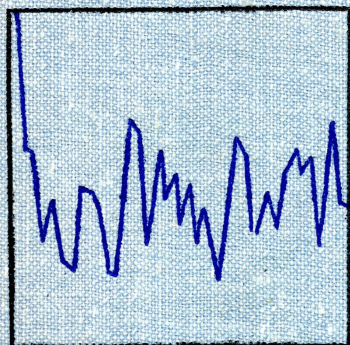


ДЖ. БОКС  
Г. ДЖЕНКИНС

ВЫПУСК  
2

АНАЛИЗ  
ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ  
ПРОГНОЗ  
И  
УПРАВЛЕНИЕ







TIME SERIES ANALYSIS  
Forecasting and control

by

GEORGE E. P. BOX  
*University of Wisconsin, U.S.A.*

GWILYM M. JENKINS  
*University of Lancaster, U.K.*

HOLDEN-DAY  
San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam  
1970

Дж. БОКС  
Г. ДЖЕНКИНС

АНАЛИЗ  
ВРЕМЕННЫХ  
РЯДОВ  
ПРОГНОЗ  
И  
УПРАВЛЕНИЕ

Выпуск 2

*Перевод с английского*  
А. Л. ЛЕВШИНА

*Под редакцией*  
В. Ф. ПИСАРЕНКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
МОСКВА 1974



В основу книги Бокса и Дженкинса положено использование данных о корреляционной функции (или функциях) одномерного и многомерного временных рядов. Особое внимание уделено нестационарным временным рядам, содержащим либо стационарные приращения, либо периодические нестационарности (что особенно важно для геофизических приложений).

Во второй выпуск вошли главы, содержащие вопросы оценивания передаточных функций линейных фильтров, задачи автоматического управления в цепях с прямой и обратной связями, а также некоторые другие задачи теории регулирования и управления.

Книга написана очень ясно и доступно; авторы, как правило, рассматривают конкретные примеры, доводимые до числовых результатов и позволяющие читателю научиться самостоятельно применять рекомендуемые методы. В конце книги приложены алгоритмы вычислений и таблицы используемых рядов.

Книга будет весьма полезна специалистам по прикладной математике, геофизикам, физикам, астрономам, обработчикам данных наблюдений, экономистам, плановикам — всем лицам, встречающимся на практике с анализом и прогнозированием эмпирических величин, меняющихся со временем.

*Редакция космических исследований, астрономии и геофизики*

## Предисловие ко второму выпуску

Во второй выпуск вошли гл. 10—13. В гл. 10 рассматриваются модели линейных передаточных функций, представимые в виде конечно-разностных уравнений. Гл. 11 посвящена методам идентификации, подгонки и проверки этих моделей. В гл. 12 изучаются задачи регулирования систем с прямой и обратной связями. Наконец, в гл. 13 рассмотрены некоторые дальнейшие задачи регулирования, такие, как перенос источника шума в различные точки системы, управление с ограничением дисперсии входа и другие.

*В. Ф. Писаренко*





## Часть III

### Построение модели передаточной функции

Предположим, что  $X$  является значением *входа* системы. Например,  $X$  может быть концентрацией одной из составляющих, подаваемых в химический процесс. Пусть  $X$  влияет на *выход* системы  $Y$ . Например,  $Y$  может быть выходом продукта химического процесса. Обычно благодаря инерционности системы изменение  $X$  не оказывает немедленного действия на выход, а вызывает некоторую запаздывающую реакцию, и в конце концов  $Y$  приходит к равновесию на новом уровне. Такое изменение мы будем здесь называть *динамической реакцией*. Модель, описывающая эту динамическую реакцию, называется *моделью передаточной функции*. Мы предполагаем, что наблюдения входа и выхода производятся через равные интервалы времени. Соответствующая модель передаточной функции будет называться *дискретной*.

Модели такого типа могут описывать не только ход промышленных процессов, но и экономические и торговые системы. Построение моделей передаточных функций важно потому, что только тогда, когда динамические характеристики изучены, возможны разумное управление и контроль над системой.

Даже при тщательно контролируемых условиях на  $Y$  может влиять не только  $X$ . Комбинированный эффект таких влияний мы будем называть *возмущением* или *шумом*. Модель, связанная с реальными данными, должна учитывать не только динамические соотношения между  $X$  и  $Y$ , но также и шум, существующий в системе. Такие совместные модели можно получить, комбинируя детерминированную переходную функцию со стохастической моделью шума.

В последующей, гл. 10 мы вводим класс линейных моделей переходных функций, пригодный для описания многих практически встречающихся динамических соотношений. В гл. 11 показано, как их можно связать с данными, учитывая вносящий искажения шум. Эта привязка модели к данным дополняется процедурами *идентификации, оценивания и диагностической проверки*, весьма сходными с описанными в первом выпуске этой книги.

## Модели передаточной функции

В этой главе мы вводим класс дискретных линейных моделей передаточных функций. Эти модели экономны в использовании параметров и пригодны для описания часто встречающихся динамических систем.

### 10.1. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Предположим, что пары наблюдений  $X_t$ ,  $Y_t$  входа  $X$  и выхода  $Y$  некоторой динамической системы получаются через постоянный временной интервал (рис. 10.1). В некоторых ситуациях как  $X$ , так и  $Y$  по существу непрерывны, но наблюдаются только в дискретные моменты времени. Тогда представляет интерес оценить не только то, что можно извлечь из данных о связи между двумя временными рядами, но также и то, что дискретная модель говорит о соответствующей непрерывной модели. В других примерах существуют только дискретные ряды, а никакого скрытого непрерывного процесса нет. Связывая непрерывные и дискретные системы, мы будем принимать основной интервал отсчета за единицу времени. Это означает, что периоды времени будут измеряться числом укладывающихся в них интервалов отсчета. Дискретное наблюдение  $X_t$  будет предполагаться происшедшим в момент времени  $t$ .

Когда мы рассматриваем значение непрерывной переменной  $Y$  в момент  $t$ , мы обозначаем его  $Y(t)$ . Если  $t$  соответствует моменту времени, в который наблюдается дискретное переменное  $Y$ , мы будем обозначать это значение  $Y$  как  $Y_t$ . Когда мы хотим подчеркнуть зависимость дискретного выхода  $Y$  не только от времени, но также от входа  $X$ , мы пишем  $Y_t(X)$ .

#### 10.1.1. Дискретная передаточная функция

При соответствующих входе и выходе (читатель волен придумать их сам) динамическая система на рис. 10.1 может представлять промышленный процесс, экономику страны или поведение какой-либо корпорации или министерства.

Мы будем иногда называть величину выхода, полученную при фиксированном входе, *установившимся значением*. Под ним



мы подразумеваем значение  $Y_{\infty}(X)$  дискретного выхода устойчивой системы, пришедшей к окончательному равновесию после того, как вход был зафиксирован на постоянном уровне  $X$ . Очень часто в пределах интересующего нас диапазона соотношение между  $Y_{\infty}(X)$  и  $X$  примерно линейное. Отсюда, если мы будем обозначать через  $Y$  и  $X$  отклонения от удобных для нас уровней, мы можем записать стационарное соотношение как

$$Y_{\infty} = gX, \quad (10.1.1)$$

где  $g$  называется *установившимся усилением*: подразумевается, что  $Y_{\infty}$  — функция  $X$ .

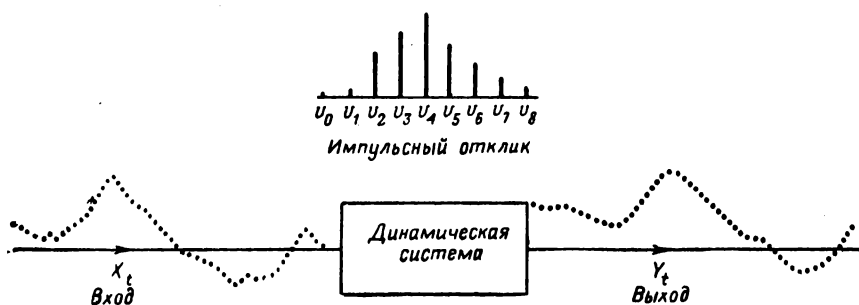


Рис. 10.1. Вход и выход динамической системы.

Положим теперь, что значения входа меняются и что  $X_t$  и  $Y_t$  — это отклонения от равновесия в момент  $t$ . Тогда во многих случаях с достаточной точностью удастся представить инерционные свойства системы *линейным* фильтром вида

$$Y_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + v_2 X_{t-2} + \dots = (v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots) X_t = v(B) X_t, \quad (10.1.2)$$

в котором выходное отклонение в некоторый момент времени  $t$  представимо линейной комбинацией входных отклонений в моменты  $t, t-1, \dots$ . Функция  $v(B)$  называется *передаточной функцией фильтра*.

*Функция отклика на единичный импульс.* Веса  $v_0, v_1, v_2, \dots$  в (10.1.2), рассматриваемые в зависимости от их номера, называют *функцией отклика на единичный импульс* (сокращенно, импульсным откликом). Функция отклика показана на рис. 10.1 в виде дискретных линий. Когда мгновенной реакции на вход нет, одно или несколько начальных значений  $v$  (например,  $v_0, v_1, \dots, v_{b-1}$ ) равны нулю.

Согласно (10.1.2), выходное отклонение можно рассматривать как линейную комбинацию ряда налагающихся друг на

друга функций отклика на единичный импульс, умноженных на отклонение  $X_t$ . Это иллюстрируется рис. 10.2, где показана гипотетическая функция отклика на единичный импульс и соответствующий ей процесс получения выходных значений по входным. В рассматриваемом случае вход и выход вначале находятся в равновесии; отклонения, возникающие на входе в моменты  $t = 1, t = 2$  и  $t = 3$ , вызывают соответствующие отклики на выходе, складывая которые можно получить результирующую полную реакцию выхода.

Соотношения между приращениями на входе и выходе. Обозначим через

$$y_t = Y_t - Y_{t-1} = \nabla Y_t$$

и

$$x_t = X_t - X_{t-1} = \nabla X_t$$

приращения  $Y$  и  $X$ . Часто необходимо уметь связывать такие приращения входа и выхода. Беря разности в (10.1.2), получаем

$$y_t = v(B) x_t.$$

Мы видим, что приращения  $y_t$  и  $x_t$  удовлетворяют той же модели передаточной функции, что и  $Y_t, X_t$ .

**Устойчивость.** Если бесконечный ряд  $v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots$  сходится при  $|B| \leq 1$ , система называется *устойчивой*. Мы будем рассматривать здесь только устойчивые системы и, следовательно, наложим такое ограничение на изучаемые модели. Требование устойчивости означает, что конечное приращение входа должно вызывать конечное приращение выхода.

Положим, что  $X$  зафиксировано на неопределенно долгое время на значении  $+1$ . Тогда, согласно (10.1.1),  $Y$  постепенно придет к значению  $g$  и установится на нем. Подставляя в (10.1.2) значения  $Y_t = g, 1 = X_t = X_{t-1} = X_{t-2} = \dots$ , получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j = g. \quad (10.1.3)$$

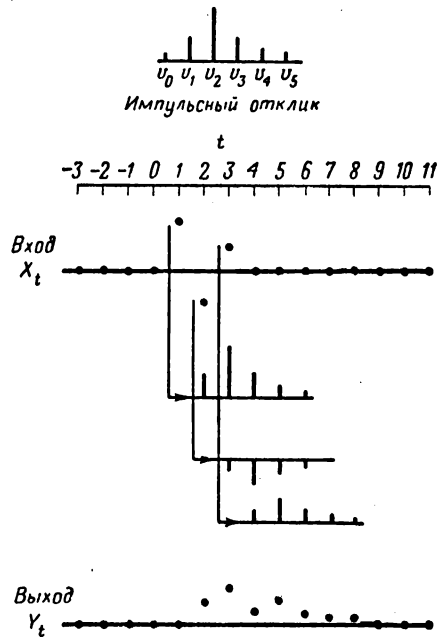


Рис. 10.2. Линейная передача входа  $X$  на выход  $Y$ .

Таким образом, для устойчивой системы сумма весов функции отклика на единичный импульс сходится к установившемуся усилению.

*Экономичность.* Часто параметризация системы через веса  $v$  может быть неудовлетворительной. Тогда расточительство в использовании параметров может привести к неточному и неустойчивому оцениванию модели на этапе оценивания. Далее, обычно неудобно непосредственно оценивать веса  $v$ , поскольку, как мы увидим, во многих реальных ситуациях между разными  $v$  существует функциональная связь.

### 10.1.2. Непрерывные динамические модели, описываемые дифференциальными уравнениями

*Динамическая система первого порядка.* Рассмотрим рис. 10.3. Пусть в момент  $t$   $X(t)$  — объем воды в резервуаре  $A$ , а  $Y_1(t)$  — объем воды в резервуаре  $B$ , связанном с  $A$  трубой. В данный момент мы не рассматриваем резервуар  $C$ , показанный пунктиром. Пусть вода может подаваться в  $A$  или забираться из него по трубе  $P$ ; имеются механические средства, позволяющие изменять уровень, а следовательно, и объем  $X$  воды в  $A$  нужным образом *вне зависимости* от того, что происходит в  $B$ .

Если объем  $X$  в первом резервуаре поддерживается на *постоянном* уровне, вода будет перетекать из одного резервуара в другой до тех пор, пока уровни в них не станут одинаковыми. Если теперь изменить объем  $X$ , вода будет снова перетекать из одного резервуара в другой до тех пор, пока не наступит равновесие. Объем воды в  $B$ , находящийся в равновесии как функция заданного объема в  $A$ , описывается стационарным соотношением

$$Y_{1\infty} = g_1 X. \quad (10.1.4)$$

В этом случае стационарное усиление  $g_1$  геометрически выражается как отношение заштрихованных площадей двух резервуаров. Если два уровня в момент  $t$  не совпадают, различие в уровне воды между резервуарами пропорционально  $g_1 X(t) - Y_1(t)$ .

Пусть теперь, выкачивая или впуская жидкость по трубе  $P$ , мы заставляем объем  $X(t)$  следовать графику, показанному на рис. 10.3. Тогда объем воды  $Y_1(t)$  в  $B$  будет изменяться в соответствии с ходом графика, показанного на том же рисунке. В общем случае функция  $X(t)$ , определяющая режим системы, называется *вынуждающей функцией*.

Для того чтобы связать вход и выход, заметим, что с хорошей точностью скорость потока через трубу пропорциональна разности в уровнях, т. е.

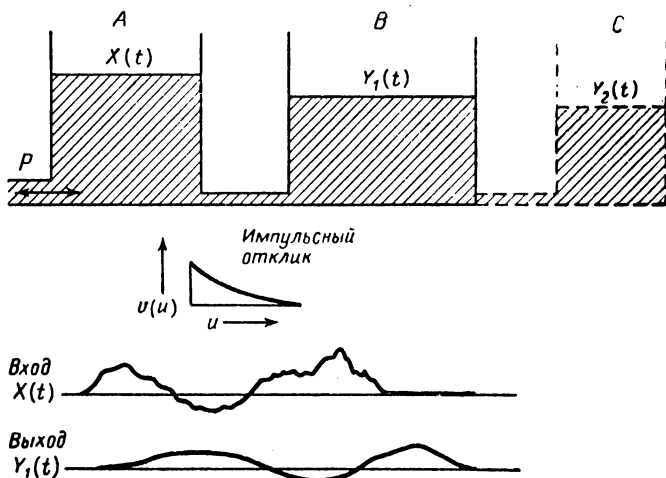
$$\frac{dY_1}{dt} = \frac{1}{T_1} \{g_1 X(t) - Y_1(t)\}, \quad (10.1.5)$$



где  $T_1$  — константа. Дифференциальное уравнение (10.1.5) можно переписать в виде

$$(1 + T_1 D) Y_1(t) = g_1 X(t), \quad (10.1.6)$$

где  $D = d/dt$ . Динамическую систему, описываемую таким образом при помощи дифференциального уравнения первого порядка, часто называют динамической системой первого порядка.



Р и с. 10.3. Представление простой динамической системы.

Постоянная  $T_1$  называется *постоянной времени* системы. Та же модель первого порядка может приближенно описывать поведение многих простых систем. Например,  $Y_1(t)$  может быть выходной температурой воды в системе водяного отопления, а  $X(t)$  — скоростью поступления воды в систему.

Можно показать (см. например [27]), что решение линейного дифференциального уравнения такого типа, как (10.1.6), можно записать в виде

$$Y_1(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du, \quad (10.1.7)$$

где  $v(u)$  — вообще говоря, (непрерывная) функция отклика на единичный импульс. Видно, что  $Y_1(t)$  получается из  $X(t)$  как непрерывно взвешенная сумма, точно так же, как  $Y_i$  получалось из  $X_i$  в (10.1.2) как дискретно взвешенная сумма. Далее видно, что роль непрерывной весовой функции  $v(u)$  в непрерывном

случае совершенно аналогична роли  $v_j$  в дискретном случае. Для конкретной системы первого порядка, определенной (10.1.6),

$$v(u) = g_1 T_1^{-1} e^{-u/T_1}.$$

Таким образом, отклик на единичный импульс затухает в этом случае по экспоненте (см. рис. 10.3).

В непрерывном случае определение выхода для произвольной вынуждающей функции, такой, как на рис. 10.3, обычно выполняется либо моделированием на аналоговом вычислительном устройстве, либо расчетом на цифровой вычислительной машине.

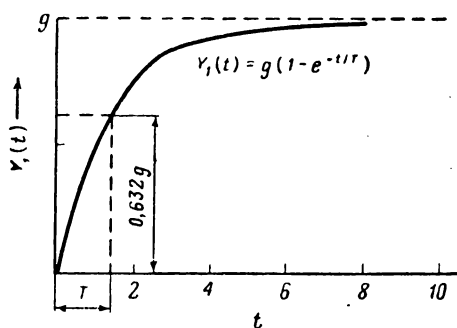


Рис. 10.4. Функция отклика на единичный скачок системы первого порядка.

Аналитические решения можно получить только для вынуждающих функций специального вида. Пусть, например, вначале гидравлическая система пуста, а затем  $X(t)$  внезапно достигает уровня  $X(t) = 1$  и сохраняет это значение. Такую вынуждающую функцию, внезапно изменяющую нулевой стационарный уровень на стационарный уровень, равный единице, мы будем называть (единичным) скачком. Отклик системы на такую функцию, названный откликом на единичный скачок, можно получить, решая дифференциальное уравнение (10.1.6) с единичным скачком на входе, что дает

$$Y_1(t) = g_1(1 - e^{-t/T_1}). \quad (10.1.8)$$

Как следует из этого результата, уровень в резервуаре  $B$  возрастает по экспоненте (рис. 10.4). Когда  $t = T_1$ ,  $Y_1(t) = g_1(1 - e^{-1}) = 0,632 g_1$ . Это означает, что постоянная времени  $T_1$  — это время, необходимое системе первого порядка (10.1.6) для достижения 63,2% ее заключительного равновесного уровня после подачи на вход единичного скачка.

Иногда существует начальный интервал чистого запаздывания, или холостое время, перед тем как проявится какая бы то ни было реакция на данное изменение входа. Например, если труба между  $A$  и  $B$  (рис. 10.3) достаточно длинна, внезапное изменение уровня в  $A$  может не оказать эффекта на  $B$  до тех пор, пока через трубу не прошло достаточное количество жидкости. Пусть введенное таким образом запаздывание занимает  $\tau$  единиц времени. Тогда отклик запаздывающей системы будет опи-

сываться дифференциальным уравнением, подобным (10.1.6), но только справа вместо  $t$  будет стоять  $t - \tau$ , т. е.

$$(1 + T_1 D) Y_1(t) = g_1 X(t - \tau). \quad (10.1.9)$$

Соответствующие функции отклика на единичный импульс и скачок имеют точно такую же форму, как в системе без запаздывания, но смещены по оси времен на расстояние  $\tau$ .

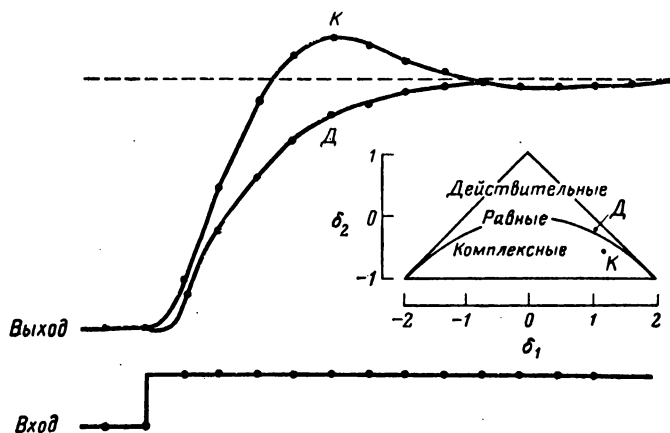


Рис. 10.5. Функции отклика на единичный скачок совпадающих дискретной и непрерывной систем второго порядка, имеющих характеристические уравнения с действительными (кривая  $D$ ) и комплексными корнями (кривая  $K$ ).

**Динамическая система второго порядка.** Рассмотрим рис. 10.3 еще раз. Вообразим, что имеется система трех резервуаров с трубой, ведущей от резервуара  $B$  к резервуару  $C$ , объем жидкости в котором обозначен  $Y_2(t)$ . Пусть  $T_2$  — временная постоянная, и  $g_2$  — стационарное усиление дополнительной системы.

Тогда  $Y_2(t)$  и  $Y_1(t)$  связаны дифференциальным уравнением

$$(1 + T_2 D) Y_2(t) = g_2 Y_1(t).$$

После подстановки в (10.1.6) мы получаем дифференциальное уравнение *второго порядка*, связывающее выход третьего резервуара и вход первого,

$$\{1 + (T_1 + T_2) D + T_1 T_2 D^2\} Y_2(t) = g X(t), \quad (10.1.10)$$

где  $g = g_1 g_2$ . Для такой системы функция отклика на единичный импульс — это наложение экспонент

$$v(u) = g(e^{-u/T_1} - e^{-u/T_2}) / (T_1 - T_2), \quad (10.1.11)$$



а функция отклика на единичный скачок имеет вид

$$Y_2(t) = g \left( 1 - \frac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2} \right). \quad (10.1.12)$$

Непрерывная кривая  $D$  на рис. 10.5 показывает отклик на скачок системы

$$(1 + 3D + 2D^2) Y_2(t) = 5X(t),$$

у которой  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 2$ ,  $g = 5$ . Отметим, что в отличие от системы первого порядка система второго порядка имеет отклик на скачок с начальным нулевым наклоном.

Более общая система второго порядка определяется уравнением

$$(1 + \Theta_1 D + \Theta_2 D^2) Y(t) = gX(t), \quad (10.1.13)$$

где

$$\Theta_1 = T_1 + T_2, \quad \Theta_2 = T_1 T_2 \quad (10.1.14)$$

и постоянные  $T_1$  и  $T_2$  могут быть комплексными. Если мы запишем

$$T_1 = \frac{1}{\xi} e^{i\lambda}, \quad T_2 = \frac{1}{\xi} e^{-i\lambda}, \quad (10.1.15)$$

то (10.1.13) примет вид

$$\left( 1 + \frac{2 \cos \lambda}{\xi} D + \frac{1}{\xi^2} \right) Y(t) = gX(t). \quad (10.1.16)$$

Функция отклика на единичный импульс (10.1.11) станет тогда равной

$$v(u) = g \frac{\xi e^{-\xi u \cos \lambda} \sin(\xi u \sin \lambda)}{\sin \lambda}, \quad (10.1.17)$$

а функция отклика на скачок

$$Y(t) = g \left\{ 1 - \frac{e^{-\xi t \cos \lambda} \sin(\xi t \sin \lambda + \lambda)}{\sin \lambda} \right\}. \quad (10.1.18)$$

Непрерывная кривая  $K$  на рис. 10.5 — это отклик на скачок системы

$$(1 + \sqrt{2} D + 2D^2) Y(t) = 5X(t),$$

для которой  $\lambda = 60^\circ$  и  $\xi = \sqrt{2}/2$ . Нужно заметить, что отклик на скачок вначале превышает значение  $g = 5$  и затем приходит к равновесному уровню, как затухающая синусоида. Это поведение типично для перезатухенных систем. В общем систему второго порядка называют *перезатухенной*, *критически затухенной* или *недозатухенной* в зависимости от того, являются ли постоянные  $T_1$  и  $T_2$  действительными, действительными и равными или комплексными. У перезатухенной системы функция отклика на скачок образована наложением экспонент такого ти-

па, как (10.1.12), и всегда располагается ниже асимптоты  $Y(\infty) = g$ . Как и в системе первого порядка, отклик может иметь холостое время, для этого надо заменить аргумент  $t$  в правой части (10.1.13) на  $t - \tau$ . Многие весьма сложные динамические системы можно достаточно точно описывать такими системами второго порядка с запаздыванием.

Более сложные линейные динамические системы могут быть описаны, если допустить, что не только сами значения уровня вынуждающей функции  $X(t)$ , но также скорость ее изменения  $dX/dt$  и более высокие производные влияют на поведение системы. Поэтому общая модель для описаний (непрерывных) динамических систем — это линейное дифференциальное уравнение

$$(1 + \Theta_1 D + \dots + \Theta_R D^R) Y(t) = g(1 + H_1 D + \dots + H_S D^S) X(t - \tau). \quad (10.1.19)$$

## 10.2. ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЕМЫЕ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

### 10.2.1. Общая форма разностного уравнения

Дискретные динамические системы, соответствующие непрерывным системам типа (10.1.19), часто экономно описываются линейным *разностным* уравнением общего вида

$$(1 + \zeta_1 \nabla + \dots + \zeta_r \nabla^r) Y_t = g(1 + \eta_1 \nabla + \dots + \eta_s \nabla^s) X_{t-b}, \quad (10.2.1)$$

которое мы будем называть моделью передаточной функции порядка  $(r, s)$ . Разностное уравнение (10.2.1) можно также записать при помощи оператора сдвига назад  $B = 1 - \nabla$  в виде

$$(1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) X_{t-b} \quad (10.2.2)$$

или как

$$\delta(B) Y_t = \omega(B) X_{t-b}.$$

Точно так же, если обозначить  $\Omega(B) = \omega(B) B^b$ , модель принимает вид

$$\delta(B) Y_t = \Omega(B) X_t. \quad (10.2.3)$$

Сравнив (10.2.3) с (10.1.2), видим, что передаточная функция этой модели равна

$$v(B) = \delta^{-1}(B) \Omega(B). \quad (10.2.4)$$

Таким образом, передаточная функция представима отношением двух полиномов от  $B$ .

*Динамика стохастических моделей АРПСС. Модель АРПСС*

$$\Phi(B) z_t = \theta(B) a_t,$$

используемая для представления временного ряда  $\{z_t\}$ , связывает  $z_t$  и  $a_t$  линейной операцией фильтрации,

$$z_t = \varphi^{-1}(B)\theta(B)a_t,$$

где  $a_t$  — белый шум. Следовательно, модель АРПСС означает, что временной ряд можно и целесообразно представлять как выход динамической системы, входом которой служит белый шум, а передаточная функция может быть экономично представлена отношением двух полиномов от  $B$ .

**Устойчивость дискретных моделей.** Требование устойчивости дискретных моделей передаточных функций вполне аналогично требованию стационарности стохастических моделей АРСС. В общем случае для устойчивости необходимо, чтобы корни характеристического уравнения

$$\delta(B) = 0,$$

где  $B$  рассматривается как переменное, лежали вне единичного круга. В частности, отсюда следует, что для модели первого порядка параметр  $\delta_1$  удовлетворяет неравенствам

$$-1 < \delta_1 < 1,$$

и для модели второго порядка (см., например, рис. 10.5), параметры  $\delta_1, \delta_2$  удовлетворяют неравенствам

$$\delta_2 + \delta_1 < 1,$$

$$\delta_2 - \delta_1 < 1,$$

$$-1 < \delta_2 < 1.$$

Записав (10.2.2) развернуто как

$$Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \dots + \delta_r Y_{t-r} + \omega_0 X_{t-b} - \omega_1 X_{t-b-1} - \dots - \omega_s X_{t-b-s},$$

мы замечаем, что, если  $X_t$  достаточно долго зафиксировано на значении  $+1$ ,  $Y_t$  достигнет значения

$$g = \frac{\omega_0 - \omega_1 - \dots - \omega_s}{1 - \delta_1 - \dots - \delta_r}. \quad (10.2.5)$$

Эта формула выражает установившееся усиление через параметры модели.

### 10.2.2. Природа передаточной функции

Если использовать модель передаточной функции, определенную разностным уравнением (10.2.2), и подставить

$$Y_t = v(B) X_t \quad (10.2.6)$$

в (10.2.2), то мы получим тождество

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r)(v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots) = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) B^b. \quad (10.2.7)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $B$ , находим

$$\begin{aligned} v_j &= 0, & j < b, \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} + \omega_0, & j = b, \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} - \omega_{j-b}, & j = b+1, b+2, \dots, b+s, \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r}, & j > b+s. \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

Веса  $v_{b+s}, v_{b+s-1}, \dots, v_{b+s-r+1}$  дают  $r$  начальных значений для разностного уравнения

$$\delta(B) v_j = 0, \quad j > b+s.$$

Решение

$$v_j = f(\delta, \omega, j)$$

этого разностного уравнения применимо ко всем значениям  $j$ , для которых  $j \geq b+s-r+1$ .

Итак, в общем веса отклика на единичный импульс  $v_j$  состоят из 1)  $b$  нулевых значений  $v_0, v_1, \dots, v_{b-1}$ ; 2) следующих за ними  $s-r+1$  значений  $v_b, v_{b+1}, v_{b+s-r}$  с произвольным поведением (таких значений нет, если  $s < r$ ); 3) значений  $v_j$  с  $j \geq b+s-r+1$ , ход которых определяется разностным уравнением  $r$ -го порядка, которое имеет  $r$  начальных значений  $v_{b+s}, v_{b+s-1}, \dots, v_{b+s-r+1}$ . Начальные значения  $v_j$  для  $j < b$  будут, конечно, равны нулю.

*Отклик на единичный скачок.* Обозначим производящую функцию для весов  $V_j$  отклика на единичный скачок  $V(B)$ . Имеем

$$\begin{aligned} V(B) &= V_0 + V_1 B + V_2 B^2 + \dots \\ &\dots = v_0 + (v_0 + v_1) B + (v_0 + v_1 + v_2) B^2 + \dots \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

и

$$v(B) = (1 - B) V(B). \quad (10.2.10)$$

Подстановка (10.2.10) в (10.2.7) приводит к тождеству

$$\begin{aligned} (1 - \delta_1^* B - \delta_2^* B^2 - \dots - \delta_{r+1}^* B^{r+1})(V_0 + V_1 B + V_2 B^2 + \dots) = \\ = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) B^b, \end{aligned} \quad (10.2.11)$$

откуда

$$(1 - \delta_1^* B - \delta_2^* B^2 - \dots - \delta_{r+1}^* B^{r+1}) = (1 - B)(1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r). \quad (10.2.12)$$

Тождество (10.2.11) для весов  $V_j$  отклика на скачок полностью аналогично тождеству (10.2.7) для весов отклика на единичный

импульс, если только учесть, что оператор в левой части  $\delta^*(B)$  имеет порядок  $r + 1$ , а не  $r$ .

Пользуясь выражениями (10.2.8), найдем, что функция отклика на единичный скачок состоит из следующих значений: 1)  $b$  нулевых значений  $V_0, V_1, \dots, V_{b-1}$ ; 2) последующих  $s - r$  значений  $V_b, V_{b+1}, \dots, V_{b+s-r-1}$  с произвольным поведением (таких значений нет, если  $s < r + 1$ ); 3) значений  $V_j$  для  $j \geq b + s - r$ , ход которых диктуется разностным уравнением  $\delta^*(B)V_j = 0$   $(r + 1)$ -го порядка с  $r + 1$  начальными значениями  $V_{b+s}, V_{b+s-1}, \dots, V_{b+s-r}$ . Начальные значения  $V_j$  для  $j < b$ , конечно, равны нулю.

### 10.2.3. Дискретные модели передаточных функций первого и второго порядков

Модели передаточных функций первого и второго порядков для всех комбинаций  $r = 0, 1, 2$  и  $s = 0, 1, 2$  подробно описаны в табл. 10.1. Примеры некоторых моделей с дискретными диаграммами откликов на единичные скачок и импульс приведены на рис. 10.6.

Уравнения в конце табл. 10.1 выражают параметры  $\xi, g, \eta$  разностной  $\nabla$ -формы модели через параметры  $\delta, \omega$  представления модели через оператор  $B$ . Эти уравнения соответствуют самой общей модели с  $r = 2, s = 2$ . Все остальные модели — это частные случаи общей модели, и соответствующие им уравнения можно получить приравниванием нулю соответствующих коэффициентов. Например, если  $r = 1$  и  $s = 1$ ,  $\xi_2 = \eta_2 = \delta_2 = \omega_2 = 0$ , то

$$\delta_1 = \frac{\xi_1}{1 + \xi_1}, \quad \omega_0 = \frac{g(1 + \eta_1)}{1 + \xi_1}, \quad \omega_1 = \frac{g\eta_1}{1 + \xi_1}.$$

На рис. 10.6 начальные значения для дифференциальных уравнений, соответствующие откликам на единичные импульс и скачок, показаны кружками.

*Обсуждение моделей, приведенных в таблице.* Модели, свойства которых рассмотрены в табл. 10.1 и на рис. 10.6, заслуживают очень внимательного изучения, так как они полезны для описания многих часто встречающихся на практике динамических систем. Во всех этих моделях оператор  $B^b$  в правой части показывает, что первый ненулевой член в функции отклика на единичный импульс равен  $v_b$ . В примерах, приведенных на рис. 10.6,  $g$  предполагается равным единице, а  $b = 3$ .

*Модели с  $r = 0$ .* Когда  $r$  и  $s$  равны нулю, функция отклика на единичный импульс содержит только один член  $v_b = \omega_0 = g$ . Выход пропорционален входу, но смещен на  $b$  временных интервалов. В более общем случае, если оператор справа имеет порядок  $s$ , выходной отклик будет задержан на  $b$  временных интервалов относительно импульсного входа и будет занимать  $s + 1$

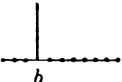
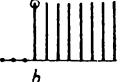
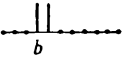
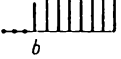
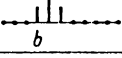
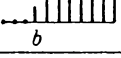
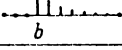
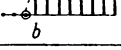
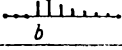
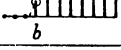
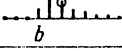
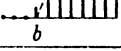
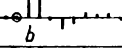
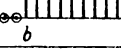
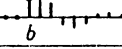
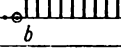
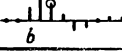
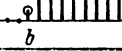
$r, s, b$	$\nabla$ -представление	$B$ -представление	Функция отклика $u_j$	Переходная функция $V_j = \sum_{i=0}^j u_i$
003	$Y_t = X_{t-3}$	$Y_t = B^3 X_t$		
013	$Y_t = (1 - 0,5\nabla) X_{t-3}$	$Y_t = (0,5 + 0,5B) B^3 X_t$		
023	$Y_t = (1 - \nabla + 0,25\nabla^2) X_{t-3}$	$Y_t = (0,25 + 0,50B + 0,25B^2) B^3 X_t$		
103	$(1 + \nabla) Y_t = X_{t-3}$	$(1 - 0,5B) Y_t = 0,5 B^3 X_t$		
113	$(1 + \nabla) Y_t = (1 - 0,5\nabla) X_{t-3}$	$(1 - 0,5B) Y_t = (0,25 + 0,25B) B^3 X_t$		
123	$(1 + \nabla) Y_t = (1 - \nabla + 0,25\nabla^2) X_{t-3}$	$(1 - 0,5B) Y_t = (0,125 + 0,25B + 0,125B^2) B^3 X_t$		
203	$(1 - 0,25\nabla + 0,5\nabla^2) Y_t = X_{t-3}$	$(1 - 0,6B + 0,4B^2) Y_t = 0,8 B^3 X_t$		
213	$(1 - 0,25\nabla + 0,5\nabla^2) Y_t = (1 - 0,5\nabla) X_{t-3}$	$(1 - 0,6B + 0,4B^2) Y_t = (0,4 + 0,4B) B^3 X_t$		
223	$(1 - 0,25\nabla + 0,5\nabla^2) Y_t = (1 - \nabla + 0,25\nabla^2) X_{t-3}$	$(1 - 0,6B + 0,4B^2) Y_t = (0,2 + 0,4B + 0,2B^2) B^3 X_t$		

Рис. 10.6. Примеры функций отклика на единичный импульс и скачок при усилении  $g = 1$ .

Функции отклика на единичный импульс  $v_j$  для моделей передаточных функций вида  
 $\delta_r(B) Y_t = \omega_s(B) B^b X_t$

$rsb$	Представление $v$	Представление $B$	Функция $v_j$
00b	$Y_t = g X_{t-b}$	$Y_t = \omega_0 B^b X_t$	$\begin{array}{l} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} j < b \\ j = b \\ j > b \end{array}$
01b	$Y_t = g(1 + \eta_1 \nabla) X_{t-b}$	$Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) B^b X_t$	$\begin{array}{l} 0 \\ \omega_0 \\ -\omega_1 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} j < b \\ j = b \\ j = b + 1 \\ j > b + 1 \end{array}$
02b	$Y_t = g(1 + \eta_1 \nabla + \eta_2 \nabla^2) X_{t-b}$	$Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) B^b X_t$	$\begin{array}{l} 0 \\ \omega_0 \\ -\omega_1 \\ -\omega_2 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} j < b \\ j = b \\ j = b + 1 \\ j = b + 2 \\ j > b + 2 \end{array}$
10b	$(1 + \xi_1 \nabla) Y_t = g X_{t-b}$	$(1 - \delta_1 B) Y_t = \omega_0 B^b X_t$	$\begin{array}{l} 0 \\ \omega_0 \\ \delta_1 v_{j-1} \end{array}$ $\begin{array}{l} j < b \\ j = b \\ j > b \end{array}$
11b	$(1 + \xi_1 \nabla) Y_t = g(1 + \eta_1 \nabla) X_{t-b}$	$(1 - \delta_1 B) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) B^b X_t$	$\begin{array}{l} 0 \\ \omega_0 \\ \delta_1 \omega_0 - \omega_1 \\ \delta_1 v_{j-1} \end{array}$ $\begin{array}{l} j < b \\ j = b \\ j = b + 1 \\ j > b + 1 \end{array}$

12b	$(1 + \xi_1 \nabla) Y_t = g(1 + \eta_1 \nabla + \eta_2 \nabla^2) X_{t-b}$	$(1 - \delta_1 B) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) B^b X_t$	0 $\omega_0$ $\delta_1 \omega_0 - \omega_1$ $\delta_1^2 \omega_0 - \delta_1 \omega_1 - \omega_2$ $\delta_1 v_{j-1}$ 0 $\omega_0$ $\delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2}$ 0 $\omega_0$ $\delta_1 \omega_0 - \omega_1$ $\delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2}$ 0 $\omega_0$ $\delta_1 \omega_0 - \omega_1$ $(\delta_1^2 + \delta_2) \omega_0 - \delta_1 \omega_1 - \omega_2$ $\delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2}$	$j < b$ $j = b$ $j = b + 1$ $j = b + 2$ $j > b + 2$ $j < b$ $j = b$ $j > b$ $j < b$ $j = b$ $j = b + 1$ $j > b + 1$ $j < b$ $j = b$ $j = b + 1$ $j = b + 2$ $j > b + 2$
20b	$(1 + \xi_1 \nabla + \xi_2 \nabla^2) Y_t = g X_{t-b}$	$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = \omega_0 B^b X_t$		
21b	$(1 + \xi_1 \nabla + \xi_2 \nabla^2) Y_t = g(1 + \eta_1 \nabla) X_{t-b}$	$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) B^b X_t$		
22b	$(1 + \xi_1 \nabla + \xi_2 \nabla^2) Y_t = g(1 + \eta_1 \nabla + \eta_2 \nabla^2) X_{t-b}$	$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) B^b X_t$		

$$\xi_1 = \frac{\delta_1 + 2\delta_2}{1 - \delta_1 - \delta_2} \quad \xi_2 = \frac{-\delta_2}{1 - \delta_1 - \delta_2}$$

$$g = \frac{\omega_0 - \omega_1 - \omega_2}{1 - \delta_1 - \delta_2}$$

$$\eta_1 = \frac{\omega_1 + 2\omega_2}{\omega_0 - \omega_1 - \omega_2}$$

$$\eta_2 = \frac{-\omega_2}{\omega_0 - \omega_1 - \omega_2}$$

$$\delta_1 = \frac{\xi_1 + 2\xi_2}{1 + \xi_1 + \xi_2} \quad \delta_2 = \frac{-\xi_2}{1 + \xi_1 + \xi_2}$$

$$\omega_0 = \frac{g(1 + \eta_1 + \eta_2)}{1 + \xi_1 + \xi_2}$$

$$\omega_1 = \frac{g(\eta_1 + 2\eta_2)}{1 + \xi_1 + \xi_2}$$

$$\omega_2 = \frac{-g\eta_2}{1 + \xi_1 + \xi_2}$$

$$1 - \delta_1 - \delta_2 = (1 + \xi_1 + \xi_2)^{-1}$$



значение с амплитудами  $v_b = \omega_0$ ,  $v_{b+1} = \omega_1$ , ...,  $v_{b+s} = -\omega_s$ . Отклик на скачок получается суммированием весов отклика на единичный импульс и удовлетворяет уравнению  $(1 - B)V_j = 0$  с начальными значениями  $V_{b+s} = g = \omega_0 - \omega_1 - \dots - \omega_s$ .

*Модели с  $r = 1$ .* При  $s = 0$  отклик на единичный импульс экспоненциально затухает от начального значения  $v_b = \omega_0 = g/(1 + \xi_1) = g(1 - \delta_1)$ . Отклик на единичный скачок экспоненциально затухает, пока не достигнет значения  $g = 1$ . Если экспоненциальную функцию отклика на скачок проэкстраполировать назад (как показано точками), она пересечет ось времен в момент  $b - 1$ . Это соответствует тому факту, что и  $V_{b-1} = 0$ , и  $V_b = v_b$  являются начальными значениями соответствующего разностного уравнения  $(1 - \delta B)(1 - B)V_j = 0$ .

При  $s = 1$  существует начальное значение отклика на единичный импульс  $v_b = \omega_0 = g(1 + \eta_1)/(1 + \xi_1)$ , которое не соответствует общему ходу. Экспоненциальная кривая, определяемая разностным уравнением  $v_j = \delta_1 v_{j-1}$ , соответствующим оператору в левой части, начинается со значения  $v_{b+1} = \delta_1 \omega_0 - \omega_1 = g(\xi_1 - \eta_1)/(1 + \xi_1)^2$ .

Отклик на скачок ведет себя как экспонента, удовлетворяющая разностному уравнению  $(1 - \delta B)(1 - B)V_j = 0$ ; его начальные значения  $V_b = v_b$  и  $V_{b+1} = v_b + v_{b+1}$ ; с ростом  $t$  отклик асимптотически приближается к  $g$ . Экстраполяция этой экспоненциальной кривой назад показана точечной линией. В общем случае она пересекает ось времен в некоторой промежуточной точке между отсчетами. В разд. 10.3 будет показано, что некоторые дискретные модели, аппроксимирующие непрерывные системы первого порядка с *дробным* временем запаздывания, могут быть описаны разностным уравнением первого порядка с оператором в правой части, у которого  $s = 1$ .

При  $s = 2$  имеются два значения  $v_b$  и  $v_{b+1}$  отклика на единичный импульс, не следующие общему ходу: за ними с  $v_{b+2}$  начинается экспоненциальный спад. Соответственно у отклика на единичный скачок имеется единственное значение  $V_b$ , не согласующееся с общим экспоненциальным поведением, выраженным проэкстраполированной назад точечной линией. Эта кривая, как и ранее, определена разностным уравнением  $(1 - \delta B)(1 - B)V_j = 0$ , но с начальными значениями  $V_{b+1}$  и  $V_{b+2}$ .

*Модели с  $r = 2$ .* Гибкость моделей с  $s = 0$  весьма ограничена, потому что первое начальное значение функции отклика на единичный импульс должно равняться нулю. Более полезными являются модели с  $s = 1$  и  $s = 2$ . Использование этих моделей для аппроксимации непрерывных систем второго порядка обсуждается в разд. 10.3 и приложении П10.1.

Поведение динамических весовых значений  $v_j$ , которые при достаточно больших  $j$  удовлетворяют уравнению

$$v_j - \delta_1 v_{j-1} - \delta_2 v_{j-2} = 0, \quad j > b + s, \quad (10.2.13)$$

зависит от природы корней  $S_1^{-1}$  и  $S_2^{-1}$  характеристического уравнения

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) = (1 - S_1 B)(1 - S_2 B) = 0.$$

Эта зависимость показана в табл. 10.2. Как и в непрерывном случае, модель может быть перезатухшена, критически затухшена или недозатухшена в зависимости от природы корней характеристического уравнения.

Таблица 10.2

Зависимость свойств системы второго порядка  
от корней уравнения  $(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) = 0$

Корни $S_1^{-1}, S_2^{-1}$	Условия	Затухание
Действительные	$\delta_1^2 + 4\delta_2 > 0$	Перезатухшенная
Действительные и равные	$\delta_1^2 + 4\delta_2 = 0$	Критически затухшенная
Комплексные	$\delta_1^2 + 4\delta_2 < 0$	Недозатухшенная

Когда корни уравнения комплексные, решение (10.2.13) будет затухающей синусоидой, как в примерах систем второго порядка на рис. 10.6. Когда корни уравнения действительны, решение будет суммой двух экспонент. Как и в непрерывном случае, рассмотренном в разд. 10.1.2, можно трактовать эту систему как эквивалентную двум последовательно соединенным системам первого порядка с параметрами  $S_1$  и  $S_2$ .

Веса  $V_j$  функции отклика на единичный скачок при достаточно больших  $j$  подчиняются разностному уравнению

$$(V_j - g) - \delta_1 (V_{j-1} - g) - \delta_2 (V_{j-2} - g) = 0,$$

имеющему ту же форму, что и (10.2.13). Следовательно, характер изменения функции отклика на скачок  $V_j$  относительно его асимптотического значения  $g$  такой же, как и у отклика на единичный импульс относительно оси времен. В случаях, когда у характеристического уравнения существуют комплексные корни, функция отклика на скачок достигает значений, больших  $g$ , а затем осциллирует относительно этого значения, пока не достигнет равновесия. Когда корни уравнения действительны и положительны, функция отклика на скачок, являющаяся суммой двух экспоненциальных членов, приближается к своей

асимптоте  $g$ , не пересекая ее. Однако, если у уравнения существуют отрицательные действительные корни, отклик на скачок может превзойти значение  $g$ , а затем постепенно прийти к состоянию равновесия.

На рис. 10.5 точками показаны две дискретные функции отклика на скачок, обозначенные  $D$  и  $K$ , соответствующие дискретному единичному скачку на входе, показанному точками в нижней части рисунка. Модели разностных уравнений\*), соответствующие  $D$  и  $K$ , это

$$D: (1 - 0,97B + 0,22B^2)Y_t = 5(0,15 + 0,09B)X_{t-1},$$

$$K: (1 - 1,15B + 0,49B^2)Y_t = 5(0,19 + 0,15B)X_{t-1}.$$

На рис. 10.5 показана также диаграмма области устойчивости с точками  $(\delta_1, \delta_2)$ , соответствующими значениям параметров каждой из моделей. Заметим, что функция отклика на скачок для модели  $D$  с действительными положительными корнями характеристического уравнения не переходит через уровень равновесия, а та же функция для модели  $K$  с комплексными корнями переходит через этот уровень.

#### 10.2.4. Рекуррентный расчет выхода для произвольного входа

Было бы крайне затруднительно пользоваться выражением

Таблица 10.3

Вычисление выхода дискретной системы первого порядка при подаче на вход единичного импульса, единичного скачка, произвольной функции

$t$	$a$		$b$		$c$	
	Импульс $X_t$	Выход $Y_t$	Скачок $X_t$	Выход $Y_t$	Произвольная функция $X_t$	Выход $Y_t$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1,5	0
2	0	2,50	1	2,50	0,5	3,75
3	0	1,25	1	3,75	2,0	3,12
4	0	0,62	1	4,38	1,0	6,56
5	0	0,31	1	4,69	-2,5	5,78
6	0	0,16	1	4,84	0,5	-3,36

\*) Параметры этих моделей были выбраны способом, рассматриваемым в разд. 10.3.2, так, чтобы в дискретных точках функции отклика на скачок точно совпадали с функциями отклика для непрерывных систем, рассмотренных в разд. 10.1.2.

(10.1.2) для отклика на единичный импульс при вычислении выхода по данному входу. К счастью, это не является необходимым. Вместо этого можно прямо использовать модель разностного уравнения. Этим способом весьма просто рекуррентно рассчитывать выход по любому входу. Рассмотрим, например, модель с  $r = 1$ ,  $s = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\xi = 1$  и  $g = 5$ . Тогда

$$(1 + \nabla)Y_t = 5X_{t-1}$$

или

$$(1 - 0,5B)Y_t = 2,5X_{t-1}. \quad (10.2.14)$$

В табл. 10.3 показан расчет  $Y_t$  в случае, когда вход  $X_t$  есть: а) единичный импульс, б) единичный скачок, в) «произвольный» вход. Во всех случаях предполагается, что начальное значение выхода  $Y_0 = 0$ . Для выполнения рекуррентных вычислений напомним разностное уравнение так, чтобы  $Y_t$  стояло слева. Тогда

$$Y_t = 0,5Y_{t-1} + 2,5X_{t-1},$$

и в случае, например, «произвольного» входа

$$Y_1 = (0,5) \times (0) + (2,5) \times (0) = 0,$$

$$Y_2 = (0,5) \times (0) + (2,5) \times (1,5) = 3,75$$

и т. д. Эти входы и выходы показаны на рис. 10.7, а — в.

В общем запись модели передаточной функции в форме

$$Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \dots + \delta_r Y_{t-r} + \omega_0 X_{t-b} - \omega_1 X_{t-b-1} - \dots - \omega_s X_{t-b-s}$$

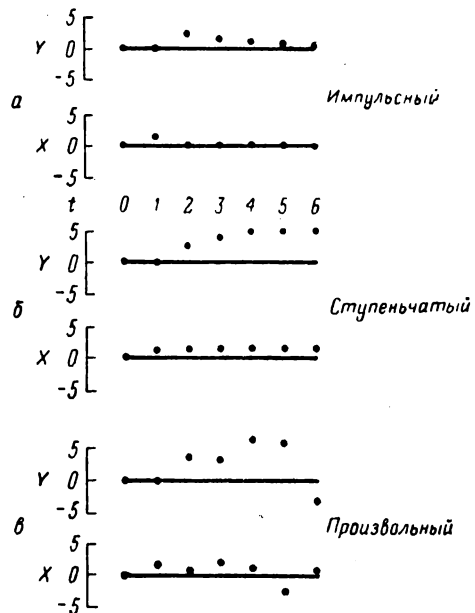


Рис. 10.7. Отклик системы первого порядка на импульс, скачок и „произвольный“ вход.

— удобный способ вычислять дискретный выход для любого дискретного входа. Для начала рекуррентного расчета надо иметь некоторые начальные значения. Эта необходимость не есть, конечно, недостаток метода, а вызвана тем, что у модели передаточной функции начальные значения  $Y$  будут зависеть от значений  $X$ , существовавших до начала наблюдений. На практике, если нужны начальные значения неизвестны, мы можем

заменить их средними значениями неизвестных  $Y$  и  $X$  (нулями, если  $X$  и  $Y$  рассматриваются как отклонения от их средних значений). Тогда близкие к началу значения выхода будут зависеть от выбора начальных значений. Однако для устойчивой системы влияние этого выбора будет пренебрежимо мало после того, как пройдет период времени, достаточный для затухания отклика на единичный импульс. Если этот период равен  $p_0$  интервалам, то альтернативная процедура — это вычисление  $Y_{p_0}, Y_{p_0+1}, \dots$  прямо по функции отклика на единичный импульс до тех пор, пока не будет получено достаточно значений для начала рекурсии.

### 10.3. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДИСКРЕТНОЙ И НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛЯМИ

Дискретная динамическая модель, определяемая линейным разностным уравнением, важна сама по себе. Она описывает разумный класс передаточных функций и не нуждается в других оправданиях. Во многих примерах не возникает вопроса о попытке связать дискретную модель с подразумеваемой непрерывной моделью, потому что по существу такой непрерывной модели не имеется. Однако в некоторых случаях, например когда делаются мгновенные периодические наблюдения в химическом реакторе, дискретную запись можно использовать для получения данных о непрерывной системе. В частности, инженеры по регулированию привыкли к терминологии постоянных времени и холостых времен непрерывных систем и лучше понимают результаты дискретного анализа, выраженные в этих терминах.

Как и ранее, мы обозначаем выход и вход в момент  $t$  соответственно  $Y(t)$  и  $X(t)$ . Пусть выход и вход связаны линейной операцией фильтрации

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du.$$

Пусть теперь мы располагаем только дискретными наблюдениями  $(X_t, Y_t), (X_{t-1}, Y_{t-1}), \dots$  входа и выхода через равные интервалы времени в моменты  $t, t-1, \dots$ ; пусть дискретные выход и вход связаны дискретным линейным фильтром

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-j}.$$

Тогда в определенных случаях и при соответствующих предположениях можно установить полезные соотношения между дискретными и непрерывными моделями.

### 10.3.1. Отклик на скачкообразный вход

Остановимся на специальном случае, который важен для разработки дискретных схем регулирования, обсуждаемых в четвер-

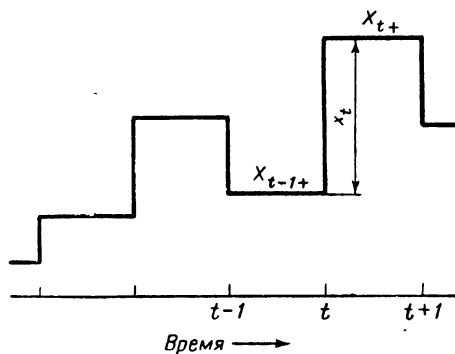


Рис. 10.8. Пример скачкообразного входа.

той части этой книги. Он возникает, если существует возможность регулирования сразу же после наблюдения выхода, так что входная переменная между наблюдениями остается на том же

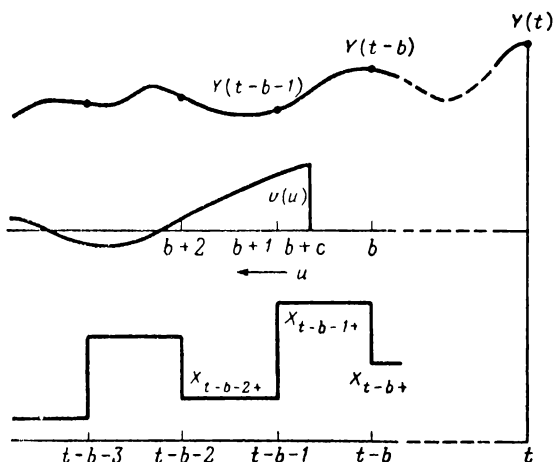


Рис. 10.9. Передача скачкообразного входа на выход.

уровне. Типичный вид результирующей прямоугольной волны, или *скачкообразного входа*, как мы будем его называть, показан на рис. 10.8. Мы обозначаем фиксируемый уровень, на котором поддерживается вход в интервале  $t-1 < \tau < t$ , через  $x_{t-1+}$ .

Рассмотрим непрерывную линейную систему, имеющую  $b$  целых интервалов запаздывания плюс дробный интервал  $c$ . Тогда в предыдущих обозначениях  $b + c = \tau$ . Выход системы можно представить как

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du,$$

где функция отклика на единичный импульс  $v(u)$  равна нулю при  $u < b + c$ . Для скачкообразного входа, как видно из рис. 10.9, выход в момент  $t$  будет определяться точным выражением

$$Y(t) = \left\{ \int_{b+c}^{b+1} v(u) du \right\} X_{t-b-1+} + \left\{ \int_{b+1}^{b+2} v(u) du \right\} X_{t-b-2+} + \dots$$

Таким образом,

$$Y(t) = Y_t = v_b X_{t-b-1+} + v_{b+1} X_{t-b-2+} + \dots$$

Отсюда для скачкообразного входа существует такой дискретный линейный фильтр, выход которого в моменты времени  $t$ ,  $t-1$ ,  $t-2$ , ... точно совпадает с непрерывным выходом  $Y(t)$ .

Пусть дан скачкообразный вход, рассмотрим выход дискретной модели

$$\xi(\nabla) Y_t = \eta(\nabla) X_{t-b-1+} \quad (10.3.1)$$

порядка  $(r, r)$  и сравним его с непрерывным выходом модели порядка  $R$

$$(1 + \Theta_1 D + \Theta_2 D^2 + \dots + \Theta_R D^R) Y(t) = X(t-b-c), \quad (10.3.2)$$

на которую подан тот же вход. В приложении П10.1 показано, что для правильно выбранных значений параметров  $(\Theta, c)$  выходы будут точно совпадать при  $R = r$ . Более того, если  $c = 0$ , выход непрерывной модели (10.3.2) будет идентичен в дискретные моменты времени выходу дискретной модели (10.3.1) порядка  $(r, r-1)$ . Такие связанные непрерывные и дискретные модели мы будем называть *дискретно-совпадающими* системами. Если для таких систем получена дискретная модель вида (10.3.1) порядка  $(r, r)$ , то в предположении, что непрерывная модель представима дифференциальным уравнением (10.3.2)  $r$ -го порядка, ее параметры, и в частности постоянные времени, могут быть явно выражены через параметры соответствующей дискретной модели.

Соотношения параметров для запаздывающей системы второго порядка выведены в приложении П10.1. Из них можно по-

лучить аналогичные соотношения для более простых систем, положив соответствующие константы равными нулю; этот способ мы сейчас обсудим.

### 10.3.2. Соотношения совпадающих систем первого и второго порядков

*Незапаздывающая система первого порядка: В-представление.* Непрерывная система, удовлетворяющая уравнению

$$(1 + T_1 D) Y(t) = g X(t), \quad (10.3.3)$$

для скачкообразного входа является дискретно-совпадающей с дискретной системой

$$(1 - \delta B) Y_t = \omega_0 X_{t-1+}, \quad (10.3.4)$$

где

$$\delta = e^{-1/T}, \quad T = (-\ln \delta)^{-1}, \quad \omega_0 = g(1 - \delta) \quad (10.3.5)$$

выражено через параметры  $\nabla$ -представления. Можно записать разностное уравнение иначе:

$$(1 + \xi \nabla) Y_t = g X_{t-1+}, \quad (10.3.6)$$

где

$$\xi = \delta/(1 - \delta). \quad (10.3.7)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим опять пример разд. 10.2.4 в случае «произвольного» входа. Выход для этого случая рассчитан в табл. 10.3 (в) и представлен на рис. 10.7, в. Предположим, что в действительности мы имеем непрерывную систему

$$(1 + 1,44D) Y(t) = 5X(t).$$

Тогда она будет дискретно-совпадающей с дискретной моделью (10.2.14), рассмотренной ранее, а именно с

$$(1 - 0,5B) Y_t = 2,5X_{t-1+}.$$

Если вход и выход были непрерывны, а вход был скачкообразным, истинный ход отклика был бы таким, как показано непрерывными линиями на рис. 10.10. Выход представлял собой последовательность экспонент. Каждая пунктирная линия показывает дальнейший ход отклика при отсутствии дальнейших изменений входа. Кривые точно совпадают в дискретные моменты отсчета с дискретным выходом, рассчитанным в табл. 10.3 (в) и приведенным на рис. 10.7, в.

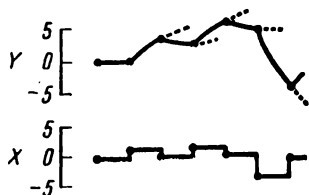


Рис. 10.10. Непрерывный отклик системы  $(1 - 1,44D) \times Y(t) = 5X(t)$  на скачкообразный вход.



*Запаздывающая система первого порядка: В-представление.* Непрерывная система, удовлетворяющая уравнению

$$(1 + TD)Y(t) = gX(t - b - c) \quad (10.3.8)$$

для скачкообразного входа, дискретно совпадает с системой, удовлетворяющей разностному уравнению

$$(1 - \delta B)Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B)X_{t-b-1+}, \quad (10.3.9)$$

где

$$\delta = e^{-1/T}, \quad \omega_0 = g(1 - \delta^{1-c}), \quad \omega_1 = g(\delta - \delta^{1-c}) \quad (10.3.10)$$

выражено через параметры  $\nabla$ -представления. Разностное уравнение можно записать иначе:

$$(1 + \xi \nabla)Y_t = g(1 + \eta \nabla)X_{t-b-1+}, \quad (10.3.11)$$

где

$$\xi = \delta/(1 - \delta), \quad -\eta = \delta(\delta^{-c} - 1)/(1 - \delta). \quad (10.3.12)$$

Заметим, что

$$(1 + \eta \nabla)X_{t-b-1+} = (1 + \eta)X_{t-b-1+} - \eta X_{t-b-2+} \quad (10.3.13)$$

может рассматриваться как интерполяция приращения  $(-\eta)$  между  $X_{t-b-1+}$  и  $X_{t-b-2+}$ . По табл. 10.4 могут быть определены соответствующие параметры  $(\xi, -\eta)$  и  $(T, c)$  дискретных и непрерывных моделей для ряда случаев.

Таблица 10.4

Значения  $-\eta$  при различных  $T$  и  $c$  для системы первого порядка с запаздыванием

Показаны также соответствующие значения  $\xi$  и  $\delta$

$\delta$	$\xi$	$T$	$c=0,9$	$c=0,7$	$c=0,5$	$c=0,3$	$c=0,1$
0,9	9,00	9,49	0,90	0,69	0,49	0,29	0,10
0,8	4,00	4,48	0,89	0,68	0,47	0,28	0,09
0,7	2,33	2,80	0,88	0,66	0,46	0,26	0,09
0,6	1,50	1,95	0,88	0,64	0,44	0,25	0,08
0,5	1,00	1,44	0,87	0,62	0,41	0,23	0,07
0,4	0,67	1,09	0,85	0,60	0,39	0,21	0,06
0,3	0,43	0,83	0,84	0,57	0,35	0,19	0,05
0,2	0,25	0,62	0,82	0,52	0,31	0,15	0,04
0,1	0,11	0,43	0,77	0,45	0,24	0,11	0,03

*Система второго порядка без запаздывания: В-представление.* Непрерывная система, удовлетворяющая уравнению

$$(1 + T_1 D)(1 + T_2 D)Y(t) = gX(t), \quad (10.3.14)$$

для скачкообразного входа дискретно совпадает с системой

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) X_{t-1+}, \quad (10.3.15)$$

или, что эквивалентно, с системой

$$(1 - S_1 B)(1 - S_2 B) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) X_{t-1+}, \quad (10.3.16)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= e^{-1/T_1}, \quad S_2 = e^{-1/T_2}, \\ \omega_0 &= g(T_1 - T_2)^{-1} \{T_1(1 - S_1) - T_2(1 - S_2)\}, \\ \omega_1 &= g(T_1 - T_2)^{-1} \{T_1 S_2(1 - S_1) - T_2 S_1(1 - S_2)\} \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

выражено через параметры  $\nabla$ -представления. Разностное уравнение можно записать также в виде

$$(1 + \xi_1 \nabla + \xi_2 \nabla^2) Y_t = (1 + \eta_1 \nabla) X_{t-1+}, \quad (10.3.18)$$

где

$$-\eta_1 = (1 - S_1)^{-1} (1 - S_2)^{-1} (T_1 - T_2)^{-1} \{T_2 S_1(1 - S_2) - T_1 S_2(1 - S_1)\} \quad (10.3.19)$$

может рассматриваться как приращение интерполяции между  $X_{t-1+}$  и  $X_{t-2+}$ . Значения  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , выраженные через  $\delta$ , можно получить непосредственно из данных табл. 10.1.

В качестве конкретного примера на рис. 10.5 показаны функции отклика на скачок двух дискретных систем, рассмотренных прежде, там же приведены соответствующие непрерывные отклики для дискретно-совпадающих систем. Эти пары моделей таковы:

$$\begin{aligned} \text{непрерывная модель: } (1 + 1,41D + 2D^2) Y(t) &= \\ &= 5X(t), \end{aligned}$$

Кривая К

$$\begin{aligned} \text{дискретная модель: } (1 - 1,15B + 0,49B^2) Y_t &= \\ &= 5(0,19 + 0,15B) X_{t-1+}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{непрерывная модель: } (1 + 2D)(1 + D) Y(t) &= \\ &= 5X(t), \end{aligned}$$

Кривая Л

$$\begin{aligned} \text{дискретная модель: } (1 - 0,97B + 0,22B^2) Y_t &= \\ &= 5(0,15 + 0,09B) X_{t-1+}. \end{aligned}$$

Непрерывные кривые были построены согласно (10.1.18) и (10.1.12). Эти формулы определяют непрерывные функции отклика на скачок для систем второго порядка, характеристические уравнения которых имеют соответственно комплексные и действительные корни.

Дискретное представление запаздывающей непрерывной системы второго порядка для скачкообразного входа приведено в приложении П10.1.

### 10.3.3. Аппроксимация общих непрерывных моделей дискретными моделями

Следует, вероятно, подчеркнуть еще раз, что модели дискретных передаточных функций не обязательно должны обосновываться исходя из их связи с непрерывными системами. Они важны сами по себе, так как позволяют рассчитать дискретный выход по дискретному входу. Однако в некоторых случаях такая связь представляет интерес.

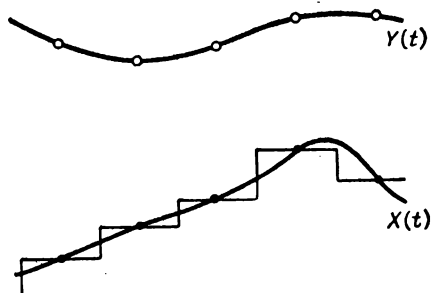


Рис. 10.11. Замена непрерывного входа скачкообразным входом.

Для непрерывных систем скачкообразный вход возникает в задачах регулирования, когда удобный способ работы заключается в проведении измерения выхода и затем в немедленной корректировке входной переменной  $X$  на нужную величину. Тогда входная переменная между наблюдениями не меняется, и мы получаем скачкообразный вход. Для таких случаев можно сразу же воспользоваться соотношениями, полученными в предыдущем разделе. В частности, эти соотношения показывают, что в используемых обозначениях *незапаздывающая* дискретная система представляется как

$$\xi(V) Y_t = \eta(V) X_{t-1+};$$

здесь индекс  $t - 1 +$  у  $X$  на один шаг отстает от индекса  $t$  у  $Y$ .

*Использование дискретных моделей при наличии непрерывных показаний.* Даже если мы имеем непрерывные записи входа и выхода, то, как будет показано в гл. 11, может оказаться удобным определить динамические характеристики системы дискретными методами. Так, если пары значений считываются с достаточно малым шагом выборки, при замене непрерывной записи дискретными показаниями теряется очень мало.

Один способ использования дискретных результатов для аппроксимации непрерывных передаточных функций — это рассматривать вход как скачкообразный, т.е. трактовать входную запись, как если бы дискретный вход, наблюдаемый в момент  $j$ , длился бы от  $j - 1/2$  до  $j + 1/2$ , как показано на рис. 10.11. Отсюда  $X(t) = X_j$ , ( $j - 1/2 < t \leq j + 1/2$ ). Мы можем связать дискретный результат с непрерывной записью, используя уравнения для скачкообразного входа, заменив в них  $X_t$  на  $X_{t+}$  и  $b + c$  на  $b + c - 1/2$ , т.е. вычтя из запаздывания временной полупериод. Непрерывная запись должна считываться через достаточно малые интервалы так, чтобы между точками отсчета не происходили внезапные изменения. В этом случае аппроксимация будет очень точной.

#### 10.3.4. Модели передаточных функций с добавленным шумом

На практике не следует ожидать, что выход  $Y$  будет точно следовать графику, определяемому моделью передаточной функции, даже если эта модель полностью адекватна. В нормальных условиях в системе действуют возмущения, не связанные с  $X$ . Они могут возникать в любой точке системы, но часто удобно рассматривать их полное влияние на выход  $Y(t)$ , как это было показано на рис. 1.5 в первом выпуске этой книги. Если мы предположим, что возмущение, или шум  $N_t$ , независим от уровня  $X$  и аддитивен по отношению к его влиянию, можно записать

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + N_t. \quad (10.3.20)$$

Если модель шума представить процессом АРСС ( $p, d, q$ )

$$N_t = \varphi^{-1}(B) \theta(B) a_t,$$

где  $a_t$  — белый шум, модель (10.3.20) можно окончательно записать как

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + \varphi^{-1}(B) \theta(B) a_t. \quad (10.3.21)$$

В следующей главе мы опишем методы идентификации, подгонки и проверки комбинированных моделей передаточной функции — шума вида (10.3.21).

### ПРИЛОЖЕНИЕ П10.1. НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ СО СКАЧКООБРАЗНЫМИ ВХОДАМИ

В разд. 10.3.1 (см. также рис. 10.9) было показано, что для скачкообразного входа выход любой запаздывающей непрерывной линейной системы

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du,$$

где  $v(u) = 0$  для  $u < b + c$ , может быть выдан в дискретные времена  $t, t-1, t-2, \dots$  дискретным линейным фильтром

$$Y_t = v(B) X_{t-1+},$$

где веса  $v_0, v_1, \dots, v_{b-1}$  все равны нулю, а веса  $v_b, v_{b+1}, \dots$  определены как

$$v_b = \int_{b+c}^{b+1} v(u) du, \quad (\text{П10.1.1})$$

$$v_{b+j} = \int_{b+j}^{b+j+1} v(u) du, \quad j \geq 1. \quad (\text{П10.1.2})$$

Пусть теперь динамика непрерывной системы описывается линейным дифференциальным уравнением  $R$ -го порядка

$$\Theta(D)Y(t) = X(t-b-c), \quad (\text{П10.1.3})$$

которое можно представить в виде

$$\prod_{h=1}^R (1 + T_h D) Y(t) = X(t-b-c),$$

где  $T_1, T_2, \dots, T_R$  могут быть действительными или комплексными. Покажем теперь, что для скачкообразного входа выход этой непрерывной системы дискретно совпадает с выходом дискретной модели разностного уравнения порядка  $(r, r)$  или порядка  $(r, r-1)$  при  $c = 0$ . При  $u < b + c$   $v(u) = 0$ , а для  $u \geq b + c$  в общем случае  $v(u)$  не равно нулю и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\prod_{h=1}^R (1 + T_h D) v(u-b-c) = 0, \quad u \geq b + c.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v(u) &= 0, \quad u < b + c, \\ v(u) &= \alpha_1 c^{-(u-b-c)/T_1} + \alpha_2 e^{-(u-b-c)/T_2} + \dots + \alpha_R e^{-(u-b-c)/T_R}, \\ &\quad u \geq b + c, \end{aligned}$$

откуда при помощи (П10.1.1) и (П10.1.2) получаем

$$v_b = \sum_{h=1}^R \alpha_h T_h \{1 - e^{-(1-c)/T_h}\}, \quad (\text{П10.1.4})$$

$$v_{b+j} = \sum_{h=1}^R \alpha_h T_h (1 - e^{-1/T_h}) e^{c/T_h} e^{-j/T_h}, \quad j \geq 1. \quad (\text{П10.1.5})$$

Нужно заметить, что в частном случае, когда  $c = 0$ , веса  $v_{b+j}$  определены по (П10.1.2) для всех  $j \geq 0$ . Рассмотрим теперь модель разностного уравнения порядка  $(r, s)$

$$\delta(B) Y_t = \omega(B) B^b X_{t-1} + \dots \quad (\text{П10.1.6})$$

Если записать

$$\Omega(B) = \omega(B) B^b,$$

то дискретная передаточная функция для этой модели удовлетворяет уравнению

$$\delta(B) v(B) = \Omega(B). \quad (\text{П10.1.7})$$

Как было замечено в (10.2.8), приравнивая коэффициенты в (П10.1.7), мы получаем  $b$  нулевых весов  $v_0, v_1, \dots, v_{b-1}$ , и, если  $s \geq r$ , последующие  $s - r + 1$  значений  $v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+s-r}$  не подчиняются общему ходу. Веса  $v_j$  будут при достаточно больших  $j$  удовлетворять уравнению

$$\delta(B) v_j = 0, \quad j > b + s, \quad (\text{П10.1.8})$$

для которого  $v_{b+s}, v_{b+s-1}, \dots, v_{b+s-r+1}$  дают  $r$  требуемых начальных значений. Запишем теперь

$$\delta(B) = \prod_{h=1}^r (1 - S_h B),$$

где  $S_1^{-1}, S_2^{-1}, \dots, S_r^{-1}$  — корни уравнения  $\delta(B) = 0$ . Тогда решение (П10.1.8) имеет вид

$$v_j = A_1(\omega) S_1^j + A_2(\omega) S_2^j + \dots + A_r(\omega) S_r^j, \quad (\text{П10.1.9})$$

$$j > b + s - r,$$

где коэффициенты  $A_h(\omega)$  выбраны так, что решения (П10.1.9) для  $j = s - r + 1, s - r + 2, \dots, s$  дают начальные значения  $v_{b+s-r+1}, \dots, v_{b+s}$ . Обозначение  $A_h(\omega)$  напоминает о том, что  $A$  — функции  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s$ . Тогда, если принять  $s = r$ , то для данных параметров  $(\omega, \delta)$  в (П10.1.6) и, следовательно, для данных параметров  $(\omega, S)$  существует соответствующий набор значений  $A_h(\omega)$  ( $h = 1, 2, \dots, r$ ), дающий соответствующие  $r$  начальных значений  $v_{b+1}, v_{b+2}, \dots, v_{b+r}$ . Далее нам известно, что  $v_b = \omega_0$ . Отсюда

$$v_b = \omega_0, \quad (\text{П10.1.10})$$

$$v_{b+j} = \sum_{h=1}^r A_h(\omega) S_h^j, \quad (\text{П10.1.11})$$

и мы можем приравнять значения весов в (П10.1.4) и (П10.1.5), полученных из дифференциального уравнения, и весов в (П10.1.10) и (П10.1.11), полученных из разностного уравнения. Для этого мы должны принять

$$R = r, \quad S_h = e^{-1/T_h},$$

тогда остающиеся  $r + 1$  уравнений

$$\omega_0 = \sum_{h=1}^r \alpha_h T_h (1 - S_h^{-c}),$$

$$A_h(\omega) = \alpha_h T_h (1 - S_h) S_h^{-c}$$

определяют  $c, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  через  $S$  и  $\omega$ .

При  $c = 0$  мы полагаем  $s = r - 1$ , и для данных параметров  $(\omega, S)$  разностного уравнения существует набор значений  $A_h(\omega)$  — функций  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1}$ , производящих  $r$  начальных значений  $v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+r-1}$ . Их можно приравнять значениям (П10.1.5) для  $j = 0, 1, \dots, r - 1$ . Для этого полагаем

$$R = r, \quad S_h = e^{-1/T_h},$$

и остальные  $r$  уравнений

$$A_h(\omega) = \alpha_h T_h (1 - S_h)$$

определяют  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  через  $S$  и  $\omega$ .

В общем для скачкообразного входа выход непрерывной динамической системы  $r$ -го порядка, задаваемой уравнением

$$\Theta(D) Y(t) = X(t - b - c), \quad (\text{П10.1.12})$$

в моменты времени  $t, t - 1, \dots$  равен выходу дискретной модели

$$\xi(\nabla) Y_t = \eta(\nabla) X_{t-b-1+} \quad (\text{П10.1.13})$$

порядка  $(r, r)$  с соответственно выбранными параметрами. Далее, если  $c = 0$ , выход непрерывной модели (П10.1.12) равен в дискретные моменты времени выходу модели (П10.1.13) порядка  $(r, r - 1)$ .

Введем теперь дискретную модель, соответствующую системе второго порядка с запаздыванием, для которой результаты разд. 10.3.2 можно получить как частные случаи.

*Система второго порядка с запаздыванием.* Пусть дифференциальное уравнение, связывающее вход и выход непрерывной системы, имеет вид

$$(1 + T_1 D)(1 + T_2 D) Y(t) = X(t - b - c). \quad (\text{П10.1.14})$$

Тогда непрерывный импульсный отклик равен

$$v(u) = g(T_1 - T_2)^{-1} (e^{-(u-b-c)/T_1} - e^{-(u-b-c)/T_2}), \quad (\text{П10.1.15})$$

$$u > b + c.$$

Для скачкообразного входа выход в дискретные моменты времени  $t, t - 1, t - 2, \dots$  связан с входом разностным уравнением

$$(1 + \xi_1 \nabla + \xi_2 \nabla^2) Y_t = (1 + \eta_1 \nabla + \eta_2 \nabla^2) X_{t-b-1+} \quad (\text{П10.1.16})$$

с соответственно подобранными параметрами. Разностное уравнение можно также записать как

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) X_{t-b-1+}$$

или как

$$(1 - S_1 B)(1 - S_2 B) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) X_{t-b-1+}. \quad (\text{П10.1.17})$$

Воспользовавшись (П10.1.1) и (П10.1.2) и подставив

$$S_1 = e^{-1/T_1}, \quad S_2 = e^{-1/T_2},$$

получаем

$$\begin{aligned} v_b &= \int_{b+c}^{b+1} v(u) du = g(T_1 - T_2)^{-1} \{T_1(1 - S_1^{1-c}) - T_2(1 - S_2^{1-c})\}, \\ v_{b+j} &= \int_{b+j}^{b+j+1} v(u) du = g(T_1 - T_2)^{-1} \{T_1 S_1^{-c} (1 - S_1) S_1^j - \\ &\quad - T_2 S_2^{-c} (1 - S_2) S_2^j\}, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (T_1 - T_2) v(B) &= gB^b T_1 \{1 - S_1^{1-c} + S_1^{-c} (1 - S_1)(1 - S_1 B)^{-1} S_1 B\} - \\ &\quad - gB^b T_2 \{1 - S_2^{1-c} + S_2^{-c} (1 - S_2)(1 - S_2 B)^{-1} S_2 B\}. \end{aligned}$$

Но из (П10.1.17) следует

$$v(B) = \frac{B^b (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1 - S_1 B)(1 - S_2 B)},$$

откуда получаем

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= g(T_1 - T_2)^{-1} \{T_1(1 - S_1^{1-c}) - T_2(1 - S_2^{1-c})\}, \\ \omega_1 &= g(T_1 - T_2)^{-1} \{(S_1 + S_2)(T_1 - T_2) + \\ &\quad + T_2 S_2^{1-c}(1 + S_1) - T_1 S_1^{1-c}(1 + S_2)\}, \\ \omega_2 &= g S_1 S_2 (T_1 - T_2)^{-1} \{T_2(1 - S_2^{-c}) - T_1(1 - S_1^{-c})\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{П10.1.18})$$

и

$$\begin{aligned} \delta_1 &= S_1 + S_2 = e^{-1/T_1} + e^{-1/T_2}, \\ \delta_2 &= -S_1 S_2 = -e^{-(1/T_1) - (1/T_2)}. \end{aligned} \quad (\text{П10.1.19})$$

**Комплексные корни.** Если  $T_1$  и  $T_2$  — комплексные величины, то с помощью подстановки

$$T_1 = \xi^{-1} e^{i\lambda}, \quad T_2 = \xi^{-1} e^{-i\lambda} \quad (i^2 = -1)$$



получим соответствующие выражения

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= g \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta(1-c) \cos \lambda} \sin \{ \zeta(1-c) \sin \lambda + \lambda \}}{\sin \lambda} \right\}, \\ \omega_2 &= g \delta_2 \left\{ 1 - \frac{e^{\zeta c \cos \lambda} \sin (-\zeta c \sin \lambda + \lambda)}{\sin \lambda} \right\}, \\ \omega_1 &= \omega_0 - \omega_2 - (1 - \delta_1 - \delta_2) g, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П10.1.20})$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2e^{-\zeta \cos \lambda} \cos(\zeta \sin \lambda), \\ \delta_2 &= -e^{-2\zeta \cos \lambda}. \end{aligned} \quad (\text{П10.1.21})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ П10.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Линейность (аддитивность) рассмотренных моделей передаточной функции означает, что результирующий отклик на сумму отдельных входных функций равен сумме откликов на каждую из этих входных функций. Конкретнее, если  $Y_t^{(1)}$  — это отклик в момент  $t$  на вход  $\{X_t^{(1)}\}$  и  $Y_t^{(2)}$  — отклик в момент  $t$  на вход  $\{X_t^{(2)}\}$ , то отклик в момент  $t$  на вход  $\{X_t^{(1)} + X_t^{(2)}\}$  будет равен  $Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$ . Аналогичный эффект имеем для непрерывных входов и выходов. В частности, если входное значение умножено на некоторую константу, выходное значение умножается на ту же константу. На практике это предположение никогда не бывает совершенно точным, но во многих практических ситуациях оказывается достаточно хорошим приближением.

Модель нелинейных систем можно иногда получить, если допустить, что параметры системы в некоторых заданных пределах зависят от уровня входа. Положим, например, что система исследовалась в диапазоне, где  $Y$  имеет максимум  $\eta$ , и для любого  $X$  соотношение установившихся значений можно аппроксимировать квадратичным выражением

$$Y_\infty = \eta - \frac{1}{2} k (\mu - X)^2,$$

где  $Y$  и  $X$ , как и ранее, — отклонения от удобных начальных уровней.

Тогда

$$g(X) = \frac{dY_\infty}{dX} = k(\mu - X),$$

и динамическое поведение системы может быть описано разностным уравнением первого порядка (10.3.4) с переменным усилением, пропорциональным  $k(\mu - X)$ . Тогда

$$Y_t = \delta Y_{t-1} + k(\mu - X_{t-1+})(1 - \delta) X_{t-1+}. \quad (\text{П10.2.1})$$

*Динамика простого химического реактора.* Иногда оказывается возможным провести теоретический анализ реальной проблемы в форме, удобной для использования передаточных функций. В частности, это позволяет очень детально исследовать эффекты, связанные с линейной аппроксимацией.

Например, положим, что чистый химический продукт  $A$  непрерывно подается в управляемый реакторный резервуар и в присутствии катализатора определенная его часть превращается в продукт  $B$  без изменения общего объема; продукт, непрерывно выходящий из реактора, будет смесью  $B$  и неизмененного  $A$ .

Пусть система вначале находится в равновесии, измеряются (в соответствующих единицах) следующие величины:

1)  $\mu$  — скорость подачи  $A$  в реактор и, следовательно, скорость выхода смеси  $A$  и  $B$  из реактора;

2)  $\eta$  — доля неизмененного  $A$  в выходном продукте;  $1 - \eta$  — доля  $B$  в выходном продукте;

3)  $V$  — объем реактора;

4)  $k$  — константа, определяющая скорость образования продукта  $B$ .

Пусть реакция имеет «первый порядок» по отношению к  $A$ , это означает, что скорость образования  $B$  и использования  $A$  пропорциональна количеству присутствующего  $A$ . Скорость образования  $B$  будет тогда  $kV\eta$ , скорость выхода  $B$  равна  $\mu(1 - \eta)$ , и, так как система в равновесии,

$$\mu(1 - \eta) = kV\eta. \quad (\text{П10.2.2})$$

Пусть теперь равновесие системы нарушено; скорость подачи  $A$  в реактор в момент  $t$  равна  $\mu + X(t)$ ; соответствующая концентрация  $A$  в выходе равна  $\eta + Y(t)$ . Теперь скорость химического образования  $B$ , равная  $kV(\eta + Y(t))$ , вообще говоря, не будет уже равна скорости, с которой  $B$  выходит из системы (для последней имеем выражение  $[\mu + X(t)][1 - \eta - Y(t)]$ ). Разность этих двух величин — это скорость увеличения  $B$  в реакторе, равная  $-V[dY(t)/dt]$ . Тогда

$$-V \frac{dY(t)}{dt} = kV[\eta + Y(t)] - [\mu + X(t)][1 - \eta - Y(t)]. \quad (\text{П10.2.3})$$

Пользуясь (П10.2.2) и перегруппировав члены в (П10.2.3), получаем

$$(kV + \mu + VD)Y(t) = X(t)[1 - \eta - Y(t)],$$

или

$$(1 + TD)Y(t) = g\left(1 - \frac{Y(t)}{1 - \eta}\right)X(t), \quad (\text{П10.2.4})$$

где

$$T = \frac{V}{kV + \mu}, \quad g = \frac{1 - \eta}{kV + \mu}. \quad (\text{П10.2.5})$$

Поскольку (П10.2.4) содержит произведение  $X(t)Y(t)$ , это дифференциальное уравнение нелинейно. Однако, как мы покажем, в некоторых практических ситуациях его можно с достаточной точностью аппроксимировать линейным дифференциальным уравнением.

Процессы такого рода протекают при разнообразных условиях, но вполне правдоподобной является ситуация, при которой доля продукта  $A$ , превращающаяся в  $B$ , равна  $100(1 - \eta)\%$  и близка к  $80\%$ , а флуктуация  $Y(t)$  близка к  $4\%$ . В этом случае множитель  $1 - Y(t)/(1 - \eta)$  изменяется от  $0,95$  до  $1,05$  и с хорошей точностью равен единице. Нелинейное дифференциальное уравнение (П10.2.4) можно заменить тогда линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(1 + TD)Y(t) = gX(t),$$

где  $T$  и  $g$  определены в разд. 10.1.2. Если система наблюдалась бы в дискретные интервалы времени, это уравнение можно было бы аппроксимировать линейным разностным уравнением.

Конечно, могут встретиться ситуации, где нелинейность существенна. Это в особенности верно при исследованиях оптимизации, где диапазон вариаций переменных может быть велик. В условиях неадекватности линейной гипотезы иногда полезно представить динамику системы совокупностью линейных моделей, применимых в разных диапазонах значений входных переменных. Однако для дискретных систем часто более удобно работать непосредственно с нелинейным разностным уравнением, которое можно решить итерациями, а не аналитически. Например, мы можем заменить нелинейное дифференциальное уравнение (П10.2.4) нелинейным разностным уравнением

$$(1 + \xi_1 \nabla)Y_t = g(1 + \eta_{12}Y_{t-1})X_{t-1}.$$

## Идентификация, подгонка и проверка моделей передаточных функций

В гл. 10 был введен экономичный класс дискретных линейных моделей передаточных функций

$$Y_t - \delta_1 Y_{t-1} - \dots - \delta_r Y_{t-r} = \omega_0 X_{t-b} - \omega_1 X_{t-b-1} - \dots - \omega_s X_{t-b-s},$$

или

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b}.$$

В этих моделях  $X_t$  и  $Y_t$  — отклонения входа и выхода системы от равновесия. Практически эта система подвержена возмущениям, или шуму, в результате чего выход, предсказываемый моделью передаточной функции, изменяется на величину  $N_t$ . Комбинированную модель передаточной функции — шума можно записать как

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + N_t.$$

В этой главе описаны методы идентификации, подгонки и проверки моделей передаточной функции — шума в ситуациях, когда в моменты времени  $1, 2, \dots, N$  становятся доступными пары наблюдений входа и выхода  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ .

Инженерные методы оценивания передаточных функций обычно основываются на выборе специальных входных функций — например, скачка, синусоиды [81] или импульса [82]. Эти методы полезны, если шум в системе невелик, но менее удовлетворительны в других случаях. В присутствии заметного шума для оценивания передаточных функций необходимо использовать статистические методы. Два опробованных ранее подхода к этой проблеме заключались в прямой оценке импульсного отклика во временной области и прямой оценке усиления и фазовой характеристики в частотной области, как описано, например, в [6, 7, 27]. Эти методы часто оказываются неудовлетворительными, потому что в них оценивается слишком много параметров. Например, чтобы определить усиление и фазовую характеристику, необходимо оценить на каждой частоте два параметра. Принятый

в этой главе подход заключается в оценке параметров экономической модели разностного уравнения. Почти всюду в этой главе предполагается, что вход  $X_t$  — случайный процесс. Рассмотренные модели полезны для описания и прогнозирования некоторых многомерных временных рядов.

## 11.1. ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Точно так же как для идентификации случайных моделей использовалась автокорреляционная функция, инструментом анализа данных с целью идентификации моделей передаточных функций служит *взаимная корреляционная функция* входа и выхода. В этом разделе мы рассмотрим основные свойства взаимной корреляционной функции, а в следующем покажем, как ее использовать для идентификации моделей передаточных функций.

### 11.1.1. Свойства взаимных ковариационной и корреляционной функций

*Двумерные случайные процессы.* В гл. 2 (выпуск 1) было показано, что, анализируя статистический временной ряд, полезно рассматривать его как реализацию некой гипотетической популяции временных рядов, называемой случайным процессом.

Пусть мы хотим описать входной временной ряд  $X_t$  и соответствующий выходной временной ряд  $Y_t$  для некоторой реальной системы. Например, на рис. 11.1 показаны непрерывные данные о входе — скорости подачи газа и о выходе — концентрации  $\text{CO}_2$  для газовой печи. Тогда эту пару временных рядов можно рассматривать как реализацию из гипотетической популяции временных рядов, называемой *двумерным случайным процессом*  $(X_t, Y_t)$ . Пусть данные считываются через равные интервалы времени, образуя пару дискретных временных рядов; их значения в моменты времени  $t_0 + h, t_0 + 2h, \dots, t_0 + Nh$  обозначены  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ .

В этой главе подробно проиллюстрированы данные о газовой печи, считываемые каждые 9 с (рис. 11.1). Полученные таким образом значения  $(X_t, Y_t)$  приведены как ряд J в конце этого выпуска.

*Взаимные ковариационная и корреляционная функции.* В гл. 2 было показано, что стационарный гауссовский случайный процесс может быть описан его средним значением  $\mu$  и автоковариационной функцией  $\gamma_k$ , или, что эквивалентно, его средним значением  $\mu$ , дисперсией  $\sigma^2$  и автокорреляционной функцией  $\rho_k$ . Далее, так как  $\gamma_k = \gamma_{-k}$  и  $\rho_k = \rho_{-k}$ , автоковариационную и автокорреляционную функции графически можно представлять только для неотрицательных задержек  $k = 0, 1, 2, \dots$

В общем случае двумерный случайный процесс  $(X_t, Y_t)$  не обязательно стационарен. Однако, как и в гл. 4, мы предпола-

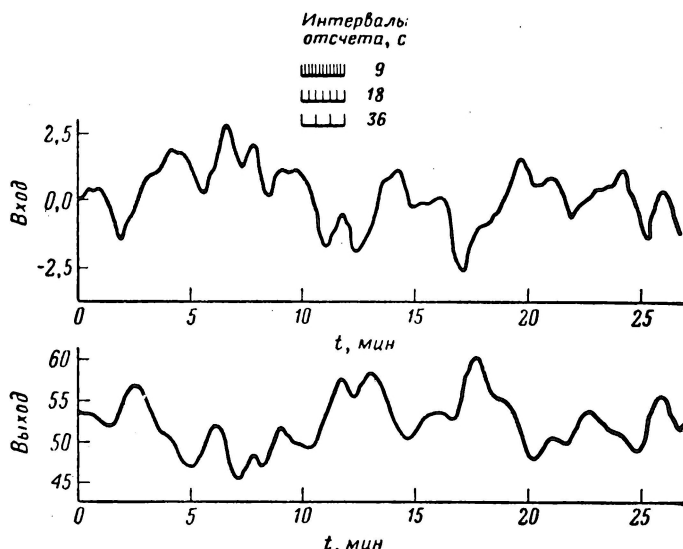


Рис. 11.1. Скорость подачи газа на входе (в условных единицах) и концентрация  $\text{CO}_2$  (в %) на выходе газовой печи.

гаем, что процесс  $(x_t, y_t)$ , полученный из этого процесса взятием нужного числа разностей (т.е.  $x_t = \nabla^d X_t$ ,  $y_t = \nabla^d Y_t$ ), стационарен. Предположение о стационарности означает, в частности, что

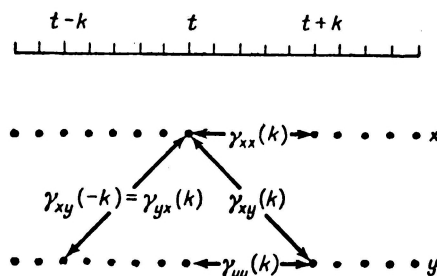


Рис. 11.2. Автоковариации и взаимные ковариации двумерного случайного процесса.

образующие пару процессы  $x_t$  и  $y_t$  обладают постоянными средними значениями  $\mu_x$  и  $\mu_y$  и постоянными дисперсиями  $\sigma_x^2$  и  $\sigma_y^2$ . Если, кроме того, предположить, что двумерный процесс нормальный, то он однозначно описывается свсими средними

значениями  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  и ковариационной матрицей \*). Рис. 11.2 иллюстрирует различные типы ковариаций, которые необходимо рассматривать при вычислении матрицы.

Коэффициенты автоковариаций каждого ряда — компоненты пары при задержке  $k$  — определяются обычными формулами

$$\gamma_{xx}(k) = E[(x_t - \mu_x)(x_{t+k} - \mu_x)] = E[(x_t - \mu_x)(x_{t-k} - \mu_x)],$$

$$\gamma_{yy}(k) = E[(y_t - \mu_y)(y_{t+k} - \mu_y)] = E[(y_t - \mu_y)(y_{t-k} - \mu_y)],$$

где обозначения  $\gamma_{xx}(k)$  и  $\gamma_{yy}(k)$  используются теперь для автоковариаций рядов  $x$  и  $y$ . Кроме этих ковариаций, в ковариационной матрице могут появиться только два типа коэффициентов: *коэффициенты взаимной ковариации* между  $x$  и  $y$  при задержке  $+k$

$$\gamma_{xy}(k) = E[(x_t - \mu_x)(y_{t+k} - \mu_y)], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.1.1)$$

и коэффициенты взаимной ковариации между  $y$  и  $x$  при задержке  $+k$

$$\gamma_{yx}(k) = E[(y_t - \mu_y)(x_{t+k} - \mu_x)], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.1.2)$$

Заметим, что в общем  $\gamma_{xy}(k)$  не совпадает с  $\gamma_{yx}(k)$ . Однако, так как

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(k) &= E[(x_{t-k} - \mu_x)(y_t - \mu_y)] = \\ &= E[(y_t - \mu_y)(x_{t-k} - \mu_x)] = \gamma_{yx}(-k), \end{aligned}$$

мы должны определить только одну функцию  $\gamma_{xy}(k)$  для  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$ . Функция  $\gamma_{xy}(k)$  называется *взаимной ковариационной функцией* двумерного процесса. По аналогии безразмерная величина

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots \quad (11.1.3)$$

называется *коэффициентом взаимной корреляции* при задержке  $k$ , и функция  $\rho_{xy}(k)$ , определенная при  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — *взаимной корреляционной функцией* двумерного процесса.

Так как в общем случае  $\rho_{xy}(k)$  не равно  $\rho_{xy}(-k)$ , взаимная корреляционная функция в отличие от автокорреляционной функции не симметрична относительно  $k = 0$ . Фактически часто взаимная корреляционная функция равна нулю в некотором диапазоне  $k$ : скажем, от  $-\infty$  до  $i$  или от  $i$  до  $+\infty$ . Рассмотрим, например, взаимную ковариационную функцию между  $a$  и  $z$  для «задержанного» процесса авторегрессии первого порядка

$$(1 - \phi B)\tilde{z}_t = a_{t-b}, \quad -1 < \phi < 1, \quad b > 0,$$

---

\*) Точнее, ковариационными матрицами всевозможных порядков. — Прим. ред.

где  $a_t$  имеет нулевое среднее значение. Тогда, поскольку

$$\tilde{z}_{t+k} = a_{t+k-b} + \phi a_{t+k-b-1} + \phi^2 a_{t+k-b-2} + \dots,$$

взаимная ковариационная функция между  $a$  и  $z$  будет равна

$$\gamma_{az}(k) = E[a_t \tilde{z}_{t+k}] = \begin{cases} \phi^{k-b} \sigma_a^2, & k \geq b, \\ 0, & k < b. \end{cases}$$

Следовательно, для задержанного процесса авторегрессии взаимная корреляционная функция равна

$$\rho_{az}(k) = \begin{cases} \phi^{k-b} \frac{\sigma_a}{\sigma_z} = \phi^{k-b} (1 - \phi^2)^{1/2}, & k \geq b, \\ 0, & k < b. \end{cases}$$

На рис. 11.3 показана эта взаимная корреляционная функция при  $b = 2$  и  $\phi = 0,6$ .

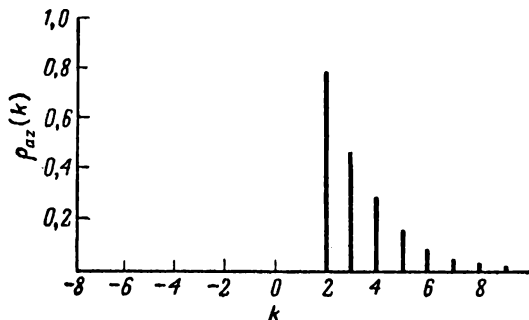


Рис. 11.3. Взаимная корреляционная функция  $a$  и  $\tilde{z}$  для процесса авторегрессии с запаздыванием  $\tilde{z}_t = 0,6\tilde{z}_{t-1} + a_{t-2}$ .

### 11.1.2. Оценивание взаимных ковариационных и корреляционных функций

Предположим, что после взятия  $d$ -х разностей от первоначальных входного и выходного временных рядов имеется  $n = N - d$  пар значений  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , доступных для анализа. Тогда, как показано, например, в [27], выборочная оценка  $c_{xy}(k)$  коэффициента взаимной ковариации для задержки  $k$  дается выражением

$$c_{xy}(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(y_{t+k} - \bar{y}), & k = 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n+k} (y_t - \bar{y})(x_{t-k} - \bar{x}), & k = 0, -1, -2, \dots, \end{cases} \quad (11.1.4)$$



где  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  — средние значения рядов  $x$  и  $y$ . Аналогично выборочная оценка  $r_{xy}(k)$  коэффициента взаимной корреляции  $\rho_{xy}(k)$  при задержке  $k$  может быть получена подстановкой в (11.1.3) вместо  $\gamma_{xy}(k)$ ,  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  их выборочных оценок  $c_{xy}(k)$ ,  $s_x = \sqrt{c_{xx}(0)}$  и  $s_y = \sqrt{c_{yy}(0)}$ , что приводит к выражению

$$r_{xy}(k) = \frac{c_{xy}(k)}{s_x s_y}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots \quad (11.1.5)$$

*Пример.* На практике для получения полезных оценок взаимной корреляционной функции нужно не менее 50 пар наблюдений. Однако, чтобы проиллюстрировать формулы (11.1.4) и (11.1.5), мы вычислим оценку взаимной корреляционной функции при задержках  $+1$  и  $-1$  для следующих рядов из 5 пар наблюдений:

$t$	1	2	3	4	5
$x_t$	11	7	8	12	14
$y_t$	7	10	6	7	10

Для этих рядов  $\bar{x} = 10,4$ ,  $\bar{y} = 8$  и отклонения от среднего равны

$t$	1	2	3	4	5
$x_t - \bar{x}$	0,6	-3,4	-2,4	1,6	3,6
$y_t - \bar{y}$	-1,0	2,0	-2,0	-1,0	2,0

Отсюда

$$\sum_{t=1}^4 (x_t - \bar{x})(y_{t+1} - \bar{y}) = (0,6)(2,0) + (-3,4)(-2,0) + (-2,4)(-1,0) + (1,6)(2,0) = 13,60$$

и

$$c_{xy}(1) = 13,60/5 = 2,720.$$

Используя  $s_x = 2,577$ ,  $s_y = 1,673$ , получаем

$$r_{xy}(1) = \frac{c_{xy}(1)}{s_x s_y} = \frac{2,720}{(2,577)(1,673)} = 0,63.$$

Аналогично  $\sum_{t=1}^4 (y_t - \bar{y})(x_{t+1} - \bar{x}) = -8,20$ . Отсюда  $c_{xy}(-1) = -1,640$  и

$$r_{xy}(-1) = \frac{-1,640}{(2,577)(1,673)} = -0,38.$$

На рис. 11.4 показана выборочная взаимная корреляционная функция  $r_{xy}(k)$  дискретных входных и выходных данных для

газовой печи, полученных считыванием с непрерывных данных (на рис. 11.1) с шагом в 9 с. Отметим, что взаимная корреляционная функция не симметрична относительно нуля и имеет четко выраженный пик на  $k = 5$ , указывающий, что выход задержан относительно входа. Значения взаимных корреляций отрицатель-

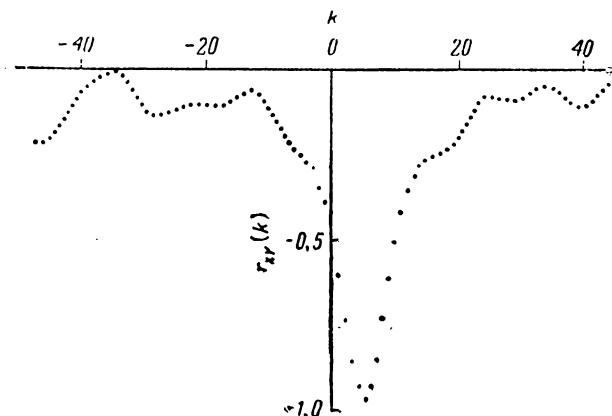


Рис. 11.4. Взаимная корреляционная функция входа и выхода для данных газовой печи, считываемых через 9-секундные интервалы.

ны. Этого следовало ожидать (см. рис. 11.1), так как увеличение скорости подачи газа *уменьшает* выходную концентрацию.

### 11.1.3. Приближенные стандартные ошибки выборочных оценок взаимных корреляций

Грубую проверку того, равны ли некоторые значения взаимной корреляционной функции  $\rho_{xy}(k)$  практически нулю, можно провести, сравнивая соответствующие выборочные оценки взаимной корреляции с их стандартными ошибками, полученными по формуле Бартлетта [78]. Он показал, что ковариация двух выборочных оценок взаимных корреляций  $r_{xy}(k)$  и  $r_{xy}(k+l)$  в предположении о нормальности равна

$$\begin{aligned} \text{cov}[r_{xy}(k), r_{xy}(k+l)] &\approx \\ &\approx (n-k)^{-1} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \left[ \rho_{xx}(v) \rho_{yy}(v+l) + \rho_{xy}(-v) \rho_{xy}(v+2k+l) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_{xy}(k) \rho_{xy}(k+l) \left\{ \rho_{xy}^2(v) + \frac{1}{2} \rho_{xx}^2(v) + \frac{1}{2} \rho_{yy}^2(v) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \rho_{xy}(k) \{ \rho_{xx}(v) \rho_{xy}(v+k+l) + \rho_{xy}(-v) \rho_{yy}(v+k+l) \} - \right. \\ &\quad \left. - \rho_{xy}(k+l) \{ \rho_{xx}(v) \rho_{xy}(v+k) + \rho_{xy}(-v) \rho_{yy}(v+k) \} \right]. \quad (11.1.6) \end{aligned}$$

В частности, приравнявая  $l = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \text{var}[r_{xy}(k)] \approx (n-k)^{-1} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} & \left[ \rho_{xx}(v) \rho_{yy}(v) + \rho_{xy}(k+v) \rho_{xy}(k-v) + \right. \\ & \left. + \rho_{xy}^2(k) \left\{ \rho_{xy}^2(v) + \frac{1}{2} \rho_{xx}^2(v) + \frac{1}{2} \rho_{yy}^2(v) \right\} - \right. \\ & \left. - 2\rho_{xy}(k) \{ \rho_{xx}(v) \rho_{xy}(v+k) + \rho_{xy}(-v) \rho_{yy}(v+k) \} \right]. \quad (11.1.7) \end{aligned}$$

Как отмечено Бартлеттом, из этих общих выражений можно получить формулы для важных частных случаев. Например, если предположить, что  $x_t \equiv y_t$ , справедливы следующие равенства:

$$\rho_{xx}(v) = \rho_{yy}(v) = \rho_{xy}(v) = \rho_{xy}(-v).$$

Учитывая их в (11.1.6) и (11.1.7), получаем выражение для ковариации между двумя выборочными автокорреляциями, в частности выражение для дисперсии выборочной автокорреляции, приведенное как (2.1.11) в гл. 2.

Часто бывает, что два процесса существенно коррелированы только в узком диапазоне задержек. Пусть задано, что  $\rho_{xy}(v)$  не равно нулю *только* на некотором отрезке  $Q_1 \leq v \leq Q_2$ . Тогда

а) если ни  $k$ , ни  $k+l$ , ни  $k+l/2$  не попадают в этот отрезок, все члены в (11.1.6), кроме первого, равны нулю, и

$$\text{cov}[r_{xy}(k), r_{xy}(k+l)] \approx (n-k)^{-1} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \rho_{xx}(v) \rho_{yy}(v+l); \quad (11.1.8)$$

б) если  $k$  не попадает в этот отрезок, (11.1.7) сводится аналогично к

$$\text{var}[r_{xy}(k)] \approx (n-k)^{-1} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \rho_{xx}(v) \rho_{yy}(v). \quad (11.1.9)$$

В частности, если предположить, что два процесса *взаимно не коррелированы*, отсюда следует, что простые формулы (11.1.8) и (11.1.9) применимы для *любых* задержек  $k$  и  $k+l$ .

Другой частный случай, представляющий некоторый интерес, когда два процесса *не коррелированы* и *один из них является белым шумом*. Положим, что  $y_t = a_t$  — белый шум, а  $x_t$  обладает автокорреляцией. Тогда из (11.1.8) следует

$$\text{cov}[r_{xa}(k), r_{xa}(k+l)] \approx (n-k)^{-1} \rho_{xx}(l), \quad (11.1.10)$$

$$\text{var}[r_{xa}(k)] \approx (n-k)^{-1}. \quad (11.1.11)$$

Отсюда вытекает, что

$$\rho[r_{xa}(k), r_{xa}(k+l)] \approx \rho_{xx}(l). \quad (11.1.12)$$

В этом случае выборочные взаимные корреляции имеют *ту же* автокорреляционную функцию, что и процесс  $x_t$ . Таким образом, хотя  $a_t$  и  $x_t$  *не коррелированы*, выборочная взаимная корреляционная функция может варьировать относительно нуля со стандартным отклонением  $(n - k)^{-1/2}$  *систематическим образом*, типичным для автокорреляционной функции  $\rho_{xx}(l)$ .

Наконец, если оба процесса являются взаимно не коррелированными белыми шумами, ковариация между взаимными выборочными корреляциями будет равна нулю.

## 11.2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Покажем теперь, как *идентифицировать* комбинированную модель передаточной функции — шума

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + N_t$$

для линейной системы, содержащей шум  $N_t$  на выходе; предполагается, что шум генерирован процессом АРПСС, статистически независимым от входа  $X_t$  \*). Конкретной целью этого этапа является получение представления о порядках  $r$  и  $s$  левого и правого операторов в модели передаточной функции и начальных значениях параметров  $\delta$ ,  $\omega$  и параметра запаздывания  $b$ . Кроме того, мы хотим весьма приближенно оценить параметры  $p$ ,  $d$ ,  $q$  процесса АРПСС, описывающего шум, и найти начальные оценки значений параметров  $\phi$  и  $\theta$  этой модели. Полученные таким образом пробные модели передаточной функции и шума могут быть использованы как начальные приближения в более эффективной процедуре оценивания, описанной в разд. 11.3.

*Основные этапы процедуры идентификации.* Предположим, что модель передаточной функции

$$Y_t = v(B) X_t + N_t \quad (11.2.1)$$

может быть экономично параметризована в виде

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + N_t, \quad (11.2.2)$$

где  $\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r$  и  $\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s$ . Процедура идентификации состоит из

1) получения грубых оценок  $\hat{v}_j$  весов  $v_j$  импульсного отклика в (11.2.1),

---

\*) Если мы можем свободно выбирать вход, мы можем гарантировать его независимость от  $N_t$ , генерируя  $X_t$  при помощи какого-либо случайного процесса.

2) использования этих оценок  $\hat{v}_j$  для получения представления о порядках  $r$  и  $s$  правого и левого операторов в (11.2.2) и параметра запаздывания  $b$ ,

3) замены оценок  $\hat{v}_j$  в уравнениях (10.2.8) значениями  $r$ ,  $s$  и  $b$ , полученными в (2), для определения начальных оценок параметров  $\delta$  и  $\omega$  в (11.2.2).

При известных  $\hat{v}_j$  значения  $b$ ,  $r$  и  $s$  можно оценить, пользуясь следующими фактами, установленными в разд. 10.2.2. Для модели вида (11.2.2) веса  $v_j$  импульсного отклика состоят из

а)  $b$  нулевых значений  $v_0, v_1, \dots, v_{b-1}$ ,

б) последующих  $s - r + 1$  значений  $v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+s-r}$  с произвольным поведением (таких значений нет, если  $s < r$ ),

в) значений  $v_j$  при  $j \geq b + s - r + 1$ , поведение которых определяется разностным уравнением  $r$ -го порядка с  $r$  начальными значениями  $v_{b+s}, \dots, v_{b+s-r+1}$ . Начальные значения для  $j < b$ , конечно, равны нулю.

*Взятие разностей от входа и выхода.* Основное средство, используемое при идентификации, — это взаимная корреляционная функция входа и выхода. Когда процессы не стационарны, предполагается, что стационарность можно ввести несколькими взятиями разностей. Нестационарное поведение можно заподозрить, если выборочные авто- и взаимные корреляционные функции рядов  $(X_t, Y_t)$  не затухают достаточно быстро. Мы предполагаем, что нужная степень  $d$  взятия разностей достигнута, если выборочные авто- и взаимные корреляции  $r_{xx}(k)$ ,  $r_{yy}(k)$  и  $r_{xy}(k)$  процессов  $x_t = \nabla^d X_t$  и  $y_t = \nabla^d Y_t$  затухают достаточно быстро. На практике  $d$  обычно равно 0, 1 или 2.

*Идентификация функции отклика на единичный импульс без предварительного выравнивания спектра.* Пусть после взятия  $d$  разностей модель (11.2.1) можно представить в виде

$$y_t = v_0 x_t + v_1 x_{t-1} + v_2 x_{t-2} + \dots + n_t, \quad (11.2.3)$$

где  $y_t = \nabla^d Y_t$ ,  $x_t = \nabla^d X_t$  и  $n_t = \nabla^d N_t$  — стационарные процессы с нулевыми средними значениями. Тогда, умножая все члены (11.2.3) на  $x_{t-k}$  для  $k \geq 0$ , получаем

$$x_{t-k} y_t = v_0 x_{t-k} x_t + v_1 x_{t-k} x_{t-1} + \dots + x_{t-k} n_t. \quad (11.2.4)$$

Если, далее, мы предположим, что  $x_{t-k}$  не коррелировано с  $n_t$  для всех  $k$ , то, перейдя к математическим ожиданиям в (11.2.4), получим систему уравнений

$$\gamma_{xy}(k) = v_0 \gamma_{xx}(k) + v_1 \gamma_{xx}(k-1) + \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.2.5)$$

Пусть веса  $v_j$  практически равны нулю при  $k \geq K$ . Тогда первые  $K+1$  уравнений (11.2.5) можно записать как

$$\gamma_{xy} = \Gamma_{xx} \mathbf{v}, \quad (11.2.6)$$

где

$$\gamma_{xy} = \begin{bmatrix} \gamma_{xy}(0) \\ \gamma_{xy}(1) \\ \vdots \\ \gamma_{xy}(K) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{xx} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(K) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(K-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(K) & \gamma_{xx}(K-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_K \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (11.2.6) вместо  $\gamma_{xx}(k)$  и  $\gamma_{xy}(k)$  выборочные оценки автокорреляционной функции входа  $r_{xx}(k)$  и взаимной корреляционной функции между входом и выходом  $r_{xy}(k)$ , получаем  $K+1$  линейных уравнений для первых весов. Однако эти уравнения не дают в общем случае эффективных оценок, их трудно решать, и в любом случае они требуют знания точки  $K$ , за которой  $v_j$  практически равны нулю.

### 11.2.1. Идентификация моделей передаточной функции с предварительным выравниванием спектра входа

Если бы входом системы явился белый шум, процесс идентификации мог быть значительно упрощен. Как более подробно будет рассмотрено в разд. 11.6, в случае, если мы имеем возможность управлять входом, рекомендуется использовать в качестве входа белый шум. Когда первоначальный вход подчиняется другому стохастическому процессу, можно упростить идентификацию при помощи выравнивания спектра («выбеливания»).

Пусть входной процесс  $x_t$  является стационарным (после взятия соответствующего числа разностей) и представимым какой-либо моделью из общего линейного класса моделей авторегрессии — скользящего среднего. Тогда при заданном наборе данных мы можем применить наши обычные методы идентификации и оценивания для получения модели процесса  $x_t$

$$\phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) x_t = \alpha_t, \quad (11.2.7)$$

который с достаточной точностью преобразует коррелированный входной ряд  $x_t$  в некоррелированный ряд — белый шум  $\alpha_t$ . В то же время мы можем получить оценку  $\hat{\sigma}_\alpha^2$  для  $\sigma_\alpha^2$  из суммы квадратов  $\hat{\alpha}$ . Если теперь применить то же преобразование к  $y_t$ , то получим

$$\beta_t = \phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) y_t,$$

и тогда модель (11.2.3) можно представить в виде

$$\beta_t = v(B) \alpha_t + \varepsilon_t, \quad (11.2.8)$$

где  $\varepsilon_t$  — преобразованные значения шума, определенные как

$$\varepsilon_t = \phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) n_t. \quad (11.2.9)$$

Умножая обе стороны (11.2.8) на  $\alpha_{t-k}$  и переходя к математическим ожиданиям, получаем

$$\gamma_{\alpha\beta}(k) = v_k \sigma_\alpha^2, \quad (11.2.10)$$

где  $\gamma_{\alpha\beta}(k) = E[\alpha_{t-k}\beta_t]$  — это взаимная ковариация между  $\alpha$  и  $\beta$  при задержке  $+k$ . Тогда

$$v_k = \frac{\gamma_{\alpha\beta}(k)}{\sigma_\alpha^2}$$

или, если воспользоваться взаимными корреляциями,

$$v_k = \frac{\rho_{\alpha\beta}(k) \sigma_\beta}{\sigma_\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.2.11)$$

Следовательно, после «выравнивания» спектра входа взаимная корреляционная функция между выравненным входом и соответственно преобразованным выходом прямо пропорциональна функции отклика на единичный импульс. Заметим, что эффект выравнивания спектра состоит в превращении неортогональной системы уравнений (11.2.6) в ортогональную систему (11.2.10).

На практике мы не знаем теоретическую взаимную корреляционную функцию  $\rho_{\alpha\beta}(k)$  и должны подставить выборочные оценки в (11.2.11), что дает

$$\hat{v}_k = \frac{r_{\alpha\beta}(k) s_\beta}{s_\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.2.12)$$

Полученные таким образом предварительные оценки  $\hat{v}_k$  опять-таки статистически неэффективны, но могут помочь выбору подходящих операторов  $\delta(B)$  и  $\omega(B)$  в модели передаточной функции. Приведем теперь практический пример такой идентификации и предварительного оценивания.

### 11.2.2. Пример идентификации модели передаточной функции

При изучении адаптивной оптимизации [83] рассматривалась газовая печь, в которую подавались воздух и метан, а получалась смесь газов, содержащая двуокись углерода  $\text{CO}_2$ . Скорость подачи воздуха была постоянной, а скорость подачи метана могла произвольно изменяться; измерялась результирующая концентрация  $\text{CO}_2$  в газах, выходящих из печи. Непрерывные данные, показанные на рис. 11.1, были собраны для получения информации о динамике системы в практически интересном

диапазоне, где приближенно применимы линейные стационарные соотношения. Непрерывный случайный входной ряд  $X(t)$ , показанный в верхней части рис. 11.1, генерировался пропусканием белого шума через линейный фильтр. Процесс имел нулевое среднее значение и в реализации, используемой для эксперимента, варьировал от  $-2,5$  до  $2,5$ . Фактическая скорость подачи метана должна была изменяться в диапазоне от  $0,5$  до  $0,7$  куб. футов в минуту. Для обеспечения такого режима скорость подачи газа изменялась в соответствии с процессом:

$$\text{Скорость подачи метана} = 0,60 - 0,04 X(t).$$

Для простоты мы будем пользоваться «кодированным» входом  $X(t)$ . Результирующая передаточная функция для фактической скорости подачи газа легко получается соответствующей подстановкой. Ряд  $J$  в сводке временных рядов в конце этого тома содержит 296 пар последовательных наблюдений  $(X_t, Y_t)$ , считанных с непрерывных записей с 9-секундным шагом. В этом частном эксперименте характер входного возмущения был известен, поскольку оно тщательно подбиралось. Однако мы будем действовать, как если бы вход был неизвестен. Выборочные авто- и взаимные корреляционные функции  $X_t$  и  $Y_t$  быстро затухают, подтверждая отсутствие необходимости во взятии разностей. К входу  $X_t$  была применена обычная процедура идентификации и подгонки. Она показала, что вход хорошо описывается процессом авторегрессии третьего порядка

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3) X_t = \alpha_t$$

с  $\hat{\phi}_1 = 1,97$ ,  $\hat{\phi}_2 = -1,37$ ,  $\hat{\phi}_3 = 0,34$  и  $s_\alpha^2 = 0,0353$ . Затем к входному и выходному рядам были применены преобразования

$$\alpha_t = (1 - 1,97B + 1,37B^2 - 0,34B^3) X_t,$$

$$\beta_t = (1 - 1,97B + 1,37B^2 - 0,34B^3) Y_t$$

для получения рядов  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  с  $s_\alpha = 0,188$ ,  $s_\beta = 0,358$ . Выборочная взаимная корреляционная функция для процессов  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  приведена в табл. 11.1; там же дана выборочная оценка (11.2.12) функции отклика на единичный импульс

$$\hat{v}_k = \frac{0,358}{0,188} r_{\alpha\beta}(k).$$

Приближенные стандартные ошибки выборочной взаимной корреляции  $r_{\alpha\beta}(k)$ , показанные в табл. 11.1, — это квадратные корни из дисперсий, полученных по формуле (11.1.7) со следующими дополнительными условиями:

а) взаимные корреляции до задержки  $+2$  включительно и начиная с задержки  $+8$  и более равны нулю.



Таблица 11.1

Выборочная взаимная корреляционная функция после предварительного выравнивания спектра и приближенная функция отклика на единичный импульс по данным газовой печи

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{\alpha\beta}(k)$	-0,01	0,05	-0,03	-0,28	-0,33	-0,46	-0,27	-0,17	-0,03	0,03	-0,05
$\hat{\sigma}(r)$	0,06	0,06	0,06	0,05	0,06	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
$\hat{\sigma}_k$	-0,02	0,10	-0,06	-0,53	-0,63	-0,88	-0,52	-0,32	-0,06	0,06	-0,10

- б) автокорреляции  $\rho_{\alpha\alpha}(k)$  равны нулю для  $k > 0$ ,  
 в) автокорреляции  $\rho_{\beta\beta}(k)$  равны нулю для  $k > 4$ ,  
 г) теоретические значения автокорреляций заменены выборочными значениями из табл. 11.2.

Выборочные взаимные корреляции вместе с пределами в одну и две стандартные ошибки, отложенными от нуля, представлены на рис. 11.5. В этом примере стандартные ошибки мало отличаются от приближенных значений  $n^{-1/2} = 0,06$ , что соответствует гипотезе об отсутствии корреляции между рядами.

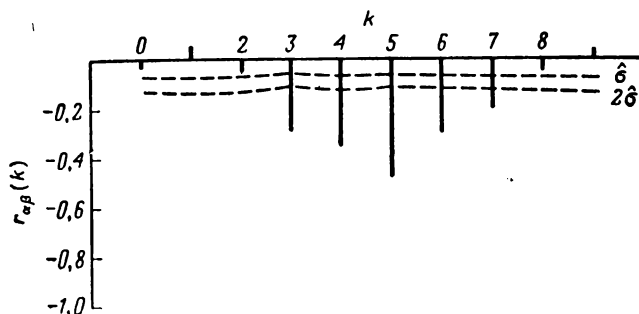


Рис. 11.5. Выборочная взаимная корреляционная функция для данных газовой печи после предварительного выравнивания спектра.

Значения  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{v}_1$  и  $\hat{v}_2$  малы по сравнению с их стандартными ошибками; это указывает, что  $b = 3$  (запаздывание на два полных интервала). Согласно результатам разд. 11.2.1, последующий ход значений  $\hat{v}$  можно объяснить, идентифицировав модель  $(r, s, b)$  либо как  $(1, 2, 3)$ , либо как  $(2, 2, 3)$ . Первый вариант означает, что  $\hat{v}_3$  и  $\hat{v}_4$  — предварительные значения, не подчиняющиеся каким-либо закономерностям, а  $\hat{v}_5$  дает начальное значение для экспоненциального затухания в соответствии с разностным уравнением  $\hat{v}_j - \delta \hat{v}_{j-1} = 0$ ,  $j > 5$ . Второй вариант означает, что  $\hat{v}_3$  — единственное предварительное значение, а  $\hat{v}_4$  и  $\hat{v}_5$  дают

начальные значения для суммы двух экспонент, являющейся решением разностного уравнения  $v_j - \delta_1 v_{j-1} - \delta_2 v_{j-2} = 0, j > 5$ .

Тогда предварительная идентификация приводит к модели передаточной функции вида

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) X_{t-b} \quad (11.2.13)$$

или, возможно, к ее упрощенной версии с  $b = 3$ .

*Предварительные оценки.* Принимая модель (11.2.13) с  $b = 3$ , получим уравнения (10.2.8) для функции отклика на единичный импульс

$$\begin{aligned} v_j &= 0, \quad j < 3, \\ v_3 &= \omega_0, \\ v_4 &= \delta_1 v_3 - \omega_1, \\ v_5 &= \delta_1 v_4 + \delta_2 v_3 - \omega_2, \\ v_6 &= \delta_1 v_5 + \delta_2 v_4, \\ v_7 &= \delta_1 v_6 + \delta_2 v_5. \end{aligned} \quad (11.2.14)$$

Подставляя в последние два уравнения этой системы оценки  $\hat{v}_k$  из табл. 11.1, получаем

$$\begin{aligned} -0,88\hat{\delta}_1 - 0,63\hat{\delta}_2 &= -0,52, \\ -0,52\hat{\delta}_1 - 0,88\hat{\delta}_2 &= -0,32, \end{aligned}$$

что дает предварительные выборочные оценки  $\hat{\delta}_1 = 0,57$ ;  $\hat{\delta}_2 = 0,02$ . Если подставить теперь эти значения во второе, третье, четвертое уравнения (11.2.14), получаем

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_0 &= \hat{v}_3 = -0,53, \\ \hat{\omega}_1 &= \hat{\delta}_1 \hat{v}_3 - \hat{v}_4 = (0,57)(-0,53) + 0,63 = 0,33, \\ \hat{\omega}_2 &= \hat{\delta}_1 \hat{v}_4 + \hat{\delta}_2 \hat{v}_3 - \hat{v}_5 = (0,57)(-0,63) + (0,02)(-0,53) + \\ &\quad + 0,88 = 0,51. \end{aligned}$$

Таким образом, предварительная идентификация дает следующую пробную модель передаточной функции:

$$(1 - 0,57B - 0,02B^2) Y_t = -(0,53 + 0,33B + 0,51B^2) X_{t-3}.$$

Полученные таким путем выборочные оценки можно использовать как начальные значения для более эффективных итеративных методов оценивания, которые будут описаны в разд. 11.3. Отметим, что выборочная оценка  $\hat{\delta}_2$  очень мала; этот параметр можно было бы опустить, но мы пока сохраним его.

### 11.2.3. Идентификация модели шума

Возвращаясь к общему случаю, положим, что модель после взятия необходимого числа разностей, если это необходимо, может быть записана в виде

$$y_t = v(B) x_t + n_t,$$

где

$$n_t = \nabla^d N_t.$$

Если предварительная выборочная оценка  $\hat{v}(B)$  передаточной функции была получена способом, описанным в предыдущем разделе, выборочная оценка шума имеет вид

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{v}(B) x_t,$$

т. е.

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{v}_0 x_t - \hat{v}_1 x_{t-1} - \hat{v}_2 x_{t-2} - \dots$$

Возможен и другой способ — заменить  $\hat{v}(B)$  пробной моделью передаточной функции  $\hat{\delta}^{-1}(B) \hat{\omega}(B) B^b$ , определенной в процессе предварительной идентификации. Тогда

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{\delta}^{-1}(B) \hat{\omega}(B) x_{t-b}$$

и  $\hat{n}_t$  может быть вычислено по формуле

$$\hat{n}_t = y_t + \hat{\delta}_1 (\hat{n}_{t-1} - y_{t-1}) + \dots + \hat{\delta}_r (\hat{n}_{t-r} - y_{t-r}) - \hat{\omega}_0 x_{t-b} + \hat{\omega}_1 x_{t-b-1} + \dots + \hat{\omega}_s x_{t-b-s}.$$

В любом случае изучение выборочной автокорреляционной функции  $\hat{n}_t$  может позволить идентифицировать модель шума.

Можно также идентифицировать шум, используя корреляционные функции входа и выхода после выравнивания спектра, действуя следующим образом.

Пусть спектр входа может быть выравнен точно, так что

$$\beta_t = v(B) \alpha_t + \varepsilon_t, \quad (11.2.15)$$

где  $\varepsilon_t$  и  $n_t$  связаны известным соотношением

$$\varepsilon_t = \phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) n_t. \quad (11.2.16)$$

Если можно найти стохастическую модель для  $\varepsilon_t$ , то, пользуясь (11.2.16), можно получить модель для  $n_t$  и, следовательно, для  $N_t$ . Если мы запишем теперь  $v(B) \alpha_t = u_t$ , так что  $\beta_t = u_t + \varepsilon_t$ , и предположим, что справедливо наше предположение о независимости  $x_t$  и  $n_t$ , а следовательно,  $u_t$  и  $\varepsilon_t$ , то получим

$$\gamma_{\beta\beta}(k) = \gamma_{uu}(k) + \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(k). \quad (11.2.17)$$

Так как  $\alpha_t$  — белый шум, можно получить выражение для  $\gamma_{uu}(k)$ , пользуясь формулой (3.1.8) для автокорреляционной функции линейного процесса.

Отсюда при помощи (11.2.10) получаем

$$\gamma_{uu}(k) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} v_j v_{j+k} = \frac{1}{\sigma_a^2} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{a\beta}(j) \gamma_{a\beta}(j+k).$$

Из (11.2.17) следует

$$\gamma_{ee}(k) = \gamma_{\beta\beta}(k) - \frac{1}{\sigma_a^2} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{a\beta}(j) \gamma_{a\beta}(j+k),$$

$$\gamma_{ee}(0) = \gamma_{\beta\beta}(0) - \frac{1}{\sigma_a^2} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{a\beta}^2(j)$$

и

$$\rho_{ee}(k) = \frac{\rho_{\beta\beta}(k) - \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{a\beta}(j) \rho_{a\beta}(j+k)}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{a\beta}^2(j)}. \quad (11.2.18)$$

На практике нужно использовать *выборочную* оценку выравнивающего преобразования. Если сделано приближенное выравнивающее преобразование, можно получить грубые оценки  $\rho_{ee}(k)$  из (11.2.18), подставив туда выборочные оценки взаимной корреляционной функции между преобразованными входом и выходом  $r_{a\beta}(j)$  и автокорреляционной функции преобразованного выхода  $r_{\beta\beta}(j)$ .

*Применение к примеру с газовой печью.* В табл. 11.2 приведены несколько первых значений  $r_{\beta\beta}(k)$  и  $r_{a\beta}(k)$  и соответствующие значения  $r_{ee}(k)$ , вычисленные по (11.2.18). В этой таблице малые значения корреляции мы заменили нулями, предположив, в частности, что  $r_{\beta\beta}(k) = 0$  для  $k > 4$  и  $r_{a\beta}(k) = 0$  для  $k < 3$ .

Таблица 11.2

Расчет автокорреляционной функции шума в данных газовой печи

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$r_{\beta\beta}(k)$	1,000	0,223	0,359	0,126	0,081	0,000	0,000	0,000
$r_{a\beta}(k)$	0,000	0,000	0,000	-0,283	-0,331	-0,456	-0,268	-0,168
$r_{ee}(k)$	1,000	-0,382	0,126	-0,011	0,064	0,000	0,000	0,000

Судя по автокорреляционной функции, шум может быть описан процессом авторегрессии первого порядка или процессом скользящего среднего первого порядка. Так как значение выборочной оценки  $r_{ee}(1)$  не слишком велико, то не существенно,

какой из них будет выбран. Мы, однако, рассмотрим две эти возможности отдельно.

Сначала, если процесс типа  $AP(1)$ , то при  $\hat{\phi}_1 = r_{ee}(1) = -0,38$  модель для  $e_t$  будет

$$(1 + 0,38B)e_t = a_t.$$

Далее, так как нам известно, что

$$(1 - 1,97B + 1,37B^2 - 0,34B^3)N_t = e_t,$$

идентификация указывает, что модель шума приближенно имеет вид

$$(1 + 0,38B)(1 - 1,97B + 1,37B^2 - 0,34B^3)N_t = a_t$$

или

$$(1 - 1,59B + 0,62B^2 + 0,18B^3 - 0,13B^4)N_t = a_t. \quad (11.2.19)$$

Так как два последних коэффициента малы, кажется разумным попробовать представить  $N_t$  процессом авторегрессии второго порядка примерно следующего вида:

$$(1 - 1,6B + 0,6B^2)N_t = a_t.$$

Действуя другим способом, предположим, что  $e_t$  подчиняется процессу  $CC(1)$   $e_t = (1 - \theta B)a_t$ . Пользуясь табл. А в сводке таблиц и диаграмм в конце выпуска 1, находим для значения  $r_1 = -0,38$  приближенную выборочную оценку  $\hat{\theta} \approx 0,46$ . Отсюда модель  $N_t$  имеет вид

$$(1 - 1,97B + 1,37B^2 - 0,34B^3)N_t = (1 - 0,46B)a_t.$$

Деля на  $(1 - 0,46B)$ , получаем с достаточной точностью

$$(1 - 1,51B + 0,68B^2)N_t = a_t,$$

что очень сходно с ранее предложенной моделью.

Таким образом, из анализа, проведенного в этом разделе и разд. 11.2.2, вытекает следующая идентификация модели газовой печи:

$$Y_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} X_{t-3} + \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2} a_t. \quad (11.2.20)$$

Далее, в качестве грубо приближенных начальных значений в процедурах нелинейного оценивания, рассматриваемых далее в разд. 11.3, можно использовать  $\hat{\omega}_0 = -0,53$ ,  $\hat{\omega}_1 = 0,33$ ,  $\hat{\omega}_2 = 0,51$ ,  $\hat{\delta}_1 = 0,57$ ,  $\hat{\delta}_2 = 0,02$ ,  $\hat{\phi}_1 = 1,51$ ,  $\hat{\phi}_2 = -0,68$ .

#### 11.2.4. Некоторые общие соображения об идентификации моделей передаточных функций

Можно сделать некоторые общие замечания о том, что описанных процедурах идентификации моделей передаточных функций и моделей шума.

1) Во многих практических ситуациях при заметном уровне шума недостаточный объем данных не позволяет использовать более сложные модели, чем система первого или второго порядка с запаздыванием типа (11.2.13) или ее упрощенные варианты.

2) Эффективное оценивание возможно только в предположении, что вид модели известен. Оценки  $\hat{\theta}_k$ , выражаемые формулой (11.2.12), являются, следовательно, *по необходимости* неэффективными. Они используются на этапе идентификации, потому что они легко вычисляются и могут выявить вид модели, нуждающейся в подгонке более сложными средствами.

3) Даже если бы имелись более эффективные оценки, число весов  $\hat{\theta}$ , требуемых для полного описания функции отклика на единичный импульс, было бы значительно больше, чем число параметров модели передаточной функции. В то время как параметры  $\delta$  и  $\omega$  соответствующей модели передаточной функции подавались бы весьма точному оцениванию, выборочные оценки соответствующих  $\theta$  могли бы обладать большой дисперсией и быть сильно коррелированными.

4) Дисперсия выборочной взаимной корреляции

$$r_{\alpha\beta}(k) = \hat{\theta}_k \frac{s_\alpha}{s_\beta}$$

имеет порядок  $1/n$ . Поэтому можно ожидать, что  $r_{\alpha\beta}(k)$  и, следовательно,  $\hat{\theta}_k$  будут сильно искажены шумом, если не выполнено хотя бы одно из следующих условий:  $\sigma_\alpha$  достаточно велико по сравнению с остаточным шумом,  $N$  достаточно велико. Поэтому процедура идентификации требует, чтобы вариация входа была бы разumno большой по сравнению с вариацией, вызванной шумом, и (или) чтобы был доступным большой объем данных. Эти требования выполняются для данных о газовой печи, по которым, как мы покажем в разд. 11.3, начальная идентификация проводится очень уверенно. Когда эти требования не выполнены, процедура идентификации может оказаться неудачной. В обычных ситуациях это означает, что по имеющимся данным можно сделать только очень грубые оценки. Однако можно все же провести некоторое упрощенное моделирование. Для этого надо постулировать какую-либо простую, но достаточно гибкую модель передаточной функции — шума, подогнать ее непосредственным применением методик наименьших квадратов, рассмотренных в следующем разделе, и применить диагностические

проверки, указывающие, как усложнить модель, если это окажется необходимым.

*Об отсутствии единственности в выборе модели.* Пусть конкретная динамическая система описывается моделью

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + \varphi^{-1}(B) \theta(B) a_t.$$

Тогда ее можно также представить как

$$L(B) Y_t = L(B) \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + L(B) \varphi^{-1}(B) \theta(B) a_t,$$

где  $L(B)$  — произвольный оператор. Если приравнять  $L(B)$  оператору  $\varphi(B)$ , то получим

$$L(B) Y_t = L(B) \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + \theta(B) a_t.$$

Вероятность того, что мы с помощью итераций придем к излишне усложненной модели, можно уменьшить, если придерживаться следующих правил.

1) Так как сравнительно простые модели передаточных функций первого или второго порядка (с запаздыванием или без него) часто вполне адекватны, итеративное построение моделей может начинаться с довольно простой модели; следует проверить, нельзя ли еще упростить модель, и переходить к более сложным, только если определенно выявится такая необходимость.

2) Следует всегда искать возможности устранения общих множителей в двух или более операторах, действующих на  $Y_t$ ,  $X_t$ ,  $a_t$ . Мы проиллюстрировали такой подход при идентификации модели шума, описанной в разд. 11.2.3. На практике мы будем пользоваться выборочными коэффициентами, которые могут быть известны с большими ошибками, и для выявления возможных общих множителей требуется большая интуиция. Упрощенную таким образом модель нужно подогнать заново и проверить, оправдано ли такое упрощение.

3) Когда упрощение модели сокращением множителей возможно, но мы его не заметили, процедура оценивания методом наименьших квадратов может стать крайне неустойчивой, так как минимуму в пространстве параметров будет соответствовать не точка, а линия или поверхность. Напротив, нестабильность решения может указывать на возможность упрощения модели, как подчеркивалось ранее. Одной из причин проведения идентификации перед подгонкой модели является необходимость избежать избыточности или, другими словами, достичь *экономичности* в параметризации.

Другой возможный метод идентификации моделей передаточной функции, который легко обобщается на случай многих входов, приведен в приложении П11.1.

### 11.3. ПОДГОНКА И ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА МОДЕЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

#### 11.3.1. Условная сумма квадратов

Рассмотрим теперь задачу одновременного эффективного оценивания параметров  $b$ ,  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $\phi$  и  $\theta$  пробно идентифицированной модели

$$y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) x_{t-b} + n_t, \quad (11.3.1)$$

где  $y_t = \nabla^d Y_t$ ,  $x_t = \nabla^d X_t$ ,  $n_t = \nabla^d N_t$  — стационарные процессы, и

$$n_t = \phi^{-1}(B) \theta(B) a_t. \quad (11.3.2)$$

Предполагается, что для анализа доступны  $n = N - d$  пар значений и что  $Y_t$  и  $X_t$  ( $y_t$  и  $x_t$ , если  $d > 0$ ) означают отклонения от их математических ожиданий. Эти ожидания могут оцениваться вместе с другими параметрами, но при обычно имеющемся числе наблюдений достаточно вместо них брать выборочные средние значения. Когда  $d > 0$ , то часто математические ожидания процессов  $x_t$  и  $y_t$  равны нулю.

Если доступны начальные значения  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $a_0$ , предшествующие началу ряда, то, по имеющимся данным, для любого набора параметров  $(b, \delta, \omega, \phi, \theta)$  и начальных значений  $(x_0, y_0, a_0)$  мы можем вычислить последовательно значения  $a_t = a_t(b, \delta, \omega, \phi, \theta | x_0, y_0, a_0)$  для  $t = 1, 2, \dots, n$ . В предположении о нормальном распределении для  $a$  хорошее приближение к оценкам максимального правдоподобия для параметров можно получить, минимизируя *условную сумму квадратов*

$$S_0(b, \delta, \omega, \phi, \theta) = \sum_{t=1}^n a_t^2(b, \delta, \omega, \phi, \theta | x_0, y_0, a_0). \quad (11.3.3)$$

*Трехэтапная процедура для вычисления  $a$ .* Если даны соответствующие начальные значения, генерировать ряд  $a$  для любого конкретного набора значений параметров можно при помощи следующей трехэтапной процедуры.

Прежде всего выход  $y_t$  модели передаточной функции можно получить из уравнения

$$y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) x_{t-b},$$

т. е. из

$$\delta(B) y_t = \omega(B) x_{t-b}$$

или из

$$\begin{aligned} y_t - \delta_1 y_{t-1} - \dots - \delta_r y_{t-r} = \\ = \omega_0 x_{t-b} - \omega_1 x_{t-b-1} - \dots - \omega_s x_{t-b-s}. \end{aligned} \quad (11.3.4)$$



Когда ряд  $y_t$  вычислен, то, пользуясь (11.3.1), можно найти значения шума  $n_t$  по формуле

$$n_t = y_t - y_t. \quad (11.3.5)$$

Наконец,  $a_t$  можно найти из (11.3.2), если представить эту формулу в виде

$$a_t = \theta^{-1}(B) \phi(B) n_t,$$

т. е.

$$a_t = \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q} + n_t - \phi_1 n_{t-1} - \dots - \phi_p n_{t-p}. \quad (11.3.6)$$

*Начальные значения.* Как отмечалось в разд. 7.1.3 в связи с оцениванием стохастических моделей, эффект переходных явлений можно минимизировать, если разностные уравнения применяются со значения  $t$ , для которого все предшествующие  $x$  и  $y$  известны. Таким образом,  $y_t$  в (11.3.4) вычисляется начиная с  $t = u + 1$  и далее вперед, здесь  $u$  больше  $r$  и  $s + b$ . Это означает, что  $n_t$  будет известно начиная с  $n_{u+1}$  и далее вперед; отсюда, если неизвестные  $a$  приравнять их безусловному математическому ожиданию, т. е. нулю, можно вычислить  $a$  начиная с  $a_{u+p+1}$ . Тогда условная сумма квадратов равна

$$S_0(b, \delta, \omega, \phi, \theta) = \sum_{t=u+p+1}^n a_t^2(b, \delta, \omega, \phi, \theta | x_0, y_0, a_0). \quad (11.3.7)$$

*Пример с газовой печью.* Для этих данных идентифицирована модель (11.2.20), а именно

$$Y_t = \frac{\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} X_{t-3} + \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2} a_t.$$

Уравнения (11.3.4), (11.3.5) и (11.3.6) принимают вид

$$\mathcal{Y}_t = \delta_1 \mathcal{Y}_{t-1} + \delta_2 \mathcal{Y}_{t-2} + \omega_0 X_{t-3} - \omega_1 X_{t-4} - \omega_2 X_{t-5}, \quad (11.3.8)$$

$$N_t = Y_t - \mathcal{Y}_t, \quad (11.3.9)$$

$$a_t = N_t - \phi_1 N_{t-1} - \phi_2 N_{t-2}. \quad (11.3.10)$$

Тогда можно использовать (11.3.8) для генерирования  $\mathcal{Y}_t$  с  $t = 6$  вперед и (11.3.10) для генерирования  $a_t$  с  $t = 8$  вперед. Вызванная этим небольшая потеря информации не существенна для достаточно протяженных рядов. Например, для данных о газовой печи  $N = 296$ , и потеря 7 значений в начале ряда практически не существенна. Для иллюстрации в табл. 11.3 показано вычисление первых нескольких значений  $a_t$  для кодированных данных о газовой печи при значениях параметров

$$\begin{aligned} b &= 3, & \delta_1 &= 0,1, & \delta_2 &= 0,1, & \omega_0 &= 0,1, \\ \omega_1 &= -0,1, & \omega_2 &= -0,1, & \phi_1 &= 0,1, & \phi_2 &= 0,1. \end{aligned}$$

Значения  $X_t$  и  $Y_t$  в колонках 2 и 4 получены вычитанием средних значений  $\bar{X} = -0,057$  и  $\bar{Y} = 53,51$  из значений ряда, приведенных в сводке временных рядов в конце этой книги.

Ранее мы предполагали  $b = 3$ . Чтобы оценить его, можно вычислить значения  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $\phi$  и  $\theta$ , минимизирующие условную сумму квадратов, для каждого значения  $b$  в диапазоне его вероятных значений и найти истинный минимум по отношению к  $b$ ,  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $\phi$  и  $\theta$ .

Таблица 11.3

Расчет нескольких первых значений  $a_t$   
по данным газовой печи для значений параметров  
 $b = 3$ ,  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,1$ ,  $\omega_0 = 0,1$ ,  $\omega_1 = -0,1$ ,  $\omega_2 = -0,1$ ,  $\phi_1 = 0,1$ ,  $\phi_2 = 0,1$

$t$	$X_t$	$Y_t$	$Y_t$	$N_t$	$a_t$
1	-0,052	—	0,29	—	—
2	0,057	—	0,09	—	—
3	0,235	—	-0,01	—	—
4	0,396	—	-0,01	—	—
5	0,430	—	-0,11	—	—
6	0,498	0,024	-0,41	-0,434	—
7	0,518	0,071	-0,81	-0,881	—
8	0,405	0,116	-1,11	-1,226	-1,094
9	0,184	0,151	-1,31	-1,461	-1,250
10	-0,123	0,171	-1,51	-1,681	-1,412

### 11.3.2. Нелинейное оценивание

Для получения выборочных оценок наименьших квадратов и их приближенных стандартных ошибок может быть применен нелинейный алгоритм наименьших квадратов, аналогичный использованному для подгонки стохастической модели в разд. 7.2.4. Алгоритм будет работать успешно, если сумма квадратов является хотя бы весьма приближенно квадратичной функцией. Однако иногда эта процедура может сталкиваться с серьезными трудностями: например, когда параметры очень сильно коррелированы (например, если модель становится почти вырожденной из-за появления очень близких множителей в разных операторах), или в других случаях, когда оценки оказываются вблизи границы области допустимых значений параметров. В трудных случаях вопросы, возникающие при оценивании, можно выяснить с помощью графиков изолиний суммы квадратов для некоторых выбранных двумерных разрезов в пространстве параметров.

Алгоритм можно описать следующим образом. На любом этапе итераций и для любого заданного значения параметра запаздывания  $b$  обозначим лучшие предположительные значения остающихся параметров как

$$\beta'_0 = (\delta_{1,0}, \dots, \delta_{r,0}; \omega_{0,0}, \dots, \omega_{s,0}; \phi_{1,0}, \dots, \phi_{p,0}; \theta_{1,0}, \dots, \theta_{q,0}).$$

Пусть  $a_{t,0}$  — значение, вычисленное исходя из модели (согласно разд. 11.3.1) для предположительных значений параметра  $\beta_0$ ; обозначим производные  $a_t$  по параметрам, взятые с обратными знаками, как

$$\begin{aligned} d_{i,t}^{(\delta)} &= - \left. \frac{\partial a_t}{\partial \delta_i} \right|_{\beta_0}, & d_{j,t}^{(\omega)} &= - \left. \frac{\partial a_t}{\partial \omega_j} \right|_{\beta_0}, \\ d_{g,t}^{(\phi)} &= - \left. \frac{\partial a_t}{\partial \phi_g} \right|_{\beta_0}, & d_{h,t}^{(\theta)} &= - \left. \frac{\partial a_t}{\partial \theta_h} \right|_{\beta_0}. \end{aligned} \quad (11.3.11)$$

Тогда разложение  $a_t = a_t(\beta)$  в ряд Тейлора вблизи значений параметров  $\beta = \beta_0$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{t,0} \approx & \sum_{i=1}^r (\delta_i - \delta_{i,0}) d_{i,t}^{(\delta)} + \sum_{j=0}^s (\omega_j - \omega_{j,0}) d_{j,t}^{(\omega)} + \\ & + \sum_{g=1}^p (\phi_g - \phi_{g,0}) d_{g,t}^{(\phi)} + \sum_{h=1}^q (\theta_h - \theta_{h,0}) d_{h,t}^{(\theta)} + a_t. \end{aligned} \quad (11.3.12)$$

Мы действуем далее, как в разд. 7.2, для получения корректировок  $\delta_i - \delta_{i,0}$ ,  $\omega_j - \omega_{j,0}$  и т. д., подгоняя это линеаризованное уравнение стандартным методом наименьших квадратов. Прибавляя корректировки к первым предположительным значениям  $\beta_0$ , получаем следующий набор предположительных значений и т. д. до достижения сходимости.

Как и для стохастических моделей (см. гл. 7 и в особенности разд. 7.2.3), производные можно вычислять рекуррентно. Однако гораздо проще пользоваться стандартной программой нелинейных наименьших квадратов, в которой производные находятся численно и имеется возможность «итераций с ограничениями», позволяющих избежать неустойчивости (гл. 7). Необходимо только запрограммировать вычисление самих  $a_t$ .

Ковариационная матрица оценок может быть получена в виде обращенной матрицы  $(X'_\beta X_\beta)^{-1} \hat{\sigma}_a^2$  (см. разд. 7.2.2), вычисленной после достижения сходимости. Если необходимо оценить целое число  $b$ , то итерации нужно продолжить до сходимости для нескольких значений  $b$  и выбрать значение  $b$ , дающее минимальную сумму квадратов.

### 11.3.3. Использование остаточных ошибок для диагностической проверки

Серьезные несоответствия модели анализируемым данным могут быть обнаружены изучением

а) выборочной автокорреляционной функции  $r_{aa}(k)$  остаточных ошибок  $\hat{a}_t = a_t(\hat{b}, \hat{\delta}, \hat{\omega}, \hat{\phi}, \hat{\theta})$  после подгонки модели;

б) некоторых выборочных взаимных корреляционных функций, включающих входные и выходные остаточные ошибки; в частности взаимную корреляционную функцию  $r_{aa}(k)$  выравненного входа  $\alpha_t$  и остаточных ошибок  $\hat{a}_t$ .

Пусть после взятия нужного числа разностей модель можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_t &= \delta^{-1}(B) \omega(B) x_{t-b} + \phi^{-1}(B) \theta(B) a_t = \\ &= v(B) x_t + \psi(B) a_t. \end{aligned} \quad (11.3.13)$$

Пусть мы выбрали неправильную модель, что привело к остаточным ошибкам  $a_{0t}$ :

$$y_t = v_0(B) x_t + \psi_0(B) a_{0t}.$$

Тогда

$$a_{0t} = \psi_0^{-1}(B) \{v(B) - v_0(B)\} x_t + \psi_0^{-1}(B) \psi(B) a_t, \quad (11.3.14)$$

отсюда становится очевидным, что если модель выбрана неправильно,  $a_{0t}$  будут коррелированы между собой; кроме того,  $a_{0t}$  будут коррелированы с  $x_t$ , а следовательно, и с  $\alpha_t$ , генерирующими  $x_t$ .

Рассмотрим теперь два частных случая:

а) модель передаточной функции верна, а модель шума неверна;

б) модель передаточной функции неверна.

*Модель передаточной функции верна, а модель шума неверна.* Если  $v_0(B) = v(B)$ , но  $\psi_0(B) \neq \psi(B)$ , то (11.3.14) переходит в

$$a_{0t} = \psi_0^{-1}(B) \psi(B) a_t. \quad (11.3.15)$$

Следовательно,  $a_{0t}$  не будут коррелированы с  $x_t$  или  $\alpha_t$ . Однако процесс  $a_{0t}$  будет обладать автокорреляционной функцией, по виду которой можно судить о необходимых изменениях модели шума.

*Модель передаточной функции неверна.* Из (11.3.14) видно, что если модель передаточной функции неверна,  $a_{0t}$  будут коррелированы с  $x_t$  (и  $\alpha_t$ ), но, кроме того, сами  $a_{0t}$  будут

коррелированы. Это так даже в том случае, если модель шума верна, так как в этом случае (11.3.14) имеет вид

$$a_{0t} = \psi^{-1}(B) \{v(B) - v_0(B)\} x_t + a_t. \quad (11.3.16)$$

Вне зависимости от того, верна или нет модель шума, взаимный корреляционный анализ может указать необходимые изменения в модели передаточной функции. Этот аспект становится яснее, если рассмотреть модель после предварительного выравнивания спектра. Если вход и выход преобразованы так, что вход — белый шум, то, как и в (11.2.8), мы можем представить модель в виде

$$\beta_t = v(B) \alpha_t + e_t,$$

где  $\beta_t = \phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) y_t$ ,  $e_t = \phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) n_t$ .

Рассмотрим теперь величины

$$e_{0t} = \beta_t - v_0(B) \alpha_t.$$

Так как  $e_{0t} = \{v(B) - v_0(B)\} \alpha_t + e_t$ , рассуждая, как в разд. 11.2.1, приходим к заключению, что взаимная корреляция между  $e_{0t}$  и  $\alpha_t$  есть мера расхождения между верной и неверной функциями отклика на единичный импульс. Конкретнее, как и в (11.2.11),

$$v_k - v_{0k} = \frac{\rho_{\alpha e_0}(k) \sigma_{e_0}}{\sigma_\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.3.17)$$

#### 11.3.4. Конкретные способы проверки остаточных ошибок

На практике мы не знаем точно параметров процесса и должны делать проверки по остаточным ошибкам, вычисленным после подгонки методом наименьших квадратов. Даже если функциональная форма подгоняемой модели адекватна, выборочные оценки параметров отличаются от истинных значений, и распределение корреляций остаточных ошибок  $\hat{a}_t$  несколько отличается от распределения автокорреляций  $a_t$ . Поэтому следует быть осторожным при использовании результатов предыдущего раздела для анализа корреляций остаточных ошибок. Краткое последующее рассмотрение основывается на более полном исследовании, приведенном в [84].

*Проверка выборочных автокорреляций.* Пусть после подгонки модели передаточной функции — шума методом наименьших квадратов и вычисления остаточных ошибок  $\hat{a}_t$  с заменой параметров их оценками наименьших квадратов найдена выборочная автокорреляционная функция этих ошибок  $r_{\hat{a}\hat{a}}(k)$ . Тогда, как мы уже видели,

а) заметные и регулярно меняющиеся значения функции  $r_{\hat{a}\hat{a}}(k)$  свидетельствуют о неадекватности модели;

б) если проверка автокорреляций не приводит к выявлению неадекватности модели передаточной функции, то эта неадекватность, вероятно, вызвана подогнанной моделью шума  $n_t = \psi_0(B)a_t$ .

В последнем случае идентификация вспомогательной модели

$$\hat{a}_{0t} = T(B) a_t$$

для описания корреляции остаточных ошибок от первичной модели может в соответствии с (11.3.15) дать весьма приближенное представление

$$n_t = \psi_0(B) T(B) a_t$$

о виде модели шума, которую следует выбрать. Однако при вынесении суждений о том, указывает ли кажущееся отклонение выборочной взаимной корреляции от нуля на ненулевое теоретическое значение, нужно учитывать некоторые факты, аналогичные рассмотренным в разд. 8.2.1.

Положим, что после использования части ряда в качестве начальных значений  $m = n - u - p$  значений  $\hat{a}_t$  можно включить в расчет. Тогда, если функциональный вид модели выбран правильно и в соответствующее уравнение *подставлены истинные значения параметров*, остаточные ошибки будут белым шумом и выборочные корреляции будут распределены взаимно независимо с нулевым средним значением и дисперсией  $1/m$ . Когда вместо значений параметров подставляются их выборочные оценки, распределение корреляций с малыми задержками искажается. В частности, дисперсия выборочных корреляций с малыми задержками может быть значительно меньше  $1/m$ , а их значения сильно коррелированы. Поэтому сравнение выборочной автокорреляции  $r_{aa}(k)$  при малых  $k$  со «стандартной ошибкой»  $1/\sqrt{m}$  может создавать ложное впечатление о малости первой. Кроме того, всплески выборочной автокорреляционной функции при малых задержках могут происходить просто из-за высокой корреляции между выборочными оценками. Если амплитуда таких всплесков мала по сравнению с  $1/\sqrt{m}$ , они могут быть чисто случайными и не свидетельствовать о каком-либо реальном поведении теоретических автокорреляций.

Существует следующий способ проверки, учитывающий эти эффекты искажения распределения, вызываемые подгонкой. Рассмотрим первые  $K$  выборочных автокорреляций  $r_{aa}(1), \dots, r_{aa}(K)$ , и пусть  $K$  будет достаточно велико, так что если записать модель в виде

$$y_t = v(B)x_t + \psi(B)a_t,$$

то можно ожидать, что веса  $\psi_j$  при  $j > K$  окажутся пренебрежимо малыми. Тогда при адекватности функциональной формы модели величина

$$Q = m \sum_{k=1}^K r_{aa}^2(k) \quad (11.3.18)$$

распределена примерно как  $\chi^2$  с  $K - p - q$  степенями свободы. Заметим, что число степеней свободы  $\chi^2$  зависит от числа параметров в модели шума, но не зависит от числа параметров в модели передаточной функции. Сравнив значение  $Q$  с таблицей уровней значимости  $\chi^2$ , мы можем приблизительно проверить гипотезу об адекватности модели.

*Проверка выборочных взаимных корреляций.* Как мы показали в предыдущем разделе,

1) появление регулярных заметно отличающихся от нуля выборочных взаимных корреляций  $r_{xa}(k)$  свидетельствует о неадекватности модели передаточной функции;

2) по другим свойствам взаимной корреляции можно выявить тип необходимых изменений. Конкретно, если подгоняемая передаточная функция  $\hat{v}_0(B)$  и мы рассматриваем взаимные корреляции между величинами  $\hat{e}_{0t} = \beta_t - \hat{v}_0(B)\alpha_t$  и  $\alpha_t$ , то весьма приближенные оценки расхождений  $v_k - v_{0k}$  можно найти по формуле

$$\frac{r_{a\hat{e}_0}(k) s_{\hat{e}_0}}{s_a}.$$

Пусть предполагаемая функциональная форма модели верна и в уравнение подставляются *истинные* значения параметров. Остаточные ошибки будут белым шумом, не коррелированным с  $n$ , и, согласно (11.1.11), дисперсия  $r_{xa}(k)$  для ряда с эффективной длиной  $m$  будет близка к  $1/m$ . Однако в отличие от выборочных автокорреляций  $r_{aa}(k)$  эти взаимные корреляции будут приблизительно не коррелированы. В общем случае, если  $x$  автокоррелированы, то и выборочные взаимные корреляции  $r_{xa}(k)$  также коррелированы. Как следует из (11.1.12), в предположении, что  $x$  и  $a$  взаимно некоррелированы, коэффициент корреляции между  $r_{xa}(k)$  и  $r_{xa}(k+l)$  равен

$$\rho[r_{xa}(k), r_{xa}(k+l)] \approx \rho_{xx}(l). \quad (11.3.19)$$

Это означает, что приблизительно выборочные взаимные корреляции имеют *ту же* автокорреляционную функцию, что и первоначальный входной ряд  $x_t$ . Поэтому, если  $x_t$  автокоррелированы, абсолютно адекватная модель переходной функции будет приводить к выборочным взаимным корреляциям  $r_{xa}(k)$ , хотя и малым по величине, но с *заметной регулярностью поведения*. Этот эффект будет устранен, если проводить проверку путем

вычисления выборочных взаимных корреляций  $r_{ad}(k)$  с *предварительно выравненным входом*  $\alpha_t$ .

Как и в случае автокорреляций, при подстановке выборочных оценок вместо истинных значений параметров, распределение выборочных взаимных корреляций искажается. Однако, исходя из амплитуд взаимных корреляций, можно выполнить грубую проверку гипотезы об адекватности модели. Для этого нужно оценить взаимные корреляции  $r_{ad}(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, K$ ) между *выравненным входом*  $\alpha_t$  и остаточными ошибками  $\hat{a}_t$ .  $K$  должно быть достаточно большим, чтобы веса  $v_j$  и  $\psi_j$  в (11.3.13) можно было бы принять пренебрежимо малыми при  $j > K$ . Эффекты, вызванные использованием выборочных параметров при вычислении остаточных ошибок, как и ранее, ограничены в основном корреляциями при малых задержках, чьи дисперсии значительно меньше  $m^{-1}$ . Эти выборочные корреляции могут быть сильно зависимыми, даже если вход — белый шум.

Однако справедливо [84], что

$$S = m \sum_{k=0}^K r_{ad}^2(k) \quad (11.3.20)$$

приближенно распределено как  $\chi^2$  с  $K+1-(r+s+1)$  степенями свободы, где  $(r+s+1)$  — число параметров в подгоняемой модели передаточной функции. Заметим, что число степеней свободы не зависит от числа параметров в подгоняемой модели шума.

## 11.4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПОДГОНОК И ПРОВЕРОК МОДЕЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

### 11.4.1. Подгонка и проверка модели газовой печи

Проиллюстрируем теперь подход, описанный в разд. 11.3, на подгонке модели

$$Y_t = \frac{\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} X_{t-3} + \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2} a_t,$$

идентифицированной для данных газовой печи в разд. 11.2.2 и 11.2.3.

*Нелинейное оценивание.* Использовались начальные оценки  $\hat{\omega}_0 = -0,53$ ,  $\hat{\omega}_1 = 0,33$ ,  $\hat{\omega}_2 = 0,51$ ,  $\hat{\delta}_1 = 0,57$ ,  $\hat{\delta}_2 = 0,02$ ,  $\hat{\phi}_1 = 1,51$ ,  $\hat{\phi}_2 = -0,68$ , полученные в разд. 11.2.2 и 11.2.3. При помощи алгоритма условных наименьших квадратов, описанного в разд. 11.3.2, значения наименьших квадратов с точностью в два десятичных знака были получены за четыре итерации. Чтобы показать сходимость итерационного процесса в неблагоприятных



обстоятельствах, в табл. 11.4 приведены последовательности итераций с начальными значениями, равными  $\pm 0,1$  или  $-0,1$ . Тот факт, что даже в этих условиях сходимость для модели с таким большим числом параметров, как 7, была достигнута за 10 итераций, весьма ободряет.

Последняя строка в табл. 11.4 — это грубые предварительные оценки, полученные на этапе идентификации в разд. 11.2.2 и 11.2.3. Видно, что в этом примере они хорошо согласуются с оценками наименьших квадратов, данными в предыдущей строке.

Таблица 11.4

Сходимость подгонки модели к данным газовой печи  
нелинейным методом наименьших квадратов

Итерация	$\omega$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\phi_1$	$\phi_2$	Сумма квадратов
0	0,10	-0,10	-0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	13 601
1	-0,46	0,63	0,60	0,14	0,27	1,33	-0,27	273,1
2	-0,52	0,45	0,31	0,40	0,52	1,37	-0,43	92,5
3	-0,63	0,60	0,01	0,12	0,73	1,70	-0,76	31,8
4	-0,54	0,50	0,29	0,24	0,42	1,70	-0,81	19,7
5	-0,50	0,31	0,51	0,63	0,09	1,56	-0,68	16,84
6	-0,53	0,38	0,53	0,54	0,01	1,54	-0,64	16,60
7	-0,53	0,37	0,51	0,56	0,01	1,53	-0,63	16,60
8	-0,53	0,37	0,51	0,56	0,01	1,53	-0,63	16,60
9	-0,53	0,37	0,51	0,57	0,01	1,53	-0,63	16,60
Предварительные оценки	-0,53	0,33	0,51	0,57	0,02	1,51	-0,68	

Итак, окончательно подогнанная модель передаточной функции имеет вид

$$(1 - 0,57B - 0,01B^2) Y_t = -(0,53 + 0,37B + 0,51B^2) X_{t-3}, \quad (11.4.1)$$

$(\pm 0,21) (\pm 0,14) \quad (\pm 0,08) (\pm 0,15) (\pm 0,16)$

а подогнанная модель шума —

$$(1 - 1,53B + 0,63B^2) N_t = a_t, \quad (11.4.2)$$

$(\pm 0,05) (\pm 0,05)$

с  $\hat{\sigma}_a^2 = 0,0561$ . Пределы в скобках соответствуют  $\pm 1$  стандартной ошибке и найдены в процедуре нелинейного оценивания.

**Диагностическая проверка.** Прежде чем принять эту модель как адекватное представление системы, следует проделать проверки автокорреляций и взаимных корреляций способами, описанными в разд. 11.3.4. Выборочные автокорреляции для первых 36 задержек приведены в табл. 11.5 вместе с верхней гранью их стандартных ошибок ( $m = 289$ ) в предположении об адекватности модели. Поведение отдельных выборочных автокорреляций не дает указаний на неадекватность модели. Это подтверждается вычислением критерия  $Q$  (11.3.18):

$$Q = 289 \sum_{k=1}^{36} r_{aa}^2(k) = 41,7.$$

Таблица 11.5

**Выборочная автокорреляционная функция  $r_{aa}(k)$   
остаточных ошибок для подогнанной модели газовой печи**

Задержка $k$	$r_{aa}(k)$												Крайние границы стандартной ошибки
1-12	0,02	0,06	-0,07	-0,05	-0,05	0,12	0,03	0,03	-0,08	0,05	0,02	0,10	$\pm 0,06$
13-24	-0,04	0,05	-0,09	-0,01	-0,08	0,00	-0,12	0,00	-0,01	0,08	0,02	-0,01	$\pm 0,06$
25-36	0,04	-0,02	0,02	0,09	-0,12	0,06	-0,03	-0,06	-0,11	0,02	0,03	0,06	$\pm 0,06$

Сравнение  $Q$  с таблицей  $\chi^2$  для  $K - p - q = 36 - 2 - 0 = 34$  степеней свободы не дает основания оспаривать адекватность модели.

В табл. 11.6а приведены значения выборочной взаимной корреляционной функции  $r_{xa}(k)$  для первых 36 задержек, а также верхняя граница  $1/\sqrt{m}$  их стандартных ошибок. Видно, что хотя выборочные взаимные корреляции не слишком велики по сравнению с их стандартными ошибками, они сильно коррелированы. Этого следовало ожидать, так как, согласно (11.3.19), выборочные взаимные корреляции подчиняются тому же стохастическому процессу, что и вход  $x_t$ , а как мы уже видели, вход в этом примере сильно автокоррелирован.

Соответствующие выборочные взаимные корреляции между  $\hat{a}_t$  и предварительно выравненным входом  $\alpha_t$  приведены в табл. 11.6б. Критерий (11.3.20) дает

$$S = 289 \sum_{k=0}^{35} r_{aa}^2(k) = 29,4.$$

Таблица 11.6а

Выборочная взаимная корреляционная функция  $r_{x\lambda}(k)$   
остаточных ошибок входа и выхода для данных газовой печи

Задержка $k$	$r_{x\lambda}(k)$													Крайние границы стандартной ошибки
0-11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	-0,02	-0,03	-0,05	-0,06	-0,06	$\pm 0,06$
12-23	-0,03	-0,03	-0,03	-0,07	-0,10	-0,12	-0,12	-0,10	-0,04	-0,01	-0,01	-0,01	-0,02	$\pm 0,06$
24-35	-0,03	-0,04	-0,04	-0,02	-0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,07	0,07	0,07	0,06	$\pm 0,06$

Таблица 11.6б

Выборочная взаимная корреляционная функция  $r_{ad}(k)$   
остаточных ошибок предварительно выравненного входа  
и выхода для данных газовой печи

Задержка $k$	$r_{ad}(k)$													Крайние границы стандартной ошибки
0-11	-0,06	0,03	-0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	-0,04	0,02	0,07	-0,03	-0,02	-0,02	$\pm 0,06$
12-23	-0,03	-0,11	0,02	0,04	0,04	0,01	0,01	-0,15	-0,03	-0,07	-0,08	0,02	0,02	$\pm 0,06$
24-35	-0,01	0,02	0,05	-0,07	0,00	0,04	0,15	0,04	0,03	-0,02	0,00	0,03	0,03	$\pm 0,06$

Сравнение  $S$  с таблицей  $\chi^2$  для  $K+1-(r+s+1)=36-5=31$  степеней свободы также не дает указания на неадекватность модели.

Импульсный отклик и отклик на единичный скачок. Выборочная оценка  $\hat{\delta}_2=0,01$  в (11.4.1) очень мала по сравнению с ее стандартной ошибкой  $\pm 0,14$ , и параметр модели  $\delta_2$  может быть опущен практически без влияния на точность оценок других рассматриваемых параметров. Окончательный вид комбинированной модели передаточной функции — шума для данных газовой печи есть

$$Y_t = \frac{-(0,53 + 0,37B + 0,51B^2)}{1 - 0,57B} X_{t-3} + \frac{1}{1 - 1,53B + 0,63B^2} a_t.$$

Функции отклика на единичный скачок и единичный импульс, соответствующие модели передаточной функции

$$(1 - 0,57B)Y_t = -(0,53 + 0,37B + 0,51B^2)X_{t-3},$$

приведены на рис. 11.6. Согласно (10.2.5), установившееся усиление кодированных данных равно

$$g = \frac{-(0,53 + 0,37 + 0,51)}{1 - 0,57} = -3,3.$$

Результаты хорошо согласуются с полученными взаимным спектральным анализом [27].

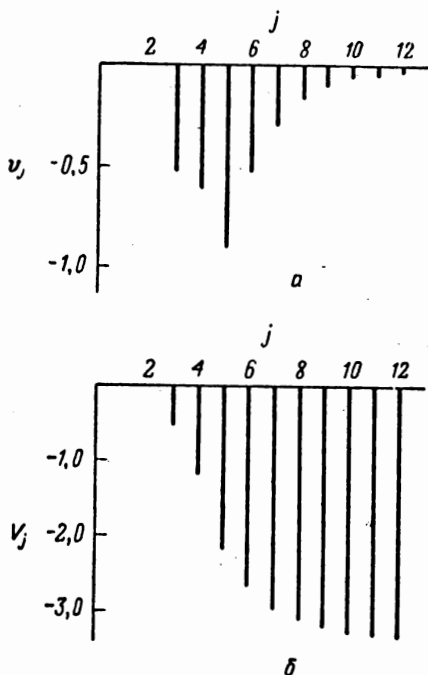


Рис. 11.6. Отклики на единичные импульс (а) и скачок (б) для модели передаточной функции  $(1 - 0,57 B) Y_t = -(0,53 + 0,37 B + 0,51 B^2) X_{t-3}$ , подогнанной к данным газовой печи.

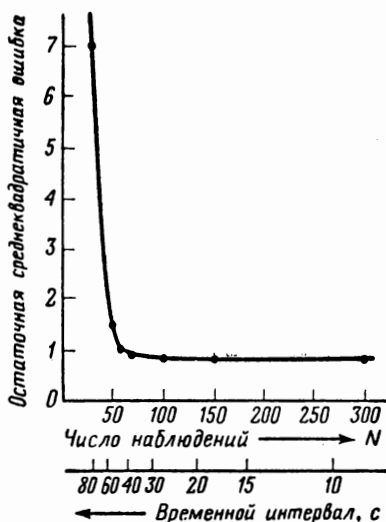


Рис. 11.7. Среднеквадратичная ошибка выхода для различных интервалов отсчета.

**Выбор интервала отсчета.** Если возможен выбор, интервал отсчета следует брать достаточно малым по сравнению с постоянными времени, ожидаемыми для этой системы. В неясных случаях следует повторить анализ для нескольких интервалов. При выборе интервала отсчета существен уровень остаточного шума на выходе, и его дисперсия должна стремиться к минимуму по мере уменьшения интервала. Так, в рассмотренном выше примере с газовой печью непрерывная запись входа и выхода обеспечивалась самописцем. Дискретные данные,

использованные в нашем анализе, были получены считыванием значений в точках этой непрерывной записи с интервалом 9 с. Этот интервал был выбран после рассмотрения записей, показанных на рис. 11.1; он показался достаточным для описания всех вариаций (кроме легкого дрожания пера) входа и выхода. Такого рода разумные практические предположения обычно достаточно надежны при выборе интервала. Выборочная среднеквадратичная ошибка для данных о газовой печи (полученная делением  $\sum (Y - \hat{Y})^2$  на соответствующее число степеней свободы, где  $\hat{Y}$  — значения подогнанной модели выхода) при различных временных интервалах приведена в табл. 11.7. Эти значения показаны также на рис. 11.7. До тех пор пока интервал меньше 40 с, среднеквадратичная ошибка изменяется незначительно, а затем она резко возрастает. Для 9-, 18- и 27-секундных интервалов различия в среднеквадратичной ошибке невелики, а при интервале 36 с происходит значительное изменение. Видно, что интервал 9 с, использованный в этом примере, даже излишне безопасен.

Таблица 11.7

Среднеквадратичная ошибка выхода для различных интервалов отсчета

Длина интервала, с	9	18	27	36	45	54	72
Число наблюдений, $N$	296	148	98	74	59	49	37
Среднеквадратичная ошибка	0,71	0,78	0,74	0,95	0,97	1,56	7,11

#### 11.4.2. Искусственный пример с двумя входами

Подгонка моделей более чем с одним входным рядом не вызывает принципиальных трудностей, если не считать увеличения числа анализируемых параметров.

Например, в случае двух входов можно записать модель как

$$y_t = \delta_1^{-1}(B) \omega_1(B) x_{1,t-b_1} + \delta_2^{-1}(B) \omega_2(B) x_{2,t-b_2} + n_t$$

с

$$n_t = \phi^{-1}(B) \theta(B) a_t,$$

где  $y_t = \nabla^d Y_t$ ,  $x_{1,t} = \nabla^d X_{1,t}$ ,  $x_{2,t} = \nabla^d X_{2,t}$  и  $n_t = \nabla^d N_t$  — стационарные процессы. Для вычисления  $a_t$  мы вначале вычислим при конкретных значениях параметров  $b_1$ ,  $\delta_1$ ,  $\omega_1$

$$y_{1,t} = \delta_1^{-1}(B) \omega_1(B) x_{1,t-b_1} \quad (11.4.3)$$

и при конкретных значениях параметров  $b_2$ ,  $\delta_2$ ,  $\omega_2$

$$y_{2,t} = \delta_2^{-1}(B) \omega_2(B) x_{2,t-b_2} \quad (11.4.4)$$

Тогда шум  $n_t$  можно вычислить по формуле

$$n_t = y_t - y_{1,t} - y_{2,t} \quad (11.4.5)$$

и, наконец,  $a_t$  по формуле

$$a_t = \theta^{-1}(B) \phi(B) n_t. \quad (11.4.6)$$

*Искусственный пример.* Ясно, что даже простая ситуация может привести к оцениванию большого числа параметров. В нижеследующем примере с двумя входными переменными и

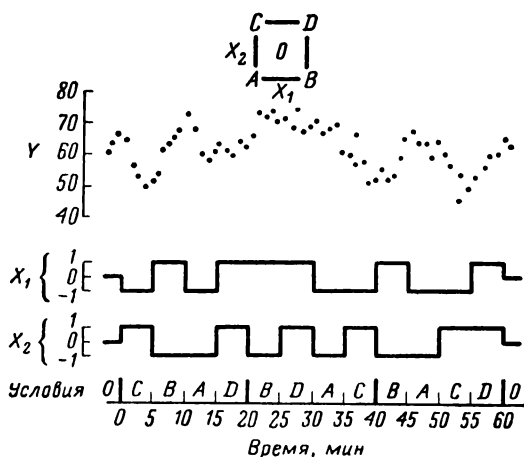


Рис. 11.8. Данные искусственного примера с двумя входами (ряд К).

моделями первого порядка с запаздыванием имеется восемь неизвестных параметров. Для того чтобы определить, применима ли для оценок параметров в таких моделях нелинейная процедура наименьших квадратов, описанная в разд. 11.3.2, был проведен эксперимент с искусственными данными. Подробности эксперимента описаны в [85]. Данные генерировались моделью,  $\nabla$ -представление которой имело вид

$$Y_t = \beta + g_1 \frac{1 + \eta_1 \nabla}{1 + \xi_1 \nabla} X_{1,t-1} + g_2 \frac{1 + \eta_2 \nabla}{1 + \xi_2 \nabla} X_{2,t-1} + \frac{1}{1 - \phi_1 B} a_t \quad (11.4.7)$$

с  $\beta = 60$ ,  $g_1 = 13,0$ ,  $\eta_1 = -0,6$ ,  $\xi_1 = 4,0$ ,  $g_2 = -5,5$ ,  $\eta_2 = -0,6$ ,  $\xi_2 = 4,0$ ,  $\phi_1 = 0,5$  и  $\sigma_a^2 = 9,0$ . Входные переменные  $X_1$ ,  $X_2$  изменялись в соответствии с рандомизированным  $2^2$ -факториальным планом с тремя репликами. Предполагалось, что каждое значение на входе поддерживалось постоянным в течение 5 мин, а наблюдения на выходе делались каждую минуту. Данные представлены на рис. 11.8 и содержатся в виде ряда К в сводке временных рядов в конце книги.

Для получения оценок наименьших квадратов использовалась итеративная нелинейная процедура с ограничениями, описанная в гл. 7. Необходимо было только вычислять  $a$ . Так, для заданных значений параметров  $g_1, g_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  значения  $\mathcal{Y}_{1,t}$  и  $\mathcal{Y}_{2,t}$  можно было получить из

$$(1 + \xi_1 \nabla) \mathcal{Y}_{1,t} = g_1 (1 + \eta_1 \nabla) X_{1,t-1},$$

$$(1 + \xi_2 \nabla) \mathcal{Y}_{2,t} = g_2 (1 + \eta_2 \nabla) X_{2,t-1}.$$

Они использовались для расчета  $N_t$ :

$$N_t = Y_t - \mathcal{Y}_{1,t} - \mathcal{Y}_{2,t}.$$

Наконец, при заданных  $\phi_1$  значения  $a_t$  можно было вычислить по формуле

$$a_t = N_t - \phi_1 N_{t-1}.$$

Предполагалось, что входы процесса поддерживаются в типичных условиях некоторое время до начала эксперимента, так что  $\mathcal{Y}_{1,t}$  и  $\mathcal{Y}_{2,t}$  и, следовательно,  $N_t$  можно вычислять вперед с  $t=0$ , а  $a_t$  с  $t=1$ .

Процедура опробовалась дважды, с разными наборами начальных значений. В первом расчете был взят набор параметров, который мог бы предложить человек, знакомый с изучаемым процессом. Во втором в качестве начального значения  $\beta$  было взято среднее значение  $\bar{Y}$  всех наблюдений, а остальные начальные значения были приравнены 0,1. Поэтому вторая попытка описывает значительно худшую ситуацию, чем обычно бывает на практике. В табл. 11.8 показано, что для первого

Таблица 11.8

**Сходимость нелинейного метода наименьших квадратов  
для системы с двумя входами при использовании  
предположительных начальных значений**

Итерация	$\beta$	$g_1$	$g_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\phi_1$	Сумма квадратов
0	59,19	10,00	-7,00	-0,50	-0,50	1,00	1,00	0,10	2046,8
1	59,20	9,07	-6,37	-0,58	-0,56	1,33	1,31	0,24	1085,4
2	59,24	8,38	-5,35	-0,70	-0,59	2,03	1,75	0,39	621,5
3	59,35	9,24	-3,98	-0,75	-0,55	3,45	1,95	0,36	503,5
4	59,41	11,90	-3,40	-0,75	-0,56	5,21	1,66	0,22	463,7
5	59,39	12,03	-3,52	-0,80	-0,57	4,99	1,76	0,21	461,8
6	59,39	12,08	-3,53	-0,79	-0,56	5,03	1,77	0,21	461,8
7	59,39	12,07	-3,53	-0,79	-0,56	5,03	1,77	0,21	461,8
8	59,39	12,07	-3,53	-0,79	-0,56	5,03	1,77	0,21	461,8

набора начальных значений сходимость наступает после 5 итераций, а табл. 11.9 показывает, что для второго набора сходимость достигнута после 9 итераций. Эти результаты позволяют надеяться, что в реальных обстоятельствах оценивание системы с двумя входами не встретит серьезных трудностей.

Таблица 11.9

**Сходимость нелинейного метода наименьших квадратов  
для системы с двумя входами при использовании  
экстремальных начальных значений**

Итерация	$\beta$	$g_1$	$g_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\phi_1$	Сумма квадратов
0	59,19	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	2496,4
1	59,19	0,24	-0,07	-1,57	0,48	1,77	-0,28	0,15	2190,5
2	59,22	1,62	-0,29	-2,09	-2,24	-0,07	0,26	0,29	1473,6
3	59,21	1,80	-0,77	-1,75	0,58	0,20	-0,10	0,56	1016,8
4	59,21	3,01	-1,31	-1,15	-0,83	0,91	0,22	0,72	743,1
5	59,31	6,17	-2,82	-0,93	-0,65	3,03	1,20	0,67	611,4
6	59,61	15,83	-3,25	-0,70	-0,66	8,88	1,64	0,26	534,2
7	59,47	10,31	-3,48	-0,74	-0,56	3,52	1,63	0,23	501,9
8	59,41	11,89	-3,41	-0,74	-0,58	5,01	1,65	0,20	462,8
9	59,39	12,07	-3,52	-0,79	-0,57	5,04	1,76	0,21	461,8
10	59,39	12,07	-3,53	-0,79	-0,56	5,03	1,77	0,21	461,8
11	59,39	12,07	-3,53	-0,79	-0,56	5,03	1,77	0,21	461,8

## 11.5. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ УПРЕЖДАЮЩИХ ИНДИКАТОРОВ

Во многих случаях прогнозы временного ряда  $Y_t, Y_{t-1}, \dots$  можно значительно улучшить, если использовать информацию, поступающую из какого-либо связанного с  $Y$  ряда  $X_t, X_{t-1}, \dots$ . Это особенно сильно проявляется в тех случаях, когда изменения  $X$  имеют тенденцию *предварять* изменения  $Y$ , и в этом случае  $X$  экономисты называют «упреждающим индикатором» для  $Y$ .

Для получения оптимального прогноза по информации, содержащейся как в  $X$ , так и в  $Y$ , мы сначала уже описанными приемами построим модель передаточной функции — шума, связывающую  $Y$  и  $X$ .

Пусть в предыдущих обозначениях адекватная модель имеет вид

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + \varphi^{-1}(B) \theta(B) a_t, \quad b \geq 0. \quad (11.5.1)$$



В общем случае шумовая компонента этой модели, предполагаемая статистически независимой от входа  $X_t$ , нестационарна, а именно

$$\varphi(B) = \phi(B) \nabla^d,$$

так что, если

$$\nabla^d Y_t = y_t \quad \text{и} \quad \nabla^d X_t = x_t,$$

то

$$y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) x_{t-b} + \phi^{-1}(B) \theta(B) a_t.$$

Мы предполагаем также, что адекватная статистическая модель для упреждающего ряда имеет вид

$$X_t = \varphi_x^{-1}(B) \theta_x(B) a_t, \quad (11.5.2)$$

так что

$$\varphi_x(B) = \phi_x(B) \nabla^d,$$

$$x_t = \phi_x^{-1}(B) \theta_x(B) a_t.$$

### 11.5.1. Прогноз с минимальной среднеквадратичной ошибкой

Теперь (11.5.1) можно записать как

$$Y_t = v(B) a_t + \psi(B) a_t, \quad (11.5.3)$$

где  $a$  и  $\alpha$  статистически независимы. Рассуждая, как в разд. 5.1.1, представим прогноз  $\hat{Y}_t(l)$  значения ряда  $Y_{t+l}$ , сделанный в момент  $t$ , как

$$\hat{Y}_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} v_{l+j}^0 a_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{l+j}^0 a_{t-j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y_{t+l} - \hat{Y}_t(l) &= \sum_{i=0}^{l-1} (v_i a_{t+l-i} + \psi_i a_{t+l-i}) + \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \{ (v_{l+j} - v_{l+j}^0) a_{t-j} + (\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^0) a_{t-j} \} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} E \{ Y_{t+l} - \hat{Y}_t(l) \}^2 &= (v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{l-1}^2) \sigma_a^2 + \\ &+ (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{l-1}^2) \sigma_a^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \{ (v_{l+j} - v_{l+j}^0)^2 \sigma_a^2 + (\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^0)^2 \sigma_a^2 \}, \end{aligned}$$

последнее достигает минимума, только если  $v_{l+j}^0 = v_{l+j}$  и  $\psi_{l+j}^0 = \psi_{l+j}$ . Таким образом, прогноз  $\hat{Y}_t(l)$  величины  $Y_{t+l}$  в момент  $t$  с минимальной среднеквадратичной ошибкой определяется как условное математическое ожидание  $Y_{t+l}$  в момент  $t$ . Теоретически это математическое ожидание берется при условии, что известны значения ряда, начиная с бесконечно удаленного прошлого вплоть до настоящего момента  $t$ . Как и в гл. 5, эти ре-

зультаты практически полезны, поскольку обычно прогноз существенно зависит только от *недавних* прошлых значений  $X$  и  $Y$ .

*Вычисление прогнозов.* Можно представить (11.5.1) в виде

$$\varphi(B)\delta(B)Y_t = \varphi(B)\omega(B)X_{t-b} + \delta(B)\theta(B)a_t,$$

или в иных обозначениях

$$\delta^*(B)Y_t = \omega^*(B)X_{t-b} + \theta^*(B)a_t.$$

Обозначая условные математические ожидания в момент  $t$  квадратными скобками и приняв  $p^* = p + d$ , получаем выражения для прогноза с упреждением  $l$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t(l) = [Y_{t+l}] &= \delta_1^*[Y_{t+l-1}] + \dots + \delta_{p^*+r}^*[Y_{t+l-p^*-r}] + \omega_0^*[X_{t+l-b}] - \\ &- \dots - \omega_{p^*+s}^*[X_{t+l-b-p^*-s}] + [a_{t+1}] - \theta_1^*[a_{t+l-1}] - \\ &- \dots - \theta_{q+r}^*[a_{t+l-q-r}],\end{aligned}\quad (11.5.4)$$

где

$$\begin{aligned}[Y_{t+j}] &= \begin{cases} Y_{t+j}, & j \leq 0 \\ \hat{Y}_t(j), & j > 0, \end{cases} \\ [X_{t+j}] &= \begin{cases} X_{t+j}, & j \leq 0 \\ \hat{X}_t(j), & j > 0, \end{cases} \\ [a_{t+j}] &= \begin{cases} a_{t+j}, & j \leq 0 \\ 0, & j > 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (11.5.5)$$

и  $a_t$  вычисляется по (11.5.1) или для  $b \geq 1$  как

$$a_t = Y_t - \hat{Y}_{t-1}(1).$$

Тогда после соответствующих подстановок прогноз с минимальной квадратичной ошибкой легко вычислить непосредственно, пользуясь формулами (11.5.4) и (11.5.5). Прогнозы  $\hat{X}_t(j)$  легко найти обычным способом (см. разд. 5.2), используя модель (11.5.2).

*Дисперсия прогноза.* Веса  $v$  и  $\psi$  в (11.5.3) можно получить в явном виде, приравнявая коэффициенты в

$$\delta(B)\varphi_x(B)v(B) = \omega(B)\theta_x(B)B^b$$

и в

$$\varphi(B)\psi(B) = \theta(B).$$

Дисперсия прогноза с упреждением  $l$  равна

$$V(l) = E\{Y_{t+l} - \hat{Y}_t(l)\}^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=b}^{l-1} v_j^2 + \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2. \quad (11.5.6)$$

*Прогнозы как линейная комбинация предшествующих наблюдений.* В каждом примере полезно изучить, каким способом прогнозы будущих значений  $Y$  используют предшествующие значения  $X$  и  $Y$ .

В разд. 5.3.3 было показано, как можно представить прогнозы в виде линейных комбинаций предшествующих значений ряда. Прогнозирование упреждающего индикатора мы можем выполнить по формуле

$$\hat{X}_t(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(l)} X_{t-l+j}. \quad (11.5.7)$$

Веса  $\pi_j^{(l)} = \pi_j$  появляются, если модель (11.5.2) представлена в виде

$$a_t = X_t - \pi_1 X_{t-1} - \pi_2 X_{t-2} - \dots;$$

их явные выражения можно получить, приравнявая коэффициенты в уравнении

$$\varphi_x(B) = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) \theta_x(B).$$

Используя также (5.3.9), получаем

$$\pi_j^{(l)} = \pi_{j+l-1} + \sum_{h=1}^{l-1} \pi_h \pi_j^{(l-h)}. \quad (11.5.8)$$

Действуя тем же способом, мы можем представить модель передаточной функции (11.5.1) в виде

$$a_t = Y_t - \sum_{j=1}^{\infty} P_j Y_{t-j} - \sum_{j=1}^{\infty} Q_j X_{t-j}, \quad b > 0. \quad (11.5.9)$$

Следует отметить, что если передаточная функция, связывающая упреждающий индикатор  $X$  и выход  $Y$ , такова, что  $v_j = 0$  при  $j < b$ , то  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{b-1}$  в (11.5.9) будут равны нулю.

Формулу (11.5.9) можно теперь записать иначе:

$$a_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} P_j B^j\right) Y_t - \sum_{j=1}^{\infty} Q_j B^j X_t.$$

Сравнение с (11.5.1) показывает, что веса  $P$  и  $Q$  можно получить, приравнявая коэффициенты в выражениях

$$\theta(B) \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} P_j B^j\right) = \varphi(B),$$

$$\theta(B) \delta(B) \sum_{j=1}^{\infty} Q_j B^j = \varphi(B) \omega(B) B^b.$$

Заменяя  $t+l$  на  $t$  в (11.5.9) и переходя к условным математическим ожиданиям в момент  $t$ , получаем выражение для прогноза с упреждением  $l$  вида

$$\hat{Y}_t(l) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j [Y_{t+l-j}] + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j [X_{t+l-j}]. \quad (11.5.10)$$

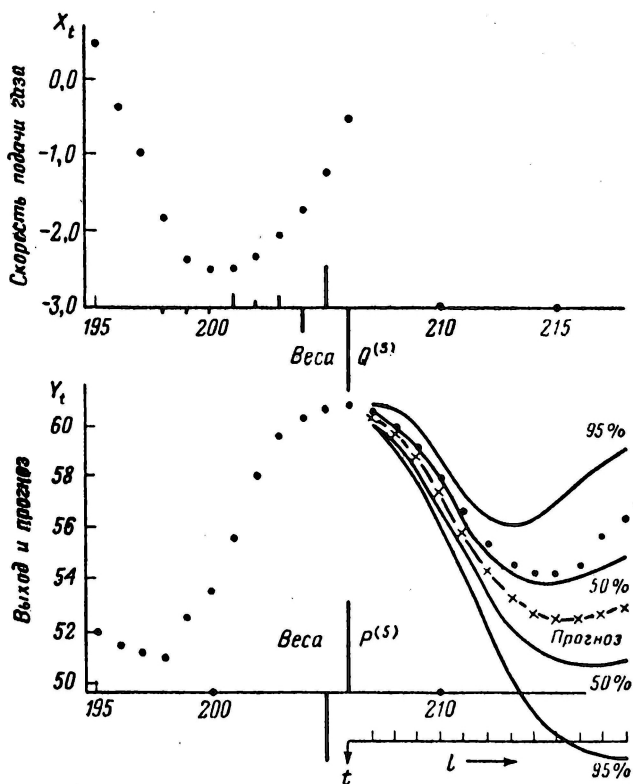


Рис. 11.9. Прогноз выхода  $\text{CO}_2$  из газовой печи по входному и выходному рядам.

Прогноз на шаг вперед имеет вид

$$\hat{Y}_t(1) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j Y_{t+1-j} + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j X_{t+1-j}.$$

Величины в квадратных скобках в (11.5.10) — это или известные значения рядов  $X$  и  $Y$ , или прогнозы, являющиеся линейными функциями этих известных величин.

Итак, прогнозы можно записать в виде линейных комбинаций значений членов ряда, известных к моменту времени  $t$ , в виде

$$\hat{Y}_t(l) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j^{(l)} Y_{t+l-j} + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j^{(l)} X_{t+l-j}, \quad (11.5.11)$$

где коэффициенты  $P_j^{(l)}$ ,  $Q_j^{(l)}$  можно вычислить по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} P_j^{(l)} &= P_j, \quad Q_j^{(l)} = Q_j, \\ P_j^{(l)} &= P_{j+l-1} + \sum_{h=1}^{l-1} P_h P_j^{(l-h)}, \\ Q_j^{(l)} &= Q_{j+l-1} + \sum_{h=1}^{l-1} \{P_h Q_j^{(l-h)} + Q_h \pi_j^{(l-h)}\}. \end{aligned} \quad (11.5.12)$$

### 11.5.2. Прогнозы выхода $\text{CO}_2$ из газовой печи

В качестве примера рассмотрим данные газовой печи, показанные на рис. 11.1. В этом примере подогнанная модель (см. разд. 11.4.1) имела вид

Таблица 11.10

Веса  $\pi$ ,  $P$  и  $Q$  для модели газовой печи

$j$	$\pi_j$	$P_j$	$Q_j$
1	1,97	1,53	0
2	-1,37	-0,63	0
3	0,34	0	-0,53
4	0	0	0,14
5	0	0	-0,20
6	0	0	0,43
7	0	0	-0,07
8	0	0	-0,04
9	0	0	-0,02
10	0	0	-0,01
11	0	0	-0,01

$$Y_t = \frac{- (0,53 + 0,37B + 0,51B^2)}{1 - 0,57B} X_{t-3} + \frac{a_t}{1 - 1,53B + 0,63B^2},$$

где  $(1 - 1,97B + 1,37B^2 - 0,34B^3) X_t = a_t$ .

Прогнозирующая функция  $\hat{Y}_t(l)$ , записанная в виде (11.5.4), будет тогда равна

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t(l) = [Y_{t+l}] &= 2,1 [Y_{t+l-1}] - \\ &- 1,5021 [Y_{t+l-2}] + \\ &+ 0,3591 [Y_{t+l-3}] - 0,53 [X_{t+l-3}] + \\ &+ 0,4409 [X_{t+l-4}] - \\ &- 0,2778 [X_{t+l-5}] + 0,5472 [X_{t+l-6}] - \\ &- 0,3213 [X_{t+l-7}] + [a_{t+l}] - \\ &- 0,57 [a_{t+l-1}]. \end{aligned}$$

На рис. 11.9 показаны прогнозы с упреждениями  $l = 1, 2, \dots, 12$ , сделанные в момент  $t = 206$ . Веса  $\pi$ ,  $P$  и  $Q$  для этой модели приведены в табл. 11.10.

На рис. 11.9 показаны веса  $P_j^{(5)}$  и  $Q_j^{(5)}$ , соответствующие прогнозу с упреждением 5. Веса  $\nu_i$  и  $\psi_j$  из (11.5.3) приведены в табл. 11.11.

Опираясь на оценки  $\hat{\sigma}_a^2 = 0,0353$  и  $\hat{\sigma}_a^2 = 0,0561$ , полученные в разд. 11.2.2 и 11.4.1 соответственно, можно использовать (11.5.6) для получения дисперсий ошибок прогноза, а также 50- и 95%-ных вероятностных пределов (рис. 11.9).

Таблица 11.11

Веса  $v$  и  $\psi$  для модели газовой печи

$i$	$v_i$	$\psi_i$
0	0	1
1	0	1,53
2	0	1,71
3	-0,53	1,65
4	-1,72	1,45
5	-3,55	1,18
6	-5,33	0,89
7	-6,51	0,62
8	-6,89	0,39
9	-6,57	0,20
10	-5,77	0,06
11	-4,73	-0,03

Таблица 11.12

Выборочные стандартные отклонения ошибок прогноза с использованием и без использования упреждающего индикатора

$i$	С индикатором	Без индикатора
1	0,23	0,33
2	0,43	0,77
3	0,59	1,30
4	0,72	1,82
5	0,86	2,24
6	1,12	2,54
7	1,52	2,74
8	1,96	2,86
9	2,35	2,95
10	2,65	3,01
11	2,87	3,05
12	3,00	3,08

Для того чтобы наглядно продемонстрировать преимущества использования упреждающего индикатора при прогнозировании, предположим, что мы имеем в распоряжении только ряд  $Y$ . Обычная процедура идентификации и подгонки, применяемая к этому ряду, показывает, что он хорошо описывается процессом  $ARCC(4, 2)$

$$(1 - 2,42B + 2,38B^2 - 1,16B^3 + 0,23B^4) Y_t = (1 - 0,31B + 0,47B^2) \varepsilon_t$$

с  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0,1081$ .

В табл. 11.12 приведены выборочные стандартные отклонения ошибок прогноза, сделанные с использованием и без использования упреждающего индикатора. Как можно было ожидать, для коротких упреждений использование упреждающего индикатора может придать прогнозам значительно большую точность.



Рис. 11.10. Данные сбыта с упреждающим индикатором.

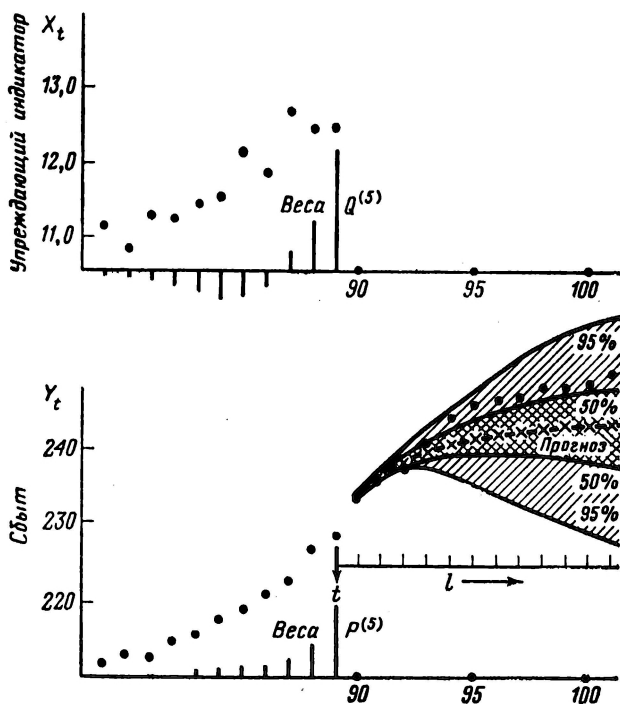


Рис. 11.11. Прогноз сбыта в момент  $t=89$  и весы  $P$  и  $Q$  для прогноза с упреждением 5.

### 11.5.3. Прогноз нестационарных данных сбыта при помощи упреждающего индикатора

В качестве второго примера рассмотрим данные о сбыте  $Y_t$ , связанные с упреждающим индикатором  $X_t$  и показанные на рис. 11.10; они представлены как ряд  $M$  в сводке временных рядов в конце этой книги. Данные типичны для коммерческого прогнозирования и хорошо описываются нестационарной моделью

$$y_t = 0,035 + \frac{4,82x_{t-3}}{1-0,72B} + (1 - 0,54B) a_t,$$

$$x_t = (1 - 0,32B) \alpha_t,$$

где  $y_t$  и  $x_t$  — первые разности рядов. Прогнозирующая функция вида (11.5.4) равна

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t(l) = [Y_{t+l}] = & 1,72[Y_{t+l-1}] - 0,72[Y_{t+l-2}] + 0,0098 + 4,82[X_{t+l-3}] - \\ & - 4,82[X_{t+l-4}] + [a_{t+l}] - 1,26[a_{t+l-1}] + \\ & + 0,3888[a_{t+l-2}]. \end{aligned}$$

На рис. 11.11 показаны прогнозы для упреждений  $l = 1, 2, \dots, 12$ , сделанные в момент времени  $t = 89$ . Веса  $v_j$  и  $\psi_j$  приведены в табл. 11.13.

Таблица 11.13

Веса  $v$  и  $\psi$  для нестационарной модели

$l$	$v_j$	$\psi_j$
0	0	1
1	0	0,46
2	0	0,46
3	4,82	0,46
4	6,75	0,46
5	8,14	0,46
6	9,14	0,46
7	9,86	0,46
8	10,37	0,46
9	10,75	0,46
10	11,02	0,46
11	11,21	0,46

Таблица 11.14

Веса  $\pi$ ,  $P$  и  $Q$  для нестационарной модели

$l$	$\pi_j$	$P_j$	$Q_j$
1	0,68	0,46	0
2	0,22	0,25	0
3	0,07	0,13	4,82
4	0,02	0,07	1,25
5	0,01	0,04	-0,29
6	0,00	0,02	-0,86
7	0,00	0,01	-0,97
8	0,00	0,01	-0,89
9	0,00	0,00	-0,74
10	0,00	0,00	-0,59
11	0,00	0,00	-0,29
12	0,00	0,00	-0,13
13	0,00	0,00	-0,06
14	0,00	0,00	-0,02
15	0,00	0,00	0,00



Используя оценки  $\hat{\sigma}_\alpha^2 = 0,0676$  и  $\hat{\sigma}_\alpha^2 = 0,0484$ , полученные при подгонке приведенной выше модели, можно найти дисперсию ошибок прогноза по формуле (11.5.6). На рис. 11.11 показаны 50 %- и 90 %-ные вероятностные пределы. Видно, что в этом частном случае использование упреждающего индикатора позволяет получить очень точные прогнозы с упреждениями 1, 2 или 3.

Веса  $\pi$ ,  $P$  и  $Q$  для этой модели даны в табл. 11.14. Веса  $P_j^{(5)}$  и  $Q_j^{(5)}$ , соответствующие прогнозам с упреждением 5, показаны на рис. 11.11.

### 11.6. НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В некоторых технических приложениях можно специально подбирать вид входа  $X_t$  так, чтобы получать хорошие оценки параметров модели передаточной функции — шума

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + N_t.$$

Оценивание передаточной функции эквивалентно оцениванию динамической «регрессионной» модели, а возможные методы оценивания очень близки к используемым при обычном, нединамическом регрессионном анализе. Как можно было ожидать, мы встретились с теми же проблемами [86].

Как и в случае статической регрессии, очень важно ясно представлять цели исследования. В некоторых ситуациях мы хотим ответить на вопрос:

«Если вход  $X$  просто наблюдается (но никак не изменяется наблюдателем), что можно сказать по этим наблюдениям о настоящем и будущем поведении выхода  $Y$  при *нормальных* условиях протекания процесса?»

В других ситуациях нас интересует вопрос:

«Если вход  $X_t$  *изменять* каким-либо способом, какие *изменения* это вызовет в настоящем и будущем поведении выхода  $Y$ ?»

Чтобы ответить на каждый из этих вопросов, нужны различные виды данных. Для однозначного ответа на первый вопрос мы должны пользоваться данными, полученными путем наблюдения, *без вмешательства* в нормальный ход процесса.

Напротив, однозначный ответ на второй вопрос можно получить из данных, специально полученных в *планируемом эксперименте* путем целенаправленного изменения входа системы.

Ясно, что для использования  $X$  в качестве регулируемого переменного, т. е. переменного, воздействующего на выход, мы

должны иметь ответ на второй вопрос. Чтобы понять, как можно спланировать эксперимент для получения надежных оценок параметров связи между возмущением и его эффектом, нужно изучить предположения, на которых базируется анализ. Наиболее важным является предположение о независимости  $X_t$  и  $N_t$ . В случаях, когда это предположение нарушается, возможно следующее.

1) Получаемые оценки в общем не являются даже состоятельными. Конкретнее, при увеличении размера выборок оценки сходятся не к истинным значениям, а к другим величинам, отличающимся от истинных на неизвестную величину.

2) Нарушение этого предположения не обнаруживается при изучении данных. Следовательно, в каждой конкретной ситуации возможно нарушение предположения о независимости. Единственный способ гарантировать справедливость этого предположения — продуманно *запланировать* эксперимент, а не использовать «подвернувшиеся» данные. Точнее, мы можем генерировать и ввести в процесс возмущение  $X_t$ , которое по самому способу его получения, при помощи какого-либо внешнего случайного процесса не коррелировано с  $N_t$ .

Возмущение  $X_t$  может, конечно, быть автокоррелировано; необходимо только, чтобы отсутствовала взаимная корреляция с  $N_t$ . Чтобы выполнить это требование, мы можем, например, взять набор случайных чисел  $\alpha_t$  и воспользоваться ими для генерирования желаемого входного процесса  $X_t = \psi_x(B)\alpha_t$ .

Можно поступить и иначе, выбрав, например, некий фиксированный способ генерирования (например, факториальный план, использованный в разд. 11.4.2) и рандомизировать порядок выбора комбинаций управляющих переменных. В приложении П11.2 содержится предварительное обсуждение некоторых элементарных задач организации эксперимента; этого достаточно для демонстрации некоторых трудностей, встречающихся при практическом выборе «оптимального» стохастического входа. Например, справедливы следующие утверждения (справедливые и в более общем случае):

- 1) трудно выбрать разумный критерий оптимальности,
- 2) выбор «оптимального» входа зависит от значений неизвестных параметров, которые должны быть оптимально оценены.

В общем белый шум имеет ряд явных преимуществ, позволяя упростить идентификацию. Если мы не имеем достаточно надежных представлений об изучаемой системе, то белый шум является разумным начальным видом входа.

## ПРИЛОЖЕНИЕ П11.1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЗАИМНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

В этом приложении мы покажем, что, пользуясь спектральным анализом, можно предложить еще один метод идентификации моделей передаточных функций, не требующий предварительного выравнивания спектра входа. Этот метод легко обобщается на случай нескольких входов.

### П11.1.1. Идентификация моделей передаточной функции с одним входом

Пусть передаточная функция  $v(B)$  определена так, что веса  $v_j$  функции отклика на единичный импульс могут быть не равны нулю для отрицательных  $j$ , так что

$$v(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k B^k.$$

Тогда, если модель передаточной функции, согласно (11.2.3), имеет вид

$$y_t = v(B) x_t + n_t,$$

уравнение (11.2.5) принимает вид

$$\gamma_{xy}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j \gamma_{xx}(k-j), \quad k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{П11.1.1})$$

Определим теперь производящую функцию взаимных ковариаций

$$\gamma^{xy}(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(k) B^k, \quad (\text{П11.1.2})$$

аналогичную производящей функции автоковариаций (3.1.10). Умножая все члены (П11.1.1) на  $B^k$  и суммируя, получаем

$$\gamma^{xy}(B) = v(B) \gamma^{xx}(B). \quad (\text{П11.1.3})$$

Если мы теперь подставим в (П11.1.2)  $B = e^{-i2\pi f}$ , то получим взаимный спектр  $p_{xy}(f)$  между входом и выходом. Та же замена в (П11.1.3) дает

$$v(e^{-i2\pi f}) = \frac{p_{xy}(f)}{p_{xx}(f)}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}, \quad (\text{П11.1.4})$$

где

$$v(e^{-i2\pi f}) = G(f)e^{i2\pi\phi(f)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{-i2\pi f k} \quad (\text{П11.1.5})$$

называется *частотной характеристикой* системы и является преобразованием Фурье от функции отклика на единичный импульс. Поскольку  $v(e^{-i2\pi f})$  комплексно, мы можем представить его как *произведение функции усиления  $G(f)$  и фазовой функции  $\phi(f)$* . Формула (П11.1.4) показывает, что частотная характеристика — это отношение взаимного спектра к входному спектру. Методы оценивания частотной характеристики  $v(e^{-i2\pi f})$  описаны в [27]. Если  $v(e^{-i2\pi f})$  известно, функцию отклика на единичный импульс  $v_k$  можно получить как

$$v_k = \int_{-1/2}^{1/2} v(e^{-i2\pi f}) e^{i2\pi f k} df. \quad (\text{П11.1.6})$$

Поступим аналогичным образом с шумом. Производящая функция автоковариаций шума  $n_t$  равна

$$\gamma^{nn}(B) = \gamma^{yy}(B) - \frac{\gamma^{xy}(B)\gamma^{xy}(F)}{\gamma^{xx}(B)}. \quad (\text{П11.1.7})$$

Подставляя в (П11.1.7)  $B = e^{-i2\pi f}$ , получаем для спектра шума выражение

$$p_{nn}(f) + p_{yy}(f)[1 - \kappa_{xy}^2(f)], \quad (\text{П11.1.8})$$

где

$$\kappa_{xy}^2(f) = \frac{|p_{xy}(f)|^2}{p_{xx}(f)p_{yy}(f)}$$

и  $\kappa_{xy}(f)$  — *спектр когерентности* для каждой частоты  $f$  ведет себя как коэффициент корреляции. Если спектр шума известен, автокорреляционная функция шума находится по формуле

$$\gamma_{nn}(k) = 2 \int_0^{1/2} p_{nn}(f) \cos 2\pi f k df.$$

При помощи оценок спектра типа описанных в [27] можно получить оценки весовой функции  $v_k$  и автокорреляционной функции шума. Они могут быть использованы для идентификации модели передаточной функции и модели шума, как это описано в разд. 11.2.1 и 6.2.1.

### П11.1.2. Идентификация моделей передаточных функций с несколькими входами

Обобщим теперь модель

$$Y_t = v(B) X_{t-b} + N_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + N_t$$

на случай нескольких входов  $X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{m,t}$ . Тогда

$$Y_t = v_1(B) X_{1,t} + \dots + v_m(B) X_{m,t} + N_t = \quad (\text{П11.1.9})$$

$$= \delta_1^{-1}(B) \omega_1(B) X_{1,t-b_1} + \dots$$

$$\dots + \delta_m^{-1}(B) \omega_m(B) X_{m,t-b_m} + N_t, \quad (\text{П11.1.10})$$

где  $v_j(B)$  — производящая функция импульсного отклика, связывающего  $X_{j,t}$  с выходом. Будем, как и ранее, предполагать, что после взятия разностей (П11.1.9) можно записать в виде

$$y_t = v_1(B) x_{1,t} + \dots + v_m(B) x_{m,t} + n_t.$$

Последовательно умножая все члены этого уравнения на  $x_{1,t-k}, x_{2,t-k}, \dots, x_{m,t-k}$ , переходя к условным математическим ожиданиям и формируя производящие функции, получим

$$\gamma^{x_1 y}(B) = v_1(B) \gamma^{x_1 x_1}(B) + v_2(B) \gamma^{x_1 x_2}(B) + \dots + v_m(B) \gamma^{x_1 x_m}(B),$$

$$\gamma^{x_2 y}(B) = v_1(B) \gamma^{x_2 x_1}(B) + v_2(B) \gamma^{x_2 x_2}(B) + \dots + v_m(B) \gamma^{x_2 x_m}(B),$$

⋮

$$\gamma^{x_m y}(B) = v_1(B) \gamma^{x_m x_1}(B) + v_2(B) \gamma^{x_m x_2}(B) + \dots + v_m(B) \gamma^{x_m x_m}(B).$$

(П11.1.11)

Подставив  $B = e^{-i2\pi f}$ , переходим к спектральным уравнениям. Так, в случае  $m = 2$

$$p_{x_1 y}(f) = H_1(f) p_{x_1 x_1}(f) + H_2(f) p_{x_1 x_2}(f),$$

$$p_{x_2 y}(f) = H_1(f) p_{x_2 x_1}(f) + H_2(f) p_{x_2 x_2}(f),$$

и частотные характеристики  $H_1(f) = v_1(e^{-i2\pi f})$ ,  $H_2(f) = v_2(e^{-i2\pi f})$  могут быть вычислены, как описано в [27].

Пользуясь обратным преобразованием (П11.1.6), по ним можно найти функцию отклика на единичный импульс.

## ПРИЛОЖЕНИЕ П11.2. ВЫБОР ВХОДА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

Пусть в качестве входа динамической системы можно выбрать по нашему усмотрению некоторый случайный процесс. Например, это может быть процесс авторегрессии, скользящего среднего или белый шум. Для того чтобы иллюстрировать проблемы, связанные с оптимальным выбором этого случайного процесса, достаточно рассмотреть элементарный пример.

### П11.2.1. Конструирование оптимальных входов для простой системы

Пусть исследуется система с моделью передаточной функции — шума вида

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_{t-1} + a_t, \quad |\beta_1| < 1, \quad (\text{П11.2.1})$$

где  $a_t$  — белый шум. Предположим также, что процессы на входе и выходе стационарны, а  $X_t$ ,  $Y_t$  обозначают отклонения этих процессов от соответствующих средних значений. Для больших выборок и любого фиксированного значения вероятности приближенное значение площади байесовской области высоких значений плотности вероятности для  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , а также соответствующей доверительной области пропорционально  $\Delta^{-1/2}$ , где  $\Delta$  — следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} E[Y_t^2] & E[Y_t X_t] \\ E[Y_t X_t] & E[X_t^2] \end{vmatrix}.$$

Мы попытаемся разработать способ минимизации этой площади и, следовательно, максимизации  $\Delta$ . Имеем

$$\begin{aligned} E[Y_t^2] &= \sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \beta_2^2 \frac{1 + 2q}{1 - \beta_1^2} + \frac{\sigma_a^2}{1 - \beta_1^2}, \\ E[Y_t X_t] &= \sigma_X^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} q, \\ E[X_t^2] &= \sigma_X^2, \end{aligned} \quad (\text{П11.2.2})$$

где

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^i \rho_i, \quad \sigma_X^2 \rho_i = E[X_t X_{t-i}].$$

Значение определителя можно выразить через  $\sigma_X^2$ , а именно

$$\Delta = \frac{\sigma_X^2 \sigma_a^2}{1 - \beta_1^2} + \frac{\beta_2^2 \sigma_X^4}{(1 - \beta_1^2)^2} - \frac{\sigma_X^4 \beta_2^2}{\beta_1^2} \left( q - \frac{\beta_1^2}{1 - \beta_1^2} \right)^2. \quad (\text{П11.2.3})$$

Тогда, как и следовало ожидать, уменьшить площадь области можно, увеличивая  $\sigma_X^2$  (т. е. изменяя переменное на входе в широких пределах). На практике могут существовать пределы допустимых изменений  $X$ . Поэтому рассмотрим сначала случай, когда  $\sigma_X^2$  фиксировано.

*Решение для фиксированного  $\sigma_X^2$ .* Поскольку  $(1 - \beta_1^2) > 0$ , из (П11.2.3) следует, что для любого фиксированного  $\sigma_X^2$  значение  $\Delta$  будет максимально, если

$$q = \frac{\beta_1^2}{1 - \beta_1^2}.$$

т. е.

$$\beta_1 \rho_1 + \beta_1^2 \rho_2 + \beta_1^3 \rho_3 + \dots = \beta_1^2 + \beta_1^4 + \beta_1^6 + \dots$$

Существует бесчисленное множество способов обеспечения этого равенства при заданном  $\beta_1$ . Одно из возможных решений получается при

$$\rho_i = \beta_1^i.$$

Следовательно, один из способов максимизировать  $\Delta$  при фиксированном  $\sigma_X^2$  — это заставить вход быть процессом авторегрессии

$$(1 - \beta_1 B) X_t = \varepsilon_t,$$

где  $\varepsilon_t$  — белый шум с дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_X^2 (1 - \beta_1^2)$ .

*Решение для фиксированного  $\sigma_Y^2$ .* До этого момента мы предполагали, что  $\sigma_Y^2$  не ограничено. В некоторых случаях мы, возможно, захотим избежать слишком больших изменений выхода, а не входа. Пусть  $\sigma_Y^2$  зафиксировано на некотором при-

емлемом уровне, а  $\sigma_X^2$  не ограничено. Тогда можно выразить  $\Delta$  через  $\sigma_Y^2$ :

$$\Delta = \frac{\sigma_Y^4 \beta_1^2}{\beta_2^2} \left\{ \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_a^2}{\sigma_Y^2} - \frac{\beta_1^2}{s^2} \left( \frac{q+s}{1+2q} \right)^2 \right\}, \quad (\text{П11.2.4})$$

где

$$s = \frac{\beta_1^2 t}{1 + \beta_1^2 t} \quad (\text{П11.2.5})$$

и

$$t = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2 - \sigma_a^2}. \quad (\text{П11.2.6})$$

Максимум  $\Delta$  достигается при

$$q = -s = -\beta_1^2 t / (1 + \beta_1^2 t), \quad (\text{П11.2.7})$$

т. е.

$$\beta_1 \rho_1 + \beta_1^2 \rho_2 + \beta_1^3 \rho_3 + \dots = -\beta_1^2 t + \beta_1^4 t^2 - \beta_1^6 t^3 + \dots$$

Опять существует бесконечное множество способов выполнить это равенство. В частности, мы можем получить

$$\rho_i = (-\beta_1 t)^i, \quad (\text{П11.2.8})$$

если вход будет следовать процессу авторегрессии

$$(1 + \beta_1 t B) X_t = \varepsilon_t, \quad (\text{П11.2.9})$$

где  $\varepsilon_t$  — белый шум с дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_X^2 (1 - \beta_1^2 t^2)$ . Так как  $t$  положительно, знак параметра  $\beta_1 t$  этого процесса авторегрессии обратен найденному для оптимального входа в случае, когда фиксировано  $\sigma_X^2$ .

*Решение при фиксированном  $\sigma_Y^2 \times \sigma_X^2$ .* На практике могут встретиться случаи, когда желательно обойтись без излишне сильных изменений как на входе, так и на выходе. Если при этом заданное *относительное* уменьшение дисперсии  $X$  столь же важно, как такое же *относительное* уменьшение дисперсии  $Y$ , то целесообразно максимизировать  $\Delta$  в предположении о постоянстве произведения  $\sigma_X^2 \times \sigma_Y^2$ . Определитель равен

$$\Delta = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 - (\sigma_X^4 \beta_2^2 q^2 / \beta_1^2) \quad (\text{П11.2.10})$$



и при заданном  $\sigma_X^2 \sigma_Y^2$  достигает максимума при  $q = 0$ . Опять-таки существует бесчисленное множество способов достичь этого равенства. Однако если пользоваться в качестве входного процесса белым шумом, максимум  $\Delta$  может быть достигнут при *любом значении*  $\beta_1$ . При таком входе в соответствии с (П11.2.2)  $\sigma_X^2$  — это положительный корень уравнения

$$\sigma_X^4 \beta_2^2 + \sigma_X^2 \sigma_a^2 - k(1 - \beta_1^2) = 0, \quad (\text{П11.2.11})$$

где  $k = \sigma_X^2 \sigma_Y^2$ .

### П11.2.2. Численный пример

Пусть мы исследуем динамическую систему первого порядка (П11.2.1) с  $\beta_1 = 0,50$ ,  $\beta_2 = 1,00$ , так что

$$Y_t = 0,50Y_{t-1} + 1,00X_{t-1} + a_t,$$

где  $\sigma_a^2 = 0,2$ .

$\sigma_X^2$  фиксировано,  $\sigma_Y^2$  не ограничено. Пусть сначала необходимо максимизировать  $\Delta$  при  $\sigma_X^2 = 1,0$ . Тогда оптимальным входом  $X_t$  будет, в частности, процесс авторегрессии

$$(1 - 0,5B)X_t = \varepsilon_t,$$

где  $\varepsilon_t$  — белый шум с дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_X^2(1 - \beta_1^2) = 0,75$ . Как следует из (П11.2.2), дисперсия  $\sigma_Y^2$  выхода будет равна 2,49, и площадь байесовской области для  $\beta_1$  и  $\beta_2$  для этого режима на входе будет пропорциональна  $\Delta^{-1/2} = 0,70$ .

$\sigma_Y^2$  фиксировано,  $\sigma_X^2$  не ограничено. Полученный ранее режим оптимален в предположении, что дисперсия входа  $\sigma_X^2 = 1$  и дисперсия выхода  $\sigma_Y^2$  не ограничена. Она оказывается при этом равной 2,49. Если бы, наоборот, была неограниченной дисперсия входа, то при *заданной* дисперсии выхода 2,49 мы могли бы, конечно, достичь лучших результатов. Действительно, пользуясь (П11.2.6), находим  $t = 1,087$ , так что, согласно (П11.2.9), одним из возможных оптимальных процессов на входе при отсутствии ограничений, наложенных на дисперсию, был бы процесс авторегрессии

$$(1 + 0,54B)X_t = \varepsilon_t,$$

где  $\varepsilon_t$  — белый шум с дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2 = 2,05$ . Дисперсия входа  $\sigma_X^2$  увеличилась бы при этом до 2,91, а  $\Delta^{-1/2}$ , которому пропорциональна площадь байесовской области, уменьшилось бы до  $\Delta^{-1/2} = 0,42$ .

*Произведение  $\sigma_Y^2 \times \sigma_X^2$  фиксировано.* Рассмотрим наконец случай оптимизации режима на входе при фиксированном произведении  $\sigma_X^2 \sigma_Y^2$ . В предыдущем примере с фиксированным  $\sigma_Y^2$  мы нашли, что  $\Delta^{-1/2} = 0,42$  при  $\sigma_X^2 = 2,91$  и  $\sigma_Y^2 = 2,49$ , так что их произведение  $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 = 7,25$ . Если бы нашей целью было минимизировать  $\Delta^{-1/2}$  при постоянстве этого произведения на уровне 7,25, мы могли бы выбрать оптимальный режим на входе, не зная  $\beta_1$  и задав вход в виде белого шума  $X_t = \varepsilon_t$ . Согласно (П11.2.11),  $\sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 = 2,29$ ,  $\sigma_Y^2 = 3,16$ ; в этом случае  $\Delta^{-1/2} = 0,37$ , т. е., как и следовало ожидать, слегка меньше, чем в предыдущем примере.

Стоит рассмотреть этот пример в свете спектральных представлений. Чтобы оптимизировать режим при фиксированном  $\sigma_X^2$ , мы подавали на вход процесс авторегрессии с положительным  $\phi$ , имеющий большую мощность в области низких частот. Так как усиление системы на низких частотах велико, передача от  $X$  к  $Y$  наиболее эффективна, и мы приходим к большим изменениям в  $Y$ . При фиксированном  $\sigma_Y^2$  мы подаем на вход процесс авторегрессии с отрицательным  $\phi$ , мощность которого сосредоточена на высоких частотах. Так как передачу высоких частот от  $X$  к  $Y$  система осуществляет неэффективно, необходимо ввести сильные возмущения в  $X$ . При фиксированном  $\sigma_Y^2 \times \sigma_X^2$  приемлем «компромиссный» вход в виде белого шума и знание  $\beta_1$  не обязательно. Этот способ максимизации эквивалентен минимизации корреляции между выборочными оценками  $\hat{\beta}_1$  и  $\hat{\beta}_2$ ; действительно, если на вход подается белый шум, корреляция между этими оценками равна нулю.

### Заключение.

1) Оптимальный выбор режима существенно зависит от того, что мы считаем «оптимальным».

2) Как в случае фиксированного  $\sigma_X^2$ , так и в случае фиксированного  $\sigma_Y^2$  оптимальный выбор приводит к некоторым случайным процессам, параметры которых являются функциями неизвестных динамических параметров. Поэтому мы оказываемся в хорошо известной парадоксальной ситуации, когда можно собрать лучшие данные только при условии, что уже что-то известно об искомом ответе.

Последовательный подход, при котором мы улучшаем режим по мере получения новых сведений о параметрах, открывает возможности, заслуживающие дальнейшего изучения. В частности, можно провести пробное исследование при помощи неоптимального входного возмущения (например, белого шума); полученные результаты используются для предварительных оценок параметров. Эти оценки применяются при подборе более подходящего входного возмущения в соответствии с одним из описанных выше критериев.

3) Для исследованного простого случая использование белого шума оказывается оптимальным (при разумном критерии оптимальности) и не требует априорных данных о параметрах.

## Часть IV

### Проектирование дискретных схем регулирования

В предыдущих главах мы изучали моделирование дискретных временных рядов и динамических систем. Мы видели, что после получения адекватных моделей они могли быть использованы для прогнозирования временных рядов и описания передаточных функций динамических систем. Однако эти модели и методы работы с ними имеют гораздо больший диапазон приложения, чем рассмотренные нами. Описанные представления имеют большое значение для широкого класса стохастических динамических систем, встречающихся, например, в экономике, торговле, технике и в системном анализе.

Очевидно, что проиллюстрировать каждый вид приложения нельзя. Мы надеемся, что теория и примеры, приведенные в этой книге, могут помочь читателю приспособить эти общие методы к его собственным конкретным проблемам. При этом рассмотренные нами динамические и стохастические модели будут часто играть роль *строительных блоков*, которые можно собрать вместе для описания изучаемой системы. Для определения модели понадобятся методики идентификации, оценивания и диагностической проверки, подобные рассмотренным выше.

Наконец, рекуррентные вычислительные схемы и идеи, рассмотренные в разделах, посвященных прогнозированию, найдут широкие применения при выводе свойств уже подогнанной модели.

Мы завершим эту книгу, показав дальнейшие приложения этих возможностей при проектировании оптимальных схем регулирования с прямой и обратной связями.

Чтение последующих глав — это упражнение в объединении ранее рассмотренных подходов для решения новых прикладных задач; в них содержатся также детальные результаты, которые, как мы надеемся, полезны и сами по себе.

## Проектирование схем регулирования с прямой и обратной связями

Общая задача регулирования заключается в поддержании некоторой выходной переменной в системе, подверженной возмущениям, максимально близко к номиналу. Рассмотрим теперь эту задачу, используя ранее рассмотренные стохастические модели и модели передаточных функций для описания возмущений и динамических систем.

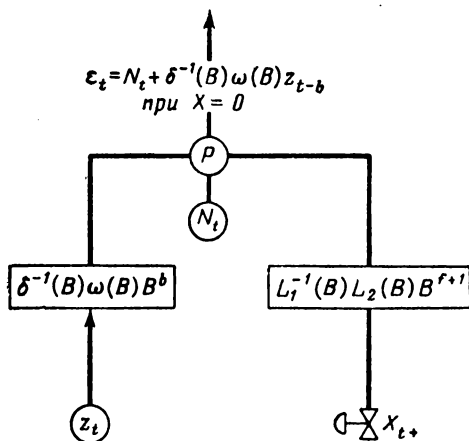
Будем, как и ранее, предполагать, что получение данных и корректирование осуществляются дискретно, через равные интервалы времени. Предположим также, что корректирование не связано с существенными затратами, что типично для многих промышленных процессов, протекающих при ручном или автоматическом контроле. Тогда целесообразно искать схемы регулирования, минимизирующие некоторый общий параметр, характеризующий ошибки на выходе. В качестве такого параметра мы будем пользоваться *среднеквадратичной ошибкой*.

В некоторых примерах можно измерять один или несколько *источников* возмущений и использовать эти измерения для компенсации возможных отклонений выхода. Такое действие мы назовем *регулированием с прямой связью*. В других ситуациях единственным свидетельством существования возмущений является вызываемое ими отклонение выходных значений от номинала. Когда это отклонение используется как основа для регулирования, такое действие называется *регулированием с обратной связью*. В некоторых случаях желательно комбинировать оба способа контроля, и такую схему регулирования мы будем называть *регулированием с прямой и обратной связями*.

В этой главе мы покажем вначале, как можно проектировать схемы регулирования каждого из указанных типов для получения минимальной среднеквадратичной ошибки выхода. В заключение мы покажем, как данные о процессе, и в частности, данные, собранные при работе пробной схемы регулирования, можно использовать для улучшения оценок модели и ее параметров. Это позволит нам применить *итеративный подход* при поиске оптимальной схемы регулирования.

## 12.1. РЕГУЛИРОВАНИЕ С ПРЯМОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим теперь проектирование схем регулирования с прямой связью, дающих минимальную среднеквадратичную ошибку выхода. Ситуация, возникающая при производстве полимера, показана на рис. 12.1. Известно, что вязкость  $Y_t$  полу-



Р и с. 12.1. Система, подверженная наблюдаемому возмущению  $z_t$  (концентрация сырья) и ненаблюдаемому возмущению  $N_t$  в момент времени  $t$ ; потенциально компенсирующее переменное  $X_t$  (давление пара) фиксировано на значении  $X_t=0$ ,  $\varepsilon_t$ —отклонение вязкости от номинального значения.

чаемого продукта варьирует отчасти из-за флуктуаций концентрации сырья, которые можно наблюдать, но нельзя изменить. Давление пара  $X_t$  — регулируемое переменное, которое можно наблюдать и изменять; оно создает потенциальную возможность изменять вязкость в любой нужной степени и, следовательно, компенсировать возможные отклонения от номинала. Общее влияние всех *других* источников на выход в момент  $t$  обозначим  $N_t$ .

### 12.1.1. Регулирование с прямой связью, минимизирующее среднеквадратичную ошибку

Предположим, что  $z_t$ ,  $X_t$ ,  $N_t$  — отклонения от опорных значений, обладающие следующим свойством: если они все время сохраняются равными нулю (т. е.  $z=0$ ,  $X=0$ ,  $N=0$ ), то процесс остается в равновесном состоянии, так что выход точно соответствует номиналу  $Y=0$ .

Предположим, что модель передаточной функции, связывающая наблюдаемое возмущение  $z_t$  (концентрация сырья) и выход  $Y_t$  (вязкость продукта), имеет вид

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) B^b z_t.$$

Пусть в  $X$  вносятся изменения в моменты  $t, t-1, t-2, \dots$  непосредственно после того, как получены наблюдения  $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$ . Таким образом, мы имеем «скачкообразный» вход; уровень  $X$  в интервале от  $t$  до  $t+1$  обозначим как  $X_{t+}$ . Предположим, что модель передаточной функции, связывающая при этом типе входа компенсирующее переменное  $X_t$  (давление пара) и выход  $Y_t$  (вязкость), имеет вид

$$Y_t = L_1^{-1}(B) L_2(B) B^{f+1} X_{t+},$$

где  $L_1(B)$  и  $L_2(B)$  — полиномы от  $B$ . Тогда в отсутствие регулирования (потенциальное компенсирующее переменное  $X_t$  зафиксировано на значении  $X_t = 0$ ) суммарная ошибка выходной вязкости будет

$$e_t = N_t + \delta^{-1}(B) \omega(B) z_{t-b}.$$

Ясно, что необходимо иметь возможность скомпенсировать влияние измеренных частей полного возмущения варьированием  $X_t$ . Пусть в момент  $t$  и в точке  $P$  на рис. 12.1

1) полный эффект возмущения ( $z$ ) равен

$$\delta^{-1}(B) \omega(B) z_{t-b};$$

2) полный эффект компенсации ( $X$ ) равен

$$L_1^{-1}(B) L_2(B) X_{t-f-1+}.$$

Тогда эффект наблюдаемого возмущения  $z$  может быть устранен, если мы положим

$$L_1^{-1}(B) L_2(B) X_{t-f-1+} = -\delta^{-1}(B) \omega(B) z_{t-b}.$$

Регулирующее действие в момент  $t$  должно быть таким, чтобы

$$L_1^{-1}(B) L_2(B) X_{t+} = -\delta^{-1}(B) \omega(B) z_{t-(b-f-1)}. \quad (12.1.1)$$

*Случай 1:*  $b \geq f+1$ . В момент  $t$  значения  $z_{t+1}, z_{t+2}, \dots$  неизвестны. Поэтому регулирующее действие (12.1.1) реализуемо непосредственно только при  $b-f-1 \geq 0$ , причем нужное действие в момент  $t$  заключается в приведении управляемого переменного  $X$  к уровню

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B) \omega(B)}{L_2(B) \delta(B)} z_{t-(b-f-1)}.$$



Часто более удобным оказывается другой способ: регулирование определяется как *изменение*  $x_t = X_{t+} - X_{t-1+}$ , которое необходимо ввести в уровень  $X$  непосредственно после получения наблюдения  $z_t$ . Это значит, что

$$x_t = -\frac{L_1(B)\omega(B)}{L_2(B)\delta(B)}\{z_{t-(b-f-1)} - z_{t-1-(b-f-1)}\}. \quad (12.1.2)$$

Эта ситуация иллюстрируется рис. 12.2. Эффект в точке  $P$  от регулирующего действия равен  $-\delta^{-1}(B)\omega(B)z_{t-b}$ , и он точно

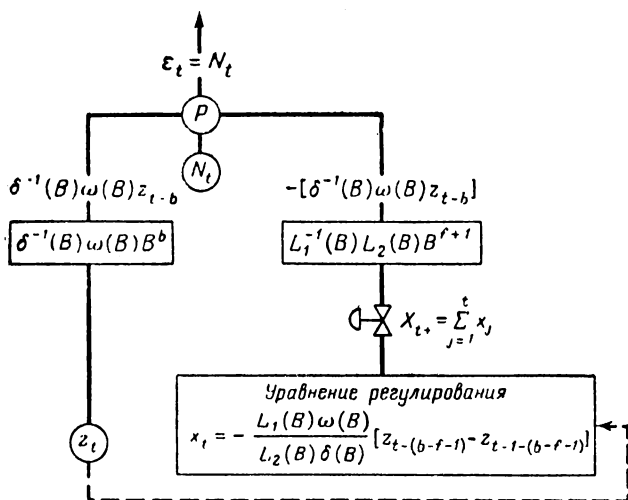


Рис. 12.2. Схема регулирования с прямой связью в момент  $t$  при  $b \geq f+1$ . Обозначения те же, что и на рис. 12.1.

компенсирует эффект возмущения в  $P$ . Компонента отклонения от номинала, вызванная  $z_t$ , полностью (по крайней мере, теоретически) устранена в моменты наблюдений, и только компонента  $N_t$ , вызванная ненаблюдаемым возмущением, остается.

*Случай 2:  $b-f-1$  отрицательно.* Может оказаться, что  $f+1 > b$ . Это означает, что наблюдаемое возмущение достигает выхода, прежде чем компенсирующее действие может оказать эффект. В этом случае действие

$$\delta(B)L_2(B)X_{t+} = -L_1(B)\omega(B)z_{t+(f+1-b)} \quad (12.1.3)$$

не реализуемо, поскольку в момент  $t$ , когда оно должно быть произведено, необходимое для этого значение возмущения  $z_{t+(f+1-b)}$  еще не получено. Желательно, если это возможно, избежать такой ситуации (например, используя вместо  $X$  более быстродействующее компенсирующее переменное), но иногда это не осуществимо.

Пусть возмущение  $z_t$  можно представить линейной моделью

$$z_t = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i \right\} a_t,$$

где, как и ранее,  $a_t$  — белый шум с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma_a^2$ ; тогда

$$z_{t+f+1-b} = \hat{z}_t(f+1-b) + e_t(f+1-b).$$

В этом выражении

$$e_t(f+1-b) = a_{t+f+1-b} + \psi_1 a_{t+f-b} + \dots + \psi_{f-b} a_{t+1}$$

— ошибка прогноза. Правую часть (12.1.3) можно в этом случае представить в виде

$$\begin{aligned} -L_1(B) \omega(B) z_{t+(f+1-b)} &= -L_1(B) \omega(B) \hat{z}_t(f+1-b) - \\ &- L_1(B) \omega(B) e_t(f+1-b). \end{aligned}$$

Здесь  $e_t(f+1-b)$  — функция некоррелированных случайных отклонений  $a_{t+h}$  ( $h \geq 1$ ), которые еще не произошли к моменту  $t$  и которые не коррелированы с любым переменным, известным к моменту  $t$ . Следовательно, эти отклонения непредсказуемы. Отсюда следует, что оптимальное регулирующее действие получается, если положить

$$X_{t+} = - \frac{L_1(B) \omega(B)}{L_2(B) \delta(B)} \hat{z}_t(f+1-b), \quad (12.1.4)$$

т. е. внести в момент  $t$  изменение в компенсирующее переменное, равное

$$x_t = - \frac{L_1(B) \omega(B)}{L_2(B) \delta(B)} \{ \hat{z}_t(f+1-b) - \hat{z}_{t-1}(f+1-b) \}. \quad (12.1.5)$$

Это приводит к дополнительной компоненте в отклонении  $\varepsilon_t$  от номинала, которое теперь становится равным

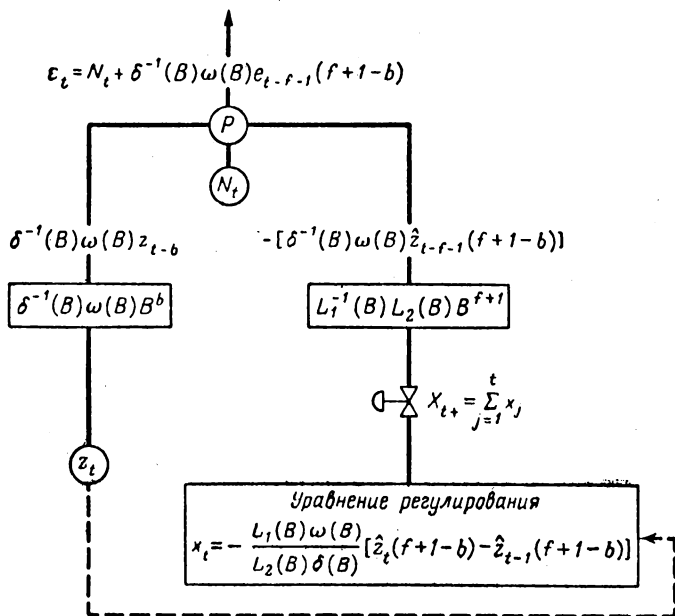
$$\varepsilon_t = N_t + \delta^{-1}(B) \omega(B) e_{t-f-1}(f+1-b).$$

Эта схема иллюстрируется диаграммой на рис. 12.3. На практике модель  $z_t$  будет получаться в виде  $\varphi(B) z_t = \theta(B) a_t$ , и прогноз  $\hat{z}_t(f+1-b)$  будет представим простой функцией значений  $z_{t-j}$  и  $a_{t-j}$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ), как в гл. 5.

### 12.1.2. Пример — регулирование удельного веса промежуточного продукта

При изготовлении промежуточного продукта, используемого в производстве синтетической резины, удельный вес  $Y_t$  продукта должен был поддерживаться как можно ближе к

значению 1,260. Это было достигнуто применением смешанной схемы прямого и обратного регулирования. Полная схема будет рассмотрена позднее; здесь мы остановимся только на части схемы, относящейся к прямому регулированию. Динамика процесса довольно замедленная, и известно, что возмущение тоже



Р и с. 12.3. Схема регулирования с прямой связью в момент  $t$  при  $f+1 > b$ . Обозначения те же, что и на рис. 12.1:

меняется медленно; поэтому наблюдения и корректировки проводятся с интервалом в 2 ч. Нерегулируемое возмущение, подаваемое в систему, это концентрация сырья  $z_t$ , измеряемая по отношению к опорному значению 30 г/л. Соотношение между удельным весом и концентрацией сырья при нормальном ходе процесса имеет вид

$$Y_t = 0,0016z_t,$$

где  $Y_t$  — это отклонение от номинала 1,260.

Это соотношение не содержит «динамики», потому что концентрация сырья может быть измерена только при впуске в реактор, так что в принятых нами обозначениях

$$\delta(B) = 1, \quad \omega(B) = 0,0016, \quad b = 0.$$

Регулирование достигается изменением давления, которое отсчитывается от стандартного уровня 1,757 атм. Модель пере-

даточной функции, связывающая удельный вес и давление, была оценена как

$$(1 - 0,7B)Y_t = 0,0024X_{t-1+},$$

так что

$$L_1(B) = (1 - 0,7B), \quad L_2(B) = 0,0024, \quad f = 0.$$

Можно было считать, что результаты действия давления и концентрации сырья при нормальном ходе процесса примерно аддитивны. Поэтому использовалось уравнение регулирования (12.1.4); поскольку  $b - f - 1$  отрицательно, имеем

$$X_{t+} = - \frac{(1 - 0,7B) 0,0016}{0,0024} z_t(1). \quad (12.1.6)$$

Исследование концентрации показывает, что она может быть описана линейной стохастической моделью порядка  $(0, 1, 1)$

$$\nabla z_t = (1 - \theta B) a_t$$

с  $\theta = 0,5$ . Для такого процесса

$$\hat{z}_t(1) = (1 - \theta) z_t + \theta \hat{z}_{t-1}(1),$$

т. е.

$$(1 - \theta B) \hat{z}_t(1) = (1 - \theta) z_t$$

или

$$\hat{z}_t(1) = \frac{1 - \theta}{1 - \theta B} z_t.$$

Таким образом, уравнение регулирования (12.1.6) окончательно можно представить в виде

$$X_{t+} = - \frac{(1 - 0,7B) 0,0016 (0,5)}{0,0024 (1 - 0,5B)} z_t,$$

или

$$X_{t+} = 0,5X_{t-1+} - 0,33(z_t - 0,7z_{t-1}). \quad (12.1.7)$$

В табл. 12.1 показан расчет первых нескольких изменений давления, необходимых для компенсации вариаций в концентрации сырья при заданных в момент  $t = 0$  начальных условиях  $z_0 = 1,6$ ,  $X_{0+} = -0,63$ .

После того как проделаны первые вычисления, часто удобнее находить прямо изменения  $x_t$ , которые необходимо ввести в момент  $t$ , пользуясь формулой

$$x_t = 0,5x_{t-1} - 0,33(\nabla z_t - 0,7\nabla z_{t-1}). \quad (12.1.8)$$

На рис. 12.4 показан участок входного возмущения и соответствующий выход после применения регулирования с прямой связью. Нижний график — это расчетный выход (удельный вес), который был бы получен при отсутствии регулирования. Эти значения  $Y_t$ , конечно, не доступны непосредственно, но могут

Таблица 12.1

Расчет корректировок для схемы регулирования  
с прямой связью (12.1.7)

$t$	Концентрация		Давление		
	$z_t + 30$	$z_t$	$X_{t+}$	$X_{t+} + 25$	$x_t$
0	31,6	1,6	-0,63	24,4	
1	31,1	1,1	-0,31	24,7	0,3
2	34,4	4,4	-1,36	23,6	-1,1
3	32,0	2,0	-0,32	24,7	1,1
4	28,2	-1,8	0,90	25,9	1,2

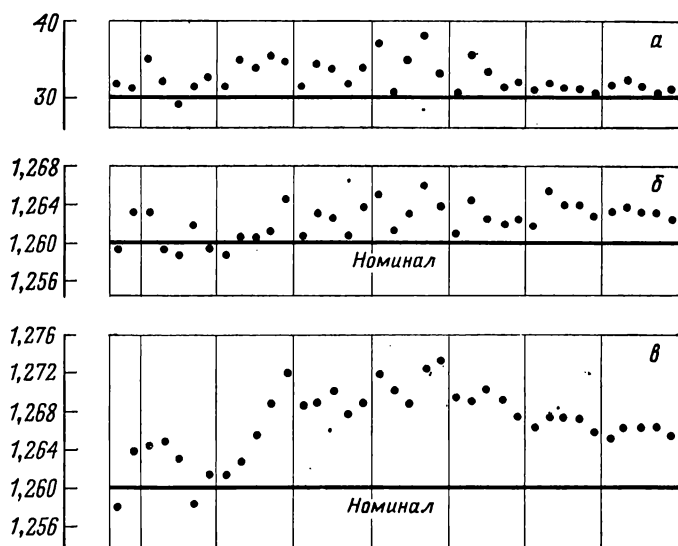


Рис. 12.4. Измеряемые возмущения и выход системы регулирования с прямой связью. а—концентрация сырья (измеряемое возмущение), б—удельный вес (выход системы с регулированием), в—удельный вес (в отсутствие регулирования).

быть вычислены из фактически наблюдавшихся значений  $Y'_t$  по формуле

$$Y_t = Y'_t + \delta^{-1}(B) \omega(B) \hat{z}_{t-f-1} (f+1-b).$$

В этом примере

$$Y_t = Y'_t + \frac{0,0008 z_{t-1}}{1-0,5B},$$

т. е.

$$Y_t = 0,5Y_{t-1} + Y'_t - 0,5Y'_{t-1} + 0,0008z_{t-1}.$$

В результате регулирования с прямой связью среднеквадратичное отклонение выхода от значения номинала для показанной выборки равно 0,003. Для того же интервала времени ошибка неоткорректированного ряда была бы 0,008. Улучшение заметно и крайне существенно. Однако, по-видимому, в процессе участвуют другие неидентифицированные источники возмущения, что подтверждается дрейфом от номинала. Такая тенденция часто отмечается в схемах только с прямой связью; как будет показано в разд. 12.2, она может быть скомпенсирована введением обратной связи.

### 12.1.3. Номограмма для регулирования с прямой связью

Регулирующее действие осуществляется способом, наиболее удобным в конкретной ситуации. Если изменения делаются часто и уравнение регулирования сравнительно простое, изложенная выше теория может быть использована для введения оптимального *ручного* регулирования. В этом случае удобно иметь соответствующую диаграмму или номограмму регулирования, понятную оператору, следящему за процессом.

Так, например, нами разработана номограмма, указывающая нужное регулирующее действие в схеме прямой связи из предыдущего примера. Уравнение регулирования имеет вид

$$(1 - 0,5B) X_{t+} = -0,33(1 - 0,7B) z_t,$$

и, так как

$$(1 - \delta B) = (1 - \delta) \left( 1 + \frac{\delta}{1 - \delta} \nabla \right),$$

его можно записать также как

$$(1 + \nabla) X_{t+} = -0,20(1 + 2,33\nabla) z_t. \quad (12.1.9)$$

Для получения номограммы, позволяющей находить значение

$$r_t = (1 + \xi \nabla) X_{t+} = X_{t+} + \xi(X_{t+} - X_{t-1+}),$$

мы ввели три вертикальные шкалы, соответствующие  $X_{t-1+}$ ,  $X_{t+}$  и  $r_t$  (шкалы  $A$ ,  $B$  и  $C$  на рис. 12.5), разметили их в единицах  $X_t$  и разместили так, чтобы  $BC/AB = \xi$ . Тогда из очевидных геометрических соотношений вытекает, что значение  $r_t$  можно получить, проводя линию через точки, соответствующие на шкалах  $A$  и  $B$  значениям  $X_{t-1+}$  и  $X_{t+}$ , до пересечения со шкалой  $C$ , соответствующей  $r_t$ .

Для получения регулирующего действия из уравнения (12.1.9) мы должны приравнять два выражения этого типа, и, следовательно, нам нужно 5 шкал, показанных на рис. 12.5.

Четыре из них, а именно  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$ , соответствуют  $X_{t-1+}$ ,  $X_{t+}$ ,  $z_t$  и  $z_{t-1}$ , а шкала  $C$  позволяет приравнять правую и левую части уравнения. Шкалы расположены так, что

1) опорные значения: 1,75 атм для давления, 30 г/л для концентрации сырья находятся на одной и той же горизонтальной линии; единица  $z_t$  равна  $-0,2$  единицы  $X_{t+}$ ;

2)  $BC/AB=1$ ,  $CD/DE=2,33$ .

Чтобы показать расчет действия, необходимого в момент  $t=2$ , можно воспользоваться табл. 12.1.

Проводим линию, соединяющую предшествующее значение концентрации  $z_1 + 30 = 31,1$  на шкале  $E$  и концентрацию в данный момент  $(z_2 + 30) = 34,4$  на шкале  $D$ , до пересечения  $C$  со шкалой  $P$ . Далее, мы соединяем эту точку  $P$  с точками, соответствующими предшествующему давлению  $X_{1+} + 25 = 24,7$  на шкале  $A$ , и считываем на

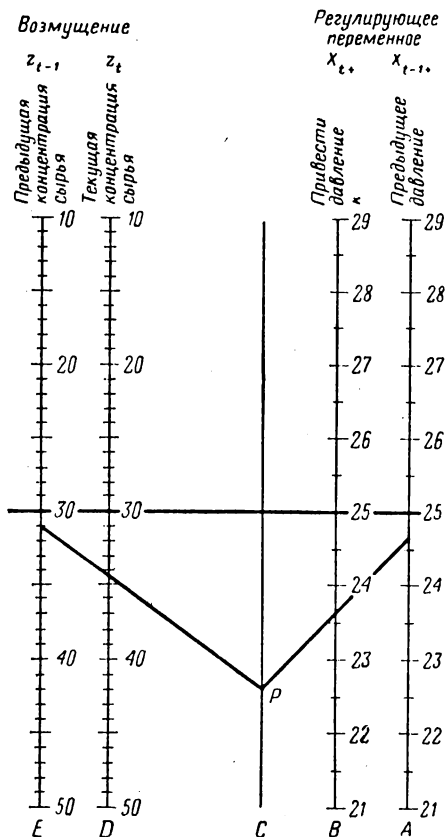


Рис. 12.5. Номограмма для схемы регулирования с прямой связью.

шкале  $B$  значение  $X_{2+} + 25 = 23,6$ . Нужно привести давление к этому значению и поддерживать его неизменным в течение двух последующих часов.

#### 12.1.4. Регулирование с прямой связью в случае нескольких входов

В случаях, когда нужно компенсировать изменениями  $X$  при помощи схемы регулирования с прямой связью эффект нескольких аддитивных входных возмущений  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , не

возникает каких-либо принципиальных трудностей. Пусть комбинированное воздействие всех возмущений на выход равно

$$Y_t = \sum_{j=1}^m \delta_j^{-1}(B) \omega_j(B) B^{b_j} z_{j,t},$$

и, как и ранее, модель передаточной функции для компенсирующего переменного имеет вид

$$Y_t = L_1^{-1}(B) L_2(B) B^{f+1} X_{t+}.$$

Тогда, поступая так же, как и раньше, получаем, что требуемое регулирующее действие заключается в изменении  $X$  в момент  $t$  на величину

$$x_t = -L_1(B) L_2^{-1}(B) \sum_{j=1}^m \delta_j^{-1}(B) \omega_j(B) [z_{j,t+f+1-b_j} - z_{j,t+f-b_j}], \quad (12.1.10)$$

где

$$\begin{aligned} & [z_{j,t+f+1-b_j} - z_{j,t+f-b_j}] = \\ & = \begin{cases} z_{j,t+f+1-b_j} - z_{j,t+f-b_j}, & f+1-b_j \leq 0, \\ z_{j,t}(f+1-b_j) - z_{j,t-1}(f+1-b_j), & f+1-b_j > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.1.11)$$

Если, как и ранее,  $N_t$  — это неизмеряемое возмущение, ошибка на выходе будет равна

$$e_t = N_t + \sum_{j=1}^m \delta_j^{-1}(B) \omega_j(B) e_{j,t-f-1}(f+1-b_j), \quad (12.1.12)$$

где  $e_{j,t-f-1}(f+1-b_j) = 0$ , если  $f+1-b_j \leq 0$ .

С одной стороны, регулирование с прямой связью позволяет нам предпринять немедленное действие для устранения влияния возмущений, и если  $f+1-b_j \leq 0$ , полностью (по крайней мере, теоретически) устранить эти возмущения. С другой стороны, чтобы реализовать этот тип регулирования, мы должны иметь возможность измерять возмущающие переменные и полностью знать соотношение (или иметь его хорошую оценку) между каждым возмущающим переменным и выходом. На практике мы никогда не можем измерить *все* возмущения, влияющие на систему. Остающиеся неизмеренными возмущения, которые мы обозначили  $N_t$  и на которые не влияет регулирование с прямой связью, могут, конечно, увеличить дисперсию выхода или заставить процесс отойти от номинала; это фактически произошло в примере, рассмотренном в разд. 12.1.2.

Очевидно, мы должны уметь предупреждать такие явления, используя саму ошибку  $e_t$  для указания нужных корректировок; это приводит к применению регулирования с обратной связью.



## 12.2. РЕГУЛИРОВАНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим схему обратной связи, показанную на рис. 12.6. Здесь  $N_t$  измеряет совместное воздействие ненаблюдаемых возмущений на выход; оно определено как отклонение от номинала, возникающее на выходе

в момент  $t$  при отсутствии регулирующего действия. Предполагается, что  $N_t$  подчиняется какому-либо линейному случайному процессу, задаваемому уравнением

$$N_t = \Phi^{-1}(B) \theta(B) a_t \quad (12.2.1)$$

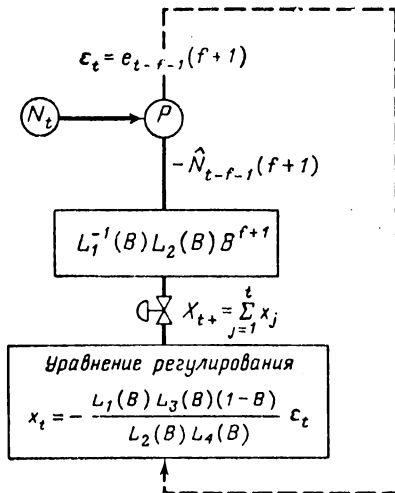
или уравнением

$$N_t = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i\right) a_t, \quad (12.2.2)$$

где  $a_t$  — белый шум. Как и в разд. 12.1, модель передаточной функции, связывающая регулируемое переменное и выход, имеет вид

$$Y_t = L_1^{-1}(B) L_2(B) B^{f+1} X_{t+}. \quad (12.2.3)$$

Рис. 12.6. Схема регулирования с обратной связью в момент  $t$ . Обозначения те же, что на рис. 12.1.



Рассуждая так же, как в разд 12.1.1, получаем в точке  $P$  в момент  $t$

$$\text{Суммарный эффект возмущений} = N_t,$$

$$\text{Суммарный эффект компенсаций} = L_1^{-1}(B) L_2(B) X_{t-f-1+}.$$

### 12.2.1. Регулирование с обратной связью, минимизирующее среднеквадратичную ошибку

Эффект возмущения был бы устранен, если бы удалось сделать  $X_{t+}$  равным

$$X_{t+} = -L_1(B) L_2^{-1}(B) N_{t+f+1}.$$

Так как  $f+1$  положительно, этого сделать нельзя, но можно получить минимальную среднеквадратичную ошибку, заменив  $N_{t+f+1}$  прогнозом  $\hat{N}_{t(f+1)}$ , т. е. предприняв регулирующее действие

$$X_{t+} = -L_1(B) L_2^{-1}(B) \hat{N}_t(f+1). \quad (12.2.4)$$

Отсюда в управляемую переменную будет внесено следующее изменение (коррекция):

$$x_t = -L_1(B) L_2^{-1}(B) \{\hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1)\}, \quad (12.2.5)$$

и в этом случае ошибка на выходе в момент  $t$  будет ошибкой прогноза с упреждением  $f+1$  для процесса  $N_t$ , т. е.

$$e_t = N_t - \hat{N}_{t-f-1}(f+1) = e_{t-f-1}(f+1).$$

Величина  $\hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1)$  не известна непосредственно, но может быть определена по последовательности наблюдаемых ошибок  $e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, \dots$ . Это вытекает из того, что

$$\begin{aligned} N_{t+f+1} &= \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i\right) a_{t+f+1} = \\ &= (a_{t+f+1} + \psi_1 a_{t+f} + \dots + \psi_f a_{t+1}) + \\ &+ (\psi_{f+1} a_t + \psi_{f+2} a_{t+1} + \dots) = e_t(f+1) + \hat{N}_t(f+1). \end{aligned}$$

Так как  $e_t(f+1)$  и  $\hat{N}_t(f+1)$  — линейные функции  $a$ , мы можем представить предыдущее уравнение в виде

$$N_{t+f+1} = L_4(B) a_{t+f+1} + L_3(B) a_t.$$

Зная модель случайного процесса  $N_t = \varphi^{-1}(B) \theta(B) a_t = \psi(B) a_t$ , можно найти операторы  $L_3(B)$  и  $L_4(B)$  в соотношениях

$$e_{t-f-1}(f+1) = L_4(B) a_t, \quad \hat{N}_t(f+1) = L_3(B) a_t \quad (12.2.6)$$

и отсюда найти выражения

$$\hat{N}_t(f+1) = \frac{L_3(B)}{L_4(B)} e_{t-f-1}(f+1) = \frac{L_3(B)}{L_4(B)} e_t.$$

В результате уравнение регулирования с обратной связью (12.2.4), приводящее к наименьшей среднеквадратичной ошибке на выходе, может быть записано как

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B) L_3(B)}{L_2(B) L_4(B)} e_t. \quad (12.2.7)$$

Часто удобнее поступать иначе, определив регулирующее действие как *коррекцию*  $x_t = x_{t+} - x_{t-1+}$ , которую нужно выполнить в момент  $t$ ; тогда

$$x_t = -\frac{L_1(B) L_3(B) (1-B)}{L_2(B) L_4(B)} e_t. \quad (12.2.8)$$

На практике характер оператора  $L_3(B) (1-B)$  часто лучше всего определяется исходя из того факта, что именно этот оператор входит в формулу для корректировок

$$\hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1) = L_3(B) (1-B) a_t. \quad (12.2.9)$$

### 12.2.2. Применение уравнения регулирования: ПИД-регулятор

В этой книге мы интересуемся в основном выводом *уравнения* для оптимального регулирования, указывающего, как нужно изменять регулирующее переменное, чтобы поддерживать регулируемое переменное близким к некоторому номиналу. На практике фактические измерения, расчет и выполнение требуемых регулирующих действий могут осуществляться различными способами. В наиболее сложной форме это может выполняться при помощи электроизмерительной аппаратуры, данные с которой поступают в вычислительную машину, рассчитывающую необходимое регулирующее действие и непосредственно управляющую датчиками, выполняющими это действие. В простейшей форме регулирование может осуществляться оператором, который периодически делает замеры, определяет по простой диаграмме или номограмме требуемое регулирующее действие и сам вручную его выполняет. Описанная выше теория успешно применялась в обеих ситуациях. Мы приводим здесь, казалось бы, с излишней детальностью некоторые приложения к ручному регулированию, так как считаем, что в прошлом нередко пренебрегали элементарными идеями регулирования, помогающими оператору успешно выполнять свою работу. Хотя, бесспорно, использование схем автоматического регулирования становится все более обыденным делом, все еще очень много процессов регулируется вручную, и такое положение сохранится еще надолго.

*ПИД-регулятор.* Уже много лет известен тип автоматического регулирующего устройства, получивший название ПИД-регулятор (пропорциональный, интегральный и дифференциальный регулятор). Такие регуляторы реализуются на механической, пневматической, гидравлической или электрической основе; измерения и коррекция осуществляются с их помощью чаще в непрерывном, а не в дискретном режиме. Если  $e_t$  — ошибка на выходе в момент  $t$ , регулирующее действие может быть сделано пропорциональным самому  $e$ , его интегралу или производной по времени. ПИД-регулятор использует линейную комбинацию этих элементарных действий, так что если  $X_t$  — уровень регулирующего переменного, уравнение регулирования имеет вид

$$X_t = k_D \frac{de_t}{dt} + k_P e_t + k_I \int e_t dt,$$

где  $k_D$ ,  $k_P$  и  $k_I$  — константы.

В некоторых случаях в правой части используются только один или два члена. Так, известны примеры простого пропорционального ( $k_D = 0$ ,  $k_I = 0$ ), простого интегрального ( $k_D = 0$ ,

$k_P = 0$ ), пропорционально-интегрального ( $k_D = 0$ ) и пропорционально-дифференциального ( $k_I = 0$ ) регулирования.

Дискретным аналогом этого непрерывного уравнения регулирования является уравнение

$$X_{t+} = k_D \nabla e_t + k_P e_t + k_I S e_t$$

или, если выразить все через необходимые корректировки\*),

$$x_t = k_D \nabla^2 e_t + k_P \nabla e_t + k_I e_t.$$

Мы покажем, что многие простые ситуации, которые будут рассмотрены, приводят к уравнениям регулирования, содержащим члены такого типа. Например, если шум можно представить как процесс порядка  $(0,1,1)$   $\nabla N_t = (1 - \theta B) a_t$ , а динамика описывается системой первого порядка  $(1 + \xi \nabla) Y_t = g X_{t-1+}$ , уравнение (12.2.7) сводится к

$$X_{t+} = - \frac{(1 - \theta) \xi}{g} e_t - \frac{1 - \theta}{g} S e_t.$$

Таким образом, нужное действие — дискретный аналог пропорционально-интегрального регулирования.

Однако ясно, что не все регулирующие действия, описываемые (12.2.7), могут быть осуществлены ПИД-регулятором; можно привести сравнительно элементарные случаи, в которых необходим другой способ регулирования. Рассмотрим теперь ряд конкретных примеров.

### 12.2.3. Примеры дискретного регулирования с обратной связью

*Пример 1.* В схеме, предназначенной для регулирования вязкости  $Y$  полимера, используемого в производстве искусственного волокна, регулируемое переменное — вязкость — контролировалось каждый час; коррекции производились изменением эффективности катализатора  $X$ . Нужное номинальное значение вязкости равнялось 47 единицам. Модель передаточной функции между  $X$  и  $Y$  достаточно точно описывалась простой системой первого порядка

$$(1 - \delta B) Y_t = (1 - \delta) g X_{t-1+}.$$

Далее, временная постоянная системы была мала по сравнению с интервалом отсчета. Конкретно,  $\delta \approx 0,04$ , так что примерно 96% возможных изменений происходило в пределах ин-

\*) В предшествующих работах [14, 15] мы использовали другие обозначения. Например, корректировка  $x_t = k_I e_t$  соответствовала там пропорциональному регулированию. Это регулирующее действие эквивалентно  $X_{t+} = k_I S e_t$ , т. е. интегральному действию на уровень  $X$  регулирующего переменного. Такие обозначения соответствуют принятым в инженерной практике регулирования, и мы решили придерживаться их здесь.

тервала отсчета в один час. Следовательно, с достаточной точностью можно принять  $\delta = 0$ . Далее, изменения эффективности катализатора, как принято, измерялись в единицах эффекта, который вносился ими в процесс. Так, увеличение эффективности катализатора на единицу *уменьшало* вязкость на единицу. Отсюда  $g = -1$ , и модель передаточной функции принималась в виде

$$Y_t = gX_{t-1+}$$

с  $g = -1$ , или, в терминах общей модели (12.2.3),

$$L_1(B) = 1, \quad L_2(B) = g = -1, \quad f = 0.$$

Возмущение  $N_t$  на выходе, которое определено нами ранее как вариация вязкости при отсутствии регулирования, адекватно описывалось случайным процессом порядка (0, 1, 1)

$$\nabla N_t = (1 - \theta B) a_t$$

с  $\theta = 0,53$ ;  $\lambda = 1 - \theta = 0,47$ , так что

$$\hat{N}_t(1) - \hat{N}_{t-1}(1) = \lambda a_t.$$

Отсюда, пользуясь (12.2.9), получаем  $L_3(B)(1 - B) = \lambda = 0,47$ . Далее, так как  $e_t = e_{t-f-1}(f + 1) = e_{t-1}(1) = a_t$ , то, пользуясь (12.2.6), получаем

$$L_4(B) = 1.$$

Наконец, корректировка, необходимая в момент  $t$ , равна

$$x_t = - \frac{L_1(B) L_3(B) (1 - B)}{L_2(B) L_4(B)} e_t = - \frac{\lambda}{g} e_t,$$

т. е.

$$x_t = 0,47e_t, \quad \text{или} \quad X_{t+} = 0,47Se_t.$$

В такой ситуации, когда временная постоянная системы мала по сравнению с интервалом отсчета, оптимальное регулирование является дискретным аналогом непрерывного интегрального регулирующего действия. Можно получить выражение для необходимого регулирующего действия в этом случае более прямым способом:

$$\text{Предсказываемое изменение выхода} = \hat{N}_t(1) - \hat{N}_{t-1}(1) = \lambda a_t,$$

$$\text{Эффект корректировки} = gx_t.$$

Следовательно, корректировка, необходимая для компенсации изменений выхода, такова, что  $gx_t = -\lambda a_t$ . При такой корректировке ошибка на выходе  $e_t = a_t$ . Тогда уравнение оптимального регулирования с обратной связью будет  $x_t = -(\lambda/g)e_t$ .

Эффективность регулирования такого типа не чувствительна к умеренным изменениям значений параметров, и с достаточной точностью можно принять

$$x_t = 0,5e_t.$$

В этом, а также в других сходных случаях, где применяется ручное регулирование, удобно воспользоваться диаграммой, показанной на рис. 12.7, а. На этой диаграмме шкала выхода

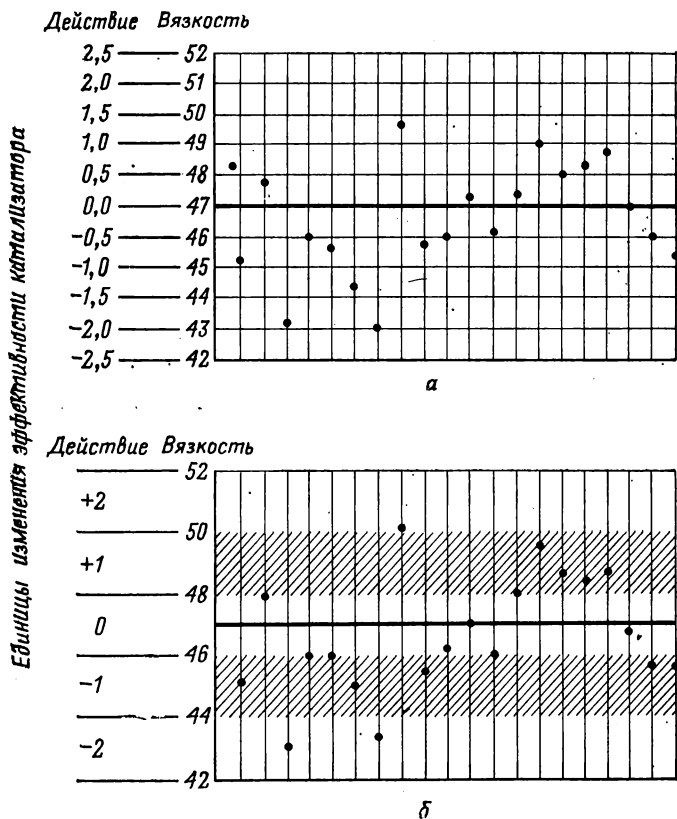


Рис. 12.7. Диаграммы для интегральных регулирующих действий в схеме с обратной связью. а — диаграмма интегральных действий, б — упрощенная диаграмма интегральных действий.

(вязкость) и шкала регулировок расположены так, что выходной номинал соответствует нулевому регулиющему действию, а единица выхода соответствует  $-\lambda/g$  единицам регулирующего действия. Диаграммой очень просто пользоваться. Оператор наносит последовательно отсчеты выхода (вязкости) и считывает на шкале регулирующих действий соответствующие значения корректировок.

Ранее в этом частном процессе регулирование производилось при помощи диаграммы, несколько произвольно

базирующейся на схеме с последовательным критерием значимости. Оказалось, что удобно изменять эффективность катализатора определенными ступенями. Возможными действиями в этом случае были: отсутствие действия;  $\pm$  одна единица эффекта;  $\pm$  две единицы эффекта.

Критерии значимости почти не применялись в рассматриваемой задаче. Все же использовавшаяся схема обладала рядом достоинств: 1) не нужно было вносить изменения после каждого отсчета; 2) когда нужно было вносить изменения, то они были одного из пяти заданных типов, что весьма упрощало их выполнение и контроль за ними. Однако эти достоинства легко сохранить и в предлагаемой нами схеме регулирования, используя «округленные» диаграммы регулирования, что приводит лишь к незначительному увеличению ошибок.

**«Округленные» диаграммы.** Такая диаграмма легко строится по исходной диаграмме разбиением шкалы регулирующих действий на интервалы. Корректировка, которую нужно выполнить, если наблюдаемое значение попало в данный интервал, соответствует средней точке интервала. На рис. 12.7, б показана «округленная» диаграмма, в которой возможные регулирующие действия ограничены изменениями катализатора на  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  или  $2$  единицы. Рис. 12.7, а и б были рассчитаны путем вычислений назад значений  $a_i$  по множеству оперативных данных о процессе и восстановления диаграмм, которые получились бы от использования округленной и неокругленной схем. Увеличение среднеквадратичной ошибки (для этого случая оно меньше, чем 5%), вызванное применением округленной схемы, часто оправдывается удобством работы с малым числом стандартных корректировок. Более подробно эффект округления рассмотрен в разд. 13.1.1.

**Пример 2.** На более поздней стадии изготовления полимера задача заключалась в поддержании выходной вязкости  $Y$  как можно более близкой к номинальному значению 92 путем регулировок подачи газа. Вязкость измерялась каждый час; с таким же интервалом делались регулярные корректировки подачи газа. Мы обсудим здесь разработку пробной схемы регулирования этого процесса. Позднее будет описано, как данные, собранные в процессе испытания этой схемы, использовались для переоценок параметров и создания улучшенной схемы регулирования.

На этом этапе исследования имелись данные о том, как варьировала вязкость при отсутствии регулирования (т. е. при постоянной скорости подачи газа). Эти данные были получены в предшествующий период, во время которого компенсации вариаций вязкости производились существенно позднее, чем измерения. Данные образуют ряд  $D$ , приведенный в сборнике

рядов из 1-го выпуска этой книги. В гл. 6 и 7 было показано, что этот ряд можно хорошо описать процессом  $PSS(0, 1, 1)$   $\nabla N_t = (1 - \theta B)a_t$  с  $\theta$ , близким к нулю (и, следовательно, с  $\lambda = 1 - \theta$ , близким к единице). Имелись явные свидетельства того, что в рабочем диапазоне стационарное соотношение между скоростью подачи газа и вязкостью было линейным и что единичное изменение скорости подачи газа вызвало изменение в вязкости на 0,2 единицы, что соответствовало установившемуся усилению  $g = 0,20$ . Экспериментальные (не очень надежные) данные свидетельствовали о простой экспоненциальной динамической картине с отсутствием запаздывания — примерно половина возможного изменения происходила в течение одного часа.

Отсюда мы получили пробную модель передаточной функции, связывающей вязкость  $Y$  и скорость подачи газа  $X$

$$(1 - 0,5B)Y_t = 0,10X_{t-1+},$$

так что  $L_1(B) = 1 - 0,5B$ ,  $L_2(B) = 0,10$ ,  $f = 0$ . Используя модель возмущения

$$\nabla N_t = a_t,$$

получаем  $L_4(B) = 1$ ,  $L_3(B)(1 - B) = 1$ , и соответствующее уравнение регулирования с обратной связью имеет вид

$$x_t = - \frac{L_1(B)L_3(B)(1-B)}{L_2(B)L_4(B)} e_t = - \frac{1-0,5B}{0,10} e_t,$$

или

$$x_t = -10e_t + 5e_{t-1},$$

где  $e_t$  — выходное отклонение от номинала в момент  $t$ .

Если выразить регулирующее действие при помощи разностного оператора  $\nabla$ , имеем

$$x_t = -5(1 + \nabla)e_t$$

или

$$X_{t+} = -5e_t - 5Se_t,$$

т. е. комбинацию интегрального и пропорционального регулирования.

*Проективная диаграмма.* Ситуация, в которой возмущение  $N_t$  может быть представлено линейной моделью порядка  $(0, 1, 1)$

$$\nabla N_t = (1 - \theta B)a_t,$$

а передаточная функция — моделью первого порядка

$$Y_t = g(1 + \xi \nabla)^{-1} X_{t-1+},$$



встречается достаточно часто и заслуживает специального упоминания. В этом случае регулирующая корректировка (12.2.8) будет иметь вид

$$x_t = -\frac{1-\theta}{g}(1+\xi V) e_t, \quad (12.2.10)$$

и нужное значение регулируемого переменного будет

$$X_{t+} = -\left\{ \frac{(1-\theta)\xi}{g} e_t + \frac{1-\theta}{g} S e_t \right\}.$$

При ручном регулировании это пропорционально-интегральное действие удобно определить при помощи специальной «проективной» диаграммы. Такая диаграмма приведена на рис. 12.8, а, она использовалась для определения регулирующего действия в рассмотренном примере, ее применение объясняет общий способ конструирования диаграмм. Отклонение от центральной линии (линии номинала), отсчитываемое по шкале вязкости, соответствует отклонению  $e_t$  от номинала. Вторая шкала, имеющаяся на рисунке, указывает, какое регулирующее действие  $x_t$  следует предпринять, причем нулевое действие  $x_t = 0$  расположено на уровне номинального значения. Шкалы построены так, что единице выхода на шкале вязкости соответствует  $-(1-\theta)/g$  единиц на шкале регулирующего действия.

Действие, которое нужно выполнить в момент  $t$ , можно найти, продолжая на  $\xi$  временных единиц вперед линию, проходящую через  $e_t$  и  $e_{t-1}$  (или, что то же самое, через два последних измерения вязкости). Для рассматриваемой пробной схемы  $\xi = 1$ , так что нужно продолжать прямую на единицу времени вперед. Так, например, регулирующее действие в момент  $t = 2$  находим, соединяя значения вязкости в моменты  $t = 1$  и  $t = 2$  прямой, продолжая прямую на один шаг вперед и считывая значение  $-30$  на шкале регулирующих действий. Это означает, что скорость подачи газа нужно уменьшить на 30 единиц и удерживать на новом значении до поступления новой информации в момент  $t = 3$ .

**«Округленная» диаграмма.** Как уже упоминалось в этом разделе, схемы регулирования, основанные на диаграммах приведенного выше типа, иногда рассматриваются как неприемлемые, поскольку они требуют, чтобы действие предпринималось после *каждого* наблюдения. Возможно, удобнее предпринимать корректировки, только «если они необходимы». Имеются два оправдания такого подхода, одно из которых более основательно, чем второе.

1) Практик, знакомый со статистическими критериями значимости и стандартными диаграммами контроля качества, может считать, что он должен иметь реальные свидетельства «ухода процесса от номинала», прежде чем предпринять любое

действие. Когда, как это имеет место в металлургической промышленности (где традиционно использовались стандартные процедуры контроля качества), каждое изменение процесса

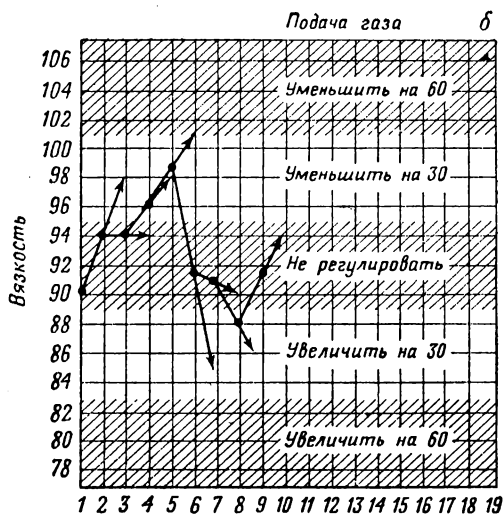
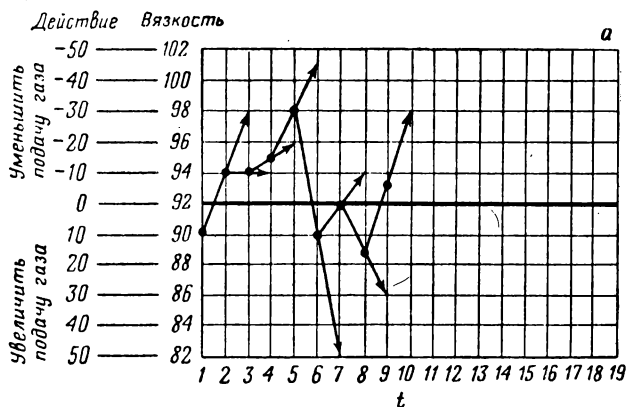


Рис. 12.8. Диаграммы для пропорционально-интегральных действий в схеме с обратной связью. а — диаграмма пропорционально-интегральных действий, б — упрощенная диаграмма пропорционально-интегральных действий.

приводит к дополнительным затратам, можно согласиться с выводами из этих рассуждений, но не с их принятым обоснованием [15]. Однако в тех видах производства, где оператор (или управляющая процессом вычислительная машина) постоянно

находится в действии для периодического контроля процесса, введение изменений не приводит к дополнительным затратам. В этом случае достаточно просто минимизировать некоторую меру отклонения от номинала (например, среднеквадратичную ошибку); именно это мы здесь и предлагаем.

2) Второй, более серьезный аргумент заключается в том, что в производственных процессах всегда целесообразно как можно более упрощать действия, выполняемые оператором. Если можно разработать диаграмму, позволяющую без существенных потерь выбрать одно из немногих различных действий, это существенно поможет ее использованию.

Как уже было показано, эта цель легко достижима при помощи «округленной» диаграммы. Подходящая «округленная» диаграмма для рассматриваемого примера показана на рис. 12.8, б. На этой диаграмме шкала действий разделена на 5 интервалов, каждый шириной в 30 единиц скорости подачи газа. Эти интервалы соответствуют 5 действиям: уменьшить скорость подачи газа на 60 единиц, на 30 единиц, не изменять подачу газа, увеличить скорость подачи на 30 единиц, на 60 единиц. Значение вязкости наносится на график, и точки проектируются на шкалу действий так же, как и ранее, но действия «округляются» так, что становятся равными центральным значениям интервала, в который попали спроектированные точки наблюдений. Вероятность, что точки попадут вне крайних интервалов, невелика, и такие точки рассматриваются как лежащие внутри существующих крайних интервалов. Другими словами, крайние интервалы рассматриваются как полубесконечные.

Конечно, результатом округления диаграммы является некоторое увеличение дисперсии вязкости на выходе относительно номинала. Однако даже при таком существенном округлении, как показанное здесь, это увеличение обычно не столь уж значительно. В разд. 13.1.1 мы обсудим общий вопрос о влиянии добавочного шума на входе процесса. Пользуясь полученным там выводом, можно утверждать, что увеличение стандартного отклонения вязкости от номинала, вызванное округлением такого вида, как на рис. 12.8, б, равно примерно 7%. Точки, которые в иллюстративных целях были размещены на рис. 12.8, б, фактически были найдены обратным расчетом в предположении, что присутствует то же возмущение, что и на неокругленной диаграмме на рис. 12.8, а. В гл. 13 показано, что, если  $\delta$  не слишком близко к 1 (т. е. что временная постоянная системы не слишком велика по сравнению с интервалом отсчета), можно воспользоваться интервалом округления шириной в одно стандартное отклонение  $x$ , не увеличивая заметно дисперсию выхода. Рассмотрим теперь приближенный эффект такого округления в уравнении регулирования (12.2.10).

Обозначим интервал округления  $R\sigma_x$ . Тогда при частном значении  $R = 1$  в предположении о нормальном распределении имелось бы следующее распределение действий для диаграммы типа 12.8, б.

Зона	$-\infty$	$-1,5\sigma_x$	$-0,5\sigma_x$	$0,5\sigma_x$	$1,5\sigma_x$
Центральное значение зоны	$-1,5\sigma_x$	$-0,5\sigma_x$	$0,5\sigma_x$	$1,5\sigma_x$	$\infty$
Вероятность попадания в зону, %	$-2\sigma_x$	$-\sigma_x$	0	$\sigma_x$	$2\sigma_x$
	6,7	24,2	38,3	24,2	6,7

Строго говоря, теоретические результаты разд. 13.1.1, относящиеся к увеличению дисперсии выхода из-за округления, используют предположение о существовании зон с центрами в  $3\sigma_x$ ,  $-3\sigma_x$ ,  $4\sigma_x$ ,  $-4\sigma_x$  и т. д. Однако вероятность попадания в эти внешние зоны равна 1,24%, и эффект объединения их всех в зоны  $\pm 2\sigma_x$  считается малым.

Конкретно можно показать, что при всех этих предположениях стандартное отклонение выхода возрастает в  $F$  раз, где

$$F^2 \approx 1 + \frac{R^2}{12} \frac{(1 + \theta\delta)(1 - \theta)(1 + \delta^2)}{(1 - \theta\delta)(1 + \theta)(1 - \delta^2)}. \quad (12.2.11)$$

Для диаграммы на рис. 12.8, б  $\theta = 0$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $R \approx 1$ , так что  $F \approx 1,07$ .

*Пример 3.* В качестве следующего примера рассмотрим несколько более сложную ситуацию, возникающую в случаях, когда модель передаточной функции может быть представлена системой первого порядка с холостым временем (запаздыванием). Тогда при

$$\nabla Y_t = g(1 + \xi \nabla)^{-1} \{(1 - v)x_{t-f-1} + vx_{t-f-2}\},$$

пользуясь выражением для общей модели (12.2.3), получаем

$$L_1(B)/L_2(B) = (1 + \xi \nabla) \{g(1 - v \nabla)\}^{-1}.$$

Если возмущение  $N_t$ , как и прежде, — процесс порядка  $(0, 1, 1)$

$$\nabla N_t = (1 - \theta B) a_t,$$

$$\hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1) = (1 - \theta) a_t,$$

то

$$e_t(f+1) = [1 + (1 - \theta)(B + B^2 + \dots + B^f)] a_{t+f+1},$$

так что

$$L_3(B)(1 - B) = 1 - \theta,$$

$$L_4(B) = 1 + (1 - \theta)(B + B^2 + \dots + B^f).$$

Отсюда, используя (12.2.8), получаем, что оптимальное действие заключается в корректировке  $x_t$ , определяемой уравнением

$$(1 - v\nabla)[1 + (1 - \theta)(B + B^2 + \dots + B^f)]x_t = -\frac{1 - \theta}{g}(1 + \xi\nabla)e_t, \quad (12.2.12)$$

т. е.

$$x_t = -(1 - \theta)(X_{t-1+} - X_{t-f-1+}) - \frac{(1 - \theta)(1 + \xi\nabla)}{g(1 - v\nabla)}e_t. \quad (12.2.13)$$

Видно, что введение запаздывания в модель передаточной функции приводит к способу регулирования, при котором текущая корректировка зависит от прошлых *корректировок* в течение периода запаздывания, а также от настоящих и прошлых ошибок  $e_t$ . В частности, в обычной ситуации, когда  $f = 0$ , получаем

$$x_t = v\nabla x_t - \frac{1 - \theta}{g}(1 + \xi\nabla)e_t.$$

*Номограмма запаздывания.* Рассуждая так же, как в разд. 12.1.3, легко разработать номограмму для вычисления необходимых действий

$$(1 - v\nabla)x_t = -\frac{1 - \theta}{g}(1 + \xi\nabla)e_t, \quad (12.2.14)$$

подходящую к частному случаю  $f = 0$ . Пусть мы встретились с ситуацией, сходной с рассмотренной в примере 2, когда необходимо было поддерживать вязкость как можно ближе к значению 92. Положим, однако, что в этом случае

$$\theta = 0,5; \quad \xi = 0,7; \quad v = 0,25; \quad g = 0,20.$$

Тогда, подставляя эти значения в (12.2.14), находим, что необходимая корректировка имеет вид

$$x_t = 0,25\nabla x_t - 2,50e_t - 1,75\nabla e_t,$$

т. е.

$$x_t = -0,33x_{t-1} - 5,67e_t + 2,33e_{t-1}.$$

Это действие вычислено при помощи номограммы на рис. 12.9 со шкалами  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$  для  $e_t$ ,  $e_{t-1}$ ,  $x_t$ ,  $x_{t-1}$  и шкалой  $C$  для приравнивания обеих частей уравнения регулирования. Шкалы устроены так, что

1) нулевое действие и номинальное значение выхода располагаются на одной линии;

2) единица шкалы вязкости равна  $-(1 - \theta)g = -2,5$  единицы шкалы скорости подачи газа;

3) расстояние между шкалами таково, что  $AC/AB = \xi = 0,7$ ,  $CE/DE = v = 0,25$ .

На номограмме, показанной на рис. 12.9, только что изменено значение вязкости 92. Прямая линия, соединяющая это значение с предыдущим значением 96, пересекает шкалу  $C$  в точке  $P$ . Прямая, проведенная через  $P$  и предыдущую коррективу —32, пересекает шкалу действий на значении 20. Поэтому оптимальным действием в настоящий момент является увеличение скорости подачи газа на 20 единиц.

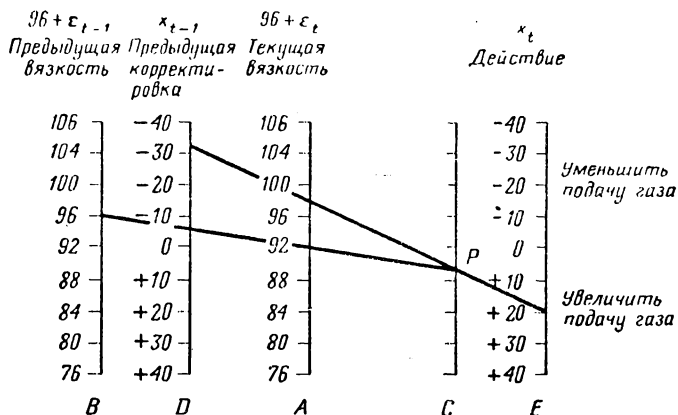


Рис. 12.9. Номограмма регулирования для простой системы с запаздыванием

Отметим, что в этом конкретном примере текущее значение вязкости равно номиналу. Тем не менее предшествующий ход процесса и его динамически-стохастические характеристики указывают на необходимость корректирующего действия. Если задача оператора процесса — минимизировать среднеквадратичное отклонение вязкости от номинала, он должен увеличить скорость подачи газа на 20 единиц.

Как и ранее, если существует необходимость упростить регулирующее действие, можно воспользоваться «округленной» номограммой со шкалой действия, разбитой на удобное число зон.

### 12.3. РЕГУЛИРОВАНИЕ С ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ СВЯЗЯМИ

Комбинированные схемы с прямой и обратной связями позволяют устранить идентифицируемые возмущения при помощи прямой связи и уменьшить остаточное возмущение при помощи обратной связи. На рис. 12.10 показана часть комбинированной схемы регулирования с прямой и обратной связями, в которую подаются  $m$  идентифицируемых возмущений  $z_1, z_2, \dots, z_m$ . Предполагается, что существует остаточное не идентифицированное

возмущение  $N'_t$  и добавочный шум  $N_t$  образуется из  $N'_t$  и той части прямого возмущения, которую не удастся предсказать в момент  $t$ . Тогда, пользуясь (12.1.12), получаем

$$N_t = N'_t + \sum_{j=1}^m \delta_j^{-1}(B) \omega_j(B) e_{j, t-f-1} (f+1-b_j),$$

где  $e_{j, t-f-1} (f+1-b_j) = 0$ , если  $f+1-b_j \leq 0$ ;  $N_t$  включает любые последующие вклады от ошибок в прогнозировании иден-

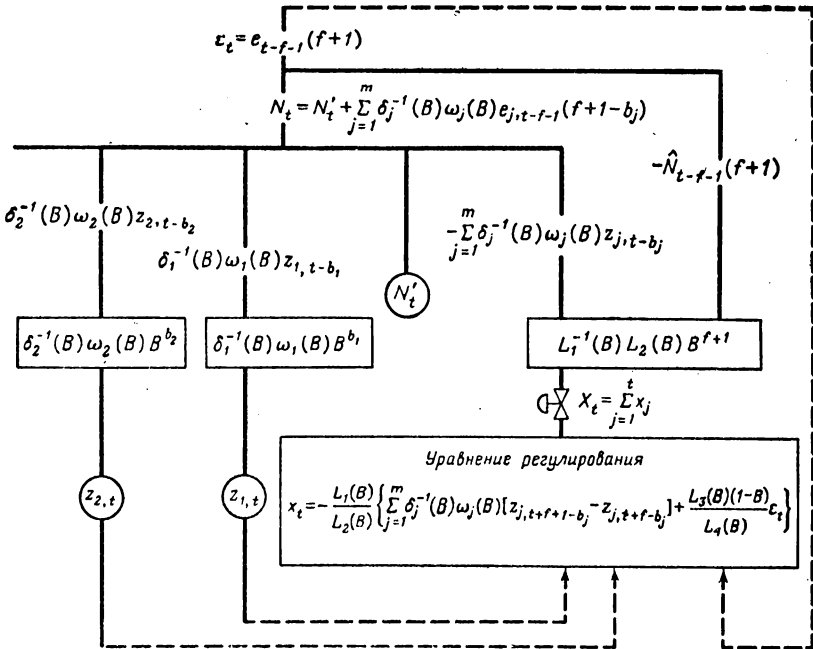


Рис. 12.10. Смешанная схема регулирования с прямой и обратной связями в момент  $t$ . Обозначения те же, что на рис. 12.1.

тифицируемых входов. Предполагается, что  $N_t$  можно представить линейным случайным процессом, так что, как и в (12.2.9), соотношение между прогнозами этого процесса и ошибками прогноза можно записать в виде

$$\frac{L_3(B)(1-B)}{L_4(B)} e_t = \hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1),$$

где  $e_t = e_{t-f-1}(f+1)$ .

### 12.3.1. Регулирование с прямой и обратной связями, минимизирующее выходную среднеквадратичную ошибку

Рассуждая так же, как в (12.1.10) и (12.2.8), приходим к оптимальному регулирующему действию

$$x_t = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)} \left\{ \sum_{j=1}^m \delta_f^{-1}(B) \omega_f(B) [z_{f,t+f+1-b_f} - z_{f,t+f-b_f}] + \frac{L_3(B)(1-B)}{L_4(B)} e_t \right\}, \quad (12.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} [z_{f,t+f+1-b_f} - z_{f,t+f-b_f}] &= \\ &= \begin{cases} z_{f,t+f+1-b_f} - z_{f,t+f-b_f}, & f+1-b_f \leq 0, \\ \hat{z}_{f,t}(f+1-b_f) - \hat{z}_{f,t-1}(f+1-b_f), & f+1-b_f > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

Первый член в уравнении регулирования (12.3.1) тот же, что и в (12.1.10), и компенсирует изменения переменных прямой связи. Второй член (12.3.1) тот же, что и в (12.2.8), и компенсирует ту часть  $N'_t$  добавочного шума, которую можно предсказать в момент  $t$ . На рис. 12.10 выход из первого «ящика» представлен двумя линиями только потому, что так удобнее изобразить диаграмму.

### 12.3.2. Пример регулирования с прямой и обратной связями

Рассмотрим опять пример из разд. 12.1.2, где нужно было поддерживать удельный вес продукта как можно ближе к номинальному значению 1,260. Изучение отклонений от номинала, произошедших после регулирования с обратной связью, показало, что они могут быть описаны процессом ПСС (0, 1, 1)

$$\nabla N_t = (1 - 0,5B) a_t,$$

где  $a_t$  — белый шум. Тогда

$$\frac{L_3(B)(1-B)}{L_4(B)} a_t = \hat{N}_t(1) - \hat{N}_{t-1}(1) = 0,5a_t$$

и

$$e_t = e_{t-1}(1) = a_t.$$

Как и в разд. 12.1.2, остающиеся параметры равны

$$\delta^{-1}(B) \omega(B) = 0,0016, \quad b = 0,$$

$$L_2^{-1}(B) L_1(B) = \frac{1-0,7B}{0,0024}, \quad f = 0$$

и

$$\hat{z}_t(1) - \hat{z}_{t-1}(1) = \frac{0,5}{1-0,5B} (z_t - z_{t-1}).$$



Пользуясь (12.3.1), находим выражение для корректировки, включающей как прямое, так и обратное регулирование,

$$x_t = - \frac{1 - 0,7B}{0,0024} \left[ \frac{(0,0016)(0,5)}{1 - 0,5B} (z_t - z_{t-1}) + 0,5\epsilon_t \right], \quad (12.3.3)$$

т. е.

$$x_t = 0,5x_{t-1} - 0,33(1 - 0,7B)(z_t - z_{t-1}) - 208(1 - 0,7B)(1 - 0,5B)\epsilon_t,$$

или

$$x_t = 0,5x_{t-1} - 0,33z_t + 0,56z_{t-1} - 0,23z_{t-2} - 208\epsilon_t + 250\epsilon_{t-1} - 73\epsilon_{t-2}. \quad (12.3.4)$$

На рис. 12.11 показана часть наблюдаемых данных, приведенных ранее на рис. 12.4, когда применялось только регулирование с обратной связью, и соответствующих расчетных отклонений для случая отсутствия регулирования. К ним добавлены данные, полученные при использовании как прямой, так и обратной связи. Введение регулирования с обратной связью привело к дальнейшему существенному уменьшению среднеквадратичной ошибки и устранило тенденцию ухода от номинала, отмеченную в схеме с прямым регулированием.

Отметим, что в схеме регулирования с обратной связью корректировка опирается на прогноз с упреждением  $f + 1$ , а в схеме регулирования с прямой связью прогноз делается с упреждением  $f + 1 - b$ ; при  $f + 1 - b \leq 0$  прогнозирование невозможно. Поэтому регулирование с прямой связью имеет преимущество более быстрого введения корректировок во всех случаях, когда  $b$  больше нуля.

В рассмотренном примере  $b = 0$ , и, следовательно, прямое регулирование не обладает этим преимуществом. В этом случае столь же хорошее регулирование может быть достигнуто применением только обратных связей. На практике из-за возможных ошибок передачи смешанная схема действовала лучше, чем схема, основанная только на обратной связи.

### 12.3.3. Преимущества и недостатки регулирования с прямой и обратной связями

При регулировании с обратной связью, как видно из ошибок на выходе, компенсируется полное возмущение системы. Следовательно, нет необходимости уметь идентифицировать источники возмущений и вести соответствующие измерения. Все, что нужно, — это описать возмущение выхода  $N_t$  подходящим случайным процессом. Так как мы не полагаемся на абсолютную точность расчета, неожиданные возмущения и умеренные ошиб-

ки в оценивании характеристик системы обычно будут приводить только к увеличению вариаций около номинала, а не к устойчивому уходу от номинала (как это отмечалось при регулировании с прямой связью). С другой стороны, особенно при большом запаздывании,  $f + 1$  ошибки относительно номинала

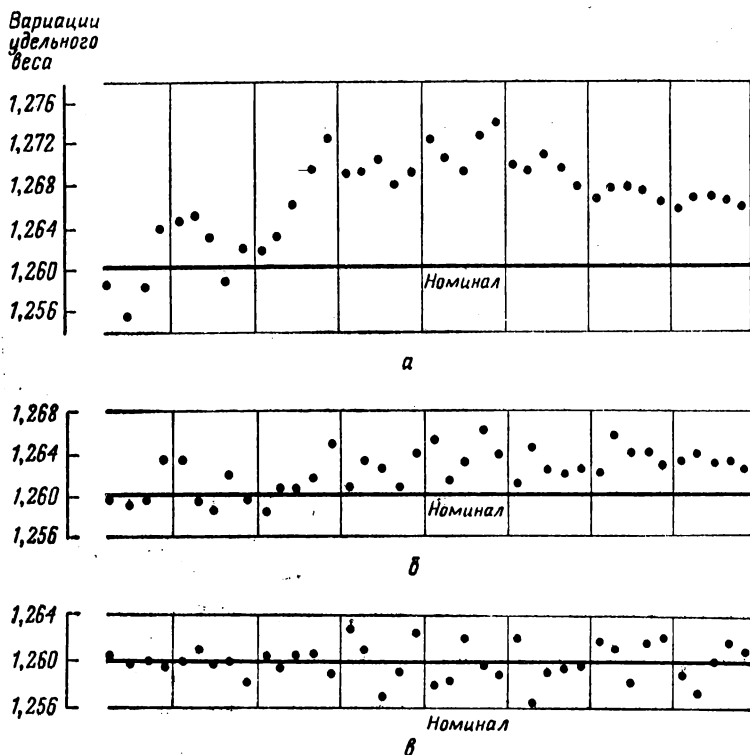


Рис. 12.11. Типичные вариации удельного веса: а — регулирования нет, б — регулирование только с прямой связью, в — регулирование с прямой и обратной связями.

(так как это ошибки далекого прогноза) могут быть большими, несмотря на нулевое среднее значение. Ясно, что, если идентифицируемые источники возмущений могут быть частично или полностью устранены при помощи регулирования с прямой связью, это следует сделать. Тогда регулирование с обратной связью будет нацелено только на неидентифицируемые ошибки.

Итак, хотя имеется возможность найти оптимальную схему регулирования с обратной связью, она обычно не будет столь эффективна, как смешанная схема регулирования с прямой и

обратной связями, в которой возможные источники ошибок устранены в части схемы, предшествующей петле обратной связи.

## 12.4. ПОДГОНКА МОДЕЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ШУМА ПО ОПЕРАТИВНЫМ ДАННЫМ

### 12.4.1. Итеративный способ построения моделей

Параметры регулируемой системы желательно оценивать по данным, полученным при условиях, как можно более близких к тем, которые возникнут при фактической работе схемы регулирования. Регулирующее действие, рассчитанное по таким оценкам, правильно учтет шум в системе, который будет описан так, как если бы он входил в систему в предусмотренной моделью точке (см. разд. 13.1.3). Чтобы достигнуть этого, целесообразно развивать схему регулирования итеративно. Опираясь на технические представления о процессе, а также на все то, что можно извлечь из прошлых технологических данных, нужно постулировать предварительные модели передаточной функции и шума; они используются для разработки опытной схемы регулирования. Опробование этой опытной схемы может использоваться для получения дальнейших данных, анализ которых позволит найти улучшенные оценки моделей передаточной функции и шума и разработать улучшенную схему.

### 12.4.2. Оценивание по оперативным данным

Достаточно рассмотреть схему регулирования с прямой и обратной связями при одном прямом входе.

$b - f - 1$  неотрицательно. Если мы примем, что  $b - f - 1$  неотрицательно, тогда при любых входах  $z_t$  и  $X_{t+}$  будет справедливо следующее выражение для ошибки:

$$e_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) z_{t-b} + L_1^{-1}(B) L_2(B) X_{t-f-1+} + N_t. \quad (12.4.1)$$

Видно, что (12.4.1) сходно по форме с моделями с разомкнутым контуром, рассмотренными в разд. 11.4.2, и содержит два входа  $z_t$  и  $X_{t+}$ . Модель (12.4.1) можно поэтому подгонять и проверять точно такими способами, как описанные в гл. 11.

Если предположить, как в гл. 11, что шум можно описать моделью АРСС ( $p, q, d$ )

$$N_t = \phi^{-1}(B) \nabla^{-d} \theta(B) a_t,$$

то модель (12.4.1) можно представить как

$$\nabla^d e_t = y_{1,t} + y_{2,t} + n_t, \quad (12.4.2)$$

где

$$y_{1,t} = \delta^{-1}(B) \omega(B) \nabla^d z_{t-b}, \quad (12.4.3)$$

$$y_{2,t} = L_1^{-1}(B) L_2(B) \nabla^d X_{t-f-1+}, \quad (12.4.4)$$

$$n_t = \nabla^d N_t = \phi^{-1}(B) \theta(B) a_t. \quad (12.4.5)$$

Предполагается, что ряды  $\epsilon_t$ ,  $z_t$ ,  $X_{t+}$  одновременно наблюдаются в течение довольно длительного периода фактической работы данного производства. Обычно, хотя и не обязательно, в этот период действует некоторая предварительная опытная схема. Тогда, поступая, как в гл. 11, для заданных значений параметров можно генерировать  $y_{1,t}$  по  $z_t$  и  $y_{2,t}$  по  $X_{t+}$ . Тогда шум  $n_t$  после применения разностного оператора можно вычислить по формуле

$$n_t = \nabla^d \epsilon_t - y_{1,t} - y_{2,t} \quad (12.4.6)$$

и, наконец,  $a_t$  по формуле

$$a_t = \theta^{-1}(B) \phi(B) n_t. \quad (12.4.7)$$

Уравнение (12.4.7) позволяет вычислить  $a_t$  для любых заданных значений параметров. Чтобы оценить эти параметры, нам нужно только запрограммировать рекуррентное вычисление  $a_t$  и включить эту программу в общую программу нелинейного оценивания, вычисляющую производные и автоматически осуществляющую итерации, как уже было описано в гл. 7 и 11.

$b - f - 1$  отрицательно. При конструировании смешанных схем регулирования с прямой и обратной связями в разд. 12.3 в случае отрицательного  $b - f - 1$  было удобно представлять модель так, чтобы ошибка в прогнозировании  $z_t$  включалась в шум  $N_t$ . Чтобы оценить модель той же формы при отрицательном  $b - f - 1$ , нужно заменить  $z_{t-b}$  в (12.4.1) и во всех последующих выражениях вплоть до (12.4.7) на  $\hat{z}_{t-f-1}(f+1-b)$ . «Данные», которые будут при этом поступать в программу оценивания, будут включать не  $z_t$ , а их соответствующие прогнозы. Модель  $N_t$ , подогнанная таким образом, может быть прямо использована в схеме с прямой и обратной связями, показанной на рис. 12.10.

*Регулирование с обратной связью.* Когда в системе имеется только обратная связь, как на рис. 12.6, можно пользоваться уравнениями (12.4.2)–(12.4.7) с опущенными переменными прямой связи.

Как и обычно, в начале рекуррентного расчета нам могут понадобиться значения членов различных рядов, относящиеся к моментам времени до начала наблюдений процесса. Мы обсудим и покажем способы решения этой проблемы в рассмотренном ниже примере.

### 12.4.3. Пример

Во втором примере регулирования с обратной связью в разд. 12.2.3 цель заключалась в поддержании вязкости полимера как можно ближе к номинальному значению 92 путем

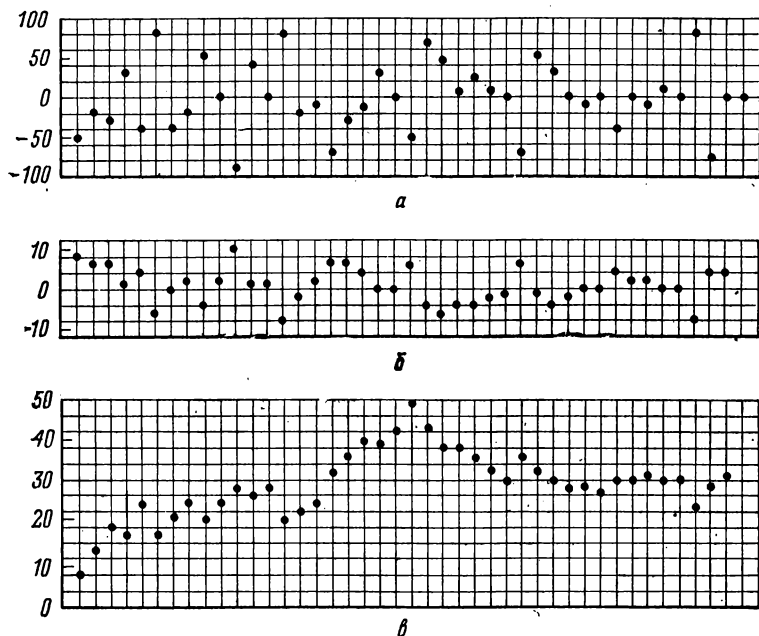


Рис. 12.12. Опытная схема регулирования вязкости. Часть записи характеристик процесса и восстановленное возмущение. *a* — изменение подачи газа  $x_t$  (регулирующее действие), *б* — результирующее отклонение вязкости от номинала, *в* — расчетное отклонение вязкости от номинала, которое могло бы возникнуть при отсутствии регулирующих действий.

ежечасного измерения вязкости и корректировки скорости подачи газа. Предыдущее обсуждение касалось разработки пробной схемы регулирования, основанной на ненадежной информации. При этом существенным был предполагаемый вид моделей шума и передаточной функции

$$N_t = (1 - \theta B) a_t, \quad (12.4.8)$$

$$(1 - \delta B) Y_t = g(1 - \delta) X_{t-1} + \quad (12.4.9)$$

с  $\theta = 0$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $g = 0,20$ .

Эти модели привели к уравнению регулирования  $x_t = -10\varepsilon_t + 5\varepsilon_{t-1}$  для определения необходимой корректировки в момент  $t$ . Часть фактической записи процесса при использовании этой пробной схемы показана на рис. 12.12. Изменения

скорости подачи газа  $x_t$  и соответствующие отклонения от номинала  $e_t$  образуют новые данные, по которым можно получить новые оценки. Мы будем действовать в предположении, что форма модели адекватна, но что оценки параметров  $\theta$ ,  $\delta$  и  $g$  могут быть ошибочными. В этом случае уравнения (12.4.4), (12.4.6) и (12.4.7) принимают вид

$$y_t = \delta y_{t-1} + g(1 - \delta)x_{t-1}, \quad (12.4.10)$$

где  $x_t = \nabla X_{t+}$ ,

$$n_t = \nabla e_t - y_t,$$

$$a_t = \theta a_{t-1} + n_t = \theta a_{t-1} + \nabla e_t - y_t. \quad (12.4.11)$$

В качестве примера в табл. 12.2 приведен набор из 8 пар значений  $x_t$  и  $e_t$ . Они являются начальными значениями рядов из 312 наблюдений, полученных в течение 13 дней эксплуатации обычной схемы; все наблюдения приведены под заголовком «Ряд L, данные опытной схемы» в сводке рядов и данных в конце книги.

Таблица 12.2

Восемь пар значений ряда  $(x_t, e_t)$   
для опытной схемы

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_t$	30	0	-10	0	-40	0	-10	10
$e_t$	-4	-2	0	0	4	2	2	0

В табл. 12.3 показано начало рекуррентного расчета  $a_t^0$  для значений параметров  $\theta = 0,2$ ,  $\delta = 0,6$ ,  $g = 0,25$ . При этих значениях уравнения (12.4.11) и (12.4.10) приобретают вид

$$a_t^0 = 0,2a_{t-1}^0 + \nabla e_t - y_t^0, \quad (12.4.12)$$

$$y_t^0 = 0,6y_{t-1}^0 + 0,1x_{t-1}. \quad (12.4.13)$$

Данные приведены в первых трех столбцах табл. 12.3. Величины в четвертом столбце получены при помощи (12.4.13) и представляют собой изменения выхода, вызываемые изменениями  $x_t$ . Пятый и шестой столбцы получены очевидными арифметическими действиями, а седьмой столбец — согласно (12.4.12). В этой таблице вместо неизвестных начальных значений были использованы  $y_1^0$  и  $a_1^0$ . Последовательные строки таблицы показывают, как выбор этих величин влияет на последующие вычисления.

Таблица позволяет выяснить ряд вопросов.

Рекуррентный расчет  $a_t^0$  по данным опытной схемы для значений параметров  $\theta = 0,2$ ,  $\delta = 0,6$ ,  $g = 0,25$

$t$	$x_t$	$e_t$	$y_t^0 = 0,6y_{t-1}^0 + 0,1x_{t-1}$	$v_{e_t}$	$v_{e_t} - y_t^0$	$a_t^0 = 0,2a_{t-1}^0 + (v_{e_t} - y_t^0)$
1	30	-4				$a_1^0$
2	0	-2	$0,60y_1^0 + 3,00$	2	$-1,00 - 0,60y_1^0$	$-1,00 + 0,20a_1^0 - 0,60y_1^0$
3	-10	0	$0,36y_1^0 + 1,80$	2	$0,20 - 0,36y_1^0$	$0,00 + 0,04a_1^0 - 0,48y_1^0$
4	0	0	$0,22y_1^0 + 0,08$	0	$-0,08 - 0,22y_1^0$	$-0,08 + 0,01a_1^0 - 0,31y_1^0$
5	-40	4	$0,13y_1^0 + 0,05$	4	$3,95 - 0,13y_1^0$	3,93 $- 0,19y_1^0$
6	0	2	$0,08y_1^0 - 3,97$	-2	$1,97 - 0,08y_1^0$	2,76 $- 0,12y_1^0$
7	-10	2	$0,05y_1^0 - 2,38$	0	$2,38 - 0,05y_1^0$	2,93 $- 0,07y_1^0$
8	10	0	$0,03y_1^0 - 2,43$	-2	$0,43 - 0,03y_1^0$	1,02 $- 0,04y_1^0$

1) Мы замечаем, что выбор  $a_1^0$  и  $y_1^0$  влияет только на первые несколько значений  $a_i^0$ . Этот факт справедлив и в более общем случае, если не считать диапазона значений параметров, в котором весовые функции для модели шума или передаточной функции очень медленно затухают. Для принятого здесь подхода маловероятно, чтобы истинные значения параметров оказались в этом критическом диапазоне.

Таблица 12.4

2) Можно воспользоваться крайне неточными значениями  $a_1$  и  $y_1$ , и если, как в этом примере, данные доступны, отбросить несколько первых значений  $a_i^0$ , позволяя затухнуть переходным явлениям, вызванным неудачным выбором  $a_1$  и  $y_1$ .

3) Можно вычислить и использовать в дальнейших расчетах по методу наименьших квадратов значения  $a_i$ , полученные с начальными значениями  $a_1^0$  и  $y_1^0$ , минимизирующими условную сумму квадратов при фиксированном выборе «главных параметров». Возможны и некоторые дальнейшие уточнения такого типа, как описаны в разд. 7.1; мы не будем их здесь обсуждать.

Последний пункт мы проиллюстрируем анализом данных в табл. 12.3, по которым особенно легко провести вычисления. Значения  $a_1^0$  и  $y_1^0$ , минимизирующие  $\sum (a_i^0)^2$  для конкретных значений параметров  $\theta = 0,2$ ;  $\delta = 0,6$ ;  $g = 0,25$ , находятся «регрессией» столбца (а) на столбцы (b) и (с) табл. 12.4.

Все элементы этой таблицы получены из крайнего правого столбца табл. 12.3. Элементы столбца (а) — это члены, не зависящие от  $a_1$  и  $y_1$ , элементы столбцов (b) и (с) — это коэффициенты при  $-a_1^0$  и  $-y_1^0$  соответственно. Поскольку эти коэффициенты быстро спадают до нуля, для вычисления  $\hat{a}_1^0$  и  $\hat{y}_1^0$  важны только первые члены рядов. Фактически для рассматриваемого случая нам достаточно ограничиться первыми семью членами. Нормальные уравнения имеют вид

$$0,2008 = 1,0417a_1^0 - 0,1423y_1^0,$$

$$0,6990 = -0,1423a_1^0 + 0,7435y_1^0$$

и приводят к решениям для начальных значений  $\hat{a}_1^0 = 0,33$ ,  $\hat{y}_1^0 = 1,00$ .

Расчет оценок  
максимального  
правдоподобия для  
начальных значений

(a)	(b)	(c)
0,00	—1,00	0,00
—1,00	—0,20	0,60
0,00	—0,04	0,48
—0,08	—0,01	0,31
3,93	0,00	0,19
2,76	0,00	0,12
2,93	0,00	0,07
1,02	0,00	0,04



Характер рельефа поверхности суммы квадратов для этого примера можно представить, рассмотрев рис. 12.13. Изолинии получены интерполяцией расчетных значений на сетке. В каждом случае начальные значения найдены описанным выше спо-

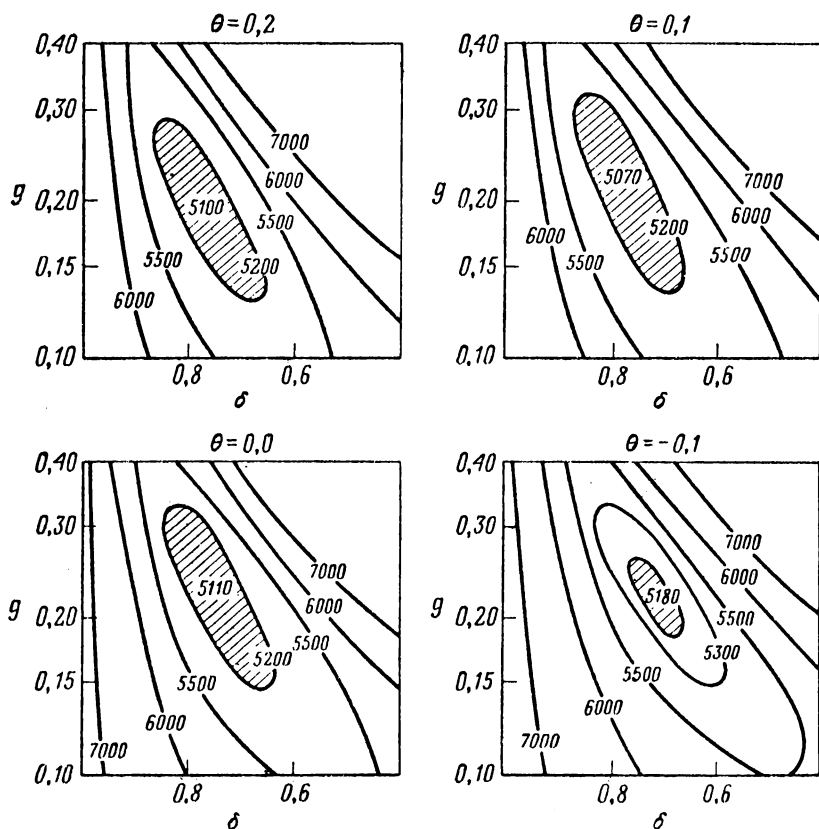


Рис. 12.13. Рельеф суммы квадратов и приближенная 95%-ная доверительная область для  $(\theta, g, \delta)$  по данным опытной схемы регулирования ( $g$  приведено в логарифмическом масштабе).

собом. Заштрихованы соответствующие приближенные трехмерные 95%-ные доверительные области.

В качестве дополнительной проверки был проведен расчет при помощи программы нелинейного метода наименьших квадратов; в качестве начальных значений использовались грубые оценки, применявшиеся в пробной схеме регулирования. Ход итераций показан в табл. 12.5.

Таблица 12.5

Сходимость оценок параметров при одновременной  
подгонке моделей передаточной функции и шума

Итерация	$\theta$	$(1-\delta)g$	$\delta$	Сумма квадратов
0	0,01	0,10	0,50	6247,6
1	-0,06	0,09	0,53	5661,3
2	-0,11	0,08	0,61	5275,9
3	-0,02	0,06	0,71	5115,9
4	0,08	0,05	0,77	5067,6
5	0,10	0,05	0,77	5065,2
6	0,11	0,05	0,77	5065,1
7	0,11	0,05	0,77	5065,1

Выборочная автокорреляционная функция остаточных ошибок  $\hat{a}_t$  показана в табл. 12.6 на следующей странице вместе с выборочной взаимной корреляционной функцией  $\hat{a}_t$  и  $x_t$ . Сравнение с верхними границами стандартной ошибки не обнаруживает неадекватности модели.

Из этого примера видно, что оценки  $\hat{\theta} = 0$ ,  $\hat{g} = 0,20$ , использованные в опытной схеме, почти правильны, но значение  $\hat{\delta} = 0,5$  динамического параметра слишком мало; следует использовать значение  $\hat{\delta} = 0,77$ . После изменения оценок параметров оптимальная схема регулирования имеет вид

$$x_t = -17,8e_t + 13,7e_{t-1},$$

ее следует сравнить с опытной схемой

$$x_t = -10e_t + 5e_{t-1}.$$

Таблица 12.6

Выборочные автокорреляции  $\hat{a}_t$  и взаимные корреляции  $\hat{x}_t$  и  $x_t$ 

Автокорреляции												Верхняя граница стандартных ошибок
Задержки	1—10	0,01	—0,06	—0,06	0,05	—0,02	0,06	—0,04	—0,04	0,11	0,03	±0,06
	11—20	0,03	—0,04	0,00	0,03	0,08	—0,10	0,05	0,07	0,03	—0,04	±0,06
	21—30	—0,07	—0,02	—0,05	0,09	0,00	0,01	0,03	0,00	—0,02	0,00	±0,06

Взаимные корреляции												
Задержки	1—10	—0,01	—0,05	0,09	—0,02	0,05	—0,08	0,03	0,03	—0,08	0,01	±0,06
	11—20	0,00	0,08	—0,02	—0,02	—0,06	0,07	—0,13	—0,03	0,01	—0,01	±0,06
	21—30	0,06	0,04	0,06	—0,08	—0,02	—0,04	0,01	—0,01	0,04	—0,03	±0,06

## Некоторые дальнейшие проблемы регулирования

В этой главе мы рассмотрим три дальнейшие проблемы, возникающие при разработке дискретных схем регулирования. Во-первых, рассмотрим эффект добавочного шума при разработке схем регулирования. Для этого а) оценим пределы снижения эффективности схемы регулирования, если добавочный шум игнорируется; б) вычислим оптимальное действие с учетом шума. Во-вторых, покажем, как сконструировать оптимальные схемы в случаях, когда дисперсия регулирующего переменного из практических соображений ограничена. В-третьих, мы покажем, как влияет на эффективность регулирования интервал отсчета.

### 13.1. ЭФФЕКТ ДОБАВОЧНОГО ШУМА В СХЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В гл. 12 подчеркивалось, что параметры системы важно оценивать в условиях, максимально приближенных к фактическим условиям регулирования, которые возникнут в окончательной схеме. Это объясняется главным образом необходимостью учитывать все источники шума. Если мы оценим все параметры системы при производственных условиях регулирования, то тем самым автоматически оценим шум так, как будто он весь возникает в источнике, описанном этой моделью. В результате полученные оценки параметров будут обеспечивать почти оптимальные регулирующие действия в фактических производственных условиях.

Напротив, пусть теперь стохастическая модель и модель передаточной функции оцениваются «по отдельности». Например, мы могли бы использовать записи шума, *фактически возникающего* в точке  $P$  на рис. 13.1, чтобы оценить модель шума для  $N_1$ . При условии, что добавочный шум не слишком велик, схема регулирования, полученная при помощи этой оценки, все же может быть достаточно эффективной. Однако игнорирование источников сильного добавочного шума может привести к неэффективному регулирующему действию.

В последующих разделах будут исследованы следующие вопросы регулирования с обратной связью:

- 1) эффект пренебрежения добавочным шумом;
- 2) «огрубление» регулирующего действия как источник добавочного шума;

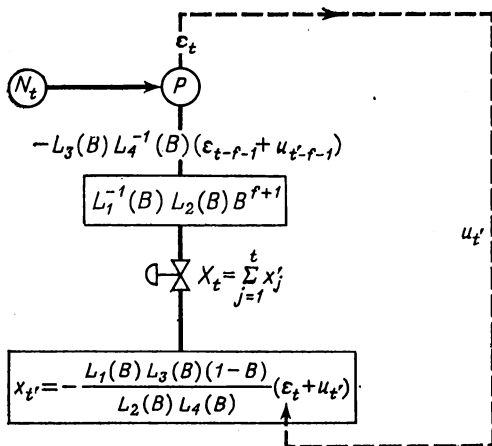


Рис. 13.1. Регулирование при наличии ошибок в петле обратной связи.

3) различия в оптимальном действии, вызванные добавочным шумом;

4) эффективный учет источников шума, осуществленный при сборе данных в условиях, близких к условиям эксплуатации регулирующей схемы.

### 13.1.1. Эффект пренебрежения добавочным шумом; упрощенные схемы

Рассмотрим регулирующую петлю обратной связи на рис. 13.1, в которой шум, фактически возникающий в точке  $P$ , обозначен  $N_t$  и  $\nabla^d N_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)a_t$ . Если  $N_t$  — единственная шумовая компонента, то, как было показано в разд. 12.2.1, оптимальное регулирующее действие определяется уравнением регулирования

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)L_3(B)}{L_2(B)L_4(B)}\epsilon_t, \quad (13.1.1)$$

где

$$\hat{N}_t(f+1) = L_3(B)a_t, \quad e_{t-f-1}(f+1) = L_4(B)a_t,$$

$$\epsilon_t = e_{t-f-1}(f+1).$$

Предположим теперь, что существует добавочный шум  $u'_t$ , который изменяет сигнал ошибок  $e_t$  на  $e_t + u'_t$ . Тогда фактически выполняемое действие будет иметь вид

$$X'_{t+} = - \frac{L_1(B) L_3(B)}{L_2(B) L_4(B)} (e_t + u'_t), \quad (13.1.2)$$

так что корректировка равна

$$x'_t = - \frac{L_1(B) L_3(B) (1-B)}{L_2(B) L_4(B)} (e_t + u'_t).$$

Тогда в точке  $P$  на рис. 13.1

$$e_t = N_t - L_3(B) L_4^{-1}(B) B^{f+1} (e_t + u'_t),$$

или

$$L_3(B) L_4^{-1}(B) u'_{t-f-1} - N_t = - \{L_3(B) L_4^{-1}(B) B^{f+1} + 1\} e_t. \quad (13.1.3)$$

Однако, пользуясь результатами разд. 12.2.1, имеем

$$N_t = \hat{N}_{t-f-1} (f+1) + e_{t-f-1} (f+1)$$

и

$$\hat{N}_{t-f-1} (f+1) = L_3(B) L_4^{-1}(B) B^{f+1} e_{t-f-1} (f+1).$$

Отсюда

$$N_t = \{L_3(B) L_4^{-1}(B) B^{f+1} + 1\} e_{t-f-1} (f+1). \quad (13.1.4)$$

Складывая (13.1.3) и (13.1.4), получаем

$$\begin{aligned} L_3(B) L_4^{-1}(B) u'_{t-f-1} &= \\ &= \{L_3(B) L_4^{-1}(B) B^{f+1} + 1\} \{e_{t-f-1} (f+1) - e_t\}. \end{aligned} \quad (13.1.5)$$

Далее, поскольку

$$\nabla^d N_t = \phi^{-1}(B) \theta(B) a_t = \phi^{-1}(B) \theta(B) L_4^{-1}(B) e_{t-f-1} (f+1), \quad (13.1.6)$$

подстановка (13.1.4) в (13.1.6) дает

$$\nabla^d \{L_3(B) L_4^{-1}(B) B^{f+1} + 1\} = \phi^{-1}(B) \theta(B) L_4^{-1}(B).$$

Отсюда следует, что (13.1.5) можно записать в виде

$$L_3(B) L_4^{-1}(B) \nabla^d u'_{t-f-1} = \phi^{-1}(B) \theta(B) L_4^{-1}(B) \{e_{t-f-1} (f+1) - e_t\},$$

так что

$$e_t = e_{t-f-1} (f+1) - L_3(B) \phi(B) \theta^{-1}(B) \nabla^d u'_{t-f-1}. \quad (13.1.7)$$

Заметим, что

$$e_{t-f-1} (f+1) = L_4(B) a_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \dots + \psi_f a_{t-f}$$

статистически не коррелировано с  $u'_{t-f-1}$  при условии, что взаимные ковариации  $\gamma_{u'a}(k)$  равны нулю при  $k \geq 1$ . В дальнейшем будем предполагать это условие выполненным.

Если добавочный шум  $u'_t$  может быть представлен случайным процессом

$$\phi_1(B) \nabla^{d_1} u'_t = \theta_1(B) b'_t,$$

где  $b'_t$  — белый шум, то (13.1.7) переходит в

$$e_t = L_4(B) a_t - L_3(B) \phi(B) \theta^{-1}(B) \phi_1^{-1}(B) \theta_1(B) \nabla^{d-d_1} b'_{t-f-1}, \quad (13.1.8)$$

и если  $d \geq d_1$ , то  $e_t$  — стационарный процесс. Дисперсия выхода  $e_t$  может быть вычислена для произвольных параметрических моделей шума в точке  $P$ , добавочного шума в системе и передаточной функции.

*Ошибки в  $x_t$ .* Если мы предположим, что игнорируемая ошибка возникает при корректировке  $x_t$ , можно записать уравнение регулирования в виде

$$x_t = - \frac{L_1(B)}{L_2(B)} \frac{L_3(B)(1-B)}{L_4(B)} e_t + u_t,$$

где

$$u_t = - \frac{L_1(B) L_3(B)(1-B)}{L_2(B) L_4(B)} u'_t.$$

Уравнение (13.1.7) принимает вид

$$e_t = e_{t-f-1}(f+1) + \\ + L_1^{-1}(B) L_2(B) L_4(B) \phi(B) \theta^{-1}(B) \nabla^{d-1} u'_{t-f-1}, \quad (13.1.9)$$

и если ошибки  $x_t$  подчиняются случайному процессу

$$\phi_2(B) \nabla^{d_2} u_t = \theta_2(B) b_t, \quad (13.1.10)$$

то, подставив (13.1.10) в (13.1.9) и учтя, что  $e_{t-f-1}(f+1) = L_4(B) a_t$ , получим

$$e_t = L_4(B) a_t + L_1^{-1}(B) L_2(B) L_4(B) \times \\ \times \phi(B) \theta^{-1}(B) \phi_2^{-1}(B) \theta_2(B) \nabla^{d-d_2-1} b_{t-f-1}. \quad (13.1.11)$$

При условии, что  $d > d_2$ ,  $e_t$  будет стационарным процессом, и можно рассчитать его дисперсию для любых значений параметров.

*Пренебрежение наблюдательными ошибками  $x_t$  для простой схемы регулирования.* В качестве примера исследуем теперь эффект пренебрежения наблюдательными ошибками  $x_t$  для важной, но довольно простой схемы регулирования такого типа,

как рассмотренная в разд. 12.2. Шум и передаточная функция определены соответственно как

$$\nabla N_t = (1 - \theta B) a_t$$

и

$$\nabla Y_t = g \frac{1 - \delta}{1 - \delta B} x_{t-1},$$

и оптимальная регулирующая корректировка (12.2.8) в предположении об отсутствии ошибок в контуре имеет вид

$$x_t = - \frac{1 - \theta}{(1 - \delta) g} (1 - \delta B) e_t,$$

где  $e_t = a_t$ . Предположим, что фактическая корректировка равна

$$x'_t = x_t + u_t,$$

где ошибки корректировки  $u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots$  не коррелированы и имеют дисперсию  $\sigma_u^2$ . Тогда  $L_1(B) L_2^{-1}(B) = (1 - \delta B)/(1 - \delta) g$ ,  $f = 0$ ,  $L_3(B)(1 - B) = (1 - \theta)$ ,  $L_4(B) = 1$ ,  $\phi^{-1}(B) \theta(B) = 1 - \theta B$ ,  $\phi_2^{-1}(B) \theta_2(B) = 1$ ,  $d = 1$ ,  $d_2 = 0$ . Подставляя эти значения в (13.1.11), получаем

$$e_t = a_t + \frac{g(1 - \delta)}{(1 - \delta B)(1 - \theta B)} u_{t-1},$$

$$\sigma_e^2 = \sigma_a^2 + \frac{g^2(1 - \delta)^2(1 + \theta\delta)}{(1 - \theta\delta)(1 - \theta^2)(1 - \delta^2)} \sigma_u^2.$$

Для упрощения сравнения представим  $\sigma_u$  в виде произведения  $k\sigma_x$ , где  $\sigma_x$  — стандартное отклонение величины  $x$  в отсутствие шума. Тогда

$$\sigma_u^2 = k^2 \sigma_x^2 = k^2 \frac{(1 - \theta)^2(1 + \delta^2)}{g^2(1 - \delta)^2} \sigma_a^2. \quad (13.1.12)$$

Наконец, если дисперсия добавочного шума  $x$  увеличивает дисперсию до  $(1 + k^2) \sigma_x^2$ , дисперсия отклонения выхода от номинала увеличивается в соответствии с формулой

$$\sigma_e^2 = \sigma_a^2 \left\{ 1 + k^2 \frac{(1 + \theta\delta)(1 - \theta)(1 + \delta^2)}{(1 - \theta\delta)(1 + \theta)(1 - \delta^2)} \right\}. \quad (13.1.13)$$

*Ошибки округления при корректировании.* В частности, (13.1.13) позволяет приближенно оценить эффект «округления» корректировок  $x_t$  способами, подобными показанным на диаграмме рис. 12.8, б. Пусть интервал округления равен  $R\sigma_x$ . Весьма приближенно эффект округления представим в виде добавления к  $u_t$  ошибки  $x_t$ , равномерно распределенной в интервале  $R\sigma_x$ . Далее, хотя  $u_t$  могут быть автокоррелированы,



в большинстве практических случаев автокорреляция невелика, и можно предполагать ее отсутствие. В этих предположениях

$$\sigma_e^2 = \sigma_a^2 \left\{ 1 + \frac{R^2}{12} \frac{(1 + \theta\delta)(1 - \theta)(1 + \delta^2)}{(1 - \theta\delta)(1 + \theta)(1 - \delta^2)} \right\},$$

что приводит к ранее упоминавшейся формуле (12.2.12). Отсюда для диаграммы рис. 12.8, б  $\theta = 0$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $R \approx 1$ , так что

$$\sigma_e^2 \approx \sigma_a^2 \left( 1 + \frac{5}{36} \right),$$

$$\sigma_e \approx 1,067 \sigma_a.$$

### 13.1.2. Оптимальное действие в случаях, когда корректировки $x_t$ содержат ошибки наблюдения

Уравнение (13.1.11) позволяет вычислить эффект добавочного шума в  $x_t$  в тех случаях, когда оптимальная схема такой шум не учитывает. Интересно получить также оптимальную схему для конкретного добавочного шума и увидеть, насколько она отличается от схемы, где такой шум не учтен. Рассмотрим опять пример из разд. 13.1.1.

Пусть фактически выполненное регулирующее действие равно

$$x_t = - \frac{(1 - \theta)(1 - \delta B)}{g(1 - \delta)} L(B) e_t + u_t,$$

где  $u_t$ ,  $u_{t-1}$ , ..., как и ранее, некоррелированы и имеют дисперсию  $\sigma_u^2$ , а шум  $N_t$  представим процессом ПСС (0, 1, 1). Необходимо выбрать  $L(B)$  так, чтобы минимизировать  $\sigma_e^2$ .

Рассмотрим, как и ранее, точку  $P$  в петле обратной связи. Здесь

$$\nabla e_t = g(1 - \delta)(1 - \delta B)^{-1} x_{t-1} + \nabla N_t$$

или

$$(1 - B) e_t =$$

$$= -(1 - \theta) L(B) e_{t-1} + (1 - \theta B) a_t + g(1 - \delta)(1 - \delta B)^{-1} u_{t-1},$$

и, следовательно,

$$(1 - \delta B) \{1 - B + (1 - \theta) B L(B)\} e_t =$$

$$= (1 - \delta B)(1 - \theta B) a_t + g(1 - \delta) u_{t-1}. \quad (13.1.14)$$

Правая часть уравнения (13.1.14) описывает процесс скользящего среднего второго порядка с добавочным белым шумом и, следовательно, может (разд. П4.4.1) быть представлена другим процессом скользящего среднего второго порядка:

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2) b_t,$$

где  $b_t$  — белый шум. Следовательно, задача сводится к выбору такого оператора  $L(B)$ , чтобы минимизировалась  $\text{var}[e_t]$ , где

$$(1 - \delta B)\{1 - B + (1 - \theta)BL(B)\}e_t = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2)b_t.$$

Можно записать это равенство в виде

$$e_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)b_t,$$

так что

$$\sigma_e^2 = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots)\sigma_b^2,$$

и  $\sigma_e^2$  минимально, только если  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0 = \dots$ ; это приводит к

$$(1 - \delta B)\{1 - B + (1 - \theta)BL(B)\} = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2, \quad (13.1.15)$$

или к

$$L(B) = \frac{(1 + \delta - \pi_1) - (\delta + \pi_2)B}{(1 - \theta)(1 - \delta B)}.$$

Следовательно, оптимальная корректировка равна

$$x_{0t} = -\left\{ \frac{(1 + \delta - \pi_1) - (\delta + \pi_2)B}{g(1 - \delta)} \right\} e_t. \quad (13.1.16)$$

Подставляя (13.1.15) в (13.1.14), получаем

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2)e_t = (1 - \delta B)(1 - \theta B)a_t + g(1 - \delta)u_{t-1},$$

откуда  $\pi_1$  и  $\pi_2$  находятся приравниванием ковариации при задержках 0, 1, 2.

Обозначив  $r = \sigma_e^2 / \sigma_a^2$ , получаем

$$(1 + \pi_1^2 + \pi_2^2)r = 1 + (\delta + \theta)^2 + (\delta\theta)^2 + g^2(1 - \delta)^2 \frac{\sigma_u^2}{\sigma_a^2},$$

$$\pi_1(1 - \pi_2)r = (\delta + \theta)(1 + \delta\theta), \quad (13.1.17)$$

$$- \pi_2 r = \delta\theta.$$

*Оптимальная упрощенная схема регулирования.* Рассмотрим опять в качестве примера упрощенную диаграмму на рис. 12.8, б. Делая те же приближения, что и ранее, рассмотрим, что дала бы такая схема, если учесть дополнительные ошибки округления.

Пусть, как и в предшествующем обсуждении в конце разд. 13.1.1,  $g = 0,2$ ,  $\theta = 0$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $R = 1$  и, следовательно,

$$\frac{\sigma_u^2}{\sigma_a^2} = \frac{1}{12} \frac{(1 - \theta)^2(1 + \delta^2)}{g^2(1 - \delta)^2} = \frac{125}{12}.$$

Тогда, пользуясь (13.1.17), получаем

$$\pi_2 = 0, \quad \pi_1 = \frac{0,5}{r},$$

$$r + \frac{0,25}{r} = 1 + 0,5^2 + \frac{1,25}{12} = 1,3542.$$

Отсюда

$$r = 1,134, \quad \pi_1 = 0,43, \quad \pi_2 = 0.$$

Подставляя эти значения в (13.1.16), находим оптимальную корректировку

$$x_{0t} = -10,68e_t + 5,00e_{t-1}$$

с  $\sigma_e = 1,065 \sigma_a$ . Можно сравнить эту схему с фактически использованной схемой

$$x_t = -10,00e_t + 5,00e_{t-1}$$

и  $\sigma_e = 1,067 \sigma_a$ , которая является оптимальной в предположении об отсутствии дополнительных ошибок. Ясно, что в этом случае добавочный шум незначительно повлиял на выбор оптимального уравнения регулирования.

*Изменения оптимальной корректировки, вызванные шумом на входе.* Если, как и ранее, принять

$$\sigma_u^2 = k^2 \sigma_x^2 = k^2 \frac{(1-\theta)^2 (1+\delta^2)}{g^2 (1-\delta)^2} \sigma_a^2,$$

то из уравнения (13.1.17) получаем

$$\pi_2 = -\frac{\delta\theta}{r}, \quad (13.1.18a)$$

$$\pi_1 = \frac{(\delta+\theta)(1+\delta\theta)}{r+\delta\theta}, \quad (13.1.18b)$$

$$r \left\{ 1 + \frac{(\delta+\theta)^2 (1+\delta\theta)^2}{(r+\delta\theta)^2} + \left( \frac{\delta\theta}{r} \right)^2 \right\} =$$

$$= 1 + (\delta+\theta)^2 + (\delta\theta)^2 + k^2 (1-\theta)^2 (1+\delta^2), \quad (13.1.18в)$$

где, как и прежде,  $r = \sigma_e^2 / \sigma_a^2$ . На практике, чтобы связать  $r$  с  $k^2$ , проще всего выразить решение (13.1.18в) через  $k^2$  для ряда нужным образом заданных  $r$  и затем найти соответствующие значения  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , подставив результаты в (13.1.18a) и (13.1.18б).

В этом примере умеренный добавочный шум, вызванный сильным округлением, не привел к значительному увеличению  $\sigma_e^2$ , и оптимальная схема, учитывающая этот шум, не привела к заметным улучшениям по сравнению со схемой, игнорирующей шум. Такое заключение справедливо (при умеренном шуме) для широкого диапазона параметров. Однако оно становится неверным, когда  $\delta$  приближается к 1 (система имеет

постоянную времени, существенно превышающую интервал выборки) и при наличии в петле обратной связи очень сильной компоненты добавочного шума. Чтобы получить представление об этих случаях, рассмотрим несколько примеров. В каждом случае примем  $k^2 = R^2/12$ ,  $R = 1$ , так что  $\sigma_u/\sigma_x = 0,29$ . Это соответствует добавочному шуму  $u$  со стандартным отклонением  $\sigma_u$ , таким же, как у ошибок округления, в случае, когда интервал округления равен  $\sigma_x$ . Здесь  $\sigma_x$  — стандартное отклонение  $x$ , когда шум отсутствует.

Рассмотрим два случая.

Случай 1:  $g = 1$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $\delta = 0,5$ .

Случай 2:  $g = 1$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $\delta = 0,9$ .

Оптимальные схемы регулирования, соответствующие этим параметрам, приведены в табл. 13.1.

Чтобы лучше понять табл. 13.1, заметим, что если записать уравнение регулирования не для корректировки  $x_t = X_{t+} - X_{t-1+}$ , а для уровня  $X_{t+}$ , на котором поддерживается регулируемая переменная между моментами времени  $t$  и  $t+1$ , то все схемы табл. 13.1 примут вид

$$-X_{t+} = k_p e_t + k_I S e_t,$$

что означает необходимость пропорционально-интегрального регулирования.

Корректирующее действие будет иметь вид

$$-x_t = k_I \left( 1 + \frac{k_p}{k_I} \nabla \right) e_t. \quad (13.1.19)$$

Из таблицы видно, что при  $\delta = 0,5$  (постоянная времени системы не слишком велика по сравнению с интервалом отсчета) отношение пропорционального регулирования к интегральному  $k_p/k_I = 1,0$ , и введение шума не изменяет характера оптимального регулирования. Однако при  $\delta = 0,9$  (постоянная времени системы очень велика по сравнению с интервалом отсчета) отношение пропорционального регулирования к интегральному велико ( $k_p/k_I = 9,0$ ). Оптимальная схема реагирует на добавочный шум увеличением  $k_I$  и резким уменьшением отношения  $k_p/k_I$ . Чтобы измерить эффективность оптимальной схемы, не учитывающей шум, в ситуации, когда шум имеется, можно использовать отношение

$$E = \frac{\text{дисперсия оптимальной схемы, учитывающей шум}}{\text{дисперсия оптимальной схемы, не учитывающей шум}} \times 100.$$

Для рассмотренных выше схем

$$E = 99,54\% \quad \text{для} \quad \delta = 0,5$$

Таблица 13.1

## Поведение конкретных схем регулирования в случае добавочного шума на входе

Случай 1: $g=1$ , $\theta=0.5$ , $\delta=0.05$		
	Уравнение регулирования для корректировки $x_t$	Дисперсия на выходе $\sigma_e^2$
Оптимальная схема без учета добавочного шума	$-x_t = 1,00e_t - 0,50e_{t-1} = 0,50(1 + 1,00V)e_t$	$1,000\sigma_a^2$
Действие схемы, не учитывающей шум, при наличии на входе шума с $\sigma_{ш}/\sigma_x = 0,29$	Как и ранее	$1,077\sigma_a^2$
Оптимальная схема с учетом добавочного шума	$-x_t = 1,11e_t - 0,53e_{t-1} = 0,58(1 + 0,93V)e_t$	$1,072\sigma_a^2$
Случай 2: $g=1$ , $\theta=0.5$ , $\delta=0.9$		
	Уравнение регулирования для корректировки $x_t$	Дисперсия на выходе $\sigma_e^2$
Оптимальная схема без учета добавочного шума	$-x_t = 5,00e_t - 4,50e_{t-1} = 0,50(1 + 9,00V)e_t$	$1,000\sigma_a^2$
Действие схемы, не учитывающей шум, при наличии шума на входе с $\sigma_{ш}/\sigma_x = 0,29$	Как и ранее	$1,697\sigma_a^2$
Оптимальная схема с учетом добавочного шума	$-x_t = 7,25e_t - 5,50e_{t-1} = 1,77(1 + 3,1V)e_t$	$1,278\sigma_a^2$

и

$$E = 75,31\% \text{ для } \delta = 0,9.$$

Рис. 13.2, а и б иллюстрирует изменения коэффициента эффективности  $E$  и значений  $k_I$  и  $k_P/k_I$  по мере увеличения шума в петле для двух ранее рассмотренных случаев ( $\theta = 0,5, \delta = 0,5$ ) и ( $\theta = 0,5, \delta = 0,9$ ). При рассмотрении рисунка нужно помнить следующее:

1. При применении регулирования в промышленных задачах даже 10%-ная ошибка на входе весьма маловероятна; в диапазоне  $0 < 100 \sigma_u / \sigma_x < 10$  даже при  $\delta = 0,9$  эффективность схемы, не учитывающей шум, вполне удовлетворительна.

2. Если параметры оцениваются по данным, получаемым в процессе производства, добавочный шум уже будет учтен основной схемой.

Тем не менее, если параметры не оценивать таким способом и если на входе существует сильный добавочный шум, не учтенный при проектировании схемы, регулирование будет неэффективным. В этих примерах оптимальные схемы, учитывающие добавочный шум, в большей степени основаны на интегральном действии и в меньшей степени на пропорциональном.

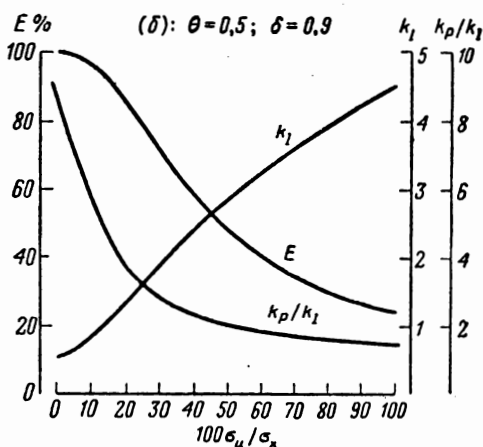
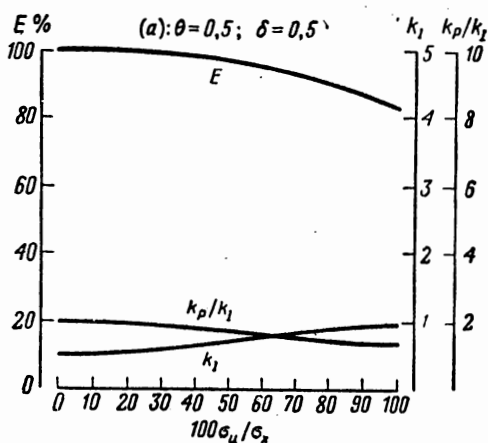


Рис. 13.2. Характеристики схем регулирования при различных пропорциях добавочного шума на входе.

### 13.1.3. Перенос источника шума

Полезно рассмотреть вывод уравнения (13.1.15) в предыдущем разделе с несколько иных позиций. Предположим, что,

хотя намечавшееся действие имело вид

$$x_{0t} = - \frac{(1-\theta)(1-\delta B)}{g(1-\delta)} L(B) \varepsilon_t,$$

из-за имеющейся ошибки  $u_t$  фактически было предпринято действие

$$x_t = - \frac{(1-\theta)(1-\delta B)}{g(1-\delta)} L(B) \varepsilon_t + u_t.$$

Соответствующий оператор  $L(B)$ , обеспечивающий оптимальное регулирование, был найден с учетом этих обстоятельств.

Теперь эффект добавочного шума  $u_t$  заключается в том, что после воздействия на него динамики процесса он добавляется в точке  $P$  на рис. 12.6. Можно рассматривать эту компоненту как *часть* шума, генерируемого в точке  $P$ . Фактически ситуация такова, как *если бы* весь шум, действующий в  $P$ , был такой, что

$$\nabla N'_t = \nabla N_t + \frac{g(1-\delta)}{1-\delta B} u_{t-1}.$$

В этом случае

$$\nabla N'_t = (1-\theta B) a_t + \frac{g(1-\delta)}{1-\delta B} u_{t-1},$$

$$\begin{aligned} (1-\delta B) \nabla N'_t &= (1-\delta B)(1-\theta B) a_t + g(1-\delta) u_{t-1} = \\ &= (1-\pi_1 B - \pi_2 B^2) b_t, \end{aligned}$$

где  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $b_t$  определяются точно так же, как раньше. Теперь можно использовать общее уравнение (12.2.8) для оптимальной корректировки

$$x_t = - \frac{L_1(B) L_3(B)}{L_2(B) L_4(B)} (1-B) \varepsilon_t$$

с  $\varepsilon_t = e_{t-f-1} (f+1)$ . Полный шум в  $P$  описывается теперь процессом (1, 1, 2)

$$\nabla N'_{t+1} = \frac{1-\pi_1 B - \pi_2 B^2}{1-\delta B} b_{t+1},$$

так что

$$\begin{aligned} \hat{N}'_t(1) - \hat{N}'_{t-1}(1) &= \left[ \frac{1-\pi_1 B - \pi_2 B^2}{1-\delta B} - (1-B) \right] b_{t+1} = \\ &= \left[ \frac{(1+\delta-\pi_1) - (\delta+\pi_2)B}{1-\delta B} \right] b_t = \frac{L_3(B)(1-B)}{L_4(B)} b_t, \end{aligned}$$

и  $f=0$ , так что  $\varepsilon_t = b_t$ . Кроме того,  $L_1(B)/L_2(B) = (1-\delta B)/g(1-\delta)$ .

Оптимальную корректировку найдем, как и раньше, приняв

$$x_{0t} = - \left[ \frac{(1+\delta-\pi_1) - (\delta+\pi_2)B}{g(1-\delta)} \right] \varepsilon_t.$$

Такой способ переноса шума может применяться для получения оптимального регулирующего действия и в более общем

случае, когда добавочный шум появляется в любой точке системы.

*Следствия для оценивания модели передаточная функция — шум.* Тот факт, что источник шума можно переносить так, как это было показано, имеет очень важное практическое следствие. Если модель идентифицирована, а ее параметры оцениваются по фактическим производственным записям, полученным с применением замкнутой петли регулирования, в оценках параметров будет автоматически учтен добавочный шум, и схема регулирования, основанная на этих параметрах, окажется оптимальной для фактической ситуации с добавочным шумом. С другой стороны, схема, основанная на оценивании *фактического шума*  $N_t$ , появляющегося в точке  $P$  на рис. 12.6, может не привести к оптимальному регулированию.

Рассмотрим опять простую схему с добавочным шумом на входе, как в разд. 13.1.3. На практике, чтобы использовать такую схему, мы должны знать вид соответствующих моделей шума и передаточной функции и иметь оценки их параметров. Конкретно, если бы нам удалось найти характеристики фактического шума в  $P$ , выполнив, например, эксперимент, в котором процесс протекал с фиксированным значением регулирующего переменного  $X$ , мы пришли бы к модели шума  $\nabla N_t = (1 - \theta B)a_t$ . Если бы в нормальных производственных условиях действительно существовал значительный шум, связанный с ошибками наблюдения в  $x$ , не присутствовавшими в условиях эксперимента, схема, игнорирующая этот шум, была бы неэффективной.

С другой стороны, если для оценки параметров использовались данные, собранные в процессе фактической работы замкнутой петли регулирования (не обязательно оптимальной), то белый шум  $u_t$ , добавленный к корректировке  $x_t$ , привел бы к модели шума в точке  $P$  в виде

$$\nabla N'_t = (1 - \delta B)^{-1} (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2) b_t,$$

и в результате была бы разработана оптимальная схема.

### 13.2. СХЕМА РЕГУЛИРОВАНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ, ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ, НАЛОЖЕННОМ НА ДИСПЕРСИЮ КОРРЕКТИРОВКИ

Рассмотренные выше дискретные схемы регулирования с обратной связью предназначались для минимизации среднеквадратичной ошибки выхода. При этом неявно предполагалось, что не существует ограничения величины корректировки, которую можно выполнить для достижения этой цели. Иногда случается, что эти схемы нельзя применить, так как по практическим



причинам допустимые вариации  $x_t$  ограничены. Поэтому нужно представлять, как изменится конкретный класс схем регулирования с обратной связью при наложении ограничения на  $\text{var}[x_t]$ ; предполагается, что  $x_t$  — стационарный процесс.

Рассмотрим опять важный случай, когда возмущение выхода  $N_t$  представимо моделью порядка  $(0, 1, 1)$ :

$$\nabla N_t = (1 - \theta B) a_t, \quad -1 < \theta < 1, \quad (13.2.1)$$

а выход и вход связаны передаточной функцией первого порядка, т. е.

$$\frac{1 - \delta B}{1 - \delta} y_t = g x_{t-1}, \quad (13.2.2)$$

где  $\nabla Y_t = y_t$ . Напомним, что  $1 - \delta$  можно трактовать как долю общей реакции на единичный входной скачок, происходящую в первом временном интервале. Как мы видели в разд. 12.2.3, уравнение регулирования, дающее минимальную дисперсию выхода, имеет вид

$$x_t = -\frac{\lambda}{g} \frac{1 - \delta B}{1 - \delta} e_t, \quad (13.2.3)$$

где  $\lambda = 1 - \theta$  и  $e_t = a_t$ .

Если  $\delta$  пренебрежимо мало, оптимальное регулирование достигается, согласно формуле, при  $x_t = -(\lambda/g) e_t$ ; в этом случае будем иметь  $\text{var}[x_t] = (\lambda^2/g^2) \sigma_a^2 = k$ . Отсюда следует, что когда  $\delta$  пренебречь нельзя,  $\text{var}[x_t] = k[(1 + \delta^2)/(1 - \delta^2)]$ . Если  $\delta$  близко к своему верхнему пределу — единице, то  $\text{var}[x_t]$  может стать очень большой. Например, если  $\delta = 0,9$  (т. е. только 0,1 возможного изменения, вызванного единичным скачком на входе, проявилось в первом временном интервале), то  $\text{var}[x_t] = 181 k$ . Действительно, когда  $\delta$  приближается к единице, регулирующее действие

$$x_t = -\frac{\lambda}{g(1 - \delta)} (e_t - \delta e_{t-1})$$

принимает все более «знакопеременный» характер; корректировка в момент  $t$  устраняет существенную часть корректировки, проделанной в момент  $t-1$ . Значение  $\delta = 0,9$  соответствует постоянной времени системы, превышающей девять интервалов отсчета (см., например, табл. 10.4). Появление такого значения говорит о том, что интервал отсчета мал, а инерция процесса велика, так что менее частые наблюдения не приведут к потерям.

В разд. 13.3 будет показано, что выбор интервала отсчета должен зависеть от природы шума, существующего в системе. Поскольку свойства шума обычно хорошо отражают инерцию

системы, во многих случаях интервал отсчета следовало бы увеличить. Тем не менее встречались практические ситуации [105], когда использовался разумный интервал отсчета, и все же большие значения  $\text{var}[x_t]$  не позволили пользоваться схемой, минимизирующей выходную дисперсию.

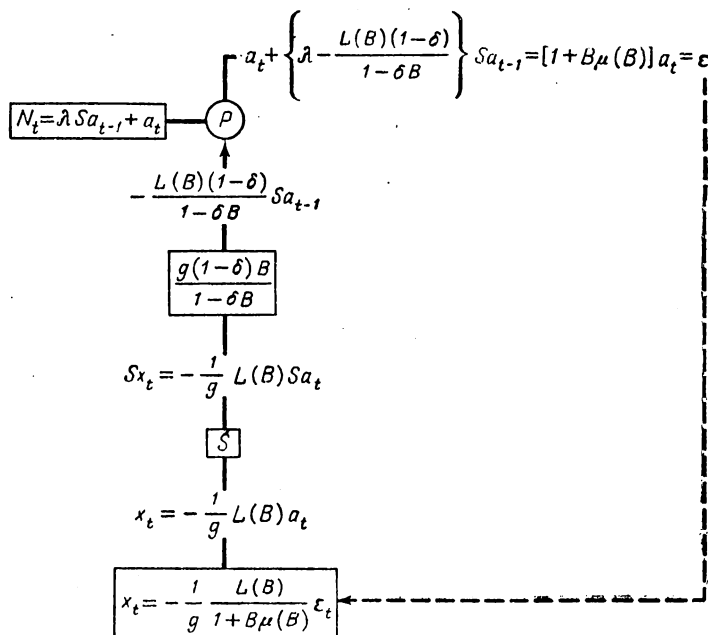


Рис. 13.3. Схема регулирования с обратной связью для модели передаточной функции первого порядка и модели шума (0, 1, 1) при ограниченной дисперсии входа.

Рассмотрим теперь случай, когда модели шума и динамика системы опять определяются уравнениями (13.2.1) и (13.2.2), но необходимо ограничить дисперсию входного переменного  $\text{var}[x_t]$ . Оптимальная схема без ограничений обладает следующими свойствами: ошибки выхода  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$  являются некоррелированными случайными величинами  $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$ , и дисперсия выхода  $\sigma_\varepsilon^2$  имеет минимально возможное значение  $\sigma_a^2$ . В схемах с ограничением дисперсия  $\sigma_\varepsilon^2$  будет значительно больше  $\sigma_a^2$ , и ошибки  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$  будут коррелированы.

Нашу задачу можно сформулировать следующим образом: пусть  $\sigma_\varepsilon^2$  может возрастать до некоторого значения  $\sigma_\varepsilon^2 = (1 + c) \sigma_a^2$ , где  $c$  — положительная константа; найти схему регулирования, дающую минимальное значение  $\text{var}[x_t]$ .

### 13.2.1. Вывод выражения для оптимальной корректировки

Пусть оптимальная корректировка, выраженная через  $a_t$ , будет равна

$$x_t = -\frac{1}{g} L(B) a_t, \quad (13.2.4)$$

где

$$L(B) = l_0 + l_1 B + l_2 B^2 + \dots$$

Тогда, обращаясь к рис. 13.3, мы видим, что ошибка выхода  $e_t$  определяется выражением

$$e_t = a_t + \left[ \lambda - \frac{L(B)(1-\delta)}{1-\delta B} \right] S a_{t-1}. \quad (13.2.5)$$

Коэффициент при  $a_t$  в этом выражении равен единице, так что можно записать

$$e_t = [1 + B\mu(B)] a_t, \quad (13.2.6)$$

где

$$\mu(B) = \mu_1 + \mu_2 B + \mu_3 B^2 + \dots$$

Далее, практически регулирование нужно выразить через наблюдаемые ошибки выхода  $e_t$ , а не через  $a_t$ , так чтобы регулирующее действие имело вид

$$x_t = -\frac{1}{g} \frac{L(B)}{1 + B\mu(B)} e_t. \quad (13.2.7)$$

Приравнивая (13.2.5) и (13.2.6), получаем

$$(1 - \delta) L(B) = [\lambda - (1 - B)\mu(B)](1 - \delta B). \quad (13.2.8)$$

Так как  $\delta$ ,  $g$  и  $\sigma_a^2$  — константы, можно стандартным образом найти безусловный минимум выражения

$$\frac{(1 - \delta)^2 g^2 V[x_t]}{\sigma_a^2} + v \left\{ \frac{V[e_t]}{\sigma_a^2} - (1 + c) \right\}; \quad (13.2.9)$$

здесь  $V[x_t] = \text{var}[x_t]$  и т. п. Точно так же, пользуясь производящими функциями, мы будем искать (безусловный) минимум коэффициента при  $B^0 = 1$  в выражении

$$G(B) = (1 - \delta)^2 L(B) L(F) + v[1 + B\mu(B)][1 + F\mu(F)],$$

или, в несколько ином виде, в

$$G(B) = (1 - \delta B)(1 - \delta F)[\lambda - (1 - B)\mu(B)][\lambda - (1 - F)\mu(F)] + v[1 + B\mu(B)][1 + F\mu(F)], \quad (13.2.10)$$

где  $F = B^{-1}$ . Этот минимум мы можем найти, дифференцируя  $G(B)$  по каждому  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), выбирая коэффициенты

при  $B^0 = 1$  в результирующем выражении, приравнявая их нулю и решая получившиеся уравнения. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu_i} G(B) = & (1 - \delta B)(1 - \delta F) \{ -\lambda [(1 - B) B^{i-1} + (1 - F) F^{i-1}] + \\ & + (1 - B)(1 - F) [\mu(B) F^{i-1} + \mu(F) B^{i-1}] \} + \\ & + \nu [B^i + F^i + B^{i-1} \mu(F) + F^{i-1} \mu(B)]. \end{aligned} \quad (13.2.11)$$

Найдя коэффициенты при  $B^0 = 1$  для  $i = 1, 2, 3, \dots$  и приравнявая их нулю, получаем уравнения

$$(i=1): \quad -\lambda(1 + \delta + \delta^2) + 2(1 + \delta + \delta^2)\mu_1 - (1 + \delta)^2\mu_2 + \delta\mu_3 + \nu\mu_1 = 0, \quad (13.2.12)$$

$$(i=2): \quad \lambda\delta - (1 + \delta)^2\mu_1 + 2(1 + \delta + \delta^2)\mu_2 - (1 + \delta)^2\mu_3 + \delta\mu_4 + \nu\mu_2 = 0, \quad (13.2.13)$$

$$(i > 2): \quad [\delta B^2 - (1 + \delta)^2 B + 2(1 + \delta + \delta^2) - (1 + \delta)^2 F + \delta F^2 + \nu]\mu_i = 0. \quad (13.2.14)$$

*Случай пренебрежимо малого  $\delta$ .* Рассмотрим сначала простейший случай, когда  $\delta$  пренебрежимо мало и может считаться нулем. Тогда приведенные выше уравнения принимают вид

$$(i=1): \quad -(\lambda - \mu_1) + (\mu_1 - \mu_2) + \nu\mu_1 = 0, \quad (13.2.15)$$

$$(i > 1): \quad [B - (2 + \nu) + F]\mu_i = 0. \quad (13.2.16)$$

Эти разностные уравнения имеют решения вида

$$\mu_i = A_1 \kappa_1^i + A_2 \kappa_2^i,$$

где  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — корни характеристического уравнения

$$B^2 - (2 + \nu)B + 1 = 0, \quad (13.2.17)$$

т. е.

$$B + B^{-1} = 2 + \nu.$$

Очевидно, если  $\kappa$  — корень этого уравнения, то и  $\kappa^{-1}$  — тоже корень. Поэтому решение имеет вид  $\mu_i = A_1 \kappa^i + A_2 \kappa^{-i}$ . Если  $\kappa$  по модулю меньше или равно 1, то  $\kappa^{-1}$  по модулю больше или равно 1, и так как  $\varepsilon_t = [1 + B\mu(B)]a_t$  должно иметь конечную дисперсию,  $A_2$  должно быть равно нулю, а  $|\kappa| < 1$ . Подставляя решение  $\mu_i = A_1 \kappa^i$  в (13.2.15), находим, что  $A_1 = \lambda$ .

Наконец, так как  $\mu_i = \lambda \kappa^i$  и  $\mu_i$  и  $\lambda$  должны быть действительными числами, корень уравнения  $\kappa$  тоже действителен. Отсюда

$$\mu(B) = \frac{\lambda \kappa}{1 - \kappa B}, \quad 0 < \kappa < 1, \quad (13.2.18)$$

$$1 + B\mu(B) = 1 + \frac{\lambda \kappa B}{1 - \kappa B} = \frac{1 - \theta \kappa B}{1 - \kappa B}, \quad (13.2.19)$$

где  $\theta = 1 - \lambda$ . Тогда

$$e_t = \frac{1 - \theta \kappa B}{1 - \kappa B} a_t,$$

так что

$$\frac{V[e_t]}{\sigma_a^2} = 1 + \frac{\lambda^2 \kappa^2}{1 - \kappa^2}. \quad (13.2.20)$$

Из (13.2.8) при  $\delta = 0$  получаем

$$L(B) = \lambda - \frac{(1 - B) \lambda \kappa}{1 - \kappa B} = \frac{\lambda (1 - \kappa)}{1 - \kappa B}. \quad (13.2.21)$$

Отсюда

$$x_t = -\frac{\lambda}{g} \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa B} a_t$$

и

$$\frac{V[x_t]}{\sigma_a^2} = \frac{\lambda^2}{g^2} \frac{(1 - \kappa)^2}{1 - \kappa^2} = \frac{\lambda^2}{g^2} \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa}. \quad (13.2.22)$$

Из (13.2.7), (13.2.19) и (13.2.21) находим, что оптимальное регулирующее действие, выраженное через наблюдаемые ошибки на выходе  $e_t$ , равно

$$x_t = -\frac{1}{g} \frac{\lambda (1 - \kappa)}{1 - \theta \kappa B} e_t,$$

т. е.

$$x_t = (1 - \lambda) \kappa x_{t-1} - \frac{1}{g} \lambda (1 - \kappa) e_t. \quad (13.2.23)$$

Отметим, что уравнение регулирования с ограничением отличается от уравнения без ограничения в двух отношениях.

1. Вводится новый множитель  $(1 - \lambda) \kappa x_{t-1}$  в результате чего текущее действие частично зависит от предыдущего.

2. Постоянная, определяющая долю интегрального регулирования, уменьшается в  $(1 - \kappa)$  раз.

Мы предполагали, что допускается увеличение дисперсии выхода до значения  $\sigma_a^2 (1 + c)$ . Из (13.2.20) следует, что

$$c = \frac{\lambda^2 \kappa^2}{1 - \kappa^2},$$

т. е.

$$\kappa = \sqrt{\frac{c}{\lambda^2 + c}},$$

где берется положительное значение корня. Удобно ввести обозначение  $Q = c/\lambda^2$ . Тогда  $Q = \kappa^2/(1 - \kappa^2)$  и  $\kappa^2 = Q/(1 + Q)$ , а дисперсия выхода имеет вид  $\sigma_a^2 (1 + \lambda^2 Q)$ .

Допустим, что мы согласны на увеличение дисперсии выхода до значения  $\sigma_a^2 (1 + \lambda^2 Q)$ . Тогда

1) вычисляем

$$\kappa = \sqrt{\frac{Q}{1+Q}},$$

2) оптимальное регулирование достигается при помощи действия

$$x_t = (1 - \lambda) \kappa x_{t-1} - \frac{1}{g} \lambda (1 - \kappa) e_t,$$

3) дисперсия входа может быть уменьшена до

$$V[x_t] = \frac{\lambda^2}{g^2} \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \sigma_a^2,$$

т. е. уменьшится до  $W\%$  от дисперсии схемы без ограничения, где

$$W = 100 \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa}.$$

В табл. 13.2 приведены значения  $\kappa$  и  $W$  для  $Q$ , заключенного между 0,1 и 1,0.

Таблица 13.2

Значения параметров для простой схемы регулирования с ограничением

$c/\lambda^2 = Q$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$\kappa$	0,302	0,408	0,480	0,535	0,577	0,612	0,641	0,667	0,688	0,707
$W$	53,7	42,0	35,1	30,3	26,8	24,0	21,9	20,0	18,5	17,2

Пусть, например,  $\lambda = 0,4$ . Тогда оптимальная схема без ограничений будет требовать регулирующего действия

$$x_t = -\frac{0,4}{g} e_t$$

с  $e_t = a_t$ . Дисперсия  $x_t$  равна  $V[x_t] = (\sigma_a^2/g^2) 0,16$ . Пусть потребовалось понизить ее в 4 раза, т. е. до значения  $(\sigma_a^2/g^2) 0,04$  ( $W = 25\%$ ). Из табл. 13.2 вытекает, что уменьшение дисперсии входа до 24% от его значения при отсутствии ограничений возможно при  $Q = 0,60$  и  $\kappa = 0,612$ . Если мы используем схему с этими значениями, дисперсия выхода будет равна

$$\sigma_e^2 = \sigma_a^2 (1 + 0,16 \times 0,60) = 1,10 \sigma_a^2.$$

Итак, применив регулирующее действие

$$x_t = 0,37 x_{t-1} - \frac{1}{g} 0,16 e_t$$

вместо

$$x_t = -0,4 e_t / g,$$

мы уменьшаем дисперсию входа до четверти ее предыдущего значения, а дисперсия выхода увеличивается на 10%.

*Случай, когда нельзя пренебречь  $\delta$ .* Рассмотрим теперь более общий случай, когда  $\delta$  непренебрежимо мало и необходимо учитывать динамику системы. Разностное уравнение (13.2.14) имеет вид

$$(\alpha B^{-2} + \beta B^{-1} + \gamma + \beta B + \alpha B^2) \mu_t = 0,$$

и если  $\kappa$  — корень характеристического уравнения, то и  $\kappa^{-1}$  — корень того же уравнения. Пусть корни уравнения равны  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_1^{-1}$ ,  $\kappa_2^{-1}$ , причем  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  по модулю меньше единицы. Тогда в решении

$$\mu_t = A_1 \kappa_1^t + A_2 \kappa_2^t + A_3 \kappa_1^{-t} + A_4 \kappa_2^{-t}$$

$A_3$  и  $A_4$  должны быть равны нулю, так как дисперсия  $\varepsilon_t$  конечна.

Итак, решение имеет вид

$$\mu_t = A_1 \kappa_1^t + A_2 \kappa_2^t, \quad |\kappa_1| < 1, \quad |\kappa_2| < 1.$$

Пользуясь начальными условиями (13.2.12) и (13.2.13), находим коэффициенты  $A$ :

$$A_1 = \frac{\lambda \kappa_1 (1 - \kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad A_2 = -\frac{\lambda \kappa_2 (1 - \kappa_1)}{\kappa_1 - \kappa_2}.$$

Если обозначить  $k_0 = \kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2$ ,  $k_1 = \kappa_1 \kappa_2$ , то

$$\mu(B) = \lambda \left[ \frac{k_0 - k_1 B}{1 - (k_0 + k_1) B + k_1 B^2} \right] \quad (13.2.24)$$

и

$$1 + B \mu(B) = \frac{1 - k_1 B - (1 - \lambda)(k_0 B - k_1 B^2)}{1 - (k_0 + k_1) B + k_1 B^2}. \quad (13.2.25)$$

Подставляя (13.2.24) в (13.2.8), получаем

$$L(B) = \frac{\lambda (1 - \delta B) (1 - k_0)}{(1 - \delta) [1 - (k_0 + k_1) B + k_1 B^2]} \quad (13.2.26)$$

и

$$\frac{L(B)}{1 + B \mu(B)} = \frac{\lambda (1 - \delta B) (1 - k_0)}{(1 - \delta) [1 - k_1 B - (1 - \lambda)(k_0 B - k_1 B^2)]}.$$

Тогда из (13.2.7) вытекает, что оптимальное регулирующее действие, выраженное через ошибку  $\varepsilon_t$ , имеет вид

$$x_t = -\frac{\lambda}{g} \frac{(1 - \delta B) (1 - k_0)}{(1 - \delta) [1 - k_1 B - (1 - \lambda)(k_0 B - k_1 B^2)]} \varepsilon_t \quad (13.2.27)$$

или

$$x_t = [k_1 + (1 - \lambda) k_0] x_{t-1} - (1 - \lambda) k_1 x_{t-2} - \frac{\lambda (1 - k_0) (1 - \delta B)}{g (1 - \delta)} \varepsilon_t. \quad (13.2.28)$$

Итак, в модифицированной схеме регулирования  $x_t$  зависит как от  $x_{t-1}$ , так и от  $x_{t-2}$  (только от  $x_{t-1}$ , если  $\lambda = 1$ ); эта схема уменьшает стандартное интегральное и пропорциональное действие в  $(1 - k_0)$  раз.

*Дисперсии на выходе и входе.* Легко найти фактические дисперсии на выходе и входе. Имеем

$$\varepsilon_t = a_t + \lambda \frac{k_0 - k_1 B}{1 - (k_0 + k_1) B + k_1 B^2} a_{t-1}.$$

Второй член в правой части — смешанный процесс авторегрессии — скользящего среднего порядка  $(2, 0, 1)$ , дисперсия которого без труда определяется как

$$\frac{V[\varepsilon_t]}{\sigma_a^2} = 1 + \lambda^2 \left\{ \frac{(k_0 + k_1)^2 (1 - k_1) - 2k_1 (k_0 - k_1^2)}{(1 - k_1) [(1 + k_1)^2 - (k_0 + k_1)^2]} \right\} = 1 + \lambda^2 Q. \quad (13.2.29)$$

Далее,

$$\frac{V[x_t]}{\sigma_a^2} = \frac{\lambda^2}{g^2 (1 - \delta)^2} \frac{(1 - k_0) [(1 + \delta^2) (1 + k_1) - 2\delta (k_0 + k_1)]}{(1 + k_0 + 2k_1) (1 - k_1)}. \quad (13.2.30)$$

*Вычисление  $k_0$  и  $k_1$ .* Для разностного уравнения (13.2.14) характеристическое уравнение имеет вид

$$B^4 - MB^3 + NB^2 - MB + 1 = 0,$$

где  $M = (1 + \delta)^2 / \delta$  и  $N = [(1 + \delta)^2 + (1 + \delta^2) + \nu] / \delta$ . Его можно также представить в виде

$$(B^2 - TB + P)(B^2 - P^{-1}TB + P^{-1}) = 0,$$

где

$$T = \kappa_1 + \kappa_2 \quad \text{и} \quad P = \kappa_1 \kappa_2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $B$ , находим

$$T + P^{-1}T = M, \quad \text{т. е.} \quad T = \frac{PM}{1 + P},$$

$$P + P^{-1} + P^{-1}T^2 = N.$$

Отсюда  $P + P^{-1} + PM^2/(1 + P)^2 = N$ , т. е.

$$(P + 2 + P^{-1})(P + P^{-1}) + M^2 = N(P + 2 + P^{-1}),$$

$$(P + P^{-1})^2 + (2 - N)(P + P^{-1}) + M^2 - 2N = 0.$$

При подходящих значениях  $\nu$  это квадратное уравнение имеет два действительных корня:

$$u_1 = \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1^{-1} \kappa_2^{-1}, \quad u_2 = \kappa_1 \kappa_2^{-1} + \kappa_1^{-1} \kappa_2$$

( $u_1 > u_2$ ). Искомая величина  $P$  — это меньший из корней квадратного уравнения

$$P^2 - u_1 P + 1 = 0,$$



а  $T$  определяется из

$$T = [P(u_2 + 2)]^{1/2}.$$

Таблица оптимальных значений для схем с ограничением; способ построения. Для облегчения выбора оптимальной схемы регулирования можно пользоваться табл. 13.3. Табулированные значения для каждого заданного  $\delta$  — параметра модели передаточной функции — получены следующим путем.

Таблица 13.3

Таблица, облегчающая расчет оптимальных схем регулирования с ограничением

$\delta$	100Q					
		20	40	60	80	100
0,9	100W	21,7	11,3	6,7	4,5	3,1
	$k_0$	0,44	0,585	0,68	0,74	0,78
	$k_1$	0,18	0,27	0,34	0,39	0,44
0,8	100W	22,0	11,7	7,2	4,8	3,4
	$k_0$	0,44	0,585	0,68	0,74	0,78
	$k_1$	0,18	0,27	0,33	0,38	0,43
0,7	100W	22,7	12,4	8,0	5,6	4,1
	$k_0$	0,44	0,585	0,68	0,74	0,78
	$k_1$	0,17	0,25	0,32	0,36	0,40
0,6	100W	24,1	13,6	9,0	6,6	5,0
	$k_0$	0,44	0,58	0,67	0,73	0,78
	$k_1$	0,16	0,24	0,29	0,33	0,365
0,5	100W	26,5	15,5	10,5	7,9	6,2
	$k_0$	0,43	0,58	0,67	0,72	0,77
	$k_1$	0,15	0,21	0,26	0,29	0,32
0,4	100W	28,5	17,7	12,7	9,8	7,9
	$k_0$	0,43	0,57	0,66	0,72	0,76
	$k_1$	0,13	0,18	0,22	0,245	0,265
0,3	100W	31,5	20,5	15,2	12,0	9,9
	$k_0$	0,43	0,57	0,65	0,71	0,75
	$k_1$	0,105	0,145	0,17	0,19	0,20
0,2	100W	34,8	23,6	18,0	14,5	12,2
	$k_0$	0,42	0,56	0,64	0,69	0,73
	$k_1$	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14
0,1	100W	38,2	26,7	21,0	17,3	14,6
	$k_0$	0,42	0,55	0,63	0,68	0,72
	$k_1$	0,04	0,05	0,06	0,065	0,07

1) Вычисляем

$$M = \frac{(1 + \delta)^2}{\delta} \quad \text{и} \quad N = \frac{(1 + \delta)^2 + (1 + \delta^2) + \nu}{\delta}$$

для ряда значений  $\nu$ , выбранных так, чтобы обеспечить нужный диапазон  $Q$ .

2) Вычисляем

$$u_1 = \frac{1}{2}(N - 2) + \left[ \left( \frac{N - 2}{2} \right)^2 + 2N - M^2 \right]^{1/2}$$

и

$$u_2 = \frac{1}{2}(N - 2) - \left[ \left( \frac{N - 2}{2} \right)^2 + 2N - M^2 \right]^{1/2}.$$

3) Вычисляем

$$k_1 = P = \frac{1}{2} u_1 - \left[ \left( \frac{1}{2} u_1 \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

и

$$k_0 = T - P = [k_1(u_2 + 2)]^{1/2} - k_1.$$

4) Вычисляем

$$Q = \frac{(k_0 + k_1)^2 (1 - k_1) - 2k_1(k_0 - k_1^2)}{(1 - k_1)[(1 + k_1)^2 - (k_0 + k_1)^2]}.$$

5) Вычисляем

$$W = \frac{(1 - k_0)[(1 + \delta^2)(1 + k_1) - 2\delta(k_0 + k_1)]}{(1 + k_0 + 2k_1)(1 - k_1)(1 + \delta^2)}.$$

6) Значения  $W$ ,  $k_0$ ,  $k_1$  для подходящих значений  $Q$  находим интерполяцией.

*Пользование таблицей.* Табл. 13.3 нужно пользоваться следующим образом. В левом столбце находим нужное значение  $\delta$ . Пользуясь тем, что  $V[e_t] = (1 + \lambda^2 Q) \sigma_a^2$ , находим, что увеличение дисперсии выхода (в %) будет равно  $100Q\lambda^2$ . Подходящее значение  $Q$  находим в верхней строке. Итак, входными данными таблицы будут

а)  $100W$ , процентное уменьшение дисперсии  $x_t$ ;

б)  $k_0$ ;

в)  $k_1$ .

Примем, например,  $\lambda = 0,6$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $g = 1$ . Уравнение оптимального регулирования без ограничений имеет вид

$$x_t = -1,2(1 - 0,5B)e_t = -1,2(1 - 0,5B)a_t$$

и  $\text{var}[x_t] = 1,80\sigma_a^2$ . Предположим, что такая дисперсия входной переменной создает трудности при осуществлении производственного процесса, и желательно уменьшить  $\text{var}[x_t]$  до  $\sim 0,50\sigma_a^2$ , т. е. до 28% от значения дисперсии в схеме без ограничений. По табл. 13.3 находим, что значениям  $\delta = 0,5$  и

$W = 26,5\%$  соответствуют постоянные схемы регулирования  $k_0 = 0,43$ ,  $k_1 = 0,15$ . Решение уравнения регулирования (13.2.28) принимает вид

$$x_t = 0,32x_{t-1} - 0,06x_{t-2} - (0,57 \times 1,2)(1 - 0,5B)\varepsilon_t.$$

Такое решение соответствует значению  $Q = 0,20$ . Следовательно, дисперсия выхода увеличится в  $(1 + \lambda^2 Q) = 1 + 0,6^2(0,2) = 1,072$  раза, т. е. примерно на 7%.

### 13.2.2. Схема с ограничением для примера «вязкость — подача газа»

Во втором примере разд. 12.2.3 был рассмотрен химический процесс, в котором вязкость продукта поддерживалась вблизи

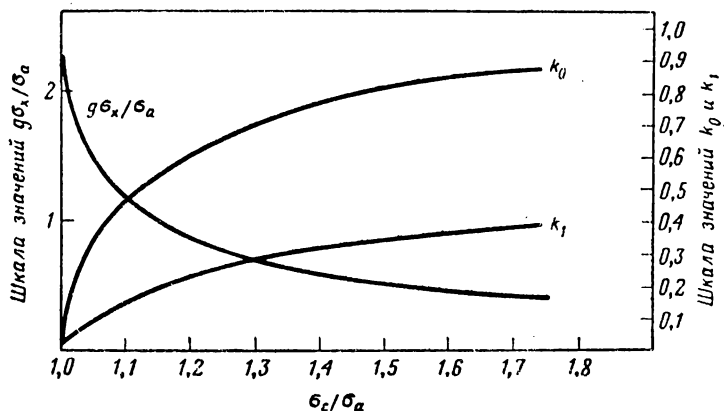


Рис. 13.4. Регулирование вязкости изменением подачи газа. Значения  $g\sigma_x/\sigma_a$ ,  $k_0$ ,  $k_1$  для диапазона значений  $\sigma_\varepsilon/\sigma_a$ .

номинального значения 92 изменением скорости подачи газа. В опытной схеме регулирования принималось  $\lambda = 1,0$  ( $\theta = 0$ ),  $\delta = 0,5$ , и оптимальное регулирующее действие имело вид

$$x_t = -\frac{1}{g}(2\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}),$$

где  $\varepsilon_t = a_t$ . Позже было показано (разд. 12.4.3), что эта модель содержит ошибку. Однако сейчас мы будем для простоты считать ее правильной. Дисперсия  $x_t$  будет тогда равна

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{g^2} 5\sigma_a^2,$$

т. е.

$$g \frac{\sigma_x}{\sigma_a} = \sqrt{5} = 2,24.$$

На рис. 13.4 показано возможное уменьшение  $g(\sigma_x/\sigma_a)$  для различных значений  $\sigma_e/\sigma_a$ , а также другие параметры оптимального регулирования. В частности, видно, что уменьшение в 2 раза стандартного отклонения входа приводит к увеличению стандартного отклонения выхода лишь на 10%.

Рис. 13.5 является дальнейшей иллюстрацией этого примера. 24 последовательных наблюдения значений входа (подача

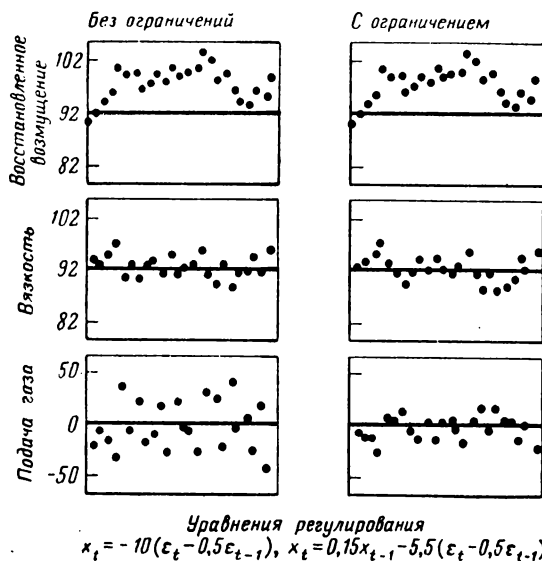


Рис. 13.5. Поведение схем регулирования с ограничением и без ограничений для примера „вязкость — скорость подачи газа“.

газа) и выхода (вязкость) приведены в левой диаграмме в том виде, в каком они были фактически получены в оптимальной схеме без ограничений  $x_t = -(1/g)(2\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$  при  $g = 0.2$ . Показан также шум, восстановленный расчетным путем. Пусть схема вначале давала значение выхода, равное номиналу; тогда этот восстановленный шум изображает отклонения выхода от номинала, которые наблюдались бы при отсутствии регулирования. Диаграмма справа показывает, как бы выглядел тот же шум, если бы использовалось уравнение регулирования

$$x_t = 0.15x_{t-1} - \frac{0.55}{g}(2\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}).$$

Эта схема дает наименьшее стандартное отклонение входа при увеличении стандартного отклонения выхода на 10%. Как и ожидалось, стандартное отклонение выхода увеличилось

незначительно, зато стандартное отклонение входа  $\sigma_x$  уменьшилось вдвое.

*Схемы с ограничением для систем с запаздыванием.* Общий анализ для схем с ограничением рассмотренного типа был недавно проведен Вилсоном [107]; он базировался на теории Винера — Хопфа [106], изложенной Уиттлом [49]. Пользуясь результатами Вилсона, Макгрегор провел предварительное исследование интересной ситуации, когда в петле обратной связи имеется запаздывание (холостое время). Ниже мы частично воспроизведем его результаты. Проиллюстрируем их на важном случае, для которого решение без ограничений приведено в разд. 12.2.3 (пример 3).

Предполагается, что динамика системы описывается моделью первого порядка с запаздыванием выхода  $Y_t$  относительно входа  $X_t$  и что возмущение  $N_t$  может быть представлено процессом  $(0, 1, 1)$ . Тогда

$$(1 - \delta B)Y_t = g(1 - \delta)[(1 - \nu) + \nu B]X_{t-f-1},$$

$$\nabla N_t = (1 - \theta B)a_t.$$

Оптимальный регулятор с ограничением при  $f \geq 1$  имеет вид

$$-x_t = c_0 x_{t-1} + c_1 x_{t-2} + \dots + c_f x_{t-f-1} + c(1 - \delta B)e_t,$$

частным случаем которого является оптимальный регулятор без ограничений (12.2.13).

Предположим, в частности, что  $f = 1$ . Динамическая модель будет тогда иметь аналогом непрерывную систему, у которой холостое время равно целому периоду плюс его дробная часть. Тогда оптимальный регулятор с ограничением — это

$$-x_t = c_0 x_{t-1} + c_1 x_{t-2} + c(1 - \delta B)e_t,$$

где

$$c_0 = \gamma_0^{-1}[\gamma_1 + (1 - \theta)\gamma_0],$$

$$c_1 = \gamma_0^{-1}[(1 - \theta)(1 - \delta)\nu + \theta\gamma_2],$$

$$c = \gamma_0^{-1}g^{-1}(1 - \theta)$$

и

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1 - \delta,$$

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 = \nu(1 - \nu)(1 - \delta)^2 - (1 + \delta)^2 G,$$

$$\gamma_0\gamma_2 = \delta G,$$

где  $G$  — некоторая неизвестная константа.

Дисперсии  $x_t$  и  $e_t$  имеют вид

$$\frac{V(x_t)}{\sigma_a^2} = \frac{(1-\theta)^2[(\gamma_0 + \gamma_2)(1 + \delta^2) + 2\gamma_1\delta]}{(\gamma_0 - \gamma_2)[(\gamma_0 + \gamma_2)^2 - \gamma_1^2]},$$

$$\frac{V(e_t)}{\sigma_a^2} = 1 + \frac{(1-\theta)^2\{(\gamma_0 + \gamma_2)[\gamma_0^2 + (\gamma - \gamma\delta - \gamma_2)^2] - 2\gamma_0\gamma_1(\gamma - \gamma\delta - \gamma_2)\}}{(\gamma_0 - \gamma_2)[(\gamma_0 + \gamma_2)^2 - \gamma_1^2]}.$$

Случай системы с запаздыванием представляет собой интерес, поскольку схемы без ограничений, дающие минимальную среднеквадратичную ошибку, часто требуют практически нереализуемых больших корректировок переменного знака. Чтобы показать, насколько сильно уменьшается дисперсия корректировок  $V(x_t)$  при использовании таких схем, был проведен расчет для случая  $g = 1$ ,  $f = 1$ ,  $\gamma = 0,4$ ,  $\theta = 0,6$  при  $\delta = 0,5$  и  $0,9$ .

Характеристики схемы без ограничения таковы: при  $\delta = 0,5$

$$-x_t = 1,07x_{t-1} + 0,27x_{t-2} + 1,33(e_t - 0,5e_{t-1}),$$

$$\frac{V(e_t)}{\sigma_a^2} = 1,16, \quad \frac{V(x_t)}{\sigma_a^2} = 6,13$$

Таблица 13.4

Сравнение схем регулирования с обратной связью с ограничением и без ограничений \*)

$\delta$	Увеличение $V(e_t)/\sigma_a^2$ , %	Уменьшение $V(x_t)/\sigma_a^2$ , %	Параметры регулятора		
			$c_0$	$c_1$	$c$
0,5	0	0	схема без ограничений		
			1,07	0,27	1,33
	0,2	49,1	0,88	0,24	1,19
	0,7	69,8	0,69	0,23	1,06
	2,8	90,0	0,24	0,20	0,74
0,9	0	0	схема без ограничений		
			1,07	0,27	1,33
	0,1	40,5	0,93	0,25	1,23
	0,7	71,7	0,68	0,23	1,05
	2,4	89,4	0,29	0,21	0,78

\*) Заметим, что, например, при  $\delta = 0,9$  89%-ное уменьшение  $V(x_t)$  до значения 1,02  $\sigma_a^2$  сопровождается только 2,14%-ным увеличением  $V(e_t)$ . — Прим. перев.

и при  $\delta = 0,9$

$$-x_t = 1,07x_{t-1} + 0,27x_{t-2} + 1,33(e_t - 0,9e_{t-1}),$$

$$\frac{V(e_t)}{\sigma_a^2} = 1,16, \quad \frac{V(x_t)}{\sigma_a^2} = 9,63.$$

Различные оптимальные схемы с ограничением приведены в табл. 13.4.

### 13.3. ВЫБОР ИНТЕРВАЛА ОТСЧЕТА

Дискретные системы регулирования рассмотренных выше типов могут не уступать в эффективности непрерывным системам, если правильно подобран интервал отсчета. Грубо говоря, мы хотим, чтобы интервал был настолько мал, чтобы между двумя последовательными отсчетами не происходило сколь угодно существенных изменений. Обычно поведение возмущения, которое должно пройти через часть системы, характеризует инерционность и динамические свойства системы, так что интервал отсчета явно или неявно берется пропорциональным постоянной (или постоянным) времени системы. В химических процессах, включающих реакцию и смешивание жидкостей, с типичными постоянными времени 2—3 ч допустимы весьма редкие отсчеты (например, ежечасно) и ручной контроль и регулировка. Напротив, в реакциях между газами подходящий интервал отсчета измеряется секундами, и необходимы автоматическое управление и корректировка. В некоторых случаях для получения подходящего интервала отсчета нужны эксперименты, а в других влияние величины интервала отсчета на характер регулирования оценивается весьма простым расчетом.

#### 13.3.1. Пример эффекта уменьшения частоты отсчетов

Чтобы продемонстрировать, какие нужны расчеты, предположим, что мы опять имеем дело с простой схемой, в которой для конкретного интервала отсчета шум можно представить процессом  $(0, 1, 1)$ , т. е.  $\nabla N_t = (1 - \theta B)a_t$ , а модель передаточной функции — системой первого порядка  $(1 - \delta B)y_t = g(1 - \delta)x_{t-1}$ . В этом случае, если мы применим оптимальную корректировку

$$x_t = -\frac{1 - \theta}{g(1 - \delta)}(1 - \delta B)e_t, \quad (13.3.1)$$

то отклонение от номинала будет равно  $e_t = a_t$ ; дисперсию отклонения  $\sigma_a^2$  обозначим  $\sigma_1^2$ .

На практике часто возникает вопрос: что будет, если отсчеты будут менее частыми? Чтобы ответить на него, мы дол-

жны рассмотреть влияние интервала отсчета на случайный процесс.

### 13.3.2. Влияние интервала отсчета на процесс ПСС (0, 1, 1)

Пусть наблюдения процесса делаются через «единичный» интервал и исследуется модель шума

$$\nabla N_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

с дисперсией  $\text{var}[a_t] = \sigma_a^2 = \sigma_1^2$ , где индекс 1 применяется для обозначения используемого интервала отсчета. Тогда автоковариации  $\gamma_h$  разностей  $\nabla N_t$  будут равны

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= (1 + \theta_1^2) \sigma_1^2, \\ \gamma_1 &= -\theta_1 \sigma_1^2, \\ \gamma_j &= 0, \quad j \geq 2.\end{aligned}\tag{13.3.2}$$

Обозначив  $\xi = (\gamma_0 + 2\gamma_1)/\gamma_1$ , получим

$$\xi = -(1 - \theta_1)^2/\theta_1,$$

т. е. при данных  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  параметр  $\lambda$  процесса ПСС может быть получен решением квадратного уравнения

$$(1 - \theta_1)^2 - \xi(1 - \theta_1) + \xi = 0.$$

Используется корень уравнения, лежащий в интервале  $-1 < \theta_1 < 1$ . Отметим, что

$$\sigma_1^2 = -\gamma_1/\theta_1.\tag{13.3.3}$$

Пусть теперь процесс  $N_t$  наблюдается с шагом в  $h$  единиц (где  $h$  положительное целое), и результирующий процесс обозначим  $M_t$ . Тогда

$$\begin{aligned}\nabla M_t &= N_t - N_{t-h} = (a_t + a_{t-1} + \dots + a_{t-h+1}) - \\ &\quad - \theta_1(a_{t-1} + a_{t-2} + \dots + a_{t-h}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla M_{t-h} &= N_{t-h} - N_{t-2h} = (a_{t-h} + a_{t-h-1} + \dots + a_{t-2h+1}) - \\ &\quad - \theta_1(a_{t-h-1} + \dots + a_{t-2h})\end{aligned}$$

и т. д. Автоковариации  $\gamma_h(h)$  разностей  $\nabla M_t$  имеют вид

$$\begin{aligned}\gamma_0(h) &= [(1 + \theta_1^2) + (h-1)(1 - \theta_1)^2] \sigma_1^2, \\ \gamma_1(h) &= -\theta_1 \sigma_1^2, \\ \gamma_j(h) &= 0, \quad j \geq 2.\end{aligned}\tag{13.3.4}$$

Отсюда следует, что  $M_t$  — также процесс ПСС (0, 1, 1):

$$\nabla M_t = (1 - \theta_h B) e_t,$$



где  $e_t$  — белый шум с дисперсией  $\sigma_h^2$ . Имеем

$$\frac{\gamma_0(h) + 2\gamma_1(h)}{\gamma_1(h)} = -\frac{h(1 - \theta_1)^2}{\theta_1},$$

так что

$$\frac{h(1 - \theta_1)^2}{\theta_1} = \frac{(1 - \theta_h)^2}{\theta_h}. \quad (13.3.5)$$

Далее, так как  $\gamma_1(h) = -\theta_h \sigma_h^2 = -\theta_1 \sigma_1^2$ , имеем

$$\frac{\sigma_h^2}{\sigma_1^2} = \frac{\theta_1}{\theta_h}. \quad (13.3.6)$$

Следовательно, показано, что при отсчете процесса ПСС (0, 1, 1) с шагом  $h$  получается другой процесс ПСС (0, 1, 1).

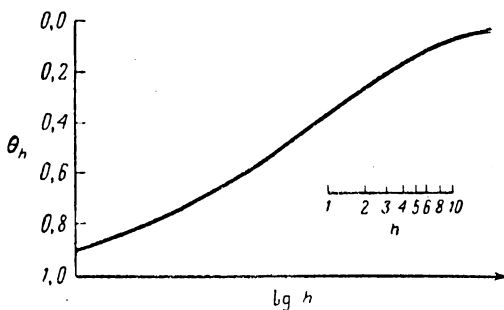


Рис. 13.6. Изменение интервала отсчета процесса ПСС (0, 1, 1). Параметр  $\theta_h$  для функции  $\lg h$ .

Из (13.3.5) можно получить значение параметра  $\theta_h$  для этого процесса, а из (13.3.6) — дисперсию  $\sigma_h^2$  этого процесса, выраженные через параметры  $\theta_1$  и  $\sigma_1^2$  исходного процесса.

На рис. 13.6 дан график  $\theta_h$  как функции  $\lg h$  и приведена шкала  $h$ . График позволяет найти эффект увеличения интервала отсчета данного процесса в любое целое число раз. Пусть, например, мы имеем процесс с параметрами  $\theta_1 = 0,5$  и  $\sigma_1^2 = 1$ . Используем график, чтобы найти значения соответствующих параметров  $\theta_2, \theta_4, \sigma_2^2, \sigma_4^2$  в случаях, когда интервал отсчета а) удвоен, б) учетверен. Отмечая на краю вспомогательного листа бумаги точки  $h = 1, h = 2, h = 4$  со шкалы графика, положим лист так, чтобы этот край был параллелен оси  $h$  и точка  $h = 1$  совпадала с точкой кривой для  $\theta_1 = 0,5$ . Ординаты кривой, соответствующие  $h = 2$  и  $h = 4$ , будут равны  $\theta_2$  и  $\theta_4$ . Находим

$$\theta_1 = 0,5, \quad \theta_2 = 0,38, \quad \theta_4 = 0,27.$$

Из (13.3.6) следует, что дисперсии обычно пропорциональны  $\theta$ , т. е.

$$\sigma_1^2 = 1,00, \quad \sigma_2^2 = 1,32, \quad \sigma_4^2 = 2,17.$$

Положим, что для первоначальной схемы с единичным интервалом динамическая константа равна  $\delta_1$  (индекс 1 опять обозначает интервал отсчета). Тогда, поскольку в реальном времени та же фиксированная постоянная времени  $T = -h/\ln \delta$  описывает все схемы, имеем

$$\delta_2 = \delta_1^2, \quad \delta_4 = \delta_1^4.$$

Схема, дающая минимальную среднеквадратичную ошибку для конкретного интервала отсчета  $h$ , будет

$$x_t(h) = -\frac{1 - \theta_h}{g(1 - \delta_1^h)} (1 - \delta_1^h B) e_t(h),$$

или

$$x_t(h) = -\frac{1 - \theta_h}{g} \left( 1 + \frac{\delta_1^h}{1 - \delta_1^h} \nabla \right) e_t(h). \quad (13.3.7)$$

Пусть, например,  $\theta_1 = 0,5$ , как и ранее, и  $\delta_1 = 0,8$ ; тогда  $\delta_2 = 0,64$ ;  $\delta_4 = 0,41$ . Получаем оптимальные схемы

$$h=1: \quad x_t(1) = -\frac{0,5}{g} (1 + 4\nabla) e_t(1), \quad \sigma_e^2 = 1,00, \quad g^2 \sigma_x^2 = 10,25;$$

$$h=2: \quad x_t(2) = -\frac{0,62}{g} (1 + 1,78\nabla) e_t(2), \quad \sigma_e^2 = 1,32, \quad g^2 \sigma_x^2 = 5,50;$$

$$h=4: \quad x_t(4) = -\frac{0,73}{g} (1 + 0,69\nabla) e_t(4), \quad \sigma_e^2 = 2,17, \quad g^2 \sigma_x^2 = 3,84.$$

Как и следовало ожидать, при увеличении интервала отсчета и уменьшении роли динамики системы вклад интегрального регулирования увеличивается и отношение пропорционального регулирования к интегральному заметно уменьшается. Ранее отмечалось, что в некоторых случаях излишне большая дисперсия корректировок  $\sigma_x^2$  может быть неприемлемой. Индикатором этого свойства схем являются значения  $g\sigma_x^2$ . Меньшее значение  $\sigma_x^2$  само по себе не оправдывает, конечно, выбор  $h=4$ . Применение схемы регулирования с ограничением (подобно описанной в разд. 13.2) с  $h=1$  дало бы резкое уменьшение  $\sigma_x$  с незначительным увеличением дисперсии выхода. Например, из табл. 13.3 для  $\delta=0,8$ ,  $100Q=20$  мы находим, что при 5%-ном увеличении дисперсии выхода до значения  $(1+\lambda^2 Q)\sigma_1^2 \parallel = 1,05\sigma_1^2$  дисперсию входа схемы с  $h=1$  можно уменьшить до 22% от ее значения без ограничений, так что  $g^2 \sigma_x^2 = 10,25 \times$

$\times 0,22 = 2,26$ . Из (13.2.28) получаем, что при  $h = 1$  схема с ограничением имеет вид

$$x_t = 0,40x_{t-1} - 0,09x_{t-2} - 0,56 \left[ \frac{0,5}{g} (1 + 4V) \right] \varepsilon_t(1),$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = 1,05, \quad g^2 \sigma_x^2 = 2,26.$$

На практике можно указать ряд альтернативных схем с их характеристиками и выбрать конкретную схему для данной проблемы с позиции экономичности.

В общем увеличение дисперсии выхода, вызываемое увеличением интервала отсчета, может быть скомпенсировано экономическим выигрышем, например менее частыми наблюдениями.

**Часть V**

**Сборник**

**вспомогательных материалов**

**(программы 1—4 и ряды A — G см. выпуск 1)**

## ПРОГРАММА 5

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

#### 5.1. Общее описание

Программа вводит два временных ряда, образует из них разностные ряды, осуществляет выравнивающее спектр преобразование каждого ряда, в результате чего получается пара временных рядов  $(\alpha_t, \beta_t)$ , и затем вычисляет следующие выборочные величины:

- 1) автокорреляционную функцию  $r_{\alpha\alpha}(k)$  и взаимную корреляционную функцию  $r_{\alpha\beta}(k)$  выравненных рядов;
- 2) оценки  $\hat{v}_k$  весов отклика на единичный импульс модели

$$y_t = v_0 x_t + v_1 x_{t-1} + \dots + v_h x_{t-h} + n_t,$$

где  $n_t$  — компонента, описывающая шум;

- 3) дисперсию шума  $s_n^2$ , автокорреляционную функцию  $r_{nn}(k)$  и частную автокорреляционную функцию  $\hat{\phi}_{11}$ .

#### 5.2. Входные данные

Минимальная информация, необходимая для вычислений, включает

значения временного ряда на входе	$\{X_t\}, t = 1, 2, \dots, N,$
значения временного ряда на выходе	$\{Y_t\}, t = 1, 2, \dots, N,$
число наблюдений каждого ряда	$N,$
степень разности	$d,$
число параметров в выравнивающем	
спектр операторе авторегрессии	$p,$
число параметров в выравнивающем	
спектр операторе скользящего среднего	$q,$
значения параметров оператора авторегрессии	$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p),$
значения параметров оператора скользящего среднего	$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q),$
число оцениваемых весов $v_k$	$h$
число весов $v_k$ для генерирования	
ряда шума $n_t$	$g,$
параметры преобразования рядов	$\lambda_x, \lambda_y, m_x, m_y.$

### 5.3. Вычисления

*Взятие разностей и выравнивание спектра.* Входной ряд  $X_t$  и выходной ряд  $Y_t$  могут сначала быть преобразованы в  $X'_t$ ,  $Y'_t$  при помощи программы 1 (описанной в конце 1-го выпуска этой книги), а затем после нахождения  $d$ -х разностей сведены к  $n = N - d$  значениям рядов

$$x_t = \begin{cases} \nabla^d X'_t & d > 0, \\ X'_t - \bar{X}' & d = 0, \end{cases}$$

$$y_t = \begin{cases} \nabla^d Y'_t & d > 0, \\ Y'_t - \bar{Y}' & d = 0, \end{cases}$$

где  $X'$ ,  $Y'$  — средние арифметические значения рядов  $X'_t$  и  $Y'_t$ . Разностные ряды затем подвергаются выравниванию спектра, что приводит к новым рядам  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$  (по  $n' = n - p$  значений в каждом) в соответствии с формулами

$$\alpha_t = x_t - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \alpha_{t-j},$$

$$\beta_t = y_t - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \beta_{t-j}.$$

*Автокорреляционная функция выравненного выхода*

$$r_{\beta\beta}(k) = \frac{\sum_{j=1}^{n'-k} (\beta_j - \bar{\beta})(\beta_{j+k} - \bar{\beta})}{\sum_{j=1}^{n'} (\beta_j - \bar{\beta})^2} \quad k = 0, 1, \dots, h.$$

*Взаимная корреляционная функция выравненных входа и выхода*

$$r_{\alpha\beta}(k) = \frac{c_{\alpha\beta}(k)}{s_\alpha s_\beta},$$

где

$$c_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n'-k} (\alpha_j - \bar{\alpha})(\beta_{j+k} - \bar{\beta}) \quad k = 0, 1, \dots, h,$$

$$c_{\alpha\beta}(-k) = c_{\beta\alpha}(k) \quad k = 1, 2, \dots, h,$$

$$s_\alpha = \sqrt{c_{\alpha\alpha}(0)},$$

$$s_\beta = \sqrt{c_{\beta\beta}(0)}.$$

### Оценка функции отклика на единичный импульс

$$\hat{v}_k = \frac{s_\beta}{s_\alpha} r_{\alpha\beta}(k) \quad k = 0, 1, \dots, h.$$

Дисперсия и автокорреляционная функция шума. Пользуясь оценками весов  $\hat{v}_k$  отклика на единичный импульс, можно восстановить значения шума  $n_t$  при помощи формулы

$$n_t = y_t - \hat{v}_0 x_t - \hat{v}_1 x_{t-1} - \dots - \hat{v}_g x_{t-g}$$

и затем по значениям  $n_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, (n - g)$  вычислить дисперсию, автокорреляционную и частную автокорреляционную функции по программе 1.

### 5.4. Выходные данные

В них должна содержаться вся входная информация, а также

автокорреляционная функция  
выравненного выхода

$$r_{\beta\beta}(k), \quad k = 0, 1, \dots, h,$$

взаимная корреляционная функ-

$$r_{\alpha\beta}(k), \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm h,$$

ция выравненных входа и выхода  
стандартные отклонения вырав-

$$s_\alpha, \quad s_\beta,$$

ненных входа и выхода  
выборочные веса отклика на еди-

$$\hat{v}_k, \quad k = 0, 1, \dots, h,$$

ничный импульс

$$s_n^2,$$

дисперсия шума

автокорреляционная функция

$$r_{nn}(k), \quad k = 0, 1, \dots, h,$$

шума

частная автокорреляционная

$$\hat{\phi}_{ll}, \quad l = 1, 2, \dots, h,$$

функция шума

$$\{n_t\}, \quad t = 1, 2, \dots, (n - g).$$

значения шума

### 5.5. Дополнения

Чтобы придать программе большую общность, можно ввести управляющие параметры, определяющие режим работы программы.

## ПРОГРАММА 6

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

#### 6.1. Общее описание

Определим  $x_t$  и  $y_t$  так же, как в программе 5, и воспользуемся оценками весов отклика на единичный импульс и автокорреляционной функции шума, полученными в этой программе.

Тогда программа 6 позволяет рассчитать для модели передаточной функции — шума

$$y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) x_{t-b} + \phi^{-1}(B) \theta(B) a_t$$

следующие выборочные величины:

- 1) начальные оценки  $\delta_0 = (\delta_{10}, \delta_{20}, \dots, \delta_{r0})$  „левосторонних“ параметров в модели передаточной функции;
- 2) начальные оценки  $\omega_0 = (\omega_{00}, \omega_{10}, \dots, \omega_{s0})$  „правосторонних“ параметров в модели передаточной функции;
- 3) начальные оценки  $\phi_0 = (\phi_{10}, \phi_{20}, \dots, \phi_{p0})$  параметров авторегрессии модели шума;
- 4) начальные оценки  $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{q0})$  параметров скользящего среднего модели шума;
- 5) начальную оценку  $\hat{\sigma}_a^2$  дисперсии белого шума.

## 6.2. Входные данные

Минимальная информация, необходимая для проведения расчетов, включает

число „левосторонних“ параметров передаточной функции

$r$ ,

число „правосторонних“ параметров передаточной функции

$s + 1$ ,

число параметров авторегрессии шума

$p$ ,

число параметров скользящего среднего шума

$q$ ,

параметр задержки

$b$ ,

число весов в отклике на единичный импульс

$f \geq b + s + r$ ,

веса отклика на единичный импульс

$\hat{\sigma}_k, k = 1, \dots, f$ ,

автокорреляции шума

$r_{nn}(k), k = 1, \dots, (p + q)$ ,

максимально допустимое число итераций

$I$ .

## 6.3. Вычисления

Оценки  $\hat{\delta}_0$  „левосторонних“ параметров передаточной функции. Если  $r > 0$ , решаем систему уравнений

$$A\hat{\delta}_0 = h,$$



где

$$A_{ij} = \begin{cases} \hat{\sigma}_{b+s+i-j}, & s+i \geq j, \\ 0, & s+i < j, \end{cases}$$

$$h_i = \hat{\sigma}_{b+s+i},$$

$$i, j = 1, 2, \dots, r.$$

Оценки  $\hat{\omega}_0$  „правосторонних“ параметров передаточной функции

$$\hat{\omega}_{00} = \hat{\sigma}_b.$$

Если  $r \geq s$ ,

$$\hat{\omega}_{j0} = \sum_{i=1}^j \hat{\delta}_i \hat{\sigma}_{b+j-i} - \hat{\sigma}_{b+j}.$$

Если  $r < s$ ,

$$\hat{\omega}_{j0} = \sum_{i=1}^j \hat{\delta}_i \hat{\sigma}_{b+j-i} - \hat{\sigma}_{b+j}, \quad j = 1, 2, \dots, r;$$

$$\hat{\omega}_{j0} = \sum_{i=1}^r \hat{\delta}_i \hat{\sigma}_{b+j-i} - \hat{\sigma}_{b+j}, \quad j = r+1, \dots, s.$$

Параметры модели шума (3), (4) и (5) вычисляются по автокорреляциям  $r_{nn}(k)$  точно таким же образом, как в программе 2 из первого выпуска этой книги.

#### 6.4. Выходные данные

Они должны включать всю входную информацию и, кроме того,

начальные оценки „левосторонних“ параметров передаточной функции

$$\hat{\delta}_{10}, \hat{\delta}_{20}, \dots, \hat{\delta}_{r0},$$

начальные оценки „правосторонних“ параметров передаточной функции

$$\hat{\omega}_{00}, \hat{\omega}_{10}, \dots, \hat{\omega}_{s0},$$

начальные оценки параметров авторегрессии шума

$$\hat{\phi}_{10}, \hat{\phi}_{20}, \dots, \hat{\phi}_{p0},$$

начальные оценки параметров скользящего среднего шума

$$\hat{\theta}_{10}, \hat{\theta}_{20}, \dots, \hat{\theta}_{q0}.$$

Можно выдавать оценки параметров скользящего среднего после каждой итерации для проверки скорости сходимости. Можно повторять все выходные результаты для различных степеней разности и для всех моделей до модели  $(r, s, b, p, q)$  включительно.

## 6.5. Дополнение

Для придания большей общности целесообразно использовать управляющие параметры, определяющие режим работы программы. На практике вычислительные алгоритмы этой программы и программы 5 могут быть объединены в одну общую программу, позволяющую по желанию осуществлять как идентификацию, так и предварительное оценивание модели передаточной функции.

## ПРОГРАММА 7

### ОЦЕНИВАНИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

#### 7.1. Общее описание

Программа вводит начальные оценки параметров, найденные в программе 6. Затем она вычисляет следующие выборочные оценки.

1) Оценки наименьших квадратов параметров  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  и  $\sigma_a^2$  в модели передаточной функции — шума, найденной в программе 6.

2) Стандартные ошибки оценок и оценку их корреляционной матрицы.

3) Автокорреляции остаточных ошибок  $\hat{a}_t$ , соответствующих оценкам наименьших квадратов, и соответствующую  $\chi^2$ -статистику.

4) Взаимную корреляционную функцию остаточных ошибок  $\hat{a}_t$  и выравненного входа и связанную с ней  $\chi^2$ -статистику.

#### 7.2. Входные параметры

Минимальная входная информация, необходимая для проведения расчетов, включает

$\{X_t\}$ ,  $\{Y_t\}$ ,  $N$ ,  $d$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $m_x$ ,  $m_y$  (определены в программе 5),  
 $r$ ,  $s$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $q$  (определены в программе 6),

максимальную задержку автокорреляций и взаимных корреляций

$K$ ,

начальные оценки „левосторонних“ параметров передаточной функции

$\hat{\delta}_{10}$ ,  $\hat{\delta}_{20}$ , ...,  $\hat{\delta}_{r0}$ ,

начальные оценки „правосторонних“ параметров передаточной функции

$\hat{\omega}_{00}$ ,  $\hat{\omega}_{10}$ , ...,  $\hat{\omega}_{s0}$ ,

начальные оценки параметров авторегрессии шума

$\hat{\phi}_{10}$ ,  $\hat{\phi}_{20}$ , ...,  $\hat{\phi}_{p0}$ ,

начальные оценки параметров

скользящего среднего шума  $\hat{\theta}_{10}, \hat{\theta}_{20}, \dots, \hat{\theta}_{q0}$ .

В дополнение следующие параметры:

$$(p', d', q'),$$

$$\phi'_1, \dots, \phi'_{p'},$$

$$\theta'_1, \dots, \theta'_{q'}.$$

определяют выборочную модель шума для входного ряда  $\{x_t\}$ .

### 7.3. Вычисления

*Вычисления суммы квадратов остаточных ошибок.* Пусть даны ряды  $x_t$  и  $y_t$ . Тогда для данных значений параметров  $(\delta, \omega, \phi, \theta)$  вычисление остаточных ошибок  $a_t$  осуществляется в 3 этапа.

$$(a) \quad y_t = \delta_1 y_{t-1} + \dots + \delta_r y_{t-r} + \omega_0 x_{t-b} - \\ - \omega_1 x_{t-b-1} - \dots - \omega_s x_{t-b-s}$$

для  $t \geq b + s + 1$ ; предшествующие значения  $y_t$  приравниваются нулю.

$$(б) \quad n_t = y_t - y_t.$$

$$(в) \quad a_t = n_t - \phi_1 n_{t-1} - \dots - \phi_p n_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}$$

для  $t \geq s + b + p + 1$ ; предшествующие значения  $a_t$  приравниваются нулю.

*Вычисления оценок наименьших квадратов.* Проводятся, как в программе 3 из 1-го выпуска этой книги.

*Стандартные ошибки и корреляционная матрица.* Оценка остаточной дисперсии получена по величине суммы квадратов в момент достижения сходимости по формуле

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{n - r - 2s - b - 2p - q - 1} S(\hat{\delta}, \hat{\omega}, \hat{\phi}, \hat{\theta}).$$

Ковариационная и корреляционная матрицы оценок находятся так же, как описано в разд. «Стандартные ошибки и корреляционная матрица» в программе 3.

*Диагностическая проверка по автокорреляциям.* Пользуясь остаточными ошибками, соответствующими оценкам наименьших квадратов, можно найти остаточные автокорреляции

$$r_{aa}(k) = c_{aa}(k)/c_{aa}(0) \quad k = 0, 1, \dots, K,$$

где

$$(n - s - b - p - 1) c_{aa}(k) = \sum_{t=s+b+p+1}^{n-k} (a_t - \bar{a})(a_{t+k} - \bar{a}).$$

$\chi^2$ -статистика вычисляется как

$$P = (n - s - b - p) \sum_{k=1}^K r_{\hat{a}\hat{a}}^2(k)$$

и сравнивается с  $\chi^2$ -распределением с  $K - p - q$  степенями свободы.

*Диагностическая проверка по взаимным корреляциям.* Взаимные корреляции между выравненным входным рядом  $\alpha_t$ , полученным по формуле

$$\alpha_t = x_t - \phi'_1 x_{t-1} - \dots - \phi'_{p'} x_{t-p'} + \theta'_1 \alpha_{t-1} + \dots + \theta'_{q'} \alpha_{t-q'}$$

для  $t \geq p' + 1$  ( $\alpha_t = 0$  для меньших  $t$ ), и рядом остаточных ошибок  $\hat{a}_t$  вычисляются как

$$r_{\hat{a}\hat{a}}(k) = c_{\hat{a}\hat{a}}(k) / \sqrt{c_{\hat{a}\hat{a}}(0) c_{\alpha\alpha}(0)} \quad k = 0, 1, \dots, K,$$

где

$$c_{\hat{a}\hat{a}} = \frac{1}{n - v} \sum_{t=v+1}^{n-k} (\alpha_t - \bar{\alpha}) (\hat{a}_{t+k} - \bar{\hat{a}}),$$

$$c_{\alpha\alpha}(0) = \frac{1}{n - p'} \sum_{t=p'+1}^n (\alpha_t - \bar{\alpha})^2,$$

$$v = \max(s + b + p, p').$$

$\chi^2$ -статистика вычисляется согласно формуле

$$Q = (n - v) \sum_{k=0}^K r_{\hat{a}\hat{a}}^2(k)$$

и сравнивается с  $\chi^2$ -распределением с  $K - r - s$  степенями свободы.

#### 7.4. Выходные данные

Они должны включать всю входную информацию, а также

$$\hat{\delta}, \hat{\omega}, \hat{\phi}, \theta, S(\hat{\delta}, \hat{\omega}, \hat{\phi}, \hat{\theta})$$

и следующую информацию в момент достижения сходимости:

оценку остаточной дисперсии  $\hat{\sigma}_a^2$ ,

ковариационную матрицу

оценок

$V$ ,

стандартные ошибки оценок  $s = (s_1, s_2, \dots, s_{r+s+p+q+1})$ ,

корреляционную матрицу оценок

$R$ ,

остаточные ошибки, соответствующие оценкам наименьших квадратов

остаточные автокорреляции

$\chi^2$ -статистику

число степеней свободы

взаимные корреляции выровненного входа с остаточными ошибками

$\chi^2$ -статистику

число степеней свободы

$\{\hat{a}_t\}, t = s + b + p + 1, \dots, n,$

$r_{aa}(k), k = 1, 2, \dots, K,$

$P,$

$K - p - q,$

$r_{aa}(k), k = 0, 1, \dots, K,$

$Q,$

$K - r - s - 1.$

### 7.5. Дополнения

Для достижения большей общности целесообразно ввести управляющие параметры, определяющие режим работы программы. Можно включить также процедуру табулирования  $S(\delta, \omega, \phi, \theta)$  в окрестности минимума путем вычисления этой функции в узлах сетки, центрированной по значениям оценок наименьших квадратов. Программа легко обобщается на случай, когда необходимо одновременно оценивать постоянный член  $\theta_0$ .

# ТАБЛИЦЫ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Ряд J. Данные о газовой печи \*)

$t$	$X_t$	$Y_t$	$t$	$X_t$	$Y_t$	$t$	$X_t$	$Y_t$
1	-0,109	53,8	39	0,331	50,0	77	-0,944	56,0
2	0,000	53,6	40	0,645	51,1	78	-0,570	56,9
3	0,178	53,5	41	0,960	51,8	79	-0,431	57,5
4	0,339	53,5	42	1,409	51,9	80	-0,577	57,3
5	0,373	53,4	43	2,670	51,7	81	-0,960	56,6
6	0,441	53,1	44	2,834	51,2	82	-1,616	56,0
7	0,461	52,7	45	2,812	50,0	83	-1,875	55,4
8	0,348	52,4	46	2,483	48,3	84	-1,891	55,4
9	0,127	52,2	47	1,929	47,0	85	-1,746	56,4
10	-0,180	52,0	48	1,485	45,8	86	-1,474	57,2
11	-0,588	52,0	49	1,214	45,6	87	-1,201	58,0
12	-1,055	52,4	50	1,239	46,0	88	-0,927	58,4
13	-1,421	53,0	51	1,608	46,9	89	-0,524	58,4
14	-1,520	54,0	52	1,905	47,8	90	0,040	58,1
15	-1,302	54,9	53	2,023	48,2	91	0,788	57,7
16	-0,814	56,0	54	1,815	48,3	92	0,943	57,0
17	-0,475	56,8	55	0,535	47,9	93	0,930	56,0
18	-0,193	56,8	56	0,122	47,2	94	1,006	54,7
19	0,088	56,4	57	0,009	47,2	95	1,137	53,2
20	0,435	55,7	58	0,164	48,1	96	1,198	52,1
21	0,771	55,0	59	0,671	49,4	97	1,054	51,6
22	0,866	54,3	60	1,019	50,6	98	0,595	51,0
23	0,875	53,2	61	1,146	51,5	99	-0,080	50,5
24	0,891	52,3	62	1,155	51,6	100	-0,314	50,4
25	0,987	51,6	63	1,112	51,2	101	-0,288	51,0
26	1,263	51,2	64	1,121	50,5	102	-0,153	51,8
27	1,775	50,8	65	1,223	50,1	103	-0,109	52,4
28	1,976	50,5	66	1,257	49,8	104	-0,187	53,0
29	1,934	50,0	67	1,157	49,6	105	-0,255	53,4
30	1,866	49,2	68	0,913	49,4	106	-0,229	53,6
31	1,832	48,4	69	0,620	49,3	107	-0,007	53,7
32	1,767	47,9	70	0,255	49,2	108	0,254	53,8
33	1,608	47,6	71	-0,280	49,3	109	0,330	53,8
34	1,265	47,5	72	-1,080	49,7	110	0,102	53,8
35	0,790	47,5	73	-1,551	50,3	111	-0,423	53,3
36	0,360	47,6	74	-1,799	51,3	112	-1,139	53,0
37	0,115	48,1	75	-1,825	52,8	113	-2,275	52,9
38	0,088	49,0	76	-1,456	54,4	114	-2,594	53,4

\*)  $X=0,60-0,04$  (расход газа в кубических футах в минуту).  $Y\%$  — процентное содержание  $CO_2$  в газе на выходе печи. Шаг выборки 9 с;  $N=296$  отсчетов.

## Продолжение ряда I

$t$	$X_t$	$Y_t$	$t$	$X_t$	$Y_t$	$t$	$X_t$	$Y_t$
115	-2,716	54,6	155	0,517	53,6	195	0,416	52,0
116	-2,510	56,4	156	0,566	53,2	196	-0,336	51,4
117	-1,790	58,0	157	0,560	53,0	197	-0,959	51,0
118	-1,346	59,4	158	0,573	52,8	198	-1,813	50,9
119	-1,081	60,2	159	0,592	52,3	199	-2,378	52,4
120	-0,910	60,0	160	0,671	51,9	200	-2,499	53,5
121	-0,876	59,4	161	0,933	51,6	201	-2,473	55,6
122	-0,885	58,4	162	1,337	51,6	202	-2,330	58,0
123	-0,800	57,6	163	1,460	51,4	203	-2,053	59,5
124	-0,544	56,9	164	1,353	51,2	204	-1,739	60,0
125	-0,416	56,4	165	0,772	50,7	205	-1,261	60,4
126	-0,271	56,0	166	0,218	50,0	206	-0,569	60,5
127	0,000	55,7	167	-0,237	49,4	207	-0,137	60,2
128	0,403	55,3	168	-0,714	49,3	208	-0,024	59,7
129	0,841	55,0	169	-1,099	49,7	209	-0,050	59,0
130	1,285	54,4	170	-1,269	50,6	210	-0,135	57,6
131	1,607	53,7	171	-1,175	51,8	211	-0,276	56,4
132	1,746	52,8	172	-0,676	53,0	212	-0,534	55,2
133	1,683	51,6	173	0,033	54,0	213	-0,871	54,5
134	1,485	50,6	174	0,556	55,3	214	-1,243	54,1
135	0,993	49,4	175	0,643	55,9	215	-1,439	54,1
136	0,648	48,8	176	0,484	55,9	216	-1,422	54,4
137	0,577	48,5	177	0,109	54,6	217	-1,175	55,5
138	0,577	48,7	178	-0,310	53,5	218	-0,813	56,2
139	0,632	49,2	179	-0,697	52,4	219	-0,634	57,0
140	0,747	49,8	180	-1,047	52,1	220	-0,582	57,3
141	0,900	50,4	181	-1,218	52,3	221	-0,625	57,4
142	0,993	50,7	182	-1,183	53,0	222	-0,713	57,0
143	0,968	50,9	183	-0,873	53,8	223	-0,848	56,4
144	0,790	50,7	184	-0,336	54,6	224	-1,039	55,9
145	0,399	50,5	185	0,063	55,4	225	-1,346	55,5
146	-0,161	50,4	186	0,084	55,9	226	-1,628	55,3
147	-0,553	50,2	187	0,000	55,9	227	-1,619	55,2
148	-0,603	50,4	188	0,001	55,2	228	-1,149	55,4
149	-0,424	51,2	189	0,209	54,4	229	-0,448	56,0
150	-0,194	52,3	190	0,556	53,7	230	-0,160	56,5
151	-0,049	53,2	191	0,782	53,6	231	-0,007	57,1
152	0,060	53,9	192	0,858	53,6	232	-0,092	57,3
153	0,161	54,1	193	0,918	53,2	233	-0,620	56,8
154	0,301	54,0	194	0,862	52,5	234	-1,086	55,6

Продолжение ряда J

$t$	$X_t$	$Y_t$	$t$	$X_t$	$Y_t$	$t$	$X_t$	$Y_t$
235	-1,525	55,0	256	0,603	54,0	277	-0,158	54,9
236	-1,858	54,1	257	0,943	53,0	278	-0,033	54,9
237	-2,029	54,3	258	1,223	52,0	279	0,102	54,8
238	-2,024	55,3	259	1,249	51,6	280	0,251	54,4
239	-1,961	56,4	260	0,824	51,6	281	0,280	53,7
240	-1,952	57,2	261	0,102	51,1	282	0,000	53,3
241	-1,794	57,8	262	0,025	50,4	283	-0,493	52,8
242	-1,302	58,3	263	0,382	50,0	284	-0,759	52,6
243	-1,030	58,6	264	0,922	50,0	285	-0,824	52,6
244	-0,918	58,8	265	1,032	52,0	286	-0,740	53,0
245	-0,798	58,8	266	0,866	54,0	287	-0,528	54,3
246	-0,867	58,6	267	0,527	55,1	288	-0,204	56,0
247	-1,047	58,0	268	0,093	54,5	289	0,034	57,0
248	-1,123	57,4	269	-0,458	52,8	290	0,204	58,0
249	-0,876	57,0	270	-0,748	51,4	291	0,253	58,6
250	-0,395	56,4	271	-0,947	50,8	292	0,195	58,5
251	0,185	56,3	272	-1,029	51,2	293	0,131	58,3
252	0,662	56,4	273	-0,928	52,0	294	0,017	57,8
253	0,709	56,4	274	-0,645	52,8	295	-0,182	57,3
254	0,605	56,0	275	-0,424	53,8	296	-0,262	57,0
255	0,501	55,2	276	-0,276	54,5			

Ряд К. Искусственные динамические данные для двух входных каналов \*)

$t$	$X_{1t}$	$X_{2t}$	$Y_t$	$t$	$X_{1t}$	$X_{2t}$	$Y_t$
-2			58,3	10			65,9
-1	0	0	61,8	11			70,9
0			64,2	12	-1	-1	65,8
1			62,1	13			57,6
2	-1	1	55,1	14			56,1
3			50,6	15			58,2
4			47,8	16			61,7
5			49,7	17	1	1	59,2
6			51,6	18			57,9
7	1	-1	58,5	19			61,3
8			61,5				
9			63,3				

\*) 64 наблюдения.



Продолжение ряда К

$t$	$X_{1t}$	$X_{2t}$	$Y_t$	$t$	$X_{1t}$	$X_{2t}$	$Y_t$
20			60,8	40			49,7
21			63,6	41			53,1
22	1	-1	69,5	42	1	-1	50,2
23			69,3	43			51,7
24			70,5	44			57,4
25			68,0	45			62,6
26			68,1	46			65,8
27	1	1	65,0	47	-1	-1	61,5
28			71,9	48			61,5
29			64,8	49			56,8
30			65,8	50			62,3
31			67,4	51			57,7
32	-1	-1	64,7	52	-1	1	54,0
33			65,7	53			45,2
34			67,5	54			51,9
35			58,2	55			45,6
36			57,0	56			46,2
37	-1	1	54,7	57	1	1	50,2
38			54,9	58			54,6
39			48,4	59			55,6
				60			60,4
				61	0	0	59,4

Ряд L. Данные опытной схемы \*)

$t$	$x_t$	$e_t$	$t$	$x_t$	$e_t$	$t$	$x_t$	$e_t$
1	30	-4	9	20	-2	17	-70	6
2	0	-2	10	50	-6	18	30	0
3	-10	0	11	-10	-2	19	-20	2
4	0	0	12	-55	4	20	10	0
5	-40	4	13	0	2	21	0	0
6	0	2	14	10	0	22	0	0
7	-10	2	15	0	-2	23	20	-2
8	10	0	16	10	-2	24	30	-4

\*) 312 наблюдений.

$t$	$x_t$	$e_t$	$t$	$x_t$	$e_t$	$t$	$x_t$	$e_t$
25	0	-2	65	10	-2	105	55	-4
26	-10	0	66	10	-2	106	0	2
27	-20	2	67	10	-2	107	-90	8
28	-30	4	68	-30	0	108	40	0
29	0	2	69	0	0	109	0	0
30	10	0	70	-10	2	110	80	-8
31	20	-2	71	-10	3	111	-20	-2
32	-10	0	72	15	0	112	-10	0
33	0	0	73	20	-2	113	-70	6
34	20	-2	74	-50	4	114	-30	6
35	10	-2	75	20	0	115	-10	4
36	-10	0	76	0	0	116	30	-1
37	0	0	77	0	0	117	-5	0
38	0	0	78	0	0	118	-60	6
39	0	0	79	0	0	119	70	-4
40	0	0	80	-40	4	120	40	-6
41	0	0	81	-100	12	121	10	-4
42	0	0	82	0	8	122	20	-4
43	20	-2	83	0	-12	123	10	-3
44	-50	4	84	50	-15	124	0	-2
45	20	0	85	85	-15	125	-70	6
46	0	0	86	5	-12	126	50	-2
47	0	0	87	40	-14	127	30	-4
48	40	-4	88	10	-8	128	0	-2
49	0	-2	89	-60	2	129	-10	0
50	50	-6	90	-50	6	130	0	0
51	-40	0	91	-50	8	131	-40	4
52	-50	3	92	40	0	132	0	2
53	-60	6	93	0	0	133	-10	2
54	50	-2	94	0	0	134	10	0
55	-10	0	95	-20	2	135	0	0
56	40	-4	96	-30	4	136	80	-8
57	40	-6	97	-60	8	137	-80	4
58	-30	0	98	-20	6	138	20	4
59	20	-2	99	-30	6	139	20	0
60	-30	2	100	30	0	140	-10	2
61	10	0	101	-40	4	141	10	0
62	-20	2	102	80	-6	142	0	0
63	30	-2	103	-40	0	143	-20	2
64	-50	4	104	-20	2	144	20	-1

$t$	$x_t$	$e_t$	$t$	$x_t$	$e_t$	$t$	$x_t$	$e_t$
145	55	-6	185	30	0	225	10	2
146	0	-3	186	-20	2	226	10	2
147	25	-4	187	-30	4	227	-30	4
148	20	-4	188	20	0	228	-20	4
149	-60	4	189	60	-6	229	40	-2
150	-40	6	190	-10	-2	230	10	-2
151	10	4	191	30	-4	231	10	-2
152	20	0	192	-40	2	232	10	-2
153	60	-6	193	30	-2	233	-100	12
154	-50	2	194	-20	1	234	10	6
155	-10	2	195	5	0	235	45	-2
156	-30	4	196	-20	2	236	30	-4
157	20	0	197	-30	4	237	30	-5
158	0	0	198	20	0	238	-15	-1
159	20	-2	199	10	-1	239	-5	0
160	10	-2	200	-15	1	240	10	-1
161	10	-2	201	-75	8	241	-85	8
162	10	-22	202	-40	8	242	0	4
163	50	-6	203	-40	6	243	0	0
164	-30	0	204	90	-6	244	60	-4
165	-30	6	205	90	-12	245	40	-6
166	-90	12	206	80	-14	246	-30	0
167	60	0	207	-45	-2	247	-40	4
168	-40	4	208	-10	0	248	-40	6
169	20	0	209	-40	4	249	50	-2
170	0	0	210	40	-2	250	10	-2
171	20	-2	211	-90	8	251	30	-4
172	10	-2	212	40	0	252	-40	2
173	-30	2	213	0	0	253	10	0
174	-30	4	214	0	0	254	-40	4
175	0	2	215	0	0	255	40	-2
176	50	-4	216	20	-2	256	-30	2
177	-60	4	217	90	-10	257	-50	6
178	20	0	218	30	-8	258	0	3
179	0	0	219	20	-6	259	-45	6
180	40	-8	220	30	-6	260	-20	5
181	80	-12	221	30	-6	261	-25	4
182	20	-8	222	30	-6	262	35	-2
183	-100	6	223	30	-6	263	70	8
184	-30	6	224	-90	6	264	-10	-5

$t$	$x_t$	$e_t$	$t$	$x_t$	$e_t$	$t$	$x_t$	$e_t$
265	100	-20	281	-110	13	297	-60	8
266	-20	-8	282	15	4	298	40	0
267	-40	0	283	30	-2	299	-20	2
268	-20	2	284	0	-1	300	130	-12
269	10	0	285	25	-3	301	-20	-4
270	0	0	286	-5	-1	302	0	-2
271	0	0	287	-15	1	303	30	-4
272	-20	2	288	45	-4	304	-20	0
273	-50	6	289	40	-6	305	60	6
274	50	-2	290	-50	2	306	10	-4
275	30	-4	291	-10	2	307	-10	1
276	60	-8	292	-50	6	308	-25	2
277	-40	0	293	20	1	309	0	1
278	-20	2	294	5	0	310	15	-1
279	-10	2	295	-40	4	311	-5	0
280	10	0	296	0	6	312	0	0

Ряд М. Данные о сбыте с упреждающим индикатором \*)

$t$	Упреждающий индикатор $X_t$	Сбыт $Y_t$	$t$	Упреждающий индикатор $X_t$	Сбыт $Y_t$	$t$	Упреждающий индикатор $X_t$	Сбыт $Y_t$
1	10,01	200,1	14	11,20	203,5	27	11,59	220,5
2	10,07	199,5	15	10,74	204,9	28	10,96	223,8
3	10,32	199,4	16	10,56	207,1	29	11,40	222,8
4	9,75	198,9	17	10,48	210,5	30	11,02	223,8
5	10,33	199,0	18	10,77	210,5	31	11,01	221,7
6	10,13	200,2	19	11,33	209,8	32	11,23	222,3
7	10,36	198,6	20	10,96	208,8	33	11,33	220,8
8	10,32	200,0	21	11,16	209,5	34	10,83	219,4
9	10,13	200,3	22	11,70	213,2	35	10,84	220,1
10	10,16	201,2	23	11,39	213,7	36	11,14	220,6
11	10,58	201,6	24	11,42	215,1	37	10,38	218,9
12	10,62	201,5	25	11,94	218,7	38	10,90	217,8
13	10,86	201,5	26	11,24	219,8	39	11,05	217,7

\*) 150 наблюдений.

Продолжение ряда М

$t$	Упре- ждающий индикатор $X_t$	Сбыт $Y_t$	$t$	Упре- ждающий индикатор $X_t$	Сбыт $Y_t$	$t$	Упре- ждающий индикатор $X_t$	Сбыт $Y_t$
40	11,11	215,0	77	10,87	208,8	114	13,87	216,2
41	11,01	215,3	78	10,67	210,6	115	13,39	256,0
42	11,22	215,9	79	11,11	211,9	116	13,59	257,4
43	11,21	216,7	80	10,88	212,8	117	13,27	260,4
44	11,91	216,7	81	11,28	212,5	118	13,70	260,0
45	11,69	217,7	82	11,27	214,8	119	13,20	261,3
46	10,93	218,7	83	11,44	215,3	120	13,32	260,4
47	10,99	222,9	84	11,52	217,5	121	13,15	261,6
48	11,01	224,9	85	12,10	218,8	122	13,30	260,8
49	10,84	222,2	86	11,83	220,7	123	12,94	259,8
50	10,76	220,7	87	12,62	222,2	124	13,29	259,0
51	10,77	220,0	88	12,41	226,7	125	13,26	258,9
52	10,88	218,7	89	12,43	228,4	126	13,08	257,4
53	10,49	217,0	90	12,73	233,2	127	13,24	257,7
54	10,50	215,9	91	13,01	235,7	128	13,31	257,9
55	11,00	215,8	92	12,74	237,1	129	13,52	257,4
56	10,98	214,1	93	12,73	240,6	130	13,02	257,3
57	10,61	212,3	94	12,76	243,8	131	13,25	257,6
58	10,48	213,9	95	12,92	245,3	132	13,12	258,9
59	10,53	214,6	96	12,64	246,0	133	13,26	257,8
60	11,07	213,6	97	12,79	246,3	134	13,11	257,7
61	10,61	212,1	98	13,05	247,7	135	13,30	257,2
62	10,86	211,4	99	12,69	247,6	136	13,06	257,5
63	10,34	213,1	100	13,01	247,8	137	13,32	256,8
64	10,78	212,9	101	12,90	249,4	138	13,10	257,5
65	10,80	213,3	102	13,12	249,0	139	13,27	257,0
66	10,33	211,5	103	12,47	249,9	140	13,64	257,6
67	10,44	212,3	104	12,47	250,5	141	13,58	257,3
68	10,50	213,0	105	12,94	251,5	142	13,87	257,5
69	10,75	211,0	106	13,10	249,0	143	13,53	259,6
70	10,40	210,7	107	12,91	247,6	144	13,41	261,1
71	10,40	210,1	108	13,39	248,8	145	13,25	262,9
72	10,34	211,4	109	13,13	250,4	146	13,50	263,3
73	10,55	210,0	110	13,34	250,7	147	13,58	262,8
74	10,46	209,7	111	13,34	253,0	148	13,51	261,8
75	10,82	208,8	112	13,14	253,7	149	13,77	262,2
76	10,91	208,8	113	13,49	255,0	150	13,40	262,7

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Holt C. C., Modigliani F., Muth J. F., Simon H. A.*, Planning Production, Inventories and Work Force, Prentice-Hall, New Jersey, 1963.
2. *Brown R. G.*, Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series, Prentice-Hall, New Jersey, 1962.
3. Short Term Forecasting, I.C.I. Monograph № 2, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1964.
4. *Harrison P. J.*, Short-term sales forecasting, *Appl. Stat.*, **14**, 102 (1965).
5. *Aström K. J.*, Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records, Theory of Self-adaptive Control Systems, 96, Plenum Press, 1966.
6. *Hutchinson A. W., Shelton R. J.*, Measurement of dynamic characteristics of full-scale plant using random perturbing signals: an application to a refinery distillation column, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **45**, 334 (1967).
7. *Briggs P. A., Hammond P. H., Hughes M. T. G., Plumb G. O.*, Correlation analysis of process dynamics using pseudo-random binary test perturbations, *Inst. Mech. Eng., Advances in Automatic Control*, Paper 7, Nottingham, U.K., April 1965.
8. *Shewhart W. A.*, The Economic control of the Quality of Manufactured Product, Macmillan, New York, 1931.
9. *Dudding B. P., Jenet W. J.*, Quality control charts, British Standard 600R, 1942.
10. *Page E. S.*, On problems in which a change in a parameter occurs at an unknown point, *Biometrika*, **44**, 249 (1957).
11. *Page E. S.*, Cumulative sum charts, *Technometrics*, **3**, 1 (1961).
12. *Barnard G. A.*, Control charts and stochastic processes, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B21**, 239 (1959).
13. *Roberts S. W.*, Control chart tests based on geometric moving averages, *Technometrics*, **1**, 239 (1959).
14. *Box G. E. P., Jenkins G. M.*, Some statistical aspects of adaptive optimization and control, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B24**, 297 (1962).
15. *Box G. E. P., Jenkins G. M.*, Further contributions to adaptive quality control: simultaneous estimation of dynamics: non-zero costs, *Bull. Intl. Stat. Inst.*, 34th Session, 943, Ottawa, Canada, 1963.
16. *Box G. E. P., Jenkins G. M.*, Mathematical models for adaptive control and optimization, *A. I. Ch. E. — I. Chem. E. Symp. Ser.*, **4**, 61 (1965).
17. *Box G. E. P., Jenkins G. M., Bacon D. W.*, Models for forecasting seasonal and non-seasonal time series, *Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series*, ed. B. Harris, 271, John Wiley, New York, 1967.
18. *Box G. E. P., Jenkins G. M.*, Discrete models for feedback and feedforward control, *The Future of Statistics*, ed. D. G. Watts, 201, Acad. Press, New York, 1968.
19. *Box G. E. P., Jenkins G. M.*, Some recent advances in forecasting and control, I, *Appl. Stat.*, **17**, 91 (1968).
20. *Box G. E. P., Jenkins G. M.*, Discrete models for forecasting and control, *Encyclopedia of Linguistics, Information and Control*, 162, Pergamon Press, 1969.
21. *Oughton K. D.*, Digital computer controls paper machine, *Ind. Electron.*, **5**, 358 (1965).

22. *Holt C. C.*, Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted moving averages, O.N.R. Memorandum, № 52, Carnegie Institute of Technology, 1957.
23. *Winters P. R.*, Forecasting Sales by exponentially weighted moving averages, *Management Sci.*, **6**, 324 (1960).
24. *Yule G. U.*, On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wölfer's sunspot numbers, *Phil. Trans.*, **A226**, 267 (1927).
25. *Tukey J. W.*, Discussion emphasizing the connection between analysis of variance and spectrum analysis, *Technometrics*, **3**, 191 (1961).
26. *Box G. E. P.*, *Hunter W. G.*, The experimental study of physical mechanisms, *Technometrics*, **7**, 23 (1965).
27. *Jenkins G. M.*, *Watts D. G.*, *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, San Francisco, 1968. (Русский перевод: Г. Дженкинс, Д. Ваттс, Спектральный анализ и его приложения, изд-во «Мир», вып. 1, 2, 1971, 1972.)
28. *Bartlett M. S.*, On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B8**, 27 (1946).
29. *Kendall M. G.*, On the analysis of oscillatory time series, *J. Roy. Stat. Soc.*, **108**, 93 (1945).
30. *Schuster A.*, On the investigation of hidden periodicities, *Terr. Mag.*, **3**, 13 (1898).
31. *Stokes G. C.*, Note on searching for periodicities, *Proc. Roy. Soc.*, **29**, 122 (1879).
32. *Walker G.*, On periodicity in series of related terms, *Proc. Roy. Soc.*, **A131**, 518 (1931).
33. *Stralkowski C. M.*, Lower order autoregressive-moving average stochastic models and their use for the characterization of abrasive cutting tools, Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, 1968.
34. *Durbin J.*, The fitting of time series models, *Rev. Int. Inst. Stat.*, **28**, 233 (1960).
35. *Quenouille M. H.*, Approximate tests of correlation in time series, *J. Roy. Stat. Soc.* **B11**, 68 (1949).
36. *Jenkins G. M.*, Tests of hypotheses in the linear autoregressive model, I, *Biometrika*, **41**, 405 (1954); II, *Biometrika*, **43**, 186 (1956).
37. *Daniels H. E.*, The approximate distribution of serial correlation coefficients, *Biometrika*, **43**, 169 (1956).
38. *Яглом А. М.*, Корреляционная теория процессов со случайными стационарными  $n$ -ми приращениями, *Матем. сб.*, **37** (79), 141, 1955.
39. *Zadeh L. A.*, *Ragazzini J. R.*, An extension of Wiener's theory of prediction, *J. Appl. Phys.*, **21**, 645 (1950).
40. *Kalman R. E.*, A new approach to linear filtering and prediction problems, *J. of Basic Eng.*, Ser. D82, 35 (1960).
41. *Kalman R. E.*, *Bucy R. S.*, New results in linear filtering and prediction theory, *J. of Basic Eng.*, Ser. D83, 5 (1961).
42. *Box G. E. P.*, *Cox D. R.*, An analysis of transformations, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B26**, 211 (1964).
43. *Muth J. F.*, Optimal properties of exponentially weighted forecasts of time series with permanent and transitory components, *J. Amer. Stat. Assoc.*, **55**, 299 (1960).
44. *Wold H. O.*, *A Study in The Analysis of Stationary Time Series*, Almqvist and Wicksell, Uppsala, 1938, 2nd. ed., 1954.
45. *Колмогоров А.*, Sur l'interpolation et l'extrapolation des suites stationnaires, *Compt. Rend.*, **208**, 2043 (1939).
46. *Колмогоров А. Н.*, Стационарные последовательности в гильбертовском пространстве. *Бюлл. МГУ*, **2**, № 6, 1—40 (1941).
47. *Колмогоров А. Н.*, Интерполяция и экстраполяция стационарных случайных последовательностей, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **5**, № 3 (1941).

48. Wiener N., Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, John Wiley, New York, 1949.
49. Whittle P., Prediction and Regulation by Linear Least-Squares Methods, English Univ. Press, London, 1963.
50. Brown R. G., Meyer R. F., The fundamental theorem of exponential smoothing, Operations Res., 9, 673 (1961).
51. Bachelier L., Theorie de la speculation, Ann. Sci. Ec. norm. sup., Paris, Ser. 3, 17, 21 (1900).
52. Anderson R. L., Distribution of the serial correlation coefficient, Ann. Math. Stat., 13, 1 (1942).
53. Schuster A., On the periodicities of sunspots, Phil. Trans. Roy. Soc., A206, 69 (1906).
54. Moran P. A. P., Some experiments in the prediction of sunspot numbers, J. Roy. Stat. Soc., B16, 112 (1954).
55. Wilson G. J., Factorization of the generating function of a pure moving average process, SIAM J. Num. Analysis, 6, 1 (1969).
56. Fisher R. A., Statistical Methods and Scientific Inference, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956. (Русский перевод: Р. Фишер, Статистические методы для исследователей, Госстатиздат, М., 1958.)
57. Barnard G. A., Statistical inference, J. Roy. Stat. Soc., B11, 116 (1949).
58. Birnbaum A., On the foundations of statistical inference, J. Amer. Stat. Assoc., 57, 269 (1962).
59. Rao C. R., Linear Statistical Inference and Its Applications, John Wiley, New York, 1965. (Русский перевод: Р. С. РАО, Линейные статистические методы и их приложения, М., «Наука», 1968.)
60. Box G. E. P., Draper N. R., The Bayesian estimation of common parameters from several responses, Biometrika, 52, 355 (1965).
61. Wilks S. S., Mathematical Statistics, John Wiley, New York, 1962. (Русский перевод: С. С. Уилкс, Математическая статистика, М., «Наука», 1967.)
62. Booth G. W., Peterson T. I., Non-linear estimation, IBM Share Program. Pa. № 687 WL NLI (1958).
63. Marquardt D. W., An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters, J. Soc. Ind. Appl. Math., 11, 431 (1963).
64. Savage L. J., The Foundations of Statistical Inference, Methuen, London, 1962.
65. Jeffreys H., Theory of Probability, 3rd. ed., Clarendon Press, Oxford, 1961.
66. Box G. E. P., Taio G. C., Bayesian Inference, Addison-Wesley, в печати.
67. Jenkins G. M., contribution to the discussion of the paper «Relationships between Bayesian and confidence limits for predictors» by A. R. Thatcher, J. Roy. Stat. Soc., B26, 176 (1964).
68. Cornish E. A., The multivariate  $t$ -distribution associated with a set of normal sample deviates, Austral. J. Phys., 7, 531 (1954).
69. Dunnnett C. W., Sobel M., A bivariate generalization of Student's  $t$ -distribution, with tables for special cases, Biometrika, 31, 153 (1954).
70. Barnard G. A., The logic of least squares, J. Roy. Stat. Soc., B25, 124 (1963).
71. Plackett R. L., Principles of Regression Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1960.
72. Anscombe F. J., Examination of residuals, Proc. 4th Berkeley Symp., 1, 1 (1961).
73. Anscombe F. J., Tukey J. W., The examination and analysis of residuals, Technometrics, 5, 141 (1963).
74. Daniel C., Use of half normal plots in interpreting factorial experiments, Technometrics, 1, 311 (1959).
75. Durbin J., Testing for serial correlation in least-squares regression when some of the regressors are lagged dependent variables, Econometrica, 37 (1969).



76. Durbin J., An alternative to the bounds test for testing serial correlation in least squares regression, *Econometrica*, **37** (1969).
77. Box G. E. P., Pierce D. A., Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models, *J. Amer. Stat. Assoc.*, **64**, (1970).
78. Bartlett M. S., *Stochastic Processes*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1955.
79. Hald A., *Statistical Theory with Engineering Applications*, John Wiley, New York, 1952. (Русский перевод: А. Хальд, Математическая статистика с техническими приложениями, М., ИЛ, 1956.)
80. Bacon D. W., Seasonal time series, Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, 1965.
81. Young A. J., *An Introduction to Process Control Systems Design*, Longman Green, New York, 1955.
82. Hougen J. O., Experience and Experiments with Process Dynamics, *Chemical Eng. Progress Monograph Series*, **60**, № 4 (1964).
83. Kotnour K. D., Box G. E. P., Altpeter R. J., A discrete predictor-controller applied to sinusoidal perturbation adaptive optimization, *Instr. Soc. Amer. Trans.*, **5**, 225 (1966).
84. Pierce D. A., Distribution of residual correlations in dynamic/stochastic time series models, Univ. of Wisconsin Tech. Rep. 173, August 1968.
85. Box G. E. P., Jenkins G. M., Wichern D. W., Least squares analysis with a dynamic model, Univ. of Wisconsin Technical Rep. 105, 1967.
86. Box G. E. P., Use and abuse of regression, *Technometrics*, **8**, 625 (1966).
87. Whittle P., Estimation and Information in Stationary time series, *Arkiv für Matematik*, **2**, 423 (1953).
88. Barnard G. A., Jenkins G. M., Winsten C. B., Likelihood inference and time series, *J. Roy Stat. Soc.*, **A125**, 321 (1962).
89. Kendall M. G., Stuart A., *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 3, Griffin, London, 1966.
90. Tintner G., *The Variate Difference Method*, Principia Press, Bloomington, Indiana, 1940.
91. Tintner G., Rao J. N. K., On the variate difference method, *Austral. J. of Statistics*, **5**, 106 (1963).
92. Слуцкий Е. Е., Сложение случайных причин как источник циклических процессов, *Вопросы конъюнктуры*, т. 3, I, 1927.
93. Mann H. B., Wald A., On the statistical treatment of linear stochastic difference equations, *Econometrica*, **11**, 173 (1943).
94. Koopmans T. C., Serial correlation and quadratic forms in normal variables, *Ann. Math. Stat.*, **13**, 14 (1942).
95. Koopmans T. C. (ed.), *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, John Wiley, New York, 1950.
96. Cox D. R., Prediction by exponentially weighted moving averages and related methods, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B23**, 414 (1961).
97. Hannan E. J., *Time Series Analysis*, Methuen, London, 1960. (Русский перевод: Э. Хеннан, Анализ временных рядов, М., «Наука», 1964).
98. Grenander U., Rosenblatt M., *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, John Wiley, New York, 1957.
99. Quenouille M. H., *Analysis of Multiple Time Series*, Hafner, New York, 1957.
100. Quenouille M. H., *Associated Measurements*, Butterworth, London, 1952.
101. Whittle P., *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*, Univ. of Uppsala Publ., 1951.
102. Doob J. L., *Stochastic Processes*, John Wiley, New York, 1953. (Русский перевод: Дж. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.)

- 
103. *Robinson E. A.*, Multichannel Time Series Analysis, Holden-Day, San Francisco, 1967.
  104. *Box G. E. P., Tiao G. C.*, Multiparameter problems from a Bayesian point of view, *Ann. Math. Stat.*, **36**, 1468 (1968).
  105. *Reilly P. M.*, Personal Communication, 1967.
  106. *Noble B.*, Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations, Pergamon Press, New York, 1958.
  107. *Wilson G. J.*, Optimal Control — A General Method of Obtaining the Feedback Scheme which Minimizes the Output Variance, Subject to a Constraint on the Variability of the Control Variable, Technical Rep. № 20, Dept. of Systems Engineering, Univ. of Lancaster.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автокорреляция выравненного выхода 173  
— шума 174

Взаимная корреляционная функция выравненных входа и выхода 173  
Влияние интервала отсчета 166  
Вынуждающая функция 12  
Выравнивание («выбеливание») спектра 53

Двумерный случайный процесс 44  
Диагностическая проверка 63, 73, 178  
— — с помощью остаточных ошибок 67  
Динамика химического реактора 41  
Динамическая реакция 8  
— система первого порядка 12  
— — второго порядка 15  
Дискретно-совпадающие системы 30

Единичный скачок 14

Идентификация моделей 51  
— — с помощью взаимного спектрального анализа 90  
— — с предварительным выравниванием спектра 53  
— — шума 58

Корреляция 113  
Коэффициент взаимной ковариации 46  
— — корреляции 46  
Критически затухающая система 16

Линейный фильтр 10, 36

Модель передаточной функции 8  
— — — дискретная 9, 34  
— — — непрерывная 28  
— — — с добавленным шумом 35  
— с двумя входами 76, 183

Недозатухающая система 16  
Нелинейное оценивание 65, 71  
Номограмма запаздывания 124  
— регулирования 110

«Округленные» диаграммы 118  
Оптимальная корректировка 154  
Оптимизация выбора входа 92  
Оценивание по оперативным данным 130  
Ошибки округления 143

Передаточная функция фильтра 10  
— — нелинейная 40  
Перезатухающая система 16  
Перенос источника шума 149  
ПИД-регулятор 114  
Планирование экспериментов 88  
Постоянная времени 13  
Пример с вязкостью полимера 115, 132, 162  
— с газовой печью 56, 64, 71, 84, 181  
— с данными о сбыте 87, 187  
— с удельным весом промежуточного продукта 105, 127  
Прогноз при помощи упреждающего индикатора 87  
— с минимальной среднеквадратичной ошибкой 80  
Программа идентификации модели 172  
— оценивания модели 174, 177  
Производящая функция 90

Разностное уравнение 17, 173

Регулирование вязкости 115, 132, 162  
— минимизирующее среднеквадратичную ошибку 102, 112, 127  
— при ограничении на дисперсию 151  
— с обратной связью 112, 115, 131, 151  
— — прямой и обратной связями 101, 125  
— — — — — прямой связью 101  
— — — — — для нескольких входов 110

Рекуррентный расчет 26

Ряд данных для двух входов 183

— — о газовой печи 181  
— — опытной схемы 184  
— — о сбыте 187

Система с запаздыванием 164

Скачкообразный вход 29, 35

Спектр когерентности 91

Схема регулирования с обратной связью 151, 165

— — с ограничением 160  
— — упрощенная 145

Упреждающий индикатор 79, 187

Уравнение регулирования 107, 114, 156

Условная сумма квадратов 63, 135

Установившееся значение 10

— усиление 18

Устойчивость системы 11

— дискретных моделей 18

Формула Бартлетта 49

Функция взаимная ковариационная 46

— — корреляционная 44, 52

— отклика на единичный импульс 10, 22, 174

— — — — скачок 19, 21, 74

Характеристическое уравнение 25, 33

Холостое время 14

Частотная характеристика системы 91

Шум 8

Эффект добавочного шума 139, 146

# Оглавление

Предисловие ко второму выпуску . . . . .	5
--	---

## Часть III. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Глава 10. МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ . . . . .	9
10.1. Линейные модели передаточной функции . . . . .	9
10.2. Дискретные динамические модели, описываемые разностными уравнениями . . . . .	17
10.3. Соотношение между дискретной и непрерывной моделями . . . . .	28
Приложение П10.1. Непрерывные модели со скачкообразными входами . . . . .	35
Приложение П10.2. Нелинейные передаточные функции и линеаризация . . . . .	40
Глава 11. ИДЕНТИФИКАЦИЯ, ПОДГОНКА И ПРОВЕРКА МОДЕЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ . . . . .	43
11.1. Взаимная корреляционная функция . . . . .	44
11.2. Идентификация моделей передаточных функций . . . . .	51
11.3. Подгонка и диагностическая проверка моделей передаточных функций . . . . .	63
11.4. Некоторые примеры подгонок и проверок моделей передаточных функций . . . . .	71
11.5. Прогнозирование при помощи предупреждающих индикаторов . . . . .	79
11.6. Некоторые аспекты планирования экспериментов для оценивания передаточных функций . . . . .	88
Приложение П11.1. Использование взаимного спектрального анализа для идентификации модели передаточной функции . . . . .	90
Приложение П11.2. Выбор входа для получения оптимальных оценок параметров . . . . .	92

## Часть IV. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СХЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава 12. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СХЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ СВЯЗЯМИ . . . . .	101
12.1. Регулирование с прямой связью . . . . .	102
12.2. Регулирование с обратной связью . . . . .	112
12.3. Регулирование с прямой и обратной связями . . . . .	125
12.4. Подгонка моделей передаточных функций шума по оперативным данным . . . . .	130

---

Глава 13. НЕКОТОРЫЕ ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРОБЛЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ . . .	139
13.1. Эффект добавочного шума в схемах регулирования с обратной связью . . . . .	139
13.2. Схема регулирования с обратной связью при ограничении, наложенном на дисперсию корректировки . . . . .	151
13.3. Выбор интервала отсчета . . . . .	166

## Часть V. СБОРНИК ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Программа 5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ	172
Программа 6. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ . . . . .	174
Программа 7. ОЦЕНИВАНИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ . . .	177
ТАБЛИЦЫ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ . . . . .	181
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	189
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	194

### ***УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!***

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и др. просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, изд-во «Мир».

*Дж. Бокс, Г. Дженкинс*

**АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ  
ПРОГНОЗ И УПРАВЛЕНИЕ**

Редактор *Э. А. Медушевская*

Художник *С. А. Бычков*

Художественный редактор *И. А. Шаарова*

Технический редактор *В. П. Сизова*

Корректор *И. С. Соколова*

Сдано в набор 20/XI 1973 г.

Подписано к печати 1/II 1974 г.

Бумага тип. № 2 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>—6,25 бум. л. 12,50 печ. л.

Уч.-изд. л. 10,86. Изд. № 27/6892.

Цена 1 р. Зак. 866

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»**

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома

при Государственном комитете Совета Министров

СССР по делам издательств, полиграфии

и книжной торговли,

198052, Ленинград, Л-52,

Измайловский проспект, 29



1руб.