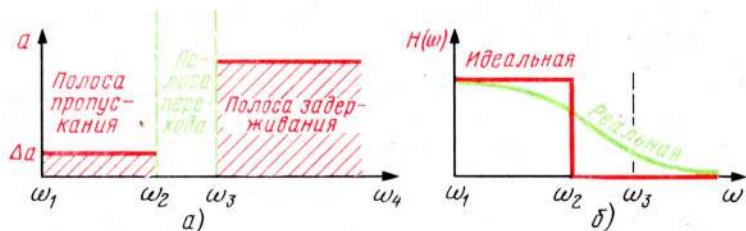


Рис. 15.1

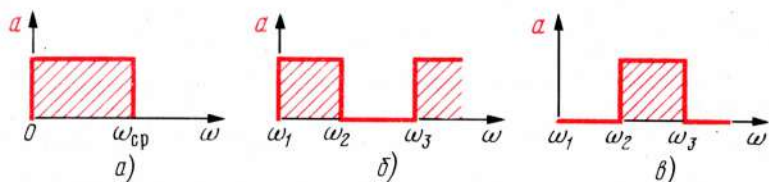


Рис. 15.2

переключающими конденсаторами (АС-фильтры). Кварцевые фильтры обеспечивают очень большие добротности (до десятков тысяч) на высоких частотах, а магнитострикционные — на низких.

## 15.2. ПАССЧИВНЫЕ LC-ФИЛЬТРЫ

Существует два различных метода расчета пассивных LC-фильтров — по характеристическим и по рабочим параметрам. Расчеты фильтров по рабочим параметрам более совершенны, поэтому о расчетах по характеристическим параметрам даны только понятия.

По конфигурации схемы фильтров делятся на лестничные (рис. 15.3) и мостовые (рис. 15.4). Лестничную цепь можно делить на Т, П, Г-образные звенья. Элементы звена должны быть такими, чтобы при соединении звеньев продольные сопротивления лестничной цепи оказывались бы  $Z_1$ , а поперечные —  $Z_2$  (рис. 15.5).

## 15.3. РАСЧЕТ ФИЛЬТРОВ ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ

Четырехполюсник, схема которого изображена на рис. 15.6, а, является фильтром нижних частот, поскольку сопротивление индуктивного элемента на низких частотах мало. С увеличением частоты сопротивление продольной ветви возрастает, поперечной падает, коэффициент передачи уменьшается. Резонансную частоту в таких фильтрах называют *частотой среза*  $\omega_{\text{ср}}$ . Очевидно, что в данной цепи

$$\omega_{\text{ср}} = 1/(\sqrt{\frac{L}{2}} \cdot \frac{C}{2}) = 2/\sqrt{LC}; f_{\text{ср}} = 1/\pi\sqrt{LC}. \quad (15.1)$$

Можно доказать, что если данный четырехполюсник при любой частоте будет нагружен на характеристическое сопротивление, то в диапазоне  $0 \dots$

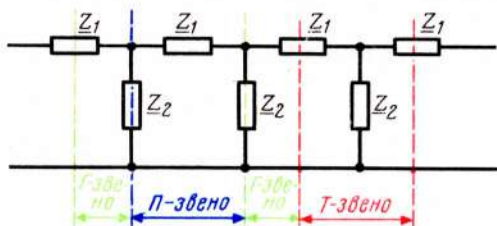


Рис. 15.3

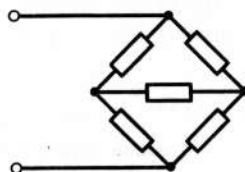


Рис. 15.4

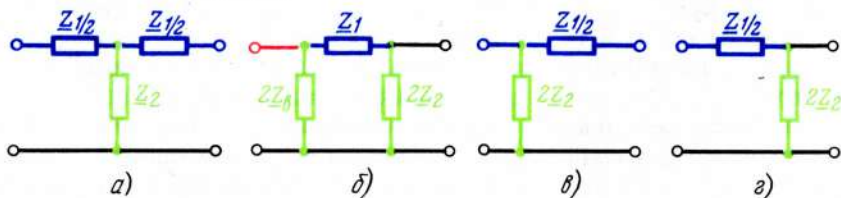


Рис. 15.5

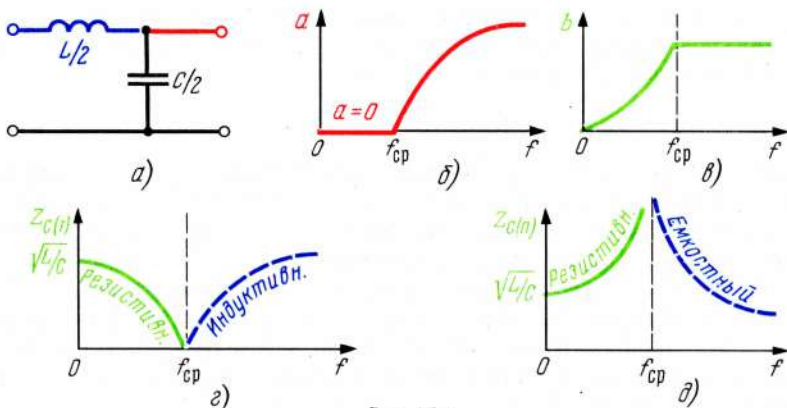


Рис. 15.6

...  $f_{\text{ср}}$  затухание Г-образного звена окажется равным 0, а в диапазоне  $f_{\text{ср}} \dots \infty$  станет возрастать по закону

$$a = 0,5 \text{Arch} [2(f/f_{\text{ср}})^2 - 1], \quad (15.2)$$

(рис. 15.6, б) (для Т- или П-образного звеньев в 2 раза больше).

Фазочастотная характеристика Г-образного ФНЧ определяется из выражений:

в полосе пропускания

$$b = 0,5 \arccos [1 - 2(f/f_{\text{ср}})^2], \quad (15.3)$$

в полосе задерживания  $-90^\circ$  (для Т- и П-образных схем – в 2 раза больше) (рис. 15.6, в).

Рассчитаем характеристическое сопротивление фильтра  $Z_c = \sqrt{Z_x Z_k}$ . Для Т-образной цепи  $Z_x = j\omega L + 1/j\omega C$ ;  $Z_k = j\omega L + j\omega L \cdot 1/j\omega C / (j\omega L + 1/j\omega C)$ .

Подставив значения  $Z_x$ ,  $Z_k$  и произведя необходимые преобразования, получим для Т-образной цепи

$$Z_{c(T)} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - (f/f_{\text{ср}})^2}, \quad (15.4)$$

а для П-образной цепи

$$Z_{c(П)} = \sqrt{L/C} / \sqrt{1 - (f/f_{\text{ср}})^2}. \quad (15.5)$$

Построим кривые  $Z_{c(T)} = f(f)$  (рис. 15.6, г),  $Z_{c(П)} = f(f)$ , рис. 15.6, д. Из выражений (15.4) и (15.5) видно, что: а) характеристическое сопротивление как Т-, так и П-образных фильтров есть величина переменная, зависящая от частоты; б) в полосе пропускания характеристическое сопротивление имеет чисто резистивный, а в полосе задерживания – чисто реактивный характер, поскольку при  $f > f_{\text{ср}}$   $Z_c$  становится величиной мнимой. Очевидно, что выполнить эти условия практически не представляется возможным, поэтому передаточные АЧХ и ФЧХ реальной цепи отличаются от характеристик, полученных по уравнениям (15.4) и (15.5).



Расчеты, произведенные по характеристическим параметрам, имеют и другие недостатки. Например, ослабление в полосе пропускания считают равным 0, хотя в действительности оно на ряде частот отлично от него. При увеличении числа звеньев ослабления складываются, но при этом возрастают и погрешности, обусловленные несогласованностью между сопротивлением нагрузки и характеристическим. В фильтрах, рассчитанных по характеристическим параметрам, все продольные элементы равны между собой, а все поперечные — между собой, за исключением крайних элементов, которые разбиты по половине — в Т-образных звеньях (рис. 15.7,а) или по удвоенному значению — в П-образных (рис. 15.7,б). Цепь рис. 15.7,а представляет фильтр нижних частот, собранный из трех Т-образных звеньев, а цепь рис. 15.7,б — фильтр верхних частот, собранный из трех П-образных звеньев. Поскольку каждый фильтр состоит из одинаковых звеньев, частота среза всего фильтра определяется частотой среза отдельного звена. При обозначениях, показанных на рис. 15.7,б, в ФВЧ частота среза  $\omega_{ср} = 1/2\sqrt{LC}$ ,  $f_{ср} = 1/4\pi\sqrt{LC}$ , ослабление в полосе пропускания равно 0 (точнее, равнялось бы 0, если бы согласование имело место во всем диапазоне частот), ослабление Т- или П-образного звена  $a = \text{Arch} [1 - 2(f_{ср}/f)^2]$ . Характеристическое сопротивление ФВЧ также сильно зависит от частоты и определяется следующим образом:

для Т-образных звеньев  $Z_{с(Т)} = \sqrt{L/C} \sqrt{1 - (f_{ср}/f)^2}$  (рис. 15.7,з)

для П-образных звеньев  $Z_{с(П)} = \sqrt{L/C} / \sqrt{1 - (f_{ср}/f)^2}$  (рис. 15.7,д).

Фазочастотная характеристика

$b = \arccos [1 - 2(f_{ср}/f)^2]$  (рис. 15.7,е).

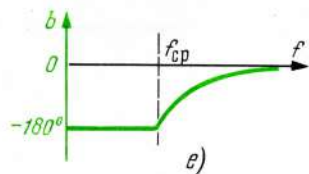
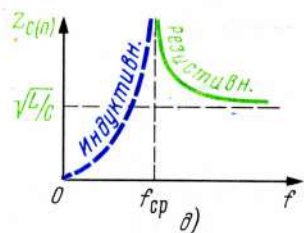
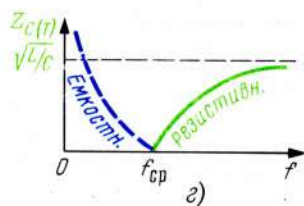
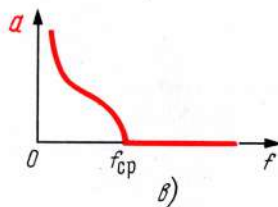
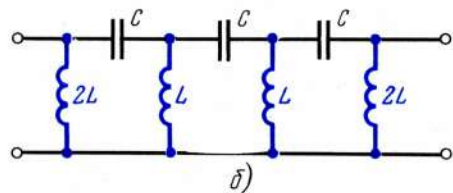
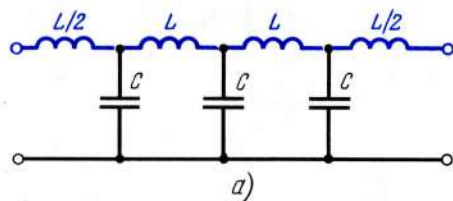


Рис. 15.7

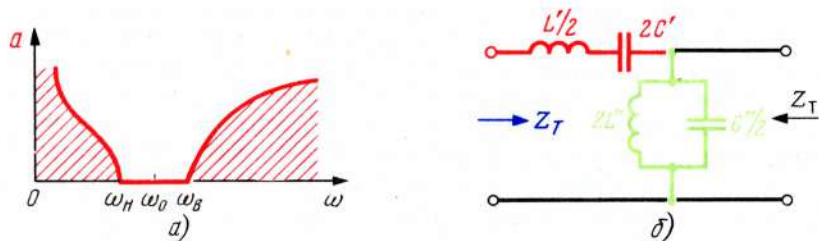


Рис. 15.8

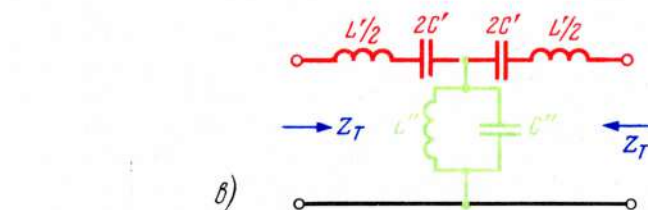


Рис. 15.9

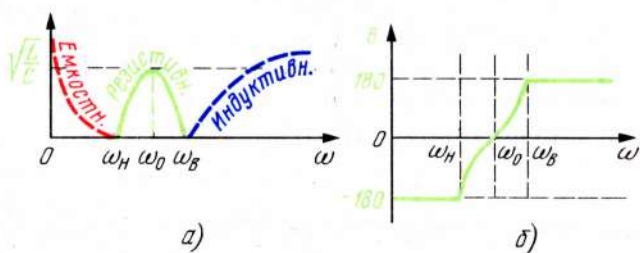


Рис. 15.10

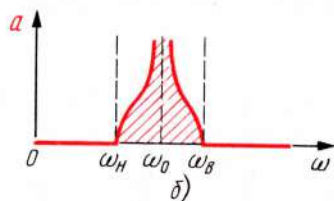
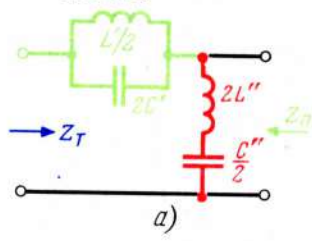


Рис. 15.11

#### 15.4. ПОЛОСОВОЙ ФИЛЬТР

*Полосовым* называется фильтр, у которого ослабление  $a$  в диапазоне частот  $\omega_H \dots \omega_B$  — мало, а при остальных частотах — велико (рис. 15.8, а). Полосовой фильтр представляет ФНЧ и ФВЧ, соединенные вместе. На рис. 15.8, б показано Г-образное звено ПФ, а на рис. 15.8, в — Т-образное. Легко видеть, что элементы  $L'/2$  и  $C''/2$  образуют фильтр нижних частот, а элементы  $2C'$  и  $2L''$  — верхних. Элементы полосового фильтра выбирают так, чтобы выполнялось условие

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L'C'} = 1/\sqrt{L''C''}. \quad (15.6)$$

В этом случае при частотах  $\omega < \omega_0$  продольное плечо имеет емкостный характер (как во всяком последовательном контуре), а поперечное — индуктивный (как во всяком параллельном контуре на частотах меньше резонансной). Таким образом, на частотах меньших резонансной, эквивалентная схема цепи имеет вид 15.9, а и представляет ФВЧ, а при  $\omega > \omega_0$  — вид рис. 15.9, б и представляет ФНЧ, поэтому все частотные характеристики полосового фильтра есть характеристики ФНЧ и ФВЧ, сложенные вместе. Частоты  $\omega_H$  и  $\omega_B$ , являющиеся частотами среза фильтров НЧ и ВЧ, определяются из выражения

$$\omega_{H,B} = \omega_0 (\sqrt{q+1} \pm \sqrt{q}), \quad (15.7)$$

где  $q = L''/L' = C''/C'$ , причем  $\omega_0 = \sqrt{\omega_H \cdot \omega_B}$ . Характеристическое сопротивление Т-звена

$$Z_T = \sqrt{\frac{L'}{C''}} \sqrt{1 - \frac{C''}{4C'} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}, \quad (\text{рис. 15.10, а}) \quad (15.8)$$

ослабление Т-звена

$$a = \text{Arch} \left[ 1 - \frac{C''}{2C'} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right], \quad (\text{рис. 15.8, а}), \quad (15.9)$$

фазовая характеристика

$$b = \arccos \left[ 1 - \frac{C''}{2C'} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right], \quad (\text{рис. 15.10, б}), \quad (15.10)$$

Схема режекторного (заграждающего) фильтра показана на схеме рис. 15.11, а характеристики на рис. 15.11 (б–г).

#### 15.5. ПАССИВНЫЕ LC-ФИЛЬТРЫ ТИПОВ $k$ и $m$

Все фильтры рассмотренные выше, имеют одно общее свойство: произведение сопротивлений продольного плеча на поперечное есть вещественная величина, не зависящая от частоты. Такие фильтры называются фильтрами типа  $k$ . Например, в ФНЧ (рис. 15.6, а)  $j\omega(L/2)(2/j\omega C) = L/C = k^2$ . Параметр  $k = \sqrt{L/C}$ , называется *характеристическим сопротивлением* фильтра. Всем фильтрам типа  $k$  присущи следующие недостатки: значительное изменение характеристического сопротивления в зависимости от частоты, малая крутизна характеристики ослабления, что особенно нежелательно вблизи от частоты среза. Фильтры типа  $k$  имеют и достоинства: простота конструкции, изменение фазовой характеристики в диапазоне частот, удаленном от



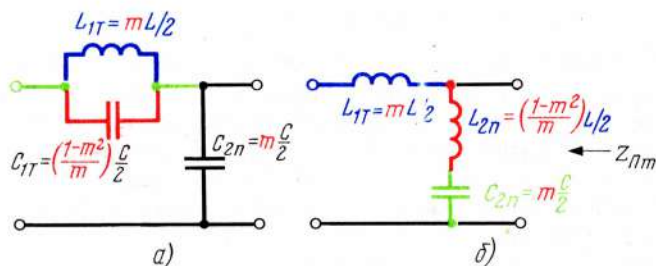


Рис. 15.12

частоты среза, по закону, близкому к линейному, монотонность возрастания АЧХ и как следствие этого сравнительно большое ослабление на частотах, значительно отличающихся от частоты среза. Например, при изменении частоты на октаву, т.е. в 2 раза по сравнению с частотой среза, Т-образное звено обеспечивает ослабление напряжения на 21 дБ, а при частоте, отстоящей на 5 октав — 39 дБ, т.е. почти в 10 раз больше (напомним, что ослабление на 20 дБ соответствует ослаблению в 10 раз, а 40 дБ — 100 раз). Элементы фильтра выбираются таким образом, что существует только одна резонансная частота, вне зависимости от числа звеньев в фильтре.

Чтобы улучшить равномерность характеристического сопротивления в полосе пропускания и увеличить крутизну нарастания амплитудной характеристики фильтра, используют последовательно или параллельно производные звенья, т.е. звенья, в которых частота среза остается такой же, как и в звене  $k$ , а резонансных частот становится не одна, а две. Для этого необходимо к звену  $k$  добавить или одну емкость (рис. 15.12, а) или одну индуктивность (рис. 15.12, б). Получившиеся звенья называют звеньями типа  $m$  (15.12, а, б). Объясним, почему каждый из элементов имеет указанное на схемах значение. Звено  $k$  (см. рис. 15.6, а) называют прототипом данных производных звеньев типа  $m$ . Это означает, что звенья типа  $m$  должны иметь на нулевой частоте такое же характеристическое сопротивление, как и звено типа  $m$ , являющееся исходным для всех остальных звеньев. Частоты среза у них также должны быть одинаковыми. Если приравнять указанные величины в звеньях  $k$  и  $m$  и произвести необходимые преобразования, то получаются значения, показанные на рис. 15.12, а и б. Из обозначений видно, что у элементов, имевшихся в звене  $k$ , ставится множитель  $m$ , а у элементов, добавленных для получения второй резонансной частоты, — множитель  $(1-m^2)/m$ .

Рассмотрим физические процессы, происходящие в получившейся цепи. В схеме рис. 15.12, а параллельный контур  $L_{1T}C_{1T}$  образует резонанс токов на частоте  $\omega_\infty = 2/\sqrt{LC(1-m^2)} = \omega_{cp}/\sqrt{1-m^2}$ . Так как при параллельном резонансе входное сопротивление контура без потерь равно  $\infty$  (см. гл. 8), то коэффициент передачи на частоте  $\omega_\infty$  равен 0, а ослабление  $a$  соответственно  $\infty$ . Поэтому частоту  $\omega_\infty$  называют частотой бесконечного ослабления. Если частота  $\omega_\infty$  совпадает с частотой среза  $\omega_{cp}$ , то  $m=0$ , а если  $\omega_\infty = \infty$ , то  $m=1$ . Таким образом, теоретически параметр  $m$  может принимать значения от 0 до 1. Практически реализовать фильтр с  $m < 0,4$  не удастся по конструктивным соображениям. Весьма широкое распространение получили звенья с  $m = 0,58 \approx 0,6$ . У таких звеньев характеристическое

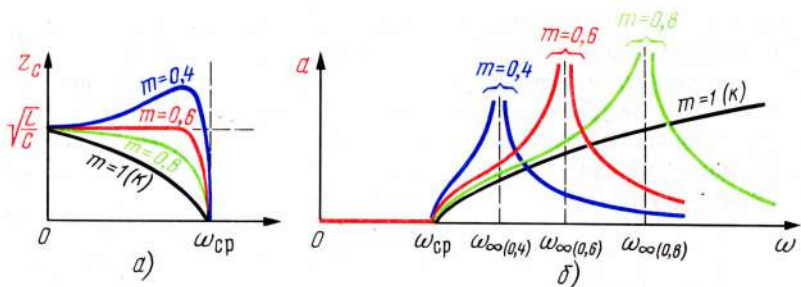


Рис. 15.13

сопротивление в диапазоне  $0 \dots 0,9f_{cp}$  остается практически постоянным и равным  $Z_{Tm}$  (или  $Z_{Pm}$ ) (рис. 15.13, а). При  $m=0,6$   $\omega_{\infty}=1,25\omega_{cp}$ , поэтому кривая ослабления нарастает гораздо круче, чем у фильтров типа  $k$ , т.е. при  $m=1$ . Кривые  $\alpha=f(f)$  для различных значений  $m$  показаны на рис. 15.13, б.

Недостатками фильтров типа  $m$  являются: спад ослабления при частотах больших частоты бесконечного затухания, более сложная конструкция, необходимость объединять несколько звеньев с различными значениями  $m$ . (Достаточно распространены фильтры, состоящие из звеньев  $m=0,6$ ,  $m=0,8$  и  $k$  (т.е.  $m=1$ )). В таких фильтрах уменьшение ослабления одного звена компенсируется большим ослаблением других звеньев. Фильтры типа  $m$  могут состоять из Т-, П-, Г-образных звеньев, образующих фильтры различных видов (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, ЗГ).

#### 15.6. ПОНЯТИЕ О СИНТЕЗИРОВАНИИ ФИЛЬТРУЮЩИХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Следует различать два различных способа исследования цепей — анализ и синтез. Анализ дает возможность определить различные характеристики заданной цепи, например, входные, коэффициент передачи и ряд других. Синтез ставит своей задачей найти схему и параметры всех ее элементов, которые необходимо иметь для получения некоторой, наперед заданной характеристики, например, рассчитать элементы контура по заданной резонансной частоте и полосе пропускания контура. Прежде чем приступить к синтезированию фильтров, введем новые понятия.

*Порядком фильтра* называют число, равное количеству реактивных элементов в фильтрах нижних или верхних частот. Например, фильтр рис. 15.6, а — второго, рис. 15.7, а и б — седьмого, рис. 15.11, а — четвертого, рис. 15.12, а и б — третьего порядка и т.д. Напомним, что процессы, происходящие в цепи  $n$ -го порядка, описываются дифференциальными, комплексными или операторными уравнениями этого же порядка. Например, для расчета цепи рис. 15.6, а необходимо решать уравнение второй степени, а для расчета цепи 15.7, а — уравнение седьмой степени и т.д. Совершенно очевидно, что решать уравнения высших степеней можно только с помощью ЭВМ.



*Нормированными* (или приведенными) называются безразмерные величины, показывающие отношение данной величины к некоторой, ей однородной, имеющей характерное значение. В фильтрах нормированной частотой называется отношение данной частоты  $\omega$  (или  $f$ ) к частоте среза  $\omega_{\text{ср}}$  (или  $f_{\text{ср}}$ ). Нормированные величины обозначают знаком  $\hat{\phantom{x}}$ . Например, нормированная частота  $\hat{\omega} = \omega/\omega_{\text{ср}}$  или  $\hat{f} = f/f_{\text{ср}}$ , нормированное сопротивление  $\hat{Z} = Z/Z_c$  и т. д.

#### 15.7. ФИЛЬТРЫ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ БАТТЕРВОРТА, ЧЕБЫШЕВА, ЗОЛОТАРЕВА

При синтезировании фильтров широкое распространение получили фильтры с характеристиками, названными именами крупных ученых, чьи труды использовались при разработке данных фильтров — Баттерворта, Чебышева, Золотарева (С. Баттерворт — инженер-электрик, исследовавший фильтры в 30-х годах нашего века, П. Л. Чебышев (1821 — 1894) и Е. И. Золотарев (1847 — 1878) — крупные математики, академики Петербургской академии наук.

Фильтрами с характеристиками Баттерворта (сокращенно — фильтрами Баттерворта) называют фильтры, у которых в ФНЧ при нулевой частоте ослабление равно 0, в полосе пропускания оно монотонно увеличивается, на граничной частоте достигает 3 дБ, а затем в полосе непропускания монотонно возрастает. Чем больше звеньев имеет фильтр, т. е. чем выше его порядок, тем круче идет характеристика в полосе задерживания и тем меньше ослабление в полосе пропускания (рис. 15.14). При этом следует иметь в виду, что элементы фильтра считают чисто реактивными. При наличии потерь характеристики искажаются и отличаются от рассматриваемых, о чем будет сказано ниже.

Фильтрами Чебышева называют фильтры, у которых характеристика ослабления в полосе пропускания имеет колебательный характер с амплитудой, не превышающей 3 дБ, а в полосе задерживания — монотонно возрастающей с крутизной, большей, чем у фильтра Баттерворта такого же порядка. Чем больше амплитуда ослабления в полосе пропускания, тем круче идет характеристика в полосе задерживания и наоборот, чем меньше амплитуда колебания в полосе пропускания, тем меньше крутизна характеристики в полосе задерживания. Если выбрать параметры, при которых колебания в полосе пропускания прекращаются, то фильтр Чебышева превращается в фильтр Баттерворта. Число экстремальных (т. е. максимальных и минимальных значений вместе) точек в полосе пропускания у фильтров Чебышева равно порядку фильтра, т. е. числу реактивных элементов в нем (рис. 15.15).

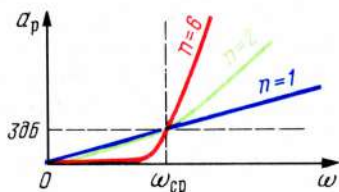


Рис. 15.14



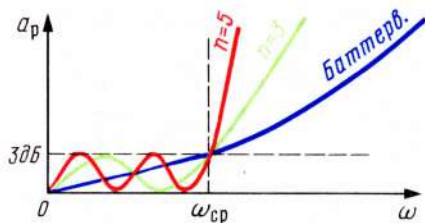


Рис. 15.15

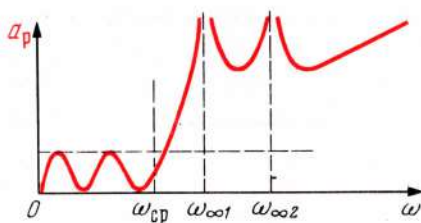


Рис. 15.16

Характеристика фильтра Золотарева имеет в полосе пропускания колебательный характер, а в полосе задерживания — немонотонный, с характерными всплесками (рис. 15.16).

### 15.8. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ФИЛЬТРОВ

Расчеты фильтров различного назначения производят на основе расчетов ФНЧ, поэтому вначале разберем методику их расчетов, а затем распространим ее на остальные фильтры.

Исходными данными для расчета являются: назначение фильтра (НЧ, ВЧ и т. д.), диапазон частот в полосе пропускания, ограничения на ослабление в полосе пропускания, диапазон частот в полосе задерживания, минимально допустимое ослабление на определенных частотах в полосе задерживания, сопротивление генератора и нагрузки. Допустим, что в полосе пропускания колебательный характер ослабления нежелателен. Это означает, что использовать в данном случае можно только фильтр Баттерворта. Разберем последовательность расчета такого фильтра с использованием числовых данных. Например, необходимо рассчитать ФНЧ, причем на частоте  $f_{cp}$  ослабление должно составлять 3 дБ, а на частоте  $f = 16$  кГц — не менее 20 дБ. (Заметим: если известно, что характеристика данного фильтра должна быть монотонной в области как ослабления, так и пропускания, то указание, что затухание на граничной частоте должно составлять 3 дБ, может отсутствовать — это разумеется само собой.) Для выполнения расчетов фильтров необходимо иметь специальный каталог схем, в котором приведены таблицы, позволяющие определять значения  $L$  и  $C$  для различных вариантов фильтров. В данных каталогах все расчеты произведены для нормированных значений сопротивлений, частот, индуктивностей и емкостей. В процессе расчета фильтра производится необходимый пересчет в соответствии с  $\omega$  и  $R$ , заданных по условию, о чем будет сказано ниже, в процессе разбора методики расчетов фильтров.

### 15.9. РАСЧЕТ ФНЧ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ БАТТЕРВОРТА

Чтобы рассчитать ФНЧ с характеристикой Баттерворта необходимо проделать следующее:

1. Определить порядок фильтра, который при характеристике Баттерворта обеспечивает на частоте  $f$  ослабление  $a_f$  (дБ) по формуле

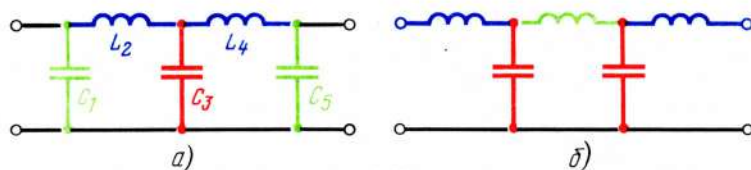


Рис. 15.17

$$n \geq a_f / 20 \lg \hat{f}, \quad (15.11)$$

где  $n$  — порядок фильтра;  $\hat{f}$  — нормированная частота, равная  $f/f_{\text{ср}}$ . Пусть частота среза  $f_{\text{ср}} = 10$  кГц, а ослабление на частоте 16 кГц должно быть не менее 20 дБ. В этом случае  $n \geq a_f / (20 \lg \hat{f}) = 20 / [20 \lg (16/10)] = 1/\lg 1,6 = 1/0,204 = 4,9$ . Выбираем ближайшее большее целое значение. Очевидно, что  $n = 5$ .

2. Составить схему фильтра. Поскольку индуктивности и емкости должны чередоваться (если бы стояли подряд, например, две индуктивности, то их можно было бы заменить одной эквивалентной, что привело бы к понижению порядка фильтра), то возможны два варианта схем фильтра (рис. 15.17, а и б). Поскольку в цепи рис. 15.17, а только две индуктивности, а в цепи рис. 15.17, б — три, то при практической реализации, схема рис. 15.17, а более предпочтительна. Выбираем эту схему и нумеруем ее элементы ( $C_1, L_2, C_3, L_4, C_5$ ).

3. Если бы сопротивления генератора  $R_i$  и нагрузки  $R_n$  равнялись 1 Ом, а граничная частота  $\omega_{\text{гр}} = 1$  рад/с, то значения элементов были бы такими, которые приводятся в таблице нормированных коэффициентов фильтров Баттерворта (табл. 15.1).

Подобные таблицы имеются в специальных справочниках-каталогах по расчету фильтров. (По существу данные, приведенные в таблицах, представляют полный расчет всех элементов фильтра, выполненный по весьма сложным формулам с помощью электронно-вычислительных машин для нормированных параметров цепи). Заметим, что в каждой строке

Т а б л и ц а 15.1

Порядок фильтра	Порядковые номера плеч фильтра $m$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,000									
2	1,414	1,414								
3	1,000	2,000	1,000							
4	0,765	1,848	1,848	0,765						
5	0,618	1,618	2,000	1,618	0,618					
6	0,518	1,414	1,932	1,932	1,414	0,518				
7	0,445	1,247	1,802	2,000	1,802	1,247	0,445			
8	0,390	1,111	1,663	1,962	1,962	1,663	1,111	0,390		
9	0,347	1,000	1,532	1,879	2,000	1,879	1,532	1,000	0,347	
10	0,313	0,907	1,414	1,782	1,975	1,975	1,782	1,414	0,907	0,313

коэффициенты симметричны, по мере приближения к середине они возрастают, а затем убывают. Анализ показывает, что в таблицах Баттерворта оказывается синусоидальный закон распределения коэффициентов, т.е. каждый коэффициент можно рассчитать по формуле

$$K_{nm} = 2 \cdot \sin \frac{90}{n} (2m-1). \quad (15.12)$$

**Пример 15.1.** Рассчитать коэффициент седьмого элемента ( $m=7$ ) фильтра девятого порядка ( $n=9$ ).

**Решение.**  $K_{9,7} = 2 \cdot \sin \frac{90}{9} (2 \cdot 7 - 1) = 2 \cdot \sin 10^\circ \times 13 = 2 \cdot \sin 130^\circ = 2 \cdot 0,766 = 1,532$ , что совпадает с табличными данными.

Вернемся к расчету заданного фильтра. Так как данный фильтр имеет пятый порядок, то выпишем из табл. 15.1 коэффициенты пятой строки.

1	2	3	4	5
0,618 $K_{C1}$	1,618 $K_{L2}$	2,000 $K_{C3}$	1,618 $K_{L4}$	0,618 $K_{C5}$

4. Рассчитать постоянные преобразования  $L^*$  и  $C^*$ . Эти постоянные показывают, во сколько раз значения индуктивностей и емкостей в синтезируемой цепи отличаются от коэффициентов нормированных индуктивностей  $\hat{L}$  и емкостей  $\hat{C}$ , имеющих в таблицах. Расчет величин  $L^*$  и  $C^*$  основан на свойствах линейности цепей: свойства цепи не изменяются, если в одно и то же число раз изменить сопротивления всех элементов цепи. Очевидно, что если внутреннее сопротивление генератора  $R_i$  и сопротивление нагрузки  $R_n$  увеличить в  $K$  раз, то необходимо в такое же число раз увеличить сопротивления индуктивностей и емкостей фильтра. Но для этого необходимо индуктивности  $L$  увеличить в  $R_i = R_n = R$  раз и уменьшить в  $\omega_{cp}$  раз. Аналогично значения емкостей следует уменьшить в  $\omega_{cp} R$  раз. Таким образом,  $L^* = R / \omega_{cp} = R / 2\pi f_{cp}$ ,  $C^* = 1 / \omega_{cp} R = 1 / 2\pi f_{cp} R$ . Если, например,  $R_i = R_n = 10^3$  Ом, то  $L^* = 10^3 / 6,28 \cdot 10^4 = 15,9$  мГн;  $C^* = 1 / 6,28 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = 15,9$  нФ.

5. Рассчитать значения индуктивностей и емкостей, входящих в фильтр:

$$C_1 = C_5 = K_{C1} C^* = K_{C5} C^* = 0,618 \cdot 15,9 = 9,83 \text{ нФ};$$

$$C_3 = K_{C3} C^* = 2,0 \cdot 15,9 = 31,8 \text{ нФ};$$

$$L_2 = L_4 = K_{L2} L^* = K_{L4} L^* = 1,618 \cdot 15,9 = 25,7 \text{ мГн}.$$

Все элементы схемы рис. 15.17,а определены. Рассчитаем характеристику рабочих затуханий  $a_p$  для получившегося фильтра по формуле  $a_p = 10 \lg(1 + \hat{f}_{HЧ}^{2n})$ . При  $f=0$ ,  $\hat{f}=0$ ,  $a_p=0$ . При  $f=5$  кГц,  $\hat{f}=0,5$ ,  $a_p = 10 \lg(1 + 0,5^{10}) = 10 \lg(1 + 0,001) = 0,0042$  дБ. При  $f=8$  кГц  $\hat{f}=0,8$ ,  $a_p = 10 \lg(1 + 0,8^{10}) = 10 \lg 1,107 = 0,44$  дБ. При  $f=9$  кГц,  $a_p = 1,3$  дБ; при  $f=10$  кГц  $a_p = 3$  дБ; при  $f=12$  кГц  $a_p = 8,57$  дБ; при  $f=14$  кГц  $a_p = 14,8$  дБ; при  $f=16$  кГц  $a_p = 20,5$  дБ; при  $f=18$  кГц  $a_p = 22,5$  дБ; при  $f=20$  кГц  $a_p = 30,1$  дБ; при  $f=25$  кГц  $a_p = 39,8$  дБ; при  $f=30$  кГц  $a_p = 47,7$  дБ и т.д.



## 15.10. РАСЧЕТ ФВЧ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ БАТТЕРВОРТА

Фильтры верхних частот должны пропускать токи с частотами  $\omega_{\text{ср}} \dots \infty$  и не пропускать токи с частотами меньшими, чем  $\omega_{\text{ср}}$ . Очевидно, что в ФВЧ емкости должны находиться в продольных, а индуктивности — в поперечных плечах (рис. 15.18). Расчет ФВЧ весьма схож с расчетом ФНЧ. Отличия состоят в следующем: нормированной частотой в ФВЧ  $\hat{f}_{\text{ВЧ}}$  называют отношение  $f_{\text{ср}}/f$ , где  $f$  — любая частота (а не  $f/f_{\text{ср}}$ , как в ФНЧ); в схеме фильтра  $L$  и  $C$  меняют местами; индуктивности рассчитывают из выражений  $L = L^*/K_L$ ,  $C = C^*/K_C$  (а не  $L = L^*K_L$  и  $C = C^*K_C$ , как в ФНЧ).

**Пример 15.2.** Рассчитать элементы фильтра верхних частот с частотой среза  $f_{\text{ср}} = 16$  кГц, если на частоте  $f = 10$  кГц ослабление  $a_f$  должно быть не менее 20 дБ. Сопротивления генератора и нагрузки — по 1000 Ом.

**Решение.** 1) Нормированная частота при  $f = 10$  кГц в ФВЧ  $\hat{f}_{\text{ВЧ}} = f_{\text{ср}}/f = 16/10 = 1,6$ .

2) Порядок фильтра Баттерворта, при котором выполняется поставленное условие:

$$n \geq a_f / 20 \lg \hat{f}_{\text{ВЧ}} = 20 / 20 \lg 1,6 = 4,9,$$

т. е. получилось то же значение, которое было в ФНЧ. Выбираем  $n = 5$ .

3) Покажем схему ФВЧ с  $n = 5$  при минимальном числе индуктивностей, нанесем на ней обозначения. Из табл. 15.1 выпишем коэффициенты для  $n = 5$ :

1	2	3	4	5
0,618	1,618	2,000	1,618	0,618
$K_{C1}$	$K_{L2}$	$K_{C3}$	$K_{L4}$	$K_{C5}$

4) Постоянные преобразования

$$L^* = R / 2\pi f_{\text{ср}} = 1000 / 6,28 \cdot 16 \cdot 10^3 = 10 \text{ мГн};$$

$$C^* = 1 / 2\pi f_{\text{ср}} R = 1 / 6,28 \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 10 \text{ нФ}.$$

5. Индуктивности и емкости фильтра:  $C_1 = C_5 = C^* / K_{C1} = C^* / K_{C5} = 10 / 0,618 = 16,2$  нФ. Рассчитаем АЧХ ослабления фильтра. Подставляя различные частоты, получим

$f$ (кГц)	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	1
$\hat{f}_{\text{ВЧ}}$	0,80	0,88	1	1,14	1,33	1,6	2,0	2,66	4	8	16
$a_p$	0,44	1,17	3	6,18	12,8	20,5	30,1	42,6	60,2	90,3	120

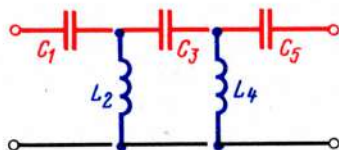


Рис. 15.18

### 15.11. РАСЧЕТ ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ БАТТЕРВОРТА

Полосовой фильтр должен сочетать в себе свойства ФНЧ и ФВЧ. В продольном плече должны быть включены последовательно индуктивность и емкость. В этом случае емкость уменьшает коэффициент передачи на низких частотах, а индуктивность — на высоких. Аналогичные функции выполняют в поперечном плече индуктивность и емкость, включенные параллельно. Индуктивность шунтирует цепь на низких частотах, а емкость — на высоких. Примеры схем полосовых фильтров четвертого порядка показаны на рис. 15.19. Элементы  $C_1, L_2, C_3, L_4$  (рис. 15.19, а) и  $L_1, C_2, L_3, C_4$  (рис. 15.19, б) являются элементами ФНЧ, а элементы  $L_1, C_2, L_3, C_4$  (рис. 15.19, а) и  $C_1, L_2, C_3, L_4$  (рис. 15.19, б) — элементами ФВЧ. В цепи рис. 15.19, а элементы должны быть такими, при которых  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2} = 1/\sqrt{L_3 C_3} = 1/\sqrt{L_4 C_4}$ . Аналогично в схеме рис. 15.19, б  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2} = 1/\sqrt{L_3 C_3} = 1/\sqrt{L_4 C_4}$ .

Полосовой фильтр представляет собой два фильтра — ВЧ и НЧ, поэтому характеристика ослабления является суммарной для ФНЧ и ФВЧ (рис. 15.20). На основании симметрии характеристики

$$(f_{\text{ср.в}} - f_0) = (f_0 - f_{\text{ср.н}}), \text{ а } f_{\text{ср.н}} \cdot f_{\text{ср.в}} = f_0^2. \quad (15.13)$$

Резонансную частоту  $\omega_0$  называют также центральной частотой полосового фильтра. Так как на ней сопротивление идеального последовательного контура равно 0, а идеального параллельного —  $\infty$ , то рабочее ослабление в ПФ на резонансной частоте  $\omega_0$  равно 0.

Рабочее затухание полосового фильтра в согласованном режиме  $a_p = 20 \lg |E/2U|$ , после подстановки и преобразования соответствующих величин

$$a_p = 10 \lg \left\{ 1 + \left[ \frac{f_0}{f_{\text{ср.в}} - f_{\text{ср.н}}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^{2n} \right\}. \quad (15.14)$$

Определим приведенные значения частоты ПФ, при которых рабочее ослабление составляет 3 дБ. Из выражения (10.65) видно, что  $a_p = 3$  дБ при  $(\omega_{\text{ср}}/\omega_0 - \omega_0/\omega_{\text{ср}}) = \hat{\omega}_{\text{ср}} - 1/\hat{\omega}_{\text{ср}} = 1$ , или  $\hat{\omega}_{\text{ср}}^2 \mp \hat{\omega}_{\text{ср}} - 1 = 0$ , откуда  $\omega_{\text{ср}} = \frac{\pm 1 \sqrt{1+4}}{2}$ , т.е.  $\hat{\omega}_{\text{ср.н}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618$ , а  $\hat{\omega}_{\text{ср.в}} = 1,618$ . Таким образом, полоса пропускания находится в диапазоне от  $\omega_{\text{н}} = 0,618\omega_0$  до  $\omega_{\text{в}} = 1,618\omega_0$ , где  $\omega_{\text{н}}$  и  $\omega_{\text{в}}$  — нижняя и верхняя частоты полосы пропускания

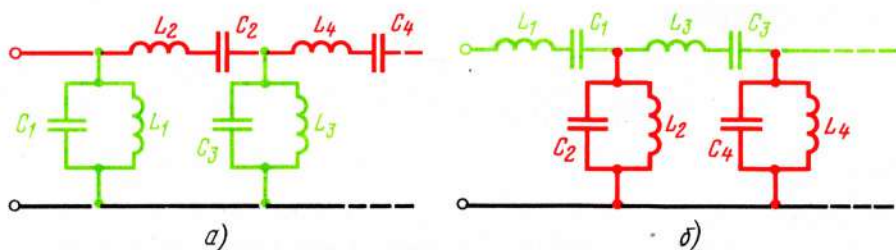


Рис. 15.19

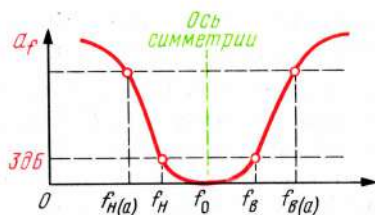


Рис. 15.20

фильтра. Проверим выполнение условия (15.13) для частот  $\omega_H$  и  $\omega_B$ . Очевидно, что произведение  $\omega_H \omega_B$  должно равняться  $\omega_0^2 \cdot 0,618 \omega_0 \cdot 1,618 \omega_0 = \omega_0^2$  или  $\omega_0 = \sqrt{\omega_H \cdot \omega_B}$ . Центральная частота  $\omega_0$  действительно является среднегеометрической частот срезов. Нормирование частот в полосовом фильтре производится по формуле

$\hat{f}(f/f_0 - f_0/f) f_0 / (f_{ср.в} - f_{ср.н})$  или  $\hat{\omega} = \omega_0 / (\omega_{ср.в} - \omega_{ср.н}) (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$ , где  $f_{ср}(\omega_{ср})$  — частота среза.

Постоянные преобразования ориентируют по отношению к резонансной частоте  $f_0$ , поэтому ПФ

$$L^* = R / 2\pi f_0; C^* = 1 / 2\pi f_0 R.$$

При расчете полосовых фильтров используют коэффициенты табл. 15.1, однако все значения таблицы следует умножить на коэффициент ширины полосы пропускания

$$K_{пп} = f_0 / \Delta f_{ср} = f_0 / (f_{ср.в} - f_{ср.н}). \quad (15.15)$$

**Пример 15.3.** Рассчитать элементы полосового фильтра Баттерворта по следующим исходным данным: полоса пропускания 8...12,5 кГц. На частоте  $f=15$  кГц ослабление фильтра должно быть не менее  $a=20$  дБ.

**Решение.**

1. Резонансная (центральная) частота фильтра

$$f_0 = \sqrt{f_{ср.н} \cdot f_{ср.в}} = \sqrt{8 \cdot 12,5} = 10 \text{ кГц.}$$

2. Коэффициент ширины полосы пропускания

$$K_{пп} = f_0 / \Delta f_{ср} = 10 / (12,5 - 8) = 2,22.$$

3. Порядок фильтра

$$n \geq \frac{a}{20 \lg \hat{f}_{пФ}} = \frac{a}{20 \lg \left[ \frac{f_0}{(f_{ср.в} - f_{ср.н})} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]} = \frac{20}{20 \lg \left[ \frac{10}{(12,5 - 8)} \cdot \left( \frac{15}{10} - \frac{10}{15} \right) \right]} = \frac{1}{\lg 1,85} = 3,74.$$

Выбираем  $n=4$ .

4. Полосовые фильтры с  $n=4$  могут быть реализованы с помощью схем рис. 15.19, а или 15.19, б.



## 5. Постоянные преобразования

$$L^* = R/2\pi f_0 = 1000/6,28 \cdot 10 \cdot 10^3 = 15,9 \text{ мГн};$$

$$C^* = 1/2\pi f_0 R = 1/6,28 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = 15,9 \text{ нФ}.$$

6. Выпишем коэффициенты четвертой строки табл. 15.1:

1	2	3	4
0,765	1,848	1,848	0,765

7. Определим значения индуктивностей и емкостей. При этом следует иметь в виду, что для расчета элементов ФНЧ (т.е.  $C_1, L_2, C_3, L_4$  на рис. 15.19, а и  $L_1, C_2, L_3, C_4$  – на рис. 15.19, б значения, выписанные из табл. 15.1, следует умножить на множитель  $(f_0/\Delta f_{\text{ср}}) L^* = (f_0/f_{\text{ср.в}} - f_{\text{ср.н}}) L^*$  и, соответственно,  $(f_0/\Delta f_{\text{ср}}) C^*$ , а элементы ФВЧ (т.е.  $L_1, C_1, L_3, C_4$  на рис. 15.19, а и  $C_1, L_2, C_3, L_4$  на рис. 15.19, б) – умножить на обратную им величину. Произведем числовые расчеты значений индуктивностей и емкостей фильтров.

Для схемы рис. 15.19, а

$$C_1 = 15,9 (2,22 \cdot 0,765) = 27 \text{ нФ};$$

$$C_3 = 15,9 (2,22 \cdot 1,848) = 65,2 \text{ нФ};$$

$$L_1 = 15,9 / (2,22 \cdot 0,765) = 9,36 \text{ мГн};$$

$$L_3 = 15,9 / (2,22 \cdot 1,848) = 3,88 \text{ мГн};$$

$$L_2 = 15,9 (2,22 \cdot 1,848) = 65,2 \text{ мГн};$$

$$L_4 = 15,9 (2,22 \cdot 0,765) = 27 \text{ мГн};$$

$$C_2 = 15,9 / (2,22 \cdot 1,848) = 3,88 \text{ нФ};$$

$$C_4 = 15,9 / (2,22 \cdot 0,765) = 9,36 \text{ нФ}.$$

Аналогичным образом можно рассчитать  $L$  и  $C$  для схемы рис. 15.19, б.

8. Рассчитаем частотную характеристику полученного фильтра по формулам  $a_f = -10 \lg (1 + f^{2n})$ , где

$$\hat{f} = \frac{f_0}{f_{\text{ср.в}} - f_{\text{ср.н}}} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right), \text{ откуда } a_f = 10 \lg \{ 1 + [2,22 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)]^{2n} \}$$

При  $f = 10 \text{ кГц}$   $a = 0$ ; при  $f = 12 \text{ кГц}$   $a_f = 10 \lg \{ 1 + 2,22 (1,2 - 0,83)^2 \cdot 4 \} = 10 \lg (1 + 0,2) = 0,8 \text{ дБ}$  и т.д.

Рассчитаем частоты, симметричные частотам  $f$ . Из выражения  $f_{\text{в}} \cdot f_{\text{н}} = f_0^2$  получаем  $f_{\text{н}} = f_0^2 / f_{\text{в}}$ . Очевидно, что при  $f_{\text{в}} = 12 \text{ кГц}$  симметричная  $f_{\text{н}} = 10^2 / 12 = 8,33 \text{ кГц}$  при  $f_{\text{в}} = 14 \text{ кГц}$  –  $f_{\text{н}} = 100 / 14 = 7,14 \text{ кГц}$  и т.д. Частотой, отличающейся от начальной частоты  $f_{\text{нач}}$  на  $n$  октав, называется частота

$$f = f_{\text{нач}} \cdot 2^n, \quad (15.16)$$

или

$$2^n = f / f_{\text{нач}}, \text{ т.е. } 0,3n = \lg (f / f_0),$$

откуда

$$n = 3,33 (\lg f / f_0). \quad (15.17)$$

Из выражения (15.17) следует, что изменение частоты на октаву соответствует увеличению ее в 2 раза, на две октавы – в 4 раза, на три октавы – в 8 раз и т.д.

Результаты расчетов данного ПФ следующие:

Частоты, кГц	10	12 и 8,33	14 и 7,14	16 и 6,25	18 и 5,88	20 и 5,0	25 и 4,0	30 и 3,33	35 и 2,58	40 и 2,50
Удаление от резонансной частоты, ок- тавы	0	0,26	0,49	0,68	0,86	1,0	1,325	1,59	1,81	2,0
Ослабле- ние, дБ	0	0,8	14,7	26,8	35,3	41,2	53,5	61,8	68,2	73,6

### 15.12. ФИЛЬТРЫ ЧЕБЫШЕВА

Фильтры с характеристикой Чебышева отличаются от фильтров Баттерворта тем, что в полосе прозрачности характеристика ослабления изменяется не монотонно, а по колебательному закону, в полосе ослабления крутизна характеристики оказывается большей, чем у фильтров Баттерворта. С увеличением амплитуды колебаний в полосе пропускания увеличивает крутизна характеристики в полосе задерживания. Расчет рабочего ослабления в фильтрах Чебышева производится по следующим формулам:

в полосе пропускания

$$a_p = 10 \lg [1 + \epsilon^2 \cos^2 (n \cdot \arccos \hat{f})], \quad (15.18)$$

в полосе задерживания

$$a_p = 10 \lg [1 + \epsilon^2 \operatorname{ch}^2 (n \cdot \operatorname{arch} \hat{f})], \quad (15.19)$$

где  $\epsilon$  — параметр, называемый *коэффициентом сжатия* и характеризующий амплитуду колебаний в полосе пропускания.

Так как  $\Delta a = 10 \lg (1 + \epsilon^2)$ , где  $\Delta a$  — максимально допустимое значение ослабления в полосе пропускания, выраженное в децибелах, то  $\epsilon^2 = 10^{0,1 \Delta a} - 1$ . Например, при  $\Delta a = 2$  дБ  $\epsilon^2 = 10^{0,1 \cdot 2} - 1 = 1,5849 - 1 = 0,5849$ .

Приведем значения  $\epsilon^2$  для распространенных ослаблений (табл. 15.2).

На практике выбирают максимально допустимое ослабление в полосе пропускания (но не более 3 дБ!), при этом крутизна ослабления в полосе задерживания увеличивается. Порядок фильтра Чебышева

$$n \geq \frac{\operatorname{Arch} \sqrt{(10^{0,1 a_z} - 1) / (10^{0,1 \Delta a} - 1)}}{\operatorname{Arch} \hat{f}} \quad (15.20)$$

Т а б л и ц а 15.2

$\Delta a$ , дБ	3	2	1	0,5	0,25	0,1
$\epsilon^2$	0,9953	0,5849	0,2589	0,1220	0,05925	0,02329

Приведенная частота:

$$\text{в ФНЧ } \hat{f} = f/f_{\text{ср}}; \text{ в ФВЧ } \hat{f} = f_{\text{ср}}/f; \text{ в ПФ } \hat{f} = \frac{f_0}{f_{\text{ср.в}} - f_{\text{ср.н}}} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right). \quad (15.21)$$

Можно показать, что симметричные схемы с характеристикой Чебышева имеют нечетный порядок, а несимметричные схемы — четный.

Весь остальной расчет происходит аналогично тому, как это делалось для фильтров Баттерворта. Таблицы нормированных коэффициентов для фильтров Чебышева более объемны, чем для фильтров Баттерворта, поскольку данные коэффициенты зависят от допустимых неравномерностей в полосе пропускания (табл. 15.3).

Т а б л и ц а 15.3

$\Delta a$ , дБ	Порядок фильтра	Порядковые номера плеч фильтра ( $m$ )								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	1	0,305								
	3	1,032	1,147	1,032						
	5	1,147	1,371	1,975	1,371	1,147				
	7	1,181	1,423	2,097	1,573	2,097	1,423	1,181		
	9	1,196	1,443	2,135	1,617	2,205	1,617	2,135	1,443	1,196
0,25	1	0,487								
	3	1,303	1,146	1,303						
	5	1,382	1,326	2,209	1,326	1,382				
	7	1,447	1,356	2,348	1,469	2,348	1,356	1,447		
	9	1,460	1,370	2,380	1,500	2,441	1,500	2,380	1,370	1,460
0,5	1	0,699								
	3	1,596	1,097	1,596						
	5	1,706	1,230	2,541	1,230	1,706				
	7	1,737	1,258	2,638	1,344	2,638	1,258	1,737		
	9	1,750	1,269	2,668	1,367	2,724	1,367	2,668	1,269	1,750
1,0	1	1,018								
	3	2,024	0,994	2,024						
	5	2,135	1,091	3,001	1,091	2,135				
	7	2,167	1,112	3,094	1,174	3,094	1,112	2,167		
	9	2,180	1,919	3,121	1,190	3,175	1,190	3,121	1,919	2,180
2,0	1	1,530								
	3	2,711	0,833	2,711						
	5	2,831	0,899	3,783	0,899	2,831				
	7	2,865	0,912	3,877	0,954	3,877	0,912	2,865		
	9	2,879	0,917	3,906	0,964	3,960	0,964	3,906	0,917	2,879



$\Delta a$ , дБ	Порядок фильтра	Порядковые номера плеч фильтра ( $m$ )								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	1	1,995								
	3	3,349	0,712	3,349						
	5	3,481	0,762	4,538	0,762	3,481				
	7	3,519	0,772	4,639	0,804	4,639	0,772	3,519		
	9	3,534	0,776	4,670	0,812	4,727	0,812	4,670	0,776	3,534

**Пример 15.4.** Рассчитать фильтр Чебышева по следующим условиям. Полоса пропускания фильтра – 0...10 кГц с неравномерностью, не превышающей  $\Delta a_p = 3$  дБ, характер неравномерности не нормируется. На частоте  $f = 16$  кГц ослабление должно быть не менее  $a_f = 20$  дБ.

**Решение.**

1. Поскольку, как видно из условия, данный фильтр является ФНЧ, то нормированная частота

$$\hat{f}_{\text{нч}} = f/f_{\text{ср}} = 16/10 = 1,6.$$

2. Порядок фильтра

$$n = \frac{\text{Arch} \sqrt{(10^{0,1af} - 1)/(10^{0,1\Delta a} - 1)}}{\text{Arch} \hat{f}} = \frac{\text{Arch} \sqrt{(10^{0,1 \cdot 20} - 1)/(10^{0,1 \cdot 3} - 1)}}{\text{Arch} 1,6} = \frac{\text{Arch} \sqrt{(10^2 - 1)/(10^{0,3} - 1)}}{\text{Arch} 1,6} = \frac{\text{Arch} \sqrt{99/0,995}}{\text{Arch} 1,6} = 2,99/1,06 = 2,82.$$

Выбираем  $n = 3$ . Заметим, что этот же фильтр с характеристикой Баттерворта требует пять звеньев [см. (15.11)].

3. Составим схему фильтра, показанного на рис. 15.21.

4. Из табл. 15.3 выписываем коэффициенты порядковых номеров плеч

$m$	1	2	3
$K_m$	3,349	0,712	3,349

5. Постоянные преобразования  $L^* = R/2\pi f_{\text{ср}} = 1000/6,28 \cdot 10^4 = 15,9$  мГн;  $C^* = 1/2\pi f_{\text{ср}} R = 1/6,28 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = 15,9$  нФ (обратите внимание, что постоянные преобразования не зависят от вида характеристики, поэтому  $L^*$  и  $C^*$  оказываются такими же, которые были в фильтре Баттерворта).

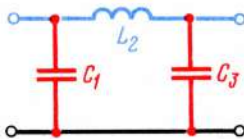


Рис. 15.21

6. Элементы фильтра:

$$C_1 = C^* K_{m1} = 15,9 \cdot 3,349 = 53,25 \text{ нФ};$$

$$L_2 = L^* K_{m2} = 15,9 \cdot 0,712 = 11,32 \text{ мГн};$$

$$C_3 = C^* K_{m3} = 15,9 \cdot 3,349 = 53,25 \text{ нФ}.$$

7. Рассчитаем характеристику ослабления в полосе пропускания фильтра. Поскольку фильтр состоит из трех реактивных элементов, число максимумов и минимумов характеристики ослабления в полосе пропускания вместе также должно равняться трем. В ФНЧ нечетные экстремумы соответствуют минимумам, а четные – максимумам. Экстремальные частоты  $f_m$  в ФНЧ рассчитывают по формуле  $f_m = f_{cp} \cdot \sin(90/n) \times (m-1)$ , где  $n$  – порядок фильтра, а  $m$  – номер элемента. При  $m=1$   $f_{m1}=0$ ; при  $m=2$   $f_{m2}=f_{cp} \sin(90/4) (2-1) = 10 \cdot \sin 22^\circ 30' = 3,83$  кГц; при  $m=3$   $f_{m3}=10 \sin 60^\circ = 8,66$  кГц.

Таким образом, на частотах 0 и 8,66 кГц ослабление равно 0, а на частоте 3,83 кГц – 3 дБ. Рассчитаем ослабления в полосе задерживания. При  $f=10$  кГц  $a_p = 10 \lg [1 + 0,995 \text{ ch}^2 (4 \cdot \text{Arch } f)] = 10 \lg (1+0) = 0$ ; при  $f=12$  кГц  $f=12/10=1,2$ ,  $a_p = 10 \lg [1 + \text{ch}^2 (3 \cdot \text{Arch } 1,2)] = 10 \lg [1 + \text{ch}^2 (3 \cdot 0,622)] = 10 \lg [1 + (\text{ch } 1,87)^2] = 10 \lg [1 + (3,3)^2] = 10 \lg [1 + 11] = 10 \lg 12 = 10 \cdot 1,08 = 10,8$  дБ. Аналогично при  $f=14$  кГц  $a_p = 16,7$  дБ; при  $f=16$  кГц  $a_p = 21,3$  дБ; при  $f=18$  кГц  $a_p = 25$  дБ; при  $f=20$  кГц  $a_p = 28,3$  дБ; при  $f=25$  кГц  $a_p = 34,8$  дБ и т.д.

### 15.13. ПОНЯТИЕ О ФИЛЬТРАХ ЗОЛОТАРЕВА

Фильтры Золотарева имеют схемы, схожие с фильтрами типа  $m$  (см. § 15.5). Элементы фильтра выбирают таким образом, чтобы получалось несколько резонансных частот. Например, фильтры, собранные по схемам рис. 15.22, *а* и *б*, являются фильтрами с характеристиками Золотарева.

Поскольку на малых частотах сопротивление продольных плеч мало, а поперечных велико, а при больших частотах наоборот, данный фильтр является фильтром нижних частот. Однако напряжение на нагрузке будет равно 0 не только на бесконечно большой частоте, но и на частотах  $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$  и  $\omega_4 = 1/\sqrt{L_4 C_4}$ , так как на этих частотах вторая или четвертая ветвь оказывается замкнутой накоротко. Аналогично в схеме рис. 15.22, *б* коэффициент передачи равен 0 на этих же частотах, поскольку на резонансной частоте сопротивление параллельного контура без потерь равно  $\infty$ . Следовательно, на резонансных частотах  $\omega_2$  и  $\omega_4$  ослабление стремится к  $\infty$ , что приводит к амплитудным характеристикам ослабления вида рис. 15.22, *в*.

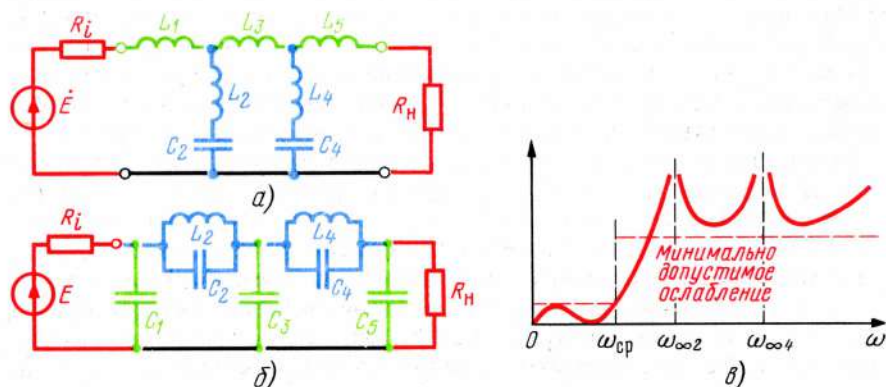


Рис. 15.22

Фильтры Золотарева рассчитывают также с помощью таблиц, но они очень громоздки и здесь не приводятся.

#### 15.14. ВЛИЯНИЕ ПОТЕРЬ

При выполнении расчетов, произведенных при исследовании фильтров, предполагалось, что резистивные составляющие сопротивлений всех элементов фильтра равны 0, чего в действительности быть не может. Наличие резистивных сопротивлений ухудшает характеристики фильтров, в частности, ослабление в полосе прозрачности оказывается больше тех значений, которые получаются по расчету, а крутизна характеристик ослабления — меньшей по сравнению с расчетной, из-за уменьшения добротности контуров. Особенно сказываются потери вблизи граничной частоты и на частотах бесконечного затухания. Например, при сопротивлении катушек, равных 0, сопротивление второй ветви в цепи рис. 15.22, а равно 0, а в цепи рис. 15.22, б —  $\infty$ . При  $R_L \neq 0$  сопротивление последовательной ветви оказывается больше 0, а параллельной — меньше  $\infty$ , что приводит к ухудшению характеристик фильтров.

Для уменьшения влияния потерь следует использовать катушки и конденсаторы с возможно большими добротностями, для этого используют сердечники с большой магнитной проницаемостью, а конденсаторы — с малыми потерями. Резистивные сопротивления можно уменьшить, если последовательно с катушками включать конверторы отрицательных сопротивлений (см. гл. 3).

#### 15.15. ПОНЯТИЕ О КВАРЦЕВЫХ ФИЛЬТРАХ

В реальных условиях добротности катушек составляют десятки, иногда сотни, но не более, а для получения требуемых характеристик в ряде случаев необходимы добротности значительно большие, прежде всего в полосовых фильтрах с узкой полосой пропускания. Для таких целей используют кварцевые и магнитострикционные фильтры.

Кварцевые фильтры работают по следующему принципу. В пластинке, вырезанной из природного материала — кварца, обнаруживаются прямой и обратный пьезоэлектрический эффекты, состоящие в том, что при сжатии и растяжении пластинки, на одной ее поверхности появляется положительный заряд, а на другой — отрицательный. Если же покрыть две грани пластинки металлом и приложить к ним переменное напряжение, то пластинка станет сжиматься и растягиваться, т.е. получатся механические колебания. Это называется обратным *пьезоэлектрическим эффектом*. Как всякая колебательная система, кварцевая пластинка имеет собственную частоту колебаний, которая зависит от ее геометрических размеров. Собственная частота кварцевой пластинки при толщине 1 мм составляет единицы мегагерц. Обозначение кварцевого элемента на схемах показано на рис. 15.23, а. На некоторой частоте имеют место резонансные явления, поэтому эквивалентная схема цепи (рис. 15.23, б) должна быть такой, которая соответствовала бы этим явлениям, в данном случае индуктивности  $L_{\text{кв}}$ , соединенной последовательно с емкостью  $C_{\text{кв}}$ . Пластинки держателя образуют конденсатор емкостью  $C_{\text{д}}$ . При отсутствии напряжения на обкладках




$$Y(j\omega) = j\omega C_D \left( 1 + \frac{C_{KB}/C_D}{1 - \omega^2 L_{KB} C_{KB}} \right) = j\omega C_0 \left( \frac{\omega_D^2 - \omega^2}{\omega_{KB}^2 - \omega^2} \right), \quad (15.22)$$

$$\omega_{KB} = 1/\sqrt{L_{KB}C_{KB}}; \quad \omega_{\Pi} = \omega_{KB} \sqrt{1 + (C_{KB}/C_{\Pi})}.$$

Исходные данные: емкость кварца  $C_0$ , нижняя частота среза  $f_H$ , верхняя частота среза  $f_B$ . Требуется определить значения емкостей  $C_1, C_{12}, C_2, C_{23}, C_{34}, C_{45}$ , сопротивления  $R$ , индуктивности  $L_{KB}$ .

435

Программа 15.1 для расчета 8-резонаторного полосового фильтра

	F	/-/	В/О	F	ВП					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\Pi \rightarrow x3$ 63	$\Pi \rightarrow x2$ 62	— 11	$\Pi \rightarrow x2$ 62	$\div$ 13	2 02	X 12	$\Pi \rightarrow x1$ 61	X 12	$x \rightarrow \Pi A$ 4 —
1	F + 20	F X 22	4 04	X 12	$\Pi \rightarrow xA$ 6 —	X 12	$x \rightarrow \Pi A$ 4 —	$\Pi \rightarrow x2$ 62	F X 22	$\Pi \rightarrow xA$ 6 —
2	X 12	F $\div$ 23	$x \rightarrow \Pi A$ 4 —	$\Pi \rightarrow x4$ 64	$\Pi \rightarrow xA$ 6 —	X 12	$\Pi \rightarrow x6$ 66	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi 1$ 41	$\Pi \rightarrow x7$ 67
3	$\Pi \rightarrow xA$ 6 —	$\div$ 13	$\Pi \rightarrow x1$ 61	$\div$ 13	$\Pi \rightarrow x4$ 64	$\div$ 13	F — 21	$\Pi \rightarrow x5$ 65	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi D$ 4Г
4	$\Pi \rightarrow xA$ 6 —	$\Pi \rightarrow x5$ 65	X 12	$\Pi \rightarrow x4$ 64	X 12	$x \rightarrow \Pi 0$ 40	$\Pi \rightarrow x7$ 67	$\Pi \rightarrow x8$ 68	X 12	F — 21
5	$\Pi \rightarrow x0$ 60	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi C$ 4Г	$\Pi \rightarrow x8$ 68	$\Pi \rightarrow x9$ 69	X 12	F — 21	$\Pi \rightarrow x0$ 60	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi B$ 4Л
6	$\Pi \rightarrow x9$ 69	$\Pi \rightarrow x0$ 60	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi 0$ 40	$\Pi \rightarrow xD$ 6Г	F $\div$ 23	$\Pi \rightarrow xC$ 6Г	F $\div$ 23	+	$x \rightarrow \Pi 6$ 46
7	$\Pi \rightarrow x8$ 6Л	F $\div$ 23	$\Pi \rightarrow x6$ 66	— 11	/-/ 0Л	$x \rightarrow \Pi 6$ 46	$\Pi \rightarrow x0$ 60	F $\div$ 23	$\Pi \rightarrow x6$ 66	— 11
8	/-/ 0Л	F $\div$ 23	$x \rightarrow \Pi 6$ 46	$\Pi \rightarrow xD$ 6Г	F $\div$ 23	$\Pi \rightarrow xB$ 6Л	F $\div$ 23	— 11	F $\div$ 23	$x \rightarrow \Pi 7$ 47
9	C/П 50	F	/-/							

Ввод исходных данных:  $C_0$  в  $RG1$ ,  $f_H$  — в  $RG2$ ,  $f_B$  — в  $RG3$ ,  $2\pi(f_B - f_H)$  — в  $\Pi_4$ ,  $2\pi f_H$  — в  $RG5$ , причем  $C_0$  выражать в фарадах, частоты в герцах.

Заслать вспомогательные числа: 1,34 — в  $RG6$ , 1,508 — в  $RG7$ , 2,019 — в  $RG8$ , 1,844 — в  $RG9$ . Пуск на счет производится нажатием клавиши В/О и С/П.

Вывод результатов: из  $RGX - C_2$ , из  $RG1 - R$ , Ом, из  $RG6 - C_1$ , из  $RG0 - C_{45}$ , из  $RG4 - L_{KB}$ , Гн, из  $RGB - C_{34}$ , из  $RG C - C_{23}$ , из  $RGD - C_{12}$  (все емкости в фарадах).

Контрольный пример:  $C_0 = 2,6 \cdot 10^{-12}$ ,  $f_H = 10,7 \cdot 10^6$  Гц,  $f_B = 10,716 \times 10^6$  Гц.

Решение:  $C_1 = 1,604868 \cdot 10^{-10}$  Ф,  $C_2 = 1,8717716 \cdot 10^{-10}$  Ф,  $C_{12} = 4,927937 \times 10^{-11}$  Ф,  $C_{34} = 6,6889926 \cdot 10^{-11}$  Ф,  $C_{45} = 6,3925337 \cdot 10^{-11}$  Ф,  $R = 320,19862$  Ом,  $L_{KB} = 2,8453335 \cdot 10^{-2}$  Гн.

Существуют фильтры на поверхностно-акустических волнах (класс ПАВ), представляющие собой кварцевую пластинку с нанесенными на ее поверхность двумя группами электродов — входными и выходными. Анализировать работу таких фильтров в ряде случаев удобнее с помощью не частотных, а импульсных характеристик.

## 15.16. ПОНЯТИЕ О МАГНИТОСТРИКЦИОННЫХ ФИЛЬТРАХ

Колебательные системы могут быть как электрическими, так и механическими. Например, камертон, натянутая струна и тому подобные устройства являются типично колебательными системами. По принципу использования колебательных свойств подобных деталей разработаны и используются в технике связи электромеханические фильтры, добротности которых весьма высокие — порядка единиц тысяч. Принцип действия этих фильтров состоит в следующем. Оказалось, что некоторые материалы, например никель, феррит и другие, обладают свойствами изменять свою длину при изменении магнитного поля, в котором они находятся. Подобный эффект называют магнитострикционным. Он используется в электромеханических магнитострикционных фильтрах, состоящих из жестко закрепленного никелевого или ферритового стержня длиной в несколько сантиметров. На стержне находится катушка с индуктивностью порядка десятков микрогенри и постоянный магнит. При протекании по катушке переменного тока магнитное поле изменяется, что приводит к изменению длины стержней и их резонансным частотам.

Эквивалентная схема магнитострикционного фильтра имеет вид рис. 15.25, а, а входная амплитудно-частотная характеристика — рис. 15.25, б. Подобные фильтры называют также магнитострикционными резонаторами. В таких фильтрах  $\omega_2/\omega_3 = 1,01 \div 1,10$ , что соответствует добротностям 2000...4000 и во много раз превышает добротности, которые можно получить в LC-фильтрах.

## 15.17. ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ

В любой цепи, содержащей накопители энергии, максимальные значения мгновенных выходных напряжений сдвинуты по времени относительно аналогичных максимальных входных напряжений. Например, в цепи рис. 15.26, а выходное напряжение отстает по фазе от входного, из-за чего между выходным и входным напряжениями образуется сдвиг во времени (рис. 15.26, б). Такое время задержки называют *групповым* и обозначают  $\tau_3$ . Групповое время задержки  $\tau_3 = d\varphi_H/d\omega$ , где  $\varphi_H$  — выражение передаточной фазо-частотной характеристики цепи (напомним, что  $\varphi_H = f(\omega)$  и  $\beta = f(\omega)$  отличаются только знаком). Чтобы рассчитать время задержки четырехполюсника, необходимо *любым методом получить комплексное значение передаточной функции  $H(j\omega)$ , привести полученное выражение к виду  $\underline{H} = H_a + jH_p$ , рассчитать передаточную фазо-частотную характеристику*

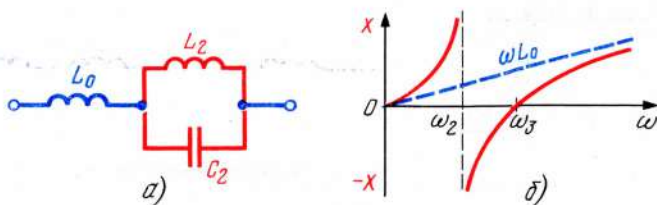


Рис. 15.25



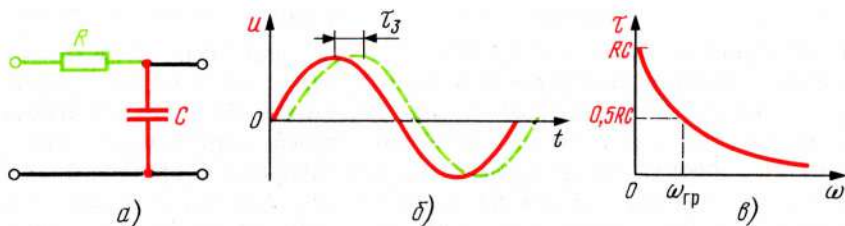


Рис. 15.26

цепи  $\varphi_H = \arctg(H_p/H_a)$  и определить время задержки из выражения  $\tau_3 = -d\varphi_H/d\omega$ .

Для большинства цепей время задержки является величиной, зависящей от частоты. Поскольку реальные сигналы представляют спектр частот, различные составляющие спектра задерживаются на различное время, что приводит к искажениям. Форма выходного сигнала при этом оказывается отличной от формы входного. Например, для цепи рис. 15.26, а.

$$\underline{H} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

откуда

$$\varphi_H = -\arctg \omega RC, \tau_3 = d\varphi_H/d\omega = \frac{d}{d\omega} (-\arctg \omega RC).$$

Поскольку при  $y = \arctg x$   $y' = (1/(1+x^2))x'$ , то  $\tau_3 = RC/(1 + \omega^2 R^2 C^2)$  (рис. 15.26, в). Следовательно, в цепи рис. 15.26, а время задержки низкочастотных составляющих больше, чем у высокочастотных. В частности, если напряжение на входе цепи имеет форму прямоугольных импульсов, то напряжение на выходе будет иметь форму, промежуточную между прямоугольной и треугольной (рис. 15.27). Под линией задержки обыкновенно понимают цепи, имеющие одинаковое время задержки в достаточно широком диапазоне частот. Очевидно, чтобы время задержки не зависело от частоты, необходимо иметь цепь, фазовая характеристика которой пропорциональна частоте, т. е. имеет вид  $\varphi_H = A\omega$ , где  $A$  — постоянная величина. В этом случае  $\tau_3 = (d/d\omega)(A\omega) = A = \text{const}$ .

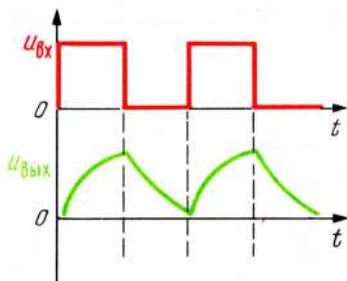


Рис. 15.27

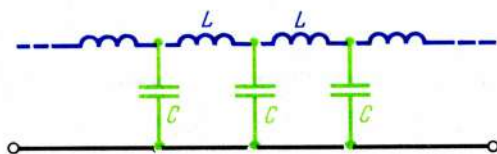


Рис. 15.28

Определим время задержки лестничной LC-цепи (рис. 15.28). При подобном соединении индуктивностей  $L$  и емкостей  $C$  получается фильтр нижних частот, частота среза которого  $\omega_{\text{ср}} = 2/\sqrt{LC}$ , а фазочастотная характеристика в полосе пропускания  $b_{\text{пр}} = \arccos[1 - 2(\omega/\omega_{\text{ср}})^2]$  [см. (15.1) и (15.3)]. Определим время задержки. Так как при  $y = \arccos x$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x', \quad (15.23)$$

$$\begin{aligned} \text{то} \quad \tau_3 &= \frac{db_{\text{пр}}}{d\omega} = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-2\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2})}} \left(-4\frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}^2}\right) = \frac{4\omega}{\omega_{\text{ср}}^2 \sqrt{1-1+4\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2}-4\frac{\omega^4}{\omega_{\text{ср}}^4}}} = \\ &= \frac{4\omega}{\omega_{\text{ср}}^2 \sqrt{4\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2}(1-\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2})}} = \frac{4\omega}{\omega_{\text{ср}}^2 \cdot 2\frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}} \sqrt{1-(\omega/\omega_{\text{ср}})^2}} = \\ &= \frac{2\sqrt{LC}}{2\sqrt{1-(\omega/\omega_{\text{ср}})^2}} = \frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{1-(\omega/\omega_{\text{ср}})^2}} \end{aligned}$$

Очевидно, что в общем случае время задержки, получающееся в ФНЧ, зависит от частоты, но в диапазоне, в котором  $\omega \ll \omega_{\text{ср}}$ ,  $\sqrt{1-(\omega/\omega_{\text{ср}})^2} \approx 1$  и время задержки оказывается практически равным  $\tau_{3(0)} \approx \sqrt{LC} = \text{const}$ , где  $\tau_{3(0)}$  — время задержки одного звена цепи. Таким образом, в диапазоне частот  $0 \dots 0,5\omega_{\text{ср}}$  время задержки данной цепи для всех частот остается практически близким к постоянному и равным для каждого звена  $\sqrt{LC}$ . Для цепи, состоящей из  $n$  звеньев, время задержки соответственно возрастает в  $n$  раз:

$$\tau_3 = n\tau_{3(0)} = n\sqrt{LC}. \quad (15.24)$$

Следовательно, чем шире спектр сигнала, который необходимо задержать на определенное время, тем большей должна быть частота среза фильтра  $\omega_{\text{ср}} = 2/\sqrt{LC}$ , т. е. тем меньшими должны быть индуктивности  $L$  и емкости  $C$  каждого звена. Но при малых  $L$  и  $C$  время задержки оказывается также малым, для его увеличения приходится увеличивать число звеньев  $n$ . Значит для того, чтобы сигнал проходил через линию задержки с малыми искажениями, необходимо иметь большое количество индуктивностей и емкостей, с малыми значениями каждой. Реальные линии задержки, используемые в радиоэлектронной аппаратуре, представляют собой компактно выполненные ФНЧ с большим числом звеньев (до 80) и соответствующим числом выводов.

#### 15.18. ЗАДЕРЖИВАЮЩИЕ СВОЙСТВА ФИЛЬТРОВ ИНЫХ ТИПОВ

Время задержки  $\tau_3$  представляет величину, пропорциональную производной ФЧХ по частоте, поэтому диапазон частот, в котором время задержки практически не зависит от частоты, определяется линейным участком

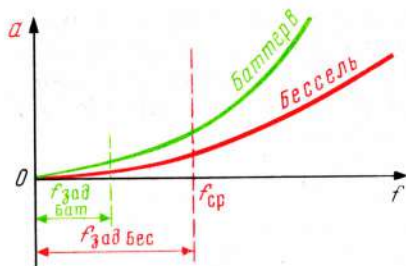


Рис. 15.29

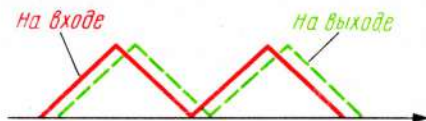


Рис. 15.30

фазочастотной характеристики цепи. Из рис. 15.6, в видно, что в диапазоне  $0 \dots 0,5f_{ср}$  ФЧХ цепи близка к линейной, поэтому в данном диапазоне фильтр работает в качестве неискажающей линии задержки. Можно показать, что чем круче затухание фильтра в полосе задерживания, тем больше нелинейность фазовой характеристики в полосе пропускания и тем меньше диапазон частот, в котором время задержки практически не зависит от частоты. По этой причине фильтры Баттерворта, а тем более Чебышева и Золотарева непригодны для их использования в качестве линий задержки.

Фильтры, у которых фазочастотные характеристики в полосе пропускания имеют вид, близкий к линейному, называются фильтрами Бесселя. Расчеты бесселевских фильтров будут показаны ниже, пока только заметим, что характеристики этих фильтров в полосе задерживания идут при прочих равных условиях хуже, чем у фильтров Баттерворта (рис. 15.29). Остановимся на знаке группового времени задерживания. В настоящее время нет единообразного обозначения знака времени задержки. В одних случаях время задержки записывают только со знаком плюс, на том основании, что время — величина положительная, в других случаях — со знаком минус, на том основании, что это время, на которое процесс отстает во времени. На этом же основании  $\tau_3$  рассчитывают или как  $d\varphi_H/d\omega$ , или как  $dB/d\omega$ , где  $B = -\varphi_H$ .

В технике связи используют не только электрические, но и акустические линии задержки. Например, в цветных телевизионных приемниках для правильной передачи цвета необходимо использовать линию задержки на время 64 мкс. Акустические линии задержки оказались гораздо компактнее электрических линий на такое же задерживающее время. Акустическая линия задержки представляет единый монолит из специальной керамики, в которую вмонтированы входные и выходные резонаторы. Генератор подключают к входным зажимам линии, резонаторы создают колебания, на прохождение которых затрачивается время, задержанный сигнал снимается с выходных зажимов линии (рис. 15.30).

#### 15.19. АКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Фильтры класса *ARC* называются *активными*. На практике наибольшее распространение получили фильтры, у которых в качестве активных элементов используются операционные усилители. Прежде чем рассматривать активные фильтры, покажем весьма распространенный вариант включения ОУ в неинвертируемом режиме. В схеме рис. 15.31, а входной ток



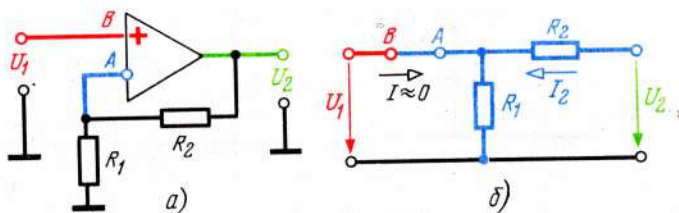


Рис. 15.31

близок к 0, что указывает на чрезвычайно большое входное сопротивление цепи. Коэффициент передачи такой цепи, как видно из эквивалентной схемы (рис. 15.31, б),

$$K = 1 + R_2/R_1, \quad (15.25)$$

а частотный диапазон цепи определяется частотными свойствами ОУ.

Если сопротивление  $R_1$  разорвать, а  $R_2$  — замкнуть, то получается схема (рис. 15.32). Как следует из (15.25), коэффициент передачи такой цепи равен 1, поскольку  $R_1 = \infty$ , а  $R_2 = 0$ . Следовательно, в цепи рис. 15.32 ослабление равно 0, входное сопротивление весьма велико, выходное сопротивление — достаточно мало, фазовая постоянная равна 0. Таким образом, цепь, собранная по схеме рис. 15.32, представляет повторитель с весьма большим входным сопротивлением, т.е. четырехполюсник, который, будучи включенным между генератором и нагрузкой, позволяет работать генератору в режиме практически холостого хода. Например, к выходным зажимам последовательного колебательного контура можно подключать непосредственно только двухполюсники с весьма большим сопротивлением, поскольку при сопротивлениях, сравнимых с сопротивлением элементов контура, добротность цепи резко падает. Если же нагрузку подключить не непосредственно к конденсатору, а через повторитель, то напряжение на ней будет равно напряжению на конденсаторе, а шунтирующего действия конденсатор испытывать не будет, поскольку входное сопротивление повторителя весьма велико (рис. 15.33).

В последнее время стало все больше распространяться новое обозначение операционного усилителя, в виде прямоугольника с двумя входными и одним выходным выводами. На корпусе прямоугольника наносят знаки "▷∞" (рис. 15.34). Повторитель используют для "развязки" цепей, т.е. для того, чтобы исключить воздействие одной цепи на другую. Например, если на выход дифференцирующей цепи подключить устройство с замет-

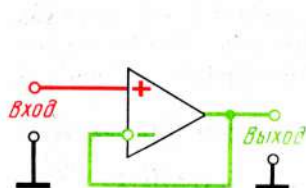


Рис. 15.32

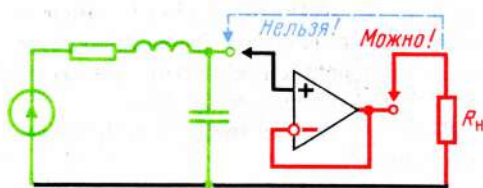


Рис. 15.33

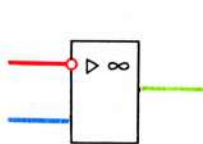


Рис. 15.34

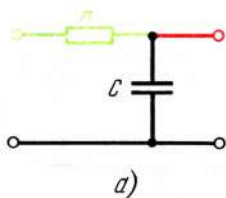


Рис. 15.35

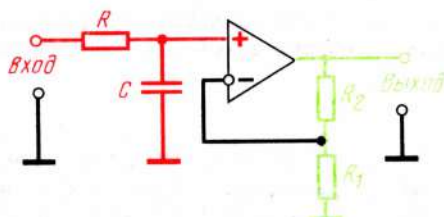
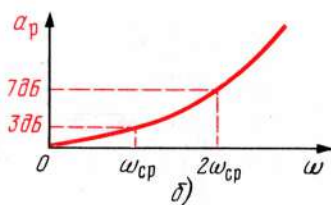


Рис. 15.36

ной входной емкостью, то эта емкость будет "смазывать" узкие короткие импульсы, получающиеся после дифференцирующей цепи. Так как конденсатор не может изменять свой заряд за малое время, то импульсы "скругляются", теряют свою остроту (см. рис. 13.6, а). Чтобы избежать искажений, вызываемых реакцией нагрузки на дифференцирующую цепь, необходимо нагрузочное устройство подключать не непосредственно к выходу дифференцирующей цепи, а через повторитель. Подобных примеров можно привести множество.

## 15.20. ЗВЕНЬЯ ФИЛЬТРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Звеном первого порядка, как известно, называется цепь, имеющая один накопитель энергии, например емкость. Будем рассматривать активные фильтры нижних частот. Поскольку передаточная АЧХ цепи на рис. 15.35, а  $H = 1/\sqrt{1+(\omega/\omega_{cp})^2}$ , а ослабление  $a_p = 20\lg \sqrt{1+(\omega/\omega_{cp})^2}$ , где  $\omega_{cp} = \omega_{гр} = 1/RC$ , то данная цепь является звеном первого порядка фильтра нижних частот. Очевидно, что при  $\omega \leq \omega_{cp}$   $a_p \leq 3$  дБ, и поэтому полоса частот  $0 \dots \omega_{cp}$  является полосой пропускания. Определим крутизну характеристики ослабления в полосе задерживания, т.е. ослабление, даваемое фильтром при изменении частоты на октаву. Положим  $\omega = 2\omega_{cp}$ , тогда  $a_p = 20\lg \sqrt{1+2^2} = 20\lg 2,236 = 7$  дБ (рис. 15.35, б). Разумеется, 7 дБ/окт — значение небольшое, поэтому реальные фильтры имеют большее число звеньев. Но для того, чтобы к данному звену подключить другие звенья, необходимо поставить развязывающую цепь в виде или повторителя или неинвертирующего усилителя. Таким образом, звено первого порядка реализуют цепью вида рис. 15.36.

В режиме повторителя (т.е. при  $R_1 = \infty$ ,  $R_2 = 0$ ) комплексная передаточная функция

$$H(j\omega) = 1/(1+j\omega RC), \text{ а при } R_1 < \infty, R_2 > 0 \text{ } H(j\omega) = \frac{1+(R_2/R_1)}{1+j\omega RC}. \quad (15.26)$$

## 15.21. ЗВЕНЬЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В гл. 8 было показано, что можно получить звено второго порядка с помощью цепи ARC, содержащей ОУ, два конденсатора и несколько резисторов. Если составить для цепи на рис. 15.37, а схему замещения и определить передаточную функцию, подобно тому, как это было сделано с электронным аналогом колебательного контура, то получается комплексная передаточная функция

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{b_2(j\omega)^2 + a_2j\omega + 1} = \frac{H_0}{b_2[-\omega^2 + j(a_2/b_2)\omega + 1/b_2]}, \quad (15.27)$$

где  $1/b_2 = \omega_0^2$ ,  $a_2/b_2 = \omega_0/Q$ . Положив  $H_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $Q = 0,707$ , получим выражение  $H(j\hat{\omega}) = 1/[(1 - \hat{\omega}^2) + j1,41\hat{\omega}]$ , откуда  $a_2 = 1,41$ ,  $b_2 = 1$ . Модуль передаточной функции  $H(\hat{\omega}) = 1/\sqrt{(1 - \hat{\omega}^2)^2 + 2\hat{\omega}^2} = 1/\sqrt{1 + \hat{\omega}^4}$ , а ослабление  $a_p = 20 \lg \sqrt{1 + \hat{\omega}^4}$ . Очевидно, что при  $\hat{\omega} = 1$   $a_p = 3$  дБ, при  $\hat{\omega} = 2$  (т.е. при увеличении частоты на октаву)  $a_p = 20 \lg \sqrt{17} = 12,3$  дБ, т.е. на 5,3 дБ больше, чем у звена первого порядка. Рассчитаем ослабления для звеньев первого и второго порядка при изменении частоты  $\hat{\omega}$  от 0 до 2,5:

$$a_1 = 20 \lg \sqrt{1 + (\omega/\omega_{cp})^2}, \quad a_2 = 20 \lg \sqrt{1 + (\omega/\omega_{cp})^4}.$$

$\hat{\omega} = \omega/\omega_{cp}$	0	0,5	0,8	1,0	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5
при $n=1$	0	0,97	2,15	3,0	4,71	5,51	6,27	7,0	8,6
при $n=2$	0	0,263	1,49	3,0	6,85	8,78	10,6	12,3	16,0
при $n=3$	0	1,23	3,64	6,0					
при $n=4$	0	0,53	3,0	6,0					

Проанализируем полученные результаты. Из сравнения ослаблений звеньев первого и второго порядков видно, что у звена второго порядка ослабление в полосе пропускания меньше, чем у звена первого порядка, а в полосе задерживания, наоборот, больше рис. 15.37, б. Для увеличения ослабления в полосе задерживания используют фильтры более высоких

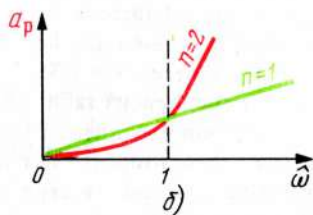
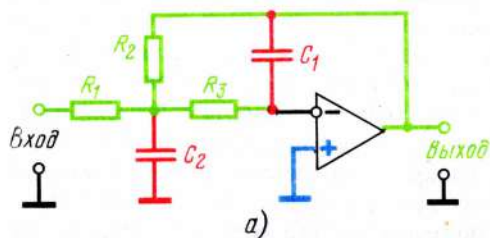


Рис. 15.37



порядков, для чего соединяют последовательно несколько звеньев первого и второго порядков.

Однако при этом соединении звеньев, уравнения которых имеют одинаковые коэффициенты  $K_a$  и  $K_b$ , ослабление в полосе пропускания превысит допустимую норму. Например, если в фильтрах третьего или четвертого порядков задаться добротностью каждого звена, равной 0,707 с приведенной частотой  $\omega = 1$ , то ослабление на граничной частоте составило бы 6 дБ, что совершенно недопустимо. Следовательно, чтобы спроектировать фильтр, например, четвертого порядка, следует задаться  $Q$  и  $\omega_0$  иными, чем те, которые были оптимальны в фильтрах второго порядка. Поэтому необходимо иметь таблицы коэффициентов, подобные таблицам в каталогах для расчета пассивных фильтров. В таблицах коэффициенты  $K_a$  и  $K_b$  указаны для каждого  $n$  в отдельности. Следовательно, прежде всего, как и при расчете пассивных фильтров, необходимо определить порядок фильтра, удовлетворяющего поставленным требованиям.

#### 15.22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА АКТИВНОГО ФИЛЬТРА

Чтобы определить порядок фильтра, необходимо знать максимально допустимое ослабление в полосе пропускания  $a_{max}$ , минимально допустимое ослабление на частоте  $f$ , находящейся в полосе задерживания, и характер ослабления в полосе пропускания. Как известно, наиболее пологими являются характеристики Бесселя, более крутые — характеристики Баттерворта и еще более крутые — характеристики Чебышева. За исходные чаще всего принимают характеристики Баттерворта, являющиеся также характеристиками фильтра с максимально плоской АЧХ. Порядок активного фильтра с характеристиками Баттерворта определяется так же, как и пассивного [см. формулу (15.11)]:

$$n_{\text{Бат}} \geq \frac{\lg [(10^{0,1a_{\min}} - 1)]}{2 \lg (f/f_{\text{ср}})} \quad (15.28)$$

(при  $a_{\min} \geq 20$  дБ единицей можно пренебречь и выражение принимает вид  $n \geq a_f / 20 \lg f$ ). Число звеньев фильтра Чебышева, называемого также равноволновым фильтром,

$$n_{\text{Чеб}} \geq \text{Arch} [(10^{0,1a_{\min}} - 1) / (10^{0,1a_{\max}} - 1)]^{1/2} / \text{Arch}(f/f_{\text{ср}}), \quad (15.29)$$

или по номограмме (рис. 15.38 а, б). Для этого прямой линией следует соединять точки  $A_{\max}$  с  $A_{\min}$  и продлить данную прямую до пересечения с левой вертикальной линией номограммы. Из точки  $P_3$  провести горизонтальную линию до пересечения с перпендикуляром, проведенным из точки  $\hat{f}$ . Пересечение обеих прямых показывает порядок фильтра  $n$ . Зная порядок фильтра из табл. 15.4 для фильтров Баттерворта и Бесселя и 15.5 для фильтров Чебышева, выписывают коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$ . Фильтры более высоких, чем второго, порядков собирают из звеньев первого и второго порядков, причем звеньев первого порядка целесообразно включать не более одного. Например, чтобы получить фильтр седьмого порядка, необходимо соединить одно звено первого и три звена второго порядков.

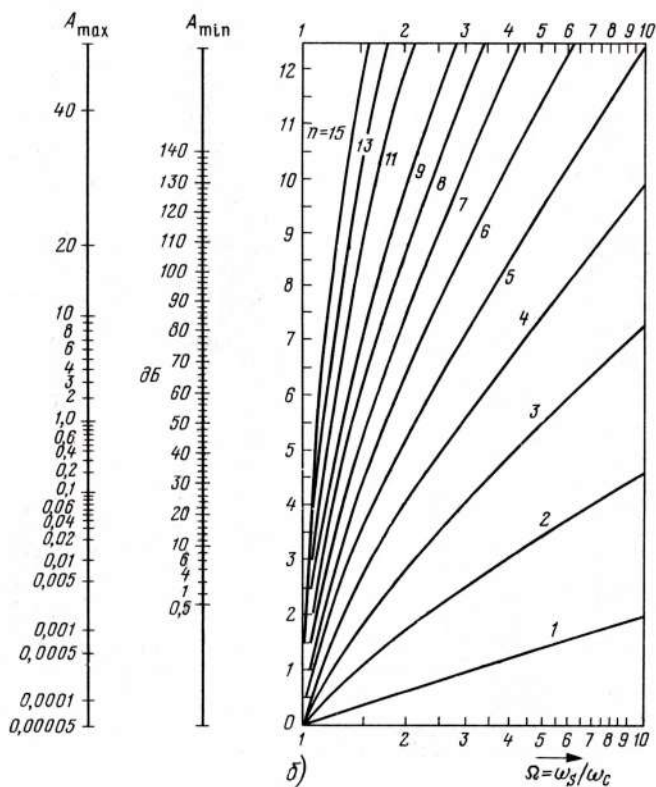
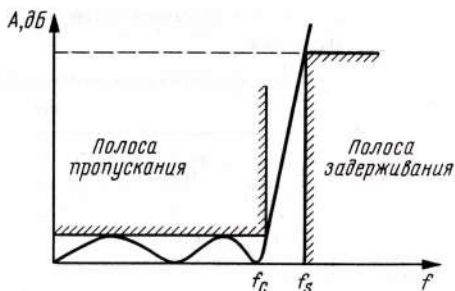
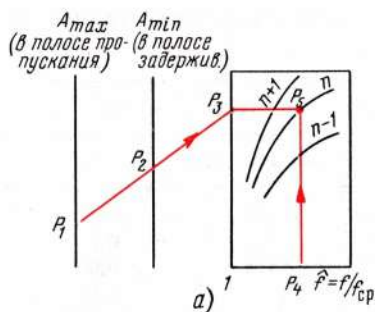


Рис. 15.38

Рассчитывать ослабление для звеньев первого порядка удобнее всего по формуле  $a_p = 20 \lg \sqrt{1 + (a_1 \hat{\omega})^2}$ . Следует иметь в виду, что в фильтрах Бесселя и Баттерворта коэффициенты  $a_1$  от порядка фильтра не зависят и при любых значениях равны 1. Таким образом, ослабление звена первого порядка в фильтрах Бесселя и Баттерворта  $a_p = 20 \lg \sqrt{1 + (\omega/\omega_{cp})^2}$ , а в фильтрах Чебышева  $a_p = 20 \lg \sqrt{1 + (a_1 \hat{\omega})^2}$ . При этом следует иметь в ви-

Т а б л и ц а 15.4. Таблица коэффициентов фильтров Баттерворта и Бесселя для активных фильтров

<i>n</i>	<i>i</i>	Фильтр Баттерворта		Фильтр Бесселя	
		<i>a<sub>i</sub></i>	<i>b<sub>i</sub></i>	<i>a<sub>i</sub></i>	<i>b<sub>i</sub></i>
1	1	1,000	0,000	1,000	0,000
2	1	1,414	1,000	1,362	0,618
3	1	1,000	0,000	0,756	0,000
	2	1,000	1,000	1,000	0,477
4	1	1,848	1,000	1,340	0,489
	2	0,765	1,000	0,774	0,389
5	1	1,000	0,000	0,666	0,000
	2	1,618	1,000	1,140	0,413
	3	0,618	1,000	0,622	0,325
6	1	1,932	1,000	1,222	0,389
	2	1,414	1,000	0,967	0,350
	3	0,518	1,000	0,513	0,276
7	1	1,000	0,000	0,594	0,000
	2	1,802	1,000	1,094	0,340
	3	1,247	1,000	0,830	0,301
	4	0,445	1,000	0,433	0,238
8	1	1,962	1,000	1,111	0,316
	2	1,663	1,000	0,975	0,298
	3	1,111	1,000	0,720	0,262
	4	0,390	1,000	0,373	0,209
9	1	1,000	0,000	0,539	0,000
	2	1,879	1,000	1,024	0,283
	3	1,532	1,000	0,871	0,264
	4	1,000	1,000	0,632	0,231
	5	0,347	1,000	0,326	0,185
10	1	1,975	1,000	1,022	0,265
	2	1,782	1,000	0,939	0,255
	3	1,414	1,000	0,782	0,235
	4	0,908	1,000	0,560	0,206
	5	0,313	1,000	0,288	0,167

ду, что значения коэффициента  $a_1$  в этих фильтрах зависят от порядка фильтра. Например, при  $n=1$   $a_1=1$ , а при  $n=7$   $a_1=7,906$  и т. д. Ослабление звеньев второго порядка определяют для каждого звена в отдельности, а затем ослабления всех звеньев складывают. Комплексная передаточная функция многозвенного фильтра в общем случае определяется из выражений:

для нечетного значения числа  $n$

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{(1+j\hat{\omega}a_1)[(1-b_2\hat{\omega}^2)+j\hat{\omega}a_2][(1-b_3\hat{\omega}^2)+j\hat{\omega}a_3]...}; \quad (15.30)$$



для четных значений числа  $n$

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{[(1 - b_2 \hat{\omega}^2) + j\hat{\omega}a_2] [(1 - b_3 \hat{\omega}^2) + j\hat{\omega}a_3] \dots}, \quad (15.31)$$

где  $H_0$  — коэффициент передачи на нулевой частоте.

Рассчитаем ослабление, обеспечиваемое каждым звеном второго порядка. Так как  $H/H_0 = 1/[(1 - b\hat{\omega}^2) + ja\hat{\omega}]$ , то

$$a_p = 20 \lg \sqrt{(1 - b\hat{\omega}^2)^2 + (a\hat{\omega})^2} = 20 \lg \sqrt{1 + (a_i^2 - 2b_i) \hat{\omega}^2 + b_i^2 \hat{\omega}^4}, \quad (15.32)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — табличные коэффициенты.

Т а б л и ц а 15.5

$n$	$i$	Неравномерность, дБ							
		0,5		1		2		3	
		$a_i$	$b_i$	$a_i$	$b_i$	$a_i$	$b_i$	$a_i$	$b_i$
1	1	1,000	0,000	1,000	0,000	1,000	0,000	1,000	0,000
2	1	1,362	1,383	1,302	1,552	1,181	1,778	1,065	1,931
3	1	1,864	0,000	2,216	0,000	2,800	0,000	3,350	0,000
	2	0,640	1,193	0,544	1,206	0,430	1,204	0,356	1,192
4	1	2,628	3,434	2,590	4,130	2,403	4,986	2,185	5,534
	2	0,369	1,151	0,304	1,168	0,237	1,190	0,196	1,201
5	1	2,924	0,000	3,571	0,000	4,635	0,000	5,633	0,000
	2	1,303	2,353	1,128	2,490	0,809	2,608	0,762	2,653
	3	0,229	1,083	0,187	1,081	0,143	1,075	0,117	1,069
6	1	3,865	6,980	3,844	3,553	3,588	10,465	3,272	11,677
	2	0,753	1,857	0,629	1,912	0,493	1,962	0,408	1,987
	3	0,159	1,071	0,130	1,077	0,0995	1,083	0,082	1,086
7	1	4,021	0,000	4,952	0,000	6,476	0,000	7,906	0,000
	2	1,873	4,180	1,634	4,490	1,326	4,765	1,116	4,900
	3	0,486	1,568	0,399	1,583	0,307	1,593	0,252	1,594
	4	0,116	1,044	0,094	1,042	0,071	1,038	0,052	1,035
8	1	5,112	11,961	5,102	14,760	4,774	18,150	4,358	20,290
	2	1,064	2,937	0,892	3,043	0,700	3,135	0,580	3,181
	3	0,334	1,421	0,281	1,433	0,215	1,445	0,177	1,451
	4	0,089	1,041	0,072	1,043	0,055	1,046	0,045	1,048
9	1	5,132	0,000	6,342	0,000	8,320	0,000	10,176	0,000
	2	2,428	6,631	2,125	7,171	1,730	7,658	1,459	7,900
	3	0,684	2,291	0,562	2,328	0,434	2,355	0,356	2,365
	4	0,256	1,313	0,208	1,317	0,158	1,317	0,129	1,317
	5	0,0695	1,027	0,0562	1,026	0,0427	1,023	0,0348	1,021
10	1	6,365	18,370	6,363	22,747	5,962	28,037	5,445	31,380
	2	1,658	4,345	1,140	4,517	0,895	4,665	0,741	4,736
	3	0,482	1,944	0,394	1,967	0,302	1,986	0,248	2,000
	4	0,1994	1,252	0,1616	1,257	0,123	1,262	0,101	1,264
	5	0,0563	1,026	0,0455	1,028	0,0347	1,029	0,0283	1,030

Таблица 15.6

$\hat{f}$	0	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0
$a_1$ , дБ	0	0,97	2,15	3,0	3,87	5,12	7,0	8,6	10
$a_2$ , дБ	0	0,85	2,57	4,18	5,98	9,46	12,9	16,4	19,4
$a_3$ , дБ	0	-1,82	-4,27	-4,18	0,74	3,86	10,2	14,8	18,3
$\Sigma a$ , дБ	0	$\approx 0$	0,45	3,0	10,6	18,4	30,1	39,8	47,7

**Пример 15.5.** Рассчитать фильтр нижних частот с плоской амплитудно-частотной характеристикой при ослаблении 30 дБ/окт.

**Решение.** Порядок фильтра

$$n \geq a_f / 20 \lg \hat{f} = 30 / 20 \lg 2 = 30 / 6,02 = 4,98.$$

Выбираем  $n=5$ . Следовательно, фильтр должен состоять из одного звена первого и двух звеньев второго порядков. Из табл. 15.4 выписываем значения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ ;  $a_1=1,0$ ;  $b_1=0$ ;  $a_2=1,618$ ;  $b_2=1$ ;  $a_3=0,618$ ;  $b_3=1$ . Ослабления звеньев фильтра следующие:

для звена первого порядка

$$a_{p1} = 20 \lg \sqrt{1 + \hat{f}^2};$$

для первого звена второго порядка

$$a_{p2} = 20 \lg \sqrt{1 + (1,618^2 - 2 \cdot 1) \hat{f}^2 + 1^2 \cdot \hat{f}^4} = 20 \lg \sqrt{1 + 0,618 \hat{f}^2 + \hat{f}^4};$$

для второго звена второго порядка

$$a_{p3} = 20 \lg \sqrt{1 + (0,618^2 - 2 \cdot 1) \hat{f}^2 + \hat{f}^4} = 20 \lg \sqrt{1 - 1,618 \hat{f}^2 + \hat{f}^4}.$$

Результаты расчетов сведены в табл. 15.6.

### 15.23. РАСЧЕТ ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗВЕНЬЕВ ФИЛЬТРА

Фазовые характеристики фильтра рассчитываются отдельно для каждого звена, аналогично тому, как это делалось для определения ослаблений, а затем складываются. Так как комплексное выражение ослабления звена первого порядка  $T(j\omega) = 1 + j\omega RC$ , то фазовая характеристика этого звена

$$b = \arctg \omega RC = \arctg(\omega / \omega_{rp}) = \arctg(\hat{f}). \quad (15.33)$$

Комплексное выражение ослабления звена второго порядка рассчитывается по формуле  $T(j\omega) = (1 - b_i \hat{\omega})^2 + j a_i \hat{\omega}$ , следовательно, фазовая характеристика

$$b = \arctg [a_i \hat{\omega} / (1 - b_i \hat{\omega}^2)]. \quad (15.34)$$

**Пример 15.6.** Рассчитать и сравнить между собой фазовые характеристики звеньев второго порядка Бесселя и Чебышева с неравномерностью 2 дБ.

Таблица 15.7

$\hat{\omega}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1,0	1,2
$b^0_{\text{(Бес)}}$	0	7,5	15,6	23,4	31,2	38,8	46,2	53,8	61	67,8	71,2	74,3	86
$b^0_{\text{(Чеб, 2 дБ)}}$	0	6,8	14,2	22,9	33,4	46,7	63	81	98	115	119	124	145

**Решение.** Выпишем коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  из таблиц 15.4 и 15.5. У звена второго порядка с характеристикой Бесселя  $a_i=1,362$ ,  $b_i=0,618$ , а у звена с характеристикой Чебышева при 2 дБ —  $a_i=1,181$ ,  $b_i=1,778$ . Получаются следующие расчетные формулы:

$$b_{\text{(Бес)}} = \arctg \left[ \frac{1,362 \hat{\omega}}{1 - 0,618 \hat{\omega}^2} \right]; \quad b_{\text{(Чеб, 2 дБ)}} = \arctg \left[ \frac{1,181 \hat{\omega}}{1 - 1,778 \hat{\omega}^2} \right].$$

Подставляя различные значения  $\hat{\omega} = \omega / \omega_{\text{ср}}$ , получаем соответствующие фазные углы (табл. 15.7).

Из полученных результатов видно, что линейность фазных характеристик фильтра Бесселя значительно выше, чем у фильтра Чебышева (рис. 15.39).

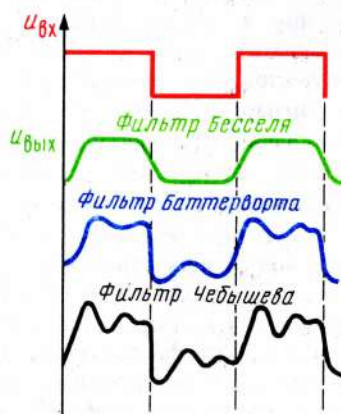
#### 15.24. ПЕРЕХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЛЬТРОВ

Расчеты переходных характеристик фильтров, т.е. откликов на выходе цепи при единичных воздействиях на входе, проводятся по правилам и приемам расчетов откликов во время переходных процессов. Однако фильтры могут иметь порядок выше второго, поэтому все математические выкладки при таких расчетах становятся весьма громоздкими и здесь не приводятся. Покажем качественно форму выходного напряжения для фильтров различных типов при входном воздействии прямоугольной формы. Наименьшие искажения оказываются у фильтров Бесселя, а наибольшие, как и следовало ожидать, у фильтров Чебышева (рис. 15.40). Как известно, параметры цепей, оптимальные для работы в вынужденном ре-

Рис. 15.39



Рис. 15.40





жине, весьма часто являются совершенно неоптимальными при работе в переходном режиме и наоборот. Фильтры Бесселя имеют наихудшие характеристики с точки зрения крутизны характеристик ослабления и наилучшие — с точки зрения минимума искажений. У фильтров Чебышева — наоборот, хорошие характеристики в вынужденном режиме и плохие — в переходном. Важно отметить, что по мере увеличения порядка фильтра переходные характеристики фильтра Бесселя улучшаются, а фильтра Баттерворта — ухудшаются. Например, в фильтрах пятого порядка амплитуда колебаний фильтра Бесселя примерно на порядок меньше амплитуды колебаний в фильтрах Баттерворта.

Таким образом, частотная избирательность выше у фильтров Чебышева, а переходная характеристика — лучше у фильтров Бесселя. Фильтры Баттерворта часто рассматривают как некий "разумный компромисс" между требованиями, предъявляемыми к фильтру в режимах вынужденном и переходном.

#### 15.25. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ФИЛЬТРАМ ЗОЛОТАРЕВА

Фильтры Золотарева в литературе [9] иногда встречаются под названием "Чебышева — Кауэра". В принципе расчет этих, так называемых эллиптических фильтров производится аналогично расчетам фильтров Баттерворта или Чебышева, но сложность формул и таблиц для этих фильтров резко возрастает. При необходимости выполнения расчетов подобных фильтров можно воспользоваться, например, справочником Христиан Э., Эйзенман Е. "Таблицы и графики по расчету фильтров" (Москва, Связь, 1975). Частотные свойства фильтров Золотарева лучше, чем фильтров Чебышева, а переходные — хуже.

#### 15.26. СХЕМНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АКТИВНОГО ЗВЕНА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определив порядок фильтра  $n$  и убедившись, что фильтр с данными характеристиками удовлетворяет поставленным требованиям, необходимо рассчитать элементы цепи, при которых получаются выбранные по таблицам значения коэффициентов  $a$  и  $b$ , а следовательно, обеспечиваются необходимые характеристики. Остановимся на физическом смысле этих коэффициентов. Коэффициенты  $a$  и  $b$  — это величины, отражающие два важных параметра цепи — добротность  $Q$  и резонансную частоту  $\omega_0$ . Однако для выполнения расчетов удобнее задаваться не добротностью  $Q$  и частотой  $\omega_0$ , а некоторыми другими величинами, зависящими от  $Q$  и  $\omega_0$ . Такими величинами и являются коэффициенты  $a$  и  $b$ . Действительно, коэффициент  $b$  есть величина, обратная квадрату приведенной частоты ( $b = 1/\hat{\omega}_0^2$ ), а коэффициент  $a$  есть отношение приведенной резонансной частоты к добротности  $a = \hat{\omega}_0/Q$  [см. (15.27)]. Например, значения  $a = 1$ ,  $b = 1$  означают, что имеется цепь с добротностью и резонансной частотой, равными 1. Чем больше значение коэффициента  $a$ , тем меньше добротность цепи, чем больше коэффициент  $b$ , тем меньше резонансная частота цепи. Задача, таким образом, сводится к тому, чтобы рассчитать элементы цепи, при которых по-

лучаются заданные  $Q$  и  $\omega_0$ . Звено первого порядка будем реализовывать с помощью схемы рис. 15.36. Поскольку понятие резонансная частота применимо только к цепям второго порядка, то в цепях первого порядка коэффициент  $b$  всегда равен 0. В цепях первого порядка определяют произведение  $RC = \tau$  из выражения

$$\tau = RC = a_i / \omega_{\text{ср}}, \quad (15.35)$$

где  $\omega_{\text{ср}}$  — частота среза, равная граничной частоте цепи. Одной величиной,  $R$  или  $C$ , можно задаваться, другая при этом получается из данного выражения.

**Пример 15.7.** Рассчитать  $R$  и  $C$  звена первого порядка, при которых частота среза равна 10 кГц,  $a_1 = 1$ .

**Решение.** Рассчитаем значение  $\tau = RC = 1/\omega_{\text{ср}} = 1/2\pi f_{\text{ср}} = 1/6,28 \cdot 10^4 = 15,9 \times 10^{-6}$  с. Задаваться одним параметром можно различным образом. Сопротивление  $R$  следует выбирать в пределах от единиц до десятков килоом. Пусть  $R = 10$  кОм, в этом случае  $C = \tau/R = 15,9 \cdot 10^{-6}/10^4 = 1,59$  нФ. Операционный усилитель выбирают по паспортным данным. У каждого ОУ имеется граничная частота  $f_{\text{гр}}$  (не путайте с граничной частотой цепи!) На практике ОУ можно использовать в диапазоне  $0 \dots 0,1 f_{\text{гр}}$ . Например, у ОУ типов 14ОУД8, 544УД1  $f_{\text{гр}} = 1$  МГц, следовательно, данные ОУ обеспечивают полосу примерно до 100 кГц. Операционные усилители типов 544УД2, 574УД1 имеют  $f_{\text{гр}} = 15$  МГц, поэтому они работоспособны в диапазоне до 1,5 МГц и т.д. Следует заметить, что электронная промышленность создает все более высокочастотные ОУ, поэтому их область применения все время расширяется. Цепочки  $(R_1 + R_2)$  выбирают в несколько раз большей, чем входное сопротивление следующего каскада, причем если усиливать выходной сигнал не требуется, то цепочки  $R_1 + R_2$  может не быть, а если требуется, то отношение  $R_1/R_2$  выбирают в соответствии с (15.25).

## 15.27. РЕАЛИЗАЦИЯ АКТИВНОГО ЗВЕНА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Существует большое количество схем для реализации цепей второго порядка. В каждой из них имеется операционный усилитель, два конденсатора и несколько (чаще всего три) резистора. Будем разбирать реализацию цепи второго порядка на примере схемы рис. 15.37, а. Если для данной цепи составить схему замещения и подсчитать комплексную передаточную функцию, то получается выражение

$$H(j\omega) = \frac{\hat{G}_1/\hat{G}_2}{\frac{\hat{C}_1\hat{C}_2}{\hat{G}_2\hat{G}_3} (j\hat{\omega})^2 + \hat{C}_1 \left( \frac{\hat{G}_1 + \hat{G}_2 + \hat{G}_3}{\hat{G}_2\hat{G}_3} \right) j\hat{\omega} + 1} = \frac{\hat{R}_2/\hat{R}_1}{-\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1\hat{C}_2\hat{\omega}^2 + j\hat{\omega}\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1(1/\hat{R}_1 + 1/\hat{R}_2 + 1/\hat{R}_3) + 1}, \quad (15.36)$$

откуда

$$a_i = \hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1(1/\hat{R}_1 + 1/\hat{R}_2 + 1/\hat{R}_3), \quad (15.37)$$

$$b_i = \hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1\hat{C}_2. \quad (15.38)$$

Таким образом, для реализации данной цепи необходимо определить параметры пяти элементов — сопротивлений трех резисторов и емкостей двух конденсаторов. Поскольку параметры данной цепи связаны двумя уравнениями, значения трех элементов можно выбирать произвольно, а два параметра получать из уравнений (15.37) и (15.38). Обратим еще раз внимание, что все величины, имеющиеся в данных формулах, приведены к полосе  $1/c$  (точнее, рад/с, но радиан, как известно, величина безразмерная, поэтому записывают  $1/c$ ). Таким образом, не следует удивляться "несуразности" выбираемых и получающихся значений, так как это не сами величины, а их приведенные значения. Истинные значения параметров всех элементов будут получены ниже с соответствующими объяснениями.

Выберем приведенные сопротивления  $\hat{R}_1$ ,  $\hat{R}_2$  и емкость  $\hat{C}_1$  равными 1. Так поступать удобно, поскольку числитель передаточной функции при этом также становится равным 1. Анализ показывает, что значение емкости  $\hat{C}_1$  может быть не любым, а только удовлетворяющим условию

$$\hat{C}_1 \leq a/\hat{R}_2. \quad (15.39)$$

В противном случае какие-то параметры цепи окажутся с отрицательными значениями. В звене второго порядка фильтра Баттерворта  $a_1 = 1,41$ ;  $b_1 = 1$ , при этом  $1 < 1,41/1$ , т.е. указанное условие выполняется, поэтому приведенной емкости  $\hat{C}_1$  в данном случае можно приписать значение, равное 1. Зная коэффициенты  $a$  и  $b$  и задавшись значениями  $\hat{R}_1$ ,  $\hat{R}_2$  и  $\hat{C}_1$ , определим значение  $R_3$  из выражения (15.37). Проведем несложные преобразования, получим

$$\hat{R}_3 = \frac{\hat{R}_1(a - \hat{R}_2\hat{C}_1)}{\hat{C}_1(\hat{R}_1 + \hat{R}_2)} = \frac{1(1,41 - 1 \cdot 1)}{1(1 + 1)} = 0,205.$$

Значение приведенной емкости  $\hat{C}_2$  находим из (15.38), откуда

$$\hat{C}_2 = \frac{b\hat{G}_2\hat{G}_3}{\hat{C}_1} = \frac{b}{\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1} = \frac{1}{1 \cdot 0,205 \cdot 1} = 4,878.$$

Произведем проверку. Очевидно, что выражение  $\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1(1/\hat{R}_1 + 1/\hat{R}_2 + 1/\hat{R}_3)$  должно равняться  $a = 1,41$ , а выражение  $\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1\hat{C}_2 - b = 1: 1 \cdot 0,205 \times \times (1/1 + 1/1 + 1/0,205) = 0,205(2 + 4,874) = 1,41$ ;  $1 \cdot 0,205 \cdot 1 \cdot 4,878 = 1$ . Проверка выполняется.

Рассчитаем теперь элементы цепи рис. 15.37, а. Сопротивления определяются из выражений  $R = \hat{R}f_{cp}$ , откуда  $R_1 = \hat{R}_1f_{cp}$ ;  $R_2 = \hat{R}_2f_{cp}$ ;  $R_3 = \hat{R}_3f_{cp}$ . Если  $f_{cp} = 10$  кГц, то  $R_1 = 1 \cdot 10 = 10$  кОм;  $R_2 = 1 \cdot 10 = 10$  кОм;  $R_3 = 0,205 \times \times 10^4 = 2,05$  кОм. При этом, если окажется, что какое-то сопротивление лежит в пределах, не рекомендованных для работы с данным ОУ, то это означает, что следует задаться иными значениями самостоятельно выбираемых величин и произвести расчет заново.

Значения конденсаторов определяют из выражений  $C_1 = \hat{C}_1/(2\pi f_{cp}R_1)$  и  $C_2 = \hat{C}_2/(2\pi f_{cp}R_1)$ , в нашем случае

$$C_1 = \frac{1}{6,28 \cdot 10^3 \cdot 10^4} = 1,59 \text{ нФ}; \quad C_2 = \frac{1}{6,28 \cdot 10^4 \cdot 10^4} = 1,59 \text{ нФ}.$$



## 15.28. ЗВЕНЬЯ ФИЛЬТРОВ С РАЗЛИЧНОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ

Активные фильтры делят на низкодобротные, среднедобротные и высокодобротные. Низкодобротными называют цепи, добротность которых не превышает 2, среднедобротными — с  $Q$  от 2 до 20, высокодобротными — с  $Q$ , превышающими 20. Цепи без положительной обратной связи являются низкодобротными, и все расчеты, произведенные выше, относились именно к низкодобротным цепям. Достоинствами таких фильтров является: малое число ОУ (в каждом звене всего один) и, следовательно, малая потребляемая мощность, минимальное число элементов, а отсюда большое число звеньев, которое можно разместить в единице объема интегральной схемы, высокая устойчивость к работе, не критичность к точности параметров элементов и т. д. Колоссальным достоинством активных фильтров является отсутствие катушек индуктивностей, а следовательно, широкая возможность использовать их в виде миниатюрных интегральных схем. Активные фильтры часто являются составной частью других, более сложных устройств, отсутствие какой-либо настройки является обязательным условием при использовании деталей в интегральном исполнении.

Низкодобротные узлы обеспечивают примерно такие же характеристики, как и аналогичные  $LC$ -звенья, но без точных деталей, в гораздо более компактном виде. Получить фильтр более высокого порядка в активных фильтрах несравненно проще и технологичнее, чем в пассивных. При анализе фильтров существует весьма важный показатель — произведение усиления каскада на его чувствительность, получившее обозначение ПУЧ. Этот вспомогательный, но очень существенный параметр определяет оптимальную область значений рассчитываемых элементов. У низкодобротных фильтров он находится чаще всего в пределах  $1,5 \dots 2,5$ .

Под чувствительностью цепи понимают изменение характеристик цепи при изменении параметров ее элементов. Чувствительность представляет, таким образом, восприимчивость цепи к воздействию различных внешних факторов — изменению питающего напряжения, старению деталей и т. д. Например, изменение коэффициента усиления ОУ на десятки процентов при наличии глубокой отрицательной обратной связи может привести к изменению характеристик цепи всего на доли процентов, а при менее глубокой — на большее значение. Чувствительность в первом случае оказывается меньшей, а во втором — большей. Чем менее чувствительна цепь к воздействию дестабилизирующих фильтров, тем устойчивее работает такая цепь. Математический расчет чувствительности цепей весьма сложен и здесь не приводится.

Для получения фильтров средней добротности необходимо использовать ОУ с положительной обратной связью, образуемой делителем  $R_4 R_5$  (рис. 15.41). Положительная обратная связь может весьма значительно изменять свойства цепи (вспомните конвертор отрицательных сопротивлений: в нем также использовалась ПОС), благодаря чему можно получить фильтры с большими крутизнами характеристик. Но наличие ПОС ухудшает устойчивость работы цепи, увеличивает чувствительность к дестабилизирующим факторам. Для монтажа таких фильтров и ряда других цепей широко используют так называемые сборки, выпускаемые промышленностью. Сборкой называется микросхема, в которой имеются активные элементы (на-

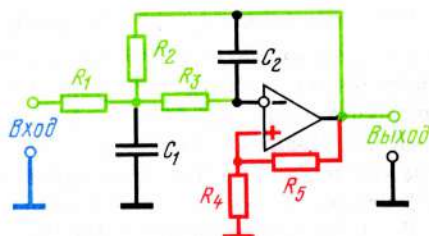


Рис. 15.41

пример, ОУ) и некоторые детали, изменение параметров которых не вызывает заметного ухудшения свойств цепи, например элементов, входящих в цепь ООС. Остальные детали являются внешними, некоторые из них подбирают при настройке, а другие делают регулируемыми.

Фильтры с большой добротностью имеют более сложные схемы, содержат, как правило, несколько ОУ, рассчитываются с помощью ЭВМ и в данной книге не рассматриваются.

### 15.29. АКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ ВЕРХНИХ ЧАСТОТ

Если в ФНЧ поменять местами резисторы и конденсаторы, то полосы пропускания и задерживания также поменяются местами и ФНЧ превратится в ФВЧ. Для получения уравнений ФВЧ необходимо во всех выражениях менять местами  $R$  и  $1/j\omega C$ , а также  $\omega$  и  $1/\omega$ . Получившееся при этом выражение будет характеристикой ФВЧ.

**Пример 15.8.** Рассчитать передаточную функцию звена ФВЧ первого порядка.

**Решение.** Комплексная передаточная функция звена ФНЧ

$$\underline{H}_{\text{ФНЧ}} = 1/(1 + j\omega RC) = 1/(1 + R/\frac{1}{j\omega C}).$$

Поменяв местами  $R$  и  $1/j\omega C$ , получим комплексную передаточную функцию ФВЧ:

$$\underline{H}_{\text{ФВЧ}} = \frac{1}{1 + 1/j\omega RC} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}. \quad (15.40)$$

### 15.30. АКТИВНЫЕ ПОЛОСОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Методика анализа активных полосовых фильтров в целом аналогична методике исследования ФНЧ. На практике широко используют каталоги, в которых приводятся разнообразные схемы, их расчетные формулы, а часто и программы для числовых расчетов на ЭВМ. Следует еще раз обратить внимание, что ручными методами можно рассчитывать только достаточно простые цепи. Реальные вычисления в большинстве случаев требуют применения либо ПМК, либо ЭВМ различных классов. Приведем схему полосового фильтра (рис. 15.42), расчетные формулы к ней [9] и программу 15.2. Начертив схему замещения данной цепи и составив для нее уравнение по законам электротехники, получим выражение комплексной передаточной функции:

$$H(j\omega) = -K \frac{j\omega(\omega_p/Q)}{[(\omega_p^2 - \omega^2) + j\omega(\omega_p/Q)]}, \quad (15.41)$$

<sup>1</sup> Алексеев В. Радио, — 1987. — № 6, — С. 41.

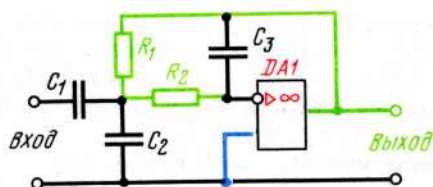


Рис. 15.42

где  $C_{12} = C_1 + C_2$ ;  $\omega_p^2 = 1/R_1 R_2 C_{12} C_3$ ;  $Q = \frac{\sqrt{R_2 C_{12}/R_1 C_3}}{1 + R_2/R_1}$ ;  $K = C_1 K_0/C_{12}$ ,

причем

$$K_0 = \text{ПУЧ} = Q \sqrt{C_{12} R_1 / R_2 C_3}. \quad (15.42)$$

Данные результаты весьма похожи на полученные при анализе электронного аналога колебательного контура в гл. 8. Обратим также внимание, что по ныне действующим правилам ОУ на схемах и в технической документации обозначают буквами DA, с порядковым номером ОУ, как это и сделано на рис. 15.42.

Программа 15.2 для определения значений элементов полосового фильтра, собранного по схеме рис. 15.42

F
/-/
B/O
F
ВП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	F + 20	2 02	X 12	Π → x3 63	X 12	Π → x1 61	X 12	F ÷ 23	x → Π7 47	Π → x2 62
1	1 01	— 11	F — 21	Π → x1 61	X 12	Π → x2 62	÷ 13	Π → x2 62	F — 21	÷ 13
2	Π → x3 63	÷ 13	2 02	÷ 13	F + 20	÷ 13	x → Π4 44	÷ 13	1 01	, 0 —
3	5 05	— 11	F B/O 59	79 79	Π → x7 67	Π → x4 64	— 11	x → Π5 45	Π → x2 62	1 01
4	— 11	F — 21	Π → x2 62	X 12	Π → x1 61	÷ 13	Π → x3 63	÷ 13	2 02	÷ 13
5	F + 20	÷ 13	Π → x2 62	F — 21	÷ 13	Π → x2 62	1 01	— 11	÷ 13	x → Π6 46
6	Π → x4 64	Π → xD 6Г	÷ 13	x → ΠB 4L	Π → x5 65	Π → xD 6Г	÷ 13	x → ΠA 4 —	Π → x6 66	Π → xA 6 —
7	÷ 13	x → ΠC 4C	Π → x2 62	1 01	— 11	Π → xC 6C	X 12	x → Π0 40	C/Π 50	Π → x2 62
8	0 00	, 0 —	0 00	1 01	+ 10	x → Π2 42	БΠ 51	00 00	F	/-/ 00



Набрав программу, следует занести в регистры памяти следующие исходные данные:  $f_0/(f_B - f_H)$  – в  $RG1$  (где  $f_0$  – центральная частота;  $f_B$  и  $f_H$  – частоты среза); ПУЧ – в  $RG2$  (1,5 ... 2,5);  $f_0$  – в  $RG3$ ;  $C_3$  – в  $RGD$  (емкостью  $C_3$  следует задаться). Затем необходимо нажать клавиши В/О и С/П. Чем меньше отношение  $f_0/\Pi = f_0/(f_2 - f_1)$ , тем меньше должна быть добротность цепи, тем легче удовлетворить поставленные требования и тем быстрее происходит счет. При увеличении параметра  $f_0/\Pi$  требования к фильтру ужесточаются и время счета увеличивается. Особенно резкое увеличение времени происходит, если в цепи без положительной обратной связи не представляется возможным обеспечить заданное значение ПУЧ. В этом случае калькулятор долго (до 5 мин, иногда и более) "ищет" необходимые данные, просчитывает множество вариантов и, только убедившись, что заданный ПУЧ обеспечить с помощью данной схемы не представляется возможным, отыскивает минимально допустимый ПУЧ и параметры для этого варианта. По окончании счета результаты оказываются в регистрах: на экране и в  $RG0$  – емкость  $C_2$ , в  $RG4$  – сопротивление  $R_1$ , в  $RG5$  – сопротивление  $R_2$ , в  $RG6$  – емкость  $C_1$ , в  $RG7$  – значение ПУЧ, которое получается при данных параметрах. Коррекции, которым при этом целесообразно подвергнуть полученные результаты, разберем непосредственно на числовом примере.

**Пример 15.9.** Рассчитать  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  и проверить ПУЧ полосового фильтра, если  $f_0 = 3000$  Гц, чтобы полоса  $\Pi = f_B - f_H$  составила 800 Гц. Произведение усиления на частоту (ПУЧ) должно быть примерно 2.

**Решение.** Рассчитаем значение параметра  $f_0/\Pi = 3000/800 = 3,75$ , выберем емкость  $C_3 = 47$  нФ  $= 4,7 \cdot 10^{-8}$  Ф. Выберем исходные данные: в  $RG1$  – 3,75; в  $RG2$  – 2; в  $RG3$  – 3000; в  $RGD$  –  $4,7 \cdot 10^{-8}$  (напомним, чтобы ввести число  $4,7 \cdot 10^{-8}$ , необходимо нажать клавиши

4

°

7

вп

8

|/|

)

После счета оказываются результаты:  $R_1$  (из  $RG4$ ) = 712 Ом;  $R_2$  (из  $RG5$ ) = 1406 Ом;  $C_1$  (из  $RG6$ ) =  $2,67 \cdot 10^{-8}$  Ф;  $C_2$  (из  $RG0$ ) =  $3,31 \cdot 10^{-8}$  Ф; ПУЧ (из  $RG7$ ) = 2,24. Таким образом, с помощью данной цепи не представляется возможным получить такую добротность, которая обеспечивает полосу 800 Гц при ПУЧ=2. Следовательно, либо необходимо увеличивать полосу и этим снижать значение  $f_0/\Pi$ , либо довольствоваться худшим ПУЧ (в данном случае 2,24 вместо желаемых 2). Заметим, что изменение емкости  $C$  приводит к изменению значений остальных элементов, но не к изменению ПУЧ. (Например, при  $C_3 = 33$  нФ,  $R_1 = 1014$  Ом,  $R_2 = 2002$  Ом,  $C_1 = 1,874 \cdot 10^{-8}$  Ф,  $C_2 = 2,324 \times 10^{-8}$  Ф). Если увеличить относительное значение полосы с  $800/3000 = 1/3,75 = 0,266$  до  $857/3000 = 1/3,5 = 0,286$ , отношение  $f_0/\Pi$  становится 3;5. В этом случае ПУЧ оказывается равным 2,05, т.е. практически удовлетворяющим поставленным требованиям. При  $f_0/\Pi = 3,25$  ПУЧ=2. Если необходимо выполнить  $f_0/\Pi = 3,75$ , при ПУЧ=2, то следует переходить к среднечастотным фильтрам, т.е. фильтрам с положительной обратной связью.

В ряде случаев приходится решать обратную задачу, т.е. определять  $f_0$ ,  $f_0/\Pi$  и  $K_0$  по известным значениям элементов. Такой расчет можно выполнить с помощью программы 15.3.

Программа 15.3 для определения параметров  $f_0$ ,  $f_0/\Pi$ ,  $K_0$

F
/-/
B/O
F
BП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	$\Pi \rightarrow xC$ 6Г	$\Pi \rightarrow x0$ 60	+	$\Pi \rightarrow xA$ 6 –	X 12	$\Pi \rightarrow xB$ 6Л	X 12	$\Pi \rightarrow xD$ 6Г	X 12	$F \div$ 23	
1	– 21	2 02	$\div$ 13	$F +$ 20	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi 3$ 43	C/П 50	$\Pi \rightarrow xC$ 6Г	$\Pi \rightarrow x0$ 60	+	10
2	$\Pi \rightarrow xB$ 6Л	X 12	$\Pi \rightarrow xA$ 6 –	$\div$ 13	$\Pi \rightarrow xD$ 6Г	$\div$ 13	F – 21	$\Pi \rightarrow xB$ 6Л	$\Pi \rightarrow xA$ 6 –	$\div$ 13	
3	1 01	+	$\div$ 13	$x \rightarrow \Pi 1$ 41	C/П 50	$\Pi \rightarrow xC$ 6Г	$\Pi \rightarrow x0$ 60	+	$\Pi \rightarrow xA$ 6 –	X 12	
4	$\Pi \rightarrow xD$ 6Г	$\div$ 13	$\Pi \rightarrow xB$ 6Л	$\div$ 13	F – 21	$\Pi \rightarrow x1$ 61	X 12	$x \rightarrow \Pi 2$ 42	$\Pi \rightarrow xC$ 6Г	$\Pi \rightarrow x0$ 60	
5	+	$F \div$ 23	$\Pi \rightarrow xC$ 6Г	X 12	X 12	$x \rightarrow \Pi 4$ 44	C/П 50	F	/–/		

Исходные данные следует занести в регистры:  $R_1$  — в  $RGA$ ,  $R_2$  — в  $RGB$ ,  $C_1$  — в  $RGC$ ,  $C_2$  — в  $RG0$ ,  $C_3$  — в  $RGD$  и нажать на клавиши B/O и C/П.

По окончании счета на экране и в  $RG3$  появляется значение частоты  $f_0$ , после нажатия клавиши C/П и последующего счета — на экране и в  $RG1$  — значение  $f_0/(f_B - f_H)$ , после следующего нажатия C/П и счета — на экране и в  $RG4$  — значение  $K_0$ , т. е. коэффициента передачи на резонансной частоте. Зная элементы цепи, по (15.41) можно рассчитать передаточную функцию, а следовательно, АЧХ и ФЧХ данного фильтра.

### 15.31. ПОНЯТИЕ О ЦЕПЯХ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫМИ КОНДЕНСАТОРАМИ

Современная микроэлектроника позволяет изготавливать на одном кристалле и за один технологический цикл электронные устройства, содержащие большое число элементов — резисторов, конденсаторов, транзисторов, ОУ и т. д. Однако объем, занимаемый резистором, значительно (иногда до 100 раз) превышает объем, занимаемый конденсатором, причем с увеличением сопротивления резистора увеличивается, его размеры. Таким образом, оказалась чрезвычайно перспективной идея — заменить резисторы некоторой, пусть даже многоэлементной схемой, но не содержащей резистивных элементов. Такая замена весьма существенна также и потому, что уменьшение числа резисторов снижает потребляемую мощность и выделение тепла в микросхеме.

Идея такой замены состоит в следующем. Пусть имеется цепь рис. 15.43, а. Если  $u_1 > u_2$ , то по цепи потечет ток от точки  $a$  к точке  $b$ . Заменяем теперь цепь на рис. 15.43, а цепью на рис. 15.43, б. Переключатель П в некоторый момент переведем из положения 2 в положение 1. Поскольку напряжение

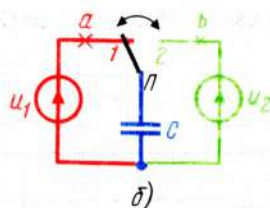
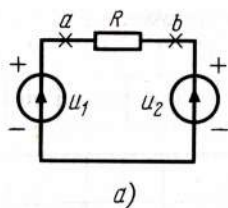


Рис. 15.43

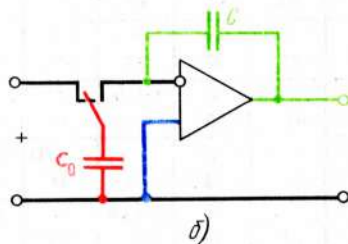
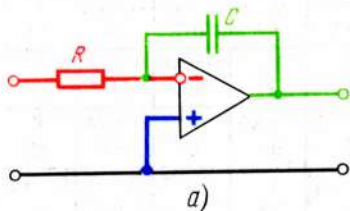


Рис. 15.44

на конденсаторе отлично от напряжения  $u_1$ , конденсатор станет заряжаться и в ветви первого источника потечет ток, также, как он протекал в цепи рис. 15.43, а. После переключения ключа в положение 2, конденсатор станет разряжаться и в проводнике  $b$  окажется ток. Эти переключения производят с достаточно большой частотой, которую называют тактовой. В качестве переключателя используют специальное электронное устройство, не содержащее резисторов.

Таким образом, с помощью активных цепей сначала удалось имитировать индуктивности, т. е., не создавая магнитного поля, получать цепи второго порядка с комплексно-сопряженными полюсами, что в пассивных цепях возможно только в  $RLC$ -цепях. Дальнейшее развитие микроэлектроники привело к возможности замены  $R$ -элементов устройствами АС-вида "Электронное сопротивление"  $R_z$  в цепи рис. 15.43, б определяют из выражения  $R_z = 1/f_T C_0$ , где  $f_T$  — тактовая частота переключения, т. е. число переключений, совершаемых в единицу времени. "Электронные сопротивления" можно использовать в разнообразных электронных устройствах — сумматорах, интеграторах, активных фильтрах и т. д. Например, схема интегратора вида АРС приведена на рис. 15.44, а, а аналогичная ей вида АС — на рис. 15.44, б. В настоящее время АС — цепи развиваются чрезвычайно бурно и число электронных устройств с применением данных цепей неуклонно возрастает.

#### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие фильтры называются фильтрами нижних, верхних частот, полосовыми, заградительными?
2. Какая цепь называется лестничной? Каким образом лестничную цепь делят на Т-, П- и Г-образные звенья?



3. Каким оказывается характеристическое сопротивление в различных фильтрах? В чем состоят трудности работы фильтров в согласованном режиме? Приведите примеры.

4. Нарисуйте кривые ослаблений фильтров различных типов при работе на согласованную нагрузку.

5. Какие фильтры называются фильтрами типа  $m$ ? Каковы их достоинства и недостатки по сравнению с фильтрами типа  $k$ ?

6. Что называется "порядком" фильтра?

7. Каковы отличительные особенности характеристик Баттерворта?

8. Каковы отличительные особенности характеристик Чебышева?

9. Каковы отличительные особенности характеристик Золотарева?

10. Какие величины называют нормированными? Приведите примеры.

11. В чем состоит методика расчета элементов фильтра с помощью каталогов нормированных коэффициентов? Приведите примеры.

12. Как изменяются характеристики ослабления фильтров Баттерворта при увеличении числа звеньев фильтра?

13. Как изменяются характеристики ослабления фильтров Чебышева при изменении коэффициента сжатия  $\epsilon$ ?

14. Как сказываются потери в фильтрах на их характеристиках? Приведите примеры.

15. Нарисуйте эквивалентные схемы кварцевого элемента. В чем состоят достоинства кварцевых фильтров по сравнению с  $LC$ -фильтрами.

16. В чем состоит принцип использования кварцевых фильтров с поверхностно-акустическими волнами?

17. Дайте понятия о магнитострикционных фильтрах.

18. Как рассчитывают групповое время задержки? Какие цепи называются линиями задержки?

19. Объясните, почему линия задержки должна состоять из большого числа индуктивностей и емкостей? Можно ли вместо 10 индуктивностей по 100 мкГн и 10 емкостей по 100 пФ каждая взять одну индуктивность в 1 мГн и одну емкость в 1 нФ? Если нельзя, то почему?

20. Каковы основные достоинства и недостатки фильтров Бесселя? Можно ли использовать эти фильтры в качестве линий задержки?

21. Какие фильтры называют активными? В чем преимущества активных фильтров по сравнению с пассивными?

22. Покажите схему включения ОУ в неинвертирующем режиме. Каковы при этом входное сопротивление и коэффициент передачи такой цепи?

23. Нарисуйте схему повторителя, выполненного на ОУ. Каковы достоинства такой цепи? Какова область ее применения? Приведите примеры.

24. Нарисуйте схему активного звена первого порядка. Как рассчитать ослабление, обеспечиваемое таким звеном?

25. Нарисуйте схему активного звена второго порядка. Как рассчитать ослабление, обеспечиваемое таким звеном?

26. Сравните характеристики ослаблений в полосах пропускания и задерживания ФНЧ первого и второго порядков.

27. Покажите методику расчетов многозвенных фильтров НЧ различных типов.

28. Каким образом рассчитывают фазные характеристики звеньев цепей: а) первого; б) второго; в)  $n$ -го порядков?

29. Какими переходными характеристиками обладают фильтры различных типов? Приведите примеры.

30. Чем отличаются схемы низкочастотных фильтров от средне- и высокочастотных?

31. Что понимается под чувствительностью фильтра? Приведите примеры.

32. Каким образом можно образовывать активные фильтры верхних частот?
33. Напишите выражение комплексного коэффициента передачи активного полосового фильтра. Каков физический смысл коэффициентов в этом выражении?
34. Каков физический смысл параметра ПУЧ? Каковы примерно значения этого коэффициента в низкодобротных полосовых фильтрах второго порядка?
35. Какова идея использования цепей с переключаемыми конденсаторами? Каковы достоинства таких цепей?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лосев А. К. Теория линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1987. — 511 с.
2. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1986. — 544 с.
3. Попов В. П. Основы теории цепей. — М.: Высшая школа, 1985. — 495 с.
4. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. М.: Высшая школа, 1981. — 333 с.
5. Попов П. А. Теория связи по проводам. — М.: Связь, 1978. — 271 с.
6. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. — Л.: Энергия, 1972. — 815 с.
7. Атабеков Г. И. Линейные электрические цепи. — М.: Энергия, 1978. — 591 с.
8. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1982. — 487 с.
9. Мошиц Г., Хорн П. Проектирование активных фильтров; Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 320 с.
10. Справочник по расчету и проектированию ARC-схем/Под ред. А. А. Ланнэ. — М.: Радио и связь, 1984. — 368 с.
11. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Радиотехнические расчеты на микрокалькуляторах. Справочное пособие. — М.: Радио и связь, 1983. — 256 с.
12. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. — М.: Наука, 1986. — 223 с.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

- Автотрансформатор – 341
- Алгебраическая форма комплексного числа – 160
- Ампер – 25
- Анализатор спектра – 23
- Аппроксимация характеристик нелинейных элементов – 333
- Аргумент комплексного сопротивления – 179, 193
  - числа – 161
  - комплексной проводимости – 172
  - частотной характеристики – 191

### Б

- Баланс мощности – 51
- Биения – 380
- Бифилярная намотка – 142

### В

- Ватт – 33
- Вебер – 119
- Вектор – 155
- Векторная диаграмма – 155
- Ветвь – 54
- Взаимные сопротивления – 82
- Вихревые токи – 135
- Вносимые сопротивления – 269
- Воздействие – 36, 144, 151
- Вольт – 8, 16
- Вольт-ампер – 175
  - реактивный – 175

### Г

- Гармонические колебания – 19
  - составляющие – 293
- Генератор сигналов – 17
- Генри – 121
- Герц – 20

Гиратор – 249

Гистерезис – 126

Граничная частота дифференцирующей цепи – 402

– колебательного контура – 223

– простейшей цепи – 193

Граф направленный – 206

– цепи топологический – 59

### Д

Двухполюсник – 54

– реактивный – 250

Джоуль – 31

Действующие значения ЭДС, напряжения, тока – 34

Делитель напряжения – 90

Децибел – 225

Дельта-функция – 392

Дерево графа – 206

Диапазоны частот – 227

Длительность переходного процесса – 350

Добротность – 214

### Е

Емкость электрическая – 10

### З

Закон Кирхгофа второй – 42

– первый – 51

– коммутации – 345

– Кулона – 5

– Ленца – 132

– Ома – 29

Заряд – 5

Затухание контура – 215

Звено второго порядка – 443

– первого порядка – 442

### И

Иерархический ряд сигналов – 311

Избирательность контура – 225



Изображение — 134, 381  
Инверсирование сигналов — 111  
Индуктивность — 136  
— взаимная — 263  
Индукция магнитная — 119  
Интеграл Фурье — 395  
Интегратор — 407  
Источник зависимый — 101  
— напряжения — 23  
— сигналов — 16  
— тока — 94

## К

Катушка с током — 120  
— с ферромагнитным сердечником — 334  
Каскадное соединение четырехполюсников — 412  
Ключ электронный — 356  
Конвертор отрицательных сопротивлений — 115  
Конденсатор — 10  
Контур — 54  
— колебательный параллельный — 236  
— — последовательный — 213  
— электронный — 233  
Коммутация — 344  
Комплексная амплитуда — 164  
— проводимость — 172  
Комплексные сопротивления — 179  
— сопряженные выражения — 163  
— числа — 159  
Коэрцитивная сила — 126  
Коэффициент амплитуды — 321  
— искажений — 313  
— передачи — 88  
— полезного действия — 84  
— связи — 265, 275  
— сжатия — 430  
— — трансформации — 337

## Л

Линия задержки — 437  
Логическая единица — 22  
Логический ноль — 22

## М

Магнитная проницаемость — 122  
Матрица главных сечений — 205

Матричная форма записи уравнений — 65  
Метод двух узлов — 78  
— наложения — 75, 105  
— операторный расчета переходных процессов — 381  
— расчета символический — 157  
— эквивалентного генератора — 79  
Мнимая единица — 159  
Модуль комплексного сопротивления — 179, 192  
— — числа — 160  
— комплексной проводимости — 172  
Мощность — 33  
— импульсная — 365  
— мгновенная — 174  
— реактивная — 175  
— резистивная — 33, 174  
— полная — 175  
Микросхема — 14

## Н

Накопитель энергии — 144  
Напряжение — 8  
— комплексное — 166  
— магнитное — 121  
— операторное — 387  
— пробивное — 11  
— среднее за период — 294  
— узловое — 73  
Напряженность поля магнитного — 120  
— — электрического — 7  
Незатухающие колебания — 212  
Ненулевые начальные условия — 387  
Непер — 412  
Непрерывность энергии — 345  
Нормированное значение величин — 422  
Нулевые начальные условия — 344  
Ньютон — 6

## О

Обход контура — 62  
Ограничитель — 330  
Огибающая напряжения — 380  
Ом — 26  
Оригинал — 134, 381  
Осциллограф — 18  
Отклик — 144  
Отрицательная обратная связь — 111  
Отрицательные углы — 163

## П

- Параллельное соединение катушек индуктивностей – 266
  - – конденсаторов – 13
  - – резисторов – 52
- Параметр связи – 280
- Параметры входные – 54
  - выходные – 54
- Переходные процессы – 344
- Период – 17
- Плотность спектральная – 308
- Показательная форма комплексного числа – 160, 192
- Поле магнитное – 118
  - электрическое – 7
- Положительное направление тока – 41
- Полоса задерживания – 414
  - пропускания одиночного контура – 223
  - – связанной системы – 290
  - – фильтра – 414
- Порядок фильтра – 421
- Последовательное соединение катушек индуктивностей – 263
  - – конденсаторов – 13
  - – резисторов – 40
- Постоянная передача четырехполюсника – 412
  - времени цепи – 350
- Потенциал – 8
- Поток магнитный – 119
  - рассеяния – 335
- Потребители энергии – 28
- Правило буравчика – 119
  - левой руки – 128
  - правой руки – 131
- Преобразование активного треугольника в активную звезду – 100
- Принцип взаимности – 80
  - непрерывности энергии – 345
- Проводимость комплексная – 172
  - реактивная – 172
  - резистивная – 27
- Программы на ПМК – 63, 93, 181, 183, 185, 256, 257, 259, 298, 300, 301

## Р

- Работа электрического тока – 30
- Рабочее ослабление – 412

- Радиоимпульс – 380
- Размах напряжения – 19
- Расстройка абсолютная – 218
  - обобщенная – 220
  - относительная – 219
- Расщепление источника тока – 96
- Ребро графа – 206
- Резонанс напряжений – 222
  - полный – 279
  - сложный – 278
  - токов – 220
  - частный – 277
- Резонансная кривая – 220
- Резонатор кварцевый – 435
- Ряд Фурье – 293

## С

- Свободные колебания – 373
- Связь критическая – 279
- Сечение графа главное – 206
- Сечение цепи – 60
- Сигнал источника – 16
  - непериодический – 17
  - периодический – 17
  - прямоугольный – 18
- Силы сторонние – 16
- Символический метод расчета – 159
- Сименс – 81
- Синтезирование фильтра – 422
- Синусоида – 19
- Система единиц интернациональная (СИ) – 6
- Скважность – 18
- Согласование источника с нагрузкой – 84
- Соединение звездой – 59, 100
- Сопrotivление вносимое – 269
  - внутреннее – 86
  - комплексное – 179
  - магнитное – 121
  - операторное – 382
  - реактивное – 167
  - резистивное линейное – 28
  - – нелинейное – 323
  - – удельное – 26
  - характеристическое контура – 215
  - – четырехполюсника – 421
- Составляющая свободная напряжения (тока) – 347
  - – – в цепях первого порядка – 353

Спектр сигналов непериодических — 395  
 — — периодических — 301  
 — сплошной — 308  
 Спектральная плотность — 395  
 Сумма алгебраическая — 41, 158  
 — арифметическая — 41, 158  
 — геометрическая — 158  
 Сумматор — 115  
 Схема замещения — 175, 275

## Т

Телевизионный канал — 227  
 Телефонный канал — 227  
 Тесла — 119  
 Ток — 24  
 — комплексный — 166  
 — контурный — 71  
 — операторный — 389  
 — смещения — 134  
 — электрический — 24  
 Транзистор — 108  
 Трансформатор воздушный — 268  
 — идеальный — 337  
 — реальный — 337  
 — с ферромагнитным сердечником — 336  
 Трансформация импульсов тока — 364  
 — сопротивлений — 338  
 Тригонометрическая форма комплексного числа — 160, 192

## У

Узел неустраняемый — 51, 205  
 — устранимый — 205  
 Умножитель частоты — 330  
 Усилитель операционный — 109  
 Участок цепи — 48

## Ф

Фаза — 152  
 — начальная — 153  
 Фазовращатель активный — 189  
 — пассивный — 187  
 Фарад — 7  
 Фильтр активный — 440  
 — Баттерворта — 422  
 — верхних частот — 417

— кварцевый — 434  
 — лестничный — 415  
 — магнитоотрицательный — 437  
 — мостовой — 415  
 — нижних частот — 415  
 — полосовой — 419  
 — Чебышева — 430  
 — электрический частотный — 414  
 Форма сигнала — 17  
 Формула разложения — 385  
 Функция единичная — 391  
 — импульсная — 147, 392  
 — передаточная — 198

## Х

Характеристики амплитудно-частотные  
 цепи — 195  
 — — управляемые — 329  
 — вольт-амперные — 323  
 — импульсные — 392  
 — передаточные цепей — 198  
 — связанных систем — 285  
 — переходные цепей — 392  
 — — фильтров — 449  
 — частотные входные — 191  
 Хорда графа — 206

## Ц

Цепь активная — 106  
 — ARC — 110  
 — второго порядка в переходном режиме — 372  
 — демпфирующая — 379  
 — дифференцирующая — 400  
 — дуальная — 149  
 — интегрирующая — 407  
 — нелинейная — 323  
 — неразветвленная — 40  
 — пассивная фазосдвигающая — 187  
 — первого порядка в переходном режиме — 352  
 — разветвленная — 51  
 — разделительная — 404  
 — с малым затуханием — 373  
 — с ненулевыми начальными условиями — 387



- эквивалентная – 175
- электрическая – 28

## Ч

Частота – 20

- бесконечного ослабления – 420
- нулевая – 253
- полюсная – 253
- среза – 415
- резонансная – 214
- тактовая – 458

Четырехполюсник автономный – 410

- неавтономный – 410
- несимметричный – 410

- пассивный проходной – 410
- симметричный – 410

Чувствительность цепи – 453

## Э

Экспонента – 351

Электродвижущая сила – 16

Электромагнит – 131

Электромагнитная индукция – 131

Электрон – 5

Элементы неэнергоемкие – 144

– энергоемкие – 144

Энергия магнитного поля – 142

– электрического поля – 11

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
<b>Глава 1. Основы электростатики. . . . .</b>	<b>5</b>
1.1. Понятие об электрическом заряде. . . . .	5
1.2. Взаимодействие зарядов. . . . .	6
1.3. Электрическое поле. . . . .	7
1.4. Потенциал. Напряжение . . . . .	8
1.5. Электрическая емкость. Конденсаторы. . . . .	10
1.6. Пробивное напряжение конденсатора. . . . .	11
1.7. Энергия электрического поля . . . . .	11
1.8. Соединение конденсаторов . . . . .	12
1.9. Понятие о микросхемах. . . . .	14
Вопросы для самопроверки. . . . .	15
<b>Глава 2. Основные понятия . . . . .</b>	<b>16</b>
2.1. Источники электрических сигналов . . . . .	16
2.2. Понятие о сигналах гармонической формы . . . . .	19
2.3. Сигналы, неизменные во времени . . . . .	21
2.4. Сигналы прямоугольной формы. . . . .	22
2.5. Временные и спектральные представления сигналов. . . . .	22
2.6. Смысл знаков "+" и "-" у источников . . . . .	23
2.7. Электрический ток . . . . .	24
2.8. Удельное сопротивление проводников . . . . .	26
2.9. Резистивные сопротивления и проводимости . . . . .	27
2.10. Внутреннее сопротивление источника. . . . .	27
2.11. Электрическая цепь. . . . .	28
2.12. Понятие о линейных и нелинейных резистивных сопротивлениях . . . . .	28
2.13. Работа электрического тока. . . . .	30
2.14. Мощность электрического тока . . . . .	33
2.15. Действующие значения тока, напряжения, ЭДС. . . . .	34
Вопросы для самопроверки. . . . .	38
<b>Глава 3. Резистивные цепи. . . . .</b>	<b>40</b>
3.1. Неразветвленные электрические цепи. . . . .	40
3.2. Расчет тока в неразветвленной цепи. . . . .	40
3.3. Второй закон Кирхгофа . . . . .	42
3.4. Примеры расчета неразветвленных цепей . . . . .	45
3.5. Распределение потенциалов в цепи. . . . .	48
3.6. Расчет токов на участке резистивной цепи с источником напряжения . . . . .	48
3.7. Баланс мощностей . . . . .	51
3.8. Разветвленные цепи . . . . .	51
3.9. Параллельное соединение резисторов . . . . .	52

3.10. Распределение токов в параллельных ветвях . . . . .	57
3.11. Соединение резисторов треугольником и звездой . . . . .	58
3.12. Понятие о топологических графах цепи . . . . .	59
3.13. Первый закон Кирхгофа для сечений . . . . .	60
3.14. Расчет цепей, содержащих резистивные сопротивления и источники напряжения с помощью законов Кирхгофа . . . . .	60
3.15. Методика составления уравнений при расчете токов по законам Кирхгофа . . . . .	61
3.16. Расчет системы уравнений с тремя неизвестными с помощью ПМК. . . . .	62
3.17. Матричная форма записи уравнений электрического равновесия цепи. . . . .	65
3.18. Проверки произведенных расчетов . . . . .	67
3.19. Расчет цепей методом контурных токов . . . . .	71
3.20. Метод узловых напряжений (узловых потенциалов) . . . . .	73
3.21. Метод наложения . . . . .	75
3.22. Метод двух узлов . . . . .	78
3.23. Метод эквивалентного генератора (метод ХХ и КЗ) . . . . .	79
3.24. Принцип взаимности (теорема взаимности). . . . .	80
3.25. Общий случай определения входных и взаимных сопротивлений (проводимостей) цепей . . . . .	81
3.26. Взаимные сопротивления (проводимости) цепей . . . . .	82
3.27. Исследование цепи с переменным сопротивлением . . . . .	82
3.28. Определение внутреннего сопротивления цепи в общем случае . . . . .	86
3.29. Понятие о четырехполюсниках. Коэффициент передачи. . . . .	87
3.30. Коэффициент передачи в мостовой схеме . . . . .	88
3.31. Делитель напряжения с плавной регулировкой . . . . .	90
3.32. Источники тока . . . . .	94
3.33. Расщепление источников. . . . .	96
3.34. Расчет цепей, содержащих источника тока . . . . .	98
3.35. Преобразование треугольника сопротивлений с источником напряжения в эквивалентную звезду . . . . .	100
3.36. Зависимые (управляемые) источники напряжения и тока . . . . .	101
3.37. Расчеты цепей с зависимыми источниками. . . . .	102
3.38. Расчет токов в цепях с зависимыми источниками методом наложения . . . . .	105
3.39. Понятие об активных элементах. . . . .	106
3.40. Понятие об операционных усилителях . . . . .	109
3.41. Эквивалентная схема ОУ . . . . .	110
3.42. Понятие об отрицательной обратной связи. . . . .	111
3.43. Преобразование сигналов синусоидальной формы в сигналы прямоугольной формы. . . . .	114
3.44. Сумматоры. . . . .	115
3.45. Конверторы отрицательных сопротивлений (КОС) . . . . .	115
Вопросы для самопроверки. . . . .	116
<b>Глава 4. Электромагнетизм и электромагнитная индукция . . . . .</b>	<b>118</b>
4.1. Понятие о магнитном поле . . . . .	118
4.2. Магнитное поле проводника с током . . . . .	119
4.3. Магнитное поле катушки с током . . . . .	120
4.4. Магнитная проницаемость. . . . .	122
4.5. Связь между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля . . . . .	124
4.6. Зависимость относительной магнитной проницаемости от напряженности поля . . . . .	125
4.7. Гистерезис . . . . .	126
4.8. Действие магнитного поля на проводник с током . . . . .	127



4.9. Взаимодействие параллельных проводников с током . . . . .	129
4.10. Электромагниты. . . . .	131
4.11. Электромагнитная индукция . . . . .	131
4.12. Закон Ленца . . . . .	132
4.13. Вихревые токи. . . . .	135
4.14. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле . . . . .	136
4.15. Индуктивность. . . . .	136
4.16. Индуктивность катушек с незамкнутым сердечником . . . . .	139
4.17. Связь между мгновенными напряжениями и токами в индуктивности . . . . .	140
4.18. Энергия магнитного поля . . . . .	142
4.19. Бифилярная обмотка. . . . .	142
Вопросы для самопроверки. . . . .	143
<b>Глава 5. Цепи с накопителями энергии при произвольных воздействиях . . . . .</b>	<b>144</b>
Вопросы для самопроверки. . . . .	150
<b>Глава 6. Цепи при гармоническом воздействии. . . . .</b>	<b>151</b>
6.1. Общие положения. . . . .	151
6.2. Параметры переменного напряжения (тока) гармонической формы . . . . .	152
6.3. Графическое изображение синусоидальных величин. . . . .	154
6.4. Операции с векторами символическим методом . . . . .	157
6.5. Три формы записи комплексных чисел. . . . .	160
6.6. Математические операции с комплексными числами . . . . .	161
6.7. Запись комплексных изображений по их временным оригиналам . . . . .	164
6.8. Производная и интеграл от комплексного выражения . . . . .	164
6.9. Расчеты простейших электрических цепей с помощью комплексных выражений . . . . .	165
6.10. Комплексная проводимость . . . . .	172
6.11. Расчеты параллельных $RL$ - и $RC$ -цепей . . . . .	173
6.12. Мощность. . . . .	174
6.13. Эквивалентные двухполюсники . . . . .	175
6.14. Треугольники резистивных, реактивных и полных величин . . . . .	177
6.15. Общий случай расчета цепей при гармоническом воздействии. . . . .	178
6.16. Расчеты комплексных чисел с помощью программируемого микрокалькулятора . . . . .	181
6.17. Расчеты с помощью ПМК цепей, требующих решения системы комплексных уравнений. . . . .	182
6.18. Пассивные фазосдвигающие цепи . . . . .	187
6.19. Активный фазовращатель. . . . .	189
Вопросы для самопроверки. . . . .	190
<b>Глава 7. Цепи <math>RL</math>- и <math>RC</math>- при гармоническом воздействии на переменной частоте. . . . .</b>	<b>191</b>
7.1. Входные амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики . . . . .	191
7.2. Неразветвленные $RL$ - и $RC$ -цепи . . . . .	193
7.3. Входные АЧХ и ФЧХ разветвленных цепей с одним накопителем энергии . . . . .	195
7.4. Передаточные функции . . . . .	198
7.5. Построение кривых передаточных ФЧХ . . . . .	200
7.6. Расчеты частотных характеристик сложных цепей . . . . .	204
7.7. Некоторые сведения о топологии цепей. Составление матрицы главных сечений . . . . .	205
7.8. Ввод в машину исходных данных . . . . .	208
Вопросы для самопроверки. . . . .	210

<b>Глава 8. Резонансные явления в одиночных колебательных контурах.</b>	<b>211</b>
8.1. Понятие о свободных колебаниях в $LC$ -цепи	211
8.2. Последовательная $RLC$ -цепь при периодическом гармоническом воздействии	213
8.3. Добротность	214
8.4. Замена параллельной $RC$ -цепи эквивалентной последовательной	215
8.5. Добротность нагруженного контура	216
8.6. Резонансная частота нагруженного контура	217
8.7. Расстройки	218
8.8. Входные характеристики пассивного последовательного контура	219
8.9. Входной ток в контуре	220
8.10. Передаточные характеристики пассивного последовательного контура	221
8.11. Напряжение на индуктивности и резистивном сопротивлении	222
8.12. Полоса пропускания	223
8.13. Избирательность контура	225
8.14. Избирательность контура на граничной частоте	226
8.15. Технические примеры диапазонов частот различных источников сигналов	227
8.16. Прохождение через колебательный контур сигналов негармонической формы	229
8.17. Настройка пассивных контуров	230
8.18. Определение резонансной частоты и добротности цепи в общем случае	231
8.19. Электронный аналог колебательного контура	233
8.20. Пассивный параллельный колебательный контур	237
8.21. Входные характеристики параллельного контура	238
8.22. Идеальный параллельный контур	241
8.23. Токи в ветвях	243
8.24. Избирательные свойства параллельного контура	244
8.25. Контур с автотрансформаторным (неполным) включением	247
8.26. Элементы колебательного контура. Границы применимости колебательных систем	248
8.27. Избирательные цепи с "электронной индуктивностью"	249
8.28. Реактивные двухполюсники	250
8.29. Стандартная форма записи входных сопротивлений реактивных двухполюсников	254
8.30. Программы для нахождения нулевых и полюсных частот с помощью ПМК	256
Вопросы для самопроверки	260
<b>Глава 9. Связанные системы</b>	<b>263</b>
9.1. Понятие о взаимной индуктивности	263
9.2. Последовательная цепь с взаимной индуктивностью	263
9.3. Экспериментальное определение параметров $M$ и $K$	265
9.4. Параллельное соединение катушек с взаимной индуктивностью	266
9.5. Воздушный трансформатор	268
9.6. Расчет баланса мощностей в цепях с взаимной индуктивностью	273
9.7. Экспериментальное определение вносимых сопротивлений	274
9.8. Т-образная схема замещения воздушного трансформатора	275
9.9. Коэффициент связи	275
9.10. Резонансы в связанных системах	277
9.11. Критическая связь	279
9.12. Параметр связи	280
9.13. Вносимые сопротивления в функции $Q$ , $\xi$ , $P_{св}$	281
9.14. Входные характеристики связанной системы	282
9.15. Коэффициент передачи связанной цепи при резонансе в зависимости от значения параметра связи	283
9.16. Передаточные характеристики связанных систем	285

9.17. Передаточная функция при критической связи . . . . .	288
9.18. Максимальные значения коэффициента передачи у связанных систем . . . . .	289
9.19. Полоса пропускания связанных систем . . . . .	290
9.20. Характерные значения параметра связи в связанных системах . . . . .	290
9.21. Передаточная фазочастотная характеристика. . . . .	291
Вопросы для самопроверки. . . . .	291
<b>Глава 10. Цепи при негармонических воздействиях . . . . .</b>	<b>292</b>
10.1. Основные понятия. Разложение периодических функций на гармонические составляющие . . . . .	292
10.2. Виды симметрии периодических негармонических кривых . . . . .	295
10.3. Графическое определение гармонических составляющих . . . . .	297
10.4. Спектральное представление сигналов . . . . .	301
10.5. Спектры сигналов с прямоугольной последовательностью . . . . .	303
10.6. Спектры при изменении длительности импульса и периода сигнала . . . . .	306
10.7. Практическая ширина спектров сигналов . . . . .	310
10.8. Иерархический ряд сигналов . . . . .	311
10.9. Коэффициент искажений . . . . .	313
10.10. Форма тока в $RL$ - и $RC$ -цепях при воздействии напряжений прямоугольной формы. . . . .	314
10.11. Действующее значение напряжений (токов) при негармонических воздействиях . . . . .	316
10.12. Среднее за период значение сигналов негармонической формы . . . . .	317
10.13. Цепи с открытым и закрытым входами . . . . .	317
10.14. Максимальные значения сигналов негармонической формы . . . . .	318
10.15. Расчеты цепей при негармонических воздействиях. . . . .	319
10.16. Мощность при негармонических воздействиях . . . . .	320
10.17. Коэффициент амплитуды . . . . .	321
Вопросы для самопроверки. . . . .	322
<b>Глава 11. Нелинейные цепи . . . . .</b>	<b>323</b>
11.1. Линейные и нелинейные резистивные сопротивления . . . . .	323
11.2. Форма тока в нелинейной цепи при гармоническом воздействии . . . . .	325
11.3. Экспериментальное определение ВАХ. . . . .	327
11.4. Определение коэффициентов ряда ВАХ по спектральным характеристикам . . . . .	328
11.5. Типовые ВАХ. . . . .	328
11.6. Нелинейные элементы с управляемой ВАХ . . . . .	329
11.7. Умножители частоты . . . . .	330
11.8. Графические методы анализа нелинейных резистивных цепей . . . . .	332
11.9. Определение рабочих точек нелинейных резистивных элементов . . . . .	333
11.10. Понятие аппроксимации характеристик нелинейных элементов . . . . .	333
11.11. Катушка с ферромагнитным сердечником. Режимы работы. . . . .	334
11.12. Потоки рассеяния. . . . .	335
11.13. Индуктивность катушки с замкнутым сердечником . . . . .	336
11.14. Трансформатор с ферромагнитным сердечником . . . . .	336
11.15. Передаточные амплитудно-частотные характеристики трансформатора. . . . .	339
11.16. Автотрансформатор . . . . .	341
Вопросы для самопроверки. . . . .	343
<b>Глава 12. Переходные процессы . . . . .</b>	<b>344</b>
12.1. Понятие о переходном режиме . . . . .	344
12.2. Непрерывность энергии. Законы коммутации. . . . .	345
12.3. Понятия: $t = -0$ и $t = +0$ . . . . .	346



12.4. Составление уравнений электрического равновесия цепи при коммутациях . . .	346
12.5. Практическое время переходного процесса. Постоянная времени цепи . . . . .	350
12.6. Напряжения на резистивном сопротивлении и индуктивности . . . . .	351
12.7. Сопротивление индуктивного элемента при переходном процессе . . . . .	352
12.8. Характер свободной составляющей в цепях первого порядка . . . . .	353
12.9. Включение $RC$ -цепи на постоянное напряжение . . . . .	354
12.10. Противоречие между выборами параметров цепи для установившегося и переходного режимов. . . . .	356
12.11. Разряд конденсатора на резистивное сопротивление. . . . .	359
12.12. Отключение источников от цепи. . . . .	363
12.13. Трансформация импульсов тока с помощью $RC$ -цепи. . . . .	364
12.14. Переходные процессы в цепях второго порядка . . . . .	372
12.15. Свободные процессы в цепи с малым затуханием . . . . .	373
12.16. Переходные процессы в $RLC$ -цепи при воздействиях прямоугольной формы .	375
12.17. Выходное напряжение на индуктивном элементе . . . . .	377
12.18. Колебательный контур с источником напряжения гармонической формы . .	380
12.19. Понятие об операторном методе расчета переходных процессов . . . . .	381
12.20. Нахождение временных функций (оригиналов) по операторным изображениям с помощью формулы разложения . . . . .	385
12.21. Составление операторных уравнений в цепях с ненулевыми начальными условиями. . . . .	387
12.22. Операции дифференцирования и интегрирования в операторной форме . . .	389
12.23. Достоинства операторного метода расчетов цепей в переходных режимах . .	390
12.24. Физический смысл корней знаменателя операторного уравнения. . . . .	391
12.25. Единичная функция . . . . .	391
12.26. Импульсная функция . . . . .	392
12.27. Переходная и импульсная характеристики цепей. . . . .	392
12.28. Спектры непериодических сигналов . . . . .	395
12.29. Спектр переходной характеристики. . . . .	397
Вопросы для самопроверки. . . . .	399
<b>Глава 13. Дифференцирующие и интегрирующие цепи . . . . .</b>	<b>400</b>
13.1. Дифференцирующие цепи при периодических воздействиях . . . . .	400
13.2. Дифференцирующие цепи при непериодических воздействиях. . . . .	405
13.3. Активные дифференцирующие цепи. . . . .	406
13.4. Пассивные интегрирующие цепи . . . . .	407
13.5. Интегрирование непериодических сигналов . . . . .	408
Вопросы для самопроверки. . . . .	409
<b>Глава 14. Краткие сведения о четырехполюсниках . . . . .</b>	<b>410</b>
Вопросы для самопроверки. . . . .	413
<b>Глава 15. Электрические фильтры . . . . .</b>	<b>414</b>
15.1. Основные понятия. . . . .	414
15.2. Пассивные $LC$ -фильтры. . . . .	415
15.3. Расчет фильтров по характеристическим параметрам . . . . .	415
15.4. Полосовой фильтр. . . . .	419
15.5. Пассивные $LC$ -фильтры типов $k$ и $m$ . . . . .	419
15.6. Понятие о синтезировании фильтрующих четырехполюсников . . . . .	421
15.7. Фильтры с характеристиками Баттерворта, Чебышева, Золотарева . . . . .	422
15.8. Исходные данные для расчета фильтров . . . . .	423
15.9. Расчет ФНЧ с характеристиками Баттерворта . . . . .	423
15.10. Расчет фильтров ФВЧ с характеристиками Баттерворта. . . . .	426

15.11. Расчет полосовых фильтров с характеристиками Баттерворта . . . . .	427
15.12. Фильтры Чебышева . . . . .	430
15.13. Понятие о фильтрах Золотарева . . . . .	433
15.14. Влияние потерь . . . . .	434
15.15. Понятие о кварцевых фильтрах . . . . .	434
15.16. Понятие о магнитострикционных фильтрах . . . . .	437
15.17. Линии задержки . . . . .	437
15.18. Задерживающие свойства фильтров иных типов . . . . .	439
15.19. Активные фильтры . . . . .	440
15.20. Звенья фильтра первого порядка . . . . .	442
15.21. Звенья второго порядка . . . . .	443
15.22. Определение порядка активного фильтра . . . . .	444
15.23. Расчет фазовых характеристик звеньев фильтра . . . . .	448
15.24. Переходные характеристики фильтров . . . . .	449
15.25. Некоторые замечания к фильтрам Золотарева . . . . .	450
15.26. Схемная реализация активного звена первого порядка . . . . .	450
15.27. Реализация активного звена второго порядка . . . . .	451
15.28. Звенья фильтров с различной добротностью . . . . .	453
15.29. Активные фильтры верхних частот . . . . .	454
15.30. Активные полосовые фильтры . . . . .	454
15.31. Понятие о цепях с переключаемыми конденсаторами . . . . .	457
Вопросы для самопроверки . . . . .	458
Список литературы . . . . .	460
Предметный указатель . . . . .	461

## ВНИМАНИЕ!

Для выполнения лабораторных работ по теории электрических цепей разработаны и серийно изготавливаются универсальные стенды по теории электрических цепей типа ЛКТЦ.

Заказы на данные стенды можно направлять по адресу: 111024 Москва, ул. Авиамоторная, д. 8-а, институт связи, отдел технических средств обучения.



