

$$u_t = au_{xx} + F(u, w)$$

А. Д. ПОЛЯНИН, В. Г. СОРОКИН, А. И. ЖУРОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

СВОЙСТВА, МЕТОДЫ, РЕШЕНИЯ И МОДЕЛИ

$$w = u(x, t - \tau)$$

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. Д. ПОЛЯНИН, В. Г. СОРОКИН, А. И. ЖУРОВ

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

СВОЙСТВА, МЕТОДЫ, РЕШЕНИЯ И МОДЕЛИ



Москва
ИПМех РАН
2022

УДК 517.9

ББК 517.2

П 54

Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Журов А. И. **Дифференциальные уравнения с запаздыванием**: Свойства, методы, решения и модели. — М.: Издательство «ИПМех РАН», 2022. — 464 с. — ISBN 978-5-91741-268-9.

Книга посвящена линейным и нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям в частных производных с постоянным и переменным запаздыванием. Рассмотрены качественные особенности дифференциальных уравнений с запаздыванием и сформулированы типичные постановки задач. Описаны точные, приближенные аналитические и численные методы решения таких уравнений, включая метод шагов, методы интегральных преобразований, метод регулярного разложения по малому параметру, метод сращиваемых асимптотических разложений, методы итерационного типа, метод разложения Адомиана, метод коллокаций, проекционные методы типа Галеркина, методы Эйлера и Рунге — Кутты, метод стрельбы, метод прямых, конечно-разностные методы для УрЧП, методы обобщенного и функционального разделения переменных, метод функциональных связей, метод порождающих уравнений и др. Изложение теоретического материала сопровождается примерами практического применения методов для получения искомых решений. Построены точные решения ряда нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнений общего вида с запаздыванием, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Дан обзор наиболее распространенных математических моделей с запаздыванием, используемых в теории популяций, биологии, медицине и других приложениях. В целом в книгу включено много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался.

Для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, математической физики, вычислительной математики, механики, теории управления, биологии, медицины, химической технологии, экологии и экономики. Отдельные разделы книги и примеры могут быть использованы в курсах лекций по прикладной математике, математической физике и дифференциальным уравнениям, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

Табл. 31. Ил. 33. Библиогр. 604 назв.

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Предисловие | 9 |
| Некоторые обозначения и замечания | 12 |
| 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием | 14 |
| 1.1. Уравнения первого порядка. Задача Коши. Метод шагов. Точные решения | 14 |
| 1.1.1. Предварительные замечания | 14 |
| 1.1.2. ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием. Задача Коши. Качественные особенности | 14 |
| 1.1.3. Точные решения линейного ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием. Функция Ламберта и ее свойства . . . | 17 |
| 1.1.4. Нелинейные ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием, допускающие линеаризацию или точные решения . . | 26 |
| 1.1.5. Метод шагов. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием | 27 |
| 1.1.6. Уравнения с переменным запаздыванием. ОДУ с пропорциональным запаздыванием | 31 |
| 1.1.7. Существование и единственность решений. Подавление сингулярностей в решениях задач с обострением | 36 |
| 1.2. ОДУ второго и старших порядков с запаздыванием. Системы ОДУ с запаздыванием | 41 |
| 1.2.1. Основные понятия. Задача Коши | 41 |
| 1.2.2. Линейные уравнения второго порядка. Задача Коши. Точные решения | 42 |
| 1.2.3. Линейные ОДУ старших порядков с запаздываниями | 47 |
| 1.2.4. Линейные системы ОДУ первого и второго порядка с запаздыванием. Задача Коши. Точные решения | 52 |
| 1.3. Устойчивость (неустойчивость) решений ОДУ с запаздываниями . . | 55 |
| 1.3.1. Основные понятия. Общие замечания об устойчивости решений линейных ОДУ с запаздываниями | 55 |
| 1.3.2. Устойчивость решений линейных ОДУ с одним постоянным запаздыванием | 57 |
| 1.3.3. Устойчивость решений линейных ОДУ с несколькими постоянными запаздываниями | 64 |
| 1.3.4. Анализ устойчивости решений нелинейных ОДУ с запаздываниями по первому приближению | 66 |
| 1.4. Точные и приближенные аналитические методы решения ОДУ с запаздыванием | 69 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 1.4.1. | Использование интегральных преобразований для решения линейных задач | 69 |
| 1.4.2. | Представление решений в виде степенных рядов по независимой переменной | 78 |
| 1.4.3. | Метод регулярного разложения по малому параметру | 83 |
| 1.4.4. | Метод срачиваемых асимптотических разложений. Сингулярно возмущенные задачи с пограничным слоем | 85 |
| 1.4.5. | Метод последовательных приближений и другие методы итерационного типа | 89 |
| 1.4.6. | Проекционные методы типа Галеркина. Метод коллокаций | 94 |
| 2. | Линейные уравнения в частных производных с запаздыванием | 100 |
| 2.1. | Свойства и качественные особенности линейных уравнений и задач с постоянным запаздыванием | 100 |
| 2.1.1. | Свойства решений линейных уравнений с запаздыванием | 100 |
| 2.1.2. | Общие свойства и качественные особенности задач с запаздыванием | 106 |
| 2.2. | Линейные начально-краевые задачи с постоянным запаздыванием | 107 |
| 2.2.1. | Первая начально-краевая задача для одномерного уравнения параболического типа с постоянным запаздыванием | 107 |
| 2.2.2. | Другие задачи для одномерного уравнения параболического типа с постоянным запаздыванием | 112 |
| 2.2.3. | Задачи для линейных уравнений параболического типа с несколькими переменными и постоянным запаздыванием | 118 |
| 2.2.4. | Задачи для линейных уравнений гиперболического типа с постоянным запаздыванием | 123 |
| 2.2.5. | Условия устойчивости и неустойчивости решений линейных начально-краевых задач | 125 |
| 2.3. | Гиперболическое и дифференциально-разностное уравнения теплопроводности | 130 |
| 2.3.1. | Вывод гиперболического и дифференциально-разностного уравнений теплопроводности | 130 |
| 2.3.2. | Задача Стокса и начально-краевые задачи для дифференциально-разностного уравнения теплопроводности | 132 |
| 2.4. | Линейные начально-краевые задачи с пропорциональным запаздыванием | 137 |
| 2.4.1. | Предварительные замечания | 137 |
| 2.4.2. | Первая начально-краевая задача для уравнения параболического типа с пропорциональным запаздыванием | 138 |
| 2.4.3. | Другие начально-краевые задачи для уравнения параболического типа с пропорциональным запаздыванием | 140 |
| 2.4.4. | Начально-краевая задача для линейного уравнения гиперболического типа с пропорциональным запаздыванием | 142 |

| | |
|--|------------|
| 3. Методы и решения нелинейных УрЧП с запаздыванием. Часть I | 145 |
| 3.1. Некоторые замечания и определения. Точные решения типа бегущей волны | 145 |
| 3.1.1. Предварительные замечания. Терминология. Классы рассматриваемых уравнений | 145 |
| 3.1.2. Положения равновесия. Решения типа бегущей волны. Точные решения в замкнутой форме | 149 |
| 3.1.3. Решения типа фронта бегущей волны нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа | 153 |
| 3.2. Решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных | 158 |
| 3.2.1. Предварительные замечания. Терминология. Примеры | 158 |
| 3.2.2. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием, допускающие точные решения с разделением переменных | 161 |
| 3.2.3. Уравнения типа Клейна — Гордона с запаздыванием, допускающие точные решения с разделением переменных | 167 |
| 3.2.4. Некоторые обобщения | 169 |
| 3.3. Решения с обобщенным и функциональным разделением переменных | 174 |
| 3.3.1. Решения с обобщенным разделением переменных | 174 |
| 3.3.2. Решения с функциональным разделением переменных | 180 |
| 3.3.3. Использование линейных преобразований для построения решений с обобщенным и функциональным разделением переменных | 183 |
| 3.4. Метод функциональных связей | 187 |
| 3.4.1. Общее описание метода функциональных связей | 187 |
| 3.4.2. Точные решения квазилинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием | 188 |
| 3.4.3. Точные решения более сложных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием | 198 |
| 3.4.4. Точные решения нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием | 215 |
| 4. Методы и решения нелинейных УрЧП с запаздыванием. Часть II | 222 |
| 4.1. Методы построения точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием с помощью решений более простых УрЧП без запаздывания | 222 |
| 4.1.1. Первый метод построения точных решений УрЧП с запаздыванием. Общее описание и простые примеры | 222 |
| 4.1.2. Использование первого метода для построения точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием | 224 |
| 4.1.3. Второй метод построения точных решений УрЧП с запаздыванием. Общее описание и простые примеры | 228 |
| 4.1.4. Использование второго метода для построения точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием | 230 |
| 4.2. Системы нелинейных УрЧП с запаздыванием. Метод порождающих уравнений | 232 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 4.2.1. | Общее описание метода и примеры его применения | 232 |
| 4.2.2. | Квазилинейные системы реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и их точные решения | 237 |
| 4.2.3. | Нелинейные системы реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и их точные решения | 239 |
| 4.2.4. | Некоторые обобщения | 244 |
| 4.3. | Редукции и точные решения систем типа Лотки—Вольтерры и более сложных систем УрЧП с несколькими запаздываниями | 247 |
| 4.3.1. | Реакционно-диффузионные системы с несколькими запаздываниями. Система Лотки—Вольтерры | 247 |
| 4.3.2. | Редукции и точные решения систем УрЧП с различными коэффициентами диффузии (случай $a_1 \neq a_2$) | 248 |
| 4.3.3. | Редукции и точные решения систем УрЧП с одинаковыми коэффициентами диффузии (случай $a_1 = a_2$) | 255 |
| 4.3.4. | Системы УрЧП с запаздываниями, однородные относительно искомых функций | 258 |
| 4.4. | Нелинейные УрЧП с пропорциональными аргументами. Принцип аналогии решений | 261 |
| 4.4.1. | Принцип аналогии решений | 262 |
| 4.4.2. | Точные решения квазилинейных уравнений диффузионного типа с пропорциональным запаздыванием | 264 |
| 4.4.3. | Точные решения более сложных нелинейных уравнений диффузионного типа с пропорциональным запаздыванием | 269 |
| 4.4.4. | Точные решения нелинейных уравнений волнового типа с пропорциональным запаздыванием | 275 |
| 4.5. | Неустойчивые решения и некорректность по Адамару некоторых задач с запаздыванием | 281 |
| 4.5.1. | Неустойчивость решений одного класса нелинейных УрЧП с постоянным запаздыванием | 281 |
| 4.5.2. | Некорректность по Адамару некоторых задач с запаздыванием | 283 |
| 5. | Численные решения дифференциальных уравнений с запаздыванием | 285 |
| 5.1. | Численное интегрирование ОДУ с запаздыванием | 285 |
| 5.1.1. | Основные понятия и определения | 285 |
| 5.1.2. | Качественные особенности численного интегрирования ОДУ с запаздыванием | 287 |
| 5.1.3. | Модифицированный метод шагов | 290 |
| 5.1.4. | Численные методы для ОДУ с постоянным запаздыванием | 291 |
| 5.1.5. | Численные методы для ОДУ с пропорциональным запаздыванием. Задача Коши | 296 |
| 5.1.6. | Метод стрельбы (краевые задачи) | 300 |
| 5.1.7. | Использование пакета Mathematica для численного интегрирования жестких систем ОДУ с запаздыванием | 303 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 5.1.8. | Тестовые задачи для ОДУ с запаздыванием. Сопоставление численных и точных решений | 307 |
| 5.2. | Численное интегрирование УрЧП с запаздыванием | 310 |
| 5.2.1. | Предварительные замечания. Метод декомпозиции области по времени | 310 |
| 5.2.2. | Метод прямых (сведение УрЧП с запаздыванием к системе ОДУ с запаздыванием) | 311 |
| 5.2.3. | Конечно-разностные методы | 316 |
| 5.3. | Построение, выбор и использование тестовых задач для УрЧП с запаздыванием | 323 |
| 5.3.1. | Предварительные замечания | 323 |
| 5.3.2. | Основные принципы выбора тестовых задач | 324 |
| 5.3.3. | Построение тестовых задач | 325 |
| 5.3.4. | Сопоставление численных и точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием | 331 |
| 5.3.5. | Сопоставление численных и точных решений нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием | 338 |
| 6. | Модели и дифференциальные уравнения с запаздыванием | 344 |
| 6.1. | Модели, описываемые нелинейными ОДУ с запаздыванием | 344 |
| 6.1.1. | Уравнение Хатчинсона (логистическое уравнение с запаздыванием) | 344 |
| 6.1.2. | Уравнение Николсона | 347 |
| 6.1.3. | Модели кроветворения Мэкки — Гласса | 351 |
| 6.1.4. | Другие нелинейные модели с запаздыванием | 354 |
| 6.2. | Модели и УрЧП с запаздыванием в теории популяций | 358 |
| 6.2.1. | Предварительные замечания | 358 |
| 6.2.2. | Диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием | 360 |
| 6.2.3. | Диффузионное уравнение с запаздыванием, учитывающее ограниченность питательных веществ | 361 |
| 6.2.4. | Диффузионные логистические модели типа Лотки — Вольтерры с несколькими запаздываниями | 362 |
| 6.2.5. | Реакционно-диффузионная модель Николсона с запаздыванием | 364 |
| 6.2.6. | Модель, учитывающая влияние защитных механизмов растений на популяцию растительноядных | 365 |
| 6.3. | Модели и УрЧП с запаздыванием, описывающие распространение эпидемий и развитие болезней | 366 |
| 6.3.1. | Классическая модель распространения эпидемии SIR | 366 |
| 6.3.2. | Двухкомпонентная модель распространения эпидемии SI | 369 |
| 6.3.3. | Модель распространения эпидемии новой коронавирусной инфекции | 370 |
| 6.3.4. | Модели протекания гепатита В | 371 |
| 6.3.5. | Модели взаимодействия иммунитета и опухолевых клеток | 373 |
| 6.4. | Другие модели, описываемые нелинейными УрЧП с запаздыванием | 375 |

| | |
|--|------------|
| 6.4.1. Модель колебательной реакции Белоусова — Жаботинского | 375 |
| 6.4.2. Модели кроветворения типа Мэкки — Гласса | 376 |
| 6.4.3. Модель термической обработки металлических листов | 377 |
| 6.4.4. Модель пищевой цепи | 378 |
| 6.4.5. Модели искусственной нейронной сети | 379 |
| Приложение. Справочные таблицы по точным решениям УрЧП | |
| с запаздыванием | 381 |
| П.1. Линейные уравнения | 381 |
| П.1.1. Уравнения с постоянным запаздыванием | 381 |
| П.1.2. Уравнения типа пантографа | 381 |
| П.2. Нелинейные уравнения с постоянным запаздыванием | 382 |
| П.2.1. Уравнения параболического типа | 382 |
| П.2.2. Уравнения гиперболического типа | 396 |
| П.3. Нелинейные уравнения с пропорциональными аргументами | 404 |
| П.3.1. Уравнения параболического типа | 404 |
| П.3.2. Уравнения гиперболического типа | 411 |
| П.4. Функционально-дифференциальные УрЧП с аргументами произволь- | |
| ного вида | 416 |
| П.4.1. Уравнения параболического типа | 416 |
| П.4.2. Уравнения гиперболического типа | 426 |
| Список литературы | 432 |

Предисловие

Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных) с запаздыванием* часто используются для математического моделирования явлений и процессов в различных областях теоретической физики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, экологии, экономики и технических приложениях.

Перечислим некоторые факторы, приводящие к необходимости вводить запаздывание в математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. В биологии и биомеханике запаздывание обусловлено ограниченной скоростью передачи нервных и мышечных реакций в живых тканях; в медицине — в задачах о распространении инфекционных заболеваний — время запаздывания определяется инкубационным периодом (промежуток времени от момента заражения до первых признаков проявления болезни); в динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в репродукции лишь после достижения определенного возраста; в теории управления запаздывание обычно связано с конечной скоростью распространения сигнала и ограниченной скоростью технологических процессов.

Наличие запаздывания в математических моделях и дифференциальных уравнениях является осложняющим фактором, который, как правило, приводит к сужению области устойчивости получаемых решений. Исследование и решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с запаздыванием по сложности сопоставимы с исследованием и решением уравнений в частных производных (УрЧП) без запаздывания.

В книге описаны качественные особенности дифференциальных уравнений с запаздыванием и сформулированы для них типичные постановки задач с начальными данными и начально-краевых задач. Излагаются точные, приближенные аналитические и численные методы решения таких уравнений. Помимо дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием исследуются уравнения с пропорциональным запаздыванием (типа пантографа), а также более сложные уравнения с переменным запаздыванием общего вида или несколькими запаздываниями. Изложение теоретического материала сопровождается примерами практического применения рассматриваемых методов для получения искомых решений.

Дан обзор наиболее распространенных математических моделей с запаздыванием, используемых в теории популяций, биологии, медицине и других приложениях.

Приведены аналитические решения линейных задач типа Коши для ОДУ и систем ОДУ первого и второго порядка с постоянным и пропорциональным запаздыванием. Рассмотрены некоторые классы нелинейных ОДУ первого порядка с запаздыванием, которые допускают линеаризацию или точные решения. Обсуждаются вопросы устойчивости и неустойчивости решений ОДУ с запаздыванием.

Описаны наиболее распространенные аналитические и численные методы решения задач с начальными данными и краевых задач для ОДУ с постоянным и пере-

*В литературе нередко встречается также более длинное альтернативное название — дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.

менным запаздыванием (метод шагов, методы интегральных преобразований, метод регулярного разложения по малому параметру, метод сращиваемых асимптотических разложений, методы итерационного типа, метод разложения Адомиана, метод гомотопического анализа, метод коллокаций, проекционные методы типа Галеркина, методы Эйлера и Рунге — Кутты, метод стрельбы, методы, основанные на использовании пакета Mathematica и др.).

Методом разделения переменных получены решения в виде рядов Фурье по пространственным переменным линейных начально-краевых задач для УрЧП параболического и гиперболического типов с постоянным и пропорциональным запаздыванием и различными граничными условиями. Излагаются также численные методы решения начально-краевых задач для линейных и нелинейных УрЧП с запаздыванием. Наибольшее внимание уделено методу прямых, который базируется на сведении УрЧП с запаздыванием к системе ОДУ с запаздыванием. Рассмотрены конечно-разностные методы, основанные на неявной схеме, схеме с весами, схеме повышенного порядка точности и др. Обсуждается также метод декомпозиции области по времени, который обобщает метод шагов, используемый для решения ОДУ с запаздыванием. Сформулированы основные принципы построения и выбора тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения УрЧП с запаздыванием.

Общее решение нелинейных УрЧП с запаздыванием не удастся найти даже в простейших случаях. Поэтому при исследовании таких уравнений обычно приходится ограничиваться поиском и анализом их частных решений, которые принято называть *точными решениями*.

В данной книге большое внимание уделено описанию и практическому применению методов построения точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием (методы обобщенного и функционального разделения переменных, метод функциональных связей, метод порождающих уравнений, принцип аналогии решений и др.). Важно отметить, что подавляющее большинство аналитических методов, которые успешно позволяют находить точные решения нелинейных уравнений с частными производными без запаздывания либо вообще неприменимы для построения точных решений нелинейных УрЧП с постоянным или переменным запаздыванием, либо имеют весьма ограниченную область применимости. Уравнения математической физики с двумя независимыми переменными и запаздыванием имеют специфические качественные особенности: (i) УрЧП с постоянным запаздыванием не допускают автомодельных решений, которые весьма часто имеют УрЧП без запаздывания, (ii) УрЧП с пропорциональным запаздыванием по одной независимой переменной не имеют решений типа бегущей волны.

Рассмотрено много нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнений с запаздыванием, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций или содержат ряд свободных параметров. Такие уравнения наиболее сложны для анализа, а их точные решения могут использоваться для тестирования и оценки погрешности численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих начально-краевых задач. Для удобства читателей авторы добавили в книгу справочное приложение, которое содержит обширные таблицы точных решений уравнений в частных производных с постоянным и переменным запаздыванием.

В целом, данная книга содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался.

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной мате-

матической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно, чего вполне достаточно для их практического применения. Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Подробное оглавление позволяет быстро находить необходимую информацию.

Авторы благодарят А.В. Аксенова за обсуждения и полезные замечания.

Авторы надеются, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, математической физики, вычислительной математики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, химической технологии и экологии. Отдельные разделы книги, методы и примеры могут быть использованы в курсах лекций по прикладной математике, математической физике и функционально-дифференциальным уравнениям, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

Авторы

Некоторые обозначения и замечания

Латинские буквы

- a, a_1, a_2 — коэффициенты диффузии (безразмерные или размерные) в уравнениях реакционно-диффузионного типа;
- C_1, C_2, \dots — произвольные постоянные;
- $\exp_d(t, \tau)$ — экспонента с запаздыванием, $\exp_d(t, \tau) \equiv \sum_{k=0}^{[t/\tau]+1} \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!}$;
- $\exp_s(t, p)$ — экспонента с растяжением, $\exp_s(t, p) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^n}{n!}$;
- $\text{Im } A$ — мнимая часть комплексного числа A ;
- p — параметр растяжения для уравнений с запаздыванием, пропорциональным времени ($0 < p < 1$);
- $\text{Re } A$ — действительная часть комплексного числа A ;
- t — время (независимая переменная);
- u — искомая функция (зависимая переменная) в текущий момент времени t , для уравнений с двумя независимыми переменными $u = u(x, t)$;
- $W = W(z)$ — функция Ламберта, которая задается неявно соотношением $z = We^W$ ($z = x + iy$ — комплексная переменная);
- $W_p = W_p(x)$ — главная ветвь функции Ламберта ($x \geq -1/e$, $W_p \geq -1$);
- $W_n = W_n(x)$ — вторая ветвь функции Ламберта ($-1/e \leq x < 0$, $W_n \leq -1$);
- w — искомая функция в прошедший момент времени, $w = u(t - \tau)$ (для ОДУ с постоянным запаздыванием) или $w = u(pt)$ (для ОДУ с пропорциональным запаздыванием, $0 < p < 1$); для УрЧП с двумя независимыми переменными имеем $w = u(x, t - \tau)$ или $w = u(x, pt)$;
- w_k — искомая функция в прошлые моменты времени, $w_k = u(t - \tau_k)$ (для ОДУ с постоянными запаздываниями, $k = 1, \dots, m$); для УрЧП с двумя независимыми переменными $w_k = u(x, t - \tau_k)$;
- x, y — пространственные переменные (декартовы координаты) или действительная и мнимая части комплексного числа $z = x + iy$;
- x_1, \dots, x_n — декартовы координаты в n -мерном пространстве;
- \mathbf{x} — n -мерный вектор, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Греческие буквы

Δ — оператор Лапласа:

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — в двумерном случае,

$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — в n -мерном случае;

τ — время запаздывания ($\tau > 0$), которое может быть постоянным или зависеть от времени $\tau = \tau(t)$;

τ_1, \dots, τ_m — времена запаздывания.

Краткие обозначения производных и операторов

Частные производные функции $u = u(x, t)$:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \dots, \quad u_x^{(n)} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}.$$

Обыкновенные производные функции $f = f(t)$:

$$f'_t = \frac{df}{dt}, \quad f''_{tt} = \frac{d^2 f}{dt^2}, \quad f'''_{ttt} = \frac{d^3 f}{dt^3}, \quad f''''_{tttt} = \frac{d^4 f}{dt^4}, \quad f_t^{(n)} = \frac{d^n f}{dt^n} \quad \text{при } n > 4.$$

Диффузионный член уравнения с частными производными в n -мерном случае:

$$\operatorname{div} [f(u) \nabla u] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[f(u) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right], \quad \text{где } f(u) \text{ — коэффициент диффузии.}$$

Замечания

1. В книге часто используются сокращения ОДУ и УрЧП, которые соответственно обозначают «обыкновенное дифференциальное уравнение» (или «обыкновенные дифференциальные уравнения») и «уравнение с частными производными» (или «уравнения с частными производными»).

2. Если формула или решение содержит производные некоторых функций, то предполагается, что эти производные существуют.

3. Если формула или решение содержит неопределенные или определенные интегралы, то предполагается, что эти интегралы существуют.

4. В формулах и решениях, содержащих выражения типа $\frac{f(t)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a \neq 2$.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием

1.1. Уравнения первого порядка. Задача Коши. Метод шагов. Точные решения

1.1.1. Предварительные замечания

Наиболее простые пространственно однородные процессы с последействием описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) с запаздыванием. Анализ и решение таких уравнений по сложности сопоставимы с анализом и решением уравнений в частных производных без запаздывания. В настоящее время теория ОДУ с запаздыванием и других обыкновенных функционально-дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений является достаточно хорошо разработанной (см., например, [8, 49, 50, 57, 94, 116, 130, 156, 216, 222, 252, 272, 328–330, 333, 334, 495]). В данной главе, основываясь на цитируемых выше и других источниках, кратко описаны наиболее важные теоретические сведения, касающиеся ОДУ с постоянным и переменным запаздыванием, в том числе качественные особенности таких уравнений, точные и приближенные решения линейных и нелинейных ОДУ с запаздыванием, формулировки и аналитические методы решения основных задач, теоремы о существовании, единственности и устойчивости решений.

Замечание 1.1. Численные методы интегрирования ОДУ с запаздыванием рассматриваются в разд. 5.1, а математические модели различных процессов, основанные на ОДУ с запаздыванием — в разд. 6.1.

1.1.2. ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием. Задача Коши. Качественные особенности

Уравнения с одним постоянным запаздыванием. Задача Коши. Будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с запаздыванием вида

$$u'_t = f(t, u, w), \quad w = u(t - \tau), \quad t > t_0, \quad (1.1.2.1)$$

где $u = u(t)$ — искомая функция, t — время, f — заданная непрерывная функция, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, t_0 — некоторая константа, которая называется

начальной точкой. Если функция f не зависит явно от t , то уравнение (1.1.2.1) называется *автономным*.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием (1.1.2.1) и родственные более сложные уравнения с запаздыванием возникают во многих приложениях, включая теорию управления [293, 322, 491, 548, 582], нейродинамику [39, 262, 364], лазерную физику [112, 338, 532], радиофизику [21, 144], ядерную физику [18, 192, 266], математическую экологию и биологию [36, 149, 177, 250, 252, 276, 317, 333, 335, 478, 595], медицину [100, 260, 376, 400, 483, 531].

Задача Коши для ОДУ с запаздыванием (1.1.2.1) формулируется так: требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad (1.1.2.2)$$

где $\varphi(t)$ — заданная непрерывная функция. Предельному значению $\tau = 0$ в (1.1.2.1) — (1.1.2.2) соответствует задача Коши для ОДУ без запаздывания (о свойствах и методах решения таких задач см., например, [33, 392, 448]).

Качественные особенности. Сглаживание решений. Отметим некоторые качественные особенности, которые отличают задачи Коши для ОДУ с запаздыванием от задач для ОДУ без запаздывания.

Во-первых, начальное условие задается не в одной точке $t = t_0$, как для уравнений без запаздывания, а на отрезке $E_{t_0} = \{t_0 - \tau \leq t \leq t_0\}$. Чаще всего используется начальная точка $t_0 = 0$, иногда встречается $t_0 = \tau$. Ищется решение, непрерывное в точке t_0 , т. е. считается, что $u(t_0 + 0) = \varphi(t_0)$.

Во-вторых, даже если функции φ и f будут иметь непрерывные производные сколь угодно высокого порядка, решение $u(t)$ начальной задачи (1.1.2.1) — (1.1.2.2) в случае общего положения будет иметь разрывы первого рода у производных порядка k в точках $t = t_0 + (k - 1)\tau$, где $k = 1, 2, \dots$; однако производные более низких порядков в этих точках будут уже непрерывны. Это явление называют «сглаживанием решений» (иногда «распространением разрывов производных»).

Рассмотрим задачу (1.1.2.1) — (1.1.2.2). На отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ имеем

$$u'_t = f(t, u(t), \varphi(t - \tau)).$$

На предыдущем отрезке $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ первая производная вычисляется из начального условия (1.1.2.2):

$$u'_t = \varphi'_t(t).$$

Тогда в точке t_0 имеем, с одной стороны,

$$u'_t(t_0 + 0) = f(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau)),$$

а с другой стороны

$$u'_t(t_0 - 0) = \varphi'_t(t_0).$$

Понятно, что непрерывность первой производной u'_t в точке t_0 может быть обеспечена лишь при специальном выборе начальной функции φ , когда выполнено условие

$$\varphi'(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau)).$$

Поэтому в случае общего положения производная $u'_t(t)$ разрывна в точке t_0 .

В точке $t_0 + \tau$ первая производная решения непрерывна. Действительно, из (1.1.2.1) имеем $u'_t(t) = f(t, u(t), w(t))$, где правая часть является непрерывной функцией t в точке $t_0 + \tau$, так как $w(t) = u(t - \tau)$ непрерывна в этой точке. Однако вторая производная

$$u''_{tt} = f_t + f_u u'_t + f_w w'_t$$

в точке $t_0 + \tau$ разрывна, так как производная $w'_t = u'_t(t - \tau)$ разрывна в этой точке (имеем $w'(t_0 + \tau) = u'_t(t_0)$; разрывность u'_t в точке t_0 в случае общего положения была показана выше). Но в точке $t = t_0 + 2\tau$ производная $u''_{tt}(t)$ непрерывна, так как $w'_t(t)$ и $w(t)$ непрерывны в этой точке.

Продолжая рассуждения, замечаем, что в точке $t_0 + (k - 1)\tau$ производная $u^{(k)}(t)$ разрывна, а производные меньшего порядка непрерывны, при условии, что f достаточно гладкая функция.

► **Пример 1.1.** Рассмотрим задачу Коши для линейного ОДУ с запаздыванием и простым начальным условием [551]:

$$u'(t) = u(t - 1), \quad t > 0; \quad (1.1.2.3)$$

$$u(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0. \quad (1.1.2.4)$$

Из (1.1.2.4) следует, что $u'(t) = 0$ при $-1 \leq t \leq 0$. В то же время из (1.1.2.3) при условии (1.1.2.4) получаем, что $u'(t) = 1$ при $0 < t \leq 1$. Значит, $u'(t)$ имеет разрыв при $t = 0$.

Рассмотрим теперь точку $t = k$, где k — целое число. Дифференцируя (1.1.2.3) k раз, имеем

$$u^{(k+1)}(t) = u^{(k)}(t - 1),$$

откуда по индукции следует

$$u^{(k+1)}(t) = u'(t - k).$$

Поэтому производная $u^{(k+1)}$ имеет разрыв в точке $t = k$. ◀

Уравнения с несколькими постоянными запаздываниями. Уравнение (1.1.2.1) является простейшим функционально-дифференциальным уравнением с одним постоянным запаздыванием. Более сложные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с несколькими постоянными запаздываниями имеют вид

$$u'_t = f(t, u, w_1, \dots, w_m), \quad w_k = u(t - \tau_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.1.2.5)$$

где $\tau_k > 0$ — заданные числа.

Для уравнения (1.1.2.5) задача Коши формулируется так: требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t_0 - \tau_{\max} \leq t \leq t_0, \quad (1.1.2.6)$$

где $\varphi(t)$ — заданная непрерывная функция, $\tau_{\max} = \max_{1 \leq k \leq m} \tau_k$ — максимальное запаздывание.

Уравнения нейтрального и опережающего типов. В литературе встречаются также функционально-дифференциальные уравнения первого порядка вида

$$F(t, u, u'_t, w, w'_t) = 0, \quad w = u(t - \tau), \quad (1.1.2.7)$$

которые содержат две производные u'_t и w'_t . Такие уравнения относят к *уравнениям нейтрального типа*. Более общие уравнения могут включать несколько запаздываний τ_1, \dots, τ_m .

Уравнениями опережающего типа называются уравнения (1.1.2.7) специального вида, которые зависят от w'_t , но не зависят от u'_t .

Уравнения нейтрального и опережающего типов достаточно редко встречаются в приложениях и поэтому почти не рассматриваются в данной книге. Теоретические исследования подобных уравнений можно найти, например, в [8, 94, 272, 328–330].

1.1.3. Точные решения линейного ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием. Функция Ламберта и ее свойства

Экспоненциальные решения линейного ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием. Функция Ламберта. Рассмотрим линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием

$$u'_t = au + bw, \quad w = u(t - \tau), \quad (1.1.3.1)$$

где a и b — действительные константы. Как и в случае ОДУ без запаздывания, уравнение (1.1.3.1) имеет точные решения экспоненциального вида

$$u(t) = \exp(\lambda t). \quad (1.1.3.2)$$

Подставив (1.1.3.2) в (1.1.3.1), после сокращения на $e^{\lambda t}$ получим *характеристическое уравнение* для определения параметра λ :

$$\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0. \quad (1.1.3.3)$$

Уравнение (1.1.3.3) содержит три свободных параметра a, b, τ . При $\tau = 0$, что соответствует ОДУ без запаздывания, уравнение (1.1.3.3) является линейным алгебраическим уравнением и имеет единственный корень $\lambda = a + b$. Наличие запаздывания $\tau > 0$ (при $b \neq 0$) качественно меняет ситуацию, т. к. в этом

случае уравнение (1.1.3.3) становится трансцендентным и имеет бесконечное множество комплексно сопряженных корней $\lambda_m = \operatorname{Re} \lambda_m \pm i \operatorname{Im} \lambda_m$, $i^2 = -1$, $m = 0, 1, 2, \dots$ (при некоторых значениях параметров дополнительно может иметь еще один или два действительных корня). В силу принципа суперпозиции любая линейная комбинация экспоненциальных функций (1.1.3.2), где $\lambda = \lambda_k$ — различные корни характеристического уравнения (1.1.3.3), является решением линейного ОДУ с запаздыванием (1.1.3.1).

Сначала отыщем условия, при выполнении которых характеристическое уравнение (1.1.3.3) имеет действительные корни. Решения уравнения (1.1.3.3) можно описать с помощью функции Ламберта $W = W(z)$, которая для комплексных $z = x + iy$ определяется неявно с помощью трансцендентного уравнения

$$We^W = z. \quad (1.1.3.4)$$

Свойства этой функции и ее приложения рассматриваются, например, в [23, 196, 522, 564, 582].

Показатель λ экспоненциального решения (1.1.3.2) характеристического уравнения (1.1.3.3) можно выразить в терминах функции Ламберта в виде

$$\lambda = a + \frac{1}{\tau} W(x), \quad x = b\tau e^{-a\tau}. \quad (1.1.3.5)$$

Функция Ламберта на действительной оси. Для действительных $z = x$ функция $W(x)$ однозначна при $x \geq 0$ и двужначна на интервале $(-1/e, 0)$. Для $x \geq -1/e$ и $W \geq -1$ однозначную ветвь функции Ламберта, которую принято называть *главной ветвью*, будем обозначать $W_p(x)$; вторую ветвь этой функции, которая характеризуется неравенствами $-1/e \leq x < 0$ и $W \leq -1$, обозначаем $W_n(x)^*$.

На рис. 1.1 изображены две ветви функции Ламберта $W(x)$ (W_p и W_n) на полупрямой $-1/e \leq x < \infty$. Для сравнения штриховой линией показана также логарифмическая функция $\ln(1+x)$.

В параметрическом виде действительные ветви $W_p(x)$ и $W_n(x)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} x &= se^s, & W_p &= s, & -1 \leq s < +\infty; \\ x &= se^s, & W_n &= s, & -\infty < s \leq -1. \end{aligned}$$

Имеет место разложение в ряд Тейлора, сходящегося при $|x| < 1/e$:

$$W_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{4}x^5 - \dots \quad (1.1.3.6)$$

* Действительные ветви функции Ламберта W_p и W_n обычно обозначают W_0 и W_{-1} (см., например, [196, 305]), однако такие же обозначения используются совсем в другом смысле для комплексных ветвей функции Ламберта [196], что может привести к путанице. В данной книге для главной ветви используется введенное в [409] более удобное обозначение W_p (индекс p от англ. *principal/positive*), а для второй ветви — обозначение W_n (индекс n от англ. *negative*).

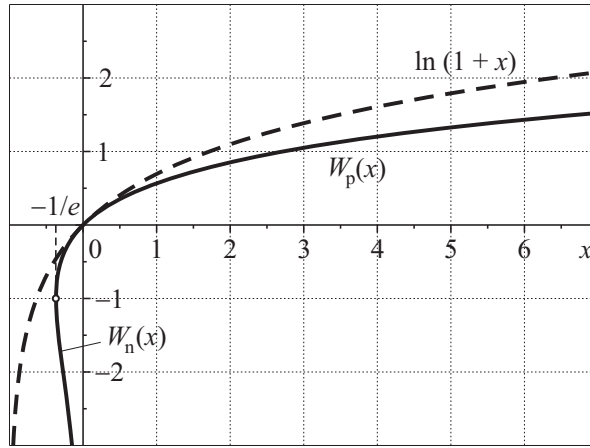


Рис. 1.1. Вещественные ветви функции Ламберта $W_p(x)$ и $W_n(x)$.

Справедливы асимптотические формулы [196, 409]:

$$W_p(x) = \zeta_1 - \ln \zeta_1 + \frac{\ln \zeta_1}{\zeta_1} + \frac{\ln^2 \zeta_1}{2\zeta_1^2} - \frac{\ln \zeta_1}{\zeta_1^2} + O\left(\frac{\ln^3 \zeta_1}{\zeta_1^3}\right) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

$$\zeta_1 = \ln x; \quad (1.1.3.7)$$

$$W_n(x) = \zeta_2 - \ln \zeta_2 - \frac{\ln \zeta_2}{\zeta_2} - \frac{\ln^2 \zeta_2}{2\zeta_2^2} - \frac{\ln \zeta_2}{\zeta_2^2} + O\left(\frac{\ln^3 \zeta_2}{\zeta_2^3}\right) \quad \text{при } x \rightarrow -0,$$

$$\zeta_2 = \ln(-1/x). \quad (1.1.3.8)$$

Свойства функции Ламберта и ее значения в некоторых точках:

$$\begin{aligned} W_p(xe^x) &= x \quad (x \geq -1), \quad \ln W_p(x) = \ln x - W_p(x) \quad (x > 0), \\ W_p(x \ln x) &= \ln x \quad (x \geq e^{-1}), \quad W_p(-\ln x/x) = -\ln x \quad (0 < x \leq e), \\ W_n(xe^x) &= x \quad (x \leq -1), \quad W_n(x \ln x) = \ln x \quad (x \leq e^{-1}), \\ W_p(-1/e) &= -1, \quad W_p(0) = 0, \quad W_p(e) = 1, \quad W_p(e^{1+e}) = e. \end{aligned}$$

Главная ветвь функции Ламберта на полупрямой $0 \leq x < \infty$ хорошо аппроксимируется простой явной зависимостью [553]:

$$W_p(x) = \ln(1+x) \left[1 - \frac{\ln(1+\ln(1+x))}{2+\ln(1+x)} \right], \quad (1.1.3.9)$$

которая дает два точных члена асимптотического разложения при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ (см. формулы (1.1.3.6) и (1.1.3.7)). Максимальная относительная погрешность приближенной формулы (1.1.3.9) для любых положительных x составляет меньше 10^{-2} .

В области $-e^{-1} \leq x \leq 1$ можно использовать другую приближенную формулу [553]:

$$W_p(x) = \frac{ex}{1 + [(2ex+2)^{-1/2} + (e-1)^{-1} - 2^{-1/2}]^{-1}},$$

максимальная относительная погрешность которой в указанном диапазоне составляет меньше 10^{-3} .

Некоторые другие приближенные формулы, которые можно использовать для аппроксимации различных участков ветвей функции Ламберта, можно найти в [123, 526].

Учитывая описанные выше свойства функции Ламберта и используя формулу (1.1.3.5) нетрудно найти условия, при выполнении которых характеристическое уравнение (1.1.3.3) имеет действительные корни. Итоговые результаты приведены ниже в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Число действительных корней характеристического уравнения (1.1.3.3) при различных значениях определяющих параметров ОДУ с запаздыванием (1.1.3.1).

| Определяющие условия | Число корней | Область изменения корней |
|------------------------------------|---|--|
| $-e^{a\tau^{-1}}\tau^{-1} < b < 0$ | Два корня λ_1 и λ_2 | $a - \tau^{-1} < \lambda_1 < a, \lambda_2 < a - \tau^{-1}$ |
| $b \geq 0$ | Один корень λ_1 | $\lambda_1 > a$ (при $b > 0$), $\lambda_1 = a$ (при $b = 0$) |
| $b = -e^{a\tau^{-1}}\tau^{-1}$ | Один корень λ_1 (двукратный) | $\lambda_1 = a - \tau^{-1}$ |
| $b < -e^{a\tau^{-1}}\tau^{-1}$ | Корней нет | — |

Функция Ламберта в комплексной плоскости. В комплексной плоскости $z = x + iy$ ($i^2 = -1$) функция Ламберта $W(z)$ имеет бесконечное число ветвей $W_m = W_m(z)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Справедлива асимптотическая формула [196]:

$$W_m = \ln z - \ln \ln z + 2\pi im + (1 + i)o(1) \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (1.1.3.10)$$

Подставив $z = x + iy$ и $W = \xi + i\eta$ в (1.1.3.4), после элементарных преобразований с учетом формулы Эйлера $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ получим трансцендентную систему уравнений

$$\begin{aligned} e^{\xi}(\xi \cos \eta - \eta \sin \eta) &= x, \\ e^{\xi}(\xi \sin \eta + \eta \cos \eta) &= y. \end{aligned} \quad (1.1.3.11)$$

Будем рассматривать комплексные значения функции Ламберта W на вещественной оси x , положив $y = 0$ в (1.1.3.11). В этом случае замена η на $-\eta$ сохраняет вид уравнений (1.1.3.11). Поэтому для действительных x соответствующие корни W являются комплексно сопряженными. Учитывая сказанное, достаточно рассмотреть случай $\eta \geq 0$.

При $y = 0$ второе уравнение (1.1.3.11) имеет два решения. Первое решение является тривиальным $\eta = 0$; оно приводит к действительным значениям функции Ламберта, которые исследовались ранее. Второе решение второго уравнения (1.1.3.11) при $y = 0$, которое определяет комплексные значения функции Ламберта, можно представить в виде

$$\xi = -\eta \operatorname{ctg} \eta. \quad (1.1.3.12)$$

Правая часть (1.1.3.12) стремится к бесконечности при приближении к точкам $\eta = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Соотношение (1.1.3.12) при $n\pi < \eta < (n+1)\pi$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ описывает ветви функции Ламберта в комплексной полуплоскости при $\eta \geq 0$. Соответствующие кривые изображены на рис. 1.2.

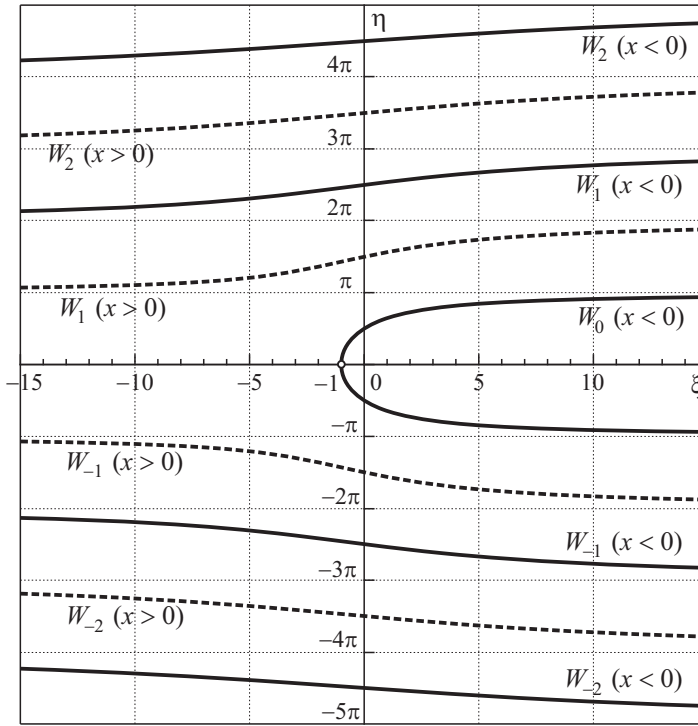


Рис. 1.2. Ветви функции Ламберта в комплексной плоскости, описываемые формулой (1.1.3.12); $\xi = \operatorname{Re} W(x)$, $\eta = \operatorname{Im} W(x)$, $y = 0$. Сплошными линиями обозначены ветви при $x < 0$, а штриховыми — ветви при $x > 0$.

Подставив (1.1.3.12) в первое уравнение (1.1.3.11), после элементарных преобразований получим соотношение

$$-\frac{\eta}{\sin \eta} \exp(-\eta \operatorname{ctg} \eta) = x, \quad (1.1.3.13)$$

которое неявно определяет зависимость мнимой части функции Ламберта η от x . Используя формулы (1.1.3.12) и (1.1.3.13), представим комплексные ветви функции Ламберта $W_m = W_m(x)$ при $x < 0$ в параметрическом виде

$$\begin{aligned} W_0 &= \xi_0 + i\eta_0, \\ \xi_0 &= -s \operatorname{ctg} s, \quad \eta_0 = s, \quad x = -\frac{s}{\sin s} \exp(-s \operatorname{ctg} s), \quad |s| < \pi; \\ W_m &= \xi_m + i\eta_m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \xi_m &= -s \operatorname{ctg} s, \quad \eta_m = s \operatorname{sign} m, \quad x = -\frac{s}{\sin s} \exp(-s \operatorname{ctg} s), \\ &2|m|\pi < s < (2|m| + 1)\pi. \end{aligned} \quad (1.1.3.14)$$

Точка с координатами $x = -e^{-1}$ и $\xi_0 = -1$, которая соответствует $s = \eta_0 = 0$, также включается в W_0 .

На рис. 1.3 сплошными линиями изображены зависимости действительной и мнимой частей нескольких ветвей функции Ламберта от x , построенные для $x < 0$ с помощью формул (1.1.3.14) путем задания в соответствующих интервалах численных значений действительного параметра s . Видно, что $\xi_m \rightarrow -\infty$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) при $x \rightarrow -0$ и с увеличением модуля порядкового номера ветви $|m|$ действительная часть функции Ламберта уменьшается, а абсолютная величина мнимой части этой функции растет. Действительные части функций $W_{\pm m}(x)$ обращаются в нуль при $x_m = -\frac{\pi}{2} - 2\pi|m|$ и $m = 0, 1, \dots$. При $-\pi/2 < x < 0$ действительные части всех ветвей функции Ламберта отрицательны.

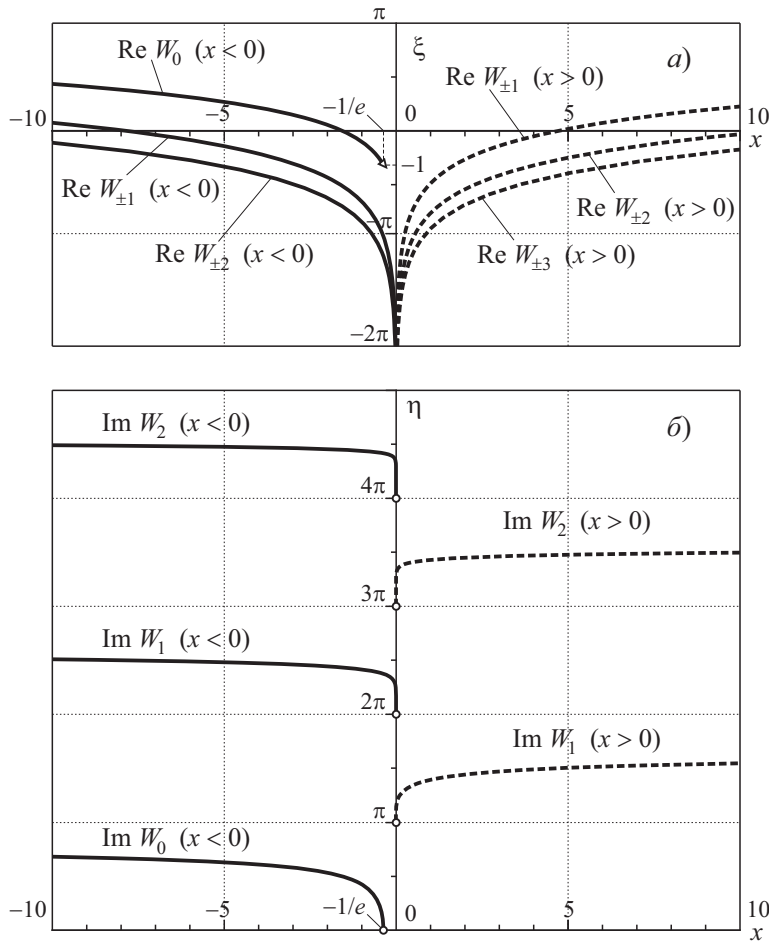


Рис. 1.3. Комплексные ветви функции Ламберта при $y = 0$, описываемые формулами (1.1.3.14) и (1.1.3.15): а) $\xi_m = \text{Re } W_m(x)$, б) $\eta_m = \text{Im } W_m(x)$. Сплошными линиями обозначены ветви при $x < 0$, а штриховыми — ветви при $x > 0$.

При $x > 0$ комплексные ветви функции Ламберта $W_m = W_m(x)$ можно представить в параметрическом виде

$$\begin{aligned} W_m &= \xi_m + i\eta_m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots; \\ \xi_m &= -s \operatorname{ctg} s, \quad \eta_m = s \operatorname{sign} m, \quad x = -\frac{s}{\sin s} \exp(-s \operatorname{ctg} s); \quad (1.1.3.15) \\ (2|m| + 1)\pi &< s < (2|m| + 2)\pi. \end{aligned}$$

На рис. 1.3 штриховыми линиями изображены зависимости действительной и мнимой частей нескольких ветвей функции Ламберта от x , построенные для $x > 0$ с помощью формул (1.1.3.15). Видно, что $\xi_m \rightarrow -\infty$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) при $x \rightarrow +0$. С увеличением модуля порядкового номера ветви $|m|$ действительная часть функции Ламберта уменьшается, а абсолютная величина мнимой части этой функции растет. Действительные части функций $W_{\pm m}(x)$ обращаются в нуль при $x_m = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(|m| - 1)$. Хотя при $0 < x < 3\pi/2$ действительные части всех ветвей функции Ламберта $W_{\pm m}$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) отрицательны, однако имеется один действительный положительный корень на главной ветви функции Ламберта W_p .

Взяв модуль от обеих частей комплексного представления функции Ламберта (1.1.3.4) для действительных $z = x$, получим

$$e^{\xi}(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = |x|. \quad (1.1.3.16)$$

Соотношение (1.1.3.16) определяет линию уровня в комплексной плоскости $W = \xi + i\eta$, на которой находятся точки всех ветвей функции Ламберта W_k при заданном x . В области неотрицательных значений действительной части функции Ламберта $\xi \geq 0$ из (1.1.3.16) следует неравенство

$$(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \leq |x| \quad (\text{равенство достигается при } \xi = 0), \quad (1.1.3.17)$$

т. е. все точки ветвей W_k в положительной полуплоскости $\xi > 0$ лежат внутри круга радиуса $|x|$. Иными словами, при любом действительном x действительные части ветвей функции Ламберта ограничены величиной $|x|$: $\operatorname{Re} W_m \leq |x|$. Более точно: максимально допустимое значение ξ в положительной полуплоскости $\xi \geq 0$ для всех W_k определяется значением $\eta = 0$ в (1.1.3.16) и дает $\xi_{\max} = W_p(|x|)$.

Замечание 1.2. Линии уровня, заданные неявной зависимостью (1.1.3.17), можно представить в параметрической форме

$$\xi = s, \quad \eta = \pm \sqrt{x^2 e^{-2s} - s^2}, \quad -\infty < s \leq W_p(|x|). \quad (1.1.3.18)$$

На рис. 1.4 изображены линии уровней, которые определяются неявной зависимостью (1.1.3.16) (или формулами, заданными в параметрической форме (1.1.3.18)), в комплексной плоскости $W = \xi + i\eta$ при $x = \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 2.0$. Кружочками показаны точки пересечения линий уровня с соответствующими ветвями функции Ламберта W_m при $x > 0$, а жирными точками — точки пересечения при $x < 0$.

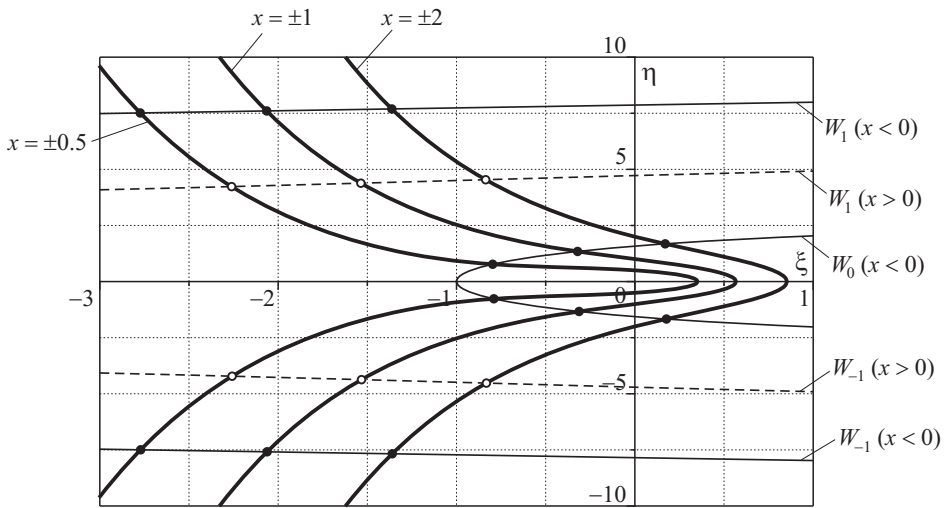


Рис. 1.4. Линии уровней функции Ламберта $|We^W| = |x|$, определяемые неявной зависимостью (1.1.3.16) в комплексной плоскости $W = \xi + i\eta$ при $x = \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 2.0$. Кружочками обозначены корни функции Ламберта, соответствующие $x > 0$, а жирными точками — корни, соответствующие $x < 0$.

Таблица 1.2. Значения функции Ламберта $W(x)$ при некоторых вещественных x на нескольких первых ветвях $W_m(x)$.

| Ветви $W(x)$ | $x = -\pi/2$ | $x = -1$ | $x = 1$ | $x = e$ |
|----------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $W_{\pm 1}(x)$ | $\pm \frac{\pi}{2} i$ | $-0.3181 \pm 1.3372 i$ | $-1.5339 \pm 4.3752 i$ | $-0.5321 \pm 4.5972 i$ |
| $W_{\pm 2}(x)$ | $-1.6043 \pm 7.6472 i$ | $-2.0623 \pm 7.5886 i$ | $-2.4016 \pm 10.7763 i$ | $-1.3940 \pm 10.8680 i$ |
| $W_{\pm 3}(x)$ | $-2.1983 \pm 13.9812 i$ | $-2.6532 \pm 13.9492 i$ | $-2.8536 \pm 17.1135 i$ | $-1.8490 \pm 17.1715 i$ |
| $W_{\pm 4}(x)$ | $-2.5667 \pm 20.2945 i$ | $-3.0202 \pm 20.2725 i$ | $-3.1630 \pm 23.4277 i$ | $-2.1599 \pm 23.4702 i$ |
| $W_{\pm 5}(x)$ | $-2.8349 \pm 26.5974 i$ | $-3.2878 \pm 26.5805 i$ | $-3.3987 \pm 29.7313 i$ | $-2.3966 \pm 29.7648 i$ |

В табл. 1.2 приведены несколько комплексных значений многозначной функции Ламберта W для четырех действительных значений x .

Для приближенного определения комплексных значений главной ветви функции Ламберта $W_0(z)$ можно использовать явную аппроксимационную формулу [553]:

$$W_0(z) = \frac{2 \ln(1 + A_1 y) - \ln[1 + A_2 \ln(1 + A_3 y)] + A_4}{1 + [2 \ln(1 + A_1 y) + 2A_5]^{-1}}, \quad y = \sqrt{2ez + 2}, \quad (1.1.3.19)$$

$$A_1 = 0.8842, \quad A_2 = 0.9294, \quad A_3 = 0.5106, \quad A_4 = -1.213, \quad A_5 = 2.344,$$

которая дает точные асимптотики в окрестности точек $z = 0$ и $z = -e^{-1}$ и при больших $|z|$. Во всей комплексной плоскости z максимальная относительная погрешность формулы (1.1.3.19) составляет менее 10^{-2} (при вычислении функций \sqrt{z} и $\ln z$ выбираются главные ветви).

О различных аспектах численного определения ветвей комплексной функции Ламберта см., например, [154, 305].

Некоторые замечания. В общем случае показатель λ экспоненциального решения (1.1.3.2) уравнения (1.1.3.3) можно выразить в терминах функции Ламберта в виде (1.1.3.5), где под W в правой части этой формулы понимается совокупность всех действительных и комплексных ветвей функции Ламберта. Каждая пара комплексно сопряженных корней $W_{\pm m} = \xi_m \pm i\eta_m$ определяет пару экспоненциальных решений ОДУ с запаздыванием (1.1.3.1) вида

$$u_{\pm m}(t) = e^{(\lambda_{r,m} \pm i\lambda_{i,m})t} = e^{\lambda_{r,m}t} [\cos(\lambda_{i,m}t) \pm i \sin(\lambda_{i,m}t)], \quad (1.1.3.20)$$

$$\lambda_{r,m} = a + \tau^{-1}\xi_m(x), \quad \lambda_{i,m} = \tau^{-1}\eta_m(x), \quad x = b\tau e^{-a\tau},$$

которые получены с помощью формул (1.1.3.2) и (1.1.3.5). Поскольку ОДУ с запаздыванием (1.1.3.1) является линейным и однородным, то действительные и мнимые части комплексных решений (1.1.3.20), а именно:

$$u_m^{(1)}(t) = \operatorname{Re} u_{\pm m}(t) = e^{\lambda_{r,m}t} \cos(\lambda_{i,m}t), \quad (1.1.3.21)$$

$$u_m^{(2)}(t) = \operatorname{Im} u_{\pm m}(t) = e^{\lambda_{r,m}t} \sin(\lambda_{i,m}t),$$

являются действительными решениями рассматриваемого уравнения (1.1.3.1).

Справедливы два простых утверждения:

1°. При выполнении неравенств $a < 0$ и $0 < b < -a$ все корни характеристического уравнения (1.1.3.3) имеют отрицательные вещественные части.

2°. При $b > -a$ характеристическое уравнение (1.1.3.3) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью.

Замечание 1.3. Наиболее общие (но более сложные) условия, при выполнении которых вещественные части всех корней характеристического уравнения (1.1.3.3) будут отрицательны, сформулированы далее в разд. 1.3.2 (см. теорему Хейса [8]).

Отметим, что при

$$a = 0, \quad b = k(-1)^{n+1}, \quad k = \frac{(2n+1)\pi}{2\tau}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.1.3.22)$$

уравнение (1.1.3.1) имеет периодические решения вида

$$u(t) = \cos(kt + \delta), \quad (1.1.3.23)$$

где δ — произвольная постоянная.

Замечание 1.4. Замена $u(t) = e^{at}\bar{u}(t)$ приводит уравнение (1.1.3.1) к более простому виду

$$\bar{u}'_t = be^{-a\tau}\bar{w}, \quad \bar{w} = \bar{u}(t - \tau).$$

Замечание 1.5. Линейное неоднородное ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием

$$u'_t = au + bw + c, \quad w = u(t - \tau),$$

при $b \neq -a$ подстановкой $u = v - \frac{c}{a+b}$ сводится к однородному ОДУ с запаздыванием вида (1.1.3.1). При $b = -a$ для получения однородного ОДУ с запаздыванием следует использовать замену $u = v + kt$, где $k = \frac{c}{1-a\tau}$.

1.1.4. Нелинейные ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием, допускающие линеаризацию или точные решения

Ниже описано несколько простых нелинейных ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием, которые сводятся к линейным ОДУ с постоянным запаздыванием или имеют точные решения, допускающие представление в элементарных функциях. Эти уравнения и их решения могут быть использованы для тестирования приближенных аналитических и численных методов решения нелинейных ОДУ с запаздыванием.

Уравнение 1. Нелинейное ОДУ с постоянным запаздыванием

$$u'_t = a(t)u + b(t)u^{1/2} + c(t)u^{1/2}w^{1/2}, \quad w = u(t - \tau),$$

подстановкой $u = v^2$ ($v \geq 0$) приводится к линейному ОДУ с постоянным запаздыванием $v'_t = \frac{1}{2}a(t)v + \frac{1}{2}c(t)\bar{v} + \frac{1}{2}b(t)$, где $\bar{v} = v(t - \tau)$.

Уравнение 2. Нелинейное ОДУ с постоянным запаздыванием

$$u'_t = a(t)u + b(t)u^{1-k} + c(t)u^{1-k}w^k, \quad w = u(t - \tau),$$

подстановкой $u = v^{1/k}$ приводится к линейному ОДУ с постоянным запаздыванием $v'_t = ka(t)kv + kc(t)\bar{v} + kb(t)$, где $\bar{v} = v(t - \tau)$.

Уравнение 3. Нелинейное ОДУ с постоянным запаздыванием

$$u'_t = a(t) + b(t)e^{\lambda u} + c(t)e^{\lambda(u-w)}, \quad w = u(t - \tau),$$

подстановкой $v = e^{-\lambda u}$ приводится к линейному ОДУ с постоянным запаздыванием $v'_t = -\lambda a(t)v - \lambda c(t)\bar{v} - \lambda b(t)$, где $\bar{v} = v(t - \tau)$.

Уравнение 4. Нелинейное ОДУ с постоянным запаздыванием

$$u'_t = a(t)u \ln u + b(t)u \ln w + c(t)u, \quad w = u(t - \tau),$$

подстановкой $u = e^v$ приводится к линейному ОДУ с постоянным запаздыванием $v'_t = a(t)v + b(t)\bar{v} + c(t)$, где $\bar{v} = v(t - \tau)$.

Замечание 1.6. Точные решения приведенных выше нелинейных уравнений 1–4 с постоянными коэффициентами a, b, c можно получить путем использования указанных подстановок и результатов, описанных в разд. 1.1.3.

Уравнение 5. Нелинейное ОДУ с постоянным запаздыванием

$$u'_t = f(u - w), \quad w = u(t - \tau),$$

которое зависит от произвольной функции $f(z)$ и не меняется при замене u на $u + \text{const}$, допускает точное решение $u(t) = bt + C$, где C — произвольная постоянная, а b — корень трансцендентного уравнения $b = f(b\tau)$.

Уравнение 6. Нелинейное однородное ОДУ с постоянным запаздыванием

$$u'_t = uf(w/u), \quad w = u(t - \tau),$$

которое зависит от произвольной функции $f(z)$ и не меняется при замене u на $\text{const} \cdot u$, допускает точное решение $u(t) = Ce^{\lambda t}$, где C — произвольная постоянная, а λ — корень трансцендентного уравнения $\lambda = f(e^{-\lambda\tau})$.

1.1.5. Метод шагов. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

Метод шагов для ОДУ с постоянным запаздыванием. Задачу Коши с постоянным запаздыванием (1.1.2.1) – (1.1.2.2) на конечном интервале можно решить *методом шагов*. Его суть заключается в определении решения последовательным интегрированием более простых ОДУ без запаздывания на отрезках $t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n+1)\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$, имеющих одинаковую длину τ .

При $n = 0$ на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ получим $w(t) = u(t - \tau) = \varphi(t - \tau)$, а значит можем записать

$$\begin{aligned} u'_t &= f(t, u, \varphi_0(t - \tau)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau; \\ u(t_0) &= \varphi_0(t_0), \end{aligned}$$

где для удобства дальнейшего изложения функция φ переобозначена на φ_0 . Предполагая существование решения $u = \varphi_1(t)$ этой задачи на всем отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, для следующего отрезка аналогично имеем

$$\begin{aligned} u'_t &= f(t, u, \varphi_1(t - \tau)), \quad t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau; \\ u(t_0 + \tau) &= \varphi_1(t_0 + \tau). \end{aligned}$$

В общем виде задача на каждом отрезке записывается так:

$$\begin{aligned} u'_t &= f(t, u, \varphi_n(t - \tau)), \quad t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n+1)\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ u(t_0 + n\tau) &= \varphi_n(t_0 + n\tau), \end{aligned}$$

где $\varphi_n(t)$ – решение рассматриваемой задачи Коши на предыдущем отрезке $t_0 + (n-1)\tau \leq t \leq t_0 + n\tau$, $n = 1, 2, \dots$.

Решение линейных задач с постоянным запаздыванием методом шагов.

Ниже приведены примеры практического использования метода шагов для решения задач Коши, описываемых линейными ОДУ с постоянным запаздыванием.

► **Пример 1.2.** Рассмотрим задачу Коши для линейного ОДУ с постоянным запаздыванием и начальным условием специального вида

$$\begin{aligned} u'_t &= bw, \quad w = u(t - \tau), \quad t > 0; \\ u &= 1 \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \tag{1.1.5.1}$$

где b – свободный параметр ($b \neq 0$).

Применяя к задаче (1.1.5.1) метод шагов, на первом шаге получим

$$\begin{aligned} u'_t &= b, \quad 0 < t \leq \tau && \text{(уравнение);} \\ u &= 1 \quad \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие).} \end{aligned}$$

Интегрируя, находим

$$u = 1 + bt, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

На следующем шаге приходим к задаче

$$\begin{aligned} u'_t &= b[1 + b(t - \tau)], \quad \tau < t \leq 2\tau && \text{(уравнение);} \\ u &= 1 + b\tau \quad \text{при} \quad t = \tau && \text{(начальное условие),} \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$u = 1 + bt + \frac{1}{2}b^2(t - \tau)^2, \quad \tau \leq t \leq 2\tau.$$

Продолжая далее аналогичные вычисления, в итоге можно получить формулу (см., например, [94]):

$$u = 1 + b \frac{t}{1!} + \dots + b^k \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!}, \quad (k-1)\tau \leq t \leq k\tau, \quad (1.1.5.2)$$

где k — любое целое положительное число. ◀

Для дальнейшего удобно ввести экспоненту с запаздыванием:

$$\exp_d(t, \tau) \equiv \sum_{k=0}^{[t/\tau]+1} \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!}, \quad (1.1.5.3)$$

где символ $[A]$ обозначает целую часть числа A , а индекс d указывает на запаздывание (от англ. *delay*). Имеют место следующие свойства:

$$\exp_d(0, \tau) = 1, \quad \exp_d(t, 0) = e^t, \quad [\exp_d(t, \tau)]'_t = \exp_d(t - \tau, \tau).$$

На рис. 1.5 изображена экспонента с запаздыванием (1.1.5.3) при $\tau = 0.5, 1.0, 2.0$. Обычная экспоненциальная функция e^t , соответствующая значению $\tau = 0$, показана штриховой линией.

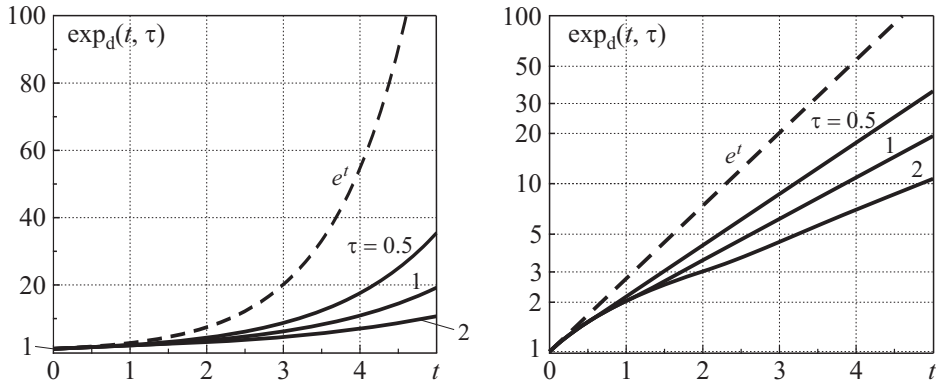


Рис. 1.5. Графики экспоненты с запаздыванием $\exp_d(t, \tau)$ при $\tau = 0.5, 1.0, 2.0$ в обычных (слева) и логарифмических (справа) координатах. Штриховой линией показана экспоненциальная функция e^t , соответствующая значению $\tau = 0$.

Решение (1.1.5.2) задачи (1.1.5.1) выражается через экспоненту с запаздыванием (1.1.5.3) следующим образом:

$$u = \exp_d(bt, b\tau). \quad (1.1.5.4)$$

► **Пример 1.3.** Нетрудно проверить, что функция

$$u(t) = e^{at} \exp_d(\lambda t, \lambda \tau), \quad \lambda = e^{-a\tau} b,$$

является точным решением линейного ОДУ с постоянными коэффициентами и запаздыванием

$$u'_t = au + bw, \quad w = u(t - \tau), \quad t > 0, \quad (1.1.5.5)$$

с экспоненциальным начальным условием: $u = e^{at}$ при $-\tau \leq t \leq 0$. ◀

Представления решений линейных задач с помощью экспоненты с запаздыванием. С помощью экспоненты с запаздыванием (1.1.5.3) можно представить решения двух важных более общих задач, описанных ниже.

Задача 1. Решение задачи Коши для линейного однородного ОДУ с запаздыванием (1.1.5.5) с общим начальным условием

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0 \quad (1.1.5.6)$$

можно записать в замкнутой форме [3]:

$$u(t) = e^{a(t+\tau)} \exp_d(\lambda t, \lambda \tau) \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{a(t-s)} \exp_d(\lambda(t-\tau-s), \lambda \tau) [\varphi'_s(s) - a\varphi(s)] ds, \quad \lambda = e^{-a\tau} b. \quad (1.1.5.7)$$

Другое представление решения задачи Коши для уравнения (1.1.5.5) с общим начальным условием, заданном на отрезке $0 \leq t \leq \tau$, можно найти в [94].

Задача 2. Решение задачи Коши для линейного неоднородного ОДУ с запаздыванием

$$u'_t = au + bw + f(t), \quad w = u(t - \tau), \quad t > 0, \quad (1.1.5.8)$$

с однородным начальным условием

$$u = 0 \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0 \quad (1.1.5.9)$$

можно представить с помощью экспоненты с запаздыванием в следующем виде [3]:

$$u(t) = \int_0^t e^{a(t-s)} \exp_d(\lambda(t-s), \lambda \tau) f(s) ds, \quad \lambda = e^{-a\tau} b. \quad (1.1.5.10)$$

Замечание 1.7. Сумма решений (1.1.5.7) и (1.1.5.10) дает решение линейного неоднородного ОДУ с запаздыванием (1.1.5.8) с общим начальным условием (1.1.5.6).

Решение нелинейных задач с постоянным запаздыванием методом шагов. Покажем, как, используя метод шагов, можно построить точное решение задачи Коши для некоторых классов нелинейных ОДУ с постоянным запаздыванием.

Задача 1. Рассмотрим нелинейное ОДУ с запаздыванием

$$u'_t = f(t, w)u + g(t, w), \quad w = u(t - \tau), \quad (1.1.5.11)$$

с начальным условием общего вида (1.1.2.2). В частном случае $f(t, w) = a(t)$, $g(t, w) = b(t)w + c(t)$ рассматриваемое уравнение является линейным ОДУ с одним запаздыванием и переменными коэффициентами общего вида.

Поскольку уравнение (1.1.5.11) линейно по u , на каждом шаге будем получать задачу Коши для линейного ОДУ без запаздывания

$$\begin{aligned} u'_t &= f(t, \varphi_n(t - \tau))u + g(t, \varphi_n(t - \tau)), \quad t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n + 1)\tau, \\ u(t_0 + n\tau) &= \varphi_n(t_0 + n\tau), \end{aligned} \quad (1.1.5.12)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, а $\varphi_n(t)$ — решение задачи Коши, полученное на предыдущем шаге на отрезке $t_0 + (n - 1)\tau \leq t \leq t_0 + n\tau$; $\varphi_0(t) \equiv \varphi(t)$.

Решение задачи (1.1.5.12) имеет вид (использованы результаты, приведенные, например, в [33, 392, 446, 448]):

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{F(t)} \left[\varphi_n(t_0 + n\tau) + \int_{t_0 + n\tau}^t e^{-F(\xi)} g(\xi, \varphi_n(\xi - \tau)) d\xi \right], \\ F(t) &= \int_{t_0 + n\tau}^t f(\xi, \varphi_n(\xi - \tau)) d\xi, \quad t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n + 1)\tau, \end{aligned} \quad (1.1.5.13)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Задача 2. Задача Коши для нелинейного ОДУ с запаздыванием

$$u'_t = f(t, w)u + g(t, w)u^k, \quad w = u(t - \tau),$$

и начальным условием общего вида (1.1.2.2) подстановкой $y = u^{1-k}$ сводится к задаче 1, в которой надо сделать соответствующие переобозначения функций f и g .

Задача 3. Задача Коши для нелинейного ОДУ с запаздыванием

$$u'_t = f(t, w) + g(t, w)e^{\lambda u}, \quad w = u(t - \tau),$$

и начальным условием общего вида (1.1.2.2) подстановкой $y = e^{-\lambda u}$ сводится к задаче 1, в которой надо сделать соответствующие переобозначения функций f и g .

Задача 4. Задача Коши для нелинейного ОДУ с запаздыванием

$$u'_t = f(t, w)u + g(t, w)u \ln u, \quad w = u(t - \tau),$$

и начальным условием общего вида (1.1.2.2) подстановкой $u = e^y$ сводится к задаче 1, в которой надо сделать соответствующие переобозначения функций f и g .

Метод шагов для ОДУ с несколькими постоянными запаздываниями. Метод шагов можно применять для решения задачи Коши для ОДУ первого

порядка с несколькими постоянными запаздываниями (1.1.2.5) и начальными данными (1.1.2.6). Решение этой задачи строится путем последовательного интегрирования ОДУ без запаздывания на отрезках $t_0 + nh \leq t \leq t_0 + (n+1)h$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где шаг определяется минимальным запаздыванием $h = \min_{1 \leq k \leq m} \tau_k$ (см., например, [8]).

1.1.6. Уравнения с переменным запаздыванием. ОДУ с пропорциональным запаздыванием

ОДУ с переменным запаздыванием. Уравнение пантографа. До сих пор в книге изучались ОДУ с постоянным запаздыванием. Однако в приложениях встречаются также более сложные ОДУ с переменным запаздыванием вида $\tau = \tau(t)$, где $\tau(t)$ — заданная функция.

Рассмотрим сначала обыкновенные дифференциальные уравнения с переменным запаздыванием, пропорциональным независимой переменной.

► **Пример 1.4.** Линейное функционально-дифференциальное уравнение первого порядка

$$u'_t = au + bw, \quad w = u(pt), \quad (1.1.6.1)$$

при $p > 0$ ($p \neq 1$) называется *уравнением пантографа*.

Уравнение (1.1.6.1) при $0 < p < 1$ описывает динамику контактного токоприемника (пантографа) электровоза [408] и является важным частным случаем ОДУ с переменным запаздыванием при $\tau(t) = (1-p)t$, поскольку $t - \tau(t) = pt$. Функция $u(pt)$, входящая в уравнение пантографа (1.1.6.1), отличается от функции $u(t)$ растяжением вдоль оси t в $1/p$ раз. ◀

Уравнение пантографа и родственные более сложные функционально-дифференциальные уравнения, которые содержат искомые функции с растяжением (при $0 < p < 1$) или сжатием (при $p > 1$) аргументов, возникают в задачах биологии [124, 210, 218, 273, 274, 587], динамики популяций [104], астрофизики [106], механики [408], теории чисел [377], стохастических игр [230], теории графов [475], теории риска и очередей [249], теории нейронных сетей [592].

Анализу и приближенным аналитическим решениям ОДУ с пропорциональным аргументом посвящены, например, работы [117, 240, 283, 298, 299, 318, 357, 408, 414, 472, 586]. Отметим, что хотя в большинстве работ рассматривается случай $0 < p < 1$, в [106, 218, 273, 587] уравнения были выведены для $p > 1$.

Нелинейное уравнение вида

$$u'_t = f(t, u, w), \quad w = u(pt), \quad 0 < p < 1, \quad (1.1.6.2)$$

также является частным случаем ОДУ с переменным запаздыванием при $\tau(t) = (1-p)t$. Подобные дифференциальные уравнения с запаздыванием, пропорциональным времени, далее будем называть *уравнениями с пропорциональным запаздыванием*.

Задача Коши для ОДУ с пропорциональным запаздыванием. Начальные данные в задаче Коши для уравнений (1.1.6.1) и (1.1.6.2) при $0 < p < 1$ задаются следующим образом:

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad pt_0 \leq t \leq t_0. \quad (1.1.6.3)$$

Видно, что длина начального отрезка, на котором задаются начальные данные (1.1.6.3), существенным образом зависит от выбора начальной точки t_0 и равна $L = (1-p)t_0$. При $t_0 = 0$ начальный отрезок вырождается в одну единственную точку $t = 0$; в этом случае начальное условие для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (1.1.6.1) и (1.1.6.2) ставится точно также, как для ОДУ без запаздывания при $t = 0$ (именно этот случай в данной книге и многочисленных публикациях встречается наиболее часто).

► **Пример 1.5.** Рассмотрим задачу Коши для линейного ОДУ с пропорциональным запаздыванием простейшего вида

$$u'_t = bw, \quad w = u(pt), \quad t > 0; \quad u(0) = c. \quad (1.1.6.4)$$

Решение этой задачи можно представить в виде бесконечного степенного ряда [298, 318]:

$$u(t) = c \exp_s(bt, p), \quad \exp_s(t, p) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^n}{n!} \quad (0 < p < 1), \quad (1.1.6.5)$$

сходящегося при любых t .

Функцию $\exp_s(t, p)$, которая при $t \geq 0$ имеет свойства во многом аналогичные обычной экспоненциальной функции, будем называть *экспонентой с растяжением**. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \exp_s(0, p) &= 1, \quad \exp_s(t, 0) = 1 + t, \quad \exp_s(t, 1) = e^t, \\ [\exp_s(t, p)]'_t &= \exp_s(pt, p), \quad [\exp_s(t, p)]^{(n)}_t = \exp_s(pt, p^n), \end{aligned} \quad (1.1.6.6)$$

где $n = 1, 2, \dots$ Кроме того, $\exp_s(t, p) > \exp_s(t, q)$, если $p > q$ и $t > 0$.

На рис. 1.6 изображена экспонента с растяжением $\exp_s(t, p)$ для трех значений параметра $p = 0.25, 0.50, 0.75$. Обычная экспоненциальная функция e^t и линейная функция $1 + t$, соответствующие значениям $p = 1$ и $p = 0$, показаны штриховыми линиями.

Максимальная ошибка приближенной формулы для экспоненты с растяжением $\exp_s(t, p)$, полученной сохранением пяти первых членов ряда (1.1.6.5) (до $n = 4$ включительно), составляет меньше одного процента в диапазоне $-1.1 \leq t \leq 2.3$ при $0.2 \leq p \leq 0.8$. ◀

*В [501, 542] для экспоненты с растяжением использовался другой термин — «деформированная экспоненциальная функция» (англ. *deformed exponential function*). Термин «экспонента с растяжением» более точен, поскольку к деформациям относятся как растяжения (при $0 < p < 1$), так и сжатия (при $p > 1$). Кроме того, термин деформированная экспоненциальная функция начал использоваться раньше совсем в другом смысле в статистической физике (см., например, [153, 398]). В цитируемых работах не вводилось специальное обозначение $\exp_s(t, p)$, где индекс s указывает на растяжение (от англ. *stretching*).

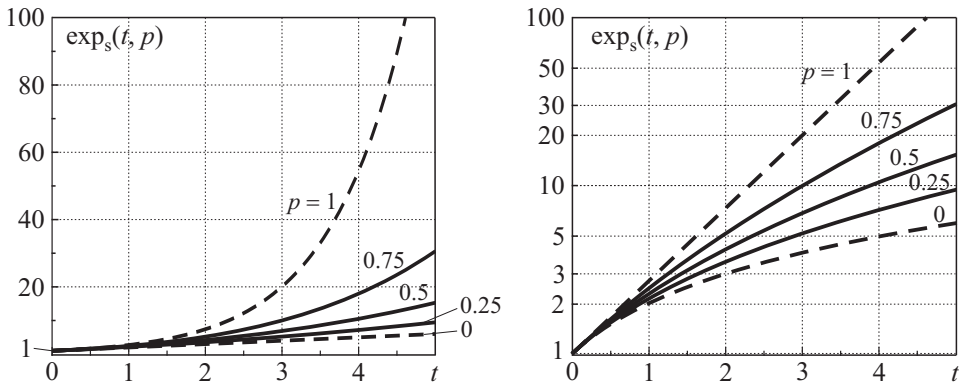


Рис. 1.6. Графики экспоненты с растяжением $\exp_s(t, p)$ при $p = 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$ в обычных (слева) и логарифмических (справа) координатах.

Отметим качественные особенности решения задачи Коши (1.1.6.4) при $b < 0$. Для конкретности, подставив значения $b = -1, c = 1$ в (1.1.6.5), получим

$$u(t) = \exp_s(-t, p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^n}{n!}. \quad (1.1.6.7)$$

Ниже описаны некоторые свойства нулей функции (1.1.6.7) (подробности см., например, в [209, 339, 391, 542]).

1°. Функция (1.1.6.7) имеет счетное множество положительных нулей: $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Численные значения шести первых корней функции $\exp_s(-t, 0.5)$: 1.488, 4.881, 13.560, 34.775, 84.977, 201.003.

2°. Функция (1.1.6.7) при $t > 0$ ($0 < p < 1$) описывает колебания с монотонно увеличивающейся амплитудой (см. рис. 1.7). Например, при $p = 0.5$ она имеет экстремумы $-0.262, 0.908, -9.139, 223.362, -12\,313.172$ при $t = 2.976, 9.762, 27.121, 69.551, 169.955$ соответственно.

3°. Отношение t_{n+1}/t_n монотонно убывает, причем имеет место предельное соотношение: $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{n+1}/t_n = 1/p$. В частности при $p = 0.5$: $t_2/t_1 = 2.778, t_{12}/t_{11} = 2.163, t_{52}/t_{51} = 2.038, t_{102}/t_{101} = 2.020, t_{202}/t_{201} = 2.010$.

4°. Для нулей функции (1.1.6.7) справедлива следующая асимптотическая формула [542]:

$$t_n = np^{1-n} [1 + O(n^{-2})] \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Нелинейные ОДУ с пропорциональным запаздыванием, допускающие точные решения. Ниже приведено несколько нелинейных ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием, которые имеют точные решения, допускающие представление в элементарных функциях. Эти решения могут быть использованы для тестирования приближенных аналитических и численных методов решения нелинейных ОДУ с переменным запаздыванием.

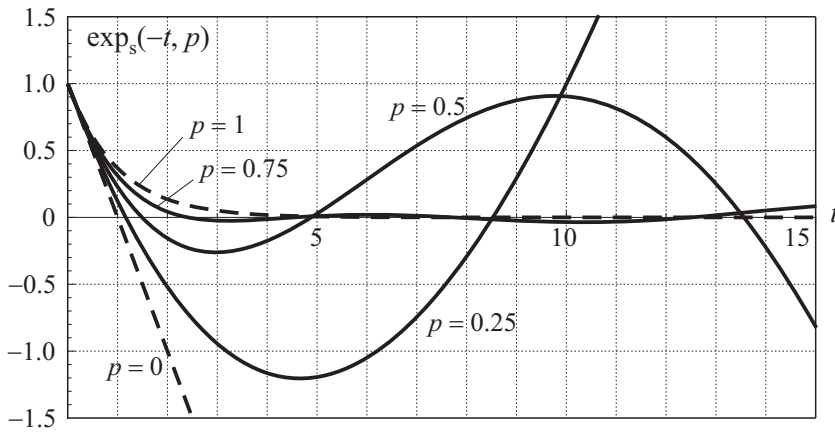


Рис. 1.7. Графики экспоненты с растяжением $\exp_s(-t, p)$ при $p = 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$.

Уравнение 1. Нелинейное ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t = au + bw^2, \quad w = u(\tfrac{1}{2}t),$$

допускает точное решение $u(t) = Ce^{(a+bC)t}$, которое удовлетворяет начальному условию $u(0) = C$, где C — произвольная постоянная.

Уравнение 2. Нелинейное ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t = au + bw^{1/p}, \quad w = u(pt),$$

допускает точное решение

$$u(t) = C \exp(\lambda t), \quad \lambda = a + bC^{(1-p)/p},$$

которое удовлетворяет начальному условию $u(0) = C$, где C — произвольная постоянная.

Уравнение 3. Нелинейное ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t = f(u - 2w), \quad w = u(\tfrac{1}{2}t),$$

содержащее произвольную функцию $f(z)$, допускает точное решение

$$u(t) = f(-C)t + C,$$

которое удовлетворяет начальному условию $u(0) = C$, где C — произвольная постоянная.

Уравнение 4. Нелинейное ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t = a - bw^2, \quad w = u(\tfrac{1}{2}t),$$

допускает точные решения

$$u(t) = \sqrt{\frac{2a}{b}} \sin\left(b\sqrt{\frac{a}{2b}}t\right) \quad \text{при } ab > 0,$$

$$u(t) = -\sqrt{-\frac{2a}{b}} \operatorname{sh}\left(b\sqrt{-\frac{a}{2b}}t\right) \quad \text{при } ab < 0,$$

которые удовлетворяют однородному начальному условию $u(0) = 0$.

Замечание 1.8. Модифицированные нелинейные уравнения 1–4 из разд. 1.1.4, в которых постоянное запаздывание заменено на пропорциональное запаздывание (т. е. $w = u(pt)$), с помощью таких же подстановок допускают точную линеаризацию.

ОДУ с несколькими пропорциональными запаздываниями. Будем рассматривать уравнения вида

$$u'_t = f(t, u, w_1, \dots, w_m), \quad w_k = u(p_k t), \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.1.6.8)$$

при $0 < p_k < 1$ (для всех k).

Начальные данные в задаче Коши для уравнения (1.1.6.8) задаются следующим образом:

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad p_{\min} t_0 \leq t \leq t_0, \quad (1.1.6.9)$$

где $p_{\min} = \min_{k=1, \dots, m} p_k$. При $t_0 = 0$ начальный отрезок вырождается в одну единственную точку $t = 0$ и начальное условие ставится точно также, как для ОДУ без запаздывания при $t = 0$.

Переход к новым переменным по формулам [161, 318]:

$$x = \ln t, \quad y(x) = u(t),$$

преобразует (1.1.6.8) к ОДУ с m постоянными запаздываниями

$$y'_x = e^x f(e^x, y, y_1, \dots, y_m), \quad y_k = y(x - \tau_k), \quad \tau_k = \ln \frac{1}{p_k} > 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Уравнения с несколькими переменными запаздываниями. В литературе встречаются также более сложные функционально-дифференциальные уравнения, которые содержат искомую функцию с одним или несколькими запаздываниями, нелинейно зависящими от времени:

$$u'_t = f(t, u, w_1, \dots, w_m), \quad w_k = u(t - \tau_k(t)), \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.1.6.10)$$

где $\tau_k(t) > 0$ — заданные функции. Такие уравнения называются *ОДУ с переменными запаздываниями*.

При формулировке задачи Коши для уравнений с несколькими переменными запаздываниями (1.1.6.10) начальное условие записывается так:

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \in E_{t_0}, \quad (1.1.6.11)$$

где начальный отрезок E_{t_0} состоит из точки t_0 и тех значений $t - \tau_k(t)$, которые меньше t_0 при $t \geq t_0$, т. е.

$$E_{t_0} = \{t_* \leq t \leq t_0\}, \quad t_* = \min_{1 \leq k \leq m} \min_{t \geq t_0} [t - \tau_k(t)]. \quad (1.1.6.12)$$

► **Пример 1.6.** Для ОДУ с несколькими постоянными запаздываниями (1.1.2.5) использование формулы (1.1.6.12) дает начальный отрезок

$$E_{t_0} = \{t_* \leq t \leq t_0\}, \quad t_* = t_0 - \tau_{\max}, \quad \tau_{\max} = \max_{1 \leq k \leq m} \tau_k, \quad (1.1.6.13)$$

длина которого L не зависит от выбора начальной точки t_0 и равна максимальному запаздыванию $L = \max_{1 \leq k \leq m} \tau_k$. Учитывая (1.1.6.13), начальное условие (1.1.6.11) для уравнения (1.1.2.5) можно записать в виде (1.1.2.6). ◀

Замечание 1.9. При численном решении задачи Коши для уравнений с одним или несколькими переменными запаздываниями вместо начального отрезка E_{t_0} иногда для простоты используют (любой) другой отрезок, заведомо содержащий начальный, например $(-\infty, t_0]$.

Замечание 1.10. В [94, 213, 214] рассматриваются также более сложные ОДУ с одним или несколькими переменными запаздываниями τ_k , которые зависят не только от независимой переменной t , но и от искомой функции u , т. е. $\tau_k = \tau_k(t, u)$.

Метод шагов для ОДУ с переменным запаздыванием. Метод шагов можно использовать для решения задачи Коши для ОДУ с переменным запаздыванием общего вида [94]:

$$u'_t = f(t, u, w), \quad w = u(t - \tau(t)), \quad \tau(t) > 0.$$

В этом случае начальные данные задаются на отрезке (1.1.6.12) при $m = 1$, а шаг выбирается равным $h = \min_{t_0 \leq t \leq T} \tau(t)$, где $[t_0, T]$ — интервал, на котором строится решение.

Описанная процедура легко обобщается на ОДУ с несколькими переменными запаздываниями.

Замечание 1.11. Для уравнения пантографа (1.1.6.1) и более сложного ОДУ с пропорциональным запаздыванием (1.1.6.2) имеем $\tau(t) = (1 - p)t$. В задаче Коши с начальной точкой $t_0 = 0$ метод шагов для этого уравнения неприменим, поскольку $h = 0$.

1.1.7. Существование и единственность решений. Подавление сингулярностей в решениях задач с обострением

Существование и единственность решений. Метод шагов позволяет доказать существование и единственность решения задачи Коши для ОДУ с постоянным запаздыванием, так как для полученных ОДУ без запаздывания можно применять известные теоремы существования и единственности решений (см., например, [392, 446, 448]). Поэтому решение $u = u(t)$ задачи (1.1.2.1)–(1.1.2.2) существует, если функции $f = f(t, u, w)$ и $\varphi = \varphi(t)$ непрерывны, и единственно, если функция $f(t, u, w)$ имеет ограниченную частную производную первого порядка по u (или удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, т. е. $|f(t, u, w) - f(t, z, w)| \leq M|u - z|$, где M — некоторое положительное число).

Рассмотрим теперь более общую задачу Коши для ОДУ с несколькими переменными запаздываниями

$$\begin{aligned} u'_t &= f(t, u, w_1, \dots, w_m), \quad w_i = u(t - \tau_i(t)), \quad i = 1, \dots, m, \\ u &= \varphi(t) \quad \text{на отрезке} \quad E_{t_0}, \end{aligned} \tag{1.1.7.1}$$

где E_{t_0} — начальный отрезок, длина которого определяется формулой (1.1.6.12).

Для этой задачи теорема существования и единственности решения формулируется следующим образом (см., например, [94, 329]).

Теорема. Пусть в уравнении (1.1.7.1) все запаздывания $\tau_i(t)$ непрерывны при $t_0 \leq t \leq t_0 + H$ ($H > 0$) и неотрицательны, а функция f непрерывна в окрестности точки $(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau_1(t_0)), \dots, \varphi(t_0 - \tau_m(t_0)))$ и имеет ограниченные частные производные первого порядка по всем аргументам, начиная со второго (или удовлетворяет условию Липшица по этим аргументам), а начальная функция $\varphi(t)$ непрерывна на E_{t_0} . Тогда существует единственное решение $u = u(t)$ задачи Коши для уравнения (1.1.7.1) при $t_0 \leq t \leq t_0 + h$, где h достаточно мало.

Доказательство теоремы приводится, например в [94], и основано на применении принципа сжимающих отображений.

Замечание 1.12. Уравнения нейтрального типа (1.1.2.7) также можно решать методом шагов. В отличие от ОДУ с запаздыванием, решения уравнений нейтрального типа не сглаживаются в точках $t = t_0 + n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (см., например, [8, 94]).

Подавление сингулярностей в решениях задач с обострением путем введения запаздывания. Для ОДУ без запаздывания существуют задачи Коши, решения которых стремятся к бесконечности (имеют сингулярную особенность) при некотором конечном значении $t = t_*$. Сингулярная точка t_* не входит в уравнение явно и заранее неизвестна. Такие решения существуют на ограниченном интервале времени $t_0 \leq t < t_*$ и называются *решениями с обострением* [255, 446, 507].

► **Пример 1.7.** Рассмотрим задачу Коши для ОДУ без запаздывания

$$u'_t = u^2, \quad t > 0; \quad u(0) = 1, \quad (1.1.7.2)$$

которая допускает точное решение

$$u = \frac{1}{1-t}. \quad (1.1.7.3)$$

Это решение существует на ограниченном интервале времени при $0 \leq t < 1$ и имеет сингулярную особенность при $t = t_* = 1$. ◀

Рассмотрим далее более общую задачу Коши для автономного ОДУ первого порядка

$$u'_t = f(u), \quad t > 0; \quad u(0) = a > 0, \quad (1.1.7.4)$$

где $f(u) > 0$ — непрерывная функция, определенная для всех $u \geq a$.

Достаточные условия существования решения с обострением. Пусть для некоторого $\sigma > 0$ выполнено предельное соотношение [446]:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u^{1+\sigma}} = s, \quad 0 < s \leq \infty. \quad (1.1.7.5)$$

Тогда решение задачи Коши (1.1.7.4) имеет решение с обострением. Если $f(u)$ дифференцируема, то (1.1.7.5) можно заменить эквивалентным критерием

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} [u^{-\sigma} f'_u(u)] = s_1, \quad 0 < s_1 \leq \infty \quad (\sigma > 0).$$

В [4, 437, 438, 507] (см. также цитируемую литературу в [437, 438]) описаны некоторые численные методы решения задач с обострением для нелинейных ОДУ первого, второго и старших порядков.

Усложнение математических моделей путем введения запаздывания в правую часть ОДУ в задачах с обострением может полностью подавить сингулярность решения (условия существования или отсутствия сингулярности в решениях ОДУ с запаздыванием см., например, в [150, 174, 225]). Далее приводятся два примера задач с запаздыванием, которые в предельном случае $\tau = 0$ переходят в задачу с обострением (1.1.7.2), но не имеют сингулярности в решении при $\tau > 0$.

► **Пример 1.8.** Рассмотрим задачу Коши для ОДУ с запаздыванием

$$u'_t = w^2, \quad w = u(t - \tau), \quad t > 0; \quad u(t) = 1, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (1.1.7.6)$$

Точное решение задачи (1.1.7.6) для $\tau = 1$ при $-1 \leq t \leq 3$ имеет вид:

$$u = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 0; \\ 1 + t, & 0 < t \leq 1; \\ \frac{1}{3}(5 + t^3), & 1 < t \leq 2; \\ \frac{1}{126}(-158 + 224t + 168t^2 - 70t^3 - 35t^4 + 42t^5 - 14t^6 + 2t^7), & 2 < t \leq 3. \end{cases}$$

На рис. 1.8а с логарифмической шкалой по вертикальной оси показано точное решение (1.1.7.3) задачи (1.1.7.2) и численные решения задачи (1.1.7.6) для $\tau = 0.1$ и $\tau = 0.5$. ◀

► **Пример 1.9.** Рассмотрим другую задачу Коши для ОДУ с запаздыванием

$$u'_t = uw, \quad w = u(t - \tau), \quad t > 0; \quad u(t) = 1, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (1.1.7.7)$$

На рис. 1.8б показано точное решение (1.1.7.3) задачи (1.1.7.2) и численные решения задачи (1.1.7.7) для $\tau = 0.1$ и $\tau = 0.5$.

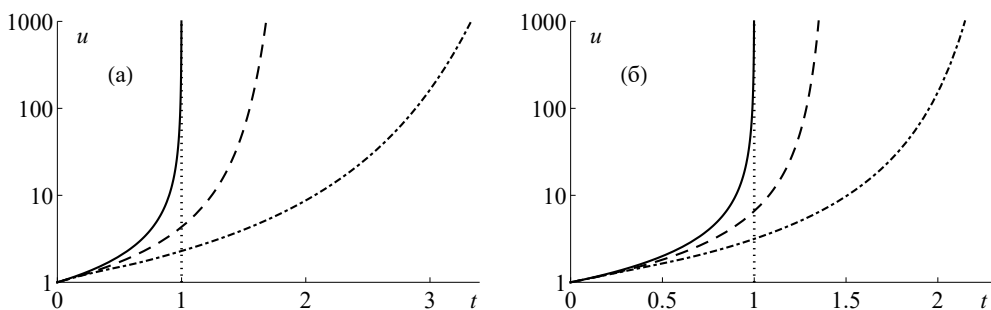


Рис. 1.8. Точное решение (1.1.7.3) задачи без запаздывания (1.1.7.2) (сплошная линия) и численные решения (а) задачи с запаздыванием (1.1.7.6) и (б) задачи с запаздыванием (1.1.7.7) при $\tau = 0.1$ (штриховая линия) и $\tau = 0.5$ (штрих-пунктирная линия). ◀

Из рис. 1.8а и 1.8б видно, что в рассмотренных тестовых задачах введение запаздывания полностью подавляет в решении сингулярную особенность с обострением.

Справедливо следующее утверждение. Пусть задача Коши для ОДУ без запаздывания (1.1.7.4) имеет решение с обострением. Тогда решение модифицированной задачи с запаздыванием

$$u'_t = f(w), \quad w = u(t - \tau), \quad t > 0; \quad u(t) = a, \quad -\tau \leq t \leq 0,$$

где $\tau > 0$, не имеет сингулярностей при конечном t .

Подавление сингулярностей в решениях задач с обострением путем введения параметра растяжения. Подавление сингулярностей в решениях задач с обострением происходит также при переходе от ОДУ к более сложным уравнениям с пропорциональным запаздыванием путем введения параметра растяжения p в искомую функцию. Обсудим этот вопрос более подробно.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t = f(w), \quad w = u(pt), \quad t > 0; \quad u(0) = a > 0, \quad (1.1.7.8)$$

где $f(u) > 0$ и $f'_u(u) > 0$ — непрерывные функции, определенные для всех $u \geq a$, $0 < p < 1$.

Пусть задача (1.1.7.8) при $p = 1$ имеет решение с обострением с сингулярной точкой $t = t_*$. Обозначим это решение $v = v(t)$ ($0 \leq t < t_*$).

Нетрудно показать, что при малых t решение задачи (1.1.7.8) может быть представлено в виде

$$u(t) = a + f(a)t + \frac{1}{2}pf(a)f'_u(a)t^2 + o(t^2). \quad (1.1.7.9)$$

Поэтому при малых t имеем $u(t) < v(t)$. Очевидно, что это неравенство будет выполняться также для любой области $0 \leq t \leq t^\circ$, где $t^\circ < t_*$.

Рассмотрим последовательность точек $t_n = p^{2-n}t^\circ$, где $n = 1, 2, \dots$. На первом интервале $pt^\circ \leq t \leq t^\circ$ задача (1.1.7.8) особенностей не имеет. Предположим, что на n -ом интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ решение задачи (1.1.7.8) известно и не имеет особенностей. Рассмотрим $(n+1)$ -й интервал $t_{n+1} \leq t \leq t_{n+2}$. Проинтегрировав уравнение (1.1.7.8) от t_{n+1} до t , получим

$$u(t) = u(t_{n+1}) + \int_{t_{n+1}}^t f(u(pt)) dt. \quad (1.1.7.10)$$

Растянутый аргумент $x = pt$ искомой функции на интервале $t_{n+1} \leq t \leq t_{n+2}$ меняется в области $t_n \leq x \leq t_{n+1}$, где (по предположению) искомая функция не имеет особенностей. Поэтому на интервале $t_{n+1} \leq t \leq t_{n+2}$ не имеет особенностей и сложная функция $f(u(pt))$ и интеграл в левой части (1.1.7.10), который можно вычислить по формуле

$$\int_{t_{n+1}}^t f(u(pt)) dt = \frac{1}{p} \int_{t_n}^{x/p} f(u(x)) dx.$$

Поскольку $0 < p < 1$, имеем $t_n = p^{2-n}t^0 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что решение задачи (1.1.7.10) не имеет сингулярных особенностей на ограниченном интервале времени.

► **Пример 1.10.** Рассмотрим задачу Коши для ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t = w^2, \quad w = u(pt), \quad t > 0; \quad u(0) = 1, \quad (1.1.7.11)$$

где $0 < p < 1$.

При малых t решение задачи (1.1.7.11) можно аппроксимировать многочленом

$$u = 1 + t + pt^2 + p^2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}p\right)t^3 + p^4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}p + \frac{1}{3}p^2\right)t^4, \quad (1.1.7.12)$$

погрешность которого составляет $O(t^5)$.

На рис. 1.10 с логарифмической шкалой по вертикальной оси сплошными линиями показаны численные решения задачи (1.1.7.11) при $p = 0, 0.25, 0.5, 0.75$, а также приближенные решения, построенные по формуле (1.1.7.12) (штриховые линии). При $p = 1$ точное решение с обострением построено по формуле (1.1.7.3). Видно, что введение растяжения полностью подавляет в решении данной задачи сингулярную особенность с обострением. ◀

► **Пример 1.11.** Рассмотрим задачу Коши для другого ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t = uw, \quad w = u(pt), \quad t > 0; \quad u(0) = 1. \quad (1.1.7.13)$$

При малых t решение задачи (1.1.7.13) можно аппроксимировать многочленом

$$u = 1 + t + \frac{1}{2}(1+p)t^2 + \frac{1}{6}(1+3p+p^2+p^3)t^3 + \frac{1}{24}(1+6p+7p^2+5p^3+3p^4+p^5+p^6)t^4, \quad (1.1.7.14)$$

погрешность которого составляет $O(t^5)$.

На рис. 1.11 с логарифмической шкалой по вертикальной оси сплошными линиями показаны численные решения задачи (1.1.7.13) при $p = 0, 0.25, 0.5, 0.75$, а также приближенные решения, построенные по формуле (1.1.7.14) (штриховые линии). При $p = 1$ точное решение с обострением построено по формуле (1.1.7.3). Видно, что введение растяжения полностью подавляет в решении данной задачи сингулярную особенность с обострением. ◀

Для более сложных задач, которые описываются нелинейными ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t = F(u, w), \quad w = u(pt), \quad t > 0; \quad u(0) = a > 0, \quad (1.1.7.15)$$

где $0 < p < 1$, можно сформулировать достаточно общее утверждение.

Утверждение. Пусть $F(u, w)$ — непрерывная положительная функция двух аргументов в области $D = \{a \leq u < \infty, a \leq w < \infty\}$. Тогда задача (1.1.7.15) имеет

решение с обострением, если и только если вспомогательная более простая задача для ОДУ без растяжения аргумента

$$u'_t = F(u, a), \quad t > 0; \quad u(0) = a > 0, \quad (1.1.7.16)$$

имеет решение с обострением.

Замечание 1.13. Сформулированное утверждение также имеет место, если уравнение с пропорциональным запаздыванием (1.1.7.15) заменить уравнением с постоянным запаздыванием при $w = u(t - \tau)$ с начальным условием $u(t) = a$ при $-\tau \leq t \leq 0$ ($\tau > 0$).

Решения задач в примерах 1.10 и 1.11 (а также в примерах 1.8 и 1.9) не имели сингулярностей поскольку их не имели более простые вспомогательные задачи, описываемые соответственно ОДУ $u'_t = a^2$ и $u'_t = au$.

► **Пример 1.12.** Задача (1.1.7.15) при $F(u, w) = (u/w)^2$ имеет решение с обострением, поскольку вспомогательная более простая задача (1.1.7.16) при $F(u, a) = u^2/a^2$ имеет решение с обострением. ◀

1.2. ОДУ второго и старших порядков с запаздыванием. Системы ОДУ с запаздыванием

1.2.1. Основные понятия. Задача Коши

В общем случае обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n с k постоянными запаздываниями, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$\begin{aligned} u_t^{(n)} &= F(t, u, u'_t, \dots, u_t^{(n-1)}, w_1, w'_1, \dots, w_1^{(n_1)}, \dots, w_k, w'_k, \dots, w_k^{(n_k)}), \\ u &= u(t), \quad w_i = u(t - \tau_i), \quad \tau_i > 0, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (1.2.1.1)$$

где $n > \max(n_1, \dots, n_k)$. Здесь под $w_i^{(j)}$ понимается j -я производная от функции $u(z)$, взятая в точке $z = t - \tau_i$. Считаем, что F является непрерывной функцией своих аргументов.

Пусть задана начальная точка t_0 . Каждому запаздыванию τ_i можно поставить в соответствие начальное множество $E_{t_0}^{(i)} = \{t_0 - \tau_i \leq t \leq t_0\}$. Общее начальное множество определяется так: $E_{t_0} = \bigcup_{i=1}^k E_{t_0}^{(i)} = \{t_0 - \tau_{\max} \leq t \leq t_0\}$, где $\tau_{\max} = \max_{1 \leq i \leq k} \tau_i$ — максимальное запаздывание.

Задача Коши для ОДУ с постоянными запаздываниями (1.2.1.1) формулируется так: требуется найти решение $u = u(t)$, имеющее непрерывные производные до $u_t^{(n-1)}$ включительно, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$u = \varphi_0(t), \quad u'_t = \varphi_1(t), \quad \dots, \quad u_t^{(n-1)} = \varphi_{n-1}(t) \quad \text{при} \quad t_0 - \tau_{\max} \leq t \leq t_0, \quad (1.2.1.2)$$

где $\varphi_j(t)$ — заданные непрерывные функции.

В приложениях обычно рассматривается случай, когда начальные данные в задаче Коши для уравнения (1.2.1.1) задаются согласованным образом с помощью одной функции $\varphi(t)$, а именно в начальных условиях (1.2.1.2) полагается

$$\varphi_0(t) = \varphi(t), \quad \varphi_1(t) = \varphi'_t(t), \quad \varphi_j(t) = \varphi_t^{(j)}(t), \quad j = 2, \dots, n-1. \quad (1.2.1.3)$$

В этом случае начальные данные (1.2.1.2) – (1.2.1.3) принято записывать в краткой форме

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t_0 - \tau_{\max} \leq t \leq t_0. \quad (1.2.1.4)$$

Для более сложных ОДУ с k переменными запаздываниями в (1.2.1.1) следует положить $\tau_i = \tau_i(t)$ ($i = 1, \dots, k$), где $\tau_i = \tau_i(t)$ – заданные положительные непрерывные функции. В этом случае в задаче Коши начальное множество E_{t_0} определяется также, как и для ОДУ первого порядка.

Если $n = \max(n_1, \dots, n_k)$, то уравнение (1.2.1.1) относят к уравнениям нейтрального типа, а при $n < \max(n_1, \dots, n_k)$ – к уравнениям опережающего типа.

1.2.2. Линейные уравнения второго порядка. Задача Коши. Точные решения

Решение задачи Коши для ОДУ второго порядка с запаздыванием. Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием и согласованными начальными данными общего вида

$$u''(t) + a^2 u(t - \tau) = f(t), \quad t > 0; \quad (1.2.2.1)$$

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (1.2.2.2)$$

Решение задачи Коши (1.2.2.1) – (1.2.2.2) можно представить с помощью двух функций [323] (см. также [211]), которые описаны ниже.

Косинус и синус с запаздыванием определяются с помощью формул

$$\cos_d(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t < -\tau, \\ 1, & -\tau \leq t \leq 0, \\ 1 - \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{[t - (k-1)\tau]^{2k}}{(2k)!}, & (k-1)\tau < t \leq k\tau, \end{cases} \quad (1.2.2.3)$$

$$\sin_d(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t < -\tau, \\ t + \tau, & -\tau \leq t \leq 0, \\ t + \tau - \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{[t - (k-1)\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!}, & (k-1)\tau < t \leq k\tau, \end{cases} \quad (1.2.2.4)$$

где $k = 1, 2, \dots$

Косинус и синус с запаздыванием являются частными решениями однородного уравнения (1.2.2.1) при $a = 1$ и $f(t) = 0$.

В [211] было показано, что решение задачи Коши (1.2.2.1)–(1.2.2.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(t) = & \varphi(0) \cos_d(a(t - \tau), a\tau) + a^{-1} \varphi'_t(0) \sin_d(a(t - \tau), a\tau) - \\ & - a \int_{-\tau}^0 \sin_d(a(t - 2\tau - s), a\tau) \varphi(s) ds + \\ & + a^{-1} \int_0^t \sin_d(a(t - \tau - s), a\tau) f(s) ds. \end{aligned} \quad (1.2.2.5)$$

Альтернативное, но менее удобное представление решения задачи Коши (1.2.2.1)–(1.2.2.2) дано в [323].

Решение задачи Коши для другого ОДУ второго порядка с запаздыванием. Рассмотрим следующую задачу Коши для линейного однородного ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием и согласованными начальными данными общего вида

$$u''(t) = -\alpha^2 u(t) + \beta u(t - \tau), \quad t > \tau; \quad (1.2.2.6)$$

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (1.2.2.7)$$

В [476] было показано, что решение задачи Коши (1.2.2.6)–(1.2.2.7) при $\alpha \neq 0$ в области $t > \tau$ можно выразить через решения двух более простых задач по формуле

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{\varphi(\tau) - \gamma \varphi(0)}{1 - \gamma} u_1(t) - \frac{\varphi'(\tau) - \gamma \varphi'(0)}{1 - \gamma} \left(\frac{\tau}{1 - \gamma} u_1(t) - u_2(t) \right) + \\ & + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \int_0^\tau \left(\frac{\tau}{1 - \gamma} u_1(t) - u_2(t) \right) \varphi''(t) dt, \quad \gamma = \frac{\beta}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (1.2.2.8)$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – решения задачи (1.2.2.6)–(1.2.2.7) соответственно при $\varphi(t) \equiv 1$ и $\varphi(t) \equiv t$.

Ниже приведены входящие в (1.2.2.8) вспомогательные функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые были получены методом шагов в [476].

1°. На интервале $m\tau \leq t \leq (m+1)\tau$ решение задачи (1.2.2.6)–(1.2.2.7) при $\varphi(t) \equiv 1$ можно представить в виде

$$u_1(t) = \gamma^m + (1 - \gamma) \sum_{k=1}^m \gamma^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} A_{k,n} \frac{[\alpha(t - k\tau)]^n}{n!} \cos\left[\alpha(t - k\tau) - \frac{1}{2}\pi n\right], \quad (1.2.2.9)$$

где $\gamma = \beta/\alpha^2$, а постоянные $A_{k,n}$ определяются по формулам

$$A_{k,0} = 1, \quad A_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-n-1} \frac{n}{n+2j} 2^{-n-2j} C_{n+2j}^j, \quad 1 \leq n < k, \quad (1.2.2.10)$$

$C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ – биномиальные коэффициенты. Отметим, что $0 < A_{k,n} \leq 1$.

2°. На интервале $m\tau \leq t \leq (m+1)\tau$ решение задачи (1.2.2.6)–(1.2.2.7) при $\varphi(t) \equiv t$ можно представить в виде

$$u_2(t) = \gamma^m(t - m\tau) + \tau \sum_{k=1}^m \gamma^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} A_{k,n} \frac{[\alpha(t - k\tau)]^n}{n!} \cos[\alpha(t - k\tau) - \frac{1}{2}\pi n] + \\ + \frac{1-\gamma}{\alpha} \sum_{k=1}^m \gamma^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} B_{k,n} \frac{[\alpha(t - k\tau)]^n}{n!} \sin[\alpha(t - k\tau) - \frac{1}{2}\pi n], \quad (1.2.2.11)$$

где $\gamma = \beta/\alpha^2$, постоянные $A_{k,n}$ вычисляются по формулам (1.2.2.10), а постоянные $B_{k,n}$ определяются так:

$$B_{k,0} = 2^{1-2k} k C_{2k}^k, \\ B_{k,n} = 2^{n+1-2k} \sum_{j=0}^{k-n-1} \frac{n(k-n-j)}{n+2j} C_{n+2j}^j C_{2(k-n-j)}^{k-n-j}, \quad 1 \leq n < k.$$

Решение задачи Коши для ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения с пропорциональным запаздыванием

$$u''_{tt}(t) = au(pt), \quad t > 0; \quad (1.2.2.12)$$

$$u(0) = b, \quad u'_t(0) = c. \quad (1.2.2.13)$$

Следуя [355], ищем частные решения уравнения (1.2.2.12) в виде

$$u(t) = \exp_s(\beta t, q), \quad \exp_s(t, q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^n}{n!} \quad (0 < q < 1), \quad (1.2.2.14)$$

где $\exp_s(t, q)$ — экспонента с растяжением (см. пример 1.5), а q и β являются искомыми параметрами. Последовательно используя последнюю формулу (1.1.6.6), находим производные функции (1.2.2.14):

$$u'_t = \beta \exp_s(\beta q t, q), \quad u''_{tt} = \beta^2 q \exp_s(\beta q^2 t, q).$$

Подставив второе соотношение в уравнение (1.2.2.12), получим

$$\beta^2 q \exp_s(\beta q^2 t, q) = a \exp_s(\beta p t, q).$$

Чтобы удовлетворить этому равенству, надо положить

$$\beta^2 q = a, \quad q^2 = p,$$

что дает два набора искомых параметров $q = \sqrt{p}$, $\beta = \pm \sqrt{a/\sqrt{p}}$, которые определяют два линейно независимых частных решения уравнения с пропорциональным запаздыванием (1.2.2.12): $u_{1,2}(t) = \exp_s(\pm a^{1/2} p^{-1/4} t, p^{1/2})$. Поэтому общее решение линейного однородного уравнения (1.2.2.12) имеет вид [355]:

$$u(t) = C_1 \exp_s(-a^{1/2} p^{-1/4} t, p^{1/2}) + C_2 \exp_s(a^{1/2} p^{-1/4} t, p^{1/2}), \quad (1.2.2.15)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Подставив (1.2.2.15) в начальные условия (1.2.2.13), находим константы C_1 и C_2 . В результате получим точное решение задачи Коши (1.2.2.12)–(1.2.2.13):

$$u(t) = \frac{1}{2}(b - ca^{-1/2}p^{1/4}) \exp_s(-a^{1/2}p^{-1/4}t, p^{1/2}) + \\ + \frac{1}{2}(b + ca^{-1/2}p^{1/4}) \exp_s(a^{1/2}p^{-1/4}t, p^{1/2}). \quad (1.2.2.16)$$

В формулы (1.2.2.15) и (1.2.2.16) входит величина \sqrt{a} , которая при $a < 0$ становится чисто мнимой. Рассмотрим подробнее этот случай.

Формальная замена t на it в формуле для экспоненты с растяжением (1.1.6.5) дает

$$\exp_s(it, p) = \cos_s(t, p) + i \sin_s(t, p), \quad i^2 = -1 \quad (0 < p < 1), \quad (1.2.2.17)$$

где

$$\cos_s(t, p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^{n(2n-1)} \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin_s(t, p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^{n(2n+1)} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (1.2.2.18)$$

Действительные функции $\cos_s(t, p)$ и $\sin_s(t, p)$ будем называть соответственно *косинусом* и *синусом* с *растяжением* (по аналогии с экспонентой с растяжением); $\cos_s(t, p)$ является четной функцией, а $\sin_s(t, p)$ — нечетной функцией. Эти функции были введены в [355], где использовались другие обозначения и терминология. Они обладают свойствами

$$\cos_s(0, p) = 1, \quad \cos_s(t, 1) = \cos t, \\ \sin_s(0, p) = 0, \quad \sin_s(t, 1) = \sin t, \quad (1.2.2.19)$$

и могут быть выражены через экспоненту с растяжением по формулам

$$\cos_s(t, p) = \frac{\exp_s(it, p) + \exp_s(-it, p)}{2}, \quad \sin_s(t, p) = \frac{\exp_s(it, p) - \exp_s(-it, p)}{2i}. \quad (1.2.2.20)$$

Справедливы также следующие формулы для производных:

$$[\cos_s(t, p)]'_t = -\sin_s(pt, p), \quad [\sin_s(t, p)]'_t = \cos_s(pt, p), \\ [\cos_s(t, p)]''_{tt} = -p \cos_s(p^2t, p), \quad [\sin_s(t, p)]''_{tt} = -p \sin_s(p^2t, p), \quad (1.2.2.21)$$

которые при $p = 1$ переходят в формулы для производных обычных тригонометрических функций.

В [355] было показано, что при $0 < p \leq 1$ функции $\cos_s(t, p)$ и $\sin_s(t, p)$ имеют бесконечное множество нулей на действительной оси. Функции комплексной переменной $\cos_s(z, p)$ и $\sin_s(z, p)$, где $z = x + iy$, имеют нули только на действительной оси $x = t$.

Учитывая сказанное, общее решение линейного однородного уравнения (1.2.2.12) при $a < 0$ можно представить в виде

$$u(t) = C_1 \cos_s(|a|^{1/2}p^{-1/4}t, p^{1/2}) + C_2 \sin_s(|a|^{1/2}p^{-1/4}t, p^{1/2}), \quad (1.2.2.22)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Соответствующее решение задачи Коши (1.2.2.12)–(1.2.2.13) записывается так:

$$u(t) = b \cos_s(|a|^{1/2} p^{-1/4} t, p^{1/2}) + c |a|^{-1/2} p^{1/4} \sin_s(|a|^{1/2} p^{-1/4} t, p^{1/2}). \quad (1.2.2.23)$$

Аналогичным способом в терминах экспоненты с запаздыванием можно получить точные решения более общего линейного ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$u''_{tt}(t) + a_1 u'_t(pt) + a_0 u(p^2 t) = 0,$$

а также ОДУ n -го порядка с пропорциональным запаздыванием

$$u_t^{(n)}(t) + a_{n-1} u_t^{(n-1)}(pt) + \dots + a_1 u'_t(p^{n-1} t) + a_0 u(p^n t) = 0.$$

Частные решения этих уравнений ищутся в виде (1.2.2.14), подробности см. в [355].

Решение задачи Коши для ОДУ второго порядка с двумя пропорциональными запаздываниями. Рассмотрим теперь более общую задачу Коши для линейного ОДУ с двумя пропорциональными запаздываниями

$$u''_{tt}(t) = au(t) + bu(pt) + cu(qt), \quad t > 0; \quad (1.2.2.24)$$

$$u(0) = A, \quad u'_t(0) = B, \quad (1.2.2.25)$$

где $0 < p < 1$, $0 < q < 1$.

Решение задачи (1.2.2.24)–(1.2.2.25) ищется в виде степенного ряда и может быть представлено в виде линейной комбинации четной и нечетной функций

$$u(t) = Au_1(t) + Bu_2(t), \quad (1.2.2.26)$$

где

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n} t^{2n}, & \gamma_{2n} &= \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (a + bp^{2k} + cq^{2k}), \\ u_2(t) &= t + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n+1} t^{2n+1}, & \gamma_{2n+1} &= \frac{1}{(2n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (a + bp^{2k+1} + cq^{2k+1}). \end{aligned} \quad (1.2.2.27)$$

Функция $u_1(t)$ и $u_2(t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$u_1(0) = 1, \quad u'_1(0) = 0; \quad u_2(0) = 0, \quad u'_1(0) = 1.$$

При $a = -1$, $b = c = 0$ эти функции переходят соответственно в косинус и синус, а при $a = 1$, $b = c = 0$ — в гиперболический косинус и гиперболический синус.

1.2.3. Линейные ОДУ старших порядков с запаздываниями

Линейные ОДУ общего вида с запаздываниями и их свойства. В общем случае линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка с переменными коэффициентами и m переменными запаздываниями имеет вид

$$u_t^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{ij}(t) u_t^{(i)}(t - \tau_j) = f(t), \quad (1.2.3.1)$$

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_j = \tau_j(t) > 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $a_{ij}(t)$ и $f(t)$ — непрерывные функции, $t > t_0$.

При $f(t) \equiv 0$ уравнение (1.2.3.1) называется *однородным*, а при $f(t) \not\equiv 0$ — *неоднородным*. Уравнение (1.2.3.1) удобно записывать в кратком виде

$$L[u] = f(t). \quad (1.2.3.2)$$

Линейный дифференциальный оператор с запаздываниями L обладает свойствами

$$L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2],$$

$$L[Cu] = CL[u],$$

где C — произвольная постоянная, $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $u = u(t)$ — произвольные функции, имеющие непрерывные производные до порядка n включительно.

Линейные однородные ОДУ с запаздываниями вида $L[u] = 0$ обладают следующими свойствами [94]:

1°. Любое линейное однородное уравнение имеет тривиальное решение $u = 0$.

2°. Линейность и однородность уравнения сохраняются при линейном однородном преобразовании искомой функции вида $u(t) = h(t)\bar{u}(t)$, где $h(t)$ — достаточно гладкая функция.

3°. Пусть $u_1 = u_1(t)$, \dots , $u_k = u_k(t)$ — любые частные решения линейного однородного уравнения $L[u] = 0$. Тогда линейная комбинация

$$u = C_1 u_1 + \dots + C_k u_k,$$

где C_1, \dots, C_k — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения. Это свойство линейных однородных уравнений называют *принципом линейной суперпозиции решений*.

Пусть $\{u_k\}$ — бесконечная последовательность решений линейного однородного уравнения $L[u] = 0$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, независимо от его сходимости, называется *формальным решением* этого уравнения. Если решения u_k являются классическими (т. е. n раз непрерывно дифференцируемыми функциями) и

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и соответствующие ряды из производных u_k равномерно сходятся, то сумма ряда является классическим решением однородного уравнения $L[u] = 0$.

Простейшие свойства решений линейного неоднородного уравнения (1.2.3.2) описаны ниже:

1°. Если $\tilde{u}_f(t)$ — частное решение линейного неоднородного уравнения (1.2.3.2), а $\tilde{u}_0(t)$ — частное решение соответствующего линейного однородного уравнения при $f(t) \equiv 0$, то сумма

$$C\tilde{u}_0(t) + \tilde{u}_f(t),$$

где C — произвольная постоянная, также является решением неоднородного уравнения (1.2.3.2). Справедливо также утверждение: общее решение линейного неоднородного уравнения является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

2°. Пусть u_1 и u_2 являются решениями неоднородных линейных уравнений с одной и той же левой и различными правыми частями, т. е.

$$L[u_1] = f_1(t), \quad L[u_2] = f_2(t).$$

Тогда функция $u = u_1 + u_2$ является решением уравнения

$$L[u] = f_1(t) + f_2(t).$$

Линейные однородные ОДУ с постоянными коэффициентами и постоянными запаздываниями. Рассмотрим линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами и m постоянными запаздываниями

$$u_t^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{ij} u_t^{(i)}(t - \tau_j) = 0, \quad (1.2.3.3)$$

$$\tau_0 = 0, \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m,$$

где a_{ij} и τ_j — некоторые действительные постоянные, $t > t_0$.

Ищем частные решения уравнения (1.2.3.3) экспоненциального вида

$$u(t) = \exp(\lambda t), \quad (1.2.3.4)$$

где λ является искомой постоянной.

Подставив (1.2.3.4) в (1.2.3.3) и сократив на $e^{\lambda t}$, получим *характеристическое уравнение* для определения λ :

$$\Phi(\lambda) = 0, \quad \text{где} \quad \Phi(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{ij} \lambda^i e^{-\lambda \tau_j}, \quad (1.2.3.5)$$

где $\Phi(\lambda)$ называется *характеристическим квазиполиномом*.

Уравнение (1.2.3.5) является трансцендентным уравнением и имеет бесконечное множество корней. Оно может иметь как действительные корни λ_k , так и комплексно сопряженные корни $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$, где $i^2 = -1$. Каждому действительному или комплексному корню λ_k характеристического уравнения (1.2.3.5) соответствует одно или несколько решений обыкновенного дифференциального уравнения с запаздываниями (1.2.3.3). Возможные ситуации перечислены ниже:

1°. Если корень λ_k является действительным и имеет кратность 1, т. е. $\Phi(\lambda_k) = 0$ и $\Phi'_\lambda(\lambda_k) \neq 0$, то уравнение (1.2.3.3) имеет частное решение (1.2.3.4) при $\lambda = \lambda_k$.

2°. Если корень λ_k характеристического уравнения (1.2.3.5) является действительным и имеет кратность r_k , т. е. $\Phi(\lambda_k) = \Phi'_\lambda(\lambda_k) = \dots = \Phi_\lambda^{(r_k-1)}(\lambda_k) = 0$ и $\Phi_\lambda^{(r_k)}(\lambda_k) \neq 0$, то уравнение (1.2.3.3) имеет частные решения вида

$$u_k(t) = P_k(t) \exp(\lambda_k t), \quad P_k(t) = \sum_{j=1}^{r_k} A_{kj} t^{j-1}, \quad (1.2.3.6)$$

где A_{kj} — произвольные постоянные.

3°. Паре комплексно сопряженных корней $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ кратности 1 соответствуют пара комплексных решений $e^{(\alpha_k \pm i\beta_k)t}$ уравнения (1.2.3.3) или два действительных решения этого уравнения

$$u_{k1}(t) = \exp(\alpha_k t) \cos(\beta_k t), \quad u_{k2}(t) = \exp(\alpha_k t) \sin(\beta_k t). \quad (1.2.3.7)$$

Чисто мнимым корням $\lambda_k = i\beta_k$ соответствуют периодические решения $u_{k1}(t) = \cos(\beta_k t)$ и $u_{k2}(t) = \sin(\beta_k t)$.

4°. Паре комплексно сопряженных корней $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ кратности r_k соответствуют действительные частные решения уравнения (1.2.3.3) вида

$$\begin{aligned} u_{k1} &= P_k(t) \exp(\alpha_k t) \cos(\beta_k t), & P_k(t) &= \sum_{j=1}^{r_k} A_{kj} t^{j-1}, \\ u_{k2} &= Q_k(t) \exp(\alpha_k t) \sin(\beta_k t), & Q_k(t) &= \sum_{j=1}^{r_k} B_{kj} t^{j-1}, \end{aligned} \quad (1.2.3.8)$$

где A_{kj} и B_{kj} — произвольные постоянные.

В силу принципа линейной суперпозиции для построения более сложных частных решений уравнения (1.2.3.3) можно использовать линейные комбинации описанных в пп. 1° — 4° частных решений, соответствующих разным корням характеристического уравнения (1.2.3.5).

► **Пример 1.13.** Найдём условия, при выполнении которых ОДУ n -го порядка с постоянным запаздыванием

$$u_t^{(n)} = au + bw, \quad w = u(t - \tau), \quad (1.2.3.9)$$

имеет периодические решения.

Подставим $u = e^{i\beta_k}$ в (1.2.3.9). После сокращения на $e^{i\beta_k}$ получим

$$(i\beta_k)^n = a + be^{-i\beta_k\tau}. \quad (1.2.3.10)$$

Далее по отдельности рассмотрены случаи четных и нечетных n .

1°. Для уравнений четного порядка при $n = 2m$ ($m = 1, 2, \dots$) после выделения действительной и мнимой части в (1.2.3.10), имеем

$$(-1)^m \beta_k^{2m} = a + b \cos(\beta_k\tau), \quad \sin(\beta_k\tau) = 0. \quad (1.2.3.11)$$

Отсюда находим соотношения

$$(-1)^m (\pi k/\tau)^{2m} = a + (-1)^k b, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.2.3.12)$$

которым должны удовлетворять параметры a, b, τ уравнения (1.2.3.9) при $n = 2m$, чтобы оно имело периодические решения $u_{k1}(t) = \sin(\beta_k t)$ и $u_{k2}(t) = \cos(\beta_k t)$, где $\beta_k = \pi k/\tau$.

2°. Для уравнений нечетного порядка при $n = 2m + 1$ ($m = 0, 1, \dots$) после выделения действительной и мнимой части в (1.2.3.10), получим

$$a + b \cos(\beta_k\tau) = 0, \quad (-1)^m \beta_k^{2m+1} = -b \sin(\beta_k\tau). \quad (1.2.3.13)$$

Из первого соотношения (1.2.3.13) следует, что при $|a| > |b|$ уравнение нечетного порядка (1.2.3.9) не имеет периодических решений. Из (1.2.3.13) следует, что линии в плоскости параметров a, b , точки которых соответствуют периодическим решениям уравнений нечетного порядка (1.2.3.9), можно представить в параметрической форме

$$a = \frac{(-1)^m}{\tau^{2m+1}} \frac{\xi^{2m+1} \cos \xi}{\sin \xi}, \quad b = \frac{(-1)^{m+1}}{\tau^{2m+1}} \frac{\xi^{2m+1}}{\sin \xi} \quad (\xi = \tau\beta_k > 0). \quad (1.2.3.14)$$

Интервалы изменения параметра $\pi s < \xi < \pi(s+1)$, где $s = 0, 1, \dots$, определяют различные ветви в плоскости a, b при заданном $\tau > 0$. ◀

Квазиполином

$$\Phi(z) \equiv z^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{ij} z^i e^{-\tau_j z}, \quad (1.2.3.15)$$

полученный из (1.2.3.5) заменой λ на z , является целой аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Если функция $\Phi(z)$ не вырождается в полином, т. е. в уравнение (1.2.3.3) входит хотя бы одно запаздывание, то $\Phi(z)$ имеет бесконечное множество нулей, единственной предельной точкой которых является бесконечность. Все корни z_k квазиполинома $\Phi(z)$ лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z_k \leq x_*$ [94].

Покажем, что решения двучленного линейного однородного ОДУ n -го порядка с постоянным запаздыванием вида

$$u_t^{(n)}(t) = bu(t - \tau) \quad (1.2.3.16)$$

можно выразить через функцию Ламберта (1.1.3.4).

Подставив (1.2.3.4) в (1.2.3.16), после элементарных преобразований приходим к трансцендентному уравнению для показателя экспоненты λ :

$$\lambda^n e^{\tau\lambda} - b = 0. \quad (1.2.3.17)$$

При любом $b > 0$ уравнение (1.2.3.17) имеет действительный положительный корень, который выражается через функцию Ламберта по формуле

$$\lambda_p = \frac{n}{\tau} W_p \left(\frac{\tau b^{1/n}}{n} \right).$$

В общем случае трансцендентное уравнение (1.2.3.17) подстановкой $\zeta = \lambda e^{\tau\lambda/n}$ приводится к алгебраическому уравнению $\zeta^n - b = 0$, которое имеет n комплексных корней [434]:

$$\zeta_k = \begin{cases} b^{1/n} \left(\cos \frac{2(k-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(k-1)\pi}{n} \right) & \text{при } b > 0, \\ |b|^{1/n} \left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) & \text{при } b < 0, \end{cases} \quad (1.2.3.18)$$

где $k = 1, \dots, n$, $i^2 = -1$. Поэтому разность $\zeta^n - b$ допускает факторизацию и может быть представлена в виде произведения $\prod_{k=1}^n (\zeta - \zeta_k) = 0$, где $\zeta = \lambda e^{\tau\lambda/n}$, а трансцендентное уравнение (1.2.3.17) распадается на n более простых независимых уравнений

$$\lambda e^{\tau\lambda/n} - \zeta_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.2.3.19)$$

Решения этих уравнений выражаются через функцию Ламберта комплексного аргумента по формулам

$$\lambda_k = \frac{n}{\tau} W \left(\frac{\tau \zeta_k}{n} \right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.2.3.20)$$

где числа (комплексные в случае общего положения) ζ_k определены в (1.2.3.18), а под $W(z)$ понимаются все ветви функции Ламберта.

Линейные неоднородные ОДУ с постоянными коэффициентами и постоянными запаздываниями. Линейные неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами и m постоянными запаздываниями имеют вид

$$u_t^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{ij} u_t^{(i)}(t - \tau_j) = f(t), \quad (1.2.3.21)$$

$$\tau_0 = 0, \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m,$$

где a_{ij} и τ_j — некоторые действительные постоянные, $f(t)$ — непрерывная функция, $t > t_0$.

Общее решение уравнения (1.2.3.21) является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (1.2.3.3) и любого частного решения неоднородного уравнения.

В табл. 1.3 описана структура частных решений для некоторых функций в правой части линейного неоднородного уравнения (1.2.3.21).

Таблица 1.3. Структура частных решений линейного неоднородного уравнения с постоянными запаздываниями (1.2.3.21) для некоторых специальных видов функции $f(x)$.

| Вид функции $f(t)$ | Корни характеристического уравнения $\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{ij} \lambda^i e^{-\lambda \tau_j} = 0$ | Вид частного решения $u = \tilde{u}(t)$ |
|--|--|---|
| $P_m(t)$ | нуль не является корнем характеристического уравнения | $\tilde{P}_m(t)$ |
| | нуль является корнем характеристического уравнения (кратности r) | $t^r \tilde{P}_m(t)$ |
| $P_m(t)e^{\alpha t}$ (α — действительное число) | α не является корнем характеристического уравнения | $\tilde{P}_m(t)e^{\alpha t}$ |
| | α является корнем характеристического уравнения (кратности r) | $t^r \tilde{P}_m(t)e^{\alpha t}$ |
| $P_m(t) \cos \beta t + Q_n(t) \sin \beta t$ | $i\beta$ не является корнем характеристического уравнения | $\tilde{P}_\nu(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_\nu(t) \sin \beta t$ |
| | $i\beta$ является корнем характеристического уравнения (кратности r) | $t^r [\tilde{P}_\nu(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_\nu(t) \sin \beta t]$ |
| $[P_m(t) \cos \beta t + Q_n(t) \sin \beta t]e^{\alpha t}$ | $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения | $[\tilde{P}_\nu(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_\nu(t) \sin \beta t]e^{\alpha t}$ |
| | $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения (кратности r) | $t^r [\tilde{P}_\nu(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_\nu(t) \sin \beta t]e^{\alpha t}$ |
| Обозначения: P_m и Q_n — полиномы степени m и n с заданными коэффициентами; \tilde{P}_m , \tilde{P}_ν , \tilde{Q}_ν — полиномы степени m и ν , коэффициенты которых определяются после подстановки указанного частного решения в рассматриваемое уравнение; $\nu = \max(m, n)$; α и β — действительные числа, $i^2 = -1$. | | |

1.2.4. Линейные системы ОДУ первого и второго порядка с запаздыванием. Задача Коши. Точные решения

Линейные системы ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием. Линейная однородная система ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием и n искомыми функциями в матричном виде записывается так:

$$\mathbf{u}'_t(t) = \mathbb{A}\mathbf{u}(t) + \mathbb{B}\mathbf{u}(t - \tau), \quad t > 0, \quad (1.2.4.1)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ — вектор-столбец (индекс T обозначает операцию транспонирования), \mathbb{A} и \mathbb{B} — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами размера $n \times n$, удовлетворяющие условию коммутативности $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$.

Задача Коши формулируется так: требуется найти решение системы уравнений (1.2.4.1), удовлетворяющее начальному условию

$$\mathbf{u} = \varphi(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (1.2.4.2)$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ — заданная непрерывная вектор-функция.

Решение задачи Коши (1.2.4.1) — (1.2.4.2) можно представить с помощью двух матричных функций, которые описаны ниже.

Экспонента квадратной матрицы $\mathbb{A}t$ определяется с помощью ряда

$$\exp(\mathbb{A}t) = \mathbb{E} + \mathbb{A}t + \mathbb{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbb{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \mathbb{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{A}^k \frac{t^k}{k!},$$

где \mathbb{E} — единичная матрица с элементами $e_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Экспонента с запаздыванием квадратной матрицы $\mathbb{A}t$ введена в [320] и описывается формулами:

$$\exp_d(\mathbb{A}t, \mathbb{A}\tau) = \begin{cases} \Theta, & t < -\tau, \\ \mathbb{E}, & -\tau \leq t < 0, \\ \mathbb{E} + \mathbb{A} \frac{t}{1!} + \dots + \mathbb{A}^k \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau, \\ & k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.2.4.3)$$

где Θ — квадратная матрица, все элементы которой равны нулю.

В [320, 322, 460] было доказано, что решение задачи Коши (1.2.4.1) — (1.2.4.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \exp(\mathbb{A}(t + \tau)) \exp_d(\tilde{\mathbb{B}}t, \tilde{\mathbb{B}}\tau) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 \exp(\mathbb{A}(t - \tau - s)) \exp_d(\tilde{\mathbb{B}}(t - \tau - s), \tilde{\mathbb{B}}\tau) \exp(\mathbb{A}\tau) [\varphi'_s(s) - \mathbb{A}\varphi(s)] ds, \end{aligned} \quad (1.2.4.4)$$

где $\tilde{\mathbb{B}} = \exp(-\mathbb{A}\tau)\mathbb{B}$. При выводе этой формулы предполагалось, что все компоненты вектор-функции $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $-\tau \leq t \leq 0$.

Линейные системы ОДУ второго порядка с одним запаздыванием. Рассмотрим линейную неоднородную систему ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и одним запаздыванием специального вида, которая в матричной форме записывается так:

$$\mathbf{u}''_{tt}(t) = -\mathbb{B}^2 \mathbf{u}(t - \tau) + \mathbf{f}(t), \quad t > 0, \quad (1.2.4.5)$$

$$\mathbf{u} = \varphi(t), \quad \mathbf{u}'_t = \varphi'_t(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t < 0, \quad (1.2.4.6)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ — вектор-столбец искоемых величин, \mathbb{B} — квадратная невырожденная матрица с постоянными коэффициентами размера $n \times n$, а $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ и $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ — заданные непрерывные вектор-функции.

Решение задачи Коши (1.2.4.5) — (1.2.4.6) можно представить с помощью двух матричных функций, которые описаны ниже.

Матричные косинус и синус с запаздыванием определяются с помощью формул [323]:

$$\cos_d(\mathbb{B}t, \mathbb{B}\tau) = \begin{cases} \Theta, & t < -\tau, \\ \mathbb{E}, & -\tau \leq t < 0, \\ \mathbb{E} - \mathbb{B}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^k \mathbb{B}^{2k} \frac{[t - (k-1)\tau]^{2k}}{(2k)!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau, \end{cases} \quad (1.2.4.7)$$

$$\sin_d(\mathbb{B}t, \mathbb{B}\tau) = \begin{cases} \Theta, & t < -\tau, \\ \mathbb{B}(t + \tau), & -\tau \leq t < 0, \\ (t + \tau)\mathbb{B} - \mathbb{B}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^k \mathbb{B}^{2k+1} \frac{[t - (k-1)\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau, \end{cases} \quad (1.2.4.8)$$

где $k = 1, 2, \dots$ Имеют место следующие соотношения для производных:

$$\begin{aligned} [\cos_d(\mathbb{B}t, \mathbb{B}\tau)]'_t &= -\mathbb{B} \sin_d(\mathbb{B}(t - \tau), \mathbb{B}\tau), \\ [\sin_d(\mathbb{B}t, \mathbb{B}\tau)]'_t &= \mathbb{B} \cos_d(\mathbb{B}t, \mathbb{B}\tau), \\ [\cos_d(\mathbb{B}t, \mathbb{B}\tau)]''_{tt} &= -\mathbb{B}^2 \cos_d(\mathbb{B}(t - \tau), \mathbb{B}\tau), \\ [\sin_d(\mathbb{B}t, \mathbb{B}\tau)]''_{tt} &= -\mathbb{B}^2 \sin_d(\mathbb{B}(t - \tau), \mathbb{B}\tau). \end{aligned} \quad (1.2.4.9)$$

В [211] было показано, что решение задачи Коши (1.2.4.5)–(1.2.4.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \varphi(0) \cos_d(\mathbb{B}(t - \tau), \mathbb{B}\tau) + \mathbb{B}^{-1} \varphi'_t(0) \sin_d(\mathbb{B}(t - \tau), \mathbb{B}\tau) - \\ &- \mathbb{B} \int_{-\tau}^0 \sin_d(\mathbb{B}(t - 2\tau - s), \mathbb{B}\tau) \varphi(s) ds + \\ &+ \mathbb{B}^{-1} \int_0^t \sin_d(\mathbb{B}(t - \tau - s), \mathbb{B}\tau) \mathbf{f}(s) ds. \end{aligned} \quad (1.2.4.10)$$

Альтернативное, но менее удобное представление решения задачи Коши (1.2.4.5)–(1.2.4.6) дано в [323].

Замечание 1.14. Рассмотрим задачу Коши для системы ОДУ второго порядка с запаздыванием вида

$$\mathbf{u}''_{tt}(t) = -\mathbb{A} \mathbf{u}(t - \tau) + \mathbf{f}(t), \quad t > 0, \quad (1.2.4.11)$$

где \mathbb{A} — положительно определенная матрица размера $n \times n$, с начальными условиями (1.2.4.6).

Процедура решения этой задачи состоит из двух этапов. На первом этапе находят матрицу \mathbb{B} , исходя из уравнения $\mathbb{B}^2 = \mathbb{A}$. Матрица \mathbb{B} называется квадратным корнем из матрицы \mathbb{A} и обозначается $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{1/2}$. Положительно определенная матрица всегда имеет ровно один положительно определенный квадратный корень, который называется арифметическим квадратным корнем. Разложив такую матрицу по собственным векторам, получают ее представление в виде $\mathbb{A} = \mathbb{V} \mathbb{D} \mathbb{V}^{-1}$, где \mathbb{D} — диагональная матрица с собственными значениями $\lambda_i > 0$. Тогда положительно определенный квадратный

корень из матрицы \mathbb{A} определяется по формуле $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{1/2} = \mathbb{V}\mathbb{D}^{1/2}\mathbb{V}^{-1}$, где $\mathbb{D}^{1/2}$ — диагональная матрица с собственными значениями $\sqrt{\lambda_i}$ [17].

На втором этапе, положив $\mathbb{A} = \mathbb{B}^2$ в уравнении (1.2.4.11), сводят рассматриваемую задачу к задаче (1.2.4.5) — (1.2.4.6).

1.3. Устойчивость (неустойчивость) решений ОДУ с запаздываниями

1.3.1. Основные понятия. Общие замечания об устойчивости решений линейных ОДУ с запаздываниями

Некоторые определения. Рассмотрим задачу Коши для ОДУ с запаздываниями

$$u'_t = f(t, u, w_1, \dots, w_m), \quad w_i = u(t - \tau_i(t)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.3.1.1)$$

и начальными данными

$$u(t) = \varphi_1(t) \quad \text{на} \quad E_{t_0}, \quad (1.3.1.2)$$

где E_{t_0} — некоторое начальное множество.

Решение $u_1(t)$ задачи (1.3.1.1), (1.3.1.2) называется *устойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \delta(\varepsilon)$ на начальном множестве следует $|u_1(t) - u_2(t)| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, где $u_2(t)$ — решение уравнения (1.3.1.1) при начальном условии $u(t) = \varphi_2(t)$ on E_{t_0} .

Не обладающие этим свойством решения называются *неустойчивыми*.

Устойчивое решение u_1 называется *асимптотически устойчивым*, если для любой непрерывной начальной функции $\varphi_2(t)$, удовлетворяющей при достаточно малом $\delta_1 > 0$ условию $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \delta_1$, выполняется предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} |u_1(t) - u_2(t)| = 0$.

Асимптотически устойчивое решение u_1 называется *глобально асимптотически устойчивым*, когда к нему при $t \rightarrow \infty$ стремится любое другое решение рассматриваемой системы, независимо от начальных данных. Асимптотически устойчивое решение, не являющееся глобально асимптотически устойчивым, называется *локально асимптотически устойчивым*.

При исследовании на устойчивость некоторого решения u_0 задачи (1.3.1.1), (1.3.1.2) можно заменой переменных $v(t) = u(t) - u_0(t)$ преобразовать исследуемое на устойчивость решение u_0 в тривиальное $v(t) \equiv 0$. Поэтому в дальнейшем на устойчивость исследуются только тривиальные решения.

Общие замечания об устойчивости решений линейных ОДУ с запаздываниями. Все решения линейного ОДУ с запаздываниями (с фиксированной начальной точкой t_0), так же как и решения линейных ОДУ без запаздываний, одновременно устойчивы или неустойчивы. В частности, все решения линейного однородного уравнения в смысле устойчивости ведут себя так же, как и тривиальное (нулевое) решение того же уравнения.

Наиболее просто исследуются на устойчивость решения линейных однородных ОДУ с постоянными коэффициентами и постоянными запаздываниями:

$$u_t^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_t^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m b_{kj} u_t^{(k)}(t - \tau_j) = 0, \quad (1.3.1.3)$$

где $\tau_j > 0$, $t > t_0$. Устойчивость или неустойчивость тривиального решения этого уравнения определяется положением корней соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m b_{kj} \lambda^k e^{-\tau_j \lambda} = 0, \quad (1.3.1.4)$$

возникающего после подстановки экспоненциальной функции $u = e^{\lambda t}$ в (1.3.1.3).

Если все корни характеристического уравнения (1.3.1.4) имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение линейного однородного ОДУ с запаздываниями (1.3.1.3) является асимптотически устойчивым. Если хотя бы один корень характеристического уравнения (1.3.1.4) имеет положительную действительную часть, то решения линейного однородного ОДУ с запаздываниями (1.3.1.3) будут неустойчивы.

Поэтому анализ устойчивости решений линейных ОДУ с запаздываниями вида (1.3.1.3) сводится к анализу положения корней характеристического уравнения (1.3.1.4) (это уравнение является трансцендентным уравнением и имеет бесконечное множество комплексных корней).

Далее в разд. 1.3.2 будут обсуждаться вопросы устойчивости и неустойчивости решений конкретных линейных ОДУ с запаздываниями, которые часто встречаются в приложениях.

Случай малых запаздываний. Если в линейном однородном ОДУ с m запаздываниями (1.3.1.3) максимальное запаздывание $\tau_{\max} = \max_{1 \leq j \leq m} \tau_j$ достаточно мало, то естественно ожидать, что многие свойства решений уравнения (1.3.1.3) будут близкими к свойствам решений более простого ОДУ без запаздываний

$$u_t^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_t^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m b_{kj} u_t^{(k)}(t) = 0, \quad (1.3.1.5)$$

формально получающегося из (1.3.1.3) при $\tau_j = 0$ для всех $j = 1, \dots, m$.

В частности, справедливы следующие утверждения [94]:

1°. Если действительные части всех корней характеристического уравнения для ОДУ без запаздываний (1.3.1.5) отрицательны, и следовательно решения уравнения (1.3.1.5) асимптотически устойчивы, то при достаточно малом τ_{\max} асимптотически устойчивы и решения ОДУ с запаздываниями (1.3.1.3).

2°. Если характеристическое уравнение для ОДУ без запаздываний (1.3.1.5) имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью и, следо-

вательно, решения уравнения (1.3.1.5) неустойчивы, то при достаточно малом τ_{\max} неустойчивы и решения ОДУ с запаздываниями (1.3.1.3).

3°. Если характеристическое уравнение для ОДУ без запаздываний (1.3.1.5) имеет простой корень $\lambda = 0$, а остальные корни имеют отрицательную действительную часть, то при достаточно малом τ_{\max} решение ОДУ с запаздываниями (1.3.1.3) устойчиво.

1.3.2. Устойчивость решений линейных ОДУ с одним постоянным запаздыванием

Линейное ОДУ первого порядка постоянным запаздыванием. Рассмотрим опять линейное ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием (которое исследовалось ранее в разд. (1.1.3), см. уравнение (1.1.3.1)):

$$u'_t = au + bw, \quad w = u(t - \tau). \quad (1.3.2.1)$$

Ищем частные решения уравнения (1.3.2.1) в виде $u = e^{\lambda t}$. В результате приходим к характеристическому уравнению для определения параметра λ :

$$\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0. \quad (1.3.2.2)$$

Линейное ОДУ с запаздыванием (1.3.2.1) будем асимптотически устойчивым, если все корни характеристического уравнения (1.3.2.2) будут иметь отрицательные действительные части. Справедлива следующая теорема.

Теорема Хейса [8]. Все корни уравнения характеристического уравнения (1.3.2.2) с действительными коэффициентами a и b ($\tau > 0$) имеют отрицательные действительные части ($\operatorname{Re} \lambda < 0$) тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие три неравенства:

$$\begin{aligned} (i) \quad & a\tau < 1, \\ (ii) \quad & a + b < 0, \\ (iii) \quad & b\tau + \sqrt{(a\tau)^2 + \mu^2} > 0, \end{aligned} \quad (1.3.2.3)$$

где μ — корень трансцендентного уравнения $\mu = a\tau \operatorname{tg} \mu$, удовлетворяющий условию $0 < \mu < \pi$. При $a = 0$ следует положить $\mu = \pi/2$.

На рис. 1.9 белым цветом выделена область плоскости (A, B) , где $A = a\tau$ и $B = b\tau$, в которой все корни трансцендентного уравнения (1.3.2.2) имеют отрицательные действительные части ($\operatorname{Re} \lambda < 0$). В этой области тривиальное (нулевое) решение уравнения (1.3.2.1) будет асимптотически устойчивым. Область неустойчивости, где хотя бы один корень трансцендентного уравнения (1.3.2.2) имеет положительную действительную часть, закрашена серым цветом.

► **Пример 1.14.** Посмотрим, как изменяется область устойчивости при увеличении запаздывания в случае простейшего двучленного линейного ОДУ с постоянным запаздыванием

$$u'_t = bw, \quad w = u(t - \tau), \quad (1.3.2.4)$$

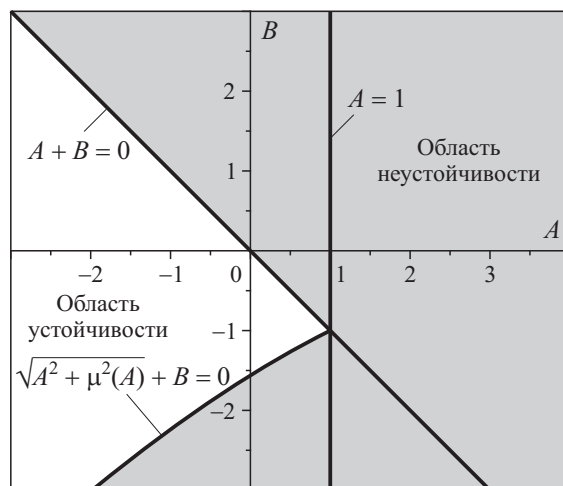


Рис. 1.9. Области устойчивости и неустойчивости тривиального решения ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием (1.3.2.1).

которое соответствует значению $a = 0$ в (1.3.2.1).

При отсутствии запаздывания, т. е. при $\tau = 0$, областью устойчивости решений уравнения (1.3.2.4) является вся отрицательная полуось $-\infty < b < 0$. При $\tau > 0$, подставив значение $a = 0$ в условия (1.3.2.3), получим область устойчивости решений уравнения (1.3.2.4) в виде конечного интервала

$$-\frac{\pi}{2\tau} < b < 0. \quad (1.3.2.5)$$

Видно, что при увеличении τ область устойчивости уменьшается, причем размеры этой области стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Другими словами, наличие запаздывания является дестабилизирующим фактором и увеличение τ может привести к неустойчивости решений рассматриваемого уравнения. Качественно аналогичная ситуация имеет место для подавляющего большинства ОДУ и систем ОДУ с постоянным запаздыванием. ◀

Замечание 1.15. Тривиальное решение ОДУ с запаздыванием

$$u'_t = au + b(t)w, \quad w = u(t - \tau),$$

где $b(t)$ — непрерывная функция, асимптотически устойчиво, если $|b(t)| < -a$ [94].

Линейные ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием. Рассмотрим линейное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием вида

$$u''_{tt}(t) + a_1 u'_t(t) + b_1 u'_t(t - \tau) + a_0 u(t) + b_0 u(t - \tau) = 0, \quad (1.3.2.6)$$

которому соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + (b_1 \lambda + b_0) e^{-\tau \lambda} = 0. \quad (1.3.2.7)$$

Отметим, что при $\tau = 0$ нулевое решение уравнения (1.3.2.6) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $a_1 + b_1 > 0$ и $a_0 + b_0 > 0$.

Анализу устойчивости и неустойчивости решений уравнения (1.3.2.6) и родственных ОДУ с запаздыванием посвящена обширная литература (см., например, [151, 164, 165, 186, 194, 252, 272, 275, 292, 333, 378, 506, 571, 583]).

В [194] для уравнения (1.3.2.6) при выполнении условий $a_1 + b_1 \neq 0$ и $a_0 + b_0 \neq 0$ были доказаны следующие утверждения.

Число различных чисто мнимых корней (корни, отличающиеся только знаком, не считаются различными) характеристического уравнения может быть равно нулю, единице или двум. Таким образом возможны три ситуации:

1. *Мнимых корней нет.* Устойчивость нулевого решения не изменяется при увеличении τ от нуля до бесконечности.

2. *Существует один мнимый корень.* Неустойчивое при $\tau = 0$ нулевое решение никогда не станет устойчивым. Если нулевое решение устойчиво при $\tau = 0$, то оно становится неустойчивым при наименьшем значении τ , для которого существует мнимый корень, и остается таким при дальнейшем увеличении τ .

3. *Существует два мнимых корня.* Устойчивость нулевого решения по мере увеличения τ может изменяться конечное число раз и в конечном итоге (при достаточно больших τ) оно становится неустойчивым.

Простейшие условия устойчивости и неустойчивости приведены ниже.

1°. Состояние равновесия неустойчиво при всех $\tau \geq 0$, если

а) оно является седловой точкой при $\tau = 0$ (т. е. при $a_0 + b_0 < 0$),

б) оно является неустойчивым узлом или неустойчивым фокусом при $\tau = 0$ (т. е. при $a_1 + b_1 > 0$ и $a_0 + b_0 > 0$) и $|a_0| < |b_0|$.

2°. Состояние равновесия устойчиво при всех $\tau \geq 0$, если оно устойчиво при $\tau = 0$ (т. е. при $a_1 + b_1 < 0$ и $a_0 + b_0 > 0$) и

а) $(a_1^2 - 2a_0 - b_1^2)^2 < 4(a_0^2 - b_0^2)$ или

б) $a_1^2 > 2a_0 + b_1^2$ и $|a_0| > |b_0|$.

Замечание 1.16. В [378] проведено подробное и весьма полное исследование расположения корней шестипараметрического трансцендентного уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)e^{\lambda\tau} = 0$$

в комплексной плоскости $\lambda = \lambda_{\text{re}} + i\lambda_{\text{im}}$. В частном случае $b_2 = 0$ данное уравнение переходит в характеристическое уравнение (1.3.2.7).

Линейные ОДУ старших порядков с постоянным запаздыванием. Рассмотрим подробнее линейное однородное ОДУ n -го порядка с действительными постоянными коэффициентами и одним постоянным запаздыванием, которое запишем в виде

$$u_t^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j u_t^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^m b_j u_t^{(j)}(t - \tau) = 0, \quad (1.3.2.8)$$

где $n > m$, $\tau > 0$, $t > t_0$.

Уравнению (1.3.2.8) соответствует характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}\Phi(z) &\equiv P(z) + Q(z)e^{-\tau z} = 0, \\ P(z) &\equiv z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j, \quad Q(z) \equiv \sum_{j=0}^m b_j z^j, \end{aligned} \quad (1.3.2.9)$$

где $z = x + iy$ ($i^2 = -1$). Функцию $\Phi(z)$ в (1.3.2.9) принято называть *квазиполиномом*.

Следуя [152, 195], квазиполином $\Phi(z)$ будем называть *устойчивым*, если все корни трансцендентного уравнения $\Phi(z) = 0$ имеют отрицательную действительную часть $\operatorname{Re} z < 0$. Квазиполином $\Phi(z)$ будем называть *неустойчивым*, если уравнение $\Phi(z) = 0$ имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью $\operatorname{Re} z > 0$.

Ниже описано два метода исследования корней квазиполиномов.

Метод D -разбиений [94]. Нули квазиполинома $\Phi(z)$ при фиксированном τ являются непрерывными функциями его коэффициентов. Разобьем пространство коэффициентов на области гиперповерхностями, точки которых соответствуют чисто мнимым нулям квазиполинома $z = iy$ (включая вырожденный случай $z = 0$). Такое разбиение называется D -разбиением.

В точках каждой области такого D -разбиения квазиполином имеет одинаковое число нулей с положительной действительной частью (говоря о числе нулей, здесь имеется в виду сумма из кратностей), так как изменение числа нулей с положительной действительной частью при непрерывном изменении коэффициентов может произойти лишь при переходе нуля через мнимую ось, т. е. при переходе через границу области D -разбиения. Области, не имеющие ни одного корня с положительной действительной частью, определяют области асимптотической устойчивости решений соответствующих линейных ОДУ с запаздыванием.

Таким образом, исследование на устойчивость в пространстве параметров методом D -разбиения проводится путем нахождения областей D_k , в которых нет корней с положительной действительной частью. Для выделения области D_k , если она связна, достаточно убедиться, что хотя бы одна ее точка соответствует квазиполиному, все нули которого имеют отрицательную действительную часть. Для выяснения того, как изменяется число корней с положительной действительной частью при переходе через некоторую границу D -разбиения, вычисляется дифференциал действительной части корня и по его знаку судят об уменьшении или увеличении числа корней с положительной действительной частью.

Пусть рассматриваемое линейное ОДУ с запаздыванием зависит от m свободных параметров a_m (τ считается фиксированным), а соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид $\Phi(z, a_1, \dots, a_m) = 0$, где $z = x + iy$.

Учитывая равенство $d\Phi = \Phi_z dz + \sum_{s=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial a_s} da_s = 0$, получим

$$dx = -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\Phi_z} \sum_{s=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial a_s} da_s\right). \quad (1.3.2.10)$$

Как правило, дифференциал dx вычисляется на некоторой границе D -разбиения (т. е. при $z = iy$) при изменении лишь одного параметра, которое обеспечивает переход через рассматриваемую границу. Если $dx > 0$, то при переходе из одной области D -разбиения в другую число корней характеристического полинома с положительной действительной частью увеличивается на единицу, а если $dx < 0$ — уменьшается на единицу.

► **Пример 1.15.** Требуется найти область устойчивости линейного уравнения ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$u''_{tt} = au + bw, \quad w = u(t - \tau), \quad (1.3.2.11)$$

в пространстве действительных параметров a и b при $\tau > 0$.

Запишем характеристическое уравнение

$$\Phi(z) = 0, \quad \Phi(z) \equiv z^2 - a - be^{-\tau z}. \quad (1.3.2.12)$$

В вырожденном случае, который соответствует $z = 0$, имеем $a + b = 0$ (одна из границ D -разбиения). Полагая в (1.3.2.12) $z = iy$, где $0 < y < \infty$, получим равенство $-y^2 = a + b[\cos(\tau y) - i \sin(\tau y)]$, которое приводит к трансцендентным уравнениям

$$\begin{aligned} y^2 + a + b \cos(\tau y) &= 0, \\ b \sin(\tau y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.2.13)$$

При $b \neq 0$, начиная со второго уравнения (1.3.2.13), последовательно находим

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi k}{\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b &= (-1)^{k+1} \left[a + \left(\frac{\pi k}{\tau} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.3.2.14)$$

Здесь второе соотношение определяет два множества параллельных прямых линий с углами наклона $\pm\pi/4$, которые задают границы D -разбиения в плоскости a, b . Кроме того, второе соотношение (1.3.2.14) удовлетворяется при $b = 0$ и $-\infty < a < 0$ ($y = \sqrt{-a}$), что соответствует отрицательной части оси a , которая также образует границы D -разбиения. На рис. 1.10 изображены указанные линии D -разбиения в плоскости (A, B) , где $A = a\tau^2$, $B = b\tau^2$. Области, где характеристическое уравнение (1.3.2.12) имеет одинаковое число корней с положительной действительной частью, закрашены одинаково (число этих корней в указано кружочках).

Сначала заметим, что в точках полуоси $b = 0$, $a > 0$ характеристическое уравнение (1.3.2.12) имеет один корень с положительной действительной частью. Поэтому во всех точках конуса, которой содержит эту полуось, характеристическое уравнение также имеет один корень с положительной действительной частью.

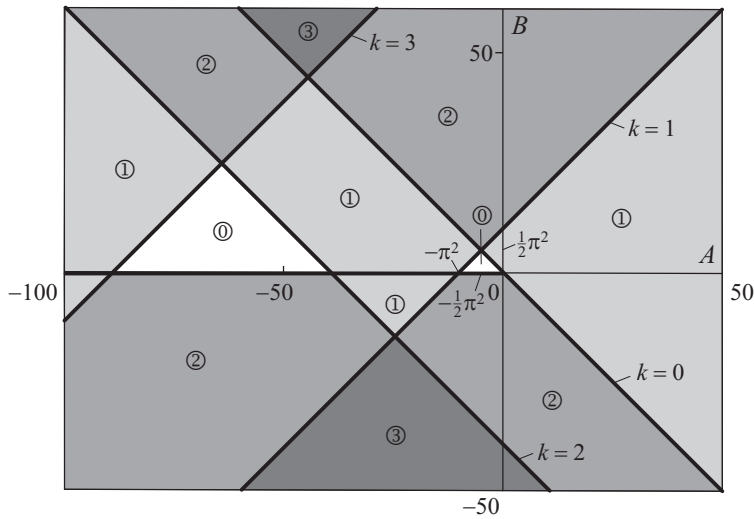


Рис. 1.10. Границы D -разбиения для ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием (1.3.2.11). Области, где характеристическое уравнение (1.3.2.12) имеет одинаковое число корней с положительной действительной частью, закрашены одинаково (число таких корней указано в кружочке).

Чтобы определить число корней с положительной действительной частью в других областях, воспользуемся формулой (1.3.2.10), которая с учетом (1.3.2.12) принимает вид

$$dx = -\operatorname{Re}\left(\frac{\Phi_a da + \Phi_b db}{\Phi_z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{da + e^{-\tau z} db}{2z + b\tau e^{-\tau z}}\right). \quad (1.3.2.15)$$

Поскольку далее нас будет интересовать знак dx при пересечении границ областей D -разбиения, заданных линейными соотношениями (1.3.2.14), подставим в правую часть (1.3.2.15) $z = iy$, где $y = \pi k/\tau$ ($k = 1, 2, \dots$). В результате получим

$$dx = \operatorname{Re} \frac{da + (-1)^k db}{2iy + (-1)^k b\tau} = \frac{(-1)^k b\tau da + b\tau db}{4y^2 + (b\tau)^2}. \quad (1.3.2.16)$$

Для конкретности далее будем рассматривать случай $\tau = 1$.

Из (1.3.2.16) следует, что при любом положительном фиксированном значении $a = a_* > 0$ ($da = 0$) при увеличении b ($db > 0$) и $b > 0$, а также при уменьшении b ($db < 0$) и $b < 0$, знак dx положителен. Это означает, что в смежных областях, граничащих с конусом (содержащим точки $a > 0$), число корней характеристического уравнения (1.3.2.12) с положительной действительной частью равно двум, и увеличивается по мере пересечения более удаленных границ прямой $a = a_*$. При достаточно малом положительном фиксированном $b = b_* > 0$ ($db = 0$) и уменьшении a ($da < 0$) при пересечении прямой $a + b = 0$ (которая соответствует значению $k = 0$ в (1.3.2.14)), имеем $dx < 0$. Поэтому внутри треугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, $(-\pi^2, 0)$, $(-\frac{1}{2}\pi^2, \frac{1}{2}\pi^2)$ характеристическое уравнение (1.3.2.12) не имеет корней с поло-

жительной действительной частью, т. е. в этой области тривиальное решение исходного уравнения (1.3.2.11) устойчиво. Пересечение прямой (1.3.2.14) при $k = 1$ и линии $b = b_* > 0$ ($db = 0$) при уменьшении a и достаточно малом b_* , дает $dx > 0$, т. е. в области за треугольником имеется корень характеристического уравнения с положительной действительной частью. Аналогичным образом определяется число корней характеристического уравнения с положительной действительной частью в других областях D -разбиения. На рис. 1.10 для наглядности области, где характеристическое уравнение имеет одинаковое число корней с положительной действительной частью, закрашены одинаково. ◀

Метод Кука — Дрисше. Области устойчивости и неустойчивости разделяют чисто мнимые комплексные числа $z = iy$, которые являются нулями квазиполинома (1.3.2.9) и удовлетворяют уравнению $\Phi(iy) = 0$. Представив его в виде $P(iy) = -Q(iy)e^{-i\tau y}$, возьмем модуль от обеих частей этого равенства, а затем, возведя в квадрат, получим алгебраическое уравнение

$$F(y) = 0, \quad F(y) \equiv |P(iy)|^2 - |Q(iy)|^2. \quad (1.3.2.17)$$

Левая часть этого уравнения является полиномом степени $2n$, которое содержит только четные степени y . Подстановка $\zeta = y^2$ преобразует $F(y)$ к полиному n -го порядка, который можно представить в факторизованном виде

$$F(y) = \prod_{j=1}^n (\zeta - r_j), \quad \zeta = y^2, \quad (1.3.2.18)$$

где r_1, \dots, r_n — некоторые числа (в общем случае комплексные).

Предполагая теперь, что значения iy и τ , удовлетворяющие уравнениям (1.3.2.9) и (1.3.2.17), известны, будем рассматривать корень $z = x + iy$ уравнения (1.3.2.9) как функцию τ , и попытаемся определить направление движения z с изменением τ . То есть нужно вычислить

$$s = \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{dz}{d\tau} \Big|_{z=iy} \right) \right\} = \operatorname{sign} \left\{ \frac{d}{d\tau} (\operatorname{Re} z) \Big|_{z=iy} \right\}. \quad (1.3.2.19)$$

В [195] было показано, что для любого простого корня iy , $y > 0$, при котором происходит пересечение мнимой оси с «положительной скоростью» ($s \neq 0$), направление пересечения можно определять по формуле

$$s = \operatorname{sign} F'(y), \quad (1.3.2.20)$$

где функция $F(y)$ определена в (1.3.2.17).

Пусть многочлены $P(z)$ и $Q(z)$, определенные в (1.3.2.9), не имеют общих корней и выполняется неравенство $P(0) + Q(0) \neq 0$ (т. е. $z = 0$ не является корнем квазиполинома $\Phi(z)$). Тогда справедливы следующие утверждения [195].

1°. Пусть уравнение $F(y) = 0$, определенное в (1.3.2.17), не имеет положительных корней. Тогда, если квазиполином $\Phi(z)$ устойчив при $\tau = 0$, он

остается устойчивым и при всех $\tau \geq 0$, а если он неустойчив при $\tau = 0$, он остается неустойчивым и при всех $\tau \geq 0$.

2°. Пусть уравнение $F(y) = 0$ имеет хотя бы один положительный корень, и все положительные корни являются простыми. Тогда с ростом τ устойчивый квазиполином может стать неустойчивым и наоборот. Существует положительное значение τ_* , такое что квазиполином $\Phi(z)$ из (1.3.2.9) является неустойчивым при всех $\tau > \tau_*$. При $0 < \tau < \tau_*$ смена устойчивости может произойти не более счетного числа раз.

3°. Если iy ($y > 0$) и τ удовлетворяют равенству (1.3.2.9) и если iy — простой корень, такой что $s \neq 0$, то y является простым корнем уравнения $F(y) = 0$, а корень $z(\tau)$ уравнения (1.3.2.9) пересекает мнимую ось (с ростом τ) в направлении, определяемом величиной $\text{sign } F'(y)$.

4°. Предположим, что все положительные корни r_1, r_2, \dots, r_p , входящие в правую часть (1.3.2.18) являются различными и $r_1 > r_2 > \dots > r_p > 0$. Тогда $\pm iy_k = \pm i\sqrt{r_k}$ ($k = 1, 2, \dots, p$) — возможные корни уравнения (1.3.2.9) на мнимой оси. Пусть эти корни являются простыми. Тогда направление пересечения мнимой оси для значения iy_k определяется величиной

$$s_k = \text{sign} \prod_{j=1, j \neq k}^p (r_k - r_j).$$

Следовательно, пересечение мнимой оси при наибольшем корне r_1 всегда происходит слева направо, при корне r_2 — всегда справа налево и т. д. Если имеется только один положительный корень r_1 , понятно, что мнимая ось пересекается слева направо. Если положительных корней два, то первое пересечение происходит слева направо (при r_1), а второе — справа налево (при r_2).

1.3.3. Устойчивость решений линейных ОДУ с несколькими постоянными запаздываниями

Линейные ОДУ первого порядка с несколькими постоянными запаздываниями. Проблема устойчивости линейного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами и постоянными запаздываниями

$$u'_t(t) = - \sum_{k=1}^n a_k u(t - \tau_k) \quad (1.3.3.1)$$

сводится к проблеме расположения корней характеристического уравнения

$$\lambda + \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda \tau_k} = 0. \quad (1.3.3.2)$$

В [12] для уравнения (1.3.3.1) были доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть $a_k, \tau_k \in [0, \infty)$ для всех $k = 1, \dots, n$ и $\sum_{k=1}^n a_k > 0$. Тогда при выполнении неравенства $\sum_{k=1}^n a_k \tau_k < \pi/2$ все корни трансцендентного уравнения (1.3.3.2) имеют отрицательные действительные части и нулевое решение уравнения (1.3.3.1) асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если $n = 2$, $a_1 = a_2 > 0$ и $a_1 \tau_1 < 1$, то при любом положительном τ_2 все корни трансцендентного уравнения (1.3.3.2) имеют отрицательные действительные части.

Отметим, что при $\sum_{k=1}^n a_k < 0$ для любых неотрицательных τ_k нулевое решение уравнения (1.3.3.1) неустойчиво.

Линейные ОДУ второго порядка с несколькими постоянными запаздываниями. Рассмотрим линейное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и несколькими постоянными запаздываниями

$$u''_{tt}(t) + au'_t(t) + bu(t) = \sum_{k=1}^n c_k u(t - \tau_k), \quad (1.3.3.3)$$

где $a > 0$, $b > 0$, а c_k — действительные числа, удовлетворяющие условию $b > \sum_{k=1}^n |c_k|$.

Теорема. Для асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (1.3.3.3) при любых $\tau_k \geq 0$ достаточно выполнения любого из следующих двух неравенств [506]:

$$\begin{aligned} \text{а) } a &> \frac{\sum_{k=1}^n |c_k|}{(b - \sum_{k=1}^n |c_k|)^{1/2}}, \\ \text{б) } a &> \sum_{k=1}^n |c_k| \tau_k. \end{aligned}$$

ОДУ с запаздываниями (1.3.3.3) соответствует характеристическое уравнение $f(\lambda) \equiv \lambda^2 + a\lambda + b - \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda \tau_k} = 0$. Пусть выполнено неравенство

$$f(0) = b - \sum_{k=1}^n c_k < 0.$$

В этом случае, поскольку $f(+\infty) = +\infty$, функция $f(\lambda)$ имеет по крайней мере один положительный корень $\lambda = \lambda_+ > 0$, который порождает неограниченно растущее решение $u_+ = e^{\lambda_+ t}$ уравнения (1.3.3.3). Поэтому нулевое решение уравнения (1.3.3.3) будет неустойчивым.

Линейные ОДУ старших порядков с несколькими постоянными запаздываниями. Рассмотрим теперь линейное однородное ОДУ n -го порядка с действительными постоянными коэффициентами и несколькими постоянными запаздываниями

$$u_t^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_t^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m b_{kj} u_t^{(k)}(t - \tau_j) = 0, \quad (1.3.3.4)$$

где $\tau_j > 0$, $t > t_0$.

ОДУ с запаздываниями (1.3.3.4) соответствует характеристическое уравнение

$$P(\lambda) + \sum_{j=1}^m b_{kj} Q_j(\lambda) e^{-\tau_j \lambda} = 0, \quad (1.3.3.5)$$

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k, \quad Q_j(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} b_{kj} \lambda^k.$$

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения (1.3.3.4) удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^m |b_{0j}| < |a_0|.$$

Тогда, для того чтобы решения уравнения (1.3.3.4) были асимптотически устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия [28, 94]:

1°. Действительные части всех корней полинома $P(\lambda)$ должны быть отрицательны.

2°. При любом $y > 0$ должно выполняться неравенство

$$\sum_{j=1}^m |Q_j(iy)| < |P(iy)|, \quad i^2 = -1.$$

1.3.4. Анализ устойчивости решений нелинейных ОДУ с запаздываниями по первому приближению

Теоремы об устойчивости и неустойчивости решений. При исследовании на устойчивость тривиального решения нелинейного уравнения (1.3.1.1) в предположении дифференцируемости правой части по всем аргументам, начиная со второго в окрестности нулевых значений тех же аргументов при $t > t_0$ часто целесообразно выделить линейную часть и представить уравнение в виде

$$\begin{aligned} u'_t &= a_0(t)u + a_1(t)w_1 + \dots + a_m(t)w_m + N(t, u, w_1, \dots, w_m), \\ w_i &= u(t - \tau_i(t)), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.3.4.1)$$

где нелинейная функция N имеет порядок выше первого относительно совокупности всех аргументов, начиная со второго.

Во многих случаях исследование на устойчивость нулевого решения ОДУ (1.3.4.1) эквивалентно исследованию на устойчивость нулевого решения более простого линейного ОДУ

$$\begin{aligned} u'_t &= a_0(t)u + a_1(t)w_1 + \dots + a_m(t)w_m, \quad w_i = u(t - \tau_i(t)), \\ w_i &= u(t - \tau_i(t)), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.3.4.2)$$

называемого уравнением первого приближения для ОДУ (1.3.4.1).

Далее будем рассматривать ОДУ с постоянными запаздываниями (1.3.4.1), считая, что $a_i = \text{const}$, $\tau_i = \text{const}$ и $N(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$. Справедливы следующие теоремы [94], аналогичные теоремам Ляпунова для обычных ОДУ без запаздывания.

Теорема 1. Тривиальное решение $u = 0$ нелинейного ОДУ с запаздываниями

$$\begin{aligned} u'_t &= a_0 u + a_1 w_1 + \dots + a_m w_m + N(t, u, w_1, \dots, w_m), \\ w_i &= u(t - \tau_i), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.3.4.3)$$

асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения

$$\lambda = a_0 + a_1 e^{-\tau_1 \lambda} + \dots + a_m e^{-\tau_m \lambda}, \quad (1.3.4.4)$$

полученного для укороченного уравнения первого приближения при $N \equiv 0$, имеют отрицательные действительные части и выполняется неравенство

$$|N(t, u, w_1, \dots, w_m)| \leq k \sum_{i=0}^m |w_i|, \quad w_0 = u, \quad (1.3.4.5)$$

где k — достаточно малая постоянная, все w_i — достаточно малы (т. е. $|w_i| < \sigma$) и $t \geq t_0$.

Теорема 2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения (1.3.4.4) имеет положительную действительную часть и выполнено условие (1.3.4.5), то тривиальное решение уравнения (1.3.4.3) неустойчиво.

Замечание 1.17. Формулировки аналогичных теорем для систем нелинейных ОДУ с постоянными запаздываниями приведены в [94].

Условия устойчивости решений уравнений типа Хатчинсона. Ниже рассмотрены примеры применения сформулированных выше теорем для анализа устойчивости и неустойчивости нелинейных уравнений типа Хатчинсона.

► **Пример 1.16.** Рассмотрим нелинейное ОДУ с постоянным запаздыванием

$$u'_t = cu(1 - w^k), \quad w = u(t - \tau), \quad (1.3.4.6)$$

которое при $k = 1$ и $c = b$ переходит в уравнение Хатчинсона (см. разд. 6.1.1, уравнение (6.1.1.5)). Уравнение (1.3.4.6) будем называть *обобщенным уравнением Хатчинсона*.

Уравнение (1.3.4.6) имеет два стационарных решения $u = 0$ и $u = 1$. Используя теоремы 1 и 2, исследуем их на устойчивость при $c > 0$ и $k > 0$.

1. Стационарное решение $u = 0$ неустойчиво, поскольку характеристическое уравнение первого приближения является вырожденным и имеет единственный корень $\lambda = c > 0$; кроме того, выполняется неравенство (1.3.4.5).

2. Для анализа стационарного решения $u = 1$ в уравнении (1.3.4.6) сделаем подстановку $u = 1 - \bar{u}$. В результате приходим к ОДУ с запаздыванием

$$\bar{u}'_t = -c(1 - \bar{u})[1 - (1 - \bar{w})^k], \quad \bar{w} = \bar{u}(t - \tau). \quad (1.3.4.7)$$

Учитывая, что стационарное решение $u = 1$ исходного уравнения (1.3.4.6) перешло в тривиальное решение $\bar{u} = 0$ преобразованного уравнения (1.3.4.7), разложим правую часть (1.3.4.6), считая малыми величины \bar{u} и \bar{w} . Используя соотношение $(1 - \bar{w})^k = 1 - k\bar{w} + o(\bar{w})$, получим

$$-c(1 - \bar{u})[1 - (1 - \bar{w})^k] = -ck\bar{w} + ck\bar{u}\bar{w} + o(\bar{w}). \quad (1.3.4.8)$$

Поэтому линеаризованное уравнение первого приближения для (1.3.4.7) имеет вид

$$\bar{u}'_t = -ck\bar{w}. \quad (1.3.4.9)$$

Уравнение (1.3.4.9) является частным случаем уравнения (1.3.2.1), в котором следует положить $a = 0$ и $b = -ck$. Поэтому для анализа устойчивости тривиального решения уравнения (1.3.4.9) можно использовать теорему Хейса (см. разд. 1.3.2). Первые два условия (1.3.2.3) при $a = 0$, $b < 0$ выполняются автоматически, а в третьем условии следует положить $\mu = \pi/2$. Учитывая, что при малых $|\bar{u}|$ и $|\bar{w}|$ нелинейной частью функции (1.3.4.8) можно пренебречь, получим условия устойчивости и неустойчивости стационарного решения $u = 1$ обобщенного уравнения Хатчинсона (1.3.4.6):

$$\begin{aligned} \text{решение } u = 1 \text{ асимптотически устойчиво, если } ck\tau < \pi/2; \\ \text{решение } u = 1 \text{ неустойчиво, если } ck\tau > \pi/2. \end{aligned} \quad (1.3.4.10)$$

► **Пример 1.17.** Дальнейшим обобщением уравнения Хатчинсона является нелинейное ОДУ с запаздыванием

$$u'_t = cu[1 - f(w)], \quad w = u(t - \tau), \quad (1.3.4.11)$$

где $c > 0$, а $f(w)$ — любая монотонная гладкая функция, удовлетворяющая условиям

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) > 0. \quad (1.3.4.12)$$

Уравнение (1.3.4.11), как и уравнение (1.3.4.6), имеет стационарные решения $u = 0$ и $u = 1$. Рассуждая аналогично тому, как это делалось в примере 1.16, можно показать, что тривиальное решение $u = 0$ неустойчиво, а области устойчивости и неустойчивости стационарного решения $u = 1$ определяются условиями (1.3.4.10), где $k = f'(1) > 0$. ◀

Условия устойчивости стационарных решений других нелинейных ОДУ с запаздыванием. Рассмотрим теперь нелинейное ОДУ достаточно общего вида с постоянным запаздыванием

$$u'_t = f(u, w), \quad w = u(t - \tau). \quad (1.3.4.13)$$

Будем считать, что уравнение (1.3.4.13) имеет стационарное решение $u = u_0$, т. е. $f(u_0, u_0) = 0$, а функция $f(u, w)$ имеет непрерывные частные производные в точке $u = u_0, w = u_0$.

Для анализа на устойчивость стационарного решения $u = u_0$ сначала представим правую часть уравнения (1.3.4.13) вблизи точки u_0 в виде

$$f(u, w) = f_u^\circ(u - u_0) + f_w^\circ(w - u_0) + o(|u - u_0| + |w - u_0|),$$

$$f_u^\circ = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u_0, w=u_0}, \quad f_w^\circ = \frac{\partial f}{\partial w} \Big|_{u=u_0, w=u_0}, \quad (1.3.4.14)$$

а затем сделаем замену $\bar{u} = u - u_0$, которая стационарное решение $u = u_0$ исходного уравнения переводит в тривиальное решение $\bar{u} = 0$ преобразованного уравнения. В результате после отбрасывания нелинейной части, имеющей порядок $o(|\bar{u}| + |\bar{w}|)$, приходим к линейному уравнению

$$\bar{u}'_t = f_u^\circ \bar{u} + f_w^\circ \bar{w}, \quad \bar{w} = \bar{u}(t - \tau), \quad (1.3.4.15)$$

которое с точностью до очевидных переобозначений совпадает с уравнением (1.3.2.1).

Условия устойчивости тривиального решения уравнения (1.3.4.15), совпадающие с условиями устойчивости стационарного решения $u = u_0$ исходного уравнения (1.3.4.13), определяются с помощью неравенств (1.3.2.3) при $a = f_u^\circ$ и $b = f_w^\circ$.

1.4. Точные и приближенные аналитические методы решения ОДУ с запаздыванием

1.4.1. Использование интегральных преобразований для решения линейных задач

Для решения линейных задач для ОДУ с запаздыванием можно использовать интегральные преобразования Лапласа и Меллина [8, 94, 140, 163, 523, 524]. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые понятия и формулы из теории вычетов.

Вычеты. *Вычетом* функции $f(z)$, голоморфной в выколотой окрестности точки $z = a$ (т. е. a — изолированная особая точка функции f) комплексной плоскости z называется число

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz, \quad i^2 = -1,$$

где C_ε — окружность достаточного малого радиуса ε , описываемая уравнением $|z - a| = \varepsilon$.

Для простого полюса, когда $f(z) \simeq \operatorname{const}/(z - a)$ при $z \rightarrow a$, справедлива формула

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z - a)f(z)].$$

Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(a) \neq 0$, а точка $z = a$ является простым нулем функции $\psi(z)$, т. е. $\psi(a) = 0$ and $\psi'_z(a) \neq 0$, то

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'_z(a)}. \quad (1.4.1.1)$$

Если точка $z = a$ — полюс n -го порядка* функции $f(z)$, то

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(z-a)^n f(z)]. \quad (1.4.1.2)$$

Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа для произвольной (комплекснозначной) функции $f(t)$ действительного переменного t ($t \geq 0$) определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (1.4.1.3)$$

где $s = a + ib$ — комплексная переменная.

Функция $f(t)$ называется *оригиналом*, является кусочно непрерывной на всей области определения (т. е. может иметь разрывы только первого рода, причем каждый конечный интервал содержит лишь конечное число точек разрыва) и имеет ограниченный показательный рост, т. е. существуют такие постоянные $M > 0$ и σ_0 , что $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$ при $t > 0$. Далее считаем, что в указанной оценке взято наименьшее из возможных чисел σ_0 , которое называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Функция $\tilde{f}(s)$ называется *изображением* и для всякого оригинала $f(t)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Формулу (1.4.1.3) кратко будем записывать так:

$$\tilde{f}(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} \quad \text{или} \quad \tilde{f}(s) = \mathfrak{L}\{f(t), s\}.$$

Обратное преобразование Лапласа. По известному изображению $\tilde{f}(s)$ оригинал находится с помощью *обратного преобразования Лапласа*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) e^{sx} ds, \quad i^2 = -1, \quad (1.4.1.4)$$

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости справа от всех особых точек функции $\tilde{f}(s)$, что соответствует $c > \sigma_0$.

Интеграл в (1.4.1.4) понимается в смысле главного значения по Коши:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} \tilde{f}(s) e^{st} ds.$$

В области $t < 0$ формула (1.4.1.4) дает $f(t) \equiv 0$.

* В окрестности точки $z = a$ имеем $f(z) \approx \operatorname{const} (z-a)^{-n}$, где $n \geq 1$ — целое число.

Формула (1.4.1.4) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $t = t_0 > 0$ функция $f(t)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (1.4.1.4) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$ (при $t_0 = 0$ первый член в квадратных скобках должен быть опущен).

Формулу обращения преобразования Лапласа (1.4.1.4) кратко будем записывать так:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} \quad \text{или} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s), t\}.$$

Существуют подробные таблицы прямого и обратного преобразования Лапласа (см., например, [6, 19, 20, 221, 406, 435, 461, 462]), которые удобно использовать при решении линейных дифференциальных уравнений.

Основные свойства преобразования Лапласа.

1°. В табл. 1.4 даны основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Лапласа.

2°. Преобразования Лапласа некоторых функций приведены в табл. 1.5; более подробные таблицы имеются в [20, 406, 461].

Таблица 1.4. Основные свойства преобразования Лапласа.

| № | Функция | Преобразование Лапласа | Операция |
|----|--|---|----------------------------------|
| 1 | $af_1(t) + bf_2(t)$ | $a\tilde{f}_1(s) + b\tilde{f}_2(s)$ | Линейная суперпозиция |
| 2 | $f(t/a), a > 0$ | $a\tilde{f}(as)$ | Изменение масштаба |
| 3 | $f(t - a),$ $f(\xi) \equiv 0$ при $\xi < 0$ | $e^{-as}\tilde{f}(s)$ | Сдвиг аргумента |
| 4 | $t^n f(t); n = 1, 2, \dots$ | $(-1)^n \tilde{f}_s^{(n)}(s)$ | Дифференцирование изображения |
| 5 | $\frac{1}{t}f(t)$ | $\int_s^\infty \tilde{f}(q) dq$ | Интегрирование изображения |
| 6 | $e^{at}f(t)$ | $\tilde{f}(s - a)$ | Смещение в комплексной плоскости |
| 7 | $f'_t(t)$ | $s\tilde{f}(s) - f(+0)$ | Дифференцирование |
| 8 | $f_t^{(n)}(t)$ | $s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f_t^{(k-1)}(+0)$ | Дифференцирование |
| 9 | $t^m f_t^{(n)}(t), m = 1, 2, \dots$ | $(-1)^m \left[s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f_t^{(k-1)}(+0) \right]_s^{(m)}$ | Дифференцирование |
| 10 | $[t^m f(t)]_t^{(n)}, m \geq n$ | $(-1)^m [\tilde{f}(s)]_s^{(m)}$ | Дифференцирование |
| 11 | $\int_0^t f(\xi) d\xi$ | $\frac{\tilde{f}(s)}{s}$ | Интегрирование |
| 12 | $\int_0^t f_1(\xi) f_2(t - \xi) d\xi$ | $\tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s)$ | Свертка |

Таблица 1.5. Преобразования Лапласа некоторых функций.

| № | Функция, $f(t)$ | Преобразование Лапласа, $\tilde{f}(s)$ | Примечания |
|----|---|--|---|
| 1 | 1 | $1/s$ | |
| 2 | t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $n = 1, 2, \dots$ |
| 3 | t^a | $\Gamma(a+1)s^{-a-1}$ | $a > -1$ |
| 4 | e^{-at} | $(s+a)^{-1}$ | |
| 5 | $t^a e^{-bt}$ | $\Gamma(a+1)(s+b)^{-a-1}$ | $a > -1$ |
| 6 | $\text{sh}(at)$ | $\frac{a}{s^2 - a^2}$ | |
| 7 | $\text{ch}(at)$ | $\frac{s}{s^2 - a^2}$ | |
| 8 | $\ln t$ | $-\frac{1}{s}(\ln s + C)$ | C — константа Эйлера, $C \approx 0.5772156649$ |
| 9 | $\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2 + a^2}$ | |
| 10 | $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2 + a^2}$ | |
| 11 | $\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ | $\frac{1}{s} \exp(-a\sqrt{s})$ | $a \geq 0$ |
| 12 | $J_0(at)$ | $\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$ | $J_0(t)$ — функция Бесселя |

Обратное преобразование рациональных функций. Рассмотрим важный случай преобразования рациональных функций вида

$$\tilde{f}(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}, \quad (1.4.1.5)$$

где $Q(s)$ и $R(s)$ — полиномы, причем степень полинома $Q(s)$ больше степени полинома $R(s)$.

Пусть нули знаменателя простые, т. е.

$$Q(s) \equiv \text{const} (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n).$$

Тогда оригинал можно найти по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{R(s_k)}{Q'(s_k)} \exp(s_k t), \quad (1.4.1.6)$$

где штрихи обозначают производные.

Если $Q(s)$ имеет m нулей порядка r_1, \dots, r_m , т. е.

$$Q(s) \equiv \text{const} (s - s_1)^{r_1} (s - s_2)^{r_2} \dots (s - s_m)^{r_m},$$

то

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{r_k-1}}{ds^{r_k-1}} [(s - s_k)^{r_k} \tilde{f}(s) e^{st}]. \quad (1.4.1.7)$$

Обращение функций с конечным числом особых точек. Если функция $\tilde{f}(s)$ имеет конечное число особых точек s_1, s_2, \dots, s_n и при $s \rightarrow \infty$ стремится к нулю, то ее оригинал можно найти с помощью формулы

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{s=s_k} [\tilde{f}(s)e^{st}]. \quad (1.4.1.8)$$

Обращение функций с бесконечным числом особых точек. Формулу (1.4.1.8) можно распространить на функции $\tilde{f}(s)$ с бесконечным числом особых точек. В этом случае оригинал $f(t)$ представляется в виде бесконечного ряда.

Теорема разложения (см., например, [20, 46]). Пусть функция комплексного переменного $\tilde{f}(s)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Функция $\tilde{f}(s)$ мероморфна (т. е. определена на всей комплексной плоскости и не имеет в конечной части плоскости особых точек, отличных от полюсов) и дифференцируема в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} s > s_0$.

2. Существует система вложенных в друг друга окружностей

$$C_n: |s| = R_n, \quad R_1 < R_2 < \dots, \quad R_n \rightarrow \infty,$$

на которой $\tilde{f}(s)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg s$.

3. Для любого $a > s_0$ абсолютно сходится интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \tilde{f}(s) ds$.

Тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=s_k} [\tilde{f}(s)e^{st}], \quad (1.4.1.9)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам s_k функции $\tilde{f}(s)$ в порядке неубывания их модулей.

Если все особые точки функции $\tilde{f}(s)$ являются простыми полюсами, то вычеты в (1.4.1.9) можно находить с помощью формулы (1.4.1.1), представив $\tilde{f}(s)$ в виде отношения двух функций (корни функции, стоящей в знаменателе, должны быть простыми и совпадать с особыми точками функции $\tilde{f}(s)$).

► **Пример 1.18.** Рассмотрим линейное ОДУ с запаздыванием [94, с. 79]:

$$u'_t(t) = au(t) + bu(t - \tau) \quad (1.4.1.10)$$

с начальным условием

$$u(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (1.4.1.11)$$

Применим к (1.4.1.10) преобразование Лапласа (1.4.1.3):

$$\int_0^{\infty} u'_t(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} [au(t) + bu(t - \tau)]e^{-st}dt.$$

Используя правило 7 таблицы 1.4 для левой части уравнения, а во втором слагаемом в правой части совершая замену переменных $t - \tau = t_1$ и разбивая

полученный после этого интеграл $\int_{-\tau}^{\infty}$ на два интеграла $\int_{-\tau}^0$ и \int_0^{∞} , запишем

$$s\tilde{u}(s) - \varphi(0) = a\tilde{u}(s) + b\tilde{u}(s)e^{-s\tau} + b \int_{-\tau}^0 \varphi(t)e^{-s(t+\tau)} dt.$$

В результате получим

$$\tilde{u}(s) = \frac{\varphi(0) + b \int_{-\tau}^0 \varphi(t)e^{-s(t+\tau)} dt}{s - a - be^{-s\tau}}. \quad (1.4.1.12)$$

Пусть выполнено неравенство $\ln(-b\tau) - a\tau + 1 \neq 0$. Тогда квазиполином

$$Q(s) = s - a - be^{-s\tau}, \quad (1.4.1.13)$$

стоящий в знаменателе дроби (1.4.1.12), имеет лишь простые нули s_k . Используя формулу обращения (1.4.1.9), можно представить искомое решение в виде ряда

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{s_k t}}{1 + \tau be^{-s_k \tau}} \left[\varphi(0) + b \int_{-\tau}^0 \varphi(t)e^{-s_k(t+\tau)} dt \right].$$

Корни квазиполинома (1.4.1.13) можно выразить в терминах функции Ламберта в виде (1.1.3.5), заменив в ней λ на s_k , где под W в правой части этой формулы понимается совокупность всех действительных и комплексных ветвей функции Ламберта.

Описание построения решения задачи (1.4.1.10) – (1.4.1.11) и других линейных систем ОДУ с запаздыванием в виде ряда с использованием функции Ламберта можно найти в [115]. ◀

Замечание 1.18. Преобразование Лапласа можно использовать для построения асимптотических решений линейных ОДУ с пропорциональным запаздыванием, а также для исследования устойчивости решений таких уравнений [13].

Преобразование Меллина. Пусть функция $f(t)$ определена на действительной полуоси $t > 0$ и удовлетворяет условиям [434, 435]:

$$\int_0^1 |f(t)|t^{a_1-1} dt < \infty, \quad \int_1^{\infty} |f(t)|t^{a_2-1} dt < \infty,$$

где a_1 и a_2 — некоторые действительные числа, $a_1 < a_2$.

Преобразование Меллина функции $f(t)$ определяется следующим образом:

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1} dt, \quad (1.4.1.14)$$

где $s = a + ib$ — комплексная переменная ($a_1 < a < a_2$).

Формулу (1.4.1.14) кратко будем записывать так:

$$\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\} \quad \text{или} \quad \hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t), s\}.$$

Оригинал $f(t)$ заданного изображения $\hat{f}(s)$ можно получить с помощью обратного преобразования Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \hat{f}(s)t^{-s} ds \quad (a_1 < a < a_2), \quad (1.4.1.15)$$

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости s , а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Формула (1.4.1.15) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $t = t_0 > 0$ функция $f(t)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (1.4.1.15) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$ (при $t_0 = 0$ первый член в квадратных скобках должен быть опущен) [20].

Формулу обращения преобразования Меллина (1.4.1.15) кратко будем записывать так:

$$f(t) = \mathfrak{M}^{-1}\{\hat{f}(s)\} \quad \text{или} \quad f(t) = \mathfrak{M}^{-1}\{\hat{f}(s), t\}.$$

В табл. 1.6 даны основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Меллина; в табл. 1.7 приводятся преобразования Меллина некоторых функций. Существуют подробные таблицы прямого и обратного преобразования Меллина (см. [6, 20, 221, 435]), которые удобно использовать при решении линейных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений с пропорциональным запаздыванием.

Преобразование Меллина связано с преобразованием Лапласа:

$$\mathfrak{M}\{f(t), s\} = \mathfrak{L}\{f(e^t), -s\} + \mathfrak{L}\{f(e^{-t}), s\}. \quad (1.4.1.16)$$

Формула (1.4.1.16) дает возможность использовать более распространенные таблицы прямого и обратного преобразования Лапласа.

► **Пример 1.19.** Следуя [523, 524], рассмотрим ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t(t) + au(t) = bu(pt), \quad p > 1, \quad a > 0, \quad (1.4.1.17)$$

с однородными граничными условиями на полуограниченном интервале

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 \quad (1.4.1.18)$$

и условием нормировки

$$\int_0^\infty u(t) dt = 1. \quad (1.4.1.19)$$

Задачи, в которых дополнительные условия типа (1.4.1.18)–(1.4.1.19) определяют искомую функцию $u(t)$ как функцию плотности вероятности, встречаются, например, в биомоделях клеточного роста [273, 274].

Применяя преобразование Меллина к (1.4.1.17) и учитывая условия (1.4.1.18) (предполагается, что решение достаточно быстро затухает при больших t), получим разностное уравнение

$$-(s-1)\hat{u}(s-1) + a\hat{u}(s) = bp^{-s}\hat{u}(s). \quad (1.4.1.20)$$

Условие (1.4.1.19), с учетом определения преобразования Меллина (1.4.1.14), принимает вид

$$\hat{u}(1) = 1. \quad (1.4.1.21)$$

Таблица 1.6. Основные свойства преобразования Меллина.

| № | Функция | Преобразование Меллина | Операция |
|----|---|--|--------------------------------|
| 1 | $af_1(t) + bf_2(t)$ | $a\hat{f}_1(s) + b\hat{f}_2(s)$ | Линейная суперпозиция |
| 2 | $f(at), a > 0$ | $a^{-s}\hat{f}(s)$ | Изменение масштаба |
| 3 | $t^a f(t)$ | $\hat{f}(s+a)$ | Сдвиг аргумента |
| 4 | $f(t^2)$ | $\frac{1}{2}\hat{f}(\frac{1}{2}s)$ | Возведение аргумента в квадрат |
| 5 | $f(1/t)$ | $\hat{f}(-s)$ | Инверсия аргумента |
| 6 | $t^\lambda f(at^\beta), a > 0, \beta \neq 0$ | $\frac{1}{\beta}a^{-\frac{s+\lambda}{\beta}}\hat{f}\left(\frac{s+\lambda}{\beta}\right)$ | Степенное преобразование |
| 7 | $f'_t(t)$ | $-(s-1)\hat{f}(s-1)$ | Дифференцирование |
| 8 | $tf'_t(t)$ | $-s\hat{f}(s)$ | Дифференцирование |
| 9 | $f_t^{(n)}(t)$ | $(-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\hat{f}(s-n)$ | Дифференцирование порядка n |
| 10 | $\left(t\frac{d}{dt}\right)^n f(t)$ | $(-1)^n s^n \hat{f}(s)$ | Дифференцирование порядка n |
| 11 | $t^\alpha \int_0^\infty \xi^\beta f_1(t\xi)f_2(\xi) d\xi$ | $\hat{f}_1(s+\alpha)\hat{f}_2(1-s-\alpha+\beta)$ | Интегрирование |
| 12 | $t^\alpha \int_0^\infty \xi^\beta f_1\left(\frac{t}{\xi}\right)f_2(\xi) d\xi$ | $\hat{f}_1(s+\alpha)\hat{f}_2(s+\alpha+\beta+1)$ | Интегрирование |

Рассмотрим теперь вспомогательное линейное однородное ОДУ

$$v'(t) + av(t) = 0, \quad (1.4.1.22)$$

полученное путем отбрасывания последнего члена в (1.4.1.17). Применяя преобразование Меллина к (1.4.1.22), имеем

$$-(s-1)F(s-1) + aF(s) = 0, \quad (1.4.1.23)$$

где $F(s) = \mathfrak{M}\{v(t), s\}$. Уравнение (1.4.1.22) допускает точное решение $v = e^{-at}$. Учитывая сказанное и используя преобразование 6 в табл. 1.7, получим

$$F(s) = a^{-s}\Gamma(s), \quad (1.4.1.24)$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция.

Решение разностной задачи (1.4.1.20)–(1.4.1.21) ищем в виде

$$\hat{u}(s) = F(s)Q(s). \quad (1.4.1.25)$$

Подставив (1.4.1.25) в (1.4.1.20) и учитывая (1.4.1.23), приходим к уравнению

$$Q(s-1) = (1 - ba^{-1}p^{-s})Q(s), \quad (1.4.1.26)$$

Таблица 1.7. Преобразования Меллина некоторых функций.

| № | Функция, $f(t)$ | Преобразование Меллина, $\tilde{f}(s)$ | Примечания |
|----|--------------------------|---|---|
| 1 | $H(t-a)$ | $-s^{-1}a^s$ | $a > 0, s < 0$ |
| 2 | $H(a-t)$ | $s^{-1}a^s$ | $a > 0, s > 0$ |
| 3 | $t^n H(t-a)$ | $-(n+s)^{-1}a^{n+s}$ | $a > 0, \operatorname{Re}(n+s) < 0$ |
| 4 | $t^n H(a-t)$ | $(n+s)^{-1}a^{n+s}$ | $a > 0, \operatorname{Re}(n+s) > 0$ |
| 5 | e^{-ct^b} | $b^{-1}c^{-s/b}\Gamma(s/b)$ | $b > 0, \operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s > 0$ |
| 6 | $e^{-ct^{-b}}$ | $b^{-1}c^{s/b}\Gamma(-s/b)$ | $b > 0, \operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s < 0$ |
| 7 | $\ln(t)H(a-t)$ | $s^{-1}a^{-s}(\ln a - s^{-1})$ | $a > 0, \operatorname{Re} s > 0$ |
| 8 | $\ln(1+at)$ | $\frac{\pi}{sa^s \sin(\pi s)}$ | $ \arg a < \pi, -1 < \operatorname{Re} s < 0$ |
| 9 | $\sin(at)$ | $a^{-s}\Gamma(s)\sin(\frac{1}{2}\pi s)$ | $a > 0, -1 < \operatorname{Re} s < 1$ |
| 10 | $\cos(at)$ | $a^{-s}\Gamma(s)\cos(\frac{1}{2}\pi s)$ | $a > 0, 0 < \operatorname{Re} s < 1$ |
| 11 | $\operatorname{erfc}(t)$ | $\pi^{-1/2}s^{-1}\Gamma[\frac{1}{2}(s+1)]$ | $\operatorname{Re} s > 0$ |
| 12 | $J_0(at)$ | $\frac{2^{s-1}\Gamma(s/2)}{a^s\Gamma(1-s/2)}$ | $a > 0, 0 < \operatorname{Re} s < 3/2,$ $J_0(t)$ — функция Бесселя |

Обозначение: $H(t) = \{1 \text{ при } t \geq 0, 0 \text{ при } t < 0\}$ — единичная функция Хевисайда.

решение которого можно представить в виде бесконечного произведения (этот факт доказывается непосредственной проверкой):

$$Q(s) = C \prod_{k=0}^{\infty} (1 - ba^{-1}p^{-k-s-1}), \quad (1.4.1.27)$$

где C — некоторая постоянная. Следовательно, можно записать решение уравнения (1.4.1.20):

$$\hat{u}(s) = Ca^{-s}\Gamma(s) \prod_{k=0}^{\infty} (1 - ba^{-1}p^{-k-s-1}). \quad (1.4.1.28)$$

Из условия типа нормировки (1.4.1.21) находим константу C :

$$C = a \prod_{k=0}^{\infty} (1 - ba^{-1}p^{-k-2})^{-1}. \quad (1.4.1.29)$$

Для получения оригинала функции (1.4.1.28) необходимо преобразовать бесконечное произведение в бесконечный ряд. Для этого воспользуемся равенством Эйлера [110]:

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + rq^k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k q^{k(k-1)/2}}{\prod_{j=1}^k (1 - q^j)},$$

где $|q| < 1$, а r — любое комплексное число. Учитывая, что в рассматриваемом случае $q = p^{-1}$, $r = -ba^{-1}p^{-s-1}$, решение (1.4.1.28) представим в виде

$$\hat{u}(s) = Ca^{-s}\Gamma(s) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k p^{-ks}\right), \quad (1.4.1.30)$$

где коэффициенты β_k определяются по формулам

$$\beta_k = \frac{(-1)^k b^k}{a^k p^{k(k+1)/2} \prod_{j=1}^k (1 - p^{-j})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4.1.31)$$

Ряд (1.4.1.30) равномерно сходится в правой полуплоскости, поэтому изображение $\hat{u}(s)$ можно почленно преобразовать обратно, используя свойство 5 при $b = 1$ из табл. 1.7 и свойство 2 из табл. 1.6. В результате получим решение исходной задачи (1.4.1.17)–(1.4.1.19) в виде

$$u(t) = C \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k e^{-ap^k t},$$

где $\beta_0 = 1$, а постоянные C и β_k определяются по формулам (1.4.1.29) и (1.4.1.31). ◀

1.4.2. Представление решений в виде степенных рядов по независимой переменной

Представление решений в виде степенных рядов. Приближенные решения ОДУ с пропорциональным запаздыванием можно искать в виде полинома (или бесконечного степенного ряда) по независимой переменной [133, 268, 485, 488]:

$$u(t) = \sum_{n=0}^k \gamma_n t^n, \quad (1.4.2.1)$$

где k — задается, а постоянные γ_n последовательно определяются в ходе анализа.

► **Пример 1.20.** Рассмотрим задачу Коши для линейного ОДУ с постоянными коэффициентами и двумя пропорциональными запаздываниями

$$u'_t = au + bw_1 + cw_2, \quad w_1 = u(pt), \quad w_2 = u(qt); \quad u(0) = 1. \quad (1.4.2.2)$$

Решение ищем в виде бесконечного ряда

$$u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n t^n. \quad (1.4.2.3)$$

Подставим (1.4.2.3) в (1.4.2.2). Учитывая соотношения для производной

$$u'_t = \sum_{n=1}^{\infty} n\gamma_n t^{n-1} = \gamma_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\gamma_{n+1} t^n,$$

получим

$$\gamma_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\gamma_{n+1}t^n = a + b + c + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(a + bp^n + cq^n)t^n.$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях t^n дает линейную систему уравнений для определения γ_n :

$$\gamma_1 = a + b + c, \quad (n+1)\gamma_{n+1} = \gamma_n(a + bp^n + cq^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Меняя n , последовательно находим решение этой системы. В результате получим решение задачи Коши (1.4.2.2) в виде степенного ряда

$$u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n t^n, \quad \gamma_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (a + bp^k + cq^k). \quad (1.4.2.4)$$

При $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ ряд (1.4.2.4) имеет бесконечный радиус сходимости. В этом случае при $a, b, c \geq 0$ имеем $a^n < \gamma_n < (a + b + c)^n$ и $e^{at} < u < e^{(a+b+c)t}$.

Отметим, что решение (1.4.2.4) другим способом было получено в [414]; в частном случае $c = 0$ оно переходит в решение, приведенное в [240]. ◀

► **Пример 1.21.** Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t(t) = a - bu^2(pt); \quad u(0) = 0, \quad (1.4.2.5)$$

где $0 < p < 1$.

Правая часть уравнения (1.4.2.5) не меняется при замене u на $-u$. Следовательно u'_t — четная функция, а u — сумма нечетной функции и константы. Учитывая сказанное и нулевое начальное условие, приближенное решение задачи (1.4.2.5) ищем в виде

$$u = \alpha t + \beta t^3 + \gamma t^5 + \delta t^7 + \dots \quad (1.4.2.6)$$

Подставим (1.4.2.6) в (1.4.2.5) и соберем слагаемые при одинаковых степенях t . Имеем

$$\alpha - a + (3\beta + bp^2\alpha^2)t^2 + (5\gamma + 2bp^4\alpha\beta)t^4 + [7\delta + bp^6(\beta^2 + 2\alpha\gamma)]t^6 + \dots = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях t^{2n} , получим уравнения для определения коэффициентов ряда (1.4.2.6).

$$\begin{aligned} \alpha - a &= 0 & (\text{при } t^0), \\ 3\beta + bp^2\alpha^2 &= 0 & (\text{при } t^2), \\ 5\gamma + 2bp^4\alpha\beta &= 0 & (\text{при } t^4), \\ 7\delta + bp^6(\beta^2 + 2\alpha\gamma) &= 0 & (\text{при } t^6). \end{aligned}$$

Решив эти уравнения, в итоге получим приближенное решение задачи (1.4.2.5) в виде полинома

$$u = at - \frac{1}{3}a^2bp^2t^3 + \frac{2}{15}a^3b^2p^6t^5 - \frac{1}{21}a^4b^3p^{10}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}p^2\right)t^7, \quad (1.4.2.7)$$

погрешность которого при малых t составляет $O(t^9)$.

На рис. 1.11 изображены кривые, построенные с помощью приближенной формулы (1.4.2.7) при $p = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$. Видно, что при $ab > 0$ и $0 < p \leq 1$ кривые немонотонны, сначала возрастают, достигают положительного экстремума, а затем убывают, пересекают ось $u = 0$ (чем меньше p , тем дальше точка пересечения с этой осью) и переходят в область отрицательных значений. При $ab < 0$ все кривые монотонно возрастают и их рост увеличивается при увеличении p от нуля до единицы.

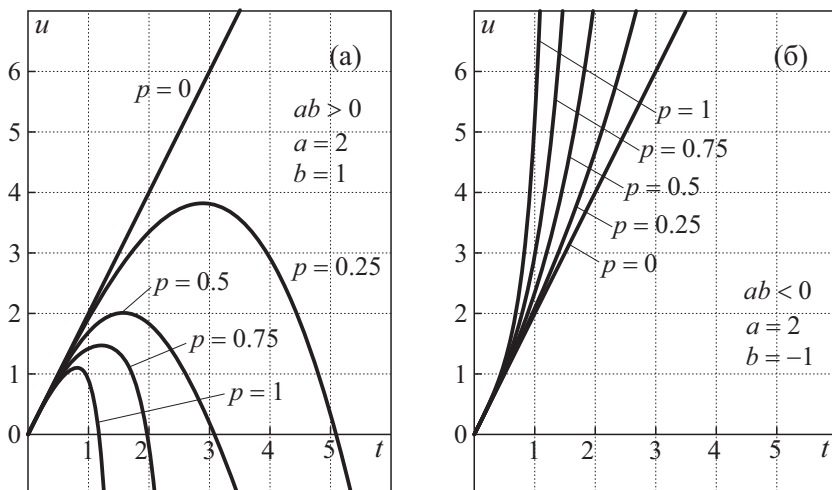


Рис. 1.11. Кривые, построенные с помощью приближенной формулы (1.4.2.7) при $p = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ для двух пар значений определяющих параметров задачи (1.4.2.5): а) $a = 2, b = 1$ и б) $a = 2, b = -1$.

Формула (1.4.2.7) дает точный результат при $p = 0$. Поэтому следует ожидать, что ее погрешность будет уменьшаться при уменьшении параметра p от единицы до нуля. Проведенные далее сопоставления формулы (1.4.2.7) с точными решениями задачи (1.4.2.5) подтверждают вышесказанное.

Нелинейная задача (1.4.2.5) для произвольных a и b (отличных от нуля) помимо случая $p = 0$ допускает также два других точных решения при $p = \frac{1}{2}$ и $p = 1$, которые приведены ниже.

1°. Решение задачи (1.4.2.5) при $p = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{\frac{2a}{b}} \sin\left(b\sqrt{\frac{a}{2b}} t\right) && \text{при } ab > 0, \\ u(t) &= -\sqrt{-\frac{2a}{b}} \operatorname{sh}\left(b\sqrt{-\frac{a}{2b}} t\right) && \text{при } ab < 0. \end{aligned} \quad (1.4.2.8)$$

2°. Решение задачи (1.4.2.5) при $p = 1$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{th}\left(b\sqrt{\frac{a}{b}} t\right) && \text{при } ab > 0, \\ u(t) &= -\sqrt{-\frac{a}{b}} \operatorname{tg}\left(b\sqrt{-\frac{a}{b}} t\right) && \text{при } ab < 0. \end{aligned} \quad (1.4.2.9)$$

На рис. 1.12 а сплошными линиями изображены построенные по формулам (1.4.2.8) и (1.4.2.9) точные решения задачи (1.4.2.5) при $a = 2$, $b = 1$ для $p = \frac{1}{2}$ и $p = 1$. Штриховыми линиями показаны приближенные решения этой же задачи, построенные с помощью полинома (1.4.2.7) при тех же значениях определяющих параметров. На рис. 1.12 б сплошными и штриховыми линиями изображены соответствующие точные и приближенные решения задачи (1.4.2.5) при $a = 2$, $b = -1$ для $p = \frac{1}{2}$ и $p = 1$. Видно, что при $p = \frac{1}{2}$ приближенная формула (1.4.2.7) хорошо работает на достаточно большом промежутке времени ($0 \leq t \leq \pi$). При $p = 1$ погрешность формулы (1.4.2.7) значительно больше и ее можно использовать лишь при $0 \leq t \leq 0.8$.

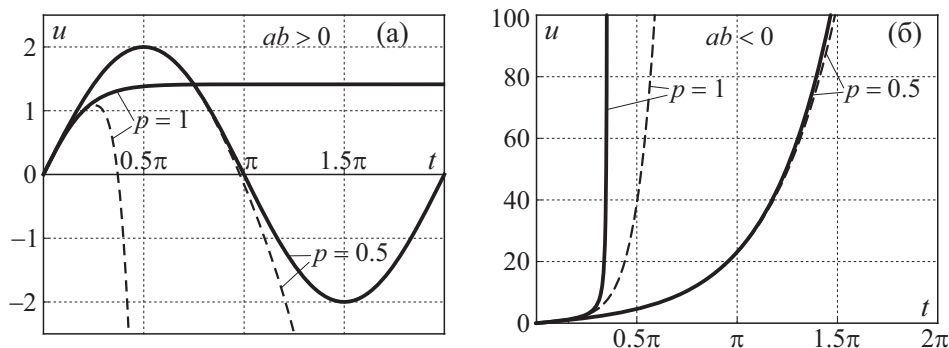


Рис. 1.12. Точные решения задачи (1.4.2.5), построенные по формулам (1.4.2.8) и (1.4.2.9) при $p = \frac{1}{2}$ и $p = 1$ для двух пар значений определяющих параметров: а) $a = 2$, $b = 1$ и б) $a = 2$, $b = -1$.

Замечание 1.19. В задачах для ОДУ с пропорциональным запаздыванием, когда уравнение задано в области $t \geq t_0$, приближенное решение можно искать в виде $u(t) = \sum_{n=0}^k \gamma_n(t - t_0)^n$.

► **Пример 1.22.** Рассмотрим смешанную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$u''_{xx}(x) + (a + bx^2)u(px) + c = 0; \quad (1.4.2.10)$$

$$u'_x(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (1.4.2.11)$$

где $0 < p < 1$.

Приближенное решение задачи (1.4.2.10), (1.4.2.11) ищем в виде степенного ряда

$$u = \lambda + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \dots, \quad (1.4.2.12)$$

где константы $\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ подлежат определению. Подставив (1.4.2.12) в первое граничное условие (1.4.2.11), получим

$$\alpha = 0. \quad (1.4.2.13)$$

Учитывая (1.4.2.13), подставим (1.4.2.12) в уравнение (1.4.2.10) и соберем слагаемые при одинаковых степенях x . Имеем

$$A + Bx + Cx^2 + \dots = 0, \quad (1.4.2.14)$$

$$A = 2\beta + a\lambda + c, \quad B = 6\gamma, \quad C = 12\delta + b\lambda + ap^2\beta.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях x в (1.4.2.14), приходим к системе линейных алгебраических уравнений $A = 0, B = 0, C = 0, \dots$. Решив эту систему, выразим $\beta, \gamma, \delta, \dots$ через λ , а затем подставим их и (1.4.2.13) в (1.4.2.12). Оставляя первые члены разложения по степеням x до x^4 включительно, получим приближенный многочлен

$$u = \lambda - \frac{1}{2}(a\lambda + c)x^2 + \frac{1}{24}(a^2p^2\lambda + acp^2 - 2b\lambda)x^4. \quad (1.4.2.15)$$

Приближенное значение параметра λ определяется путем подстановки многочлена (1.4.2.15) во второе граничное условие (1.4.2.11). В результате имеем

$$\lambda = \frac{c(12 - ap^2)}{a^2p^2 - 2b - 12a + 24}. \quad (1.4.2.16)$$

Подставив (1.4.2.16) в (1.4.2.15), в итоге получим приближенное решение задачи (1.4.2.10), (1.4.2.11) в виде

$$u = \frac{c[12 - ap^2 + (b - 12)x^2 + (ap^2 - b)x^4]}{a^2p^2 - 2b - 12a + 24}. \quad (1.4.2.17)$$

Приближенная формула (1.4.2.17) для любых a, b, c ($6a + b \neq 12$) дает точный результат при $p = 0$. Поэтому следует ожидать, что ее погрешность будет уменьшаться при уменьшении параметра p от единицы до нуля.

На рис. 1.13 сплошными линиями изображены кривые, построенные с помощью приближенной формулы (1.4.2.17) при $a = b = c = 1$ для $p = 0, 0.5, 1$; кружочками — численное решение, полученное для $p = 0.5$ методом Хьюна (см. разд. 5.1.4, 5.1.5), штриховой линией — численное решение, полученное для $p = 1$ методом пристрелки (см. разд. 5.1.6).

Из рис. 1.13 видно, что кривые, соответствующие приближенному и численному решениям при $p = 0.5$, очень близки друг к другу; максимальное расхождение между ними составляет 0.02. При $p = 1$ максимальное расхождение между приближенным и численным решениями значительно больше и равно 0.068. ◀

Падé аппроксимации. Частичная сумма (1.4.2.1) хорошо аппроксимирует решение при достаточно малых t , но обычно плохо описывает решение для промежуточных и больших значений t , так как степенной ряд может быть медленно сходящимся или иметь малый радиус сходимости. Это также связано с тем, что приближенное решение (1.4.2.1) неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$, в то время как точное решение часто бывает ограниченным.

Поэтому вместо степенных разложений вида (1.4.2.1) иногда целесообразно использовать *Падé аппроксимации* $P_M^N(t)$, представляющие собой отношение двух многочленов степени N и M , а именно [7]:

$$P_M^N(t) = \frac{A_0 + A_1t + \dots + A_Nt^N}{1 + B_1t + \dots + B_Mt^M}, \quad \text{где } N + M = k. \quad (1.4.2.18)$$

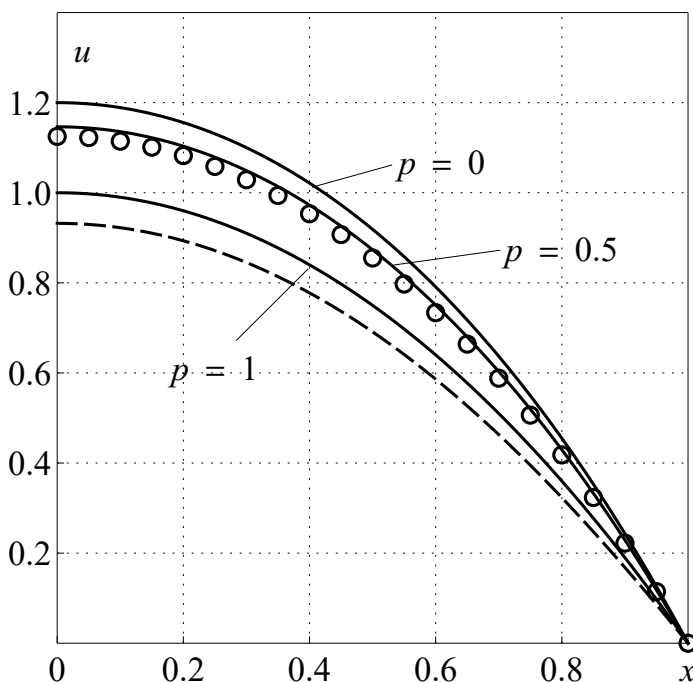


Рис. 1.13. Кривые, построенные с помощью приближенной формулы (1.4.2.17) и численного интегрирования задачи (1.4.2.10), (1.4.2.11) при $a = b = c = 1$ для $p = 0, 0.5, 1$.

Коэффициенты A_1, \dots, A_N и B_1, \dots, B_M выбираются так, чтобы $k+1$ старших членов разложения в ряд Тейлора правой части (1.4.2.18) совпадали с соответствующими членами разложения (1.4.2.1). Другими словами, разложения (1.4.2.1) и (1.4.2.18) должны быть асимптотически эквивалентны при $t \rightarrow 0$.

На практике обычно используется диагональная последовательность при $N = M$. Часто оказывается, что формула (1.4.2.18) довольно хорошо аппроксимирует точное решение во всем диапазоне t (для достаточно больших N).

Примеры использования Паде аппроксимаций для построения приближенных решений задач, описываемых ОДУ без запаздывания и ОДУ с запаздыванием, можно найти соответственно в [7, 448, 604] и [108, 133].

1.4.3. Метод регулярного разложения по малому параметру

Метод регулярного разложения по малому параметру [33, 446, 448, 604] используется для решения нелинейных ОДУ и УрЧП и может применяться также для решения дифференциальных уравнений с пропорциональным запаздыванием.

Для простоты ограничимся описанием метода регулярного разложения по малому параметру ε для нелинейного ОДУ первого порядка с пропорциональ-

ным запаздыванием

$$u'_t = f(t, u, w, \varepsilon), \quad w = u(pt). \quad (1.4.3.1)$$

Пусть функция f представима в виде ряда по степеням ε :

$$f(t, u, w, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(t, u, w). \quad (1.4.3.2)$$

Будем искать решение задачи Коши для уравнения (1.4.3.1) с начальным условием

$$u = a \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (1.4.3.3)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде регулярного разложения по степеням малого параметра:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t). \quad (1.4.3.4)$$

Подставим (1.4.3.2) и (1.4.3.4) в уравнение (1.4.3.1). Затем, учитывая (1.4.3.4), разложим функции f_n в ряды по степеням ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получим систему уравнений для функций $u_n(t)$:

$$u'_0 = f_0(t, u_0, w_0), \quad w_0 = u_0(pt); \quad (1.4.3.5)$$

$$u'_1 = f_1(t, u_0, w_0) + g_1(t, u_0, w_0)u_1 + g_1(t, u_0, w_0)w_1, \quad w_1 = u_1(pt), \quad (1.4.3.6)$$

$$g_1(t, u, w) = \frac{\partial f_0}{\partial u}, \quad g_2(t, u, w) = \frac{\partial f_0}{\partial w}.$$

Здесь выписаны только первые два уравнения. Штрихи обозначают дифференцирование по t . Начальные условия для u_n можно получить из условия (1.4.3.3) с учетом разложения (1.4.3.4):

$$u_0(0) = a, \quad u_1(0) = u_2(0) = \dots = 0.$$

Успех применения данного метода определяется главным образом возможностью построения решения уравнения (1.4.3.5) для главного члена разложения u_0 . Важно отметить, что остальные члены разложения u_n при $n \geq 1$ описываются линейными уравнениями с однородными начальными условиями.

► **Пример 1.23.** Рассмотрим задачу Коши для нелинейного ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t + bu = \varepsilon w^2, \quad w = u(pt); \quad u(0) = a, \quad (1.4.3.7)$$

где ε — малый параметр.

Решение будем искать в виде (1.4.3.4), удерживая три первых члена разложения:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + o(\varepsilon^2), \quad u_n = u_n(t). \quad (1.4.3.8)$$

Подставляя разложение (1.4.3.8) в уравнение (1.4.3.7) и собирая члены с одинаковыми степенями ε , получим

$$u'_0 + bu_0 + \varepsilon(u'_1 + bu_1 - w_0^2) + \varepsilon^2(u'_2 + bu_2 - 2w_0w_1) + o(\varepsilon^2) = 0. \quad (1.4.3.9)$$

Аналогичным образом, подставив (1.4.3.8) в начальное условие (1.4.3.7), имеем

$$u_0(0) - a + \varepsilon u_1(0) + \varepsilon^2 u_2(0) + o(\varepsilon^2) = 0. \quad (1.4.3.10)$$

Приравнявая теперь коэффициенты при одинаковых степенях ε в равенствах (1.4.3.9) и (1.4.3.10) к нулю, приходим к последовательности простых линейных задач для ОДУ без запаздываний:

$$\begin{aligned} u'_0 + bu_0 &= 0, & u_0(0) &= a; \\ u'_1 + bu_1 &= w_0^2, & u_1(0) &= 0; \\ u'_2 + bu_2 &= 2w_0w_1, & u_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Последовательно интегрируя полученные уравнения при $p \neq 1/2$, имеем

$$\begin{aligned} u_0 &= ae^{-bt}, \\ u_1 &= \frac{a^2}{b(2p-1)}(e^{-bt} - e^{-2bpt}), \\ u_2 &= \frac{2a^3}{b^2(p+1)(2p-1)^2} [pe^{-bt} - (p+1)e^{-2pbt} + e^{-p(2p+1)bt}]. \end{aligned}$$

Подставив эти функции в (1.4.3.8), находим искомоерешение в виде

$$\begin{aligned} u &= e^{-bt} + \frac{\varepsilon a^2}{b(2p-1)}(e^{-bt} - e^{-2bpt}) + \\ &+ \frac{2\varepsilon^2 a^3}{b^2(p+1)(2p-1)^2} [pe^{-bt} - (p+1)e^{-2pbt} + e^{-p(2p+1)bt}] + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить асимптотическое решение задачи (1.4.3.7) при $p = 1/2$:

$$u = e^{-bt} + \varepsilon a^2 t e^{-bt} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a^3 t^2 e^{-bt} + o(\varepsilon^2).$$

1.4.4. Метод сращиваемых асимптотических разложений.

Сингулярно возмущенные задачи с пограничным слоем

Характерные особенности использования метода сращиваемых асимптотических разложений проиллюстрируем на примере двухточечной краевой задачи для квазилинейного ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом, которое содержит малый параметр при старшей производной

$$\varepsilon u''_{xx} + f(x)u'_x + g(x, u, w) = 0, \quad w = u(px) \quad (0 < x < 1); \quad (1.4.4.1)$$

$$u(0) = a, \quad u(1) = b, \quad (1.4.4.2)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ и $0 < p < 1$.

В общем случае невозможно представить решение задачи (1.4.4.1)–(1.4.4.2) в замкнутом аналитическом виде даже при отсутствии в уравнении члена с

пропорциональным запаздыванием w . Ниже показано, как при малых ε можно получить приближенное решение этой задачи, используя метод сращиваемых асимптотических разложений [337, 396, 397, 439, 448].

Важно отметить, что при $\varepsilon = 0$ уравнение второго порядка (1.4.4.1) вырождается в ОДУ первого порядка, решая которое нельзя одновременно удовлетворить обоим граничным условиям (1.4.4.2). Подобные задачи с малым параметром и вырождением уравнения при $\varepsilon = 0$ называются *сингулярно возмущенными*.

Далее будем считать, что $f(x) > 0$. В этом случае при $\varepsilon \rightarrow 0$ в малой окрестности точки $x = 0$ образуется пограничный слой с большими градиентами решения. Область пограничного слоя $\Omega_i = \{0 \leq x \leq O(\varepsilon)\}$ в терминах метода сращиваемых асимптотических разложений принято называть *внутренней областью*, а остальная (большая) часть отрезка $0 \leq x \leq 1$ называется *внешней областью* и обозначается $\Omega_e = \{O(\varepsilon) < x \leq 1\}$.

Во внутренней области вводится погранслоная (растянутая) переменная

$$z = x/\varepsilon \quad (1.4.4.3)$$

и асимптотическое решение ищется в виде

$$u = u_i(z) + O(\varepsilon), \quad z = O(1). \quad (1.4.4.4)$$

Подставим (1.4.4.4) в (1.4.4.1) и учтем (1.4.4.3). Поскольку $f(x) = f(\varepsilon z) \simeq f(0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $z = O(1)$, в результате получим

$$\varepsilon^{-1}[(u_i)''_{zz} + f(0)(u_i)'_z] + O(1) = 0.$$

Приравнявая нулю функциональный множитель при ε^{-1} , приходим к уравнению для главного члена асимптотического разложения в области пограничного слоя

$$(u_i)''_{zz} + f(0)(u_i)'_z = 0.$$

Интегрируя это простое линейное ОДУ и удовлетворяя первому граничному условию (1.4.4.2), имеем

$$u_i = c(1 - e^{-f_0 z}) + a, \quad z = x/\varepsilon, \quad 0 \leq z \leq O(1), \quad (1.4.4.5)$$

где $f_0 = f(0)$, а c — постоянная, определяемая в ходе последующего анализа.

Во *внешней области* $\Omega_e = \{O(\varepsilon) < x \leq 1\}$ решение ищется в виде $u = u_e(x) + O(\varepsilon)$. Главный член асимптотического решения задачи (1.4.4.1) — (1.4.4.2) в области Ω_e определяется из укороченного уравнения (пренебрегаем членом со второй производной) и второго граничного условия:

$$f(x)(u_e)'_x + g(x, u_e, w_e) = 0; \quad u_e(1) = b. \quad (1.4.4.6)$$

Пусть функция

$$u_e = u_e(x) \quad (1.4.4.7)$$

является решением задачи (1.4.4.6).

Внутреннее и внешнее решения (1.4.4.5) и (1.4.4.7) должны быть согласованы, т. е. удовлетворять условию срацивания

$$u_i(z \rightarrow \infty) = u_e(x \rightarrow 0), \quad (1.4.4.8)$$

которое позволяет определить константу c , входящую в равенство (1.4.4.5):

$$c = u_e(0) - a. \quad (1.4.4.9)$$

Составное асимптотическое решение задачи (1.4.4.1)–(1.4.4.2), равномерно пригодное в области $0 \leq x \leq 1$, определяется формулой

$$u = [a - u_e(0)]e^{-f_0 z} + u_e(x) = [a - u_e(0)]e^{-(f_0/\varepsilon)x} + u_e(x), \quad (1.4.4.10)$$

где $f_0 = f(0)$.

Дифференцируя формулу (1.4.4.5) дважды по x , находим производные в области пограничного слоя:

$$u'_x = \frac{cf_0}{\varepsilon} e^{-(f_0/\varepsilon)x}, \quad u''_{xx} = -\frac{cf_0^2}{\varepsilon^2} e^{-(f_0/\varepsilon)x}. \quad (1.4.4.11)$$

Видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ обе производные в области пограничного слоя $0 \leq x \leq O(\varepsilon)$ являются большими.

► **Пример 1.24.** Рассмотрим нелинейную краевую задачу для ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом и малым параметром ε при старшей производной

$$\varepsilon u''_{xx} + u'_x + ku - sw^2 = 0, \quad w = u(\tfrac{1}{2}x) \quad (0 < x < 1); \quad (1.4.4.12)$$

$$u(0) = a, \quad u(1) = b. \quad (1.4.4.13)$$

Задача (1.4.4.12)–(1.4.4.13) является частным случаем задачи (1.4.4.1)–(1.4.4.2) при $f(x) = 1$, $g(x, u, w) = ku - sw^2$, $p = 1/2$.

Решение в области пограничного слоя определяется по формуле (1.4.4.5) при $f_0 = 1$, т. е.

$$u_i = c(1 - e^{-z}) + a, \quad z = x/\varepsilon, \quad 0 \leq z \leq O(1), \quad (1.4.4.14)$$

где постоянная c будет определена далее.

Решение во внешней области описывается уравнением и граничным условием

$$(u_e)'_x + ku_e - sw_e^2 = 0, \quad w_e = u_e(\tfrac{1}{2}x); \quad u_e(1) = b. \quad (1.4.4.15)$$

Точное решение задачи (1.4.4.15) имеет вид

$$u_e = A \exp[(As - k)x], \quad (1.4.4.16)$$

где A — действительный корень трансцендентного уравнения

$$b = A \exp(As - k), \quad (1.4.4.17)$$

который при $s \neq 0$ можно выразить в терминах функции Ламберта $A = s^{-1}W(bse^k)$.

Константу c , входящую в асимптотическое решение (1.4.4.14), находим с помощью соотношения (1.4.4.9):

$$c = A - a. \quad (1.4.4.18)$$

Используя формулу (1.4.4.10) и решения (1.4.4.14) и (1.4.4.16), получим составное асимптотическое решение задачи (1.4.4.12)–(1.4.4.13):

$$u = (a - A) \exp(-\varepsilon^{-1}x) + A \exp[(As - k)x]. \quad (1.4.4.19)$$

На рис. 1.14 сплошными линиями изображены приближенные решения задачи (1.4.4.12) – (1.4.4.13), полученные с помощью составной формулы (1.4.4.19) при $\varepsilon = 0.01$ для $a = 0$, $b = 1$, $s = 1$ и трех значений параметра $k = 1, 2, 3$. Штриховые линии соответствуют асимптотическим решениям в пограничном слое, полученным при тех же значениях определяющих параметров по формулам (1.4.4.14), (1.4.4.18), а точки – решениям (1.4.4.16) во внешней области.

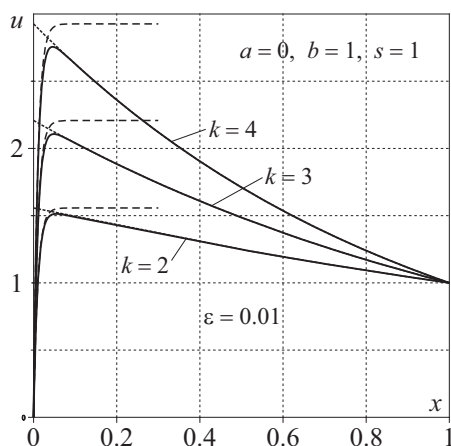


Рис. 1.14. Приближенное решение задачи (1.4.4.12)–(1.4.4.13), полученное с помощью составной формулы (1.4.4.19) при $\varepsilon = 0.01$ для $a = 0$, $b = 1$, $s = 1$ и $k = 2, 3, 4$ (сплошные линии). Штриховые линии соответствуют асимптотическим решениям в пограничном слое, полученным по формулам (1.4.4.14), (1.4.4.18). Точками показаны решения во внешней области, полученные с помощью формулы (1.4.4.16).



Видно, что в полученные решения резко возрастают в узкой области вблизи левой границы, а затем постепенно медленно начинают убывать. Важно отметить, что большие градиенты решений сильно ограничивает область применимости стандартных численных методов интегрирования подобных задач с пограничным слоем (см., например, вводную часть статьи [439] и ссылки в ней).

1.4.5. Метод последовательных приближений и другие методы итерационного типа

Метод последовательных приближений. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u = F[u], \quad (1.4.5.1)$$

где $F[u]$ — нелинейный оператор.

Для приближенного решения уравнения (1.4.5.1) используется рекуррентная формула

$$u_0 = \varphi, \quad u_n = F[u_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4.5.2)$$

где начальную функцию φ можно выбирать из различных соображений. Если искомая функция зависит только от t , обычно полагают $\varphi = F[u]|_{t=0}$. При выполнении некоторых ограничений на оператор F последовательность функций u_n сходится к решению уравнения (1.4.5.2) при $n \rightarrow \infty$.

► **Пример 1.25.** Рассмотрим задачу Коши для нелинейного ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$u'_t = f(t, u, w), \quad w = u(pt); \quad u(0) = a, \quad (1.4.5.3)$$

где $0 < p < 1$.

Интегрируя уравнение от 0 до t и учитывая начальное условие, получим интегральное уравнение

$$u(t) = a + \int_0^t f(t, u(t), u(pt)) dt. \quad (1.4.5.4)$$

Для приближенного решения этого уравнения, которое является частным случаем уравнения (1.4.5.1), используется рекуррентная формула

$$u_0 = a, \quad u_n(t) = a + \int_0^t f(t, u_{n-1}(t), u_{n-1}(pt)) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Метод, основанный на разложении нелинейного оператора. Опишем предложенный в [202] (см. также [141, 414]) итерационный метод, основанный на разложении нелинейного оператора, который можно использовать для приближенного решения различных линейных или нелинейных математических уравнений, включая ОДУ с запаздыванием.

Решение уравнения (1.4.5.1) ищем в виде ряда

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n. \quad (1.4.5.5)$$

Считая, что этот ряд сходится абсолютно, запишем тождество

$$F\left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right] = F[u_0] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F\left[\sum_{j=0}^n u_j\right] - F\left[\sum_{j=0}^{n-1} u_j\right] \right\}. \quad (1.4.5.6)$$

Подставив (1.4.5.5) и (1.4.5.6) в уравнение (1.4.5.1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = F[u_0] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F \left[\sum_{j=0}^n u_j \right] - F \left[\sum_{j=0}^{n-1} u_j \right] \right\}. \quad (1.4.5.7)$$

Этому соотношению можно удовлетворить, если положить [202]:

$$\begin{aligned} u_0 &= \varphi, \\ u_1 &= F[u_0], \\ u_{n+1} &= F[u_0 + \dots + u_n] - F[u_0 + \dots + u_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.4.5.8)$$

Начальную функцию φ , как и в методе последовательных приближений, можно выбирать из различных соображений. Если искомая функция зависит только от t , будем полагать $\varphi = F[u]|_{t=0}$.

Ограничив $1 \leq n \leq m$, получим конечное число рекуррентных уравнений (1.4.5.8), которые дают возможность найти приближенное решение нелинейного уравнения (1.4.5.1). В [141, 202, 414] найдены условия, при выполнении которых бесконечный ряд (1.4.5.5), соответствующий $m = \infty$, сходится.

► **Пример 1.26.** Рассмотрим задачу Коши для нелинейного ОДУ с двумя пропорциональными запаздываниями

$$u'_t = f(t, u, w_1, w_2), \quad w_1 = u(pt), \quad w_2 = u(qt), \quad 0 < p, q < 1; \quad u(0) = a. \quad (1.4.5.9)$$

Интегрируя по t (от нуля до t) обе части (1.4.5.9), приходим к интегральному уравнению

$$u(t) = a + \int_0^t f(x, u(t), u(pt), u(qt)) dt, \quad (1.4.5.10)$$

которое является частным случаем уравнения (1.4.5.1) при

$$F[u] = a + \int_0^t f(t, u(t), u(pt), u(qt)) dt.$$

В данном случае $F[u]|_{t=0} = a$. Поэтому в качестве начальной функции в (1.4.5.8) берем $\varphi = a$. В [142, 414] указаны достаточные условия, при выполнении которых описанный выше итерационный метод дает решение уравнения (1.4.5.10) в виде сходящегося ряда (1.4.5.5). ◀

► **Пример 1.27.** В [414] показано, что применение метода итераций к задаче Коши для линейного уравнения с пропорциональными запаздываниями (1.4.2.2) приводит к решению (1.4.2.4), которое другим способом было получено в разд. 1.4.2. ◀

Метод разложения Адомиана. Для наглядности основные идеи метода разложения Адомиана (см., например, [102, 103]) изложим на примере задачи Коши для нелинейного ОДУ первого порядка типа с пропорциональным запаздыванием (1.4.5.3). Интегрируя это уравнение от 0 до t и учитывая начальное условие, приходим к интегральному уравнению (1.4.5.4).

Решение интегрального уравнения (1.4.5.4) ищем в виде ряда

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t), \quad (1.4.5.11)$$

где $0 \leq \varepsilon \leq 1$ — вспомогательный параметр. Подставим (1.4.5.11) в правую часть уравнения (1.4.5.3), а затем разложим в ряд Маклорена по параметру ε . В результате получим

$$f(t, u(t), u(pt)) = f\left(t, \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t), \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(pt)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n, \quad (1.4.5.12)$$

где A_n — функции, называемые *многочленами Адомиана*, которые определяются по формулам

$$A_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} f\left(t, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t), \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(pt)\right) \right\}_{\varepsilon=0}. \quad (1.4.5.13)$$

Подставив (1.4.5.11) и (1.4.5.12) в уравнение (1.4.5.4), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t) = a + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n dt. \quad (1.4.5.14)$$

Считая ряды (1.4.5.11) и (1.4.5.12) сходящимися при $0 \leq \varepsilon \leq 1$, положим $\varepsilon = 1$ в (1.4.5.14). В результате получим

$$u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots = a + \int_0^t A_0 dt + \int_0^t A_1 dt + \int_0^t A_2 dt + \dots$$

Приравнявая в этом соотношении слагаемые слева и справа в порядке их расположения, приходим к рекуррентным соотношениям Адомиана:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= a; \\ u_n(t) &= \int_0^t A_{n-1} dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.4.5.15)$$

Поскольку в общем случае каждый многочлен A_n зависит только от времени t и компонент u_j , w_j , $j \leq n$, т. е. $A_0 = A_0(t, u_0, w_0)$, $A_1 = A_1(t, u_0, w_0, u_1, w_1)$ и т. д., то итерационные формулы (1.4.5.15) позволяют последовательно определять функции u_n .

Подставив в (1.4.5.11) полученные с помощью рекуррентных соотношений (1.4.5.15) функции u_n , а затем полагая $\varepsilon = 1$, находим решение исходной задачи.

Замечание 1.20. Если правая часть уравнения (1.4.5.3) является линейной относительно искомой функции, т. е. $f(t, u, w) = g(t)u + h(t)w$, то многочлены Адомиана определяются простыми формулами $A_n = g(t)u_n(t) + h(t)u_n(pt)$.

► **Пример 1.28.** Рассмотрим задачу Коши для линейного ОДУ первого порядка типа пантографа с переменными коэффициентами

$$u'_t = g(t)u + h(t)w, \quad w = u(pt); \quad u(0) = a. \quad (1.4.5.16)$$

Решение этой задачи ищем методом разложения Адомиана в виде ряда

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t), \quad (1.4.5.17)$$

члены которого определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$u_0(t) = a, \quad u_n(t) = \int_0^a [g(\xi)u_{n-1}(\xi) + h(\xi)u_{n-1}(p\xi)] d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4.5.18)$$

Для частного случая [220]:

$$a = 1, \quad g(t) = \frac{1}{2}, \quad h(t) = \frac{1}{2}e^{t/2}, \quad (1.4.5.19)$$

задача (1.4.5.16) допускает точное решение $u(t) = e^t$.

В [224] для задачи Коши (1.4.5.16) с функциями (1.4.5.19) было получено 13 членов ряда по формулам (1.4.5.18). Максимальная погрешность соответствующего приближенного решения, которое определялось суммой этих слагаемых, в диапазоне $0 \leq t \leq 1$ была меньше $5 \cdot 10^{-15}$. ◀

Перейдем теперь к описанию метода разложения Адомиана в общем случае. Рассмотрим дифференциальное уравнение с пропорциональным запаздыванием, которое запишем в краткой форме

$$L[u] = N[u, w], \quad (1.4.5.20)$$

где $u = u(t)$ — искомая функция, $w = u(pt)$, $L[u]$ — линейный дифференциальный оператор, который содержит старшую производную, а $N[u, w]$ — нелинейный (в частном случае линейный) дифференциальный оператор или функция двух аргументов u и w . Коэффициенты операторов могут зависеть от независимой переменной t . Для завершения формулировки задачи уравнение (1.4.5.20) должно быть дополнено соответствующими начальными или граничными условиями.

На первом этапе ищется решение вспомогательной более простой задачи для укороченного линейного уравнения (полученного из (1.4.5.20) отбрасыванием правой части):

$$L[u_0] = 0, \quad (1.4.5.21)$$

с теми же самыми начальными или граничными условиями. Затем нелинейный член $N[u, w]$ представляется в виде ряда

$$N[u, w] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad A_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} N \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t), \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(pt) \right] \right\}_{\varepsilon=0}.$$

Решение ищется в виде ряда (1.4.5.17), где u_0 является решением сформулированной выше задачи для уравнения (1.4.5.21), а остальные функции $u_n(t)$ определяются путем решения линейных ОДУ

$$L[u_n] = A_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4.5.22)$$

с однородными начальными или граничными условиями. Важно отметить, что уравнения (1.4.5.22) не содержат членов с пропорциональным запаздыванием.

Подробности и многочисленные примеры использования метода разложения Адомиана приведены, например, в [101–103, 207, 224, 468].

Метод гомотопического анализа. Метод гомотопического анализа (см., например, [345, 346, 354]) представляет собой полуаналитическую процедуру решения нелинейных ОДУ и УрЧП, которую можно применять также для решения дифференциальных уравнений с пропорциональным запаздыванием. Ниже кратко описаны характерные особенности этого метода.

Рассмотрим опять нелинейное ОДУ с пропорциональным запаздыванием (1.4.5.20) с некоторыми начальными или граничными условиями. Ключевая идея метода гомотопий заключается в переходе от уравнения (1.4.5.20) к вспомогательному семейству дифференциальных уравнений (гомотопий):

$$(1 - \varepsilon)\{L[u] - L[u_0]\} + \varepsilon h\{L[u] - N[u, w]\} = 0, \quad (1.4.5.23)$$

которое зависит от параметра разложения ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) и *параметра управления сходимостью* h . При увеличении ε от 0 до 1 решение уравнения (1.4.5.23) меняется от $u_0 = u_0(t)$ до решения уравнения (1.4.5.20).

Важно отметить, что если функция $u = u_0$ является решением исходного уравнения (1.4.5.20), то эта функция также будет решением семейства дифференциальных уравнений (1.4.5.23) для любых значений параметров ε и h .

Приближенное решение уравнения (1.4.5.23) ищем в виде конечной суммы

$$u_m(t) = \sum_{n=0}^m \varepsilon^n u_n(t), \quad (1.4.5.24)$$

где u_n — функции, подлежащие определению в ходе дальнейшего анализа.

Подставим выражение (1.4.5.24) в (1.4.5.23) и соберем вместе члены, пропорциональные различным степеням ε . Приравнявая затем нулю полученные таким образом функциональные множители при ε^n , приходим к системе дифференциальных уравнений для u_n . Последовательно решая эту систему, находим члены u_n суммы (1.4.5.24). Полагая далее $\varepsilon = 1$ в (1.4.5.24) и считая m достаточно большим, получим приближенное аналитическое решение исходного уравнения (1.4.5.20). Пригодность или непригодность этого решения зависит от выбора начального приближения $u_0 = u_0(t)$ и значения параметра управления сходимостью h .

Возможный способ выбора h заключается в следующем. Берется значение $h = h_{\min}$, для которого невязка $\|L[u_m] - N[u_m, w_m]\|$ достигает минимума (выбор нормы $\|\dots\|$ определяется исследователем).

Подробности и многочисленные примеры использования метода гомотопического анализа приведены в [346, 347] (недостатки этого метода обсуждаются в [354]).

Другие методы, основанные на возмущенно-итерационных алгоритмах.

Опишем достаточно общую схему итерационных методов, основанных на введении вспомогательного малого параметра. Для конкретности рассмотрим нелинейное ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$u''_{tt} = f(t, u, u'_t, w, w'_t), \quad w = u(pt). \quad (1.4.5.25)$$

Вместо уравнения (1.4.5.25) введем вспомогательное более общее уравнение с параметром ε :

$$u''_{tt} = F(t, u, u'_t, w, w'_t, \varepsilon), \quad w = u(pt), \quad (1.4.5.26)$$

правая часть которого удовлетворяет условию согласования

$$F(t, u, u'_t, w, w'_t, 1) \equiv f(t, u, u'_t, w, w'_t). \quad (1.4.5.27)$$

Начальные или граничные условия для уравнения (1.4.5.26) берутся точно такие же, как и для уравнения (1.4.5.25).

По построению решение вспомогательной задачи для уравнения (1.4.5.26) при $\varepsilon = 1$ является решением исходной задачи для уравнения (1.4.5.25).

Приближенное решение задачи для уравнения (1.4.5.25) строится следующим образом. Считая ε в (1.4.5.26) малым параметром, ищется решение вспомогательной задачи в виде регулярного разложения по степеням ε , т. е. в виде $u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t)$. Взяв сумму нескольких первых членов разложения, а затем положив $\varepsilon = 1$, получают приближенное решение исходной задачи для уравнения (1.4.5.25). Точность и применимость описанного итерационного метода зависит от удачного выбора вспомогательной функции F в (1.4.5.26).

Для уравнений с пропорциональным запаздыванием

$$u''_{tt} = f(t, u, u'_t, w), \quad w = u(pt), \quad (1.4.5.28)$$

в качестве вспомогательного уравнения с параметром ε целесообразно выбирать уравнение

$$u''_{tt} = f(t, u, u'_t, \varepsilon w), \quad w = u(pt), \quad (1.4.5.29)$$

которое при $\varepsilon = 1$ совпадает с уравнением (1.4.5.28). Разложение в ряд по степеням ε решения уравнения (1.4.5.29) приводит к более простым ОДУ без запаздывания для всех слагаемых $u_n(t)$.

Примеры использования описанного метода для построения приближенных решений уравнений вида (1.4.5.28) приведены в [118].

Замечание 1.21. Приближенные аналитические методы итерационного типа при большом числе итераций нередко относят к численно-аналитическим или численным методам.

1.4.6. Проекционные методы типа Галеркина. Метод коллокаций

Предварительные замечания. Методы типа Галеркина широко применяются для построения приближенных решений линейных и нелинейных краевых задач для ОДУ и УрЧП без запаздывания второго и более высоких порядков (см.,

например, [34, 42, 48, 236, 332, 434, 448]. Эти методы можно также успешно применять для решения более сложных задач, описываемых дифференциальными уравнениями с пропорциональным аргументом.

В данном разделе дано краткое описание методов типа Галеркина для решения краевых задач, которые описываются ОДУ с пропорциональным аргументом. Для наглядности независимую переменную будем обозначать x (вместо t) и ограничимся рассмотрением уравнений второго порядка, в которые помимо искомой функции $u = u(x)$ входит также функция $w = u(px)$, где $0 < p \leq 1$.

Представление приближенного решения в виде линейной комбинации базисных функций. Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$\mathfrak{F}[u] - f(x) = 0 \quad (1.4.6.1)$$

с линейными однородными граничными условиями* в точках $x = x_1$ и $x = x_2$ (возможен любой из двух вариантов: $x_1 = 0, x_2 = L$ или $x_1 = -L, x_2 = L$). Здесь $\mathfrak{F}[u] \equiv \mathfrak{F}(x, u, u_x, u_{xx}, w, w_x)$ — линейный или нелинейный дифференциальный оператор второго порядка; $u = u(x)$ — искомая функция, $w = u(px)$, а $f = f(x)$ — заданная функция.

Выберем последовательность линейно независимых функций (называемых *базисными функциями*)

$$\varphi = \varphi_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (1.4.6.2)$$

удовлетворяющих тем же граничным условиям, что и функция $u = u(x)$. Во всех рассматриваемых ниже методах приближенной решение уравнения (1.4.6.1) ищется в виде линейной комбинации

$$u_N = \sum_{n=1}^N A_n \varphi_n(x), \quad (1.4.6.3)$$

где коэффициенты A_n определяются в ходе решения задачи.

Конечная сумма (1.4.6.3) называется *аппроксимирующей функцией*. Величина ошибки (невязка) R_N находится после подстановки конечной суммы в левую часть уравнения (1.4.6.1):

$$R_N = \mathfrak{F}[u_N] - f(x). \quad (1.4.6.4)$$

Если невязка R_N тождественно равна нулю, то функция u_N является точным решением уравнения (1.4.6.1). В случае общего положения $R_N \neq 0$.

Замечание 1.22. В аппроксимирующей функции (1.4.6.3) в качестве $\varphi_n(x)$ чаще всего выбирают последовательности полиномов или тригонометрических функций.

*Для ОДУ второго порядка неоднородные граничные условия можно привести к однородным заменой $z = b_2 x^2 + b_1 x + b_0 + y$, где постоянные b_2, b_1, b_0 выбираются с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Замечание 1.23. Вместо аппроксимирующей функции (1.4.6.3), линейной относительно неизвестных коэффициентов A_n , приближенное решение можно искать в более общем виде:

$$u_N = \Phi(x, A_1, \dots, A_N),$$

где $\Phi(x, A_1, \dots, A_N)$ — заданная функция (выбирается из теоретических соображений с учетом характерных особенностей рассматриваемой задачи, или исходя из экспериментальных данных), удовлетворяющая граничным условиям при любых значениях коэффициентов A_1, \dots, A_N .

Общая схема применения метода Галеркина. Чтобы найти коэффициенты A_n в (1.4.6.3), рассмотрим другую последовательность линейных независимых функций:

$$\psi = \psi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (1.4.6.5)$$

Умножим обе части равенства (1.4.6.4) на ψ_k и проинтегрируем по области $V = \{x_1 \leq x \leq x_2\}$, в которой ищется решение уравнения (1.4.6.1). Далее приравняем полученный интеграл к нулю (для точных решений такие интегралы равны нулю). В результате имеем следующую систему алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов A_n :

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi_k R_N dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (1.4.6.6)$$

где невязка R_N определена в (1.4.6.4).

Соотношение (1.4.6.6) означает, что аппроксимирующая функция (1.4.6.3) удовлетворяет уравнению (1.4.6.1) «в среднем» (интегрально) с весовыми функциями ψ_k . Вводя скалярное произведение $\langle g, h \rangle = \int_{x_1}^{x_2} gh dx$ произвольных функций g и h , можно трактовать уравнения (1.4.6.6) как условия ортогональности невязки R_N ко всем функциям ψ_k .

Метод Галеркина можно применять не только к краевым задачам, но также к задачам на собственные значения (в этом случае полагают $f = \lambda u$ и ищут собственные функции u_n вместе с собственными значениями λ_n).

Ниже описываются некоторые специальные методы, которые являются частными случаями метода Галеркина.

Метод Бубнова — Галеркина. В методе Галеркина последовательности функций (1.4.6.2) и (1.4.6.5) можно выбирать произвольно. В случае одинаковых функций

$$\varphi_k(x) = \psi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (1.4.6.7)$$

данный метод называется *методом Бубнова — Галеркина*.

Метод моментов. Метод моментов — это метод Галеркина с весовыми функциями (1.4.6.5), являющимися степенями x :

$$\psi_k = x^k. \quad (1.4.6.8)$$

Метод наименьших квадратов. Иногда весовые функции ψ_k выражаются через φ_k с помощью соотношений

$$\psi_k = \mathfrak{F}[\varphi_k] \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где \mathfrak{F} — дифференциальный оператор уравнения (1.4.6.1). Данная версия метода Галеркина называется *методом наименьших квадратов*.

Метод коллокаций. В *методе коллокаций* выбирают последовательность точек x_k , $k = 1, \dots, N$, и накладывают условие, чтобы невязка (1.4.6.4) в этих точках равнялась нулю:

$$R_N = 0 \quad \text{при} \quad x = x_k \quad (k = 1, \dots, N). \quad (1.4.6.9)$$

При решении конкретной задачи точки x_k , в которых невязка R_N обращается в нуль, считаются наиболее существенными. Число точек коллокаций N берется равным числу слагаемых в сумме (1.4.6.3). Это позволяет получить полную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_n (для линейных краевых задач эта алгебраическая система линейна).

Для базисных функций полиномиального вида (1.4.6.2) при выборе точек коллокаций x_k в (1.4.6.9) рекомендуется использовать узлы Чебышева, которые на интервале $x \in (-1, 1)$ определяются по формулам

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right), \quad k = 1, \dots, N,$$

или другие подходящие узлы, которые являются корнями некоторых ортогональных полиномов с весовой функцией. Если все узлы расположены на одинаковом расстоянии друг от друга, то метод обычно работает хуже и может приводить даже к расходящимся решениям при $N \rightarrow \infty$.

Отметим, что метод коллокаций представляет собой специальный частный случай метода Галеркина, в котором последовательность весовых функций (1.4.6.5) состоит из дельта-функций Дирака:

$$\psi_k = \delta(x - x_k).$$

В методе коллокаций не нужно вычислять интегралы, что существенно упрощает решение нелинейных задач (хотя обычно этот метод приводит к менее точным результатам, чем другие модификации метода Галеркина).

► **Пример 1.29.** Рассмотрим краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и пропорциональным запаздыванием

$$u''_{xx} + g(x)w - f(x) = 0, \quad w = u(px), \quad (1.4.6.10)$$

с однородными граничными условиями первого рода

$$u(-1) = u(1) = 0. \quad (1.4.6.11)$$

Будем считать коэффициенты уравнения (1.4.6.10) гладкими четными функциями, т. е. $f(x) = f(-x)$ и $g(x) = g(-x)$. Для приближенного решения задачи (1.4.6.10) — (1.4.6.11) будем применять метод коллокаций.

1°. В качестве базисных функций возьмем полиномы

$$u_n(x) = x^{2n-2}(1-x^2), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

которые удовлетворяют граничным условиям (1.4.6.11): $u_n(\pm 1) = 0$.

Рассмотрим три точки коллокаций

$$x_1 = -\sigma, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sigma \quad (0 < \sigma < 1) \quad (1.4.6.12)$$

и ограничимся двумя базисными функциями ($N=2$). Тогда аппроксимирующая функция имеет вид

$$\begin{aligned} u &= A_1(1-x^2) + A_2x^2(1-x^2), \\ w &= A_1(1-p^2x^2) + A_2p^2x^2(1-p^2x^2), \end{aligned} \quad (1.4.6.13)$$

где A_1 и A_2 — искомые коэффициенты. Подстановка выражений (1.4.6.13) в левую часть уравнения (1.4.6.10) приводит к невязке

$$R(x) = A_1[-2 + (1-p^2x^2)g(x)] + A_2[2 - 12x^2 + p^2x^2(1-p^2x^2)g(x)] - f(x).$$

В точках коллокаций (1.4.6.12) невязка $R(x)$ должна обращаться в нуль. С учетом свойств $f(\sigma) = f(-\sigma)$ и $g(\sigma) = g(-\sigma)$ получим два линейных алгебраических уравнения для коэффициентов A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} A_1[-2 + g(0)] + 2A_2 - f(0) &= 0, \\ A_1[-2 + (1-p^2\sigma^2)g(\sigma)] + A_2[2 - 12\sigma^2 + p^2\sigma^2(1-p^2\sigma^2)g(\sigma)] - f(\sigma) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.6.14)$$

2°. Для конкретности в уравнении (1.4.6.10) выберем функции

$$f(x) = -1, \quad g(x) = 1 + x^2. \quad (1.4.6.15)$$

Решив соответствующую систему алгебраических уравнений (1.4.6.14), найдем коэффициенты:

$$A_1 = \frac{12 - p^2(1 + \sigma^2)(1 - p^2\sigma^2)}{10 + p^2(1 + \sigma^2)(1 + p^2\sigma^2)}, \quad A_2 = \frac{1 - p^2(1 + \sigma^2)}{10 + p^2(1 + \sigma^2)(1 + p^2\sigma^2)}. \quad (1.4.6.16)$$

На рис. 1.15 штриховыми линиями 1 и 2 изображены приближенные решения задачи (1.4.6.10), (1.4.6.11), (1.4.6.15) при $p = 1$, полученные методом коллокаций с использованием формул (1.4.6.13), (1.4.6.16) для $\sigma = 1/2$ (точки коллокаций расположены на одинаковом расстоянии друг от друга) и $\sigma = \sqrt{2}/2$ (узлы Чебышева). Сплошная линия соответствует численному решению этой задачи при $p = 1$, которое получено методом пристрелки (см. разд. 5.1.6). Видно, что обоих случаях имеет место хорошее совпадение приближенных и численного решений (использование узлов Чебышева приводит к более точному результату). При $p = 1/2$ приближенные решения, полученные методом коллокаций по формулам (1.4.6.13), (1.4.6.16) для $\sigma = 1/2$ и $\sigma = \sqrt{2}/2$, практически совпадают и обозначены на рис. 1.15 штриховой линией 3. Кружочки соответствуют численному решению при $p = 1/2$, полученному с помощью комбинации метода пристрелки и метода Хьюна (см. разд. 5.1.4, 5.1.5). Видно очень хорошее совпадение приближенных и численного решений (максимальное расхождение между приближенными и численными решениями при

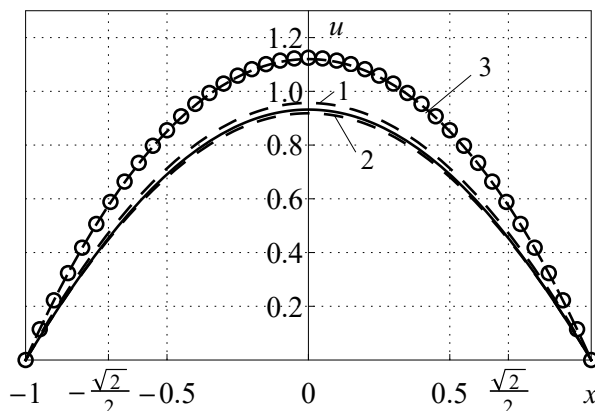


Рис. 1.15. Сравнение приближенных аналитических решений (1.4.6.13), (1.4.6.16) задачи (1.4.6.10), (1.4.6.11), (1.4.6.15), полученных методом коллокаций, с численными решениями.

$p = 1/2$ и $\sigma = 1/2$ равняется 0.009, а при $p = 1/2$ и $\sigma = \sqrt{2}/2$ составляет 0.006). ◀

Метод минимизации среднеквадратичной ошибки. Иногда для нахождения коэффициентов A_n аппроксимирующей функции (1.4.6.3) используют метод, основанный на минимизации функционала

$$\Phi = \int_0^L R_N^2 dx \rightarrow \min. \quad (1.4.6.17)$$

Для заданных функций φ_n в сумме (1.4.6.3) интеграл Φ является функцией коэффициентов A_n . Необходимые условия минимума функционала (1.4.6.17) имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_n} = 0 \quad (n = 1, \dots, N). \quad (1.4.6.18)$$

Соотношения (1.4.6.18) представляют собой краткую запись системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений, позволяющую определить искомые коэффициенты A_n .

Замечание 1.24. Приближенные аналитические методы типа Галеркина (в первую очередь, метод коллокаций) при большом числе членов в аппроксимирующей функции (1.4.6.3) нередко относят к численно-аналитическим или численным методам.

Замечание 1.25. Численные методы интегрирования ОДУ с запаздыванием рассматриваются в разд. 5.1.

2. Линейные уравнения в частных производных с запаздыванием

2.1. Свойства и качественные особенности линейных уравнений и задач с постоянным запаздыванием

2.1.1. Свойства решений линейных уравнений с запаздыванием

Примеры линейных уравнений в частных производных с запаздыванием. В литературе и приложениях встречаются линейные уравнения в частных производных второго порядка параболического или гиперболического типа с постоянным запаздыванием, которые в случае n пространственных переменных имеют вид

$$u_t - L_1[u] - L_2[w] = \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (2.1.1.1)$$

$$u_{tt} - L_1[u] - L_2[w] = \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (2.1.1.2)$$

где

$$\begin{aligned} L_1[u] &\equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c_1(\mathbf{x}, t)u, \\ L_2[w] &\equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c_2(\mathbf{x}, t)w, \\ w &= u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \tau > 0. \end{aligned} \quad (2.1.1.3)$$

Уравнения (2.1.1.1) и (2.1.1.2) называются однородными, если $\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$.

В случае переменного запаздывания $\tau = \tau(t)$ в линейных уравнениях с частными производными (2.1.1.1)–(2.1.1.3) следует положить $w = u(\mathbf{x}, t - \tau(t))$, в частности, для уравнений с пропорциональным запаздыванием имеем $w = u(\mathbf{x}, pt)$, где $0 < p < 1$.

Свойства линейных однородных уравнений в частных производных с постоянным запаздыванием. Ниже для краткости линейное однородное УрЧП с постоянным запаздыванием будем записывать в виде

$$\mathcal{L}[u] = 0. \quad (2.1.1.4)$$

Для уравнений параболического и гиперболического типов линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}[u]$ в (2.1.1.4) определяется левой частью уравнений (2.1.1.1) и (2.1.1.2) соответственно. В общем случае уравнение (2.1.1.4) может

быть произвольным линейным однородным УрЧП любого порядка по переменным t, x_1, \dots, x_n с достаточно гладкими коэффициентами и постоянным запаздыванием по времени.

Линейный оператор \mathcal{L} обладает свойствами

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u_1 + u_2] &= \mathcal{L}[u_1] + \mathcal{L}[u_2], \\ \mathcal{L}[Au] &= A\mathcal{L}[u], \quad A = \text{const}.\end{aligned}$$

У произвольного линейного однородного уравнения (2.1.1.4) имеется тривиальное решение $u \equiv 0$.

Функция u называется *классическим решением* уравнения (2.1.1.4), если при подстановке в него u уравнение обращается в тождество и если все частные производные u в уравнении (2.1.1.4) непрерывны; понятие классического решения непосредственно связано с областью определения независимых переменных. В дальнейшем, для краткости, обычно мы будем писать «решение» вместо «классическое решение».

Применение частных решений для построения других решений. Ниже приводятся основные свойства частных решений линейных однородных УрЧП с запаздыванием, которые аналогичны свойствам более простых линейных однородных УрЧП без запаздывания [436].

1°. Пусть $u_1 = u_1(\mathbf{x}, t)$, $u_2 = u_2(\mathbf{x}, t)$, \dots , $u_k = u_k(\mathbf{x}, t)$ — любые частные решения однородного уравнения (2.1.1.4). Тогда линейная комбинация этих решений

$$u = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \dots + A_k u_k, \quad (2.1.1.5)$$

где A_1, A_2, \dots, A_k — произвольные постоянные, также является решением уравнения (2.1.1.4). В физике это свойство называется *принципом линейной суперпозиции*.

Предположим, что $\{u_k\}$ — бесконечная последовательность решений уравнения (2.1.1.4). Тогда вне зависимости от сходимости ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *формальным решением* уравнения (2.1.1.4). Если все решения u_k являются классическими, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и его производные (которые содержит рассматриваемое уравнение) равномерно сходятся, то этот ряд определяет классическое решение уравнения (2.1.1.4).

2°. Пусть коэффициенты линейного дифференциального оператора \mathcal{L} не зависят от времени t . Если уравнение (2.1.1.4) имеет частное решение $\tilde{u} = \tilde{u}(\mathbf{x}, t)$, то функция $\tilde{u}(\mathbf{x}, t + a)$, где a — произвольная постоянная, также является решением уравнения.

Если коэффициенты оператора \mathcal{L} не зависят только от одной пространственной переменной x_k , а уравнение (2.1.1.4) имеет частное решение $\tilde{u} = \tilde{u}(\mathbf{x}, t)$, то функция $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)|_{x_k \Rightarrow x_k + b}$, где b — произвольная постоянная, также является решением уравнения.

3°. Пусть коэффициенты линейного дифференциального оператора \mathcal{L} не зависят от времени t . Если уравнение (2.1.1.4) имеет частное решение $\tilde{u} = \tilde{u}(\mathbf{x}, t)$, то частные производные \tilde{u} по времени*

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial t^k}, \quad \dots,$$

также являются решениями уравнения (2.1.1.4).

4°. Пусть коэффициенты линейного дифференциального оператора \mathcal{L} не зависят от пространственных переменных x_1, \dots, x_n . Если уравнение (2.1.1.4) имеет частное решение $\tilde{u} = \tilde{u}(\mathbf{x}, t)$, то частные производные \tilde{u} по этим переменным

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_3}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{k+m} \tilde{u}}{\partial x_2^k \partial x_3^m}, \quad \dots$$

также являются решениями уравнения (2.1.1.4).

Если коэффициенты оператора \mathcal{L} не зависят только от одной пространственной переменной x_1 , а уравнение (2.1.1.4) имеет частное решение $\tilde{u} = \tilde{u}(\mathbf{x}, t)$, то частные производные

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial x_1^k}, \quad \dots$$

также являются решениями уравнения (2.1.1.4).

5°. Пусть коэффициенты линейного дифференциального оператора \mathcal{L} постоянные и пусть уравнение (2.1.1.4) имеет частное решение $\tilde{u} = \tilde{u}(\mathbf{x}, t)$. Тогда любые частные производные \tilde{u} по времени и пространственным переменным (включая смешанные производные)

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial x_3^k}, \quad \dots$$

являются решениями уравнения (2.1.1.4).

6°. Пусть уравнение (2.1.1.4) имеет частное решение $\tilde{u} = \tilde{u}(\mathbf{x}, t; \mu)$, зависящее от свободного параметра μ , и пусть коэффициенты линейного дифференциального оператора \mathcal{L} не зависят от μ (но могут зависеть от времени и пространственных переменных). Тогда, дифференцируя \tilde{u} по μ , получим другие решения уравнения (2.1.1.4):

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \mu^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial \mu^k}, \quad \dots$$

Пусть константы μ_1, \dots, μ_k принадлежат к области определения параметра μ . Тогда сумма

$$u = A_1 \tilde{u}(\mathbf{x}, t; \mu_1) + \dots + A_k \tilde{u}(\mathbf{x}, t; \mu_k), \quad (2.1.1.6)$$

где A_1, \dots, A_k — произвольные постоянные, также является решением линейного однородного уравнения (2.1.1.4). Число слагаемых в сумме (2.1.1.6) может быть конечным или бесконечным.

*Здесь и далее предполагается, что частное решение \tilde{u} дифференцируемо достаточное количество раз по t и x_1, \dots, x_n (или по параметрам).

7°. Решения можно также строить следующим образом. Частное решение $\tilde{u}(\mathbf{x}, t; \mu)$, зависящее от параметра μ (как и в п. 6° считается, что коэффициенты линейного оператора \mathcal{L} не зависят от μ), сначала умножаем на произвольную функцию $\varphi(\mu)$. Затем полученное выражение интегрируем по μ на отрезке $[\alpha, \beta]$. В результате получаем функцию

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\mu) \tilde{u}(\mathbf{x}, t; \mu) d\mu,$$

которая также является решением исходного линейного однородного уравнения (2.1.1.4).

8°. В случае линейного уравнения в частных производных с запаздыванием для построения сложных решений из более простых можно также использовать следующее утверждение [105].

Утверждение. Пусть линейное однородное УрЧП с запаздыванием имеет однопараметрическое частное решение вида $u = \tilde{u}(\mathbf{x}, t; \mu)$, где μ — свободный параметр, не входящий в исходное уравнение. Тогда рассматриваемое уравнение имеет также двухпараметрические решения

$$u_1 = \operatorname{Re} \tilde{u}(\mathbf{x}, t, \alpha + i\beta), \quad u_2 = \operatorname{Im} \tilde{u}(\mathbf{x}, t, \alpha + i\beta),$$

где α и β — произвольные вещественные константы, $i^2 = -1$, а $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ — вещественная и мнимая части комплексного числа z .

Следствие 1. Пусть линейное однородное УрЧП с постоянным запаздыванием, коэффициенты которого не зависят от времени t , имеет частное решение $u = \tilde{u}(\mathbf{x}, t)$. Тогда это уравнение также допускает однопараметрическое семейство решений

$$u_1 = \operatorname{Re} \tilde{u}(\mathbf{x}, t + i\alpha), \quad u_2 = \operatorname{Im} \tilde{u}(\mathbf{x}, t + i\alpha),$$

где α — произвольная вещественная константа, $i^2 = -1$.

Следствие 2. Пусть линейное однородное УрЧП с постоянным запаздыванием, коэффициенты которого не зависят от пространственной переменной x_k , имеет частное решение $u = \tilde{u}(\mathbf{x}, t)$. Тогда это уравнение также допускает однопараметрическое семейство решений

$$u_1 = \operatorname{Re} \tilde{u}(\mathbf{x}, t) \big|_{x_k \Rightarrow x_k + i\alpha}, \quad u_2 = \operatorname{Im} \tilde{u}(\mathbf{x}, t) \big|_{x_k \Rightarrow x_k + i\alpha},$$

где α — произвольная вещественная константа.

Свойства, приведенные в пп. 1° — 8°, позволяют использовать известные частные решения для построения других частных решений линейных однородных УрЧП с постоянным запаздыванием.

► **Пример 2.1.** Линейное УрЧП с постоянным запаздыванием типа уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} - aw, \quad w = u(x, t - \tau),$$

имеет частное решение

$$\tilde{u}(x, t) = \exp(\sqrt{\mu + ae^{-\mu\tau}} x + \mu t),$$

где μ — произвольная постоянная. Дифференцируя это выражение по μ (см. п. 6°), получаем другое более сложное решение

$$\tilde{u}_1(x, t) = \left(\frac{1 - a\tau e^{-\mu\tau}}{2\sqrt{\mu + ae^{-\mu\tau}}} x + t \right) \exp(\sqrt{\mu + ae^{-\mu\tau}} x + \mu t).$$

► **Пример 2.2.** Линейное УрЧП с запаздыванием волнового типа

$$u_{tt} = w_{xx}, \quad w = u(x, t - \tau),$$

имеет частное решение

$$\tilde{u}(x, t) = \exp(\mu e^{\mu\tau/2} x + \mu t),$$

где μ — произвольная постоянная. Полагая в этом решении $\mu = i\alpha$ (см. п. 8°), а затем выделяя действительную и мнимую части, получим два более сложных решения

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp\left[-\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\tau\right)x\right] \cos\left[\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\tau\right)x + \alpha t\right], \\ u_2 &= \exp\left[-\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\tau\right)x\right] \sin\left[\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\tau\right)x + \alpha t\right]. \end{aligned}$$

Решения с разделяющимися переменными в виде произведения и суммы функций разных аргументов.

1°. Многие решения линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных имеют решения, которые можно представить в виде произведения функций, зависящих от разных аргументов. Такие решения называются *решениями с мультипликативным разделением переменных*; часто их кратко называют *решениями с разделяющимися переменными*.

В табл. 2.1 приведены часто встречающиеся типы линейных однородных дифференциальных уравнений с несколькими независимыми переменными и постоянным запаздыванием, которые допускают точные решения с разделяющимися переменными. Линейные комбинации частных решений, соответствующие различным значениям параметров разделения $\lambda, \beta_1, \dots, \beta_n$ также являются решениями рассматриваемых уравнений. В последней строке табл. 2.1 использованы краткие обозначения: L_t — линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят только от времени t , а L_x — линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят только от пространственных переменных (считается, что $L_t[C] = 0$ и $L_x[C] = 0$, где C — произвольная постоянная.)

Для уравнения с постоянными коэффициентами (см. строку 1 в табл. 2.1) параметры разделения должны удовлетворять одному алгебраическому (транцендентному) уравнению

$$D(\lambda, \beta_1, \dots, \beta_n) = 0, \quad (2.1.1.7)$$

Таблица 2.1. Некоторые линейные неоднородные УрЧП с постоянным запаздыванием, допускающие точные решения с мультипликативным разделением переменных.

| № | Вид уравнения (2.1.1.4) | Вид частных решений |
|---|--|--|
| 1 | Коэффициенты уравнения постоянны | $u(\mathbf{x}, t) = A \exp(\lambda t + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)$, $\lambda, \beta_1, \dots, \beta_n$ связаны алгебраическим (трансцендентным) уравнением |
| 2 | Коэффициенты уравнения не зависят от t | $u(\mathbf{x}, t) = e^{\lambda t} \psi(\mathbf{x})$, где λ — произвольная постоянная |
| 3 | Коэффициенты уравнения не зависят от x_1, \dots, x_n | $u(\mathbf{x}, t) = \exp(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n) \psi(t)$, где β_1, \dots, β_n — произвольные постоянные |
| 4 | Коэффициенты уравнения не зависят от x_1, \dots, x_k | $u(\mathbf{x}, t) = \exp(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k) \psi(t, x_{k+1}, \dots, x_n)$, где β_1, \dots, β_k — произвольные постоянные |
| 5 | Уравнение можно представить в виде $L_t[u] + L_x[w] = 0$ | $u(\mathbf{x}, t) = \varphi(t) \psi(\mathbf{x})$, $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению $L_t[\varphi] + \lambda \varphi(t - \tau) = 0$, $\psi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $L_x[\psi] - \lambda \psi = 0$ |

которое получается в результате подстановки решения в уравнение (2.1.1.4). В физических приложениях уравнение (2.1.1.7) обычно называют *дисперсионным уравнением*. Любые n из $n + 1$ параметров разделения в (2.1.1.7) можно считать произвольными.

► **Пример 2.3.** Рассмотрим линейное телеграфное уравнение с постоянным запаздыванием

$$u_{tt} + ku_t = au_{xx} + bu_x + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, t - \tau). \quad (2.1.1.8)$$

Ищем частное решение этого уравнения (типа бегущей волны) в экспоненциальном виде

$$u = A \exp(\beta x + \lambda t),$$

где A — произвольная постоянная. В результате приходим к дисперсионному уравнению

$$\lambda^2 + k\lambda = a\beta^2 + b\beta + c_1 + c_2 e^{-\lambda\tau},$$

где один из двух параметров β или λ может считаться заданным (достаточно произвольно), а другой определяется из этого уравнения.

Заметим, что уравнение с постоянными коэффициентами (2.1.1.8) также допускает более сложные решения (см. вторую и третью строки табл. 2.1, последний столбец). ◀

► **Пример 2.4.** Линейное уравнение типа теплопроводности с постоянным запаздыванием

$$u_t = aw_{xx}, \quad w = u(x, t - \tau),$$

допускает точные решения с мультипликативным разделением переменных вида

$$\begin{aligned} u &= [A \cos(kx) + B \sin(kx)]e^{-\lambda t}, & k &= (\lambda e^{-\lambda\tau}/a)^{1/2} \quad (\lambda > 0); \\ u &= [A \exp(kx) + B \exp(-kx)]e^{-\lambda t}, & k &= (-\lambda e^{-\lambda\tau}/a)^{1/2} \quad (\lambda < 0), \end{aligned} \quad (2.1.1.9)$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

Отметим, что решения (2.1.1.9) являются частными случаями решений с мультипликативным разделением переменных вида $u = \varphi(x)\psi(t)$. ◀

2°. Линейные УрЧП с запаздыванием с двумя независимыми переменными x, t вида

$$L_t^{(1)}[u] + L_t^{(2)}[w] + M_x^{(1)}[u] + M_x^{(2)}[w] + c_1 u + c_2 w = f(x) + g(t),$$

где

$$L_t^{(j)}[v] \equiv \sum_{i=1}^{K_j} a_i^{(j)}(t) \frac{\partial^i v}{\partial t^i}, \quad M_x^{(j)}[v] \equiv \sum_{i=1}^{N_j} b_i^{(j)}(x) \frac{\partial^i v}{\partial x^i}, \quad j = 1, 2,$$

имеют точные решения, которые можно представить в виде суммы функций различных аргументов:

$$u = \varphi(x) + \psi(t). \quad (2.1.1.10)$$

Такие решения называются *решениями с аддитивным разделением переменных*.

► **Пример 2.5.** Линейное УрЧП с запаздыванием (2.1.1.8) имеет решение с аддитивным разделением переменных вида (2.1.1.10), где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют ОДУ и ОДУ с запаздыванием:

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} + b\varphi'_x + (c_1 + c_2)\varphi &= 0, \\ \psi''_{tt} + k\psi'_t &= c_1\psi + c_2\bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau). \end{aligned}$$

2.1.2. Общие свойства и качественные особенности задач с запаздыванием

Многие свойства линейных уравнений в частных производных с запаздыванием аналогичны свойствам более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Граничные условия в задаче Коши и начально-краевых задачах для уравнений в частных производных с запаздыванием формулируются точно также, как и для уравнений в частных производных без запаздывания.

Отметим две основные качественные особенности, которые отличают задачи для уравнений в частных производных с запаздыванием от задач для уравнений в частных производных без запаздывания.

Во-первых, начальные условия (начальные данные) для уравнений с частными производными в задачах с постоянным запаздыванием $\tau > 0$, задаются

на целом интервале $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ (а не в точке $t = t_0$, как в задачах без запаздывания). При этом ищется решение, непрерывное в точке $t = t_0$. Чаще всего используется начальная точка $t_0 = 0$, иногда встречается $t_0 = \tau$.

Во-вторых, даже если начальные данные будут иметь непрерывные производные по t сколь угодно высокого порядка, решения задачи Коши и начально-краевых задач в случае общего положения будут иметь разрывы первого рода у частных производных по t порядка k в точках $t = t_0 + (k - 1)\tau$, где $k = 1, 2, \dots$; однако производные более низких порядков в этих точках будут уже непрерывны (т. е. происходит распространение разрывов производных искомой величины с постепенным сглаживанием).

Во-третьих, начально-краевые задачи для уравнений параболического и гиперболического типов с запаздыванием при определенных условиях могут быть некорректными по Адамару (решения таких задач неустойчивы относительно малых изменений начальных данных).

Для решения линейных задач, описываемых уравнениями в частных производных с запаздыванием, можно использовать метод разделения переменных и методы интегральных преобразований (таким же образом, как это делается для линейных уравнений в частных производных без запаздывания [90, 436]).

2.2. Линейные начально-краевые задачи с постоянным запаздыванием

2.2.1. Первая начально-краевая задача для одномерного уравнения параболического типа с постоянным запаздыванием

Формулировка задачи. Рассмотрим первую начально-краевую задачу для одномерного линейного уравнения параболического типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_1 u + c_2 w + f(x, t), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (2.2.1.1)$$

где $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 + a_2 > 0$, определенного в области $\Omega = \{0 < x < h, t > 0\}$. Уравнение (2.2.1.1) дополним неоднородными граничными условиями первого рода (условиями Дирихле):

$$u = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0, t > -\tau; \quad u = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = h, t > -\tau, \quad (2.2.1.2)$$

и общим начальным условием

$$u = \varphi(x, t) \quad \text{при} \quad 0 < x < h, -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.1.3)$$

Будем считать, что функции f и φ , входящие в уравнение (2.2.1.1) и начальное условие (2.2.1.3), непрерывны, а функции g_1 и g_2 , стоящие в граничных условиях (2.2.1.2), непрерывно дифференцируемы по t . Кроме того,

будем предполагать, что граничные и начальное условия (2.2.1.2) и (2.2.1.3) совместны, т. е. выполняются соотношения

$$\varphi(0, t) = g_1(t), \quad \varphi(h, t) = g_2(t).$$

В [324–326, 380, 473] для решения одномерных задач, описываемых уравнением параболического типа с постоянным запаздыванием типа (2.2.1.1) и родственными уравнений, использовался метод разделения переменных.

Представление решения в виде суммы нескольких функций. Следуя [324, 325], решение задачи (2.2.1.1)–(2.2.1.3) ищем в виде суммы

$$u = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (2.2.1.4)$$

где функция

$$u_0(x, t) = g_1(t) + \frac{x}{h}[g_2(t) - g_1(t)] \quad (2.2.1.5)$$

удовлетворяет неоднородным граничным условиям (2.2.1.2), а функции $u_1 = u_1(x, t)$ и $u_2 = u_2(x, t)$ определяются путем решения описанных ниже более простых начально-краевых задач с однородными (нулевыми) граничными условиями.

Задача 1. Функция u_1 удовлетворяет линейному однородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + c_1 u_1 + c_2 w_1, \quad w_1 = u_1(x, t - \tau), \quad (2.2.1.6)$$

однородным граничным условиям

$$u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad t > -\tau; \quad u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \quad t > -\tau, \quad (2.2.1.7)$$

и неоднородному начальному условию

$$u_1 = \Phi(x, t) \quad \text{при} \quad 0 < x < h, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.1.8)$$

где

$$\Phi(x, t) = \varphi(x, t) - g_1(t) - \frac{x}{h}[g_2(t) - g_1(t)]. \quad (2.2.1.9)$$

Задача 2. Функция u_2 удовлетворяет линейному неоднородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + c_1 u_2 + c_2 w_2 + F(x, t), \quad w_2 = u_2(x, t - \tau), \quad (2.2.1.10)$$

где

$$\begin{aligned} F(x, t) = & f(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ g_1(t) + \frac{x}{h}[g_2(t) - g_1(t)] \right\} + \\ & + c_1 \left\{ g_1(t) + \frac{x}{h}[g_2(t) - g_1(t)] \right\} + \\ & + c_2 \left\{ g_1(t - \tau) + \frac{x}{h}[g_2(t - \tau) - g_1(t - \tau)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.1.11)$$

и нулевым (однородным) граничным и начальным условиям

$$u_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad t > -\tau; \quad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \quad t > -\tau; \quad (2.2.1.12)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < h, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.1.13)$$

Решение задачи 1. Рассмотрим линейное однородное УрЧП с запаздыванием (2.2.1.6) с граничным и начальным условиями (2.2.1.7) и (2.2.1.8). Сначала ищем частные решения уравнения (2.2.1.6) в виде произведения функций разных аргументов

$$u_{1p} = X(x)T(t). \quad (2.2.1.14)$$

Подставив (2.2.1.14) в (2.2.1.6), после элементарных преобразований получим

$$X(x)[T'(t) - c_1 T(t) - c_2 T(t - \tau)] = X''(x)[a_1 T(t) + a_2 T(t - \tau)]. \quad (2.2.1.15)$$

Разделяя в этом уравнении переменные, приходим к линейному ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \quad (2.2.1.16)$$

$$T'(t) = (c_1 - a_1 \lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2 \lambda^2)T(t - \tau). \quad (2.2.1.17)$$

Учитывая, что функция u_1 должна удовлетворять однородным граничным условиям (2.2.1.7), и используя (2.2.1.14), приходим к однородным граничным условиям для функции X :

$$X(0) = X(h) = 0. \quad (2.2.1.18)$$

Нетривиальные решения линейной однородной задачи (2.2.1.16), (2.2.1.18), которая является частным случаем задачи Штурма — Лиувилля (или задачи на собственные значения), существуют только при следующих дискретных значениях параметра λ :

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{h}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2.1.19)$$

а соответствующие им *собственные функции* имеют вид

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right). \quad (2.2.1.20)$$

Важно отметить, что собственные функции $X_n(x)$ и $X_m(x)$ ортогональны в том смысле, что

$$\int_0^h X_n(x)X_m(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m. \quad (2.2.1.21)$$

Подставив *собственные значения* (2.2.1.19) в (2.2.1.17), получим ОДУ с запаздыванием для функций $T = T_n(t)$:

$$T'_n(t) = \left[c_1 - a_1 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \right] T_n(t) + \left[c_2 - a_2 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \right] T_n(t - \tau). \quad (2.2.1.22)$$

Решение линейной начально-краевой задачи (2.2.1.6)–(2.2.1.7) ищем в виде ряда

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t), \quad (2.2.1.23)$$

где функции $u_{1n}(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ — частные решения уравнения (2.2.1.6), удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.2.1.7). Согласно принципу линейной суперпозиции, ряд (2.2.1.23) также является формальным решением исходного уравнения в частных производных с запаздыванием (2.2.1.6) и удовлетворяет граничным условиям (2.2.1.7).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с запаздыванием (2.2.1.22), представим начальное условие (2.2.1.8) в виде разложения по собственным функциям (2.2.1.20):

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \sin \frac{\pi n x}{h}, \quad 0 \leq x \leq h, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.1.24)$$

Умножая (2.2.1.24) на $X_m(x) = \sin \frac{\pi m x}{h}$ ($m = 1, 2, \dots$) и интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h , а затем учитывая (2.2.1.21), получим

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{h} \int_0^h \Phi(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{h}\right) d\xi, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.1.25)$$

где функция $\Phi(\xi, t)$ определена формулой (2.2.1.9).

Из соотношений (2.2.1.23) и (2.2.1.24) находим начальные условия для ОДУ с запаздыванием (2.2.1.17):

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.1.26)$$

Здесь функции $\Phi_n(t)$ задаются выражениями (2.2.1.25).

Задача (2.2.1.22), (2.2.1.26) с точностью до переобозначений совпадает с задачей (1.1.5.5), (1.1.5.6), рассмотренной в разд. 1.1.5. Вводя обозначения

$$\alpha_n = c_1 - a_1 \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2, \quad \beta_n = c_2 - a_2 \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2, \quad \sigma_n = e^{-\alpha_n \tau} \beta_n, \quad (2.2.1.27)$$

и используя формулы (1.1.5.7) и (1.1.5.3), можно представить решение задачи (2.2.1.22), (2.2.1.26) в виде

$$T_n(t) = e^{\alpha_n(t+\tau)} \exp_d(\sigma_n t, \sigma_n \tau) \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n \tau) [\Phi'_n(s) - \alpha_n \Phi_n(s)] ds, \quad (2.2.1.28)$$

где $\exp_d(t, \tau)$ — экспонента с запаздыванием, которая определяется формулой

$$\exp_d(t, \tau) \equiv \sum_{k=0}^{[t/\tau]+1} \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!}, \quad (2.2.1.29)$$

а символ $[A]$ обозначает целую часть числа A .

Подставив выражения (2.2.1.20) и (2.2.1.28) в (2.2.1.23), получим решение задачи (2.2.1.6)–(2.2.1.7) в следующем виде [325]:

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right) \left\{ e^{\alpha_n(t+\tau)} \exp_d(\sigma_n t, \sigma_n \tau) \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n \tau) [\Phi'_n(s) - \alpha_n \Phi_n(s)] ds \right\}, \quad (2.2.1.30)$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{h} \int_0^h \left\{ \varphi(\xi, t) - g_1(t) - \frac{\xi}{h} [g_2(t) - g_1(t)] \right\} \sin\left(\frac{\pi n \xi}{h}\right) d\xi. \quad (2.2.1.31)$$

► **Пример 2.6.** Для однородных граничных условий $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$ на единичном отрезке $h = 1$ и стационарных начальных данных в виде части параболы $\varphi(x, t) = 4x(1-x)$ коэффициенты Фурье (2.2.1.31) определяются так:

$$\Phi_n = \begin{cases} \frac{32}{\pi^3 n^3} & \text{для нечетных } n, \\ 0 & \text{для четных } n. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

Решение задачи 2. Рассмотрим теперь линейное неоднородное УрЧП с запаздыванием (2.2.1.10)–(2.2.1.11) с однородными граничными и начальным условиями (2.2.1.12) и (2.2.1.13).

Сначала разложим неоднородную составляющую уравнения (2.2.1.10) в ряд по собственным функциям (2.2.1.20):

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n x}{h}, \quad F_n(t) = \frac{2}{h} \int_0^h F(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{h}\right) d\xi, \quad (2.2.1.32)$$

где функция $F(x, t)$ определена формулой (2.2.1.11).

Решение задачи (2.2.1.10)–(2.2.1.13) ищем в виде ряда

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin \frac{\pi n x}{h}, \quad (2.2.1.33)$$

который удовлетворяет однородным граничным условиям (2.2.1.12). Подставив (2.2.1.33) в (2.2.1.10), получим линейные неоднородные ОДУ с запаздыванием для функций $U_n(t)$:

$$U'_n(t) = \left[c_1 - a_1 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \right] U_n(t) + \left[c_2 - a_2 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \right] U_n(t - \tau) + F_n(t), \quad (2.2.1.34)$$

где функции $F_n(t)$ находятся с помощью второй формулы в (2.2.1.32). Для завершения формулировки задачи уравнения (2.2.1.34) дополним однородными начальными условиями

$$U_n(t) = 0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.1.35)$$

которые следуют из (2.2.1.13) и (2.2.1.33).

Задача (2.2.1.34) — (2.2.1.35) с точностью до переобозначений совпадает с задачей (1.1.5.8) — (1.1.5.9), рассмотренной в разд. 1.1.5. Поэтому решение задачи (2.2.1.12) — (2.2.1.35) в области $t \geq 0$ можно представить в виде интеграла

$$U_n(t) = \int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n \tau) F_n(s) ds, \quad \sigma_n = e^{-\alpha_n \tau} \beta_n, \quad (2.2.1.36)$$

где параметры α_n и β_n определены в (2.2.1.27). Подставив (2.2.1.36) в (2.2.1.33) находим решение задачи (2.2.1.10) — (2.2.1.13) [325]:

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n \tau) F_n(s) ds \right] \sin \frac{\pi n x}{h}. \quad (2.2.1.37)$$

Подставив функции (2.2.1.5), (2.2.1.30), (2.2.1.37) в (2.2.1.4), можно получить решение исходной задачи (2.2.1.1) — (2.2.1.3).

Замечание 2.1. В [324, 325] описаны достаточные условия сходимости рядов (2.2.1.30), (2.2.1.37), определяющих решение задачи (2.2.1.1) — (2.2.1.3). Условия устойчивости и неустойчивости решений этой задачи обсуждаются в разд. 2.2.5, где показано, что при выполнении неравенства $a_2 > a_1$ начально-краевая задача (2.2.1.1) — (2.2.1.3) является некорректной по Адамару.

2.2.2. Другие задачи для одномерного уравнения параболического типа с постоянным запаздыванием

Представление решений начально-краевых задач в виде суммы решений более простых задач. Опишем теперь процедуру построения решений методом разделения переменных других начально-краевых задач, описываемых одномерным линейным уравнением в частных производных с постоянным запаздыванием (2.2.1.1). Для краткости, далее будем обозначать это уравнение так:

$$\mathcal{L}[u, w] = f(x, t), \quad t > 0, \quad (2.2.2.1)$$

где $\mathcal{L}[u, w] \equiv u_t - a_1 u_{xx} - a_2 w_{xx} - c_1 u - c_2 w$ и $w = u(x, t - \tau)$.

Уравнение (2.2.2.1) будем рассматривать с различными линейными неоднородными граничными условиями, которые, не конкретизируя, будем записывать в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_1[u] &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad t > -\tau; \\ \Gamma_2[u] &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = h, \quad t > -\tau, \end{aligned} \quad (2.2.2.2)$$

и общим начальным условием

$$u = \varphi(x, t) \quad \text{при} \quad 0 < x < h, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.2.3)$$

Будем считать, что входящие в граничные условия (2.2.2.2) линейные операторы $\Gamma_{1,2}[u]$ не зависят явно от времени t . Наиболее распространенные граничные условия приведены в третьем столбце табл. 2.2.

Решение задачи (2.2.2.1)–(2.2.2.3) ищем в виде суммы (2.2.1.4), где

$$u_0 = u_0(x, t) \quad (2.2.2.4)$$

является любой дважды непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей граничным условиям (2.2.2.2), т. е. выполняются соотношения

$$\Gamma_1[u_0] = g_1(t), \quad \Gamma_2[u_0] = g_2(t). \quad (2.2.2.5)$$

Определение функции u_0 не связано с решением дифференциальных уравнений. Эту функцию можно искать методом неопределенных коэффициентов, например, в виде квадратичного по x многочлена: $w_0 = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)x^2$ (в большинстве случаев можно положить $\alpha_2 \equiv 0$). Функциональные коэффициенты $\alpha_k(t)$ определяются путем подстановки этого многочлена в граничные условия (2.2.2.5).

В табл. 2.2 приведены простейшие функции $u_0 = u_0(x, t)$, которые удовлетворяют наиболее распространенным неоднородным граничным условиям в начально-краевых задачах для уравнений параболического и гиперболического типа с одной пространственной переменной. В граничных условиях третьего рода считается, что $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$.

Таблица 2.2. Простейшие функции $u_0 = u_0(x, t)$, которые удовлетворяют наиболее распространенным неоднородным граничным условиям на концах отрезка $0 \leq x \leq h$.

| № | Начально-краевая задача | Граничные условия | Функция $u_0 = u_0(x, t)$, удовлетворяющая граничным условиям |
|---|-------------------------|--|---|
| 1 | Первая | $u = g_1(t)$ при $x = 0$ $u = g_2(t)$ при $x = h$ | $u_0 = g_1(t) + \frac{x}{h} [g_2(t) - g_1(t)]$ |
| 2 | Вторая | $u_x = g_1(t)$ при $x = 0$ $u_x = g_2(t)$ при $x = h$ | $u_0 = xg_1(t) + \frac{x^2}{2h} [g_2(t) - g_1(t)]$ |
| 3 | Третья | $u_x - k_1 u = g_1(t)$ при $x = 0$ $u_x + k_2 u = g_2(t)$ при $x = h$ | $u_0 = \frac{(k_2 x - 1 - k_2 h)g_1(t) + (1 + k_1 x)g_2(t)}{k_2 + k_1 + k_1 k_2 h}$ |
| 4 | Смешанная | $u = g_1(t)$ при $x = 0$ $u_x = g_2(t)$ при $x = h$ | $u_0 = g_1(t) + xg_2(t)$ |
| 5 | Смешанная | $u_x = g_1(t)$ при $x = 0$ $u = g_2(t)$ при $x = h$ | $u_0 = (x - l)g_1(t) + g_2(t)$ |

Замечание 2.2. Граничные условия первой, второй и третьей начально-краевых задач часто называются соответственно условиями Дирихле, Неймана и Робина.

Две другие функции $u_1 = u_1(x, t)$ и $u_2 = u_2(x, t)$, входящие в (2.2.1.4), определяются путем решения описанных ниже более простых начально-краевых задач с однородными (нулевыми) граничными условиями.

Задача 1. Функция u_1 удовлетворяет линейному однородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$\mathcal{L}[u_1, w_1] = 0, \quad w_1 = u_1(x, t - \tau), \quad (2.2.2.6)$$

однородным граничным условиям

$$\Gamma_1[u_1] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad t > -\tau; \quad \Gamma_2[u_1] = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \quad t > -\tau, \quad (2.2.2.7)$$

и неоднородному начальному условию

$$u_1 = \Phi(x, t) \quad \text{при} \quad 0 < x < h, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.2.8)$$

где

$$\Phi(x, t) = \varphi(x, t) - u_0(x, t). \quad (2.2.2.9)$$

Задача 2. Функция u_2 удовлетворяет линейному неоднородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$\mathcal{L}[u_2, w_2] = F(x, t), \quad w_2 = u_2(x, t - \tau), \quad (2.2.2.10)$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) - \mathcal{L}[u_0, w_0], \quad w_0 = u_0(x, t - \tau), \quad (2.2.2.11)$$

и нулевым граничным и начальному условиям

$$\Gamma_1[u_2] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad t > -\tau; \quad \Gamma_2[u_2] = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \quad t > -\tau; \quad (2.2.2.12)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < h, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.2.13)$$

Решение задачи 1. Рассмотрим линейное однородное УрЧП с запаздыванием (2.2.1.6) (или (2.2.2.6)) с граничными и начальными условиями (2.2.2.7) and (2.2.2.8). Как и ранее, сначала ищем частные решения уравнения (2.2.1.6) в виде произведения функций разных аргументов (2.2.1.14), т. е. $u_{1p} = X(x)T(t)$. Разделяя переменные в полученном уравнении, приходим к линейным ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \quad (2.2.2.14)$$

$$T'(t) = (c_1 - a_1 \lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2 \lambda^2)T(t - \tau), \quad (2.2.2.15)$$

которые совпадают с уравнениями (2.2.1.16) и (2.2.1.17). Требуя, чтобы функция $u_{1p} = X(x)T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (2.2.1.7), приходим к однородным граничным условиям для функции X :

$$\Gamma_1[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \Gamma_2[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = h. \quad (2.2.2.16)$$

Таблица 2.3. Собственные функции в задачах на собственные значения, описываемые однородным ОДУ $X''_{xx} = -\lambda^2 X$ с наиболее распространенными однородными граничными условиями на концах отрезка $0 \leq x \leq h$.

| № | Начально-краевая задача | Граничные условия | Собственные значения и собственные функции $X_n = X_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ |
|---|-------------------------|--|--|
| 1 | Первая | $X = 0$ при $x = 0$ $X = 0$ при $x = h$ | $\lambda_n = \frac{\pi n}{h}$; $X_n = \sin \frac{\pi n x}{h}$ |
| 2 | Вторая | $X'_x = 0$ при $x = 0$ $X'_x = 0$ при $x = h$ | $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{h}$; $X_0 = 1$, $X_n = \cos \frac{\pi n x}{h}$ |
| 3 | Третья | $X'_x + k_1 X = 0$ при $x = 0$ $X'_x + k_2 X = 0$ при $x = h$ | λ_n – корни трансцендентного уравнения $\frac{\operatorname{tg}(\lambda h)}{\lambda} = \frac{k_1 + k_2}{\lambda^2 - k_1 k_2}$ ($\lambda_n > 0$); $X_n = \cos(\lambda_n x) + \frac{k_1}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x)$ |
| 4 | Смешанная | $X = 0$ при $x = 0$ $X'_x = 0$ при $x = h$ | $\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}$; $X_n = \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2h}$ |
| 5 | Смешанная | $X'_x = 0$ при $x = 0$ $X = 0$ при $x = h$ | $\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}$; $X_n = \cos \frac{\pi(2n-1)x}{2h}$ |

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (2.2.2.14), (2.2.2.16) существуют только для дискретного множества значений параметра λ :

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.2.17)$$

Собственные значения и собственные функции для однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (2.2.2.14), для пяти наиболее распространенных граничных условий приведены в табл. 2.3.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (2.2.2.15), получим соответствующие ОДУ с запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Решение линейной начально-краевой задачи (2.2.2.6)–(2.2.2.9) ищем в виде ряда

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t), \quad (2.2.2.18)$$

где функции $u_{1n}(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ – частные решения уравнения (2.2.2.6), удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.2.2.7).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с запаздыванием (2.2.2.15) при $\lambda = \lambda_n$, представим начальное условие (2.2.2.8) в виде разложения по собствен-

ным функциям:

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) X_n(x), \quad 0 \leq x \leq h, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.2.19)$$

Умножая (2.2.2.19) на $X_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$) и интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h , а затем учитывая, что собственные функции $X_n(x)$ и $X_m(x)$ ортогональны при $n \neq m$, т. е. выполняются соотношения (2.2.1.21), имеем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \Phi(\xi, t) X_n(\xi) d\xi, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.2.20)$$

где функция $\Phi(\xi, t)$ определена формулой (2.2.2.9) и $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi) d\xi$. Из соотношений (2.2.2.18) и (2.2.2.19) получим начальные условия для ОДУ с запаздыванием (2.2.2.15) при $\lambda = \lambda_n$ в виде

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.2.21)$$

где функции $\Phi_n(t)$ задаются выражениями (2.2.2.20).

Вводя далее обозначения

$$\alpha_n = c_1 - a_1 \lambda_n^2, \quad \beta_n = c_2 - a_2 \lambda_n^2, \quad \sigma_n = e^{-\alpha_n \tau} \beta_n \quad (2.2.2.22)$$

и рассуждая, как это делалось в разд. 2.2.1, получим решение задачи (2.2.2.15), (2.2.2.21) при $\lambda = \lambda_n$ в виде

$$T_n(t) = e^{\alpha_n(t+\tau)} \exp_d(\sigma_n t, \sigma_n \tau) \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n \tau) [\Phi'_n(s) - \alpha_n \Phi_n(s)] ds, \quad (2.2.2.23)$$

где $\exp_d(t, \tau) \equiv \sum_{k=0}^{\lfloor t/\tau \rfloor + 1} \frac{[t-(k-1)\tau]^k}{k!}$ — экспонента с запаздыванием.

Подставив функции (2.2.2.23) в формулу (2.2.2.18), находим решение задачи (2.2.2.6) — (2.2.2.9):

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \left\{ e^{\alpha_n(t+\tau)} \exp_d(\sigma_n t, \sigma_n \tau) \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n \tau) [\Phi'_n(s) - \alpha_n \Phi_n(s)] ds \right\}, \quad (2.2.2.24)$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h [\varphi(\xi, t) - u_0(\xi, t)] X_n(\xi) d\xi, \quad \|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi) d\xi. \quad (2.2.2.25)$$

Для любой из пяти основных начально-краевых задач, граничные условия которых приведены в табл. 2.2, в формулы (2.2.2.24)–(2.2.2.25) следует подставить соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$, представленные в табл. 2.3.

Решение задачи 2. Рассмотрим теперь линейное неоднородное УрЧП с запаздыванием (2.2.2.10)–(2.2.2.11) с однородными граничными и начальными условиями (2.2.2.12) и (2.2.2.13).

Сначала разложим неоднородную составляющую уравнения (2.2.2.10) в ряд по собственным функциям (2.2.2.17):

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(x), \quad F_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h F(\xi, t) X_n(\xi) d\xi, \quad (2.2.2.26)$$

где функция $F(x, t)$ определена формулой (2.2.2.11), а $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi) d\xi$.

Решение задачи (2.2.2.10)–(2.2.2.13) ищем в виде ряда

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) X_n(x), \quad (2.2.2.27)$$

который удовлетворяет однородным граничным условиям (2.2.2.12). Подставив (2.2.2.27) в (2.2.2.10) и учитывая (2.2.2.26), получим линейные неоднородные ОДУ с запаздыванием для функций $U_n(t)$:

$$U'_n(t) = (c_1 - a_1 \lambda_n^2) U_n(t) + (c_2 - a_2 \lambda_n^2) U_n(t - \tau) + F_n(t), \quad (2.2.2.28)$$

где функции $F_n(t)$ находятся с помощью второй формулы в (2.2.2.26). Для завершения формулировки задачи уравнения (2.2.2.28) дополним однородными начальными условиями

$$U_n(t) = 0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.2.29)$$

которые следуют из (2.2.2.13) и (2.2.2.27).

Задача (2.2.2.28)–(2.2.2.29) с точностью до переобозначений совпадает с задачей (2.2.1.34)–(2.2.1.35). Поэтому ее решение в области $t \geq 0$ можно представить в виде

$$U_n(t) = \int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n \tau) F_n(s) ds, \quad \sigma_n = e^{-\alpha_n \tau} \beta_n, \quad (2.2.2.30)$$

где параметры α_n и β_n определены в (2.2.2.22). Подставив (2.2.2.30) в (2.2.2.27) находим решение задачи (2.2.2.10)–(2.2.2.13):

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n \tau) F_n(s) ds \right] X_n(x). \quad (2.2.2.31)$$

Решение начально-краевой задачи (2.2.2.1)–(2.2.2.3) с любыми граничными условиями, представленными в табл. 2.2, можно получить подставив функции (2.2.2.4), (2.2.2.24) и (2.2.2.31) в (2.2.1.4) и взяв функции $u_0 = u_0(x, t)$ из табл. 2.2, а соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ –из табл. 2.3.

2.2.3. Задачи для линейных уравнений параболического типа с несколькими переменными и постоянным запаздыванием

Постановка задачи. Рассмотрим m -мерное линейное уравнение параболического типа с постоянным запаздыванием

$$u_t = a_1 L[u] + a_2 L[w] + c_1 u + c_2 w + f(\mathbf{x}, t), \quad w = u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad (2.2.3.1)$$

$$a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad a_1 + a_2 > 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m),$$

определенное в области $\Omega = \{\mathbf{x} \in V, t > 0\}$, где V — открытая связная ограниченная область в \mathbb{R}^m с гладкой границей $S = \partial V$.

Будем считать, что коэффициенты линейного дифференциального оператора второго порядка по пространственным переменным $L[u]$, входящего в уравнение (2.2.3.1), могут зависеть от x_1, \dots, x_m , но не зависят от времени t . В частности, в правую часть уравнения (2.2.3.1) может входить m -мерный оператор Лапласа $L[u] = \Delta u \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ или более сложный оператор с переменными коэффициентами $L[u] = \operatorname{div}[p(\mathbf{x})\nabla u]$, где $p(\mathbf{x}) > 0$.

Уравнение (2.2.3.1) дополним неоднородным линейным граничным условием, которое запишем в виде

$$\Gamma[u] = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S, t > -\tau, \quad (2.2.3.2)$$

и общим начальным условием

$$u = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in V, -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.3.3)$$

Отметим, что коэффициенты дифференциального оператора $\Gamma[u]$ в (2.2.3.2) могут зависеть от пространственных переменных x_1, \dots, x_m , но не зависят от времени t .

Процедура построения решения задачи (2.2.3.1) — (2.2.3.3) состоит из нескольких этапов, описанных далее.

Представление решения рассматриваемой задачи в виде суммы решений более простых задач. Решение задачи (2.2.3.1) — (2.2.3.3) ищем в виде суммы

$$u = u_0(\mathbf{x}, t) + u_1(\mathbf{x}, t) + u_2(\mathbf{x}, t), \quad (2.2.3.4)$$

где

$$u_0 = u_0(\mathbf{x}, t) \quad (2.2.3.5)$$

является любой дважды дифференцируемой функцией, удовлетворяющей граничному условию (2.2.3.2), т. е.

$$\Gamma[u_0] = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S, t > -\tau. \quad (2.2.3.6)$$

Замечание 2.3. Для граничного условия Дирихле в (2.2.3.2) следует положить $\Gamma[u] = u$. В этом случае в качестве функции u_0 можно взять любую достаточно гладкую функцию $G(\mathbf{x}, t)$, определенную при $t > -\tau$ в замкнутой области $V \cup S$, которая удовлетворяет условию $G(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in S} = g(\mathbf{x}, t)$.

Функции $u_1 = u_1(\mathbf{x}, t)$ и $u_2 = u_2(\mathbf{x}, t)$ в (2.2.3.4) определяются путем решения описанных ниже более простых, чем исходная, начально-краевых задач с однородными (нулевыми) граничными условиями.

Задача 1. Функция u_1 удовлетворяет линейному однородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$(u_1)_t = a_1 L[u_1] + a_2 L[w_1] + c_1 u_1 + c_2 w_1, \quad w_1 = u_1(\mathbf{x}, t - \tau), \quad t > 0, \quad (2.2.3.7)$$

однородному граничному условию

$$\Gamma[u_1] = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > -\tau, \quad (2.2.3.8)$$

и неоднородному начальному условию

$$u_1 = \Phi(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in V, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.3.9)$$

где

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) - u_0(\mathbf{x}, t). \quad (2.2.3.10)$$

Задача 2. Функция u_2 удовлетворяет линейному неоднородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$(u_1)_2 = a_1 L[u_2] + a_2 L[w_2] + c_1 u_2 + c_2 w_2 + F(\mathbf{x}, t), \quad w_2 = u_2(\mathbf{x}, t - \tau), \quad (2.2.3.11)$$

где

$$F(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) - (u_0)_t + a_1 L[u_0] + a_2 L[w_0] + c_1 u_0 + c_2 w_0, \quad w_0 = u_0(\mathbf{x}, t - \tau), \quad (2.2.3.12)$$

и нулевым граничному и начальному условиям

$$\Gamma[u_2] = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > -\tau; \quad (2.2.3.13)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in V, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.3.14)$$

Решение задачи 1. Рассмотрим линейное однородное УрЧП с запаздыванием (2.2.3.7) с граничным и начальным условиями (2.2.3.8) и (2.2.3.9). Как и ранее, сначала ищем частные решения уравнения (2.2.3.7) в виде произведения функций разных аргументов

$$u_{1p} = X(\mathbf{x})T(t). \quad (2.2.3.15)$$

Подставляя (2.2.3.15) в (2.2.3.7) и разделяя переменные в полученном уравнении, приходим к линейному уравнению с частными производными второго порядка и ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$L[X] = -\mu X, \quad (2.2.3.16)$$

$$T'(t) = (c_1 - a_1 \mu)T(t) + (c_2 - a_2 \mu)T(t - \tau), \quad (2.2.3.17)$$

где уравнение (2.2.3.17) при $\mu = \lambda^2$ совпадает с (2.2.2.15). Требуя, чтобы функция (2.2.3.15) удовлетворяла однородному граничному условию (2.2.3.8), приходим к однородному граничному условию для функции $X = X(\mathbf{x})$:

$$\Gamma[X] = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \quad (2.2.3.18)$$

Относительно линейной однородной задачи на собственные значения (2.2.3.16), (2.2.3.18) будем считать выполненными следующие условия.

1°. Нетривиальные решения задачи (2.2.3.16), (2.2.3.18) существуют для дискретного множества собственных значений $\mu = \mu_n$ ($n = 1, 2, \dots$), таких, что

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \mu_{n+1} \leq \dots, \quad \mu_n \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.2.3.19)$$

причем в этой упорядоченной последовательности каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

2°. Соответствующие собственным значениям $\mu = \mu_n$ собственные функции $X = X_n(\mathbf{x})$ можно выбрать вещественными и ортонормированными, так что выполняются соотношения

$$\int_V X_m(\mathbf{x}) X_n(\mathbf{x}) dV = \delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = n, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases} \quad (2.2.3.20)$$

3°. Любая функция $F(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируемая в открытой области $V_{+\varepsilon}$ (включающей V) и удовлетворяющая граничному условию (2.2.3.18), разлагается в ряд Фурье по ортонормированной системе собственных функций $X_n(\mathbf{x})$:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(\mathbf{x}), \quad F_n = \int_V F(\mathbf{x}) X_n(\mathbf{x}) dV, \quad (2.2.3.21)$$

и этот ряд сходится регулярно в области $\bar{V} = V \cup S$.

► **Пример 2.7.** Указанным выше условиям 1° – 3° удовлетворяет линейная однородная задача на собственные значения [14], которая задается с помощью оператора $L[X] \equiv \operatorname{div}[p(\mathbf{x}) \nabla X]$ и описывается уравнением

$$\operatorname{div}[p(\mathbf{x}) \nabla X] = -\mu X, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (2.2.3.22)$$

с граничным условием

$$\alpha(\mathbf{x}) X + \beta(\mathbf{x}) \frac{\partial X}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \quad (2.2.3.23)$$

Здесь $\partial/\partial \nu$ – производная по внешней нормали к поверхности S , а функциональные коэффициенты, входящие в (2.2.3.22) и (2.2.3.23), удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &\in C^1(\bar{V}), \quad \alpha(\mathbf{x}) \in C(S), \quad \beta(\mathbf{x}) \in C(S), \\ p(\mathbf{x}) &> 0, \quad \alpha(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \beta(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) > 0. \end{aligned} \quad (2.2.3.24)$$

Важными частными случаями задачи (2.2.3.22)–(2.2.3.23) являются линейные однородные задачи на собственные значения для уравнения Гельмгольца

$$\Delta X = -\mu X, \quad \mathbf{x} \in V \quad (L = \Delta), \quad (2.2.3.25)$$

с однородными условиями Дирихле, Неймана или Робина. В [436] приведены собственные значения и собственные функции многих краевых задач для уравнения (2.2.3.25) с различными однородными граничными условиями для областей V различной формы. ◀

Далее будем считать, что собственные значения и собственные функции линейной однородной краевой задачи (2.2.3.16), (2.2.3.18) известны и выполнены приведенные выше условия 1°–3°. Подставив собственные значения $\mu = \mu_n$ в (2.2.3.17), получим соответствующие ОДУ с запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Решение линейной начально-краевой задачи (2.2.3.7)–(2.2.3.10) ищем в виде ряда

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\mathbf{x}) T_n(t), \quad (2.2.3.26)$$

где функции $u_{1n}(\mathbf{x}, t) = X_n(\mathbf{x}) T_n(t)$ – частные решения уравнения (2.2.3.7), удовлетворяющие однородному граничному условию (2.2.3.8).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с запаздыванием (2.2.3.17), представим начальное условие (2.2.3.9) в виде разложения по собственным функциям

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) X_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.3.27)$$

Умножая (2.2.3.27) на $X_m(\mathbf{x})$ ($m = 1, 2, \dots$) и интегрируя по области V , а затем учитывая (2.2.3.20), находим функции $\Phi_n(t)$:

$$\Phi_n(t) = \int_V \Phi(\mathbf{x}, t) X_n(\mathbf{x}) dV, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.3.28)$$

где функция $\Phi(\mathbf{x}, t)$ определена формулой (2.2.3.10). Из соотношений (2.2.3.26) и (2.2.3.28) получим начальные условия для ОДУ с запаздыванием (2.2.3.17) при $\mu = \mu_n$ в виде

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.3.29)$$

где функции $\Phi_n(t)$ задаются выражениями (2.2.3.28).

Поскольку задача (2.2.3.17), (2.2.3.29) при $\mu = \mu_n$ с точностью до переобозначений совпадает с задачей (2.2.2.15), (2.2.2.21), ее решение можно найти с помощью формул

$$\begin{aligned} T_n(t) &= e^{\alpha_n(t+\tau)} \exp_d(\sigma_n t, \sigma_n \tau) \Phi_n(-\tau) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n \tau) [\Phi'_n(s) - \alpha_n \Phi_n(s)] ds, \quad (2.2.3.30) \\ \alpha_n &= c_1 - a_1 \mu_n, \quad \beta_n = c_2 - a_2 \mu_n, \quad \sigma_n = e^{-\alpha_n \tau} \beta_n, \end{aligned}$$

где $\exp_d(t, \tau)$ — экспонента с запаздыванием (2.2.1.29).

Подставив функции (2.2.3.30) в формулу (2.2.3.26), находим решение задачи (2.2.3.7) — (2.2.3.10):

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\mathbf{x}) \left\{ e^{\alpha_n(t+\tau)} \exp_d(\sigma_n t, \sigma_n \tau) \Phi_n(-\tau) + \right. \\ \left. + \int_{-\tau}^0 e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n \tau) [\Phi'_n(s) - \alpha_n \Phi_n(s)] ds \right\}, \quad (2.2.3.31)$$

где $\Phi_n(t) = \int_V [\varphi(\mathbf{x}, t) - u_0(\mathbf{x}, t)] X_n(\mathbf{x}) dV$.

Решение задачи 2. Рассмотрим теперь линейное неоднородное УрЧП с запаздыванием (2.2.3.11) — (2.2.3.12) с однородными граничными и начальным условиями (2.2.3.13) и (2.2.3.14).

Сначала разложим неоднородную составляющую уравнения (2.2.3.11) в ряд по собственным функциям задачи (2.2.3.16), (2.2.3.18):

$$F(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(\mathbf{x}), \quad F_n(t) = \int_V F(\mathbf{x}, t) X_n(\mathbf{x}) d\xi, \quad (2.2.3.32)$$

где функция $F(\mathbf{x}, t)$ определена формулой (2.2.3.12).

Решение задачи (2.2.3.11) — (2.2.3.14) ищем в виде ряда

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) X_n(\mathbf{x}), \quad (2.2.3.33)$$

который удовлетворяет однородным граничным условиям (2.2.3.13). Подставив (2.2.3.33) в (2.2.3.11) и учитывая (2.2.3.32), получим линейные неоднородные ОДУ с постоянным запаздыванием для функций $U_n(t)$:

$$U'_n(t) = (c_1 - a_1 \mu_n) U_n(t) + (c_2 - a_2 \mu_n) U_n(t - \tau) + F_n(t), \quad (2.2.3.34)$$

где функции $F_n(t)$ находятся с помощью второй формулы в (2.2.3.32). Для завершения формулировки задачи уравнения (2.2.3.34) дополним однородными начальными условиями

$$U_n(t) = 0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.3.35)$$

которые следуют из (2.2.3.14) и (2.2.3.33).

Задача (2.2.3.34) — (2.2.3.35) с точностью до переобозначений совпадает с задачей (2.2.2.28) — (2.2.2.29). Поэтому ее решение в области $t \geq 0$ можно представить в виде

$$U_n(t) = \int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n \tau) F_n(s) ds, \quad \sigma_n = e^{-\alpha_n \tau} \beta_n, \quad (2.2.3.36)$$

где параметры α_n и β_n определены в (2.2.3.30). Подставив (2.2.3.36) в (2.2.3.33) находим решение задачи (2.2.3.11)–(2.2.3.14):

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n \tau) F_n(s) ds \right] X_n(\mathbf{x}). \quad (2.2.3.37)$$

Формулы (2.2.3.4), (2.2.3.31), (2.2.3.37) являются основой для построения аналитических решений исходной задачи (2.2.3.1)–(2.2.3.3). Собственные значения μ_n и собственные функции определяются путем решения однородной задачи (2.2.3.16), (2.2.3.18).

► **Пример 2.8.** Полагая в (2.2.3.1) $L[u] = \Delta u$, где Δ – оператор Лапласа, приходим к задаче на собственные значения для однородного уравнения Гельмгольца (2.2.3.25). В трехмерном случае для однородных условий Дирихле на границах прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c , которые записываются так:

$$X|_{x=0} = X|_{x=a} = X|_{y=0} = X|_{y=b} = X|_{z=0} = X|_{z=c} = 0,$$

собственные значения и нормированные собственные функции имеют вид [436]:

$$\begin{aligned} \mu_{klm} &= \pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2} \right), \quad k, l, m = 1, 2, 3, \dots, \\ X_{klm}(x, y, z) &= \frac{8}{abc} \sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi l y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi m z}{c}\right). \end{aligned}$$

2.2.4. Задачи для линейных уравнений гиперболического типа с постоянным запаздыванием

Формулировка задачи. Рассмотрим первую начально-краевую задачу для одномерного однородного линейного уравнения гиперболического типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием вида

$$u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (2.2.4.1)$$

где $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 > 0$, определенного в области $\Omega = \{0 < x < h, t > 0\}$. Уравнение (2.2.4.1) дополним однородными граничными условиями

$$\Gamma_1[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, t > -\tau; \quad \Gamma_2[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = h, t > -\tau, \quad (2.2.4.2)$$

и согласованными начальными данными общего вида

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, t) \quad \text{при} \quad 0 < x < h, -\tau \leq t \leq 0, \\ u_t &= \varphi_t(x, t) \quad \text{при} \quad 0 < x < h, -\tau \leq t \leq 0. \end{aligned} \quad (2.2.4.3)$$

Будем считать, что входящие в граничные условия (2.2.4.2) линейные операторы $\Gamma_{1,2}[u]$ не зависят явно от t . Наиболее распространенные граничные условия приведены в третьем столбце табл. 2.2, где следует положить $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$. В частности, в случае граничных условий Дирихле в (2.2.4.2) следует положить $\Gamma_1[u] = \Gamma_2[u] = u$.

Замечание 2.4. Решение начально-краевой задачи для уравнения (2.2.4.1) при $a_2 = c_1 = 0$ с однородными граничными условиями Дирихле (2.2.4.2) и начальными данными (2.2.4.3) было получено методом разделения переменных в работе [476].

Процедура построения решения задачи (2.2.4.1)–(2.2.4.3). Сначала ищем частные решения уравнения (2.2.4.1) в виде произведения функций разных аргументов $u_p = X(x)T(t)$. Разделяя переменные в полученном уравнении, приходим к линейным ОДУ и ОДУ с запаздыванием второго порядка

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \quad (2.2.4.4)$$

$$T''(t) = (c_1 - a_1 \lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2 \lambda^2)T(t - \tau). \quad (2.2.4.5)$$

Требуя, чтобы функция $u_p = X(x)T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (2.2.4.2), приходим к однородным граничным условиям для функции X :

$$\Gamma_1[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \Gamma_2[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = h. \quad (2.2.4.6)$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (2.2.4.4), (2.2.4.6), которая совпадает с задачей (2.2.2.14), (2.2.2.16), существуют только для дискретного множества значений параметра λ :

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.4.7)$$

Собственные значения и собственные функции для однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (2.2.4.4), для пяти наиболее распространенных граничных условий приведены в табл. 2.3.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (2.2.4.5), получим соответствующие ОДУ второго порядка с запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Решение линейной начально-краевой задачи (2.2.4.1)–(2.2.4.3) ищем в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t), \quad (2.2.4.8)$$

где функции $u_{pn}(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ — частные решения уравнения (2.2.4.1), удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.2.4.2).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с запаздыванием (2.2.4.5) при $\lambda = \lambda_n$, представим первое начальное условие (2.2.4.3) в виде разложения по собственным функциям:

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)X_n(x), \quad 0 \leq x \leq h, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.4.9)$$

Умножая (2.2.4.9) на $X_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$) и интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h , а затем учитывая, что собственные функции $X_n(x)$

и $X_m(x)$ ортогональны при $n \neq m$, т. е. выполняются соотношения (2.2.1.21), находим функции $\varphi_n(t)$:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \varphi(\xi, t) X_n(\xi) d\xi, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.4.10)$$

где $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi) d\xi$.

Из соотношений (2.2.4.8) и (2.2.4.9) и начальных условий (2.2.4.3) получим начальные условия для ОДУ с запаздыванием (2.2.2.15) при $\lambda = \lambda_n$ в виде

$$T_n(t) = \varphi_n(t), \quad T'_n(t) = \varphi'_n(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.2.4.11)$$

где функции $\varphi_n(t)$ задаются выражениями (2.2.4.10).

Для построения аналитического решения задачи типа Коши для ОДУ второго порядка с запаздыванием (2.2.4.5) при $c_1 = 0$ и начальными данными (2.2.4.11) можно использовать результаты работы [476], где рассматривалась аналогичная задача для ОДУ с постоянным запаздыванием. Соответствующее решение для функций $T_n(t)$, полученное методом шагов, весьма громоздко и приведено в разд. 1.2.2. Кроме того, решение задачи (2.2.4.5), (2.2.4.11) может быть найдено с помощью преобразования Лапласа (см. разд. 1.4.1) или с помощью численных методов (см. разд. 5.1).

После определения функций $T_n(t)$ решение исходной задачи (2.2.4.1) — (2.2.4.3) определяется рядом (2.2.4.8), в котором собственные функции $X_n(x)$ (и собственные значения λ_n) для пяти наиболее распространенных граничных условий берутся из табл. 2.3.

Отметим, что начально-краевые задачи (2.2.4.1) — (2.2.4.3) при выполнении неравенства $a_2 > a_1$ некорректны по Адамару (см. замечание 2.8 в разд. 2.2.5).

Замечание 2.5. В [476] было получено аналитическое решение начально-краевой задачи для одномерного линейного однородного уравнения гиперболического типа с постоянным запаздыванием (2.2.4.1) при $a_2 = c_1 = 0$ с однородными граничными условиями Дирихле $u|_{x=0} = u|_{x=h} = 0$.

2.2.5. Условия устойчивости и неустойчивости решений линейных начально-краевых задач

Начально-краевая задача с граничными условиями Дирихле. Решения специального вида. Рассмотрим функции экспоненциально-тригонометрического вида

$$u_n = A_n \exp(\varrho_n t) \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2.5.1)$$

где A_n — свободный параметр, а экспоненциальный показатель ϱ_n удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\varrho_n = -\left(a_1 + a_2 e^{-\varrho_n \tau}\right) \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 + c_1 + c_2 e^{-\varrho_n \tau}. \quad (2.2.5.2)$$

Функции (2.2.5.1) при условии (2.2.5.2) являются точными решениями однородного уравнения параболического типа с постоянным запаздыванием (2.2.1.1) при $f(x, t) \equiv 0$ и удовлетворяют однородным граничным условиям (2.2.1.2) при $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$. Отметим, что трансцендентное уравнение (2.2.5.2) можно получить из ОДУ с запаздыванием (2.2.1.22), если искать его точные решения в экспоненциальном виде $T_n = A_n \exp(\varrho_n t)$.

Решение начально-краевой задачи для однородного уравнения параболического типа с постоянным запаздыванием (2.2.1.1) с однородными граничными условиями (2.2.1.2) и достаточно произвольным начальным условием может быть представлена в виде ряда, членами которого являются функции вида (2.2.5.1)–(2.2.5.2). Это решение будет стремиться тривиальному решению, если все корни характеристического уравнения (2.2.5.2) будут иметь отрицательные действительные части (в этом случае говорят, что тривиальное решение является асимптотически устойчивым). Если хотя бы один корень характеристического уравнения (2.2.5.2) будет иметь положительную действительную часть, то тривиальное (и любое другое) решение будет неустойчивым.

Необходимые и достаточные условия устойчивости решения. При отсутствии запаздывания $\tau = 0$ уравнение (2.2.5.2) имеет единственный действительный корень $\varrho_n = c_1 + c_2 - (a_1 + a_2)(\pi n/h)^2$. В этом случае при выполнении условия

$$c_1 + c_2 - (a_1 + a_2)(\pi/h)^2 < 0$$

все экспоненциальные показатели ϱ_n будут отрицательны и соответствующие решения (2.2.5.1) будут стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Далее считаем, что $\tau > 0$. Используя обозначения (2.2.1.27), запишем уравнение (2.2.5.2) в более компактной форме

$$\begin{aligned} \varrho_n - \alpha_n - \beta_n e^{-\varrho_n \tau} &= 0, \\ \alpha_n &= c_1 - a_1 \lambda_n^2, \quad \beta_n = c_2 - a_2 \lambda_n^2, \quad \lambda_n = \pi n/h. \end{aligned} \quad (2.2.5.3)$$

С точностью до очевидных переобозначений уравнение (2.2.5.3) совпадает с трансцендентным уравнением (1.1.3.3), которое рассматривалось в разд. 1.1.3.

Все корни уравнения характеристического уравнения (2.2.5.3) будут иметь отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие три неравенства (см. теорему Хейса в разд. 1.3.2):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (c_1 - a_1 \lambda_n^2) \tau < 1, \\ \text{(ii)} \quad & c_1 + c_2 - (a_1 + a_2) \lambda_n^2 < 0, \\ \text{(iii)} \quad & c_2 - a_2 \lambda_n^2 + \sqrt{(c_1 - a_1 \lambda_n^2)^2 + (\mu/\tau)^2} > 0, \end{aligned} \quad (2.2.5.4)$$

где $\lambda_n = \pi n/h$, $n = 1, 2, \dots$, μ – корень трансцендентного уравнения $\mu = \tau(c_1 - a_1 \lambda_n^2) \operatorname{tg} \mu$, удовлетворяющий условию $0 < \mu < \pi$ (в вырожденном случае при $c_1 - a_1 \lambda_n^2 = 0$ следует положить $\mu = \pi/2$).

При одновременном выполнении неравенств (2.2.5.4) все решения однородного уравнения параболического типа с постоянным запаздыванием (2.2.1.1),

удовлетворяющие однородным граничным условиям вида (2.2.1.2) при $g_1 = g_2 = 0$, стремятся к тривиальному решению при $t \rightarrow \infty$.

Достаточные условия асимптотической устойчивости решения. Многопараметрические неравенства (2.2.5.4), содержащие шесть непрерывных параметров $a_1, a_2, c_1, c_2, h, \tau$ и дискретный параметр n , неудобны для практического использования. Ниже приведены более простые достаточные условия, при выполнении которых все корни уравнения характеристического уравнения (2.2.5.3) будут иметь отрицательные действительные части.

Поскольку $a_1 > 0, a_2 \geq 0, \lambda_n \geq \lambda_1$, то первые два неравенства (2.2.5.4) выполняются для всех n , если они выполняются для $n = 1$. Используя неравенство $\sqrt{z_1^2 + z_2^2} > -z_1$ при $z_2 \neq 0$, нетрудно показать, что последнее условие (2.2.5.4) выполняется, если выполняется неравенство $c_2 - c_1 + (a_1 - a_2)\lambda_n^2 \geq 0$. При $a_1 \geq a_2$ в этом неравенстве можно заменить λ_n на λ_1 . В результате получим следующие условия:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (c_1 - a_1\lambda_1^2)\tau < 1, \\ \text{(ii)} \quad & c_1 + c_2 - (a_1 + a_2)\lambda_1^2 < 0, \\ \text{(iii)} \quad & c_2 - c_1 + (a_1 - a_2)\lambda_1^2 \geq 0, \\ \text{(iv)} \quad & a_1 \geq a_2 \geq 0, \quad a_1 > 0, \end{aligned} \tag{2.2.5.5}$$

где $\lambda_1 = \pi/h$. При одновременном выполнении неравенств (2.2.5.5) все корни уравнения характеристического уравнения (2.2.5.3) будут иметь отрицательные действительные части.

► **Пример 2.9.** При $c_1 = c_2 = 0$ и $a_1 > a_2 \geq 0$ условия (2.2.5.5) выполняются и все решения однородного уравнения параболического типа с постоянным запаздыванием (2.2.1.1), удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.2.1.2), стремятся к тривиальному решению при $t \rightarrow \infty$. ◀

Замечание 2.6. Условия устойчивости (2.2.5.5) можно использовать также, если неравенства $a_1 \geq a_2 \geq 0$ в п. (iv) заменить на $a_2 < 0$ и $a_1 + a_2 > 0$.

Условия неустойчивости решений. Решения однородного уравнения параболического типа с постоянным запаздыванием (2.2.1.1), удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.2.1.2), будут неустойчивыми, если нарушается хотя бы одно из неравенств (2.2.5.4). Поэтому для неустойчивости решений достаточно, например, выполнения одного из двух неравенств:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (c_1 - a_1\lambda_1^2)\tau > 1, \\ \text{(ii)} \quad & c_1 + c_2 - (a_1 + a_2)\lambda_1^2 > 0, \end{aligned} \tag{2.2.5.6}$$

где $\lambda_1 = \pi/h$.

Отметим, что при $a_1 > a_2$ характеристическое уравнение (2.2.5.2) может иметь лишь конечное число корней с положительной действительной частью.

Рассмотрим теперь левую часть последнего неравенства (2.2.5.4). При больших n имеем $\lambda_n \rightarrow \infty$ и

$$c_2 - a_2 \lambda_n^2 + \sqrt{(c_1 - a_1 \lambda_n^2)^2 + (\mu/\tau)^2} = (a_1 - a_2) \lambda_n^2 + c_2 - c_1 + O(\lambda_n^{-2}).$$

Поэтому при выполнении условия

$$a_2 > a_1 \quad (2.2.5.7)$$

для достаточно большого n выполняется неравенство

$$c_2 - a_2 \lambda_n^2 + \sqrt{(c_1 - a_1 \lambda_n^2)^2 + (\mu/\tau)^2} < 0,$$

что соответствует области неустойчивости.

Асимптотическая формула для действительной части экспоненциального показателя ϱ_n при больших n . Решения трансцендентного уравнения (2.2.5.3) можно выразить через s с помощью функции Ламберта $W = W(z)$ в виде (ср. с формулой (1.1.3.5)):

$$\varrho_n = \alpha_n + \frac{1}{\tau} W(z), \quad z = \beta_n \tau e^{-\alpha_n \tau}, \quad (2.2.5.8)$$

где под W понимаются все ветви этой функции.

При $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ для достаточно больших n коэффициенты α_n и β_n отрицательны, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = -\infty$. Учитывая сказанное и используя два главных члена асимптотической формулы для функции Ламберта (1.1.3.10), для действительной части экспоненциального показателя ϱ_n при $a_1/a_2 = O(1)$ получим предельное соотношение [68]:

$$\operatorname{Re} \varrho_n = \frac{1}{\tau} \ln \frac{a_2}{a_1} \quad (\text{при } n \rightarrow \infty). \quad (2.2.5.9)$$

Таким образом, для достаточно больших n могут возникнуть две качественно различные ситуации:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varrho_n &< 0 & \text{при } a_2 < a_1, \\ \operatorname{Re} \varrho_n &> 0 & \text{при } a_2 > a_1. \end{aligned} \quad (2.2.5.10)$$

В первом случае (2.2.5.10) тривиальное решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от выполнения или невыполнения неравенств (2.2.5.4) (или более простых условий (2.2.5.5) и (2.2.5.6)). Во втором случае (2.2.5.10) при достаточно большом n , соответствующее точное решение, полученное выделением действительной части в (2.2.5.1), будет экспоненциально возрастать при увеличении времени t , т. е. тривиальное решение начально-краевой задачи для однородного уравнения с постоянным запаздыванием (2.2.1.1) с однородными граничными условиями (2.2.1.2) будет неустойчивым.

Замечание 2.7. *Специальный случай $a_1 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$ обсуждается в разд. 2.3.2.*

Неустойчивость неоднородной начально-краевой задачи с запаздыванием. Покажем, что неустойчивость тривиального решения однородного уравнения с однородными граничными условиями приводит к неустойчивости любого решения общей неоднородной начально-краевой задачи с запаздыванием (2.2.1.1) – (2.2.1.3).

Действительно, пусть трансцендентное уравнение (2.2.5.2) имеет корень ϱ_n с $\operatorname{Re} \varrho_n > 0$, а $u = u(x, t)$ – произвольное решение первой начально-краевой задачи с запаздыванием (2.2.1.1) – (2.2.1.3). Тогда функция

$$u_s(x, t) = u(x, t) + u_n(x, t), \quad (2.2.5.11)$$

где $u_n(x, t)$ – экспоненциально растущая функция вида (2.2.5.1) с $\operatorname{Re} \varrho_n > 0$, является решением уравнения (2.2.1.1) и удовлетворяет неоднородным граничным условиям (2.2.1.2). Нетрудно проверить, что для достаточно больших n выполнено неравенство

$$|u_s(x, t) - u(x, t)| \leq |A_n| \quad \text{при} \quad 0 < x < h, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.2.5.12)$$

Из (2.2.5.12) видно, что для достаточно малого $|A_n| = \varepsilon$ начальные данные для решений u и u_s уравнения (2.2.1.1) сколь угодно мало отличаются друг от друга, однако при $t \rightarrow \infty$ эти решения в точке $x = h/2$ будут неограниченно расходиться из-за положительности действительной части экспоненциального показателя $\operatorname{Re} \varrho_n > 0$ при больших n в формуле (2.2.5.1), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_s(x, t) - u(x, t)|_{x=h/2} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Сказанное означает, что любое решение начально-краевой задачи с запаздыванием (2.2.1.1) – (2.2.1.3) при наличии корня трансцендентного уравнения (2.2.5.2) с $\operatorname{Re} \varrho_n > 0$ является неустойчивым относительно изменения начальных данных.

Условия устойчивости и неустойчивости решений других начально-краевых задач. Условия (2.2.5.4), (2.2.5.5), (2.2.5.6), (2.2.5.7) можно использовать для анализа устойчивости и неустойчивости решений других начально-краевых задач. В частности, решения всех задач, описанных в разд. 2.2.2, неустойчивы при выполнении неравенства (2.2.5.7).

Для определения устойчивости или неустойчивости решений начально-краевых задач в достаточные условия (2.2.5.5), (2.2.5.6) следует подставить наименьшее положительное собственное значение λ_1 , приведенное в табл. 2.3. Для граничных условий Неймана (вторая строка табл. 2.3) дополнительно надо исследовать знак действительной части корня ϱ_0 трансцендентного уравнения (2.2.5.2) при $n = 0$.

Замечание 2.8. Можно показать [68], что начально-краевые задачи для уравнений гиперболического типа (2.2.4.1) с постоянным запаздыванием, рассмотренные в разд. 2.2.4, также неустойчивы при выполнении неравенства $a_2 > a_1$.

2.3. Гиперболическое и дифференциально-разностное уравнения теплопроводности

2.3.1. Вывод гиперболического и дифференциально-разностного уравнений теплопроводности

Классическое уравнение теплопроводности (диффузии). Классическая модель теплопроводности (диффузии) основана на *законе Фурье* [47]:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla \theta, \quad (2.3.1.1)$$

где \mathbf{q} — поток тепла, λ — коэффициент теплопроводности, θ — температура, ∇ — оператор градиента.

В простейшем случае при отсутствии источников тепла *закон сохранения энергии* имеет вид

$$\rho c_p \theta_t = -\operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (2.3.1.2)$$

где t — время, ρ — плотность, c_p — удельная теплоемкость тела (среды).

Подставив (2.3.1.1) в (2.3.1.2), получим *классическое уравнение теплопроводности* [35, 47]:

$$\theta_t = a \Delta \theta, \quad (2.3.1.3)$$

где $a = \lambda/(\rho c_p)$ — коэффициент температуропроводности, Δ — оператор Лапласа (в трехмерном случае имеем $\Delta \theta = \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}$, где x, y, z — декартовы координаты).

Отметим, что уравнение диффузии также записывается в виде (2.3.1.3), где θ — концентрация, a — коэффициент диффузии.

Уравнение теплопроводности (2.3.1.3) является уравнением параболического типа и обладает физически парадоксальным свойством — бесконечной скоростью распространения возмущений. Подобная ситуация не наблюдается на практике, что свидетельствует об ограниченной области применимости таких уравнений.

Гиперболическое уравнение теплопроводности (диффузии). Указанный выше недостаток модели Фурье (2.3.1.1) привел к необходимости разработки других моделей теплопроводности (диффузии), которые дают конечную скорость распространения возмущений. В результате появилась более сложная модель теплопроводности, основанная на дифференциальном *законе Каттано — Вернотте* [175, 176, 529, 530] (см. также [47, 79, 239, 315]):

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla \theta - \tau \mathbf{q}_t. \quad (2.3.1.4)$$

Модель (2.3.1.4) отличается от закона Фурье (2.3.1.1) наличием дополнительного нестационарного члена, пропорционального τ . При $\tau = 0$ модель (2.3.1.4) переходит в (2.3.1.1).

Использование модели (2.3.1.4) с учетом закона сохранения (2.3.1.2) приводит к уравнению теплопроводности гиперболического типа

$$\tau \theta_{tt} + \theta_t = a \Delta \theta, \quad (2.3.1.5)$$

где время релаксации τ считается малым. При $\tau = 0$ уравнение (2.3.1.5) переходит в (2.3.1.3).

Оценки величин теплового и диффузионного времени релаксации.

1°. *Оценки теплового времени релаксации.* Время релаксации τ , входящее в модель (2.3.1.4) и уравнение (2.3.1.5) является характеристикой неравновесности процесса теплопроводности и учитывает инерционность теплового потока. Для металлов, сверхпроводников и полупроводников теоретические оценки теплового времени релаксации дают $\tau \approx 10^{-12} - 10^{-6}$ с [247, 410, 413, 527]. Столь малые значения τ нужно учитывать при анализе высокоинтенсивных нестационарных процессов, время протекания которых сопоставимо с временем релаксации, например, при обработке материалов с использованием сверхкоротких лазерных импульсов и высокоскоростных электронных устройств [111, 410, 477]. К подобным процессам относятся также процессы нагревания при трении с высокой скоростью, локального нагрева при динамическом распространении трещины в околозвуковом режиме и т.п. [44, 309]. Для материалов и сред с неоднородной внутренней структурой (капиллярно-пористые тела, пасты, суспензии, порошки, газожидкостные многофазные среды, биологические субстанции, пищевые продукты, древесина и др.) время релаксации может быть значительно больше [10, 47, 86, 203, 208]. Например, в [313, 389] утверждается, что тепловое время релаксации мясных продуктов и некоторых сыпучих сред может давать значения τ порядка десяти и более секунд.

2°. *Тепловая и диффузионная скорости распространения возмущений. Диффузионное время релаксации.* Для простых систем, таких как смеси идеальных газов, характерное время диффузионной релаксации τ_D , т. е. время установления локально-равновесных значений концентрации диффундирующего компонента, совпадает с характерным временем тепловой релаксации τ_T (здесь для наглядности поставлен индекс «Т»), т. е. временем установления локально-равновесных значений температуры. Однако в системах с более сложной структурой, в частности в расплавах металлов [79, 80] имеем $\tau_D \gg \tau_T$. В таких системах сначала устанавливается тепловое равновесие и лишь затем диффузионное. Каждой из этих стадий установления локального равновесия соответствует своя характерная скорость (которая определяется исходя из гиперболического уравнения теплопроводности (2.3.1.5)): диффузионная скорость $V_D = (D/\tau_D)^{1/2}$ и скорость тепловой волны $V_T = (a/\tau_T)^{1/2}$. Для однородных газообразных и жидких сред приближенно можно считать, что скорость тепловой волны V_T примерно равна скорости звука. Для расплавов металлов $V_D \approx 1 - 10$ м/с и $V_T \approx 10^3 - 10^4$ м/с, т. е. $V_D \ll V_T$. Скорость распространения теплоты в воздухе примерно равна скорости звука $V_T \approx 330$ м/с. Диффузионная скорость V_D в капиллярно-пористых телах меньше, чем V_T

примерно в $10^6 - 10^7$ раз, поэтому ее необходимо учитывать в уравнениях массопереноса [47] (см. стр. 455). Для диффузии в полимерах время релаксации составляет несколько секунд [312]. Приведенные примеры показывают, что тепловое и диффузионное времена релаксации могут варьироваться в очень широких пределах и должны учитываться при решении многих задач тепло- и массопереноса.

Дифференциально-разностное уравнение теплопроводности с конечным временем релаксации. Для теоретического обоснования дифференциальной модели Каттанео — Вернотте (2.3.1.4) часто (но не всегда) используют дифференциально-разностное соотношение для теплового потока [59, 79, 239, 449, 521]:

$$\mathbf{q}|_{t+\tau} = -\lambda \nabla \theta, \quad (2.3.1.6)$$

в котором левая часть вычисляется в момент времени $t + \tau$, а правая часть — в момент времени t . Физический смысл соотношения (2.3.1.6) заключается в том, что процесс теплопереноса в локально-неравновесных средах обладает инерционными свойствами: система реагирует на тепловое воздействие (или тепловой поток откликается на изменение градиента температуры) не в тот же момент времени t , как в классическом локально-равновесном случае, а на время релаксации τ позже.

В результате приходим к линейному дифференциально-разностному уравнению теплопроводности с конечным временем релаксации

$$\theta_t|_{t+\tau} = a \Delta \theta, \quad (2.3.1.7)$$

где $\theta|_{t+\tau} = \theta(\mathbf{x}, t + \tau)$.

Замечание 2.9. Тот факт, что уравнение теплопроводности с временным запаздыванием может оказаться более адекватной моделью, был впервые отмечен Максвеллом [382].

Если формально разложить левую часть уравнения (2.3.1.7) в ряд Тейлора по малому τ и удержать два главных члена разложения, то получим гиперболическое уравнение теплопроводности (2.3.1.5) (это стандартное рассуждение, используемое в литературе, как будет показано в следующем разделе, никак не оправдано, поскольку существенным образом изменяет свойства уравнения).

Обозначая в (2.3.1.7) $u = \theta(\mathbf{x}, t + \tau)$, приходим к УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \Delta w, \quad w = u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad (2.3.1.8)$$

которое является специальным частным случаем уравнения (2.1.1.1).

2.3.2. Задача Стокса и начально-краевые задачи для дифференциально-разностного уравнения теплопроводности

Точные решения одномерного дифференциально-разностного уравнения теплопроводности. В одномерном случае дифференциально-разностное урав-

нение теплопроводности (2.3.1.7) упрощается и принимает вид

$$\theta_t|_{t+\tau} = a\theta_{xx}. \quad (2.3.2.1)$$

Здесь, как и ранее, левая часть вычисляется в момент времени $t + \tau$, а правая часть — в момент времени t .

Ниже приведены некоторые точные решения уравнения (2.3.2.1).

1°. Точные решения с мультипликативным разделением переменных:

$$\theta = [A \cos(kx) + B \sin(kx)]e^{-\lambda t}, \quad ak^2 = \lambda e^{-\lambda\tau} \quad (\lambda > 0); \quad (2.3.2.2)$$

$$\theta = [A \exp(kx) + B \exp(-kx)]e^{-\lambda t}, \quad ak^2 = -\lambda e^{-\lambda\tau} \quad (\lambda < 0), \quad (2.3.2.3)$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

Решение (2.3.2.2) является периодическим по пространственной координате x и затухает при $t \rightarrow \infty$. При $0 < \lambda < \infty$ и $\tau > 0$ область изменения параметра k ограничена: $0 < k \leq k_{\max} = (ea\tau)^{-1/2}$. При заданном значении k , таком, что $0 < k < k_{\max}$, уравнение (2.3.2.1) допускает два вещественных решения вида (2.3.2.2), соответствующих двум положительным корням λ_1 и λ_2 трансцендентного уравнения $\lambda e^{-\lambda\tau} = ak^2$.

Решения (2.3.2.2) и (2.3.2.3) — частные случаи решения с разделяющимися переменными

$$\theta = \varphi(x)\psi(t), \quad (2.3.2.4)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\varphi_{xx}'' + c\varphi = 0, \quad (2.3.2.5)$$

$$\psi_t'(t + \tau) + a\psi(t) = 0, \quad (2.3.2.6)$$

первое из которых является обыкновенным дифференциальным уравнением, а второе — дифференциально-разностным уравнением. Заменой $\bar{t} = t + \tau$ последнее уравнение приводится к стандартному виду ОДУ с запаздыванием (его решение приведено в разд. 1.1.3).

2°. Решение, периодическое по t :

$$\theta = e^{-\gamma x} [A \cos(\omega t - \beta x) + B \sin(\omega t - \beta x)] + C, \quad (2.3.2.7)$$

$$\beta = \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{1/2} [1 + \sin(\tau\omega)]^{1/2}, \quad \gamma = \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{1/2} \frac{\cos(\tau\omega)}{[1 + \sin(\tau\omega)]^{1/2}},$$

где A, B, C, ω — произвольные постоянные.

Решение (2.3.2.7) затухает при $x \rightarrow \infty$, если $C = 0$ и $\tau\omega < \frac{1}{2}\pi$.

3°. Полиномиальные решения:

$$\theta = Ax + B,$$

$$\theta = A(x^2 + 2at) + B,$$

$$\theta = A(x^3 + 6atx) + B,$$

$$\theta = A[x^4 + 12a(t - \tau)x^2 + 12a^2(t - 2\tau)^2] + B,$$

$$\theta = A[x^5 + 20a(t - \tau)x^3 + 60a^2(t - 2\tau)^2x] + B,$$

$$\theta = x^{2n} + \sum_{k=1}^n \frac{(2n)(2n-1)\dots(2n-2k+1)}{k!} a^k (t - k\tau)^k x^{2n-2k},$$

$$\theta = x^{2n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)(2n)\dots(2n-2k+2)}{k!} a^k (t - k\tau)^k x^{2n-2k+1},$$

где A и B — произвольные постоянные, а n — натуральное число. Первые три решения независимы от времени релаксации τ .

Задача Стокса с периодическим граничным условием ($0 \leq x < \infty$). Рассмотрим задачу Стокса без начальных данных, которая описывается одномерным дифференциально-разностным уравнением теплопроводности (2.3.2.1) и граничными условиями специального вида

$$\theta = A \cos(\omega t) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.3.2.8)$$

где A, ω — произвольные постоянные. Требуется найти периодическое по времени t решение уравнения (2.3.2.1) граничными условиями (2.3.2.8).

Задача (2.3.2.1), (2.3.2.8) имеет точное решение, являющееся частным случаем решения (2.3.2.7) (см. [59, 449]):

$$\theta = Ae^{-\gamma x} \cos(\omega t - \beta x), \quad (2.3.2.9)$$

где

$$\beta = \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{1/2} [1 + \sin(\tau\omega)]^{1/2}, \quad \gamma = \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{1/2} \frac{\cos(\tau\omega)}{[1 + \sin(\tau\omega)]^{1/2}}, \quad (2.3.2.10)$$

$$\omega \neq \frac{1}{\tau} \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Решение (2.3.2.9), (2.3.2.10) при $\tau = 0$ переходит в решение аналогичной задачи Стокса без начальных условий для классического параболического уравнения теплопроводности, которое дается формулой (2.3.2.9), где

$$\beta = \gamma = \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{1/2}. \quad (2.3.2.11)$$

Решение аналогичной задачи без начальных условий для одномерного гиперболического уравнения теплопроводности (2.3.1.5) (при $\Delta\theta = \theta_{xx}$) для дифференциальной модели Каттанео — Вернотте (2.3.1.4) описывается формулой

(2.3.2.9), где

$$\begin{aligned}\beta &= \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{1/2} [\tau\omega + (1 + \tau^2\omega^2)^{1/2}]^{1/2}, \\ \gamma &= \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{1/2} [\tau\omega + (1 + \tau^2\omega^2)^{1/2}]^{-1/2}.\end{aligned}\quad (2.3.2.12)$$

Сравнение формул (2.3.2.9), (2.3.2.10) и (2.3.2.9), (2.3.2.11) показывает, что при малых $\omega\tau$ (точнее, при $0 < \omega\tau < \pi/2$) декремент затухания γ для дифференциально-разностной модели меньше, чем для классической модели (которая описывается параболическим уравнением), а коэффициент сдвига β для дифференциально-разностной модели больше, чем для классической модели.

Два главных члена разложения формул (2.3.2.10) и (2.3.2.12) в ряд по малым τ (при $\omega\tau \ll 1$) совпадают. При малых $\tau > 0$ и больших частотах $\omega \gg \tau^{-1}$ коэффициенты (2.3.2.12) имеют следующие асимптотики:

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\tau}{a}}, \quad \gamma = \frac{1}{2\sqrt{a\tau}}, \quad (2.3.2.13)$$

т. е. при больших частотах декремент затухания γ не зависит от частоты ω , что качественно отличается от соответствующего решения для параболического уравнения теплопроводности (2.3.2.11). Оба определяющих параметра в (2.3.2.13) существенным образом зависят от параметра возмущения τ . При больших значениях произведения $\omega\tau$ решения (2.3.2.9), (2.3.2.10) и (2.3.2.9), (2.3.2.12) отличаются качественно — декремент затухания γ для дифференциально-разностной модели существенно зависит от частоты ω (и не стремится к постоянной величине как модели Каттанео — Вернотте, см. асимптотики (2.3.2.13)).

Точное решение задачи Стокса с объемной реакцией первого порядка. Одномерное линейное дифференциально-разностное уравнение тепломассопереноса с источником имеет вид

$$\theta_t|_{t+\tau} = a\theta_{xx} - k\theta|_{t+\tau}, \quad (2.3.2.14)$$

где $\theta|_{t+\tau} = \theta(x, t+\tau)$. В задачах массопереноса, последнее слагаемое при $k > 0$ в уравнении (2.3.2.14) соответствует объемной химической реакции первого порядка [433].

Рассмотрим задачу Стокса без начальных данных для одномерного дифференциально-разностного уравнения теплопроводности с источником (2.3.2.14) со специальными периодическими граничными условиями (2.3.2.8).

Задача (2.3.2.14), (2.3.2.8) имеет точное решение

$$\begin{aligned}\theta &= Ae^{-\gamma x} \cos(\omega t - \beta x), \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2a}} [\sqrt{\omega^2 + k^2} + \omega \sin(\tau\omega) - k \cos(\tau\omega)]^{1/2}, \\ \gamma &= \frac{\omega \cos(\tau\omega) + k \sin(\tau\omega)}{\sqrt{2a} [\sqrt{\omega^2 + k^2} + \omega \sin(\tau\omega) - k \cos(\tau\omega)]^{1/2}}.\end{aligned}\quad (2.3.2.15)$$

В предельном случае $k = 0$, формулы (2.3.2.15) переходят в (2.3.2.9), (2.3.2.10).

Замечание 2.10. Замена

$$\theta(x, t) = e^{-kt} \eta(x, t)$$

преобразует уравнение (2.3.2.14) к более простому уравнению без источника вида (2.3.2.1):

$$\eta_t|_{t+\tau} = a e^{k\tau} \eta_{xx}.$$

Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения теплопроводности. Первая начально-краевая задача для одномерного дифференциально-разностного уравнения теплопроводности (2.3.2.1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} u_t &= a w_{xx}, \quad w = u(x, t - \tau); \\ u &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad t > -\tau; \quad u = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = h, \quad t > -\tau; \\ u &= \varphi(x, t) \quad \text{при} \quad 0 < x < h, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (2.3.2.16)$$

где использовано обозначение $u(x, t) = \theta(x, t + \tau)$.

Задача (2.3.2.16) — частный случай задачи (2.2.1.1) — (2.2.1.3) при $a_1 = 0$, $a_2 = a$, $c_1 = c_2 = 0$, $f(x, t) \equiv 0$. Из результатов, представленных в разд. 2.2.5 следует, что однородная задача (2.3.2.16) при $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$ и $\varphi(x, t) \equiv 0$ допускает точные решения (2.2.5.1), где экспоненциальный показатель λ_n выражается через функцию Ламберта (см. формулу (2.2.5.8) при $\alpha_n = 0$):

$$\lambda_n = \frac{1}{\tau} W(z), \quad z = -a\tau \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2. \quad (2.3.2.17)$$

Используя асимптотическую формулу для функции Ламберта (1.1.3.10), для действительной части λ_n при достаточно больших n получим [68]:

$$\operatorname{Re} \lambda_n = \frac{1}{\tau} (2 \ln n - \ln \ln n + O(1)), \quad (2.3.2.18)$$

т. е. $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому при больших n соответственное точное решение, полученное выделением действительной части в (2.2.5.1), будет экспоненциально возрастать при увеличении времени t , а начально-краевая задача с запаздыванием (2.3.2.16) неустойчива относительно малых возмущений начальных данных (для доказательства этого факта используются рассуждения, аналогичные проведенным в разд. 2.2.5). По-видимому, впервые этот факт был обнаружен в работе [308], в которой рассматривалось уравнение (2.3.2.1) с однородными граничными условиями первого рода и специальным начальным условием (см. также [59, 300]).

Таким образом, попытка обобщения классической модели теплопроводности (2.3.1.1) с помощью использования дифференциально-разностной модели (2.3.1.6) с конечным временем релаксации τ (запаздыванием) приводит к задаче (2.3.2.16), решения которой неустойчивы при любых $\tau > 0$. Это означает, что дифференциально-разностная модель (2.3.1.6) непригодна для описания тепловых (и диффузионных) процессов.

Отметим, что дифференциальная модель Каттанео — Вернотте (2.3.1.4) приводит к устойчивому тривиальному решению начально-краевой задачи для гиперболического уравнения теплопроводности (2.3.1.5) (оба корня соответствующего характеристического уравнения либо отрицательны, либо имеют отрицательные действительные части). Вывод гиперболического уравнения теплопроводности (2.3.1.5) из дифференциально-разностного уравнения (2.3.1.7) путем разложения по малому τ некорректен при $t \sim \tau$ (при разложении предполагается, что $\tau \ll t$). Именно при малых временах $t \sim \tau$ использование гиперболического уравнения теплопроводности (2.3.1.5) позволяет устранить описанный ранее недостаток параболического уравнения теплопроводности (2.3.1.3).

2.4. Линейные начально-краевые задачи с пропорциональным запаздыванием

2.4.1. Предварительные замечания

В настоящее время имеется сравнительно немного публикаций, посвященных анализу и решению уравнений в частных производных с пропорциональным запаздыванием. В [587] с помощью линейного УрЧП первого порядка с пропорциональным запаздыванием моделируется рост и деление клеток, имеющих распределение по размеру. Его решение ищется в виде ряда, члены которого определяются путем решения более простых УрЧП без запаздывания. В [218] исследуется более сложное линейное реакционно-диффузионное уравнение с пропорциональным аргументом по пространственной переменной (оно получено добавлением диффузионного члена к уравнению, исследованному в [587]).

В работе [355] кратко обсуждается начально-краевые задачи для линейных уравнений теплопроводности и волновых уравнений с пропорциональным запаздыванием по двум аргументам вида

$$u_t(\alpha^2 x, t) = u_{xx}(x, \beta t) \quad \text{и} \quad u_{tt}(\alpha^2 x, t) = u_{xx}(x, \beta^2 t)$$

с однородными граничными условиями Дирихле и начальными условиями общего вида. Для построения решений используется метод разделения переменных. Осложняющим фактором в этих задачах является неортогональность системы собственных функций $X_n(x)$.

В работах [74, 75, 78], рассматривались вопросы однозначной разрешимости и гладкости линейных краевых задач для эллиптических УрЧП с растяжениями и сжатиями аргументов неизвестной функции под знаками старших производных (см. также [53]).

Аналитические методы решения некоторых линейных и нелинейных УрЧП с пропорциональными запаздываниями обсуждаются в статьях [97, 105, 263,

444]. В [502] строится конечно-разностная схема численного интегрирования УрЧП первого порядка с постоянным запаздыванием по t и пропорциональным запаздыванием по x . Работы [125, 479, 514] посвящены численным методам решения УрЧП с пропорциональным запаздыванием [125, 479] и более сложным переменным запаздыванием [514].

2.4.2. Первая начально-краевая задача для уравнения параболического типа с пропорциональным запаздыванием

Формулировка задачи. Рассмотрим первую начально-краевую задачу для одномерного линейного однородного уравнения параболического типа с постоянными коэффициентами и пропорциональным запаздыванием

$$u_t = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt), \quad (2.4.2.1)$$

определенного в области $\Omega = \{0 < x < h, t > 0\}$ (считается, что $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 + a_2 > 0$, $0 < p < 1$). Уравнение (2.4.2.1) дополним однородными граничными условиями первого рода (условиями Дирихле):

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \quad (2.4.2.2)$$

и общим начальным условием

$$u = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2.4.2.3)$$

Рассуждая точно так же, как это делалось для линейного однородного уравнения с постоянным запаздыванием (2.2.1.1) при $f = 0$, методом разделения переменных можно показать, что уравнение с пропорциональным запаздыванием (2.4.2.1) допускает точные решения в виде произведения функций разных аргументов

$$u_n(x, t) = T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4.2.4)$$

где функции $T_n(t)$ удовлетворяют линейным ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$T'_n(t) = \left[c_1 - a_1 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \right] T_n(t) + \left[c_2 - a_2 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \right] T_n(pt), \quad (2.4.2.5)$$

которые можно получить из (2.2.1.22) формальной заменой $T(t - \tau)$ на $T(pt)$. Частные решения (2.4.2.4) удовлетворяют однородным граничным условиям (2.4.2.2).

Используя принцип линейной суперпозиции, решение начально-краевой задачи (2.4.2.1) – (2.4.2.3) ищем в виде бесконечного ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right), \quad (2.4.2.6)$$

который удовлетворяет уравнению (2.4.2.1) и однородным граничным условиям (2.4.2.2).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (2.4.2.5), представим функцию $\varphi(x)$, входящую в начальное условие (2.4.2.3), в виде разложения по собственным функциям

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{h}. \quad (2.4.2.7)$$

Умножая (2.4.2.7) на $X_m(x) = \sin \frac{\pi m x}{h}$ ($m = 1, 2, \dots$) и интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h , находим коэффициенты A_n :

$$A_n = \frac{2}{h} \int_0^h \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{h}\right) d\xi. \quad (2.4.2.8)$$

Из соотношений (2.4.2.6) и (2.4.2.7) получим начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (2.4.2.5) в виде

$$T_n(0) = A_n, \quad (2.4.2.9)$$

где коэффициенты A_n определяются по формуле (2.4.2.8).

Линейная задача (2.4.2.5), (2.4.2.9) с нормированным начальным условием $A_n = 1$ с точностью до переобозначений совпадает с задачей (1.4.2.2) при $c = 0$, рассмотренной в разд. 1.4.2. Вводя обозначения

$$\alpha_n = c_1 - a_1 \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2, \quad \beta_n = c_2 - a_2 \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 \quad (2.4.2.10)$$

и используя формулы (1.4.2.4), можно представить решение задачи (2.4.2.5), (2.4.2.9) в виде степенного ряда

$$T_n(t) = A_n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{mn} t^m\right), \quad \gamma_{mn} = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^k). \quad (2.4.2.11)$$

При $0 < p < 1$ ряд (2.4.2.11) имеет бесконечный радиус сходимости.

Подставив выражения (2.4.2.11) в формулу (2.4.2.6), получим решение задачи (2.4.2.1) — (2.4.2.3):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{mn} t^m\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right), \quad (2.4.2.12)$$

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^k),$$

где коэффициенты A_n , α_n , β_n определяются по формулам (2.4.2.8) и (2.4.2.10).

2.4.3. Другие начально-краевые задачи для уравнения параболического типа с пропорциональным запаздыванием

Представление решений начально-краевых задач в виде суммы решений более простых задач. Опишем теперь процедуру построения решений методом разделения переменных других начально-краевых задач, описываемых одномерным линейным однородным УрЧП параболического типа с пропорциональным запаздыванием (2.4.2.1). Для краткости, далее будем обозначать это уравнение так:

$$\mathcal{L}[u, w] = 0, \quad t > 0, \quad (2.4.3.1)$$

где $\mathcal{L}[u, w] \equiv u_t - a_1 u_{xx} - a_2 w_{xx} - c_1 u - c_2 w$ и $w = u(x, pt)$ ($0 < p < 1$).

Уравнение (2.4.3.1) будем рассматривать с различными линейными однородными граничными условиями, которые будем записывать в виде

$$\Gamma_1[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \Gamma_2[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \quad (2.4.3.2)$$

и общим начальным условием

$$u = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2.4.3.3)$$

Наиболее распространенные однородные граничные условия, определяющие вид операторов (функций) $\Gamma_{1,2}[u]$, приведены в третьем столбце табл. 2.2, где следует положить $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$.

Как и ранее, сначала ищем частные решения линейного однородного уравнения (2.4.3.1) в виде произведения функций разных аргументов $u_1 = X(x)T(t)$. Разделяя переменные в полученном уравнении, приходим к линейным ОДУ и ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \quad (2.4.3.4)$$

$$T'(t) = (c_1 - a_1 \lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2 \lambda^2)T(pt). \quad (2.4.3.5)$$

Требуя, чтобы функция $u_1 = X(x)T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (2.4.3.2), приходим к однородным граничным условиям для функции X :

$$\Gamma_1[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \Gamma_2[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = h. \quad (2.4.3.6)$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (2.4.3.4), (2.4.3.6) существуют только для дискретного множества значений параметра λ :

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.3.7)$$

Собственные значения и собственные функции для однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (2.4.3.4), для пяти наиболее распространенных граничных условий приведены в табл. 2.3.

Используя принцип линейной суперпозиции, решение начально-краевой задачи (2.4.3.1)–(2.4.3.1) ищем в виде бесконечного ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (2.4.3.8)$$

где функции $T_n(t)$ описываются уравнением (2.4.3.5) при $\lambda = \lambda_n$. По построению ряд (2.4.3.8) удовлетворяет уравнению (2.4.3.1) и однородным граничным условиям (2.4.3.2).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (2.4.3.5) при $\lambda = \lambda_n$, представим функцию $\varphi(x)$, входящую в начальное условие (2.4.3.3), в виде разложения по собственным функциям

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x). \quad (2.4.3.9)$$

Умножая (2.4.3.9) на $X_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$) и интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h , а затем учитывая, что собственные функции $X_n(x)$ и $X_m(x)$ ортогональны при $n \neq m$, т. е. выполняются соотношения (2.2.1.21), находим коэффициенты A_n :

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi, \quad \|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi) d\xi. \quad (2.4.3.10)$$

Из соотношений (2.4.3.8) и (2.4.3.9) получим начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (2.4.3.5) при $\lambda = \lambda_n$ в виде

$$T_n(0) = A_n, \quad (2.4.3.11)$$

где коэффициенты A_n определяются по формуле (2.4.3.10).

Линейная задача с пропорциональным запаздыванием (2.4.3.5), (2.4.3.11) при $\lambda = \lambda_n$ с точностью до переобозначений совпадает с задачей (2.4.2.5), (2.4.2.9), рассмотренной в разд. 2.4.2. Следовательно, решение задачи (2.4.2.5), (2.4.2.9) можно представить в виде степенного ряда

$$T_n(t) = A_n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{mn} t^m \right), \quad \gamma_{mn} = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^k), \quad (2.4.3.12)$$

$$\alpha_n = c_1 - a_1 \lambda_n^2, \quad \beta_n = c_2 - a_2 \lambda_n^2.$$

Подставив выражения (2.4.3.12) в формулу (2.4.3.8), получим решение задачи (2.4.3.1)–(2.4.3.3):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{mn} t^m \right) X_n(x), \quad (2.4.3.13)$$

где коэффициенты A_n и γ_{mn} вычисляются с помощью выражений (2.4.3.10) и (2.4.3.12).

Решение начально-краевой задачи (2.4.3.1)–(2.4.3.3) с любыми граничными условиями, представленными в табл. 2.2, можно получить по формулам (2.4.3.10), (2.4.3.12), (2.4.3.13), взяв соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ из табл. 2.3.

Замечание 2.11. Решения более сложных начально-краевых задач для n -мерных однородных УрЧП с пропорциональным запаздыванием и однородными граничными условиями строятся аналогично тому, как это делалось в разд. 2.2.3 для уравнений с постоянным запаздыванием.

Автомодельная задача для линейного УрЧП с двумя пропорциональными аргументами. Рассмотрим теперь уравнение параболического типа с двумя пропорциональными аргументами

$$u_t = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx}, \quad w = u(px, qt) \quad (x > 0, t > 0), \quad (2.4.3.14)$$

где $p > 0$ и $q > 0$ — масштабные коэффициенты.

Дополним уравнение (2.4.3.14) начальным и граничным условиями специального вида

$$u = A \quad \text{при} \quad t = 0, \quad u = B \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (2.4.3.15)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Решение задачи (2.4.3.14)–(2.4.3.15) является *автомодельным* и может быть представлено в виде

$$u = U(z), \quad z = xt^{-1/2}, \quad (2.4.3.16)$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет следующей краевой задаче для ОДУ с пропорциональным аргументом

$$-\frac{1}{2}zU'_z = a_1 U''_{zz} + a_2 W''_{zz}, \quad W = U(\sigma z), \quad \sigma = pq^{-1/2}; \quad (2.4.3.17)$$

$$U(0) = B, \quad U(\infty) = A. \quad (2.4.3.18)$$

Пусть масштабные коэффициенты связаны гиперболическим соотношением $q = p^2$, тогда $\sigma = 1$ и $U = W$. В этом специальном случае уравнение (2.4.3.17) легко интегрируется и решение исходной задачи (2.4.3.14)–(2.4.3.15) определяется формулой

$$u = B + (A - B) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \quad a = a_1 + a_2, \quad (2.4.3.19)$$

где $\operatorname{erf} \zeta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta \exp(-\xi^2) d\xi$ — интеграл вероятностей.

2.4.4. Начально-краевая задача для линейного уравнения гиперболического типа с пропорциональным запаздыванием

Формулировка задачи. Рассмотрим первую начально-краевую задачу для одномерного линейного однородного уравнения гиперболического типа с постоянными коэффициентами и пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt), \quad (2.4.4.1)$$

определенного в области $\Omega = \{0 < x < h, t > 0\}$ (считается, что $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 + a_2 > 0$, $0 < p < 1$). Уравнение (2.4.4.1) дополним однородными граничными условиями первого рода (условиями Дирихле):

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \quad (2.4.4.2)$$

и общими начальными условиями

$$u = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad u_t = \psi(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2.4.4.3)$$

Рассуждая так же, как это делалось для уравнения параболического типа (2.4.2.1), методом разделения переменных можно показать, что уравнение гиперболического типа с пропорциональным запаздыванием (2.4.4.1) допускает точные решения в виде произведения функций разных аргументов

$$u_n(x, t) = T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4.4.4)$$

где функции $T_n(t)$ удовлетворяют линейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$T_n''(t) = \left[c_1 - a_1 \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2\right] T_n(t) + \left[c_2 - a_2 \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2\right] T_n(pt), \quad (2.4.4.5)$$

которые можно получить из (2.4.2.5) формальной заменой первой производной на вторую производную. Частные решения (2.4.4.4) удовлетворяют однородным граничным условиям (2.4.4.2).

Используя принцип линейной суперпозиции, решение начально-краевой задачи (2.4.4.1) – (2.4.4.3) ищем в виде бесконечного ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right), \quad (2.4.4.6)$$

который удовлетворяет уравнению (2.4.4.1) и однородным граничным условиям (2.4.4.2).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (2.4.4.5), представим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия (2.4.4.3), в виде разложений по собственным функциям

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{h}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n x}{h}. \quad (2.4.4.7)$$

Умножая (2.4.4.7) на $X_m(x) = \sin \frac{\pi m x}{h}$ ($m = 1, 2, \dots$) и интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h , находим коэффициенты A_n и B_n :

$$A_n = \frac{2}{h} \int_0^h \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{h}\right) d\xi, \quad B_n = \frac{2}{h} \int_0^h \psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{h}\right) d\xi. \quad (2.4.4.8)$$

Из соотношений (2.4.4.6) и (2.4.4.7) получим начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (2.4.4.5) в виде

$$T_n(0) = A_n, \quad T_n'(0) = B_n, \quad (2.4.4.9)$$

где коэффициенты A_n и B_n определяются по формулам (2.4.4.8).

Линейная задача для ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием (2.4.4.5), (2.4.4.9) с точностью до переобозначений совпадает с задачей (1.2.2.24), (1.2.2.25) при $c = 0$, рассмотренной в разд. 1.2.2. Учитывая сказанное и используя формулы (1.2.2.26) и (1.2.2.26), можно представить решение задачи (2.4.4.5), (2.4.4.9) в виде линейной комбинации двух степенных рядов

$$T_n(t) = A_n T_{n1}(t) + B_n T_{n2}(t), \quad (2.4.4.10)$$

где

$$\begin{aligned} T_{n1}(t) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m} t^{2m}, & \gamma_{n,2m} &= \frac{1}{(2m)!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^{2k}); \\ T_{n2}(t) &= t + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m+1} t^{2m+1}, & \gamma_{n,2m+1} &= \frac{1}{(2m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^{2k+1}), \end{aligned} \quad (2.4.4.11)$$

а коэффициенты α_n и β_n определяются по формулам (2.4.2.10). При $0 < p < 1$ ряды (2.4.4.11) имеют бесконечный радиус сходимости.

Подставляя выражения (2.4.4.10) в (2.4.4.6), получим решение начально-краевой задачи (2.4.4.1)–(2.4.4.3):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n T_{n1}(t) + B_n T_{n2}(t)] \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right), \\ T_{n1}(t) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m} t^{2m}, & T_{n2}(t) &= t + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m+1} t^{2m+1}, \end{aligned} \quad (2.4.4.12)$$

где коэффициенты A_n , B_n , $\gamma_{n,2m}$, $\gamma_{n,2m+1}$ определяются по формулам (2.4.4.8) и (2.4.4.11).

3. Аналитические методы и точные решения нелинейных УрЧП с запаздыванием. Часть I

3.1. Некоторые замечания и определения. Точные решения типа бегущей волны

3.1.1. Предварительные замечания. Терминология. Классы рассматриваемых уравнений

Предварительные замечания. Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков с запаздыванием (нелинейные уравнения математической физики с запаздыванием) встречаются в различных областях прикладной математики, физики, механики, биологии, медицины, химии и многочисленных приложениях. Общее решение таких уравнений не удастся найти даже в простейших случаях. Поэтому приходится ограничиваться поиском и анализом частных решений, которые принято называть *точными решениями*.

Точные решения дифференциальных уравнений всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др.

Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве основы для формулировки тестовых задач, предназначенных для проверки корректности и оценки точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения. Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных

программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы компьютерной алгебры Mathematica, Maple, Maxima и др.)

Факторы, приводящие к необходимости учитывать запаздывание. В работах [252, 280, 333, 390, 566] упоминаются различные факторы, приводящие к необходимости вводить запаздывание в математические модели, описываемые уравнениями реакционно-диффузионного типа и другими нелинейными УрЧП. В частности, в биологии и биомеханике, запаздывание связано с ограниченной скоростью передачи нервных и мышечных реакций в живых тканях; в медицине — в задачах о распространении инфекционных заболеваний — время запаздывания определяется инкубационным периодом (промежуток времени от момента заражения до первых признаков проявления болезни); в динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в репродукции лишь после достижения определенного возраста; в теории управления запаздывание обычно связано с ограниченной скоростью распространения сигнала и ограниченной скоростью технологических процессов.

Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием. В естествознании и многочисленных приложениях для моделирования явлений и процессов с последствием чаще всего используются нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с постоянным запаздыванием (см., например, [72, 565, 568]):

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.1.1.1)$$

где $a > 0$ — коэффициент переноса, $F(u, w)$ — кинетическая функция, τ — время запаздывания.

Специальный случай $F(u, w) = f(w)$ в (3.1.1.1) допускает простую физическую интерпретацию: процесс переноса субстанции в локально-неравновесной среде обладает инерционными свойствами, т. е. система реагирует на воздействие не мгновенно, как в классическом локально-равновесном случае, а на время запаздывания τ позже.

Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием вида (3.1.1.1) и родственные более сложные уравнения и системы таких уравнений возникают в различных приложениях, таких как биология, биофизика, биохимия, химия, медицина, экология, экономика, теория управления, теория климатических моделей и многих других (см., например, работы [72, 227, 258, 291, 362, 384, 416, 496, 519, 565, 568] и ссылки в них). Отметим также, что подобные уравнения встречаются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой используются для обработки сигналов и изображений и проблем распознавания образов [113, 170, 171, 366, 367, 503, 538, 599].

Модели, описываемые нелинейными реакционно-диффузионными уравнениями с запаздыванием вида (3.1.1.1), обычно получаются путем обобщения соответствующих более простых моделей. Для этого чаще всего используются следующие два способа:

(i) в моделях, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка с независимой переменной t и постоянным запаздыванием τ , добавляют диффузионный член au_{xx} ;

(ii) в моделях, описываемых реакционно-диффузионными уравнениями без запаздывания, кинетическую функцию $f(u)$ заменяют на более сложную кинетическую функцию с запаздыванием $F(u, w)$, удовлетворяющую условию $F(u, u) = f(u)$.

Дальнейшее обобщение реакционно-диффузионных моделей приводит к нелинейным уравнениям с переменным коэффициентом переноса и постоянным запаздыванием вида

$$u_t = [g(u)u_x]_x + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.1.1.2)$$

а также более сложным родственным уравнениям с переменным запаздыванием.

Замечание 3.1. Точные решения различных уравнений реакционно-диффузионного типа (3.1.1.1) и (3.1.1.2) при $\tau = 0$ и родственных нелинейных УрЧП без запаздывания можно найти, например, в [22, 60, 63, 181, 182, 215, 223, 242, 246, 296, 426, 428, 429, 432, 447, 458, 463, 466, 594].

Нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с запаздыванием. Помимо реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием (3.1.1.1) и (3.1.1.2) в книге рассматриваются нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с постоянным запаздыванием [452]:

$$u_{tt} = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.1.1.3)$$

а также родственные более сложные нелинейные волновые уравнения с запаздыванием, включая телеграфные и реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием [71].

Замечание 3.2. Уравнения типа Клейна — Гордона встречаются в различных областях теоретической физики, включая релятивистскую квантовую механику и теорию поля. Точные решения различных нелинейных уравнений вида (3.1.1.3) при $\tau = 0$ и родственных нелинейных УрЧП без запаздывания можно найти, например, в [5, 60, 63, 95, 107, 147, 190, 264, 285, 287–290, 296, 411, 431, 447, 464, 504, 589, 600, 602].

Замечание 3.3. Осцилляционные свойства решений некоторых нелинейных уравнений гиперболического типа с запаздыванием исследовались, например, в [199, 200, 351, 537].

Терминология: какие решения называются точными. В данной книге под точными решениями нелинейных уравнений в частных производных с постоянным или переменным запаздыванием понимаются следующие решения [444, 451, 454]:

(а) Решения, которые выражаются через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, если уравнение содержит произвольные или специальные функции) и неопределенные или/и определенные интегралы.

(b) Решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений.

(c) Решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием (постоянным или переменным) или систем таких уравнений.

Допускаются также различные комбинации случаев (a) – (c). В случае (a) точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме.

Под точными методами решения нелинейных УрЧП (в том числе и УрЧП с запаздыванием) понимаются методы, позволяющие получать точные решения.

Следуя [60, 63, 447], далее будем использовать простую и наглядную классификацию наиболее распространенных решений по их внешнему виду, которая не связана с типом и видом рассматриваемых уравнений (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1. Наиболее распространенные точные решения уравнений математической физики с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией u .

| № | Название решения | Общая структура решения (x и t можно поменять местами) |
|---|--|--|
| 1 | Решение типа бегущей волны | $u = U(z), \quad z = kx + \lambda t, \quad k\lambda \neq 0$ |
| 2 | Решение с аддитивным разделением переменных | $u = \varphi(x) + \psi(t)$ |
| 3 | Решение с мультипликативным разделением переменных | $u = \varphi(x)\psi(t)$ |
| 4 | Автомодельное решение | $u = t^\alpha F(z), \quad z = xt^\beta$ |
| 5 | Обобщенное автомодельное решение | $u = \varphi(t)F(z), \quad z = \psi(t)x$ |
| 6 | Решение типа обобщенной бегущей волны | $u = U(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t)$ |
| 7 | Решение с обобщенным разделением переменных | $u = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$ |
| 8 | Решение с функциональным разделением переменных (специальный случай) | $u = U(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t)$ |
| 9 | Решение с функциональным разделением переменных | $u = U(z),$ $z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$ |

Трудности использования стандартных аналитических методов. Наличие в нелинейных уравнениях математической физики постоянного или переменного запаздывания весьма осложняет их исследование. Многие точные методы, которые успешно позволяют находить точные решения нелинейных УрЧП без запаздывания, такие как неклассический метод поиска симметрий (метод Блюмана — Коула) [114, 145, 187, 189, 405], прямой метод построения редукций (метод Кларксона — Крускала) [60, 63, 114, 188, 189, 405, 447], метод дифференциальных связей [60, 63, 77, 242, 314, 447], метод обратной задачи рассеяния [99, 167, 404, 422] и метод усеченных разложений Пенлеве [45, 63,

304, 447, 546, 547], неприменимы для построения точных решений нелинейных УрЧП с постоянным или переменным запаздыванием. Весьма ограниченные возможности имеет классический метод поиска симметрий (метод группового анализа) [51, 52, 146, 296], использование которого позволило получить немного точных решений отдельных нелинейных УрЧП с постоянным запаздыванием [363, 386, 515]. Важно отметить, что нелинейные уравнения математической физики с постоянным запаздыванием не допускают автомодельных решений, которые весьма часто имеют более простые уравнения математической физики без запаздывания.

В последующих разделах будут описаны достаточно эффективные методы построения точных решений нелинейных УрЧП с постоянным или переменным запаздыванием, разработанные в последние годы. Изложение сопровождается многочисленными примерами построения точных решений конкретных уравнений. При отборе практического материала наибольшее внимание уделялось нелинейным уравнениям реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, которые часто встречаются в приложениях, а также нелинейным уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют наибольший интерес для тестирования численных и приближенных аналитических методов). Помимо уравнений с постоянным запаздыванием (3.1.1.1) и (3.1.1.3) будут рассматриваться также более сложные уравнения с пропорциональным запаздыванием $\tau = pt$ и переменным запаздыванием общего вида $\tau = \tau(t)$.

3.1.2. Положения равновесия. Решения типа бегущей волны. Точные решения в замкнутой форме

Положения равновесия. Константа

$$u = u_*, \quad u_* = \text{const}, \quad (3.1.2.1)$$

являющаяся решением уравнения математической физики, называется *положением равновесия* (или *точкой покоя*). В случае УрЧП с постоянным запаздыванием, которые не зависят явно от независимых переменных x и t , вида

$$\Phi(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots; w, w_x, w_t, w_{xx}, \dots) = 0, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.1.2.2)$$

положения равновесия определяются из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\Phi(u_*, 0, 0, 0, \dots; u_*, 0, 0, 0, \dots) = 0.$$

Положения равновесия (3.1.2.1) реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием (3.1.1.1) определяются из алгебраического (трансцендентного) уравнения $F(u_*, u_*) = 0$, т. е. являются нулями кинетической функции.

Решения типа бегущей волны. Отличные от константы решения вида

$$u = U(z), \quad z = kx + \lambda t, \quad (3.1.2.3)$$

где k и λ — постоянные (отличные от нуля), называются *решениями типа бегущей волны*. УрЧП с постоянным запаздыванием вида (3.1.2.2), как правило, имеют решения типа бегущей волны (3.1.2.3), где функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием

$$\Phi(U, kU'_z, \lambda U'_z, k^2 U''_{zz}, \dots; W, kW'_z, \lambda W'_z, k^2 W''_{zz}, \dots) = 0, \quad W = U(z - \lambda\tau). \quad (3.1.2.4)$$

Замечание 3.4. Иногда (весьма редко) встречаются уравнения вида (3.1.2.2), которые не имеют решений типа бегущей волны (3.1.2.3). В подобных исключительных случаях левая часть уравнения (3.1.2.4) при любых k и λ будет отлична от нуля.

► **Пример 3.1.** Нелинейное уравнение типа Монжа — Ампера с постоянным запаздыванием

$$u_{xt}^2 - u_{xx}u_{tt} + w = 0, \quad w = u(x, t - \tau),$$

которое является уравнением вида (3.1.2.2), не имеет решений типа бегущей волны, поскольку подстановка выражения (3.1.2.3) в рассматриваемое уравнение приводит к неверному равенству $W = 0$ (т. к. $U \neq \text{const}$). ◀

Точные решения типа бегущей волны реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием. Подставляя (3.1.2.3) в (3.1.1.1), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$ak^2 U''_{zz} - \lambda U'_z + F(U, W) = 0, \quad (3.1.2.5)$$

где $W = U(z - \sigma)$, $\sigma = \lambda\tau$.

Вопросам существования и устойчивости решений типа бегущей волны реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием посвящены многие работы (см., например, [227, 291, 384, 496, 519, 568] и ссылки в них).

Далее приводятся допускающие представление в элементарных функциях точные решения типа бегущей волны редуцированных нелинейных ОДУ с запаздыванием вида (3.1.2.5) и соответствующих исходных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (3.1.1.1), кинетическая функция которых содержит функциональный производ (эти и некоторые другие решения были получены в [65, 440]) (см. также [81, 82, 84]). Обе возможные ситуации $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$, соответствующие ОДУ с запаздыванием и ОДУ с опережением, рассматриваются одновременно.

Уравнение 1. Рассмотрим нелинейное ОДУ с запаздыванием

$$ak^2 U''_{zz} - \lambda U'_z + U f(W/U) = 0, \quad (3.1.2.6)$$

где $f(\zeta)$ — произвольная функция, $W = U(z - \sigma)$.

1°. Уравнение (3.1.2.6) допускает точные решения экспоненциального вида

$$U = C \exp(\beta z),$$

где C — произвольная постоянная, а β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$ak^2\beta^2 - \lambda\beta + f(e^{-\sigma\beta}) = 0.$$

Параметры k и λ в (3.1.2.6) могут быть любыми.

2°. Уравнение (3.1.2.6) допускает точные решения экспоненциально-тригонометрического вида

$$U = e^{\mu z} [A_n \cos(\beta_n z) + B_n \sin(\beta_n z)], \quad \beta_n = \frac{\pi n}{\sigma}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь A_n, B_n, μ — произвольные постоянные, а параметры λ и k в уравнении (3.1.2.6) определяются по формулам:

$$\lambda = 2ak^2\mu, \quad k = \pm \left[\frac{f((-1)^n e^{-\mu\sigma})}{a(\beta_n^2 + \mu^2)} \right]^{1/2}.$$

Уравнение 2. Нелинейное ОДУ с запаздыванием

$$ak^2 U''_{zz} - \lambda U'_z + U f(U - cW) + W g(U - cW) + h(U - cW) = 0, \quad c > 0, \quad (3.1.2.7)$$

где $f(\zeta), g(\zeta), h(\zeta)$ — произвольные функции и $W = U(z - \sigma)$, допускает точные решения экспоненциально-тригонометрического вида

$$U = e^{\mu z} [A_n \cos(\beta_n z) + B_n \sin(\beta_n z)] + D, \\ \mu = \frac{1}{\sigma} \ln c, \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\sigma}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь A_n, B_n — произвольные постоянные, D — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$D[f(\xi) + g(\xi)] + h(\xi) = 0, \quad \xi = (1 - c)D,$$

а параметры λ и k уравнения (3.1.2.7) определяются по формулам:

$$\lambda = 2ak^2\mu, \quad k = \pm \left[\frac{cf(\xi) + g(\xi)}{ac(\beta_n^2 + \mu^2)} \right]^{1/2}.$$

Уравнение 3. Нелинейное ОДУ с запаздыванием

$$ak^2 U''_{zz} - \lambda U'_z + U f(U + cW) + W g(U + cW) + h(U + cW) = 0, \quad c > 0, \quad (3.1.2.8)$$

где $f(\zeta), g(\zeta), h(\zeta)$ — произвольные функции и $W = U(z - \sigma)$, допускает точное решение экспоненциально-тригонометрического вида

$$U = e^{\mu z} [A_n \cos(\beta_n z) + B_n \sin(\beta_n z)] + D, \\ \mu = \frac{1}{\sigma} \ln c, \quad \beta_n = \frac{(2n - 1)\pi}{\sigma}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь A_n, B_n — произвольные постоянные, а D — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$D[f(\xi) + g(\xi)] + h(\xi) = 0, \quad \xi = (1 + c)D.$$

Параметры λ и k уравнения (3.1.2.8) определяются по формулам:

$$\lambda = 2ak^2\mu, \quad k = \pm \left[\frac{cf(\xi) + g(\xi)}{ac(\beta_n^2 - \mu^2)} \right]^{1/2} \quad (\mu \neq \pm\beta_n).$$

Уравнение 4. Нелинейное ОДУ с запаздыванием

$$ak^2U''_{zz} - \lambda U'_z + Uf(U^2 + W^2) + Wg(U^2 + W^2) = 0, \quad (3.1.2.9)$$

где $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ — произвольные функции и $W = U(z - \sigma)$, допускает точные решения тригонометрического вида

$$U = A_n \cos(\beta_n z) + B_n \sin(\beta_n z), \quad (3.1.2.10)$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\sigma}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Коэффициенты A_n и B_n в (3.1.2.10) определяются из системы алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$\begin{aligned} -ak^2\beta_n^2 A_n - \lambda\beta_n B_n + A_n f(A_n^2 + B_n^2) + (-1)^{n+1} B_n g(A_n^2 + B_n^2) &= 0, \\ -ak^2\beta_n^2 B_n + \lambda\beta_n A_n + B_n f(A_n^2 + B_n^2) + (-1)^n A_n g(A_n^2 + B_n^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.2.11)$$

Можно считать A_n и B_n произвольными. Тогда из (3.1.2.11) следуют соотношения для параметров λ и k :

$$\lambda = \frac{(-1)^{n+1} g(A_n^2 + B_n^2)}{\beta_n}, \quad k = \pm \left[\frac{f(A_n^2 + B_n^2)}{a\beta_n^2} \right]^{1/2}.$$

Уравнение 5. Рассмотрим теперь нелинейное уравнение с запаздыванием

$$ak^2U''_{zz} - \lambda U'_z + \frac{1}{\varphi'_U} f(\varphi(U) - \varphi(W)) + \frac{\varphi''_{UU}}{(\varphi'_U)^3} g(\varphi(U) - \varphi(W)) = 0, \quad (3.1.2.12)$$

где $f(\zeta)$, $g(\zeta)$, $\varphi(U)$ — произвольные функции. Оно допускает точные решения, которые можно представить в неявном виде

$$\varphi(U) = Az + B, \quad (3.1.2.13)$$

где A , B — произвольные постоянные, а параметры k и λ определяются по формулам:

$$k = \pm \left[\frac{g(A\sigma)}{aA^2} \right]^{1/2}, \quad \lambda = \frac{f(A\sigma)}{A}. \quad (3.1.2.14)$$

► **Пример 3.2.** Полагая $\varphi(U) = U^k$ в (3.1.2.12) и (3.1.2.13), приходим к уравнению

$$ak^2U''_{zz} - \lambda U'_z + U^{1-k} \hat{f}(U^k - W^k) + U^{1-2k} \hat{g}(U^k - W^k) = 0,$$

которое имеет точное решение $U = (Az + B)^{1/k}$. Новые произвольные функции связаны с исходными соотношениями: $\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{k} f(\zeta)$, $\hat{g}(\zeta) = \frac{k-1}{k^2} g(\zeta)$. ◀

► **Пример 3.3.** Полагая $\varphi(U) = e^{\beta U}$ в (3.1.2.12) и (3.1.2.13), приходим к уравнению

$$ak^2 U''_{zz} - \lambda U'_z + e^{-\beta U} \hat{f}(e^{\beta U} - e^{\beta W}) + e^{-2\beta U} \hat{g}(e^{\beta U} - e^{\beta W}) = 0,$$

которое имеет точное решение $U = \frac{1}{\beta} \ln(Az + B)$. Новые произвольные функции связаны с исходными соотношениями: $\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\beta} f(\zeta)$, $\hat{g}(\zeta) = \frac{1}{\beta} g(\zeta)$. ◀

Реакционно-диффузионные уравнения с пропорциональным запаздыванием. Сразу отметим, что уравнения в частных производных с пропорциональным запаздыванием по одной независимой переменной не допускают точных решений типа бегущей волны.

Точные решения типа бегущей волны имеют независимые явно от x и t уравнения в частных производных с одинаковым пропорциональным запаздыванием по двум независимым переменным, содержащие неизвестные функции $u = u(x, t)$ и $w = u(px, qt)$ при $q = p$. В частности, реакционно-диффузионные уравнения с пропорциональным запаздыванием [444]:

$$u_t = [g(u)u_x]_x + F(u, w), \quad w = u(px, pt),$$

имеют решения типа бегущей волны (3.1.2.3), где функция $U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\lambda U'_z = k^2 [g(U)U'_z]' + F(U, W), \quad W = U(pz).$$

3.1.3. Решения типа фронта бегущей волны нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа

Решения типа бегущего фронта. Будем рассматривать решения типа бегущей волны

$$u = U(z), \quad z = x + \lambda t, \quad (3.1.3.1)$$

где $\lambda > 0$. Подставив (3.1.3.1) в УрЧП с постоянным запаздыванием (3.1.1.1), для функции $U(z)$ получим ОДУ второго порядка с запаздыванием

$$aU''_{zz} - \lambda U'_z + f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \lambda\tau). \quad (3.1.3.2)$$

Наибольший интерес представляют собой ограниченные решения, которые допускают физическую интерпретацию. Далее будем считать, что уравнение (3.1.1.1) имеет простые стационарные решения $u = u_1$ и $u = u_2$, где u_1 и u_2 — некоторые постоянные. Сказанное означает, что кинетическая функция $f(u, w)$ в этих точках обращается в нуль, т. е. $f(u_1, u_1) = f(u_2, u_2) = 0$.

В приложениях особое внимание уделяется специальным решениям типа бегущей волны (3.1.3.1), в которых функция $U(z)$ не только удовлетворяет ОДУ с запаздыванием (3.1.3.2), но и дополнительным асимптотическим граничным условиям сопряжения со стационарными решениями

$$U(z) \rightarrow u_1 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty, \quad U(z) \rightarrow u_2 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.1.3.3)$$

Здесь u_1 и u_2 можно переставить местами. Ограниченные монотонные решения (3.1.3.1) уравнения (3.1.1.1), удовлетворяющие условиям (3.1.3.3), называются *решениями типа фронта бегущей волны* (или кратко *решениями типа бегущего фронта*).

Ниже будут описаны качественные особенности решений типа фронта бегущей волны некоторых УрЧП с постоянным запаздыванием, встречающихся в приложениях.

Диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием. Реакционно-диффузионное логистическое уравнение с постоянным запаздыванием имеет вид

$$u_t = au_{xx} + bu(1 - cw), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.1.3.4)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Оно описывает динамику популяции (т. е. совокупности особей одного вида) с учетом периода взросления, когда особи не способны к размножению (подробности см. в разд. 6.2.2). Уравнение (3.1.3.4) иногда называют также *уравнением Фишера — КПП* (Колмогорова — Петровского — Пискунова) с запаздыванием поскольку это уравнение при $\tau = 0$ рассматривалось в работах [41, 237].

Уравнение (3.1.3.4) имеет два простых стационарных решения $u = 0$ и $u = 1/c$ и допускает точное решение типа бегущей волны (3.1.3.1), где функция $U(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$aU''(z) - \lambda U'(z) + bU(z)[1 - cU(z - \lambda\tau)] = 0. \quad (3.1.3.5)$$

Монотонная функция $U(z)$, удовлетворяющая уравнению (3.1.3.5) и асимптотическим граничным условиям сопряжения со стационарными решениями

$$U(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty, \quad U(z) \rightarrow 1/c \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.1.3.6)$$

будет определять решение типа бегущего фронта.

Справедливы утверждения, сформулированные ниже в виде теорем.

Теорема 1 [235, 395]. При $\tau = 0$ краевая задача для ОДУ (3.1.3.5)–(3.1.3.6) имеет монотонное решение, если и только если $\lambda \geq 2\sqrt{ab}$. Другими словами, при отсутствии запаздывания $\lambda = 2\sqrt{ab}$ является минимально допустимой скоростью бегущей волны для реакционно-диффузионного уравнения (3.1.3.4).

Теорема 2 [291, 568]. Для любого $\lambda > 2\sqrt{ab}$ существует $\tau_*(\lambda) > 0$ такое, что для $\tau \leq \tau_*(\lambda)$ уравнение (3.1.3.4) имеет решение типа бегущего фронта, движущегося со скоростью λ .

Поясним откуда в теоремах 1 и 2 возникает ограничение снизу для скорости бегущей волны λ . Для этого линеаризуем уравнение (3.1.3.5) при больших отрицательных z , считая $|U| \ll 1$. В результате приходим к приближенному ОДУ без запаздывания

$$aU''(z) - \lambda U'(z) + bU(z) = 0,$$

частные решения которого ищем в экспоненциальном виде $U = \exp(\beta z)$. Для показателя β имеем квадратное уравнение

$$a\beta^2 - \lambda\beta + b = 0,$$

корни которого определяются по формулам

$$\beta_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4ab}}{2a}.$$

Видно, что при $\lambda > 2\sqrt{ab}$ оба корня являются положительными действительными числами. Соответствующие им экспоненциальные решения монотонно быстро стремятся к нулю при $z \rightarrow -\infty$. При $\lambda < 2\sqrt{ab}$ оба корня являются комплексными числами, соответствующие им решения хотя и быстро стремятся к нулю при $z \rightarrow -\infty$, но носят колебательный характер (т. е. в этом случае решение не является монотонным).

Сформулируем еще одну теорему, уточняющую теорему 1.

Теорема 3 [251] (см. также [336]). Реакционно-диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием (3.1.3.4) при $a=b=c=1$ имеет положительное монотонное решение типа бегущего фронта вида (3.1.3.1), связывающее стационарные решения 0 и 1, если и только если выполняются следующие условия:

(a) $0 \leq \tau \leq 1/e = 0.367879441 \dots$ и $2 \leq \lambda < +\infty$;

(b) $1/e < \tau \leq \tau_1 = 0.560771160 \dots$ и $2 \leq \lambda \leq \lambda_*(\tau) = 1/\sqrt{\phi(\tau)}$.

Здесь константа τ_1 является корнем трансцендентного уравнения

$$2\tau^2 \exp(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2} - 2\tau) = 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2},$$

а функция $\phi(\tau)$ определяется параметрическим образом

$$\phi = \xi h(\xi), \quad \tau = h(\xi) \equiv (2\xi + \sqrt{1 + 4\xi^2}) \exp\left(-1 - \frac{2\xi}{\sqrt{1 + 4\xi^2}}\right), \quad 0 \leq \xi \leq 0.445 \dots$$

В случае $\tau > \tau_1 = 0.560771160 \dots$ диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием (3.1.3.4) при $a = b = c = 1$ не имеет монотонного решения типа бегущего фронта.

Диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием при условии ограниченности питательных веществ. Диффузионное логистическое уравнение с постоянным запаздыванием при условии ограниченности питательных веществ, которое обобщает уравнение (3.1.3.4), имеет вид

$$u_t = au_{xx} + bu \frac{1 - cw}{1 + \gamma w}, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.1.3.7)$$

где $\gamma > 0$. В частном случае $\gamma = 0$ это уравнение переходит в уравнение (3.1.3.4).

Уравнение (3.1.3.7), как и уравнение (3.1.3.4) имеет два простых стационарных решения $u = 0$ и $u = 1/c$ и допускает точное решение типа бегущей волны вида (3.1.3.1).

В [256] (см. также [291]) было показано, что уравнение (3.1.3.7) имеет решение типа бегущего фронта при выполнении условий теоремы 2, сформулированной выше.

Замечание 3.5. Аналогичное утверждение будет справедливо также для более сложного уравнения с запаздыванием, которое получается из (3.1.3.7) путем замены знаменателя $1 + \gamma w$ на $1 + \gamma_1 u + \gamma_2 w$, где $\gamma_1 \geq 0$ и $\gamma_2 \geq 0$.

Реакционно-диффузионная модель Николсона с запаздыванием. Реакционно-диффузионная модель Николсона с запаздыванием описывается нелинейным уравнением

$$u_t = u_{xx} - \delta u + pwe^{-\kappa w}, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.1.3.8)$$

где $p > 0$, $\delta > 0$, $\kappa > 0$.

При $p/\delta > 1$ уравнение (3.1.3.8) имеет два простых стационарных решения $u = 0$ и $u = (1/\kappa) \ln(p/\delta)$ и допускает точное решение типа бегущей волны (3.1.3.1), где функция $U(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$U''(z) - \lambda U'(z) - \delta U(z) + pU(z - \lambda\tau)e^{-\kappa U(z - \lambda\tau)} = 0. \quad (3.1.3.9)$$

Монотонная функция $U(z)$, удовлетворяющая уравнению (3.1.3.9) и асимптотическим граничным условиям сопряжения со стационарными решениями

$$U(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty, \quad U(z) \rightarrow (1/\kappa) \ln(p/\delta) \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.1.3.10)$$

будет определять решение типа бегущего фронта.

В [500] была доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $1 < p/\delta \leq e$. Тогда существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ уравнение (3.1.3.9) имеет решение типа бегущего фронта (3.1.3.1), движущегося со скоростью λ .

Реакционно-диффузионная модель Белоусова — Жаботинского с запаздыванием. Реакционно-диффузионная модель Белоусова — Жаботинского с запаздыванием описывается квазилинейной системой уравнений [568]:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(1 - u - a\bar{v}), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau), \\ v_t &= v_{xx} - buv, \end{aligned} \quad (3.1.3.11)$$

где u и v — концентрации борной кислоты и ионов бромидов, a и b — положительные константы. Уравнения (3.1.3.6) и их обобщения могут использоваться также для описания более сложных биохимических и биологических процессов. Более простая система без запаздывания, соответствующая $\tau = 0$ в (3.1.3.6), рассматривалась в [393].

Система (3.1.3.11) имеет простые стационарные решения: $u = 0$, $v = \text{const}$ и $u = 1$, $v = 0$.

Система (3.1.3.6) допускает решения типа бегущей волны

$$u = U(z), \quad v = V(z), \quad z = x + \lambda t, \quad (3.1.3.12)$$

где $\lambda > 0$, а функции $U(z)$ и $V(z)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} U''(z) - \lambda U'(z) + U(z)[1 - U(z) - aV(z - \lambda\tau)] &= 0, \\ V''(z) - \lambda V'(z) - bU(z)V(z) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.3.13)$$

Дополним уравнения (3.1.3.13) асимптотическими граничными условиями сопряжения со стационарными решениями

$$\begin{aligned} U(z) &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, & U(z) &\rightarrow 1 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \\ V(z) &\rightarrow 1 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, & V(z) &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.1.3.14)$$

Функции $U(z)$ и $V(z)$, удовлетворяющие системе ОДУ с запаздыванием (3.1.3.13) с граничными условиями (3.1.3.14), определяют решение типа бегущего фронта для исходной системы реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (3.1.3.11).

В [568] была доказана следующая теорема.

Теорема 5. Эта теорема в зависимости от значений определяющих параметров a и b состоит из следующих двух пунктов:

1°. Пусть $0 < b \leq 1 - a$. Тогда для любого $\lambda \geq 2\sqrt{1-a}$ и $\tau > 0$ система (3.1.3.11) имеет решение типа бегущего фронта, распространяющегося со скоростью λ .

2°. Пусть $1 - a < b$. Тогда для любого $\lambda \geq 2\sqrt{b}$ и $\tau > 0$ система (3.1.3.11) имеет решение типа бегущего фронта, распространяющегося со скоростью λ .

Диффузионная модель типа Лотки — Вольтерра с несколькими запаздываниями. Реакционно-диффузионная модель типа Лотки — Вольтерра с кооперативным взаимодействием и несколькими запаздываниями описывается системой уравнений [291]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b_1 u(x,t)[1 - c_1 u(x,t - \tau_1) + d_1 v(x,t - \tau_2)], \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + b_2 v(x,t)[1 + d_2 u(x,t - \tau_3) - c_2 v(x,t - \tau_4)], \end{aligned} \quad (3.1.3.15)$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, \tau_j$ ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$) — положительные константы.

Пусть $c_1 c_2 - d_1 d_2 > 0$. Тогда система (3.1.3.15) имеет четыре положения равновесия: $(0, 0)$, $(1/c_1, 0)$, $(0, 1/c_2)$, (k_1, k_2) , где

$$k_1 = \frac{d_1 + c_2}{c_1 c_2 - d_1 d_2}, \quad k_2 = \frac{c_1 + d_2}{c_1 c_2 - d_1 d_2}. \quad (3.1.3.16)$$

Переходя в (3.1.3.15) к переменным бегущей волны (3.1.3.12), получим систему ОДУ с запаздываниями

$$\begin{aligned} a_1 U''(z) - \lambda U'_z(z) + b_1 U(z)[1 - c_1 U(z - \lambda \tau_1) + d_1 V(z - \lambda \tau_2)] &= 0, \\ a_2 V''(z) - \lambda V'(z) + b_2 V(z)[1 + d_2 U(z - \lambda \tau_3) - c_2 V(z - \lambda \tau_4)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.3.17)$$

Уравнения (3.1.3.17) дополним асимптотическими граничными условиями сопряжения со стационарными решениями

$$\begin{aligned} U(z) &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, & U(z) &\rightarrow k_1 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \\ V(z) &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, & V(z) &\rightarrow k_2 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.1.3.18)$$

где постоянные k_1 и k_2 определены в (3.1.3.16).

В [291] была доказана следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $c_1 c_2 - d_1 d_2 > 0$. Тогда для любого

$$\lambda > \max[2\sqrt{a_1 b_1 c_1 k_1}, 2\sqrt{a_2 b_2 c_2 k_2}]$$

реакционно-диффузионная система типа Лотки — Вольтерра с запаздываниями (3.1.3.15) для достаточно малых τ_1 и τ_4 имеет движущееся со скоростью λ решение типа бегущего фронта (3.1.3.12), которое асимптотически связано со стационарными решениями $(0, 0)$ и (k_1, k_2) .

3.2. Решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных

3.2.1. Предварительные замечания. Терминология. Примеры

Предварительные замечания и определения. Метод разделения переменных является самым распространенным методом решения линейных уравнений математической физики [90, 173, 332, 434, 436, 604]. Для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией $u = u(x, t)$ этот метод базируется на поиске точных решений в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi(x)\psi(t), \quad (3.2.1.1)$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и определяются в ходе последующего анализа.

Интегрирование отдельных классов нелинейных УрЧП первого порядка основано на поиске точных решений в виде суммы функций разных аргументов [26, 32, 434]:

$$u = \varphi(x) + \psi(t). \quad (3.2.1.2)$$

Некоторые нелинейные уравнения математической физики второго и более высоких порядков без запаздывания и с запаздыванием также имеют точные решения вида (3.2.1.1) или (3.2.1.2). Подобные решения будем называть соответственно *решениями с мультипликативным и аддитивным разделением переменных* [60, 63, 447]. Оба типа этих точных решений иногда будем объединять и называть *решениями с разделением переменных*.

Примеры нелинейных уравнений с запаздыванием, допускающих решения с разделением переменных. В простейших случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях с частными производными с двумя независимыми переменными и постоянным запаздыванием проводится по той же схеме, что и в линейных уравнениях без запаздывания. Точное решение ищется в виде произведения или суммы функций разных аргументов. Подставив (3.2.1.1) или (3.2.1.2) в рассматриваемое уравнение и делая элементарные алгебраические операции, приходят к равенству двух выражений (для уравнений с двумя

переменными), зависящих от разных аргументов. Такая ситуация возможна только в том случае, когда каждое из указанных выражений равно одной и той же постоянной величине. В результате для определения искомых величин обычно получают ОДУ без запаздывания для $\varphi = \varphi(x)$ и ОДУ с запаздыванием для $\psi = \psi(t)$.

Проиллюстрируем сказанное на простых конкретных примерах.

► **Пример 3.4.** Покажем, что реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием и степенной нелинейностью

$$u_t = a(u^k u_x)_x + bw, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.2.1.3)$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов. Действительно, подставив (3.2.1.1) в уравнение (3.2.1.3), приходим к соотношению

$$\varphi \psi'_t = a \psi^{k+1} (\varphi^k \varphi'_x)'_x + b \varphi \bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau). \quad (3.2.1.4)$$

Перенеся член $b \varphi \bar{\psi}$ в левую часть (3.2.1.4), а затем разделив на $\varphi \psi^{k+1}$, получим

$$\frac{\psi'_t - b \bar{\psi}}{\psi^{k+1}} = \frac{a(\varphi^k \varphi'_x)'_x}{\varphi}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от переменной t , а правая — только от x . Это возможно лишь при выполнении условий

$$\frac{\psi'_t - b \bar{\psi}}{\psi^{k+1}} = C, \quad \frac{a(\varphi^k \varphi'_x)'_x}{\varphi} = C, \quad (3.2.1.5)$$

где C — произвольная постоянная. Решение ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием для функции $\psi = \psi(t)$ в (3.2.1.5) можно получить методом шагов (см. разд. 1.1.5). ОДУ второго порядка без запаздывания для функции $\varphi = \varphi(x)$ в (3.2.1.5) допускает понижение порядка (поскольку не зависит явно от x), его общее решение может быть представлено в неявной форме.

Процедура построения решения с разделяющимися переменными вида (3.2.1.1) нелинейного уравнения (3.2.1.3) полностью аналогична процедуре, используемой для решения более простого линейного уравнения с постоянным запаздыванием при $k = 0$. Принципиальная разница между линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями заключается в том, что для решений нелинейных уравнений не применим принцип суперпозиции, т. е. нельзя складывать решения вида (3.2.1.1) нелинейного уравнения (3.2.1.3) при $k \neq 0$, полученные путем интегрирования уравнений (3.2.1.5) для различных констант C . ◀

Замечание 3.6. В уравнениях (3.2.1.3) и (3.2.1.5) постоянное запаздывание τ может быть заменено переменным запаздыванием произвольного вида $\tau = \tau(t)$, в частности, пропорциональным запаздыванием $\tau = (1 - p)t$ (т. е. $t - \tau = pt$).

► **Пример 3.5.** Уравнение реакционно-диффузионного типа с экспоненциальной нелинейностью и постоянным запаздыванием

$$u_t = a u_{xx} + b e^{\lambda(u-w)}, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.2.1.6)$$

имеет точное решение с аддитивным разделением переменных в виде суммы функций разных аргументов. Подставим выражение (3.2.1.2) в уравнение (3.2.1.6). После элементарных преобразований приходим к равенству

$$\psi'_t - be^{\lambda(\psi-\bar{\psi})} = a\varphi''_{xx}, \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau), \quad (3.2.1.7)$$

левая часть которого зависит только от переменной t , а правая — только от x . Приравнявая левую и правую части (3.2.1.7) константе, получим

$$\psi'_t - be^{\lambda(\psi-\bar{\psi})} = C, \quad a\varphi''_{xx} = C. \quad (3.2.1.8)$$

Нелинейное ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием для $\psi = \psi(t)$ в (3.2.1.8) подстановкой $\theta = e^{-\lambda\psi}$ сводится к линейному ОДУ с запаздыванием. Интегрируя дважды ОДУ второго порядка для $\varphi = \varphi(x)$ в (3.2.1.8), имеем $\varphi = \frac{C}{2a}x^2 + C_1x + C_2$. ◀

Замечание 3.7. В уравнениях (3.2.1.6) и (3.2.1.8) постоянное запаздывание τ может быть заменено переменным запаздыванием произвольного вида $\tau = \tau(t)$, в частности, пропорциональным запаздыванием $\tau = (1-p)t$ (т. е. $t - \tau = pt$).

► **Пример 3.6.** Покажем, что реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием и источником логарифмического типа

$$u_t = au_{xx} + bu \ln w, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.2.1.9)$$

имеет точное решение с мультипликативным разделением переменных в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi(x)\psi(t). \quad (3.2.1.10)$$

Для этого подставим выражение (3.2.1.10) в уравнение (3.2.1.9). После деления на $\varphi\psi$ и переноса из правой части одного из слагаемых в левую часть полученного равенства, имеем

$$\frac{\psi'_t}{\psi} - b \ln \bar{\psi} = a \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} + b \ln \varphi, \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau).$$

Левая часть этого выражения зависит только от переменной t , а правая — только от x . Приравнявая их постоянной величине, получаем ОДУ с запаздыванием для функции $\psi(t)$ и ОДУ без запаздывания для функции $\varphi(x)$:

$$\frac{\psi'_t}{\psi} - b \ln \bar{\psi} = C, \quad a \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} + b \ln \varphi = C. \quad (3.2.1.11)$$

Нелинейное ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием для $\psi = \psi(t)$ в (3.2.1.11) подстановкой $\psi = e^\theta$ сводится к линейному ОДУ с запаздыванием для θ . ◀

Замечание 3.8. В уравнениях (3.2.1.9) и (3.2.1.11) постоянное запаздывание τ может быть заменено переменным запаздыванием произвольного вида $\tau = \tau(t)$, в частности, пропорциональным запаздыванием $\tau = (1-p)t$ (т. е. $t - \tau = pt$).

Ниже описаны некоторые нелинейные УрЧП с запаздыванием вида (3.1.1.1), содержащие произвольные функции (зависящие от комбинаций u и w) и допускающие точные решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных.

3.2.2. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием, допускающие точные решения с разделением переменных

Реакционно-диффузионные уравнения с постоянным запаздыванием, сохраняющие произвольные функции. Ниже приведены точные решения с разделением переменных некоторых нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием, содержащих одну произвольную функцию.

Уравнение 1. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.2.2.1)$$

1°. Уравнение (3.2.2.1) имеет решение с мультипликативным разделением переменных, периодическое по пространственной координате x :

$$u = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]\psi(t), \quad (3.2.2.2)$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$\psi'_t(t) = -a\beta^2\psi(t) + \psi(t)f(\psi(t - \tau)/\psi(t)). \quad (3.2.2.3)$$

2°. Уравнение (3.2.2.1) имеет другое решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]\psi(t), \quad (3.2.2.4)$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$\psi'_t(t) = a\beta^2\psi(t) + \psi(t)f(\psi(t - \tau)/\psi(t)). \quad (3.2.2.5)$$

3°. Уравнение (3.2.2.1) имеет вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = (C_1 x + C_2)\psi(t), \quad (3.2.2.6)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием (3.2.2.3) при $\beta = 0$.

4°. Уравнение (3.2.2.1) имеет также решение с мультипликативным разделением переменных смешанного типа:

$$u = e^{\alpha x + \beta t}\theta(z), \quad z = \lambda x + \gamma t, \quad (3.2.2.7)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} a\lambda^2\theta''_{zz}(z) + (2a\alpha\lambda - \gamma)\theta'_z(z) + (a\alpha^2 - \beta)\theta(z) + \\ + \theta(z)f(e^{-\beta\tau}\theta(z - \sigma)/\theta(z)) = 0, \quad \sigma = \gamma\tau. \end{aligned}$$

Решение (3.2.2.7) можно трактовать как нелинейную суперпозицию двух решений типа бегущей волны.

Замечание 3.9. ОДУ с запаздыванием (3.2.2.3) и (3.2.2.5) допускают частные решения экспоненциального вида

$$\psi(t) = Ae^{\lambda_n t}, \quad n = 1, 2,$$

где A — произвольная постоянная, а λ_1 и λ_2 — корни трансцендентных уравнений

$$\lambda_1 = -a\beta^2 + f(e^{-\lambda_1 \tau}) \quad \text{для уравнения (3.2.2.3),}$$

$$\lambda_2 = a\beta^2 + f(e^{-\lambda_2 \tau}) \quad \text{для уравнения (3.2.2.5).}$$

Уравнение 2. Нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u) \quad (3.2.2.8)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t). \quad (3.2.2.9)$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с постоянным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi \ln \varphi, \quad (3.2.2.10)$$

$$\psi'_t(t) = C_1\psi(t) + \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)) + b\psi(t) \ln \psi(t), \quad (3.2.2.11)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Замечание 3.10. ОДУ второго порядка (3.2.2.10) не зависит явно от x и его общее решение может выражено в неявном виде. Это уравнение имеет частное однопараметрическое решение

$$\varphi = \exp\left[-\frac{b}{4a}(x + C_2)^2 + \frac{C_1}{b} + \frac{1}{2}\right],$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Уравнение 3. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + f(u - w). \quad (3.2.2.12)$$

1°. Уравнение (3.2.2.12) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных, квадратичное по x :

$$u = C_2x^2 + C_1x + \psi(t), \quad (3.2.2.13)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$\psi'_t(t) = 2C_2a + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \quad (3.2.2.14)$$

2°. Уравнение (3.2.2.12) имеет также решение более общее, чем (3.2.2.13), решение вида

$$u = C_1x^2 + C_2x + C_3t + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t, \quad (3.2.2.15)$$

где $C_1, C_2, C_3, \beta, \gamma$ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a\beta^2\theta''_{zz}(z) - \gamma\theta'_z(z) + 2C_1a - C_3 + f(\theta(z) - \theta(z - \sigma) + C_3\tau) = 0, \quad \sigma = \gamma\tau.$$

Значениям $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ в (3.2.2.15) соответствует решение типа бегущей волны.

Замечание 3.11. ОДУ с запаздыванием (3.2.2.14) имеет частное решение, линейное по t , вида $\psi(t) = \lambda t + C_3$, где C_3 — произвольная постоянная, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $2C_2a - \lambda + f(\tau\lambda) = 0$.

Уравнение 4. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad (3.2.2.16)$$

которое при $b = 0$ переходит в уравнение (3.2.2.12).

1°. Уравнение (3.2.2.16) при $ab > 0$ имеет решение с аддитивным разделением переменных, периодическое по пространственной переменной x :

$$u = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a}, \quad (3.2.2.17)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t(t) = b\psi(t) + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \quad (3.2.2.18)$$

2°. Уравнение (3.2.2.16) при $ab < 0$ имеет другое решение с аддитивным разделением переменных

$$u = C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a}, \quad (3.2.2.19)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием (3.2.2.18).

3°. Уравнение (3.2.2.16) при $b = 0$ имеет вырожденное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = C_1x + C_2 + \psi(t),$$

где функция $\psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием (3.2.2.18) при $b = 0$.

4°. Уравнение (3.2.2.16) при $ab > 0$ имеет также решение более общее, чем (3.2.2.17), решение вида

$$u = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t, \quad \lambda = \sqrt{b/a}, \quad (3.2.2.20)$$

где C_1, C_2, β, γ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\gamma\theta'_z(z) = a\beta^2\theta''_{zz}(z) + b\theta(z) + f(\theta(z) - \theta(z - \sigma)), \quad \sigma = \gamma\tau. \quad (3.2.2.21)$$

В отличие от (3.2.2.17), решение (3.2.2.20) не является периодическим по пространственной переменной x ; оно описывает нелинейное взаимодействие периодической стоячей волны и бегущей волны.

5°. Уравнение (3.2.2.16) при $ab < 0$ имеет также решение более общее, чем решение (3.2.2.19):

$$\begin{aligned} u &= C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x) + \theta(z), \\ z &= \beta x + \gamma t, \quad \lambda = \sqrt{-b/a}, \end{aligned} \quad (3.2.2.22)$$

где C_1, C_2, β, γ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием (3.2.2.21).

В табл. 3.2 собраны описанные выше и некоторые другие нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием, допускающие точные решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных (по данным [450, 454, 456]). Одиннадцать уравнений содержат одну или две произвольные функции одного аргумента $f(z)$ и $g(z)$, где $z = u - w$ или $z = u/w$, а одно уравнение — произвольную функцию двух аргументов $f(z_1, z_2)$. Приведенные решения получены с помощью метода функциональных связей, который рассматривается далее в разд. 3.4 (этот метод позволяет находить также более сложные точные решения).

Реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием общего вида. Многие решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, полученные ранее для случая нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием (см. табл. 3.2), удастся распространить на случай более сложных нелинейных уравнений с переменным запаздыванием общего вида.

В табл. 3.3 приведены нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием, допускающие точные решения с разделением переменных. Считается, что $\tau = \tau(t)$ — произвольная положительная непрерывно дифференцируемая функция (в частности, в случае пропорционального запаздывания в уравнениях следует положить $\tau = (1 - p)t$, т. е. $t - \tau = pt$).

Замечание 3.12. Все уравнения и решения, приведенные в табл. 3.3, можно обобщить, заменив в исходных уравнениях произвольные функции одного аргумента $f(w/u)$ и $f(u - w)$ на произвольные функции двух аргументов $f(t, w/u)$ и $f(t, u - w)$, а в определяющих уравнениях — функции $f(\bar{\psi}/\psi)$ и $f(\psi - \bar{\psi})$ на $f(t, \bar{\psi}/\psi)$ и $f(t, \psi - \bar{\psi})$.

Реакционно-диффузионные уравнения с несколькими запаздываниями. Все уравнения и их решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, приведенные в табл. 3.3, удастся обобщить на случай нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с несколькими переменными запаздываниями общего вида. Для этого в уравнениях и их решениях произвольные функции одного аргумента надо заменить на произвольные функции

Таблица 3.2. Реакционно-диффузионные уравнения с постоянным запаздыванием, допускающие решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных. Обозначения: $w = u(x, t - \tau)$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau)$, C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

| Исходное уравнение | Вид решений | Определяющие уравнения или константы |
|--|--|--|
| $u_t = au_{xx} + uf(w/u)$ | $u = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]\psi(t);$ $u = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]\psi(t);$ $u = (C_1 x + C_2)\psi(t)$ | $\psi'_t = -a\beta^2 \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi'_t = a\beta^2 \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a\varphi''_{xx} = C_1 \varphi - b\varphi \ln \varphi,$ $\psi'_t = C_1 \psi + b\psi \ln \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = au_{xx} + f(u - w)$ | $u = C_2 x^2 + C_1 x + \psi(t)$ | $\psi'_t = 2C_2 a + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = au_{xx} + bu + f(u - w)$ | $u = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \psi(t),$ где $\lambda = \sqrt{b/a}$ (при $ab > 0$); $u = C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x) + \psi(t),$ где $\lambda = \sqrt{-b/a}$ (при $ab < 0$) | $\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi});$ $\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = au_{xx} + uf(u - kw, w/u)$ | $u = e^{ct}[C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)],$ если $b = f(0, 1/k) - c > 0$; $u = e^{ct}[C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)],$ если $b = f(0, 1/k) - c < 0$ | $c = (\ln k)/\tau, \lambda = (b/a)^{1/2},$ $k > 0;$ $c = (\ln k)/\tau, \lambda = b/a ^{1/2},$ $k > 0$ |
| $u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = C_1 \varphi,$ $\psi'_t = C_1 \psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u)$ | $u = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{\frac{1}{k+1}} \psi(t),$ где $\beta = \sqrt{b(k+1)/a}$, $b(k+1) > 0$; $u = (C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x})^{\frac{1}{k+1}} \psi(t),$ где $\beta = \sqrt{-b(k+1)/a}$, $b(k+1) < 0$; $u = C_1 \exp(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x)\psi(t)$ при $k = -1$; $u = \varphi(x)\psi(t)$ (обобщает предыдущие решения) | $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C_1 \varphi,$ $\psi'_t = C_1 \psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln(C_1 \lambda x^2 + C_2 x + C_3) + \psi(t)$ | $\psi'_t = 2C_1 e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t),$ где $\beta = \sqrt{b\lambda/a}$, $b\lambda > 0$; $u = \frac{1}{\lambda} \ln(C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}) + \psi(t),$ где $\beta = \sqrt{-b\lambda/a}$, $b\lambda < 0$; $u = \varphi(x) + \psi(t)$ (обобщает предыдущие решения) | $\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi});$ $\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi});$ $a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x + be^{\lambda \varphi} = C_1,$ $\psi'_t = C_1 e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + u^{k+1} g(w/u)$ | $u = e^{\lambda t} \varphi(x),$ где λ – корень трансцендентного уравнения $\lambda = f(e^{-\lambda \tau})$ | $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + g(e^{-\lambda \tau}) \varphi^{k+1} = 0,$ это ОДУ линейаризуется заменой $\xi = \varphi^{k+1}$ |
| $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w) + e^{\lambda u} g(u - w)$ | $u = \beta t + \varphi(x),$ где β – корень алгебраического уравнения $\beta = f(\beta \tau)$ | $a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x + g(\beta \tau) e^{\lambda \varphi} = 0,$ это ОДУ линейаризуется заменой $\xi = e^{\lambda \varphi}$ |
| $u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u)$ | $u = \exp(\pm \lambda x)\psi(t), \lambda = \sqrt{c/a}$ | $\psi'_t = \lambda^2(a+b)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |

Таблица 3.3. Реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием общего вида, допускающие решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных. Обозначения: $w = u(x, t - \tau(t))$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau(t))$, $f(z)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

| Исходное уравнение | Вид решений | Определяющие уравнения |
|---|---|--|
| $u_t = au_{xx} + uf(w/u)$ | $u = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]\psi(t);$ $u = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]\psi(t);$ $u = (C_1 x + C_2)\psi(t)$ | $\psi'_t = -a\beta^2 \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi'_t = a\beta^2 \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = au_{xx} + bu \ln u +$ $+ uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi \ln \varphi,$ $\psi'_t = C_1\psi + b\psi \ln \psi +$ $+ \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = au_{xx} + f(u - w)$ | $u = C_2 x^2 + C_1 x + \psi(t)$ | $\psi'_t = 2C_2 a + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = au_{xx} + bu +$ $+ f(u - w)$ | $u = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \psi(t),$ где $\lambda = \sqrt{b/a}$ (при $ab > 0$); $u = C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x) + \psi(t),$ где $\lambda = \sqrt{-b/a}$ (при $ab < 0$) | $\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi});$ $\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = C_1 \varphi,$ $\psi'_t = C_1 \psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} +$ $+ uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C_1 \varphi,$ $\psi'_t = C_1 \psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln(C_1 \lambda x^2 + C_2 x + C_3) + \psi(t)$ | $\psi'_t = 2C_1 e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} +$ $+ f(u - w)$ | $u = \varphi(x) + \psi(t)$ | $a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x + be^{\lambda \varphi} = C_1,$ $\psi'_t = C_1 e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |

нескольких аргументов, следуя правилам:

$$f(w/u) \Rightarrow f(w_1/u, \dots, w_n/u), \quad f(u - w) \Rightarrow f(u - w_1, \dots, u - w_n);$$

$$f(\bar{\psi}/\psi) \Rightarrow f(\bar{\psi}_1/\psi, \dots, \bar{\psi}_n/\psi), \quad f(\psi - \bar{\psi}) \Rightarrow f(\psi - \bar{\psi}_1, \dots, \psi - \bar{\psi}_n); \quad (3.2.2.23)$$

$$w_k = u(x, t - \tau_k(t)), \quad \bar{\psi}_k = \psi(t - \tau_k(t)), \quad k = 1, \dots, n.$$

► **Пример 3.7.** Реакционно-диффузионное уравнение с несколькими запаздываниями

$$u_t = au_{xx} + uf(w_1/u, \dots, w_n/u), \quad w_k = u(x, t - \tau_k(t)), \quad k = 1, \dots, n,$$

которое обобщает первое уравнение из табл. 3.3, допускает периодическое (по пространственной переменной x) решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]\psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с несколькими переменными запаздываниями

$$\psi'_t = -a\beta^2 \psi + \psi f(\bar{\psi}_1/\psi, \dots, \bar{\psi}_n/\psi), \quad \bar{\psi}_k = \psi(t - \tau_k(t)).$$

► **Пример 3.8.** Другое реакционно-диффузионное уравнение с несколькими запаздываниями

$$u_t = au_{xx} + f(u - w_1, \dots, u - w_n), \quad w_k = u(x, t - \tau_k(t)), \quad k = 1, \dots, n,$$

обобщающее третье уравнение из табл. 3.3, допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = C_2 x^2 + C_1 x + \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с несколькими переменными запаздываниями

$$\psi'_t = 2C_2 a + f(\psi - \bar{\psi}_1, \dots, \psi - \bar{\psi}_n), \quad \bar{\psi}_k = \psi(t - \tau_k(t)).$$

Реакционно-диффузионные уравнения с несколькими пространственными переменными и постоянным запаздыванием. Опишем теперь возможные обобщения рассмотренных ранее одномерных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием и их решений с разделением переменных на случай более сложных n -мерных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием.

В табл. 3.4 приведены нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с несколькими пространственными переменными и постоянным запаздыванием, допускающие точные решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных. При записи уравнений использовались краткие обозначения:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m), \quad u = u(\mathbf{x}, t), \quad w = u(\mathbf{x}, t - \tau),$$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad \nabla u = \sum_{j=1}^m \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \operatorname{div}[s(u)\nabla u] = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left[s(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right],$$

где x_j — декартовы координаты, \mathbf{e}_j — единичный вектор, определяющий направление отсчета пространственной координаты x_j . Двумерным и трехмерным уравнениям соответствуют значения $m = 2$ и $m = 3$. В результате разделения переменных для функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ получают m -мерное стационарное уравнение, приведенное в последнем столбце табл. 3.4. В восьми случаях из одиннадцати уравнения для φ линейны или могут быть точно линеаризованы. Точные решения этих УрЧП можно найти, например, в книгах [90, 436].

3.2.3. Уравнения типа Клейна — Гордона с запаздыванием, допускающие точные решения с разделением переменных

Уравнения типа Клейна — Гордона с постоянным запаздыванием, содержащие произвольные функции. Нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с запаздыванием отличаются от реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием формальной заменой первой производной по времени u_t на вторую

Таблица 3.4. Реакционно-диффузионные уравнения с несколькими пространственными переменными и постоянным запаздыванием, допускающие решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных. Обозначения: $w = u(\mathbf{x}, t - \tau)$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau)$, C — произвольная постоянная.

| Исходное уравнение | Вид решений | Определяющие уравнения |
|---|---|--|
| $u_t = a\Delta u + uf(w/u)$ | $u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$ | $\Delta\varphi = C\varphi,$ $\psi'_t = aC\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = a\Delta u + bu \ln u +$ $+ uf(w/u)$ | $u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$ | $a\Delta\varphi = C\varphi - b\varphi \ln \varphi,$ $\psi'_t = C\psi + b\psi \ln \psi +$ $+ \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = a\Delta u + f(u - w)$ | $u = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$ | $\Delta\varphi = C,$ $\psi'_t = aC + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = a\Delta u + bu +$ $+ f(u - w)$ | $u = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$ | $a\Delta\varphi + b\varphi = 0,$ $\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = a\Delta u +$ $+ uf(u - kw, w/u)$ | $u = e^{ct}\varphi(\mathbf{x}),$ $c = (\ln k)/\tau, k > 0$ | $a\Delta\varphi + [f(0, 1/k) - c]\varphi = 0$ |
| $u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) +$ $+ uf(w/u)$ | $u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$ | $a \operatorname{div}(\varphi^k \nabla \varphi) = C\varphi,$ $\psi'_t = C\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) +$ $+ bu^{k+1} + uf(w/u)$ | $u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$ | $a \operatorname{div}(\varphi^k \nabla \varphi) + b\varphi^{k+1} = C\varphi,$ $\psi'_t = C\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) +$ $+ f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$ | $\Delta\varphi = C\lambda,$ $\psi'_t = aCe^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) +$ $+ be^{\lambda u} + f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$ | $(a/\lambda)\Delta\varphi + b\varphi = C,$ $\psi'_t = Ce^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) +$ $+ uf(w/u) +$ $+ u^{k+1}g(w/u)$ | $u = e^{\lambda t}\varphi(\mathbf{x}),$ где λ — корень трансцендентного уравнения $\lambda = f(e^{-\lambda\tau})$ | $a \operatorname{div}(\varphi^k \nabla \varphi) +$ $+ g(e^{-\lambda\tau})\varphi^{k+1} = 0,$ это УрЧП линеаризуется заменой $\xi = \varphi^{k+1}$ |
| $u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) +$ $+ f(u - w) +$ $+ e^{\lambda u}g(u - w)$ | $u = \beta t + \varphi(\mathbf{x}),$ где β — корень алгебраического уравнения $\beta = f(\beta\tau)$ | $a \operatorname{div}(e^{\lambda\varphi} \nabla \varphi) +$ $+ g(\beta\tau)e^{\lambda\varphi} = 0,$ это УрЧП линеаризуется заменой $\xi = e^{\lambda\varphi}$ |

производную по времени u_{tt} . Во многих случаях общая структура решений с аддитивным и мультипликативным разделением переменных этих двух различных нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием одинакова (т. е. в данном случае работает принцип аналогии решений [105]).

В табл. 3.5 приведены нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с постоянным запаздыванием, допускающие точные решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных (по данным [452]). Десять урав-

нений содержат одну или две произвольные функции одного аргумента $f(z)$ и $g(z)$, где $z = u - w$ или $z = u/w$, а одно уравнение — произвольную функцию двух аргументов $f(z_1, z_2)$.

Уравнения типа Клейна — Гордона с переменным запаздыванием общего вида. Многие решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, полученные ранее для случая нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с постоянным запаздыванием (см. табл. 3.6), удастся распространить на случай более сложных нелинейных уравнений с переменным запаздыванием общего вида.

В табл. 3.6 приведены нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с переменным запаздыванием общего вида, допускающие точные решения с разделением переменных. Считается, что $\tau = \tau(t)$ — произвольная положительная непрерывно дифференцируемая функция (в частности, в случае пропорционального запаздывания в уравнениях следует положить $\tau = (1 - p)t$, т. е. $t - \tau = pt$).

Все уравнения и их решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, приведенные в табл. 3.6, удастся обобщить на случай нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с несколькими переменными запаздываниями общего вида. Для этого в уравнениях и их решениях произвольные функции одного аргумента надо заменить на произвольные функции нескольких аргументов, следуя правилам (3.2.2.23).

Уравнения типа Клейна — Гордона с несколькими пространственными переменными и постоянным запаздыванием. Опишем теперь возможные обобщения рассмотренных ранее одномерных нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с постоянным запаздыванием и их решений с разделением переменных на случай более сложных n -мерных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием.

В табл. 3.7 приведены нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с несколькими пространственными переменными и постоянным запаздыванием, допускающие точные решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных.

3.2.4. Некоторые обобщения

Будем рассматривать теперь нелинейные УрЧП с запаздыванием достаточно общего вида

$$\begin{aligned} L[u] &= M[u] + F(t, u, w), \\ w &= u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m), \end{aligned} \quad (3.2.4.1)$$

где L — линейный дифференциальный оператор по переменной t порядка n , коэффициенты которого могут зависеть от t :

$$L[u] = \sum_{i=1}^n c_i(t) \frac{\partial^i u}{\partial t^i}, \quad (3.2.4.2)$$

Таблица 3.5. Уравнения типа Клейна — Гордона с постоянным запаздыванием, допускающие решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных. Обозначения: $w = u(x, t - \tau)$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau)$, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

| Исходное уравнение | Вид решений | Определяющие уравнения или константы |
|---|--|--|
| $u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u)$ | $u = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]\psi(t);$ $u = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]\psi(t);$ $u = (C_1 x + C_2)\psi(t)$ | $\psi''_{tt} = -a\beta^2 \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi''_{tt} = a\beta^2 \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi \ln \varphi,$ $\psi''_{tt} = C_1\psi + b\psi \ln \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = au_{xx} + f(u - w)$ | $u = C_2 x^2 + C_1 x + \psi(t)$ | $\psi''_{tt} = 2C_2 a + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w)$ | $u = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \psi(t),$ где $\lambda = \sqrt{b/a}$ (при $ab > 0$); $u = C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x) + \psi(t),$ где $\lambda = \sqrt{-b/a}$ (при $ab < 0$) | $\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi});$ $\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = au_{xx} + uf(u - kw, w/u)$ | $u = e^{ct}[C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)],$ если $b = f(0, 1/k) - c^2 > 0$; $u = e^{ct}[C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)],$ если $b = f(0, 1/k) - c^2 < 0$ | $c = (\ln k)/\tau, \lambda = (b/a)^{1/2},$ $k > 0$; $c = (\ln k)/\tau, \lambda = b/a ^{1/2},$ $k > 0$ |
| $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = C_1 \varphi,$ $\psi''_{tt} = C_1 \psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u)$ | $u = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{\frac{1}{k+1}} \psi(t),$ где $\beta = \sqrt{b(k+1)/a}, b(k+1) > 0$; $u = (C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x})^{\frac{1}{k+1}} \psi(t),$ где $\beta = \sqrt{-b(k+1)/a}, b(k+1) < 0$; $u = C_1 \exp(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x)\psi(t)$ при $k = -1$; $u = \varphi(x)\psi(t)$ (обобщает предыдущие решения) | $\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C_1 \varphi,$ $\psi''_{tt} = C_1 \psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln(C_1 \lambda x^2 + C_2 x + C_3) + \psi(t)$ | $\psi''_{tt} = 2C_1 e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t),$ где $\beta = \sqrt{b\lambda/a}, b\lambda > 0$; $u = \frac{1}{\lambda} \ln(C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}) + \psi(t),$ где $\beta = \sqrt{-b\lambda/a}, b\lambda < 0$; $u = \varphi(x) + \psi(t)$ (обобщает предыдущие решения) | $\psi''_{tt} = f(\psi - \bar{\psi});$ $\psi''_{tt} = f(\psi - \bar{\psi});$ $a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x + be^{\lambda \varphi} = C_1,$ $\psi''_{tt} = C_1 e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + u^{k+1} g(w/u)$ | $u = e^{\lambda t} \varphi(x),$ где λ — корень трансцендентного уравнения $\lambda^2 = f(e^{-\lambda \tau})$ | $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + g(e^{-\lambda \tau})\varphi^{k+1} = 0,$ это ОДУ линейзуется заменой $\xi = \varphi^{k+1}$ |
| $u_{tt} = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u)$ | $u = \exp(\pm \lambda x)\psi(t), \lambda = \sqrt{c/a}$ | $\psi''_{tt} = \lambda^2(a + b)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |

Таблица 3.6. Уравнения типа Клейна—Гордона с переменным запаздыванием общего вида, допускающие решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных. Обозначения: $w = u(x, t - \tau(t))$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau(t))$, $f(z)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

| Исходное уравнение | Вид решений | Определяющие уравнения |
|--|---|--|
| $u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u)$ | $u = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]\psi(t);$ $u = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]\psi(t);$ $u = (C_1 x + C_2)\psi(t)$ | $\psi''_{tt} = -a\beta^2 \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi''_{tt} = a\beta^2 \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi);$ $\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = au_{xx} + bu \ln u +$ $+ uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a\varphi''_{xx} = C_1 \varphi - b\varphi \ln \varphi,$ $\psi''_{tt} = C_1 \psi + b\psi \ln \psi +$ $+ \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = au_{xx} + f(u - w)$ | $u = C_2 x^2 + C_1 x + \psi(t)$ | $\psi''_{tt} = 2C_2 a + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = au_{xx} + bu +$ $+ f(u - w)$ | $u = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \psi(t),$ где $\lambda = \sqrt{b/a}$ (при $ab > 0$); $u = C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x) + \psi(t),$ где $\lambda = \sqrt{-b/a}$ (при $ab < 0$) | $\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi});$ $\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = C_1 \varphi,$ $\psi''_{tt} = C_1 \psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} +$ $+ uf(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | $a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C_1 \varphi,$ $\psi''_{tt} = C_1 \psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x +$ $+ f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln(C_1 \lambda x^2 + C_2 x + C_3) + \psi(t)$ | $\psi''_{tt} = 2C_1 e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} +$ $+ f(u - w)$ | $u = \varphi(x) + \psi(t)$ | $a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x + be^{\lambda \varphi} = C_1,$ $\psi''_{tt} = C_1 e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |

а M — линейный дифференциальный оператор любого порядка по пространственным переменным x_1, \dots, x_m , коэффициенты которого могут зависеть от x_1, \dots, x_m .

В частности, M может быть эллиптическим оператором

$$M[u] = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{m=1}^m b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (3.2.4.3)$$

Также M может быть бигармоническим оператором вида

$$M[u] = a\Delta\Delta u, \quad \Delta u \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Подставив $L[u] = u_t$, $M[u] = au_{xx}$, $F_t = 0$, $m = 1$ в (3.2.4.1), получим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием (3.1.1.1). Полагая $L[u] = u_{tt}$, $M[u] = au_{xx}$, $F_t = 0$, $m = 1$ в (3.2.4.1), приходим к нелинейному уравнению Клейна—Гордона с запаздыванием (3.1.1.3).

Таблица 3.7. Уравнения типа Клейна — Гордона с несколькими пространственными переменными и постоянным запаздыванием, допускающие решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных. Обозначения: $w = u(\mathbf{x}, t - \tau)$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau)$, C — произвольная постоянная.

| Исходное уравнение | Вид решений | Определяющие уравнения |
|--|---|--|
| $u_{tt} = a\Delta u + uf(w/u)$ | $u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$ | $\Delta\varphi = C\varphi,$ $\psi''_{tt} = aC\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = a\Delta u + bu \ln u +$ $+ uf(w/u)$ | $u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$ | $a\Delta\varphi = C\varphi - b\varphi \ln \varphi,$ $\psi''_{tt} = C\psi + b\psi \ln \psi +$ $+ \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = a\Delta u + f(u - w)$ | $u = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$ | $\Delta\varphi = C,$ $\psi''_{tt} = aC + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = a\Delta u + bu +$ $+ f(u - w)$ | $u = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$ | $a\Delta\varphi + b\varphi = 0,$ $\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = a\Delta u +$ $+ uf(u - kw, w/u)$ | $u = e^{ct}\varphi(\mathbf{x}),$ $c = (\ln k)/\tau, \quad k > 0$ | $a\Delta\varphi + [f(0, 1/k) - c^2]\varphi = 0$ |
| $u_{tt} = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) +$ $+ uf(w/u)$ | $u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$ | $a \operatorname{div}(\varphi^k \nabla \varphi) = C\varphi,$ $\psi''_{tt} = C\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) +$ $+ bu^{k+1} + uf(w/u)$ | $u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$ | $a \operatorname{div}(\varphi^k \nabla \varphi) + b\varphi^{k+1} = C\varphi,$ $\psi''_{tt} = C\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$ |
| $u_{tt} = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) +$ $+ f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$ | $\Delta\varphi = C\lambda,$ $\psi''_{tt} = aCe^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) +$ $+ be^{\lambda u} + f(u - w)$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$ | $(a/\lambda)\Delta\varphi + b\varphi = C,$ $\psi''_{tt} = Ce^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi})$ |
| $u_{tt} = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) +$ $+ uf(w/u) +$ $+ u^{k+1}g(w/u)$ | $u = e^{\lambda t}\varphi(\mathbf{x}),$ где λ — корень трансцендентного уравнения $\lambda^2 = f(e^{-\lambda\tau})$ | $a \operatorname{div}(\varphi^k \nabla \varphi) +$ $+ g(e^{-\lambda\tau})\varphi^{k+1} = 0,$ это УрЧП линеаризуется заменой $\xi = \varphi^{k+1}$ |

Ниже приведено несколько точных решений с мультипликативным и аддитивным разделением переменных нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием вида (3.2.4.1), которые содержат произвольную функцию двух аргументов $f(t, z)$, где $z = z(u, w)$. Определяющие уравнения выводятся путем использования следующих простых свойств линейных операторов L и M :

$$\begin{aligned} L[\varphi(\mathbf{x})\psi(t)] &= \varphi(\mathbf{x})L[\psi(t)], & L[\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)] &= L[\psi(t)], \\ M[\varphi(\mathbf{x})\psi(t)] &= \psi(t)M[\varphi(\mathbf{x})], & M[\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)] &= M[\varphi(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Уравнение 1. Нелинейное УрЧП с постоянным запаздыванием

$$L[u] = M[u] + uf(t, w/u), \quad w = u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad (3.2.4.4)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t). \quad (3.2.4.5)$$

Функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(t)$ описываются линейным стационарным УрЧП и нелинейным ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$M[\varphi] = C\varphi; \quad (3.2.4.6)$$

$$L[\psi] = C\psi + \psi f(t, \bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau), \quad (3.2.4.7)$$

где C — произвольные постоянные.

Ниже рассмотрены два простых случая, когда можно найти частные решения уравнения (3.2.4.6) или (3.2.4.7):

1°. Если M — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то уравнение (3.2.4.6) допускает точное решение экспоненциального вида $\varphi(\mathbf{x}) = A \exp(\sum_{i=1}^m \beta_i x_i)$, где A — произвольная постоянная, а β_1, \dots, β_m — произвольные константы, связанные одним дисперсионным соотношением полиномиального вида (при $C = 0$ и $m \geq 2$ уравнение (3.2.4.6) может иметь также полиномиальные частные решения).

2°. Если L — линейный дифференциальный оператор вида (3.2.4.2) с постоянными коэффициентами ($c_i = \text{const}$) и функция источника не зависит явно от времени t , т. е. $f = f(w/u)$, то ОДУ с постоянным запаздыванием (3.2.4.7) допускает экспоненциальные решения $\psi(t) = B e^{\lambda t}$, где B — произвольная постоянная, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\sum_{i=1}^n c_i \lambda^i = C + f(e^{-\tau \lambda}).$$

Замечание 3.13. Если линейные дифференциальные операторы L и M имеют постоянные коэффициенты, а функция источника f не зависит явно от времени t , то уравнение с постоянным запаздыванием (3.2.4.4) допускает точные решения вида

$$u = \exp\left(\alpha t + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i\right) \theta(z), \quad z = \gamma t + \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \quad (3.2.4.8)$$

где $\alpha, \beta_i, \gamma, \lambda_i$ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием.

Уравнение 2. Более сложное нелинейное УрЧП с постоянным запаздыванием

$$L[u] = M[u] + bu \ln u + u f(t, w/u), \quad (3.2.4.9)$$

также допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида (3.2.4.5), где функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейным стационарным УрЧП и нелинейным ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$M[\varphi] = C\varphi - b\varphi \ln \varphi;$$

$$L[\psi] = C\psi + b\psi \ln \psi + \psi f(t, \bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau),$$

C — произвольная постоянная.

Уравнение 3. Другое нелинейное уравнение в частных производных с постоянным запаздыванием

$$L[u] = M[u] + bu + f(t, u - w) \quad (3.2.4.10)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t). \quad (3.2.4.11)$$

Функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(t)$ описываются линейным стационарным УрЧП и нелинейным ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} M[\varphi] &= C - b\varphi; \\ L[\psi] &= C + b\psi + f(t, \psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau), \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная.

Замечание 3.14. Нелинейные уравнения (3.2.4.4), (3.2.4.9) и (3.2.4.10) в случае переменного запаздывания общего вида $\tau = \tau(t)$ также имеют решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных (3.2.4.5) и (3.2.4.11).

3.3. Решения с обобщенным и функциональным разделением переменных

3.3.1. Решения с обобщенным разделением переменных

Предварительные замечания и определения. Как и ранее, будем рассматривать уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными x, t и постоянным запаздыванием τ .

Линейные уравнения математической физики с постоянными коэффициентами и многие линейные уравнения с переменными коэффициентами имеют точные решения в виде суммы попарных произведений функций разных аргументов (см., например, [90, 434, 436]):

$$u(x, t) = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \cdots + \varphi_k(x)\psi_k(t). \quad (3.3.1.1)$$

Многие нелинейные уравнения математической физики с частными производными с квадратичными и степенными нелинейностями, включая некоторые уравнения с запаздыванием, также имеют точные решения вида (3.3.1.1). Такие решения нелинейных уравнений будем называть *решениями с обобщенным разделением переменных*. В общем случае функции $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(t)$ заранее неизвестны и подлежат определению в ходе исследования.

Замечание 3.15. Решения с обобщенным разделением переменных и методы построения таких решений для нелинейных УрЧП без запаздывания рассматривались, например, в [15, 16, 60, 63, 87–89, 243–246, 425, 447, 459].

Замечание 3.16. Выражения вида (3.3.1.1) часто используют в прикладной и вычислительной математике для построения приближенных аналитических и численных решений УрЧП проекционными методами типа Бубнова — Галеркина [91, 236, 467].

На практике при построении точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики наиболее часто встречаются решения специального вида, содержащие три искомые функции [15, 16, 60, 63, 447]:

$$u(x, t) = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t) \quad (3.3.1.2)$$

(в правой части независимые переменные можно поменять местами). В частном случае $\psi(t) = 0$ это решение переходит в решение с мультипликативным разделением переменных, а в случае $\varphi(t) = 1$ — в решение с аддитивным разделением переменных.

Метод, основанный на априорном задании одной системы координатных функций. Для построения точных решений УрЧП с квадратичной и степенной нелинейностью, которые не зависят явно от x , можно использовать следующий упрощенный подход. Решения ищем в виде конечных сумм (3.3.1.1). Предположим, что система координатных функций $\varphi_m(x)$ описывается линейными ОДУ с постоянными коэффициентами. Наиболее распространенные решения таких уравнений имеют вид

$$\varphi_m(x) = x^{\alpha_m}, \quad \varphi_m(x) = e^{\beta_m x}, \quad \varphi_m(x) = \cos(\lambda_m x), \quad \varphi_m(x) = \sin(\lambda_m x). \quad (3.3.1.3)$$

Конечные наборы этих функций (в различных комбинациях) можно использовать для поиска точных решений с обобщенным разделением переменных вида (3.3.1.1), где постоянные α_m , β_m , λ_m , задаются или подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. Вторая система функций $\psi_k(t)$ определяется путем решения соответствующих нелинейных ОДУ с запаздыванием, получаемых после подстановки выражения (3.3.1.1) с функциями (3.3.1.3) в рассматриваемое уравнение.

Явное задание одной системы координатных функций $\{\varphi_j(x)\}$ резко упрощает процедуру построения точных решений; при этом отдельные решения вида (3.3.1.1) могут быть потеряны. Важно отметить, что известные к настоящему времени точные решения с обобщенным разделением переменных УрЧП с квадратичной нелинейностью в подавляющем большинстве задаются координатными функциями вида (3.3.1.3) (чаще всего при $n = 2$).

Метод инвариантных подпространств. Рассмотрим эволюционное уравнение с постоянным запаздыванием [453]:

$$u_t = F[u] + sw, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.3.1.4)$$

где $F[u]$ — нелинейный дифференциальный оператор по пространственной переменной x вида

$$F[u] \equiv F(x, u, u_x, \dots, u_x^{(n)}), \quad (3.3.1.5)$$

а s — некоторая константа.

Определение [246]. Конечномерное линейное подпространство

$$\mathcal{L}_k = \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)\}, \quad (3.3.1.6)$$

элементами которого являются всевозможные линейные комбинации линейно-независимых функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$, называется *инвариантным относительно дифференциального оператора F* , если $F[\mathcal{L}_k] \subseteq \mathcal{L}_k$. В этом случае существуют функции f_1, \dots, f_k такие, что

$$F\left[\sum_{j=1}^k C_j \varphi_j(x)\right] = \sum_{j=1}^k f_j(C_1, \dots, C_k) \varphi_j(x) \quad (3.3.1.7)$$

для произвольных постоянных C_1, \dots, C_k . Отметим, что функции $\varphi_j(x)$, входящие в (3.3.1.7), не должны зависеть от C_1, \dots, C_k .

Утверждение 1. Пусть линейное подпространство (3.3.1.6) инвариантно относительно дифференциального оператора F . Тогда уравнение (3.3.1.4) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида [246]:

$$u = \sum_{j=1}^k \psi_j(t) \varphi_j(x), \quad (3.3.1.8)$$

где функции $\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием [453]:

$$\psi_j' = f_j(\psi_1, \dots, \psi_k) + s\bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau), \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.3.1.9)$$

Здесь штрих обозначает производную по t .

Это утверждение доказывается следующим образом. Сначала выражение (3.3.1.8) подставляется в уравнение (3.3.1.4). Затем используется соотношение (3.3.1.7), в котором константы C_j заменены на функции $\psi_j = \psi_j(t)$. После объединения членов, пропорциональных $\varphi_j = \varphi_j(x)$, получаем равенство

$$\sum_{j=1}^k [\psi_j' - f_j(\psi_1, \dots, \psi_k) - s\bar{\psi}_j] \varphi_j(x) = 0.$$

Поскольку функции φ_j линейно независимы, то все выражения в квадратных скобках надо приравнять нулю. В результате приходим к системе ОДУ (3.3.1.9).

Замечание 3.17. Запаздывание в уравнениях (3.3.1.4) и (3.3.1.9) может произвольным образом зависеть от времени, т. е. $\tau = \tau(t)$.

В табл. 3.8 приведены некоторые нелинейные дифференциальные операторы и линейные подпространства, инвариантные относительно этих операторов (по данным [60, 246, 447]). Добавление линейного оператора $L[u] = \alpha u_{xx} + \beta u_x + \gamma u + \delta$ к нелинейным операторам №№ 4–8 не меняет инвариантных подпространств.

Таблица 3.8. Некоторые нелинейные дифференциальные операторы и линейные подпространства, инвариантные относительно этих операторов ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – свободные параметры).

| № | Нелинейный оператор $F[u]$ | Подпространства, инвариантные относительно $F[u]$ |
|---|--|---|
| 1 | $au_{xx} + bu_x^2 + \beta u_x + \gamma u + \delta$ | $\mathcal{L}_3 = \{1, x, x^2\}$ |
| 2 | $au_{xx} + bu_x^2 + cu^2 + \beta u_x + \gamma u + \delta$ | $\mathcal{L}_3 = \{1, \sin(x\sqrt{c/b}), \cos(x\sqrt{c/b})\}$ при $bc > 0$, $\mathcal{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(x\sqrt{ c/b }), \operatorname{ch}(x\sqrt{ c/b })\}$ при $bc < 0$ |
| 3 | $auu_{xx} + bu_x^2 + cu^2 + \alpha u_{xx} + \beta u_x + \gamma u + \delta$ | $\mathcal{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$ при $c/(a+b) = \lambda^2 > 0$, $\mathcal{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$ при $c/(a+b) = -\lambda^2 < 0$, $\mathcal{L}_3 = \{1, x, x^2\}$ при $c = 0$, $\mathcal{L}_2 = \{x^2, x^\sigma\}$, $\sigma = a/(a+b)$ при $c = \alpha = \beta = \delta = 0, a \neq -b$ |
| 4 | $uu_{xx} - u_x^2$ (частный случай 3-го оператора) | $\mathcal{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$, λ – произвольная постоянная, $\mathcal{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$, λ – произвольная постоянная, $\mathcal{L}_3 = \{1, x, x^2\}$ |
| 5 | $uu_{xx} - \frac{2}{3}u_x^2$ (частный случай 3-го оператора) | $\mathcal{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$ |
| 6 | $uu_{xx} - \frac{3}{4}u_x^2 + au^2$ (частный случай 3-го оператора) | $\mathcal{L}_5 = \{1, \cos(kx), \sin(kx), \cos(2kx), \sin(2kx)\}$ при $a = k^2 > 0$, $\mathcal{L}_5 = \{1, \operatorname{ch}(kx), \operatorname{sh}(kx), \operatorname{ch}(2kx), \operatorname{sh}(2kx)\}$ при $a = -k^2 < 0$, $\mathcal{L}_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ при $a = 0$ |
| 7 | $[(a^2 + bu + c)u_x]_x$ | $\mathcal{L}_2 = \{1, x\}$ |
| 8 | $u^2u_{xx} - \frac{1}{2}uu_x^2 + au^3$ | $\mathcal{L}_3 = \{1, \cos(\sqrt{2a}x), \sin(\sqrt{2a}x)\}$ при $a > 0$, $\mathcal{L}_3 = \{1, \operatorname{ch}(\sqrt{2 a x}), \operatorname{sh}(\sqrt{2 a x})\}$ при $a < 0$, $\mathcal{L}_3 = \{1, x, x^2\}$ при $a = 0$ |
| 9 | $u_x u_{xx}$ | $\mathcal{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$, $\mathcal{L}_3 = \{1, x^{3/2}, x^3\}$, $\mathcal{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$, $\varphi'_x \varphi''_{xx} = p_1 + p_2 \varphi$, p_1, p_2 – константы |

Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений с запаздыванием. Рассмотрим несколько примеров использования утверждения 1 и табл. 3.8 для построения точных решений уравнений реакционно-диффузионного типа с квадратичной нелинейностью и запаздыванием.

► **Пример 3.9.** Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [(a_1 u + a_0)u_x]_x + b_1 u + b_2 w, \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.3.1.10)$$

Из третьей строки табл. 3.8 при $a = b$ и $c = 0$ следует, что нелинейный дифференциальный оператор в правой части уравнения (3.3.1.10) при $b_2 = 0$ допускает инвариантное линейное подпространство $\mathcal{L}_3 = \{1, x, x^2\}$ (под действием

этого оператора квадратичный многочлен $C_1 + C_2x + C_3x^2$ преобразуется в аналогичный многочлен с другими коэффициентами). Учитывая сказанное и утверждение 1 можно сделать вывод, что исходное уравнение (3.3.1.10) имеет решение с обобщенным разделением переменных полиномиального вида по пространственной переменной

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2. \quad (3.3.1.11)$$

Здесь функции $\psi_j = \psi_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= 2a_1\psi_1\psi_3 + a_1\psi_2^2 + 2a_0\psi_3 + b_1\psi_1 + b_2\bar{\psi}_1, \\ \psi'_2 &= 6a_1\psi_2\psi_3 + b_1\psi_2 + b_2\bar{\psi}_2, \\ \psi'_3 &= 6a_1\psi_3^2 + b_1\psi_3 + b_2\bar{\psi}_3, \end{aligned}$$

где $\bar{\psi}_j = \psi_j(t - \tau)$. ◀

► **Пример 3.10.** Рассмотрим более сложное реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием и квадратичной нелинейностью

$$u_t = [(a_1u + a_0)u_x]_x + ku^2 + b_1u + b_2w, \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.3.1.12)$$

Это уравнение при $k = 0$ переходит в уравнение (3.3.1.10). Далее читаем, что $k \neq 0$.

1°. При $a_1k < 0$ нелинейный дифференциальный оператор в правой части уравнения (3.3.1.12) при $b_2 = 0$ допускает инвариантное линейное трехмерное подпространство $\mathcal{L}_3 = \{1, e^{-\lambda x}, e^{\lambda x}\}$, где $\lambda = \sqrt{-k/(2a_1)}$ (см. третью строку табл. 3.8 при $a = b$ и $c = k \neq 0$). В этом случае из утверждения 1 следует, что уравнение (3.3.1.12) допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\exp(-\lambda x) + \psi_3(t)\exp(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-\frac{k}{2a_1}}. \quad (3.3.1.13)$$

Здесь функции $\psi = \psi_n(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= k\psi_1^2 + 2k\psi_2\psi_3 + b_1\psi_1 + b_2\bar{\psi}_1, \\ \psi'_2 &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + a_0\lambda^2 + b_1)\psi_2 + b_2\bar{\psi}_2, \\ \psi'_3 &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + a_0\lambda^2 + b_1)\psi_3 + b_2\bar{\psi}_3, \end{aligned}$$

где $\bar{\psi}_j = \psi_j(t - \tau)$ ($i = 1, 2, 3$).

2°. При $a_1k > 0$ аналогичным образом можно показать, что уравнение (3.3.1.12) допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(\lambda x) + \psi_3(t)\sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{\frac{k}{2a_1}}, \quad (3.3.1.14)$$

где функции $\psi = \psi_n(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= k\psi_1^2 + \tfrac{1}{2}k(\psi_2^2 + \psi_3^2) + b_1\psi_1 + b_2\bar{\psi}_1, \\ \psi'_2 &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + b_1 - a_0\lambda^2)\psi_2 + b_2\bar{\psi}_2, \\ \psi'_3 &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + b_1 - a_0\lambda^2)\psi_3 + b_2\bar{\psi}_3. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

Некоторые обобщения. Ниже приведены два более общих утверждения, позволяющих получать точные решения с обобщенным разделением переменных некоторых нелинейных УрЧП с запаздыванием.

1°. Рассмотрим более сложное, чем (3.3.1.4), нелинейное УрЧП с несколькими запаздываниями

$$u_t = F[u] + \sum_{j=1}^p s_j w_j, \quad w_j = u(x, t - \tau_j), \quad (3.3.1.15)$$

где $F[u]$ — нелинейный дифференциальный оператор n -го порядка по x вида (3.3.1.5), а τ_j — времена запаздывания ($j = 1, \dots, p$), которые считаются произвольными независимыми константами.

Утверждение 2. Пусть линейное подпространство (3.3.1.6) инвариантно относительно оператора F , т. е. выполняется соотношение (3.3.1.7). Тогда уравнение (3.3.1.15) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (3.3.1.8), где функции $\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с p временами запаздывания

$$\psi'_j(t) = f_j(\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)) + \sum_{j=1}^p s_j \psi_j(t - \tau_j), \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.3.1.16)$$

2°. Рассмотрим теперь другое нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$L[u] = F[u; w], \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.3.1.17)$$

где $L[u]$ — произвольный линейный дифференциальный оператор по t вида

$$L[u] \equiv \sum_{j=1}^q a_j(t) u_t^{(j)}, \quad (3.3.1.18)$$

а $F[u; w]$ — нелинейный дифференциальный оператор по x , содержащий функции u и w :

$$F[u; w] \equiv F(u, u_x, u_{xx} \dots, u_x^{(m)}; w, w_x, w_{xx}, \dots, w_x^{(r)}). \quad (3.3.1.19)$$

Пусть линейно независимые функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ образуют конечномерное линейное подпространство \mathcal{L}_k .

Утверждение 3. Пусть C_1, \dots, C_k и $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_k$ — два множества произвольных вещественных констант и пусть существует функции f_1, \dots, f_k такие, что

$$F \left[\sum_{j=1}^k C_j \varphi_j(x); \sum_{j=1}^k \bar{C}_j \varphi_j(x) \right] = \sum_{j=1}^k f_j(C_1, \dots, C_n; \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n) \varphi_j(x). \quad (3.3.1.20)$$

Тогда уравнение (3.3.1.17) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (3.3.1.8), где функции $\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с запаздываниями

$$L[\psi_j(t)] = f_j(\psi_1(t), \dots, \psi_k(t); \psi_1(t - \tau), \dots, \psi_k(t - \tau)), \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.3.1.21)$$

Утверждение 3 может использоваться для построения решений с обобщенным разделением переменных нелинейных УрЧП с запаздыванием, отличных от обсуждаемых выше, в том числе нелинейных гиперболических уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием. В уравнениях (3.3.1.17) и (3.3.1.21) запаздывание может зависеть от времени, т. е. $\tau = \tau(t)$.

Замечание 3.18. Для поиска точных с обобщенным разделением переменных полезно использовать метод функциональных связей, описанный далее в разд. 3.4.

3.3.2. Решения с функциональным разделением переменных

Предварительные замечания и определения. Нелинейные уравнения, которые получены заменой $u = U(z)$ из линейных уравнений математической физики для функции $z = z(x, t)$, допускающих решения с разделяющимися переменными, будут иметь точные решения вида

$$u(x, t) = U(z), \quad \text{где} \quad z = \sum_{j=1}^k \varphi_j(x) \psi_j(t). \quad (3.3.2.1)$$

Многие нелинейные УрЧП которые не сводятся к линейным, также имеют точные решения вида (3.3.2.1). Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных*. В общем случае функции $\varphi_j(x)$, $\psi_j(t)$, $U(z)$ в (3.3.2.1) заранее неизвестны и подлежат определению в ходе дальнейшего исследования. Функцию U будем называть *внешней функцией*, а φ_j и ψ_j — *внутренними функциями*. Указанная терминология сохраняется и для нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием, которые в ряде случаев также допускают точные решения вида (3.3.2.1).

Замечание 3.19. Решение с обобщенным разделением переменных (см. разд. 3.3.1) является решением с функциональным разделением переменных частного вида, соответствующим случаю $U(z) = z$. Наличие внешней функции U в (3.3.2.1), которую требуется найти, является осложняющим фактором при построении точных решений с функциональным разделением переменных.

Часто (в узком смысле) термин *решение с функциональным разделением переменных* используется для более простых точных решений вида (см., например, [5, 63, 215, 264, 303, 387, 388, 600]):

$$u = U(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t), \quad (3.3.2.2)$$

где все три функции $U(z)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ являются искомыми. При построении решений (3.3.2.2) считается, что $\varphi \neq \text{const}$ и $\psi \neq \text{const}$.

Замечание 3.20. При функциональном разделении переменных поиск решений простейшего вида $u = U(\varphi(x) + \psi(t))$ и $u = U(\varphi(x)\psi(t))$ приводит к одинаковым результатам, поскольку справедливо представление $U(\varphi(x)\psi(t)) = U_1(\varphi_1(x) + \psi_1(t))$, где $U_1(z) = U(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln \varphi(x)$, $\psi_1(t) = \ln \psi(t)$.

Метод, основанный на преобразованиях искомой функции. В ряде случаев поиск решения в виде (3.3.2.1) удастся провести в два этапа. Сначала используется преобразование, сводящее исходное уравнение к более простому уравнению с квадратичной (иногда степенной) нелинейностью. Затем ищется решение с обобщенным разделением переменных полученного уравнения.

К сожалению, нет регулярных методов сведения УрЧП заданного вида к УрЧП с квадратичной нелинейностью. Уравнения с квадратичной нелинейностью иногда удастся получить с помощью преобразований искомой функции вида $u = U(z)$. Наиболее распространенные преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned} u &= z^\lambda && (\text{для уравнений со степенной нелинейностью}), \\ u &= \lambda \ln z && (\text{для уравнений с экспоненциальной нелинейностью}), \\ u &= e^{\lambda z} && (\text{для уравнений с логарифмической нелинейностью}), \end{aligned}$$

где λ — постоянная, подлежащая определению. Указанный подход эквивалентен априорному заданию вида внешней функции $U(z)$ в выражении (3.3.2.1); успех его реализации в основном зависит от опыта и интуиции исследователя.

Замечание 3.21. Много нелинейных уравнений математической физики без запаздывания, сводящихся с помощью подходящих преобразований к уравнениям с квадратичной нелинейностью, описаны в [15, 60, 63, 243–246, 447].

Примеры построения решений с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений с запаздыванием. Ниже приведены примеры использования на преобразований искомой функции для построения точных решений с функциональным разделением переменных нелинейных УрЧП второго порядка с запаздыванием.

► **Пример 3.11.** Рассмотрим шестипараметрическое семейство реакционно-диффузионных уравнений со степенными нелинейностями и запаздыванием

$$u_t = a(u^n u_x)_x + bu^{n+1} + cu + ku^{1-n} + mu^{1-n}w^n, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.3.2.3)$$

где a, b, c, k, n, m — свободные параметры. Подстановка $z = u^n$ преобразует (3.3.2.3) к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$z_t = azz_{xx} + \frac{a}{n}z_x^2 + bnz^2 + cnz + kn + mn\bar{z}, \quad \bar{z} = z(x, t - \tau). \quad (3.3.2.4)$$

Это уравнение допускает различные решения с обобщенным разделением переменных, вид которых зависит от коэффициентов нелинейных слагаемых в правой части (3.3.2.4). Решения уравнения (3.3.2.4) нетрудно найти, используя табл. 3.8 (см. строки №№ 3–6). В частности, при выполнении неравенства $ab(n+1) > 0$ будут решения с тригонометрическими функциями, а при $ab(n+1) < 0$ — решения с экспоненциальными функциями.

Указанный способ позволяет получить точные решения с функциональным

разделением переменных вида

$$\begin{aligned} u &= \{\varphi(t)[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t)\}^{1/n} \quad \text{при } ab(n+1) > 0, \\ u &= \{\varphi(t)[C_1 \operatorname{ch}(\beta x) + C_2 \operatorname{sh}(\beta x)] + \psi(t)\}^{1/n} \quad \text{при } ab(n+1) < 0. \end{aligned} \quad (3.3.2.5)$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные,

$$\beta = \sqrt{\frac{|b|n^2}{|a(n+1)|}},$$

а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= \frac{bn(n+2)}{n+1} \varphi \psi + cn\varphi + mn\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(t-\tau), \\ \psi'_t &= n(b\psi^2 + c\psi + k) + \frac{bn}{n+1} (C_1^2 \pm C_2^2) \varphi^2 + mn\bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau). \end{aligned} \quad (3.3.2.6)$$

Верхний знак во втором уравнении соответствует первому решению (3.3.2.5), а нижний знак — второму решению (3.3.2.5).

При $C_1 = C_2$ последнему уравнению (3.3.2.6) (с нижним знаком) можно удовлетворить, если положить $\psi = \text{const}$, где ψ — корень квадратного уравнения $b\psi^2 + c\psi + k = 0$. В этом случае первое уравнение (3.3.2.6) является линейным однородным ОДУ с запаздыванием вида (1.1.3.1), которое подробно исследовалось в разд. 1.1.3. Это уравнение допускает частные решения экспоненциального вида $\varphi = C_3 e^{\lambda t}$, где C_3 — произвольная постоянная, а λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda = \frac{bn(n+2)}{n+1} \psi + cne^{-\lambda\tau}.$$

► **Пример 3.12.** Рассмотрим теперь шестипараметрическое семейство реакционно-диффузионных уравнений с экспоненциальными нелинейностями и запаздыванием

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + c + ke^{-\lambda u} + mw^{\lambda(w-u)}, \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.3.2.7)$$

Замена $z = e^{\lambda u}$ приводит (3.3.2.7) к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$z_t = azz_{xx} + b\lambda z^2 + c\lambda z + k\lambda + m\lambda\bar{z}, \quad \bar{z} = z(x, t - \tau). \quad (3.3.2.8)$$

Решения уравнения (3.3.2.8) можно найти с помощью табл. 3.8 (см. строку № 3). Видно, что при выполнении неравенства $ab\lambda > 0$ уравнение (3.3.2.8) имеет решение с тригонометрическими функциями, при $ab\lambda < 0$ — решение с экспоненциальными функциями, а при $b = 0$ решение представляет собой квадратичный многочлен по переменной x .

Указанной заменой, в частности, можно найти точные решения с функциональным разделением переменных уравнения (3.3.2.7), которые выражаются через элементарные функции:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\lambda} \ln \{e^{\alpha t} [C_1 \cos(x\sqrt{\beta}) + C_2 \sin(x\sqrt{\beta})] + \gamma\} \quad \text{при } ab\lambda > 0, \\ u &= \frac{1}{\lambda} \ln \{e^{\alpha t} [C_1 \operatorname{ch}(x\sqrt{-\beta}) + C_2 \operatorname{sh}(x\sqrt{-\beta})] + \gamma\} \quad \text{при } ab\lambda < 0. \end{aligned}$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а

$$\alpha = \lambda(b\gamma + c + me^{-\lambda\tau}), \quad \beta = b\lambda/a,$$

где $\gamma = \gamma_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $b\gamma^2 + (c + m)\gamma + k = 0$. ◀

► **Пример 3.13.** Пятипараметрическое семейство реакционно-диффузионных уравнений с логарифмическими нелинейностями и запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + bu \ln^2 u + cu \ln u + ku + mu \ln w, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.3.2.9)$$

заменой $u = e^z$ сводится к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$z_t = az_{xx} + az_x^2 + bz^2 + cz + k + m\bar{z}, \quad \bar{z} = z(x, t - \tau). \quad (3.3.2.10)$$

Решения уравнения (3.3.2.10) можно найти с помощью табл. 3.8 (см. уравнения №№ 1 и 2). Видно, что при выполнении неравенства $ab > 0$ уравнение (3.3.2.10) имеет решение с тригонометрическими функциями, при $ab < 0$ — решение с экспоненциальными функциями. При $b = 0$ уравнение (3.3.2.10) допускает решение с обобщенным разделением переменных в виде квадратичного многочлена по пространственной переменной $z = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)x + \psi_3(t)$, что приводит к точному решению с функциональным разделением переменных исходного уравнения (3.3.2.9):

$$u = \exp[\psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)x + \psi_3(t)].$$

Функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi_1' &= 4a\psi_1^2 + c\psi_1 + m\bar{\psi}_1, \\ \psi_2' &= 4a\psi_1\psi_2 + c\psi_2 + m\bar{\psi}_2, \\ \psi_3' &= c\psi_3 + 2a\psi_1 + a\psi_2^2 + k + m\bar{\psi}_3, \end{aligned}$$

где $\bar{\psi}_j = \psi_j(t - \tau)$, $j = 1, 2, 3$. Первое уравнение этой системы имеет стационарное частное решение $\psi_1 = -(c + m)/(4a)$. В этом случае второе уравнение системы является линейным однородным ОДУ с запаздыванием, которое подробно исследовалось в разд. 1.1.3 и имеет частное решение экспоненциального вида $\psi_2 = Ce^{\lambda t}$, а последнее уравнение является линейным неоднородным ОДУ с запаздыванием. ◀

3.3.3. Использование линейных преобразований для построения решений с обобщенным и функциональным разделением переменных

Предварительные замечания. В некоторых случаях для получения точных решений нелинейных уравнений УрЧП с запаздыванием на начальном этапе можно сделать подходящее преобразование независимых переменных, а затем уже в новых переменных искать решения с обобщенным или функциональным разделением переменных. Наиболее простыми линейными преобразованиями являются преобразования вида

$$x, t, u \implies y, z, u, \quad \text{где} \quad y = k_1x + \lambda_1t, \quad z = k_2x + \lambda_2t, \quad (3.3.3.1)$$

где $k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2$ — некоторые константы. Использование таких преобразований позволило также получить точные решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (3.2.2.1) (см. решение (3.2.2.7)), (3.2.2.12) (см. решение (3.2.2.15) при $C_1 = 0$), (3.2.2.16) (см. решение (3.2.2.20)).

Линейные преобразования нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона. Для получения точных решений нелинейного уравнения Клейна — Гордона с запаздыванием (3.1.1.3) на начальном этапе полезно использовать следующие два линейных преобразования:

$$x, t, u \implies x, z, u, \quad \text{где } z = t \pm a^{-1/2}x. \quad (3.3.3.2)$$

В результате приходим к двум УрЧП с запаздыванием [452]:

$$\begin{aligned} au_{xx} \pm 2a^{1/2}u_{xz} + F(u, w) &= 0, \\ u &= u(x, z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x, \quad w = u(x, z - \tau). \end{aligned} \quad (3.3.3.3)$$

Отметим, что соотношения $t \pm a^{-1/2}x = C_{\pm}$, где C_{\pm} — произвольные постоянные, определяют два различных семейства характеристик для линейного волнового уравнения (3.1.1.3) при $F \equiv 0$ (см., например, [90, 436]).

Преобразованные уравнения (3.3.3.3) часто более удобны, чем исходное уравнение с запаздыванием (3.1.1.3) и позволяют получать точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных относительно новых аргументов x и z .

Точные решения нелинейных УрЧП с запаздыванием [452]. Для иллюстрации эффективности использования линейных преобразований вида (3.3.3.2) приведем несколько нелинейных УрЧП гиперболического типа с запаздыванием и их точных решений.

Уравнение 1. Нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + f(w/u) \quad (3.3.3.4)$$

в переменных (3.3.3.2) допускает точные решения с мультипликативным разделением переменных

$$u = (x + C)\varphi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(z)$ удовлетворяют нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\pm 2a^{1/2}\varphi'(z) + f(\varphi(z - \tau)/\varphi(z)) = 0.$$

Уравнение 2. Нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u - w) \quad (3.3.3.5)$$

в переменных (3.3.3.2) допускает несколько точных решений, описанных ниже.

1°. Точное решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = Cx^2 + \varphi(z)x + \psi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются разностными уравнениями

$$\varphi(z) = \varphi(z - \tau), \quad (3.3.3.6)$$

$$f(\psi(z) - \psi(z - \tau)) = \mp 2a^{1/2}\varphi'(z) - 2Ca. \quad (3.3.3.7)$$

Из линейного уравнения (3.3.3.6) следует, что $\varphi(z)$ является любой τ -периодической функцией, которую в общем случае можно представить в виде сходящегося ряда

$$\varphi(z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n z}{\tau} + B_n \sin \frac{2\pi n z}{\tau} \right), \quad (3.3.3.8)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Подставив (3.3.3.8) в (3.3.3.7), получим уравнение, которое сводится к линейному неоднородному разностному уравнению вида $\psi(z) - \psi(z - \tau) = g_{\mp}(z)$ с известной правой частью.

2°. Точное решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = Cxz + \varphi(x) + \psi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(z)$ описываются линейным ОДУ и линейным разностным уравнением

$$a\varphi''_{xx} \pm 2Ca^{1/2} + f(C\tau x + B) = 0,$$

$$\varphi(z) - \varphi(z - \tau) = B,$$

B — произвольная постоянная. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(z)$ допускают представление в замкнутом виде.

Уравнение 3. Нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u + kw) \quad (3.3.3.9)$$

допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \varphi(z)x + \psi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x, \quad (3.3.3.10)$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются разностными уравнениями

$$\varphi(z) + k\varphi(z - \tau) = 0, \quad (3.3.3.11)$$

$$f(\psi(z) + k\psi(z - \tau)) = \mp 2a^{1/2}\varphi'(z). \quad (3.3.3.12)$$

При $k > 0$ общее решение уравнения (3.3.3.11) можно представить в виде

$$\varphi(z) = k^{z/\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{(2n-1)\pi z}{\tau} + B_n \sin \frac{(2n-1)\pi z}{\tau} \right], \quad (3.3.3.13)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные, такие, что ряд в (3.3.3.13) сходится. Значению $k = 1$ соответствует общая τ -антипериодическая функция (3.3.3.13).

При $k < 0$ уравнение (3.3.3.11) имеет общее решение

$$\varphi(z) = |k|^{z/\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n z}{\tau} + B_n \sin \frac{2\pi n z}{\tau} \right). \quad (3.3.3.14)$$

Подставив (3.3.3.13) или (3.3.3.14) в (3.3.3.12), получим уравнения, которые можно привести к линейным неоднородным разностным уравнениям вида $\psi(z) + k\psi(z - \tau) = g_{\mp}(z)$ с известной правой частью.

Уравнение 4. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + u^{1-2k} f(u^k - w^k), \quad k \neq 1, \quad (3.3.3.15)$$

допускает точные решения с функциональным разделением переменных

$$u = [x + \theta(z)]^{1/k}, \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\pm 2a^{1/2}\theta'_z + a + \frac{k^2}{1-k} f(\theta - \bar{\theta}) = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(z - \tau).$$

Уравнение 5. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + e^{bu+cw} f(u - w) \quad (3.3.3.16)$$

допускает точные решения с аддитивным разделением переменных

$$u = \varphi(x) + \theta(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка

$$\varphi''_{xx} = K e^{(b+c)\varphi},$$

где K — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается разностным уравнением

$$aK + e^{b\theta+c\bar{\theta}} f(\theta - \bar{\theta}) = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(z - \tau).$$

Отметим, что общее решение ОДУ для φ выражается в элементарных функциях [448].

Уравнение 6. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + e^{-2\beta u} f(be^{\beta u} + ce^{\beta w}) \quad (3.3.3.17)$$

допускает точные решения с функциональным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\beta} \ln[\varphi(z)x + \psi(z)], \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет линейному разностному уравнению

$$b\varphi + c\bar{\varphi} = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(z - \tau),$$

а функция $\psi = \psi(z)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\pm 2a^{1/2}(\varphi'_z \psi - \varphi \psi'_z) - a\varphi^2 + \beta f(b\psi + c\bar{\psi}) = 0, \quad \bar{\psi} = \psi(z - \tau).$$

3.4. Метод функциональных связей

3.4.1. Общее описание метода функциональных связей

Следуя [451], рассмотрим класс нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + uf(z) + wg(z) + h(z), \\ w &= u(x, t - \tau), \quad z = z(u, w), \end{aligned} \quad (3.4.1.1)$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции, $z = z(u, w)$ — некоторая заданная функция (в некоторых случаях эта функция может быть искомой). Кроме того, по ходу дела иногда будем рассматривать также более общие уравнения, когда функции f , g , h дополнительно явно зависят также от одной независимой переменной x или t .

Замечание 3.22. Вместо первой производной u_t в левой части уравнения (3.4.1.1) может стоять вторая производная u_{tt} или линейная комбинация производных по времени $L[u] = \sum_{m=1}^n c_m u_t^{(m)}$, где c_m — произвольные постоянные.

Будем искать решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \psi_n(t), \quad (3.4.1.2)$$

где функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. Напомним, что наиболее часто в сумме (3.4.1.2) используются координатные функции, приведенные в (3.3.1.3).

Важно отметить, что для нелинейных УрЧП с запаздыванием вида (3.4.1.1), которые содержат произвольные функции, нельзя использовать стандартные методы обобщенного разделения переменных, описанные в книгах [60, 63, 246, 447] и разд. 3.3.

Разработанный в [451] метод функциональных связей основан на поиске решений с обобщенным разделением переменных (3.4.1.2) уравнений вида (3.4.1.1) и родственных более сложных уравнений с привлечением одной из следующих двух дополнительных функциональных связей:

$$z(u, w) = p(x), \quad w = u(x, t - \tau); \quad (3.4.1.3)$$

$$z(u, w) = q(t), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.4.1.4)$$

которые представляют собой разностные уравнения по переменной t , где пространственная переменная x играет роль свободного параметра. Функция $z = z(u, w)$ является аргументом произвольных функций f , g , h , входящих в уравнение (3.4.1.1). Функции $p(x)$ и $q(t)$ зависят от x и t неявно (выражаются соответственно через функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(t)$) и определяются в результате исследования уравнений (3.4.1.3) или (3.4.1.4) с учетом (3.4.1.2). Важно отметить, что нет необходимости получать общие решения уравнений (3.4.1.3) или (3.4.1.4), достаточно иметь частные решения.

Решение разностного уравнения (3.4.1.3) (или (3.4.1.4)) с учетом (3.4.1.2) определяет допустимый вид точного решения, окончательный вид которого определяется далее после подстановки полученного решения в рассматриваемое уравнение (3.4.1.1). Связи (3.4.1.3) и (3.4.1.4) далее будем называть соответственно *функциональными связями первого и второго рода*.

При выполнении любого из соотношений (3.4.1.3) или (3.4.1.4) уравнение (3.4.1.1) «линеаризуется», что позволяет далее использовать процедуру разделения переменных.

Замечание 3.23. Для однозначности в разд. 3.4 простейшую (вырожденную) функциональную связь вида $z(u, w) = \text{const}$ будем относить к функциональной связи первого рода (3.4.1.3).

Замечание 3.24. Термин «функциональная связь» введен по аналогии с термином дифференциальная связь, который используется в методе дифференциальных связей (предложен Н.Н. Яненко в [96]), применяемом для поиска точных решений нелинейных УрЧП и систем таких уравнений. Изложение этого метода и примеры его применения можно найти, например, в [60, 63, 77, 447].

Замечание 3.25. В некоторых случаях функциональные уравнения (3.4.1.3) и (3.4.1.4) позволяют получать более сложные, чем (3.4.1.2), решения с функциональным разделением переменных (примеры таких решений можно найти в разд. 3.4.3).

Далее приведены примеры использования метода функциональных связей для построения точных решений с обобщенным разделением переменных некоторых нелинейных уравнений с запаздыванием вида (3.4.1.1) и родственных более сложных уравнений.

3.4.2. Точные решения квазилинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

В данном разделе рассматриваются квазилинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием вида (3.4.1.1), которые линейны относительно обеих производных. Приведенные далее точные решения таких уравнений были получены в [451].

Уравнение содержит одну произвольную функцию, зависящую от w/u .

Уравнение 1. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионных уравнение с постоянным запаздыванием, которое содержит одну произвольную функцию, зависящую от отношения w/u , вида

$$u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.1)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (3.4.1.1) при $g = h = 0$ и $z = w/u$.

1°. Функциональная связь второго рода (3.4.1.4) в данном случае имеет вид

$$w/u = q(t), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.2)$$

Очевидно, что разностному уравнению (3.4.2.2) можно удовлетворить, если взять простое решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t), \quad (3.4.2.3)$$

которое дает $q(t) = \psi(t - \tau)/\psi(t)$. Подставив (3.4.2.3) в (3.4.2.1) и разделяя переменные, получим уравнения для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\varphi'' = k\varphi, \quad (3.4.2.4)$$

$$\psi'(t) = ak\psi(t) + \psi(t)f(\psi(t - \tau)/\psi(t)), \quad (3.4.2.5)$$

где k — произвольная постоянная.

Общее решение ОДУ (3.4.2.4) определяется формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{|k|}x) + C_2 \sin(\sqrt{|k|}x) & \text{при } k < 0; \\ C_1 \exp(-\sqrt{k}x) + C_2 \exp(\sqrt{k}x) & \text{при } k > 0; \\ C_1 x + C_2 & \text{при } k = 0, \end{cases} \quad (3.4.2.6)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ОДУ с запаздыванием (3.4.2.5) допускает частные решения экспоненциального вида

$$\psi(t) = C_3 e^{\lambda t},$$

где C_3 — произвольная постоянная, а λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda = ak + f(e^{-\lambda\tau}).$$

2°. Функциональная связь первого рода (3.4.1.3) для уравнения (3.4.2.1) в простейшем случае $p(x) = p_0 = \text{const}$ записывается так:

$$w/u = p_0, \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.7)$$

Решение разностного уравнения (3.4.2.7) при $p_0 > 0$ ищем в виде

$$u = e^{ct}v(x, t), \quad v(x, t) = v(x, t - \tau), \quad (3.4.2.8)$$

где c — произвольная постоянная, а $v(x, t) - \tau$ -периодическая функция, подлежащая определению. В данном случае имеем $w/u = p_0 = e^{-c\tau}$.

Подставив (3.4.2.8) в уравнение (3.4.2.1), получим линейную задачу для определения функции v :

$$v_t = av_{xx} + bv, \quad v(x, t) = v(x, t - \tau), \quad (3.4.2.9)$$

где $b = f(e^{-c\tau}) - c$.

Для удобства обозначим общее решение задачи (3.4.2.9) $v = V_1(x, t; b)$. Оно имеет вид

$$V_1(x, t; b) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_n x) [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x) [C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)], \quad (3.4.2.10)$$

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} - b}{2a} \right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} + b}{2a} \right)^{1/2}, \quad (3.4.2.11)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, для которых ряд (3.4.2.10) — (3.4.2.11) и его производные $(V_1)_t, (V_1)_{xx}$ сходятся (сходимость, например, заведомо можно обеспечить, если положить $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ при $n > N$, где N — произвольное натуральное число).

Выделим следующие частные случаи:

(i) τ -периодические по времени решения задачи (3.4.2.9), затухающие при $x \rightarrow \infty$, даются формулами (3.4.2.10) — (3.4.2.11) при $A_0 = B_0 = 0, C_n = D_n = 0, n = 1, 2, \dots$;

(ii) τ -периодические по времени решения задачи (3.4.2.9), ограниченные при $x \rightarrow \infty$, даются формулами (3.4.2.10) — (3.4.2.11) при $C_n = D_n = 0, n = 1, 2, \dots$;

(iii) стационарное решение определяется формулами (3.4.2.10) — (3.4.2.11) при $A_n = B_n = C_n = D_n = 0, n = 1, 2, \dots$

Подводя итоги, имеем точное решение уравнения (3.4.2.1):

$$u = e^{ct} V_1(x, t; b), \quad b = f(e^{-c\tau}) - c, \quad (3.4.2.12)$$

где c — произвольная постоянная, а τ -периодическая функция $V_1(x, t; b)$ определяется формулами (3.4.2.10) — (3.4.2.11).

3°. Решение разностного уравнения (3.4.2.7) при $p_0 < 0$ ищем в виде

$$u = e^{ct} v(x, t), \quad v(x, t) = -v(x, t - \tau), \quad (3.4.2.13)$$

где c — произвольная постоянная, $v(x, t)$ — τ -антипериодическая функция. В данном случае $w/u = p_0 = -e^{-c\tau}$.

Подставив (3.4.2.13) в уравнение (3.4.2.1), получим линейную задачу для определения функции v :

$$v_t = av_{xx} + bv, \quad v(x, t) = -v(x, t - \tau), \quad (3.4.2.14)$$

где $b = f(-e^{-c\tau}) - c$.

Общее решение задачи (3.4.2.14), которое для удобства обозначим $v = V_2(x, t; b)$, имеет вид

$$V_2(x, t; b) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n x) [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x) [C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)], \quad (3.4.2.15)$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} - b}{2a} \right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} + b}{2a} \right)^{1/2}, \quad (3.4.2.16)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, для которых ряды (3.4.2.15) — (3.4.2.16) и соответствующие производные $(V_2)_t$ и $(V_2)_{xx}$ сходятся. Затухающие при $x \rightarrow \infty$ τ -антипериодические по времени t решения задачи (3.4.2.14) даются формулами (3.4.2.15) — (3.4.2.16) при $C_n = D_n = 0, n = 1, 2, \dots$

Подводя итоги, имеем точное решение уравнения (3.4.2.1):

$$u = e^{ct} V_2(x, t; b), \quad b = f(-e^{-c\tau}) - c, \quad (3.4.2.17)$$

где c — произвольная постоянная, а τ -антипериодическая функция $V_2(x, t; b)$ определяется формулами (3.4.2.15) — (3.4.2.16).

Замечание 3.26. Решения (3.4.2.10) — (3.4.2.11) и (3.4.2.15) — (3.4.2.16) очень похожи по внешнему виду. Однако в первом решении первая сумма начинается с $n = 0$, а во втором решении — с $n = 1$; отличаются также значения β_n .

Уравнение 2. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионных уравнение с постоянным запаздыванием, которое содержит одну произвольную функцию

$$u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.18)$$

Это уравнение при $b = 0$ переходит в уравнение (3.4.2.1). Точное решение уравнения (3.4.2.18), определяемое дифференциальной связью второго рода (3.4.2.2), имеет вид (3.4.2.3), т. е.

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} a\varphi'' + b\varphi \ln \varphi &= C\varphi, \\ \psi' &= b\psi \ln \psi + C\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau), \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнения содержат одну произвольную функцию, зависящую от линейной комбинации u и w .

Уравнение 3. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионных уравнение с постоянным запаздыванием, которое содержит одну произвольную функцию, зависящую от разности $u - w$, вида

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.19)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (3.4.1.1) при $f(z) = b$, $g = 0$, $z = u - w$; для удобства функция h была переобозначена на f .

1°. Функциональная связь второго рода (3.4.1.4) в данном случае имеет вид

$$u - w = q(t), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.20)$$

Очевидно, что линейному разностному уравнению (3.4.2.20) можно удовлетворить, если взять решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \varphi(x) + \psi(t), \quad (3.4.2.21)$$

которое дает $q(t) = \psi(t) - \psi(t - \tau)$. Подставив (3.4.2.21) в (3.4.2.19) и разделяя переменные, получим уравнения для определения функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi = k, \quad (3.4.2.22)$$

$$\psi'_t(t) = b\psi(t) + k + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)), \quad (3.4.2.23)$$

где k — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (3.4.2.22) при $b \neq 0$ и $k = 0$ имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x), & \beta = \sqrt{b/a} \quad \text{при } b > 0; \\ C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x), & \beta = \sqrt{-b/a} \quad \text{при } b < 0, \end{cases} \quad (3.4.2.24)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решение (3.4.2.21), (3.4.2.24) при $b > 0$ является периодическим по пространственной переменной x .

Общее решение уравнения (3.4.2.22) при $b = 0$ и $k \neq 0$ определяется формулой

$$\varphi(x) = \frac{k}{2a} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (3.4.2.25)$$

2°. Функциональная связь первого рода (3.4.1.3) для уравнения (3.4.2.19) имеет вид

$$u - w = p(x), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.26)$$

Разностному уравнению (3.4.2.26) можно, например, удовлетворить, если взять решение с обобщенным разделением переменных

$$u = t\varphi(x) + \psi(x), \quad (3.4.2.27)$$

которое дает $p(x) = \tau\varphi(x)$.

Подставив (3.4.2.27) в (3.4.2.19), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$:

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi = 0, \quad (3.4.2.28)$$

$$a\psi''_{xx} + b\psi + f(\tau\varphi) - \varphi = 0. \quad (3.4.2.29)$$

Уравнение (3.4.2.28) совпадает с уравнением (3.4.2.22) при $k = 0$, его решение дается формулами (3.4.2.24). Линейное неоднородное ОДУ с постоянными коэффициентами (3.4.2.29) легко интегрируется.

Более сложные точные решения уравнения (3.4.2.19) (содержащие любое число произвольных параметров) можно получить, используя приведенные выше решения (3.4.2.21) и (3.4.2.27) и следующую теорему.

Теорема 1 (о нелинейной суперпозиции решений). Пусть $u_0(x, t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения с запаздыванием (3.4.2.19), а функция $v = V_1(x, t; b)$ является любым τ -периодическим решением линейного уравнения теплопроводности с источником (3.4.2.9). Тогда сумма

$$u = u_0(x, t) + V_1(x, t; b) \quad (3.4.2.30)$$

также является решением уравнения (3.4.2.19). Общий вид функции $V_1(x, t; b)$ определяется формулами (3.4.2.10) — (3.4.2.11).

Эта теорема доказывается прямой подстановкой формулы (3.4.2.30) в исходное уравнение с запаздыванием (3.4.2.19) с использованием уравнения для функции v (3.4.2.9).

Замечание 3.27. В формуле (3.4.2.30) в качестве частного решения $u_0(x, t)$ нелинейного уравнения (3.4.2.19) можно использовать, например, пространственно одно-родное решение $u_0(t)$, стационарное решение $u_0(x)$ или решение типа бегущей волны $u_0 = u_0(\alpha x + \beta t)$.

Уравнение 4. Рассмотрим уравнение

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - kw), \quad k > 0, \quad (3.4.2.31)$$

которое является частным случаем уравнения (3.4.1.1) при $f(z) = b$, $g = 0$, $z = u - kw$ (для удобства функция h была переобозначена на f).

1°. Функциональная связь первого рода (3.4.1.3) для уравнения (3.4.2.31) записывается так:

$$u - kw = p(x), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.32)$$

Линейному разностному уравнению (3.4.2.32) можно, например, удовлетворить, если взять решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = e^{ct}\varphi(x) + \psi(x), \quad c = \frac{1}{\tau} \ln k, \quad (3.4.2.33)$$

которое дает $p(x) = (1 - k)\psi(x)$.

Подставив (3.4.2.33) в (3.4.2.31), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$:

$$a\varphi'' + (b - c)\varphi = 0, \quad (3.4.2.34)$$

$$a\psi'' + b\psi + f(\eta) = 0, \quad \eta = (1 - k)\psi. \quad (3.4.2.35)$$

Линейное ОДУ (3.4.2.34) с точностью до элементарных переобозначений совпадает с уравнением (3.4.2.22) при $k = 0$; его решение дается формулами (3.4.2.24), в которых b надо заменить на $b - c$. Нелинейное ОДУ (3.4.2.35) является автономным, его общее решение можно представить в неявном виде.

2°. Более сложные точные решения уравнения (3.4.2.31) (содержащие любое число произвольных параметров) можно получить, используя приведенное выше решение (3.4.2.33) — (3.4.2.35) и следующую теорему.

Теорема 2 (обобщает теорему 1). Пусть $u_0(x, t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения с запаздыванием (3.4.2.31), а функция $v = V_1(x, t; b)$ является любым τ -периодическим решением линейного уравнения теплопроводности с источником (3.4.2.9). Тогда сумма

$$u = u_0(x, t) + e^{ct}V_1(x, t; b - c), \quad (3.4.2.36)$$

где $c = (\ln k)/\tau$, также является решением уравнения (3.4.2.31). Общий вид функции $V_1(x, t; b)$ определяется формулами (3.4.2.10) — (3.4.2.11).

Эта теорема доказывается прямой подстановкой формулы (3.4.2.36) в исходное уравнение с запаздыванием (3.4.2.31) с использованием уравнения для функции v (3.4.2.9).

Формула (3.4.2.36) позволяет получить широкий класс точных решений нелинейного уравнения с запаздыванием (3.4.2.31). В качестве простейшего частного решения уравнения (3.4.2.31) в (3.4.2.36) можно использовать константу u_0 , удовлетворяющую алгебраическому (или трансцендентному) уравнению $bu_0 + f((1 - k)u_0) = 0$. В качестве функции $u_0(x, t)$ в (3.4.2.36) можно взять также простые частные решения вида $u_0 = u_0(x)$ и $u_0 = u_0(t)$, а также более сложное решение типа бегущей волны $u_0 = \theta(\alpha x + \beta t)$, где α и β — произвольные постоянные, а функция $\theta(y)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$a\alpha^2\theta''(y) - \beta\theta'(y) + b\theta(y) + f(\theta(y) - k\theta(y - \sigma)) = 0, \quad y = \alpha x + \beta t, \quad \sigma = \beta\tau.$$

Кроме того, можно использовать точное решение (3.4.2.33).

Замечание 3.28. Можно рассмотреть более общее, чем (3.4.2.31), уравнение

$$u_t = au_{xx} + bu + f(w_1 - kw_2), \quad w_1 = u(t - \tau_1), \quad w_2 = u(t - \tau_2), \quad k > 0, \quad (3.4.2.37)$$

с двумя запаздываниями τ_1 и τ_2 ($\tau_1 \neq \tau_2$). Тогда разностному уравнению $w_1 - kw_2 = p(x)$ можно удовлетворить, если взять решение с обобщенным разделением переменных вида (3.4.2.33), в котором $c = \frac{1}{\tau} \ln k$ надо заменить на $c = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \ln k$. Тогда будет справедлива теорема, аналогичная теореме 2, с которой в формуле (3.4.2.36) следует положить $c = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \ln k$.

Уравнение 5. Рассмотрим теперь уравнение

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u + kw), \quad k > 0, \quad (3.4.2.38)$$

которое отличается от уравнения (3.4.2.31) знаком параметра k в кинетическом члене. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $u_0(x, t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения с запаздыванием (3.4.2.38), а функция $v = V_2(x, t; b)$ является любым τ -антипериодическим решением линейного уравнения теплопроводности с источником (3.4.2.14). Тогда сумма

$$u = u_0(x, t) + e^{ct}V_2(x, t; b - c), \quad c = \frac{1}{\tau} \ln k, \quad (3.4.2.39)$$

также является решением уравнения (3.4.2.38). Общий вид функции $V_2(x, t; b)$ определяется формулами (3.4.2.15) — (3.4.2.16).

Теорема 3 доказывается прямой проверкой и позволяет получить широкий класс точных решений нелинейного уравнения с запаздыванием (3.4.2.38). В качестве частного решения $u_0(x, t)$ в (3.4.2.39) можно использовать, например, пространственно однородное решение $u_0(t)$, стационарное решение $u_0(x)$ или решение типа бегущей волны $u_0 = u_0(\alpha x + \beta t)$.

Уравнения содержат две произвольные функции, зависящие от линейной комбинации u и w .

Уравнение 6. Рассмотрим теперь более сложное нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf(u - w) + wg(u - w) + h(u - w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.4.2.40)$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции (в данном случае одну из двух функций f или g можно без ограничения общности положить равной нулю).

1°. Функциональная связь первого рода (3.4.1.3) для уравнения (3.4.2.40) имеет вид (3.4.2.26). Линейному разностному уравнению (3.4.2.26) можно удовлетворить, если, как и ранее, взять решение с обобщенным разделением переменных вида (3.4.2.27). В результате можно получить уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (они не выписываются поскольку ниже излагается существенно более общий результат).

2°. Линейному разностному уравнению (3.4.2.26) можно удовлетворить, если положить

$$u = \sum_{n=1}^N [\varphi_n(x) \cos(\beta_n t) + \psi_n(x) \sin(\beta_n t)] + t\theta(x) + \xi(x), \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad (3.4.2.41)$$

где N — любое целое положительное число. В правой части уравнения (3.4.2.26) в этом случае имеем $p(x) = \tau\varphi(x)$.

Подставив (3.4.2.41) в уравнение (3.4.2.40), после элементарных преобразований приходим к равенству

$$\sum_{n=1}^N [A_n \cos(\beta_n t) + B_n \sin(\beta_n t)] + Ct + D = 0, \quad (3.4.2.42)$$

в котором функциональные коэффициенты A_n , B_n , C , D зависят от $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\theta(x)$, $\xi(x)$ и их производных и не зависят от времени t . Приравнявая в (3.4.2.42) к нулю все функциональные коэффициенты $A_n = B_n = C = D = 0$, получим следующие ОДУ для определения искомых функций:

$$\begin{aligned} a\varphi_n'' + \varphi_n[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)] - \beta_n\psi_n &= 0, \\ a\psi_n'' + \psi_n[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)] + \beta_n\varphi_n &= 0, \\ a\theta'' + \theta[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)] &= 0, \\ a\xi'' + \xi f(\tau\theta) + (\xi - \tau\theta)g(\tau\theta) + h(\tau\theta) - \theta &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что третье нелинейное уравнение допускает тривиальное решение $\theta = 0$; в этом случае остальные уравнения становятся линейными ОДУ с постоянными коэффициентами.

Уравнение 7. Рассмотрим нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf(u - kw) + wg(u - kw) + h(u - kw), \quad k > 0, \quad (3.4.2.43)$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции, которое является обобщением уравнения (3.4.2.31).

1°. Функциональная связь первого рода (3.4.1.3) для уравнения (3.4.2.43) имеет вид (3.4.2.32). Линейному разностному уравнению (3.4.2.32) можно удовлетворить, если, как и ранее, взять решение с обобщенным разделением переменных вида (3.4.2.33). В результате можно получить уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (они не выписываются поскольку ниже излагается существенно более общий результат).

2°. Линейному разностному уравнению (3.4.2.32) можно удовлетворить, если положить

$$u = e^{ct} \left\{ \theta(x) + \sum_{n=1}^N [\varphi_n(x) \cos(\beta_n t) + \psi_n(x) \sin(\beta_n t)] \right\} + \xi(x), \quad (3.4.2.44)$$

$$c = \frac{1}{\tau} \ln k, \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau},$$

где N — любое целое положительное число. В правой части уравнения (3.4.2.32) в этом случае имеем $p(x) = (1 - k)\xi(x)$.

Подставим (3.4.2.44) в уравнение (3.4.2.43). Рассуждая аналогично тому как это делалось для уравнения (3.4.2.40), получим следующие ОДУ для определения функций $\theta(x)$, $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\xi(x)$:

$$\begin{aligned} a\theta'' + \theta \left[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c \right] &= 0, \quad \eta = (1 - k)\xi, \\ a\varphi_n'' + \varphi_n \left[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c \right] - \beta_n \psi_n &= 0, \\ a\psi_n'' + \psi_n \left[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c \right] + \beta_n \varphi_n &= 0, \\ a\xi'' + \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение 8. Рассмотрим нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf(u + kw) + wg(u + kw) + h(u + kw), \quad k > 0, \quad (3.4.2.45)$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции, которое является обобщением уравнения (3.4.2.38).

Дифференциальная связь первого рода (3.4.1.3) для уравнения (3.4.2.45) имеет вид

$$u + kw = p(x), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.46)$$

Линейному разностному уравнению (3.4.2.46) можно удовлетворить, если положить

$$u = e^{ct} \sum_{n=1}^N [\varphi_n(x) \cos(\beta_n t) + \psi_n(x) \sin(\beta_n t)] + \xi(x), \quad (3.4.2.47)$$

$$c = \frac{1}{\tau} \ln k, \quad \beta_n = \frac{\pi(2n - 1)}{\tau},$$

где N — любое целое положительное число. В правой части уравнения (3.4.2.46) в этом случае имеем $p(x) = (1 + k)\xi(x)$.

Подставим (3.4.2.47) в уравнение (3.4.2.45). Рассуждая аналогично тому как это делалось для уравнения (3.4.2.40), получим следующие ОДУ для определения функций $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\xi(x)$:

$$\begin{aligned} a\varphi_n'' + \varphi_n \left[f(\eta) - \frac{1}{k}g(\eta) - c \right] - \beta_n \psi_n &= 0, \\ a\psi_n'' + \psi_n \left[f(\eta) - \frac{1}{k}g(\eta) - c \right] + \beta_n \varphi_n &= 0, \\ a\xi'' + \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta) &= 0, \quad \eta = (1 + k)\xi. \end{aligned}$$

Отметим, что последнее уравнение является изолированным (т. е. не зависит от других уравнений).

Уравнение содержит две произвольные функции, зависящие от суммы квадратов u и w .

Уравнение 9. Рассмотрим теперь нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf(u^2 + w^2) + wg(u^2 + w^2), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.4.2.48)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции, зависящие от нелинейного (квадратичного) аргумента $z = u^2 + w^2$.

Функциональная связь первого рода (3.4.1.3) для уравнения (3.4.2.48) имеет вид

$$u^2 + w^2 = p(x), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.2.49)$$

Нелинейному разностному уравнению (3.4.2.49) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{aligned} u &= \varphi_n(x) \cos(\lambda_n t) + \psi_n(x) \sin(\lambda_n t), \\ \lambda_n &= \frac{\pi(2n+1)}{2\tau}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3.4.2.50)$$

Нетрудно проверить, что имеет место соотношение

$$w = (-1)^n \varphi_n(x) \sin(\lambda_n t) + (-1)^{n+1} \psi_n(x) \cos(\lambda_n t),$$

а также

$$u^2 + w^2 = \varphi_n^2(x) + \psi_n^2(x) = p(x).$$

Подставим (3.4.2.50) в уравнение (3.4.2.48). Расщепляя далее полученное выражение по $\cos(\lambda_n t)$ и $\sin(\lambda_n t)$, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi_n = \varphi_n(x)$ и $\psi_n = \psi_n(x)$:

$$\begin{aligned} a\varphi_n'' + \varphi_n f(\varphi_n^2 + \psi_n^2) + (-1)^{n+1} \psi_n g(\varphi_n^2 + \psi_n^2) - \lambda_n \psi_n &= 0, \\ a\psi_n'' + \psi_n f(\varphi_n^2 + \psi_n^2) + (-1)^n \varphi_n g(\varphi_n^2 + \psi_n^2) + \lambda_n \varphi_n &= 0. \end{aligned}$$

Некоторые обобщения. В тех случаях, когда для построения точного решения использовалась дифференциальная связь второго рода (3.4.1.4) при $q(t) \neq \text{const}$, полученные выше результаты допускают различные обобщения. Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

► **Пример 3.14.** Более общее, чем (3.4.2.1), нелинейное УрЧП с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf(t, w/u), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.4.2.51)$$

в котором кинетическая функция зависит от дополнительного аргумента t , также имеет точное решение с мультипликативным разделением переменных вида (3.4.2.3).

Уравнение (3.4.2.51) в свою очередь допускает дальнейшее обобщение. А именно, вместо постоянного запаздывания τ можно взять произвольное переменное запаздывание $\tau = \tau(t)$. Соответствующее более сложное уравнение (3.4.2.51) с переменным запаздыванием также будет иметь точное решение с мультипликативным разделением переменных вида (3.4.2.3). ◀

► **Пример 3.15.** Более общее, чем (3.4.2.19), нелинейное УрЧП с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + bu + f(t, u - w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.4.2.52)$$

в котором кинетическая функция зависит от дополнительного аргумента t , также имеет точное решение с аддитивным разделением переменных вида (3.4.2.21).

Уравнение (3.4.2.52) допускает дальнейшее обобщение. А именно, уравнение (3.4.2.52) с переменным запаздыванием $\tau = \tau(t)$ также имеет точное решение с аддитивным разделением переменных вида (3.4.2.21). ◀

3.4.3. Точные решения более сложных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

Рассмотрим теперь более сложные, чем (3.4.1.1), нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с постоянным запаздыванием вида [456]:

$$\begin{aligned} u_t &= [g_0(u)u_x]_x + g_1(u)f_1(z) + g_2(u)f_2(z) + g_3(u), \\ w &= u(x, t - \tau), \quad z = z(u, w), \end{aligned} \quad (3.4.3.1)$$

где $g_i(u)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) и $z = z(u, w)$ — заданные функции, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — произвольные функции одного аргумента. Будут рассматриваться также родственные уравнения, в которых функция $g_3(u)$ заменена на $g_3(w)$.

Для построения точных решений нелинейных уравнений с запаздыванием вида (3.4.3.1) будем использовать метод функциональных связей, описанный в разд. 3.4.1. Приведенные далее точные решения таких уравнений были получены в [456].

Замечание 3.29. Помимо точных решений одномерных уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием будут описаны также некоторые решения более сложных родственных уравнений с несколькими пространственными переменными.

Одномерные уравнения, содержащие одну произвольную функцию.

Уравнение 1. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием, которое содержит одну произвольную функцию, зависящую от отношения w/u , вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + u f(w/u), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.3.2)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (3.4.3.1) при $g_0(u) = au^k$, $g_1(u) = u$, $g_2 = g_3 = 0$, $z = w/u$, $f_1(u) = f(u)$. При $k = 0$ см. уравнение (3.4.2.1), которое допускает больше точных решений, чем уравнение (3.4.3.2) при $k \neq 0$.

Функциональная связь второго рода (3.4.1.4) в данном случае совпадает с (3.4.2.2) и допускает решение с мультипликативным разделением переменных (3.4.2.3). Поэтому точное решение исходного реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием ищем в виде

$$u = \varphi(x)\psi(t). \quad (3.4.3.3)$$

Подставив (3.4.3.3) в (3.4.3.2), после элементарных преобразований для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ получим ОДУ и ОДУ с запаздыванием:

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = b\varphi, \quad (3.4.3.4)$$

$$\psi'(t) = b\psi^{k+1}(t) + \psi(t)f(\psi(t - \tau)/\psi(t)), \quad (3.4.3.5)$$

где b — произвольная постоянная.

Общее решение автономного ОДУ можно представить в неявной форме. При $k \neq 0$ и $k \neq -2$ частное решение уравнения (3.4.3.4) имеет вид

$$\varphi = Ax^{2/k}, \quad A = \left[\frac{bk^2}{2a(k+2)} \right]^{1/k}.$$

Замечание 3.30. Уравнение (3.4.3.2) допускает также точное решение вида

$$u = (x + C)^{2/k} \theta(\zeta), \quad \zeta = t + \lambda \ln(x + C),$$

где C и λ — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(\zeta)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} \theta'(\zeta) = a \left\{ \frac{2(k+2)}{k^2} \theta^{k+1}(\zeta) + \frac{(3k+4)\lambda}{k} \theta^k(\zeta) \theta'(\zeta) + \right. \\ \left. + k\lambda^2 \theta^{k-1}(\zeta) [\theta'(\zeta)]^2 + \lambda^2 \theta^k(\zeta) \theta''(\zeta) \right\} + \theta(\zeta) f(\theta(\zeta - \tau)/\theta(\zeta)). \end{aligned}$$

Уравнение 2. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + u f(w/u), \quad (3.4.3.6)$$

которое является обобщением уравнения (3.4.3.2). В этом случае функциональная связь второго рода (3.4.1.4) также совпадает с (3.4.2.2), а исходное уравнение (3.4.3.6) допускает решения с разделением переменных вида (3.4.3.3), приведенные ниже.

1°. Уравнение (3.4.3.6) при $b(k+1) > 0$ имеет решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a}, \quad (3.4.3.7)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = \psi(t) f(\psi(t - \tau)/\psi(t)). \quad (3.4.3.8)$$

Уравнение (3.4.3.8) имеет частное решение экспоненциального вида

$$\psi(t) = A e^{\lambda t}, \quad (3.4.3.9)$$

где A — произвольная постоянная, а λ — решение алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda - f(e^{-\lambda\tau}) = 0$.

2°. Уравнение (3.4.3.6) при $b(k+1) < 0$ имеет решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a}, \quad (3.4.3.10)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.8).

3°. Уравнение (3.4.3.6) при $k = -1$ допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x\right) \psi(t), \quad (3.4.3.11)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.8).

Уравнение 3. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad k \neq -1, \quad (3.4.3.12)$$

которое содержит произвольную функцию $f(z)$, где $z = u^{k+1} - w^{k+1}$.

В данном случае функциональная связь второго рода (3.4.1.4) записывается так:

$$u^{k+1} - w^{k+1} = q(t), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.3.13)$$

Функциональному уравнению (3.4.3.13) можно удовлетворить, взяв решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = [\varphi(x) + \psi(t)]^{1/(k+1)}, \quad (3.4.3.14)$$

которое дает $q(t) = \psi(t) - \psi(t - \tau)$. Подставим (3.4.3.14) в исходное уравнение с запаздыванием (3.4.3.12). Последующий анализ позволил получить следующие результаты:

1°. Уравнение (3.4.3.12) допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \left[At - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1x + C_2 \right]^{1/(k+1)}, \quad (3.4.3.15)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а A — решение алгебраического (трансцендентного) уравнения $A = (k+1)f(A\tau)$.

2°. Уравнение (3.4.3.12) допускает более сложное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = \left[\psi(t) - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1x + C_2 \right]^{1/(k+1)}, \quad (3.4.3.16)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = (k+1)f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \quad (3.4.3.17)$$

Уравнение 4. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a(u^{-1/2}u_x)_x + bu^{1/2} + f(u^{1/2} - w^{1/2}), \quad (3.4.3.18)$$

где $f(z)$ — произвольная функция, $z = u^{1/2} - w^{1/2}$.

В этом случае функциональная связь первого рода (3.4.1.3) имеет вид

$$u^{1/2} - w^{1/2} = p(x), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.3.19)$$

Разностному уравнению (3.4.3.19) можно удовлетворить, если положить

$$u = [\varphi(x)t + \psi(x)]^2, \quad (3.4.3.20)$$

что дает $p(x) = \tau\varphi(x)$.

Подставив (3.4.3.20) в уравнение с запаздыванием (3.4.3.18), для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} 2a\varphi''_{xx} + b\varphi - 2\varphi^2 &= 0, \\ 2a\psi''_{xx} + b\psi - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения допускают простое частное решение

$$\varphi = \frac{1}{2}b, \quad \psi = -\frac{1}{4a}f\left(\frac{b\tau}{2}\right)x^2 + Ax + B,$$

где A и B — произвольные постоянные.

Уравнение 5. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u - w), \quad (3.4.3.21)$$

которое содержит произвольную функцию $f(z)$, где $z = u - w$.

Функциональная связь второго рода (3.4.1.4) в данном случае совпадает с (3.4.2.20) и допускает решение с аддитивным разделением переменных

(3.4.2.21). Поэтому решение исходного УрЧП с запаздыванием (3.4.3.21) ищем в виде

$$u = \varphi(x) + \psi(t). \quad (3.4.3.22)$$

Подставив (3.4.3.22) в исходное уравнение с запаздыванием (3.4.3.21), получим точное решение

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t), \quad (3.4.3.23)$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi(t)} + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \quad (3.4.3.24)$$

Замечание 3.31. Уравнение (3.4.3.21) допускает также более сложное точное решение вида

$$u = \frac{2}{\lambda} \ln(x + C) + \theta(\zeta), \quad \zeta = t + \beta \ln(x + C), \quad (3.4.3.25)$$

где C и β — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(\zeta)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\theta'(\zeta) = ae^{\lambda\theta(\zeta)} \left\{ \frac{2}{\lambda} + 3\beta\theta'(\zeta) + \beta^2\lambda[\theta'(\zeta)]^2 + \beta^2\theta''(\zeta) \right\} + f(\theta(\zeta) - \theta(\zeta - \tau)).$$

Уравнение 6. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w), \quad (3.4.3.26)$$

которое является обобщением уравнения (3.4.3.21).

1°. При $b\lambda > 0$ уравнение (3.4.3.26) допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b\lambda/a}, \quad (3.4.3.27)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \quad (3.4.3.28)$$

Уравнение (3.4.3.28) имеет простое частное решение $\psi = A + kt$, где A — произвольная постоянная, а k — решение алгебраического (трансцендентного) уравнения $k - f(k\tau) = 0$.

2°. При $b\lambda < 0$ уравнение (3.4.3.26) допускает другое решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b\lambda/a}, \quad (3.4.3.29)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.28).

Уравнение 7. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}). \quad (3.4.3.30)$$

В данном случае функциональная связь второго рода (3.4.1.4) записывается так:

$$e^{\lambda u} - e^{\lambda w} = q(t), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.3.31)$$

Функциональному уравнению (3.4.3.31) можно удовлетворить, взяв решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln[\varphi(x) + \psi(t)], \quad (3.4.3.32)$$

которое дает $q(t) = \psi(t) - \psi(t - \tau)$. Подставим (3.4.3.32) в исходное уравнение с запаздыванием (3.4.3.30). Последующий анализ позволил получить следующие результаты:

1°. Уравнение (3.4.3.30) допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln \left[At - \frac{b\lambda}{2a} x^2 + C_1 x + C_2 \right], \quad (3.4.3.33)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а A — решение алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - \lambda f(A\tau) = 0$.

2°. Уравнение (3.4.3.30) допускает более сложное решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\psi(t) - \frac{b\lambda}{2a} x^2 + C_1 x + C_2 \right], \quad (3.4.3.34)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = \lambda f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \quad (3.4.3.35)$$

Уравнение 8. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u) \quad (3.4.3.36)$$

допускает два точных решения с мультипликативным разделением переменных

$$u = \exp(\pm \lambda x) \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{c/a}, \quad (3.4.3.37)$$

где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = \lambda^2 (a + b) \psi(t) + \psi(t) f(\psi(t - \tau)/\psi(t)). \quad (3.4.3.38)$$

Уравнение 9. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [uf'(u)u_x]_x + \frac{1}{f'(u)} [af(u) + bf(w) + c], \quad (3.4.3.39)$$

где $f(u)$ — произвольная функция, а штрих обозначает дифференцирование по u .

Уравнение (3.4.3.39) допускает решение типа обобщенной бегущей волны (это решение с функциональным разделением переменных специального вида), которое можно представить в неявной форме

$$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t), \quad (3.4.3.40)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют ОДУ с запаздыванием

$$\varphi'(t) = a\varphi(t) + b\varphi(t - \tau), \quad (3.4.3.41)$$

$$\psi'(t) = a\psi(t) + b\psi(t - \tau) + c + \varphi^2(t). \quad (3.4.3.42)$$

Уравнение 10. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [uf'(u)u_x]_x + (a + b)u + \frac{2}{f'(u)}[af(u) + bf(w) + c] \quad (3.4.3.43)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявной форме

$$f(u) = -\frac{1}{2}(a + b)x^2 + \varphi(t)x + \psi(t), \quad (3.4.3.44)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются ОДУ с запаздыванием

$$\varphi'(t) = -2b\varphi(t) + 2b\varphi(t - \tau), \quad (3.4.3.45)$$

$$\psi'(t) = 2a\psi(t) + 2b\psi(t - \tau) + 2c + \varphi^2(t). \quad (3.4.3.46)$$

Уравнение (3.4.3.45) имеет частное решение экспоненциального вида

$$\varphi(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2, \quad (3.4.3.47)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а λ — корень трансцендентного уравнения $\lambda + 2b(1 - e^{-\lambda\tau}) = 0$.

Уравнение 11. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [f'(u)u_x]_x + a_1 f(u) + a_2 f(w) + a_3 + \frac{b}{f'(u)}[f(u) - f(w)] \quad (3.4.3.48)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявной форме

$$f(u) = e^{\lambda t} \varphi(x) - \frac{a_3}{a_1 + a_2}, \quad (3.4.3.49)$$

где λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda = b(1 - e^{-\lambda\tau}), \quad (3.4.3.50)$$

а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} + (a_1 + a_2 e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \quad (3.4.3.51)$$

Уравнение 12. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [f'(u)u_x]_x + a[f(u) - f(w)] + \frac{1}{f'(u)}[b_1 f(u) + b_2 f(w) + b_3] \quad (3.4.3.52)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$f(u) = e^{\lambda t} \varphi(x) - \frac{b_3}{b_1 + b_2}, \quad (3.4.3.53)$$

где λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda - b_1 - b_2 e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.4.3.54)$$

а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} + a(1 - e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \quad (3.4.3.55)$$

Уравнение 13. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [f'(u)u_x]_x + a_1 f(u) + a_2 f(w) + a_3 + \frac{1}{f'(u)} [b_1 f(u) + b_2 f(w) + b_3], \quad (3.4.3.56)$$

которое обобщает два предыдущих уравнения.

Пусть коэффициенты уравнения (3.4.3.56) удовлетворяют соотношению

$$(a_1 + a_2)b_3 = a_3(b_1 + b_2). \quad (3.4.3.57)$$

Тогда уравнение (3.4.3.56) допускает решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявной форме

$$f(u) = e^{\lambda t} \varphi(x) + c. \quad (3.4.3.58)$$

Здесь

$$c = -\frac{a_3}{a_1 + a_2} \quad \text{при} \quad a_1 \neq -a_2 \quad \text{и} \quad c = -\frac{b_3}{b_1 + b_2} \quad \text{при} \quad b_1 \neq -b_2,$$

λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda - b_1 - b_2 e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.4.3.59)$$

а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} + (a_1 + a_2 e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \quad (3.4.3.60)$$

Уравнение 14. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [g(u)u_x]_x + \frac{1}{f'(u)} [c_1 f(u) + c_2 f(w) + c_3], \quad (3.4.3.61)$$

$$g(u) = f'(u) \int [af(u) + b] du,$$

где $f(u)$ — произвольная функция, а штрих обозначает дифференцирование по u .

Уравнение (3.4.3.61) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t), \quad (3.4.3.62)$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= a\varphi^3(t) + c_1\varphi(t) + c_2\varphi(t - \tau), \\ \psi'(t) &= \varphi^2(t)[a\psi(t) + b] + c_1\psi(t) + c_2\psi(t - \tau) + c_3.\end{aligned}$$

Одномерные уравнения, содержащие две произвольные функцию. Ниже кратко описаны некоторые точные решения более общих нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, содержащих две произвольные функции.

Уравнение 15. Рассмотрим теперь нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a(u^k u_x)_x + u f(w/u) + u^{k+1} g(w/u), \quad (3.4.3.63)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Уравнение (3.4.3.63) допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{\lambda t} \varphi(x), \quad (3.4.3.64)$$

где λ — решение алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda = f(e^{-\lambda\tau}),$$

а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + g(e^{-\lambda\tau}) \varphi^{k+1} = 0.$$

При $k \neq -1$ подстановка $\theta = \varphi^{k+1}$ приводит это уравнение к линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. При $k = -1$ надо использовать подстановку $\theta = \ln \varphi$.

Уравнение 16. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a(u^{-1/2} u_x)_x + f(u^{1/2} - w^{1/2}) + u^{1/2} g(u^{1/2} - w^{1/2}) \quad (3.4.3.65)$$

допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = [\varphi(x)t + \psi(x)]^2, \quad (3.4.3.66)$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ:

$$\begin{aligned}2a\varphi''_{xx} + \varphi g(\tau\varphi) - 2\varphi^2 &= 0, \\ 2a\psi''_{xx} + \psi g(\tau\varphi) - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = k, \quad \psi = -\frac{1}{4a} f(k\tau) x^2 + Ax + B,$$

где A и B — произвольные постоянные, а постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $g(k\tau) - 2k = 0$.

Уравнение 17. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a(u^k u_x)_x + f(u^{k+1} - w^{k+1}) + u^{-k} g(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad k \neq -1, \quad (3.4.3.67)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = (At + Bx^2 + C_1x + C_2)^{1/(k+1)}, \quad B = -\frac{(k+1)}{2a}f(A\tau), \quad (3.4.3.68)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а постоянная A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - (k+1)g(A\tau) = 0$.

Уравнение 18. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w) + e^{\lambda u} g(u - w) \quad (3.4.3.69)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \beta t + \varphi(x), \quad (3.4.3.70)$$

где постоянная β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\beta = f(\beta\tau).$$

Функция $\varphi = \varphi(x)$, входящая в решение (3.4.3.70), описывается ОДУ

$$a(e^{\lambda\varphi} \varphi'_x)_x + g(\beta\tau)e^{\lambda\varphi} = 0,$$

которое с помощью подстановки $\theta = e^{\lambda\varphi}$ приводится к линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $a\theta''_{xx} + \lambda g(\beta\tau)\theta = 0$.

Уравнение 19. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u} g(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) \quad (3.4.3.71)$$

допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(At + Bx^2 + C_1x + C_2), \quad B = -\frac{\lambda}{2a}f(A\tau), \quad (3.4.3.72)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - \lambda g(A\tau) = 0$.

Уравнение 20. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a[g'(u)u_x]_x + b + \frac{1}{g'(u)}f(g(u) - g(w)), \quad (3.4.3.73)$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции, а штрих обозначает производную по u .

Уравнение (3.4.3.73) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u) = \psi(t) - \frac{b}{2a}x^2 + C_1x + C_2, \quad (3.4.3.74)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.28), которое имеет частное решение $\psi(t) = At$, где константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - f(A\tau) = 0$.

Уравнение 21. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a[g'(u)u_x]_x + bg(u) + \frac{g(u)}{g'(u)}f(g(w)/g(u)), \quad (3.4.3.75)$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции, а штрих обозначает производную по u .

1°. При $ab > 0$ уравнение (3.4.3.75) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u) = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)]\psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a}, \quad (3.4.3.76)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.8), которое имеет частное решение экспоненциального вида $\psi(t) = e^{\lambda t}$, где λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda - f(e^{-\lambda\tau}) = 0$.

2°. При $ab < 0$ уравнение (3.4.3.75) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u) = [C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)]\psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a}, \quad (3.4.3.77)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.8).

3°. При $b = 0$ уравнение (3.4.3.75) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u) = (C_1 x + C_2)\psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.8).

Уравнение 22. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [h(u)u_x]_x - \frac{1}{g'(u)}[c_1 g(u) + c_2 g(w)] + \frac{1}{g'(u)}f(g(u) - g(w)), \quad (3.4.3.78)$$

$$h(u) = g'(u) \int [ag(u) + b] du,$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции, а штрих обозначает производную по u .

Уравнение (3.4.3.78) допускает два точных решения типа обобщенной бегущей волны, которые можно представить в неявной форме

$$g(u) = \pm kx + \psi(t), \quad k = \sqrt{(c_1 + c_2)/a}, \quad (3.4.3.79)$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = c_2 \psi(t) + bk^2 - c_2 \psi(t - \tau) + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

Одномерные уравнения, содержащие три произвольные функции.**Уравнение 23.** Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a[f'(u)u_x]_x + g(f(u) - f(w)) + \frac{1}{f'(u)}h(f(u) - f(w)), \quad (3.4.3.80)$$

где $f(u)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции, а штрих обозначает производную по u .

Уравнение (3.4.3.80) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$f(u) = At - \frac{g(A\tau)}{2a}x^2 + C_1x + C_2, \quad (3.4.3.81)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а константа A является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - h(A\tau) = 0$.

Уравнение 24. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a[f'(u)u_x]_x + f(u)g(f(w)/f(u)) + \frac{f(u)}{f'(u)}h(f(w)/f(u)), \quad (3.4.3.82)$$

где $f(u)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

Пусть β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\beta - h(e^{-\beta\tau}) = 0.$$

1°. При $ag(e^{-\beta\tau}) > 0$ уравнение (3.4.3.82) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$f(u) = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)]e^{\beta t}, \quad \lambda = \sqrt{g(e^{-\beta\tau})/a}, \quad (3.4.3.83)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. При $ag(e^{-\beta\tau}) < 0$ уравнение (3.4.3.82) допускает другое решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$f(u) = [C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)]e^{\beta t}, \quad \lambda = \sqrt{-g(e^{-\beta\tau})/a}, \quad (3.4.3.84)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. При $g(e^{-\beta\tau}) = 0$ уравнение (3.4.3.82) допускает вырожденное решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$f(u) = (C_1x + C_2)e^{\beta t}.$$

Уравнение 25. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [g(u)u_x]_x - \frac{a^2}{f'(u)} \frac{d}{du} \left[\frac{g(u)}{f'(u)} \right] + \frac{1}{f'(u)}h(f(u) - f(w)) \quad (3.4.3.85)$$

допускает два решения с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$f(u) = \pm ax + \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = h(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

Многомерные уравнения, содержащие одну произвольную функцию.

Ниже описываются многомерные обобщения некоторых одномерных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и их точных решений, рассмотренных ранее. Будем использовать следующие обозначения: $u = u(\mathbf{x}, t)$, $w = u(\mathbf{x}, t - \tau)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Двумерным и трехмерным уравнениям соответствуют значения $n = 2$ и $n = 3$.

Замечание 3.32. Точные решения рассматриваемых далее многомерных нелинейных уравнений с запаздыванием часто выражаются через решения вспомогательных более простых уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца. Много решений этих линейных уравнений эллиптического типа приведено в [90, 436].

Уравнение 26. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + bu^{k+1} + uf(w/u). \quad (3.4.3.86)$$

1°. При $k \neq -1$ уравнение (3.4.3.86) допускает решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = \psi(t)\varphi^{1/(k+1)}(\mathbf{x}). \quad (3.4.3.87)$$

Здесь функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.8), а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \frac{b(k+1)}{a}\varphi = 0, \quad (3.4.3.88)$$

где Δ — оператор Лапласа.

2°. При $k = -1$ уравнение (3.4.3.86) допускает решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = \psi(t) \ln \varphi(\mathbf{x}), \quad (3.4.3.89)$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.8), а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi + (b/a) = 0. \quad (3.4.3.90)$$

Уравнение 27. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad k \neq -1, \quad (3.4.3.91)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)]^{1/(k+1)}, \quad (3.4.3.92)$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.17), а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi + \frac{b(k+1)}{a} = 0. \quad (3.4.3.93)$$

Уравнение 28. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}(u^{-1/2} \nabla u) + bu^{1/2} + f(u^{1/2} - w^{1/2}) \quad (3.4.3.94)$$

допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = [\varphi(\mathbf{x})t + \psi(\mathbf{x})]^2, \quad (3.4.3.95)$$

где функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(\mathbf{x})$ описываются стационарными уравнениями второго порядка

$$2a\Delta\varphi + b\varphi - 2\varphi^2 = 0, \quad (3.4.3.96)$$

$$2a\Delta\psi + b\psi - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) = 0. \quad (3.4.3.97)$$

Уравнение (3.4.3.96) имеет простое частное решение $\varphi = \frac{1}{2}b = \text{const}$. В этом случае уравнение (3.4.3.97) является уравнением Пуассона

$$a\Delta\psi + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}b\tau\right) = 0.$$

Уравнение 29. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + be^{\lambda u} + f(u - w), \quad (3.4.3.98)$$

которое обобщает уравнение (3.4.3.26).

Уравнение (3.4.3.98) допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \psi(t) + \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(\mathbf{x}), \quad (3.4.3.99)$$

в котором функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.28), а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \lambda(b/a)\varphi = 0. \quad (3.4.3.100)$$

Уравнение 30. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) \quad (3.4.3.101)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln [\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)], \quad (3.4.3.102)$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.35), а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi + \lambda(b/a) = 0. \quad (3.4.3.103)$$

Уравнение 31. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = \operatorname{div}[uf'(u)\nabla u] + \frac{1}{f'(u)}[af(u) + bf(w) + c], \quad (3.4.3.104)$$

где $f(u)$ — произвольная функция, а штрих обозначает производную по u .

Уравнение (3.4.3.104) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$f(u) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t)x_k + \psi(t), \quad (3.4.3.105)$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ с запаздыванием

$$\varphi'_k(t) = a\varphi_k(t) + b\varphi_k(t - \tau), \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.4.3.106)$$

$$\psi'(t) = a\psi(t) + b\psi(t - \tau) + c + \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t). \quad (3.4.3.107)$$

Уравнение 32. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + a_1 f(u) + a_2 f(w) + a_3 + \frac{b}{f'(u)} [f(u) - f(w)] \quad (3.4.3.108)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$f(u) = e^{\lambda t} \varphi(\mathbf{x}) - \frac{a_3}{a_1 + a_2}, \quad (3.4.3.109)$$

где λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda = b(1 - e^{-\lambda\tau}), \quad (3.4.3.110)$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta\varphi + (a_1 + a_2 e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \quad (3.4.3.111)$$

Уравнение 33. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + a[f(u) - f(w)] + \frac{1}{f'(u)} [b_1 f(u) + b_2 f(w) + b_3] \quad (3.4.3.112)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$f(u) = e^{\lambda t} \varphi(\mathbf{x}) - \frac{b_3}{b_1 + b_2}, \quad (3.4.3.113)$$

где λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda - b_1 - b_2 e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.4.3.114)$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta\varphi + a(1 - e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \quad (3.4.3.115)$$

Многомерные уравнения, содержащие две произвольные функции.

Уравнение 34. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}(u^{-1/2} \nabla u) + f(u^{1/2} - w^{1/2}) + u^{1/2} g(u^{1/2} - w^{1/2}) \quad (3.4.3.116)$$

допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = [\varphi(\mathbf{x})t + \psi(\mathbf{x})]^2, \quad (3.4.3.117)$$

где функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(\mathbf{x})$ описываются стационарными уравнениями

$$2a\Delta\varphi + \varphi g(\tau\varphi) - 2\varphi^2 = 0, \quad (3.4.3.118)$$

$$2a\Delta\psi + \psi g(\tau\varphi) - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) = 0. \quad (3.4.3.119)$$

Уравнение (3.4.3.118) имеет простое частное решение $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, где φ_0 — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $g(\tau\varphi_0) - 2\varphi_0 = 0$. В этом случае уравнение (3.4.3.119) является уравнением Пуассона

$$a\Delta\psi + \frac{1}{2}f(\tau\varphi_0) = 0.$$

Уравнение 35. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + f(u^{k+1} - w^{k+1}) + u^{-k} g(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad k \neq -1, \quad (3.4.3.120)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [At + \varphi(\mathbf{x})]^{1/(k+1)}, \quad (3.4.3.121)$$

где константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - (k+1)g(A\tau) = 0$, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением Пуассона

$$a \Delta\varphi + (k+1)f(A\tau) = 0. \quad (3.4.3.122)$$

Уравнение 36. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + f(u - w) + e^{\lambda u} g(u - w), \quad (3.4.3.123)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Уравнение (3.4.3.123) допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \beta t + \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(\mathbf{x}), \quad (3.4.3.124)$$

где β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\beta - f(\beta\tau) = 0$, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$a \Delta\varphi + \lambda g(\beta\tau)\varphi = 0. \quad (3.4.3.125)$$

Уравнение 37. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u} g(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) \quad (3.4.3.126)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln[At + \varphi(\mathbf{x})], \quad (3.4.3.127)$$

где A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - \lambda g(A\tau) = 0$, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением Пуассона

$$a\Delta\varphi + \lambda f(A\tau) = 0. \quad (3.4.3.128)$$

Уравнение 38. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}[g'(u)\nabla u] + b + \frac{1}{g'(u)} f(g(u) - g(w)), \quad (3.4.3.129)$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции, а штрих обозначает производную по u .

Уравнение (3.4.3.129) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$g(u) = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t). \quad (3.4.3.130)$$

Функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.28), а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона (3.4.3.90).

Уравнение 39. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}[g'(u)\nabla u] + bg(u) + \frac{g(u)}{g'(u)} f(g(w)/g(u)), \quad (3.4.3.131)$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции, а штрих обозначает производную по u .

Уравнение (3.4.3.131) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$g(u) = \varphi(\mathbf{x})\psi(t). \quad (3.4.3.132)$$

Функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (3.4.3.8), а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$a\Delta\varphi + b\varphi = 0. \quad (3.4.3.133)$$

Многомерные уравнения, содержащие три произвольные функции.

Уравнение 40. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + g(f(u) - f(w)) + \frac{1}{f'(u)} h(f(u) - f(w)), \quad (3.4.3.134)$$

где $f(u)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

Уравнение (3.4.3.134) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$f(u) = At + \varphi(\mathbf{x}), \quad (3.4.3.135)$$

где A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - h(A\tau) = 0$, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением Пуассона

$$a\Delta\varphi + g(A\tau) = 0. \quad (3.4.3.136)$$

Уравнение 41. Рассмотрим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + f(u)g(f(w)/f(u)) + \frac{f(u)}{f'(u)}h(f(w)/f(u)), \quad (3.4.3.137)$$

где $f(u)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

Уравнение (3.4.3.137) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$f(u) = \varphi(\mathbf{x})e^{\beta t}, \quad (3.4.3.138)$$

где β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\beta - h(e^{-\beta\tau}) = 0$, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением Гельмгольца

$$a\Delta\varphi + g(e^{-\beta\tau})\varphi = 0. \quad (3.4.3.139)$$

Нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с переменным запаздыванием общего вида. Большинство результатов, представленных выше, удастся обобщить на более сложные нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с переменным запаздыванием $\tau = \tau(t)$, где $\tau(t)$ — произвольная функция. В табл. 3.9 описаны некоторые из таких уравнений, зависящие от одной или двух произвольных функций, а также их точные решения. Во всех определяющих ОДУ с запаздыванием, ссылки на которые даны в последнем столбце табл. 3.9, следует положить $\tau = \tau(t)$.

► **Пример 3.16.** Рассмотрим первое уравнение в табл. 3.9. В определяющем уравнении (3.4.3.5) для функции $\psi(t)$, положив $\tau = \tau(t)$, получим ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = b\psi^{k+1}(t) + \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)), \quad \tau = \tau(t). \quad \blacktriangleleft$$

Некоторые точные решения нелинейных многомерных уравнений реакционно-диффузионного типа с переменным запаздыванием общего вида $\tau = \tau(t)$ описаны в табл. 3.10.

3.4.4. Точные решения нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием

Метод функциональных связей с успехом может использоваться также для построения точных решений нелинейных уравнений волнового типа с запаздыванием, которые можно формально получить из уравнений реакционно-диффузионного типа (3.4.1.1) и (3.4.3.1), если в левой части заменить первую производную u_t второй производной u_{tt} или линейной комбинацией этих производных $au_{tt} + bu_t$.

Для иллюстрации сказанного далее кратко описаны некоторые нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с запаздыванием и их точные решения, полученные методом функциональных связей (в [64, 71, 84, 452] можно найти

Таблица 3.9. Точные решения реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием общего вида $u_t = [G(u)u_x]_x + F(u, w)$, где $w = u(x, t - \tau)$, $\tau = \tau(t)$.

| Реакционно-диффузионные уравнения | Вид точных решений | Определяющие ОДУ |
|--|---|------------------------|
| $u_t = a(u^k u_x)_x + u f(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$ | (3.4.3.4), (3.4.3.5) |
| $u_t = a(u^k u_x)_x + b u^{k+1} + u f(w/u)$ | $u = \varphi(x)\psi(t)$, см. (3.4.3.7), (3.4.3.10), (3.4.3.11) | (3.4.3.8) |
| $u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1})$ | $u = [\varphi(x) + \psi(t)]^{1/(k+1)}$, см. (3.4.3.16) | (3.4.3.17) |
| $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w)$ | $u = \varphi(x) + \psi(t)$, см. (3.4.3.23) | (3.4.3.24) |
| $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b e^{\lambda u} + f(u - w)$ | $u = \varphi(x) + \psi(t)$, см. (3.4.3.27), (3.4.3.29) | (3.4.3.28) |
| $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w})$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln[\varphi(x) + \psi(t)]$, см. (3.4.3.34) | (3.4.3.35) |
| $u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - c u \ln u + u f(w/u)$ | $u = \exp(\pm \sqrt{c/a} x)\psi(t)$ | (3.4.3.38) |
| $u_t = [u f'(u)u_x]_x + \frac{1}{f'(u)}[a f(u) + b f(w) + c]$ | $f(u) = \varphi(t)x + \psi(t)$ | (3.4.3.41), (3.4.3.42) |
| $u_t = a[g'(u)u_x]_x + b + \frac{1}{g'(u)}f(g(u) - g(w))$ | $g(u) = \varphi(x) + \psi(t)$, см. (3.4.3.74) | (3.4.3.28) |
| $u_t = a[g'(u)u_x]_x + b g(u) + \frac{g(u)}{g'(u)}f(g(w)/g(w))$ | $g(u) = \varphi(x)\psi(t)$, см. (3.4.3.76), (3.4.3.77) | (3.4.3.8) |

другие нелинейные уравнения гиперболического типа с запаздыванием и их точные решения).

Уравнение 1. Рассмотрим нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона с постоянным запаздыванием, которое содержит одну произвольную функцию, зависящую от отношения w/u , вида

$$u_{tt} = a u_{xx} + u f(w/u), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.4.1)$$

Это уравнение отличается от реакционно-диффузионного уравнения (3.4.2.1) левой частью, в которой вместо u_t теперь стоит u_{tt} .

1°. Уравнение (3.4.4.1), как и уравнение (3.4.2.1), допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t), \quad (3.4.4.2)$$

Таблица 3.10. Точные решения многомерных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием $u_t = \operatorname{div}[G(u)\nabla u] + F(u, w)$, где $w = u(\mathbf{x}, t - \tau)$, $\tau = \tau(t)$.

| Реакционно-диффузионные уравнения | Вид точных решений | Определяющие уравнения |
|--|---|-------------------------|
| $u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + u f(w/u) + bu^{k+1}$ | $u = \psi(t) \varphi^{1/(k+1)}(\mathbf{x})$ | (3.4.3.8), (3.4.3.88) |
| $u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1})$ | $u = [\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)]^{1/(k+1)}$ | (3.4.3.17), (3.4.3.93) |
| $u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + f(u - w) + be^{\lambda u}$ | $u = \psi(t) + \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(\mathbf{x})$ | (3.4.3.28), (3.4.3.100) |
| $u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w})$ | $u = \frac{1}{\lambda} \ln [\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)]$ | (3.4.3.35), (3.4.3.103) |
| $u_t = a \operatorname{div}[g'(u)\nabla u] + b + \frac{1}{g'(u)} f(g(u) - g(w))$ | $g(u) = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$ | (3.4.3.28), (3.4.3.90) |
| $u_t = a \operatorname{div}[g'(u)\nabla u] + bg(u) + \frac{g(u)}{g'(u)} f(g(w)/g(u))$ | $g(u) = \varphi(\mathbf{x}) \varphi(t)$ | (3.4.3.8), (3.4.3.133) |

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с запаздыванием:

$$\varphi'' = k\varphi, \quad (3.4.4.3)$$

$$\psi''(t) = ak\psi(t) + \psi(t)f(\psi(t - \tau)/\psi(t)), \quad (3.4.4.4)$$

где k — произвольная постоянная.

Общее решение ОДУ (3.4.4.3) определяется формулами (3.4.2.6), а ОДУ с запаздыванием (3.4.4.4) допускает частные решения экспоненциального вида

$$\psi(t) = C_3 e^{\lambda t},$$

где C_3 — произвольная постоянная, а λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda^2 = ak + f(e^{-\lambda\tau}).$$

2°. Уравнение (3.4.4.1) допускает точные решения вида

$$u = e^{ct} v(x, t), \quad v(x, t) = v(x, t - \tau), \quad (3.4.4.5)$$

где c — произвольная постоянная, а функция $v = v(x, t)$ является τ -периодической функцией. Подставляя (3.4.4.5) в уравнение (3.4.4.1), получим линейную задачу для определения v :

$$v_{tt} + sv_t = av_{xx} + bv, \quad v(x, t) = v(x, t - \tau), \quad (3.4.4.6)$$

где $s = 2c$ и $b = f(e^{-c\tau}) - c^2$.

Общее решение задачи (3.4.4.6), которое будем обозначать $v = U_1(x, t; b, s)$, можно представить в виде ряда [452]:

$$U_1(x, t; b, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_n x) [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x) [C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)], \quad (3.4.4.7)$$

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad \gamma_n = \left[\frac{\sqrt{(b + \beta_n^2)^2 + s^2 \beta_n^2} + b + \beta_n^2}{2a} \right]^{1/2}, \quad \lambda_n = \frac{s\beta_n}{2a\gamma_n}, \quad (3.4.4.8)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, такие что ряд (3.4.4.7) — (3.4.4.8) и его производные $(U_1)_t, (U_1)_{tt}, (U_1)_{xx}$ сходятся; в частности, сходимость имеет место, если положить $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ при $n > N$, где N — любое произвольное положительное целое число.

Учитывая сказанное, в итоге получим следующее точное решение уравнения (3.4.4.1):

$$u = e^{ct} U_1(x, t; b, s), \quad b = f(e^{-c\tau}) - c^2, \quad s = 2c, \quad (3.4.4.9)$$

где c — произвольная постоянная, а $U_1(x, t; b, s)$ — τ -периодическая функция, которая определяется формулами (3.4.4.7) и (3.4.4.8). При $c = 0$ решение (3.4.4.9) является τ -периодической функцией.

3°. Уравнение (3.4.4.1) допускает также точные решения вида

$$u = e^{ct} v(x, t), \quad v(x, t) = -v(x, t - \tau), \quad (3.4.4.10)$$

где c — произвольная постоянная, а функция $v = v(x, t)$ является τ -антипериодической функцией. Подставив (3.4.4.10) в (3.4.4.1), получим линейную задачу для определения v :

$$v_{tt} + sv_t = av_{xx} + bv, \quad v(x, t) = -v(x, t - \tau), \quad (3.4.4.11)$$

где $s = 2c$ и $b = f(-e^{-c\tau}) - c^2$.

Общее решение задачи (3.4.4.11), которое будем обозначать $v = U_2(x, t; b, s)$, можно представить в виде ряда [452]:

$$U_2(x, t; b, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n x) [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x) [C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)], \quad (3.4.4.12)$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \quad \gamma_n = \left[\frac{\sqrt{(b + \beta_n^2)^2 + s^2 \beta_n^2} + b + \beta_n^2}{2a} \right]^{1/2}, \quad \lambda_n = \frac{s\beta_n}{2a\gamma_n}, \quad (3.4.4.13)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, такие, что ряд (3.4.4.12) — (3.4.4.13) и его производные $(U_1)_t, (U_1)_{tt}$ сходятся.

В результате приходим к точному решению уравнения (3.4.4.1):

$$u = e^{ct}U_2(x, t; b, s), \quad b = f(-e^{-c\tau}) - c^2, \quad s = 2c, \quad (3.4.4.14)$$

где c — произвольная постоянная, а $U_2(x, t; b, s)$ — τ -антипериодическая функция, которая определяется формулами (3.4.4.12) и (3.4.4.13).

Уравнение 2. Рассмотрим нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона с постоянным запаздыванием, которое содержит одну произвольную функцию, зависящую от разности $u - w$, вида

$$u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.4.15)$$

Это уравнение отличается от реакционно-диффузионного уравнения (3.4.2.19) левой частью, в которой вместо первой производной по времени стоит вторая производная.

Уравнение (3.4.4.15), как и уравнение (3.4.2.19), допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \varphi(x) + \psi(t). \quad (3.4.4.16)$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют ОДУ и ОДУ с запаздыванием:

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi = k, \quad (3.4.4.17)$$

$$\psi'_{tt}(t) = b\psi(t) + k + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)), \quad (3.4.4.18)$$

где k — произвольная постоянная.

Отметим, что общее решение уравнения (3.4.4.17) описывается формулами (3.4.2.24) (при $b \neq 0$ и $k = 0$) и (3.4.2.25) (при $b = 0$ и $k \neq 0$).

Уравнение 3. Рассмотрим нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - kw), \quad k > 0. \quad (3.4.4.19)$$

1°. Сравнительно простые точные решения с обобщенным разделением переменных уравнения (3.4.4.19) приведены в табл. 3.11.

2°. Более сложные точные решения нелинейного уравнения типа Клейна — Гордона с запаздыванием (3.4.4.19) можно получать, используя следующую теорему.

Теорема о нелинейной суперпозиции решений [452]. Пусть $u_0(x, t)$ — решение нелинейного уравнения (3.4.4.19) и $v = U_1(x, t; b, s)$ — любое τ -периодическое решение линейного телеграфного уравнения (3.4.4.6), где b и s — свободные параметры. Тогда функция

$$u = u_0(x, t) + e^{ct}U_1(x, t; b - c^2, 2c), \quad c = \frac{1}{\tau} \ln a, \quad (3.4.4.20)$$

также является решением уравнения (3.4.4.19). При этом общий вид функции $U_1(x, t; b, s)$ определяется формулами (3.4.4.7) и (3.4.4.8).

Таблица 3.11. Решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения типа Клейна — Гордона (3.4.4.19). Обозначения: A и B — произвольные постоянные.

| № | Вид точного решения | Уравнения для определяющих функций |
|---|--|--|
| 1 | $u = e^{ct}[A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] + \psi(t),$ $c = \frac{1}{\tau} \ln k, \lambda = [(b - c^2)/a]^{1/2}, b > c^2$ | $\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - k\bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau)$ |
| 2 | $u = e^{ct}[A \exp(-\lambda x) + B \exp(\lambda x)] + \psi(t),$ $c = \frac{1}{\tau} \ln k, \lambda = [(c^2 - b)/a]^{1/2}, c^2 > b$ | $\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - k\bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau)$ |
| 3 | $u = e^{ct}[A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] + \varphi(x),$ $c = \frac{1}{\tau} \ln k, \lambda = [(b - c^2)/a]^{1/2}, b > c^2$ | $a\varphi''_{xx} + b\varphi + f((1 - k)\varphi) = 0$ |
| 4 | $u = e^{ct}[A \exp(-\lambda x) + B \exp(\lambda x)] + \varphi(x),$ $c = \frac{1}{\tau} \ln k, \lambda = [(c^2 - b)/a]^{1/2}, c^2 > b$ | $a\varphi''_{xx} + b\varphi + f((1 - k)\varphi) = 0$ |

Формула (3.4.4.20) позволяет получить широкий класс точных решений нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием с помощью более простых частных решений.

Простейшими частными решениями уравнения (3.4.4.19) являются константы $u_0 = \text{const}$, которые определяются из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$bu_0 + f((1 - k)u_0) = 0.$$

В специальном случае $k = 1$ имеется единственное постоянное решение $u_0 = -f(0)/b$.

В качестве функции $u_0(x, t)$ в (3.4.4.20) можно взять также пространственно однородное решение $u_0 = u_0(t)$, стационарное решение $u_0 = u_0(x)$, а также более сложное решение типа бегущей волны $u_0 = \theta(\alpha x + \beta t)$, где α и β — произвольные постоянные. Можно использовать также решения, приведенные в табл. 3.11.

Уравнение 4. Рассмотрим нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3.4.4.21)$$

Нетрудно показать, что это уравнение допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t).$$

Здесь определяющие функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют нелинейным

ОДУ и ОДУ с запаздыванием:

$$\begin{aligned} a(\varphi^k \varphi'_x)'_x &= b\varphi, \\ \psi''(t) &= b\psi^{k+1}(t) + \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)), \end{aligned}$$

где b — произвольная постоянная.

Уравнение 5. Нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.4.4.22)$$

допускает решение с аддитивным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi''(t) = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi(t)} + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

Уравнение 6. Нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_{tt} = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u) \quad (3.4.4.23)$$

допускает два точных решения с мультипликативным разделением переменных

$$u = \exp(\pm \lambda x) \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{c/a},$$

где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''(t) = \lambda^2(a + b)\psi(t) + \psi(t)f(\psi(t - \tau)/\psi(t)).$$

Замечание 3.33. Много других точных решений нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием, а также более сложных нелинейных уравнений телеграфного типа (реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием), можно найти в [64, 71, 82, 84, 363, 452].

4. Аналитические методы и точные решения нелинейных УрЧП с запаздыванием. Часть II

4.1. Методы построения точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием с помощью решений более простых УрЧП без запаздывания

В данном разделе описаны разработанные в [442, 443] методы построения точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием, которые основаны на использовании решений специального вида вспомогательных более простых УрЧП без запаздывания. Приведены примеры применения этих методов для построения решений нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнений с запаздыванием, которые зависят от произвольных функций.

Замечание 4.1. Методы построения решений сложных нелинейных УрЧП без запаздывания с помощью решений более простых УрЧП и примеры их применения можно найти в [58, 105].

4.1.1. Первый метод построения точных решений УрЧП с запаздыванием. Общее описание и простые примеры

Общее описание метода. Будем рассматривать нелинейные УрЧП без запаздывания с двумя независимыми переменными вида

$$\Phi(x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots; \beta_1, \dots, \beta_m) = 0, \quad (4.1.1.1)$$

где $u = u(x, t)$ — искомая функция, β_1, \dots, β_m — свободные параметры.

Покажем, что в некоторых случаях точные решения уравнения (4.1.1.1) можно использовать для построения точных решений более сложных нелинейных уравнений с запаздыванием. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть уравнение (4.1.1.1) допускает решение типа обобщенной бегущей волны, которое можно представить в неявном виде

$$F(u) = kt + \theta(x), \quad (4.1.1.2)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$P(k, \beta_1, \dots, \beta_m) = 0, \quad (4.1.1.3)$$

а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$Q(x, \theta, \theta'_x, \theta''_{xx}, \dots; \beta_1, \dots, \beta_m) = 0. \quad (4.1.1.4)$$

Тогда более сложное нелинейное УрЧП с запаздыванием, которое получается из (4.1.1.1) формальной заменой свободных параметров β_1, \dots, β_m на функции по правилу

$$\beta_i \implies \varphi_i(F(u) - F(w)), \quad w = u(x, t - \tau), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.1.1.5)$$

где $w = u(x, t - \tau)$, а $\varphi_i(z)$ — заданные (достаточно произвольно) функции, также допускает точное решение вида (4.1.1.2). В этом случае константа k и функция $\theta = \theta(x)$ определяются из уравнений (4.1.1.3) и (4.1.1.4), в которых следует положить

$$\beta_i = \varphi_i(k\tau), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.1.1.6)$$

Доказательство. На решениях вида (4.1.1.2) имеем $F(w) = k(t - \tau) + \theta(x) = F(u) - k\tau$, т. е.

$$F(u) - F(w) = k\tau = \text{const}. \quad (4.1.1.7)$$

Поэтому любое УрЧП с запаздыванием, полученное из (4.1.1.1) заменой параметров β_1, \dots, β_m на функции по правилу (4.1.1.5), на решениях вида (4.1.1.2) в силу (4.1.1.7) эквивалентно уравнению (4.1.1.1) при условии (4.1.1.6).

Утверждение 1 можно использовать для построения точных решений в явном и неявном виде некоторых УрЧП с запаздыванием.

Замечание 4.2. В вырожденных случаях уравнение (4.1.1.4) может быть алгебраическим или трансцендентным (т. е. не содержать производных функции θ) или даже задавать функцию θ в явной форме. В частности, любое решение типа бегущей волны можно представить в виде (4.1.1.2) при $\theta(x) = \alpha x$, где α — произвольная постоянная. Более того, в некоторых случаях уравнение (4.1.1.3) может отсутствовать, тогда константа k будет играть роль свободного параметра.

Простые методические примеры практического применения метода.

► **Пример 4.1.** Для иллюстрации практического использования утверждения 1 возьмем линейное уравнение диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = u_{xx} + a, \quad (4.1.1.8)$$

где $\beta = a$ — свободный параметр.

Уравнение (4.1.1.8) допускает простое точное решение с аддитивным разделением переменных, которое записывается в явном виде

$$u = kt + \lambda x^2 + C_1 x + C_2, \quad (4.1.1.9)$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а параметр k следующим образом выражается через a и λ :

$$k = 2\lambda + a. \quad (4.1.1.10)$$

Решение (4.1.1.9) является частным случаем решения (4.1.1.2) при $F(u) = u$ и $\theta(x) = \lambda x^2 + C_1 x + C_2$. Подставляя функцию $F(u) = u$ в (4.1.1.7), имеем $F(u) - F(w) = u - w = k\tau$. Используя утверждение 1, заменим в уравнении (4.1.1.8) параметр a на $\varphi(u-w)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному УрЧП с запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + \varphi(u - w),$$

которое допускает точное решение (4.1.1.9), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = 2\lambda + \varphi(k\tau)$$

(получено из (4.1.1.10) при $a = \varphi(k\tau)$). ◀

► **Пример 4.2.** Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение без запаздывания

$$u_t = (u^n u_x)_x + a u^{1-n}, \quad (4.1.1.11)$$

где $\beta = a$ — свободный параметр.

Уравнение (4.1.1.11) допускает решение типа бегущей волны в явном виде

$$u = (kt + \lambda x + C_1)^{1/n}, \quad (4.1.1.12)$$

где C_1, λ — произвольные постоянные, а параметр k выражается через a, λ и n следующим образом:

$$k = an + \frac{\lambda^2}{n}. \quad (4.1.1.13)$$

Решение (4.1.1.12) является частным случаем решения (4.1.1.2) при $F(u) = u^n$. Подставляя эту функцию в (4.1.1.7), имеем $F(u) - F(w) = u^n - w^n = k\tau$. Используя утверждение 1, заменим в уравнении (4.1.1.11) параметр a на $\varphi(u^n - w^n)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = (u^n u_x)_x + u^{1-n} \varphi(u^n - w^n),$$

которое допускает точное решение вида (4.1.1.12), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = n\varphi(k\tau) + \frac{\lambda^2}{n}$$

(получено из (4.1.1.13) при $a = \varphi(k\tau)$). ◀

4.1.2. Использование первого метода для построение точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием

Уравнение 1. Нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)}, \quad (4.1.2.1)$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и два свободных параметра σ и β , допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде [428]:

$$\int f(u) du = kt - \sigma \int \frac{x dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (4.1.2.2)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а константа k связана с параметром β линейным соотношением

$$k = \beta. \quad (4.1.2.3)$$

Решение (4.1.2.2) является решением вида (4.1.1.2) при $F(u) = \int f(u) du$.

Используя утверждение 1, заменим в уравнении (4.1.2.1) параметры σ и β соответственно на $\varphi(F(u) - F(w))$ и $\psi(F(u) - F(w))$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к новому нелинейному уравнению реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= [a(x)f(u)u_x]_x + \varphi(F(u) - F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u) - F(w)), \\ F(u) &= \int f(u) du, \end{aligned} \quad (4.1.2.4)$$

которое зависит от четырех произвольных функций и имеет точное решение

$$\int f(u) du = kt - \varphi(k\tau) \int \frac{x dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (4.1.2.5)$$

где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \psi(k\tau) \quad (4.1.2.6)$$

(получено из (4.1.2.3) при $\beta = \psi(k\tau)$).

► **Пример 4.3.** Полагая

$F(u) = u^{n+1}$, $f(u) = (n+1)u^n$, $a(x) = a_0/(n+1) = \text{const}$, $\psi(z) = (n+1)\bar{\psi}(z)$ в (4.1.2.4)–(4.1.2.6), приходим к нелинейному УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a_0(u^n u_x)_x + \varphi(u^{n+1} - w^{n+1}) + u^{-n}\bar{\psi}(u^{n+1} - w^{n+1}),$$

зависящему от двух произвольных функций $\varphi(z)$ и $\bar{\psi}(z)$, точное решение которого допускает представление в явном виде

$$u = \left[kt - \frac{n+1}{2a_0} \varphi(k\tau) x^2 + C_1 x + C_2 \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (4.1.2.7)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = (n+1)\bar{\psi}(k\tau)$. ◀

► **Пример 4.4.** Полагая $F(u) = e^{\lambda u}$, $f(u) = \lambda e^{\lambda u}$, $a(x) = a_0/\lambda = \text{const}$, $\psi(z) = \lambda \bar{\psi}(z)$ в (4.1.2.4)–(4.1.2.6), приходим к нелинейному УрЧП с запаздыванием

$$u_t = a_0(e^{\lambda u} u_x)_x + \varphi(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u} \bar{\psi}(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}),$$

которое имеет точное решение

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln \left[kt - \frac{\lambda}{2a_0} \varphi(k\tau) x^2 + C_1 x + C_2 \right], \quad (4.1.2.8)$$

где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \lambda \bar{\psi}(k\tau)$. ◀

Уравнение 2. Более общее, чем (4.1.2.4), нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)\varphi(F(u) - F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u) - F(w)),$$

зависящее от пяти произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, имеет точное решение

$$\int f(u) du = kt - \varphi(k\tau) \int \frac{1}{a(x)} \left(\int b(x) dx \right) dx + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2,$$

где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения (4.1.2.6).

Далее, опуская подробности, приведем еще несколько нелинейных УрЧП без запаздывания, допускающих точные решения вида (4.1.1.2), и порождаемые ими более сложные нелинейные УрЧП с запаздыванием и их точные решения.

Уравнение 3. Рассмотрим нелинейное УрЧП без запаздывания

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \mu a(x)f(u)u_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)},$$

которое допускает точное решение [432]:

$$\int f(u) du = kt + \frac{\sigma}{\mu} \int \frac{dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{e^{\mu x}}{a(x)} dx + C_2, \quad (4.1.2.9)$$

где константа k связана с параметром β линейным соотношением (4.1.2.3).

Рассуждая так же, как и в примере 4.1, получим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \mu a(x)f(u)u_x + \varphi(F(u) - F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u) - F(w)),$$

точное решение которого определяется формулой (4.1.2.9) при $\sigma = \varphi(k\tau)$, а постоянная k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения (4.1.2.6).

Уравнение 4. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна — Гордона без запаздывания

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + \sigma - \beta \frac{f'_u(u)}{f^3(u)},$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и два свободных параметра β и σ , допускает решение типа обобщенной бегущей волны [431]:

$$\int f(u) du = kt - \sigma \int \frac{x dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (4.1.2.10)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а константа k связана с параметром β соотношением

$$k^2 = \beta.$$

При $\beta > 0$ имеем два действительных решения $k = \pm\sqrt{\beta}$.

Решение (4.1.2.10) является решением вида (4.1.1.2) при $F(u) = \int f(u) du$.

Рассуждая аналогично тому, как это делалось ранее в примере 4.1, приходим к нелинейному уравнению типа Клейна — Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + \varphi(F(u) - F(w)) - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}\psi(F(u) - F(w)), \quad (4.1.2.11)$$

точное решение которого можно представить в неявной форме (4.1.2.10) при $\sigma = \varphi(k\tau)$, где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k^2 = \psi(k\tau)$.

► **Пример 4.5.** Полагая $F(u) = u^{n+1}$, $f(u) = (n+1)u^n$, $a(x) = a_0/(n+1) = \text{const}$, $\psi(z) = n^{-1}(n+1)^2\bar{\psi}(z)$ в (4.1.2.11), приходим к нелинейному УрЧП с запаздыванием

$$u_{tt} = a_0(u^n u_x)_x + \varphi(u^{n+1} - w^{n+1}) - u^{-2n-1}\bar{\psi}(u^{n+1} - w^{n+1}),$$

которое имеет точное решение (4.1.2.7), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $nk^2 = (n+1)^2\bar{\psi}(k\tau)$. ◀

► **Пример 4.6.** Полагая $F(u) = e^{\lambda u}$, $f(u) = \lambda e^{\lambda u}$, $a(x) = a_0/\lambda = \text{const}$, $\psi(z) = \lambda\bar{\psi}(z)$ в (4.1.2.11), получим нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_{tt} = a_0(e^{\lambda u} u_x)_x + \varphi(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) - e^{-2\lambda u}\bar{\psi}(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}),$$

которое имеет точное решение (4.1.2.8), где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k^2 = \lambda\bar{\psi}(k\tau)$. ◀

Уравнение 5. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна — Гордона без запаздывания

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \beta \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}} f(u), \quad (4.1.2.12)$$

содержащее две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, допускает два точных решения [431]:

$$\int \frac{du}{f(u)} = \pm 2kt - 2k \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C, \quad (4.1.2.13)$$

где константа k связана с параметром β линейным соотношением (4.1.2.3). Решение (4.1.2.13) является решением вида (4.1.1.2) при $F(u) = \int [du/f(u)]$.

Уравнение (4.1.2.12) порождает более сложное УрЧП с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}} f(u) \psi(F(u) - F(w)), \quad F(u) = \int \frac{du}{f(u)},$$

точные решения которого определяются формулой (4.1.2.13), где константа k находится из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \psi(k\tau)$.

4.1.3. Второй метод построения точных решений УрЧП с запаздыванием. Общее описание и простые примеры

Общее описание метода. Второй метод построения точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием основан на использовании следующего утверждения.

Утверждение 2. Пусть уравнение (4.1.1.1) имеет решение с функциональным разделением переменных специального вида

$$F(u) = e^{kt}\theta(x), \quad (4.1.3.1)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения (4.1.1.3), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (4.1.1.4). Тогда более сложное нелинейное уравнение с запаздыванием, которое получается из (4.1.1.1) формальной заменой свободных параметров β_1, \dots, β_m на функции по правилу

$$\beta_i \implies \varphi_i(F(w)/F(u)), \quad w = u(x, t - \tau), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.1.3.2)$$

где $\varphi_i(z)$ — заданные (достаточно произвольно) функции, также допускает точное решение вида (4.1.3.1), причем константа k и функция $\theta = \theta(x)$ определяются из уравнений (4.1.1.3) и (4.1.1.4), в которых следует положить

$$\beta_i = \varphi_i(e^{-k\tau}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.1.3.3)$$

Доказательство. На решениях вида (4.1.3.1) имеем $F(w) = e^{k(t-\tau)}\theta(x) = e^{-k\tau}F(u)$, т. е.

$$F(w)/F(u) = e^{-k\tau} = \text{const}. \quad (4.1.3.4)$$

Поэтому любое уравнение с запаздыванием, полученное из (4.1.1.1) заменой параметров β_1, \dots, β_m на функции по правилу (4.1.3.2), на решениях вида (4.1.3.1) в силу (4.1.3.4) эквивалентно уравнению (4.1.1.1) при условии (4.1.3.3).

Утверждение 2 можно использовать для построения точных решений в явном и неявном виде некоторых УрЧП с запаздыванием.

Замечание 4.3. Утверждение 2 можно свести к утверждению 1. Для этого надо, считая $F(u) > 0$, прологарифмировать решение (4.1.3.1), а затем сделать переобозначения $\ln F(u) \implies F(u)$ и $\ln \theta \implies \theta$ (аналогичным образом рассматривается и случай $F(u) < 0$). Однако на практике часто встречается представление решения непосредственно в виде (4.1.3.1), поэтому проще и удобнее его и использовать.

Простые методические примеры практического применения метода.

► **Пример 4.7.** Рассмотрим линейное уравнение диффузионного типа

$$u_t = u_{xx} + au, \quad (4.1.3.5)$$

где $\beta = a$ — свободный параметр.

Уравнение (4.1.3.5) допускает точное решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{kt}\theta(x), \quad (4.1.3.6)$$

где k — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\theta''_{xx} + (a - k)\theta = 0. \quad (4.1.3.7)$$

Решение (4.1.3.6) является частным случаем решения (4.1.3.1) при $F(u) = u$. Подставляя эту функцию в (4.1.3.4), имеем $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 2, заменим в уравнении (4.1.3.5) параметр a на $\varphi(w/u)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному УрЧП с запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + u\varphi(w/u),$$

которое допускает точное решение (4.1.3.6), где k — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ

$$\theta''_{xx} + [\varphi(e^{-k\tau}) - k]\theta = 0.$$

Это уравнение получено подстановкой константы $a = \varphi(e^{-k\tau})$ в (4.1.3.7) и легко интегрируется. ◀

► **Пример 4.8.** Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_t = (uu_x)_x + au + bu^2, \quad (4.1.3.8)$$

где a, b — свободные параметры.

При $b > 0$ уравнение (4.1.3.8) допускает точное решение с разделяющимися переменными в явном виде

$$u = e^{kt} \sqrt{[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]}, \quad \beta = \sqrt{2b}, \quad (4.1.3.9)$$

которое является частным случаем решения (4.1.3.6), где параметр k удовлетворяет линейному соотношению

$$k = a. \quad (4.1.3.10)$$

Как и в примере 4.7, имеем $F(u) = u$ и, следовательно, $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 2, заменим в уравнении (4.1.3.8) параметры a и b соответственно на $\varphi(w/u)$ и $\psi(w/u)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к нелинейному УрЧП с запаздыванием

$$u_t = (uu_x)_x + u\varphi(w/u) + u^2\psi(w/u),$$

которое допускает точное решение вида (4.1.3.9), где k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \varphi(e^{-k\tau})$$

(получено из (4.1.3.10) при $a = \varphi(e^{-k\tau})$). ◀

4.1.4. Использование второго метода для построение точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием

Уравнение 1. Рассмотрим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \left[b + \frac{c}{f(u)}\right]F(u), \quad F(u) = \int f(u) du, \quad (4.1.4.1)$$

зависящее от произвольной функции $f(u)$ и двух свободных параметров b и c . Это уравнение допускает точное решение, которое можно представить в неявном виде [447]:

$$\int f(u) du = e^{kt}\theta(x), \quad (4.1.4.2)$$

где

$$k = c, \quad (4.1.4.3)$$

а функция $\theta = \theta(x)$ определяется из линейного ОДУ второго порядка

$$\theta''_{xx} + b\theta = 0. \quad (4.1.4.4)$$

Решение (4.1.4.2) является решением вида (4.1.3.1) при $F(u) = \int f(u) du$.

Используя утверждение 2, заменим в уравнении (4.1.4.1) параметры b и c соответственно на $\varphi(F(w)/F(u))$ и $\psi(F(w)/F(u))$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к более сложному нелинейному уравнению реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x + F(u) \left[\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) + \frac{1}{f(u)}\psi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) \right], \quad F(u) = \int f(u) du, \quad (4.1.4.5)$$

которое зависит от трех произвольных функций и имеет точное решение вида (4.1.4.2), где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \psi(e^{-k\tau}) \quad (4.1.4.6)$$

(получено из (4.1.4.3) при $c = \psi(e^{-k\tau})$), а функция $\theta = \theta(x)$ определяется из линейного ОДУ второго порядка (4.1.4.4) при $b = \varphi(e^{-k\tau})$.

Уравнение 2. Более общее, чем (4.1.4.5), нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u)\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) + \frac{F(u)}{f(u)}\psi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right),$$

зависящее от пяти произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, допускает точное решение вида (4.1.4.2), где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения (4.1.4.6), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка

$$[a(x)\theta'_x]'_x + \varphi(e^{-k\tau})b(x)\theta = 0.$$

Уравнение 3. Нелинейное УрЧП без запаздывания

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \mu f(u)u_x + \frac{\lambda}{f(u)}F(u), \quad F(u) = \int f(u) du, \quad (4.1.4.7)$$

зависящее от произвольной функции $f(u)$ и двух свободных параметров μ и λ , допускает точное решение [432]:

$$\int f(u) du = e^{kt}(C_1 + C_2 e^{-\mu x}), \quad (4.1.4.8)$$

где $k = \lambda$.

Используя утверждение 2 можно, например, показать, что нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \mu f(u)u_x + \frac{F(u)}{f(u)}\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right), \quad F(u) = \int f(u) du, \quad (4.1.4.9)$$

допускает точное решение вида (4.1.4.8), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(e^{-k\tau})$.

► **Пример 4.9.** Полагая $\varphi(z) = \lambda z$ в (4.1.4.9), приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \mu f(u)u_x + \frac{\lambda}{f(u)}F(w),$$

которое формально можно получить из уравнения (4.1.4.7) путем переобозначения $F(u) \Rightarrow F(w)$. ◀

Уравнение 4. Нелинейное УрЧП без запаздывания

$$u_t = [f(u)u_x]_x - 2\alpha f(u)u_x + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{f(u)}\right]F(u), \quad F(u) = \int f(u) du, \quad (4.1.4.10)$$

зависящее от произвольной функции $f(u)$ и двух свободных параметров α и β , допускает точное решение в неявном виде [432]:

$$\int f(u) du = e^{kt+\alpha x}(C_1 x + C_2), \quad (4.1.4.11)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и $k = \beta$.

Более сложное, чем (4.1.4.10), нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x - 2\alpha f(u)u_x + \alpha^2 F(u) + \frac{F(u)}{f(u)}\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right)$$

также имеет точное решение (4.1.4.11), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(e^{-k\tau})$.

Уравнение 5. Рассмотрим нелинейное УрЧП волнового типа без запаздывания с переменными коэффициентами

$$u_{tt} = [f(x)u^n u_x]_x + g(x, a)u^{n+1} + bu, \quad (4.1.4.12)$$

где $f(x)$ и $g(x, a)$ — произвольные функции, a и b — свободные параметры.

Уравнение (4.1.4.12) допускает точное решение с разделяющимися переменными вида (4.1.3.6), где параметр k удовлетворяет квадратичному соотношению

$$k^2 = b, \quad (4.1.4.13)$$

а функция $\theta = \theta(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка

$$[f(x)\theta^n \theta'_x]'_x + g(x, a)\theta^{n+1} = 0. \quad (4.1.4.14)$$

В данном случае имеем $F(u) = u$ и $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 2, заменим в уравнении (4.1.4.12) параметры a и b соответственно на $\varphi(w/u)$ и $\psi(w/u)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_{tt} = [f(x)u^n u_x]_x + u^{n+1}g(x, \varphi(w/u)) + u\psi(w/u),$$

которое допускает точное решение вида (4.1.3.6), где k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k^2 = \psi(e^{-k\tau})$$

(получено из (4.1.4.13) при $b = \psi(e^{-k\tau})$), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ:

$$[f(x)\theta^n \theta'_x]'_x + g(x, a)\theta^{n+1} = 0, \quad a = \varphi(e^{-k\tau}).$$

Это уравнение с помощью замены $\xi(x) = \theta^{n+1}(x)$ сводится к линейному ОДУ второго порядка.

Замечание 4.4. В [443] приведены некоторые точные решения более сложных нелинейных УрЧП и систем УрЧП с запаздыванием.

4.2. Системы нелинейных УрЧП с запаздыванием. Метод порождающих уравнений

4.2.1. Общее описание метода и примеры его применения

Предварительные замечания. Разработанный в [457] метод порождающих уравнений позволяет находить решения нелинейных систем УрЧП с запаздыванием с помощью более простых точных решений отдельных (изолированных)

УрЧП с запаздыванием. Этот метод основан на использовании метода функциональных связей (см. разд. 3.4).

Описание метода. Рассмотрим два различных независимых (изолированных) нелинейных УрЧП с постоянным запаздыванием

$$u_t = F(u, \bar{u}, u_x, u_{xx}, f(z_1)), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \quad z_1 = z_1(u, \bar{u}); \quad (4.2.1.1)$$

$$v_t = G(v, \bar{v}, v_x, v_{xx}, g(z_2)), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau), \quad z_2 = z_2(v, \bar{v}), \quad (4.2.1.2)$$

которые зависят от произвольных функций одного аргумента $f(z_1)$ и $g(z_2)$, $\tau > 0$.

Будем считать, что уравнения (4.2.1.1) и (4.2.1.2) имеют точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \sum_{n=1}^{N_1} \varphi_{1n}(x) \psi_{1n}(t), \quad v = \sum_{n=1}^{N_2} \varphi_{2n}(x) \psi_{2n}(t) \quad (4.2.1.3)$$

и что оба этих решения удовлетворяют любым функциональным связям одинакового типа (см. разд. 3.4), т. е. допустим любой из следующих двух возможных вариантов:

$$z_1(u, \bar{u}) = p_1(x), \quad z_2(v, \bar{v}) = p_2(x) \quad (\text{функциональные связи первого рода});$$

$$z_1(u, \bar{u}) = q_1(t), \quad z_2(v, \bar{v}) = q_2(t) \quad (\text{функциональные связи второго рода}).$$

(4.2.1.4)

Метод порождающих уравнений основан на использовании следующего принципа.

Принцип построения систем с запаздыванием и их точных решений. Пусть изолированные нелинейные уравнения с запаздыванием (4.2.1.1) и (4.2.1.2) допускают решения с обобщенным разделением переменных (4.2.1.3), каждое из которых удовлетворяет двум функциональным связям одинакового вида (4.2.1.4). Тогда более сложная нелинейная система, состоящая из двух связанных нелинейных уравнений с запаздыванием

$$u_t = F(u, \bar{u}, u_x, u_{xx}, f(z_1, z_2)), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \quad z_1 = z_1(u, \bar{u}); \quad (4.2.1.5)$$

$$v_t = G(v, \bar{v}, v_x, v_{xx}, g(z_1, z_2)), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau), \quad z_2 = z_2(v, \bar{v}), \quad (4.2.1.6)$$

где $f(z_1, z_2)$ и $g(z_1, z_2)$ — произвольные функции двух аргументов, допускает точное решение вида (4.2.1.3).

Далее исходные независимые уравнения (4.2.1.1) и (4.2.1.2) будем называть *порождающими* (или *генерирующими*) *уравнениями*.

Отметим, что в простейших случаях порождающие уравнения (4.2.1.1) и (4.2.1.2) могут быть одинаковыми с точностью до элементарных переобозначений определяющих параметров и произвольных функций.

Замечание 4.5. В качестве порождающих уравнений вместо нелинейных УрЧП с запаздыванием, допускающих точные решения с обобщенным разделением переменных вида (4.2.1.3), можно брать также нелинейные УрЧП с запаздыванием, имеющие более сложные решения с функциональным разделением переменных [457].

Иллюстративные примеры. Опишем подробнее процедуру применения метода порождающих уравнений на двух конкретных примерах.

► **Пример 4.10.** Для получения обоих порождающих уравнений используем одно уравнение реакционно-диффузионного типа с запаздыванием (3.4.2.1), которое после элементарных переобозначений запишем в виде двух однотипных независимых уравнений:

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + u f(\bar{u}/u), & \bar{u} &= u(x, t - \tau); \\ v_t &= a_2 v_{xx} + v g(\bar{v}/v), & \bar{v} &= v(x, t - \tau), \end{aligned} \quad (4.2.1.7)$$

которые содержат произвольные функции одного аргумента $f(z_1)$ и $g(z_2)$, где $z_1 = \bar{u}/u$ и $z_2 = \bar{v}/v$.

1°. Уравнения (4.2.1.7) совпадают (с точностью до очевидных переобозначений) с уравнением (3.4.2.1) и поэтому допускают, например, решения с мультипликативным разделением переменных вида*:

$$u = \cos(\beta x) \psi_1(t), \quad v = \cos(\beta x) \psi_2(t), \quad (4.2.1.8)$$

где β — произвольная постоянная. Функции (4.2.1.8) удовлетворяют функциональным связям второго рода (4.2.1.4) при $z_1 = \bar{u}/u = \psi_1(t - \tau)/\psi_1(t)$ и $z_2 = \bar{v}/v = \psi_2(t - \tau)/\psi_2(t)$.

В данном случае соответствующая нелинейная система реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (4.2.1.5) — (4.2.1.6) записывается так:

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + u f(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \\ v_t &= a_2 v_{xx} + v g(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \end{aligned} \quad (4.2.1.9)$$

где $f(z_1, z_2)$ и $g(z_1, z_2)$ — произвольные функции двух аргументов.

Следуя методу порождающих уравнений, ищем точное решение системы УрЧП с запаздыванием (4.2.1.9) в виде (4.2.1.8). Подставив (4.2.1.8) в (4.2.1.9), для функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ получим следующую систему ОДУ с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) &= -a_1 \beta^2 \psi_1(t) + \psi_1(t) f(\psi_1(t - \tau)/\psi_1(t), \psi_2(t - \tau)/\psi_2(t)), \\ \psi_2'(t) &= -a_2 \beta^2 \psi_2(t) + \psi_2(t) g(\psi_1(t - \tau)/\psi_1(t), \psi_2(t - \tau)/\psi_2(t)). \end{aligned} \quad (4.2.1.10)$$

2°. Генерирующие уравнения (4.2.1.7) допускают также другие точные решения с мультипликативным разделением переменных (см. решения уравнения (3.4.2.1)):

$$u = \operatorname{sh}(\gamma x) \psi_1(t), \quad v = \operatorname{sh}(\gamma x) \psi_2(t), \quad (4.2.1.11)$$

где γ — произвольная постоянная. Решения (4.2.1.11) удовлетворяют таким же функциональным связям второго рода, что и решения (4.2.1.8). Поэтому нелинейная система реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (4.2.1.9) допускает точные решения вида (4.2.1.11). В этом случае функции

*Напомним, что решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных относятся к простейшим решениям с обобщенным разделением переменных.

$\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием, которая получается из (4.2.1.10) формальной заменой β^2 на $-\gamma^2$.

3°. Генерирующие уравнения (4.2.1.7) допускают два класса различных точных решений (4.2.1.8) и (4.2.1.11) и оба класса этих решений удовлетворяют функциональным связями второго рода. Поэтому нелинейная система реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (4.2.1.9) допускает также точное решение смешанного типа:

$$u = \cos(\beta x)\psi_1(t), \quad v = \operatorname{sh}(\gamma x)\psi_2(t), \quad (4.2.1.12)$$

где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием, которая состоит из первого уравнения системы (4.2.1.10) и модифицированного второго уравнения этой же системы, полученного путем формальной замены β^2 на $-\gamma^2$.

4°. Система реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (4.2.1.9) допускает более общее решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi_1(x)\psi_1(t), \quad v = \varphi_2(x)\psi_2(t), \quad (4.2.1.13)$$

которое включает в себя решения (4.2.1.8), (4.2.1.11), (4.2.1.12). ◀

Замечание 4.6. Более общая, чем (4.2.1.9), нелинейная система реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + u f(u/v, \bar{u}/u, \bar{v}/v), \\ v_t &= a_2 v_{xx} + v g(u/v, \bar{u}/u, \bar{v}/v), \end{aligned}$$

где $f(z_1, z_2, z_3)$ и $g(z_1, z_2, z_3)$ — произвольные функции трех аргументов, допускает точные решения вида (4.2.1.8) и (4.2.1.11), а также решение (4.2.1.13) при $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

► **Пример 4.11.** В качестве порождающих уравнений возьмем одно уравнение реакционно-диффузионного типа с запаздыванием (3.4.2.19), которое после очевидных переобозначений запишем в виде двух однотипных независимых уравнений:

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + b_1 u + f(u - \bar{u}), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau); \\ v_t &= a_2 v_{xx} + b_2 v + g(v - \bar{v}), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau), \end{aligned} \quad (4.2.1.14)$$

содержащих произвольные функции одного аргумента $f(z_1)$ и $g(z_2)$, где $z_1 = u - \bar{u}$ и $z_2 = v - \bar{v}$.

1°. Уравнения (4.2.1.14) совпадают (с точностью до переобозначений) с уравнением (3.4.2.19) и поэтому имеют решения с аддитивным разделением переменных

$$u = \varphi_1(x) + \psi_1(t), \quad v = \varphi_2(x) + \psi_2(t). \quad (4.2.1.15)$$

Функции (4.2.1.15) удовлетворяют функциональным связям второго рода (4.2.1.4) при $z_1 = u - \bar{u} = \psi_1(t) - \psi_1(t - \tau)$ и $z_2 = v - \bar{v} = \psi_2(t) - \psi_2(t - \tau)$.

Независимые уравнения (4.2.1.14) порождают нелинейную систему реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + b_1 u + f(u - \bar{u}, v - \bar{v}), \\ v_t &= a_2 v_{xx} + b_2 v + g(u - \bar{u}, v - \bar{v}), \end{aligned} \quad (4.2.1.16)$$

где $f(z_1, z_2)$ и $g(z_1, z_2)$ — произвольные функции двух аргументов.

Следуя методу порождающих уравнений, ищем точное решение системы реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (4.2.1.16) в виде (4.2.1.15). После разделения переменных для определяющих функций получим две независимые системы:

(i) систему независимых линейных ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами для $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$:

$$\begin{aligned} a_1 \varphi_1'' + b_1 \varphi_1 &= 0, \\ a_2 \varphi_2'' + b_2 \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.1.17)$$

(ii) систему связанных нелинейных ОДУ первого порядка с запаздыванием для $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$:

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) &= b_1 \psi_1(t) + f(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau), \psi_2(t) - \psi_2(t - \tau)), \\ \psi_2'(t) &= b_2 \psi_2(t) + g(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau), \psi_2(t) - \psi_2(t - \tau)). \end{aligned} \quad (4.2.1.18)$$

Отметим, что общее решение уравнений (4.2.1.17) при $b_1 > 0$ и $b_2 < 0$ определяется формулами

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_{11} \cos(\beta_1 x) + C_{12} \sin(\beta_1 x), & \beta_1 &= \sqrt{b_1/a_1}, \\ \varphi_2 &= C_{21} \exp(-\beta_2 x) + C_{22} \exp(\beta_2 x), & \beta_2 &= \sqrt{-b_2/a_2}, \end{aligned}$$

где C_{ij} — произвольные постоянные. Аналогичным образом можно получить решение уравнений (4.2.1.17) при других знаках коэффициентов b_1 и b_2 .

2°. Порождающие уравнения (4.2.1.14) допускают также решения с обобщенным разделением переменных (см. решение (3.4.2.27) уравнения (3.4.2.19)):

$$u = \xi_1(x)t + \eta_1(x), \quad v = \xi_2(x)t + \eta_2(x), \quad (4.2.1.19)$$

где функции (4.2.1.19) удовлетворяют функциональным связям первого рода (4.2.1.4) при $z_1 = u - \bar{u} = \tau \xi_1(x)$ и $z_2 = v - \bar{v} = \tau \xi_2(x)$.

Подставив (4.2.1.19) в систему реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (4.2.1.16), получим следующую систему ОДУ для определяющих функций:

$$\begin{aligned} a_1 \xi_1'' + b_1 \xi_1 &= 0, \\ a_2 \xi_2'' + b_2 \xi_2 &= 0, \\ a_1 \eta_1'' + b_1 \eta_1 &= \xi_1 - f(\tau \xi_1, \tau \xi_2), \\ a_2 \eta_2'' + b_2 \eta_2 &= \xi_2 - g(\tau \xi_1, \tau \xi_2). \end{aligned}$$

Первые два уравнения с точностью до очевидных переобозначений совпадают с уравнениями (4.2.1.17) и легко интегрируются. Затем полученные функции ξ_1 и ξ_2 подставляются в правые части двух последних уравнений, которые после этого становятся линейными неоднородными ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и поэтому также легко интегрируются. ◀

4.2.2. Квазилинейные системы реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и их точные решения

В данном разделе кратко описаны некоторые квазилинейные системы реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием, линейные относительно всех производных. Для получения этих систем и их точных решений использован метод порождающих уравнений.

Система 1. В качестве порождающих уравнений используем одно уравнение реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием (3.4.2.31), которое допускает решение с обобщенным разделением переменных, удовлетворяющее функциональной связи первого рода. В результате приходим к квазилинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + b_1 u + f(u - k_1 \bar{u}, v - k_2 \bar{v}), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau); \\ v_t &= a_2 v_{xx} + b_2 v + g(u - k_1 \bar{u}, v - k_2 \bar{v}), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau), \end{aligned} \quad (4.2.2.1)$$

где k_1 и k_2 — произвольные положительные постоянные.

Система (4.2.2.1) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$\begin{aligned} u &= \xi_1(x) \exp(s_1 t) + \eta_1(x), \quad s_1 = (\ln k_1)/\tau, \\ v &= \xi_2(x) \exp(s_2 t) + \eta_2(x), \quad s_2 = (\ln k_2)/\tau. \end{aligned} \quad (4.2.2.2)$$

Система ОДУ для функций $\xi_m(x)$ и $\eta_m(x)$ опускается.

Замечание 4.7. Более общая, чем (4.2.2.1), квазилинейная система реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + f_1(u - k_1 \bar{u}, v - k_2 \bar{v}) + \\ &\quad + u f_2(u - k_1 \bar{u}, v - k_2 \bar{v}) + v f_3(u - k_1 \bar{u}, v - k_2 \bar{v}), \\ v_t &= a_2 v_{xx} + g_1(u - k_1 \bar{u}, v - k_2 \bar{v}) + \\ &\quad + u g_2(u - k_1 \bar{u}, v - k_2 \bar{v}) + v g_3(u - k_1 \bar{u}, v - k_2 \bar{v}), \end{aligned}$$

содержащая шесть произвольных функций двух аргументов $f_m(z_1, z_2)$ и $g_m(z_1, z_2)$ ($m = 1, 2, 3$) также допускает точное решение вида (4.2.2.2).

Система 2. В качестве порождающих уравнений возьмем следующие два разных уравнения реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + b u + f(u - \bar{u}), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau); \\ v_t &= a_2 v_{xx} + v g(\bar{v}/v), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau). \end{aligned} \quad (4.2.2.3)$$

Первое из этих уравнений совпадает с первым уравнением (4.2.1.14) при $b = b_1$ и допускает точное решение с аддитивным разделением переменных, а второе уравнение (4.2.2.3) совпадает со вторым уравнением (4.2.1.7) и допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных. Оба указанных решения уравнений (4.2.2.3) удовлетворяют соответствующим функциональным связям второго рода.

Применяя метод порождающих уравнений к уравнениям (4.2.2.3) приходим к системе связанных уравнений реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + bu + f(u - \bar{u}, \bar{v}/v), \\ v_t &= a_2 v_{xx} + vg(u - \bar{u}, \bar{v}/v), \end{aligned} \quad (4.2.2.4)$$

где $f(z_1, z_2)$ и $g(z_1, z_2)$ — произвольные функции двух аргументов.

Используя комбинацию решений уравнений (4.2.2.3), получим точное решение системы (4.2.2.4):

$$u = \varphi_1(x) + \psi_1(t), \quad v = \varphi_2(x)\psi_2(t). \quad (4.2.2.5)$$

В данном случае компоненты системы u и v имеют различную структуру, такие решения систем будем называть *решениями смешанного типа*.

Подставив (4.2.2.5) в систему (4.2.2.4) и разделяя переменные, приходим к следующим ОДУ и ОДУ с запаздыванием:

$$\begin{aligned} a_1 \varphi_1'' + b\varphi_1 &= A_1, \\ \varphi_2'' - A_2 \varphi_2 &= 0, \\ \psi_1'(t) &= b\psi_1(t) + A_1 + f(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau), \psi_2(t - \tau)/\psi_2(t)), \\ \psi_2'(t) &= A_2 a_2 \psi_2(t) + \psi_2(t)g(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau), \psi_2(t - \tau)/\psi_2(t)), \end{aligned} \quad (4.2.2.6)$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные. Первые два уравнения (4.2.2.6) независимы и легко интегрируются поскольку являются линейными ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Последние два уравнения (4.2.2.6) представляют собой систему связанных нелинейных ОДУ с запаздыванием. При $b = 0$ эта система допускает точное решение вида

$$\psi_1(t) = \beta t + C_1, \quad \psi_2(t) = C_2 e^{\lambda t},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а коэффициенты β и λ определяются из алгебраической (трансцендентной) системы уравнений

$$\beta = A_1 + f(\beta\tau, e^{-\lambda\tau}), \quad \lambda = A_2 a_2 + g(\beta\tau, e^{-\lambda\tau}).$$

Система 3. Для получения порождающих уравнений используем два частных случая одного уравнения реакционно-диффузионного типа с запаздыванием (3.4.2.48), которое имеет решение с обобщенным разделением переменных, удовлетворяющее функциональной связи первого рода. В результате приходим к квазилинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + uf(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2), \\ v_t &= a_2 v_{xx} + vg(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2), \end{aligned} \quad (4.2.2.7)$$

которая допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$\begin{aligned} u &= \varphi_1(x) \cos(\lambda t) + \psi_1(x) \sin(\lambda t), \quad \lambda = \frac{\pi}{2\tau}, \\ v &= \varphi_2(x) \cos(\lambda t) + \psi_2(x) \sin(\lambda t), \end{aligned} \quad (4.2.2.8)$$

где функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} a_1 \varphi_1'' + \varphi_1 f(\varphi_1^2 + \psi_1^2, \varphi_2^2 + \psi_2^2) - \lambda \psi_1 &= 0, \\ a_1 \psi_1'' + \psi_1 f(\varphi_1^2 + \psi_1^2, \varphi_2^2 + \psi_2^2) + \lambda \varphi_1 &= 0, \\ a_2 \varphi_2'' + \varphi_2 g(\varphi_1^2 + \psi_1^2, \varphi_2^2 + \psi_2^2) - \lambda \psi_2 &= 0, \\ a_2 \psi_2'' + \psi_2 g(\varphi_1^2 + \psi_1^2, \varphi_2^2 + \psi_2^2) + \lambda \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.2.9)$$

Замечание 4.8. Точные решения вида (4.2.2.8) допускают более общая нелинейная система уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + u f_1(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2) + \bar{u} f_2(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2) + \\ &\quad + v f_3(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2) + \bar{v} f_4(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2), \\ v_t &= a_2 v_{xx} + u g_1(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2) + \bar{u} g_2(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2) + \\ &\quad + v g_3(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2) + \bar{v} g_4(u^2 + \bar{u}^2, v^2 + \bar{v}^2), \end{aligned}$$

которая зависит от восьми произвольных функций двух аргументов $f_n(z_1, z_2)$ и $g_n(z_1, z_2)$.

Замечание 4.9. Константу $\lambda = \frac{\pi}{2\tau}$ в (4.2.2.8) и (4.2.2.9) можно заменить на

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\tau}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Система 4. В качестве порождающих уравнений возьмем два разных уравнения реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием: первое уравнение совпадает с первым уравнением (4.2.1.14) при $b_1 = b$, а второе уравнение — с частным случаем уравнения (3.4.2.48) (с точностью до обозначений). Оба этих уравнения имеют решения с обобщенным разделением переменных, которые удовлетворяют функциональным связям первого рода. Используя метод порождающих уравнений и рассуждая аналогично тому, как это делалось раньше, приходим к следующей системе уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием:

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + bu + f(u - \bar{u}, v^2 + \bar{v}^2), \\ v_t &= a_2 v_{xx} + vg(u - \bar{u}, v^2 + \bar{v}^2), \end{aligned} \quad (4.2.2.10)$$

которая допускает точное решение смешанного типа

$$\begin{aligned} u &= t\xi(x) + \eta(x), \\ v &= \varphi(x) \cos(\lambda t) + \psi(x) \sin(\lambda t), \quad \lambda = \frac{\pi}{2\tau}. \end{aligned}$$

Соответствующая система ОДУ для определения функций $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ здесь не приводится.

4.2.3. Нелинейные системы реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и их точные решения

Система 1. В качестве порождающих уравнений используем одно уравнение реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием (3.4.3.2),

которое допускает решение с мультипликативным разделением переменных, удовлетворяющее функциональной связи второго рода. Используя процедуру, описанную в разд. 4.2.1, приходим к нелинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1(u^k u_x)_x + u f(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \\ v_t &= a_2(v^m v_x)_x + v g(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau). \end{aligned} \quad (4.2.3.1)$$

Система УрЧП (4.2.3.1) наследует вид решений порождающих ее уравнений, т. е. допускает точные решения с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi_1(x)\psi_1(t), \quad v = \varphi_2(x)\psi_2(t). \quad (4.2.3.2)$$

Подставив (4.2.3.2) в (4.2.3.1), после несложных преобразований для функций $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ получим систему, состоящую из двух независимых ОДУ и двух связанных ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} a_1(\varphi_1^k \varphi_1')' &= C_1 \varphi_1, \\ a_2(\varphi_2^m \varphi_2')' &= C_2 \varphi_2, \\ \psi_1' &= C_1 \psi_1^{k+1} + \psi_1 f(\bar{\psi}_1/\psi_1, \bar{\psi}_2/\psi_2), \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t - \tau), \\ \psi_2' &= C_2 \psi_2^{m+1} + \psi_2 g(\bar{\psi}_1/\psi_1, \bar{\psi}_2/\psi_2), \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t - \tau), \end{aligned} \quad (4.2.3.3)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Общие решения первых двух автономных ОДУ в (4.2.3.3) можно представить в неявной форме. При $k, m \neq 0$ и $k, m \neq -2$ эти уравнения имеют частные решения

$$\varphi_1 = \left[\frac{C_1 k^2 x^2}{2a_1(k+2)} \right]^{1/k}, \quad \varphi_2 = \left[\frac{C_2 m^2 x^2}{2a_2(m+2)} \right]^{1/m}.$$

Система 2. Если в качестве порождающих уравнений использовать одно УрЧП с постоянным запаздыванием (3.4.3.6) (оно имеет решение с мультипликативным разделением переменных, удовлетворяющее функциональной связи второго рода), то приходим к более общей, чем (4.2.3.1), нелинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием:

$$\begin{aligned} u_t &= a_1(u^k u_x)_x + b_1 u^{k+1} + u f(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \\ v_t &= a_2(v^m v_x)_x + b_2 v^{m+1} + v g(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau). \end{aligned} \quad (4.2.3.4)$$

Эта система УрЧП допускает решение с мультипликативным разделением переменных вида (4.2.3.2), где функции $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ описываются независимыми автономными ОДУ:

$$\begin{aligned} a_1(\varphi_1^k \varphi_1')' + b_1 \varphi_1^{k+1} &= C_1 \varphi_1, \\ a_2(\varphi_2^m \varphi_2')' + b_2 \varphi_2^{m+1} &= C_2 \varphi_2, \end{aligned} \quad (4.2.3.5)$$

а функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют связанным ОДУ с запаздыванием, которые совпадают с двумя последними уравнениями системы (4.2.3.3).

Рассмотрим подробнее несколько специальных случаев, когда система реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (4.2.3.4) имеет простые точные решения, которые выражаются в элементарных функциях (все эти случаи соответствуют значениям $C_1 = C_2 = 0$ в (4.2.3.5)).

1°. Система УрЧП (4.2.3.4) при $b_1(k+1) > 0$ и $b_2(m+1) > 0$ имеет решение с мультипликативным разделением переменных

$$\begin{aligned} u &= [A_1 \cos(\beta_1 x) + A_2 \sin(\beta_1 x)]^{1/(k+1)} \psi_1(t), \quad \beta_1 = \sqrt{b_1(k+1)/a_1}, \\ v &= [B_1 \cos(\beta_2 x) + B_2 \sin(\beta_2 x)]^{1/(m+1)} \psi_2(t), \quad \beta_2 = \sqrt{b_2(m+1)/a_2}, \end{aligned} \quad (4.2.3.6)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, а функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются системой, состоящей из двух последних ОДУ с запаздыванием (4.2.3.3) при $C_1 = C_2 = 0$. Эта система имеет частные решения экспоненциального вида

$$\psi_1(t) = D_1 \exp(\lambda_1 t), \quad \psi_2(t) = D_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (4.2.3.7)$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные, а показатели λ_1 и λ_2 определяются из алгебраической (трансцендентной) системы уравнений

$$\lambda_1 - f(e^{-\lambda_1 \tau}, e^{-\lambda_2 \tau}) = 0, \quad \lambda_2 - g(e^{-\lambda_1 \tau}, e^{-\lambda_2 \tau}) = 0. \quad (4.2.3.8)$$

2°. Система УрЧП (4.2.3.4) при $b_1(k+1) < 0$ и $b_2(m+1) < 0$ имеет решение с мультипликативным разделением переменных

$$\begin{aligned} u &= [A_1 \exp(-\beta_1 x) + A_2 \exp(\beta_1 x)]^{1/(k+1)} \psi_1(t), \quad \beta_1 = \sqrt{-b_1(k+1)/a_1}, \\ v &= [B_1 \exp(-\beta_2 x) + B_2 \exp(\beta_2 x)]^{1/(m+1)} \psi_2(t), \quad \beta_2 = \sqrt{-b_2(m+1)/a_2}, \end{aligned} \quad (4.2.3.9)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, а функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются системой, состоящей из двух последних ОДУ с запаздыванием (4.2.3.3) при $C_1 = C_2 = 0$. Эта система имеет частные решения экспоненциального вида (4.2.3.7), где показатели λ_1 и λ_2 определяются из алгебраической (трансцендентной) системы уравнений (4.2.3.8).

3°. Система УрЧП (4.2.3.4) допускает также два решения с мультипликативным разделением переменных смешанного типа. А именно, при выполнении неравенств $b_1(k+1) > 0$ и $b_2(m+1) < 0$ система (4.2.3.4) имеет точное решение, которое определяется первой формулой (4.2.3.6) и второй формулой (4.2.3.9). Входящие в это составное решение функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$, как и ранее, описываются системой, состоящей из двух последних ОДУ с запаздыванием (4.2.3.3) при $C_1 = C_2 = 0$. Эта система имеет частные решения экспоненциального вида (4.2.3.7), где показатели λ_1 и λ_2 определяются из алгебраической (трансцендентной) системы уравнений (4.2.3.8).

При $b_1(k+1) < 0$ и $b_2(m+1) > 0$ система (4.2.3.4) имеет точное решение, которое определяется второй формулой (4.2.3.6) и первой формулой (4.2.3.9).

Система 3. Для получения порождающих уравнений используем одно уравнение в частных производных с постоянным запаздыванием (3.4.3.12), которое допускает решение с функциональным разделением переменных, удовлетворяющее функциональной связи второго рода. В результате приходим к нелинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1(u^k u_x)_x + b_1 + u^{-k} f(u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}, v^{m+1} - \bar{v}^{m+1}), \\ v_t &= a_2(v^m v_x)_x + b_2 + v^{-m} g(u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}, v^{m+1} - \bar{v}^{m+1}). \end{aligned} \quad (4.2.3.10)$$

Система (4.2.3.10) наследует вид решений порождающих ее уравнений и при $k, m \neq -1$ имеет точные решения с функциональным разделением переменных вида

$$u = [\varphi_1(x) + \psi_1(t)]^{1/(k+1)}, \quad v = [\varphi_2(x) + \psi_2(t)]^{1/(m+1)}. \quad (4.2.3.11)$$

Подставив (4.2.3.11) в УрЧП (4.2.3.10), для функций $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ получим систему, состоящую из двух независимых линейных ОДУ и двух связанных нелинейных ОДУ с запаздыванием:

$$\begin{aligned} a_1 \varphi_1'' + b_1(k+1) &= 0, \\ a_2 \varphi_2'' + b_2(m+1) &= 0, \\ \psi_1' &= (k+1)f(\psi_1 - \bar{\psi}_1, \psi_2 - \bar{\psi}_2), \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t - \tau), \\ \psi_2' &= (m+1)g(\psi_1 - \bar{\psi}_1, \psi_2 - \bar{\psi}_2), \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t - \tau). \end{aligned} \quad (4.2.3.12)$$

Общие решения двух первых ОДУ (4.2.3.12) записываются так:

$$\varphi_1 = -\frac{b_1(k+1)}{2a_1}x^2 + C_1x + C_2, \quad \varphi_2 = -\frac{b_2(m+1)}{2a_2}x^2 + C_3x + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Система двух последних связанных ОДУ с запаздыванием (4.2.3.12) имеет простое частное решение

$$\psi_1 = A_1 t, \quad \psi_2 = A_2 t,$$

где постоянные A_1 и A_2 определяются из алгебраической (трансцендентной) системы уравнений

$$A_1 = (k+1)f(A_1\tau, A_2\tau), \quad A_2 = (m+1)g(A_1\tau, A_2\tau).$$

Система 4. В качестве порождающих уравнений используем одно уравнение реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием (3.4.3.21), которое допускает решение с аддитивным разделением переменных, удовлетворяющее функциональной связи второго рода. Используя процедуру, описанную в разд. 4.2.1, приходим к нелинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - \bar{u}, v - \bar{v}), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \\ v_t &= a_2(e^{\beta v} v_x)_x + g(u - \bar{u}, v - \bar{v}), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau). \end{aligned} \quad (4.2.3.13)$$

Поскольку система УрЧП (4.2.3.13) наследует вид решений порождающих ее уравнений, она допускает точные решения с аддитивным разделением переменных

$$u = \varphi_1(x) + \psi_1(t), \quad v = \varphi_2(x) + \psi_2(t), \quad (4.2.3.14)$$

где функции $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются системой, состоящей из двух независимых ОДУ и двух связанных нелинейных ОДУ с запаздыванием:

$$\begin{aligned} (e^{\lambda\varphi_1} \varphi_1')' &= C_1, \\ (e^{\beta\varphi_2} \varphi_2')' &= C_2, \\ \psi_1' &= a_1 C_1 e^{\lambda\psi_1} + f(\psi_1 - \bar{\psi}_1, \psi_2 - \bar{\psi}_2), \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t - \tau), \\ \psi_2' &= a_2 C_2 e^{\beta\psi_2} + g(\psi_1 - \bar{\psi}_1, \psi_2 - \bar{\psi}_2), \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t - \tau), \end{aligned} \quad (4.2.3.15)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Общие решения двух первых ОДУ (4.2.3.15) определяются формулами

$$\varphi_1 = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{2}C_1\lambda x^2 + A_1x + B_1\right), \quad \varphi_2 = \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1}{2}C_2\beta x^2 + A_2x + B_2\right),$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные.

Система 5. В качестве порождающих уравнений возьмем два разных уравнения реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием (3.4.3.2) и (3.4.3.21). Первое уравнение имеет точное решение с мультипликативным разделением переменных, а второе — решение с аддитивным разделением переменных; причем оба этих решения удовлетворяют функциональным связям второго рода. Используя метод порождающих уравнений и рассуждая аналогично тому, как это делалось ранее, приходим к следующей системе уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием:

$$\begin{aligned} u_t &= a_1(u^k u_x)_x + u f(\bar{u}/u, v - \bar{v}), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \\ v_t &= a_2(e^{\lambda v} v_x)_x + g(\bar{u}/u, v - \bar{v}), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau), \end{aligned} \quad (4.2.3.16)$$

где $f(z_1, z_2)$ и $g(z_1, z_2)$ — произвольные функции двух аргументов.

Поскольку система УрЧП (4.2.3.16) наследует вид решений порождающих ее уравнений, она допускает точные решения вида

$$u = \varphi_1(x)\psi_1(t), \quad v = \varphi_2(x) + \psi_2(t). \quad (4.2.3.17)$$

Здесь функции $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются системой, состоящей из двух независимых ОДУ и двух связанных ОДУ с запаздыванием:

$$\begin{aligned} (\varphi_1^k \varphi_1')' &= C_1 \varphi_1, \\ (e^{\lambda\varphi_2} \varphi_2')' &= C_2, \\ \psi_1' &= a_1 C_1 \psi_1^{k+1} + \psi_1 f(\bar{\psi}_1/\psi_1, \psi_2 - \bar{\psi}_2), \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t - \tau), \\ \psi_2' &= a_2 C_2 e^{\lambda\psi_2} + g(\bar{\psi}_1/\psi_1, \psi_2 - \bar{\psi}_2), \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t - \tau), \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Система 6. В качестве порождающих уравнений используем одно уравнение реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием (3.4.3.30), которое допускает решение с функциональным разделением переменных, удовлетворяющее функциональной связи второго рода. В результате приходим к нелинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1(e^{\lambda_1 u} u_x)_x + b_1 + e^{-\lambda_1 u} f(e^{\lambda_1 u} - e^{\lambda_1 \bar{u}}, e^{\lambda_2 v} - e^{\lambda_2 \bar{v}}), \\ v_t &= a_2(e^{\lambda_2 v} v_x)_x + b_2 + e^{-\lambda_2 v} g(e^{\lambda_1 u} - e^{\lambda_1 \bar{u}}, e^{\lambda_2 v} - e^{\lambda_2 \bar{v}}). \end{aligned} \quad (4.2.3.18)$$

Система (4.2.3.18) наследует вид решений порождающих ее уравнений. Поэтому она допускает точные решения с функциональным разделением переменных вида

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\lambda_1} \ln[\varphi_1(x) + \psi_1(t)], \quad \varphi_1(x) = -\frac{b_1 \lambda_1}{2a_1} x^2 + C_1 x + C_2, \\ v &= \frac{1}{\lambda_2} \ln[\varphi_2(x) + \psi_2(t)], \quad \varphi_2(x) = -\frac{b_2 \lambda_2}{2a_2} x^2 + C_3 x + C_4, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) &= \lambda_1 f(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau), \psi_2(t) - \psi_2(t - \tau)), \\ \psi_2'(t) &= \lambda_2 g(\psi_1(t) - \psi_1(t - \tau), \psi_2(t) - \psi_2(t - \tau)). \end{aligned}$$

Эта система имеет простые частные решения вида $\psi_1(t) = A_1 t, \psi_2(t) = A_2 t$, где коэффициенты A_1 и A_2 определяются из алгебраической (трансцендентной) системы уравнений

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda_1 f(A_1 \tau, A_2 \tau), \\ A_2 &= \lambda_2 g(A_1 \tau, A_2 \tau). \end{aligned}$$

Замечание 4.10. Используя приведенные в разд. 3.4 уравнения и их точные решения можно получить другие системы нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа, допускающие точные решения (см. также [82, 457]).

4.2.4. Некоторые обобщения

Опишем возможные обобщения, которые допускает метод порождающих уравнений.

Системы с двумя постоянными временами запаздывания. Общее постоянное время запаздывания τ в системе УрЧП с запаздыванием, полученной методом определяющих уравнений, можно заменить двумя разными временами запаздывания по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u(x, t - \tau) \implies \bar{u} = u(x, t - \tau_1), \\ \bar{v} &= v(x, t - \tau) \implies \bar{v} = v(x, t - \tau_2), \end{aligned} \quad (4.2.4.1)$$

где $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ — произвольные постоянные. При этом вид точного решения (4.2.1.3) не меняется, а в ОДУ с запаздыванием для определяющих функций $\psi_{1n}(t)$ и $\psi_{2n}(t)$ меняются только члены с запаздыванием по правилу:

$$\begin{aligned}\psi_{1n}(t - \tau) &\implies \psi_{1n}(t - \tau_1), \\ \psi_{2n}(t - \tau) &\implies \psi_{2n}(t - \tau_2).\end{aligned}\tag{4.2.4.2}$$

► **Пример 4.12.** В системе УрЧП (4.2.3.1) постоянное время запаздывания τ заменяем двумя разными временами запаздывания по правилу (4.2.4.1). В результате получим более сложную систему

$$\begin{aligned}u_t &= a_1(u^k u_x)_x + u f(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau_1), \\ v_t &= a_2(v^m v_x)_x + v g(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau_2).\end{aligned}\tag{4.2.4.3}$$

Вид точного решения системы (4.2.4.3), как и системы (4.2.3.1), дается формулами (4.2.3.2). В итоге приходим к определяющей системе уравнений, состоящей из двух первых ОДУ (4.2.3.3) для функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и следующей системе двух ОДУ с разными запаздываниями для функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$:

$$\begin{aligned}\psi'_1 &= C_1 \psi_1^{k+1} + \psi_1 f(\bar{\psi}_1/\psi_1, \bar{\psi}_2/\psi_2), \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t - \tau_1), \\ \psi'_2 &= C_2 \psi_2^{m+1} + \psi_2 g(\bar{\psi}_1/\psi_1, \bar{\psi}_2/\psi_2), \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t - \tau_2).\end{aligned}\tag{4.2.4.4}$$

Система (4.2.4.4) получена из двух последних ОДУ с запаздыванием (4.2.3.3) по правилу (4.2.4.2). ◀

Системы с переменными временами запаздывания. Пусть точные решения обоих определяющих уравнений удовлетворяют функциональным связям второго рода (4.2.1.4), где $q_1(t) \neq \text{const}$ и $q_2(t) \neq \text{const}$. Тогда общее постоянное время запаздывания τ в полученной системе УрЧП с запаздыванием можно заменить двумя разными временами запаздывания общего вида по схеме (4.2.4.1), где $\tau_1 = \tau_1(t)$ и $\tau_2 = \tau_2(t)$ — произвольные положительные функции. При этом вид точного решения (4.2.1.3) сохраняется, а в ОДУ с запаздыванием для определяющих функций $\psi_{1n}(t)$ и $\psi_{2n}(t)$ меняются только члены с запаздыванием по правилу (4.2.4.2), где $\tau_1 = \tau_1(t)$ и $\tau_2 = \tau_2(t)$.

► **Пример 4.13.** Точные решения определяющих уравнений, использованных для вывода системы (4.2.3.1), удовлетворяют функциональным связям второго рода. Поэтому постоянное время запаздывания τ в (4.2.3.1) можно заменить двумя разными временами запаздывания общего вида по схеме (4.2.4.1). В результате приходим к системе (4.2.4.3), в которой надо положить $\tau_1 = \tau_1(t)$ и $\tau_2 = \tau_2(t)$. В этом случае определяющая система уравнений состоит из двух первых ОДУ (4.2.3.3) и системы двух ОДУ с запаздыванием (4.2.4.4), где $\tau_1 = \tau_1(t)$ и $\tau_2 = \tau_2(t)$. ◀

Системы с любым числом пространственных переменных. Метод определяющих уравнений обобщается также на случай систем уравнений с любым числом пространственных переменных. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

► **Пример 4.14.** В качестве порождающих уравнений используем одно многомерное уравнение реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием (3.4.3.86) при $b = k = 0$, которое допускает решение с мультипликативным разделением переменных, удовлетворяющее функциональной связи второго рода. В результате приходим к нелинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием [457]:

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 \Delta u + u f(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \\ v_t &= a_2 \Delta v + v g(\bar{u}/u, \bar{v}/v), \end{aligned} \quad (4.2.4.5)$$

которая является многомерным обобщением системы (4.2.1.9). При записи системы (4.2.4.5) использованы обозначения:

$$\begin{aligned} u &= u(\mathbf{x}, t), \quad \bar{u} = u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad v = v(\mathbf{x}, t), \quad \bar{v} = v(\mathbf{x}, t - \tau), \\ \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_n), \quad \Delta \equiv \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}. \end{aligned}$$

Система (4.2.4.5) допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi_1(\mathbf{x})\psi_1(t), \quad v = \varphi_2(\mathbf{x})\psi_2(t), \quad (4.2.4.6)$$

которое является обобщением решения (4.2.1.13) одномерной системы (4.2.1.9).

Подставив (4.2.4.6) в систему (4.2.4.5), после разделения переменных получим два независимых линейных уравнения (уравнения Гельмгольца) для функций $\varphi_1(\mathbf{x})$ и $\varphi_2(\mathbf{x})$:

$$\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1, \quad \Delta \varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2,$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные постоянные, и систему связанных нелинейных ОДУ для функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$:

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) &= a_1 \lambda_1 \psi_1(t) + \psi_1(t) f(\psi_1(t - \tau)/\psi_1(t), \psi_2(t - \tau)/\psi_2(t)), \\ \psi_2'(t) &= a_2 \lambda_2 \psi_2(t) + \psi_2(t) g(\psi_1(t - \tau)/\psi_1(t), \psi_2(t - \tau)/\psi_2(t)). \end{aligned}$$

Отметим, что эта система допускает частные решения экспоненциального вида

$$\psi_1(t) = C_1 \exp(\beta_1 t), \quad \psi_2(t) = C_2 \exp(\beta_2 t).$$

Системы с любым числом уравнений и системы уравнений старших порядков. Метод определяющих уравнений распространяется на случай систем уравнений гиперболического типа, систем уравнений старших порядков, а также систем уравнений с любым числом уравнений. Соответствующие обобщения элементарны и поэтому здесь опускаются. Примеры построения систем уравнений старших порядков можно найти в [457].

4.3. Редукции и точные решения систем типа Лотки — Вольтерры и более сложных систем УрЧП с несколькими запаздываниями

4.3.1. Реакционно-диффузионные системы с несколькими запаздываниями. Система Лотки — Вольтерры

Предварительные замечания. В разд. 4.3.1 — 4.3.3 рассматривается нелинейная система, состоящая из двух реакционно-диффузионных уравнений достаточно общего вида, которые содержат три произвольные функции и несколько запаздываний. Эта система включает в себя, как важный частный случай, многопараметрическую диффузионную систему Лотки — Вольтерры с несколькими запаздываниями. Описаны различные редукции таких нелинейных систем к более простым системам: (i) к системе стационарных уравнений, (ii) к системе ОДУ с запаздыванием, (iii) к системе стационарных уравнений и линейному уравнению Шредингера, (iv) к системе ОДУ с запаздыванием и линейному уравнению теплопроводности. Получены точные решения нелинейной системы Лотки — Вольтерры с несколькими произвольными запаздываниями. Все эти решения относятся к решениям с обобщенным или неполным разделением переменных и содержат несколько свободных параметров. Описано также точное решение, которое содержит бесконечно много свободных параметров.

Рассматриваемая реакционно-диффузионная система УрЧП. Система Лотки — Вольтерры. Следуя [445], рассмотрим нелинейную реакционно-диффузионную систему уравнений с частными производными и несколькими постоянными запаздываниями

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 \Delta u + b_1 u + c_1 u f(k_1 \bar{u}_1 - k_2 \bar{v}_2) + g(k_1 \bar{u}_1 - k_2 \bar{v}_2), \\ v_t &= a_2 \Delta v + b_2 v + c_2 v f(k_1 \bar{u}_3 - k_2 \bar{v}_4) + h(k_1 \bar{u}_3 - k_2 \bar{v}_4), \end{aligned} \quad (4.3.1.1)$$

где $u = u(\mathbf{x}, t)$ и $v = v(\mathbf{x}, t)$ — искомые функции; t — время, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$; $\bar{u}_i = u(\mathbf{x}, t - \tau_i)$, $\bar{v}_j = v(\mathbf{x}, t - \tau_j)$ ($i = 1, 3$; $j = 2, 4$); $\tau_i \geq 0$ и $\tau_j \geq 0$ — времена запаздывания; $f = f(z)$ — произвольная монотонная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$, $g = g(z_1)$ и $h = h(z_2)$ — произвольные функции; $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1, b_2, k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ — свободные параметры; $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$ — константы, которые будут определены далее; $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — n -мерный оператор Лапласа.

► **Пример 4.15.** В случае одной пространственной переменной при $f(z_{1,2}) = z_{1,2}$, $g(z_1) = h(z_2) = 0$ реакционно-диффузионная система с запаздываниями (4.3.1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + u[b_1 + c_1(k_1 \bar{u}_1 - k_2 \bar{v}_2)], \\ v_t &= a_2 v_{xx} + v[b_2 + c_2(k_1 \bar{u}_3 - k_2 \bar{v}_4)] \end{aligned} \quad (4.3.1.2)$$

и является специальным случаем диффузионной системы УрЧП Лотки — Вольтерры с запаздываниями [291], которая описывает взаимодействие особей двух

видов. Исследованию устойчивости решений более простой системы с двумя запаздываниями (при $\tau_1 = \tau_4 = 0$) посвящены работы [178, 226].

При отсутствии запаздываний $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$ симметрии и точные решения системы (4.3.1.2) и родственных систем типа Лотки—Вольтерры рассматривались в [180, 181, 183] (см. также [447]). ◀

При $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2 = 0$ и отсутствии запаздываний $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$ некоторые редукции и точные решения системы (4.3.1.1) с одной пространственной переменной описаны в [447].

Основная идея, используемая далее для построения точных решений системы (4.3.1.1) состоит в том, что вид искомых величин u и v выбирается таким образом, чтобы аргументы функций $f(\dots)$, $g(\dots)$, $h(\dots)$ зависели только от x или только от t .

Простейшие решения (стационарные точки). Простейшими решениями системы (4.3.1.1) являются константы (стационарные точки):

$$u = u^\circ = \text{const}, \quad v = v^\circ = \text{const}, \quad (4.3.1.3)$$

которые определяются из нелинейной алгебраической системы

$$\begin{aligned} u^\circ [b_1 + c_1 f(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ)] + g(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ) &= 0, \\ v^\circ [b_2 + c_2 f(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ)] + h(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.1.4)$$

Система (4.3.1.4) обычно имеет несколько корней. В частности, при $g = h = 0$ она распадается на четыре независимых подсистемы, корни которых имеют свойства:

$$\begin{aligned} (a) \quad u^\circ = v^\circ = 0; \quad (b) \quad u^\circ \neq 0, \quad v^\circ = 0; \quad (c) \quad u^\circ = 0, \quad v^\circ \neq 0; \\ (d) \quad u^\circ = (k_2/k_1)v^\circ + \text{const}, \quad v^\circ - \text{любое, если } b_1/c_1 = b_2/c_2. \end{aligned} \quad (4.3.1.5)$$

► **Пример 4.16.** Для системы типа Лотки—Вольтерры (4.3.1.1) при $f(z) = z$, $g(z) = h(z) = 0$ решения соответствующей системы (4.3.1.4) имеют вид

$$\begin{aligned} (a) \quad u^\circ = v^\circ = 0; \quad (b) \quad u^\circ = -\frac{b_1}{c_1 k_1}, \quad v^\circ = 0; \quad (c) \quad u^\circ = 0, \quad v^\circ = \frac{b_2}{c_2 k_2}; \\ (d) \quad u^\circ = \frac{k_2}{k_1} v^\circ - \frac{b_1}{c_1 k_1}, \quad v^\circ - \text{любое, если } \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}. \end{aligned} \quad (4.3.1.6)$$

Далее стационарные точки (4.3.1.3) будут использованы для построения более сложных нестационарных пространственно неоднородных решений системы (4.3.1.1). ◀

4.3.2. Редукции и точные решения систем УрЧП с различными коэффициентами диффузии (случай $a_1 \neq a_2$)

Редукция системы УрЧП с тремя произвольными запаздываниями к уравнению Гельмгольца. Пусть в системе (4.3.1.1) четыре времени запаздывания

связаны одним соотношением

$$\tau_2 - \tau_1 = \tau_4 - \tau_3, \quad (4.3.2.1)$$

т. е. три любые из них могут быть заданы произвольно. Отметим, что соотношение (4.3.2.1) удовлетворяется, например, в следующих трех частных случаях:

$$\begin{aligned} \tau_2 = \tau_1, \quad \tau_4 = \tau_3, \quad \tau_1, \tau_3 &\text{ — произвольны;} \\ \tau_3 = \tau_1, \quad \tau_4 = \tau_2, \quad \tau_1, \tau_2 &\text{ — произвольны;} \\ \tau_m = m\tau, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad \tau &\text{ — произвольно.} \end{aligned}$$

Ищем точное решение с обобщенным разделением переменных системы (4.3.1.1) в виде

$$u = k_2 e^{\lambda(t+\tau_1)} \theta(\mathbf{x}) + u^\circ, \quad v = k_1 e^{\lambda(t+\tau_2)} \theta(\mathbf{x}) + v^\circ, \quad (4.3.2.2)$$

где u° и v° — стационарные точки (4.3.1.3) системы (4.3.1.1). На функцию $\theta = \theta(\mathbf{x})$ наложим дополнительное условие (линейную дифференциальную связь) в виде уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \theta = \mu \theta. \quad (4.3.2.3)$$

Константы λ и μ , входящие в (4.3.2.2) и (4.3.2.3), находятся далее в ходе исследования, а функция θ определяется из уравнения (4.3.2.3). О точных решениях этого уравнения с несколькими пространственными переменными см., например, [436].

► **Пример 4.17.** В одномерном случае имеем $\Delta \theta = \theta''_{xx}$ и общее решение линейного ОДУ (4.3.2.3) при $\mu \neq 0$ записывается так:

$$\theta(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{|\mu|} x) + C_2 \sin(\sqrt{|\mu|} x) & \text{при } \mu < 0, \\ C_1 \exp(-\sqrt{\mu} x) + C_2 \exp(\sqrt{\mu} x) & \text{при } \mu > 0, \end{cases} \quad (4.3.2.4)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ◀

Функции (4.3.2.2) выбраны таким образом, чтобы сложные аргументы функций f , g , h , входящих в рассматриваемую систему (4.3.1.1), стали постоянными величинами. Действительно, учитывая равенство (4.3.2.1), имеем

$$\begin{aligned} k_1 \bar{u}_1 - k_2 \bar{v}_2 &= k_1 u^\circ - k_2 v^\circ = \text{const}, \\ k_1 \bar{u}_3 - k_2 \bar{v}_4 &= k_1 u^\circ - k_2 v^\circ = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.3.2.5)$$

Подставим (4.3.2.2) в (4.3.1.1). Используя соотношения (4.3.1.4) и (4.3.2.5), а также уравнение (4.3.2.3), после элементарных преобразований получим линейную алгебраическую систему

$$\begin{aligned} \lambda &= a_1 \mu + b_1 + c_1 f(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ), \\ \lambda &= a_2 \mu + b_2 + c_2 f(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ), \end{aligned} \quad (4.3.2.6)$$

позволяющую определить параметры λ и μ . При $a_1 \neq a_2$ решение системы (4.3.2.6) имеет вид

$$\lambda = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2 + (a_2 c_1 - a_1 c_2) f^\circ}{a_2 - a_1}, \quad \mu = \frac{b_1 - b_2 + (c_1 - c_2) f^\circ}{a_2 - a_1}, \quad (4.3.2.7)$$

где $f^\circ = f(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ)$, а u° и v° — стационарные точки, удовлетворяющие алгебраической системе (4.3.1.4).

► **Пример 4.18.** В случае $g = h = 0$ для первых трех стационарных точек (4.3.1.5) коэффициенты (4.3.2.7) не зависят от вида кинетической функции f и определяются формулами

$$\begin{aligned} (a) \quad & \lambda = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}, \quad \mu = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}; \\ (b) \quad & \lambda = \frac{a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{c_1(a_2 - a_1)}, \quad \mu = \frac{\lambda}{a_1} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{c_1(a_2 - a_1)}; \\ (c) \quad & \lambda = \frac{a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{c_2(a_2 - a_1)}, \quad \mu = \frac{\lambda}{a_2} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{c_2(a_2 - a_1)}. \end{aligned} \quad (4.3.2.8)$$

В последнем случае (d) происходит вырождение параметров $\lambda = \mu = 0$, и соответствующие решения неинтересны.

Формулы (4.3.2.2), (4.3.2.4), (4.3.2.8) и первые три стационарные точки (4.3.1.5) определяют шесть (три для $\mu > 0$ и три для $\mu < 0$) невырожденных точных решений нелинейной системы (4.3.1.1) при $g = h = 0$, $a_1 \neq a_2$ с четырьмя постоянными запаздываниями, удовлетворяющими условию (4.3.2.1). Точные решения одномерной системы (4.3.1.1), соответствующие стационарной точке (b) в (4.3.1.5), получены в [445] и приведены ниже.

1°. Решение при $\mu = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{c_1(a_2 - a_1)} < 0$:

$$\begin{aligned} u &= k_2 e^{a_1 \mu(t + \tau_1)} [C_1 \cos(\sqrt{|\mu|} x) + C_2 \sin(\sqrt{|\mu|} x)] + u^\circ, \\ v &= k_1 e^{a_1 \mu(t + \tau_2)} [C_1 \cos(\sqrt{|\mu|} x) + C_2 \sin(\sqrt{|\mu|} x)], \end{aligned} \quad (4.3.2.9)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решение при $\mu = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{c_1(a_2 - a_1)} > 0$:

$$\begin{aligned} u &= k_2 e^{a_1 \mu(t + \tau_1)} [C_1 \exp(-\sqrt{\mu} x) + C_2 \exp(\sqrt{\mu} x)] + u^\circ, \\ v &= k_1 e^{a_1 \mu(t + \tau_2)} [C_1 \exp(-\sqrt{\mu} x) + C_2 \exp(\sqrt{\mu} x)]. \end{aligned} \quad (4.3.2.10)$$

Отметим, что для диффузионной системы типа Лотки — Вольтерры (4.3.1.2), определяемой функциями $f(z) = z$, $g = h = 0$, в формулах (4.3.2.9) и (4.3.2.10) следует положить $u^\circ = -b_1/(c_1 k_1)$. ◀

Замечание 4.11. Аналогичным образом можно рассмотреть более общую, чем (4.3.1.1), реакционно-диффузионную систему УрЧП с несколькими запаздываниями

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 \Delta u + b_1 u + u f_1(k_1 \bar{u}_1 - k_2 \bar{v}_2) + g(k_1 \bar{u}_1 - k_2 \bar{v}_2), \\ v_t &= a_2 \Delta v + b_2 v + v f_2(k_1 \bar{u}_3 - k_2 \bar{v}_4) + h(k_1 \bar{u}_3 - k_2 \bar{v}_4), \end{aligned} \quad (4.3.2.11)$$

где $f_1 = f_1(z_1)$ и $f_2 = f_2(z_2)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию $f_1(0) = f_2(0) = 0$; а остальные обозначения введены как в системе (4.3.1.1).

Пусть в системе (4.3.2.11) четыре времени запаздывания связаны одним соотношением (4.3.2.1). Точное решение системы УрЧП (4.3.2.11), как и ранее, ищем в виде (4.3.2.2), где функция $\theta = \theta(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (4.3.2.3). Можно показать, что параметры λ и μ , входящие в решение (4.3.2.2) и линейное УрЧП (4.3.2.3), при $a_1 \neq a_2$ имеют вид

$$\lambda = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_2 f_1^\circ - a_1 f_2^\circ}{a_2 - a_1}, \quad \mu = \frac{b_1 - b_2 + f_1^\circ - f_2^\circ}{a_2 - a_1}, \quad (4.3.2.12)$$

где $f_1^\circ = f_1(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ)$ и $f_2^\circ = f_2(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ)$, а u° и v° – стационарные точки, удовлетворяющие алгебраической системе

$$\begin{aligned} u^\circ [b_1 + f_1(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ)] + g(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ) &= 0, \\ v^\circ [b_2 + f_2(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ)] + h(k_1 u^\circ - k_2 v^\circ) &= 0. \end{aligned}$$

Две редукции системы УрЧП с тремя произвольными запаздываниями к стационарной системе. Будем считать, что в системе (4.3.1.1) четыре времени запаздывания связаны одним соотношением (4.3.2.1).

1°. Решения с обобщенным разделением переменных экспоненциального вида по t . Точное решение с обобщенным разделением переменных системы (4.3.1.1) ищем в виде [445]:

$$u = k_2 e^{\lambda(t+\tau_1)} \theta(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}), \quad v = k_1 e^{\lambda(t+\tau_2)} \theta(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}), \quad (4.3.2.13)$$

где функции $\theta = \theta(\mathbf{x})$, $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$, $\psi = \psi(\mathbf{x})$ и параметр λ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Функции (4.3.2.13) выбраны таким образом, чтобы сложные аргументы функций f , g , h системы (4.3.1.1) зависели только от \mathbf{x} . Действительно, учитывая соотношение (4.3.2.1), имеем

$$\begin{aligned} k_1 \bar{u}_1 - k_2 \bar{v}_2 &= k_1 \varphi(\mathbf{x}) - k_2 \psi(\mathbf{x}), \\ k_1 \bar{u}_3 - k_2 \bar{v}_4 &= k_1 \varphi(\mathbf{x}) - k_2 \psi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.3.2.14)$$

Подставив (4.3.2.13) в (4.3.1.1), с учетом (4.3.2.14) получим соотношения

$$\begin{aligned} k_2 e^{\lambda(t+\tau_1)} [a_1 \Delta \theta + (b_1 - \lambda + c_1 \hat{f}) \theta] + a_1 \Delta \varphi + (b_1 + c_1 \hat{f}) \varphi + \hat{g} &= 0, \\ k_1 e^{\lambda(t+\tau_2)} [a_2 \Delta \theta + (b_2 - \lambda + c_2 \hat{f}) \theta] + a_2 \Delta \psi + (b_2 + c_2 \hat{f}) \psi + \hat{h} &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.2.15)$$

где использованы краткие обозначения $\hat{f} = f(k_1 \varphi - k_2 \psi)$, $\hat{g} = g(k_1 \varphi - k_2 \psi)$, $\hat{h} = h(k_1 \varphi - k_2 \psi)$.

Соотношениям (4.3.2.15) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{aligned} a_1 \Delta \varphi + (b_1 + c_1 \hat{f}) \varphi + \hat{g} &= 0, \\ a_2 \Delta \psi + (b_2 + c_2 \hat{f}) \psi + \hat{h} &= 0, \\ a_1 \Delta \theta + (b_1 - \lambda + c_1 \hat{f}) \theta &= 0, \\ a_2 \Delta \theta + (b_2 - \lambda + c_2 \hat{f}) \theta &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.2.16)$$

Два первых уравнения (4.3.2.16) образуют замкнутую систему уравнений для определения функций φ и ψ , а последние два уравнения (4.3.2.16) являются переопределенной системой для одной функции θ . Потребовав, чтобы последние два уравнения системы (4.3.2.16) совпали, находим параметр λ и другие константы:

$$\lambda = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}, \quad c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2 \quad (a_1 \neq a_2). \quad (4.3.2.17)$$

Здесь при выборе значений c_1 и c_2 учтено, что функция f определена с точностью до постоянного множителя.

Подставив (4.3.2.17) в (4.3.2.16), приходим к системе стационарных УрЧП

$$\begin{aligned} a_1 \Delta \varphi + (b_1 + a_1 \hat{f}) \varphi + \hat{g} &= 0, \\ a_2 \Delta \psi + (b_2 + a_2 \hat{f}) \psi + \hat{h} &= 0, \\ \Delta \theta + \left(\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} + \hat{f} \right) \theta &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.2.18)$$

где $\hat{f} = f(k_1 \varphi - k_2 \psi)$, $\hat{g} = g(k_1 \varphi - k_2 \psi)$, $\hat{h} = h(k_1 \varphi - k_2 \psi)$.

При $\hat{g} = 0$ (или $\hat{h} = 0$) система (4.3.2.18) значительно упрощается, так как функцию φ (или ψ) можно положить равной нулю; в этих случаях остаются только два уравнения.

Замечание 4.12. Определяющая система стационарных УрЧП (4.3.2.18) не зависит от запаздываний. Поэтому решения вида (4.3.2.13) нестационарных систем УрЧП (4.3.1.1) и (4.3.1.2) при отсутствии запаздываний ($\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$) порождают точные решения более сложных систем УрЧП (4.3.1.1) и (4.3.1.2) с несколькими запаздываниями, удовлетворяющими условию (4.3.2.1). Учитывая данное обстоятельство, можно построить ряд точных решений одномерной системы Лотки – Вольтерры с запаздываниями (4.3.1.2), используя полученные в [181, 183] точные решения этой же системы без запаздываний.

2°. Решения с обобщенным разделением переменных линейные по t . Система (4.3.1.1) с четырьмя запаздываниями, удовлетворяющими одному соотношению (4.3.2.1), допускают также точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = k_2(t + \tau_1)\theta(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}), \quad v = k_1(t + \tau_2)\theta(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}). \quad (4.3.2.19)$$

Анализ, который проводится аналогично тому, как это делалось ранее, позволяет найти параметры уравнений (4.3.1.1):

$$b_1 = \sigma a_1, \quad b_2 = \sigma a_2, \quad c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2, \quad (4.3.2.20)$$

где σ – произвольная постоянная. В этом случае функции $\theta = \theta(\mathbf{x})$, $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$, $\psi = \psi(\mathbf{x})$ описываются следующей стационарной системой уравнений:

$$\begin{aligned} a_1[\Delta \varphi + (\sigma + \hat{f})\varphi] + \hat{g} - k_2 \theta &= 0, \\ a_2[\Delta \psi + (\sigma + \hat{f})\psi] + \hat{h} - k_1 \theta &= 0, \\ \Delta \theta + (\sigma + \hat{f})\theta &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.2.21)$$

где $\hat{f} = f(k_1 \varphi - k_2 \psi)$, $\hat{g} = g(k_1 \varphi - k_2 \psi)$, $\hat{h} = h(k_1 \varphi - k_2 \psi)$.

Редукция системы УрЧП с одним запаздыванием к нестационарной системе ОДУ с запаздыванием. Пусть в системе (4.3.1.1) все четыре времени запаздывания одинаковы

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau. \quad (4.3.2.22)$$

Точное решение с обобщенным разделением переменных системы (4.3.1.1) при условии (4.3.2.22) в ищем виде [445]:

$$u = k_2 \xi(t) \theta(\mathbf{x}) + \varphi(t), \quad v = k_1 \xi(t) \theta(\mathbf{x}) + \psi(t), \quad (4.3.2.23)$$

где функции $\theta = \theta(\mathbf{x})$, $\xi = \xi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Функции (4.3.2.23) выбраны таким образом, чтобы сложные аргументы функций f , g , h , входящих в рассматриваемую систему (4.3.1.1), стали зависеть только от t . На функцию $\theta = \theta(\mathbf{x})$ наложим дополнительное условие (линейную дифференциальную связь):

$$\Delta \theta = \mu \theta + \varepsilon, \quad (4.3.2.24)$$

где константы μ и ε находятся далее в ходе исследования.

Важно отметить, что в невырожденном случае при $\mu \neq 0$ в (4.3.2.24) без ограничения общности можно положить $\varepsilon = 0$, т. к. сдвиг θ на константу в силу представления (4.3.2.23) приводит лишь к переопределению функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. В одномерном случае при $\varepsilon = 0$ общее решение уравнения (4.3.2.24) определяется формулами (4.3.2.4).

Подставив (4.3.2.23) в (4.3.1.1), с учетом (4.3.2.24) получим соотношения

$$\begin{aligned} k_2[(a_1\mu + b_1 + c_1\bar{f})\xi - \xi'_t]\theta + a_1k_2\varepsilon\xi + b_1\varphi + c_1\varphi\bar{f} + \bar{g} - \varphi'_t &= 0, \\ k_1[(a_2\mu + b_2 + c_2\bar{f})\xi - \xi'_t]\theta + a_2k_1\varepsilon\xi + b_2\psi + c_2\psi\bar{f} + \bar{h} - \psi'_t &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.2.25)$$

где использованы краткие обозначения $\bar{f} = f(k_1\bar{\varphi} - k_2\bar{\psi})$, $\bar{g} = g(k_1\bar{\varphi} - k_2\bar{\psi})$, $\bar{h} = h(k_1\bar{\varphi} - k_2\bar{\psi})$, $\bar{\varphi} = \varphi(t - \tau)$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau)$.

Соотношениям (4.3.2.25) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= a_1k_2\varepsilon\xi + b_1\varphi + c_1\varphi\bar{f} + \bar{g}, \\ \psi'_t &= a_2k_1\varepsilon\xi + b_2\psi + c_2\psi\bar{f} + \bar{h}, \\ \xi'_t &= (a_1\mu + b_1 + c_1\bar{f})\xi, \\ \xi'_t &= (a_2\mu + b_2 + c_2\bar{f})\xi. \end{aligned} \quad (4.3.2.26)$$

Система ОДУ (4.3.2.26) является переопределенной, поскольку состоит из четырех уравнений для трех функций ξ , φ , ψ . Потребовав, чтобы последние два уравнения системы (4.3.2.26) совпали, находим параметр μ и другие константы:

$$\mu = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}, \quad c_1 = c_2 = 1 \quad (a_1 \neq a_2). \quad (4.3.2.27)$$

Здесь при выборе значений c_1 и c_2 учтено, что функция f определена с точностью до постоянного множителя.

При $b_1 \neq b_2$ из (4.3.2.27) получим $\mu \neq 0$ и, следовательно, в уравнениях (4.3.2.24) и (4.3.2.26) можно положить $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ первые два уравнения (4.3.2.26) не зависят от функции $\xi = \xi(t)$ и образуют замкнутую нелинейную систему ОДУ первого порядка с запаздыванием для функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\begin{aligned}\varphi'_t &= b_1\varphi + \varphi f(k_1\bar{\varphi} - k_2\bar{\psi}) + g(k_1\bar{\varphi} - k_2\bar{\psi}), \\ \psi'_t &= b_2\psi + \psi f(k_1\bar{\varphi} - k_2\bar{\psi}) + h(k_1\bar{\varphi} - k_2\bar{\psi}),\end{aligned}\quad (4.3.2.28)$$

где $\bar{\varphi} = \varphi(t - \tau)$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau)$. Интегрируя последнее уравнение (4.3.2.26), с учетом соотношений (4.3.2.27) находим, что функция $\xi = \xi(t)$ следующим образом выражается через функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\xi = A \exp \left[\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1} t + \int f(k_1\bar{\varphi} - k_2\bar{\psi}) dt \right], \quad (4.3.2.29)$$

где A — произвольная постоянная.

Отметим, что в случаях $g = 0$ или $h = 0$ система ОДУ с запаздыванием (4.3.2.28) допускает соответствующие однокомпонентные решения вида $\varphi = 0$, $\psi = \psi(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = 0$. При отсутствии запаздывания эти решения для любых пар функций f, h или f, g можно представить в неявной форме (т. к. они описываются ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными).

Нетрудно показать, что при $g = h = 0$ система ОДУ с запаздыванием (4.3.2.28) для произвольной функции $f(z)$ допускает первый интеграл

$$\psi = C_3 e^{(b_2 - b_1)t} \varphi, \quad (4.3.2.30)$$

где C_3 — произвольная постоянная. В этом случае система (4.3.2.28) сводится к одному уравнению

$$\varphi'_t = b_1\varphi + \varphi f((k_1 - k_2 C_3 e^{(b_2 - b_1)(t - \tau)})\bar{\varphi}), \quad \bar{\varphi} = \varphi(t - \tau). \quad (4.3.2.31)$$

► **Пример 4.19.** Для системы УрЧП типа Лотки — Вольтерры без запаздывания (4.3.1.1) при $\tau = 0$ и $f(z) = z$, $g = h = 0$ соответствующее ОДУ (4.3.2.31) является уравнением Бернулли, интегрируя которое с учетом (4.3.2.30) получим точное решение системы ОДУ (4.3.2.28):

$$\begin{aligned}\varphi &= \left[\frac{C_3 k_2}{b_2} e^{(b_2 - b_1)t} + C_4 e^{-b_1 t} - \frac{k_1}{b_1} \right]^{-1}, \\ \psi &= C_3 e^{(b_2 - b_1)t} \left[\frac{C_3 k_2}{b_2} e^{(b_2 - b_1)t} + C_4 e^{-b_1 t} - \frac{k_1}{b_1} \right]^{-1},\end{aligned}\quad (4.3.2.32)$$

где C_4 — произвольная постоянная. Соответствующая этому решению функция $\xi(t)$ определяется по формуле (4.3.2.29) при $\tau = 0$ и $f(z) = z$. Эту функцию можно выразить через элементарные функции, например, в следующих случаях:

$$b_1 = 0; \quad b_2 = 0; \quad b_1 = b_2; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = 0.$$

В частности, полагая $\tau = 0$ и $C_3 = 0$ в (4.3.2.29) и (4.3.2.32), находим

$$\varphi = \frac{b_1 e^{b_1 t}}{b_1 C_4 - k_1 e^{b_1 t}}, \quad \psi = 0, \quad \xi = \frac{A}{b_1 C_4 - k_1 e^{b_1 t}} \exp\left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1} t\right). \quad (4.3.2.33)$$

Формулы (4.3.2.4), (4.3.2.23), (4.3.2.27), (4.3.2.33) описывают точное решение одномерной системы УрЧП типа Лотки—Вольтерры (4.3.1.1) без запаздывания.

Аналогично при $b_1 = b_2 = b$ и $\tau = 0$ имеем

$$\varphi = \frac{b e^{bt}}{C_4 b + (C_3 k_2 - k_1) e^{bt}}, \quad \psi = \frac{b C_3 e^{bt}}{C_4 b + (C_3 k_2 - k_1) e^{bt}}, \quad \xi = \frac{A}{b} \varphi. \quad (4.3.2.34)$$

В общем случае в ОДУ с запаздыванием (4.3.2.31) функция φ должна быть задана на интервале $[-\tau, 0]$:

$$\varphi = \varphi_0(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (4.3.2.35)$$

Решение задачи типа Коши для уравнения (4.3.2.31) с начальными данными (4.3.2.35) можно получить методом шагов (см. разд. 1.1.5 и [8, 94]). Для этого разобьем время t на отрезки длины τ и обозначим

$$\varphi(t) = \varphi_m(t) \quad \text{при} \quad t_{m-1} \leq t \leq t_m, \quad (4.3.2.36)$$

где $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Проинтегрировав далее уравнение (4.3.2.31) от t_{m-1} до t на отрезке $[t_{m-1}, t_m]$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_m(t) &= \varphi_m^\circ \exp\left[b_1(t - t_{m-1}) + \int_{t_{m-1}}^t f((k_1 - k_2 C_3) e^{(b_2 - b_1)(t - \tau)}) \varphi_{m-1}(t) dt\right], \\ \varphi_m^\circ &= \varphi_m(t_{m-1}) = \varphi_{m-1}(t_m). \end{aligned} \quad (4.3.2.37)$$

В левой части формулы (4.3.2.37) стоит функция $\varphi_m(t)$, которая ищется на отрезке $[t_{m-1}, t_m]$, а в правой части — функция $\varphi_{m-1}(t)$, которая определена на предыдущем отрезке $[t_{m-2}, t_{m-1}]$. Вычисления проводятся последовательно, начиная с $m = 1$, когда в правую часть подставляется известная функция, заданная на начальном участке (4.3.2.35). Таким образом находится $\varphi_1(t)$. Затем полагают $m = 2$ и функция $\varphi_2(t)$ выражается с помощью (4.3.2.37) через уже известную функцию $\varphi_1(t)$. Аналогичным образом процедура вычислений продолжается далее.

При $\varepsilon \neq 0$ для определения функций $\xi = \xi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ надо решить нелинейную систему, состоящую из уравнений (4.3.2.26) при $b_1 = b_2 = b$, $c_1 = c_2 = 1$, $\mu = 0$ (в этом случае последние два уравнения совпадают).

4.3.3. Редукции и точные решения систем УрЧП с одинаковыми коэффициентами диффузии (случай $a_1 = a_2$)

Редукция системы УрЧП с тремя произвольными запаздыванием к стационарной системе УрЧП и линейному уравнению Шредингера. Будем

считать, что в системе (4.3.1.1) четыре времени запаздывания связаны одним соотношением (4.3.2.1).

При $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $c_1 = c_2 = 1$ решение системы (4.3.1.1) ищем в виде

$$u = k_2 e^{\lambda(t+\tau_1)} \theta(\mathbf{x}, t) + \varphi(\mathbf{x}), \quad v = k_1 e^{\lambda(t+\tau_2)} \theta(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}), \quad (4.3.3.1)$$

где λ — свободный параметр, а функции $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$, $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$, $\psi = \psi(\mathbf{x})$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Решения вида (4.3.3.1), в которых функция θ зависит от всех аргументов, а параметр λ произвольный, являются принципиальным обобщением решений вида (4.3.2.13), где функция θ не зависит от времени t , а параметр λ выражается через постоянные рассматриваемой системы.

На функцию $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ накладываем дополнительное условие периодичности:

$$\theta(\mathbf{x}, t + \tau_2 - \tau_1) = \theta(\mathbf{x}, t). \quad (4.3.3.2)$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условий (4.3.2.1) и (4.3.3.2) остаются справедливыми соотношения (4.3.2.14). Учитывая сказанное и подставляя (4.3.3.1) в (4.3.1.1), для функций φ и ψ получим замкнутую систему, состоящую из двух стационарных уравнений

$$\begin{aligned} a\Delta\varphi + [b + f(k_1\varphi - k_2\psi)]\varphi + g(k_1\varphi - k_2\psi) &= 0, \\ a\Delta\psi + [b + f(k_1\varphi - k_2\psi)]\psi + h(k_1\varphi - k_2\psi) &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.3.3)$$

а функция $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ описывается линейным уравнением Шредингера

$$\theta_t = a\Delta\theta + (b - \lambda + \hat{f})\theta, \quad \hat{f} = f(k_1\varphi - k_2\psi), \quad (4.3.3.4)$$

с периодическим условием (4.3.3.2). Важно отметить, что функция \hat{f} зависит только от пространственных координат.

Отметим два важных случая, когда условие периодичности (4.3.3.2) удовлетворяется автоматически.

1°. Условию (4.3.3.2) можно удовлетворить, если искать стационарное решение $\theta = \theta(\mathbf{x})$ уравнения (4.3.3.4).

2°. Условие (4.3.3.2) удовлетворяется, если $\tau_2 = \tau_1$ и $\tau_3 = \tau_4$ (в этом случае соотношение (4.3.2.1) удовлетворяется автоматически).

► **Пример 4.20.** В случае 2° в качестве φ и ψ можно взять любое простейшее решение вида (4.3.1.3), которое удовлетворяет алгебраической системе (4.3.1.4) при $b_1 = b_2 = b$, $c_1 = c_2 = 1$. В этом случае уравнение (4.3.3.4) подстановкой

$$\theta = \exp[(b - \lambda + f^\circ)t]\zeta, \quad f^\circ = f(k_1\varphi^\circ - k_2\psi^\circ), \quad (4.3.3.5)$$

сводится к стандартному линейному уравнению теплопроводности

$$\zeta_t = a \Delta \zeta, \quad (4.3.3.6)$$

о точных решениях которого см., например, [436]. ◀

При $\tau_1 \neq \tau_2$ точные решения уравнения (4.3.3.4), удовлетворяющие условию периодичности (4.3.3.2), ищутся в виде

$$\theta_m(\mathbf{x}, t) = \xi_m(\mathbf{x}) \cos(\beta_m t) + \eta_m(\mathbf{x}) \sin(\beta_m t), \quad \beta_m = \frac{2\pi m}{\tau_2 - \tau_1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3.3.7)$$

где значению $m = 0$ соответствует стационарное решение. Подставив (4.3.3.7) в (4.3.3.4), приходим к следующей линейной стационарной системе УрЧП для функций $\xi_m = \xi_m(\mathbf{x})$, $\eta_m = \eta_m(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} a\Delta\xi_m + [b - \lambda + f(k_1\varphi - k_2\psi)]\xi_m - \beta_m\eta_m &= 0, \\ a\Delta\eta_m + [b - \lambda + f(k_1\varphi - k_2\psi)]\eta_m + \beta_m\xi_m &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.3.8)$$

Поскольку уравнение (4.3.3.4) линейно относительно θ , произвольная линейная комбинация точных решений вида (4.3.3.7), а именно

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \theta_m(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m [\xi_m(\mathbf{x}) \cos(\beta_m t) + \eta_m(\mathbf{x}) \sin(\beta_m t)],$$

где α_m — произвольные постоянные, также является точным решением этого уравнения.

Если в качестве φ и ψ взять любое простейшее решение (4.3.1.3), которое удовлетворяет алгебраической системе (4.3.1.4) при $b_1 = b_2 = b$ и $c_1 = c_2 = 1$, то система (4.3.3.8) является системой с постоянными коэффициентами, ее точные решения ищутся в виде линейной комбинации экспонент.

► **Пример 4.21.** В одномерном случае для любого простейшего решения (4.3.1.3) общее решение уравнения (4.3.3.4), удовлетворяющее периодическому условию (4.3.3.2), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\mu_m x) [A_m \cos(\beta_m t - \gamma_m x) + B_m \sin(\beta_m t - \gamma_m x)] + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \exp(\mu_m x) [C_m \cos(\beta_m t + \gamma_m x) + D_m \sin(\beta_m t + \gamma_m x)], \end{aligned} \quad (4.3.3.9)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \mu_m &= \left(\frac{\sqrt{d^2 + \beta_m^2} - d}{2a} \right)^{1/2}, \quad \gamma_m = \left(\frac{\sqrt{d^2 + \beta_m^2} + d}{2a} \right)^{1/2}, \\ d &= b - \lambda + f(k_1\varphi^\circ - k_2\psi^\circ), \quad \beta_m = \frac{2\pi m}{\tau_2 - \tau_1}, \end{aligned}$$

и A_m, B_m, C_m, D_m — произвольные постоянные, для которых ряды (4.3.3.9) и соответствующие производные θ_t и θ_{xx} сходятся (сходимость, например, заведомо можно обеспечить, если положить $A_m = B_m = C_m = D_m = 0$ при $m > M$, где M — произвольное натуральное число).

Выделим следующие два частных случая:

(i) периодические по времени решения, затухающие при $x \rightarrow \infty$, даются формулами (4.3.3.9) при $A_0 = B_0 = 0$, $C_m = D_m = 0$, $m = 1, 2, \dots$;

(ii) периодические по времени решения, ограниченные при $x \rightarrow \infty$, даются формулами (4.3.3.9) при $C_m = D_m = 0$, $m = 1, 2, \dots$ ◀

Редукция системы УрЧП с одним запаздыванием к нестационарной системе ОДУ и линейному уравнению теплопроводности. Точные решения с неполным разделением переменных системы (4.3.1.1) при $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $c_1 = c_2 = 1$ с одним общим временем запаздывания (4.3.2.22) ищем в виде

$$u = k_2 \theta(\mathbf{x}, t) + \varphi(t), \quad v = k_1 \theta(\mathbf{x}, t) + \psi(t), \quad (4.3.3.10)$$

где функции $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. Функции (4.3.3.10) выбраны таким образом, чтобы сложные аргументы функций f , g , h зависели только от t .

Подставив (4.3.3.10) в систему УрЧП (4.3.1.1), приходим к нелинейной системе ОДУ первого порядка с запаздыванием для функций φ и ψ :

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= b\varphi + \varphi f(k_1 \bar{\varphi} - k_2 \bar{\psi}) + g(k_1 \bar{\varphi} - k_2 \bar{\psi}), & \bar{\varphi} &= \varphi(t - \tau), \\ \psi'_t &= b\psi + \psi f(k_1 \bar{\varphi} - k_2 \bar{\psi}) + h(k_1 \bar{\varphi} - k_2 \bar{\psi}), & \bar{\psi} &= \psi(t - \tau), \end{aligned} \quad (4.3.3.11)$$

и к линейному УрЧП параболического типа с переменными коэффициентами для функции θ :

$$\theta_t = a \Delta \theta + [b + f(k_1 \bar{\varphi} - k_2 \bar{\psi})] \theta. \quad (4.3.3.12)$$

Система ОДУ с запаздыванием (4.3.3.11) совпадает с системой (4.3.2.28) при $b_1 = b_2 = b$, процедура ее интегрирования и некоторые ее точные решения описаны в разд. 4.3.2. Уравнение (4.3.3.12) с помощью подстановки

$$\theta = \exp \left[bt + \int f(k_1 \bar{\varphi}_1 - k_2 \bar{\psi}_1) dt \right] \xi(\mathbf{x}, t) \quad (4.3.3.13)$$

сводится к стандартному уравнению теплопроводности

$$\xi_t = a \Delta \xi, \quad (4.3.3.14)$$

точные решения которого можно найти, например, в [436].

4.3.4. Системы УрЧП с запаздываниями, однородные относительно искомых функций

В данном разделе описаны некоторые точные решения двух нелинейных однородных систем УрЧП с двумя запаздываниями, которые не меняются при преобразованиях вида $u = C_1 U$, $v = C_1 V$, $x = X + C_2$, $t = T + C_3$, где C_1 , C_2 , C_3 — произвольные постоянные.

Система 1. Рассмотрим реакционно-диффузионную систему уравнений с двумя запаздываниями

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + uf(u/v, \bar{u}_1/u, \bar{v}_2/v), \\ v_t &= bv_{xx} + vg(u/v, \bar{u}_1/u, \bar{v}_2/v), \end{aligned} \quad (4.3.4.1)$$

где $f(z, z_1, z_2)$ и $g(z, z_1, z_2)$ — произвольные функции, $\bar{u}_1 = u(x, t - \tau_1)$ и $\bar{v}_2 = v(x, t - \tau_2)$.

В специальном случае $f(z, 1, 1) = k_1 - k_2 z^{-1}$ и $g(z, 1, 1) = k_2 - k_1 z$ при отсутствии запаздываний $\tau_1 = \tau_2 = 0$ система (4.3.4.1) описывает двухкомпонентную диффузию, осложненную обратимой химической реакцией первого порядка [204]. Модель Эйгена — Шустера, описывающая конкурентную борьбу популяций за питательный субстрат при постоянных коэффициентах размножения, переменной численности популяций и отсутствии запаздывания, приводит к данной системе при $f(z, 1, 1) = \frac{kz}{z+1}$ и $g(z, 1, 1) = -\frac{k}{z+1}$, где k — разность коэффициентов размножения [219] (см. также [73], с. 31, 32).

Ниже описаны некоторые точные решения нелинейной системы УрЧП (4.3.4.1).

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$\begin{aligned} u &= [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\varphi(t), \\ v &= [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\psi(t), \end{aligned} \quad (4.3.4.2)$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка с запаздываниями

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= -ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi, \bar{\varphi}_1/\varphi, \bar{\psi}_2/\psi), \\ \psi'_t &= -bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi, \bar{\varphi}_1/\varphi, \bar{\psi}_2/\psi). \end{aligned} \quad (4.3.4.3)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\bar{\varphi}_1 = \varphi(t - \tau_1)$, $\bar{\psi}_2 = \psi(t - \tau_2)$.

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$\begin{aligned} u &= [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]\varphi(t), \\ v &= [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]\psi(t), \end{aligned} \quad (4.3.4.4)$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка с запаздываниями

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi, \bar{\varphi}_1/\varphi, \bar{\psi}_2/\psi), \\ \psi'_t &= bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi, \bar{\varphi}_1/\varphi, \bar{\psi}_2/\psi). \end{aligned} \quad (4.3.4.5)$$

Замечание 4.13. Системы ОДУ с запаздыванием (4.3.4.3) и (4.3.4.5) допускают точные решения экспоненциального вида

$$\varphi(t) = Ae^{-\lambda t}, \quad \psi(t) = Be^{-\lambda t}, \quad (4.3.4.6)$$

где λ — произвольная постоянная. Константы A и B определяются из алгебраических (трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned}\pm ak^2 + \lambda + f(A/B, e^{\lambda\tau_1}, e^{\lambda\tau_2}) &= 0, \\ \pm bk^2 + \lambda + g(A/B, e^{\lambda\tau_1}, e^{\lambda\tau_2}) &= 0,\end{aligned}$$

где нижний знак соответствует системе (4.3.4.3), а верхний знак — системе (4.3.4.5).

3°. Имеется также вырожденное решение вида

$$u = (C_1x + C_2)\varphi(t), \quad v = (C_1x + C_2)\psi(t).$$

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda t}y(x), \quad v = e^{-\lambda t}z(x), \quad (4.3.4.7)$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned}ay''_{xx} + \lambda y + yf(y/z, e^{\lambda\tau_1}, e^{\lambda\tau_2}) &= 0, \\ bz''_{xx} + \lambda z + zg(y/z, e^{\lambda\tau_1}, e^{\lambda\tau_2}) &= 0.\end{aligned}$$

5°. Имеется также решение вида

$$u = e^{-\lambda t}y(\xi), \quad v = e^{-\lambda t}z(\xi), \quad \xi = x + kt,$$

где k — произвольная постоянная, которое обобщает решение из п. 4°.

Система 2. Рассмотрим реакционно-диффузионную систему уравнений с двумя запаздываниями

$$\begin{aligned}u_t &= au_{xx} + uf(u/v, \bar{u}_1/\bar{v}_1, \bar{u}_2/\bar{v}_2), \\ v_t &= av_{xx} + vg(u/v, \bar{u}_1/\bar{v}_1, \bar{u}_2/\bar{v}_2),\end{aligned} \quad (4.3.4.8)$$

где $\bar{u}_1 = u(x, t - \tau_1)$, $\bar{u}_2 = u(x, t - \tau_2)$, $\bar{v}_1 = v(x, t - \tau_1)$, $\bar{v}_2 = v(x, t - \tau_2)$.

1°. Система УрЧП с запаздываниями (4.3.4.8) допускает три группы точных решений с мультипликативным разделением переменных, которые имеют вид (4.3.4.2), (4.3.4.4), (4.3.4.7) (подробности опускаются).

2°. Точное решение с неполным разделением переменных:

$$u = \varphi(t)\theta(x, t), \quad v = \psi(t)\theta(x, t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка с запаздываниями

$$\begin{aligned}\varphi'_t &= \varphi f(\varphi/\psi, \bar{\varphi}_1/\bar{\psi}_1, \bar{\varphi}_2/\bar{\psi}_2), \quad \psi'_t = \psi g(\varphi/\psi, \bar{\varphi}_1/\bar{\psi}_1, \bar{\varphi}_2/\bar{\psi}_2), \\ \bar{\varphi}_j &= \varphi(t - \tau_j), \quad \bar{\psi}_j = \psi(t - \tau_j), \quad j = 1, 2,\end{aligned} \quad (4.3.4.9)$$

а функция $\theta = \theta(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = a\theta_{xx}. \quad (4.3.4.10)$$

Отметим, что система ОДУ с запаздываниями (4.3.4.9) допускает точное решение экспоненциального вида (4.3.4.6).

В общем случае систему (4.3.4.9) подстановкой $\varphi = \omega\psi$ можно свести к одному уравнению для функции $\omega = \omega(t)$:

$$\omega'_t = \omega[f(\omega, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) - g(\omega, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)], \quad (4.3.4.11)$$

где $\bar{\omega}_1 = \omega(t - \tau_1)$, $\bar{\omega}_2 = \omega(t - \tau_2)$. После определения ω функции φ и ψ находятся так:

$$\varphi = \omega\psi, \quad \psi = C \exp \left[\int g(\omega, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) dt \right],$$

где C — произвольная постоянная. Уравнение (4.3.4.11) интегрируется в элементарных функциях, например, в случае

$$f(\omega, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = b_1 \omega^k + c_1 + h(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2), \quad g(\omega, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = b_2 \omega^k + c_2 + h(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2),$$

где $h(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ — произвольная функция, а b_1, b_2, c_1, c_2, k — произвольные постоянные.

3°. Точное решение с неполным разделением переменных при $g(z, z_1, z_2) = -z^2 f(z, z_1, z_2)$:

$$u = \theta(x, t) \sin \varphi(t), \quad v = \theta(x, t) \cos \varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка с запаздываниями

$$\varphi'_t = f(\operatorname{tg} \varphi, \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1, \operatorname{tg} \bar{\varphi}_2) \operatorname{tg} \varphi, \quad \bar{\varphi}_1 = \varphi(t - \tau_1), \quad \bar{\varphi}_2 = \varphi(t - \tau_2),$$

а функция $\theta = \theta(x, t)$ описывается линейным уравнением теплопроводности (4.3.4.10).

4°. Точное решение с неполным разделением переменных при $g(z, z_1, z_2) = z^2 f(z, z_1, z_2)$:

$$u = \theta(x, t) \operatorname{sh} \varphi(t), \quad v = \theta(x, t) \operatorname{ch} \varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка с запаздываниями

$$\varphi'_t = f(\operatorname{th} \varphi, \operatorname{th} \bar{\varphi}_1, \operatorname{th} \bar{\varphi}_2) \operatorname{th} \varphi, \quad \bar{\varphi}_1 = \varphi(t - \tau_1), \quad \bar{\varphi}_2 = \varphi(t - \tau_2),$$

а функция $\theta = \theta(x, t)$ описывается линейным уравнением теплопроводности (4.3.4.10).

5°. Имеется также решение вида

$$u = \theta(x, t) \operatorname{ch} \varphi(t), \quad v = \theta(x, t) \operatorname{sh} \varphi(t).$$

4.4. Нелинейные УрЧП с пропорциональными аргументами. Принцип аналогии решений

В данном разделе рассматриваются нелинейные уравнения в частных производных с пропорциональными аргументами, которые помимо искомой функции $u = u(x, t)$ содержат также функции с растяжением одной или нескольких независимых переменных вида $u(px, t)$, $u(x, qt)$ или $u(px, qt)$, где p и q — параметры масштабирования ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$).

4.4.1. Принцип аналогии решений

Ниже описан достаточно общий метод построения точных решений нелинейных УрЧП с пропорциональными аргументами, который основан на использовании следующего принципа [105, 444].

Принцип аналогии решений. Структура точных решений УрЧП с пропорциональными аргументами

$$\begin{aligned} F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots, w, w_x, w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, \dots) &= 0, \\ w &= u(px, qt), \end{aligned} \quad (4.4.1.1)$$

часто (но не всегда) определяется структурой решений более простых уравнений в частных производных с обычными аргументами:

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0. \quad (4.4.1.2)$$

Уравнение (4.4.1.2) не содержит искомой функции с пропорциональными аргументами и получено из (4.4.1.1) формальной заменой w на u .

Схема применения принципа аналогии для УрЧП второго порядка с пропорциональными аргументами, разрешенного относительно u_t , изображена на рис. 4.1.

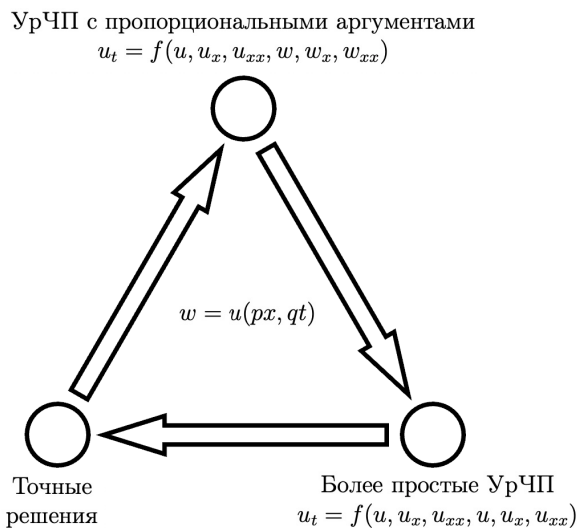


Рис. 4.1. Схема использования принципа аналогии для построения точных решений нелинейных УрЧП с пропорциональными аргументами.

Проиллюстрируем использование принципа аналогии на примерах трех УрЧП с пропорциональными аргументами, имеющих различные типы решений.

► **Пример 4.22.** Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с пропорциональными аргументами

$$u_t = au_{xx} + bu^m w^k, \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.1.3)$$

содержащее нелинейности степенного вида.

Следуя принципу аналогии, положим $w = u$ в уравнении (4.4.1.3). В результате, приходим к более простому нелинейному уравнению теплопроводности (диффузии) без запаздывания с источником степенного вида

$$u_t = au_{xx} + bu^{m+k}. \quad (4.4.1.4)$$

Это уравнение допускает *автомоделное решение* [22]:

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-m-k}} U(z), \quad z = xt^{-1/2}, \quad k \neq 1 - m. \quad (4.4.1.5)$$

Используя принцип аналогии, ищем решение нелинейного уравнения с пропорциональными аргументами (4.4.1.3) в таком же виде (4.4.1.4). В результате для функции $U = U(z)$ получим нелинейное ОДУ с пропорциональным аргументом:

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z - \frac{1}{1-m-k}U + bq^{\frac{k}{1-m-k}}U^m W^k = 0, \quad (4.4.1.6)$$

$$W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}. \quad \blacktriangleleft$$

Замечание 4.14. Интересно отметить, что УрЧП с пропорциональными аргументами (4.4.1.3) при $0 < p, q < 1$ в частном случае $p = q^{1/2}$ имеет точное решение (4.4.1.5), которое выражается через решение ОДУ без запаздывания (4.4.1.6) при $s = 1$, при $p < q^{1/2}$ уравнение (4.4.1.3) сводится к ОДУ с запаздыванием при $s < 1$, а при $p > q^{1/2}$ — к ОДУ с опережением при $s > 1$. Более того, решение уравнения (4.4.1.3) в случае $p, q > 1$ при подходящих значениях параметров p и q также может выражаться через решение ОДУ с запаздыванием ($s < 1$), без запаздывания ($s = 1$) и с опережением ($s > 1$).

► **Пример 4.23.** Рассмотрим теперь реакционно-диффузионное уравнение с пропорциональными аргументами и экспоненциальными нелинейностями

$$u_t = au_{xx} + be^{\mu u + \lambda w}, \quad w = u(px, qt). \quad (4.4.1.7)$$

Следуя принципу аналогии, положим $w = u$ в уравнении (4.4.1.7). В результате, приходим к более простому нелинейному уравнению теплопроводности (диффузии) с обычными аргументами и источником экспоненциального вида

$$u_t = au_{xx} + be^{(\mu + \lambda)u}. \quad (4.4.1.8)$$

Это уравнение допускает инвариантное решение вида [22]:

$$u(x, t) = U(z) - \frac{1}{\mu + \lambda} \ln t, \quad z = xt^{-1/2}, \quad \mu \neq -\lambda. \quad (4.4.1.9)$$

Используя принцип аналогии, ищем решение нелинейного УрЧП с пропорциональными аргументами (4.4.1.7) в виде (4.4.1.9). В итоге для функции $U = U(z)$ получим нелинейное ОДУ с пропорциональным аргументом

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z + \frac{1}{\mu + \lambda} + bq^{-\frac{\lambda}{\mu + \lambda}}e^{\mu U + \lambda W} = 0,$$

$$W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}. \quad \blacktriangleleft$$

► **Пример 4.24.** Рассмотрим УрЧП с пропорциональными аргументами и логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w + d), \quad w = u(px, qt). \quad (4.4.1.10)$$

Положив $w = u$ в уравнении (4.4.1.10), приходим к более простому нелинейному уравнению без запаздывания с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u[(b + c) \ln u + d],$$

которое допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных [447]:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t). \quad (4.4.1.11)$$

Используя принцип аналогии, ищем решение нелинейного УрЧП с пропорциональными аргументами (4.4.1.10) в виде (4.4.1.11). После разделения переменных для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ получим нелинейные ОДУ с пропорциональными аргументами

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} + \varphi(b \ln \varphi + c \ln \bar{\varphi}) &= K\varphi, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px); \\ \psi'_t &= \psi(b \ln \psi + c \ln \bar{\psi}) + (d + K)\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt), \end{aligned}$$

где K — произвольная постоянная. ◀

Далее кратко описаны некоторые нелинейные уравнения реакционно-диффузионного и волнового типов с пропорциональным запаздыванием и их точные решения, многие из которых (но не все) были получены в [70, 444]. Для построения большинства из этих решений был использован принцип аналогии.

4.4.2. Точные решения квазилинейных уравнений диффузионного типа с пропорциональным запаздыванием

В данном разделе рассматриваются квазилинейные реакционно-диффузионные уравнения с пропорциональным запаздыванием, которые линейны относительно обеих производных.

Уравнения, содержащие свободные параметры.

Уравнение 1. УрЧП с пропорциональным запаздыванием и логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w + d), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.2.1)$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u(x, t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)],$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi'_2 &= 4a\psi_2^2 + b\psi_2 + c\bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(qt), \\ \psi'_1 &= 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1 + c\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt), \\ \psi'_0 &= a[\psi_1^2 + 2\psi_2] + b\psi_0 + c\bar{\psi}_0 + d, \quad \bar{\psi}_0 = \psi_0(qt). \end{aligned}$$

Уравнение 2. УрЧП с пропорциональным запаздыванием и логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b \ln^2 u + c \ln u + d \ln w + s), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.2.2)$$

в зависимости от знака произведения ab допускает два точных решения, приведенных ниже.

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab > 0$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)], \\ \varphi(x) &= A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{b/a}, \end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= 2b\psi_1\psi_2 + (c - b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt), \\ \psi'_2 &= b(A^2 + B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(qt). \end{aligned}$$

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab < 0$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)], \\ \varphi(x) &= A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-b/a}, \end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= 2b\psi_1\psi_2 + (c - b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt), \\ \psi'_2 &= b(A^2 - B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(qt). \end{aligned}$$

При $A = \pm B$ имеем $\varphi(x) = Ae^{\pm \lambda x}$. В этом случае второе уравнение системы становится независимым, а первое — линейным для ψ_1 .

Замечание 4.15. Уравнения (4.4.2.1) и (4.4.2.2) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнения, содержащие произвольные функции вида $f(u - w)$.

Уравнение 3. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.2.3)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = C_1 x^2 + C_2 x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 4. Нелинейное УрЧП с пропорциональным аргументом

$$u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.2.4)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = Ct + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} - C + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 5. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.2.5)$$

в зависимости от знака произведения ab допускает два точных решения, приведенных ниже.

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab < 0$:

$$u(x, t) = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (4.4.2.6)$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab > 0$:

$$u(x, t) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием (4.4.2.6).

Отметим, что уравнение (4.4.2.5) и его решения допускают обобщение на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнение 6. Нелинейное УрЧП с пропорциональным аргументом

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.2.7)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = Ce^{bt} + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 7. Нелинейное УрЧП с пропорциональными аргументами

$$u_t = au_{xx} + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.2.8)$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = U(z) - \frac{1}{\lambda} \ln t, \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z + \frac{1}{\lambda} + e^{\lambda U} f\left(U - W + \frac{1}{\lambda} \ln q\right) = 0,$$

$$W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}.$$

Уравнения, содержащие произвольные функции вида $f(w/u)$.**Уравнение 8.** Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.2.9)$$

допускает несколько точных решений с мультипликативным разделением переменных, приведенных ниже.

1°. Решение

$$u(x, t) = [A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

2°. Решение

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = -a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

3°. Вырожденное решение

$$u(x, t) = (Ax + B)\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 9. Нелинейное УрЧП с пропорциональным аргументом

$$u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.2.10)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 10. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.2.11)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейным ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} &= C_1\varphi - b\varphi \ln \varphi, \\ \psi'_t &= C_1\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + b\psi \ln \psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt), \end{aligned} \quad (4.4.2.12)$$

C_1 — произвольная постоянная.

Первое уравнение (4.4.2.12) является автономным, его общее решение может быть получено в неявной форме. Частное однопараметрическое решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \exp\left[-\frac{b}{4a}(x + C_2)^2 + \frac{C_1}{b} + \frac{1}{2}\right],$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Отметим, что уравнение (4.4.2.11) и его решение допускают обобщение на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнение 11. Нелинейное УрЧП с пропорциональным аргументом

$$u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(px, t) \quad (4.4.2.13)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \exp(Ce^{bt})\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi \ln \varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

4.4.3. Точные решения более сложных нелинейных уравнений диффузионного типа с пропорциональным запаздыванием

Уравнения с переменным коэффициентом переноса степенного вида.

Уравнение 1. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = a(u^k u_x)_x + u f(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.1)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned} a(\varphi^k \varphi'_x)'_x &= b\varphi, \\ \psi'_t &= b\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt), \end{aligned}$$

b — произвольная постоянная.

Уравнение 2. Нелинейное УрЧП с пропорциональным аргументом

$$u_t = a(u^k u_x)_x + u f(w/u), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.3.2)$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = e^{2\lambda t} U(z), \quad z = e^{-k\lambda t} x,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$2\lambda U - k\lambda z U'_z = a(U^k U'_z)'_z + U f(W/U), \quad W = U(pz).$$

Уравнение 3. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + u f(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.3)$$

допускает три решения с мультипликативным разделением переменных, которые приведены ниже.

1°. Решение при $b(k+1) > 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (4.4.3.4)$$

2°. Решение при $b(k+1) < 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4.4.3.4).

3°. Решение при $k = -1$:

$$u(x, t) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2x\right)\psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4.4.3.4).

Уравнение 4. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.5)$$

допускает точное решение

$$u(x, t) = t^{-1/k} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a(\varphi^k \varphi'_z)'_z - \lambda \varphi'_z + \varphi^{k+1} f(q^{-1/k} \bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

Уравнение 5. Нелинейное УрЧП с пропорциональными аргументами

$$u_t = a(u^k u_x)_x + u^n f(w/u), \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.3.6)$$

допускает два точных решения, которые приведены ниже.

1°. Автомоделное решение:

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-n}} U(z), \quad z = xt^{\frac{n-k-1}{2(1-n)}},$$

где функция $U = U(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\frac{1}{1-n} U + \frac{n-k-1}{2(1-n)} z U'_z = a(U^k U'_z)'_z + U^n f(W/U), \quad W = U(sz), \quad s = pq^{\frac{n-k-1}{2(1-n)}}.$$

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$ak^2(U^k U'_z)'_z + \lambda U'_z + U^n f(W/U) = 0, \quad W = U(pz).$$

Уравнение 6. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.7)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u(x, t) = \left[\psi(t) - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1x + C_2 \right]^{1/(k+1)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = (k+1)f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 7. Нелинейное УрЧП с пропорциональным аргументом

$$u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{-k} + f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.3.8)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [b(k+1)t + \varphi(x)]^{\frac{1}{k+1}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + (k+1)f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнения с коэффициентом переноса экспоненциального вида.

Уравнение 8. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.9)$$

допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A , B и C — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi' = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 9. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.10)$$

допускает два решения с аддитивным разделением переменных.

1°. Решение при $b\lambda > 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (4.4.3.11)$$

2°. Решение при $b\lambda < 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4.4.3.11).

Уравнение 10. Нелинейное УрЧП с пропорциональным аргументом

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.3.12)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = -\frac{1}{\lambda} \ln t + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x + \frac{1}{\lambda} + e^{\lambda \varphi} f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 11. Нелинейное УрЧП с пропорциональными аргументами

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + e^{\mu u} f(u - w), \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.3.13)$$

допускает точное решение

$$u(x, t) = U(z) - \frac{1}{\mu} \ln t, \quad z = xt^{\frac{\lambda - \mu}{2\mu}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\frac{\lambda - \mu}{2\mu} z U'_z - \frac{1}{\mu} = a(e^{\lambda U} U'_z)'_z + e^{\mu U} f\left(U - W + \frac{1}{\mu} \ln q\right),$$

$$W = U(sz), \quad s = pq^{\frac{\lambda - \mu}{2\mu}}.$$

Уравнение 12. Нелинейное УрЧП с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.14)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\psi(t) - \frac{b\lambda}{2a} x^2 + C_1 x + C_2 \right],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = \lambda f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Другие уравнения с переменным коэффициентом переноса.

Уравнение 13. УрЧП с пропорциональным запаздыванием и переменным коэффициентом переноса логарифмического вида

$$u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.15)$$

допускает решения

$$u(x, t) = \exp(\pm \sqrt{c/a} x) \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = c(1 + b/a)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 14. УрЧП с пропорциональным запаздыванием и коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = [uf'_u(u)u_x]_x + \frac{1}{f'_u(u)}[af(u) + bf(w) + c], \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.16)$$

допускает решение в неявной форме

$$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= a\varphi + b\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(qt), \\ \psi'_t &= a\psi + b\bar{\psi} + c + \varphi^2, \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \end{aligned}$$

Уравнение 15. УрЧП с пропорциональным запаздыванием и коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + b + \frac{1}{f'_u(u)}g(f(u) - f(w)), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.17)$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$f(u) = \psi(t) - \frac{b}{2a}x^2 + C_1x + C_2,$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = g(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 16. УрЧП с пропорциональным запаздыванием и коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + bf(u) + \frac{f(u)}{f'_u(u)}g(f(w)/f(u)), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.3.18)$$

допускает два точных решения с функциональным разделением переменных в неявной форме.

1°. Решение при $ab > 0$:

$$f(u) = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)] \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = \psi g(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (4.4.3.19)$$

2°. Решение при $ab < 0$:

$$f(u) = [C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)] \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4.4.3.19).

Замечание 4.16. Уравнения (4.4.3.1), (4.4.3.3), (4.4.3.7), (4.4.3.9), (4.4.3.10), (4.4.3.14) — (4.4.3.18) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнение 17. УрЧП с пропорциональным аргументом и коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = [f'_u(u)u_x]_x + \frac{a}{f'_u(u)} + g(f(u) - f(w)), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.3.20)$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$f(u) = at + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\varphi''_{xx} + g(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 18. УрЧП с пропорциональными аргументами и коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = [f(u, w)u_x]_x, \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.3.21)$$

допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = U(z), \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$[f(U, W)U'_z]'_z + \frac{1}{2}zU'_z = 0, \quad W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}.$$

При $f(u, w) = aw$ уравнение (4.4.3.21) имеет простое решение, которое выражается в элементарных функциях:

$$u(x, t) = -\frac{qx^2}{6ap^2t}.$$

Уравнение 19. Эволюционное УрЧП второго порядка общего вида с пропорциональными аргументами

$$u_t = F(u, w, u_x, u_{xx}), \quad w = u(px, pt),$$

допускает решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$F(U, W, kU'_z, k^2U''_{zz}) + \lambda U'_z = 0, \quad W = U(pz).$$

Замечание 4.17. Другие нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с пропорциональным запаздыванием, допускающие точные решения, можно найти в [444].

4.4.4. Точные решения нелинейных уравнений волнового типа с пропорциональным запаздыванием

Квазилинейные уравнения, линейные по производным.

Уравнение 1. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна — Гордона с пропорциональными аргументами и степенной нелинейностью

$$u_{tt} = au_{xx} + bw^k, \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.4.1)$$

при $k \neq 1$ допускает автомodelное решение

$$u(x, t) = t^{\frac{2}{1-k}} U(z), \quad z = x/t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\frac{2(1+k)}{(1-k)^2} U - \frac{2(1+k)}{1-k} z U'_z + z^2 U''_{zz} = a U''_{zz} + b q^{\frac{2k}{1-k}} W^k, \\ W = U(sz), \quad s = p/q.$$

Уравнение 2. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна — Гордона с пропорциональными аргументами и степенной нелинейностью

$$u_{tt} = au_{xx} + bu^m w^k, \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.4.2)$$

при $k + m \neq 1$ допускает автомodelное решение

$$u(x, t) = t^{\frac{2}{1-k-m}} U(z), \quad z = x/t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\frac{2(1+k+m)}{(1-k-m)^2} U - \frac{2(1+k+m)}{1-k-m} z U'_z + z^2 U''_{zz} = a U''_{zz} + b q^{\frac{2k}{1-k-m}} U^m W^k, \\ W = U(sz), \quad s = p/q.$$

Уравнение 3. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна — Гордона с пропорциональными аргументами и экспоненциальной нелинейностью

$$u_{tt} = au_{xx} + be^{\mu u + \lambda w}, \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.4.3)$$

при $\mu + \lambda \neq 0$ допускает точное решение вида

$$u(x, t) = U(z) - \frac{2}{\mu + \lambda} \ln t, \quad z = \frac{x}{t},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$(z^2 U'_z)' + \frac{2}{\mu + \lambda} = aU''_{zz} + bq^{-\frac{2\lambda}{\mu + \lambda}} e^{\mu U + \lambda W}, \\ W = U(sz), \quad s = p/q.$$

Уравнение 4. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна — Гордона с пропорциональными аргументами и логарифмической нелинейностью

$$u_{tt} = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w), \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.4.4)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ второго порядка с пропорциональными аргументами

$$a\varphi''_{xx} + \varphi(b \ln \varphi + c \ln \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px); \\ \psi''_{tt} = \psi(b \ln \psi + c \ln \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 5. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна — Гордона с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.4.5)$$

содержащее произвольную функцию $f(z)$, допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = C_1 x^2 + C_2 x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 6. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональным аргументом

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.4.6)$$

содержащее произвольную функцию $f(z)$, допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = C_1 t^2 + C_2 t + \varphi(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} - 2C_1 + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 7. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.4.7)$$

содержащее произвольную функцию $f(z)$, в зависимости от знака произведения ab допускает два точных решения, приведенных ниже.

1°. Решение при $ab < 0$:

$$u(x, t) = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (4.4.4.8)$$

2°. Решение при $ab > 0$:

$$u(x, t) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием (4.4.4.8).

Отметим, что уравнение (4.4.4.7) и его решение допускают обобщение на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнение 8. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональными аргументами

$$u_{tt} = au_{xx} + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.4.9)$$

содержащее произвольную функцию $f(z)$, допускает точное решение вида

$$u(x, t) = U(z) - \frac{2}{\lambda} \ln t, \quad z = \frac{x}{t},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$(z^2 U'_z)'_z + \frac{2}{\lambda} = aU''_{zz} + e^{\lambda U} f\left(U - W + \frac{2}{\lambda} \ln q\right) = 0, \\ W = U(sz), \quad s = p/q.$$

Уравнение 9. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональным аргументом

$$u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.4.10)$$

допускает два невырожденных решения с мультипликативным разделением переменных, приведенных ниже.

1°. Точное решение:

$$u(x, t) = (Ae^{-\lambda t} + Be^{\lambda t})\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda^2] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

2°. Точное решение:

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t)]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) + \lambda^2] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Замечание 4.18. Уравнения (4.4.4.6) и (4.4.4.10) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x - \tau(x), t)$, где $\tau(x)$ — произвольная функция.

Нелинейные уравнения более сложного вида.

Уравнение 10. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.4.11)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ удовлетворяет ОДУ и ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned} a(\varphi^k \varphi'_x)'_x &= b\varphi, \\ \psi''_{tt} &= b\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt), \end{aligned}$$

b — произвольная постоянная.

Уравнение 11. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональным аргументом

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(px, t), \quad (4.4.4.12)$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = e^{2\lambda t} U(z), \quad z = e^{-k\lambda t} x,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$4\lambda^2 U - 4k\lambda^2 z U'_z + k^2 \lambda^2 z (z U'_z)'_z = a(U^k U'_z)'_z + U f(W/U), \quad W = U(pz).$$

Уравнение 12. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u f(w/u) + bu^{k+1}, \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.4.13)$$

в зависимости от значений коэффициентов b и k может допускать три различных решения с мультипликативным разделением переменных, которые приведены ниже.

1°. Решение при $b(k+1) > 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (4.4.4.14)$$

2°. Решение при $b(k+1) < 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4.4.4.14).

3°. Решение при $k = -1$:

$$u(x, t) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a} x^2 + C_2 x\right) \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4.4.4.14).

Замечание 4.19. Уравнения (4.4.4.11) и (4.4.4.13) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнение 13. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.4.15)$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = t^{-2/k} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$\frac{2(k+2)}{k^2}\varphi - \lambda \frac{k+4}{k}\varphi'_z + \lambda^2\varphi''_{zz} = a(\varphi^k\varphi'_z)'_z + \varphi^{k+1}f(q^{-2/k}\bar{\varphi}/\varphi),$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

Уравнение 14. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональными аргументами

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^n f(w/u), \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.4.16)$$

допускает автомодельное решение:

$$u(x, t) = t^{\frac{2}{1-n}} U(z), \quad z = xt^{\frac{n-k-1}{1-n}},$$

где функция $U = U(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\frac{2(1+n)}{(1-n)^2}U + \frac{(n-k-1)(2n-k+2)}{(1-n)^2}zU'_z + \frac{(n-k-1)^2}{(1-n)^2}z^2U''_{zz} =$$

$$= a(U^k U'_z)'_z + U^n f(q^{\frac{2}{1-n}} W/U), \quad W = U(sz), \quad s = pq^{\frac{n-k-1}{1-n}}.$$

Уравнение 15. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (4.4.4.17)$$

допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 16. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональными аргументами

$$u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + e^{\mu u} f(u - w), \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.4.18)$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = U(z) - \frac{2}{\mu} \ln t, \quad z = xt^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\frac{2}{\mu} + \frac{\mu-\lambda}{\mu} zU'_z + \frac{(\lambda-\mu)^2}{\mu^2} z(zU'_z)'_z = a(e^{\lambda U} U'_z)'_z + e^{\mu U} f\left(U - W + \frac{2}{\mu} \ln q\right),$$

$$W = U(sz), \quad s = pq^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}.$$

Уравнение 17. Нелинейное волновое уравнение с пропорциональными аргументами

$$u_{tt} = [f(w)u_x]_x, \quad w = u(px, qt), \quad (4.4.4.19)$$

допускает автомodelьное решение

$$u(x, t) = U(z), \quad z = x/t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$(z^2 U'_z)'_z = [f(W)U'_z]'_z, \quad W = U(sz), \quad s = p/q.$$

Это уравнение допускает первый интеграл

$$z^2 U'_z = f(W)U'_z + C, \quad (4.4.4.20)$$

где C — произвольная постоянная. В специальном случае $C = 0$ уравнение (4.4.4.20) вырождается в трансцендентное уравнение и приводит к решению $z^2 = f(W)$, которое порождает точное решение исходного уравнения (4.4.4.19), заданное в неявной форме

$$u(x, t) = U(z), \quad z^2 = f(U(sz)), \quad z = x/t, \quad s = p/q.$$

Это решение можно представить в виде $u = f^{-1}(x^2/(st)^2)$, где f^{-1} — функция, обратная к f .

Уравнение 18. Нелинейное уравнение гиперболического типа с пропорциональными аргументами специального вида

$$u_{tt} = F(u, w, u_x, u_{xx}), \quad w = u(px, pt),$$

допускает решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным аргументом

$$F(U, W, kU'_z, k^2 U''_{zz}) - \lambda^2 U''_{zz} = 0, \quad W = U(pz).$$

4.5. Неустойчивые решения и некорректность по Адамару некоторых задач с запаздыванием

4.5.1. Неустойчивость решений одного класса нелинейных УрЧП с постоянным запаздыванием

Глобальная неустойчивость решений. Рассмотрим класс нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} - \frac{bk(u-w)}{1-k} + F\left(\frac{u-kw}{1-k}\right), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (4.5.1.1)$$

где $F(u)$ — произвольная функция (отличная от константы), $a > 0$, $k > 0$ ($k \neq 1$).

Справедлива следующая теорема [455].

Теорема. Пусть $u_0 = u_0(x, t)$ — решение нелинейного уравнения (4.5.1.1). Тогда решением этого уравнения также является функция

$$u = u_0(x, t) + \delta e^{ct} \sin(\gamma x + \nu),$$

$$c = (\ln k)/\tau, \quad \gamma = \sqrt{(b - c)/a}, \quad b - c > 0, \quad (4.5.1.2)$$

где δ и ν — произвольные постоянные.

Данная теорема доказывается непосредственной проверкой и является частным случаем теоремы 2 для уравнения (3.4.2.31), в котором следует положить

$$f(z) \equiv -b \frac{z}{1-k} + F\left(\frac{z}{1-k}\right), \quad z = u - kw.$$

Пусть $\delta \ll 1$, а точки x удовлетворяют неравенству $\sin(\gamma x + \nu) \neq 0$. Тогда из формулы (4.5.1.2) следует, что два решения u_0 и u , сколь угодно близкие на начальной стадии процесса, будут с течением времени экспоненциально «разбегаться» друг от друга при выполнении условий:

$$k > 1, \quad b > 0, \quad \tau > (\ln k)/b. \quad (4.5.1.3)$$

Условия разбегания решений (4.5.1.3) носят чисто «геометрический» характер и не зависят от знака и вида кинетической функции $F(u)$ (т. е. в данном случае имеет место *глобальная неустойчивость решений*). Эти результаты являются точными (они получены без использования каких бы то ни было приближений и упрощений) и справедливы для любых решений рассматриваемого класса уравнений.

Некоторые замечания. Полагая $\tau = 0$ (или $k = 0$) в (4.5.1.1), т. е. при отсутствии запаздывания, получим стандартное нелинейное уравнение диффузии с объемной реакцией

$$u_t = au_{xx} + F(u). \quad (4.5.1.4)$$

Отметим, что УрЧП с запаздыванием (4.5.1.1) и УрЧП (4.5.1.4) имеют одинаковые стационарные решения $u_0 = u_0(x)$, в том числе и решения простейшего вида $u_0 = \text{const}$, где u_0 — корень функции $F(u_0) = 0$.

Выберем кинетическую функцию $F(z)$ так, чтобы стационарное решение $u_0 = u_0(x)$ уравнения диффузии без запаздывания (4.5.1.4) было устойчивым. Это стационарное решение $u_0 = u_0(x)$ будет также решением уравнения с запаздыванием (4.5.1.1). В исходном УрЧП с запаздыванием (4.5.1.1) зафиксируем параметры $k > 1$ и $b > 0$ и будем постепенно увеличивать время запаздывания τ (начиная с $\tau = 0$). При достаточно большом τ , удовлетворяющем последнему неравенству (4.5.1.3), стационарное решение станет неустойчивым. Другими словами, введение в математические модели запаздывания, может сделать устойчивые решения неустойчивыми.

4.5.2. Некорректность по Адамару некоторых задач с запаздыванием

Некорректность по Адамару некоторых задач с начальными данными.

Пусть $u_0 = u_0(x, t)$ — решение задачи типа Коши для уравнения (4.5.1.1) в области $-\infty < x < \infty$ с начальными данными общего вида

$$u_0(x, t) = \varphi(x, t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (4.5.2.1)$$

Считаем, что функция u_0 ограничена при $x \rightarrow \pm\infty$ для любого фиксированного $t > 0$.

Уравнение (4.5.1.1) имеет также решение u , которое определяется формулами (4.5.1.2). Сравнивая функции u и u_0 на начальном интервале времени, имеем

$$|u - u_0| \leq \delta \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (4.5.2.2)$$

Поэтому при фиксированных τ и k (при $k > 1$, что соответствует $c > 0$) разности между решениями u и u_0 можно сделать сколь угодно малыми за счет выбора δ , т. е. начальные данные для этих решений будут слабо различаться при $-\tau \leq t \leq 0$. С другой стороны, при выполнении условий (4.5.1.3), полагая $\nu = 0$, в точке $x = \pi/(2\gamma)$ получим

$$|u - u_0| = \delta e^{ct} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом при выполнении глобальных условий неустойчивости (4.5.1.3) решения двух задач Коши для уравнения (4.5.1.1), имеющие близкие начальные данные, будут неограниченно расходиться с течением времени.

Указанная неустойчивость решений относительно начальных данных делает задачу Коши для уравнения с запаздыванием (4.5.1.1) некорректно поставленной по Адамару (в случае выполнения неравенств (4.5.1.3)). Отметим, что эта неустойчивость носит общий характер (глобальная неустойчивость) и не зависит от вида кинетической функции $F(u)$.

Замечание 4.20. При формулировке задачи типа Коши для уравнения (4.5.1.1) в области $-\infty < x < \infty$ с начальными данными общего вида (4.5.2.1) на функцию u_0 накладывалось дополнительное условие ограниченности решения при $x \rightarrow \pm\infty$ для любого фиксированного $t > 0$ (такое условие обычно накладывается для линейного уравнения теплопроводности без запаздывания). Интересно посмотреть, что будет, если условие ограниченности решения в этой задаче заменить на более сильное условие $u_0 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ (если $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$) и считать, что выполняются неравенства (4.5.1.3).

Некорректность по Адамару некоторых начально-краевых задач. При выполнении условий (4.5.1.3) может иметь место глобальная неустойчивость решений нелинейных начально-краевых задач для уравнения с запаздыванием (4.5.1.1) с граничными условиями первого, второго или третьего рода в области $0 \leq x \leq h$ (при некоторых h).

Пусть $u_0 = u_0(x, t)$ — решение начально-краевой задачи для уравнения с запаздыванием (4.5.1.1) с начальными условиями (4.5.2.1) и общими граничными условиями первого рода:

$$u_0 = \psi_1(x, t) \text{ при } x = 0, \quad u_0 = \psi_2(x, t) \text{ при } x = h \quad (t > 0), \quad (4.5.2.3)$$

где $h = \pi/\gamma$, а коэффициент γ определен в (4.5.1.2).

Формула (4.5.1.2) для u при $\nu = 0$ дает решение уравнения (4.5.1.1), которое точно удовлетворяет граничным условиям (4.5.2.3). Это решение за счет выбора δ можно сделать сколь угодно близким к решению $u_0 = u_0(x, t)$ в области задания начальных данных $-\tau \leq t \leq 0$ (см. неравенство (4.5.2.2)). Однако при выполнении глобальных условий неустойчивости (4.5.1.3) первоначально близкие решения u_0 и u рассматриваемых начально-краевых задач будут экспоненциально расходиться при $t \rightarrow \infty$ для $x = h/2$. Такая неустойчивость решений уравнения (4.5.1.1) относительно начальных данных делает рассматриваемую начально-краевую задачу *некорректно поставленной по Адамару*.

В случае других начально-краевых задач решение u_0 следует сравнивать с решением u , полученным по формуле (4.5.1.2), где константа ν и длина отрезка h выбираются так, чтобы u_0 и u удовлетворяли одинаковым граничным условиям. В частности, для граничных условий второго рода на отрезке $h = \pi/\gamma$, когда на границах области задаются производные u_x , в качестве u надо выбирать решение (4.5.1.2) при $\nu = \pi/2$.

Замечание 4.21. Глобальная неустойчивость и некорректность по Адамару некоторых начально-краевых задач имеют место также для более сложного нелинейного реакционно-диффузионного уравнения с постоянным запаздыванием, которое можно получить, формально заменив в левой уравнения (4.5.1.1) первую производную по времени u_t на линейную комбинацию производных $\varepsilon u_{tt} + \sigma u_t$ [68].

5. Численные методы решения дифференциальных уравнений с запаздыванием

5.1. Численное интегрирование ОДУ с запаздыванием

5.1.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ с постоянным запаздыванием

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad t_0 < t \leq T, \quad (5.1.1.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \quad (5.1.1.2)$$

Здесь и далее считается, что диапазон изменения независимой переменной t ограничен величиной T , которая задается исследователем, исходя из его основных целей и возможностей используемого компьютера и программного обеспечения.

Численные методы решения задачи (5.1.1.1)–(5.1.1.2) основаны на замене уравнения для непрерывной функции $u(t)$ на приближенное уравнение (или систему уравнений) для функций дискретного аргумента, заданных на дискретном наборе точек из интервала $[t_0, T]$. Множество точек $G = \{t_0, t_1, \dots, t_K = T\}$ называется *сеткой*, сами точки t_k — *точками сетки*, а заданная на сетке дискретная функция дискретного аргумента $u_h = \{u_k = u_h(t_k), k = 0, 1, \dots, K\}$ — *сеточной функцией*. Интервал от одной точки сетки до следующей называется *шагом сетки* и обозначается $h_{k+1} = t_{k+1} - t_k$. Если для любых k имеем $h_k = \text{const}$, то шаг сетки *постоянный*, в противном случае — *переменный*. Непрерывную аппроксимацию функции $u_h(t)$, построенную с помощью интерполяции, будем обозначать $\tilde{u}_h(t)$.

Проблема численного интегрирования задачи (5.1.1.1)–(5.1.1.2) формулируется следующим образом. Пусть на интервале $[-\tau, t_0]$ задана начальная функция $u(t) = \varphi(t)$. Требуется, выбирая подходящий шаг h_k , найти приближенные значения u_k неизвестной функции $u(t)$ в точках t_k , где $k = 1, \dots, K$.

В случае постоянного запаздывания следует подобрать такой шаг интегрирования (постоянный или переменный), чтобы $h_k \leq \tau$, т. е. $t_k - \tau \leq t_{k-1}$. Тогда на каждом шаге значение функции $u(t - \tau)$ известно и равно в зависимости от $t - \tau$ либо значению начальной функции $\varphi(t - \tau)$, либо значению непрерывной аппроксимации $\tilde{u}_h(t - \tau)$. Другими словами, на шаге $k + 1$ требуется решить

подзадачу для ОДУ без запаздывания:

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad t_k < t \leq t_{k+1}, \\ u(t_k) &= u_k, \end{aligned} \quad (5.1.1.3)$$

где $u_k = u_h(t_k)$ и

$$u(t - \tau) = \begin{cases} \varphi(t - \tau) & \text{при } t \leq t_0 + \tau, \\ \tilde{u}_h(t - \tau) & \text{при } t_0 + \tau < t \leq t_{k+1}. \end{cases}$$

В результате численного интегрирования задачи (5.1.1.3) получаем значение u_{k+1} сеточной функции u_h и продолжение непрерывной аппроксимации $\tilde{u}_h(t)$ на отрезок $[t_k, t_{k+1}]$, причем $\tilde{u}_h(t_{k+1}) = u_{k+1}$.

Замечание 5.1. В случае переменного запаздывания $\tau = \tau(t)$ возможна ситуация, когда $t - \tau(t) > t_k$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$, т. е. значение аргумента функции с запаздыванием лежит внутри рассматриваемого отрезка. В этом случае не удастся свести задачу к ОДУ без запаздывания и необходимо применять интерполяцию (см. [130, разд. 3.3]).

Для характеристики свойств численных методов принято использовать понятия и определения (см., например, [29, 30, 76]), которые приведены ниже.

Норма в пространстве сеточных функций вводится аналогично норме пространства непрерывных функций:

$$\|u_h\| = \max_{0 \leq k \leq K} |u_k|, \quad u_k = u_h(t_k). \quad (5.1.1.4)$$

Для сеточных функций трех аргументов норма имеет вид

$$\|f_h\| = \max_{0 \leq k \leq K} |f_k|, \quad f_k = f(t_k, u_k, w_k).$$

Говорят, что численный метод *сходится*, если

$$\|u_h - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

и *сходится с порядком* $p > 0$, если справедлива оценка

$$\|u_h - u\| \leq Ch^p,$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от h .

Замечание 5.2. Здесь и далее в случае переменного шага h_k выражение $h \rightarrow 0$ понимается в смысле $\|h\| \rightarrow 0$, где $\|h\| = \max_{1 \leq k \leq K} h_k$ называется величиной шага.

ОДУ с запаздыванием (5.1.1.1) удобно записать в краткой операторной форме:

$$\mathcal{L}[u] = f.$$

Аналогичным образом можно записать соответствующую задачу численного интегрирования:

$$\mathcal{L}_h[u_h] = f_h, \quad (5.1.1.5)$$

где $\mathcal{L}_h[u_h]$ — оператор разностного дифференцирования (для ОДУ первого порядка с запаздыванием (5.1.1.1) имеем $\mathcal{L}_h[u_h] = h_{k+1}^{-1}[u_h(t_{k+1}) - u_h(t_k)]$), $f_h = f(t_k, u_h(t_k), \tilde{u}_h(t_k - \tau))$.

Назовем сеточную функцию $\psi_h = \mathcal{L}_h[u] - f_h$ *невязкой* или *погрешностью аппроксимации численного метода*. Отсюда следует, что искомая функция u удовлетворяет приближенному уравнению (5.1.1.5) с точностью до погрешности аппроксимации. Говорят, что *численный метод аппроксимирует исходное уравнение*, если

$$\|\psi_h\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0,$$

и *аппроксимирует с порядком* $p > 0$, если справедлива оценка

$$\|\psi_h\| \leq Ch^p,$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от h .

Схема (5.1.1.5) с начальными данными (5.1.1.2) называется *устойчивой*, если решение u_h непрерывно зависит от входных данных, которые определяются функциями f и φ , и эта зависимость равномерна относительно шага сетки. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от шага h (по крайней мере, для достаточно малых h), что если

$$\|f^I - f^{II}\| \leq \delta \quad \text{и} \quad \|\varphi^I - \varphi^{II}\| \leq \delta,$$

то

$$\|u_h^I - u_h^{II}\| \leq \varepsilon.$$

Непрерывную зависимость решения от f называют *устойчивостью по правой части*, а непрерывную зависимость от φ — *устойчивостью по начальным данным*.

Численные методы, которые можно использовать для решения ОДУ и ОДУ с запаздываниями, должны быть устойчивы, хорошо аппроксимировать рассматриваемые задачи и сходиться к точному решению.

5.1.2. Качественные особенности численного интегрирования ОДУ с запаздыванием

Работа с ОДУ с запаздыванием осложняется из-за наличия в таких уравнениях искомой функции с аргументом $t - \tau$, значение которого может оказаться вне точек сетки G (это особенно характерно для ОДУ с переменным запаздыванием $\tau = \tau(t)$). Поэтому необходимо вычислять непрерывные аппроксимации $\tilde{u}_h(t)$ сеточной функции u_h . Функцию $\tilde{u}_h(t)$ можно построить с помощью апостериорной интерполяции значений u_h , полученных дискретным методом, либо с помощью так называемых *непрерывных* методов, которые вычисляют $\tilde{u}_h(t)$ на каждом шаге.

Предположим, что для данной задачи можно построить сетку G такую, чтобы было выполнено условие: для любых $t_k \in G$ либо $t_k - \tau(t_k) < t_0$, либо

$t_k - \tau(t_k) \in G$. Тогда можно применять методы, использующие для вычислений только точки сетки G . Таким, например, является явный метод Эйлера

$$u_{k+1} = u_k + h_{k+1} f(t_k, u_k, u_q), \quad q < k.$$

В случае постоянного запаздывания $\tau = \text{const}$ условие $t_k - \tau \in G$ будет выполнено, если выбрать постоянный шаг интегрирования h , исходя из условия $\tau = Nh$, где $N > 0$ — целое число.

Для ОДУ с пропорциональным запаздыванием такой подход не применим. Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим модельную задачу

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t/2), \quad 0 < t \leq 1, \\ u(0) &= 1. \end{aligned}$$

Для любого $t_k \in G$ значение $t_k/2$ также должно лежать на сетке, а значит, начального шага не существует. Более того, так как точки сетки удовлетворяют условию $t_{k+1} = 2t_k$ для $k \geq 1$, имеем $h_{k+1} = t_k$. Следовательно, последний шаг всегда равен $1/2$, а значит, условие сходимости метода не может быть выполнено.

В случае переменного запаздывания общего вида (при $\tau(t) > 0$) сетку G можно построить на любом ограниченном интервале $[t_0, T]$ с произвольно малым шагом (см. [130, с. 37, 38]). Для этого, начиная с точки t_0 , необходимо определить все точки разрыва производной и включить их в G . Затем, начиная с последней точки $t_K = T$, строить сетку в обратном направлении с желаемым максимальным шагом. Каждая новая точка t_k порождает предыдущую точку $t_{k-1} = t_k - \tau(t_k)$, которая должна быть включена в сетку. Для некоторых запаздываний данный подход может приводить к нерегулярному или избыточному распределению точек (например, если ограниченный аргумент $\alpha(t) = t - \tau(t)$ имеет горизонтальную асимптоту).

Другая важная особенность, которую необходимо учитывать при разработке методов численного интегрирования ОДУ с запаздыванием, связана с распространением разрывов производных. Как было показано в разд. 1.1.2, решение задачи Коши с запаздыванием может иметь разрыв производной в начальный момент времени t_0 . Этот разрыв далее распространяется на производные более высокого порядка. Чтобы численный метод имел требуемый порядок точности, решение задачи Коши должно быть достаточно гладким на каждом интервале интегрирования $[t_k, t_{k+1}]$: метод может иметь порядок точности p , если решение имеет непрерывные производные до порядка $p + 1$ включительно. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы все точки, в которых существует разрыв искомой функции или ее производных до порядка $p + 1$ включительно, были включены в точки сетки.

В случае постоянного запаздывания точка разрыва порядка m определяется из простого соотношения $t_m^* = t_0 + m\tau$. В случае переменного запаздывания определение точек разрыва в основном происходит двумя способами. Первый

называется *отслеживанием разрывов* (см. [120, 229, 419, 420, 551], а также ссылки в [130, с. 49]) и основан на поиске точек разрыва $t_{m,j}^* > t_0$, удовлетворяющих системе уравнений

$$t_{m,j}^* - \tau(t_{m,j}^*) = t_{m-1,i}^* \text{ для некоторых } i, \quad (5.1.2.1)$$

где j — номер точки разрыва порядка m , индуцированной i -й точкой разрыва порядка $m - 1$ (предполагается, что точки разрыва упорядочены по возрастанию и $j > i$).

► **Пример 5.1.** Рассмотрим задачу для ОДУ с запаздыванием с разрывом в точке $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t - 2t^{1/2}), \quad t > 0; \\ u(t) &= 1, \quad -1 \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Разрыв производной порядка m возникает в точке t_m^* , которая находится из уравнения $t_m^* - 2(t_m^*)^{1/2} = t_{m-1}^*$, где $t_m^* > t_{m-1}^*$ и $t_0^* = 0$. Отсюда получим значения точек разрыва: $t_m^* = (1 + \sqrt{t_{m-1}^* + 1})^2$ для любых целых $m > 0$. ◀

Другой подход основан на контроле шага в области разрыва с помощью оценки локальной погрешности. Такие алгоритмы проще программировать, но они связаны с большим количеством «отклоненных» значений шага и могут приводить к последовательности чрезмерно маленьких шагов в окрестности разрывов низкого порядка (см. [120, разд. 3.4], [419] и ссылки в них).

Замечание 5.3. Некоторые другие способы интегрирования задач с разрывами производных кратко (но со ссылками на литературу) описаны в [130, с. 39].

Проблемы возникают также в задачах для ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), u(pt)), \quad t > 0; \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \quad (5.1.2.2)$$

где $0 < p < 1$. На первом отрезке интегрирования $0 < t \leq h_1$ при любом значении шага h_1 возникает «наложение»: аргумент pt функции с запаздыванием $u(pt)$ находится внутри рассматриваемого отрезка, что делает невозможным применение метода шагов. Тем не менее, уже со второго шага при $t \geq h_1$ метод шагов можно применять, если будет выполнено условие $h_{k+1} < h_k/p$, которое гарантирует, что аргумент pt будет лежать на предыдущем отрезке интегрирования (см. [130, разд. 6.4.1]).

Замечание 5.4. На первом шаге $0 < t \leq h_1$ можно использовать приближенное аналитическое решение, полученное в виде усеченного степенного ряда по независимой переменной (см. разд. 1.4.2 и [485, 487, 488]).

Замечание 5.5. Отметим, что в задачах Коши для ОДУ с пропорциональным запаздыванием, в которых начальное условие задается в точке $t = 0$, не происходит распространения разрывов производной, а значит, не требуется связанных с этим дополнительных ограничений на выбор точек сетки.

Дифференциальные уравнения с пропорциональным запаздыванием можно классифицировать как уравнения с бесконечным запаздыванием (с течением времени неограниченно увеличивается промежуток $t - pt$ между текущим и прошлым моментом). Как показано в [356], данное обстоятельство приводит к существенной нехватке оперативной памяти при численном расчете на равномерных сетках. Для решения этой проблемы в случае задачи Коши с пропорциональным запаздыванием (5.1.2.2) используют преобразование $x = \ln t$, $v = u$, приходя к задаче для ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} v'(x) &= e^x f(e^x, v(x), v(x - \tau)), \quad x > -\infty, \\ v(-\infty) &= u_0, \end{aligned}$$

где $\tau = -\ln p > 0$. Полученная задача осложнена тем, что в качестве начальной точки выступает отрицательная бесконечность. Поэтому численное решение задачи (5.1.2.2) имеет смысл вести в два этапа. На первом этапе на некотором отрезке $0 < t \leq t_0$ решается исходная задача (5.1.2.2), а на втором этапе на отрезке $x > x_0 = \ln t_0$ решается преобразованная задача

$$\begin{aligned} v'(x) &= e^x f(e^x, v(x), v(x - \tau)), \quad x > x_0, \\ v(x) &= u(e^x), \quad x \leq x_0. \end{aligned}$$

Исходя из всего описанного выше, можно сделать вывод, что наличие запаздывания влияет на точность и устойчивые свойства численных алгоритмов (см. примеры в [130, с. 9–19]). Поэтому формальное применение методов интегрирования ОДУ без запаздывания для задач с запаздыванием не является оптимальным — методы численного интегрирования ОДУ с запаздыванием следует разрабатывать с учетом свойств рассматриваемых уравнений и поведения их решений.

5.1.3. Модифицированный метод шагов

В разд. 1.1.5 был описан простой естественный метод решения ОДУ с запаздыванием — метод шагов. Получаемые таким образом ОДУ без запаздывания можно решать соответствующими численными методами. Модифицированный вариант метода шагов, более удобный для численного интегрирования, предложен в [131] для постоянного запаздывания и расширен в [132] на случай монотонно убывающего и не обращающегося в нуль переменного запаздывания. Кратко опишем его суть (см. [130, разд. 3.4], а также [120, 131, 132]).

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad t_0 < t \leq T; \\ u(t) &= \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq t_0. \end{aligned} \tag{5.1.3.1}$$

Точки разрыва производной для ОДУ с постоянным запаздыванием определяются так: $t_m^* = t_0 + m\tau$, $m = 1, 2, \dots$. Будем интегрировать задачу (5.1.3.1) на

отрезках от одной точки разрыва до следующей до тех пор, пока на некотором шаге m^* не будет выполнено условие $t_0 + m^*\tau \geq T$. На первом отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$ имеем

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), \varphi(t - \tau)), \quad t_0 < t \leq t_0 + \tau, \\ u(t_0) &= \varphi(t_0). \end{aligned} \quad (5.1.3.2)$$

Интегрируя задачу (5.1.3.2) некоторым численным методом, находим приближенные значения $u_h(t)$ искомой функции $u(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$.

Теперь рассмотрим второй отрезок $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$. Определим на нем функции $u_1(t) = u(t - \tau)$ и $u_2(t) = u(t)$ и запишем задачу (5.1.3.1) в виде системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= f(t - \tau, u_1(t), \varphi(t - 2\tau)), \quad t_0 + \tau < t \leq t_0 + 2\tau, \\ u'_2(t) &= f(t, u_2(t), u_1(t)), \quad t_0 + \tau < t \leq t_0 + 2\tau, \\ u_1(t_0 + \tau) &= \varphi(t_0), \\ u_2(t_0 + \tau) &= u_h(t_0 + \tau). \end{aligned} \quad (5.1.3.3)$$

Первое уравнение системы (5.1.3.3) является независимым. Интегрируя систему (5.1.3.3) некоторым численным методом, находим приближенные значения $u_h(t)$ искомой функции $u_2(t) = u(t)$ на отрезке $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$.

Рассуждая таким образом, приходим к общей формуле представления исходной задачи (5.1.3.1) на отрезке $[t_0 + (m - 1)\tau, t_0 + m\tau]$, $m = 1, 2, \dots$ в виде системы m уравнений:

$$\begin{aligned} u'_i(t) &= f(t - (m - i)\tau, u_i(t), u_{i-1}(t)), \quad i = 1, \dots, m, \\ u_i(t_0 + (m - 1)\tau) &= u_h(t_0 + (i - 1)\tau), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.1.3.4)$$

где $u_0(t) = \varphi(t - m\tau)$ и $u_i(t) = u(t - (m - i)\tau)$.

Формулы (5.1.3.4) позволяют последовательно (пошагово) интегрировать исходную задачу (5.1.3.1) некоторым численным методом. Совокупность вычисленных на каждом шаге k значений u_k функции $u_h(t)$ представляет собой приближенные значения искомой функции $u(t)$. Отметим, что на каждом шаге решается система (5.1.3.4) все более и более высокого порядка m .

Главное достоинство метода заключается в том, что система (5.1.3.4) не содержит запаздывания и может интегрироваться «обычными» численными методами. Недостаток метода — необходимость на каждом шаге пересчитывать уже посчитанные ранее значения — компенсируется отсутствием интерполяции и проблем, связанных с нехваткой оперативной памяти. Рассмотренный метод применим и для ОДУ с переменным запаздыванием $\tau = \tau(t)$ (см. [130, разд. 3.4]).

5.1.4. Численные методы для ОДУ с постоянным запаздыванием

Предварительные замечания. В предыдущем разделе был рассмотрен модифицированный метод шагов, который можно использовать для численного

решения ОДУ с запаздыванием. Далее излагаются более эффективные численные методы интегрирования ОДУ с постоянным запаздыванием. Для простоты эти методы будем описывать на примере задачи Коши для нелинейного ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad t_0 < t \leq T, \\ u(t) &= \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq t_0. \end{aligned} \quad (5.1.4.1)$$

Отметим, что рассматриваемые ниже методы допускают естественное обобщение на случай нескольких постоянных запаздываний, переменного запаздывания, а также ОДУ и систем ОДУ высоких порядков.

Методы Эйлера первого порядка аппроксимации. Интегрируя ОДУ с запаздыванием (5.1.4.1) на интервале сетки $[t_k, t_{k+1}]$, запишем

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, u(t), u(t - \tau)) dt. \quad (5.1.4.2)$$

Аппроксимируя интеграл в правой части по методу прямоугольников, получаем формулы [94, 197]:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + hf(t_k, u_k, u_{k-N}), \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \\ u_k &= \varphi(t_k), \quad k = -N, -N+1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (5.1.4.3)$$

определяющие явный метод Эйлера. Постоянный шаг сетки h следует выбирать исходя из условия $h = \tau/N$, где $N > 0$ — целое число, чтобы точка t_{k-N} всегда оказывалась точкой сетки. Тогда, если сохранять в оперативной памяти последние N значений сеточной функции u_h , будет известным и значение u_{k-N} . Метод Эйлера является простейшим явным методом первого порядка аппроксимации.

Рассмотрим теперь случай переменного шага h_k . Вообще говоря, теперь $t_k - \tau \neq t_{k-N}$, т. е. точка $t_k - \tau$ не попадает на сетку, и модифицированные выражения, определяющие метод Эйлера, будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + h_{k+1}f(t_k, u_k, \tilde{u}_h(t_k - \tau)), \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \\ \tilde{u}_h(t) &= \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq t_0. \end{aligned} \quad (5.1.4.4)$$

Здесь $\tilde{u}_h(t)$ — непрерывная аппроксимация сеточной функции u_h . Значение $\tilde{u}_h(t_k - \tau)$ вычисляется с помощью интерполяции на отрезке $[t_q, t_{q+1}]$, где точка сетки t_q такая, что $t_q \leq t_k - \tau \leq t_{q+1}$. Можно использовать, например, наиболее простую кусочно-линейную интерполяцию:

$$\tilde{u}_h(t) = \frac{t_{q+1} - t}{h_{q+1}} u_q + \frac{t - t_q}{h_{q+1}} u_{q+1}, \quad t_q \leq t \leq t_{q+1}. \quad (5.1.4.5)$$

Существуют так называемые *непрерывные* методы, которые позволяют вычислять значения функции $\tilde{u}_h(t)$ по специальным алгоритмам. В этом случае функция $\tilde{u}_h(t)$ называется *интерполантом численного метода*. Непрерывные

методы особенно эффективны в случае переменного запаздывания $\tau = \tau(t)$. Приведенные далее сведения, касающиеся непрерывных методов интегрирования ОДУ с запаздыванием, изложены с использованием [130].

Непрерывный метод Эйлера определяется выражениями [128, 130, 198]:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \tilde{u}_h(t_k + h_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \\ \tilde{u}_h(t_k + \theta h_{k+1}) &= u_k + \theta h_{k+1} f(t_k, u_k, \tilde{u}_h(t_k - \tau)), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \\ \tilde{u}_h(t) &= \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq t_0. \end{aligned}$$

Наконец, неявный метод Эйлера с постоянным шагом задается формулами:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + hf(t_{k+1}, u_{k+1}, u_{k+1-N}), \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \\ u_k &= \varphi(t_k), \quad k = -N, -N+1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (5.1.4.6)$$

Неявные методы характеризуются расширенной областью устойчивости, но на каждом шаге требуют решения системы алгебраических уравнений для вычисления u_{k+1} . Непрерывный аналог с переменным шагом h_k имеет интерполянт

$$\tilde{u}_h(t_k + \theta h_{k+1}) = u_k + \theta h_{k+1} f(t_{k+1}, u_{k+1}, \tilde{u}_h(t_{k+1} - \tau)), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Методы второго порядка аппроксимации. Существуют более точные модификации метода Эйлера второго порядка аппроксимации. Так, в *методе средней точки* сначала получают промежуточные значения

$$t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + \frac{1}{2}h, \quad u_{k+\frac{1}{2}} = u_k + \frac{1}{2}hf(t_k, u_k, u_{k-N}),$$

а затем определяют u_{k+1} по формуле:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + hf(t_{k+\frac{1}{2}}, u_{k+\frac{1}{2}}, u_{k-N+\frac{1}{2}}) \equiv \\ &\equiv u_k + hf(t_k + \frac{1}{2}h, u_k + \frac{1}{2}hf_k, u_{k-N} + \frac{1}{2}hf_{k-N}), \end{aligned} \quad (5.1.4.7)$$

где $f_k = f(t_k, u_k, u_{k-N})$, $k = 0, 1, \dots, K-1$; $N > 0$ такое целое, что $h = \tau/N$.

Для непрерывного метода средней точки с переменным шагом h_k интерполянт можно вычислять следующим образом:

$$\tilde{u}_h(t_k + \theta h_{k+1}) = u_k + \theta h_{k+1} f(t_k + \frac{1}{2}h_{k+1}, u_k + \frac{1}{2}h_{k+1}\tilde{f}_k, \tilde{u}_h(t_k - \tau)),$$

где $0 \leq \theta \leq 1$, $\tilde{f}_k = f(t_k, u_k, \tilde{u}_h(t_k - \tau))$.

Другой метод второго порядка аппроксимации основан на формуле

$$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{2}h[f(t_k, u_k, u_{k-N}) + f(t_{k+1}, u_k + hf_k, u_{k-N} + hf_{k-N})] \quad (5.1.4.8)$$

и называется *методом Хьюна*. Его непрерывный аналог рассматривается в [128, 198] и имеет интерполянт вида

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(t_k + \theta h_{k+1}) &= u_k + (\theta - \frac{1}{2}\theta^2)h_{k+1}\tilde{f}_k + \\ &+ \frac{1}{2}\theta^2h_{k+1}f(t_{k+1}, u_k + h_{k+1}\tilde{f}_k, \tilde{u}_h(t_{k+1} - \tau)), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

Помимо (5.1.4.7) и (5.1.4.8), часто используется неявный метод второго порядка, называемый *методом трапеций*, который определяется выражением

$$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{2}h[f(t_k, u_k, u_{k-N}) + f(t_{k+1}, u_{k+1}, u_{k+1-N})]. \quad (5.1.4.9)$$

Формула для интерполанта непрерывного метода трапеций с переменным шагом:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(t_k + \theta h_{k+1}) = & u_k + (\theta - \frac{1}{2}\theta^2)h_{k+1}f(t_k, u_k, \tilde{u}_h(t_k - \tau)) + \\ & + \frac{1}{2}\theta^2 h_{k+1}f(t_{k+1}, u_{k+1}, \tilde{u}_h(t_{k+1} - \tau)) \end{aligned}$$

Замечание 5.6. Рассмотренные выше методы первого и второго порядка аппроксимации являются частными случаями методов Рунге—Кутты. Аналогичные дискретные методы для ОДУ без запаздывания описываются, например, в [29, с. 243–247], [76, с. 214–220] и [448, с. 64, 65]. Непрерывные методы для ОДУ без запаздывания см., например, в [130, разд. 5].

Методы Рунге—Кутты четвертого порядка аппроксимации. Значения u_k сеточной функции u_h вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \frac{1}{6}h(r_{k+1}^{(1)} + 2r_{k+1}^{(2)} + 2r_{k+1}^{(3)} + r_{k+1}^{(4)}), \\ r_{k+1}^{(1)} &= f(t_k, u_k, u_{k-N}), \\ r_{k+1}^{(2)} &= f\left(t_k + \frac{1}{2}h, u_k + \frac{1}{2}hr_{k+1}^{(1)}, u_{k-N} + \frac{1}{2}hr_{k+1-N}^{(1)}\right), \\ r_{k+1}^{(3)} &= f\left(t_k + \frac{1}{2}h, u_k + \frac{1}{2}hr_{k+1}^{(2)}, u_{k-N} + \frac{1}{2}hr_{k+1-N}^{(2)}\right), \\ r_{k+1}^{(4)} &= f\left(t_{k+1}, u_k + hr_{k+1}^{(3)}, u_{k-N} + hr_{k+1-N}^{(3)}\right), \end{aligned}$$

где h — постоянный шаг, $N > 0$ — такое целое, что $h = \tau/N$. Для определения интерполанта непрерывного метода с переменным шагом h_k можно использовать приближенное соотношение

$$\tilde{u}_h(t_k + \theta h_{k+1}) = u_k + \frac{1}{6}h_{k+1}[(4\theta - 3\theta^2)r_{k+1}^{(1)} + 2\theta r_{k+1}^{(2)} + 2\theta r_{k+1}^{(3)} + (3\theta^2 - 2\theta)r_{k+1}^{(4)}],$$

где $0 \leq \theta \leq 1$, или альтернативное соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(t_k + \theta h_{k+1}) = & u_k + \frac{1}{6}h_{k+1}[(4\theta^3 - 9\theta^2 + 6\theta)r_{k+1}^{(1)} + \\ & + (6\theta^2 - 4\theta^3)r_{k+1}^{(2)} + (6\theta^2 - 4\theta^3)r_{k+1}^{(3)} + (4\theta^3 - 3\theta^2)r_{k+1}^{(4)}]. \end{aligned}$$

Методы Рунге—Кутты. Общая схема. Опишем кратко общий принцип построения методов Рунге—Кутты. Интегрируя уравнение (5.1.4.1) на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, получим уравнение (5.1.4.2). Введем вспомогательные узлы

$$t_{k+1}^{(m)} = t_k + \alpha_m h_{k+1}, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

где $0 = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_M \leq 1$. Отметим, что $t_{k+1}^{(1)} = t_k$ и $t_{k+1}^{(M)} \leq t_{k+1}$. Заменяя входящий в правую часть (5.1.4.2) интеграл квадратурной формулой с узлами

$t_{k+1}^{(m)}$, получаем

$$u(t_{k+1}) \approx u(t_k) + h_{k+1} \sum_{m=1}^M c_m f(t_{k+1}^{(m)}, u(t_{k+1}^{(m)}), u(t_{k+1}^{(m)} - \tau)), \quad (5.1.4.10)$$

где c_m — веса квадратурной формулы ($0 \leq c_m \leq 1$). Чтобы воспользоваться формулой (5.1.4.10) необходимо знать значения $u(t_{k+1}^{(m)})$, $m = 2, 3, \dots, M$. Их можно получить аналогичным образом, интегрируя уравнение (5.1.4.1):

$$u(t_{k+1}^{(m)}) = u(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}^{(m)}} f(t, u(t), u(t - \tau)) dt, \quad m = 2, 3, \dots, M. \quad (5.1.4.11)$$

Заменяя интеграл в правой части (5.1.4.11) квадратурной формулой с узлами $t_{k+1}^{(1)}, t_{k+1}^{(2)}, \dots, t_{k+1}^{(m-1)}$, приходим к приближенным равенствам

$$\begin{aligned} u(t_{k+1}^{(2)}) &\approx u(t_k) + h_{k+1} \beta_{21} f(t_{k+1}^{(1)}, u(t_{k+1}^{(1)}), u(t_{k+1}^{(1)} - \tau)), \\ u(t_{k+1}^{(3)}) &\approx u(t_k) + h_{k+1} \beta_{31} f(t_{k+1}^{(1)}, u(t_{k+1}^{(1)}), u(t_{k+1}^{(1)} - \tau)) + \\ &\quad + h_{k+1} \beta_{32} f(t_{k+1}^{(2)}, u(t_{k+1}^{(2)}), u(t_{k+1}^{(2)} - \tau)), \end{aligned} \quad (5.1.4.12)$$

...

$$u(t_{k+1}^{(m)}) \approx u(t_k) + h_{k+1} \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{mj} f(t_{k+1}^{(j)}, u(t_{k+1}^{(j)}), u(t_{k+1}^{(j)} - \tau)),$$

где β_{mj} — веса квадратурных формул.

Таким образом, с учетом (5.1.4.11) и (5.1.4.12), опираясь на формулу (5.1.4.10), запишем стандартную схему M -стадийного явного метода Рунге — Кутты:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + h_{k+1} \sum_{m=1}^M c_m r_{k+1}^{(m)}, \\ r_{k+1}^{(m)} &= f\left(t_k + \alpha_m h_{k+1}, u_k + h_{k+1} \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{mj} r_{k+1}^{(j)}, u(t_k + \alpha_m h_{k+1} - \tau)\right), \end{aligned} \quad (5.1.4.13)$$

который позволяет находить приближенные значения $u_k = u_h(t_k)$ искомой функции $u(t)$ в точках сетки G и определяется набором параметров c_m , α_m и β_{mj} , значения которых выбираются исходя из требуемого порядка аппроксимации. Примеры конкретных численных значений этих параметров приведены, например, в [76, 93] (см. также методы Рунге — Кутты второго и четвертого порядков аппроксимации, описанные выше).

► **Пример 5.2.** При $M = 2$, $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{21} = 1$ и постоянном шаге $h_{k+1} = h$ в (5.1.4.13) в случае, когда $\tau = Nh$, N — целое число, и $u(t_k - \tau) = u_{k-N}$, имеем схему Хьюна (5.1.4.8). ◀

Замечание 5.7. Схемы неявных методов Рунге — Кутты можно получить, если во второй формуле (5.1.4.13) верхний предел суммы $m - 1$ заменить на M_* , где $m \leq M_* \leq M$. Неявные методы обладают лучше устойчивостью и подходят для решения жестких задач. Подробности см. в разд. 5.1.7.

Значения функции с запаздыванием $u(t_k + \alpha_m h_{k+1} - \tau)$, вообще говоря, неизвестны и обычно вычисляются с помощью интерполяции на отрезке $[t_q, t_{q+1}]$, где $q > 0$ — такое целое число, что $t_q \leq t_k + \alpha_m h_{k+1} - \tau \leq t_{q+1}$. Непрерывные методы Рунге — Кутты (см. [590, 591] и [130, разд. 5, 6]) дают возможность на каждом шаге вычислять приближенное непрерывное решение (интерполянт) $\tilde{u}_h(t)$ по специальной формуле:

$$\tilde{u}_h(t_k + \theta h_{k+1}) = u_k + h_{k+1} \sum_{m=1}^M c_m(\theta) r_{k+1}^{(m)}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (5.1.4.14)$$

где $c_m(\theta)$ — некоторые многочлены, удовлетворяющие условиям

$$c_m(0) = 0, \quad c_m(1) = c_m, \quad m = 1, \dots, M,$$

и некоторым дополнительным ограничениям, связанным с порядком аппроксимации метода (см. [130, с. 118, 119]).

Варианты непрерывных методов Рунге — Кутты для ОДУ с запаздыванием с применением интерполяции рассматриваются, например, в [93, 130, 281, 297, 407, 412, 490] (см. также ссылки в [120, 419]).

5.1.5. Численные методы для ОДУ с пропорциональным запаздыванием. Задача Коши

Предварительные замечания. Рассматриваемые уравнения. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с пропорциональным запаздыванием и родственных уравнений, а также примеры их применения, рассматриваются во многих работах (см., например, [160, 212, 224, 265, 341, 359, 485, 584, 586]). Некоторые качественные особенности численного интегрирования ОДУ с пропорциональным запаздыванием обсуждались ранее в разд. 5.1.2.

Для простоты изложения численные методы интегрирования ОДУ с пропорциональным запаздыванием опишем на примере задачи Коши для нелинейного ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), u(pt)), \quad 0 < t \leq T; \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \quad (5.1.5.1)$$

где $0 < p < 1$.

Отметим, что рассматриваемые далее методы допускают естественное обобщение на случай линейных и нелинейных ОДУ более высоких порядков с несколькими запаздываниями, а также систем таких ОДУ высоких порядков.

Квазигеометрическая сетка. При работе с ОДУ, содержащими пропорциональное запаздывание, полезно использовать *квазигеометрическую* сетку, предложенную в [127]. Пусть решение известно до некоторого значения $T_0 = t_0 > 0$. Строим *первичную* сетку по формуле

$$T_n = \frac{T_{n-1}}{p}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем *первичные* интервалы:

$$H_n = T_n - T_{n-1} = T_0 \frac{1-p}{p^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отметим, что интервалы H_n увеличиваются экспоненциально. Теперь введем *глобальную* сетку, разделив каждый первичный интервал на m равных подынтервалов:

$$h_{k+1} = \frac{H_{[k/m]+1}}{m} = \frac{T_0}{m} \frac{1-p}{p^{[k/m]+1}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где символ $[A]$ обозначает целую часть числа A . Тогда точки сетки определяются следующим образом:

$$t_k = T_{[k/m]} + r_{k/m} h_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.1.5.2)$$

где $r_{k/m} = k - m[k/m] \equiv k \bmod m$ — целочисленный остаток от деления k на m .

При $k > m$ из (5.1.5.2) следует рекуррентное соотношение:

$$t_k = p^{-1} t_{k-m}.$$

Построенная глобальная сетка (5.1.5.2) зависит от t_0 , m и p . Ее преимущество в том, что значения аргументов с запаздыванием pt оказываются известными на каждом шаге (отсутствует «наложение», т. е. для любого $t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем $pt < t_k$).

Сетки такого рода применяются для методов Рунге — Кутты [341, 359, 574] и методов с весами [127, 265, 356, 357], описанных далее.

Замечание 5.8. Можно построить аналогичную сетку более общего вида, если разделить *первичные* интервалы на m подынтервалов произвольной длины (см. [127]).

Метод с весами. Простейший метод интегрирования ОДУ с пропорциональным запаздыванием основан на использовании соотношения

$$u_{k+1} = u_k + h_{k+1}[(1-\sigma)f(t_k, u_k, \tilde{u}_h(pt_k)) + \sigma f(t_{k+1}, u_{k+1}, \tilde{u}_h(pt_{k+1}))], \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

При $\sigma = 0$ имеем формулы явного, а при $\sigma = 1$ — неявного метода Эйлера первого порядка аппроксимации; значение $\sigma = \frac{1}{2}$ соответствует методу трапеций второго порядка. Непрерывное приближенное решение $\tilde{u}_h(t)$ строится с помощью интерполяции. Например, в [356] используется кусочно-линейная интерполяция (5.1.4.5). Существуют также непрерывные методы, аналогичные описанным выше непрерывным методам для ОДУ с постоянным запаздыванием.

Более подробное описание и исследование методов с весами для линейных ОДУ с пропорциональным запаздыванием см. в [127, 265, 356], для родственных нелинейных ОДУ — в [357].

Методы Рунге — Кутты. Общие принципы построения методов Рунге — Кутты для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (5.1.5.1) совпадают с описанными выше принципами для ОДУ с постоянным запаздыванием. Разница заключается в том, что пропорциональное запаздывание равно нулю в точке $t = 0$, а значит, интегрирование должно проходить в два этапа [130, разд. 6.4.1]. Первый этап состоит из одного шага h_1 , на котором вычисляется величина

$$\begin{aligned}\tilde{u}_h(\theta h_1) &= u_0 + h_1 \sum_{m=1}^M c_m(\theta) r_1^{(m)}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \\ r_1^{(m)} &= f\left(t_1^{(m)}, u_0 + h_1 \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{mj} r_1^{(j)}, u_0 + h_1 \sum_{j=1}^{m-1} c_j(p\alpha_m) r_1^{(j)}\right).\end{aligned}$$

Далее расчет ведется по формулам:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_h(t_k + \theta h_{k+1}) &= u_k + h_{k+1} \sum_{m=1}^M c_m(\theta) r_{k+1}^{(m)}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \\ r_{k+1}^{(m)} &= f\left(t_{k+1}^{(m)}, u_k + h_{k+1} \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{mj} r_{k+1}^{(j)}, \bar{U}_{k+1}^{(m)}\right),\end{aligned}$$

где

$$\bar{U}_{k+1}^{(m)} = \begin{cases} u_k + h_{k+1} \sum_{j=1}^{m-1} c_j\left(\frac{pt_{k+1}^{(m)} - t_k}{h_{k+1}}\right) r_{k+1}^{(j)} & \text{при } pt_{k+1}^{(m)} > t_k; \\ \tilde{u}_h(pt_k^{(m)}) & \text{при } pt_{k+1}^{(m)} \leq t_k. \end{cases}$$

Вопросы устойчивости методов Рунге — Кутты для уравнений с пропорциональным запаздыванием рассматриваются в [331, 341, 359, 574].

Методы спектральной коллокации. Основная идея метода коллокаций была описана в разд. 1.4.6. Метод коллокаций в зависимости от конкретного выбора базисных функций порождает ряд специальных методов, называемых методами спектральной коллокации. Примеры базисных функций, используемых в методах спектральной коллокации для ОДУ с пропорциональным запаздыванием, приведены в табл. 5.1.

Многочлены Якоби, входящие в табл. 5.1 (см. предпоследнюю строку), определяются по формулам [434, 549]:

$$\begin{aligned}P_n^{(\alpha, \beta)}(t) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n}] = \\ &= 2^{-n} \sum_{m=0}^n C_{n+\alpha}^m C_{n+\beta}^{n-m} (t-1)^{n-m} (t+1)^m,\end{aligned}$$

Таблица 5.1. Базисные функции в методах спектральной коллокации для ОДУ с пропорциональным запаздыванием.

| Название | Базисные функции $\varphi_n(t)$ | Литература |
|---------------------------------|--|-----------------|
| Степенные функции | t^n | [269, 485, 488] |
| Экспоненты | e^{-nt} | [586] |
| Сдвинутые многочлены Чебышева | $T_n(t) = \cos[n \arccos(2tL^{-1} - 1)]$ | [484, 578] |
| Многочлены Эрмита | $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2})$ | [575] |
| Многочлены Бесселя первого рода | $J_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}$ | [585] |
| Рациональные функции Якоби | $R_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{t-1}{t+1} P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, где $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ — многочлены Якоби | [212] |
| Многочлены Бернулли | $B_n(t)$ | [518] |

где $C_a^0 = 1$ и $C_a^k = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}$ при $k = 1, 2, \dots$

Многочлены Бернулли, входящие в табл. 5.1 (см. последнюю строку), определяются по формулам [409, 434, 549]:

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n B_k C_n^k x^{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты, B_k — числа Бернулли, которые можно найти с помощью двойной суммы

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (-1)^m C_k^m m^n$$

или используя рекуррентные соотношения

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0.$$

Отметим, что числа Бернулли возникают при разложении в ряд Тейлора генерирующей функции:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi.$$

Это разложение иногда используется в качестве определения чисел Бернулли.

Числа Бернулли с нечётными номерами, кроме B_1 , равны нулю, а знаки чисел Бернулли с чётными номерами чередуются. Ниже приведены численные значения нескольких чисел Бернулли

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \\ B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = -\frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}.$$

5.1.6. Метод стрельбы (краевые задачи)

Предварительные замечания. Основная идея метода стрельбы (известного также как метод пристрелки) состоит в сведении решения исходной краевой задачи для заданного ОДУ с пропорциональным запаздыванием к последовательному решению ряда однотипных более простых задач Коши для того же самого уравнения (условия применимости метода стрельбы для ОДУ с переменным запаздыванием см. в [206]). Для наглядности независимую переменную будем обозначать x (вместо t) и ограничимся рассмотрением ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием, в которые помимо искомой функции $u = u(x)$ входит также функция $w = u(px)$, где $0 < p \leq 1$.

Краевые задачи с граничными условиями первого, второго и третьего рода, а также со смешанными граничными условиями. Пусть рассматривается краевая задача в области $x_1 \leq x \leq x_2$ (возможен любой из двух вариантов: $x_1 = 0, x_2 = L$ или $x_1 = L, x_2 = L$) для ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$u''_{xx} = f(x, u, u'_x, w, w'_x), \quad w = u(px), \quad (5.1.6.1)$$

с граничными условиями первого рода

$$u(x_1) = a, \quad u(x_2) = b, \quad (5.1.6.2)$$

где a и b — заданные числа.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для уравнения (5.1.6.1) с начальными условиями

$$u(x_1) = a, \quad u'_x(x_1) = \lambda. \quad (5.1.6.3)$$

Для любого λ решение этой задачи удовлетворяет первому граничному условию (5.1.6.2) в точке $x = x_1$ (решение можно получить методом Рунге — Кутты или с помощью любого другого подходящего численного метода). Исходная задача будет решена, если будет найдено такое значение $\lambda = \lambda_*$, при котором решение $u = u(x, \lambda_*)$ совпадет в точке $x = x_2$ со значением, задаваемым вторым граничным условием (5.1.6.2):

$$u(x_2, \lambda_*) = b.$$

Сначала задаем произвольное значение $\lambda = \lambda_1$ (например, $\lambda_1 = 0$) и численно решаем задачу Коши (5.1.6.1), (5.1.6.3). В результате получаем число

$$\Delta_1 = u(x_2, \lambda_1) - b. \quad (5.1.6.4)$$

Далее выбираем другое значение $\lambda = \lambda_2$, решаем задачу и получаем

$$\Delta_2 = u(x_2, \lambda_2) - b. \quad (5.1.6.5)$$

Предположим, что число λ_2 было выбрано так, что Δ_1 и Δ_2 имеют различные знаки (возможно, для выбора подходящего λ_2 потребуются несколько попыток). В силу непрерывности решения по λ искомое значение λ_* будет находиться между λ_1 и λ_2 . Тогда, например, положим $\lambda_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ и, снова решив задачу Коши, получим Δ_3 . Из двух предыдущих значений λ_j ($j = 1, 2$) оставим то, для которого Δ_j и Δ_3 будут иметь различные знаки. Искомое значение λ_* будет лежать между λ_j и λ_3 . Полагая далее $\lambda_4 = \frac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_3)$, находим Δ_4 и так далее. Процесс будем повторять до тех пор, пока не получим λ_* с требуемой точностью.

Замечание 5.9. Указанный алгоритм можно усовершенствовать, если вместо деления пополам воспользоваться формулами

$$\lambda_3 = \frac{|\Delta_2|\lambda_1 + |\Delta_1|\lambda_2}{|\Delta_2| + |\Delta_1|}, \quad \lambda_4 = \frac{|\Delta_3|\lambda_j + |\Delta_j|\lambda_3}{|\Delta_3| + |\Delta_j|}, \quad \dots$$

Формулировки начальных условий для вспомогательной задачи Коши. В табл. 5.2 приведены начальные условия, которые следует использовать во вспомогательной задаче Коши для численного решения краевых задач для ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием (5.1.6.1) с различными линейными и нелинейными граничными условиями на левом конце. Параметр λ в задаче Коши выбирается так, чтобы удовлетворить граничному условию на правом конце.

Таблица 5.2. Начальные условия во вспомогательной задаче Коши, используемой для решения краевых задач методом стрельбы ($x_1 \leq x \leq x_2$).

| № | Краевая задача | Граничное условие на левом конце | Начальные условия для задачи Коши |
|---|--|---|--|
| 1 | Первая краевая задача | $u(x_1) = a$ | $u(x_1) = a, \quad u'_x(x_1) = \lambda$ |
| 2 | Вторая краевая задача | $u'_x(x_1) = a$ | $u(x_1) = \lambda, \quad u'_x(x_1) = a$ |
| 3 | Третья краевая задача | $u'_x(x_1) - ku(x_1) = a$ | $u(x_1) = \lambda, \quad u'_x(x_1) = a + k\lambda$ |
| 4 | Задача с нелинейным граничным условием | $u'_x(x_1) = \varphi(u(x_1)),$ $\varphi(z)$ — заданная функция | $u(x_1) = \lambda, \quad u'_x(x_1) = \varphi(\lambda)$ |
| 5 | Задача с нелинейным граничным условием | $u(x_1) = \varphi(u'_x(x_1)),$ $\varphi(z)$ — заданная функция | $u(x_1) = \varphi(\lambda), \quad u'_x(x_1) = \lambda$ |

Важно отметить, что нелинейные краевые задачи могут иметь одно решение, несколько решений или не иметь решений вовсе (см. примеры 3.14 и 3.17 в книге [448, с. 142, 148], которые иллюстрируют эти три сценария с помощью

построения точных решений однопараметрических задач без запаздывания из теории горения). Поэтому при решении нелинейных задач требуется особая осторожность: после нахождения подходящего значения $\lambda = \lambda_1$ необходимо проверить другие допустимые значения в широком диапазоне изменения параметра λ . Если подходящего значения λ_1 не удастся найти, следует рассмотреть возможность, что задача может просто не иметь решения. Условия существования и единственности решения краевой задачи для нелинейного уравнения с запаздыванием рассматриваются в [31, 261, 482].

Линейные краевые задачи. Модифицированный метод стрельбы. Рассмотрим линейную краевую задачу для ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$u''_{xx} + f_1(x)u'_x + f_2(x)w'_x + f_3(x)u + f_4(x)w = g(x), \quad w = u(px), \quad (5.1.6.6)$$

и однородными граничными условиями третьего рода общего вида

$$a_1 u'_x + b_1 u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (5.1.6.7)$$

$$a_2 u'_x + b_2 u = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \quad (5.1.6.8)$$

Будем предполагать, что решение задачи (5.1.6.6)–(5.1.6.8) существует и единственно.

Решение линейной краевой задачи (5.1.6.6)–(5.1.6.8) проще всего получить с помощью модифицированного метода стрельбы, который излагается ниже.

Сначала найдем вспомогательную функцию $u_1 = u_1(x)$, которая является решением вспомогательной задачи Коши для линейного неоднородного уравнения (5.1.6.6) с начальными условиями

$$u = a_1 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad u'_x = -b_1 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (5.1.6.9)$$

Из (5.1.6.9) следует, что функция $u_1 = u_1(x)$ удовлетворяет левому граничному условию (5.1.6.7). Затем найдем вспомогательную функцию $u_0 = u_0(x)$, которая является решением другой вспомогательной задачи Коши для линейного однородного уравнения (5.1.6.6) при $g(x) = 0$ с граничными условиями (5.1.6.9). Ввиду линейности этой задачи и однородности граничных условий функция $Cu_0(x)$ также будет решением уравнения (5.1.6.6), удовлетворяющим левому граничному условию (5.1.6.7). Поэтому решение исходной краевой задачи (5.1.6.6)–(5.1.6.8) ищем в виде суммы

$$u(x) = u_1(x) + Cu_0(x). \quad (5.1.6.10)$$

Поскольку функция (5.1.6.10) должна удовлетворять правому граничному условию (5.1.6.8), получим линейное алгебраическое уравнение для определения постоянной C :

$$a_2 u'_1(l) + b_2 u_1(l) + C[a_2 u'_0(l) + b_2 u_0(l)] = 0. \quad (5.1.6.11)$$

Таким образом, решение исходной краевой задачи (5.1.6.6) — (5.1.6.8) свелось к решению двух вспомогательных задач Коши, которые можно численно проинтегрировать любым численным методом, описанным в данной главе. В случае краевой задачи с неоднородными граничными условиями на предварительном этапе надо сделать преобразование, сводящее ее к задаче с однородными граничными условиями (это всегда можно сделать с помощью замены $u = v + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$, выбирая подходящим образом постоянные A_m).

5.1.7. Использование пакета Mathematica для численного интегрирования жестких систем ОДУ с запаздыванием

Предварительные замечания. В предыдущих разделах были рассмотрены некоторые методы численного интегрирования ОДУ с запаздыванием. Эти методы можно обобщить на случай систем ОДУ. Однако не все из них хорошо работают с жесткими системами, которые, в частности, возникают при пространственной дискретизации УрЧП с запаздыванием в методе прямых (см. далее разд. 5.2.2). Система называется *жесткой*, если она описывает процессы, происходящие на сильно отличающихся временных масштабах [76, 148]. При численном решении таких задач ограничения на размер шага накладываются не для повышения точности, а для обеспечения устойчивости алгоритма [148], причем обычно подходят лишь чрезмерно маленькие шаги. Для решения жестких систем применяются неявные методы из классов Рунге — Кутты и многошаговых методов Гира.

Для численного решения жестких систем ОДУ с постоянным запаздыванием целесообразно использовать широко распространенные программные пакеты Mathematica и Maple, которые позволяют проводить компьютерные вычисления и программировать в аналитической (символьной) форме. Далее мы ограничимся описанием практического применения пакета Mathematica для решения таких уравнений.

В пакете Mathematica жесткие системы ОДУ с постоянным запаздыванием (в том числе с несколькими запаздываниями) численно решаются с помощью команды NDSolve [554–556]. Без дополнительных опций команда NDSolve использует комплексный метод, при котором в процессе вычисления происходит автоматическая смена методов и выбор значений параметров метода. С помощью опции Method команды NDSolve можно вручную задать один из встроенных методов решения жестких систем ОДУ: неявный метод Рунге — Кутты [557, 558] или неявный многошаговый метод Гира, основанный на формуле дифференцирования назад (BDF — Backward differentiation formula [559]).

Приведем далее краткое описание методов на примере задачи Коши для системы ОДУ с постоянным запаздыванием, записанной в векторной форме:

$$\begin{aligned} u'_t &= f(t, u, u(t - \tau)), \quad 0 < t \leq T; \\ u(t) &= \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (5.1.7.1)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T$ — вектор-столбцы.

Неявный метод Рунге — Кутты. Принципы построения схем Рунге — Кутты для ОДУ с запаздыванием описаны в разд. 5.1.4. Неявные схемы Рунге — Кутты для жестких систем ОДУ (5.1.7.1) строятся аналогично и определяются формулами [130, 557, 558]:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + h_{k+1} \sum_{m=1}^M c_m \mathbf{r}_{k+1}^{(m)}, \quad k = 0, \dots, K-1, \quad (5.1.7.2)$$

$$\mathbf{r}_{k+1}^{(m)} = \mathbf{f} \left(t_k + \alpha_m h_{k+1}, \mathbf{u}_k + h_{k+1} \sum_{j=1}^{M_*} \beta_{mj} \mathbf{r}_{k+1}^{(j)}, \mathbf{u}(t_k + \alpha_m h_{k+1} - \tau) \right), \quad (5.1.7.3)$$

где $\mathbf{r}_k^{(m)} = (r_{1,k}^{(m)}, r_{2,k}^{(m)}, \dots, r_{N,k}^{(m)})^T$ — вектор-столбец вспомогательных функций $r_{n,k}^{(m)}$, каждая из которых соответствует искомой функции u_n , временному слою t_k и стадии m , $n = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$; $h_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ — шаг сетки, c_m — веса квадратурной формулы ($0 \leq c_m \leq 1$), α_m — коэффициенты, определяющие узлы квадратурной формулы, β_{mj} — веса промежуточных квадратурных формул. Значения функций с запаздыванием $\mathbf{u}(t_k + \alpha_m h_{k+1} - \tau)$ вычисляются с помощью интерполяции на отрезке $[t_q, t_{q+1}]$, где $q > 0$ — такое целое число, что $t_q \leq t_k + \alpha_m h_{k+1} - \tau \leq t_{q+1}$, если значение $t_k + \alpha_m h_{k+1} - \tau$ лежит вне точек сетки, и совпадают со значениями \mathbf{u}_q , которые были вычислены ранее на слое t_q , если $t_k + \alpha_m h_{k+1} - \tau = t_q$. Различные методы Рунге — Кутты порождаются различными квадратурными формулами, которые определяются наборами коэффициентов β_{mj} , c_m и α_m .

Метод, основанный на формулах (5.1.7.2) — (5.1.7.3), является неявным M -стадийным методом. Его отличие от явного метода (5.1.4.13) (помимо того, что он записан для систем) в том, что сумма в (5.1.7.3) вычисляется до M_* , а не до $m-1$. При $M_* = m-1$ имеем явный метод (5.1.4.13), записанный для систем ОДУ. В случае $M_* = m$ значения $\mathbf{r}_k^{(m)}$ находятся последовательно из отдельных нелинейных уравнений. В случае $M_* = M$ значения $\mathbf{r}_k^{(m)}$ необходимо искать сразу для всех стадий из системы $N \times M$ уравнений, которая по умолчанию в пакете Mathematica решается методом Ньютона (описание этого метода см. в [30, 76]).

Для успешного решения жестких задач важно подобрать соответствующие коэффициенты квадратурных формул. В пакете Mathematica по умолчанию значения коэффициентов определяются автоматически. Но можно выбрать вид этих коэффициентов вручную с помощью свойства `Coefficients` опции `Method` команды `NDSolve` [558]. Например, это могут быть коэффициенты Лобатто ПС, которые основаны на квадратурных формулах Лобатто [92, 358]. Первый и последний узлы квадратурной формулы Лобатто совпадают с началом и концом отрезка интегрирования, поэтому $\alpha_1 = 0$, $\alpha_M = 1$; остальные

коэффициенты α_m являются нулями производных многочленов Лежандра:

$$\frac{d^{M-2}}{d\alpha_m^{M-2}}(\alpha_m^{M-1}(\alpha_m - 1)^{M-1}) = 0. \quad (5.1.7.4)$$

В результате получаются квадратурные формулы порядка $2M - 2$. Веса c_1, \dots, c_M и коэффициенты β_{mj} квадратурных формул Лобатто определяются из условий

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M c_m \alpha_m^{\gamma-1} &= \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma = 1, \dots, 2M - 2; \\ \sum_{j=1}^M \beta_{mj} \alpha_j^{\gamma-1} &= \frac{\alpha_m^\gamma}{\gamma}, \quad m = 1, \dots, M, \quad \gamma = 1, \dots, M - 1; \\ \beta_{m1} &= c_1, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (5.1.7.5)$$

Размер шага h_k метода (5.1.7.2)–(5.1.7.3) в пакете Mathematica определяется автоматически исходя из оценки локальной погрешности решения [557]. Для этого решения, полученные основным методом с порядком аппроксимации p и весами c_m сравниваются с решениями вспомогательного метода с порядком \hat{p} и весами \hat{c}_m (по умолчанию $\hat{p} = p - 1$). При этом коэффициенты α_m и β_{mj} обоих методов совпадают, а значит, совпадают и значения $s_k^{(m)}$, что отменяет необходимость второй раз решать нелинейную систему (5.1.7.3).

Замечание 5.10. В задачах с решениями, достигающими абсолютных значений высоких порядков (см., например, тестовую задачу 2 разд. 5.2) команде `NDSolve` с выбранным методом Рунге–Кутты могут потребоваться минуты и десятки минут для построения решения. Существенно сократить время работы метода до нескольких секунд можно увеличением допустимых абсолютной и относительной погрешностей с помощью опций `AccuracyGoal` $\rightarrow q$ и `PrecisionGoal` $\rightarrow p$. При заданных значениях q и p программа попытается сделать так, чтобы погрешность численного решения не превысила значения $10^{-q} + 10^{-p}|x|$.

Метод Гира. Метод Гира встроен в пакет Mathematica как часть пакета IDA, входящего в библиотеку методов SUNDIALS, которая разрабатывается Ливерморской национальной лабораторией им. Э. Лоуренса, США (IDA — Implicit Differential-Algebraic solver — неявный дифференциально-алгебраический решатель, SUNDIALS — SUite of Nonlinear and Differential/ALgebraic equation Solvers — набор нелинейных и дифференциальных/алгебраических решателей) [559]. Программный код методов IDA (см. руководство пользователя [282]) основан на DASPK [158, 159] — программах на языке Фортран, позволяющих решать дифференциально-алгебраические системы больших размерностей.

M -шаговый метод Гира для системы (5.1.7.1) основан на формуле [76, 148, 282]:

$$\alpha_0 \mathbf{u}_k - h_k \mathbf{f}(t_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}(t_k - \tau)) = - \sum_{m=1}^M \alpha_m \mathbf{u}_{k-m}. \quad (5.1.7.6)$$

Значения $\mathbf{u}(t_k - \tau)$ вычисляются с помощью интерполяции на отрезке $[t_q, t_{q+1}]$, где $q > 0$ — такое целое число, что $t_q \leq t_k - \tau \leq t_{q+1}$, если значение $t_k - \tau$ лежит вне точек сетки, и совпадают со значениями \mathbf{u}_q , которые были вычислены ранее на слое t_q , если $t_k - \tau = t_q$. Систему нелинейных алгебраических уравнений (5.1.7.6) можно решать тем или иным итерационным методом, например, методом Ньютона.

Чтобы метод Гира имел p -й порядок аппроксимации, следует положить [76, с. 255]:

$$\alpha_0 = - \sum_{m=1}^M \alpha_m, \quad \sum_{m=1}^M m \alpha_m = -1, \quad \sum_{m=1}^M m^j \alpha_m = 0, \quad j = 2, 3, \dots, p. \quad (5.1.7.7)$$

Наивысший достижимый порядок аппроксимации M -шагового метода Гира равен M .

Полагая $M = 1$ в (5.1.7.6) — (5.1.7.7), получим формулу неявного метода Эйлера (5.1.4.6). При $M = 2$, $M = 3$ и $M = 4$ имеем соотношения [76, с. 256]:

$$\begin{aligned} 3\mathbf{u}_k - 4\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-2} &= 2h_k \mathbf{f}(t_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}(t_k - \tau)), \\ 11\mathbf{u}_k - 18\mathbf{u}_{k-1} + 9\mathbf{u}_{k-2} - 2\mathbf{u}_{k-3} &= 6h_k \mathbf{f}(t_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}(t_k - \tau)), \\ 25\mathbf{u}_k - 48\mathbf{u}_{k-1} + 36\mathbf{u}_{k-2} - 16\mathbf{u}_{k-3} + 3\mathbf{u}_{k-4} &= 12h_k \mathbf{f}(t_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}(t_k - \tau)), \end{aligned}$$

определяющие методы Гира второго, третьего и четвертого порядка аппроксимации соответственно.

В Mathematica метод Гира на каждом временном слое вычисляет оценку \mathbf{E}_k локальной погрешности и автоматически выбирает размер шага h_k и порядок M таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\|\mathbf{E}_k / \omega_k\| < 1$, где n -я компонента $\omega_{n,k}$ вектора ω_k определяется по формуле

$$\omega_{n,k} = \frac{1}{10^{-p}|u_{n,k}| + 10^{-q}}.$$

Значения констант p и q находятся с помощью опций `PrecisionGoal` $\rightarrow p$ и `AccuracyGoal` $\rightarrow q$ команды `NDSolve`. Норма $\|\cdot\|$ по умолчанию автоматически выбирается командой `NDSolve` в зависимости от метода решения (но может быть задана вручную). Для метода Гира это норма вида $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ [560].

Шаги h_k выбираются командой `NDSolve` автоматически. Максимальное количество шагов, за которое программа обязана построить решение, по умолчанию оценивается по величине начального шага [561], что может оказаться несостоятельным, если, например, решение неограниченно возрастает по экспоненциальному закону (см., например, тестовую задачу 2 разд. 5.2). Снять это ограничение можно с помощью опции `MaxSteps` $\rightarrow \infty$ внутри команды `NDSolve`.

5.1.8. Тестовые задачи для ОДУ с запаздыванием. Сопоставление численных и точных решений

Некоторые точные решения ОДУ с запаздыванием представлены в [81, 213, 214, 440]. Воспользуемся результатами этих работ, чтобы построить несколько модельных задач для тестирования функции `NDSolve`.

В рассматриваемых далее тестовых задачах для ОДУ с запаздыванием, как правило, решение задач велось на временном интервале $T = 50\tau$ для трех времен запаздывания: $\tau = 0.05$, $\tau = 0.1$, $\tau = 0.5$. Использованы следующие численные методы, встроенные в программный пакет `Mathematica 11.2.0`:

- 1) метод Рунге — Кутты второго порядка аппроксимации,
- 2) метод Рунге — Кутты четвертого порядка аппроксимации,
- 3) метод Гира,
- 4) комплексный метод, основанный на комбинации разных методов.

Под относительной погрешностью численного решения $u_k = u_h(t_k)$ тестовой задачи для ОДУ с запаздыванием будем понимать величину

$$\sigma = \max_{1 \leq k \leq K} |(u_e - u_k)/u_e|,$$

где $u_e = u_e(t_k)$ — значение точного решения этой задачи при $t = t_k$, K — количество шагов по времени, выбираемое командой `NDSolve` автоматически.

Тестовая задача 1. Задача Коши для нелинейного ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} u'_t &= a(1 - ab\tau^2) + b(u - w)^2, \quad w = u(t - \tau), \quad t > 0; \\ u(t) &= at + c, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (5.1.8.1)$$

имеет точное решение

$$u(t) = at + c, \quad t > 0. \quad (5.1.8.2)$$

Здесь a, b, c — свободные параметры.

Задачу Коши (5.1.8.1) удалось решить на всем временном интервале для всех трех времен запаздывания всеми используемыми численными методами с относительной погрешностью порядка 10^{-15} . Методы Рунге — Кутты сталкиваются с некоторыми проблемами в начальные моменты времени: программа выбирает шаг автоматически и делает его чрезвычайно малым, что приводит к повышению количества итераций и потенциально может значительно увеличить время работы метода. На рис. 5.1 кружочками изображены результаты численных решений, полученных методом Рунге — Кутты второго порядка и методом Гира для времени запаздывания $\tau = 0.5$ и значений параметров $a = 0.5$, $b = 1$, $c = 1$; сплошные линии соответствуют точным решениям вида (5.1.8.2).

Тестовая задача 2. Задача Коши для нелинейного ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} u'_t &= w^2/u, \quad w = u(t - \tau), \quad t > 0; \\ u(t) &= e^{\beta t}, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (5.1.8.3)$$

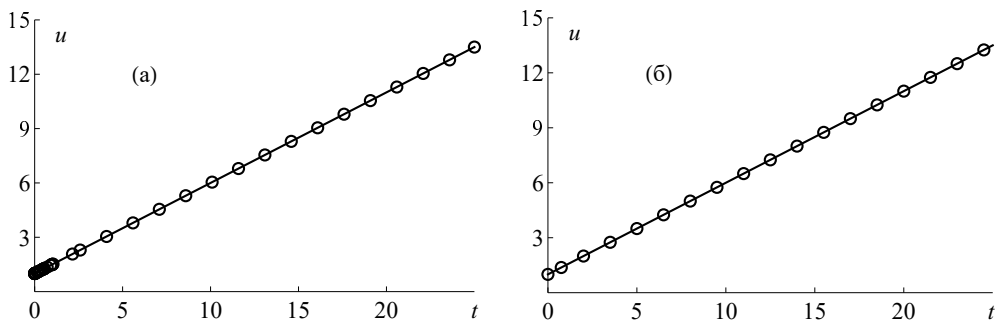


Рис. 5.1. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки) тестовой задачи (5.1.8.1) при $a = 0.5$, $b = 1$, $c = 1$ и $\tau = 0.5$, полученные методами: а) Рунге — Кутты второго порядка и б) Гира.

имеет точное решение

$$u(t) = e^{\beta t}, \quad t > 0. \quad (5.1.8.4)$$

При заданном τ значение параметра β определяется численно из трансцендентного уравнения

$$\beta - e^{-2\beta\tau} = 0$$

с помощью команды FindRoot [562].

Задачу Коши (5.1.8.3) удалось решить на всем временном интервале для всех трех времен запаздывания всеми методами с такими относительными погрешностями численных решений: 10^{-7} — для комплексного метода и метода Гира, 10^{-8} — для метода Рунге — Кутты второго порядка, 10^{-13} — для метода Рунге — Кутты четвертого порядка. На рис. 5.2 представлены графики точного решения (5.1.8.4) и полученного методом Рунге — Кутты четвертого порядка численного решения задачи (5.1.8.3) для времен запаздывания $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.5$. Видна качественная разница между решениями при малых и умеренных временах запаздывания.

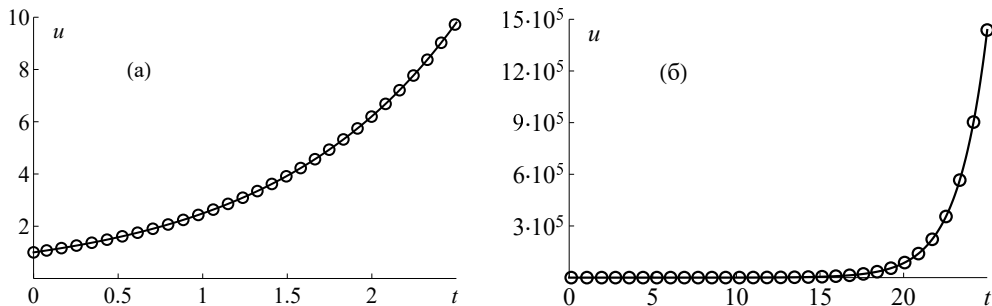


Рис. 5.2. Точные решения (сплошные линии) и полученные методом Рунге — Кутты четвертого порядка численные решения (кружочки) задачи (5.1.8.3) для двух времен запаздывания: а) $\tau = 0.05$ и б) $\tau = 0.5$.

Тестовая задача 3. Задача Коши для нелинейного ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} u'_t &= w \exp(u^2 + w^2), \quad w = u(t - \tau), \quad t > 0; \\ u(t) &= \sqrt{\ln \beta} \cos(\beta t), \quad \beta = \frac{3\pi}{2\tau}, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (5.1.8.5)$$

имеет периодическое точное решение

$$u(t) = \sqrt{\ln \beta} \cos(\beta t), \quad t > 0. \quad (5.1.8.6)$$

При интегрировании задачи (5.1.8.5) каждый из используемых численных методов хорошо описывает несколько периодов, а затем прерывается с ошибкой. Временные интервалы адекватных расчетов по методам Рунге — Кутты шире, чем по методу Гира и комплексному методу. С увеличением запаздывания τ эти интервалы расширяются. На рис. 5.3 кружочками изображены результаты численных решений задачи (5.1.8.5), полученные методом Рунге — Кутты четвертого порядка для времен запаздывания $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.5$ (графики численных решений рассматриваемой задачи, полученных другими методами, качественно аналогичны приведенным и здесь опускаются); сплошные линии соответствуют точным решениям вида (5.1.8.6).

Отметим, что решение (5.1.8.6) быстро осциллирует при малых τ и является сингулярным относительно параметра запаздывания (поскольку это решение не имеет предела при $\tau \rightarrow 0$). Это обстоятельство ограничивает возможности используемых здесь численных методов при малых τ . Срыв численного решения при умеренных значениях τ , по-видимому, связан с неустойчивостью рассматриваемого периодического решения. Косвенным подтверждением высказанного предположения может служить неустойчивость (в линейном приближении) единственного стационарного решения $u = 0$ данного уравнения.

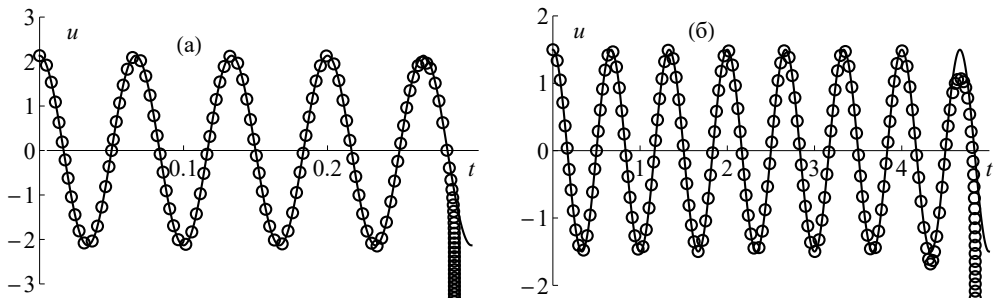


Рис. 5.3. Точные решения (сплошные линии) и полученные методом Рунге — Кутты четвертого порядка численные решения (кружочки) задачи (5.1.8.5) для двух времен запаздывания: а) $\tau = 0.05$ и б) $\tau = 0.5$.

Замечание 5.11. Описанные в разд. 5.1.7 численные методы, встроенные в пакет *Mathematica*, применялись также для решения задач Коши для некоторых нелинейных

ОДУ с запаздыванием. В разд. 6.1.1 методом Рунге—Кутты второго порядка интегрировалась задача для уравнения Хатчинсона; в разд. 6.1.2 методом Гира получено решение задачи для уравнения Николсона; в разд. 6.1.3 методом Рунге—Кутты четвертого порядка решена задача для системы типа Мэкки—Гласса.

5.2. Численное интегрирование УрЧП с запаздыванием

5.2.1. Предварительные замечания. Метод декомпозиции области по времени

Предварительные замечания. Задача для реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием. Качественные особенности численного интегрирования УрЧП с запаздыванием во многом аналогичны особенностям численного интегрирования ОДУ с запаздыванием (см. разд. 5.1.2). Поэтому процедура получения численных решений УрЧП с запаздыванием является более сложной, чем для аналогичных УрЧП без запаздывания.

Отметим, что формулировки начальных данных и граничных условий для нелинейных УрЧП с запаздыванием (примеры таких уравнений можно найти в гл. 3) совпадают с формулировками начальных данных и граничных условий для линейных УрЧП, которые приведены в разд. 2.2.

Рассмотрим начально-краевую задачу для квазилинейного уравнения реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + f(u, w), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.2.1.1)$$

где $u = u(x, t)$, $w = u(x, t - \tau)$, $a > 0$, с начальными данными

$$u(x, t) = g(x, t), \quad 0 < x < L, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (5.2.1.2)$$

и однородными граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.2.1.3)$$

Замечание 5.12. Задача, которая описывается УрЧП с запаздыванием (5.2.1.1) с начальными данными (5.2.1.2) и неоднородными граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t), \quad t > 0,$$

где $h_1(t)$ и $h_2(t)$ — заданные функции, подстановкой $u = U + h_1(t) + \frac{x}{L}[h_2(t) - h_1(t)]$ сводится к начально-краевой задаче с запаздыванием с однородными граничными условиями для функции $U = U(x, t)$. В этом случае преобразованное уравнение будет явно зависеть от переменных x и t , что является малосущественным осложнением задачи.

Метод декомпозиции области по времени для УрЧП с запаздыванием.

При постоянном запаздывании можно произвести декомпозицию рассматриваемого промежутка времени $0 \leq t \leq T$, разделив $[0, T]$ на несколько отрезков

равной длины: $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$, ... (см., например, [279]). В этом случае задача (5.2.1.1)–(5.2.1.3) на отрезке $0 < t \leq \tau$ принимает вид

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + f(u, g), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq \tau, \\ u(x, 0) &= g(x, 0), \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (5.2.1.4)$$

Здесь учтено, что $w(x, t) \equiv g(x, t)$ при $0 < t \leq \tau$. Пусть получена функция $u_1(x, t)$ — решение задачи (5.2.1.4), которая является задачей без запаздывания. Тогда можно перейти к решению подзадачи на следующем отрезке $\tau < t \leq 2\tau$, которая записывается так:

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + f(u, u_1), \quad 0 < x < L, \quad \tau < t \leq 2\tau, \\ u(x, \tau) &= u_1(x, \tau), \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \tau < t \leq 2\tau. \end{aligned} \quad (5.2.1.5)$$

Здесь уже $w(x, t) \equiv u_1(x, t)$ при $\tau < t \leq 2\tau$. Рассуждая далее аналогичным образом, можно в итоге построить решение исходной задачи (5.2.1.1)–(5.2.1.3). Каждая подзадача является задачей без запаздывания, которая может быть решена любым известным аналитическим или численным методом для уравнений в частных производных без запаздывания (например, разностными методами или методом конечных элементов).

Замечание 5.13. Метод декомпозиции области по времени является естественным обобщением метода шагов, который используется для решения задач Коши для ОДУ с запаздыванием (см. разд. 1.1.5). Если $f(u, w) = f_1(w)u + f_0(w)$ в уравнении (5.2.1.1), то подзадачи на всех отрезках $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$, ... будут линейными.

5.2.2. Метод прямых (сведение УрЧП с запаздыванием к системе ОДУ с запаздыванием)

Предварительные замечания. На данный момент теория решения ОДУ с запаздыванием является достаточно хорошо разработанной по сравнению с теорией решения УрЧП с запаздыванием. Это касается как аналитических (см., например, главу 1 и [8, 94, 216, 222, 272, 328, 329, 333, 495]), так и численных методов (см., например, разд. 5.1 и [130, 334, 493]). Вдобавок, широко распространенные программные пакеты, такие как Maple, Mathematica и MATLAB, позволяют решать ОДУ первого порядка с запаздыванием [379, 381, 556]. Поэтому полезно сначала свести уравнение с запаздыванием в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и затем решать именно ее, а не исходное уравнение. Такой подход часто реализуется с помощью метода прямых [55, 284]. Большое число программ, анализирующих модели для УрЧП с запаздыванием с помощью метода прямых, содержится в книге [483].

УрЧП реакционно-диффузионного типа с запаздыванием. Введем пространственную сетку $x_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, $h = L/N$ — шаг сетки, N — число

пространственных интервалов. Сведем задачу (5.2.1.1) – (5.2.1.3) к системе ОДУ, аппроксимировав пространственную производную разностным аналогом и записав уравнение в точке x_n :

$$\begin{aligned}(u_n)'_t &= a\delta_{xx}u_n + f(u_n, w_n), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad 0 < t \leq T; \\ u_0(t) &= u_N(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \\ u_n(t) &= g_n(t), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad -\tau \leq t \leq 0,\end{aligned}\tag{5.2.2.1}$$

где $\delta_{xx}u_n = h^{-2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$. Система (5.2.2.1) содержит $N-1$ неизвестных функций $u_n(t)$ и столько же уравнений, а также две известные функции $u_0(t)$ и $u_N(t)$.

Главная проблема такого подхода заключается в том, что полученная система ОДУ с запаздыванием часто оказывается жесткой, когда шаг сетки приходится уменьшать из соображений устойчивости, а не с целью увеличения точности алгоритма. Для решения такой системы требуется разработка и применение специальных методов, обладающих повышенной устойчивостью [120, 493]. Обычно это алгоритмы из класса неявных методов Рунге – Кутты [130, 297, 407]. Их использование предполагает вычисления в нескольких точках $t_m + \alpha_j s_m$, где s_m – шаг по времени, что влечет за собой вычисление значений функций с запаздыванием в точках $t_m + \alpha_j s_m - \tau$, которые могут не совпадать с точками сетки. В этом случае привлекают алгоритмы интерполяции. Подробное описание методов Рунге – Кутты см. в разд. 5.1.4 и 5.1.7.

Более высокой точности можно добиться, если провести дискретизацию по пространству с помощью точек Чебышева – Гаусса – Лобатто [143, 301, 385, 421]:

$$x_n = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Тогда пространственная производная аппроксимируется по формуле

$$u_{xx}(x_n, t) \approx \sum_{i=0}^N c_{ni} u(x_i, t),$$

где c_{ni} – коэффициенты дифференциальной матрицы (подробности, см. в [169, 238, 550]). В результате, учитывая однородные граничные условия, получим нелинейную систему ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}(u_n)'_t &= a \sum_{i=1}^{N-1} c_{ni} u_i + f(u_n, w_n), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad 0 < t \leq T; \\ u_n(t) &= g_n(t), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad -\tau \leq t \leq 0.\end{aligned}\tag{5.2.2.2}$$

При $f(u, w) = ur(w)$ систему (5.2.2.2) удобно записать в операторной форме [301]:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'_t &= a\mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{R}\mathbf{u}, \quad 0 < t \leq T; \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}, \quad -\tau \leq t \leq 0,\end{aligned}$$

где \mathbf{u}, \mathbf{g} — вектор-столбцы, $\mathbb{C} = [c_{ni}]_{n,i=1}^{N-1}$ — дифференциальная матрица, $\mathbb{R} = \text{diag}\{r(w_1), \dots, r(w_{N-1})\}$ — диагональная матрица. Применим разложение Гаусса — Якоби:

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} + \mathbb{B}, \quad \mathbb{A} = \text{diag}\{C\}, \quad B = C - A.$$

Аппроксимируя функцию с запаздыванием \mathbf{w} значениями с предыдущей итерации $\mathbf{w}^{(k)}$, получаем систему ОДУ для значений функции на следующей итерации $\mathbf{u}^{(k+1)}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{(k+1)})'_t &= (a\mathbb{A} + \mathbb{R}^{(k)})\mathbf{u}^{(k+1)} + a\mathbb{B}\mathbf{u}^{(k)}, \quad 0 < t \leq T; \\ \mathbf{u}^{(k+1)} &= \mathbf{g}, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

где $k = 0, 1, \dots$ и $\mathbf{u}^{(0)}$ — произвольное начальное значение. Обычно берется

$$\mathbf{u}^{(0)} = \begin{cases} \mathbf{g}(t), & -\tau \leq t \leq 0, \\ \mathbf{g}(0), & t > 0. \end{cases}$$

Итоговая линейная система ОДУ подходит для параллельных вычислений [301] и решается методами, описанными в разд. 5.1.4 и 5.1.7.

УрЧП волнового типа с запаздыванием. Рассмотрим теперь начально-краевую задачу для нелинейного уравнения волнового типа с запаздыванием достаточно общего вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{tt} + \sigma u_t &= [p(x, u)u_x]_x + q(x, u, w)u_x + f(x, u, w), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L; \\ u(x, t) &= \varphi_0(x, t), \quad u_t(x, t) = \varphi_1(x, t), \quad -\tau \leq t \leq 0; \\ u(0, t) &= \psi_0(t), \quad u(1, t) = \psi_1(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5.2.2.3)$$

где $w = u(x, t - \tau)$; функции p, q и f дополнительно могут явно зависеть от t . Это уравнение включает в себя как частные случаи реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием ($\varepsilon = 0, \sigma = 1$), уравнения типа Клейна — Гордона с запаздыванием ($\varepsilon = 1, \sigma = 0$), нелинейные телеграфные уравнения с запаздыванием ($\varepsilon = 1, \sigma \neq 0$).

Для применения метода прямых к уравнениям гиперболического типа необходимо ввести вторую искомую функцию $v = u_t$. В итоге получим:

$$\begin{aligned} u_t &= v, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L; \\ \varepsilon v_t + \sigma v &= [p(x, u)u_x]_x + q(x, u, w)u_x + f(x, u, w), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L; \\ u(x, t) &= \varphi_0(x, t), \quad v(x, t) = \varphi_1(x, t), \quad -\tau \leq t \leq 0; \\ u(0, t) &= \psi_0(t), \quad u(L, t) = \psi_1(t), \quad t > 0, \\ v(0, t) &= (\psi_0)'_t, \quad v(L, t) = (\psi_1)'_t, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (5.2.2.4)$$

Введем пространственную сетку $x_n = nh$, где $n = 0, 1, \dots, N$, $h = L/N$ — шаг сетки, N — число пространственных интервалов. Аппроксимируя производные

по x разностными аналогами и записывая уравнение в точке x_n , сводим задачу (5.2.2.4) к системе ОДУ:

$$\begin{aligned}(u_n)'_t &= v_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad 0 < t \leq T; \\ \varepsilon(v_n)'_t + \sigma v_n &= \delta_x[p_n \delta_x u_n] + q_n \delta_x u_n + f_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad 0 < t \leq T; \\ u_n(t) &= \varphi_0(x_n, t), \quad v_n(t) = \varphi_1(x_n, t), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad -\tau \leq t \leq 0; \\ u_0(t) &= \psi_0(t), \quad u_N(t) = \psi_1(t), \quad 0 < t \leq T, \\ v_0(t) &= (\psi_0)'_t, \quad v_N(t) = (\psi_1)'_t, \quad 0 < t \leq T.\end{aligned}\tag{5.2.2.5}$$

Здесь $u_n = u_n(t) = u(x_n, t)$, $v_n = v_n(t) = v(x_n, t)$, $w_n = u(x_n, t - \tau)$, $p_n = p(x_n, u_n)$, $q_n = q(x_n, u_n, w_n)$, $f_n = f(x_n, u_n, w_n)$, T — временной интервал вычислений, δ_x — разностный оператор, который имеет вид:

$$\begin{aligned}\delta_x u_n &= \frac{1}{h}(u_{n+1} - u_n), \\ \delta_x[p_n \delta_x u_n] &= \frac{1}{h^2}[p_n(u_{n+1} - u_n) - p_{n-1}(u_n - u_{n-1})].\end{aligned}$$

Система (5.2.2.5) содержит $N-1$ неизвестную функцию $u_n(t)$, $N-1$ неизвестную функцию $v_n(t)$ и $2N-2$ уравнения, а также четыре известные функции $u_0(t)$, $u_N(t)$, $v_0(t)$, $v_N(t)$.

Схема численного решения задач с запаздыванием методом прямых с помощью пакета Mathematica. Процедура численного интегрирования начально-краевой задачи (5.2.2.3) с использованием пакета Mathematica схематически изображена на рис. 5.4 и может быть описана в виде следующей последовательности действий:

1°. Формулируем задачу, состоящую из уравнения, начальных данных и граничных условий.

2°. Выбираем N — число пространственных интервалов.

3°. Если рассматривается уравнение гиперболического типа, то вводим новую переменную $v = u_t$.

4°. Применяем метод прямых и получаем систему ОДУ с запаздыванием, состоящую, если рассматривается параболическое уравнение, из $N-1$ уравнения и $N-1$ начального условия (плюс два алгебраических соотношения на границе области), или, если рассматривается гиперболическое уравнение, из $2N-2$ уравнений и $2N-2$ начальных условий (плюс четыре алгебраических соотношения на границе области).

5°. Выбираем временной интервал $0 < t \leq T$ интегрирования системы.

6°. Решаем систему ОДУ из п. 4° с помощью одного из методов команды NDSolve.

7°. В случае возникновения ошибок в процессе расчета, пробуем сократить временной интервал вычислений из п. 5° и пытаемся получить удовлетворительное решение на более коротком временном интервале.

8°. В итоге получаем значения искомой функции на всех временных слоях, значения абсолютных и относительных погрешностей на точном решении

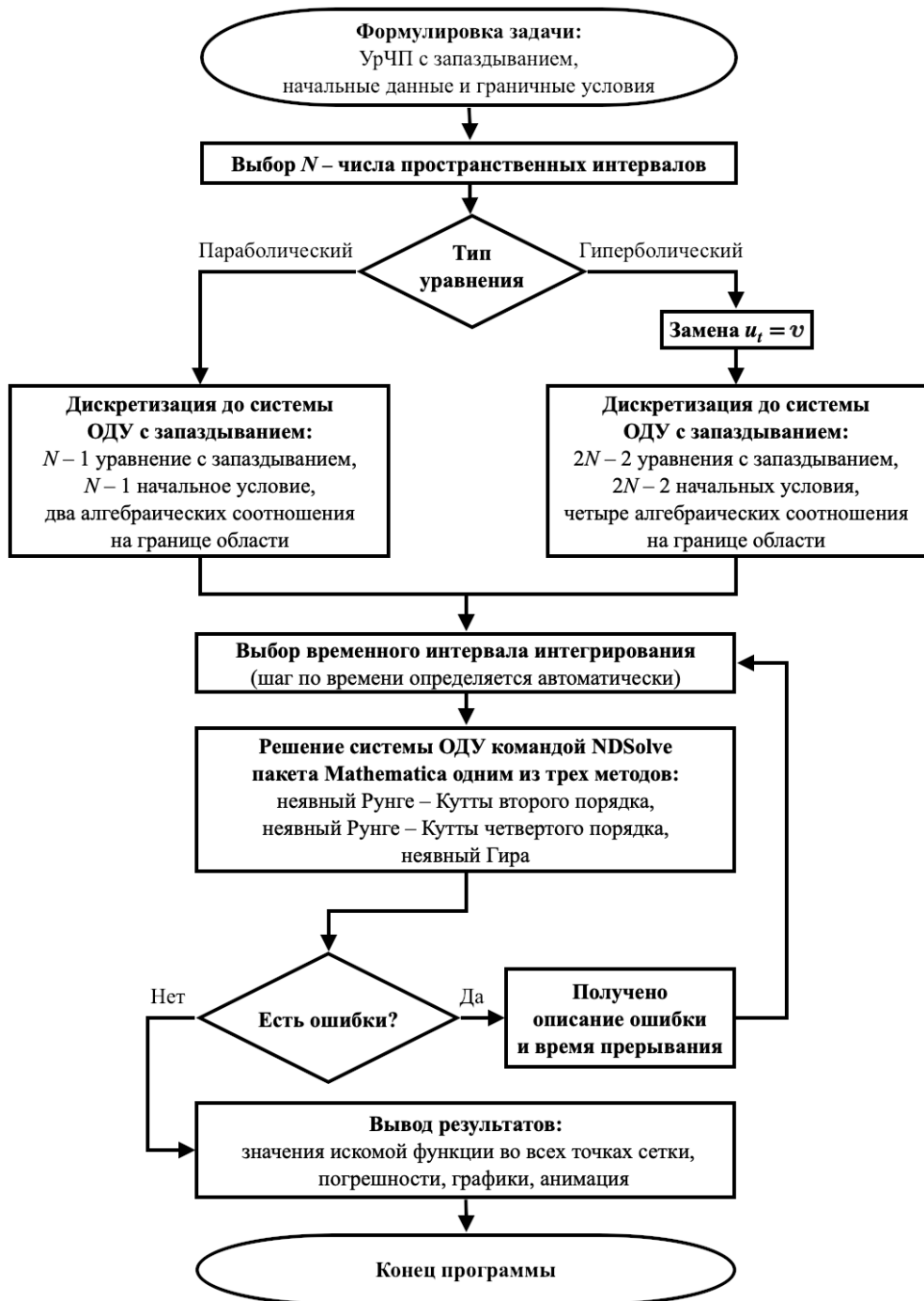


Рис. 5.4. Общая схема численного интегрирования задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием методом прямых.

(если точное решение известно), графики и анимации численного решения (вместе с точным решением).

Отметим, что вместо постоянного коэффициента σ в уравнении (5.2.2.3) может стоять функция $\sigma = \sigma(x, u, w)$.

Замечание 5.14. Помимо равномерной сетки по x можно использовать также сетки с неравномерным шагом [43]. Для неравномерных сеток с переменным шагом $h_n = x_n - x_{n-1}$ вторая производная u_{xx} аппроксимируется так:

$$u_{xx} \approx \frac{2}{h_n + h_{n+1}} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{h_{n+1}} - \frac{u_n - u_{n-1}}{h_n} \right),$$

где $\sum h_N = L$ (если $0 \leq x \leq L$).

Замечание 5.15. Метод прямых может использоваться также для численного интегрирования 2D и 3D уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, в которых слагаемые $[p(x, u)u_x]_x$ и $q(x, u, w)u_x$ заменяются соответственно на $\nabla \cdot [p(\mathbf{x}, u)\nabla u]$ и $\mathbf{q}(\mathbf{x}, u, w) \cdot \nabla u$. В частности, в двумерном случае на равномерных сетках оператор Лапласа ($\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$) аппроксимируется следующим образом:

$$\Delta u \approx \frac{1}{h_1^2}(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \frac{1}{h_2^2}(u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}),$$

где $u_{n,m} = u(x_n, y_m, t)$, $x_n = nh_1$, $y_m = mh_2$ ($n = 0, 1, \dots, N$; $m = 0, 1, \dots, M$), $h_1 = L_1/N$ и $h_2 = L_2/M$ — шаги сетки по пространственным переменным x и y .

5.2.3. Конечно-разностные методы

Основные понятия и определения теории разностных методов. Наиболее распространенными численными методами решения задач для уравнений в частных производных без запаздывания являются *разностные методы*, при использовании которых независимые переменные рассматриваются на *дискретном множестве точек*, а все непрерывные производные искомой функции аппроксимируются теми или иными разностными аналогами. Соответствующие модификации этих методов можно использовать для решения задач для УрЧП с запаздыванием типа (5.2.1.1) — (5.2.1.3). Используя [30], приведем основные понятия и определения из теории разностных методов.

Введем пространственную сетку $G_x = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_N = L\}$ и временную сетку $G_t = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_K = T\}$. Через указанные дискретные точки проводят прямые, параллельные осям x и t . Пересечения этих линий являются *узлами* пространственно-временной сетки $G = \{(x_n, t_k)\}$. Совокупность всех узлов сетки, лежащих на линии $t = t_k$, называют *слоем*. Линию $t = 0$ называют *начальным слоем*. Пространственные точки $x_0 = 0$ и $x_N = L$ называют *граничными*, а точки x_1, \dots, x_{N-1} — *внутренними*.

Пространственные шаги такой сетки обозначают через $h_n = x_n - x_{n-1}$, а временные — через $s_k = t_{k+1} - t_k$. *Ячейкой* такой сетки называют прямоугольник $[x_{n-1}, x_n; t_k, t_{k+1}]$. Если для любых n и k имеем $h_n = h = \text{const}$ и $s_k = s = \text{const}$, то сетка называется *равномерной*, в противном случае — *неравномерной*.

Все производные, входящие в уравнение и краевые условия, заменяют разностями (или подходящими линейными комбинациями) значений искомой функции $u(x, t)$ в узлах сетки. Получающиеся алгебраические уравнения называют *разностной схемой*. Решая эту алгебраическую систему, находят значения дискретной сеточной функции $u_h = \{u_{n,k} = u_h(x_n, t_k), n = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, K\}$, которые дают приближенное (разностное) решение в узлах сетки.

Внутри рассматриваемой области разностной схемой заменяют только само уравнение в частных производных, используя одну и ту же конфигурацию узлов, называемую *шаблоном*. Схему, шаблон которой содержит только одну точку нового слоя, называют явной. Это значение вычисляется по значениям с исходного слоя (или с предыдущих) за конечное число действий. Схему, шаблон которой содержит несколько точек нового слоя, называют неявной. Значения на новом слое находятся из системы большого числа алгебраических уравнений. Решение таких систем часто нетривиально и требует разработки специальных алгоритмов.

Если уравнение включает только первую производную по времени u_t , то разностная схема обычно является двухслойной, т. е. содержит только два слоя: исходный t_k и новый t_{k+1} . Если уравнение включает вторую производную по времени u_{tt} , то требуется по меньшей мере три слоя: к новому и исходному слоям добавляется предыдущий слой t_{k-1} .

Численное интегрирование задачи (5.2.1.1) — (5.2.1.3) состоит в том, чтобы, выбрав подходящие шаги h_n и s_k , найти приближенные значения $u_{n,k}$ неизвестной функции $u(x, t)$ в дискретных точках (x_n, t_k) , где $n = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K$.

Для описания свойств численных методов принято использовать понятия и определения (см., например, [30]), которые приведены ниже.

Для удобства уравнение (5.2.1.1) запишем в краткой операторной форме

$$\mathcal{L}[u] = f, \quad (x, t) \in Q, \quad (5.2.3.1)$$

где $\mathcal{L}[u] = u_t - au_{xx}$, $Q = \{0 < x < L, 0 < t \leq T\}$. Введем сетку G в области Q . Схема численного интегрирования, соответствующая задаче (5.2.1.1) — (5.2.1.3), имеет вид

$$\mathcal{L}_h[u_h] = f_h, \quad (x, t) \in G, \quad (5.2.3.2)$$

где $\mathcal{L}_h[u_h]$ — оператор разностного дифференцирования, а правая часть определяется формулой $f_h = f(u_h(x_n, t_k), \tilde{w}_h(x_n, t_k))$.

Для реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием (5.2.1.1) чаще всего используется оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h[u_h] = & s^{-1}[u_h(x_n, t_k + s) - u_h(x_n, t_k)] - \\ & - h^{-2}[u_h(x_{n+1}, t_k) - 2u_h(x_n, t_k) + u_h(x_{n-1}, t_k)]. \end{aligned}$$

В пространстве сеточных функций вводится норма, аналогичная норме пространства непрерывных функций:

$$\|u_h\| = \max_{(x_n, t_k) \in G} |u_h(x_n, t_k)|.$$

Сеточное (численное) решение u_h определено только на сетке G , поэтому к нему нельзя применять непрерывный оператор \mathcal{L} , определенный для всех $(x, t) \in Q$. Точное решение $u(x, t)$ определено для всех значений (x, t) , в том числе на сетке G , поэтому к нему можно применить разностный оператор \mathcal{L}_h .

Близость разностной схемы к исходному уравнению определяется по величине *невязки*

$$\psi_h = \mathcal{L}_h[u] - f_h, \quad (x, t) \in G.$$

Говорят, что разностная схема аппроксимирует УрЧП, если

$$\|\psi_h\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad s \rightarrow 0, \quad (5.2.3.3)$$

и имеет порядки аппроксимации $p > 0$ по x и $q > 0$ по t , если

$$\|\psi_h\| = O(h^p + s^q).$$

Если $\|\psi_h\| \rightarrow 0$ при любых законах стремления s и h к нулю, то такую аппроксимацию называют *безусловной*. Иногда встречаются схемы, для которых норма невязки есть $\|\psi_h\| = O(h^p + s^q + s^r/h^m)$. В этом случае для $\|\psi_h\| \rightarrow 0$ необходимо выполнение дополнительного условия $s^r/h^m \rightarrow 0$. Такую аппроксимацию называют *условной*.

Если при сгущении сеток расчет не стремится к точному решению, а наоборот, происходит неограниченное нарастание малых начальных ошибок, то говорят о неустойчивой схеме.

Схема (5.2.3.2) с начальными данными (5.2.1.2) и граничными условиями (5.2.1.3) называется *устойчивой*, если решение u_h непрерывно зависит от входных данных, которые определяются функциями f и φ , и эта зависимость равномерна относительно шага сетки [29]. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от шага h (по крайней мере, для достаточно малых h), что если

$$\|f^I - f^{II}\| \leq \delta \quad \text{и} \quad \|\varphi^I - \varphi^{II}\| \leq \delta,$$

то

$$\|u_h^I - u_h^{II}\| \leq \varepsilon.$$

Непрерывную зависимость решения от f называют *устойчивостью по правой части*, а непрерывную зависимость от φ — *устойчивостью по начальным данным*.

Для УрЧП существует понятие условной и безусловной устойчивости. Устойчивость называется *безусловной*, если условия выполняются при произвольном соотношении шагов по различным переменным, лишь бы они были

достаточно малы. Если шаги по разным переменным должны удовлетворять дополнительным соотношениям, то устойчивость называется *условной*.

На начальном слое в сеточное решение вносится погрешность начальных данных. На каждом последующем слое дополнительно вносятся погрешности аппроксимации дифференциального уравнения и краевых условий. Все эти погрешности передаются на последующие слои и могут усиливаться в ходе расчета. Для получения хорошей точности нужно, чтобы все эти погрешности были малы и в ходе расчета не сильно возрастали.

Говорят, что разностное решение сходится к точному, если

$$\|u_h - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad s \rightarrow 0.$$

Метод сходится с порядком $p > 0$ по x и $q > 0$ по t , если

$$\|u_h - u\| = O(h^p + s^q) \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Разностную схему (5.2.3.2) называют *корректной*, если схема устойчива и ее решение существует и единственно при любых допустимых f .

Далее будут рассмотрены некоторые разностные методы (схемы) для задач типа (5.2.1.1)–(5.2.1.3) с постоянным запаздыванием.

Явная разностная схема. Оптимизация хранения данных в оперативной памяти. Рассмотрим равномерную пространственную сетку $x_n = nh$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$), где $h = L/N$ — шаг по пространству. Пусть s — шаг по времени такой, что $Ms = \tau$, M — натуральное. Аппроксимируем производную по времени разностным аналогом вида

$$u_t \approx s^{-1}(u_{n,k+1} - u_{n,k}),$$

а производную по пространству — разностной производной второго порядка

$$u_{xx} \approx \delta_{xx} u_{n,k} = h^{-2}(u_{n+1,k} - 2u_{n,k} + u_{n-1,k}).$$

Запишем задачу (5.2.1.1)–(5.2.1.3) в виде разностной схемы:

$$\begin{aligned} u_{n,k+1} &= u_{n,k} + as\delta_{xx}u_{n,k} + sf(u_{n,k}, u_{n,k-M}), \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, K-1; \\ u_{0,k} &= u_{N,k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K; \\ u_{n,k} &= g_{n,k}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad k = -M, \dots, 0. \end{aligned} \tag{5.2.3.4}$$

Из (5.2.3.4) следует, что для вычисления значений на слое $k+1$ требуется информация не только с предыдущего слоя n , но и со слоя $n-M$. Поэтому необходимо сохранять в памяти значения со всех временных слоев в диапазоне времени запаздывания, так как они используются при построении решения. Ситуация осложняется необходимостью контролировать выполнение критерия Куранта

$$s < \frac{h^2}{2\|u(x, t)\|}$$

для того, чтобы явная схема (5.2.3.4) была устойчивой.

При решении задач с запаздыванием требуется хранить достаточное большой объем данных, к которым необходимо иметь постоянный доступ. Чаще всего объем данных превышает объем быстрой кэш-памяти процессора, а значит, необходимо взаимодействовать с оперативной памятью. Значит, скорость расчетов зависит от скорости работы с оперативной памятью, которая влияет на скорость расчетов. Отметим, что вариант хранения на внешнем носителе исключается, так как в этом случае затраты времени на чтение и запись слишком велики.

В [11, 27, 155] рассматривается алгоритм, позволяющий существенно сократить затраты оперативной памяти. Предлагается хранить данные не со всех временных слоев, а только с некоторых опорных, и восстанавливать промежуточные значения с помощью интерполяции. В процессе расчета количество опорных временных слоев в пределах диапазона запаздывания может меняться для сохранения баланса между точностью алгоритма и хранимым объемом данных и зависит от гладкости функции. Вид интерполяции выбирается исходя из параметров и свойств конкретной модели.

Гладкость функции определяем по формуле [27, 155]:

$$\Gamma(t+s) = \max_{1 \leq n \leq N} \left| \frac{u(x_n, t+s) - u(x_n, t)}{u(x_n, t)} \right|.$$

Введем параметр p такой, чтобы каждый p -й слой внутри диапазона запаздывания был опорным. Для минимизации ошибок интерполяции, но сохранения достаточно высокой скорости вычислений, значения p рекомендуется выбирать из диапазона от 1 до 20. Если значения функции u меняются слишком быстро, то для сохранения требуемой точности алгоритма следует сохранять все слои, т. е. взять $p = 1$. Если функция меняется медленно ($\Gamma < 0.01$), следует взять $p = 20$. В этом случае предложенный алгоритм демонстрирует наибольшую эффективность. В [27, 155] предложено эмпирическое правило расчета оптимального количества опорных слоев для реакционно-диффузионных задач:

$$p = \tau s^{-1} [1 + \exp(2 - 50 \Gamma(t))]^{-1}.$$

Общее число хранимых слоев q в диапазоне запаздывания зависит от параметра p и шага по времени s . В простейшем случае, когда p и s фиксированы, можно воспользоваться формулой $q = \tau p^{-1} s^{-1}$.

Пусть \hat{t}_j — время j -го опорного слоя ($j = 1, 2, \dots, q$), $\hat{u}_{n,j}$ — значение функции u на опорном слое j . Для восстановления значений промежуточных слоев по q опорным слоям, т. е. нахождения значений $u(x_n, t)$ при $t_{k-M} \leq t \leq t_{k-1}$, можно использовать интерполяционный полином Ньютона [27, 155]:

$$u(x_n, t) = R(\hat{u}_{n,1}) + (t - \hat{t}_1)R(\hat{u}_{n,1}, \hat{u}_{n,2}) + \dots + \\ + (t - \hat{t}_1)(t - \hat{t}_2) \dots (t - \hat{t}_{q-1})R(\hat{u}_{n,1}, \dots, \hat{u}_{n,q}),$$

где разделенные разности $R(\dots)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} R(\hat{u}_{n,1}) &= \hat{u}_{n,1}, \\ R(\hat{u}_{n,1}, \hat{u}_{n,2}) &= \frac{\hat{u}_{n,2} - \hat{u}_{n,1}}{\hat{t}_2 - \hat{t}_1}, \\ R(\hat{u}_{n,1}, \dots, \hat{u}_{n,q}) &= \frac{R(\hat{u}_{n,2}, \dots, \hat{u}_{n,q}) - R(\hat{u}_{n,1}, \dots, \hat{u}_{n,q-1})}{t_q - t_1}. \end{aligned}$$

Важно, что изложенный алгоритм не зависит от численной схемы, а лишь устанавливает порядок хранения данных за время эволюции (или время запаздывания) системы. Поэтому он может быть легко обобщен на использование с другими разностными схемами.

Неявная разностная схема. Используя декомпозицию по времени, будем решать задачу (5.2.1.1)–(5.2.1.3) последовательно на отрезках $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$, \dots . Построим равномерную сетку по правилам: $x_n = nh$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$), $t_k = ks$ ($k = 0, 1, 2, \dots, K$), где $h = L/N$ — шаг по пространству, $s = \tau/M$ — шаг по времени, M — натуральное число. Аппроксимируем производную по времени разностным аналогом вида

$$u_t \approx s^{-1}(u_{n,k+1} - u_{n,k}),$$

а производную по пространству — разностной производной второго порядка

$$u_{xx} \approx \delta_{xx} u_{n,k+1} = h^{-2}(u_{n+1,k+1} - 2u_{n,k+1} + u_{n-1,k+1}).$$

Учитывая, что $w(x, t) = g(x, t)$ при $0 < t \leq \tau$, запишем неявную разностную схему задачи (5.2.1.1)–(5.2.1.3) на этом интервале:

$$\begin{aligned} (1 - as\delta_{xx})u_{n,k+1} &= u_{n,k} + sf(u_{n,k+1}, g_{n,k+1-M}), \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, K-1; \\ u_{0,k+1} &= u_{N,k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K; \\ u_{n,0} &= g_{n,0}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{5.2.3.5}$$

На следующем интервале $\tau < t \leq 2\tau$ значения $w(x, t)$ также будут известны и равны соответствующим значениям $u(x, t)$, вычисленным на предыдущем интервале $0 < t \leq \tau$. Продолжая вычисления на последовательных интервалах, получим решение на всем требуемом временном интервале. В [279] установлены условия единственности решения схемы (5.2.3.5). В [231] доказана сходимость этой схемы с порядком $h^2 + s$ и исследована ее устойчивость.

Замечание 5.16. Схема (5.2.3.5) представляет собой нелинейную систему разностных уравнений, и ее решение можно вести итерационными методами, например, методом Пикара — Шварца [279] или методом верхнего и нижнего решений [368, 369, 417, 418].

Разностная схема с весами. Рассмотрим задачу (5.2.1.1)–(5.2.1.3) в области $Q = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$. Построим равномерную сетку по правилам:

$x_n = nh$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$), $t_k = ks$ ($k = 0, 1, 2, \dots, K$), где $h = L/N$ — шаг по пространству, а $s = \tau/M$ — шаг по времени, M — натуральное число.

Обозначим $f_{n,k} = f(u_{n,k}, w_{n,k}(t))$ и запишем схему с весами (см., например, [54, 56, 340]):

$$\begin{aligned} (1 - \sigma as \delta_{xx}) u_{n,k+1} &= [1 + (1 - \sigma) as \delta_{xx}] u_{n,k} + s f_{n,k}, \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, \dots, K-1; \\ u_{0,k} &= u_{N,k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K; \\ u_{n,k} &= g_{n,k}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad k = -M, \dots, -1, 0, \end{aligned} \quad (5.2.3.6)$$

где $0 \leq \sigma \leq 1$. Значение веса $\sigma = 0$ соответствует явной схеме. При $0 < \sigma \leq 1$ имеем линейную трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений, которая решается методом прогонки. При $\sigma \geq 1/2$ схема безусловно устойчива (подробнее об устойчивости, в том числе при $\sigma < 1/2$, см. [340]).

Замечание 5.17. Родственная схема с весами для уравнения гиперболического типа с запаздыванием рассматривается, например, в [56, 423], а для уравнения параболического типа, содержащего запаздывание в диффузионном члене, — в [569].

Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации. Для достаточно гладких решений уравнения (5.2.1.1) можно использовать следующую устойчивую многошаговую разностную схему повышенного порядка аппроксимации $h^4 + s^2$ [512]:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \frac{1}{2} as \delta_{xx}) u_{n,k+1} &= (\mathcal{A} + \frac{1}{2} as \delta_{xx}) u_{n,k} + \\ &+ s \mathcal{A} f(\frac{3}{2} u_{n,k} - \frac{1}{2} u_{n,k-1}, \frac{1}{2} u_{n,k+1-M} + \frac{1}{2} u_{n,k-M}), \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где разностный оператор \mathcal{A} определяется так:

$$\mathcal{A} u_{n,k} = \frac{1}{12} (u_{n-1,k} + 10 u_{n,k} + u_{n+1,k}).$$

Замечание 5.18. Для родственных более сложных уравнений реакционно-диффузионного типа аналогичные многошаговые разностные схемы повышенного порядка аппроксимации приведены в [596, 598].

Две специальные разностные схемы для линейной задачи. В статье [286] рассматриваются две специальные конечно-разностные схемы для задачи (5.2.1.1) — (5.2.1.3) с линейной кинетической функцией $f(u, w) = bw$. Предложенные схемы обладают такой же областью устойчивости, что и исходная задача. Это обеспечивается выбором шагов по пространству и по времени, а также особым способом аппроксимации.

Обе схемы используют одну и ту же сетку. Шаг по пространству вычисляется по формуле $\tilde{h} = 2 \sin(\frac{1}{2} h)$, где h — классический шаг прямоугольной сетки; шаг по времени — $s = \tau/(M - \varepsilon)$, где M — натуральное, $0 \leq \varepsilon < 1$. Отметим, что отрезки $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$, ... содержат, в общем случае, нецелое количество шагов по времени, в отличие от схем, рассмотренных выше.

Для построения первой схемы применяется правило трапеций, когда пространственная производная и слагаемое с запаздыванием вычисляются как средние от значений с двух соседних временных слоев:

$$u_{xx} \approx \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{xx}(u_{n,k+1} + u_{n,k}), \quad bw \approx \frac{b}{2}(w_{n,k+1} + w_{n,k}),$$

где $\tilde{\delta}_{xx}u_{n,k} = \tilde{h}^{-2}(u_{n+1,k} - 2u_{n,k} + u_{n-1,k})$. Сеточная функция $w_{n,k}$ аппроксимирует функцию $w(x, t)$ в точке (x_n, t_k) с помощью линейной интерполяции:

$$w_{n,k} = \varepsilon u_{n,k-M+1} + (1 - \varepsilon)u_{n,k-M}. \quad (5.2.3.7)$$

Тогда уравнение (5.2.1.1) аппроксимируется следующим образом:

$$(2 - a\tilde{\delta}_{xx})u_{n,k+1} = (2 + a\tilde{\delta}_{xx})u_{n,k} + bs[\varepsilon u_{n,k-M+2} + u_{n,k-M+1} + (1 - \varepsilon)u_{n,k-M}].$$

Вторая конечно-разностная схема основана на применении дифференциальной формулы «назад» второго порядка для аппроксимации производной по времени и может быть записана так:

$$\frac{1}{2s}(3u_{n,k+2} - 4u_{n,k+1} + u_{n,k}) = a\tilde{\delta}_{xx}u_{n,k+2} + bw_{n,k+2}.$$

Используя линейную интерполяцию (5.2.3.7) для $w_{n,k+2}$ и перегруппировывая слагаемые, имеем

$$(3 - 2a\tilde{\delta}_{xx})u_{n,k+2} = 4u_{n,k+1} - u_{n,k} + 2bs[\varepsilon u_{n,k-M+3} + (1 - \varepsilon)u_{n,k-M+2}].$$

Здесь необходимо знать значения $u_{n,1}$ ($n = 1, \dots, N - 1$), которые можно получить с помощью первой разностной схемы.

5.3. Построение, выбор и использование тестовых задач для УрЧП с запаздыванием

5.3.1. Предварительные замечания

Качественные особенности УрЧП с запаздыванием существенным образом осложняют получение адекватных численных решений. Дело в том, что даже при отсутствии запаздывания теоретические оценки точности численных решений нелинейных УрЧП содержат константы, которые зависят от гладкости рассматриваемого решения и обычно не могут быть вычислены априорно (особенно это касается негладких решений, которые типичны для уравнений с запаздыванием). Практическая сходимость численных методов, основанная на измельчении расчетной сетки, также не может в полной мере гарантировать надежность используемых схем и точность расчетов (особенно вблизи значений параметров задачи, соответствующих неустойчивым решениям, или вблизи тех значений переменных, которые соответствуют сингулярностям уравнения или большим градиентам решений).

Во многих случаях наиболее эффективным и самым наглядным способом оценки области применимости и точности численных методов является прямое сравнение численных и точных решений тестовых задач. В главе 3 было рассмотрено несколько классов реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием, которые допускают точные решения в элементарных функциях. Эти уравнения и их точные решения содержат ряд свободных параметров (которые можно варьировать) и могут быть использованы в качестве тестовых задач для оценки точности соответствующих численных методов (см. разд. 5.3.4 и 5.3.5).

5.3.2. Основные принципы выбора тестовых задач

Для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием (или без запаздывания) при выборе тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности соответствующих численных и приближенных аналитических методов, полезно руководствоваться следующими принципами.

1°. Наиболее надежны тестовые задачи, полученные путем использования точных решений реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием.

2°. Предпочтительнее выбирать простые тестовые задачи, решения которых выражаются через элементарные функции.

3°. Предпочтительнее выбирать тестовые задачи, содержащие свободные параметры, которые можно свободно варьировать в широких пределах, или произвольные функции.

4°. Можно выбирать тестовые задачи из более широкого класса уравнений аналогичного типа (нет необходимости использовать точные решения рассматриваемого уравнения, которые не всегда удается получить).

5°. Для проверки адекватности и оценки точности численных методов лучше использовать несколько различных тестовых задач.

6°. Проверку численных методов следует начинать с простых тестовых задач, имеющих монотонные решения с небольшими градиентами искомых величин.

7°. Следует проверять численные методы на тестовых задачах с большими градиентами искомых величин в начальных данных или граничных условиях (например, для быстро осциллирующих начальных данных).

8°. Полезно тестировать численные методы на быстро растущих решениях при достаточно больших временах.

9°. По возможности надо проверять точность используемых численных методов на тестовых задачах вблизи критических значений параметров и независимых переменных, которые определяют сингулярные точки уравнения, неустойчивые решения или решения с большими градиентами.

Важно подчеркнуть, что хорошо подобранные тестовые задачи позволяют сопоставлять и совершенствовать «работоспособные» численные методы и отсеивать малопригодные.

Замечание 5.19. Для нелинейных УрЧП с запаздыванием нельзя ограничиваться тестовыми задачами, полученными на основе точных решений соответствующих более простых нелинейных УрЧП без запаздывания.

5.3.3. Построение тестовых задач

Примеры точных решений УрЧП с запаздыванием, которые можно использовать для формулировки тестовых задач. Для построения тестовых задач следует использовать известные точные решения нелинейных УрЧП с запаздыванием. Обширный список таких решений можно найти в главах 3, 4, 7 этой книги.

Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + bu[1 - s(u - kw)], \quad w = u(x, t - \tau), \quad (5.3.3.1)$$

которое зависит от пяти параметров $a > 0, b, k, s, \tau > 0$ и является частным случаем уравнения (3.4.2.43) при $g(z) = h(z) \equiv 0, f(z) = b(1 - sz)$. Выберем его параметры так, чтобы оно имело стационарные решения $u_0 = 0$ и $u_0 = 1$. Тривиальное стационарное решение $u_0 = 0$ уже имеется. Чтобы совпало второе стационарное решение, подставим $u = 1$ в (5.3.3.1), откуда после элементарных преобразований имеем $s = 1/(1 - k)$. В результате приходим к уравнению

$$u_t = au_{xx} + bu\left(1 - \frac{u - kw}{1 - k}\right), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (5.3.3.2)$$

которое может быть записано в альтернативном виде

$$u_t = au_{xx} + bu[1 - (\sigma_1 u + \sigma_2 w)], \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 1,$$

где $\sigma_1 = 1/(1 - k)$.

При $k \rightarrow 0$ уравнение (5.3.3.2) переходит в уравнение Фишера, а при $k \rightarrow \pm\infty$ — в диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием. Ниже приведены две группы наиболее простых точных решений уравнения (5.3.3.2).

(i) Решения при $k > 0$ ($k \neq 1$):

$$\begin{aligned} u &= e^{ct}[A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x)], & \gamma &= \sqrt{(b - c)/a} & \text{при } b > c; \\ u &= e^{ct}(Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}), & \gamma &= \sqrt{(c - b)/a} & \text{при } b < c; \\ u &= e^{ct}(Ax + B), & & & \text{при } b = c; \\ u &= 1 + e^{ct}[A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x)], & \gamma &= \sqrt{-c/a} & \text{при } c < 0; \\ u &= 1 + e^{ct}(Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}), & \gamma &= \sqrt{c/a} & \text{при } c > 0, \end{aligned} \quad (5.3.3.3)$$

где $c = (\ln k)/\tau$; A, B — произвольные постоянные.

(ii) Решения при $k < 0$:

$$\begin{aligned} u &= A_n e^{ct \mp \lambda_n x} \cos(\beta_n t \mp \gamma_n x + C_n), \quad \beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \\ \gamma_n &= \frac{\beta_n}{2a\lambda_n}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{(b-c)^2 + \beta_n^2} - b + c}{2a} \right)^{1/2}; \\ u &= 1 + A_n e^{ct \mp \lambda_n x} \cos(\beta_n t \mp \gamma_n x + C_n), \quad \beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \\ \gamma_n &= \frac{\beta_n}{2a\lambda_n}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{c^2 + \beta_n^2} + c}{2a} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.3.3.4)$$

где $c = (\ln |k|)/\tau$; A_n, C_n — произвольные постоянные; $n = 1, 2, \dots$

Для тестирования методов численного интегрирования нелинейных реакционно-диффузионных уравнений можно выбирать указанные выше точные решения уравнения (5.3.3.2). Отметим качественные особенности некоторые решений, которые полезно использовать для сопоставления с результатами численных расчетов.

Первое и четвертое решения из первой группы (i) являются периодическими функциями по пространственной переменной x . Их удобно использовать в качестве тестовых решений для начально-краевых задач с граничными условиями первого и второго рода на отрезке $0 \leq x \leq m\pi/\gamma$ ($m = 1, 2, \dots$). Подходящим выбором свободных постоянных A и B можно сделать искомую функцию на границе равной нулю или единице (для краевых условий первого рода) или получить на границе нулевую производную по x (для краевых условий второго рода). В случае задач со смешанными граничными условиями удобно рассматривать эти решения на отрезках $0 \leq x \leq \frac{1}{2}m\pi/\gamma$ ($m = 1, 2, \dots$). Начальные данные при $-\tau \leq t \leq 0$ (или $0 \leq t \leq \tau$) определяются из решений, используемых в качестве тестовых задач. Полезно сравнить численные и точные решения тестовых задач при k , близких к единице (когда решения слабо меняются по времени), и при достаточно больших k (когда решения изменяются быстро).

Решения из второй группы (ii) при $k = -1$ являются периодическими по времени и быстроосциллирующими по обоим переменным при $\tau \rightarrow 0$. Такие решения полезно использовать для оценки точности численных методов в задачах с большими градиентами.

Тестовые задачи формулируются следующим образом: выбранное уравнение и его точное решение дополняют начальными данными при $-\tau \leq t \leq 0$ и граничными условиями при $x = 0$ и $x = L$, которые получают из используемого точного решения. Сформулированные таким образом некоторые тестовые задачи приведены ниже.

Тестовые задачи для реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. Используя известные точные решения, сформулируем несколько модельных тестовых задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, которые можно использовать для определения области применимости и оценки

точности численных методов. Все тестовые задачи содержат свободные параметры.

Тестовая задача 1. Положим в первой формуле (5.3.3.3):

$$A = 1, \quad B = 2, \quad b = (\ln k)/\tau + a\pi^2/4, \quad c = (\ln k)/\tau, \quad k > 0. \quad (5.3.3.5)$$

Получим точное решение уравнения (5.3.3.2):

$$u = U_1(x, t) \equiv e^{ct} [\cos(\pi x/2) + 2 \sin(\pi x/2)], \quad c = (\ln k)/\tau. \quad (5.3.3.6)$$

Подставив в него $-\tau \leq t \leq 0$, а затем $x = 0$ и $x = 1$, находим начальные данные

$$u(x, t) = e^{ct} [\cos(\pi x/2) + 2 \sin(\pi x/2)], \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (5.3.3.7)$$

и граничные условия

$$u(0, t) = e^{ct}, \quad t > 0; \quad u(1, t) = 2e^{ct}, \quad t > 0. \quad (5.3.3.8)$$

В результате имеем тестовую задачу, которая описывается уравнением (5.3.3.2) с параметром b из (5.3.3.5), начальными данными (5.3.3.7) и граничными условиями (5.3.3.8). Точное решение этой тестовой задачи определяется формулой (5.3.3.6), где $0 \leq x \leq 1, t > 0$.

Замечание 5.20. Аналогичным образом можно получить другие тестовые задачи путем использования точных решений (5.3.3.3) и (5.3.3.4) реакционно-диффузионного уравнения (5.3.3.2).

Тестовая задача 2. Непосредственной проверкой можно показать, что уравнение (5.3.3.1) при

$$b = -4a, \quad k = e^{5a\tau}, \quad s = \frac{3}{2(1-k)} \quad (5.3.3.9)$$

допускает точное решение

$$u = U_2(x, t) \equiv \operatorname{ch}^{-2}(x) + e^{ct} \operatorname{ch}^3(x), \quad c = (\ln k)/\tau. \quad (5.3.3.10)$$

Полагая в (5.3.3.10) сначала $-\tau \leq t \leq 0$, а затем $x = 0$ и $x = 1$, получим начальные данные

$$u(x, t) = \operatorname{ch}^{-2}(x) + e^{ct} \operatorname{ch}^3(x), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (5.3.3.11)$$

и граничные условия

$$u(0, t) = 1 + e^{ct}, \quad t > 0; \quad u(1, t) = \operatorname{ch}^{-2}(1) + e^{ct} \operatorname{ch}^3(1), \quad t > 0. \quad (5.3.3.12)$$

Таким образом имеем тестовую задачу, которая описывается уравнением (5.3.3.1) с параметрами (5.3.3.9), начальными данными (5.3.3.11) и граничными условиями (5.3.3.12). Точное решение этой задачи определяется формулой (5.3.3.10), где $0 \leq x \leq 1, t > 0$.

Рассмотрим теперь нелинейное пятипараметрическое реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + bu - s(u - kw)^2, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (5.3.3.13)$$

которое является частным случаем уравнения (3.4.2.31) при $f(z) = -sz^2$ и в вырожденных случаях $k = 0$ или $\tau = 0$ переходит в ненормированное уравнение Фишера.

Далее, опуская подробности, часто будем приводить только формулировки тестовых задач и их точные решения.

Тестовая задача 3. Положим

$$k > 0, \quad k \neq 1, \quad b = (\ln k)/\tau - a, \quad s = b/(1 - k)^2. \quad (5.3.3.14)$$

Тогда тестовая задача, которая описывается уравнением (5.3.3.13) – (5.3.3.14), начальными данными

$$u(x, t) = U_3(x, t) \equiv 1 + \frac{e^{ct+1}}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x}), \quad c = \frac{\ln k}{\tau}, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (5.3.3.15)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 1, \quad t > 0; \quad u(1, t) = 1 + e^{ct}, \quad t > 0, \quad (5.3.3.16)$$

имеет в области $0 \leq x \leq 1, t > 0$ точное решение $u = U_3(x, t)$.

Решение $u = U_3(x, t)$ было получено с помощью формулы (3.4.2.33), где $\psi \equiv 1$, а φ – соответствующее решение линейного ОДУ (3.4.2.34).

Тестовая задача 4. Пусть

$$k > 0, \quad k \neq 1, \quad b = 4a\pi^2 + (\ln k)/\tau - 1/(a\tau^2), \quad s = b/(1 - k)^2. \quad (5.3.3.17)$$

Тогда тестовая задача, которая описывается уравнением (5.3.3.13), (5.3.3.17), начальными данными

$$u(x, t) = U_4(x, t) \equiv 1 + e^{ct-\lambda x} \cos(\beta t - 2\pi x), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (5.3.3.18)$$

$$c = (\ln k)/\tau, \quad \lambda = 1/(a\tau), \quad \beta = 4\pi/\tau,$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 1 + e^{ct} \cos(\beta t), \quad t > 0; \quad u(1, t) = 1 + e^{ct-\lambda} \cos(\beta t), \quad t > 0, \quad (5.3.3.19)$$

имеет в области $0 \leq x \leq 1, t > 0$ точное решение $u = U_4(x, t)$.

Решение $u = U_4(x, t)$ было получено с помощью формулы (3.4.2.36), где $u_0(x, t) \equiv 1$, $V_1(x, t; b - c)$ определяется формулами (3.4.2.10) – (3.4.2.11), в которых $A_2 = 1$, а все другие константы A_n, B_n, C_n, D_n равны нулю.

Тестовые задачи для уравнений типа Клейна – Гордона с запаздыванием. Воспользуемся точными решениями из [452] и сформулируем несколько модельных тестовых задач типа Клейна – Гордона с запаздыванием, которые также можно использовать для оценки точности численных методов. Все тестовые задачи содержат свободные параметры.

Тестовая задача 5. Нетрудно проверить, что нелинейное уравнение типа Клейна—Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + u(u - kw), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (5.3.3.20)$$

при $k > 0$ допускает простое точное решение экспоненциального вида [452]:

$$u = U_5(x, t) \equiv \exp(ct + cx/\sqrt{a}), \quad c = (\ln k)/\tau. \quad (5.3.3.21)$$

Это решение удовлетворяет начальным данным

$$u(x, t) = \exp(ct + cx/\sqrt{a}), \quad u_t(x, t) = c \exp(ct + cx/\sqrt{a}), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (5.3.3.22)$$

и граничным условиями

$$u(0, t) = \exp(ct), \quad u(1, t) = \exp(ct + c/\sqrt{a}), \quad t > 0. \quad (5.3.3.23)$$

Таким образом имеем тестовую задачу, которая описывается уравнением (5.3.3.20) при $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$, начальными условиями (5.3.3.22) и граничными условиями (5.3.3.23). Точное решение этой задачи определяется формулой (5.3.3.21).

Тестовая задача 6. Нелинейное уравнение типа Клейна—Гордона с запаздыванием (5.3.3.20) при $k = 1$ допускает также точное периодическое решение тригонометрического вида

$$u(x, t) = U_6(x, t) \equiv \sin(\beta x/\sqrt{a}) \cos(\beta t), \quad \beta = 2\pi/\tau, \quad (5.3.3.24)$$

которое удовлетворяет начальным данным

$$u(x, t) = \sin(\beta x/\sqrt{a}) \cos(\beta t), \quad u_t(x, t) = -\beta \sin(\beta x/\sqrt{a}) \sin(\beta t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (5.3.3.25)$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \sin(\beta/\sqrt{a}) \cos(\beta t), \quad t > 0. \quad (5.3.3.26)$$

В данном случае получим тестовую задачу, которая описывается уравнением (5.3.3.20) при $k = 1$ ($0 \leq x \leq 1$, $t > 0$), начальными условиями (5.3.3.25) и граничными условиями (5.3.3.26). Точное решение этой задачи определяется формулой (5.3.3.24).

Тестовая задача 7. Рассмотрим другое нелинейное уравнение типа Клейна—Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + bu - s(u - kw)^2, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (5.3.3.27)$$

которое зависит от пяти параметров $a > 0$, $b, k, s, \tau > 0$ и является частным случаем уравнения № 5 табл. 2 статьи [452] при $f(z) = -sz^2$.

Положим

$$k > 0, \quad k \neq 1, \quad b = (\ln k)^2/\tau^2 - a, \quad s = b/(1 - k)^2. \quad (5.3.3.28)$$

Тогда тестовая задача, которая описывается уравнением (5.3.3.27) — (5.3.3.28), начальными данными

$$u(x, t) = U_7(x, t) \equiv 1 + \frac{e^{ct+1}}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x}), \quad u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} U_7(x, t),$$

$$c = \frac{\ln k}{\tau}, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (5.3.3.29)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 1, \quad t > 0; \quad u(1, t) = 1 + e^{ct}, \quad t > 0, \quad (5.3.3.30)$$

имеет в области $0 \leq x \leq 1, t > 0$ точное решение $u = U_7(x, t)$.

Решение $u = U_7(x, t)$ было получено из соответствующей формулы, приведенной в правом столбце для уравнения № 5 табл. 2 статьи [452].

Тестовая задача 8. Рассмотрим теперь нелинейное пятипараметрическое уравнение типа Клейна — Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + bu[1 - s(u - kw)], \quad w = u(x, t - \tau), \quad (5.3.3.31)$$

которое является частным случаем уравнения № 2 табл. 3 статьи [452] при $f(z) = b(1 - sz)$, $g(z) = h(z) \equiv 0$.

Положим

$$k > 0, \quad b = (\ln k)^2/\tau^2 + a\pi^2/4. \quad (5.3.3.32)$$

Используя результаты [452], можно показать, что тестовая задача, которая описывается уравнением (5.3.3.31) — (5.3.3.32), начальными данными

$$u(x, t) = U_8(x, t) \equiv e^{ct}[\cos(\pi x/2) + 2 \sin(\pi x/2)], \quad u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} U_8(x, t),$$

$$c = (\ln k)/\tau, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (5.3.3.33)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = e^{ct}, \quad t > 0; \quad u(1, t) = 2e^{ct}, \quad t > 0, \quad (5.3.3.34)$$

имеет в области $0 \leq x \leq 1, t > 0$ точное решение $u = U_8(x, t)$.

Прямой метод построения тестовых задач с помощью родственных классов УрЧП с запаздыванием. Для получения тестовых задач для заданного класса нелинейных УрЧП с запаздыванием (или без запаздывания) можно использовать точные решения более широкого класса родственных уравнений. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

В качестве исходного класса уравнений возьмем класс реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (5.3.3.35)$$

Вместо (5.3.3.35) рассмотрим более широкий класс уравнений

$$u_t = au_{xx} + F(u, w) + G(x, t), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (5.3.3.36)$$

который в частном случае $G \equiv 0$ переходит в (5.3.3.35). Выбираем (достаточно произвольно) некоторую функцию $\eta = \eta(x, t)$, удовлетворяющую заданным граничным условиям. Эта функция является точным решением уравнения (5.3.3.36) при

$$G(x, t) = \eta_t - a\eta_{xx} - F(\eta, \bar{\eta}), \quad \bar{\eta} = \eta(x, t - \tau). \quad (5.3.3.37)$$

Уравнение (5.3.3.36) — (5.3.3.37) вместе с соответствующими начальными и граничными условиями является тестовой задачей, которая имеет точное решение $u = \eta(x, t)$. Это решение сравнивают с численным решением этой задачи. Различные функции $\eta = \eta(x, t)$ порождают различные уравнения (5.3.3.36) и различные тестовые задачи.

Описанный метод получения тестовых задач в приведенной выше достаточно общей формулировке, вообще говоря, имеет серьезный недостаток. Поскольку функция $\eta = \eta(x, t)$ задается априорно и не связана с рассматриваемым уравнением, то она не имеет качественных особенностей, присущих точным решениям УрЧП с запаздыванием. Подходящий выбор этой функции полностью зависит от удачи, интуиции и опыта исследователя.

Замечание 5.21. При применении прямого метода в качестве функций η вполне допустимо использовать описанные в главах 3 и 4 точные решения нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнений с запаздыванием.

5.3.4. Сопоставление численных и точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

Предварительные замечания. Численные решения всех тестовых задач были получены методом прямых в комбинации с методом Рунге — Кутты второго порядка или с методом Гира с использованием пакета Mathematica. Расчеты проводились на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$ для трех времен запаздывания $\tau = 0.05$, $\tau = 0.1$, $\tau = 0.5$ (иногда дополнительно брались значения $\tau = 1$ и $\tau = 5$). Некоторые тестовые задачи не удалось решить на столь большом интервале: процедура интегрирования прерывалась с ошибкой и указанием времени прерывания расчета. Тем не менее, в большинстве случаев адекватное численное решение задачи можно получить, если подходящим образом сократить рассматриваемый временной интервал вычислений.

Под абсолютной и относительной погрешностями численного решения $u_{n,k} = u_h(x_n, t_k)$ тестовой задачи для УрЧП с запаздыванием будем соответственно понимать величины

$$\sigma_a = \max_{n,k} |u_e - u_{n,k}|, \quad \sigma_r = \max_{n,k} |(u_e - u_{n,k})/u_e|,$$

где $u_e = u_e(x_n, t_k)$ — значение точного решения тестовой задачи на временном слое t_k в точке x_n .

Сопоставление точных и численных решений тестовых задач. В предыдущем разделе были сформулированы четыре тестовые задачи для нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (уравнений типа Фишера с запаздыванием). В этом разделе обсуждаются результаты численного интегрирования тестовых задач и проводится сопоставление полученных численных решений с точными решениями этих задач. Нумерация и формулировки тестовых задач, рассматриваемых ниже, совпадают с нумерацией и формулировками тестовых задач, приведенных в разд. 5.3.3.

Тестовая задача 1. Точное решение $u = U_1(x, t)$ тестовой задачи 1 из разд. 5.3.3 при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$ является монотонно затухающим по времени. Относительная погрешность численного решения становится заметной лишь при достаточно больших временах, когда решение практически равно нулю. Для используемых численных методов с увеличением времени запаздывания τ (от 0.05 до 5) увеличивается временной интервал, на котором методы работают с малой относительной погрешностью. При $N = 100$ численное решение, полученное методом Рунге — Кутты второго порядка, начинает не совпадать с точным по достижении абсолютных значений порядка 10^{-5} при $\tau = 0.05$ и 10^{-20} при $\tau = 5$; численное решение, полученное методом Гира, начинает отклоняться по достижении значений порядка 10^{-6} при $\tau = 0.05$ и 10^{-10} при $\tau = 5$.

На рис. 5.5 показаны графики (с использованием логарифмической шкалы по вертикали) полученных методами Рунге — Кутты второго порядка численных решений системы ОДУ при $N = 100$ тестовой задачи 1 вместе с соответствующими графиками точных решений для значений параметров $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$ и времен запаздывания $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.5$. Графики для метода Гира выглядят аналогично и здесь не приводятся.

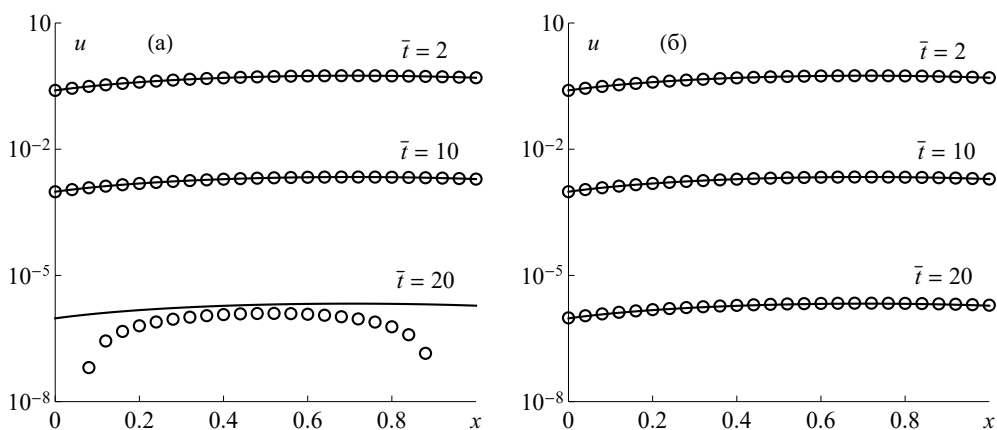


Рис. 5.5. Точные решения (сплошные линии) и полученные с помощью комбинации метода прямых и Рунге — Кутты второго порядка численные решения (кружочки) тестовой задачи 1 при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$ и $N = 100$ в различные моменты времени $\bar{t} = t/\tau$ для двух времен запаздывания: а) $\tau = 0.05$ и б) $\tau = 0.5$.

Абсолютные погрешности численных решений, полученных методами Рунге — Кутты второго порядка и Гира для пяти различных времен запаздывания, представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3. Абсолютные погрешности численных решений тестовой задачи 1 при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$ для пяти различных времен запаздывания τ на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$.

| Метод | N | $\tau = 0.05$ | $\tau = 0.1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 1$ | $\tau = 5$ |
|----------------------------------|-----|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Рунге — Кутты второго порядка | 10 | $2.8 \cdot 10^{-4}$ | $4.6 \cdot 10^{-4}$ | $9.9 \cdot 10^{-4}$ | $1.2 \cdot 10^{-3}$ | $1.4 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $1.3 \cdot 10^{-5}$ | $2.0 \cdot 10^{-5}$ | $4.1 \cdot 10^{-5}$ | $4.8 \cdot 10^{-5}$ | $5.6 \cdot 10^{-5}$ |
| | 100 | $4.5 \cdot 10^{-6}$ | $6.1 \cdot 10^{-6}$ | $1.2 \cdot 10^{-5}$ | $1.3 \cdot 10^{-5}$ | $1.4 \cdot 10^{-5}$ |
| Гира | 10 | $2.8 \cdot 10^{-4}$ | $4.6 \cdot 10^{-4}$ | $9.9 \cdot 10^{-4}$ | $1.2 \cdot 10^{-3}$ | $1.4 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $1.3 \cdot 10^{-5}$ | $1.9 \cdot 10^{-5}$ | $4.0 \cdot 10^{-5}$ | $4.7 \cdot 10^{-5}$ | $5.6 \cdot 10^{-5}$ |
| | 100 | $2.8 \cdot 10^{-6}$ | $4.7 \cdot 10^{-6}$ | $9.9 \cdot 10^{-6}$ | $1.2 \cdot 10^{-5}$ | $1.4 \cdot 10^{-5}$ |

Тестовая задача 2. Точное решение $u = U_2(x, t)$ тестовой задачи 2 из разд. 5.3.3 при $a = 1$ экспоненциально возрастает по времени. Выполнение программы прерывается с ошибкой по достижении решением значений высоких порядков. Для метода Рунге — Кутты второго порядка это значения порядка 10^8 . При $\tau = 0.05$ удается построить решение на всем интервале вплоть до $T = 50\tau$, при $\tau = 0.1$ — до $T = 35\tau$, при $\tau = 0.5$ — до $T = 7.3\tau$. Метод Гира работает лучше — до достижения решением значений порядка 10^{13} . При $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$ удается построить решение на всем интервале вплоть до $T = 50\tau$, при $\tau = 0.5$ — до $T = 11.5\tau$. Отметим также, что метод Гира строит решение всего за несколько секунд, в то время как методу Рунге — Кутты второго порядка требуются минуты и десятки минут (о возможном сокращении времени работы метода см. замечание 5.10).

На рис. 5.6 показаны графики (с использованием логарифмической шкалы по вертикали) полученных методом Гира численных решений системы ОДУ для тестовой задачи 2 при $a = 1$ и $N = 100$ вместе с соответствующими графиками точного решения для времен запаздывания $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.5$. Качественный вид графиков численных решений, полученных методом Рунге — Кутты, аналогичен и здесь не приводится.

Относительные погрешности численных решений, полученных методами Рунге — Кутты второго порядка и Гира, представлены в табл. 5.4.

Тестовая задача 3. Графики точных решений и полученных методом Рунге — Кутты второго порядка численных решений системы ОДУ при $N = 100$ для тестовой задачи 3 из разд. 5.3.3 при $a = 1$, $k = 0.5$ и умеренном времени запаздывания $\tau = 0.5$ представлены на рис. 5.7. Графики численных решений, полученных методом Гира, выглядят аналогично и здесь не приводятся. Оба метода демонстрируют хорошую аппроксимацию точного решения на всем интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$.

В табл. 5.5 представлены относительные погрешности численных решений

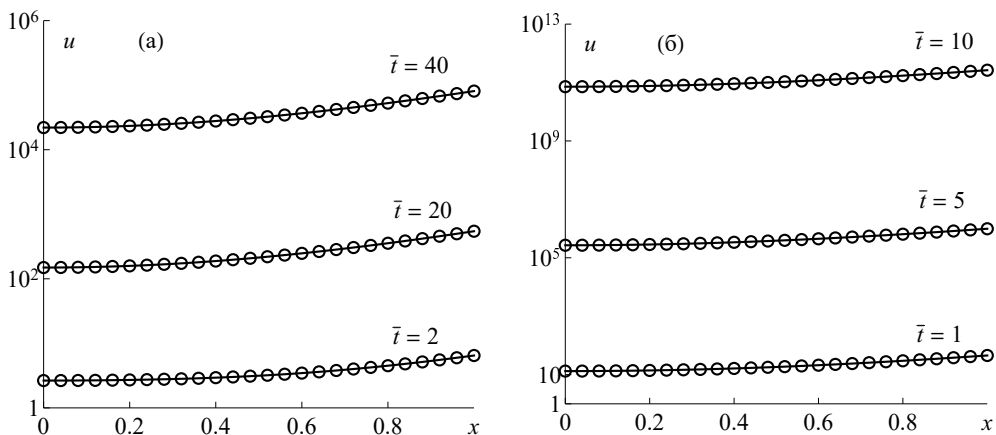


Рис. 5.6. Точные решения (сплошные линии) и полученные с помощью комбинации метода прямых и Гира численные решения (кружочки) тестовой задачи 2 при $a = 1$ и $N = 100$ в различные моменты времени $\bar{t} = t/\tau$ для двух времен запаздывания: а) $\tau = 0.05$ и б) $\tau = 0.5$.

Таблица 5.4. Относительные погрешности численных решений задачи 2 при $a = 1$ для трех различных времен запаздывания τ .

| Метод | N | $\tau = 0.05$ $T = 50\tau$ | $\tau = 0.1$ $T = 35\tau$ | $\tau = 0.5$ $T = 7.3\tau$ |
|----------------------------------|-----|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| Рунге — Кутты второго порядка | 10 | $1.8 \cdot 10^{-3}$ | $1.9 \cdot 10^{-3}$ | $2.5 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $7.5 \cdot 10^{-5}$ | $7.8 \cdot 10^{-5}$ | $1.0 \cdot 10^{-4}$ |
| | 100 | $2.0 \cdot 10^{-5}$ | $2.0 \cdot 10^{-5}$ | $2.6 \cdot 10^{-5}$ |
| Гира | 10 | $1.8 \cdot 10^{-3}$ | $1.9 \cdot 10^{-3}$ | $2.5 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $7.3 \cdot 10^{-5}$ | $7.6 \cdot 10^{-5}$ | $1.0 \cdot 10^{-4}$ |
| | 100 | $1.8 \cdot 10^{-5}$ | $1.9 \cdot 10^{-5}$ | $2.5 \cdot 10^{-5}$ |

задачи 3, полученных методами Рунге — Кутты второго порядка и Гира при умеренных и больших временах запаздывания на интервале времени $0 \leq t \leq T = 50\tau$.

Таблица 5.5. Относительные погрешности численных решений задачи 3 при $a = 1$, $k = 0.5$ для трех различных времен запаздывания τ на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$.

| Метод | N | $\tau = 0.5$ | $\tau = 1$ | $\tau = 5$ |
|----------------------------------|-----|---------------------|---------------------|---------------------|
| Рунге — Кутты второго порядка | 10 | $7.1 \cdot 10^{-5}$ | $5.4 \cdot 10^{-5}$ | $4.8 \cdot 10^{-5}$ |
| | 50 | $2.0 \cdot 10^{-6}$ | $1.9 \cdot 10^{-6}$ | $1.9 \cdot 10^{-6}$ |
| | 100 | $2.5 \cdot 10^{-7}$ | $3.7 \cdot 10^{-7}$ | $5.1 \cdot 10^{-7}$ |
| Гира | 10 | $7.2 \cdot 10^{-5}$ | $5.5 \cdot 10^{-5}$ | $4.8 \cdot 10^{-5}$ |
| | 50 | $2.8 \cdot 10^{-6}$ | $2.2 \cdot 10^{-6}$ | $1.9 \cdot 10^{-6}$ |
| | 100 | $6.3 \cdot 10^{-7}$ | $5.1 \cdot 10^{-7}$ | $5.1 \cdot 10^{-7}$ |

При $a = 1$, $k = 0.5$ и достаточно малых временах запаздывания $\tau = 0.05$ и

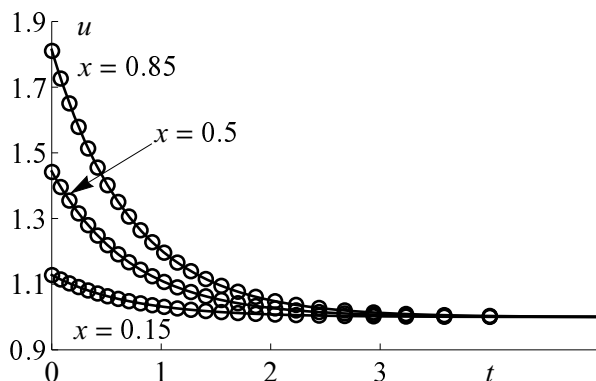


Рис. 5.7. Точные решения (сплошные линии) и полученные с помощью комбинации метода прямых и Рунге — Кутты второго порядка численные решения (кружочки) тестовой задачи 3 при $a = 1$, $k = \tau = 0.5$ в различные моменты времени $\bar{t} = t/\tau$ для $N = 100$.

$\tau = 0.1$ численное решение тестовой задачи 3 начинает сильно отклоняться от точного в области выхода на стационарный режим. После этого выполнение программы прерывается с ошибкой. Указанное обстоятельство связано с тем, что параметр b , входящий в уравнение тестовой задачи и определенный в (5.3.3.14), неограниченно растет как $O(\tau^{-1})$ при $\tau \rightarrow 0$. В результате стационарное решение $u = 1$, к которому стремится решение рассматриваемой задачи при $t \rightarrow \infty$, становится неустойчивым при малых τ (в линейном приближении доказательство данного факта приведено далее).

Для иллюстрации описанной ситуации рассмотрим графики зависимостей численных и точных решений от времени при фиксированном $x = 0.5$ (рис. 5.8), при $a = 1$, $k = 0.5$ и малых временах запаздывания $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$. Выбор средней точки $x = 0.5$ в области изменения пространственной переменной связан с тем, что именно в этой точке наблюдалось максимальное отклонение численного решения от точного. При $\tau = 0.05$ оба используемых численных метода адекватно работают только на очень коротком начальном участке (немного не успевая выйти на асимптоту); затем метод Рунге — Кутты второго порядка дает уходящую вниз немонотонную колеблющуюся кривую, не имеющую ничего общего с точным решением, а метод Гира приводит к кривой, которая сильно отклоняется от точного решения, резко поднимаясь вверх. При $\tau = 0.1$ метод Рунге — Кутты и метод Гира обеспечивают достаточно точную аппроксимацию искомого решения на довольно значительном интервале времени (успевая выйти на асимптоту), причем метода Гира имеет немного больший диапазон применимости по t . Зависимость от времени погрешности численного решения, полученного методом Гира, является монотонной, в отличие немонотонной зависимости для метода Рунге — Кутты. В обоих случаях погрешности резко возрастают через некоторое время после установления стационарного режима.

Покажем, что значения $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$ лежат внутри области неустойчивости стационарного решения рассматриваемого уравнения с запаздыванием.

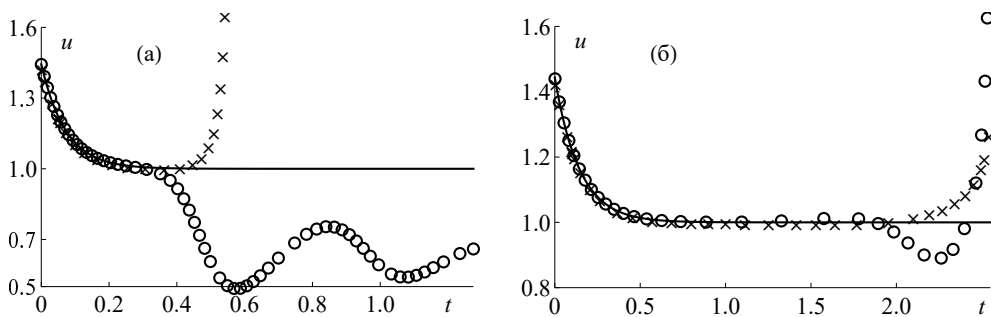


Рис. 5.8. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (метод Рунге — Кутты второго порядка — кружочки, метод Гира — крестики) тестовой задачи 3 при $a = 1$, $k = 0.5$ в точке $x = 0.5$ для $N = 100$ и двух времен запаздывания: а) $\tau = 0.05$ и б) $\tau = 0.1$.

Уравнение (5.3.3.13) тестовой задачи 3 имеет вид

$$u_t = au_{xx} + bu - \frac{b}{(1-k)^2}(u - kw)^2, \quad b = \frac{\ln k}{\tau} - a, \quad (5.3.4.1)$$

и допускает стационарное решение $u_0 = 1$ (к этому решению асимптотически стремится решение рассматриваемой тестовой задачи при $t \rightarrow \infty$). Для анализа линейной устойчивости/неустойчивости решения $u_0 = 1$ рассмотрим возмущенные решения вида [68, 505]:

$$u = 1 + \delta e^{-\lambda t} \sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.3.4.2)$$

где δ — малый параметр, λ — спектральный параметр, подлежащий определению. На границах рассматриваемой области $x = 0$ и $x = 1$ возмущенное решение (5.3.4.2) равно 1 при любом t . Подставляем (5.3.4.2) в уравнение (5.3.4.1). Отбрасывая члены порядка δ^2 и выше, после сокращения на $\sin(\pi n x)$ получим дисперсионное уравнение для параметра λ :

$$\lambda - a(\pi n)^2 - \frac{b(1+k)}{1-k} + \frac{2bk}{1-k} e^{\lambda \tau} = 0, \quad b = \frac{\ln k}{\tau} - a. \quad (5.3.4.3)$$

При $a = n = 1$, $k = 0.5$, $\tau = 0.05$ дисперсионное уравнение (5.3.4.3) имеет отрицательный корень $\lambda \approx -27.0213$. Отсюда следует, что второй член в формуле (5.3.4.2) экспоненциально растет при $t \rightarrow \infty$ и рассматриваемое стационарное решение реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием (5.3.3.13) при $\tau = 0.05$ является неустойчивым в линейном приближении. При увеличении времени запаздывания до значения $\tau_* \approx 0.09153$ (величины остальных параметров не меняются) также имеется один или два действительных отрицательных корня трансцендентного уравнения (5.3.4.3), а при $\tau > \tau_*$ это уравнение не имеет действительных отрицательных корней.

При $a = n = 1$, $k = 0.5$, $\tau = 0.1$ дисперсионное уравнение (5.3.4.3) имеет комплексный корень с отрицательной действительной частью $\operatorname{Re} \lambda = -4.38498$, следовательно, рассматриваемое стационарное решение реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием (5.3.3.13) при $\tau = 0.1$ также является неустойчивым в линейном приближении.

Замечание 5.22. Значение $\tau = 0.5$ лежит вне области неустойчивости стационарного решения тестовой задачи 3. В этом случае дисперсионное уравнение (5.3.4.3) имеет корень с $\operatorname{Re} \lambda = 0.0895394$ и, как отмечалось ранее, методы численного интегрирования хорошо работают.

Тестовая задача 4. На рис. 5.9 представлены графики точного и полученного методом Рунге — Кутты второго порядка численного решения системы ОДУ при $N = 100$ для тестовой задачи 4 при $a = 1$, $k = 0.5$ и $\tau = 0.5$. Графики решений, полученных методом Гира, выглядят аналогично и здесь не приводятся.

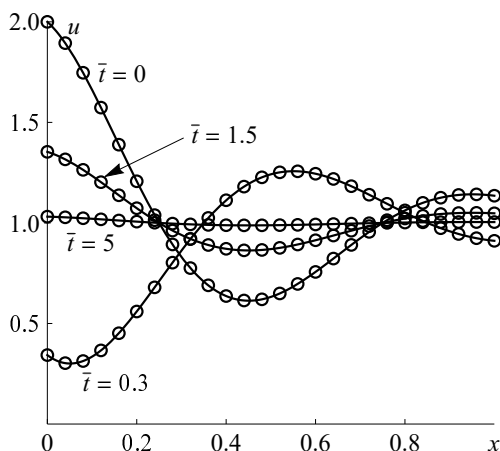


Рис. 5.9. Точные решения (сплошные линии) и полученные с помощью комбинации метода прямых и Рунге — Кутты второго порядка численные решения (крюжочки) тестовой задачи 4 при $a = 1$, $k = \tau = 0.5$ в различные моменты времени $\bar{t} = t/\tau$ для $N = 100$.

Относительные погрешности численных решений, полученных методами Рунге — Кутты второго порядка и Гира при умеренных и больших временах запаздывания на интервале времени $T = 50\tau$, одинаковы с точностью до двух значащих цифр для обоих методов. Значения погрешностей представлены в табл. 5.6.

Отметим, что при запаздываниях порядка единицы (например, $\tau = 0.5$) колебания решения не являются высокочастотными и не приводят к проблемам при численном интегрировании рассматриваемой тестовой задачи в отличие от случая малых времен запаздывания, который обсуждается далее.

При малых временах запаздывания $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$ и значениях параметров $a = 1$, $k = 0.5$ численное решение системы ОДУ при $N = 100$

Таблица 5.6. Относительные погрешности численных решений задачи 4 при $a = 1$, $k = 0.5$ для трех различных времен запаздывания τ на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$.

| N | $\tau = 0.5$ | $\tau = 1$ | $\tau = 5$ |
|-----|---------------------|---------------------|---------------------|
| 10 | $7.3 \cdot 10^{-3}$ | $1.2 \cdot 10^{-2}$ | $7.4 \cdot 10^{-2}$ |
| 50 | $2.9 \cdot 10^{-4}$ | $5.1 \cdot 10^{-4}$ | $2.9 \cdot 10^{-3}$ |
| 100 | $7.3 \cdot 10^{-5}$ | $1.3 \cdot 10^{-4}$ | $7.3 \cdot 10^{-4}$ |

для тестовой задачи 4 не удалось получить ни методом Рунге — Кутты, ни методом Гира. Указанное обстоятельство в первую очередь связано с тем, что параметр b , входящий в уравнение тестовой задачи и определенный в (5.3.3.17), неограниченно растет как $O(\tau^{-2})$ при $\tau \rightarrow 0$ (в данном случае коэффициент b растет значительно быстрее, чем в тестовой задаче 3). Дополнительным осложняющим фактором здесь при малых временах запаздывания являются быстрые осцилляции решения в малой окрестности левой границы $x = 0$, причем в остальной части рассматриваемой области $u \approx 1$. Получение адекватных численных результатов в подобных случаях возможно лишь при малых шагах по пространству в области погранслоного типа, где решение быстро меняется. Использование переменного шага по пространству, то есть разного количества уравнений для областей с быстрыми осцилляциями и без них, в методе прямых затруднительно, так как сложно заранее определить, в какой области возникают высокочастотные осцилляции. Применение же малого шага во всей области вычислений сопряжено с чрезмерным увеличением времени работы метода.

Замечание 5.23. Метод прямых в комбинации с методом Гира, встроенным в пакет Mathematica, применяется в разд. 6.2.4 для решения начально-краевой задачи для диффузионной системы типа Лотки — Вольтерры.

5.3.5. Сопоставление численных и точных решений нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием

В разд. 5.3.3 были сформулированы четыре тестовые задачи для нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием. В этом разделе обсуждаются результаты численного интегрирования этих тестовых задач с помощью комбинации метода прямых и трех методов решения систем ОДУ с запаздыванием, встроенных в пакет Mathematica: метод Рунге — Кутты второго порядка, метод Рунге — Кутты четвертого порядка и метод Гира; проводится сопоставление полученных численных решений с точными решениями тестовых задач. Нумерация и формулировки тестовых задач, рассматриваемых ниже, совпадают с нумерацией и формулировками тестовых задач, приведенных в разд. 5.3.3.

Тестовая задача 5. Решение $u = U_5$ тестовой задачи 5 при $a = 1$, $k = 0.5$ является экспоненциально убывающей функцией. В табл. 5.7 указаны абсолютные погрешности численных решений, полученных комбинацией метода прямых с тремя методами решения системы ОДУ на отрезке $0 \leq t \leq 50\tau$ для

различных N и τ . Из табл. 5.7 можно сделать вывод, что все методы хорошо справились с решением задачи, причем метод Рунге — Кутты четвертого порядка дал чуть более лучшую аппроксимацию точного решения. С увеличением N абсолютные погрешности уменьшаются; все методы дали второй порядок аппроксимации по пространству. Отметим также, что абсолютные погрешности уменьшаются при увеличении времени запаздывания.

На рис. 5.10 представлены графики точного решения (сплошная линия) и численного решения, полученного методом Рунге — Кутты второго порядка (кружочки) при $a = 1$, $k = 0.5$ и $\tau = 0.05$, $\tau = 0.5$ для $N = 100$ в моменты времени $\bar{t} \approx 0.1$, $\bar{t} \approx 1$, $\bar{t} \approx 3$, где $\bar{t} = t/\tau$. Графики, полученные другими методами выглядят аналогично и здесь не приводятся.

Таблица 5.7. Абсолютные погрешности численных решений тестовой задачи 5 при $a = 1$, $k = 0.5$ на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$.

| Метод | N | $\tau = 0.05$ | $\tau = 0.1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 1$ |
|-------------------------------------|-----|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Рунге — Кутты второго порядка | 10 | $4.0 \cdot 10^{-2}$ | $1.2 \cdot 10^{-2}$ | $2.5 \cdot 10^{-4}$ | $2.7 \cdot 10^{-5}$ |
| | 50 | $2.0 \cdot 10^{-3}$ | $5.0 \cdot 10^{-4}$ | $1.0 \cdot 10^{-5}$ | $1.9 \cdot 10^{-6}$ |
| | 100 | $5.0 \cdot 10^{-4}$ | $1.2 \cdot 10^{-4}$ | $2.6 \cdot 10^{-6}$ | $9.5 \cdot 10^{-7}$ |
| | 200 | $1.2 \cdot 10^{-4}$ | $3.0 \cdot 10^{-5}$ | $7.2 \cdot 10^{-7}$ | $6.0 \cdot 10^{-7}$ |
| Рунге — Кутты четвертого порядка | 10 | $4.0 \cdot 10^{-2}$ | $1.2 \cdot 10^{-2}$ | $2.5 \cdot 10^{-4}$ | $2.7 \cdot 10^{-5}$ |
| | 50 | $2.0 \cdot 10^{-3}$ | $5.0 \cdot 10^{-4}$ | $9.8 \cdot 10^{-6}$ | $1.1 \cdot 10^{-6}$ |
| | 100 | $5.0 \cdot 10^{-4}$ | $1.2 \cdot 10^{-4}$ | $2.5 \cdot 10^{-6}$ | $2.7 \cdot 10^{-7}$ |
| | 200 | $1.2 \cdot 10^{-4}$ | $3.0 \cdot 10^{-5}$ | $6.1 \cdot 10^{-7}$ | $6.7 \cdot 10^{-8}$ |
| Гира | 10 | $4.0 \cdot 10^{-2}$ | $1.2 \cdot 10^{-2}$ | $2.5 \cdot 10^{-4}$ | $2.7 \cdot 10^{-5}$ |
| | 50 | $2.0 \cdot 10^{-3}$ | $5.0 \cdot 10^{-4}$ | $9.8 \cdot 10^{-6}$ | $1.3 \cdot 10^{-6}$ |
| | 100 | $5.0 \cdot 10^{-4}$ | $1.2 \cdot 10^{-4}$ | $2.5 \cdot 10^{-6}$ | $3.0 \cdot 10^{-7}$ |
| | 200 | $1.2 \cdot 10^{-4}$ | $3.1 \cdot 10^{-5}$ | $6.5 \cdot 10^{-7}$ | $1.3 \cdot 10^{-7}$ |

Тестовая задача 6. Решение $u = U_6$ тестовой задачи 6 из разд. 5.3.3 при $a = k = 1$ представляет собой незатухающий колебательный процесс с периодом τ по обоим переменным. Важно отметить, что это решение быстро осциллирует при малых τ и является сингулярным относительно параметра запаздывания (поскольку решение $u = U_6$ не имеет предела при $\tau \rightarrow 0$). Указанное обстоятельство ограничивает возможности используемых здесь численных методов при малых τ , поскольку требует для таких τ большого числа точек сетки по x (например, при $\tau = 0.05$ для достижения приемлемой точности требуется брать более 1000 точек, а при $\tau = 0.1$ и $N = 1000$ абсолютная погрешность вычислений для метода Рунге — Кутты второго порядка довольно велика и равна $4.1 \cdot 10^{-2}$).

В табл. 5.8 указаны абсолютные погрешности численных решений тестовой задачи 6, полученных комбинацией метода прямых с методом Гира и с методом Рунге — Кутты второго порядка на интервале времени $0 \leq t \leq 50\tau$ для трех умеренных времен запаздывания $\tau = 0.5$, $\tau = 1$, $\tau = 2$ при различном количестве

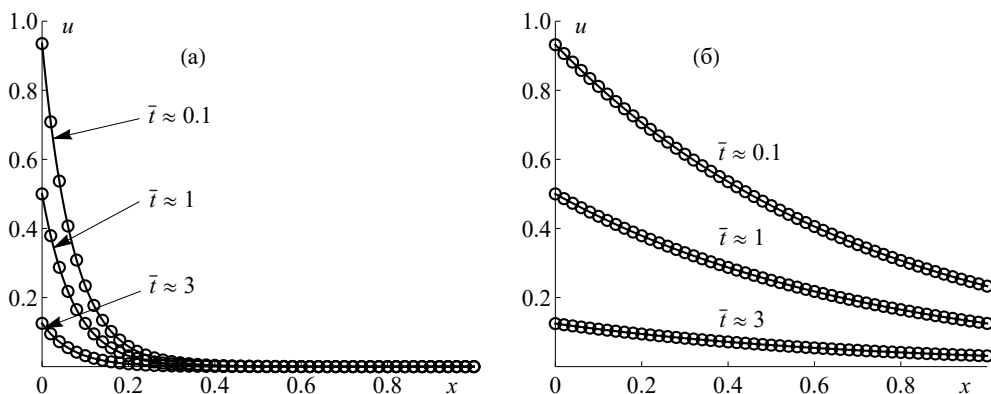


Рис. 5.10. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки), полученные комбинацией метода прямых и метода Рунге — Кутты второго порядка тестовой задачи 5 при $a = 1$, $k = 0.5$ в различные моменты времени $\bar{t} = t/\tau$ для $N = 100$ и двух времен запаздывания: а) $\tau = 0.05$, б) $\tau = 0.5$.

точек сетки по пространственной переменной ($N = 50$, $N = 100$, $N = 200$). Видно, что при увеличении τ и увеличении количества уравнений N уменьшается погрешность численного решения. Погрешность также уменьшается, если уменьшается рассматриваемый интервал времени T (например, при $\tau = 0.5$ оба метода показывают приемлемую аппроксимацию точного решения для $N = 100$ с абсолютной погрешностью 0.08 на интервале $0 \leq t \leq T = 20\tau$, а при $N = 200$ абсолютная погрешность на этом же интервале времени будет меньше в четыре раза). Погрешности решений, полученных методом Рунге — Кутты четвертого порядка, совпадают с погрешностями решений, полученных методом Гира, и отдельно в табл. 5.8 не приводятся. Колебания по x имеют период τ , то есть с увеличением времени запаздывания частота колебаний уменьшается, и поэтому для достижения приемлемой погрешности можно использовать меньшее количество точек сетки по пространству. Тестирование методов для умеренных и больших времен запаздывания при больших N не проводилось, так как такие вычисления требуют больших затрат оперативной памяти, но, ввиду сказанного выше, не являются необходимыми. Отметим, что метод Рунге — Кутты второго порядка дает чуть более хорошую аппроксимацию точного решения.

На рис. 5.11 представлены графики точного решения (сплошная линия) и численного решения, полученного методом Рунге — Кутты второго порядка (кружочки) при $a = 1$, $\tau = 0.5$ для $N = 100$ и $N = 200$ в некоторый промежуточный момент времени $t = 15.91$ (момент времени выбран так, чтобы была заметна погрешность численного решения) и в момент времени с максимальной амплитудой $t = 16.00$. Видно, что с увеличением количества уравнений N уменьшается погрешность численного решения. Графики решений, полученных методом Гира, выглядят аналогично и здесь не приводятся.

Таблица 5.8. Абсолютные погрешности численных решений тестовой задачи 6 при $a = k = 1$ и умеренных временах запаздывания τ на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$.

| Метод | N | $\tau = 0.5$ | $\tau = 1$ | $\tau = 2$ |
|----------------------------------|-----|---------------------|---------------------|---------------------|
| Рунге — Кутты второго порядка | 50 | 0.79 | 0.2 | $4.6 \cdot 10^{-2}$ |
| | 100 | 0.2 | $4.4 \cdot 10^{-2}$ | $7.7 \cdot 10^{-3}$ |
| | 200 | $4.3 \cdot 10^{-2}$ | $5.7 \cdot 10^{-3}$ | $1.9 \cdot 10^{-3}$ |
| Гира | 50 | 0.8 | 0.2 | $5.1 \cdot 10^{-2}$ |
| | 100 | 0.2 | $5.1 \cdot 10^{-2}$ | $1.3 \cdot 10^{-2}$ |
| | 200 | $5.1 \cdot 10^{-2}$ | $1.3 \cdot 10^{-2}$ | $3.2 \cdot 10^{-3}$ |

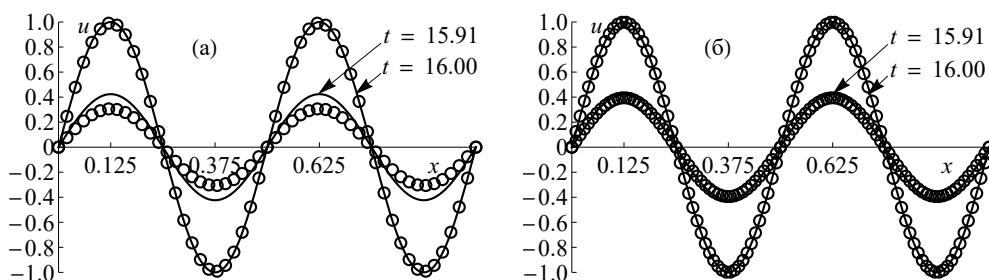


Рис. 5.11. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки), полученные комбинацией метода прямых и метода Рунге — Кутты второго порядка тестовой задачи 6 при $a = k = 1$, $\tau = 0.5$ и а) $N = 100$, б) $N = 200$ в моменты времени $t = 15.91$ и $t = 16.00$.

Тестовая задача 7. Точное решение $u = U_7$ тестовой задачи 7 из разд. 5.3.3 при $a = 1$, $k = 0.5$ является монотонно затухающим по обоим переменным. Все три метода (методы Рунге — Кутты второго и четвертого порядка и метод Гира) адекватно работают на всем интервале вычислений $0 \leq t \leq T = 50\tau$ при всех рассматриваемых временах запаздывания. Графики численных решений, полученных методом Гира, при $N = 100$ для времен запаздывания $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.5$ представлены на рис. 5.12. Графики решений, полученных другими методами, выглядят аналогично и здесь не приводятся. Абсолютные погрешности численных решений представлены в табл. 5.9.

Тестовая задача 8. Точное решение $u = U_8$ тестовой задачи 8 из разд. 5.3.3 при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$ является монотонно затухающим во времени. При умеренных временах запаздывания ($\tau = 0.5$ и $\tau = 1$) все три метода (методы Рунге — Кутты второго и четвертого порядка и метод Гира) адекватно работают на всем интервале вычислений $0 \leq t \leq T = 50\tau$.

При малых временах запаздывания ($\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$) все методы адекватно работают только на начальном участке $0 \leq t \leq 10\tau$, а после выхода на асимптоту $u = 0$ начинают сильно отклоняться от точного решения. Указанное обстоятельство связано с неустойчивостью при малых τ стационарного решения $u = 0$.

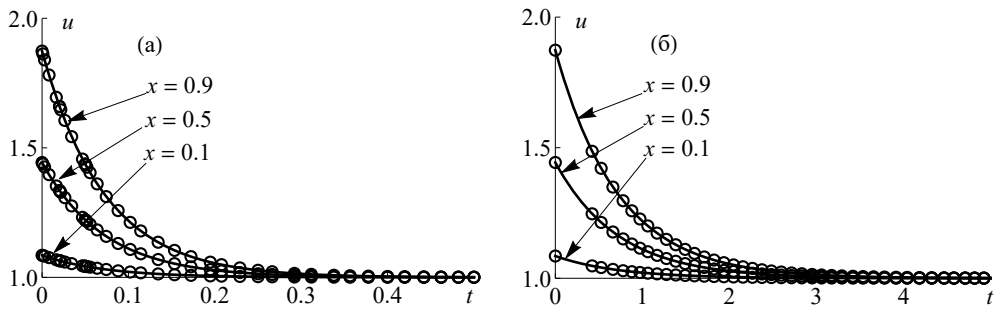


Рис. 5.12. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки), полученные комбинацией метода прямых и метода Гира, тестовой задачи 7 при $a = 1$, $k = 0.5$ в точках $x = 0.1$, $x = 0.5$, $x = 0.9$ для $N = 100$ и двух времен запаздывания: а) $\tau = 0.05$ и б) $\tau = 0.5$.

Таблица 5.9. Абсолютные погрешности численных решений тестовой задачи 7 при $a = 1$, $k = 0.5$ на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$.

| Метод | N | $\tau = 0.05$ | $\tau = 0.1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 1$ |
|-------------------------------------|-----|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Рунге — Кутты второго порядка | 10 | $2.1 \cdot 10^{-6}$ | $5.3 \cdot 10^{-6}$ | $4.9 \cdot 10^{-5}$ | $2.2 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $9.4 \cdot 10^{-7}$ | $1.8 \cdot 10^{-6}$ | $2.5 \cdot 10^{-6}$ | $6.6 \cdot 10^{-5}$ |
| | 100 | $1.7 \cdot 10^{-6}$ | $1.2 \cdot 10^{-6}$ | $1.0 \cdot 10^{-6}$ | $1.1 \cdot 10^{-5}$ |
| | 200 | $1.3 \cdot 10^{-6}$ | $1.2 \cdot 10^{-6}$ | $6.5 \cdot 10^{-7}$ | $1.4 \cdot 10^{-6}$ |
| Рунге — Кутты четвертого порядка | 10 | $1.2 \cdot 10^{-6}$ | $4.5 \cdot 10^{-6}$ | $4.8 \cdot 10^{-5}$ | $2.3 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $5.5 \cdot 10^{-8}$ | $2.8 \cdot 10^{-7}$ | $1.9 \cdot 10^{-6}$ | $7.9 \cdot 10^{-5}$ |
| | 100 | $1.5 \cdot 10^{-8}$ | $5.6 \cdot 10^{-8}$ | $4.8 \cdot 10^{-7}$ | $2.0 \cdot 10^{-5}$ |
| | 200 | $3.4 \cdot 10^{-9}$ | $1.2 \cdot 10^{-8}$ | $1.2 \cdot 10^{-7}$ | $4.9 \cdot 10^{-6}$ |
| Гира | 10 | $1.2 \cdot 10^{-6}$ | $4.5 \cdot 10^{-6}$ | $4.8 \cdot 10^{-5}$ | $2.3 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $8.4 \cdot 10^{-8}$ | $3.2 \cdot 10^{-7}$ | $1.9 \cdot 10^{-6}$ | $8.0 \cdot 10^{-5}$ |
| | 100 | $5.0 \cdot 10^{-8}$ | $9.4 \cdot 10^{-8}$ | $4.7 \cdot 10^{-7}$ | $2.1 \cdot 10^{-5}$ |
| | 200 | $6.3 \cdot 10^{-8}$ | $3.6 \cdot 10^{-8}$ | $1.3 \cdot 10^{-7}$ | $5.3 \cdot 10^{-6}$ |

Поведение методов проиллюстрировано на рис. 5.13 при $N = 200$ на середине отрезка $x = 0.5$. Графики численных решений, полученных методом Рунге — Кутты четвертого порядка, качественно аналогичны графикам численных решений, полученных методом Гира, и здесь опускаются. Из рис. 5.13 видно, что метод Гира (и метод Рунге — Кутты четвертого порядка) имеет немного больший диапазон применимости по t . В табл. 5.10 представлены абсолютные погрешности численных решений на интервале $0 \leq t \leq 10\tau$, когда методы работают хорошо.

Отметим, что решение $u = U_8$ тестовой задачи 8 очень быстро затухает при малых τ . Срыв численного решения при малых значениях $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$ связан с линейной неустойчивостью предельного стационарного состояния рассматриваемого решения ($u \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

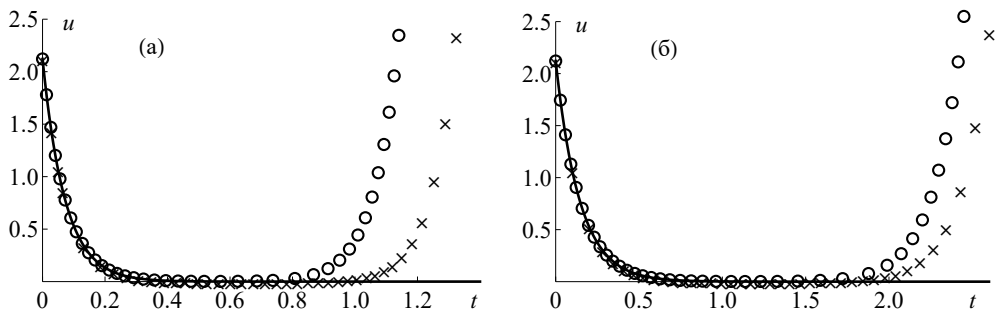


Рис. 5.13. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (метод Рунге — Кутты второго порядка — кружочки, метод Гира — крестики) тестовой задачи 8 при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$ в точке $x = 0.5$ для $N = 200$ и двух времен запаздывания: а) $\tau = 0.05$ и б) $\tau = 0.1$.

Абсолютные погрешности численных решений для различных времен запаздывания и на соответствующих интервалах интегрирования представлены в табл. 5.10.

Таблица 5.10. Абсолютные погрешности численных решений тестовой задачи 8 при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$.

| Метод | N | $\tau = 0.05$ $T = 10\tau$ | $\tau = 0.1$ $T = 10\tau$ | $\tau = 0.5$ $T = 50\tau$ | $\tau = 1$ $T = 50\tau$ |
|-------------------------------------|-----|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| Рунге — Кутты второго порядка | 10 | $1.3 \cdot 10^{-2}$ | $4.1 \cdot 10^{-2}$ | $2.2 \cdot 10^{-3}$ | $2.4 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $9.4 \cdot 10^{-4}$ | $1.8 \cdot 10^{-3}$ | $8.8 \cdot 10^{-5}$ | $9.6 \cdot 10^{-5}$ |
| | 100 | $5.6 \cdot 10^{-4}$ | $6.0 \cdot 10^{-4}$ | $2.3 \cdot 10^{-5}$ | $2.5 \cdot 10^{-5}$ |
| | 200 | $4.8 \cdot 10^{-4}$ | $2.9 \cdot 10^{-4}$ | $6.8 \cdot 10^{-6}$ | $7.2 \cdot 10^{-6}$ |
| Рунге — Кутты четвертого порядка | 10 | $1.3 \cdot 10^{-2}$ | $4.1 \cdot 10^{-2}$ | $2.2 \cdot 10^{-3}$ | $2.4 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $5.4 \cdot 10^{-4}$ | $1.6 \cdot 10^{-3}$ | $8.6 \cdot 10^{-5}$ | $9.4 \cdot 10^{-5}$ |
| | 100 | $1.4 \cdot 10^{-4}$ | $4.1 \cdot 10^{-4}$ | $2.2 \cdot 10^{-5}$ | $2.4 \cdot 10^{-5}$ |
| | 200 | $3.4 \cdot 10^{-5}$ | $1.0 \cdot 10^{-4}$ | $5.4 \cdot 10^{-6}$ | $5.9 \cdot 10^{-6}$ |
| Гира | 10 | $1.3 \cdot 10^{-2}$ | $4.1 \cdot 10^{-2}$ | $2.2 \cdot 10^{-3}$ | $2.4 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $5.4 \cdot 10^{-4}$ | $1.6 \cdot 10^{-3}$ | $8.6 \cdot 10^{-5}$ | $9.4 \cdot 10^{-5}$ |
| | 100 | $1.4 \cdot 10^{-4}$ | $4.1 \cdot 10^{-4}$ | $2.2 \cdot 10^{-5}$ | $2.4 \cdot 10^{-5}$ |
| | 200 | $3.5 \cdot 10^{-5}$ | $1.0 \cdot 10^{-4}$ | $5.4 \cdot 10^{-6}$ | $6.1 \cdot 10^{-6}$ |

6. Модели и дифференциальные уравнения с запаздыванием, которые используются в приложениях

6.1. Модели, описываемые нелинейными ОДУ с запаздыванием

6.1.1. Уравнение Хатчинсона (логистическое уравнение с запаздыванием)

Предварительные замечания. В литературе часто встречаются нелинейные ОДУ с запаздыванием (и системы таких уравнений), описывающие самые разнообразные процессы. Модели с запаздыванием, как правило, возникают в результате соответствующих обобщений более простых моделей без запаздывания. Ниже, для иллюстрации таких обобщений, рассмотрена цепочка постепенно усложняющихся моделей динамики популяций, описываемых ОДУ без запаздывания, которая привела в конечном итоге к более сложной модели с запаздыванием.

Уравнение Мальтуса. Первую математическую модель для описания динамики роста численности вида предложил в 1798 г. Т. Мальтус. Согласно этой модели при благоприятных условиях любой вид увеличивает свою численность по экспоненциальному закону $u(t) = u_0 e^{bt}$, и следовательно, удовлетворяет линейному ОДУ:

$$u'_t = bu. \quad (6.1.1.1)$$

Это уравнение впоследствии получило название *экспоненциального уравнения Мальтуса*. Здесь параметр b , равный разности между коэффициентами рождаемости и смертности, получил название мальтузианского коэффициента линейного роста (при неблагоприятных условиях константа b может быть отрицательной). Модель Мальтуса хорошо подтверждается многочисленными экспериментальными данными, если численность популяции невелика, т. е. пока ее размер не ограничивается доступной пищей и территорией.

Логистическое дифференциальное уравнение. Чтобы учесть ограниченность пищевых ресурсов, в 1835 г. Л.А. Кетле и П.Ф. Ферхюльст предложили более сложную, чем (6.1.1.1), математическую модель, которая описывается нелинейным логистическим дифференциальным уравнением

$$u'_t = bu(1 - u/k), \quad (6.1.1.2)$$

где параметр k характеризует максимально возможную численность популяции и называется *емкостью среды обитания*. В предельном случае $k \rightarrow \infty$ уравнение (6.1.1.2) переходит в модель Мальтуса (6.1.1.1).

Точное решение уравнения (6.1.1.2) с начальным условием $u(t=0) = u_0$ имеет вид

$$u(t) = \frac{k}{1 + [(k/u_0) - 1] \exp(-bt)}, \quad t > 0. \quad (6.1.1.3)$$

Ниже перечислены основные свойства решения (6.1.1.3).

- 1°. При $u_0 > 0$ имеем $u(t) > 0$ при всех $t > 0$.
- 2°. Имеет место предельное соотношение: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = k$.
- 3°. При $0 < u_0 < k$ функция $u(t)$ возрастает, а при $u_0 > k$ убывает.
- 4°. Положение равновесия $u = k$ глобально асимптотически устойчиво.

Уравнение Хатчинсона и его свойства. Логистический закон (6.1.1.3) хорошо описывает динамику роста популяций простейших микроорганизмов, однако он неприменим для моделирования динамики численности большинства млекопитающих. Это связано с тем, что численности популяций таких видов подвержены резким циклическим колебаниям. В связи с этим Г. Хатчинсон [294] предложил использовать более сложную модель, основанную на нелинейном ОДУ с запаздыванием:

$$u'_t = bu(1 - w/k), \quad w = u(t - \tau), \quad (6.1.1.4)$$

которое описывает динамику некоторой популяции с учетом периода взросления, когда особи не способны к размножению. В уравнение (6.1.1.4) входит относительная численность (плотность) популяции $u = u(t) \geq 0$, коэффициент роста популяции $b > 0$, емкость среды обитания k и время запаздывания τ , характеризующее средний репродуктивный возраст рассматриваемого вида. Скорость роста популяции здесь прямо пропорциональна размеру популяции в текущий момент времени и сомножителю $(k - w)/k$ и является саморегулирующейся. В предельном случае $\tau = 0$ уравнение (6.1.1.4) переходит в логистическое дифференциальное уравнение (6.1.1.3). Введение в уравнение запаздывания $\tau > 0$ приводит к возникновению колебательного процесса. Это связано с тем, что рост популяции остановится не сразу по достижении уровня насыщения k , как было бы при отсутствии запаздывания, а спустя время τ . В итоге получится, что размер популяции превысит уровень насыщения и начнет снижаться, но опять же не сможет остановиться, достигнув насыщения k , а «проскочит» его, остановится позже и вернется к росту.

Заменой $u = kv$ уравнение (6.1.1.4) сводится к более простому виду

$$v'_t = bv[1 - v(t - \tau)]. \quad (6.1.1.5)$$

Ниже описаны некоторые качественные и количественные особенности решений уравнения (6.1.1.5) (подробности см. в [40, 306, 333, 563]).

- 1°. Состояние равновесия $v = 0$ неустойчиво.

2°. Состояние равновесия $v = 1$ асимптотически устойчиво при $0 < b\tau \leq \pi/2$ и неустойчиво при $b\tau > \pi/2$.

3°. При $0 < b\tau \leq \frac{37}{24}$ (оценку сверху можно улучшить [37]) все решения уравнения (6.1.1.5), за исключением нулевого, при $t \rightarrow \infty$ стремятся к 1.

4°. При $b\tau > \pi/2$ имеется нетривиальное периодическое решение [40, 307, 310]. Обозначим это решение $v_*(t, \lambda)$, где $\lambda = b\tau$, а его период $-T_*(\lambda)$. При $\lambda = b\tau \gg 1$ имеют место асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} T_*(\lambda) &= \frac{e^\lambda + 1}{\lambda} + O\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\right), \\ \max_{0 \leq t \leq T_*} v_*(t, \lambda) &= e^{\lambda-1} + (2e)^{-1} + O(e^{-\lambda}), \\ \min_{0 \leq t \leq T_*} v_*(t, \lambda) &= \exp\left[-e^\lambda + 2\lambda - 1 + \frac{1 + (1 + \lambda) \ln \lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Замечание 6.1. Условия устойчивости и неустойчивости обобщенных уравнений Хатчинсона обсуждаются в разд. 1.3.4 (см. примеры 1.16 и 1.17).

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (6.1.1.5) при $b = 1$ с начальным условием

$$v(t) = 0.5, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (6.1.1.6)$$

На рис. 6.1 сплошными линиями показаны графики численных решений этой задачи при двух различных временах запаздывания: а) $\tau = 0.5$ и б) $\tau = 2$, которые соответствуют устойчивому и неустойчивому положению равновесия $v = 1$. Штриховой линией показано решение задачи без запаздывания при $\tau = 0$. Все решения получены неявным методом Рунге — Кутты второго порядка с использованием пакета Mathematica (см. разд. 5.1.4 и 5.1.7). Видно, что решение задачи без запаздывания монотонно возрастает и быстро приближается к положению равновесия. Решение при $\tau = 0.5$ колеблется около решения задачи без запаздывания и быстро приближается к нему при увеличении t , что соответствует устойчивому положению равновесия. Решение при $\tau = 2$ также колеблется около решения задачи без запаздывания, при этом амплитуда колебаний возрастает при увеличении t , что соответствует неустойчивому режиму.

Логистическая модель в условиях ограниченности питательных веществ. Из уравнения (6.1.1.2) легко увидеть, что средняя скорость роста популяции линейно зависит от плотности. Однако в экспериментах с культурами бактерий было обнаружено, что средняя скорость роста u'_t/u не является линейной функцией плотности. Этот факт послужил основой для улучшения логистической модели (6.1.1.2), в результате чего была сформулирована более сложная модель «с ограниченным питанием», которая описывается ОДУ [494]:

$$u_t = bu \frac{k - u}{k + cu}, \quad (6.1.1.7)$$

где $u = u(t) \geq 0$ — плотность популяции, $b > 0$ — коэффициент роста популяции при неограниченном питании, $k > 0$ — уровень насыщения размера

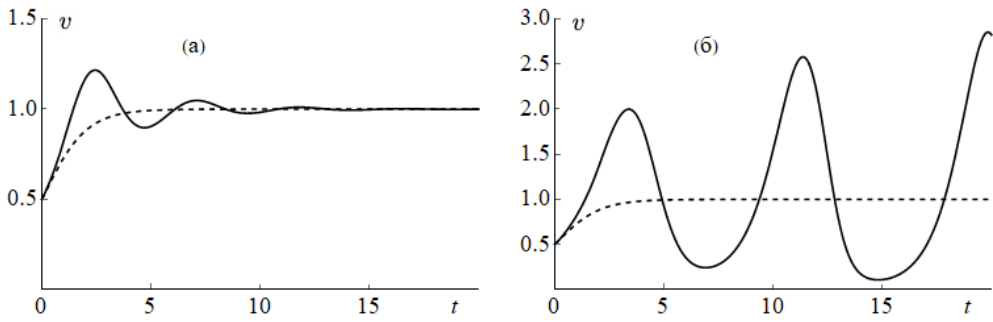


Рис. 6.1. Решения задачи (6.1.1.5), (6.1.1.6) при $b = 1$ для двух времен запаздывания: а) $\tau = 0.5$, б) $\tau = 2$; штриховой линией показано решение при $\tau = 0$.

популяции (при $u_t = 0$), τ — время запаздывания, характеризующее средний репродуктивный возраст рассматриваемого вида. Хотя данная модель и была получена без учета свойств и возможных биологических интерпретаций новой константы c , анализ модели [494] позволяет трактовать отношение b/c как удельную скорость замещения массы в рассматриваемой популяции при насыщении. Сюда входят как метаболические потери, так и потери вследствие смерти организмов. Модель (6.1.1.7) учитывает, что растущая популяция будет поедать «пищу» быстрее, чем равновесная популяция. Это происходит из-за того, что в фазе роста пища потребляется как для поддержания размера популяции, так и для ее роста, а при достижении уровня насыщения пища главным образом идет на поддержание размера популяции. Как и в уравнении (6.1.1.2), решение уравнения (6.1.1.7) монотонно стремится к k при $t \rightarrow \infty$. Однако, как было экспериментально установлено (см., например, [403]), плотность (относительный размер) популяции обычно имеет тенденцию к колебанию около равновесного значения, а стремление к положительному равновесному значению редко происходит монотонным образом. Чтобы включить такие осцилляции в популяционную модель с ограниченным питанием (6.1.1.7), в работе [253] была предложена модель, которая описывается следующим ОДУ с запаздыванием:

$$u_t = bu \frac{k - w}{k + cw}, \quad w = u(t - \tau). \quad (6.1.1.8)$$

Свойства уравнения (6.1.1.8) и его решений изучаются в работах [136, 253, 254, 257, 498, 534].

6.1.2. Уравнение Николсона

Еще одной распространенной нелинейной моделью с запаздыванием является уравнение Николсона [267]:

$$u'_t = pwe^{-\kappa w} - \delta u, \quad w = u(t - \tau), \quad (6.1.2.1)$$

которое используется для моделирования поведения популяции мясных мух и хорошо согласуется с экспериментами, описанными в [403]. Здесь $p > 0$ — максимальное количество яиц, откладываемых одной особью в сутки (с поправкой на выживаемость при развитии от яйца до взрослой особи), $1/\kappa > 0$ — численность популяции, при которой она воспроизводится с максимальной скоростью, $\delta > 0$ — среднесуточный удельный (в пересчете на одну особь) уровень смертности взрослых особей, $\tau > 0$ — время от кладки яйца до момента, когда особь из этого яйца становится половозрелой.

Уравнение (6.1.2.1) имеет два положения равновесия: тривиальное $u_0 = 0$ и положительное

$$u_* = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{p}{\delta}, \quad (6.1.2.2)$$

которое существует при условии $p > \delta$.

Уравнение (6.1.2.1) будем рассматривать в области $t > 0$ с начальным условием

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (6.1.2.3)$$

Ниже кратко приведены основные результаты исследования уравнения Николсона (6.1.2.1).

1°. Пусть $\varphi(t) \geq 0$ в (6.1.2.3). Тогда решение соответствующей задачи Коши для уравнения (6.1.2.1) неотрицательно [497], т. е. $u(t) \geq 0$ при $t > 0$.

2°. При заданных положительных начальных данных все решения уравнения (6.1.2.1) остаются положительными при всех $t > 0$, и выполняется неравенство [497]:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \frac{p}{e\delta\kappa}.$$

3°. Пусть $p \leq \delta$. Тогда для любого решения уравнения (6.1.2.1) справедливо соотношение $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ [497]. Другими словами, тривиальное решение $u_0 = 0$ является *глобальным аттрактором* (т. е. *глобально асимптотически устойчиво*) независимо от τ при $p \leq \delta$.

4°. Пусть $p > \delta$. Тогда не существует такого нетривиального решения $u(t)$ уравнения (6.1.2.1), что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0,$$

и все решения уравнения (6.1.2.1) *равномерно устойчивы* [497] (т. е. найдется $\eta > 0$, такое что для любой траектории с положительными начальными значениями выполняется соотношение $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) > \eta$).

Замечание 6.2. Критерии локальной асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия u_* , определяемого формулой (6.1.2.2), можно получить прямым вычислением корней характеристического уравнения

$$\lambda + \delta + \delta[\ln(p/\delta) - 1]e^{-\tau\lambda} = 0,$$

которое соответствует решению уравнения (6.1.2.1), линеаризованному относительно стационарного решения.

5°. Пусть выполняется двустороннее неравенство

$$1 < p/\delta < e^2.$$

Тогда нетривиальное стационарное решение u_* является равномерно устойчивым. Если выполняется двустороннее неравенство

$$1 < p/\delta < e,$$

то нетривиальное стационарное решение u_* является равномерно асимптотически устойчивым [317].

6°. Пусть $p/\delta > e^2$. Тогда положительное состояние равновесия u_* уравнения (6.1.2.1) локально асимптотически устойчиво, если справедливо неравенство [250]:

$$\tau < \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{c}{c-1} \right), \quad c = \ln \frac{p}{\delta} - 1.$$

При этом имеется периодическое решение (отличное от константы), если

$$\tau > \frac{\arccos(-1/c)}{\delta \sqrt{c^2 - 1}}, \quad c = \ln \frac{p}{\delta} - 1.$$

7°. В [545] было доказано следующее утверждение. При $p/\delta > e^2$ решение $u = u_*$ локально асимптотически устойчиво для $\tau \in (0, \tau_0)$ и неустойчиво для $\tau > \tau_0$, где

$$\tau_0 = \frac{1}{\delta \sqrt{c^2 - 1}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c},$$

а константа c определена в п. 6°.

8°. Условие

$$(e^{\delta\tau} - 1) \ln(p/\delta) < 1$$

гарантирует глобальную асимптотическую устойчивость положительного состояния равновесия [497].

9°. Положительное решение u_* уравнения (6.1.2.1) глобально асимптотически устойчиво [361], если либо

$$1 < p/\delta \leq e,$$

либо

$$\frac{p}{\delta} > e \quad \text{и} \quad e^{-\delta\tau} > c \ln \frac{c^2 + c}{c^2 + 1}, \quad c = \ln \frac{p}{\delta} - 1.$$

10°. Справедливы следующие два утверждения [270, 335]:

а) Пусть

$$p/\delta > e \quad \text{и} \quad \delta\tau e^{\delta\tau} [\ln(p/\delta) - 1] > e^{-1}.$$

Тогда все решения уравнения (6.1.2.1) осциллируют относительно u_* .

б) Пусть

$$p/\delta > e^2 \quad \text{и} \quad \delta\tau e^{\delta\tau} [\ln(p/\delta) - 1] \leq e^{-1}.$$

Тогда существует решение уравнения (6.1.2.1), неосциллирующее относительно u_* .

Определение 1. Функцию $u(t)$ называют *неосциллирующей* относительно значения K , если разность $u(t) - K$ либо положительна, либо отрицательна при достаточно больших t . В противном случае функция $u(t)$ называется *осциллирующей* относительно K .

11°. Пусть $p > \delta$, а функция $u(t)$ — положительная неосциллирующая относительно решения u_* уравнения (6.1.2.1). Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_*$ [497].

Определение 2. Ненулевое решение $u(t)$ уравнения (6.1.2.1) называют *быстро осциллирующим* относительно u_* , если существуют последовательности $\{t_n\}$ и $\{t'_n\}$, такие что $t_n, t'_n \rightarrow \infty$ и

$$t_n \neq t'_n, \quad u(t_n) = u(t'_n) = u_*, \quad |t_n - t'_n| \leq \tau, \quad n \geq 1.$$

В противном случае решение $u(t)$ называется *медленно осциллирующим* относительно u_* .

12°. В работе [271] получены общие результаты, перечисленные ниже.

Если $1 < p/\delta < e$, то

а) уравнение (6.1.2.1) имеет отличные от u_* положительные решения, которые не являются осциллирующими относительно u_* ;

б) уравнение (6.1.2.1) имеет бесконечно много положительных решений, быстро осциллирующих относительно u_* ;

с) уравнение (6.1.2.1) не имеет положительных решений, медленно осциллирующих относительно u_* .

При $p/\delta = e$ все отличные от u_* решения уравнения (6.1.2.1) являются неосциллирующими относительно u_* .

Дополнительную информацию о свойствах уравнения Николсона и родственных более сложных нелинейных ОДУ с запаздыванием можно найти в обзоре [138].

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (6.1.2.1) с начальным условием

$$u(t) = u_0 = 50, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (6.1.2.4)$$

Выберем значения параметров уравнения $p = 10$, $\kappa = 0.1$, $\tau = 15$, руководствуясь значениями, предложенными в [267] после анализа экспериментальных данных [403]. Решим сформулированную задачу методом Гира, используя пакет Mathematica (см. разд. 5.1.7).

На рис. 6.2 представлены графики решений задачи (6.1.2.1), (6.1.2.4) при различных значениях среднесуточной удельной смертности δ . Видны качественные различия графиков, которые согласуются с описанными выше условиями устойчивости положения равновесия u_* . Случай асимптотической устойчивости u_* продемонстрирован на рис. 6.2а. Вблизи границ области асимптотической устойчивости решение выходит на простой колебательный процесс с одним локальным максимумом и одним локальным минимумом за один период колебаний (рис. 6.2б). Двигаясь вглубь области неустойчивости сначала

наблюдаем удвоение локальных максимумов (рис. 6.2в), а затем хаотический режим (рис. 6.2г). Аналогичные графики для других значений параметров задачи были получены и проанализированы в [267]. Характер зависимостей на графиках согласуется с экспериментами, которые показали, что при определенных условиях размножение особей происходит не постоянно, а «квазидискретными поколениями», каждое из которых генерирует два или более поколений, отличающихся численностями популяций.

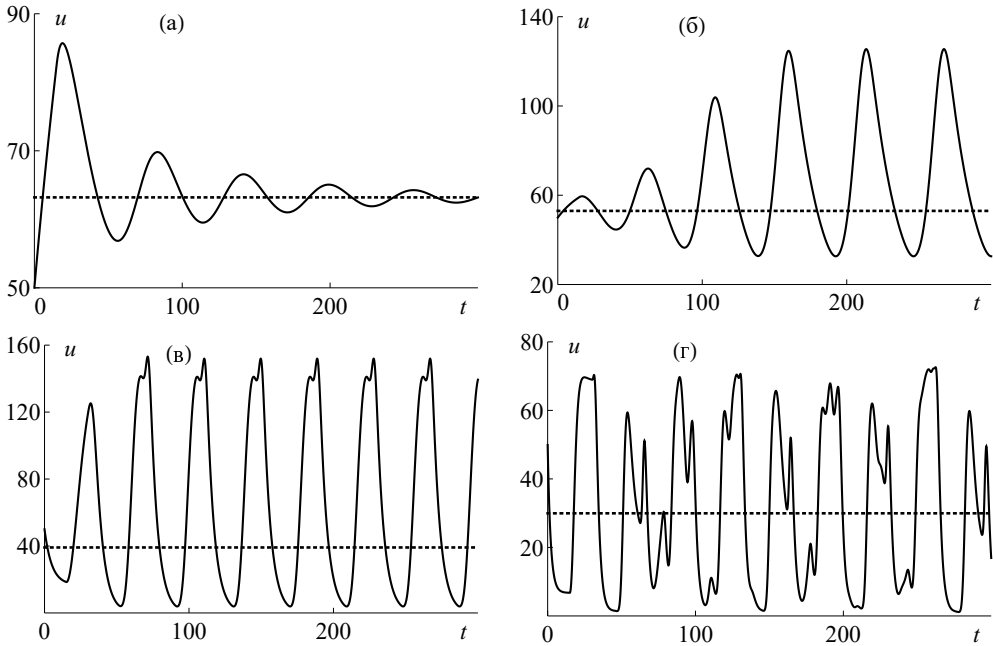


Рис. 6.2. Решения $u(t)$ задачи (6.1.2.1), (6.1.2.4) при $\kappa = 0.1$, $p = 10$, $\tau = 15$ и различных значениях параметра δ : а) $\delta = 0.018$, б) $\delta = 0.05$, в) $\delta = 0.2$, г) $\delta = 0.5$; пунктиром обозначено положение равновесия $u_* = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{p}{\delta}$.

6.1.3. Модели кроветворения Мэки — Гласса

В статье [375] для описания динамики гомогенной популяции зрелых циркулирующих клеток крови плотности $u = u(t)$ используется ОДУ с запаздыванием вида:

$$u_t = \beta_0 \frac{\theta^n w}{\theta^n + w^n} - \gamma u, \quad w = u(t - \tau), \quad (6.1.3.1)$$

где β_0 , θ , n и γ — некоторые параметры.

Правая часть уравнения (6.1.3.1) при $n > 1$ и фиксированном u является функцией w , имеющей один максимум. С ростом τ первоначально устойчивое положение равновесия становится неустойчивым, и появляются устойчивые периодические решения. При дальнейшем росте τ в динамике поведения системы возникает последовательность бифуркаций. Также наблюдается хаоти-

ческий режим. Модель (6.1.3.1) и родственные ей рассматриваются в [137, 352, 480, 483].

В работе [374] были проанализированы клинические и лабораторные данные по периодическому гемопоэзу¹ и установлено, что динамика периодического гемопоэза возникает в популяции гемопоэтических плюрипотентных² стволовых клеток.

Клетки подразделяются на клетки фазы пролиферации³ (плотность популяции $v(t)$, клеток/кг) и фазы покоя G_0 (плотность популяции $u(t)$, клеток/кг). Опишем различия между клетками этих фаз. В стадии пролиферации клетки подвергаются митозу⁴ спустя фиксированное время τ (дни) с момента начала стадии пролиферации. В свою очередь клетки, вступающие в фазу G_0 , случайным образом могут выйти из нее и либо вернуться к пролиферации со скоростью β (дни⁻¹), либо быть безвозвратно исключенными из процесса в связи с дифференцировкой⁵ на различные гемопоэтические клетки (эритроциты, лимфоциты, тромбоциты и др.) со скоростью δ (дни⁻¹). Хотя пролиферирующие клетки могут также быть безвозвратно исключены из любой фазы клеточного цикла со скоростью γ (дни⁻¹), «нормальная» популяция стволовых клеток, по определению, характеризуется значением $\gamma = 0$. Параметры γ, δ, τ постоянны во времени и не зависят от численности популяции клеток. Определение численных значений этих параметров затруднено из-за их количества и недостаточного объема данных по физиологии и патофизиологии стволовых клеток (некоторые попытки предпринимались в [374]).

Значение скорости перехода из фазы покоя к фазе пролиферации зависит от численности клеток фазы покоя, т. е. $\beta = \beta(u)$. Когда u мало, β достигает максимума; когда u растет, β уменьшается. Зависимость скорости перехода клеток из фазы G_0 к фазе пролиферации имеет вид

$$\beta(u) = \frac{\beta_0 \theta^n}{\theta^n + u^n}, \quad (6.1.3.2)$$

где β_0 — максимальная скорость перехода клеток из фазы покоя G_0 к пролиферации (дни⁻¹), θ — плотность популяции клеток в фазе G_0 , при которой

¹Кроветворение (или гемопоэз)— процесс образования, развития и созревания клеток крови.

²Плюрипотентные стволовые клетки — это клетки, которые обладают способностью к самообновлению путем деления и развитию с образованием трех основных слоев зародышевых клеток раннего эмбриона, а следовательно, всех клеток взрослого организма, но не внеэмбриональных тканей, таких как плацента. Эмбриональные стволовые клетки и индуцированные плюрипотентные стволовые клетки являются плюрипотентными стволовыми клетками.

³Пролиферация — это процесс разрастания ткани организма путем размножения клеток делением.

⁴Митоз — это не прямое деление клетки, наиболее распространенный способ репродукции эукариотических клеток, который характеризуется строго одинаковым распределением хромосом между дочерними ядрами, что обеспечивает образование генетически идентичных дочерних клеток и сохраняет преемственность в ряду клеточных поколений.

⁵Дифференцировка — реализации генетически обусловленной программы формирования специализированного фенотипа клеток, отражающего их способность к тем или иным профильным функциям.

скорость перехода из фазы G_0 к пролиферации максимальна (клеток/кг), n — безразмерное число, отвечающее за чувствительность скорости перехода на стадию пролиферации к размеру популяции u в фазе покоя G_0 . Обоснование выбора именно такой зависимости $\beta(u)$ дано в [374].

Динамика популяции клеток фазы покоя G_0 описывается ОДУ с запаздыванием вида

$$u_t = -\delta u - \beta(u)u + 2\beta(w)we^{-\gamma\tau}, \quad w = u(t - \tau). \quad (6.1.3.3)$$

Скорость изменения плотности популяции в стадии покоя G_0 равна сумме трех слагаемых. Первое отвечает за невосполнимую потерю клеток фазы покоя G_0 за счет дифференцировки. Второе слагаемое корректирует потерю за счет перехода клеток в стадию пролиферации. Третье слагаемое учитывает клеточный прирост за счет перемещения пролиферирующих клеток в стадию G_0 из предыдущего поколения. Множитель «2» означает, что пролиферация клеток осуществляется путем митоза. Экспоненциальный множитель корректирует вероятность потери клеток пролиферирующей популяции.

Динамика популяции клеток в стадии пролиферации описывается похожим ОДУ с запаздыванием:

$$v_t = -\gamma v + \beta(u)u - \beta(w)we^{-\gamma\tau}, \quad w = u(t - \tau). \quad (6.1.3.4)$$

Первое слагаемое отвечает за невосполнимую потерю среди клеток фазы пролиферации. Второе слагаемое моделирует приток клеток из фазы покоя G_0 . Третье слагаемое отвечает за отток клеток из фазы пролиферации в фазу покоя одно поколение назад. Отметим, что уравнение (6.1.3.4) зависит от двух иско- мых функций — u и v , в то время как уравнение (6.1.3.3) — только от u .

Поставляя (6.1.3.2) в (6.1.3.3) и (6.1.3.4), получим систему двух ОДУ с запаздыванием, описывающую динамику процесса производства плюрипотентных стволовых клеток:

$$\begin{aligned} u_t &= -\delta u - \frac{\beta_0 \theta^n u}{\theta^n + u^n} + \frac{2\beta_0 \theta^n w}{\theta^n + w^n} e^{-\gamma\tau}, \\ v_t &= -\gamma v + \frac{\beta_0 \theta^n u}{\theta^n + u^n} - \frac{\beta_0 \theta^n w}{\theta^n + w^n} e^{-\gamma\tau}, \end{aligned} \quad (6.1.3.5)$$

где $w = u(t - \tau)$.

Рассмотрим систему (6.1.3.5) с начальными условиями

$$u(t) = 6.25 \cdot 10^8, \quad v(t) = 0.69 \cdot 10^8, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (6.1.3.6)$$

Начальные условия и значения параметров соответствуют оценкам, представленным в [374] (в частности, на рис. 3 этой статьи). Решения получены методом Рунге — Кутты четвертого порядка с использованием пакета Mathematica (см. разд. 5.1.4 и 5.1.7). На рис. 6.3 показаны качественные изменения численности клеток фазы покоя $u(t)$ (сплошная линия) и фазы пролиферации $v(t)$ (штриховая линия) при изменении параметра γ , отвечающего за безвозвратное исключение клеток из популяции (например, ввиду гибели). На рис. 6.3а

показано снижение численности клеток фазы покоя и небольшое повышение численности клеток фазы пролиферации до некоторых устойчивых уровней. Рис. 6.3г соответствует более существенному понижению численности клеток фазы покоя. В обоих случаях наблюдается снижение общего количества стволовых клеток $u(t) + v(t)$. Рис. 6.3б и 6.3в соответствуют случаю периодического гемопоэза.

В [374] изучалась устойчивость стационарных состояний и графики решений системы (6.1.3.5) с другими начальными данными и значениями параметров. Отмечается, что поведение решений системы согласуется с количественными и качественными свойствами апластической анемии и периодического гемопоэза у людей. Показано влияние коэффициента необратимой потери стволовых клеток на характер динамики их численности.

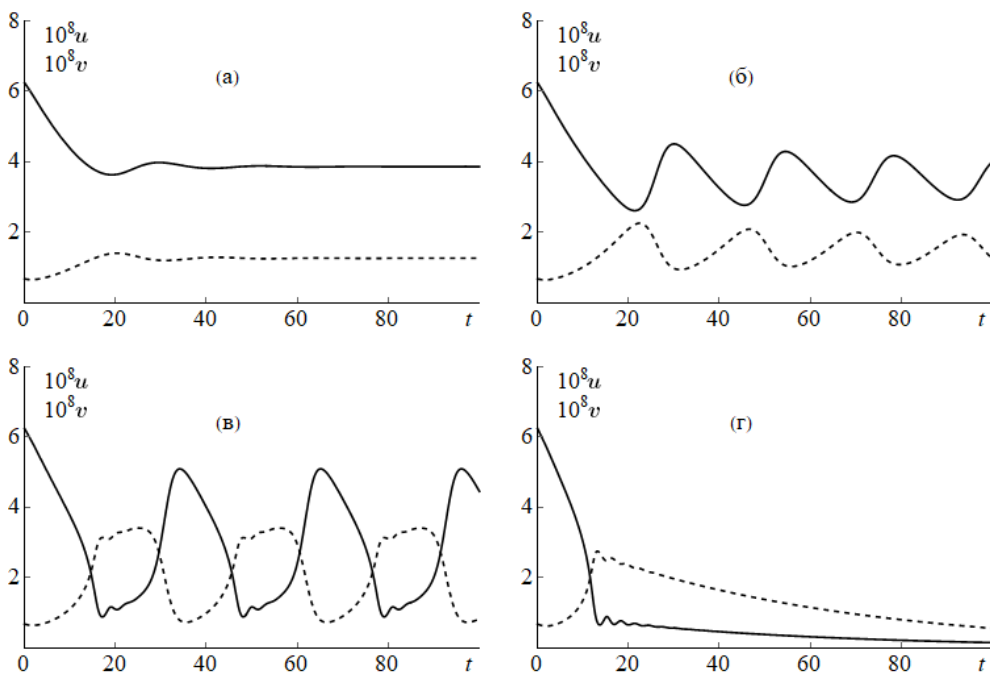


Рис. 6.3. Решения $u(t)$ (сплошная линия) и $v(t)$ (штриховая линия) задачи (6.1.3.5), (6.1.3.6) при $\delta = 0.04$, $\beta_0 = 1.9$, $\theta = 1.74 \cdot 10^8$, $n = 3$, $\tau = 2.6$ и различных значениях параметра γ : а) $\gamma = 0.18$, б) $\gamma = 0.20$, в) $\gamma = 0.23$, г) $\gamma = 0.28$.

6.1.4. Другие нелинейные модели с запаздыванием

Простейшая модель эпидемии. В [193] была разработана простейшая модель распространения инфекции от человека к человеку с помощью переносчика (например, малярийного комара):

$$u'_t = \beta w(1 - u) - \lambda u, \quad w = u(t - \tau), \quad (6.1.4.1)$$

где $u = u(t)$ — относительная численность инфицированных индивидуумов, $\beta > 0$ — коэффициент взаимодействия, $\lambda > 0$ — коэффициент выздоровления, $\tau > 0$ — время, которое требуется патогенному микроорганизму, чтобы развиться внутри переносчика и сделать переносчика заразным для восприимчивых индивидуумов. При выводе ОДУ с запаздыванием (6.1.4.1) были учтены следующие предположения:

1°. Болезнь не является летальной и не вызывает формирования иммунитета, т. е. популяция состоит только из инфицированных $u(t)$ и восприимчивых $v = v(t)$ индивидуумов.

2°. Численность популяции неизменна, т. е. $u + v \equiv 1$.

3°. Скорость заражения пропорциональна количеству контактов между восприимчивыми и переносчиками, т. е. произведению $vz = (1 - u)z$, где $z = z(t)$ — численность переносчиков.

4°. Численность популяции переносчиков z пропорциональна $w = u(t - \tau)$, т. е. численности инфицированных в момент времени $t - \tau$.

Модель эпидемии для трех групп особей (модель SIR). Динамика развития эпидемии в популяции переменной численности описывается системой уравнений для трех групп особей — восприимчивых $u_1(t)$ (S), инфицированных $u_2(t)$ (I) и невосприимчивых (выздоровевших с образованием полного иммунитета, либо погибших) $u_3(t)$ (R):

$$\begin{aligned} u_1' &= b - \mu u_1 - \beta u_1 w_2 + \gamma u_3, \\ u_2' &= \beta u_1 w_2 - (\mu + \alpha + \lambda) u_2, \\ u_3' &= \lambda u_2 - (\mu + \gamma) u_3, \end{aligned} \quad (6.1.4.2)$$

где $u_i = u_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), $w_2 = u_2(t - \tau)$, b — коэффициент воспроизводства популяции (количество родившихся особей в день), μ — коэффициент естественной смертности, β — коэффициент взаимодействия, γ — коэффициент снижения сформировавшегося после болезни иммунитета (при постоянном иммунитете $\gamma = 0$), α — коэффициент смертности от болезни, λ — коэффициент выздоровления, $\tau > 0$ — время, которое требуется патогенному микроорганизму, чтобы развиться внутри переносчика и сделать переносчика заразным для восприимчивых индивидуумов.

Отметим, что модель (6.1.4.2) основана на более простой модели без запаздывания, предложенной в [109]. Система (6.1.4.2) и родственные системы изучались, например, в [134, 135, 373, 383, 513].

Замечание 6.3. Системы вида (6.1.4.2) используются также для описания динамики распространения вирусов внутри организма, например, вирусов ВИЧ или гепатита В. В этом случае $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$ — это соответственно плотности неинфицированных клеток, инфицированных клеток, продуцирующих вирус, и активных вирусов. Запаздывание τ — это время между моментом инфицирования клетки и началом воспроизводства вирусов клеткой. Модели такого рода рассматриваются, например, в [201, 260, 280, 390, 399, 400].

Простая климатическая модель. Активное взаимодействие океана и атмосферы обычно реализуется с помощью следующего механизма: крупномасштабная аномалия температуры поверхности океана вызывает адиабатический нагрев или охлаждение атмосферы, что изменяет циркуляцию атмосферы и, следовательно, напряжение ветра и тепловые потоки на поверхности океана. В свою очередь, изменения напряжения ветра изменяют тепловую структуру и циркуляцию океана, вызывая ряд положительных обратных связей, которые усиливают начальную аномалию температуры поверхности океана. Поэтому во многих случаях циркуляцию океана и атмосферы необходимо рассматривать вместе, причем взаимодействие этих двух сред обусловлено изменением температуры поверхности океана.

Южная осцилляция Эль-Ниньо (El Niño–Southern Oscillation, ENSO)—нерегулярное периодическое колебание силы ветра и температуры морской поверхности в восточной тропической части Тихого океана, влияющее на климат большей части тропиков и субтропиков. Для описания Южной осцилляции в [509] была предложена простая качественная модель, основанная на существовании сильной положительной обратной связи в системе взаимодействия океана и атмосферы и на нелинейных эффектах, ограничивающих рост неустойчивых возмущений. Ключевой элемент модели—использование запаздывания для учета эффектов океанических волн, распространяющихся в замкнутом приэкваториальном бассейне.

Климатическая модель ENSO [509] основана на ОДУ с кубической нелинейностью и постоянным запаздыванием:

$$u'_t = u - u^3 - \alpha w, \quad w = u(t - \tau), \quad (6.1.4.3)$$

где $u = u(t)$ —амплитуда нарастающего возмущения, α —коэффициент, характеризующий влияние возвращаемого сигнала по сравнению с сигналом местной обратной связи, τ —безразмерное время запаздывания (время прохождения волны).

Нелинейное уравнение с запаздыванием (6.1.4.3) имеет несколько стационарных состояний, каждое из которых может стать неустойчивым и повлечь возникновение автоколебаний с периодом, двукратно превышающим время запаздывания. В [509] исследуется устойчивость модели, приводятся численные решения. Установлено, что осциллирующие решения возникают при существенных запаздывающих эффектах ($\alpha > \frac{1}{2}$) и достаточно большом запаздывании ($\alpha\tau > 1$).

Модель регенеративной вибрации станка. В [311] рассматривается модель регенеративной вибрации резца токарного станка в случае так называемой ортогональной резки. Одним из наиболее важных эффектов, приводящих к плохому качеству поверхности в процессе резки, является вибрация, возникающая в результате запаздывания. Из-за внешних возмущений у резца появляются затухающие колебания относительно заготовки, что делает ее поверхность неровной. После одного оборота заготовки толщина стружки изменяется.

В результате сила резания зависит не только от текущего положения резца относительно заготовки, но и от отложенного значения смещения. Величина этой задержки есть продолжительность времени τ , за которую заготовка совершает один оборот. Данный процесс называется регенеративным эффектом. Для изучения связанных с запаздыванием свойств системы используется простая модель с одной степенью свободы; при этом считается, что резец движется в вертикальном направлении и обладает упругостью и вязкостью, а все силы направлены по вертикали.

Пусть $u(t)$ — вертикальная координата кромки резца, m — масса резца, s — коэффициент упругости резца (точнее жесткость пружины, моделирующей его упругость), c — коэффициент демпфирования резца, характеризующий вязкие свойства резца, h — текущая толщина стружки, h_0 — толщина стружки при стационарной резке, F — вертикальная компонента силы резания. Тогда одномерное уравнение движения резца имеет вид [311]:

$$u''_{tt} + 2\zeta\omega_n u'_t + \omega_n^2 u = -\frac{1}{m}\Delta F, \quad (6.1.4.4)$$

где $\omega_n = \sqrt{s/m}$ — естественная круговая частота незатухающих свободных колебаний системы, $\zeta = c/(2m\omega_n)$ — так называемый относительный коэффициент демпфирования, $\Delta F = F(h) - F(h_0)$ — изменение режущей силы. Величина ΔF определяется зависимостью режущей силы F от технологических параметров, в первую очередь от толщины стружки h , которая зависит от положения кромки резца u . Экспериментально установлено, что

$$F(h) = Kdh^{3/4},$$

где d — ширина стружки, K — некоторый коэффициент. Разлагая F в степенной ряд в окрестности h_0 и удерживая первые четыре члена, имеем

$$F(h) \approx Kd \left[h_0^{3/4} + \frac{3}{4}(h - h_0)h_0^{-1/4} - \frac{3}{32}(h - h_0)^2 h_0^{-5/4} + \frac{5}{128}(h - h_0)^3 h_0^{-9/4} \right].$$

Вводя коэффициент режущей силы $k_1 = \frac{3}{4}Kdh_0^{-1/4}$, запишем зависимость величины ΔF от $\Delta h = h - h_0$:

$$\Delta F(\Delta h) \approx k_1 \Delta h - \frac{1}{8} \frac{k_1}{h_0} (\Delta h)^2 + \frac{5}{96} \frac{k_1}{h_0^2} (\Delta h)^3.$$

Изменение толщины стружки Δh можно представить как разность между текущим положением кромки резца $u(t)$ и его отложенного значения $w = u(t - \tau)$, где время запаздывания $\tau = 2\pi/\Omega$ равно времени одного оборота заготовки, где Ω — постоянная круговая частота вращения заготовки. Таким образом, уравнение (6.1.4.4) принимает вид

$$u''_{tt} + 2\zeta\omega_n u'_t + \omega_n^2 u = f(u - w), \quad f(z) = -\frac{k_1}{m} \left(z - \frac{1}{8h_0} z^2 + \frac{5}{96h_0^2} z^3 \right). \quad (6.1.4.5)$$

Введем безразмерные величины $\tilde{t} = \omega_n t$, $\tilde{u} = \frac{5}{12h_0} u$, $\tilde{\tau} = \omega_n \tau$, $p = k_1/(m\omega_n^2)$. Опуская тильды, получим

$$u''_{tt} + 2\zeta u'_t + u = f(u - w), \quad f(z) = -pz + \frac{3}{10}p(z^2 - z^3). \quad (6.1.4.6)$$

В работе [311] показано существование бифуркаций Хопфа* при изменении параметров ОДУ с запаздыванием (6.1.4.6).

Распределение клеток в ткани организма (уравнение с пропорциональным аргументом). Рассмотрим стационарное распределение клеток $u(x)$ по размерам x в некоторой ткани организма, считая, что выполнено условие нормировки

$$\int_0^{\infty} u(x) dx = 1.$$

Стационарное распределение клеток может возникнуть в растущей популяции в том случае, если скорости роста и деления клеток согласованы, являются функциями только размера клеток x и не зависят от времени t . В этом случае $u(x)$ описывается следующим ОДУ с пропорциональным аргументом [273]:

$$\frac{d}{dx}[g(x)u(x)] = -b(x)u(x) - (\alpha - 1)u(x) \int_0^{\infty} b(x)u(x) dx + \alpha^2 b(\alpha x)w, \quad w = u(\alpha x),$$

где $g(x)$ — скорость роста размеров клеток (в секунду), $b(x)$ — скорость, с которой делятся клетки размера x (клеток в секунду), образуя α новых клеток размера x/α . Чаще всего $\alpha = 2$ (когда в результате деления из одной клетки получается две), но с математической точки зрения без существенных усложнений можно рассматривать и другие значения α ($\alpha > 1$ соответствует процессу деления и росту популяции, а $\alpha < 1$ — процессу слияния и сокращению популяции).

В работе [273] описаны свойства решений уравнения в простейшем нетривиальном случае $b(x) = b = \text{const}$, $g(x) = c = \text{const}$:

$$u'_x = -au + \alpha cw, \quad a = \alpha b/c, \quad w = u(\alpha x).$$

Точное решение этого уравнения получено путем использования преобразования Лапласа; показано, что $u(x)$ стремится к нормальному распределению при $\alpha \rightarrow 1 + 0$.

6.2. Модели и УрЧП с запаздыванием в теории популяций

6.2.1. Предварительные замечания

Физический смысл диффузии. В моделях динамики популяций диффузия возникает из-за тенденции любого биологического вида мигрировать в регионы с более низкой плотностью популяции [191]. При этом для упрощения обычно предполагается, что пища поставляется непрерывно и однородно во времени и пространстве. Таким образом, в регионах с высокой плотностью

* Качественная перестройка свойств рассматриваемой системы при изменении определяющих параметров, характеризующаяся потерей устойчивости стационарных решений.

продовольствие станет дефицитным, и особи будут стремиться мигрировать в регионы с более низкой плотностью, чтобы иметь более высокие шансы выжить. Большая часть существующей литературы, как отмечено в [259], посвящена анализу простейшей ситуации, когда считается, что движение каждого индивидуума обусловлено диффузией Фика, т. е. поток популяции пропорционален градиенту концентрации, а константа пропорциональности является отрицательной. В работах [157, 168, 395] процесс диффузии обсуждается с экологической точки зрения.

Замечание 6.4. При введении диффузии в модель с запаздыванием многие авторы просто добавляют диффузионный член в соответствующую модель с запаздыванием для ОДУ. Выяснилось, что при таком подходе могут возникнуть некоторые сложности. Дело в том, что хотя диффузия и временное запаздывание связаны соответственно с пространством и временем, они не являются независимыми друг от друга, поскольку особи не находятся в одних и тех же точках пространства в предыдущие моменты времени. Возможные способы устранения указанной проблемы путем введения распределенного (нелокального) запаздывания обсуждаются в [259].

Начальное и граничные условия. Пусть рассматриваемое уравнение справедливо в области $\mathbf{x} \in \Omega$ при $t > 0$. Начальное условие имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (6.2.1.1)$$

Так как искомая функция имеет смысл плотности популяции, она неотрицательна. Чтобы обеспечить неотрицательность искомой функции, начальные условия также должны быть неотрицательны, т. е. $\varphi(\mathbf{x}, t) \geq 0$. Если внешняя среда враждебна по отношению к рассматриваемой популяции (все особи, достигшие границы, навсегда покидают популяцию), то на границе области $\partial\Omega$ ставится однородное граничное условие первого рода

$$u(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6.2.1.2)$$

Если популяция изолирована в Ω (особи, достигшие границы, «отражаются» от нее и возвращаются в популяцию), то ставится однородное граничное условие второго рода

$$\left. \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.2.1.3)$$

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Если же особи могут пересекать границу области, то используются однородное граничное условие третьего рода

$$\left[\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n} + \sigma u(\mathbf{x}, t) \right]_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.2.1.4)$$

где коэффициент σ отвечает за скорость пересечения границы. Если $\sigma > 0$, то поток особей направлен за пределы области. Если $\sigma < 0$, то внутрь области.

Далее при описании математических моделей для простоты часто будем приводить уравнения с одной пространственной переменной x .

6.2.2. Диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием

Диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием, которое обобщает ОДУ с запаздыванием Хатчинсона (6.1.1.4), имеет вид

$$u_t = au_{xx} + bu(1 - w/k), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (6.2.2.1)$$

где $u = u(x, t) \geq 0$ — плотность популяции, $b > 0$ — коэффициент роста популяции, k — емкость среды обитания. Время запаздывания τ характеризует средний репродуктивный возраст особей, а $0 < a \ll 1$ — параметр, который учитывает эффект диффузии, действующий одинаково на всех особей. Скорость роста популяции здесь прямо пропорциональна размеру популяции в текущий момент времени, а множитель $(1 - w/k)$ определяет механизм саморегуляции.

Замечание 6.5. В литературе встречаются различные названия уравнения (6.2.2.1): диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием, уравнение Фишера с запаздыванием, диффузионное уравнение Хатчинсона. Иногда диффузионное уравнение (6.2.2.1) называют просто уравнением Хатчинсона (см., например, [241, 370]). Однако исторически термин «уравнение Хатчинсона» закрепился за ОДУ с запаздыванием (6.1.1.4). На наш взгляд, термин «диффузионное логистическое уравнение с запаздыванием» наиболее подходящий для рассматриваемого уравнения (6.2.2.1). Уравнение (6.2.2.1) иногда называют также уравнением Фишера — КПП (Колмогорова — Петровского — Пискунова) с запаздыванием, поскольку это уравнение при $\tau = 0$ рассматривалось в работах [41, 237].

Заменой $u = kv$ уравнение (6.2.2.1) приводится к более простому виду

$$v_t = av_{xx} + bv(1 - \bar{v}), \quad \bar{v} = v(x, t - \tau). \quad (6.2.2.2)$$

В работе [370] установлено, что неотрицательные решения начально-краевой задачи Дирихле для УрЧП с запаздыванием (6.2.2.1) на конечном отрезке $0 \leq x \leq L$ остаются ограниченными при бесконечном увеличении времени, в то время как в родственных задачах с несколькими пространственными переменными аналогичная ситуация имеет место только в случаях, когда время запаздывания не очень большое. В [241] показано, что в многомерных задачах с краевыми условиями первого или второго рода, заданных на границах конечной области, при большом времени запаздывания τ и малом коэффициенте диффузии a существует большой набор траекторий, таких что общая масса популяции экспоненциально растет при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (6.2.2.2) на отрезке $0 \leq x \leq L$ с начальными и граничными условиями

$$v = \varphi(x, t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad v(0, t) = v(L, t) = 0. \quad (6.2.2.3)$$

Обозначим $b_* = a\pi^2/L^2$. В [508] были доказаны следующие утверждения:

1°. Если $b < b_*$, то нулевое решение задачи (6.2.2.2) — (6.2.2.3) является глобальным аттрактором всех неотрицательных решений уравнения (6.2.2.2) для любого $\tau \geq 0$.

2°. Для любых b , удовлетворяющих условию $0 < b - b_* \ll 1$, уравнение (6.2.2.2) имеет положительное стационарное решение v_b , и существует константа τ_0 , такая что решение v_b локально асимптотически устойчиво при $0 \leq \tau \leq \tau_0$ и неустойчиво при $\tau > \tau_0$. При этом существует последовательность значений $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$, такая, что при $\tau = \tau_n$ возникает бифуркация Хопфа стационарного решения.

Замечание 6.6. Уравнение (6.2.2.2) допускает решение типа фронта бегущей волны (подробности см. в разд. 3.1.3).

6.2.3. Диффузионное уравнение с запаздыванием, учитывающее ограниченность питательных веществ

Реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием при условии ограниченности питательных веществ, которое обобщает диффузионное логистическое уравнение (6.2.2.1), имеет вид

$$u_t = au_{xx} + bu \frac{1 - w/k}{1 + cw/k}, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (6.2.3.1)$$

где $b > 0$ — коэффициент роста популяции при неограниченном питании, $k > 0$ — емкость среды обитания, $b/c > 0$ — удельная скорость замещения массы в рассматриваемой популяции при насыщении. В частном случае $c = 0$ уравнение (6.2.3.1) переходит в уравнение (6.2.2.1).

В уравнении (6.2.3.1) учитывается, что растущая популяция будет поедать «пищу» быстрее, чем равновесная популяция. Это происходит из-за того, что в фазе роста пища потребляется как для поддержания размера популяции, так и для ее роста, а при достижении уровня насыщения пища главным образом идет на поддержание размера популяции. Запаздывание τ характеризует средний репродуктивный возраст рассматриваемого вида и позволяет учесть экспериментально подтвержденные флуктуации значений плотности популяции $u(x, t)$ вблизи равновесного значения $u = k$.

Заменой $u = kv$ уравнение (6.2.3.1) сводится к более простому виду

$$v_t = av_{xx} + bv \frac{1 - \bar{v}}{1 + c\bar{v}}, \quad \bar{v} = v(x, t - \tau). \quad (6.2.3.2)$$

В статье [205] исследуются существование, единственность и асимптотическая устойчивость неотрицательных состояний равновесия уравнения (6.2.3.1) при нулевых граничных условиях Дирихле.

В [508] изучались существование и устойчивость положительных стационарных решений, а также существование бифуркаций Хопфа от положительного стационарного решения уравнения (6.2.3.2) с начальными и граничными условиями (6.2.2.3). Были доказаны утверждения, аналогичные описанным выше утверждениям для диффузионного логистического уравнения.

6.2.4. Диффузионные логистические модели типа Лотки — Вольтерры с несколькими запаздываниями

Реакционно-диффузионная модель типа Лотки — Вольтерры с несколькими запаздываниями описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + b_1 u(1 - c_1 \bar{u}_1 + d_1 \bar{v}_2), \\ v_t &= a_2 v_{xx} + b_2 v(1 + d_2 \bar{u}_3 - c_2 \bar{v}_4), \end{aligned} \quad (6.2.4.1)$$

где $u = u(x, t)$ и $v = v(x, t)$ — искомые функции; $\bar{u}_i = u(x, t - \tau_i)$, $\bar{v}_j = v(x, t - \tau_j)$ ($i = 1, 3$; $j = 2, 4$); $\tau_i \geq 0$ и $\tau_j \geq 0$ — времена запаздывания.

Система (6.2.4.1) обобщает уравнение Фишера без запаздывания и уравнение Хатчинсона на случай взаимодействия особей двух видов (в случае $d_1 = d_2 = 0$ имеем два независимых диффузионных логистических уравнения (6.2.2.1)). Искомые функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ и коэффициенты a_i , b_i , c_i ($i = 1, 2$) неотрицательны и обладают физическим смыслом, аналогичным функциям и коэффициентам в уравнении (6.2.2.1). Запаздывания τ_1 и τ_4 , как и в одиночном уравнении, характеризуют средний репродуктивный возраст особей, а запаздывания τ_2 и τ_3 отвечают за время, которое необходимо, чтобы изменения численности одной популяции привели к изменениям другой. Все запаздывания неотрицательны и могут равняться нулю в тех или иных моделях. Слагаемые с ненулевыми коэффициентами d_1 и d_2 отличают рассматриваемую модель от одиночного уравнения, а сами коэффициенты отвечают за взаимодействие между особями двух популяций. В случае кооперативного взаимодействия, когда один вид сохраняется в отсутствие второго и когда виды взаимно увеличивают скорость роста друг друга, оба коэффициента d_1 и d_2 положительны. В случае конкурентного взаимодействия увеличение одной популяции приводит к уменьшению другой (например, рост количества хищников приводит к уменьшению популяции жертв) и коэффициенты d_1 и d_2 отрицательны. Кооперативные модели Лотки — Вольтерры с запаздываниями рассматриваются в [291, 342], конкурентные модели — в [226, 371, 416].

Замечание 6.7. Положения равновесия и решение типа фронта бегущей волны системы УрЧП типа Лотки — Вольтерры с запаздываниями (6.2.4.1) рассматривались в разд. 3.1.3).

В [342] исследовалась более простая, чем (6.2.4.1), система вида

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + bu(1 - \bar{u} + d_1 \bar{v}), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v_t &= v_{xx} + bv(1 + d_2 \bar{u} - \bar{v}), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (6.2.4.2)$$

где $\bar{u} = u(x, t - \tau)$, $\bar{v} = v(x, t - \tau)$, с граничными и начальными условиями

$$u(0, t) = u(\pi, t) = v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (6.2.4.3)$$

$$u(x, t) = v(x, t) = 0.1(1 + t/\tau) \sin x, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (6.2.4.4)$$

Система (6.2.4.2) получается из (6.2.4.1), если положить $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = b$, $c_1 = c_2 = 1$ и $\tau_1 = \dots = \tau_4 = \tau$. В [342] доказаны приведенные ниже утверждения.

1°. Тривиальное решение $u = v = 0$ системы (6.2.4.2) для всех $\tau > 0$ устойчиво при $b < 1$ и неустойчиво при $b > 1$.

2°. При $d_1 d_2 < 1$ и $b = 1 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, существует удовлетворяющее граничным условиям (6.2.4.3) положительное стационарное решение системы (6.2.4.2) такое, что $u, v \neq \text{const}$.

3°. При выполнении условий из п. 2° существует такое значение τ_b , что при $0 \leq \tau < \tau_b$ стационарное решение системы (6.2.4.2) асимптотически устойчиво, а при $\tau > \tau_b$ — неустойчиво.

Для иллюстрации этих утверждений в [342] приводятся графики решений, полученных с помощью MATLAB путем комбинации метода шагов и неявного численного метода интегрирования УрЧП.

На рис. 6.4 изображены графики численных решений задачи (6.2.4.2) — (6.2.4.4) в точке $x = \pi/2$, полученные комбинацией метода прямых (при $N = 200$) и метода Гира с использованием пакета Mathematica (см. разд. и 5.1.7 и 5.2.2) при $d_1 = 0.4$, $d_2 = 0.7$ и различных b и τ . Рис. 6.4а соответствует случаю устойчивого тривиального положения равновесия, 6.4б — устойчивому положительному стационарному решению, 6.4в — неустойчивому положительному стационарному решению. Пунктирные линии на рис. 6.4б соответствуют стационарному решению, которое имеет при $x = \pi/2$ значения $u \approx 0.023$, $v \approx 0.028$.

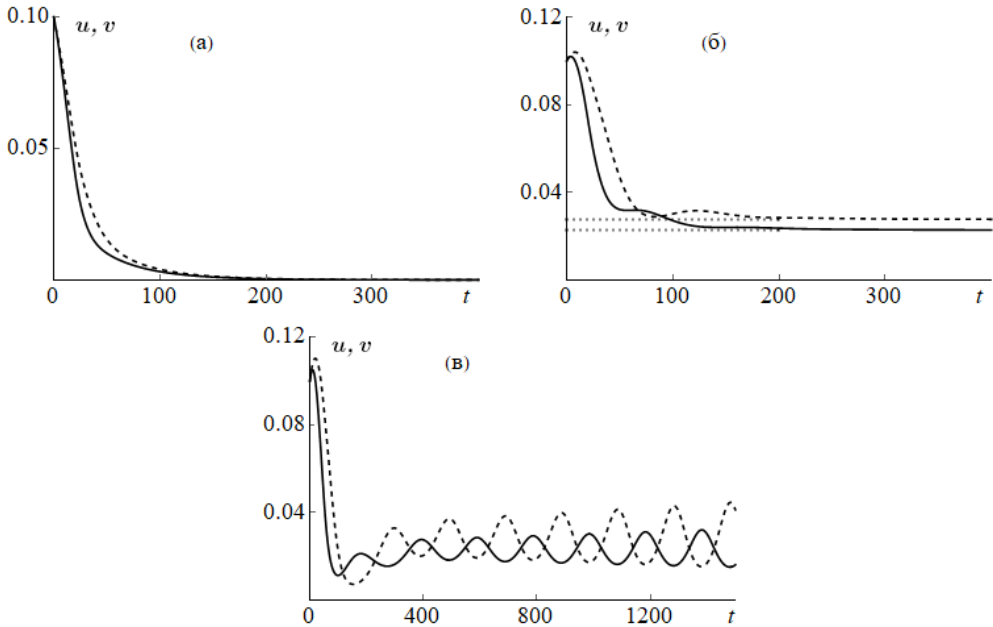


Рис. 6.4. Численные решения $u = u(t)$ (сплошная линия) и $v = v(t)$ (штриховая линия) задачи (6.2.4.2)–(6.2.4.3) при $x = \pi/2$ для $d_1 = 0.4$, $d_2 = 0.7$ в случаях: а) $b = 0.98$, $\tau = 20$, б) $b = 1.01$, $\tau = 20$, в) $b = 1.01$, $\tau = 30$; пунктирные линии соответствуют значениям стационарного решения при $x = \pi/2$.

6.2.5. Реакционно-диффузионная модель Николсона с запаздыванием

Реакционно-диффузионная модель Николсона с запаздыванием описывается нелинейным уравнением

$$u_t = a\Delta u - \delta u + pwe^{-\kappa w}, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (6.2.5.1)$$

где $p > 0$ — максимальное количество яиц, откладываемых одной особью в сутки (с поправкой на выживаемость при развитии от яйца до взрослой особи), $1/\kappa > 0$ — численность популяции, при которой она воспроизводится с максимальной скоростью, $\delta > 0$ — среднесуточный удельный (в пересчете на одну особь) уровень смертности взрослых особей, $\tau > 0$ — время от кладки яйца до момента, когда особь из этого яйца становится половозрелой.

Уравнение (6.2.5.1) обобщает ОДУ с запаздыванием (6.1.2.1). Для анализа популяционной динамики особей в нелабораторной среде обитания необходимо учитывать пространственную неоднородность и вводить пространственные переменные. В данном контексте для описания хаотического движения особей в уравнение нужно включать диффузионный член. В случае, когда незрелые особи не подвержены диффузии, а взрослые — подвержены, модель (6.1.2.1) естественным образом обобщается на реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием (6.2.5.1).

Опишем условия устойчивости решений реакционно-диффузионного уравнения Николсона с запаздыванием, приведенные в обзорной части статьи [581]. Рассмотрим задачу для уравнения (6.2.5.1) с граничными условиями первого рода (6.2.1.2) и начальными условиями (6.2.1.1). Пусть λ_1 — наименьшее собственное значение вспомогательной линейной стационарной задачи

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

В работе [499] показано, что если $p/\delta - 1 < a\lambda_1$, то тривиальное стационарное решение $u = 0$ исходной нестационарной задачи притягивает все неотрицательные решения. Если $p/\delta - 1 > a\lambda_1$, то решение $u = 0$ становится неустойчивым, и возникает единственное положительное положение равновесия $u^+(x)$, которое притягивает к себе все положительные решения при условии $e < p/\delta \leq e^2$.

Рассмотрим задачу для уравнения (6.2.5.1) с граничными условиями второго рода (6.2.1.3) и начальными условиями (6.2.1.1). Положение равновесия соответствующего ОДУ с запаздыванием (6.1.2.1) определяет положение равновесия задачи (6.2.5.1), (6.2.1.3), (6.2.1.1). В [576] показано, что при $0 < p/\delta \leq 1$ все положительные решения сходятся к $u = 0$, а при $1 < p/\delta \leq e$ все нетривиальные решения сходятся к $u_* = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{p}{\delta}$ независимо от $\tau \geq 0$. В [581] доказано, что решение u_* остается глобальным аттрактором при $e < p/\delta \leq e^2$ независимо от величины запаздывания τ . В [576] установлено, что при $p/\delta > e^2$, положение равновесия u_* может быть неустойчивым, и может возникать бифуркация Хопфа при росте запаздывания τ .

В [481] сформулированы достаточные условия осцилляций всех положительных решений относительно положительного состояния равновесия в виде следующей теоремы.

Теорема. При $p > e\delta$ любое положительное решение (6.2.5.1) с начальными условиями (6.2.1.1) осциллирует относительно u_* тогда и только тогда, когда:

1) в случае однородных граничных условий первого рода (6.2.1.2) имеет место неравенство:

$$\delta\tau[\ln(p/\delta) - 1]e^{(\lambda_1 a + \delta)\tau} > 1/e,$$

2) в случае однородных граничных условий второго (6.2.1.3) и третьего (6.2.1.4) рода выполняется условие

$$\delta\tau[\ln(p/\delta) - 1]e^{\delta\tau} > 1/e.$$

6.2.6. Модель, учитывающая влияние защитных механизмов растений на популяцию растениеядных

В [510] изучалось влияние защитных механизмов растений на популяцию растениеядных с учетом пространственной неоднородности и эффектов запаздывания. У многих растений, в частности деревьев, повреждения, нанесенные растениеядными, вызывают изменения химических, физических и других свойств листьев, которые называются *индуцированной защитой*. Запаздывание отвечает за время, необходимое растению для того, чтобы подготовить свою индуцированную защиту. Индуцированная защита растений влияет на устойчивость и постоянство популяций растениеядных. Например, для популяций многих растениеядных насекомых характерны «вспышки», когда короткие периоды высоких плотностей популяции насекомых и многочисленных повреждений листьев чередуются с долгими периодами низких плотностей популяции.

Описываемая ниже математическая модель и система уравнений с запаздыванием базируются на следующих четырех предположениях [510]:

1°. Изменения индуцируемой защиты растений в момент t зависят от плотности популяции растениеядных в момент $t - \tau$.

2°. Уровень индуцируемой защиты зависит от плотности популяции растениеядных и от уровня уже существующей защиты.

3°. В отсутствие индуцированных изменений у растений популяция растениеядных подчиняется логистическому закону со скоростью роста γ и емкостью среды обитания k .

4°. Семена некоторых растений могут перемещаться в пространстве вследствие различных факторов окружающей среды, например, ветра. Следовательно, предполагается, что индуцируемая защита и растениеядные беспорядочно перемещаются в пространстве соответственно с коэффициентами диффузии a_1 и a_2 .

Учет приведенных предположений позволил вывести следующую систему реакционно-диффузионного типа с запаздыванием [510]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + (\alpha - \beta u_1) \frac{\bar{u}_2^n}{b^n + \bar{u}_2^n} - \mu u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \gamma u_2 \left(1 - \frac{u_2}{k}\right) - m u_1 u_2,\end{aligned}\tag{6.2.6.1}$$

где $u_1 = u_1(x, t)$, $u_2 = u_2(x, t)$ — плотности популяции растений с индуцированной защитой и растениеядных соответственно, $\bar{u}_2 = u_2(x, t - \tau)$, α — максимальный уровень индуцированной защиты на одного растениеядного, β — степень самоограничения растений в создании индуцированной защиты, μ — скорость затухания индуцированной защиты, m — скорость снижения воспроизводства растениеядных, вызванного индуцированной защитой растений, b — полумаксимальная эффективность растениеядных в нанесении повреждений, n — поправочный параметр для зависимости эффективности в нанесении повреждений. В [510] описаны другие постоянные, входящие в систему (6.2.6.1), а также приближенные численные значения всех констант и ссылки на статьи, откуда взяты эти данные.

В [510] было установлено, что большие запаздывания могут приводить к снижению плотности популяции растениеядных и повышать риск их вымирания, в то время как средние значения сохраняют плотность популяции растениеядных в определенном диапазоне. Получено минимальное критическое значение запаздывания τ_* , при котором с определенной периодичностью возникают «вспышки» в популяции растениеядных, и показано, что зависимость τ_* от коэффициента диффузии растениеядных a_2 нелинейна. Отмечается, что взаимодействие запаздывания и диффузии способствует росту средней плотности популяции растениеядных в период вспышек, а значит повышает жизнестойкость растениеядных.

6.3. Модели и УрЧП с запаздыванием, описывающие распространение эпидемий и развитие болезней

6.3.1. Классическая модель распространения эпидемии SIR

Классическая пространственно однородная модель эпидемии Кермака — Маккендрика описывается системой из трех ОДУ первого порядка [319]

$$\begin{aligned}u_1'(t) &= -\beta u_1 u_2, \\ u_2'(t) &= \beta u_1 u_2 - \gamma u_2, \\ u_3'(t) &= \gamma u_2\end{aligned}\tag{6.3.1.1}$$

и начальными условиями

$$u_1(0) = u_{10} > 0, \quad u_2(0) = u_{20} > 0, \quad u_3(0) = 0.$$

Здесь $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ — плотности популяции восприимчивых, заразных и исключенных из популяции (ввиду приобретения иммунитета или гибели) осо-

бей, β — скорость контактов (число контактов заразной особи в единицу времени), γ — скорость выздоровления инфицированных особей (если не учитывается их гибель). В системе (6.3.1.1) за массовую заболеваемость отвечает нелинейный член $\beta u_1 u_2$, а процесс исключения происходит пропорционально доле инфицированных особей γu_2 . Модель (6.3.1.1) называется SIR-моделью, поскольку особи (люди) переходят из разряда восприимчивых (Susceptible) в разряд заразных (Infectious), а затем в разряд исключенных (Removed).

Система (6.3.1.1) допускает первый интеграл (закон сохранения общего числа особей) $u_1 + u_2 + u_3 = C$, где C — постоянная интегрирования. Разделив все u_i на C , можно записать закон сохранения в безразмерной форме.

В модели Кермака — Маккендрика (6.3.1.1) предполагается, что популяция хорошо перемешана, так что передача инфекции происходит мгновенно. Однако из-за высокой мобильности людей в пределах одной страны или даже по всему миру пространственно однородные модели недостаточно хорошо описывают распространение заболевания. Чтобы модель была более реалистичной, в нее нужно включить пространственные эффекты. Если окружающая среда пространственно непрерывна, для описания мобильности популяции часто используют случайную диффузию, что приводит к моделям, основанным на реакционно-диффузионных уравнениях (см. [395]).

Введение временного запаздывания в такие модели делает их более реалистичными. Запаздывание в эпидемиологических моделях может возникать по ряду различных причин. К наиболее известным причинам относятся (i) латентный период заражения у переносчика заболевания и (ii) латентный период развития заболевания в инфицированном организме. В обоих случаях необходимо некоторое время, прежде чем инфекция у инфицированного хозяина разовьется до уровня, достаточного для передачи ее дальше. Иногда латентный период совпадает с инкубационным периодом — временем с момента заражения до первых признаков проявления болезни. Однако, в общем случае эти два периода не совпадают. В работе [193] в эпидемиологическую модель был введен эффект временного запаздывания в предположении, что скорость инфицирования в момент времени t определяется выражением $\beta u_1(t) u_2(t - \tau)$, где $\tau > 0$ — фиксированное время, в течение которого инфекционные агенты развиваются в переносчике, и только по истечении этого времени инфицированный агент может заразить восприимчивого хозяина.

Диффузионная модель распространения эпидемии SIR типа Кермака — Маккендрика с запаздыванием описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \beta u_1 u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \beta u_1 u_2 - \gamma u_2, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= a_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \gamma u_2,\end{aligned}\tag{6.3.1.2}$$

где $u_1 = u_1(x, t)$, $u_2 = u_2(x, t)$, $u_3 = u_3(x, t)$, $w_2 = u_2(x, t - \tau)$; a_1, a_2, a_3 — коэффициенты диффузии восприимчивых, заразных и исключенных особей.

Более сложная модель SIR, в которой учитывается прирост и естественная смертность особей, а также смертность в результате болезни, имеет вид (см. похожую модель в [577]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b - \mu u_1 - \beta u_1 w_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \beta u_1 w_2 - (\gamma + \alpha + \mu) u_2, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= a_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \gamma u_2 - \mu u_3,\end{aligned}\tag{6.3.1.3}$$

где b — рождаемость в популяции, μ — естественная смертность в популяции, α — смертность вследствие заболевания.

В более общей модели, известной как SIRS-модель [248], предполагается, что иммунитет у восприимчивых людей вырабатывается только на ограниченное время, т. е. восприимчивые (S) особи заражаются (I), затем выздоравливают, приобретая иммунитет к болезни, и исключаются (R) из числа заразных, а затем через некоторое время, когда иммунитет ослабевает, вновь становятся восприимчивыми (S). Для этого в первое и третье уравнение (6.3.1.3) добавляется слагаемое δu_3 , соответственно, со знаком плюс и минус. В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b - \mu u_1 - \beta u_1 w_2 + \delta u_3, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \beta u_1 w_2 - (\gamma + \alpha + \mu) u_2, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= a_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \gamma u_2 - (\delta + \mu) u_3,\end{aligned}\tag{6.3.1.4}$$

где δ — скорость, с которой выздоровевшие особи теряют иммунитет и возвращаются к разряду восприимчивых.

В литературе встречаются также модели, в которых вместо билинейного слагаемого заболеваемости $\beta u_1 w_2$ используется нелинейное. Это обосновывается следующим образом [172].

Случай, когда билинейное слагаемое является линейно возрастающей функцией количества заразных индивидуумов, может быть справедливым для малого числа таких особей. Но для большого числа инфицированных это вряд ли реалистично. На самом деле количество контактов восприимчивого человека в единицу времени не всегда может расти линейно с увеличением u_2 .

Гораздо более реалистичным представляется введение вместо билинейного слагаемого $\beta u_1 w_2$ более сложного нелинейного слагаемого вида $g(u_2)u_1$, где зависимость от количества заразных индивидуумов определяется нелинейной ограниченной функцией g , которая в конечном итоге стремится к «уровню насыщения». Введение такой функции g также допускает возможность учета «психологических» эффектов: для очень большого числа заразных индивидуумов заболеваемость $g(u_2)$ может уменьшаться с увеличением u_2 , потому что

при наличии большого количества инфицированных индивидуумов популяция может стремиться к сокращению числа контактов в единицу времени. В качестве примера в [172] рассматривается функция вида

$$g(u_2) = \frac{\beta u_2}{1 + \theta u_2},$$

где βu_2 — скорость инфицирования, а $\frac{1}{1+\theta u_2}$ — поправка, учитывающая эффект торможения в результате изменения поведения восприимчивых индивидуумов при увеличении их числа или в результате эффекта скопления инфицированных. Диффузионные уравнения с запаздыванием и нелинейной заболеваемостью рассматриваются, например, в [119, 179, 572, 577].

6.3.2. Двухкомпонентная модель распространения эпидемии SI

Опираясь на классическую модель Кермака — Маккендрика, в [139] была разработана двухкомпонентная модель распространения эпидемии, основанная на системе из двух нелинейных ОДУ:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= b(u_1 + u_2) \left(1 - \frac{u_1 + u_2}{k}\right) - \beta \frac{u_1}{u_1 + u_2} u_2 - (\mu + m)u_1, \\ u_2'(t) &= \beta \frac{u_1}{u_1 + u_2} u_2 - (\mu + \alpha)u_2, \end{aligned} \quad (6.3.2.1)$$

которая в отличие от (6.3.1.1) учитывает переменную численность популяции, смертность от болезни и миграцию особей.

При записи уравнений (6.3.2.1) предполагалось, что популяция разделена на две группы — восприимчивые особи (S — susceptible) и заразные особи (I — infectious) с соответствующими плотностями популяции $u_1 = u_1(t)$ и $u_2 = u_2(t)$. Процесс воспроизводства популяции подчиняется логистическому закону со скоростью естественного прироста b и с емкостью популяции k , β обозначает скорость распространения контактов с инфицированными, μ — естественная смертность, α — смертность в результате заболевания, m — скорость миграции восприимчивых особей. В системе (6.3.2.1) используется нелинейное слагаемое заболеваемости вида $\beta \frac{u_1}{u_1 + u_2} u_2$. В этом случае скорости инфицирования пропорциональны не размеру популяции восприимчивых особей u_1 , а отношению размера популяции восприимчивых особей к размеру всей популяции $\frac{u_1}{u_1 + u_2}$, где $u_1 + u_2$ — общая популяция. Слагаемое $(\mu + m)u_1$ отвечает за снижение численности популяции восприимчивых особей в результате естественной смертности и миграции; слагаемое $(\mu + \alpha)u_2$ — за снижение численности популяции заразных особей в результате естественной смертности и смертности в результате болезни. Модель (6.3.2.1) при $m = 0$ изучалась также в [295], где называлась моделью «паразит — хозяин».

Реакционно-диффузионная модель эпидемии с запаздыванием типа (6.3.2.1)

рассматривается в [343, 353] (см. похожую модель в [166]) и имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \nu r_d (u_1 + w_2)(1 - u_1 - w_2) - \nu u_1 - r_0 \frac{u_1 w_2}{u_1 + w_2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + r_0 \frac{u_1 w_2}{u_1 + w_2} - w_2,\end{aligned}$$

где $u_1 = u_1(x, t)$, $u_2 = u_2(x, t)$, $w_2 = u_2(x, t - \tau)$; a_1, a_2 — коэффициенты диффузии, $\nu = \frac{\mu+m}{\mu+\alpha}$ — отношение средних продолжительностей жизни восприимчивых и заразных особей. Базовое демографическое репродуктивное число r_d и базовое эпидемиологическое репродуктивное число r_0 определяются по формулам:

$$r_d = \frac{b}{\mu + m}, \quad r_0 = \frac{\beta}{\mu + \alpha}.$$

Базовое демографическое репродуктивное число показывает отношение между приростом и смертностью в отсутствие инфекции. Случай $r_d > 1$ соответствует росту популяции, $r_d < 1$ — гибели. Базовое эпидемиологическое репродуктивное число r_0 характеризует заразность инфекционного заболевания и определяется как среднее количество восприимчивых индивидуумов, которые могут быть заражены одним заболевшим. Широкое распространение инфекции происходит при $r_0 > 1$ и не происходит при $r_0 < 1$. Случай $r_0 = 1$ является граничным, при котором процесс может пойти либо в ту, либо в другую сторону.

6.3.3. Модель распространения эпидемии новой коронавирусной инфекции

В [601] была разработана реакционно-диффузионная модель с запаздыванием, которая близка к реальному распространению эпидемии COVID-19, включая рецидив, временное запаздывание, домашний карантин и пространственно-временную гетерогенную среду, которая влияет на распространение COVID-19. Модель включает шесть групп людей: восприимчивые (S , $u_1 = u_1(x, t)$), контактировавшие с инфицированными (E , $u_2 = u_2(x, t)$), помещенные на домашний карантин (H , $u_3 = u_3(x, t)$), инфицированные (I , $u_4 = u_4(x, t)$), госпитализированные (Q , $u_5 = u_5(x, t)$) и временно выздоровевшие (R , $u_6 = u_6(x, t)$). Эта модель описывается следующей смешанной системой дифференциальных уравнений (УрЧП и ОДУ) с запаздыванием:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1 \Delta u_1 + b - \beta_1 \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} - \beta_2 \frac{u_1 w_4}{u_1 + w_4} - \mu u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2 \Delta u_2 + \beta_1 \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} + \beta_2 \frac{u_1 w_4}{u_1 + w_4} + \rho_2 u_6 - (\mu + \omega_2 + p) u_2, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= p u_2 - (\mu + \gamma_3 + \omega_3 + \sigma) u_3, \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} &= a_4 \Delta u_4 + \omega_2 u_2 + \omega_3 u_3 + \rho_1 u_6 - (\mu + \gamma_4 + q) u_4, \\ \frac{\partial u_5}{\partial t} &= q u_4 - (\mu + \gamma_5 + \nu) u_5, \\ \frac{\partial u_6}{\partial t} &= a_6 \Delta u_6 + \sigma u_3 + \nu u_5 - (\mu + \rho_1 + \rho_2) u_6,\end{aligned}\tag{6.3.3.1}$$

где $u_i = u_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, 6$), $w_2 = u_2(x, t - \tau)$; $a_j > 0$ — коэффициенты диффузии ($j = 1, 2, 4, 6$), b — степень воспроизводства популяции, $\beta_{1,2}$ — контактный коэффициент, $\omega_{2,3}$ — коэффициенты заболеваемости контактировавших и находящихся на домашнем карантине, p — коэффициент домашнего карантина, q — коэффициент госпитализации, ρ_1 — коэффициент повторного инфицирования выздоровевших, ρ_2 — коэффициент повторного контакта выздоровевших, σ — коэффициент выхода из домашнего карантина, ν — коэффициент восстановления в госпитале, μ — естественная смертность, $\gamma_{3,4,5}$ — смертность от болезни в группе домашнего карантина, инфицированных и госпитализированных соответственно. Запаздывание τ отвечает за инкубационный период — время с момента инфицирования до первых признаков проявления болезни. Во время инкубационного периода не известно, что человек болеет, и на него не могут быть наложены ограничения, а значит, такой человек может вступить в контакт с восприимчивым. Отметим, что в уравнениях для u_3 и u_5 нет диффузии, т. е. люди на карантине и в госпитале считаются неподвижными.

В работе [601] приведены ориентировочные численные значения параметров модели (6.3.3.1) для эпидемии в Китае и США и исследуется устойчивость ее решений.

Замечание 6.8. Коэффициенты диффузии модели (6.3.3.1) могут зависеть от x , то есть $a_j = a_j(x)$, $j = \{1, 2, 4, 6\}$. В этом случае вместо $a_j \Delta u_j$ следует писать $\nabla \cdot (a_j \nabla u_j)$, ∇ — оператор градиента. Другие параметры модели (6.3.3.1) могут зависеть от x и t , например, $b = b(x, t)$.

6.3.4. Модели протекания гепатита В

Модели протекания болезней внутри организма являются родственными по отношению к моделям распространения эпидемий. Неинфицированные клетки рассматриваются в качестве восприимчивой части популяции $u_1(x, t)$, инфицированные клетки — в качестве заразных особей $u_2(x, t)$, третьим компонентом популяции выступают свободные вирусные частицы $v(x, t)$. В случае гепатита В клетки печени считаются неподвижными, а вирусные частицы могут передвигаться случайным образом. Исходя из этих предположений, в [539] была разработана модель, состоящая из двух ОДУ и одного реакционно-диффузионного уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= b - \beta u_1 v - \mu_1 u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \beta u_1 v - \mu_2 u_2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma u_2 - \mu_3 v, \end{aligned} \tag{6.3.4.1}$$

где b , μ_1 — скорости воспроизводства и гибели неинфицированных клеток, β — коэффициент, отвечающий за скорость инфицирования, γ — скорость воспроизводства вирусов, μ_2, μ_3 — скорости гибели инфицированных клеток и

исчезновения свободных вирусов, a — коэффициент диффузии. Главное отличие модели (6.3.4.1) от рассмотренных выше моделей распространения эпидемий заключается в явном рассмотрении промежуточного агента (вируса) в процессе передачи инфекции от зараженной клетки к незараженной. Инфицирование происходит не от контакта зараженной и восприимчивой особи, как в случае моделей эпидемии, а от контакта восприимчивой клетки и вируса. Отметим, что среди моделей распространения эпидемий также существуют подобные модели, например, модель распространения малярии, когда для передачи инфекции требуется малярийный комар.

Усовершенствованная модель, учитывающая внутриклеточное запаздывание между моментом инфицирования клетки и началом продуцирования клеткой новых вирусных частиц, описывается смешанной системой дифференциальных уравнений (два ОДУ и одно УрЧП) с запаздыванием [541]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= b - \beta u_1 v - \mu_1 u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \beta \bar{u}_1 \bar{v} - \mu_2 u_2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma u_2 - \mu_3 v,\end{aligned}\tag{6.3.4.2}$$

где $\bar{u}_1 = u_1(x, t - \tau)$, $\bar{v} = v(x, t - \tau)$. Система (6.3.4.2) рассматривается на отрезке $0 \leq x \leq 1$ и дополняется стандартными начальными условиями

$$u_i(x, t) = u_i^\circ(x) \geq 0 \quad (i = 1, 2), \quad v(x, t) = v^\circ(x) \geq 0 \quad \text{при} \quad -\tau \leq t \leq 0 \tag{6.3.4.3}$$

и однородными граничными условиями второго рода

$$v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0, \quad t > 0. \tag{6.3.4.4}$$

В [573] было отмечено, что использование билинейных форм слагаемых заболеваемости $\beta u_1 v$ не всегда обосновано. В действительности, скорость заболевания скорее всего не является линейной функцией во всей области изменения u_1 и v . Например, более слабая, чем линейная, зависимость по v может возникать из-за насыщения при высоких концентрациях вируса. В этом случае имеет смысл использовать слагаемое заболеваемости вида $\frac{\beta u_1 v^p}{1 + \theta v^q}$, где $p, q, \theta > 0$. Случай $p = q = 1$ рассмотрен в [573]. Получено значение базового репродуктивного числа $r_0 = \frac{b\gamma\beta}{\mu_1\mu_2\mu_3}$, которое описывает среднее количество клеток, «заражаемых» одной инфицированной клеткой в начале инфекционного процесса. При $r_0 < 1$ имеется единственное положение равновесия, которое является асимптотически устойчивым и соответствует отсутствию инфекции $u_1 = b/\mu_1$, $u_2 = 0$, $v = 0$. При $r_0 > 1$ существует два положения равновесия — неустойчивое положение отсутствия болезни и устойчивое положение наличия болезни.

В [277] была предложена модель, которая обобщает две рассмотренные выше модели и родственные модели [185, 278, 597] с нелинейными скоростями

заболевания. Эта модель описывается смешанной системой дифференциальных уравнений (два ОДУ и одно УрЧП) с двумя запаздываниями

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= b - f(u_1, u_2, v)v - \mu_1 u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= f(\bar{u}_{11}, \bar{u}_{21}, \bar{v})\bar{v}e^{-c_1\tau_1} - \mu_2 u_2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma u_{22}e^{-c_2\tau_2} - \mu_3 v,\end{aligned}\quad (6.3.4.5)$$

где $\bar{u}_{11} = u_1(x, t - \tau_1)$, $\bar{u}_{21} = u_2(x, t - \tau_1)$, $\bar{u}_{22} = u_2(x, t - \tau_2)$, $\bar{v} = v(x, t - \tau_1)$. Запаздывание τ_1 — это время между моментом заражения клетки и началом продуцирования клеткой вирусных частиц; множитель $e^{-c_1\tau_1}$ отвечает за вероятность выживания клетки в течение τ_1 , где c_1 — скорость гибели инфицированных, но еще не продуцирующих вирус клеток. Запаздывание τ_2 — это время между моментом образования вирусной частицы и моментом, когда он будет способен инфицировать; вероятность выживания частицы определяется множителем $e^{-c_2\tau_2}$, а средняя продолжительность его жизни равна $1/c_2$. Функция заболеваемости $f(x, y, z)$ является непрерывно-дифференцируемой по своим аргументам и удовлетворяет следующим трем гипотезам:

- 1) $f(0, y, z) = 0$ при $y, z \geq 0$,
- 2) $f_x(x, y, z) > 0$ при $x > 0, y, z \geq 0$,
- 3) $f_y(x, y, z) \leq 0, f_z(x, y, z) \leq 0$ при $x, y, z \geq 0$.

Система (6.3.4.5) дополняется начальными условиями (6.3.4.3) и граничными условиями второго рода (6.3.4.4).

В [277] доказано существование, положительность и ограниченность решений начально-краевой задачи (6.3.4.5), (6.3.4.3), (6.3.4.4). Базовое репродуктивное число имеет вид

$$r_0 = \gamma(\mu_2\mu_3)^{-1}f(b/\mu_1, 0, 0)e^{-c_1\tau_1 - c_2\tau_2}.$$

При $r_0 \leq 1$ система (6.3.4.5) имеет единственное глобально асимптотически устойчивое положение равновесия, соответствующее отсутствию болезни. При $r_0 > 1$ положение равновесия «без болезни» неустойчиво и существует еще одно положение равновесия, соответствующее хронической инфекции, которое при определенных условиях является глобально асимптотически устойчивым. Эти условия, в частности, выполнены для линейной функции заболеваемости $f = \beta u_1$, описанной выше, а также для более сложных функций Беддингтона — Де Анджелиса $f = \frac{\beta u_1}{1 + \kappa_1 u_1 + \kappa_2 v}$ и Кроули — Мартина $f = \frac{\beta u_1}{1 + \kappa_1 u_1 + \kappa_2 v + \kappa_1 \kappa_2 u_1 v}$, где $\kappa_1 \geq 0, \kappa_2 \geq 0$.

6.3.5. Модели взаимодействия иммунитета и опухолевых клеток

Следуя [121], рассмотрим модель процесса взаимодействия Т-клеток иммунитета и злокачественных опухолевых клеток. Т-клетки подразделяются на Т-киллеров (цитотоксических Т-лимфоцитов) и Т-хелперов. Т-киллеры атакуют

злокачественные клетки. Т-хелперы, выделяя различные цитокины (небольшие регуляторные белки), стимулируют Т-киллеров. Рост Т-хелперов и опухолевых клеток подчиняется логистическому закону. Разрушение опухолевых клеток и Т-киллеров происходит пропорционально произведению плотностей их популяций. Т-хелпер превращается в Т-киллера либо при непосредственном контакте с Т-киллером, либо при контакте с цитокином, выделенным Т-хелпером. Превращение происходит с некоторым запаздыванием τ , которое в модели входит в слагаемые, описывающие превращение Т-хелперов и рост популяции Т-киллеров. Предполагается, что Т-киллер никогда не может превратиться обратно в Т-хелпера и гибнет с некоторой постоянной вероятностью в единицу времени.

Рассмотренная пространственно однородная модель взаимодействия иммунитета и опухолевых клеток описывается следующей системой трех ОДУ с запаздыванием [121]:

$$\begin{aligned} u_1' &= b_1 u_1 (1 - u_1/k_1) - c_1 u_1 u_2, \\ u_2' &= \beta u_1 w_3 - \mu u_2 - c_2 u_1 u_2, \\ u_3' &= b_2 u_3 (1 - u_3/k_3) - \beta u_2 w_3, \end{aligned} \quad (6.3.5.1)$$

где $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $u_3 = u_3(t)$ — плотности популяции опухолевых клеток, Т-киллеров и Т-хелперов соответственно, $w_3 = u_3(t - \tau)$; b_1, b_2 — коэффициенты естественного роста опухолевых клеток и Т-хелперов, k_1, k_3 — максимальная численность популяции опухолевых клеток и Т-хелперов, μ — коэффициент гибели Т-киллеров, c_1 — коэффициент гибели опухолевых клеток при контакте с Т-киллерами, c_2 — коэффициент гибели Т-киллеров при контакте с опухолевыми клетками, β — коэффициент превращения Т-хелперов в Т-киллеров.

Модель (6.3.5.1) была модифицирована в работе [302], где рассматривались только две группы клеток — опухолевые и иммунные (третье уравнение (6.3.5.1) из анализа было исключено) и была введена пространственная неоднородность путем добавления диффузионных слагаемых. В результате была получена следующая реакционно-диффузионная система УрЧП с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b u_1 (1 - u_1/k) - c_1 u_1 u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \beta w_1 u_2 - \mu u_2 - c_2 u_1 u_2, \end{aligned} \quad (6.3.5.2)$$

где $u_1 = u_1(x, t)$ и $u_2 = u_2(x, t)$ — плотности популяции опухолевых и иммунных клеток соответственно, $w_1 = u_1(x, t - \tau)$; a_1 и a_2 — коэффициенты диффузии, b — коэффициент естественного роста опухолевых клеток, k — максимальная численность популяции опухолевых клеток, μ — коэффициент гибели иммунных клеток, c_1 — коэффициент гибели опухолевых клеток при контакте с иммунными, c_2 — коэффициент гибели иммунных клеток при контакте с опухолевыми, β — коэффициент активации иммунных клеток. Активность опухолевых клеток приводит к соответствующему иммунному ответу, который зависит от количества этих клеток, но происходит спустя некоторое время запаздывания τ .

Система (6.3.5.2) дополняется стандартными начальными условиями и однородными граничными условиями второго рода.

Отметим, что система (6.3.5.2) является частным случаем диффузионной системы типа Лотки — Вольтерры с несколькими запаздываниями (6.2.4.1).

Положение равновесия $u_1^0 = k$, $u_2^0 = 0$ этой системы глобально асимптотически устойчиво при $\mu > k\beta$. При $\mu < k(\beta - c_2)$ система (6.3.5.2) имеет единственное положительное положение равновесия

$$u_1^0 = \frac{\mu}{\beta - c_2}, \quad u_2^0 = \frac{b}{c_1} \left(1 - \frac{\mu}{k(\beta - c_2)} \right). \quad (6.3.5.3)$$

При отсутствии запаздывания положение равновесия (6.3.5.3) локально асимптотически устойчиво. Однако, как было показано в [302], запаздывание играет ключевую роль а дестабилизации этого положения равновесия. Установлено, что существует критическое значение τ_* такое, что при $\tau < \tau_*$ положение равновесия (6.3.5.3) локально асимптотически устойчиво, а при $\tau > \tau_*$ — неустойчиво. Выявлено, что запаздывание также влияет на направление, устойчивость и периодичность бифуркации Хопфа.

Замечание 6.9. В [424] рассматривалась похожая на (6.3.5.2) система УрЧП с запаздыванием, в которой во втором уравнении член $\beta w_1 u_2$ заменен на $\beta w_1 w_2$, где $w_i = u_i(x, t - \tau)$, $i = 1, 2$.

6.4. Другие модели, описываемые нелинейными УрЧП с запаздыванием

6.4.1. Модель колебательной реакции Белоусова — Жаботинского

Реакцией Белоусова — Жаботинского называется класс химических реакций, протекающих в колебательном режиме, при котором некоторые параметры реакции (цвет, концентрация компонентов, температура и др.) изменяются периодически, образуя сложную пространственно-временную структуру реакционной среды. Временные колебания цвета однородного раствора, вызванные колебаниями концентраций интермедиантов (вспомогательных, или промежуточных, веществ), были впервые описаны в работе [9], где рассматривался процесс каталитического окисления лимонной кислоты броматом калия в присутствии ионов церия. В [24, 25] были описаны различные органические кислоты и ионы металлов, которые могут быть использованы в таких реакциях. Сложнейший механизм протекания подобных реакций был детально изучен в [232, 233].

Приведем далее краткое описание реакции, представленное в [393]. Реакцию можно условно разделить на два процесса, скажем, процесс I и процесс II. Когда концентрация бромид-ионов Br^- превысит некоторый критический уровень, начинается процесс I, в котором бромат-ион BrO_3^- восстанавливается до

брома Br_2 через интермедиат бромистую кислоту HBrO_2 и происходит бромирование малоновой кислоты $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$. В течение процесса I также идет слабое окисление ионов церия Ce(III) (в случае железа используется состояние Fe(II)). Таким образом, в процессе I расходуются бромид-ионы и, когда их концентрация достаточно снизится, начинается процесс II. В нем бромистая кислота и бромат-ионы образуют бромат-радикалы BrO_2^\bullet , которые окисляют ионы церия Ce(III) до Ce(IV) (в случае железа — состояние Fe(II) до состояния Fe(III)) с автокаталитическим образованием бромистой кислоты. Когда весь Ce(III) окислен до Ce(IV) , а концентрация бромид-ионов остается низкой, Ce(IV) вступает в реакцию с броммалоновой кислотой, вновь образуя ионы Ce(III) и бромид-ионы. Когда концентрация бромид-ионов вновь превысит некоторое критическое значение, снова начнется процесс I и цикл повторится.

В работе [588], используя ферроин в качестве катализатора и малоновую кислоту, было обнаружено, что если реагирующую смесь разместить тонким плоским слоем, толщиной примерно 2 мм, то в нём возникают круговые пространственно-временные волны. Реакционно-диффузионная модель для изучения таких волн была предложена в [234], а ее безразмерная и упрощенная форма — в [393]. Более сложная модель, учитывающая эффекты запаздывания в процессе образования бромистой кислоты и обобщающая безразмерную модель [393], описывается реакционно-диффузионной системой уравнений [348, 372, 520, 568, 593]:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(1 - u - b\bar{v}), & \bar{v} &= v(x, t - \tau), \\ v_t &= v_{xx} - cuv, \end{aligned} \quad (6.4.1.1)$$

где $u = u(x, t)$ и $v = v(x, t)$ — безразмерные концентрации бромистой кислоты и бромид-ионов соответственно ($0 \leq u, v \leq 1$), $b > 0$ и $c > 0$ — некоторые безразмерные параметры, диапазоны изменения которых указаны, например, в [393]: b — от 5 до 50, c — от 2.5 до 12.5.

6.4.2. Модели кроветворения типа Мэкки — Гласса

Для описания динамики гомогенной популяции зрелых циркулирующих клеток крови может использоваться реакционно-диффузионное уравнение, обобщающее ОДУ с запаздыванием (6.1.3.1):

$$u_t = au_{xx} - \gamma u + \beta_0 \frac{\theta^n w}{\theta^n + w^n}, \quad w = u(t - \tau). \quad (6.4.2.1)$$

Введение диффузионного слагаемого позволяет учесть перемещение клеток из области высокой концентрации в область низкой концентрации.

Для уравнения (6.4.2.1) при $a = 1$ в случае однородных граничных условий второго рода получены следующие результаты [536]:

1°. Если $0 < \beta_0/\gamma \leq 1$, то $u \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по x .

2°. Если $1 < \beta_0/\gamma \leq \frac{n}{n-1}$, то $u_* = \theta[(\beta_0 - \gamma)/\gamma]^{1/n}$ является единственным положительным положением равновесия и любое решение равномерно по x стремится к u_* при $t \rightarrow \infty$.

3°. Если $\frac{n}{n-1} < \beta_0/\gamma$ и $\beta_0^{-1}\gamma\tau[\beta_0(n-1) - n\gamma] > e^{-\gamma\tau-1}$, то любое решение осциллирует вокруг положения равновесия u_* .

4°. Если $\beta_0/\gamma > 1$, то любое решение уравнения (6.4.2.1), не осциллирующее вокруг положения равновесия $u = u_*$, равномерно по x стремится к u_* при $t \rightarrow \infty$.

В [469] была доказана следующая теорема.

Теорема. Существует $\lambda^* > 0$ такое, что для любых $\lambda \geq \lambda^*$ уравнение (6.4.2.1) имеет положительный монотонный фронт $u = U(z)$, $z = x + \lambda t$, бегущий от $u = 0$ до $u = u_*$, если выполнено одно из двух пар условий:

- 1) $1 < \beta_0/\gamma \leq \infty$ и $0 < n \leq 1$;
- 2) $1 < \beta_0/\gamma \leq n/(n-1)$ и $n > 1$.

Система двух реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием, описывающая динамику производства плюрипотентных стволовых клеток и обобщающая систему ОДУ с запаздыванием (6.1.3.5), имеет вид:

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} - \delta u - \frac{\beta_0 \theta^n u}{\theta^n + u^n} + \frac{2\beta_0 \theta^n w}{\theta^n + w^n} e^{-\gamma\tau}, \\ v_t &= av_{xx} - \gamma v + \frac{\beta_0 \theta^n u}{\theta^n + u^n} - \frac{\beta_0 \theta^n w}{\theta^n + w^n} e^{-\gamma\tau}, \end{aligned} \quad (6.4.2.2)$$

где $w = u(x, t - \tau)$; $u = u(x, t)$ — плотность популяции клеток фазы покоя G_0 , $v = v(x, t)$ — плотность популяции клеток фазы пролиферации.

Уравнения вида (6.4.2.1) и (6.4.2.2) изучались, например, в [349, 350, 415, 543].

6.4.3. Модель термической обработки металлических листов

Для описания процесса термической обработки металлических листов используется уравнение [525, 535, 565, 603]:

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + g(w_1)u_x + c[f(w_2) - u], \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ w_1 &= u(x, t - \tau_1), \quad w_2 = u(x, t - \tau_2), \end{aligned}$$

с однородными граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0,$$

и начальным условием

$$u(x, t) = \varphi(x, t) \quad \text{при} \quad -\tau_{\max} \leq t \leq 0 \quad (0 < x < 1).$$

Здесь $u(x, t)$ — распределение температуры в металлическом листе; $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ — времена запаздывания, $\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \tau_2\}$; $g(w_1)$ — скорость листа, $f(w_2)$ — функция распределенного источника.

Процесс протекает следующим образом [603]. Металлический лист поступает в печь и подвергается термической обработке. При этом контроллер нагревателя обеспечивает желаемое пространственное распределение температуры,

а контроллер скорости регулирует скорость прохождения листа через печь. Датчики температуры, размещенные вдоль металлического листа, передают информацию на компьютер, который генерирует соответствующие сигналы для контроллеров нагревателя и скорости. Таким образом, между моментом снятия значений температуры и поступлением сигнала на контроллеры проходит определенное время, которое учитывается с помощью времен запаздывания.

6.4.4. Модель пищевой цепи

В [327] предложена реакционно-диффузионная модель с запаздыванием для описания простой пищевой цепи, состоящей из $n + 1$ вида живых организмов — зоопланктона z , фитопланктона u_n и микроорганизмов u_i , $i = 1, \dots, n - 1$, а также из n видов растворенных органических и неорганических веществ v_j , $j = 1, \dots, n$ и детрита d (останков всех рассматриваемых живых организмов).

Считается, что микроорганизм u_i ($i = 1, \dots, n - 1$) питается веществом v_i , фитопланктон u_n питается веществом v_n , зоопланктон z питается фитопланктоном u_n . Вещество v_1 состоит из растворенных органических веществ, образующихся в результате частичного распада мертвых организмов d , а также в результате жизнедеятельности фитопланктона u_n и зоопланктона z . Вещество v_j , $j = 2, \dots, n$, является продуктом метаболизма микроорганизма u_{j-1} . Моделирование $n + 1$ уровня живых организмов, детрита и n веществ ведется в терминах содержания в них азота. Будем предполагать, что поток вещества от уровня к уровню изменяется согласно гипотезе Лотки — Вольтерры как произведение взаимодействующих компонент, что приводит к нелинейности системы дифференциальных уравнений. В [327] для описания поведения указанной простой пищевой цепи было предложено использовать следующую систему реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= a_{ui} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + u_i(x, t - \tau_{ui}) U_i(v_i(x, t - \tau_{ui})) - \\ &\quad - u_i(x, t - \tau_{ei}) E_i(v_i(x, t - \tau_{ei})) - u_i(x, t) M_i(v_i(x, t)), \quad i = 1, \dots, n - 1; \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} &= a_{un} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + u_n(x, t - \tau_{un}) U_n(v_n(x, t - \tau_{un})) - \\ &\quad - u_n(x, t - \tau_{en}) E_n(v_n(x, t - \tau_{en})) - u_n(x, t) M_n(v_n(x, t)) - \\ &\quad - z(x, t - \tau_{uz}) U_z(u_n(x, t - \tau_{uz})); \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} &= a_{v1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + z(x, t - \tau_{ez}) E_z(u_n(x, t - \tau_{ez})) + \\ &\quad + u_n(x, t - \tau_{en}) E_n(v_n(x, t - \tau_{en})) + K d(x, t - \tau_{k1}) - \\ &\quad - u_1(x, t - \tau_{u1}) U_1(v_1(x, t - \tau_{u1})); \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} &= a_{vj} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + u_{j-1}(x, t - \tau_{ej-1}) E_{j-1}(v_{j-1}(x, t - \tau_{ej-1})) - \\ &\quad - u_j(x, t - \tau_{uj}) U_j(v_j(x, t - \tau_{uj})), \quad j = 2, \dots, n; \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + z(x, t - \tau_{uz}) U_z(u_n(x, t - \tau_{uz})) - \\ &\quad - z(x, t - \tau_{ez}) E_z(u_n(x, t - \tau_{ez})) - z(x, t) M_z(u_n(x, t)); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n u_i M_i(v_i) + z M_z(u_n) - K d(x, t - \tau_{k1});$$

$$0 < x < 1, \quad t > 0,$$

с однородными граничными условиями второго рода

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|_{x=0,1} = \left. \frac{\partial v_j}{\partial x} \right|_{x=0,1} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=0,1} = \left. \frac{\partial d}{\partial x} \right|_{x=0,1} = 0$$

и начальными условиями при $-\tau_{\max} \leq t \leq 0$:

$$u_i = \varphi_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad v_j = \varphi_{n+j}(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$z = \varphi_{2n+1}(x) \geq 0; \quad d = \varphi_{2n+2}(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

где $u_i = u_i(x, t)$, $v_j = v_j(x, t)$, $z = z(x, t)$, $d = d(x, t)$ — концентрации* перерабатываемой материи в микроорганизмах, доступных питательных веществах, зоопланктоне и детрите, соответственно; τ_{ui} и τ_{uz} — времена запаздывания при потреблении веществ i -м организмом ($i = 1, \dots, n$) и зоопланктоном, τ_{ei} и τ_{ez} — времена запаздывания при выделении веществ i -м организмом ($i = 1, \dots, n$) и зоопланктоном, τ_{k1} — время запаздывания при распаде детрита, τ_{\max} — максимальный коэффициент запаздывания всех составляющих пищевой цепи, K — некоторая константа. Функции U_i и U_z определяют скорости потребления веществ i -м организмом ($i = 1, \dots, n$) и зоопланктоном, функции E_i и E_z — скорости выделения веществ i -м организмом ($i = 1, \dots, n$) и зоопланктоном, функции M_i и M_z — скорости смертности i -го организма ($i = 1, \dots, n$) и зоопланктона. В работе [327] исследуется устойчивость решений данной задачи, приводятся примеры численного моделирования.

6.4.5. Модели искусственной нейронной сети

Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием и системы таких уравнений широко используются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой применяются для обработки сигналов и изображений, в задачах распознавания образов, в работе ассоциативной машинной памяти, при определении скорости движущихся объектов. Запаздывание возникает в искусственных нейронных сетях из-за конечной скорости переключения усилителей и конечной скорости распространения сигнала между нейронами.

Многие модели искусственных нейронных сетей основаны на обыкновенных дифференциальных уравнениях с запаздыванием (см., например, [113, 170, 171, 366, 567, 599] и ссылки в них). Однако в некоторых случаях требуется введение диффузионного члена, который позволяет учесть движение электронов в асимметричном магнитном поле. В [344, 365, 367, 538, 570, 579] изучается

*Здесь для наглядности вещества и их концентрации обозначены одинаково.

класс моделей искусственных нейронных сетей, который объединяет нейронную сеть Хопфилда и клеточные нейронные сети и описывается системой реакционно-диффузионных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - b_i u_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(u_j) + \sum_{j=1}^n d_{ij} g_j(\bar{u}_{ji}) + I_i(t),$$

$$\bar{u}_{ji} = u_j(\mathbf{x}, t - \tau_{ij}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6.4.5.1)$$

где $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ — функция состояния i -го нейрона сети ($i = 1, \dots, n$), $a_{ik} = a_{ik}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \geq 0$ — гладкие функции, моделирующие диффузионные операторы трансмиссии вдоль i -го нейрона, $b_i > 0$ — скорость, с которой потенциал i -го нейрона, изолированного от сети и внешнего воздействия, достигнет состояния покоя, c_{ij}, d_{ij} — константы, характеризующие взаимодействие нейронов, $f_j(u_j)$ и $g_j(\bar{u}_{ji})$ — функции активации j -го нейрона, $I_i(t)$ — функции внешнего воздействия на i -й нейрон, $\tau_{ij} = \tau_{ij}(t)$ — времена запаздывания, Ω — замкнутая ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\partial\Omega$. Начальные условия имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \varphi_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad -\max_{i,j} \tau_{ij} \leq t \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Граничные условия могут быть как первого рода

$$u_i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0,$$

так и второго рода

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0.$$

Замечание 6.10. В [580] рассматривается система вида (6.4.5.1), содержащая искомые функции с пропорциональными запаздываниями $\bar{u}_{ji} = u_j(\mathbf{x}, p_i t)$ ($0 < p_i < 1$).

В [503] рассматривается класс нейронных сетей двунаправленной ассоциативной памяти, описываемый реакционно-диффузионной системой с запаздыванием

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - b_i u_i + \sum_{j=1}^m c_{ji} f_j(\bar{v}_{ji}) + I_i(t), \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{jk}^* \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) - b_j^* v_j + \sum_{i=1}^n d_{ij} g_i(\bar{u}_{ij}) + J_j(t), \quad j = 1, \dots, m;$$

$$\bar{u}_{ij} = u_i(\mathbf{x}, t - \tau_{ij}^*), \quad \bar{v}_{ji} = v_j(\mathbf{x}, t - \tau_{ji}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0.$$

Приводятся условия глобальной экспоненциальной устойчивости системы и условия существования периодических решений.

Замечание 6.11. Дифференциально-разностная модель диффузии (теплопроводности) с конечным временем релаксации, которая приводит к УрЧП с запаздыванием в диффузионном члене, обсуждалась в разд. 2.3.

Замечание 6.12. Система гиперболических уравнений с пропорциональным запаздыванием исследовалась в [533].

Приложение. Справочные таблицы по точным решениям УрЧП второго порядка с запаздыванием

П.1. Линейные уравнения

П.1.1. Уравнения с постоянным запаздыванием

1. $u_t = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w + f(x, t), \quad w = u(x, t - \tau).$

Линейное одномерное уравнение реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием. Решение начально-краевой задачи для этого уравнения с начальным условием общего вида и произвольными граничными условиями первого рода на отрезке $0 \leq x \leq h$ описано в разд. 2.2.1. Решения других начально-краевых задач для этого уравнения рассматриваются в разд. 2.2.2.

2. $u_t = a_1 \Delta u + a_2 \Delta w + c_1 u + c_2 w + f(x, t), \quad w = u(x, t - \tau).$

Линейное m -мерное уравнение реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\Delta u \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Процедура построения решений начально-краевых задач для этого и более сложных родственных уравнений описана в разд. 2.2.3.

3. $u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, t - \tau).$

Линейное одномерное уравнение гиперболического типа с постоянным запаздыванием. Процедура построения решений начально-краевых задач для этого уравнения с начальным условием общего вида и однородными граничными условиями на отрезке $0 \leq x \leq h$ описано в разд. 2.2.1.

П.1.2. Уравнения с пропорциональным запаздыванием

1. $u_t = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt).$

Линейное одномерное реакционно-диффузионное уравнение с пропорциональным запаздыванием, $0 < p < 1$. Решение начально-краевой задачи для этого уравнения с начальным условием общего вида и различными однородными граничными условиями на отрезке $0 \leq x \leq h$ приведены в разд. 2.4.2 и 2.4.3.

$$2. \quad u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt).$$

Линейное одномерное уравнение волнового типа с пропорциональным запаздыванием, $0 < p < 1$. Процедура построения решения начально-краевой задачи для этого уравнения с начальными условиями общего вида и однородными граничными условиями первого рода на отрезке $0 \leq x \leq h$ описано в разд. 2.4.4.

П.2. Нелинейные уравнения с постоянным запаздыванием

В этом разделе считается, что $f = f(z)$, $g = g(z)$, $h = h(z)$ — произвольные функции, $\tau > 0$ и $\sigma > 0$ — произвольные постоянные, $w = u(x, t - \tau)$.

П.2.1. Уравнения параболического типа

► Одномерные уравнения, линейные относительно производных

▷ Уравнения, содержащие произвольные параметры.

$$1. \quad u_t = au_{xx} + bu^3 + cw^3.$$

Частный случай уравнения 13 при $f(z) = a + bz^3$, приведенного ниже.

$$2. \quad u_t = au_{xx} + bu^k w^{3-k} + cu^m w^{3-m}.$$

Частный случай уравнения 13 при $f(z) = bz^{3-k} + cz^{3-m}$, приведенного ниже.

$$3. \quad u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w + d).$$

Решение с функциональным разделением переменных [449]:

$$u(x, t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)],$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi_2' &= 4a\psi_2^2 + b\psi_2 + c\bar{\psi}_2, & \bar{\psi}_2 &= \psi_2(t - \tau), \\ \psi_1' &= 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1 + c\bar{\psi}_1, & \bar{\psi}_1 &= \psi_1(t - \tau), \\ \psi_0' &= a[\psi_1^2 + 2\psi_2] + b\psi_0 + c\bar{\psi}_0 + d, & \bar{\psi}_0 &= \psi_0(t - \tau). \end{aligned}$$

$$4. \quad u_t = au_{xx} + u(b \ln^2 u + c \ln u + d \ln w + s).$$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab > 0$ [449]:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)], \\ \varphi(x) &= A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{b/a}, \end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned}\psi'_1 &= 2b\psi_1\psi_2 + (c-b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, & \bar{\psi}_1 &= \psi_1(t-\tau), \\ \psi'_2 &= b(A^2 + B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, & \bar{\psi}_2 &= \psi_2(t-\tau).\end{aligned}$$

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab < 0$ [449]:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)], \\ \varphi(x) &= A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},\end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned}\psi'_1 &= 2b\psi_1\psi_2 + (c-b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, & \bar{\psi}_1 &= \psi_1(t-\tau), \\ \psi'_2 &= b(A^2 - B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, & \bar{\psi}_2 &= \psi_2(t-\tau).\end{aligned}$$

При $A = \pm B$ имеем $\varphi(x) = Ae^{\pm\lambda x}$. В этом случае второе уравнение системы становится независимым, а первое — линейным для ψ_1 .

▷ Уравнения, содержащие одну произвольную функцию.

5. $u_t = au_{xx} + f(u - w)$.

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.2.2.12) и [450].

6. $u_t = au_{xx} + f(u - v)$, $v = u(x - \sigma, t)$.

1°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = Ct + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - C + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(x - \sigma).$$

2°. Рассматриваемое уравнение имеет также более общее решение с аддитивным разделением переменных смешанного типа:

$$u = \alpha x + \beta t + \theta(z), \quad z = \lambda x + \gamma t,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a\lambda^2\theta''_{zz} - \gamma\theta'_z - \beta + f(\alpha\sigma + \theta - \bar{\theta}) = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(z - \lambda\sigma).$$

7. $u_t = au_{xx} + bu + f(u - w)$.

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнения (3.2.2.16), (3.4.2.19) и [450, 451].

$$8. \quad u_t = au_{xx} + bu + f(u - kw), \quad k > 0.$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.2.31) и [451].

$$9. \quad u_t = au_{xx} + bu + f(u + kw), \quad k > 0.$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.2.38) и [451].

$$10. \quad u_t = au_{xx} + uf(w/u).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнения (3.2.2.1), (3.4.2.1) и [450].

$$11. \quad u_t = au_{xx} + uf(v/u), \quad v = u(x - \sigma, t).$$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(x - \sigma).$$

2°. Рассматриваемое уравнение имеет также более общее решение с мультипликативным разделением переменных смешанного типа:

$$u = e^{\alpha x + \beta t} \theta(z), \quad z = \lambda x + \gamma t,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a\lambda^2 \theta''_{zz} + (2a\alpha\lambda - \gamma)\theta' + a\alpha^2 \theta + \theta f(e^{-\alpha\sigma} \bar{\theta}/\theta) = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(z - \lambda\sigma).$$

$$12. \quad u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.2.2.8) и [449, 450].

$$13. \quad u_t = au_{xx} + u^3 f(w/u).$$

Решение с функциональным разделением переменных [454]:

$$u = xU(z), \quad z = t + \frac{1}{6a}x^2,$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$U''(z) + 9aU^3(z)f(U(z - \tau)/U(z)) = 0.$$

$$14. \quad u_t = au_{xx} - cu \ln u + uf(w/u^k), \quad k > 0.$$

1°. Это уравнение при $c = (\ln k)/\tau$ допускает решение с мультипликативным разделением переменных [454]:

$$u = \exp(Ae^{-ct})\varphi(x),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным автономным ОДУ второго порядка

$$a\varphi''_{xx} - c\varphi \ln \varphi + \varphi f(\varphi^{1-k}) = 0.$$

2°. Это уравнение при $c = (\ln k)/\tau$ допускает точное решение [386]:

$$u = \exp(Axe^{-ct})\psi(t),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\psi'(t) = \psi(t) \left[A^2 a e^{-2ct} - c \ln \psi(t) + f(\psi(t - \tau)\psi^{-k}(t)) \right].$$

▷ Уравнения, содержащие две или три произвольные функции.

15. $u_t = au_{xx} + uf(u - w) + wg(u - w) + h(u - w).$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.2.40) и [451].

16. $u_t = au_{xx} + uf(u - kw) + wg(u - kw) + h(u - kw), \quad k > 0.$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.2.43) и [451].

17. $u_t = au_{xx} + uf(u + kw) + wg(u + kw) + h(u + kw), \quad k > 0.$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.2.45) и [451].

18. $u_t = au_{xx} + uf(u^2 + w^2) + wg(u^2 + w^2).$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.2.48) и [451].

19. $u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)f(u - w).$

1°. Точное решение с аддитивным разделением переменных в замкнутом виде [430]:

$$u = t + \int g(x) dx, \quad g(x) = \frac{1}{a(x)} \left[x - f(\tau) \int b(x) dx \right].$$

2°. Более сложное решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)t + \psi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} [a(x)\varphi'_x]'_x &= 0, \\ [a(x)\psi'_x]'_x &= \varphi - b(x)f(\tau\varphi). \end{aligned}$$

Эти уравнения последовательно легко интегрируются.

$$20. \quad u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)uf(w/u).$$

Точное решение с мультипликативным разделением переменных [430]:

$$u = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается линейным ОДУ второго порядка

$$[a(x)\varphi'_x]'_x + [f(e^{-\lambda\tau})b(x) - \lambda]\varphi = 0.$$

$$21. \quad u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u + uf(w/u).$$

Точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием:

$$\begin{aligned} [a(x)\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi &= C_1\varphi; \\ \psi'_t &= C_1\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau), \end{aligned}$$

C_1 — произвольная постоянная. Нелинейное ОДУ с запаздыванием допускает частные решения вида $\psi = C_2 e^{\lambda t}$.

▷ Уравнения, содержащие произвольные функции двух аргументов.

$$22. \quad u_t = au_{xx} + uf(u - kw, w/u), \quad k \geq 0.$$

Точные решения этих УрЧП с запаздыванием приведены в [454].

$$23. \quad u_t = au_{xx} + uf(u + kw, w/u), \quad k > 0.$$

Точные решения этих УрЧП с запаздыванием приведены в [454].

$$24. \quad u_t = au_{xx} + uf(u^2 - k^2 w^2, w/u).$$

Точные решения этих УрЧП с запаздыванием приведены в [454].

$$25. \quad u_t = au_{xx} + x^2 f(u, w).$$

Точное решение с функциональным разделением переменных [429]:

$$u = U(z), \quad z = t + \frac{1}{2a}x^2,$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием автономного вида

$$U''_{zz} + af(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau).$$

$$26. \quad u_t = u_{xx} + th^2(kx)f(u, w).$$

Точное решение типа обобщенной бегущей волны [430]:

$$u = U(z), \quad z = t + k^{-2} \ln \operatorname{ch}(kx),$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием автономного вида

$$U''_{zz} - k^2 U'_z + k^2 f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau).$$

$$27. \quad u_t = [a(x)u_x]_x + \frac{x^2}{a(x)} f(u, w).$$

Точное решение типа обобщенной бегущей волны [430]:

$$u = U(z), \quad z = t + \int \frac{x}{a(x)} dx,$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием автономного вида

$$U''_{zz} + f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau).$$

$$28. \quad u_t = [a(x)u_x]_x + u f(x, u - w) + g(x, u - w).$$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)t + \psi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} [a(x)\varphi'_x]'_x + \varphi f(x, \tau\varphi) &= 0, \\ [a(x)\psi'_x]'_x + \psi f(x, \tau\varphi) + g(x, \tau\varphi) - \varphi &= 0. \end{aligned}$$

► Одномерные уравнения, нелинейные относительно производных

▷ Уравнения, содержащие произвольные параметры.

$$1. \quad u_t = [(a_1 u + a_0)u_x]_x + b_1 u + b_2 w.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.3.1.10).

$$2. \quad u_t = [(a_1 u + a_0)u_x]_x + k u^2 + b_1 u + b_2 w.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.3.1.12).

$$3. \quad u_t = a(u^n u_x)_x + b u^{n+1} + c u + k u^{1-n} + m u^{1-n} w^n.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.3.2.3).

$$4. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b e^{\lambda u} + c + k e^{-\lambda u} + m w^{\lambda(w-u)}.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.3.2.7).

▷ Уравнения, содержащие одну произвольную функцию.

$$5. \quad u_t = a(u^{-1/2}u_x)_x + bu^{1/2} + f(u^{1/2} - w^{1/2}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.18) и [456].

$$6. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.2) и [456].

$$7. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.6) и [456].

$$8. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k}f(u^{k+1} - w^{k+1}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.12) и [456].

$$9. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k-2n+1} + u^{1-n}f(u^n - w^n), \quad b(n-k-1) > 0.$$

Точные решения типа обобщенной бегущей волны [71]:

$$u = [\pm \lambda x + \psi(t)]^{1/n}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{bn^2}{a(n-k-1)}},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = nf(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau).$$

$$10. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.21) и [456].

$$11. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.26) и [456].

$$12. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b + e^{-\lambda u}f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.30) и [456].

$$13. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{(\lambda-2\gamma)u} + e^{-\gamma u}f(e^{\gamma u} - e^{\gamma w}), \quad b(\gamma - \lambda) > 0.$$

Точные решения с функциональным разделением переменных [71]:

$$u = \frac{1}{\gamma} \ln[\pm kx + \psi(t)], \quad k = \sqrt{\frac{b\gamma^2}{a(\gamma - \lambda)}},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = \gamma f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau).$$

$$14. \quad u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.4.23) и [456].

$$15. \quad u_t = [f'(u)u_x]_x + a_1 f(u) + a_2 f(w) + a_3 + \frac{b}{f'(u)} [f(u) - f(w)].$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.48) и [456].

$$16. \quad u_t = [f'(u)u_x]_x + a[f(u) - f(w)] + \frac{1}{f'(u)} [b_1 f(u) + b_2 f(w) + b_3].$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.52) и [456].

$$17. \quad u_t = [uf'_u(u)u_x]_x + \frac{1}{f'_u(u)} [af(u) + bf(w) + c].$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.39) и [456].

$$18. \quad u_t = [uf'(u)u_x]_x + (a + b)u + \frac{2}{f'(u)} [af(u) + bf(w) + c].$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.43) и [456].

$$19. \quad u_t = [g(u)u_x]_x + \frac{1}{f'(u)} [c_1 f(u) + c_2 f(w) + c_3],$$

$$g(u) = f'(u) \int [af(u) + b] du.$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.61) и [456].

▷ Уравнения, содержащие две произвольные функции.

$$20. \quad u_t = a(u^{-1/2}u_x)_x + f(u^{1/2} - w^{1/2}) + u^{1/2}g(u^{1/2} - w^{1/2}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.65) и [456].

$$21. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + u^{k+1}g(w/u).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.63) и [456].

$$22. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + f(u^{k+1} - w^{k+1}) + u^{-k}g(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad k \neq -1.$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.67) и [456].

$$23. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w) + e^{\lambda u} g(u - w).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.69) и [456].

$$24. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u} g(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.71) и [456].

$$25. \quad u_t = [h(u)u_x]_x - \frac{1}{g'(u)} [c_1 g(u) + c_2 g(w)] + \frac{1}{g'(u)} f(g(u) - g(w)),$$

$$h(u) = g'(u) \int [ag(u) + b] du.$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.78) и [456].

▷ Уравнения, содержащие три и более произвольных функций.

$$26. \quad u_t = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1} + uf(w/u).$$

Точное решение с мультипликативным разделением переменных [443]:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} [a(x)\eta'_x]'_x + (k+1)b(x)\eta &= 0, \quad \eta = \varphi^{k+1}; \\ \psi'_t(t) &= \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)). \end{aligned}$$

$$27. \quad u_t = [a(x)e^{\beta u}u_x]_x + b(x)e^{\beta u} + f(u-w).$$

Точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ второго порядка с запаздыванием:

$$\begin{aligned} [a(x)\varphi'_x]'_x + \beta b(x)\varphi &= C\beta, \\ \psi'_t(t) &= Ce^{\beta\psi} + f(\psi(t) - \psi(t-\tau)), \end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

$$28. \quad u_t = a[f'(u)u_x]_x + g(f(u) - f(w)) + \frac{1}{f'(u)}h(f(u) - f(w)).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.80) и [456].

$$29. \quad u_t = a[f'(u)u_x]_x + f(u)g(f(w)/f(u)) + \frac{f(u)}{f'(u)}h(f(w)/f(u)).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.82) и [456].

$$30. \quad u_t = [g(u)u_x]_x - \frac{a^2}{f'(u)} \frac{d}{du} \left[\frac{g(u)}{f'(u)} \right] + \frac{1}{f'(u)}h(f(u) - f(w)).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.85) и [456].

$$31. \quad u_t = [a(x)f'(u)u_x]_x + b(x)g(f(u) - f(w)) + \frac{1}{f'(u)}h(f(u) - f(w)).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [443].

$$32. \quad u_t = [a(x)f'(u)u_x]_x + b(x)f(u)g(f(w)/f(u)) + \frac{f(u)}{f'(u)}h(f(w)/f(u)).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [443].

► Уравнения с несколькими пространственными переменными

Ниже описаны многомерные обобщения некоторых одномерных нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием, которые рассматривались ранее. Используются обозначения: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, $w = u(\mathbf{x}, t - \tau)$, $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — оператор Лапласа с n независимыми переменными, $\operatorname{div}[f(u)\nabla u] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [f(u) \frac{\partial u}{\partial x_k}]$. Двумерные и трехмерные уравнения соответствуют значениям $n = 2$ и $n = 3$.

▷ Многомерные уравнения, содержащие одну произвольную функцию.

$$1. \quad u_t = a \Delta u + f(u - w).$$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = aC + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau),$$

функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = C,$$

C — произвольная постоянная.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x})t + \psi(\mathbf{x}),$$

где функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(\mathbf{x})$ описываются линейными стационарными уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \\ a \Delta \psi + f(\tau \varphi) - \varphi &= 0. \end{aligned}$$

3°. Решение с разделением переменных смешанного типа:

$$u(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}) + \theta(z), \quad z = t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n k_j x_j,$$

где k_1, \dots, k_n — произвольные постоянные, функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет линейному уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = C,$$

C — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$a|\mathbf{k}|^2 \theta''(z) - \theta'(z) + aC + f(\theta(z) - \theta(z - \tau)) = 0, \quad |\mathbf{k}|^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}.$$

2. $u_t = a \Delta u + bu + f(u - w)$.

1°. О решении с аддитивным разделением переменных см. четвертую строку табл. 3.4.

2°. Решение с разделением переменных смешанного типа:

$$u(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}) + \theta(z), \quad z = t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n k_j x_j,$$

где k_1, \dots, k_n — произвольные постоянные, функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет линейному уравнению Гельмгольца

$$a \Delta \varphi + b\varphi = 0,$$

а функция $\theta = \theta(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$a|\mathbf{k}|^2 \theta''(z) - \theta'(z) + b\varphi(z) + f(\theta(z) - \theta(z - \tau)) = 0, \quad |\mathbf{k}|^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}.$$

3. $u_t = a \Delta u + bu + f(u - kw)$.

1°. Пусть $k > 0$ и $u_0(\mathbf{x}, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$u = u_0(\mathbf{x}, t) + \exp(c_1 t) \xi(\mathbf{x}, t), \quad c_1 = (\ln k)/\tau,$$

где $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$ — любая τ -периодическая функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца (линейное УрЧП)

$$\xi_t = a \Delta \xi + (b - c_1) \xi, \quad \xi(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}, t - \tau),$$

также является решением данного уравнения [72].

2°. Пусть $k < 0$ и $u_0(\mathbf{x}, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$u = u_0(\mathbf{x}, t) + \exp(c_2 t) \eta(\mathbf{x}, t), \quad c_2 = (\ln |k|)/\tau,$$

где $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$ — любая τ -антипериодическая функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\eta_t = a \Delta \eta + (b - c_2) \eta, \quad \eta(\mathbf{x}, t) = -\eta(\mathbf{x}, t - \tau),$$

также является решением данного уравнения [72].

В обоих случаях при построении точных решений в качестве исходной функции u_0 можно, например, взять стационарное решение $u_0(\mathbf{x})$ или пространственно однородное решение $u_0(t)$.

4. $u_t = a \Delta u + uf(w/u)$.

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t) \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi) + C\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau),$$

C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному линейному уравнению Гельмгольца

$$a \Delta \varphi = C \varphi.$$

2°. Точное решение:

$$u = \exp(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \beta t) \theta(z), \quad z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \gamma t, \\ \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n), \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n),$$

где c_j, k_j, β, γ — произвольные постоянные, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a|\mathbf{k}|^2 \theta''_{zz}(z) + (2a\mathbf{c} \cdot \mathbf{k} - \gamma) \theta'_z(z) + (a|\mathbf{c}|^2 - \beta) \theta(z) + \\ + \theta(z) f(e^{-\beta\tau} \theta(z - \gamma\tau) / \theta(z)) = 0, \quad |\mathbf{c}|^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}.$$

5. $u_t = a \Delta u + bu \ln u + u f(w/u)$.

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t) \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = b\psi \ln \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + C\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau),$$

C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному стационарному уравнению

$$a \Delta \varphi + b\varphi \ln \varphi - C\varphi = 0.$$

6. $u_t = a \Delta u + u f(u - kw, w/u)$, $k > 0$.

О решении этого УрЧП с запаздыванием см. пятую строку табл. 3.4.

7. $u_t = a \Delta u + |\mathbf{x}|^2 f(u, w)$, $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$.

Точное решение с функциональным разделением переменных [429]:

$$u = U(z), \quad z = nt + \frac{1}{2a} |\mathbf{x}|^2,$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием автономного вида

$$U''_{zz} + af(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau).$$

$$8. \quad u_t = a \operatorname{div}(u^{-1/2} \nabla u) + bu^{1/2} + f(u^{1/2} - w^{1/2}).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.94).

$$9. \quad u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + uf(w/u) + bu^{k+1}.$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.86) и [456].

$$10. \quad u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.91) и [456].

$$11. \quad u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + bu^{k-2m+1} + u^{1-m} f(u^m - w^m).$$

Точные решения при $b(m - k - 1) > 0$:

$$u = [\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \psi(t)]^{1/m}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n,$$

где C_1, \dots, C_n — произвольные постоянные, которые связаны одним соотношением

$$C_1^2 + \dots + C_n^2 = \frac{bm^2}{a(m - k - 1)},$$

а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = mf(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau).$$

$$12. \quad u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + be^{\lambda u} + f(u - w).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.98) и [456].

$$13. \quad u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.101) и [456].

$$14. \quad u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + be^{(\lambda - 2\gamma)u} + e^{-\gamma u} f(e^{\gamma u} - e^{\gamma w}).$$

Точные решения при $b(\gamma - \lambda) > 0$:

$$u = \frac{1}{\gamma} \ln[\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \psi(t)], \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n,$$

где C_1, \dots, C_n — произвольные постоянные, которые связаны одним соотношением

$$C_1^2 + \dots + C_n^2 = \frac{b\gamma^2}{a(\gamma - \lambda)},$$

а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = \gamma f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau).$$

$$15. \quad u_t = \operatorname{div}[uf'(u) \nabla u] + \frac{1}{f'(u)}[af(u) + bf(w) + c].$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.104) и [456].

$$16. \quad u_t = \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + a_1 f(u) + a_2 f(w) + a_3 + \frac{b}{f'(u)} [f(u) - f(w)].$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.108) и [456].

$$17. \quad u_t = \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + a[f(u) - f(w)] + \frac{1}{f'(u)} [b_1 f(u) + b_2 f(w) + b_3].$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.112) и [456].

▷ *Многомерные уравнения, содержащие две или три произвольные функции.*

$$18. \quad u_t = a \Delta u + f(u - kw) + ug(u - kw) + wh(u - kw).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [72].

$$19. \quad u_t = a \operatorname{div}(u^{-1/2} \nabla u) + f(u^{1/2} - w^{1/2}) + u^{1/2} g(u^{1/2} - w^{1/2}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.116) и [456].

$$20. \quad u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + f(u^{k+1} - w^{k+1}) + u^{-k} g(u^{k+1} - w^{k+1}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.120) и [456].

$$21. \quad u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + f(u - w) + e^{\lambda u} g(u - w).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.123) и [456].

$$22. \quad u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u} g(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.126) и [456].

$$23. \quad u_t = a \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + b + \frac{1}{f'(u)} g(f(u) - f(w)).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.129) и [456].

$$24. \quad u_t = a \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + bf(u) + \frac{f(u)}{f'(u)} g(f(w)/f(u)).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.131) и [456].

$$25. \quad u_t = a \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + g(f(u) - f(w)) + \frac{1}{f'(u)} h(f(u) - f(w)).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.134) и [456].

$$26. \quad u_t = a \operatorname{div}[f'(u)\nabla u] + f(u)g(f(w)/f(u)) + \frac{f(u)}{f'(u)} h(f(w)/f(u)).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.3.137) и [456].

П.2.2. Уравнения гиперболического типа

► Одномерные уравнения, линейные относительно производных

▷ Уравнения, содержащие одну произвольную функцию.

$$1. \quad u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, t - \tau).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. третью строку табл. 3.5, уравнение (3.3.3.5) и [452].

$$2. \quad u_{tt} = au_{xx} + f(u - v), \quad v = u(x - \sigma, t).$$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = C_1 t^2 + C_2 t + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - 2C_1 + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(x - \sigma).$$

$$3. \quad u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. четвертую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3 и [452].

$$4. \quad u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - kw), \quad k > 0.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452]. При $b = 0$ см. также уравнение (3.3.3.9).

$$5. \quad u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u + kw), \quad k > 0.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452]. При $b = 0$ см. также уравнение (3.3.3.9).

$$6. \quad u_{tt} = au_{xx} + f(w/u).$$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.3.3.4) и [452].

$$7. \quad u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u).$$

1°. О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.4.4.1), а также первую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3 и [452].

2°. Это уравнение имеет также решение с мультипликативным разделением переменных смешанного типа:

$$u = e^{\alpha x + \beta t} \theta(z), \quad z = \lambda x + \gamma t,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$(a\lambda^2 - \gamma^2)\theta''_{zz}(z) + 2(a\alpha\lambda - \beta\gamma)\theta'_z(z) + (a\alpha^2 - \beta^2)\theta(z) + \theta(z)f(e^{-\beta\tau}\theta(z - \sigma)/\theta(z)) = 0, \quad \sigma = \gamma\tau.$$

8. $u_{tt} = au_{xx} + uf(v/u), \quad v = u(x - \sigma, t).$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = [A \operatorname{ch}(\lambda t) + B \operatorname{sh}(\lambda t)]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - \lambda^2\varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(x - \sigma).$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t)]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + \lambda^2\varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(x - \sigma).$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = (At + B)\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(x - \sigma).$$

9. $u_{tt} = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. вторую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3 и [452].

10. $u_{tt} = au_{xx} + u^{1-2k}f(u^k - w^k).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.3.3.15).

11. $u_{tt} = au_{xx} + e^{bu+cw}f(u - w).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.3.3.16).

12. $u_{tt} = au_{xx} + e^{-2\beta u}f(be^{\beta u} + ce^{\beta w}).$

О решениях этого УрЧП с запаздыванием см. уравнение (3.3.3.17) и [452].

▷ Уравнения, содержащие две или три произвольные функции.

$$13. \quad u_{tt} = au_{xx} + uf(u - w) + wg(u - w) + h(u - w).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452].

$$14. \quad u_{tt} = au_{xx} + uf(u - kw) + wg(u - kw) + h(u - kw), \quad k > 0.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452].

$$15. \quad u_{tt} = au_{xx} + uf(u + kw) + wg(u + kw) + h(u + kw), \quad k > 0.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452].

$$16. \quad u_{tt} = au_{xx} + uf(u^2 + w^2) + wg(u^2 + w^2).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452].

$$17. \quad u_{tt} = au_{xx} + g(u)f(h(u) - h(w)), \quad g(u) = kh''(u)[h'(u)]^{-3}.$$

Точные решения в неявном виде [452]:

$$h(u) = x + \varphi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\pm 2a^{1/2}\varphi'_z + a - kf(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(z - \tau).$$

$$18. \quad u_{tt} = [a(x)u_x]_x + b(x)u + uf(w/u).$$

Точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ второго порядка с запаздыванием:

$$\begin{aligned} [a(x)\varphi'_x]_x + b(x)\varphi &= C\varphi; \\ \psi''_{tt} &= C\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau), \end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

$$19. \quad u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}f(u)g(h(u) - h(w)), \quad h(u) = \int \frac{du}{f(u)}.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [443].

▷ Уравнения, содержащие произвольные функции двух аргументов.

20. $u_{tt} = au_{xx} + uf(u - w, w/u).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452].

21. $u_{tt} = au_{xx} + uf(u - kw, w/u), \quad k > 0.$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452].

22. $u_{tt} = au_{xx} + uf(u + kw, w/u), \quad k > 0.$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452].

23. $u_{tt} = au_{xx} + uf(u^2 - k^2w^2, w/u).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [452].

24. $u_{tt} = a(x)u_{xx} + [k^2a(x) - 1]f(u, w).$

Точные решения типа бегущей волны:

$$u = U(z), \quad z = t \pm x,$$

где функция $U = U(z)$ описывается автономным ОДУ с запаздыванием

$$U''_{zz} + f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau).$$

25. $u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{k^2}{a(x)} - 1 \right] f(u, w).$

Точные решения типа обобщенной бегущей волны [602]:

$$u = U(z), \quad z = t \pm k \int \frac{dx}{a(x)},$$

где функция $U = U(z)$ описывается автономным ОДУ с запаздыванием

$$U''_{zz} + f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau).$$

▷ Уравнения телеграфного типа с запаздыванием.

26. $u_{tt} + cu_t = au_{xx} + bu + f(u - w).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [71].

27. $u_{tt} + cu_t = au_{xx} + bu + f(u - kw).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [71].

28. $u_{tt} + cu_t = au_{xx} + uf(w/u).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [71].

$$29. \quad u_{tt} + u_t = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{x^2}{a(x)} - 1 \right] f(u, w).$$

Точное решение типа обобщенной бегущей волны [602]:

$$u = U(z), \quad z = t + \int \frac{x dx}{a(x)},$$

где функция $U = U(z)$ описывается автономным ОДУ с запаздыванием

$$U''_{zz} + f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau).$$

$$30. \quad u_{tt} + cu_t = au_{xx} + uf(u - w) + wg(u - w) + h(u - w).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [71].

$$31. \quad u_{tt} + cu_t = au_{xx} + uf(u - kw) + wg(u - kw) + h(u - kw), \quad k > 0.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [71].

$$32. \quad u_{tt} + cu_t = au_{xx} + uf(u + kw) + wg(u + kw) + h(u + kw), \quad k > 0.$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [71].

$$33. \quad c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + uf(x, w/u).$$

Точное решение типа с мультипликативным разделением переменных [602]:

$$u = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$[a(x)\varphi'_x]' + b(x)\varphi'_x + \varphi[f(x, e^{-\lambda\tau}) - \lambda^2 c(x) - \lambda d(x)] = 0.$$

► Одномерные уравнения, нелинейные относительно производных

▷ Уравнения типа Клейна — Гордона с запаздыванием.

$$1. \quad u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, t - \tau).$$

1°. О точном решении с мультипликативным разделением переменных см. шестую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3 и [452].

2°. Данное уравнение допускает также точное решение вида

$$u = (x + C)^{2/k} \theta(z), \quad z = t + \lambda \ln(x + C),$$

где C и λ — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\theta''(z) = a \left\{ \frac{2(k+2)}{k^2} \theta^{k+1}(z) + \frac{(3k+4)\lambda}{k} \theta^k(z) \theta'(z) + \right. \\ \left. + k\lambda^2 \theta^{k-1}(z) [\theta'(z)]^2 + \lambda^2 \theta^k(z) \theta''(z) \right\} + \theta(z) f(\theta(z - \tau)/\theta(z)).$$

$$2. \quad u_{tt} = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. седьмую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3 и [452].

$$3. \quad u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. восьмую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3 и [452].

$$4. \quad u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. девятую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3 и [452].

$$5. \quad u_{tt} = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. последнюю строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3 и [452].

$$6. \quad u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + u^{k+1}g(w/u).$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. предпоследнюю строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3 и [452].

$$7. \quad u_{tt} = a(u^k u_x)_x + f(u^{k+1} - w^{k+1}) + u^{-2k-1}g(u^{k+1} - w^{k+1}).$$

Это уравнение допускает решение типа обобщенной бегущей волны [71].

$$8. \quad u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-2\lambda u}g(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}).$$

Это уравнение допускает решение типа обобщенной бегущей волны [71].

$$9. \quad u_{tt} = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1} + uf(w/u).$$

Точное решение с мультипликативным разделением переменных [443]:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} [a(x)\eta'_x]' + (k+1)b(x)\eta &= 0, \quad \eta = \varphi^{k+1}; \\ \psi''_{tt}(t) &= \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)). \end{aligned}$$

$$10. \quad u_{tt} = [a(x)e^{\beta u} u_x]_x + b(x)e^{\beta u} + f(u - w).$$

Точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ второго порядка с запаздыванием:

$$\begin{aligned} [a(x)\varphi'_x]'_x + \beta b(x)\varphi &= C\beta, \\ \psi''_{tt}(t) &= Ce^{\beta\psi} + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)), \end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

$$\begin{aligned} 11. \quad u_{tt} &= [a(x)f(u)u_x]_x + g(F(u) - F(w)) - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}h(F(u) - F(w)), \\ F(u) &= \int f(u) du. \end{aligned}$$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. [443].

▷ *Уравнения телеграфного типа с запаздыванием.*

$$12. \quad u_{tt} + cu_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u).$$

Это уравнение допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных [71].

$$13. \quad u_{tt} + cu_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u).$$

Это уравнение допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных [71].

$$14. \quad u_{tt} + cu_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + u^{k+1}g(u/w).$$

Это уравнение допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных [71].

$$15. \quad u_{tt} + cu_t = a(u^{-1/2} u_x)_x + f(u^{1/2} - w^{1/2}) + u^{1/2}g(u^{1/2} - w^{1/2}).$$

Это уравнение допускает точное решение с обобщенным разделением переменных [71].

$$16. \quad u_{tt} + cu_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w).$$

Это уравнение допускает точное решение с аддитивным разделением переменных [71].

$$17. \quad u_{tt} + cu_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - ku \ln u + uf(w/u).$$

Это уравнение допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных [71].

$$18. \quad u_{tt} + h_1(u)u_t = [g(u)u_x]_x + h_2(u)u_x + f(u, w).$$

Такие УрЧП телеграфного типа с запаздыванием рассматривались в [84, 441], где был описан ряд точных решений типа бегущей волны, а также решений с обобщенным и функциональным разделением переменных. Многие полученные решения выражаются через элементарные функции.

► Уравнения с несколькими пространственными переменными

1. $u_{tt} = a \Delta u + f(u - w).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. третью строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

2. $u_{tt} = a \Delta u + bu + f(u - w).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. 4-ю строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

3. $u_{tt} = a \Delta u + uf(w/u).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. первую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

4. $u_{tt} = a \Delta u + bu \ln u + uf(w/u).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. вторую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

5. $u_{tt} = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + uf(w/u).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. шестую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

6. $u_{tt} = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + bu^{k+1} + uf(w/u).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. седьмую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

7. $u_{tt} = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + f(u - w).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. восьмую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

8. $u_{tt} = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + be^{\lambda u} + f(u - w).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. девятую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

9. $u_{tt} = a \Delta u + uf(u - kw, w/u), \quad k > 0.$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. пятую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

10. $u_{tt} = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + uf(w/u) + u^{k+1}g(w/u).$

О точных решениях этого УрЧП с запаздыванием см. десятую строку табл. 3.5 в разд. 3.2.3.

П.3. Нелинейные уравнения с пропорциональными аргументами

П.3.1. Уравнения параболического типа

► Одномерные уравнения, линейные относительно производных

▷ Уравнения, содержащие произвольные параметры.

$$1. \quad u_t = au_{xx} + bw^2, \quad w = u(x, \frac{1}{2}t).$$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{-\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет автономному ОДУ второго порядка $a\varphi''_{xx} + b\varphi^2 + \lambda\varphi = 0$.

2°. Об автомодельном решении данного УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. далее уравнение 7 при $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

$$2. \quad u_t = au_{xx} + bw^{1/q}, \quad w = u(x, qt).$$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{-\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет автономному ОДУ второго порядка $a\varphi''_{xx} + b\varphi^{1/q} + \lambda\varphi = 0$.

2°. Об автомодельном решении данного УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. далее уравнение 7 при $p = 1$.

$$3. \quad u_t = au_{xx} + bw_1w_2, \quad w_1 = u(x, qt), \quad w_2 = u(x, (1 - q)t).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{-\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет автономному ОДУ второго порядка $a\varphi''_{xx} + b\varphi^2 + \lambda\varphi = 0$.

$$4. \quad u_t = au_{xx} + bw^2, \quad w = u(\frac{1}{2}x, t).$$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{-\lambda x} \psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными $\psi'_t = a\lambda^2\psi + b\psi^2$.

2°. Об автомодельном решении данного УрЧП с пропорциональным аргументом см. далее уравнение 7 при $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$.

5. $u_t = au_{xx} + bw^{1/p}, \quad w = u(px, t).$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{-\lambda x} \psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными $\psi'_t = a\lambda^2 \psi + b\psi^{1/p}$.

2°. Об автомодельном решении данного УрЧП с пропорциональным аргументом см. далее уравнение 7 при $q = 1$.

6. $u_t = au_{xx} + bw_1 w_2, \quad w_1 = u(px, t), \quad w_2 = u((1-p)x, t).$

Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{-\lambda x} \psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными $\psi'_t = a\lambda^2 \psi + b\psi^2$.

7. $u_t = au_{xx} + bw^k, \quad w = u(px, qt).$

1°. Автомодельное решение при $k \neq 1$ [444]:

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-k}} U(z), \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z - \frac{1}{1-k}U + bq^{\frac{k}{1-k}}W^k = 0, \quad W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}.$$

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$ak^2U''_{zz} + \lambda U'_z + bW^k = 0, \quad W = U(pz).$$

8. $u_t = au_{xx} + bu^m w^k, \quad w = u(px, qt).$

1°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.1.3) и [444].

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$ak^2 U''_{zz} + \lambda U'_z + bU^m W^k = 0, \quad W = U(pz).$$

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $m=1-kq$:

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - \lambda\varphi + b\varphi^{1-kq}\bar{\varphi}^k = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $m=1-kp$:

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi'_t = a\lambda^2 \psi + b\psi^{1-kp}\bar{\psi}^k, \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

9. $u_t = au_{xx} + be^{\lambda w}, \quad w = u(px, qt).$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.1.7) при $\mu = 0$ и [444].

10. $u_t = au_{xx} + be^{\mu u + \lambda w}, \quad w = u(px, qt).$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.1.7) и [444].

11. $u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w + d), \quad w = u(px, qt).$

1°. О точном решении с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.1.10) и [444].

2°. О точном решении с функциональным разделением переменных при $p = 1$ см. уравнение (4.4.2.1).

3°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$ak^2 U''_{zz} + \lambda U'_z + U(b \ln U + c \ln W + d) = 0, \quad W = U(pz).$$

12. $u_t = au_{xx} + u(b \ln^2 u + c \ln u + d \ln w + s), \quad w = u(x, qt).$

О точных решениях этого УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. уравнение (4.4.2.2).

▷ Уравнения, содержащие произвольные функции вида $f(u - w)$.

$$13. \quad u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, qt).$$

О точном решении с аддитивным разделением переменных см. уравнение (4.4.2.3) и [444].

$$14. \quad u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(px, t).$$

О точном решении с аддитивным разделением переменных см. уравнение (4.4.2.4) и [444].

$$15. \quad u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, qt).$$

О точных решениях с аддитивным разделением переменных см. уравнение (4.4.2.5) и [444].

$$16. \quad u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(px, t).$$

О точном решении с аддитивным разделением переменных см. уравнение (4.4.2.7) и [444].

$$17. \quad u_t = au_{xx} + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, qt).$$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.2.7).

▷ Уравнения, содержащие произвольные функции вида $f(w/u)$.

$$18. \quad u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, qt).$$

О точных решениях с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.2.9) и [444].

$$19. \quad u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(px, t).$$

О точном решении с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.2.10) и [444].

$$20. \quad u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, qt).$$

О точном решении с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.2.11) и [444].

$$21. \quad u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(px, t).$$

О точном решении с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.2.13) и [444].

► Одномерные уравнения, нелинейные относительно производных

▷ Уравнения с коэффициентом переноса степенного вида.

$$1. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + u f(w/u), \quad w = u(x, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональным запаздыванием допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных, см. уравнение (4.4.3.1) и [444].

$$2. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + u f(w/u), \quad w = u(px, t).$$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональным аргументом см. уравнение (4.4.3.2) и [444].

$$3. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + u f(w/u), \quad w = u(x, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональным запаздыванием допускает точные решения с мультипликативным разделением переменных, см. уравнение (4.4.3.3) и [444].

$$4. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt).$$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. уравнение (4.4.3.5) и [444].

$$5. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + u^n f(w/u), \quad w = u(px, qt).$$

О точных решениях этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.3.6).

$$6. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(x, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональным запаздыванием допускает точное решение с функциональным разделением переменных, см. уравнение (4.4.3.7) и [444].

$$7. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{-k} + f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(px, t).$$

Это УрЧП с пропорциональным аргументом допускает точное решение с функциональным разделением переменных, см. уравнение (4.4.3.8) и [444].

▷ Уравнения с коэффициентом переноса экспоненциального вида.

$$8. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональным запаздыванием допускает точное решение с аддитивным разделением переменных, см. уравнение (4.4.3.9) и [444].

$$9. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w), \quad w = u(x, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональным запаздыванием допускает точные решения с аддитивным разделением переменных, см. уравнение (4.4.3.10) и [444].

$$10. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, t).$$

Это УрЧП с пропорциональным аргументом допускает точные решения с аддитивным разделением переменных, см. уравнение (4.4.3.12) и [444].

$$11. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + e^{\mu u} f(u - w), \quad w = u(px, qt).$$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.3.13).

$$12. \quad u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(x, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональным запаздыванием допускает точное решение с функциональным разделением переменных, см. уравнение (4.4.3.14) и [444].

▷ Уравнения с коэффициентом переноса логарифмического и общего вида.

$$13. \quad u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональным запаздыванием допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных, см. уравнение (4.4.3.15) и [444].

$$14. \quad u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + b + \frac{1}{f'_u(u)}g(f(u) - f(w)), \quad w = u(x, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональным запаздыванием допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявной форме, см. уравнение (4.4.3.17) и [444].

$$15. \quad u_t = [f'_u(u)u_x]_x + \frac{a}{f'_u(u)} + g(f(u) - f(w)), \quad w = u(px, t).$$

Это УрЧП с пропорциональным аргументом допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявной форме, см. уравнение (4.4.3.20) и [444].

$$16. \quad u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + bf(u) + \frac{f(u)}{f'_u(u)}g(f(w)/f(u)), \quad w = u(x, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональным запаздыванием допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявной форме, см. уравнение (4.4.3.18) и [444].

$$17. \quad u_t = a[uf'_u(u)u_x]_x + \frac{1}{f'_u(u)}[bf(u) + cf(w) + d], \quad w = u(px, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональными аргументами допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявной форме, см. уравнение (4.4.3.16).

▷ Уравнения, содержащие произвольные функции нескольких аргументов.

$$18. \quad u_t = [f(u, w)u_x]_x, \quad w = u(px, qt).$$

Это УрЧП с пропорциональными аргументами допускает автомодельное решение, см. уравнение (4.4.3.21) и [444]. При $p = q$ оно допускает также решение типа бегущей волны, см. уравнение ниже.

$$19. \quad u_t = F(u, u_x, u_{xx}, w, w_x, w_{xx}), \quad w = u(px, pt).$$

Решение типа бегущей волны:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$F(U, kU'_z, k^2U''_{zz}, W, kW'_z, k^2W''_{zz}) + \lambda U'_z = 0, \quad W = U(pz).$$

$$20. \quad u_t = u^{k+1}F(u^n u_x, u^{2n+1} u_{xx}, w/u, u^n w_x, u^{2n+1} w_{xx}), \\ w = u(px, qt).$$

Автомодельное решение при $k \neq 0$:

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{k}} U(z), \quad z = xt^{\frac{n+1}{k}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$U^{k+1}F(U^n U'_z, U^{2n+1} U''_{zz}, q^{-\frac{1}{k}} W/U, q^{-\frac{1}{k}} U^n W'_z, q^{-\frac{1}{k}} U^{2n+1} W''_{zz}) + \\ + \frac{1}{k} U - \frac{n+1}{k} z U'_z = 0, \quad W = U(sz), \quad s = pq^{\frac{n+1}{k}}.$$

$$21. \quad u_t = u^k F\left(\frac{u_x}{u}, \frac{u_{xx}}{u}, \frac{w}{u}, \frac{w_x}{u}, \frac{w_{xx}}{u}\right), \quad w = u(x, qt).$$

Точное решение:

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-k}} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\frac{1}{1-k} \varphi + \lambda \varphi'_z = \varphi^k F\left(\frac{\varphi'_z}{\varphi}, \frac{\varphi''_{zz}}{\varphi}, q^{\frac{1}{1-k}} \frac{\bar{\varphi}}{\varphi}, q^{\frac{1}{1-k}} \frac{\bar{\varphi}'_z}{\varphi}, q^{\frac{1}{1-k}} \frac{\bar{\varphi}''_{zz}}{\varphi}\right), \\ \bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

$$22. \quad u_t = au + bw + F(x, u_x, u_{xx}, w_x, w_{xx}) + G(t, u - w), \quad w = u(x, qt).$$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned}(a+b)\varphi + F(x, \varphi'_x, \varphi''_{xx}, \varphi'_x, \varphi''_{xx}) &= C, \\ \psi'_t - a\psi - b\bar{\psi} - G(t, \psi - \bar{\psi}) &= C, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),\end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

$$23. \quad u_t = au \ln u + uF\left(x, \frac{u_x}{u}, \frac{u_{xx}}{u}\right) + uG\left(t, \frac{w}{u}\right), \quad w = u(x, qt).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned}F(x, \varphi'_x/\varphi, \varphi''_{xx}/\varphi) + a \ln \varphi &= C, \\ \psi'_t - a\psi \ln \psi - \psi G(t, \bar{\psi}/\psi) &= C, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),\end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

П.3.2. Уравнения гиперболического типа

► Одномерные уравнения, линейные относительно производных

▷ Уравнения, содержащие произвольные параметры.

$$1. \quad u_{tt} = au_{xx} + bw^2, \quad w = u(x, \frac{1}{2}t).$$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{-\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет автономному ОДУ второго порядка $a\varphi''_{xx} + b\varphi^2 - \lambda^2\varphi = 0$.

2°. Об автомодельном решении данного УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. уравнение (4.4.4.1) при $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

$$2. \quad u_{tt} = au_{xx} + bw^{1/q}, \quad w = u(x, qt).$$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{-\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет автономному ОДУ второго порядка $a\varphi''_{xx} + b\varphi^{1/q} - \lambda^2\varphi = 0$.

2°. Об автомодельном решении данного УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. уравнение (4.4.4.1) при $p = 1$.

$$3. \quad u_{tt} = au_{xx} + bw_1w_2, \quad w_1 = u(x, qt), \quad w_2 = u(x, (1 - q)t).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{-\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет автономному ОДУ второго порядка $a\varphi''_{xx} + b\varphi^2 - \lambda^2\varphi = 0$.

$$4. \quad u_{tt} = au_{xx} + bw^k, \quad w = u(px, qt).$$

1°. Об автомодельном решении см. уравнение (4.4.4.1) и [70].

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональными аргументами

$$(ak^2 - \lambda^2)U''_{zz} + bW^k = 0, \quad W = U(pz).$$

$$5. \quad u_{tt} = au_{xx} + bu^mw^k, \quad w = u(px, qt).$$

1°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.4.2).

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k и λ — произвольные постоянные, функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$(ak^2 - \lambda^2)U''_{zz} + bU^mW^k = 0, \quad W = U(pz).$$

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $m=1-kq$:

$$u(x, t) = e^{-\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - \lambda^2\varphi + b\varphi^{1-kq}\bar{\varphi}^k = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $m=1-kp$:

$$u(x, t) = e^{\beta x} \psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = a\lambda^2\psi + b\psi^{1-kp}\bar{\psi}^k, \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

6. $u_{tt} = au_{xx} + be^{\lambda w}, \quad w = u(px, qt).$

Решение:

$$u(x, t) = U(z) - \frac{2}{\lambda} \ln t, \quad z = \frac{x}{t},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$(z^2 U'_z)'_z + \frac{2}{\lambda} = aU''_{zz} + \frac{b}{q^2} e^{\lambda W}, \quad W = U(sz), \quad s = \frac{p}{q}.$$

7. $u_{tt} = au_{xx} + be^{\mu u + \lambda w}, \quad w = u(px, qt).$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.4.3).

8. $u_{tt} = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w), \quad w = u(px, qt).$

О точном решении с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.4.4) и [70].

▷ Уравнения, содержащие произвольные функции.

9. $u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, qt).$

О точном решении с аддитивным разделением переменных см. уравнение (4.4.4.5) и [70].

10. $u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(px, t).$

О точном решении с аддитивным разделением переменных см. уравнение (4.4.4.6) и [70].

11. $u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, qt).$

О точных решениях с аддитивным разделением переменных см. уравнение (4.4.4.7) и [70].

12. $u_{tt} = au_{xx} + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, qt).$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.4.9).

13. $u_{tt} = au_{xx} + u f(w/u), \quad w = u(px, t).$

О точных решениях с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.4.10).

► Одномерные уравнения, нелинейные относительно производных

▷ Уравнения, содержащие произвольные функции одного аргумента.

$$1. \quad u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u f(w/u), \quad w = u(x, qt).$$

О точном решении с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.4.11) и [70].

$$2. \quad u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u f(w/u), \quad w = u(px, t).$$

О точном решении с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.4.12).

$$3. \quad u_{tt} = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + u f(w/u), \quad w = u(x, qt).$$

О точных решениях с мультипликативным разделением переменных см. уравнение (4.4.4.13) и [70].

$$4. \quad u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt).$$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. уравнение (4.4.4.15) и [70].

$$5. \quad u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^n f(w/u), \quad w = u(px, qt).$$

1°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.4.16).

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$ak^2(U^k U'_z)'_z - \lambda^2 U'_z + U^n f(W/U) = 0, \quad W = U(pz).$$

$$6. \quad u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, qt).$$

О точном решении с аддитивным разделением переменных см. уравнение (4.4.4.17) и [70].

$$7. \quad u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + e^{\mu u} f(u - w), \quad w = u(px, qt).$$

О точном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.4.18).

$$8. \quad u_{tt} = [f(w)u_x]_x, \quad w = u(px, qt).$$

1°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональными аргументами см. уравнение (4.4.4.19).

2°. При $p = q$ это уравнение допускает решение типа бегущей волны, см. уравнение ниже.

▷ Уравнения, содержащие произвольные функции нескольких аргументов.

$$9. \quad u_{tt} = F(u, u_x, u_t, u_{xx}, w, w_x, w_t), \quad w = u(px, pt).$$

Решение типа бегущей волны:

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$F(U, kU'_z, -\lambda U'_z, k^2 U''_{zz}, W, kW'_z, -\lambda W'_z) - \lambda^2 U''_{zz} = 0, \quad W = U(pz).$$

$$10. \quad u_{tt} = u^{k+1} F\left(\frac{u_x}{u}, \frac{u_{xx}}{u}, \frac{w}{u}, \frac{w_x}{u}, \frac{w_{xx}}{u}\right), \quad w = u(x, qt).$$

Решение:

$$u(x, t) = t^{-2/k} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\frac{2(k+2)}{k^2} \varphi - \lambda \frac{k+4}{k} \varphi'_z + \lambda^2 \varphi''_{zz} = \varphi^{k+1} F\left(\frac{\varphi'_z}{\varphi}, \frac{\varphi''_{zz}}{\varphi}, q - \frac{2}{k} \frac{\bar{\varphi}}{\varphi}, q - \frac{2}{k} \frac{\bar{\varphi}'_z}{\varphi}, q - \frac{2}{k} \frac{\bar{\varphi}''_{zz}}{\varphi}\right),$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

$$11. \quad u_{tt} = au + bu + F(x, u_x, u_{xx}, w_x, w_{xx}) + G(t, u - w, u_t, w_t),$$

$$w = u(x, qt).$$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$(a+b)\varphi + F(x, \varphi'_x, \varphi''_{xx}, \varphi'_x, \varphi''_{xx}) = C,$$

$$\psi''_{tt} - a\psi - b\bar{\psi} - G(t, \psi - \bar{\psi}, \psi'_t, \bar{\psi}'_t) = C, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C — произвольная постоянная.

$$12. \quad u_{tt} = au \ln u + bu \ln w + uF\left(x, \frac{u_x}{u}, \frac{u_{xx}}{u}\right) + uG\left(t, \frac{w}{u}, \frac{u'_t}{u}, \frac{w'_t}{u}\right),$$

$$w = u(x, qt).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ с пропорциональным запаздыванием

$$F(x, \varphi'_x/\varphi, \varphi''_{xx}/\varphi) + (a+b) \ln \varphi = C,$$

$$\psi''_{tt} - a\psi \ln \psi - b\bar{\psi} \ln \bar{\psi} - \psi G(t, \bar{\psi}/\psi, \psi'_t/\psi, \bar{\psi}'_t/\psi) = C, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C — произвольная постоянная.

П.4. Функционально-дифференциальные УрЧП с аргументами произвольного вида

В этом разделе считается, что $f = f(z)$ и $g = g(z)$ — произвольные функции, $\xi = \xi(x)$ и $\eta = \eta(t)$ — монотонно возрастающие функции, $u = u(x, t)$ — искомая функция.

П.4.1. Уравнения параболического типа

► Одномерные уравнения, линейные относительно производных

$$1. \quad u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w + d), \quad w = u(\xi(x), \eta(t)).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ с переменными запаздываниями

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} + \varphi(b \ln \varphi + c \ln \bar{\varphi} - K) &= 0, & \bar{\varphi} &= \varphi(\xi(x)); \\ \psi'_t &= \psi(b \ln \psi + c \ln \bar{\psi} + d + K), & \bar{\psi} &= \psi(\eta(t)), \end{aligned}$$

K — произвольная постоянная.

$$2. \quad u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w + d), \quad w = u(x, \eta(t)).$$

Решение с функциональным разделением переменных [449]:

$$u(x, t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)],$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi'_2 &= 4a\psi_2^2 + b\psi_2 + c\bar{\psi}_2, & \bar{\psi}_2 &= \psi_2(\eta(t)), \\ \psi'_1 &= 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1 + c\bar{\psi}_1, & \bar{\psi}_1 &= \psi_1(\eta(t)), \\ \psi'_0 &= a[\psi_1^2 + 2\psi_2] + b\psi_0 + c\bar{\psi}_0 + d, & \bar{\psi}_0 &= \psi_0(\eta(t)). \end{aligned}$$

$$3. \quad u_t = au_{xx} + u(b \ln^2 u + c \ln u + d \ln w + s), \quad w = u(x, \eta(t)).$$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab > 0$ [449]:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)], \\ \varphi(x) &= A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{b/a}, \end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= 2b\psi_1\psi_2 + (c - b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, & \bar{\psi}_1 &= \psi_1(\eta(t)), \\ \psi'_2 &= b(A^2 + B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, & \bar{\psi}_2 &= \psi_2(\eta(t)). \end{aligned}$$

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab < 0$ [449]:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)], \\ \varphi(x) &= A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-b/a}, \end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} \psi_1' &= 2b\psi_1\psi_2 + (c-b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(\eta(t)), \\ \psi_2' &= b(A^2 - B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(\eta(t)). \end{aligned}$$

При $A = \pm B$ имеем $\varphi(x) = Ae^{\pm\lambda x}$. В этом случае второе уравнение системы становится независимым, а первое — линейным для ψ_1 .

4. $u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решение с аддитивным разделением переменных [450]:

$$u(x, t) = C_1x^2 + C_2x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с переменным запаздыванием

$$\psi_t' = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

5. $u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных [449, 450]:

$$u(x, t) = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с переменным запаздыванием

$$\psi_t' = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных [449, 450]:

$$u(x, t) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с переменным запаздыванием

$$\psi_t' = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

6. $u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных [450]:

$$u(x, t) = [A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных [450]:

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = -a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = (Ax + B)\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

7. $u_t = au_{xx} + bu \ln u + u f(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решение с мультипликативным разделением переменных [449, 450]:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} &= C_1\varphi - b\varphi \ln \varphi, \\ \psi'_t &= C_1\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + b\psi \ln \psi, \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)), \end{aligned}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Первое ОДУ для φ является автономным, его общее решение может быть получено в неявной форме. Частное однопараметрическое решение этого уравнения можно представить в явном виде

$$\varphi = \exp\left[-\frac{b}{4a}(x + C_2)^2 + \frac{C_1}{b} + \frac{1}{2}\right],$$

где C_2 — произвольная постоянная.

8. $u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(\xi(x), t).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = Ct + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - C + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

$$9. \quad u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(\xi(x), t).$$

Решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = Ce^{bt} + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

$$10. \quad u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(\xi(x), t).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

$$11. \quad u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(\xi(x), t).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \exp(Ce^{bt})\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi \ln \varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

► Одномерные уравнения, нелинейные относительно производных

$$1. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных [456]:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} a(\varphi^k \varphi'_x)'_x &= C\varphi, \\ \psi'_t &= C\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)); \end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

$$2. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$$

1°. Решение с разделением переменных при $b(k+1) > 0$ [456]:

$$u(x, t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi})/\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

2°. Решение с разделением переменных при $b(k+1) < 0$ [456]:

$$u(x, t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием из п. 1°.

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $k = -1$:

$$u(x, t) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x\right) \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а $\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием из п. 1°.

$$3. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(x, \eta(t)).$$

Решение с функциональным разделением переменных [456]:

$$u(x, t) = \left[\psi(t) - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1 x + C_2 \right]^{1/(k+1)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = (k+1)f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

$$4. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{-k} + f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(\xi(x), t).$$

Решение с функциональным разделением переменных

$$u = [b(k+1)t + \varphi(x)]^{\frac{1}{k+1}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + (k+1)f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

$$5. \quad u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k-2n+1} + u^{1-n} f(u^n - w^n), \quad w = u(x, \eta(t)).$$

Точные решения типа обобщенной бегущей волны при $b(n-k-1) > 0$:

$$u = [\pm \lambda x + \psi(t)]^{1/n}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{bn^2}{a(n-k-1)}},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = n f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

6. $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решение с аддитивным разделением переменных [456]:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

7. $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda > 0$ [456]:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda < 0$ [456]:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием из п. 1°.

8. $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решение с функциональным разделением переменных [456]:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\psi(t) - \frac{b\lambda}{2a} x^2 + C_1 x + C_2 \right],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = \lambda f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

9. $u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + be^{(\beta-2\gamma)u} + e^{-\gamma u} f(e^{\gamma u} - e^{\gamma w}), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Точные решения с функциональным разделением переменных при $b(\gamma - \beta) > 0$:

$$u = \frac{1}{\gamma} \ln[\lambda x + \psi(t)], \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{b\gamma^2}{a(\gamma - \beta)}},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = \gamma f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

$$10. \quad u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$$

Решения с мультипликативным разделением переменных [456]:

$$u(x, t) = \exp(\pm \sqrt{c/a} x) \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = c(1 + b/a)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

$$11. \quad u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + b + \frac{1}{f'_u(u)}g(f(u) - f(w)), \quad w = u(x, \eta(t)).$$

Решение с функциональным разделением переменных в неявной форме [456]:

$$f(u) = \psi(t) - \frac{b}{2a}x^2 + C_1x + C_2,$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = g(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

$$12. \quad u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + bf(u) + \frac{f(u)}{f'_u(u)}g\left(\frac{f(w)}{f(u)}\right), \quad w = u(x, \eta(t)).$$

1°. Решение с функциональным разделением переменных в неявной форме при $ab > 0$ [456]:

$$f(u) = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)]\psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = \psi g(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

2°. Решение с функциональным разделением переменных в неявной форме при $ab < 0$ [456]:

$$f(u) = [C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)]\psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием из п. 1°.

$$13. \quad u_t = a[uf'_u(u)u_x]_x + \frac{1}{f'_u(u)}[bf(u) + cf(w) + d], \quad w = u(x, \eta(t)).$$

Решение с функциональным разделением переменных в неявной форме:

$$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют ОДУ с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned}\varphi'_t &= b\varphi + c\bar{\varphi}, & \bar{\varphi} &= \varphi(\eta(t)), \\ \psi'_t &= b\psi + c\bar{\psi} + d + a\varphi^2, & \bar{\psi} &= \psi(\eta(t)).\end{aligned}$$

14. $u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(\xi(x), t).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = -\frac{1}{\lambda} \ln t + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x + \frac{1}{\lambda} + e^{\lambda \varphi} f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

15. $u_t = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(\xi(x), t).$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = t^{-1/k} \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + \frac{1}{k} \varphi + \varphi^{k+1} f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

16. $u_t = [f'_u(u) u_x]_x + \frac{a}{f'_u(u)} + g(f(u) - f(w)), \quad w = u(\xi(x), t).$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = at + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\varphi''_{xx} + g(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

► Уравнения с несколькими пространственными переменными

Ниже описаны многомерные обобщения некоторых одномерных нелинейных УрЧП с переменным запаздыванием, которые рассматривались ранее.

1. $u_t = a \Delta u + f(u - w), \quad w = u(\mathbf{x}, \eta(t)).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t) + \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = aC + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Пуассона $\Delta\varphi = C$.

$$2. \quad u_t = a \Delta u + bu \ln u + u f(w/u), \quad w = u(\mathbf{x}, \eta(t)).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t)\varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = b\psi \ln \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + C\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному стационарному уравнению

$$a \Delta\varphi + b\varphi \ln \varphi - C\varphi = 0.$$

$$3. \quad u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + bu^{k+1} + u f(w/u), \quad w = u(\mathbf{x}, \eta(t)).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных при $k \neq -1$ [456]:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t)\varphi^{1/(k+1)}(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \frac{b(k+1)}{a}\varphi = 0.$$

$$4. \quad u_t = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(\mathbf{x}, \eta(t)).$$

Решение с функциональным разделением переменных [456]:

$$u(\mathbf{x}, t) = [\psi(t) + \varphi(\mathbf{x})]^{1/(k+1)},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = (k+1)f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi + \frac{b(k+1)}{a} = 0.$$

$$5. \quad u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + be^{\lambda u} + f(u - w), \quad w = u(\mathbf{x}, \eta(t)).$$

Решение с аддитивным разделением переменных [456]:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t) + \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \lambda(b/a)\varphi = 0.$$

$$6. \quad u_t = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(\mathbf{x}, \eta(t)).$$

Решение с функциональным разделением переменных [456]:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[\psi(t) + \varphi(\mathbf{x})],$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = \lambda f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi + \lambda b/a = 0.$$

$$7. \quad u_t = a \operatorname{div}[f'_u(u) \nabla u] + b + \frac{1}{f'_u(u)} g(f(u) - f(w)), \quad w = u(\mathbf{x}, \eta(t)).$$

Решение с функциональным разделением переменных в неявной форме [456]:

$$f(u) = \psi(t) + \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = g(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi + b/a = 0.$$

$$8. \quad u_t = a \operatorname{div}[f'_u(u) \nabla u] + b f(u) + \frac{f(u)}{f'_u(u)} g(f(w)/f(u)), \quad w = u(\mathbf{x}, \eta(t)).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных в неявной форме [456]:

$$f(u) = \psi(t)\varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'_t = \psi g(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + (b/a)\varphi = 0.$$

П.4.2. Уравнения гиперболического типа

► Одномерные уравнения, линейные относительно производных

1. $u_{tt} = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w + d), \quad w = u(\xi(x), \eta(t)).$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ с переменными запаздываниями

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} + \varphi(b \ln \varphi + c \ln \bar{\varphi} - K) &= 0, & \bar{\varphi} &= \varphi(\xi(x)); \\ \psi''_{tt} &= \psi(b \ln \psi + c \ln \bar{\psi} + d + K), & \bar{\psi} &= \psi(\eta(t)), \end{aligned}$$

K — произвольная постоянная.

2. $u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = [A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = -a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = (Ax + B)\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

3. $u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(\xi(x), t).$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = [A \operatorname{ch}(\lambda t) + B \operatorname{sh}(\lambda t)]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - \lambda^2\varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t)]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + \lambda^2\varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = (At + B)\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

4. $u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = C_1x^2 + C_2x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

5. $u_{tt} = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка и ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} &= C_1\varphi - b\varphi \ln \varphi, \\ \psi''_{tt} &= C_1\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + b\psi \ln \psi, \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)), \end{aligned}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Частное однопараметрическое решение первого ОДУ можно представить в явном виде

$$\varphi = \exp\left[-\frac{b}{4a}(x + C_2)^2 + \frac{C_1}{b} + \frac{1}{2}\right],$$

где C_2 — произвольная постоянная.

6. $u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

7. $u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(\xi(x), t).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = C_1 t^2 + C_2 t + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с переменным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - 2C_1 + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

► Одномерные уравнения, нелинейные относительно производных

1. $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u f(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} a(\varphi^k \varphi'_x)'_x &= b\varphi, \\ \psi'_t &= b\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)); \end{aligned}$$

b — произвольная постоянная.

2. $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u f(w/u) + bu^{k+1}, \quad w = u(x, \eta(t)).$

1°. Решение с разделением переменных при $b(k+1) > 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi})/\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

2°. Решение с разделением переменных при $b(k+1) < 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием из п. 1°.

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $k = -1$:

$$u(x, t) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2x\right) \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а $\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием из п. 1°.

3. $u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

4. $u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda > 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda < 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием из п. 1°.

5. $u_{tt} = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = \exp(\pm \sqrt{c/a}x) \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = c(1 + b/a)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

6. $u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(\xi(x), t).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = -\frac{2}{\lambda} \ln t + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x - \frac{2}{\lambda} + e^{\lambda \varphi} f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

7. $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(\xi(x), t).$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = t^{-2/k} \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x - \frac{2(k+2)}{k^2} \varphi + \varphi^{k+1} f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

► Уравнения с несколькими пространственными переменными

1. $u_{tt} = a \Delta u + f(u - w).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t) + \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = ab + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = b.$$

2. $u_{tt} = a \Delta u + bu \ln u + u f(w/u).$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t) \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = b\psi \ln \psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + C\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному стационарному уравнению

$$a \Delta \varphi + b\varphi \ln \varphi - C\varphi = 0.$$

$$3. \quad u_{tt} = a \operatorname{div}(u^k \nabla u) + bu^{k+1} + uf(w/u).$$

Решение с мультипликативным разделением переменных при $k \neq -1$:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t)\varphi^{1/(k+1)}(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \frac{b(k+1)}{a}\varphi = 0.$$

$$4. \quad u_{tt} = a \operatorname{div}(e^{\lambda u} \nabla u) + be^{\lambda u} + f(u - w).$$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t) + \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\psi''_{tt} = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

а функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n -мерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \lambda(b/a)\varphi = 0.$$

Список литературы

- [1] Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом. *Изв. вузов. Матем.*, 1997, № 6, с. 3–16.
- [2] Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом. II. *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 4, с. 3–13.
- [3] Азизбеков Э., Хусаинов Д.Я. Решение одного уравнения теплопроводности с запаздыванием. *Вісник Київського нац. універ. ім. Тараса Шевченка, Кібернетика*, 2012, № 12, с. 4–12.
- [4] Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности. *Жур. выч. мат. и мат. физ.*, 2005, т. 45, № 10, с. 1837–1847.
- [5] Андреев V.K., Капцов O.V., Пухначев V.V., Родионов A.A. *Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике*. Новосибирск: Наука, 1994.
- [6] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина*. М.: Наука, 1969.
- [7] Беккер Дж. (мл.), Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде*. М.: Мир, 1986.
- [8] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения*. М.: Мир, 1967.
- [9] Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и её механизм. *Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г.* М.: Медгиз, 1959.
- [10] Бражников А.М., Карпычев В.А., Лыкова А.В. Об одном инженерном методе расчета процессов теплопроводности. *Инж.-физ. журн.*, 1975, т. 28, № 4, с. 677–680.
- [11] Браун Д.А., Захаров А.П. К вопросу о численном расчете пространственно-распределенных динамических систем с запаздыванием по времени. *Вестник Пермского университета: Математика. Механика. Информатика*, 2012, № 4, с. 32–42.
- [12] Вагина М.Ю., Кипнис М.М. Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями. *Матем. заметки*, 2003, т. 74, № 5, с. 786–789.
- [13] Валеев К.Г. Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием, линейно зависящим от аргумента. *Сибирский матем. журнал*, 1964, т. 5, № 2, с. 290–309.
- [14] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. М.: Физматлит, 1971.
- [15] Галактионов В.А., Посашков С.А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, 1989, т. 29, № 4, pp. 497–506.
- [16] Галактионов В.А., Посашков С.А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии. *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, 1994, т. 34, № 3, с. 374–383.
- [17] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц, 5-е изд.* М.: Физматлит, 2010.

-
- [18] Горяченко В.Д. *Качественные методы в динамике ядерных реакторов*. М.: Энергоатомиздат, 1983.
- [19] Дёч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования*. М.: Наука, 1971.
- [20] Диткин В.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление*. М.: Физматлит, 1974.
- [21] Дмитриев А.С., Кислов В.Я. *Стохастические колебания в радиофизике и электронике*. М.: Наука, 1989.
- [22] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.
- [23] Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. *W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики*. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006.
- [24] Жаботинский А.М. Периодические окислительные реакции в жидкой фазе. *Докл. АН СССР*, 1964, т. 157, № 2, с. 392–395.
- [25] Жаботинский А.М. Периодические процессы окисления малоновой кислоты в растворе (исследование кинетики реакции Белоусова). *Биофизика*, 1964, т. 9, с. 306–310.
- [26] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка*. М.: Физматлит, 2003.
- [27] Захаров А.П., Брацун Д.А. Адаптивный алгоритм хранения полей при расчете динамики сплошной среды с наследственной или запаздывающей обратной связью. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2013, т.6, № 2, с.198–206.
- [28] Животовский Л.Л. Абсолютная устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями. *Тр. семинара по теории диф. уравн. с откл. аргументом*, 1969, т. 7, с. 82–91.
- [29] Калиткин Н.Н. *Численные методы*. М.: Наука, 1978.
- [30] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. *Численные методы. Кн. 2. Методы математической физики*. М.: Академия, 2013.
- [31] Каменский Г.А. Краевая задача для нелинейных уравнений с отклоняющимся аргументом. *Научные доклады высшей школы, Физ.-Мат. Науки*, 1958, т. 2, с. 60–66.
- [32] Камке Э. *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка*. М.: Наука, 1966.
- [33] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 5-е изд.* М.: Наука, 1976.
- [34] Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа, 5-е изд.* М.-Л.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962.
- [35] Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. М.: Наука, 1964.
- [36] Кашенко С.А. Циклические риски и системы с запаздыванием. В кн.: *Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика*. М.: Наука, 2000.
- [37] Кашенко С.А. Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона. *Модел. и анализ информ. систем*, 2012, т. 19, № 3, с. 32–62.

- [38] Кашенко И. С., Кашенко С. А. Динамика логистического уравнения с запаздыванием и с большим коэффициентом пространственно распределенного управления. *Журн. выч. мат. и мат. физ.*, 2014, т. 54, № 5, с. 766–778.
- [39] Кашенко С.А., Майоров В.В. *Модели волновой памяти*, 2-е изд. М.: УРСС, 2013.
- [40] Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона. *Мат. сборник*, 2011, т. 202, № 6, с. 51–82.
- [41] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме. *Бюлл. МГУ, Серия А: Математика и механика*, 1937, т. 1, с. 1–26.
- [42] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунтцкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений*. М.: Наука, 1969.
- [43] Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. *Численные методы решения задач тепло- и массопереноса*. Томск: STT, 2016.
- [44] Кудинов В.А., Кудинов И.В. Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*, 2010, № 5 (21), с. 159–169.
- [45] Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики*. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010.
- [46] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1973.
- [47] Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. М.: Высшая школа, 1967.
- [48] Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. *Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. М.: Наука, 1965.
- [49] Мышкис А.Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. *УМН*, 1949, т. 4, № 5(33), с. 99–141.
- [50] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*. М.: Наука, 1972.
- [51] Овсянников Л.В. *Групповые свойства дифференциальных уравнений*. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
- [52] Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*. М.: Мир, 1989.
- [53] Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела. *Прикладная механика*, 1979, т. 15, № 5, с. 30–47.
- [54] Пименов В.Г. *Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью*. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2014.
- [55] Пименов В.Г., Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием. *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, 2008, № 2, с. 113–116.
- [56] Пименов В.Г. *Численные методы решения уравнений с наследственностью*. М.: Юрайт, 2021.
- [57] Пинни Э. *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения*. М.: Изд-во ин. лит-ры, 1961.

- [58] Полянин А.Д., Аксенов А.В. Использование простых решений нелинейных уравнений математической физики для построения более сложных решений. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2021, т. 9, № 5, с. 420–437.
- [59] Полянин А.Д., Вязьмин А.В. Дифференциально-разностные модели и уравнения теплопроводности и диффузии с конечным временем релаксации. *Теор. основы хим. технологии*, 2013, т. 47, № 3, с. 27–278.
- [60] Полянин А.Д., Журов А.И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. М.: ИПМех РАН, 2020.
- [61] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. *Нелинейные уравнения математической физики, т. 1*. М.: Юрайт, 2017.
- [62] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. *Нелинейные уравнения математической физики, т. 2*. М.: Юрайт, 2017.
- [63] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.
- [64] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2014, т. 3, № 2, с. 141–148.
- [65] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Точные решения типа бегущей волны. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2015, т. 4, № 2, с. 119–126.
- [66] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Математические модели и качественные особенности. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2017, т. 6, № 1, с. 41–55.
- [67] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Численные методы и тестовые задачи. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2017, т. 6, № 2, с. 126–142.
- [68] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Об устойчивости и неустойчивости решений реакционно-диффузионных и более сложных уравнений с запаздыванием. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2018, т. 7, № 5, с. 389–404.
- [69] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2020, т. 9, № 2, с. 115–128.
- [70] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантаграфа. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2020, т. 9, № 4, с. 315–328.
- [71] Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. *Теор. основы хим. технол.*, 2015, т. 49, № 5, с. 527–541.
- [72] Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Реакционно-диффузионные модели с запаздыванием: Некоторые свойства, уравнения, задачи и решения. *Теор. основы хим. технол.*, 2018, т. 52, № 3, с. 278–293.
- [73] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. *Математическая биофизика*. М.: Наука, 1984.
- [74] Россовский Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатиями аргументов. *Доклады АН*, 2006, т. 411, № 2, с. 161–163.

- [75] Россовский Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции. *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2014, т. 54, с. 3–138.
- [76] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. М.: Наука, 1989.
- [77] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике*. Новосибирск: Наука, 1984.
- [78] Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения. *Успехи мат. наук*, 2016, т. 71, № 5(431), с. 3–112.
- [79] Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах. *Успехи физ. наук*, 1991, т. 161, № 3, с. 5–29.
- [80] Соболев С.Л. Влияние локальной неравновесности на высокоскоростное затвердевание бинарных сплавов. *Журн. техн. физики*, 1998, т. 68, № 3, с. 45–52.
- [81] Сорокин В.Г. Точные решения некоторых нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2015, т. 4, № 6, с. 493–500.
- [82] Сорокин В.Г. Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2016, т. 5, № 3, с. 199–219.
- [83] Сорокин В.Г. Численное интегрирование нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием методом прямых. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2019, т. 8, № 3, с. 232–247.
- [84] Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2019, т. 8, № 5, с. 453–464.
- [85] Сорокин В.Г., Полянин А.Д. Численное интегрирование нелинейных задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием методом прямых. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2018, т. 7, № 3, с. 211–227.
- [86] Таганов И.Н. *Моделирование процессов массо- и энергопереноса*. Л.: Химия, 1979.
- [87] Титов С.С. О решениях нелинейных уравнений в частных производных в виде многочленов по одной из переменных. *Численные методы механики сплошной среды*, Новосибирск, 1977, т. 8, № 1, с. 144–149.
- [88] Титов С.С., Устинов В.А. Исследование многочленных решений уравнений фильтрации газа с целым показателем адиабаты. *Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной среды* (сб. науч. трудов). Урал. отд-ние АН СССР, Инст. математики и механики, 1985, с. 64–70.
- [89] Титов С.С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики. *Аэродинамика* (ред. Т.П. Иванова), Саратовский ун-т, 1988, с. 104–110.
- [90] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1972.
- [91] Флетчер К. *Численные методы на основе метода Галёркина*. М.: Мир, 1988.
- [92] Хайрер Э., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи*. М.: Мир, 1999.
- [93] Хайрер Э., Нерсетт Г., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи*. М.: Мир, 1990.

- [94] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. М.: Наука, 1971.
- [95] Эстевес П.Г., Чу Ч. Разделение переменных в нелинейных волновых уравнениях с переменной волновой скоростью. *Теор. мат. физика*, 2002, т. 133, № 2, с. 202–210.
- [96] Яненко Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. Труды IV Всесоюзного мат. съезда, том 2, с. 613–621. Л.: Наука, 1964.
- [97] Abazari R., Ganji M. Extended two-dimensional DTM and its application on nonlinear PDEs with proportional delay. *Int. J. Comput. Math.*, 2011, Vol. 88, pp. 1749–1762.
- [98] Abbaoui K., and Cherruault Y. Convergence of Adomian's method applied to differential equations. *Computers Math. Applic.*, 1994, Vol. 28, No. 5, pp. 103–109.
- [99] Ablowitz M.J., Clarkson P.A. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
- [100] Adimy M., Crauste F., Ruan S. A mathematical study of the hematopoiesis process with applications to chronic myelogenous leukemia. *SIAM J. Appl. Math.*, 2005, Vol. 65, No. 4, pp. 1328–1352.
- [101] Adomian G. *Nonlinear Stochastic Operator Equations*. Orlando: Academic Press, 1986.
- [102] Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics. *J. Math. Anal. Appl.*, 1988, Vol. 135, pp. 501–544.
- [103] Adomian G. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Boston: Kluwer, 1994.
- [104] Aiello W.G., Freedman H.I., Wu J. Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay. *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, Vol. 52, No. 3, pp. 855–869.
- [105] Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 4, 345.
- [106] Ambartsumyan V.A. On the fluctuation of the brightness of the Milky Way. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1944, Vol. 44, pp. 223–226.
- [107] Ames W.F., Lohner J.R., Adams E. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1981, Vol. 16, No. 5–6, pp. 439–447.
- [108] Aminikhah H., Dehghan P. GDTM-Pade technique for solving the nonlinear delay differential equations. *Comput. Research Progress Appl. Science & Eng.*, 2015, Vol. 1, No. 4, pp. 112–125.
- [109] Anderson R.M., May R.M. Population biology of infectious diseases: Part I. *Nature*, 1979, Vol. 280, pp. 361–367.
- [110] Andrews G.A. *Number Theory*. Philadelphia: Saunders, 1971.
- [111] Antaki P.J. Analysis of hyperbolic heat conduction in a semi-infinite slab with surface convection. *Int J. Heat Mass Transfer*, 1997, Vol. 40, No. 13, pp. 3247–3250.
- [112] Arecchi F.T., Giacomelli G., Lapucci A., Meucci R. Dynamics of a CO₂ laser with delayed feedback: The short-delay regime. *Phys. Rev. A*, 1991, Vol. 43, No. 9, pp. 4997–5004.
- [113] Arik S. Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay. *Phys. Lett. A*, 2003, Vol. 311, pp. 504–511.

- [114] Arrigo D., Broadbridge P., Hill J.M. Nonclassical symmetry solutions and the methods of Bluman — Cole and Clarkson — Kruskal. *J. Math. Phys.*, 1993, Vol. 34, pp. 4692–4703.
- [115] Asl F.M., Ulsoy A.G. Analysis of a system of linear delay differential equations. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2003, Vol. 125, No. 2, pp. 215–223.
- [116] Azbelev N.V., Simonov P.M. *Stability of Differential Equations with Aftereffect*. London: Taylor & Francis, 2002.
- [117] Bahgat M.S.M. Approximate analytical solution of the linear and nonlinear multi-pantograph delay differential equations. *Physica Scripta*, 2020, Vol. 95, No. 5, 055219.
- [118] Bahsi M.M., Cevik M. Numerical solution of pantograph-type delay differential equations using perturbation-iteration algorithms. *J. Applied Math.*, 2015, Vol. 2015, 139821.
- [119] Bai Z., Wu S.-L. Traveling waves in a delayed SIR epidemic model with nonlinear incidence. *Appl. Meth. Comput.*, 2015, Vol. 263, pp. 221–232.
- [120] Baker C.T.H., Paul C.A.H., Willé D.R. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. *Adv. Comput. Math.*, 1995, Vol. 3, pp. 171–196.
- [121] Banerjee S., Sarkar R. R. Delay-induced model for tumor–immune interaction and control of malignant tumor growth. *Biosystems*, Vol. 91, No. 1, pp. 268–288.
- [122] Banks H.T., Kappel F. Spline approximations for functional differential equations. *J. Differ. Equations*, 1979, Vol. 34, pp. 496–522.
- [123] Barry D.A., Parlange J.-Y., Li L., Prommer H., Cunningham C.J., Stagnitti F. Analytical approximations for real values of the Lambert W -function. *Math. Comput. Simul.*, 2000, Vol. 53, No. 1–2, pp. 95–103.
- [124] Basse B., Wake G.C., Wall D.J.N., van Brunt B. On a cell-growth model for plankton. *Math. Med. Biol.*, 2004, Vol. 21, No. 1, pp. 49–61.
- [125] Bekela A.S., Belachew M.T., Wole G.A. A numerical method using Laplace-like transform and variational theory for solving time-fractional nonlinear partial differential equations with proportional delay. *Adv. Difference Equations*, 2020, Vol. 2020, 586.
- [126] Bellen A. One-step collocation for delay differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 1984, Vol. 10, pp. 275–283.
- [127] Bellen A., Guglielmi N., Torelli L. Asymptotic stability properties of θ -methods for the pantograph equation. *Appl. Numer. Math.*, 1997, Vol. 24, pp. 279–293.
- [128] Bellen A., Maset S., Zennaro M., Guglielmi N. Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations. *Acta Numerica*, 2009, Vol. 18, p. 1–110.
- [129] Bellen A., Zennaro M. Numerical solution of delay differential equations by uniform corrections to an implicit Runge — Kutta method. *Numer. Math.*, 1985, Vol. 47, pp. 301–316.
- [130] Bellen A., Zennaro M. *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Oxford: Oxford University Press, 2013.
- [131] Bellman R. On the computational solution of differential-difference equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1961, Vol. 2, pp. 108–110.

-
- [132] Bellman R., Cooke K.L. On the computational solution of a class of functional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1965, Vol. 12, pp. 495–500.
- [133] Benhammouda B., Vazquez-Leal H., Hernandez-Martinez L. Procedure for exact solutions of nonlinear pantograph delay differential equations. *British J. Math. & Comp. Science*, 2014, Vol. 4, No. 19, pp. 2738–2751.
- [134] Beretta E., Takeuchi Y. Global stability of an SIR epidemic model with time delays. *J. Math. Biol.*, 1995, Vol. 33, pp. 250–260.
- [135] Beretta E., Takeuchi Y. Convergence results in SIR epidemic model with varying population sizes. *Nonl. Anal.*, 1997, Vol. 28, pp. 1909–1921.
- [136] Berezansky L., Braverman E. On oscillation of a food-limited population model with time delay. *Abstr. Appl. Anal.*, 2003, Vol. 1, pp. 55–66.
- [137] Berezansky L., Braverman E. Mackey – Glass equation with variable coefficients. *Comput. Math. Appl.*, 2006, Vol. 51, pp. 1–16.
- [138] Berezansky L., Braverman E., Idels L. Nicholson’s blowflies differential equations revisited: Main results and open problems. *Appl. Math. Modelling*, 2010, Vol. 34, pp. 1405–1417.
- [139] Berezovsky F., Karev G., Song B., Castillo-Chavez C. A simple epidemic model with surprising dynamics. *Math. Biosci. Eng.*, 2005, Vol. 2, No. 1, pp. 133–152.
- [140] Bertrand J., Bertrand P., Ovarlez J. The Mellin Transform. In: *The Transforms and Applications Handbook*, 2nd ed. (ed. Poularikas A.D.), Boca Raton: CRC Press, 2000.
- [141] Bhalekar S., Daftardar-Gejji V. Convergence of the new iterative method. *Int. J. Differ. Equations*, 2011, Vol. 2011, 989065; <https://doi.org/10.1155/2011/989065>.
- [142] Bhalekar S., Patade J. Analytical solutions of nonlinear equations with proportional delays. *Appl. Comput. Math.*, 2016, Vol. 15, No. 3, pp. 331–445.
- [143] Bhrawy A.H., Abdelkawy M.A., Mallawi F. An accurate Chebyshev pseudospectral scheme for multi-dimensional parabolic problems with time delays. *Bound. Value Probl.*, 2015, 103.
- [144] Blakely J.N., Corron N.J. Experimental observation of delay-induced radio frequency chaos in a transmission line oscillator. *Chaos*, 2004, Vol. 14, pp. 1035–1041.
- [145] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation. *J. Math. Mech.*, 1969, Vol. 18, pp. 1025–1042.
- [146] Bluman G.W., Cole J.D. *Similarity Methods for Differential Equations*. New York: Springer, 1974.
- [147] Bluman G.W., Temuerchaolu, Sahadevan R. Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation. *J. Math. Phys.*, 2005, Vol. 46, 023505.
- [148] Bocharov G.A., Marchuk G.I., Romanyukha A.A. Numerical solution by LMMs of stiff delay differential systems modelling an immune response. *Numer. Math.*, 1996, Vol. 73, pp. 131–148.
- [149] Bocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 2000, Vol. 125, No. 1–2, pp. 183–199.
- [150] Bodnar M. On the differences and similarities of the first order delay and ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, Vol. 300, pp. 172–188.
- [151] Bodnar M. Differential equations with time delay. MIM Colloquium, 2016, <https://www.mimuw.edu.pl/sites/default/files/seminaria/kolokwium-12-2016.pdf>.

- [152] Boese F.G. Stability with respect to the delay: On a paper of K. L. Cooke and P. van den Driessche. *J. Math. Anal. Appl.*, 1998, Vol. 228, No. 2, pp. 293–321.
- [153] Borges E.P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics. *Physica A*, 2004, Vol. 340, pp. 95–101.
- [154] Borwein J.M., Corless R.M. Emerging tools for experimental mathematics. *Am. Math. Mon.*, 1999, Vol. 106, No. 10, pp. 889–909.
- [155] Bratsun D., Zakharov A. Adaptive numerical simulations of reaction-diffusion systems with history and time-delayed feedback. In: *ISCS 2013: Interdisciplinary Symposium on Complex Systems: Emergence, Complexity and Computation*, Vol. 8, pp. 70–81. Berlin: Springer, 2014.
- [156] Breda D., Maset S., Vermiglio R. *Stability of Linear Delay Differential Equations. A Numerical Approach with MATLAB*. New York: Springer, 2015.
- [157] Britton N.F. *Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology*. New York: Academic Press, 1986.
- [158] Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R. Using Krylov Methods in the Solution of Large-Scale Differential-Algebraic Systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1994, Vol. 15, pp. 1467–1488.
- [159] Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R. Consistent Initial Condition Calculation for Differential-Algebraic Systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1998, Vol. 19, pp. 1495–1512.
- [160] Brunner H., Huang Q., Xie H. Discontinuous Galerkin methods for delay differential equations of pantograph type. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2010, Vol. 48, No. 5, pp. 1944–1967.
- [161] Brunner H., Maset S. Time transformations for delay differential equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2009, Vol. 25, No. 3, pp. 751–775.
- [162] Bueler E., Butcher E. A. Stability of periodic linear delay-differential equations and the Chebyshev approximation of fundamental solutions. *Technical report, No. 02–03*. Department of Math. Sciences, University of Alaska Fairbanks, 2002.
- [163] Butzer P.L., Jansche S. A direct approach to the Mellin transform. *J. Fourier Anal. Appl.*, 1997, Vol. 3, No. 4, pp. 325–376.
- [164] Cahlon B., Schmidt D. Stability criteria for certain second order delay differential equations. *Dyn. Continuous Discrete Impulsive Systems*, 2003, Vol. 10, pp. 593–621.
- [165] Cahlon B., Schmidt D. Stability criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, 2004, Vol. 170, No. 1, pp. 79–102.
- [166] Cai Y. et al. Spatiotemporal dynamics in a reaction-diffusion epidemic model with a time-delay in transmission. *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng.*, 2015, Vol. 25, No. 8, 1550099.
- [167] Calogero F., Degasperis A. *Spectral Transform and Solitons: Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations*. Amsterdam: North-Holland Publ., 1982.
- [168] Cantrell R.S., Cosner C. *Spatial Ecology via Reaction–Diffusion Equations*. Chichester: John Wiley & Sons, 2003.
- [169] Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. *Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 2007.
- [170] Cao J. New results concerning exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks. *Phys. Lett. A*, 2003, Vol. 307, pp. 136–147.

- [171] Cao J., Liang J., Lam J. Exponential stability of high-order bidirectional associative memory neural networks with time delays. *Physica D*, 2004, Vol. 199, No. 3–4, pp. 425–436.
- [172] Capasso V., Serio G. A generalization of the Kermack — McKendrick deterministic epidemic model. *Math. Biosci.*, 1978, Vol. 42, pp. 43–61.
- [173] Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1984.
- [174] Casal A.C., Díaz J.I., Vegas J.M. Blow-up in some ordinary and partial differential equations with time-delay. *Dynam. Syst. Appl.*, 2009, Vol. 18, pp. 29–46.
- [175] Cattaneo C. Sulla conduzione de calore. *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, 1948, Vol. 3, pp. 3–21.
- [176] Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée *Comptes Rendus*, 1958, Vol. 247, pp. 431–433.
- [177] Chattopadhyay J., Sarkar R.R., el Abdllaoui A. A delay differential equation model on harmful algal blooms in the presence of toxic substances. *IMA J. Math. Med. Biol.*, 2002, Vol. 19, No. 2, pp. 137–161.
- [178] Chen S., Shi J., Wei J. A note on Hopf bifurcations in a delayed diffusive Lotka — Volterra predator–prey system. *Comput. & Math. Appl.*, 2011, Vol. 62, pp. 224–2245.
- [179] Cheng Y., Lu D., Zhou J., Wei J. Existence of traveling wave solutions with critical speed in a delayed diffusive epidemic model. *Adv. Differ. Equations*, 2019, 494.
- [180] Cherniha R.M. Conditional symmetries for systems of PDEs: new definitions and their application for reaction–diffusion systems. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2010, Vol. 43, 405207.
- [181] Cherniha R., Davydovych V. *Nonlinear Reaction-Diffusion Systems: Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology*. Cham: Springer, 2017.
- [182] Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
- [183] Cherniha R., Davydovych V. New conditional symmetries and exact solutions of the diffusive two-component Lotka — Volterra system. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 16, 1984.
- [184] Cherruault Y. Convergence of Adomian's method. *Kybernetes*, 1989, Vol. 18, No. 2, pp. 31–38.
- [185] Chí N.C., Vales E.Á., Almeida G.G. Analysis of a HBV model with diffusion and time delay. *J. Appl. Math.*, 2012, 578561.
- [186] Chuma J., van den Driessche P. A general second-order transcendental equation. *App. Math. Notes*, 1980, Vol. 5, pp. 85–96.
- [187] Clarkson P.A. Nonclassical symmetry reductions of the Boussinesq equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1995, Vol. 5, pp. 2261–2301.
- [188] Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation. *J. Math. Phys.*, 1989, Vol. 30, No. 10, pp. 2201–2213.
- [189] Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J. The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations. *Methods Appl. Anal.*, 1997, Vol. 4, No. 2, pp. 173–195.
- [190] Clarkson P.A., McLeod J.B., Olver P.J., Ramani R. Integrability of Klein — Gordon equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 1986, Vol. 17, pp. 798–802.

- [191] Cohen D.S., Rosenblat S. Multi-species interactions with hereditary effects and spatial diffusion. *J. Math. Biol.*, 1979, Vol. 7, pp. 231–241.
- [192] Cook R.J., Milonni P.W. Quantum theory of an atom near partially reflecting walls. *Phys. Rev. A*, 1987, Vol. 35, No. 12, pp. 5081–5087.
- [193] Cooke K.L. Stability analysis for a vector disease model. *Rocky Mountain J. Math.*, 1979, Vol. 9, pp. 31–42.
- [194] Cooke K.L., Grossman Z. Discrete delay, distributed delay and stability switches. *J. Math. Anal. Appl.*, 1982, Vol. 86, pp. 592–627.
- [195] Cooke K.L., van den Driessche P. On zeroes of some transcendental equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 1986, Vol. 29, pp. 77–90.
- [196] Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.*, 1996, Vol. 5, pp. 329–359.
- [197] Cryer C.W. Numerical methods for functional differential equations. In: *Delay and Functional Differential Equations and their Applications* (ed. Schmitt K.), New York: Academic Press, 1972, pp. 17–101.
- [198] Cryer C.W., Tavernini L. The numerical solution of Volterra functional differential equations by Euler's method. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 9, No. 1, pp. 105–129.
- [199] Cui B.T., Yu Y.H., Lin S.Z. Oscillations of solutions of delay hyperbolic differential equations. *Acta Math. Appl. Sinica*, 1996, Vol. 19, pp. 80–88.
- [200] Cui S., Xu Z. Interval oscillation theorems for second order nonlinear partial delay differential equations. *Differ. Equat. Appl.*, 2009, Vol. 1. № 3, pp. 379–391.
- [201] Culshaw R.V., Ruan A. A delay-differential equation model of HIV infection of $CD4^+$ T-cells. *Math. Biosci.*, 2000, Vol. 165, pp. 27–39.
- [202] Daftardar-Gejji V., Jafari H. An iterative method for solving nonlinear functional equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, Vol. 316, pp. 753–763.
- [203] Damsen R.A., Al-Odat M.Q., Al-Azab T.A., Shannak B.A., Aa-Hussien F.M. Numerical investigations and validation of hyperbolic heat conduction model applied to fast precooling of a slab food product. *J. Indian Inst. Sci.*, 2006, Vol. 86, pp. 695–703.
- [204] Dankwerts P.V. *Gas-Liquid Reactions*. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [205] Davidson F.A., Gourley S.A. The effects of temporal delays in a model for a food-limited, diffusing population. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, Vol. 261, pp. 633–648.
- [206] De Nevers K., Schmitt K. An application of the shooting method to boundary value problems for second order delay equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1971, Vol. 36, pp. 588–597.
- [207] Dehghan M., Shakeri F. The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics. *Phys. Scripta*, 2008, Vol. 78, No. 6, 065004.
- [208] Demirel Y. *Nonequilibrium Thermodynamics: Transport and Rate Processes in Physical, Chemical and Biological Systems, 2nd ed.*. Amsterdam: Elsevier, 2007.
- [209] Derfel G., Grabner P.J., Tichy R.F. On the asymptotic behaviour of the zeros of the solutions of a functional-differential equation with rescaling. In: *Indefinite Inner Product Spaces, Schur Analysis, and Differential Equations* (eds. Alpay D., Kirstein B.), pp. 281–295. Cham: Birkhäuser, 2018.
- [210] Derfel G., van Brunt B., Wake G.C. A cell growth model revisited. *Functional Differential Equations*, 2012, Vol. 19, No. 1–2, pp. 71–81.

- [211] Diblík J., Fečkan M., Pospíšil M. Representation of a solution of the Cauchy problem for an oscillating system with two delays and permutable matrices. *Ukr. Math. J.*, 2013, Vol. 65, pp. 64–76.
- [212] Doha H., Bhrawy A.H., Baleanu D., Hafez R.M. A new Jacobi rational – Gauss collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Appl. Numer. Math.*, 2014, Vol. 77, pp. 43–54.
- [213] Dorodnitsyn V.A., Kozlov R., Meleshko S.V., Winternitz P. Linear or linearizable first-order delay ordinary differential equations and their Lie point symmetries. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2018, Vol. 51, No. 20, 205203.
- [214] Dorodnitsyn V.A., Kozlov R., Meleshko S.V., Winternitz P. Lie group classification of first-order delay ordinary differential equations. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2018, Vol. 51, No. 20, 205202.
- [215] Doyle P.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1998, Vol. 33, No. 2, pp. 315–326.
- [216] Driver R.D. *Ordinary and delay differential equations*. New York: Springer, 1977.
- [217] Ebert D., Lipsitch M., Mangin K.L. The effect of parasites on host population density and extinction: experimental epidemiology with *Daphnia* and six microparasites. *American Naturalist*, 2000, Vol. 156, No. 5, pp. 459–477.
- [218] Efendiev M., van Brunt B., Wake G.C., Zaidi A.A. A functional partial differential equation arising in a cell growth model with dispersion. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2018, Vol. 41, No. 4, pp. 1541–1553.
- [219] Eigen M., Schuster P. *The Hypercycle: A Principle of Natural Self-Organization*. Berlin: Springer, 1979.
- [220] El-Safty A., Salim M.S., El-Khatib M.A. Convergence of the spline functions for delay dynamic system. *Int. J. Comput. Math.*, 2003, Vol. 80, No. 4, pp. 509–518.
- [221] EqWorld // Integral Transforms. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/en/auxiliary/aux-inttrans.htm> (accessed: 27.12.2021).
- [222] Erneux T. *Applied Delay Differential Equations*. New York: Springer, 2009.
- [223] Estévez P.G., Qu C., Zhang S. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, Vol. 275, pp. 44–59.
- [224] Evans D.J., Raslan K.R. The Adomian decomposition method for solving delay differential equation. *Int. J. Comput. Math.*, 2005, Vol. 82, No. 1, pp. 49–54.
- [225] Ezzinbi K., Jazar M. Blow-up results for some nonlinear delay differential equations. *Positivity*, 2006, Vol. 10, pp. 329–341.
- [226] Faria T. Stability and bifurcation for a delayed predator–prey model and the effect of diffusion. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, Vol. 254, pp. 433–463.
- [227] Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay. *J. Differ. Equations*, 2006, Vol. 228, pp. 357–376.
- [228] Fedorov A.V. Ocean-atmosphere coupling. In: *Oxford Companion to Global Change* (eds. Goudie A. and Cuff D.), pp. 369–374. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- [229] Feldstein M.A., Neves K.W. High-order methods for state-dependent delay differential equations with nonsmooth solutions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1984, Vol. 21, pp. 844–863.
- [230] Ferguson T.S. Lose a dollar or double your fortune. In: *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. III (eds.

- L.M. Le Cam, J. Neyman, E.L. Scott), pp. 657–666. Berkeley: Univ. California Press, 1972.
- [231] Ferreira J.A., Da Silva P.M. Energy estimates for delay diffusion-reaction equations. *J. Comput. Math.*, 2008, Vol. 26, No. 4, pp. 536–553.
- [232] Field R.J., Koros E., Noyes R.M. Oscillations in chemical systems. II. Thorough analysis of temporal oscillation in the bromate-cerium-malonic acid system. *J. Am. Chem. Soc.*, 1972, Vol. 94, No. 25, pp. 8649–8664.
- [233] Field R.J., Noyes R.M. Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction. *J. Chem. Phys.*, 1974, Vol. 60, No. 5, pp. 1877–1884.
- [234] Field R.J., Noyes R.M. Oscillations in chemical systems. V. Quantitative explanation of band migration in the Belousov – Zhabotinskii reaction. *J. Amer. Chem. Soc.*, 1974, Vol. 96, No. 7, pp. 2001–2006.
- [235] Fife P.C. *Mathematical Aspects of Reaction and Diffusion Systems*. Berlin: Springer, 1979.
- [236] Finlayson B.A. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. New York: Academic Press, 1972.
- [237] Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. *Ann Eugenics*, 1937, Vol. 191, pp. 295–298.
- [238] Fornberg B. *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [239] Fort J., Méndez V. Wavefronts in time-delayed reaction–diffusion systems. Theory and comparison to experiment. *Rep. Prog. Phys.*, 2002, Vol. 65, pp. 895–954.
- [240] Fox L., Mayers D., Ockendon J.R., Tayler A.B. On a functional differential equation. *IMA J. Appl. Math.*, 1971, Vol. 8, pp. 271–307.
- [241] Friessecke G. Exponentially growing solutions for a delay-diffusion equation with negative feedback. *J. Differ. Equations*, 1992, Vol. 98, pp. 1–18.
- [242] Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.*, 1994, Vol. 23, pp. 1595–621.
- [243] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, 1995, Vol. 125, No. 2, pp. 225–246.
- [244] Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshchevskii S.R. On invariant sets and explicit solutions of nonlinear evolution equations with quadratic nonlinearities. *Dif. & Integral Equations*, 1995, Vol. 8, No. 8, pp. 1997–2024.
- [245] Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshchevskii S.R. Generalized separation of variables for differential equations with polynomial nonlinearities. *Differ. Equations*, 1995, Vol. 31, No. 2, pp. 233–240.
- [246] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
- [247] Galovic S., Kotoski D. Photothermal wave propagation in media with thermal memory. *J. Applied Physics*, 2003, Vol. 93, No. 5, pp. 3063–3070.
- [248] Gan Q., Xu R., Yang P. Travelling waves of a delayed SIRS epidemic model with spatial diffusion. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2011, Vol. 12, pp. 52–68.

-
- [249] Gaver D.P. An absorption probability problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 1964, Vol. 9, pp. 384–393.
- [250] Giang D., Lenbur Y., Seidman T. Delay effect in models of population growth. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, Vol. 305, pp. 631–643.
- [251] Gomez A., Sergei S. Monotone traveling wavefronts of the KPP-Fisher delayed equation. *J. Differ. Equations*, 2011, Vol. 250, 1767–1787.
- [252] Gopalsamy K. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. New York: Springer, 1992.
- [253] Gopalsamy K., Kulenovic M.R.S., Ladas G. Time lags in a ‘food-limited’ population model. *Appl. Anal.*, 1988, Vol. 31, pp. 225–237.
- [254] Gopalsamy K., Kulenovic M.R.S., Ladas G. Environmental periodicity and time delays in a ‘food-limited’ population model. *J. Math. Anal. Appl.*, 1990, Vol. 147, pp. 545–555.
- [255] Goriely A., Hyde C. Necessary and sufficient conditions for finite time singularities in ordinary differential equations. *J. Differ. Equations*, 2000, Vol. 161, pp. 422–448.
- [256] Gourley S.A. Wave front solutions of a diffusive delay model for population of *Daphnia magna*. *Comput. Math. Appl.*, 2001, Vol. 42, pp. 1421–1430.
- [257] Gourley S.A., Chaplain M.A.J. Travelling fronts in a food-limited population model with time delay. *Proc. Roy. Soc. Edin. A*, 2002, Vol. 132, pp. 75–89.
- [258] Gourley S.A., Kuang Y. Wavefronts and global stability in time-delayed population model with stage structure. *Proc. Roy. Soc. London A*, 2003, Vol. 459, pp. 1563–1579.
- [259] Gourley S.A., So J. W.-H., Wu J.H. Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics. *J. Math. Sci.*, 2004, Vol. 124, No. 4, pp. 5119–5153.
- [260] Gourley S.A., Kuang Y., Nagy J.D. Dynamics of a delay differential equation model of hepatitis B virus infection. *J. Biol. Dynam.*, 2008, Vol. 2, No. 2, pp. 140–153.
- [261] Grimm L.J., Schmitt K. Boundary value problems for differential equations with deviating arguments. *Aequationes Math.*, 1970, Vol. 4, pp. 176–190.
- [262] Grindrod P., Pinotsis D.A. On the spectra of certain integro-differential-delay problems with applications in neurodynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2011, Vol. 240, No. 1, pp. 13–20.
- [263] Grover D., Sharma D., Singh P. Accelerated HPSTM: An efficient semi-analytical technique for the solution of nonlinear PDE’s. *Nonlinear Engineering*, 2020, Vol. 9, pp. 329–337.
- [264] Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions. *J. Math. Phys.*, 1992, Vol. 33, pp. 2498–2503.
- [265] Guglielmi N. Stability of one-leg θ -methods for the variable coefficient pantograph equation on the quasi-geometric mesh. *IMA J. Numer. Anal.*, 2003, Vol. 23, pp. 421–438.
- [266] Guo L., Grimsmo A., Kockum A.F., Pletyukhov M., Johansson G. Giant acoustic atom: A single quantum system with a deterministic time delay. *Phys. Rev. A*, 2017, Vol. 95, 053821.
- [267] Gurney W.S.C., Blythe S.P., Nisbet R.M. Nicholson’s blowflies revisited. *Nature*, 1980, Vol. 287, pp. 17–21.
- [268] Gülsu M., Sezer M. A Taylor polynomial approach for solving differential-difference equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, Vol. 186, No. 2, pp. 349–364.

- [269] Gülsu M., Sezer M. A Taylor collocation method for solving high-order linear pantograph equations with linear functional argument. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 2011, Vol. 27, pp. 1628–1638.
- [270] Györi I., Ladas G. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*. New York: Clarendon Press, 1991.
- [271] Györi I., Trofimchuk S. On the existence of rapidly oscillatory solutions in the Nicholson blowflies equation. *Nonlinear Anal.*, 2002, Vol. 48, No. 7, pp. 1033–1042.
- [272] Hale J.K., Verduyn Lunel S.M. *Introduction to Functional Differential Equations*. New York: Springer, 1993.
- [273] Hall A.J., Wake G.C. A functional differential equation arising in the modelling of cell growth. *J. Aust. Math. Soc. Ser. B*, 1989, Vol. 30, pp. 424–435.
- [274] Hall A.J., Wake G.C., Gandar P.W. Steady size distributions for cells in one dimensional plant tissues. *J. Math. Biol.*, 1991, Vol. 30, pp. 101–123.
- [275] Hara T., Rinko M., Morii T. Asymptotic stability condition for linear differential-difference equations with delays. *Dynamic Systems Appl.*, 1997, Vol. 6, pp. 493–506.
- [276] Hastings A., Gross L. (eds.). *Encyclopedia of Theoretical Ecology*. Berkeley: University of California Press, 2012.
- [277] Hattaf K., Yousfi N. A generalized HBV model with diffusion and two delays. *Comput. Math. Appl.*, 2015, Vol. 69, No 1, pp. 31–40.
- [278] Hattaf K., Yousfi N. Global dynamics of a delay reaction–diffusion model for viral infection with specific functional response. *Comput. Appl. Math.*, 2015, Vol. 34, No. 3, pp. 807–818.
- [279] He Q., Kang L., Evans D.J. Convergence and stability of the finite difference scheme for nonlinear parabolic systems with time delay. *Numer. Algorithms*, 1997, Vol. 16, pp. 129–153.
- [280] Herz A.V., Bonhoeffer S., Anderson R.M., May R.M., Nowak M.A. Viral dynamics in vivo: Limitations on estimates of intracellular delay and virus decay. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1996, Vol. 93, pp. 7247–7251.
- [281] Higham D.J. Highly continuous Runge–Kutta interpolants. *ACM Trans. Math. Soft.*, 1991, Vol. 17, pp. 368–386.
- [282] Hindmarsh A., Taylor A. *User Documentation for IDA: A Differential-Algebraic Equation Solver for Sequential and Parallel Computers*. Lawrence Livermore National Laboratory report, UCRL-MA-136910, 1999.
- [283] Hou C.-C., Simos T.E., Famelis I.T. Neural network solution of pantograph type differential equations. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, Vol. 43, No. 6, pp. 3369–3374.
- [284] Van Der Houwen P.J., Sommeijer B.P. On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay. *IMA J. Numer. Anal.*, 1986, Vol. 6, pp. 1–23.
- [285] Hu J., Qu C. Functionally separable solutions to nonlinear wave equations by group foliation method. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, Vol. 330, pp. 298–311.
- [286] Huang C., Vandewalle S. Unconditionally stable difference methods for delay partial differential equations. *Numer. Math.*, 2012, Vol. 122, No. 3, pp. 579–601.
- [287] Huang D.J., Ivanova N.M. Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations. *J. Math. Phys.*, 2007, Vol. 48, No. 7, 073507.
- [288] Huang D.J., Zhou S. Group properties of generalized quasi-linear wave equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, Vol. 366, pp. 460–472.

- [289] Huang D.J., Zhou S. Group-theoretical analysis of variable coefficient nonlinear telegraph equations. *Acta Appl. Math.*, 2012, Vol. 117, No. 1, pp. 135–183.
- [290] Huang D.J., Zhu Y., Yang Q. Reduction operators and exact solutions of variable coefficient nonlinear wave equations with power nonlinearities. *Symmetry*, 2017, Vol. 9, No. 1, 3.
- [291] Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, Vol. 271, pp. 455–466.
- [292] Huang W.Z. On asymptotic stability for linear delay equations. *Differ. & Integral Equations*, 1991, Vol. 4, No. 6, pp. 1303–1310.
- [293] Huo H.-F., Li W.-T. Positive periodic solutions of a class of delay differential system with feedback control. *Appl. Math. Comput.*, 2004, Vol. 148, pp. 35–46.
- [294] Hutchinson G.E. Circular causal systems in ecology. *Ann. N. Y. Acad. of Sci.*, 1948, Vol. 50, No. 4, pp. 221–246.
- [295] Hwang T.-W., Kuang Y. Deterministic extinction effect of parasites on host populations. *J. Math. Biol.*, 2003, Vol. 46, pp. 17–30.
- [296] Ibragimov N.H. (ed.). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*. Boca Raton: CRC Press, 1994.
- [297] In't Hout K.J. A new interpolation procedure for adapting Runge–Kutta methods to delay differential equations. *BIT*, 1992, Vol. 32, pp. 634–649.
- [298] Iserles A. On the generalized pantograph functional differential equation. *Eur. J. Appl. Math.*, 1993, Vol. 4, No. 1, pp. 1–38.
- [299] Isik O.R., Turkoglu T. A rational approximate solution for generalized pantograph-delay differential equations. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2016, Vol. 39, No. 8, pp. 2011–2024.
- [300] Ismagilov R.S., Rautian N.A., Vlasov V.V. Examples of very unstable linear partial functional differential equations. *arXiv:1402.4107v1 [math.AP]*, 2014.
- [301] Jackiewicz Z., Zubik-Kowal B. Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 2006, Vol. 56, pp. 433–443.
- [302] Jia Yu. Bifurcation and pattern formation of a tumor–immune model with time-delay and diffusion. *Math. Comput. Simul.*, 2020, Vol. 178, pp. 92–108.
- [303] Jia H., Xu W., Zhao X., Li Z. Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 339, pp. 982–995.
- [304] Jimbo M., Kruskal M.D., Miwa T. Painlevé test for the self-dual Yang–Mills equation. *Phys. Lett., Ser. A*, 1982, Vol. 92, No. 2, pp. 59–60.
- [305] Johansson F. Computing the Lambert W function in arbitrary-precision complex interval arithmetic. *Numer. Algorithms*, 2020, Vol. 83, No. 1, pp. 221–242.
- [306] Jones G.S. Asymptotic behavior and periodic solutions of a nonlinear differential-difference equation. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1961, Vol. 47, pp. 879–882.
- [307] Jones G. The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)[1+f(x)]$. *J. Math. Anal. Appl.*, 1962, Vol. 5, pp. 435–450.
- [308] Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E. A note on the delayed heat equation: Instability with respect to initial data. *Mech. Research Comm.*, 2008, Vol. 35, pp. 414–420.

- [309] Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics*, 4th ed. Springer, 2010.
- [310] Kakutani S., Marcus L. On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (A - By(t - \tau))y(t)$. *Annals Math. Studies*, 1958, Vol. 41, pp. 1–18.
- [311] Kalmár-Nagy T., Stépán G., Moon F.C. Subcritical HOPF bifurcation in the delay equation model for machine tool vibrations. *Nonlinear Dyn.*, 2001, Vol. 26, pp. 121–142.
- [312] Kalospiros N.S., Edwards B.J., Beris A.N. Internal variables for relaxation phenomena in heat and mass transfer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1993, Vol. 36, pp. 1191–1200.
- [313] Kaminski W. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure. *J. Heat Transfer*, 1990, Vol. 112, No. 3, pp. 555–560.
- [314] Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, Vol. 36, No. 5, pp. 1401–1414.
- [315] Kar A., Chan C.L., Mazumder J. Comparative studies on nonlinear hyperbolic and parabolic heat conduction for various boundary conditions: Analytic and numerical solutions. *Int. J. Heat Transfer*, 1992, Vol. 114, pp. 14–20.
- [316] Karakoç F., Bereketoğlu H. Solutions of delay differential equations by using differential transform method. *Int. J. Comput. Math.*, 2009, Vol. 86, No. 5, pp. 914–923.
- [317] Karakostas G., Philos Ch., Sficas Y. Stable steady state of some population model. *J. Dynam. Differ. Eq.*, 1992, Vol. 4, No. 2, pp. 161–190.
- [318] Kato T., McLeod J.B. Functional-differential equation $y' = ay(\lambda t) + by(t)$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1971, Vol. 77, No. 6, pp. 891–937.
- [319] Kermack W.O., McKendrick A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. Roy. Soc. A*, 1927, Vol. 155, pp. 700–721.
- [320] Khusainov D.Y., Shuklin G.V. Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving. *Stud. Univ. Žilina, Math. Ser.*, 2003, Vol. 17, No. 1, pp. 101–108.
- [321] Khusainov D.Y., Ivanov A.F., Shuklin G.V. On a representation of solutions of linear delay systems. *Differ. Equations*, 2005, Vol. 41, pp. 1054–1058.
- [322] Khusainov D.Y., Shuklin G.V. Relative controllability in systems with pure delay. *Int. Appl. Mechanics*, 2005, Vol. 41, No. 2, pp. 210–221.
- [323] Khusainov D.Y., Diblík J., Růžicková M., Lukáčová J. Representation of a solution of the Cauchy problem for an oscillating system with pure delay. *Nonlinear Oscillations*, 2008, Vol. 11, pp. 276–285.
- [324] Khusainov D.Y., Ivanov A.F., Kovarzh I.V. Solution of one heat equation with delay. *Nonlinear Oscillations*, 2009, Vol. 12, No. 2, pp. 260–282.
- [325] Khusainov D.Y., Pokojov M., Azizbayov E.I. On classical solvability for a linear 1D heat equation with constant delay. *Konstanzer Schriften in Mathematik*, 2013, No. 316, ISSN 1430-3558 (see also arXiv:1401.5662v1 [math.AP], 2014, <https://arxiv.org/pdf/1401.5662.pdf>).
- [326] Khusainov D., Pokojov M., Reinhard R. Strong and mild extrapolated L^2 -solutions to the heat equation with constant delay. *SIAM J. Math. Anal.*, 2015, Vol. 47, No. 1, pp. 427–454.

-
- [327] Kmet T. Modelling and simulation of food network. *Proceedings 22nd European Conference on Modelling and Simulation, Nicosia, Cyprus, 2008*, pp. 157–164.
- [328] Kolmanovskii V., Myshkis A. *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Dordrecht: Kluwer, 1992.
- [329] Kolmanovskii V., Myshkis A. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. New York: Springer, 1999.
- [330] Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. *Stability of Functional Differential Equations*. London: Academic Press, 1986.
- [331] Koto T. Stability of Runge – Kutta methods for the generalized pantograph equation. *Numer. Math.*, 1999, Vol. 84, pp. 233–247.
- [332] Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, 2nd ed.* New York: Dover Publ., 2000.
- [333] Kuang Y. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. San Diego: Academic Press, 2012.
- [334] Kuang J., Cong Y. *Stability of Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Beijing: Science Press, 2005.
- [335] Kulenovic M.R.S., Ladas G. Linearized oscillations in population dynamics. *Bull. Math. Biol.*, 1987, Vol. 49, No. 5, pp. 615–627.
- [336] Kwong M.K., Ou C. Existence and nonexistence of monotone traveling waves for the delayed Fisher equation. *J. Differ. Equations*, 2010, Vol. 249, pp. 728–745.
- [337] Lagerstrom P.A. *Matched Asymptotic Expansions. Ideas and Techniques*. New York: Springer, 1988.
- [338] Lang R., Kobayashi K., External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1980, Vol. 16, No. 3, pp. 347–355.
- [339] Langley J.K. A certain functional-differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2000, Vol. 244, No. 2, pp. 564–567.
- [340] Lekomtsev A., Pimenov V. Convergence of the scheme with weights for the numerical solution of a heat conduction equation with delay for the case of variable coefficient of heat conductivity. *Appl. Math. Comput.*, 2015, Vol. 256, pp. 83–93.
- [341] Li D., Liu M.Z. Runge – Kutta methods for the multi-pantograph delay equation. *Appl. Math. Comput.*, 2005, Vol. 163, pp. 383–395.
- [342] Li W.-T., Yan X.-P., Zhang C.-H. Stability and Hopf bifurcation for a delayed cooperation diffusion system with Dirichlet boundary conditions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, Vol. 38, No. 1, pp. 227–237.
- [343] Li J., Sun G.-Q., Jin Z. Pattern formation of an epidemic model with time delay. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.*, 2014, Vol. 403, pp. 100–109.
- [344] Liang J., Cao J. Global exponential stability of reaction-diffusion recurrent neural networks with time-varying delays. *Phys. Lett. A.*, 2003, Vol. 314, pp. 434–442.
- [345] Liao S.J. A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters – II. An application in fluid mechanics. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1997, Vol. 32, No. 5, pp. 815–822.
- [346] Liao S.J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Boca Raton: CRC Press, 2004.
- [347] Liao S.J. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Berlin: Springer, 2012.

- [348] Lin G., Li W.-T. Travelling wavefronts of Belousov — Zhabotinskii system with diffusion and delay. *Appl. Math. Lett.*, 2009, Vol. 22, pp. 341–346.
- [349] Ling Z., Lin Z. Traveling wavefront in a Hematopoiesis model with time delay. *Applied Mathematics Letters*, 2010, Vol. 23, pp. 426–431.
- [350] Ling Z., Zhu L. Traveling wavefronts of a diffusive hematopoiesis model with time delay. *Appl. Math.*, 2014, Vol. 5, pp. 2172–2718.
- [351] Luo L., Wang Y. Oscillation for nonlinear hyperbolic equations with influence of impulse and delay. *Int. J. Nonlinear Sci.*, 2012, Vol. 14. № 1, pp. 60–64.
- [352] Liu B. New results on the positive almost periodic solutions for a model of hematopoiesis. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2014, Vol. 17, pp. 252–264.
- [353] Liu P.-P. Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay. *Appl. Math. Comput.*, 2015, Vol. 265, pp. 275–291.
- [354] Liu C.-S., Liu Y. Comparison of a general series expansion method and the homotopy analysis method. *Modern Phys. Letters B*, 2010, Vol. 24, No. 15, pp. 1699–1706.
- [355] Liu C.-S. Basic theory of a kind of linear functional differential equations with multiplication delay, 2018, arXiv:1605.06734v4 [math.CA].
- [356] Liu Y. On the θ -method for delay differential equations with infinite lag. *J. Comput. Appl. Math.*, 1996, Vol. 71, pp. 177–190.
- [357] Liu M.Z., Li D. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. *Appl. Math. Comput.*, 2004, Vol. 155, No. 3, pp. 853–871.
- [358] Liu H., Sun G. Implicit Runge—Kutta methods based on Lobatto quadrature formula. *Int. J. Comput. Math.*, 2005, Vol. 82, No. 1, pp. 77–88.
- [359] Liu M.Z., Yang Z.W., Xu Y. The stability of modified Runge—Kutta methods for the pantograph equation. *Math. Comput.*, 2006, Vol. 75, No. 25, pp. 1201–1215.
- [360] Liu B., Zhou X., Du Q. Differential transform method for some delay differential equations. *Applied Mathematics*, 2015, Vol. 6, pp. 585–593.
- [361] Liz E., Tkachenko V., Trofimchuk S. A global stability criterion for scalar functional differential equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 2003, Vol. 35, No. 3, pp. 596–622.
- [362] Liz E., Tkachenko V., Trofimchuk S. A global stability criterion for a family of delayed population models. *Quart. Appl. Math.*, 2005, Vol. 63, pp. 56–70.
- [363] Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein—Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sciences*, 2016, Vol. 39, No. 12, pp. 3255–3270.
- [364] Longtin A., Milton J.G. Modelling autonomous oscillations in the human pupil light reflex using non-linear delay-differential equations. *Bull. Math. Biol.*, 1989, Vol. 51, No. 5, pp. 605–624.
- [365] Lou X.-Y., Cui B.-T. Asymptotic synchronization of a class of neural networks with reaction-diffusion terms and time-varying delays. *Comput. Math. Appl.*, 2006, Vol. 52, pp. 897–904.
- [366] Lu H.T., Chung F.L., He Z.Y. Some sufficient conditions for global exponential stability of delayed Hopfield neural networks. *Neural Networks*, 2004, Vol. 17, pp. 537–544.
- [367] Lu J.G. Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, Vol. 35, pp. 116–125.

-
- [368] Lu X. Monotone method and convergence acceleration for finite-difference solutions of parabolic problems with time delays. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 1995, Vol. 11, pp. 591–602.
- [369] Lu X. Combined iterative methods for numerical solutions of parabolic problems with time delays. *Appl. Math. Comput.*, 1998, Vol. 89, pp. 213–224.
- [370] Luckhaus S. Global boundedness for a delay differential equation. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1986, Vol. 294, No. 2, pp. 767–774.
- [371] Lv G., Wang M. Traveling wave front in diffusive and competitive Lotka – Volterra system with delays. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2010, Vol. 11, pp. 1323–1329.
- [372] Ma S. Traveling wavefronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem. *J. Differ. Equations*, 2001, Vol. 171, pp. 294–314.
- [373] Ma W., Song M., Takeuchi Y. Global stability of an SIR epidemic model with time delay. *Appl. Math. Lett.*, 2004, Vol. 17, pp. 1141–1145.
- [374] Mackey M.C. Unified hypothesis for the origin of aplastic anemia and periodic hematopoiesis. *Blood*, 1978, Vol. 51, pp. 941–956.
- [375] Mackey M.C., Glass L. Oscillation and chaos in physiological control system. *Science*, 1977, Vol. 197, pp. 287–289.
- [376] Mahaffy J.M., Bélair J., Mackey M.C. Hematopoietic Model with Moving Boundary Condition and State Dependent Delay: Applications in Erythropoiesis. *J. Theor. Biol.*, 1998, Vol. 190, No. 2, pp. 135–146.
- [377] Mahler K. On a special functional equation, *J. London Math. Soc.*, 1940, Vol. 1, No. 2, pp. 115–123.
- [378] Malakhovskii E., Mirkin L. On stability of second-order quasi-polynomials with a single delay. *Automatica*, 2006, Vol. 42, No. 6, pp. 1041–1047.
- [379] Maple Programming Help // Numeric Delay Differential Equation Examples. URL: <http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=examples/NumericDDEs> (accessed: 27.12.2021)
- [380] Martín J.A., Rodríguez F., Company R. Analytic solution of mixed problems for the generalized diffusion equation with delay. *Math. Comput. Modelling*, 2004, Vol. 40, pp. 361–369.
- [381] MATLAB Documentation // Delay Differential Equations. URL: <http://www.mathworks.com/help/matlab/delay-differential-equations.html> (accessed: 27.12.2021).
- [382] Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases. *Phil. Trans. Royal Soc.*, 1867, Vol. 157, pp. 49–88.
- [383] McCluskey C.C. Complete global stability for an SIR epidemic model with delay – distributed or discrete. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2010, Vol. 11, pp. 55–59.
- [384] Mei M., So J., Li M., Shen S. Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson’s blowflies equation with diffusion. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2004, Vol. 134, pp. 579–594.
- [385] Mead J., Zubik-Kowal B. An iterated pseudospectral method for delay partial differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 2005, Vol. 55, pp. 227–250.
- [386] Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 338, pp. 448–466.

- [387] Miller W. (Jr.). Mechanism for variable separation in partial differential equations and their relationship to group theory. In: *Symmetries and Nonlinear Phenomena* (eds. D. Levi, P. Winternitz). London: World Scientific, 1989.
- [388] Miller W. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *J. Phys. A.*, 1993, Vol. 26, pp. 1901–1913.
- [389] Mitra K., Kumar S., Vedavarz A., Moallemi M.K. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat. *J. Heat Transfer*, 1995, Vol. 117, No. 3, pp. 568–573.
- [390] Mittler J.E., Sulzer B., Neumann A.U., Perelson A.S. Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients. *Math. Biosci.*, 1998, Vol. 152, pp. 143–163.
- [391] Morris G.R., Feldstein A., Bowen E.W. The Phragmén-Lindelöf principle and a class of functional differential equations. In: *Ordinary Differential Equations* (ed. L. Weiss), pp. 513–540. San Diego: Academic Press, 1972.
- [392] Murphy G.M. *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*. New York: D. Van Nostrand, 1960.
- [393] Murray J.D. On traveling wave solutions in a model for Belousov – Zhabotinskii reaction. *J. Theor. Biol.*, 1976, Vol. 56, pp. 329–353.
- [394] Murray J.D. Spatial structures in predator-prey communities – a nonlinear time delay diffusional model. *Math. Biosci.*, 1976, Vol. 30, pp. 73–85.
- [395] Murray J.D. *Mathematical Biology*, 3rd ed. New York: Springer, 2002.
- [396] Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York: Wiley – Interscience, 1981.
- [397] Nayfeh A.H. *Perturbation Methods*. New York: Wiley – Interscience, 2000.
- [398] Naudt J. The q -exponential family in statistical physics. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2010, Vol. 201, 012003.
- [399] Nelson P.W., James D.M., Perelson A.S. A model of HIV-1 pathogenesis that includes an intracellular delay. *Math. Biosci.*, 2000, Vol. 163, pp. 201–215.
- [400] Nelson P.W., Perelson A.S. Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection. *Math. Biosci.*, 2002, Vol. 179, No. 1, pp. 73–94.
- [401] Neves K.W., Feldstein M.A. Characterisation of jump discontinuities for state-dependent delay differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1976, Vol. 56, pp. 689–707.
- [402] Neves K.W., Thompson S. Software for the numerical-solution of systems of functional-differential equations with state-dependent delay. *Appl. Numer. Math.*, 1992, Vol. 9, pp. 385–401.
- [403] Nicholson A.J. An outline of the dynamics of animal populations. *Australian J. Zoology*, 1954, Vol. 2, No. 1, pp. 9–65.
- [404] Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevskii L.B., Zakharov V.E. *Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method*. New York: Plenum Press, 1984.
- [405] Nucci M.C., Clarkson P.A. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh – Nagumo equation. *Phys. Lett. A*, 1992, Vol. 164, pp. 49–56.
- [406] Oberhettinger F., Badii L. *Tables of Laplace Transforms*. New York: Springer, 1973.

-
- [407] Oberle H.J., Pesch H.J. Numerical treatment of delay differential equations by Hermite interpolation. *Num. Math.*, 1981, Vol. 37, pp. 235–255.
- [408] Ockendon J.R., Tayler A.B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1971, Vol. 332, pp. 447–468.
- [409] Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. (eds.). *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
- [410] Ordóñez-Miranda J., Alvarado-Gil J.J. Thermal wave oscillations and thermal relaxation time determination in a hyperbolic heat transport model. *Int. J. Thermal Sciences*, 2009, Vol. 48, pp. 2053–2062.
- [411] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations. *Phys. Lett. A*, 1986, Vol. 118, pp. 172–176.
- [412] Owren B., Zennaro M. Derivation of efficient, continuous, explicit Runge – Kutta methods. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 1992, Vol. 13, pp. 1488–1501.
- [413] Ozisik M.N., Tzou D.Y. On the wave theory in heat conduction, *ASME J. Heat Transfer*, 1994, Vol. 116, No. 3, pp. 526–535.
- [414] Patade J., Bhalekar S. Analytical solution of pantograph equation with incommensurate delay. *Phys. Sci. Rev.*, 2017, Vol. 2, No. 9, 20165103.
- [415] Pan X., Shu H., Wang L., Wang X.-S. Dirichlet problem for a delayed diffusive hematopoiesis model. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2019, Vol. 48, pp. 493–516.
- [416] Pao C. Global asymptotic stability of Lotka – Volterra competition systems with diffusion and time delays. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2004, Vol. 5, No. 1, pp. 91–104.
- [417] Pao C.V. Numerical methods for systems of nonlinear parabolic equations with time delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, Vol. 240, No. 1, pp. 249–279.
- [418] Pao C.V. Finite difference reaction-diffusion systems with coupled boundary conditions and time delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, Vol. 272, pp. 407–434.
- [419] Paul C.A.H. Developing a delay differential equation solver. *Appl. Numer. Math.*, 1992, Vol. 9, pp. 403–414.
- [420] Paul C.A.H. Designing efficient software for solving delay differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 2000, Vol. 125, No. 1–2, pp. 287–295.
- [421] Peiraviminaei A., Ghoreishi F. Numerical solutions based on Chebyshev collocation method for singularly perturbed delay parabolic PDEs. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2014, Vol. 37, pp. 2112–2119.
- [422] Pike R., Sabatier P. (eds.). *Scattering: Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science, Vols. 1–2*. San Diego: Academic Press, 2002.
- [423] Pimenov V.G., Tashirova E.E. Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, Vol. 281, pp. s126–s136.
- [424] Piotrowska M.J., Forýš U. A simple model of carcinogenic mutations with time delay and diffusion. *Math. Biosci. Eng.*, 2013, Vol. 10, No. 3, pp. 861–872.
- [425] Polyanin A.D. Exact solutions to the Navier – Stokes equations with generalized separation of variables. *Doklady Physics*, 2001, Vol. 46, No. 10, pp. 726–731.
- [426] Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, Vol. 111, pp. 95–105.

- [427] Polyanin A.D. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions. *Mathematics*, 2019, Vol. 7, No. 5, 386.
- [428] Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear convection-diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2019, Vol. 73, pp. 379–390.
- [429] Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Applied Math. Comput.*, 2019, Vol. 347, pp. 282–292.
- [430] Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, 2019, Vol. 90, pp. 49–53.
- [431] Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein – Gordon type equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, Vol. 114, pp. 29–40.
- [432] Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 1, 90.
- [433] Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*. London: Taylor & Francis, 2002.
- [434] Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Boca Raton—London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
- [435] Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook of Integral Equations, 2nd ed.* Boca Raton: CRC Press, 2008.
- [436] Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.
- [437] Polyanin A.D., Shingareva I.K. Nonlinear problems with blow-up solutions: Numerical integration based on differential and nonlocal transformations, and differential constraints. *Appl. Math. Comput.*, 2018, Vol. 336, pp. 107–137.
- [438] Polyanin A.D., Shingareva I.K. Non-linear problems with non-monotonic blow-up solutions: Non-local transformations, test problems, exact solutions, and numerical integration. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2018, Vol. 99, pp. 258–272.
- [439] Polyanin A.D., Shingareva I.K. Application of non-local transformations for numerical integration of singularly perturbed boundary-value problems with a small parameter. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2018, Vol. 103, pp. 37–54.
- [440] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Lett.*, 2015, Vol. 46, pp. 38–43.
- [441] Polyanin A.D., Sorokin V.G. New exact solutions of nonlinear wave type PDEs with delay. *Appl. Math. Lett.*, 2020, Vol. 108, 106512.
- [442] Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. *J. Math. Anal. Appl.*, 2021, Vol. 494, No. 2, 124619.
- [443] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2021, Vol. 95, 105634.

-
- [444] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 5, 511.
- [445] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reductions and exact solutions of Lotka – Volterra and more complex reaction-diffusion systems with delays. *Appl. Math. Lett.*, 2022, Vol. 125, 107731.
- [446] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. Boca Raton – New York: CRC Press, 2003.
- [447] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
- [448] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton – London: CRC Press, 2018.
- [449] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, Vol. 54, pp. 115–126.
- [450] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, Vol. 19, No. 3, pp. 409–416.
- [451] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, Vol. 19, No. 3, pp. 417–430.
- [452] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein – Gordon equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, Vol. 19, No. 8, pp. 2676–2689.
- [453] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Lett.*, 2014, Vol. 37, pp. 43–48.
- [454] Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, Vol. 59, pp. 16–22.
- [455] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, Vol. 62, pp. 33–40.
- [456] Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, Vol. 67, pp. 267–277.
- [457] Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, Vol. 71, pp. 104–115.
- [458] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations. *Applied Math. Letters*, 2020, Vol. 100, 106055.
- [459] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*. Boca Raton: CRC Press, 2022.
- [460] Pospíšil M. Representation and stability of solutions of systems of functional differential equations with multiple delays. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equations*, 2012, No. 54, pp. 1–30.

- [461] Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. *Integrals and Series, Vol. 4, Direct Laplace Transform*. New York: Gordon & Breach, 1992.
- [462] Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. *Integrals and Series, Vol. 5, Inverse Laplace Transform*. New York: Gordon & Breach, 1992.
- [463] Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables. *Physica D*, 2000, Vol. 139, pp. 28–47.
- [464] Pucci E., Salvatori M.C. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1986, Vol. 21, pp. 147–155.
- [465] Pue-on P., Meleshko S.V. Group classification of second-order delay ordinary differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2010, Vol. 15, pp. 1444–1453.
- [466] Qu C.Z., Zhang S.L., Liu R.C. Separation of variables and exact solutions to quasilinear diffusion equations with the nonlinear source. *Physica D*, 2000, Vol. 144, pp. 97–123.
- [467] Quarteroni A., Valli A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Berlin: Springer, 2008.
- [468] Rach R. A convenient computational form for the Adomian polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 1984, Vol. 102, pp. 415–419.
- [469] Ramirez-Carrasco C., Molina-Garay J. Existence and approximation of traveling wavefronts for the diffusive Mackey – Glass equation. *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 2021, Vol. 18, No. 1, pp. 1–12.
- [470] Raslan K.R., Abu Sheer Z.F. Comparison study between differential transform method and Adomian decomposition method for some delay differential equations. *Int. J. Phys. Sci.*, 2013, Vol. 8, No. 17, pp. 744–749.
- [471] Rebenda J., Šmarda Z. A differential transformation approach for solving functional differential equations with multiple delays. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, Vol. 48, pp. 246–257.
- [472] Reutskiy S.Y. A new collocation method for approximate solution of the pantograph functional differential equations with proportional delay. *Appl. Math. Comput.*, 2015, Vol. 266, pp. 642–655.
- [473] Reyes E., Rodríguez F., Martín J.A. Analytic-numerical solutions of diffusion mathematical models with delays. *Comput. Math. Appl.*, 2008, Vol. 56, pp. 743–753.
- [474] Reyes E., Castro M.Á., Sirvent A., Rodríguez F. Exact solutions and continuous numerical approximations of coupled systems of diffusion equations with delay. *Symmetry*, 2020, Vol. 12, 1560.
- [475] Robinson R.W. Counting labeled acyclic digraphs. In: *New Directions in the Theory of Graphs* (ed. F. Harari), pp. 239–273. New York: Academic Press, 1973.
- [476] Rodríguez F., Roales M., Marín J.A. Exact solutions and numerical approximations of mixed problems for the wave equation with delay. *Appl. Math. Comput.*, 2012, Vol. 219, No. 6, pp. 3178–3186.
- [477] Roetzel W., Putra N., Das S.K. Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure. *Int. J. Thermal Sciences*, 2003, Vol. 42, No. 6, pp. 541–552.
- [478] Ruan S. Delay differential equations in single species dynamics. In: *Delay Differential Equations and Applications. NATO Science Series (II. Mathematics*,

- Physics and Chemistry*) (eds. Arino O., Hbid M., Dads E.A.), Vol. 205, pp. 477–517. Dordrecht: Springer, 2006.
- [479] Sakar M.G., Uludag F., Erdogan F. Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method. *Appl. Math. Model.*, 2016, Vol. 40, pp. 6639–6649.
- [480] Saker S.H. Oscillation and global attractivity of hematopoiesis model with delay time. *Appl. Math. Comput.*, 2003, Vol. 136, pp. 27–36.
- [481] Saker S.H. Oscillation of continuous and discrete diffusive delay Nicholson's blowflies models. *Appl. Math. Comput.*, 2005, Vol. 167, pp. 179–197.
- [482] Schmitt K. On solution of differential equations with deviating arguments. *SIAM J. Appl. Math.*, 1969, Vol. 17, pp. 1171–1176.
- [483] Schiesser W.E. *Time Delay ODE/PDE Models: Applications in Biomedical Science and Engineering*. Boca Raton: CRC Press, 2019.
- [484] Sedaghat S., Ordokhani Y., Dehghan M. Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2012, Vol. 17, pp. 4815–4830.
- [485] Sezer M., Akyüz-Daşcıoğlu A. A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *J. Comput. Appl. Math.*, 2007, Vol. 200, pp. 217–225.
- [486] Sezer M., Kaynak M. Chebyshev polynomial solutions of linear differential equation. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 1996, Vol. 27, No. 4, pp. 607–618.
- [487] Sezer M., Yalçınbaş S., Gülsu M. A Taylor polynomial approach for solving generalized pantograph equations with nonhomogeneous term. *Int. J. Comput. Math.*, 2008, Vol. 85, No. 7, pp. 1055–1063.
- [488] Sezer M., Yalçınbaş S., Sahin N. Approximate solution of multi-pantograph equation with variable coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, 2008, Vol. 214, pp. 406–416.
- [489] Shakeri F., Dehghan M. Application of the decomposition method of Adomian for solving the pantograph equation of order m . *Z. Naturforsch.*, 2010, Vol. 65a, pp. 453–460.
- [490] Shampine L.F. Interpolation for Runge—Kutta methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1985, Vol. 22, pp. 1014–1026.
- [491] Shampine L.F., Gahinet P. Delay-differential-algebraic equations in control theory. *Appl. Numer. Math.*, 2006, Vol. 56, No. 3–4, pp. 574–588.
- [492] Shampine L.F., Thompson S. Solving DDEs in Matlab. *Appl. Numer. Math.*, 2001, Vol. 37, No. 4, pp. 441–458.
- [493] Shampine L.F., Thompson S. Numerical Solution of Delay Differential Equations. In: *Delay Differential Equations*. Boston: Springer, 2009.
- [494] Smith F.E. Population dynamics in *Daphnia magna*. *Ecology*, 1963, Vol. 44, pp. 651–663.
- [495] Smith H.L. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. New York: Springer, 2010.
- [496] Smith H.L., Zhao X.Q. Global asymptotic stability of travelling waves in delayed reaction-diffusion equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 2000, Vol. 31, pp. 514–534.
- [497] So J.W.-H., Yu J.S. Global attractivity and uniform persistence in Nicholson's blowflies. *Differ. Equations Dynam. Syst.*, 1994, Vol. 2, No. 1, pp. 11–18.

- [498] So J.W.-H., Yu J.S. On the uniform stability for a 'food-limited' population model with time delay. *Proc. Roy. Soc. Edin. A*, 1995, Vol. 125, pp. 991–1002.
- [499] So J.W.-H., Yang Y. Dirichlet problem for the diffusive Nicholson's blowflies equation. *J. Differ. Equations*, 1998, Vol. 150, pp. 317–348.
- [500] So J.W.-H., Zou X. Traveling waves for the diffusive Nicholson's blowflies equation. *Appl. Math. Comput.*, 2001, Vol. 122, No. 3, pp. 385–392.
- [501] Sokal A. Roots of a formal power series, with applications to graph enumeration and q -series, 2011; <http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/csgnotes/sokal/>.
- [502] Solodushkin S.I., Yumanova I.F., Staelen R.D. First-order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable. *J. Comput. Appl. Math.*, 2015, Vol. 289, pp. 322–330.
- [503] Song O.K., Cao J.D. Global exponential stability and existence of periodic solutions in BAM networks with delays and reaction diffusion terms. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, Vol. 23, No. 2, pp. 421–430.
- [504] Sophocleous C., Kingston J.G. Cyclic symmetries of one-dimensional non-linear wave equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1999, Vol. 34, pp. 531–543.
- [505] Sorokin V.G., Polyanin A.D. Nonlinear partial differential equations with delay: linear stability/instability of solutions, numerical integration. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, Vol. 1205, 012053.
- [506] Stépán G. *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*. New York: Longman Scientific & Technical, 1989.
- [507] Stuart A.M., Floater M.S. On the computation of blow-up. *Eur. J. Appl. Math.*, 1990, Vol. 1, No. 1, pp. 47–71.
- [508] Su Y., Wei J., Shi J. Hopf bifurcation in a reaction-diffusion population model with delay effect. *J. Differ. Equations*, 2009, Vol. 247, pp. 1156–1184.
- [509] Suarez M.J., Schopf P.S. A delayed action oscillator for ENSO. *J. Atmos. Sci.*, 1988, Vol. 45, pp. 3283–3287.
- [510] Sun G.Q., Wang S.L., Ren Q., Jin Z., Wu Y.-P. Effects of time delay and space on herbivore dynamics: linking inducible defenses of plants to herbivore outbreak. *Sci. Rep.*, 2015, Vol. 5, 11246.
- [511] Sun Z.Z. On the compact difference scheme for heat equation with Neumann boundary conditions. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 2009, Vol. 25, pp. 1320–1341.
- [512] Sun Z., Zhang Z. A linearized compact difference scheme for a class of nonlinear delay partial differential equations. *Appl. Math. Model.*, 2013, Vol. 37, pp. 742–752.
- [513] Takeuchi Y., Ma W., Beretta E. Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times. *Nonlinear Anal.*, 2000, Vol. 42, pp. 931–947.
- [514] Tang C., Zhang C. A fully discrete θ -method for solving semi-linear reaction-diffusion equations with time-variable delay. *Math. Comput. Simul.*, 2021, Vol. 179, pp. 48–56.
- [515] Tanthanuch J. Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2012, Vol. 17, 4978–4987.
- [516] Tanthanuch J., Meleshko S.V. Application of Group Analysis to Delay Differential Equation. In: *Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21st Century* (eds. Rudenko O.V., Sapozhnikov O.A.), pp. 607–610. Moscow: MSU, 2002.

- [517] Tanthanuch J., Meleshko S.V. On definition of an admitted Lie group for functional differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2004, Vol. 9, pp. 117–125.
- [518] Tohidi E., Bhrawy A.H., Erfani K. A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation. *Appl. Math. Model.*, 2013, Vol. 37, pp. 4283–4294.
- [519] Trofimchuk E., Tkachenko V., Trofimchuk S. Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction–diffusion equation with delay. *J. Differ. Equations*, 2008, Vol. 245, pp. 2307–2332.
- [520] Trofimchuk E., Pinto M., Trofimchuk S. Traveling waves for a model of the Belousov – Zhabotinsky reaction. *J. Differ. Equations*, 2013, Vol. 254, pp. 3690–3714.
- [521] Tzou D.Y. *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior*. Washington: Taylor & Francis, 1997.
- [522] Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. Some applications of the Lambert W function to physics. *Can. J. Phys.*, 2000, Vol. 78, No. 9, pp. 823–831.
- [523] Van Brunt B., Wake G.C. A Mellin transform solution to a second-order pantograph equation with linear dispersion arising in a cell growth model. *Eur. J. Appl. Math.*, 2011, Vol. 22, No. 2, pp. 151–168.
- [524] Van Brunt B., Zaidi A.A., Lynch T. Cell division and the pantograph equation. *ESAIM Proc. Surveys*, 2018, Vol. 62, pp. 158–167.
- [525] Vandewalle S., Gander M.J. Optimized overlapping Schwarz methods for parabolic PDEs with time-delay. In: *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*. Springer, Berlin, 2005, pp. 291–298.
- [526] Veberic D. Lambert W function for applications in physics. *Computer Physics Communications*, 2012, Vol. 183, No. 12, pp. 2622–2628.
- [527] Vedavarz A., Kumar S., Moallemi M.K. Significance of non-Fourier heat waves in conduction. *ASME J. Heat Transfer*, 1994, Vol. 116, No. 1, pp. 221–224.
- [528] Verblunsky S. On a class of differential-difference equations. *Proc. London Math. Soc.*, 1956, Vol. s3–6, No. 3, pp. 355–365.
- [529] Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. *Comptes Rendus*, 1958, Vol. 246, pp. 3154–3155.
- [530] Vernotte P. Some possible complications in the phenomena of thermal conduction. *Comptes Rendus*, 1961, Vol. 252, pp. 2190–2191.
- [531] Villasana M., Radunskaia A. A delay differential equation model for tumor growth. *J. Math. Biol.*, 2003, Vol. 47, pp. 270–294.
- [532] Vladimirov A., Turaev D. Model for passive mode locking in semiconductor lasers. *Phys. Rev. A*, 2005, Vol. 72, 033808.
- [533] Wan P., Sun D., Chen D., Zhao M., Zheng L. Exponential synchronization of inertial reaction-diffusion coupled neural networks with proportional delay via periodically intermittent control. *Neurocomputing*, 2019, Vol. 356, pp. 195–205.
- [534] Wan A., Wei J. Hopf bifurcation analysis of a food-limited population model with delay. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2010, Vol. 11, pp. 1087–1095.
- [535] Wang P.K.C. Asymptotic stability of a time-delayed diffusion system. *J. Appl. Mech.*, 1963, Vol. 30, pp. 500–504.

- [536] Wang X., Li Z. Dynamics for a type of general reaction-diffusion model. *Nonlinear Analysis*, 2007, Vol. 67, pp. 2699–2711.
- [537] Wang J., Meng F., Liu S. Interval oscillation criteria for second order partial differential equations with delays. *J. Comput. Appl. Math.*, 2008, Vol. 212, No. 2, pp. 397–405.
- [538] Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays. *Physics Letters A*, 2006, Vol. 350, pp. 342–348.
- [539] Wang K., Wang W. Propagation of HBV with spatial dependence. *Math. Biosci.*, 2007, Vol. 210, pp. 78–95.
- [540] Wang Z.-Q., Wang L.-L. A Legendre—Gauss collocation method for nonlinear delay differential equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2010, Vol. 13, No. 3, pp. 685–708.
- [541] Wang K., Wang W., Song S. Dynamics of an HBV model with diffusion and delay. *J. Theor. Biol.*, 2008, Vol. 253, pp. 36–44.
- [542] Wang L., Zhang C. Zeros of the deformed exponential function. *Adv. Math.*, 2018, Vol. 332, pp. 311–348.
- [543] Wang X., Zhang H., Li Z. X. Oscillation for a class of diffusive hematopoiesis model with several arguments. *Acta Math. Sin. Eng. Ser.*, 2012, Vol. 28, No. 11, pp. 2345–2354.
- [544] Wazwaz A.M., Raja M.A.Z., Syam M.I. Reliable treatment for solving boundary value problems of pantograph delay differential equation. *Rom. Rep. Phys.*, 2017, Vol. 69, 102.
- [545] Wei J., Li M. Hopf bifurcation analysis in a delayed Nicholson blowflies equation. *Nonlinear Anal.*, 2005, Vol. 60, No. 7, pp. 1351–1367.
- [546] Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations. *J. Math. Phys.*, 1983, Vol. 24, No. 3, pp. 522–526.
- [547] Weiss J. The Painlevé property for partial differential equations. II: Bäcklund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative. *J. Math. Phys.*, 1983, Vol. 24, No. 6, pp. 1405–1413.
- [548] Weiss S. On the controllability of delay-differential systems. *SIAM J. Control*, 1967, Vol. 5, No. 4, pp. 575–587.
- [549] Weisstein E.W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2nd ed., Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [550] Welfert B.D. *Generation of pseudospectral differentiation matrices I*. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1997, Vol. 34, pp. 1640–1657.
- [551] Willé D.R., Baker C.T.H. The tracking of derivative discontinuities in systems of delay-differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 1992, Vol. 9, No. 3–5, pp. 209–222.
- [552] Willé D.R., Baker C.T.H. DELSOL—a numerical code for the solution of systems of delay differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 1992, Vol. 9, pp. 223–234.
- [553] Winitzki S. Uniform approximations for transcendental functions. In: *Computational Science and Its Applications — ICCSA 2003* (eds. Kumar V., Gavrilova M.L., Kenneth Tan C.J., L’Ecuyer P.); Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2667, pp. 780–789. Berlin—Heidelberg: Springer, 2003.

-
- [554] Wolfram Language Documentation // The Numerical Method of Lines. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDsolveMethodOfLines.html> (accessed: 27.12.2021).
- [555] Wolfram Language Documentation // NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/ref/NDsolve.html> (accessed: 27.12.2021).
- [556] Wolfram Language Documentation // Delay Differential Equations. URL: <http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NDsolveDelayDifferentialEquations.html> (accessed: 27.12.2021).
- [557] Wolfram Language Documentation // “ExplicitRungeKutta” Method for NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDsolveExplicitRungeKutta.html> (accessed: 27.12.2021).
- [558] Wolfram Language Documentation // “ImplicitRungeKutta” Method for NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDsolveImplicitRungeKutta.html> (accessed: 27.12.2021).
- [559] Wolfram Language Documentation // IDA Method for NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDsolveIDAMethod.html> (accessed: 27.12.2021).
- [560] Wolfram Language Documentation // Norms in NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDsolveVectorNorm.html> (accessed: 27.12.2021).
- [561] Wolfram Language Documentation // Numerical Solution of Differential Equations. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NumericalSolutionOfDifferentialEquations.html> (accessed: 27.12.2021).
- [562] Wolfram Language Documentation // FindRoot. URL: <http://reference.wolfram.com/language/ref/FindRoot.html> (accessed: 27.12.2021).
- [563] Wright E.M. A non-linear difference-differential equation. *J. Reine Angew. Math.*, 1955, Vol. 194, pp. 66–87.
- [564] Wright E.M. Solution of the equation $ze^z = a$. *Proc. R. Soc. Edinb.*, 1959, Vol. 65, pp. 193–203.
- [565] Wu J. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [566] Wu J.H. *Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission Delay*, Berlin: de Gruyter, 2002.
- [567] Wu J., Campbell S. A., Bélair J. Time-delayed neural networks: stability and oscillations. In: *Encyclopedia of Computational Neuroscience*, pp. 2966–2972. New York: Springer, 2015.
- [568] Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. *J. Dynamics & Differ. Equations*, 2001, Vol. 13, No. 3, pp. 651–687.
- [569] Wu F., Wang Q., Cheng X., Chen X. Linear θ -method and compact θ -method for generalised reaction-diffusion equation with delay. *Int. J. Differ. Equations*, 2018, Vol. 2018, 6402576.
- [570] Wang K., Teng Z., Jiang H. Global exponential synchronization in delayed reaction-diffusion cellular neural networks with the Dirichlet boundary conditions. *Math. Comput. Model.*, 2010, Vol. 52, pp. 12–24.
- [571] Xiaoxin L., Xiaojun W. Stability for differential-difference equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, Vol. 174, pp. 84–102.

- [572] Xu Z. Traveling waves in a Kermack — Mckendrick epidemic model with diffusion and latent period. *Nonlinear Anal.*, 2014, Vol. 111, pp. 66–81.
- [573] Xu R., Ma Z.E. An HBV model with diffusion and time delay. *J. Theor. Biol.* 2009, Vol. 257, pp. 499–509.
- [574] Xu Y., Liu M. H-stability of Runge — Kutta methods with general variable stepsize for pantograph equation. *Appl. Math. Comput.*, 2004, Vol. 148, pp. 881–892.
- [575] Yalçınbaş S., Aynigül M., Sezer M. A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations. *J. Franklin Inst.*, 2011, Vol. 348, pp. 1128–1139.
- [576] Yang Y., So J.W.-H. Dynamics for the diffusive Nicholson blowflies equation. In: *Dynamical Systems and Differential Equations* (eds. Chen W., Hu S.), Vol. 2, pp. 333–352. Springfield, MO: Southwest Missouri State University, 1998.
- [577] Yang J., Liang S., Zhang Yi. Travelling waves of a delayed SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and spatial diffusion. *PLoS ONE*, 2011, Vol. 6, No. 6, e21128.
- [578] Yang X., Song Q., Cao J., Lu J. Synchronization of coupled Markovian reaction–diffusion neural networks with proportional delays via quantized control. *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, 2019, Vol. 30, No. 3, pp. 951–958.
- [579] Yang Z., Xu D. Global dynamics for non-autonomous reaction-diffusion neural networks with time-varying delays. *Theor. Comput. Sci.*, 2008, Vol. 403, pp. 3–10.
- [580] Yang C. Modified Chebyshev collocation method for pantograph-type differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 2018, Vol. 134, pp. 132–144.
- [581] Yi T., Zou X. Global attractivity of the diffusive Nicholson blowflies equation with Neumann boundary condition: A non-monotone case. *F. Differ. Equations*, 2008, Vol. 245, pp. 3376–3388.
- [582] Yi S., Nelson P.W., Ulsoy A.G. *Time-Delay Systems: Analysis and Control Using the Lambert W Function*. Singapore: World Scientific, 2010.
- [583] Yuanhong Yu. Stability criteria for linear second order delay differential systems. *Acta Math. Appl. Sinica*, 1988, Vol. 4, pp. 109–112.
- [584] Yusufoglu E. An efficient algorithm for solving generalized pantograph equations with linear functional argument. *Appl. Math. Comput.*, 2010, Vol. 217, pp. 3591–3595.
- [585] Yüzbaşı S., Şahin N., Sezer M. A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 2011, Vol. 28, pp. 1105–1123.
- [586] Yüzbaşı S., Sezer M. An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations. *Appl. Math. Model.*, 2013, Vol. 37, pp. 9160–9173.
- [587] Zaidi A.A., Van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type. *Proc. R. Soc. A.*, 2015, Vol. 471, 20140947.
- [588] Zaikin A.N., Zhabotinsky A.M. Concentration wave propagation in two-dimensional liquid-phase self-oscillating system. *Nature*, 1970, Vol. 225, pp. 535 – 537.
- [589] Zaitsev V.F., Polyanin A.D. Exact solutions and transformations of nonlinear heat and wave equations. *Doklady Math.*, 2001, Vol. 64, No. 3, pp. 416–420.

-
- [590] Zennaro M. Natural continuous extensions of Runge—Kutta methods. *Math. Comp.*, 1986, Vol. 46, pp. 119–133.
- [591] Zennaro M. P-stability properties of Runge—Kutta methods for delay differential equations. *Numer. Math.*, 1986, Vol. 49, pp. 305–318.
- [592] Zhang F., Zhang Y. State estimation of neural networks with both time-varying delays and norm-bounded parameter uncertainties via a delay decomposition approach. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2013, Vol. 18, No. 12, pp. 3517–3529.
- [593] Zhang G.-B. Asymptotics and uniqueness of traveling wavefronts for a delayed model of the Belousov—Zhabotinsky reaction, *Applicable Analysis*, 2020, Vol. 99, No. 10, pp. 1639–1660.
- [594] Zhang S.L., Lou S.Y., Qu C.Z. New variable separation approach: Application to nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, Vol. 36, pp. 12223–12242.
- [595] Zhang W., Fan M. Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays. *Math. Comput. Model.*, 2004, Vol. 39, No. 4–5, pp. 479–493.
- [596] Zhang Q., Li D., Zhang C., Xu D. Multistep finite difference schemes for the variable coefficient delay parabolic equations. *J. Differ. Equations Appl.*, 2016, Vol. 22, No. 6, pp. 745–765.
- [597] Zhang Y., Xu Z. Dynamics of a diffusive HBV model with delayed Beddington—DeAngelis response. *Nonlinear Anal: Real World Appl.*, 2014, Vol. 15, pp. 118–139.
- [598] Zhang Q., Zhang C. A new linearized compact multisplitting scheme for the nonlinear convection-reaction-diffusion equations with delay. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2013, Vol. 18, No. 12, pp. 3278–3288.
- [599] Zhao H. Exponential stability and periodic oscillatory of bidirectional associative memory neural network involving delays. *Neurocomputing*, 2006, Vol. 69, pp. 424–448.
- [600] Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. *J. Phys. A*, 1994, Vol. 27, pp. L291–L297.
- [601] Zhu C.-C., Zhu J. Dynamic analysis of a delayed COVID-19 epidemic with home quarantine in temporal-spatial heterogeneous via global exponential attractor method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, Vol. 143, 110546.
- [602] Zhurov A.I., Polyanin A.D. Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein—Gordon and telegraph type equations. *J. Nonlinear Math. Physics*, 2020, Vol. 27, No. 2, pp. 227–242.
- [603] Zubik-Kowal B. Delay partial differential equations. *Scholarpedia*, 2008, 3(4): 2851.
- [604] Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations*, 3rd ed. New York: Academic Press, 1997.

Научное издание

ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич
СОРОКИН Всеволод Григорьевич
ЖУРОВ Алексей Иванович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

СВОЙСТВА, МЕТОДЫ, РЕШЕНИЯ И МОДЕЛИ

Оригинал-макет: А.И. Журов, А.Д. Полянин

Формат 70х100/16.

Гарнитура «Times New Roman». Печать цифровая.

Учетн. печ. л. 34,3. Тираж 300 экз.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН)
119526 Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1
<http://www.ipmnet.ru/>

Отпечатано в типографии «Элис Групп»
105094, г. Москва, Семеновская Набережная, д. 3/1, корп. 6
<http://www.alice-group.ru/>

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ



СВОЙСТВА, МЕТОДЫ, РЕШЕНИЯ И МОДЕЛИ

А. Д. ПОЛЯНИН, В. Г. СОРОКИН, А. И. ЖУРОВ

Книга посвящена линейным и нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям в частных производных с постоянным и переменным запаздыванием. Рассмотрены качественные особенности дифференциальных уравнений с запаздыванием и сформулированы типичные постановки задач. Описаны точные, приближенные аналитические и численные методы решения таких уравнений, включая метод шагов, методы интегральных преобразований, метод регулярного разложения по малому параметру, метод сращиваемых асимптотических разложений, методы итерационного типа, метод разложения Адомиана, метод коллокаций, проекционные методы типа Галеркина, методы Эйлера и Рунге — Кутты, метод стрельбы, метод прямых, конечно-разностные методы для УрЧП, методы обобщенного и функционального разделения переменных, метод функциональных связей, метод порождающих уравнений и др. Изложение теоретического материала сопровождается примерами практического применения методов для получения искомых решений. Построены точные решения ряда нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнений общего вида с запаздыванием, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Дан обзор наиболее распространенных математических моделей с запаздыванием, используемых в теории популяций, биологии, медицине и других приложениях. В целом в книгу включено много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался.

Для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, математической физики, вычислительной математики, механики, теории управления, биологии, медицины, химической технологии, экологии и экономики. Отдельные разделы книги и примеры могут быть использованы в курсах лекций по прикладной математике, математической физике и дифференциальным уравнениям, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

