СПРАВОЧНИК
ПО ВЕРОЯТНОСТНЫМ РАСЧЕТАМ

Г. Г. АБЕЗГАУЗ, А. П. ТРОНЬ,
Ю. Н. КОПЕНКИН, И. А. КОРОВИНА

СПРАВОЧНИК ПО ВЕРОЯТНОСТНЫМ РАСЧЕТАМ

Издание второе, дополненное и исправленное

Ордена Трудового Красного Знамени
ВОЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ОБОРОНЫ СССР
МОСКВА — 1970

355.75(083)
С74

УДК(031)519(083.3) : 355/359

С74 **Справочник** по вероятностным расчетам. М., Воениздат, 1970.

536 с. с илл. 40 000 экз. 1 р. 52 к.

Перед загл. авт.: Г. Г. Абезгауз, канд. физ.-матем. наук, А. П. Тронь, канд. техн. наук, Ю. Н. Копенкин, канд. техн. наук, И. А. Коровина, инженер. Авт. на обл. не указаны.

Содержит справочный материал и таблицы для вероятностных расчетов в различных областях науки и техники. Основное внимание уделяется расчету и правилам действия с вероятностями событий, распределениям дискретных и непрерывных случайных величин и действиям с ними, применению аппарата случайных функций и технике статистических расчетов.

Предназначен для занимающихся вероятностными расчетами и заинтересованных в получении готовых формул и рекомендаций, может быть полезен лицам, формулирующим практические вероятностные задачи.

1-12-4-8
164—69

355.75(083)

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В наши дни трудно найти научную или техническую область, которая в той или иной степени не пользовалась бы методами теории вероятностей и математической статистики. Круг людей, соприкасающихся с практическим применением этих наук, становится все шире. Растет потребность в руководствах, из которых можно было бы извлечь нужную справку, почерпнуть полезный совет и найти нужную и удобную для расчетов таблицу.

Предлагаемый Справочник предназначен именно для этой цели и является попыткой удовлетворить хотя бы самые первые запросы людей, имеющих дело с вероятностными расчетами.

Первое издание Справочника вышло в 1966 г. и быстро разошлось. В предлагаемом втором издании учтены замечания и пожелания читателей: введены разделы, касающиеся случайных функций и техники статистических расчетов, увеличено число рассматриваемых распределений и число таблиц. Материал первого издания частично переработан.

Несмотря на некоторое расширение объема Справочника, он не может претендовать на исчерпывающий охват всех интересующих практика разделов теории вероятностей. Авторы наибольшее внимание уделили основным закономерностям и тем вопросам, которые в меньшей степени систематизированы в известных пособиях. Обстоятельное изложение вопросов, интересующих читателя, он может найти в литературе, список которой приложен в конце Справочника. Этот список не следует рассматривать как перечень использованной авторами литературы.

Много внимания в Справочнике уделено различным практическим приемам, приближенным выражениям и указаниям на возможные ошибки как в тексте разных разделов, так и в специальной главе (гл. 15). Справочник содержит большое число примеров из различных областей человеческой деятельности, хотя главное внимание в них уделено военным аспектам.

Равноправной частью справочника являются таблицы, придающие Справочнику вполне самостоятельный характер в том смысле, что многие расчеты могут быть выполнены без привлечения других руководств и сборников таблиц. Большинство таблиц достаточно подробны; это позволяет в практических расчетах обходиться без интерполяции, что экономит время и спасает от многих ошибок.

Предлагаемые таблицы, как правило, четырехзначные. Такой выбор числа знаков обусловлен тем, что в практике исходные данные для вероятностных расчетов обычно содержат не более двух-трех верных знаков, а четырехзначные таблицы обеспечивают сохранение этой точности в процессе вычислений.

При написании Справочника авторы использовали изданные за последние годы учебники и практические руководства по теории вероятностей и математической статистике, а также отдельные статьи. Поскольку терминология и обозначения в указанных работах не едины, авторы избрали наиболее употребительные термины, стараясь приводить и другие встречающиеся названия.

Чтобы избежать путаницы и добиться наибольшей краткости изложения, было признано целесообразным для каждого типа распределений применять специальные обозначения. Разумеется, они не являются обязательными и не исключают применения других обозначений, в частности, более кратких.

Справочник рассчитан в первую очередь на лиц, занимающихся вероятностными расчетами и заинтересованных в получении готовых формул и рекомендаций. Вместе с тем авторы стремились учесть и интересы лиц, которым приходится формулировать практические задачи в терминах теории вероятностей и подыскивать для них подходящие способы решения. Во втором издании приведен необходимый при обработке наблюдений минимум сведений по математической статистике.

Для пользования Справочником требуются начальное знакомство с основными положениями теории вероятностей и математические знания в объеме, не превышающем обычного втузовского курса. В отдельных местах приведены необходимые пояснения.

Главы 5—7, 13—14 и 16 написаны кандидатом физико-математических наук Абезгаузом Г. Г., главы 1—4 и 8—12 — кандидатом технических наук Тронем А. П., глава 15 написана ими совместно. Таблицы I—III, IX и XII—XVI составлены Абезгаузом Г. Г., таблицы VI—VIII — Тронем А. П., таблицы IV, V и XVII — Коровиной И. А., таблица XI — кандидатом технических наук Копенкиным Ю. Н., таблица X — Копенкиным Ю. Н. и Коровиной И. А. Иллюстрации выполнены Коровиной И. А.

Авторы выражают глубокую признательность профессору, доктору технических наук Е. С. Вентцель и кандидату технических наук Ю. М. Белоусову за тщательный просмотр рукописи и весьма полезные критические замечания и советы. Авторы искренне благодарны профессору, доктору технических наук, заслуженному деятелю науки и техники А. А. Свешникову, доктору физико-математических наук А. М. Кагану и кандидату технических наук Л. Б. Комарову за ценные рекомендации. Авторы приносят также благодарность Е. А. Серовой, Т. П. Голиковой и Е. В. Заболотней, которые выполнили значительную работу по расчету таблиц.

Авторы будут весьма благодарны всем, кто сообщит свои замечания по содержанию Справочника по адресу: Москва, К-160, Военное издательство.

РАЗДЕЛ I
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Глава 1
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЯХ. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЕРОЯТНОСТЯМИ СОБЫТИЙ

§ 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ СОБЫТИЙ. РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Событие — всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Физический процесс, в ходе которого осуществляются (или не осуществляются) события, называют *опытом*. Известные существующие объективно или специально создаваемые экспериментатором события, влияющие на ход опыта, называются *условиями*. События, которые могут произойти в опыте, называются *исходами*. Условия опыта вместе с множеством возможных исходов составляют *испытание*.

Помимо известных событий, влияющих на ход опыта, существует много неизвестных, обусловливающих случайность исходов опыта. Такие события в понятие условий не включаются.

Событие, которое в определенных условиях:

— происходит обязательно, называется *достоверным*;

— не может произойти, называется *невозможным*;

— может произойти, но может и не произойти, называется *случайным*.

Числовой характеристикой степени возможности появления события в тех или иных условиях, которые могут повторяться неограниченное число раз, является *вероятность*. О вероятности появления того или иного события можно говорить только в рамках определенного испытания.

Вероятность осуществления события A или, короче, вероятность события A обозначим $P\{A\}$.

Вероятность достоверного события равна единице, невозможного события — нулю. Для случайного события A справедливо неравенство $0 \leqslant P\{A\} \leqslant 1$.

Замечание. Если известно, что событие A достоверно, то его вероятность равна единице. В то же время равенство $P\{B\}=1$ еще не означает, что событие B достоверно. Оно лишь означает, что случайное событие B практически всегда происходит в данных условиях. Аналогичное замечание можно сделать и по поводу равенства $P\{B\}=0$. Поэтому вероятность случайного события заключена в пределах $0 \leqslant P\{A\} \leqslant 1$, а не в пределах $0 < P\{A\} < 1$ (см. также замечание на стр. 45).

Пример 1.1.1. Предположим, что проводится стрельба по мишени и известно, что точки попадания распределены по некоторому двумерному непрерывному (например, нормальному) закону распределения (§ 6.1).

Если пренебречь размерами пули, то вероятность ее попадания в определенную точку мишени, например в центр, будет равна нулю. Вместе с тем это событие возможное.

Если в данном опыте появление события A исключает возможность появления события B, то такие события называются *несовместными.* Если же в данном опыте при осуществлении события A возможно также и осуществление события B, то такие события называются *совместными* (иногда применяются термины «совместимые» и «несовместимые» события).

Событие $\bar{A}$, состоящее в том, что событие A в опыте не осуществляется, называется *противоположным* для события A. Вероятности противоположных событий связаны соотношением

$$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}. \tag{1.1.1}$$

Если вероятность осуществления одного события не зависит от того, осуществилось или нет другое событие, то такие события называются *независимыми*, в противном случае события называются *зависимыми.*

Замечание. Понятия зависимости и совместности характеризуют разные свойства событий, и их нельзя путать. Несовместные события зависимы. Совместные события могут быть как зависимыми, так и независимыми.

Вероятность осуществления события A при условии, что произошло событие B, обозначается $P\{A \mid B\}$ и называется *условной вероятностью события* A.

Если события A и B независимы, то $P\{A \mid B\} = P\{A \mid \overline{B}\} = P\{A\}$ и $P\{B \mid A\} = P\{B \mid \overline{A}\} = P\{B\}$.

Степень зависимости событий измеряется *коэффициентами регрессии* и *корреляции*:

— коэффициент регрессии события B относительно события A:

$$\rho(B, A) = \boldsymbol{P}\{B \mid A\} - \boldsymbol{P}\{B \mid \overline{A}\} = \\ = \frac{\boldsymbol{P}\{AB\} - \boldsymbol{P}\{A\}\boldsymbol{P}\{B\}}{\boldsymbol{P}\{A\}\boldsymbol{P}\{\overline{A}\}}; \qquad (1.1.2)$$

— коэффициент регрессии события A относительно события B:

$$\rho(A, B) = \boldsymbol{P}\{A \mid B\} - \boldsymbol{P}\{A \mid \overline{B}\}; \qquad (1.1.3)$$

— коэффициент корреляции событий A и B:

$$r(A, B) = \sqrt{\rho(A, B)\,\rho(B, A)} = \\ = \frac{\boldsymbol{P}\{AB\} - \boldsymbol{P}\{A\}\boldsymbol{P}\{B\}}{\sqrt{\boldsymbol{P}\{A\}\boldsymbol{P}\{\overline{A}\}\boldsymbol{P}\{B\}\boldsymbol{P}\{\overline{B}\}}}. \qquad (1.1.4)$$

Коэффициенты регрессии и корреляции по абсолютной величине не превосходят единицы и для независимых событий обращаются в нуль.

Полезно знать следующие свойства коэффициента корреляции:

1) $r(\overline{A}, B) = r(A, \overline{B}) = -r(A, B)$; $r(\overline{A}, \overline{B}) = r(A, B)$;

2) коэффициент корреляции эквивалентных событий равен единице; наоборот, если $r(A, B) = 1$, то события A и B эквивалентны;

3) для противоположных событий коэффициент корреляции обращается в -1: $r(A, \overline{A}) = -1$.

Пример 1.1.2. На самолете-разведчике установлены два средства обнаружения кораблей. В ходе испытаний было проделано 200 независимых наблюдений. При этом корабль был обнаружен:

— только первым средством 26 раз;

— только вторым средством 38 раз;

— обоими средствами 55 раз.

Определить степень зависимости события A — обнаружения корабля первым средством и события B — обнаружения корабля вторым средством.

В соответствии с рекомендациями § 2.1:

$$P\{A\} = \frac{26+55}{200} = 0{,}405; \quad P\{B\} = \frac{38+55}{200} = 0{,}465;$$

$$P\{AB\} = \frac{55}{200} = 0{,}275.$$

Коэффициент корреляции событий A и B определяем по формуле (1.1.4): $r = 0{,}355$.

Следовательно, между наблюдениями обоих средств существует зависимость, хотя и не очень сильная.

§ 1.2. СЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТИ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

Некоторые события, называемые *сложными*, могут быть представлены в виде различных комбинаций других событий, называемых в этом случае *элементарными*.

Наиболее простыми комбинациями, к которым сводятся и другие, являются произведение и сумма событий.

Произведением событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется сложное событие, состоящее в том, что происходит и событие $A_1, \ldots,$ и событие A_n (осуществляются *все* события).

Произведение событий обозначается $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

Суммой событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется сложное событие, состоящее в том, что происходит либо событие $A_1, \ldots,$ либо событие A_n (осуществляется *хотя бы одно* из событий). Сумма событий обозначается $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$.

Замечание. Во многих работах произведение событий называется *пересечением* или *совмещением* и обозначается

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, а сумма событий называется *объединением* и обозначается $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Вероятность произведения событий $A_1, \ldots, A_n$ может быть определена по одной из следующих формул

$$P\left\{\prod_{i=1}^{n} A_i\right\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2 \mid A_1\} \cdot P\{A_3 \mid A_1 \cdot A_2\} \times$$

$$\times \ldots \times P\{A_n \mid A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}\}; \qquad (1.2.1)$$

$$P\left\{\prod_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P\{A_i + A_j\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P\{A_i + A_j + A_k\} -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} P\left\{\sum_{i=1}^{n} A_i\right\}; \qquad (1.2.2)$$

$$P\left\{\prod_{i=1}^{n} A_i\right\} = 1 - P\left\{\sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right\}. \qquad (1.2.3)$$

События называются *независимыми в совокупности*, если любые суммы, составленные из этих событий, независимы. Для независимых в совокупности событий

$$P\left\{\prod_{i=1}^{n} A_i\right\} = \prod_{i=1}^{n} P\{A_i\}. \qquad (1.2.4)$$

Вероятность суммы конечного числа событий определяется по одной из следующих формул:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P\{A_i \cdot A_j\} + \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P\{A_i \cdot A_j \cdot A_k\} - \ldots + (-1)^{n-1} P\left\{\prod_{i=1}^{n} A_i\right\}; \qquad (1.2.5)$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} A_i\right\} = 1 - P\left\{\prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right\}. \qquad (1.2.6)$$

События называются *несовместными в совокупности*, если появление одного события исключает появление других событий. Для несовместных в совокупности событий

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\}. \qquad (1.2.7)$$

Приведенные формулы справедливы и для условных вероятностей, если все вероятности элементарных событий вычислены при одном и том же условии. Так, формула (1.2.7) для условных вероятностей имеет вид

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} A_i \mid B\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i \mid B\}. \qquad (1.2.8)$$

Вероятность суммы счетного * множества событий (если она существует) выражается аналогичными формулами при $n=\infty$.

* Счетным множеством называют такое бесконечное множество, элементы которого можно занумеровать посредством натуральных чисел.

Примеры на применение формул (1.2.1)—(1.2.7) приведены в § 2.4.

§ 1.3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМА ГИПОТЕЗ

Если исходами опыта могут быть несовместные в совокупности события $A_1, A_2, \ldots$ и только эти события, то последние образуют *исчерпывающее множество* (или полную группу) событий, и для них справедливо соотношение *

$$\sum P\{A_i\} = 1. \tag{1.3.1}$$

Если всякий раз, как осуществляется событие A, осуществляется и событие B, то говорят, что событие B есть следствие события A или что из события A вытекает событие B (обозначение: $A \subset B$ или $B \supset A$). Для таких событий справедливо неравенство $P\{A\} \leqslant P\{B\}$.

События называются эквивалентными, если одновременно выполняются условия $A \subset B$ и $A \supset B$.

Пример 1.3.1. Если по цели произведен один выстрел снарядом ударного действия, то из факта ее поражения (событие A) следует, что в цель достигнуто попадание (событие B). Поэтому вероятность попадания в цель не меньше вероятности ее поражения $P\{A\} \leqslant P\{B\}$.

Замечание. Используемое в теории вероятностей утверждение «из A следует B» не всегда совпадает по смыслу с общепринятым его пониманием как обозначения временно́го следования события B за событием A. Здесь оно обозначает лишь то, что событие A является частным по отношению к более общему событию B.

Если событие B, являющееся следствием события A, представляет собой сумму исчерпывающего множе-

---

* В сумме Σ индекс i пробегает конечное (от 1 до некоторого n) или счетное (от 1 до ∞) множество натуральных значений в зависимости от того, конечно или бесконечно число возможных исходов.

ства n событий B_1, B_2, ..., B_n, то вероятность события A может быть выражена по формуле

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P\{B_i\} P\{A \mid B_i\}, \qquad (1.3.2)$$

которую называют формулой *полной вероятности.*

В рассмотренной схеме событие A осуществляется только вместе с каким-либо одним из событий B_1, B_2, ..., B_n. Последние, таким образом, выступают как единственно возможные и взаимно исключающие условия, определяющие появление события A, или как *гипотезы*, в предположении которых (и только их) может произойти событие A.

Замечание. Формула (1.3.2) сохраняет свой вид, если следствием события A является только часть из полной группы событий, например B_1, B_2, ..., B_j. В этом случае вероятности $P\{A \mid B_i\}$ равны нулю для $i = j+1$, $j+2$, ..., n и события B_{j+1}, B_{j+2}, ..., B_n можно исключить из рассмотрения при пользовании формулой полной вероятности. Однако для того чтобы убедиться в том, что ни одно из событий, составляющих полную группу, не упущено при расчетах, целесообразно определить все вероятности $P\{B_i\}$ и проверить выполнение равенства (1.3.1).

Пример 1.3.2. В цель предполагается произвести три выстрела. Необходимо оценить вероятность $P\{A\}$ поражения цели, если известны вероятности попадания в цель:

— ноль снарядов $P\{B_0\} = 1/8$;
— одного снаряда $P\{B_1\} = 3/8$;
— двух снарядов $P\{B_2\} = 3/8$;
— трех снарядов $P\{B_3\} = 1/8$;

вероятности поражения цели при попадании в нее:

— ноль снарядов $P\{A \mid B_0\} = 0$;
— одного снаряда $P\{A \mid B_1\} = 0$;
— двух снарядов $P\{A \mid B_2\} = 3/6$;
— трех снарядов $P\{A \mid B_3\} = 5/6$.

События B_0, B_1, B_2, B_3 представляют собой полную группу. Следовательно, формула (1.3.2) применима и для искомой вероятности поражения цели получим

$$P\{A\} = \sum_{i=0}^{3} P\{B_i\} P\{A \mid B_i\} =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{6} = \frac{7}{24} \approx 0{,}292.$$

Очевидно, что при непосредственном вычислении вероятности $P\{A\}$ гипотезы B_0 и B_1 можно было опустить.

Вероятность $P\{B_i\}$ осуществления гипотезы B_i ($i = 1, \ldots, n$), вычисленная безотносительно к событию A, называется *априорной вероятностью.*

Условная вероятность $P\{B_i \mid A\}$ выполнения гипотезы B_i ($i=1, \ldots, n$), вычисленная в предположении, что событие A осуществилось, называется *апостериорной вероятностью.*

Априорные и апостериорные вероятности связаны соотношением ($i=1, 2, \ldots, n$)

$$P\{B_i \mid A\} = \frac{P\{B_i\} P\{A \mid B_i\}}{\sum\limits_{j=1}^{n} P\{B_j\} P\{A \mid B_j\}} = \frac{P\{B_i\} P\{A \mid B_i\}}{P\{A\}}, \tag{1.3.3}$$

носящим название *теоремы гипотез* или *формулы Байеса.*

Замечание. Формулы (1.3.2) и (1.3.3) связаны между собой и дают как бы прямое и обратное решения одной проблемы. Первая прогнозирует возможность появления события A по известным до опыта вероятностям осуществления гипотез. Последняя оценивает вероятность осуществления каждой гипотезы, если событие A произошло.

Пример 1.3.3. По цели было произведено три выстрела и цель была поражена. Используя условия примера 1.3.2, требуется найти вероятности $P\{B_i \mid A\}$ получения ровно i попаданий ($i = 0, 1, 2, 3$).

Вероятность того, что в цель не было достигнуто ни одного попадания, по формуле (1.3.2) равна

$$P\{B_0 \mid A\} = \frac{P\{B_0\}\,P\{A \mid B_0\}}{P\{A\}} = \frac{\frac{1}{8}\cdot 0}{\frac{7}{24}} = 0.$$

Вероятности того, что было достигнуто одно, два и три попадания, соответственно равны:

$$P\{B_1 \mid A\} = \frac{P\{B_1\}\,P\{A \mid B_1\}}{P\{A\}} = \frac{\frac{3}{8}\cdot 0}{\frac{7}{24}} = 0;$$

$$P\{B_2 \mid A\} = \frac{P\{B_2\}\,P\{A \mid B_2\}}{P\{A\}} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{9}{14};$$

$$P\{B_3 \mid A\} = \frac{P\{B_3\}\,P\{A \mid B_3\}}{P\{A\}} = \frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{5}{14}.$$

Как видно, именно события B_2 и B_3, являющиеся следствием события A, по отношению к последнему составляют исчерпывающее множество (пример 1.3.2).

Глава 2

НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ

§ 2.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ КАК ОТНОШЕНИЙ ЧИСЛА БЛАГОПРИЯТНЫХ ИСХОДОВ К ОБЩЕМУ ЧИСЛУ ИСХОДОВ

Предположим, что результатом некоторого испытания может быть *конечное* число n *несовместных* и *равновозможных* исходов и что в m исходах, называемых благоприятными, осуществляется событие A. Тогда вероятность события A равна отношению числа m благоприятных исходов к общему числу возможных исходов:

$$P\{A\} = \frac{m}{n}. \tag{2.1.1}$$

Замечание. Если нарушается хотя бы одно из трех указанных условий (конечность, несовместность и равновозможность исходов), формула (2.1.1) не применима *. Необходимо учесть *все* возможные и благоприятные исходы. Очень часто допускают ошибки, когда разные, хотя и внешне похожие исходы принимают за один исход.

Количество возможных и благоприятных исходов можно подсчитать, если предварительно записать в виде таблицы или графа исходы испытания. При большом числе исходов прямое их перечисление становится очень громоздким и может привести к потере части исходов. В этих случаях следует попытаться установить закономерность, которой подчиняются исходы, и

---

* Обобщение формулы (2.1.1) на случай бесконечного числа исходов дано в § 2.2.

для нее отыскать математическую формулировку. Здесь большую пользу могут оказать *комбинаторные соотношения.*

В приводимых ниже комбинаторных соотношениях используются следующие обозначения *:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!};$$

$$C_n^{m_1, \ldots, m_k} = \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!};$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\,(n-1)\ldots(n-m+1);$$

$S(n, k)$ — число Стирлинга второго рода;
D_n — субфакториал;
$P_m(n)$ — число различных разбиений целого числа m на n целых слагаемых.

Замечание. Числа Стирлинга второго рода вычисляются по рекуррентной формуле

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k), \text{ причем}$$
$$S(0,0) = 1;\ S(n, 1) = 1;\ S(n, n) = 1$$

и

$$S(n, k) = 0, \text{ если } k > n.$$

Значения $S(n, k)$ для n и k от 1 до 10 приводятся в табл. 2.1.1.

Субфакториал D_n находится по рекуррентной формуле

$$D_n = n\,D_{n-1} + (-1)^n$$

при начальном значении $D_0 = 1$. Значения субфакториалов при $0 \leqslant n \leqslant 10$ даны в табл. 2.1.2 в столбце, для которого $k = 0$.

В простых случаях величины $P_m(n)$ могут быть вычислены непосредственно. Например, разбивка числа 5 на слагаемые имеет вид:

— одно слагаемое — 5;
— два слагаемых — 4+1 или 3+2;

---

* Вместо первых трех обозначений иногда применяются другие:

$$C_n^m = \binom{n}{m},\ C_n^{m_1, \ldots, m_k} = \binom{n}{m_1, \ldots, m_k};\ A_n^m = (n)_m.$$

Таблица 2.1.1

Числа Стирлинга второго рода $S(n,k)$

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5580	750	45	1

— три слагаемых — $3+1+1$ или $2+2+1$;

— четыре слагаемых — $2+1+1+1$;

— пять слагаемых — $1+1+1+1+1$.

Следовательно, $p_5(1)=p_5(4)=p_5(5)=1$; $p_5(2)=p_5(3)=2$.

В общем случае числа $p_m(n)$ находятся как коэффициенты разложения функции

$$p(t, n)=\frac{t^n}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^n)}$$

в ряд

$$p(t, n)=\sum_{m=0}^{\infty} p_m(n)\, t^m$$

При подсчете числа исходов испытания чаще всего применяются следующие комбинаторные соотношения.

1) Число перестановок по m элементов из n различ-

ных элементов, в которых каждый элемент используется только один раз *:

$$P(n,\ m)=A_n^m\,. \tag{2.1.2}$$

В частности, число перестановок из n различных элементов

$$P(n,\ n)=n! \tag{2.1.2'}$$

2) Число перестановок по m элементов из n различных элементов, в которых каждый элемент может использоваться любое допустимое (от 0 до m) число раз:

$$U\ (n,\ m)=n^m. \tag{2.1.3}$$

3) Число перестановок из n элементов, среди которых n_1 первого вида, ..., n_m m-го вида, или число способов размещения n различных элементов по m различным ячейкам при условии, что в i-й ячейке помещается n_i $(i=1,\ \ldots,\ m)$ элементов:

$$P(n;\ m_1,\ldots,m_k)=C_n^{m_1,\ldots,m_k}, \tag{2.1.4}$$

где

$$m_1+\ldots+m_k=n.$$

4) Число перестановок из n различных элементов, в которых имеется ровно k несмещенных элементов (относительно исходного их расположения):

$$D\,(n,\ k)=C_n^k\,(n-k)!\left[\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\right]=C_n^k\,D_{n-k}. \tag{2.1.5}$$

Некоторые значения $D\,(n,k)$ приведены в табл. 2.1.2.

---

* В отечественной литературе перестановки из n элементов по m чаще всего называют размещениями, а под перестановками понимают только перестановки из n элементов. Мы используем один термин «перестановки», чтобы подчеркнуть общность комбинаторных соотношений (2.1.2), (2.1.2′) и (2.1.3). Термин «размещения» используется далее в другом смысле.

Таблица 2.1.2

Число $D(n, k)$ перестановок с k несмещенными элементами

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	1	0	1								
3	2	3	0	1							
4	9	8	6	0	1						
5	44	45	20	10	0	1					
6	265	264	135	40	15	0	1				
7	1854	1855	924	315	70	21	0	1			
8	14833	14832	7420	2464	630	112	28	0	1		
9	133496	133497	66744	22260	5544	1134	168	36	0	1	
10	1334961	1334960	667485	222480	55650	11088	1890	240	45	0	1

Замечание. Из (2.1.5) * следует, что $D(n, 0) = D_n$, поэтому второй столбец таблицы ($k = 0$) содержит значения субфакториалов D_n.

5) Число сочетаний по m элементов из n различных элементов, в которых каждый элемент используется только один раз:

$$C(n, m) = C_n^m. \tag{2.1.6}$$

6) Число сочетаний по m элементов из n различных элементов, в которых каждый элемент может повторяться любое допустимое (от 0 до m) число раз:

$$f(n, m) = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}. \tag{2.1.7}$$

7) Число размещений m одинаковых элементов по n различным ячейкам при условии, что $n-k$ из них остаются пустыми:

$$C_n^k C_{m-1}^{k-1} = C_n^{n-k} C_{m-1}^{k-1} \ (m \geqslant k,\ 1 \leqslant k \leqslant n), \tag{2.1.8}$$

* Здесь и далее ссылка на формулу, если нет указания на пример, рисунок или таблицу.

а число всевозможных размещений

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^{n-k} C_{m-1}^{k-1} = C_{n+m-1}^{n-1} = f(n, m). \qquad (2.1.8')$$

8) Число размещений m различных элементов по n различным ячейкам при условии, что $n-k$ из них остаются свободными:

$$A_n^k S(m, k), \ (m \geqslant k, \ 1 \leqslant k \leqslant n), \qquad (2.1.9)$$

а число всевозможных размещений

$$\sum_{k=1}^{n} A_n^k S(m, k) = n^m = U(n, m). \qquad (2.1.9')$$

9) Число размещений m различных элементов по n одинаковым ячейкам при условии, что $n-k$ из них остаются свободными:

$$S(m, k), \ (m \geqslant k, \ 1 \leqslant k \leqslant n), \qquad (2.1.10)$$

а число всевозможных размещений

$$V(n, m) = \sum_{k=1}^{n} S(m, k). \qquad (2.1.10')$$

10) Число размещений m одинаковых элементов по n одинаковым ячейкам при условии, что $n-k$ из них остаются свободными

$$p_m(k), \ (m \geqslant k, \ 1 \leqslant k \leqslant n), \qquad (2.1.11)$$

а число всевозможных размещений

$$F(n, m) = \sum_{k=1}^{n} p_m(k). \qquad (2.1.11')$$

Замечание. Для правильного пользования приведенными комбинаторными соотношениями надо уяснить различие размещений при разных и одинаковых ячейках и элементах. Возможные комбинации условий и выражения для числа размещений при каждой комбинации приведены в табл. 2.1.3.

Таблица 2.1.3

Ячейки, n	Элементы, m	
	различные	одинаковые
Различные	$U(n, m)$	$f(n, m)$
Одинаковые	$V(n, m)$	$F(n, m)$

Различие комбинаций иллюстрируется примером для $n=3$, $m=2$. Ячейки обозначены прописными буквами, элементы — строчными.

1) Различные ячейки, различные элементы

$$U(3,2) = 3^2 = 9.$$

№ размещения	Ячейка		
	А	Б	В
1	аб		
2		аб	
3			аб
4	а	б	
5	а		б
6		а	б
7	б	а	
8	б		а
9		б	а

2) Различные ячейки, одинаковые элементы

$$f(n, m) = C_4^2 = 6.$$

№ размещения	Ячейка		
	А	Б	В
1	аа		
2		аа	
3			аа
4	а	а	
5	а		а
6		а	а

3) Одинаковые ячейки, различные элементы

$$V(3, 2) = S(2, 1) + S(2, 2) = 2.$$

№ размещения	Ячейка		
	А	А	А
1	аб		
2	а	б	

4) Одинаковые ячейки, одинаковые элементы

$$F(3, 2) = p_2(1) + p_2(2) = 2.$$

№ размещения	Ячейка		
	А	А	А
1	аа		
2	а	а	

Пример 2.1.1. Для обстрела n целей выделено m батарей, которые случайно распределяются по целям таким образом, что каждая батарея с одинаковой вероятностью может обстрелять любую цель. Требуется найти вероятность $q'(x)$ того, что по данной (любой из числа n) цели будет сосредоточено ровно x ($x=0$, 1, ..., n) батарей.

Будем рассматривать цели как ячейки, а батареи как элементы, размещаемые по ячейкам. Цели и батареи различны (их можно различать хотя бы по присвоенным предварительно номерам), следовательно, общее число размещений (вариантов распределений) батарей по целям найдется по формуле (2.1.9′). Все размещения равновозможны и взаимно исключают друг друга.

Найдем число благоприятных распределений. Пусть по некоторой цели сосредоточено x определенных батарей. Тогда по оставшимся $n-1$ целям $m-x$ батарей могут распределиться $U(n-1,\ m-x)$ способами. Но x батарей из общего их числа m могут быть выбраны $C(m,\ x)$ способами, так что число распределений, при которых за данной целью закрепляется x любых батарей, равно $C(m,\ x)\ U(n-1,\ m-x)$. Отсюда получим искомую вероятность

$$q(x)=\frac{C(m,\ x)\,U(n-1,\ m-x)}{U(n,\ m)}=\frac{C_m^x(n-1)^{m-x}}{n^m}$$

при $0\leqslant x\leqslant m$.

Поскольку по данной цели может быть сосредоточено либо $x=0$, либо $x=1$, ..., либо $x=m$ батарей и эти исходы являются несовместными, то согласно (1.3.1) должно выполняться условие $\sum\limits_{x=0}^{m} q(x)=1$.

Вероятность $q(x)$ описывает распределение числа батарей, сосредоточенных по данной цели. Если n и m неограниченно возрастают так, что $\frac{m}{n}=\mu$ остается постоянным, в пределе получим

$$q(x)=e^{-\mu}\,\frac{\mu^x}{x!},$$

т. е. предельным распределением для данного случая будет распределение Пуассона (§ 4.5).

Пример 2.1.2. Разведкой обнаружено соединение в составе m кораблей. Установлено, что m_1 из них — авианосцы, а остальные $m_2=m-m_1$ — корабли охранения, каждый из которых может принадлежать к одному из n типов.

Располагая только указанной информацией, определить вероятность $r(x)$ того, что в соединении будет ровно x ($x=0,1,\ldots,m_2$) кораблей i-го типа ($i=1,\ \ldots,\ n$).

И эту задачу можно решить с применением формул для числа размещений, если принять типы кораблей за ячейки, а сами корабли — за элементы. Последние в данной задаче одинаковы. Следовательно, число различных вариантов формирования соединения определяется по формуле (2.1.8′) и равно $f(n,\ m_2)$. Поскольку нет никакой информации о частости вхождения тех или иных типов кораблей в соединение (а именно этот случай и рассматривается), все эти варианты равновозможны.

Число благоприятных вариантов, при которых в соединении x кораблей i-го типа равно числу размещений $m_2 - x$ кораблей по $n-1$ ячейке, т. е. равно $f(n-1, m_2-x)$.

Искомая вероятность

$$r(x) = \frac{f(n-1,\ m_2-x)}{f(n,\ m_2)} = \frac{C_{n+m_2-x-2}^{m_2-x}}{C_{n+m_2-1}^{m_2}}.$$

Как и в предыдущем примере, имеем $\sum\limits_{x=0}^{m_2} r(x) = 1.$

Если m_2 и n неограниченно возрастают, но при этом $\frac{m_2}{n} = \mu$ остается постоянным, то в пределе получим геометрическое распределение (§ 4.4):

$$r(x) = \frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x$$

Пример 2.1.3. Сообщение состоит из n различных, определенным образом упорядоченных сигналов. На сообщение накладывается помеха, составленная из тех же n сигналов, но расположенных случайным образом, причем все расположения сигналов в помехе равновозможны. Если положение сигнала в помехе совпадает с положением такого же сигнала в сообщении, последний искажается. Определить вероятность $u_n(x)$ искажения равно x сигналов в сообщении.

Число сообщений, которые могут быть образованы n различными сигналами при условии, что все сигналы используются, ровно числу $P(n, n)$ перестановок из n различных элементов.

Число помех, у которых x сигналов совпадают с сообщением, равно числу $D(n, x)$ перестановок из n элементов с x несмещенными элементами. Следовательно, искомая вероятность на основании формул (2.1.2′) и (2.1.5) равна

$$u_n(x) = \frac{D(n,x)}{P(n,n)} = \frac{1}{x!}\sum_{i=0}^{n-x}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{D_{n-x}}{x!\,(n-x)!}$$

В частности, вероятность принять неискаженное сообщение равна

$$u_n(0) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Вероятность получения неискаженного сигнала при различной длительности сообщения равна: $u_1(0)=0$; $u_2(0)=0{,}5$; $u_3(0)=0{,}333$; $u_4(0)=0{,}375$; $u_5(0)=0{,}367$; $u_6(0)=0{,}368$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(0)=e^{-1}\approx 0{,}368$,

то отсюда следует, что в рассматриваемых условиях увеличение числа сигналов в сообщении свыше пяти практически не снижает вероятности принять сообщение неискаженным.

Вероятность принять полностью искаженное сообщение равна $u_n(n)=\dfrac{1}{n!}$.

При различной длительности сообщения будем иметь: $u_1(1)=1$; $u_2(2)=0{,}5$; $u_3(3)=0{,}1667$; $u_4(4)=0{,}0417$; $u_5(5)=0{,}0082$; $u_6(6)=0{,}0014$.

Как видно, вероятность полного искажения сообщения, состоящего из пяти и более сигналов, достаточно мала.

Пример 2.1.4. В процессе монтажа прибора к $n=2$ зажимам необходимо определенным образом присоединить $m=3$ проводников ($m\geqslant n$. Найти вероятность того, что монтажник правильно выполнит присоединение с первой попытки, если:

а) ему ничего не известно о схеме соединения;

б) ему известно, что к каждому зажиму должен быть присоединен хотя бы один проводник.

Для монтажника все зажимы (ячейки) и проводники (элементы) различны (например, он может их разметить). Поэтому при полном незнании схемы соединения (случай *а*) число возможных различных присоединений проводников к зажимам (общее число исходов) определится по формуле (2.1.3). Среди них только одно присоединение будет правильным (один благоприятный исход). Следовательно, искомая вероятность согласно (2.1.1) равна

$$p_a=\frac{1}{n^m}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}.$$

При наличии частичной информации о схеме монтажа (случай *б*) число возможных присоединений найдется по формуле (2.1.9), так что искомая вероятность будет

$$p_б=\frac{1}{n!\,S(m,n)}=\frac{1}{2!\,3}=\frac{1}{6}.$$

§ 2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ КАК ОТНОШЕНИЙ МЕР МНОЖЕСТВ (ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ)

Пусть в результате испытания возможно бесконечное число исходов. Пусть при этом исходы несовместны и ни один из них не имеет преимущества перед другими. Тогда для решения задачи о вероятности благоприятных исходов используется следующая геометрическая интерпретация.

Предположим, что точка может занимать любое положение в области (Q) меры Q, причем нельзя указать никакого района преимущественных положений точки.

Замечание. О такой точке говорят, что она распределена по закону равномерной плотности в области (Q) (§ 5.7).

Тогда вероятность события B, состоящего в том, что точка попадает в область (q), являющуюся частью области (Q) и имеющую меру q, равна

$$P\{B\} = \frac{q}{Q}. \tag{2.2.1}$$

Пусть далее интересующее нас событие A происходит тогда и только тогда, когда осуществляется событие B. Тогда

$$P\{A\} = P\{B\} = \frac{q}{Q}. \tag{2.2.2}$$

Здесь (Q) есть множество возможных, а (q) множество благоприятных исходов испытаний. Следовательно, формула (2.2.1) является обобщением формулы (2.1.1).

В практических задачах (Q) и (q) выступают в виде отрезков, плоских фигур или пространственных (часто многомерных) тел, а их мерами являются длины, площади и объемы. Это обстоятельство и обусловило наименование *«геометрическая вероятность»*.

Пример 2.2.1. Самолет, имеющий радиолокатор с радиусом действия R, осуществляет поиск со скоростью V в достаточно большом районе (S) площадью S, в любой точке которого может всплыть на время T подводная лодка. Какова вероятность обнаружения подводной лодки радиолокатором, если время T невелико и лодка обнаруживается при попадании в зону действия радиолокатора?

За время T самолет осмотрит область (s) площадью $s = \pi R^2 + 2RVT$. Факт обнаружения подводной лодки самолетом (событие A) эквивалентен факту попадания точки, равномерно распределенной в области (S), в область (s) (событие B). Из (2.2.2) получаем искомую вероятность

$$P\{A\} = p(R, T) = \frac{\pi R^2 + 2RVT}{S}.$$

§ 2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ С ПОМОЩЬЮ ДЕРЕВЬЕВ (ГРАФОВ) ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ

В ряде случаев испытание может быть представлено как многошаговый процесс, в котором каждый предшествующий исход имеет несколько последующих исходов.

В общем случае исходы каждого шага испытания неравновероятны. Событие, интересующее исследователя, может осуществляться после какого-либо одного или нескольких шагов.

При большом числе исходов и шагов простое перечисление всех возможностей, а следовательно, и подсчет вероятностей события затруднительны. Этот процесс может быть упорядочен и сведен к простым механическим операциям путем построения дерева (графа) * исходов.

Предположим, что ход испытания может быть описан графом, показанным на рис. 2.3.1.

Первый шаг может иметь два исхода: $\{1;\ 1\}$ и $\{1;\ 2\}$ с вероятностями $p_{1,1}$ и $p_{1,2}$ соответственно. Каждый из этих исходов для второго шага играет роль начального состояния. На втором шаге событие $\{1;\ 1\}$ может иметь исходы $\{2;\ 1\}$, $\{2;\ 2\}$ и $\{2;\ 3\}$ с вероятностями $p_{2,1}$, $p_{2,2}$ и $p_{2,3}$, а событие $\{1;\ 2\}$ — исходы $\{2;\ 4\}$ и $\{2;\ 5\}$ с вероятностями $p_{2,4}$ и $p_{2,5}$ соответственно и т. д.

Исходы каждого события должны составлять исчерпывающее множество, т. е. должны выполняться условия:

$$p_{1,1} + p_{1,2} = 1;$$
$$p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} = 1;\ p_{2,4} + p_{2,5} = 1;$$
$$p_{3,1} + p_{3,2} = 1;\ p_{3,3} = 1;\ p_{3,4} + p_{3,5} + p_{3,6} + p_{3,7} = 1.$$

Полная вероятность каждого исхода определяется как произведение всех вероятностей, указанных на ветвях дерева, начиная от данного исхода и кончая кор-

* Графом называют множество точек, соединенных линиями. Точки обозначают объекты или события, а линии — отношения между ними.

нем дерева (начальным состоянием). Так, вероятность исхода $\{3;\ 3\}$ равна $p_{3,3} \cdot p_{2,3} \cdot p_{1,1}$.

На рис. 2.3.1 двойными кружками обозначены исходы, приводящие к осуществлению интересующего исследователя события A.

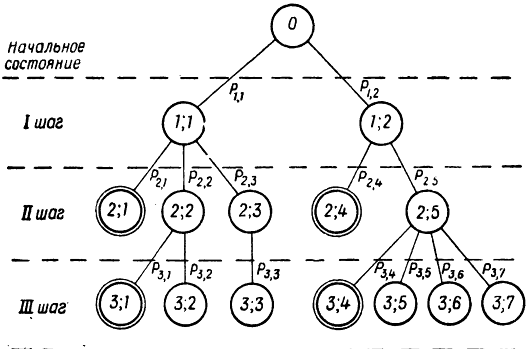

Рис. 2.3.1

Как видно из графа, событие A есть объединение несовместных событий $\{2;\ 1\}$, $\{2;\ 4\}$, $\{3;\ 1\}$ и $\{3;\ 4\}$. Следовательно, согласно (1.2.7) и только что указанному правилу получаем

$$\boldsymbol{P}\{A\} = \boldsymbol{P}\{2;\ 1\} + \boldsymbol{P}\{2;\ 4\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 1\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 4\} =$$
$$= p_{1,1}\, p_{2,1} + p_{1,1}\, p_{2,2}\, p_{3,1} + p_{1,2}\, p_{2,4} + p_{1,2}\, p_{2,5}\, p_{3,4}.$$

Пример 2.3.1. Двухмоторный самолет поражается снарядами некоторого калибра, если достигнуты попадания либо в кабину летчика, либо в оба двигателя одновременно. Какова вероятность поражения самолета при попадании в него одного, двух и трех снарядов, если действия снарядов независимы, условная вероятность попадания снаряда (попавшего в самолет) в кабину равна $p_к$, в левый двигатель — $p_д$, в правый двигатель — $p_д$ и в остальные части самолета (фюзеляж) — $p_ф$ (причем $p_к + 2p_д + p_ф = 1$)*?

* Условные вероятности $p_к$, $p_д$ и $p_ф$ в ряде случаев могут быть найдены как отношения площадей проекций кабины, двигателя (одного) и остальных частей самолета к общей площади проекции самолета (§ 2.2).

Попадание снарядов может быть достигнуто последовательно или одновременно — это не меняет хода рассуждений и результата.

Построим дерево возможных исходов, обозначая событие, заключающееся в попадании снаряда в кабину, — к, в левый двигатель — лд, в правый двигатель — пд, и в остальные части самолета (фюзеляж) — ф (рис. 2.3.2). Исходы, приводящие к гибели самолета, обозначим двойными кружками.

После попадания одного снаряда поражение самолета наступит только в том случае, если снаряд попал в кабину (событие $\{1;\ 1\}$). Поэтому вероятность поражения самолета при одном попадании будет $G_1 = \boldsymbol{P}\{1;\ 1\}$.

Поражение самолета при двух попаданиях есть сумма несовместных событий $\{1;\ 1\}$, $\{2;\ 1\}$, $\{2;\ 3\}$, $\{2;\ 5\}$; $\{2;\ 6\}$ и $\{2;\ 9\}$.

Вероятность этого события согласно формуле (1.2.7) равна

$$G_2 = G_1 + \boldsymbol{P}\{2;\ 1\} + \boldsymbol{P}\{2;\ 3;\} + \boldsymbol{P}\{2;\ 5\} + \boldsymbol{P}\{2;\ 6\} + \boldsymbol{P}\{2;\ 9\}\ .$$

Наконец, вероятность поражения самолета при трех попаданиях найдется как вероятность суммы несовместных событий, обозначенных на рис. 2.3.2 двойными кружками:

$$\begin{gathered}G_3 = G_2 + \boldsymbol{P}\{3;\ 1\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 3\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 5\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 7\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 9\} + \\ + \boldsymbol{P}\{3;\ 10\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 13\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 14\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 17\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 19\} + \\ + \boldsymbol{P}\{3;\ 21\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 22\} + \boldsymbol{P}\{3;\ 25\}.\end{gathered}$$

Слагаемые в приведенных выше формулах находятся по дереву исходов и имеют значения:

$$\boldsymbol{P}\{1;\ 1\} = p_{\text{к}};$$

$$\boldsymbol{P}\{2;\ 1\} = \boldsymbol{P}\{2;\ 5\} = p_{\text{д}}p_{\text{к}};\ \boldsymbol{P}\{2;\ 3\} = \boldsymbol{P}\{2;\ 6\} = p_{\text{д}}^2;$$

$$\boldsymbol{P}\{2;\ 9\} = p_{\text{ф}}p_{\text{к}};$$

$$\boldsymbol{P}\{3;\ 1\} = \boldsymbol{P}\{3;\ 9\} = p_{\text{д}}^2p_{\text{к}};\ \boldsymbol{P}\{3;\ 3\} = \boldsymbol{P}\{3;\ 10\} = p_{\text{д}}^3;$$

$$\boldsymbol{P}\{3;\ 7\} = \boldsymbol{P}\{3;\ 14\} = \boldsymbol{P}\{3;\ 19\} = \boldsymbol{P}\{3;\ 22\} = p_{\text{д}}^2p_{\text{ф}};$$

$$\boldsymbol{P}\{3;\ 5\} = \boldsymbol{P}\{3;\ 13\} = \boldsymbol{P}\{3;\ 17\} = \boldsymbol{P}\{3;\ 21\} = p_{\text{ф}}p_{\text{д}}p_{\text{к}};$$

$$\boldsymbol{P}\{3;\ 25\} = p_{\text{ф}}^2p_{\text{к}}.$$

Совокупность вероятностей G_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ в теории стрельбы называется условным законом поражения цели (в данном случае самолета).

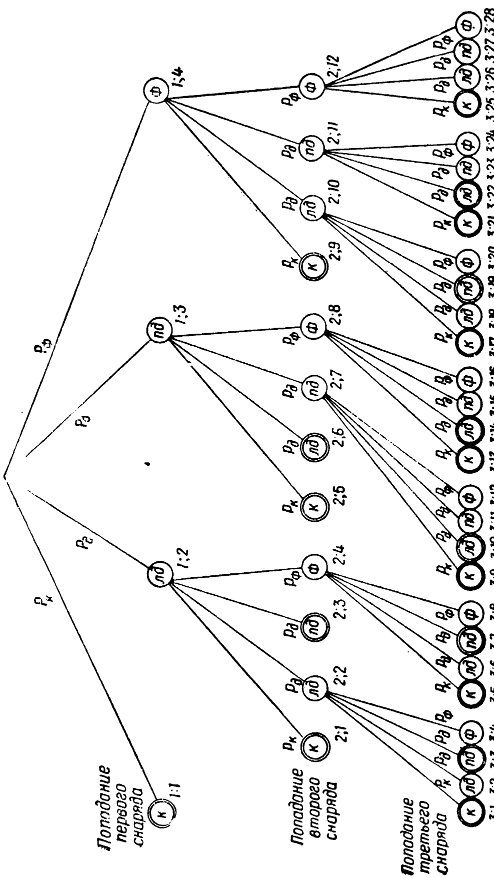
Попадание первого снаряда
Попадание второго снаряда
Попадание третьего снаряда

Рис. 2.3.2

§ 2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

Для вычисления вероятностей сложных событий (§ 1.2) используются формулы (1.2.1)—(1.2.7) вероятностей произведения и суммы событий. Последовательность вычислений состоит в следующем:

— записывают интересующее событие в виде комбинации элементарных событий, связанных знаками суммы и произведения;

— применяют формулы вероятностей суммы и произведения событий;

— вычисляют вероятности элементарных событий (если они неизвестны);

— вычисляют искомую вероятность.

Пример 2.4.1. Самолет может брать на борт ракеты либо с оптическим взрывателем (событие B_1), либо с радиовзрывателем (событие B_2). Цель поражается одним попаданием ракеты. Вероятность попадания (событие C) зависит от условий видимости и имеет значения $P\{C \mid A_iB_j\}$, приведенные в таблице.

Видимость	Тип взрывателя: оптический (B_1)	Тип взрывателя: радио (B_2)
Хорошая (A_1)	0,6	0,4
Плохая (A_2)	0,1	0,4

Определить, какой тип взрывателя надо брать, если в районе расположения цели ожидается хорошая видимость (событие A_1) с вероятностью $P\{A_1\}=0{,}4$ и плохая (событие A_2) с вероятностью $P\{A_2\}=0{,}6$.

Очевидно, надо брать те ракеты, которые позволят достичь наибольшей вероятности поражения цели.

Событие D — поражение цели — можно представить в виде следующей комбинации элементарных событий: $D=A_1B_1C+A_1B_2C+A_2B_1C+A_2B_2C$. События, составляющие сумму, несовместны, что дает право применить формулу

$$P\{D\}=P\{A_1B_1C\}+P\{A_1B_2C\}+P\{A_2B_1C\}+P\{A_2B_2C\}.$$

Для вычисления слагаемых применим формулу (1.2.1):

$$P\{D\} = P\{A_1\} P\{B_1 \mid A_1\} P\{C \mid A_1B_1\} + \\ + P\{A_1\} P\{B_2 \mid A_1\} P\{C \mid A_1B_2\} + \\ + P\{A_2\} P\{B_1 \mid A_2\} P\{C \mid A_2B_1\} + \\ + P\{A_2\} P\{B_2 \mid A_2\} P\{C \mid A_2B_2\} \qquad (*)$$

Все фигурирующие в последнем выражении вероятности определены, кроме условных вероятностей выбора типа взрывателя. Поскольку выбор взрывателя производится заблаговременно, когда конкретное состояние видимости неизвестно, естественно принять

$$P\{B_1 \mid A_1\} = P\{B_1 \mid A_2\} = u,$$
$$P\{B_2 \mid A_1\} = P\{B_2 \mid A_2\} = 1 - u.$$

После подстановки в (*) всех значений получим

$$P\{D\} = 0{,}40 - 0{,}10\,u.$$

Максимального значения вероятность поражения достигает при $u=0$. Следовательно, надо выбирать ракеты с радиовзрывателем.

В наиболее распространенных задачах сложное событие состоит в осуществлении элементарных событий заданное число раз или не менее (не более) заданного числа раз.

Независимость элементарных событий существенно сокращает вычисления и позволяет избежать громоздких символических записей.

Обозначим через p_i вероятность осуществления некоторого события A при i-м опыте. Вероятность того, что при n независимых опытах событие A произойдет ровно $m \geqslant 1$ раз (событие A_m), равна

$$P_{m,n} = \sum_{i_1=1}^{n-m+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-m+2} \cdots$$

$$\cdots \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n} \frac{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_m}}{q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdots q_{i_m}} \prod_{j=1}^{n} q_j, \qquad (2.4.1)$$

а вероятность того, что событие A не произойдет ни разу (событие A_0), равна

$$P_{0,n} = \prod_{j=1}^{n} q_j, \qquad (2.4.1')$$

где $q_j = 1 - p_j$.

Вероятности $P_{m,n}$ могут быть вычислены по формуле (9.4.9) с использованием производящей функции (§ 9.4)

$$\gamma(t) = \prod_{i=1}^{n} (p_i t + q_i).$$

Если вероятность события A не меняется от опыта к опыту, т. е. $p_i = p$ $(i = 1, \ldots, n)$, то формула (2.4.1) преобразуется к виду (§ 4.1)

$$P_{m,n} = C_n^m\, p^m\, (1 - p)^{n-m}.$$

События A_0, A_1, …, A_n составляют исчерпывающее множество (§ 1.3) и удовлетворяют условию (1.3.1): $\sum\limits_{i=0}^{n} P_{i,n} = 1$.

Используя $P_{m,n}$, можно вычислять другие вероятности, характеризующие поведение события A при испытании, как-то:

— вероятность осуществления события m и более раз (не менее m раз, хотя бы m раз, по крайней мере m раз)

$$R_{m,n} = \sum_{i=m}^{n} P_{i,n} = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} P_{i,n}; \qquad (2.4.2)$$

— вероятность осуществления события m и менее раз (не более m раз, самое большее m раз)

$$\sum_{i=0}^{m} P_{i,n} = 1 - R_{m+1,n}. \qquad (2.4.2')$$

Если вероятности p_i малы, то для вычисления вероятностей $P_{m,\,n}$ и $R_{m,\,n}$ можно пользоваться приближенными зависимостями:

$$P_{m,\,n} \approx \psi(m;\ a); \tag{2.4.3}$$

$$R_{m,\,n} \approx \widetilde{\Psi}(m;\ a) \tag{2.4.4}$$

или более точными зависимостями:

$$P_{m,\,n} \approx \psi(m;\ a) - \frac{b}{2}\nabla^2\psi(m;\ a); \tag{2.4.3'}$$

$$R_{m,\,n} \approx \widetilde{\Psi}(m;\ a) + \frac{b}{2}\nabla\,\psi(m-1;\ a), \tag{2.4.4'}$$

где

$$a = \sum_{i=1}^{n} p_i;\ b = \sum_{i=1}^{n} p_i^2;$$

$$\nabla^2\psi(m;\ a) = \begin{cases} \psi(0;\ a) & \text{при } m = 0; \\ \psi(1;\ a) - 2\psi(0;\ a) & \text{при } m = 1; \\ \psi(m;\ a) - 2\psi(m-1;\ a) + & \\ \quad + \psi(m-2;\ a) & \text{при } m \geqslant 2; \end{cases} \tag{2.4.5}$$

$$\nabla\psi(m;\ a) = \begin{cases} \psi(0;\ a) & \text{при } m = 0; \\ \psi(m;\ a) - \psi(m-1;\ a) & \text{при } m \geqslant 1, \end{cases} \tag{2.4.6}$$

а функции $\phi(x;\mu)$ и $\widetilde{\Psi}(x;\mu)$, описывающие закон распределения Пуассона (§ 4.5), приведены в таблицах VI и VII соответственно.

Погрешность формул (2.4.3) и (2.4.4) имеет порядок λ, а погрешность формул (2.4.3′) и (2.4.4′) — порядок λ^2, где $\lambda = \max(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Чем меньше λ, тем точнее приближенные формулы.

Пример 2.4.2. По движущейся цели проводится 24 независимых выстрела. Вероятность p_i попадания в цель при i-м выстреле равна

$$p_i = \begin{cases} 0{,}20 \text{ для } i = 1 - 6; \\ 0{,}15 \text{ для } i = 7 - 12; \\ 0{,}10 \text{ для } i = 13 - 18; \\ 0{,}05 \text{ для } i = 19 - 24 \end{cases}$$

Определить вероятность $R_{3;\,24}$ получения не менее трех попаданий в цель.

Точные формулы (2.4.1) и (2.4.2) в данном случае имеют вид

$$R_{3;24} = 1 - (P_{0;\,24} + P_{1;\,24} + P_{2;\,24}),$$

где

$$P_{0;\,24} = \prod_{j=1}^{24} q_j;$$

$$P_{1;\,24} = \sum_{i=1}^{24} \frac{p_i}{q_i} \prod_{j=1}^{24} q_j;$$

$$P_{2;\,24} = \sum_{i=1}^{23} \sum_{k=i+1}^{24} \frac{p_i p_k}{q_i q_k} \prod_{j=1}^{24} q_j.$$

Подставляя в них значения p_i, получим после сравнительно кропотливых подсчетов $R_{3;\,24} = 0{,}5950$.

Вычислив $a = 3{,}00$ и $b = 0{,}45$, применим теперь приближенную формулу (2.4.4′):

$$R_{3;\,24} \approx \widetilde{\Psi}(3;\,3{,}00) + \frac{0{,}45}{2} \nabla\psi(2;\,3{,}00).$$

По табл. VII находим $\widetilde{\Psi}(3;\,3{,}00) = 0{,}5768$, а по табл. VI

$$\nabla\psi(2;\,3{,}00) = \psi(2;\,3{,}00) - \psi(1;\,3{,}00) = 0{,}2240 - 0{,}1494 = 0{,}0746.$$

Окончательно $R_{3;\,24} = 0{,}5768 + 0{,}0168 = 0{,}5936$.

Погрешность составляет примерно 0,24% при существенном сокращении объема вычислений.

РАЗДЕЛ II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 3.1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Величина, значение которой меняется от опыта к опыту случайным образом, называется *случайной* или *стохастической величиной* (СВ).

В отличие от неслучайных (детерминированных) величин для СВ нельзя предсказать точно, какое она примет значение в определенных условиях, а можно только указать закон распределения СВ.

Закон распределения СВ считается заданным, если:

— указано множество возможных значений СВ;

— указан способ количественного определения вероятности попадания СВ в произвольную область этого множества.

Наиболее общим и распространенным способом определения вероятностей различных значений СВ является задание функции распределения вероятностей СВ, которую сокращенно называют функцией распределения СВ (другие употребительные наименования: интегральная функция распределения, интегральный закон распределения).

Функцией распределения СВ X называется функция $F(x)$, задающая вероятность события $X<x$, т. е.

вероятность того, что СВ X будет меньше некоторого числа x:

$$F(x) = \boldsymbol{P}\{X < x\}. \tag{3.1.1}$$

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1) $F(x)$ — неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \geqslant F(x_1)$ при $x_2 \geqslant x_1$;

2) функция $F(x)$ непрерывна слева, т. е.

$$F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x - \varepsilon), \quad (\varepsilon > 0);$$

3) функция $F(x)$ стремится к нулю, если x стремится к $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0;$$

4) функция $F(x)$ стремится к единице, если x стремится к $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Из определения (3.1.1) функции распределения $F(x)$ и ее второго свойства следует, что

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} [F(x) - F(x_0)] = \boldsymbol{P}\{X = x_0\}; \tag{3.1.2}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} [F(x) - F(x_0)] = 0, \tag{3.1.2$'$}$$

т. е. разность $F(x) - F(x_0)$ стремится к вероятности того, что СВ X примет значение x_0, если x приближается к x_0 справа, и стремится к нулю, если x приближается к x_0 слева.

Замечание. Во многих работах функция распределения определяется как вероятность того, что СВ X не превзойдет некоторого числа x:

$$F_1(x) = \boldsymbol{P}\{X \leqslant x\}. \tag{3.1.3}$$

Функция распределения $F_1(x)$ обладает теми же свойствами, что и функция распределения $F(x)$, за исключением второго свойства, которое формулируется следующим образом: функция $F_1(x)$ непрерывна справа, т. е.

$$F_1(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_1(x + \varepsilon), \ (\varepsilon > 0).$$

Из определения (3.1.3) функции распределения $F_1(x)$ и указанного ее свойства следует, что

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} [F_1(x_0) - F_1(x)] = 0;$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} [F_1(x_0) - F_1(x)] = P\{X = x_0\},$$

т. е. разность $F_1(x_0) - F_1(x)$ стремится к вероятности того, что СВ X примет значение x_0, если x приближается к x_0 слева, и стремится к нулю, если x приближается к x_0 справа.

Функции распределения $F(x)$ и $F_1(x)$ связаны соотношением

$$F_1(x) = F(x) + P\{X = x\}. \tag{3.1.4}$$

Если одна из функций распределения $F(x)$ или $F_1(x)$ непрерывна, то непрерывна и другая. При этом $P\{X = x\} = 0$ и обе функции совпадают.

СВ делятся на дискретные, непрерывные и смешанные.

Дискретная СВ X может принимать только конечное или счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots$ В практических приложениях распространены дискретные СВ, принимающие только неотрицательные целочисленные значения 0, 1, 2 ... Часто такие СВ можно трактовать как число появлений некоторого случайного события A при многократном повторении опыта. Тем самым изучение поведения случайных событий (разд. I) сводится к изучению поведения целочисленных неотрицательных СВ (гл. 4).

Непрерывная СВ X может принимать любые значения из некоторого замкнутого или открытого интервала, в том числе и бесконечного (гл. 5). Область возможных значений непрерывной СВ может представлять собой несколько непересекающихся интервалов.

Функция распределения дискретной СВ в практических ситуациях представляет собой ступенчатую функцию * со скачками в точках x_1, x_2, ... (рис. 3.1.1, *а*); функция распределения непрерывной СВ — непрерывную функцию (рис. 3.1.1, *б*); функция распределения смешанной СВ — кусочно-непрерывную функцию с не более чем счетным числом скачков (рис. 3.1.1, *в*).

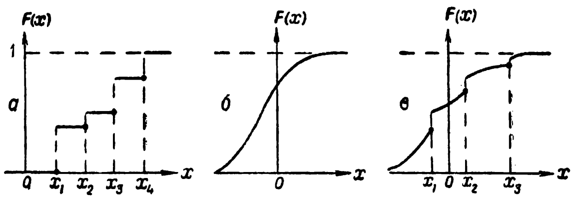

Рис. 3.1.1

Факт принятия СВ некоторого определенного значения или какого-либо из множества значений представляет собой случайное событие. Такие случайные события записываются в виде равенств или неравенств. Вероятности этих случайных событий определяются с помощью функции распределения. В табл. 3.1.1 показано, как выражаются вероятности событий через функции распределения (3.1.1) и (3.1.3).

---

* Вообще говоря, можно построить такую дискретную СВ, функция распределения которой не будет ступенчатой функцией, например СВ X, которая может принимать значение любых рациональных чисел из отрезка $[0,1]$.

Таблица 3.1.1

Событие	Выражение вероятности события		
	через символическую запись	через $F(x)$	через $F_1(x)$
$X<x$	$P\{X<x\}$	$F(x)$	$F_1(x-0)$
$X\leqslant x$	$P\{X\leqslant x\}$	$F(x+0)$	$F_1(x)$
$X\geqslant x$	$P\{X\geqslant x\}$	$1-F(x)$	$1-F_1(x-0)$
$X>x$	$P\{X>x\}$	$1-F(x+0)$	$1-F_1(x)$
$x_1\leqslant X<x_2$	$P\{x_1\leqslant X<x_2\}$	$F(x_2)-F(x_1)$	$F_1(x_2-0)-F_1(x_1-0)$
$x_1\leqslant X\leqslant x_2$	$P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}$	$F(x_2+0)-F(x_1)$	$F_1(x_2)-F_1(x_1-0)$
$x_1<X\leqslant x_2$	$P\{x_1<X\leqslant x_2\}$	$F(x_2+0)-F(x_1+0)$	$F_1(x_2)-F_1(x_1)$
$x_1<X<x_2$	$P\{x_1<X<x_2\}$	$F(x_2)-F(x_1+0)$	$F_1(x_2-0)-F_2(x_1)$
$X=x$	$P\{X=x\}$	$F(x+0)-F(x)$	$F_1(x)-F_1(x-0)$

Примечание. Ввиду того что для непрерывных СВ $P\{X=x\}=0$, формулы, приведенные в табл. 3.1.1, упрощаются и имеют вид:

$$P\{X<x\}=P\{X\leqslant x\}=F(x)=F_1(x);$$

$$P\{X>x\}=P\{X\geqslant x\}=1-F(x)=1-F_1(x);$$

$$P\{x_1\leqslant X<x_2\}=P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}=P\{x_1<X\leqslant x_2\}=$$

$$=P\{x_1<X<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=F_1(x_2)-F_1(x_1).$$

В таблице, как обычно, обозначено

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F(x\pm\varepsilon)=F(x\pm 0);\quad(\varepsilon>0).$$

Пример 3.1. По заданной на рис. 3.1.2 функции распределения требуется определить вероятности событий
$\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{3}{4}$ и $X = 0$.

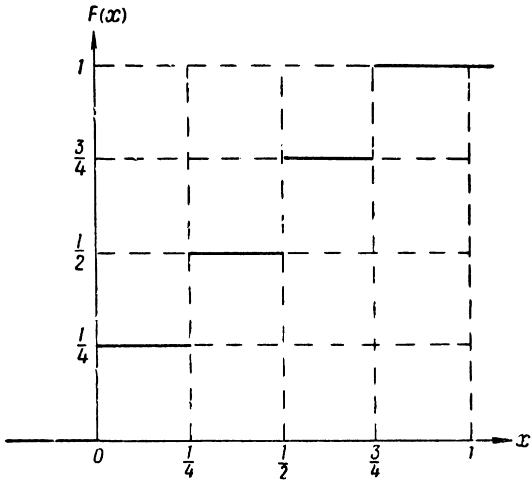

Рис. 3.1.2

Указанная на рис. 3.1.2 функция распределения аналитически выражается в форме (3.1.1) и (3.1.3) следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ \frac{1}{4} \text{ при } 0 < x \leqslant \frac{1}{4}; \\ \frac{1}{2} \text{ при } \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{4} \text{ при } \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{3}{4}; \\ 1 \text{ при } \frac{3}{4} < x. \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } & x < 0; \\ \frac{1}{4} \text{ при } & 0 \leqslant x < \frac{1}{4}; \\ \frac{1}{2} \text{ при } & \frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{4} \text{ при } & \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{4}; \\ 1 \text{ при } & \frac{3}{4} \leqslant x. \end{cases}$$

Пользуясь табл. 3.1.1, находим

$$P\left\{\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{3}{4}\right\} = F\left(\frac{3}{4}+0\right) - F\left(\frac{1}{4}+0\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

или

$$P\left\{\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{3}{4}\right\} = F_1\left(\frac{3}{4}\right) - F_1\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$P\{X = 0\} = F(0+0) - F(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

или

$$P\{X = 0\} = F_1(0) - F_1(0-0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Скачок (3.1.2) функций распределения в точке x_i ($i = 1, 2, \ldots$) равен вероятности p_i того, что СВ X примет значение x_i:

$$F(x_i + 0) - F(x_i) = P\{X = x_i\} = p_i.$$

Для дискретных СВ последовательность вероятностей полностью определяет функцию распределения, а именно:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \tag{3.1.5}$$

где суммирование ведется по всем i, для которых выполняется условие $x_i < x$.

Четвертое свойство функции распределения при этом приобретает вид $\sum_i p_i = 1$.

Для непрерывных СВ

$$F(x_i + 0) - F(x_i) = 0, \tag{3.1.6}$$

т. е. вероятность того, что непрерывная СВ примет определенное значение x_i, равна нулю.

Замечание. Согласно сказанному в § 1.1 равенство нулю вероятности $P\{X = x_i\}$ не всегда означает, что событие $X = x_i$ невозможно. Говоря о вероятности события $X = x_i$, мы как бы априорно пытаемся угадать, какое значение примет СВ в опыте. Если x_i лежит в области возможных значений непрерывной СВ X, то с некоторой уверенностью можно предсказать область, в которую СВ может попасть. В то же время невозможно указать, хотя бы с малейшей степенью уверенности, какое конкретное значение из бесконечного числа возможных примет непрерывная СВ. Именно это обстоятельство и отражает условие (3.1.6). Вместе с тем следует понимать, что в каждом опыте реализуется одно, вполне конкретное значение СВ.

В практических задачах предполагают, что функции распределения непрерывных СВ дифференцируемы во всей области возможных значений СВ. При таком предположении закон распределения СВ X можно характеризовать *плотностью распределения вероятностей* СВ $f(x)$ или сокращенно плотностью вероятности СВ X (другие употребительные наименования: дифференциальная функция распределения, дифференциальный закон распределения), которая определяется как производная функции распределения:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{3.1.7}$$

Свойства плотности вероятности:

1. Функция $f(x)$ неотрицательна: $f(x) \geqslant 0$.

2. Интеграл в бесконечных пределах от $f(x)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Функция распределения непрерывной СВ выражается через плотность вероятности

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \tag{3.1.8}$$

Вероятность попадания непрерывной СВ X в закрытый или открытый интервал (x_1, x_2) может быть выражена помимо формул табл. 3.1.1 через плотность вероятности

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt. \tag{3.1.9}$$

Функцию распределения смешанной СВ можно представить в виде суммы

$$F(x) = F^{(1)}(x) + F^{(2)}(x),$$

где $F^{(1)}(x)$ — непрерывная и в практических задачах дифференцируемая функция, а $F^{(2)}(x)$ — сумма скачков, лежащих левее точки x.

Для единообразия записи функций распределения непрерывных, дискретных и смешанных СВ и формализации действий с функциями распределения можно воспользоваться понятием единичной функции, определяемой соотношением

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0; \\ 0 \text{ при } x \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.1.10}$$

С помощью (3.1.10) функция распределения (3.1.5) дискретной СВ записывается в виде

$$F(x) = \sum_i p_i \cdot \varepsilon(x - x_i), \tag{3.1.11}$$

а для смешанной СВ в виде

$$F(x) = F^{(1)}(x) + \sum_i p_i\, \varepsilon(x - x_i). \tag{3.1.12}$$

Используя *дельта-функцию* * $\delta(x)$, иногда для единообразия выкладок формально вводят понятие плотности вероятности также для дискретных СВ

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \qquad (3.1.13)$$

и для смешанных СВ

$$f(x) = f^{(1)}(x) + \sum_i p_i \delta(x - x_i), \qquad (3.1.14)$$

где $f^{(1)}(x) = \dfrac{dF^{(1)}(x)}{dx}$.

Соотношения (3.1.12) и (3.1.14) распространяются на СВ любого вида

§ 3.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Функция распределения является полной характеристикой СВ. Часто бывает достаточно указать некоторые числовые параметры, характеризующие отдельные существенные стороны распределения СВ.

---

* Дельта-функция может рассматриваться как производная единичной функции (3.1.10) и обладает следующими свойствами:

$$1)\ \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq x_0; \\ \infty & \text{при } x = x_0; \end{cases}$$

$$2)\ \int_a^b \delta(x - x_0)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ при } x_0 < a \text{ или } x_0 > b; \\ 1 \text{ при } a < x_0 < b; \end{cases}$$

$$3)\ \int_a^b g(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = g(x_0)$$

на участках непрерывности функции $g(x)$.

Большинство числовых характеристик СВ получается с помощью операции усреднения различных указанных ниже непрерывных функций $g(x)$ СВ X относительно функции распределения $F(x)$ той же СВ. Эта операция может быть определена либо при помощи плотности вероятности (3.1.14) с использованием дельта-функции

$$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx, \tag{3.2.1}$$

либо при помощи функции распределения (3.1.12) с использованием интеграла Стильтьеса:

$$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x). \tag{3.2.1'}$$

Выражения (3.2.1) и (3.2.1′) означают:

— для дискретной СВ с функцией распределения (3.1.11) или плотностью вероятности (3.1.13):

$$M[g(X)] = \sum_i g(x_i)\, p_i; \tag{3.2.2}$$

— для непрерывной СВ, обладающей плотностью вероятности (3.1.7):

$$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx; \tag{3.2.3}$$

— для смешанной СВ с функцией распределения (3.1.12) или плотностью вероятности (3.1.14):

$$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f^{(1)}(x)\, dx + \sum_i g(x_i)\, p_i. \tag{3.2.4}$$

К характеристикам положения, указывающим на некоторые значения, вокруг которых группируются все возможные значения СВ, относятся математическое ожидание СВ, мода и медиана.

Математическое ожидание — МО — (среднее значение) СВ X, обозначаемое $\hat{x}$ * (другие употребляемые обозначения $M[X]$, m_x, $E[X]$), определяется выражением

$$\hat{x} = M[X]. \tag{3.2.5}$$

Расчетные формулы для МО получаются из формул (3.2.2)—(3.2.4) при $g(x)=x$ и имеют вид:

— для дискретной СВ

$$\hat{x} = \sum_i x_i p_i; \tag{3.2.6}$$

— для непрерывной СВ

$$\hat{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx; \tag{3.2.6$'$}$$

— для смешанной СВ

$$\hat{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf^{(1)}(x)\,dx + \sum_i x_i p_i. \tag{3.2.6$''$}$$

Медианой (срединным или вероятным значением) называется такое значение СВ X, обозначаемое M_e, при котором

$$P\{X < M_e\} = P\{X > M_e\} = \frac{1}{2}.$$

Для непрерывной СВ X медиана находится из условий:

$$F(M_e) = \frac{1}{2}$$

* В Справочнике для МО принято обозначение $\hat{x}$. Обозначение $\bar{x}$ сохранено для среднего статистического (§ 13.3), поскольку его использование для этой цели применяется в большинстве руководств.

или

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)\,dx = \int_{M_e}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

В частном случае, когда $F(x) = \frac{1}{2}$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, медиана определяется неоднозначно: в качестве медианы может быть принято любое значение из отрезка $[x_1, x_2]$.

Для дискретных СВ медиана определяется неоднозначно и практически не употребляется.

Модой называется такое значение СВ X, обозначаемое M_0, для которого в случае дискретного распределения вероятность, а в случае непрерывного распределения плотность вероятности $f(M_0)$ имеют наибольшее значение.

Если такое значение СВ единственно, распределение называется *одномодальным* (унимодальным), если таких значений несколько, — *многомодальным* (полимодальным).

Если плотность вероятности непрерывной СВ X имеет минимум внутри области возможных значений СВ и непрерывно возрастает к границам области, то распределение называется *антимодальным.*

Непрерывное распределение называется *симметричным*, если функция распределения и плотность вероятности удовлетворяют условиям: $F(M_e - x) = 1 - F(M_e + x)$, $f(M_e - x) = f(M_e + x)$. У таких распределений МО, если оно существует, совпадает с медианой и модой (антимодой), если она единственна.

Характер группирования СВ чаще всего описывается моментами, для вычисления которых используются формулы (3.2.2)—(3.2.4) при определенных видах функции $g(x)$.

Начальный момент k-го порядка СВ X определяется формулой

$$\alpha_k[X] = M[X^k]. \tag{3.2.7}$$

Начальный момент нулевого порядка равен единице: $\alpha_0[X] = 1$, а начальный момент первого порядка равен МО СВ X: $\alpha_1[X] = \hat{x}$.

Центральный момент k-го порядка СВ X определяется формулой

$$\mu_k[X] = M\left[\left(X - \hat{x}\right)^k\right]. \qquad (3.2.8)$$

Центральный момент нулевого порядка равен единице: $\mu_0[X]=1$, а первого порядка равен нулю: $\mu_1[X]=0$. Все нечетные моменты симметричных распределений равны нулю.

Часто применяющийся центральный момент второго порядка получил наименование *дисперсии* и обозначается $D[X]$, D_X или просто D, если ясно, о какой СВ идет речь:

$$\mu_2[X] = D[X] = M\left[\left(X - \hat{x}\right)^2\right]. \qquad (3.2.9)$$

Дисперсия характеризует рассеивание СВ X относительно ее МО.

В практических задачах рассеивание чаще характеризуют *средним квадратическим отклонением* — СКО — СВ X:

$$\sigma_X \equiv \sigma = +\sqrt{D}, \qquad (3.2.10)$$

поскольку оно имеет ту же размерность, что и сама СВ X.

Полезно знать соотношения между начальными и центральными моментами первых порядков:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2; \\ \mu_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3; \\ \mu_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.11)$$

Особенно часто применяется первое соотношение, имеющее в другой записи вид

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Другими часто применяемыми числовыми характеристиками СВ являются асимметрия и эксцесс.

Асимметрия (скошенность) распределения вероятностей СВ X обозначается γ_1 (иногда S, S_k) и определяется по формуле

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{3.2.12}$$

Для симметричных распределений асимметрия равна нулю. Асимметрия называется положительной (отрицательной), если мода предшествует медиане (следует за медианой).

Эксцесс (крутость) распределения вероятностей СВ X обозначается γ_2 (иногда E, E_x) и определяется по формуле

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{3.2.13}$$

Для нормального распределения (§ 5.1) эксцесс равен нулю. Если кривая плотности вероятности имеет более острую и высокую вершину, чем кривая нормального распределения, эксцесс положителен, если более низкую и пологую,— отрицателен.

Иногда применяются *абсолютные моменты* СВ. Начальный абсолютный момент k-го порядка определяется равенством

$$\beta_k [X] = M[\,|X|^k\,], \tag{3.2.14}$$

а центральный абсолютный момент k-го порядка равенством

$$\nu_k [X] = M[\,|X - \hat{x}|^k\,]. \tag{3.2.15}$$

Наряду с дисперсией для характеристики рассеивания СВ относительно ее МО часто применяется *среднее арифметическое отклонение*, обозначаемое E_1 и определяемое по формуле

$$E_1 [X] = \nu_1 [X] = M\left[\,\left|X - \hat{x}\right|\,\right]. \tag{3.2.16}$$

Распределение вероятностей характеризуют иногда функцией

$$x = G(p) = F^{-1}(p), \tag{3.2.17}$$

обратной функции распределения $F(x)=P\{X<x\}$. Значение x_p, соответствующее заданному значению p, называют *р-квантилем* или $p\%$-квантилем (если p задана в %).

Применяют также *коэффициент вариации*

$$v=\frac{\sigma}{\hat{x}}. \qquad (3.2.18)$$

Если $P\{A|x\}$ есть условная вероятность осуществления события A при условии, что СВ X приняла значение x, то полная (абсолютная, безусловная) вероятность $P\{A\}$ осуществления события A определяется одной из формул:

$$\boldsymbol{P}\{A\}=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{P}\{A\,|\,x\}\,f(x)\,dx; \qquad (3.2.19)$$

$$\boldsymbol{P}\{A\}=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{P}\{A\,|\,x\}\,dF(x), \qquad (3.2.19')$$

которые раскрываются аналогично формулам (3.2.1) и (3.2.1′) в зависимости от типа СВ.

Формулы (3.2.19) и (3.2.19′) являются обобщением формулы полной вероятности (1.3.2).

§ 3.3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Множества случайных явлений (событий, величин) подчиняются определенным закономерностям, которые позволяют не только прогнозировать их поведение, но и количественно оценивать некоторые средние их характеристики, проявляющие определенную устойчивость. Характерные закономерности наблюдаются также в распределениях СВ, которые образуются в результате сложения множества слабых воздействий, не поддающихся теоретическому анализу. Выражением этих закономерностей и устойчивости средних показателей являются так называемые предельные теоремы теории вероятностей, часть из которых приводится ниже в пригодной для практического пользования формулировке. Принципиальное значение предельных теорем состоит в том, что они гарантируют высокое качество статистических оценок (гл. 13) при весьма большом числе опытов n. Практически приемлемые количественные оценки массовых явлений часто могут быть получены уже при сравнительно небольших n.

Неравенство Чебышева. Для неотрицательной функции $g(X)$ СВ X и любого $K>0$ выполняется неравенство

$$\boldsymbol{P}\{g(X) \geqslant K\} \leqslant \frac{M[g(X)]}{K}. \tag{3.3.1}$$

В частности, если $g(X)=(X-\hat{x})^2$ и $K=k^2\sigma^2$, где σ есть СКО (3.2.10), то

$$\boldsymbol{P}\left\{\left|X-\hat{x}\right| \geqslant k\sigma\right\} \leqslant \frac{1}{k^2}. \tag{3.3.2}$$

Откуда при $k=3$ получаем для любого закона распределения

$$\boldsymbol{P}\left\{\left|X-\hat{x}\right| \geqslant 3\sigma\right\} \leqslant \frac{1}{9}. \tag{3.3.2$'$}$$

Замечание. Для многих широко применяемых на практике законов распределения СВ вероятность уклонения СВ от своего МО более чем на три СКО значительно меньше $\frac{1}{9}$ (гл. 4 и 5). Для этих законов неравенство (3.3.2′), гарантирующее малость вероятности того, что СВ уклонится от МО больше чем на 3δ, получило наименование «правила трех сигм».

Теорема Бернулли. Если проводится n независимых опытов, в каждом из которых некоторое событие A осуществляется с вероятностью p, то относительная частота $\bar{p}$ (§ 13.2) появления события при $n \to \infty$ сходится по вероятности к p, т. е. при любом $\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\left\{\left|\bar{p}-p\right| \geqslant \varepsilon\right\}=0. \tag{3.3.3}$$

Теорема Пуассона. Если проводится n независимых опытов и вероятность осуществления события A в i-м опыте равна p_i, то относительная частота $\bar{p}$ (§ 13.2) появления события при неограниченном возрастании числа опытов сходится по вероятности к среднему из вероятностей p_i, т. е. при любом $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\bar{p} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0. \qquad (3.3.4)$$

Теорема Чебышева. Если в n независимых опытах наблюдены значения $x_1, \ldots, x_n$ СВХ, то при неограниченном возрастании числа опытов среднее арифметическое наблюденных значений СВ сходится по вероятности к ее математическому ожиданию $\hat{x}$, т. е. при любом $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{x}\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0. \qquad (3.3.5)$$

Обобщенная теорема Чебышева. Если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые СВ с МО $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ и дисперсиями $D_1, \ldots, D_n$, ограниченными сверху одним и тем же числом, то при $n \to \infty$ среднее арифметическое наблюденных значений СВ сходится по вероятности к среднему арифметическому их МО:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0. \qquad (3.3.6)$$

Теорема Маркова. Выражение (3.3.6) справедливо и для зависимых СВ $X_1, \ldots, X_n$, если только

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = 0.$$

Совокупность теорем, устанавливающих устойчивость средних показателей, принято называть *законом больших чисел*.

Центральная предельная теорема. Если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные СВ, имеющие МО $\hat{x}$ и дисперсию σ^2, то при $n \to \infty$ закон распределения суммы $\sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\alpha < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\hat{x}}{\sqrt{n}\,\sigma} < \beta\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \Phi_0(\beta) - \Phi_0(\alpha). \quad (3.3.7)$$

Центральная предельная теорема при некоторых ограничениях справедлива и для суммы СВ, имеющих неодинаковое распределение. При этом в выражении (3.3.7) между знаками неравенств следует поместить

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{x}_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2}}.$$

Смысл накладываемых ограничений состоит в том, чтобы среди суммируемых СВ не было таких, которые бы оказывали на сумму существенно большее влияние, чем остальные.

Теорема Лапласа. Если в каждом из n независимых опытов событие A появляется с вероятностью p, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\alpha < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right\} = \Phi_0(\beta) - \Phi_0(\alpha), \quad (3.3.8)$$

где X — число появлений события A в n опытах, $q = 1 - p$.

Теорема Лапласа — частный случай центральной предельной теоремы.

Пример 3.3.1. Проводится выборочное обследование партии электролампочек для определения средней продолжительности горения их. Каков должен быть объем выборки n, чтобы с вероятностью не менее 0,98 утверждать, что средняя продолжительность горения лампочки $\bar{x}$, полученная в выборке, отклоняется от МО $\hat{x}$ не более чем на $\tau = 10$ *ч*, если СКО продолжительности горения лампочки равно $\sigma = 80$ *ч*.

Решение может быть получено на основании формулы (3.3.7), которая в данном случае $(\alpha = -\beta)$ может быть записана в виде

$$P\left\{\left|\bar{x} - \hat{x}\right| < \tau\right\} = P\left\{-\frac{\tau\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\bar{x} - \hat{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < +\frac{\tau\sqrt{n}}{\sigma}\right\} \approx$$

$$\approx 2\Phi_0\left(\frac{\tau\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Потребный объем выборки n найдем из условия

$$2\Phi_0\left(\frac{10\sqrt{n}}{80}\right) \geqslant 0{,}98.$$

По табл. III имеем $\frac{\sqrt{n}}{8} \geqslant 2{,}325$, следовательно, $n \geqslant 346$.

Глава 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 4.1. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Существо широко распространенного биномиального распределения может быть объяснено на следующей модели, к которой с той или иной степенью приближаются многие практические задачи и которая может быть сформулирована двояко.

1) Схема независимых испытаний. Пусть в результате отдельного испытания событие A может осуществиться с вероятностью θ. Тогда число X появлений события A в n независимых испытаниях будет СВ, подчиненной биномиальному закону распределения.

2) Извлечение с возвращением. Пусть в множестве из N элементов содержится k элементов с признаком B. Вероятность выбора элемента с признаком B при случайном извлечении одного элемента согласно § 2.1 равна $\theta = \frac{k}{N}$.

Пусть производится n извлечений элементов из множества, причем после каждого извлечения и опознания элемента последний возвращается в множество. Пусть, наконец, эксперимент поставлен так, что при каждом извлечении вероятность θ появления элемента с признаком B не меняется.

Тогда число X извлечений элементов с признаком B подчинено биномиальному закону распределения.

Математическое выражение. Вероятность

осуществления события A ровно x раз при n испытаниях равна

$$b(x;\ n,\ \theta) = C_n^x\,\theta^x\,(1-\theta)^{n-x},\ (x = 0, 1, \ldots, n). \quad (4.1.1)$$

Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A осуществится менее x раз, т. е. функция распределения числа появлений этого события при x целом равна

$$B(x;\ n,\ \theta) = \sum_{i=0}^{x-1} b(i;\ n,\ \theta) = 1 - \sum_{i=x}^{n} b(i;\ n,\ \theta). \quad (4.1.2)$$

Замечание. Суммирование в (4.1.2) ведется от 0 до $x-1$ в соответствии с общим определением функции распределения:

$$P\{X < x\} = \sum_{i<x} b(i;\ n,\ \theta) = \sum_{i=0}^{x-1} b(i;\ n,\ \theta).$$

МО, дисперсия и СКО числа X появлений события A находятся по формулам:

$$\hat{x} = n\theta; \quad (4.1.3)$$

$$D = \sigma^2 = n\theta(1-\theta). \quad (4.1.4)$$

Вычисление. Вероятности (4.1.1) при больших значениях n и x вычисляются логарифмированием.

При $n\theta(1-\theta) > 9$ и $\frac{1}{n+1} < \theta < \frac{n}{n+1}$ можно пользоваться следующими приближенными формулами:

$$b(x;\ n,\ \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\,\varphi\left(\frac{x-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right), \quad (4.1.5)$$

где $\varphi(t)$ определяется формулой (5.1.11);

$$b(x;\ n,\ \theta) \approx \Phi_0\left(\frac{x+\frac{1}{2}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) -$$

$$-\Phi_0\left(\frac{x-\frac{1}{2}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right); \qquad (4.1.6)$$

$$B(x;\ n,\ \theta) \approx \frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{x-\frac{1}{2}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right); \qquad (4.1.7)$$

$$P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = \sum_{x=x_1}^{x_2} b(x;\ n,\ \theta) \approx$$

$$\approx \Phi_0\left(\frac{x_2+\frac{1}{2}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right)-\Phi_0\left(\frac{x_1-\frac{1}{2}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right), \qquad (4.1.8)$$

где $\Phi_0(t)$ определяется формулой (5.1.19).

Последняя формула дает наилучший результат, если пределы x_1 и x_2 изменения СВ X лежат по разные стороны от математического ожидания $n\theta$, т. е. если $x_1<n\theta<x_2$.

Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi_0(x)$ нормального распределения приведены в табл. II и III соответственно.

Если θ одного порядка с $\frac{1}{n}$ при больших n или $\theta<0{,}1$, можно пользоваться аппроксимацией:

$$b(x;\ n,\ \theta) \approx \psi(x;\ n\theta); \qquad (4.1.9)$$

$$B(x;\ n,\ \theta) \approx 1-\tilde{\Psi}(x;\ n\theta). \qquad (4.1.10)$$

Значения функций $\psi(x;\mu)$ и $\tilde{\Psi}(x;\mu)$ распределения Пуассона приведены в табл. VI и VII соответственно.

Замечание. Существо указанных выше ограничений сводится к тому, что в качестве приближения к биномиальному распределению используется при средних значениях θ нормальное распределение, а при малых θ — пуассоновское распределение. И то и другое приближение тем лучше, чем больше n.

В практических задачах часто требуется определить вероятность хотя бы одного появления события A при n испытаниях (§ 2.4):

$$R_{1,n} = 1 - B(0;\ n,\ \theta) = 1 - (1 - \theta)^n. \qquad (4.1.11)$$

Эта вероятность может быть найдена по табл. IX.

§ 4.2. ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Полиномиальное распределение является расширением биномиального, поэтому для описания его существа используется аналогичная математическая модель (§ 4.1).

1) Схема независимых испытаний. Пусть в результате испытания может появиться одно из событий $A_1, \ldots, A_m$, составляющих исчерпывающее множество событий. Вероятность появления события A_i равна $P\{A_i\} = \theta_i$. Поскольку множество событий исчерпывающее, то $\theta_1 + \ldots + \theta_m = 1$.

Пусть проводится n независимых испытаний.

Тогда числа $X_1, \ldots, X_m$ появлений событий $A_1, \ldots, A_m$ в серии из n испытаний подчинены полиномиальному закону распределения.

Так как при каждом испытании обязательно появляется одно из событий $A_1, \ldots, A_m$, то $X_1 + \ldots + X_m = n$.

2) Извлечение с возвращением. Пусть в множестве из N элементов содержится k_1 элементов с признаком $B_1, \ldots, k_m$ элементов с признаком B_m, причем $k_1 + \ldots + k_m = N$. Вероятность того, что при случайном выборе одного из элементов множества будет выбран элемент с признаком B_i, равна $\theta_i = \frac{k_i}{N} (i = 1, \ldots, m)$.

Пусть производится n независимых извлечений элементов из множества, причем после каждого извлечения и опознания элемент возвращается в множество. Пусть, наконец, опыт поставлен так, что вероятности θ_i не меняются от извлечения к извлечению.

Тогда числа $X_1, \ldots, X_m$ извлечений элементов с признаками $B_1, \ldots, B_m$ соответственно подчинены полиномиальному закону распределения. Так как при каждом извлечении обязательно появляется один из элементов с признаком $B_1, \ldots, B_m$, то $X_1 + \ldots + X_m = n$.

Математическое выражение. Вероятность того, что при n независимых испытаний событие A_1 появится ровно x_1 раз, ..., событие A_m появится ровно x_m раз, равна

$$p(x_1, \ldots, x_m) = C_n^{x_1, \ldots, x_m} \theta_1^{x_1} \ldots \theta_m^{x_m}, \qquad (4.2.1)$$

где $x_1 + \ldots + x_m = n$ и $\theta_1 + \ldots + \theta_m = 1$.

МО, дисперсия и СКО числа появлений события A_i $(i=1, \ldots, m)$ вычисляются по формулам:

$$x_i = M[X_i] = n\theta_i; \qquad (4.2.2)$$

$$D[X_i] = \sigma_{X_i}^2 = n\theta_i(1 - \theta_i). \qquad (4.2.3)$$

Вычисление. Вероятности (4.2.1) вычисляются непосредственно (при малых n) или путем логарифмирования.

Если n велико, а θ_i $(i=1, \ldots, m)$ имеют порядок $\frac{1}{n}$, для вычисления (4.2.1) можно применить многомерное распределение Пуассона (4.5.9):

$$p(x_1, \ldots, x_m) \approx e^{-n(\theta_1 + \ldots + \theta_m)} \frac{(n\theta_1)^{x_1} \ldots (n\theta)^{x_m}}{x_1! \ldots x_m!} =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} e^{-n\theta_i} \frac{(n\theta_i)^{x_i}}{x_i!} = \prod_{i=1}^{m} \psi(x_i; n\theta_i), \qquad (4.2.4)$$

где значения $\phi(x; \mu)$ берутся из табл. VI.

§ 4.3. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В задачах контроля продукции и других практических задачах часто применяется гипергеометрическое распределение, существо которого видно из следующей математической модели.

Пусть в множестве из N элементов содержится k элементов с признаком B. Вероятность выбрать элемент с признаком B при одном случайном извлечении из множества равна $\theta = \frac{k}{N}$.

Пусть из множества случайным образом извлекаются n элементов ($n \leqslant N$). Элементы могут извлекаться одновременно или последовательно, но без возвращения в множество. Тогда число X элементов с признаком B, содержащихся в выборке, подчинено гипергеометрическому закону распределения.

Замечание. В отличие от биномиального закона, применимого к выборке с возвращением, гипергеометрическое распределение применяется к выборке без возвращения. В последнем случае результаты последовательных извлечений зависимы.

Математическое выражение. Вероятность появления в выборке из n элементов ровно x элементов с признаком B равна

$$p(x;\ N,\ n,\ k) = \frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}, \qquad (4.3.1)$$

а вероятность получения в выборке не более x элементов с признаком B равна

$$P(x;\ N,\ n,\ k) = \sum_{i=0}^{x} p(i;\ N,\ n,\ k). \qquad (4.3.2)$$

В формулах (4.3.1) и (4.3.2) выполняются соотношения

$$0 \leqslant x \leqslant \min[n,\ k] \leqslant N. \qquad (4.3.3)$$

Функция распределения гипергеометрического закона при целом x выражается через вероятность (4.3.2) следующим образом:

$$P\{X < x\} = P(x - 1;\ N,\ n,\ k).$$

МО, дисперсия и СКО СВ X определяются по формулам:

$$\hat{x} = \frac{nk}{N} = n\theta; \qquad (4.3.4)$$

$$D = \sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)} =$$

$$= n\theta(1-\theta)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right). \qquad (4.3.5)$$

Вычисление. В табл. VIII приведены вероятности (4.3.1) и (4.3.2) для $N=2(2)24$* и $x \leqslant k \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}N$.

Последние неравенства не всегда выполняются. Однако функции (4.3.1) и (4.3.2) с любыми соотношениями аргументов можно привести к табличным значениям, пользуясь следующими формулами приведения:

$$p(x;\ N, n, k) = p(x;\ N, k, n); \qquad (4.3.6)$$

$$P(x;\ N, n, k) = P(x;\ N, k, n); \qquad (4.3.6')$$

$$p(x;\ N, n, k) = p(n-x;\ N, n, N-k) =$$
$$= p(k-x;\ N, N-n, k) =$$
$$= p(N-n-k+x;\ N, N-n, N-k); \qquad (4.3.7)$$

$$P(x;\ N, n, k) = P(N-n-k+x;\ N, N-n, N-k) =$$
$$= 1 - P(n-x-1;\ N, n, N-k) =$$
$$= 1 - P(k-x-1;\ N, N-n, k), \qquad (4.3.7')$$

причем $P(x;\ N,\ n,\ k)=1$, если $n-x-1<0$ или $k-x-1<0$.

При больших значениях N для приближенного вычисления вероятностей (4.3.1) и (4.3.2) можно пользоваться одной из следующих аппроксимаций.

1) Аппроксимация биномиальным распределением (§ 4.1). Если $\frac{n}{N} < 0{,}1$, то

$$p(x;\ N,\ n,\ k) \approx b\left(x;\ n,\ \frac{k}{N}\right).$$

* В скобках указан шаг таблицы.

Для вероятности (4.3.2) применяются приближения

$$P(x;\ N,\ n,\ k) \approx \begin{cases} B\left(x+1;\ n, \dfrac{k}{N}\right); \\ B\left(x+1;\ k, \dfrac{n}{N}\right); \\ 1 - B\left(k-x;\ N-n, \dfrac{k}{N}\right); \\ 1 - B\left(n-x;\ N-k, \dfrac{n}{N}\right), \end{cases} \qquad (4.3.8)$$

причем пользоваться надо тем выражением, у которого в функции $B\ (m;\ l,\ \theta)$ наименьшее l. Аппроксимация (4.3.8) дает хорошие результаты при $\dfrac{l}{N} < 0{,}1$.

Замечание. Поскольку непосредственное вычисление функций $B(m;\ l,\ \theta)$ при больших m и l сопряжено со значительными трудностями, то в этом случае следует пользоваться приближенными соотношениями (4.1.7) и (4.1.10).

2) Аппроксимация пуассоновским распределением (§ 4.5). Если $\dfrac{n}{N} < 0{,}1$ и одновременно $\dfrac{k}{N} < 0{,}1$, то

$$p(x;\ N,\ n,\ k) \approx \psi\left(x;\ \frac{nk}{N}\right);$$

$$P(x;\ N,\ n,\ k) \approx 1 - \tilde{\Psi}\left(x+1;\ \frac{nk}{N}\right).$$

3) Аппроксимация нормальным распределением (§ 5.1). Если для дисперсии (4.3.5) выполняется условие $D>9$, можно пользоваться приближенными формулами:

$$p(x;\ N,\ n,\ k) \approx \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{x-\hat{x}}{\sigma}\right);$$

$$P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2;\ N,\ n,\ k\} \approx$$

$$\approx \Phi_0\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2} - \hat{x}}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1 - \frac{1}{2} - \hat{x}}{\sigma}\right),$$

где $\hat{x}$ и σ определяются выражениями (4.3.4) и (4.3.5), а значения функций $\varphi(t)$ и $\Phi_0(t)$ находятся по таблицам II и III.

Распределение числа извлечений

Пусть сохраняются условия испытания, описанные в начале параграфа. Тогда вероятность того, что для извлечения n элементов, не обладающих признаком B, потребуется извлечь не более чем $n+x$ элементов, равна $P(x; N, n+x, k)$.

Описанная схема испытаний близка к схеме испытаний, описываемой распределением Паскаля (§ 4.4). Принципиальное их отличие состоит в том, что число извлечений (испытаний) при гипергеометрическом распределении ограничено сверху числом N элементов множества, в то время как при паскалевском распределении число испытаний сверху не ограничено.

При увеличении объема N множества и сохранении постоянным отношения $\frac{k}{N}$ вероятность $P(x; N, n+x, k)$ приближается к вероятности $\Pi_2\left(x+1; n, \frac{N-k}{N}\right)$, определяемой распределением Паскаля.

Сравнение двух серий наблюдений

Предположим, что над некоторой непрерывной СВ Z проводятся две серии наблюдений: предшествующая (первая) серия в n наблюдений и последующая (вторая) серия в m наблюдений, и что результаты наблюдений упорядочиваются с помощью неравенств:

— первая серия $z_1^{(1)} \geqslant z_2^{(1)} \geqslant \ldots \geqslant z_n^{(1)}$;

— вторая серия $z_1^{(2)} \geqslant z_2^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant z_m^{(2)}$.

Вероятность того, что ровно x наблюдений второй серии будут превосходить r-е наблюдение первой серии, равна

$$\frac{n}{m+n} p(x; m+n-1, m, x+r-1) = \frac{r}{x+r} p(x; m+n, m, x+r) \tag{4.3.9}$$

$$\text{при } 0 \leqslant x \leqslant m, \quad 1 \leqslant r \leqslant n,$$

а вероятность того, что x или более наблюдений второй серии будут превосходить по величине r-е наблюдение первой серии, равна

$$P(r-1;\ m+n,\ n,\ x+r-1) \tag{4.3.10}$$

при тех же условиях.

Из (4.3.10) при $r=1$ получаем вероятность того, что:

— x или более наблюдений второй серии будут превосходить по величине наибольшее наблюдение первой серии:

$$P(0;\ m+n,\ n,\ x), \qquad (0 \leqslant x \leqslant m); \tag{4.3.11}$$

— x или менее наблюдений второй серии будут превосходить по величине наибольшее наблюдение первой серии:

$$1 - P(0;\ m+n,\ n,\ x+1), \qquad (0 \leqslant x \leqslant m). \tag{4.3.12}$$

В частности, вероятность того, что наибольшее наблюдение первой серии не будет превышено во второй серии, равна

$$1 - P(0;\ m+n,\ n,\ 1) = \frac{n}{m+n}. \tag{4.3.12'}$$

При $r=n$ из (4.3.10) получаем вероятность того, что:

— x или более наблюдений второй серии будут превосходить по величине наименьшее наблюдение первой серии:

$$P(n-1;\ m+n,\ n,\ x+n-1), \qquad (0 \leqslant x \leqslant m); \tag{4.3.13}$$

— x или менее наблюдений второй серии будут превосходить по величине наименьшее наблюдение первой серии:

$$P(0;\ m+n,\ n,\ m-x), \ (0 \leqslant x \leqslant m). \tag{4.3.14}$$

Вероятность того, что x или более наблюдений второй серии будут лежать между наибольшим и наименьшим наблюдениями первой серии, равна

$$1 - P(1;\ m+n,\ n,\ m-x+2), \quad (0 \leqslant x \leqslant m). \tag{4.3.15}$$

В частности, если во второй серии содержится только одно наблюдение ($m=1$), то вероятность того, что его величина будет заключена между наибольшим и наименьшим значениями первой серии, равна

$$1-P(1;\ n+1,\ n,\ 2)=\frac{n-1}{n+1}. \qquad (4.3.15')$$

Пример 4.3.1. Определить вероятность того, что в последующие 25 лет хотя бы один раз произойдет наводнение, превосходящее самое большое наводнение за предшествующие 20 лет. Воспользуемся формулой (4.3.11) при $n=20$, $m=25$, $x=1$:

$$P(0;\ n+m,\ n,\ x)=P(0;\ 45,\ 20,\ 1).$$

В табл. VIII нет значений функции $P(x)$ для $N=45$, поэтому для вычисления искомой вероятности воспользуемся приближенными соотношениями (4.3.8). Из них наиболее подходящим в данном примере будет второе. Следовательно,

$$P(0;\ 45,\ 20,\ 1)\approx B\left(1;\ 1,\ \frac{20}{45}\right). \qquad (*)$$

Применяя (4.1.2), получим

$$B\left(1;\ 1,\ \frac{4}{9}\right)=b\left(0;\ 1,\ \frac{4}{9}\right)=\frac{5}{9}=0{,}5556.$$

В данном случае по формулам (4.3.1) и (4.3.2) легко вычисляется и точное значение:

$$P(0;\ 45,\ 20,\ 1)=p(0;\ 45,\ 20,\ 1)=\frac{5}{9}=0{,}5556.$$

Заметим, что совпадение обоих результатов обусловлено тем, что при $k=1$ и $x=0$ приближенное равенство (*) становится точным:

$$p(0;\ N,\ n,\ 1)=B\left(1;\ 1,\ \frac{n}{N}\right)=b\left(0;\ 1,\ \frac{n}{N}\right)=1-\frac{n}{N}.$$

При других значениях k и x равенство будет только приближенным.

Пример 4.3.2. Произведена серия из 10 выстрелов и определены отклонения каждого снаряда от точки прицеливания. Какова вероятность того, что отклонения последующей серии из четырех выстрелов не превзойдут наименьшее отклонение первой серии?

Искомая вероятность получается по формуле (4.3.14) при $x=0$. Вычислим ее, пользуясь последней из формул приведения (4.3.7′) и табл. VIII:

$$P(0;\ 14,\ 10,\ 4)=1-P(3;\ 14,\ 4,\ 4)=0{,}0010.$$

Приемочный контроль качества продукции

Простейшей схемой приемочного контроля качества массовой продукции является схема однократной выборки, которая состоит в следующем:

— проверяется выборка в n изделий из всей партии в N изделий;

— если число X дефектных изделий в выборке окажется не больше приемочного числа c, партия принимается, в противном случае партия проверяется полностью.

Для правильного выбора параметров n и c надо знать так называемую оперативную характеристику метода браковки: условную вероятность принятия партии, обладающей долей брака θ, при данной схеме контроля.

Пусть в партии содержится k дефектных изделий; тогда доля дефектных изделий будет равна $\theta = \frac{k}{N}$.

Оперативная характеристика метода $L(\theta, c, n)$ определяется равенством

$$L(\theta, c, n) = \boldsymbol{P}\{X \leqslant c \mid \theta\} =$$

$$= \sum_{x=0}^{c} p(x;\ N,\ n,\ k) = P(c;\ N,\ n,\ k),$$

т. е. может быть при малых N вычислена по табл. VIII, а при больших — по приближенным соотношениям.

§ 4.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАСКАЛЯ

Существо распределения Паскаля раскрывается следующей математической моделью.

Пусть проводится ряд независимых испытаний. Вероятность осуществления события A в отдельном испытании равна θ. Испытания прекращаются, как только событие A осуществится n раз. Тогда число X испытаний, которое надо провести до осуществления события ровно n раз, будет распределено по закону Паскаля.

Замечание. В отличие от биномиального и гипергеометрического распределений, при которых множество возможных значений СВ конечное, у распределения Паскаля множество возможных значений СВ счетное (не ограничено сверху).

Математическое выражение. Применяется двоякое математическое описание распределения Паскаля.

В одном случае за СВ принимают общее число X_1 испытаний, которое надо произвести до появления события A ровно n раз. Очевидно, $X_1 \geqslant n$.

В другом случае за СВ принимают только то число X_2 испытаний, которое превышает требуемое число n появлений события A. Очевидно, $X_2 \geqslant 0$.

Обе СВ связаны равенством $X_1 = X_2 + n$.

Распределение указанных СВ задается следующими формулами, в которых x принимает целые неотрицательные значения:

$$P\{X_1 = x\} = \pi_1(x;\ n,\ \theta) =$$

$$= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^n C_{x-1}^{n-1} (1-\theta)^x, \quad (x \geqslant n) \tag{4.4.1}$$

или

$$P\{X_1 = x\} = \frac{1}{\mu^n} C_{x-1}^{n-1} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x, \quad (x \geqslant n), \tag{4.4.1'}$$

где

$$\mu = \frac{1-\theta}{\theta} > 0; \tag{4.4.2}$$

$$P\{X_1 < x\} = \prod\nolimits_1 (x;\ n,\ \theta) = \sum_{i=n}^{x-1} \pi_1(i;\ n,\ \theta); \tag{4.4.3}$$

$$P\{X_2 = x\} = \pi_2(x;\ n,\ \theta) =$$

$$= C_{x+n-1}^{n-1} \theta^n (1-\theta)^x, \quad (x \geqslant 0) \tag{4.4.4}$$

или

$$P\{X_2 = x\} = C_{x+n-1}^{n-1} \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^n \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x, \ (x \geqslant 0); \tag{4.4.4'}$$

$$P\{X_2 < x\} = \prod_2 (x;\ n,\ \theta) = \sum_{i=0}^{x-1} \pi_2 (i;\ n,\ \theta) =$$

$$= \sum_{i=n}^{n+x-1} \pi_1 (i;\ n,\ \theta) = \prod_1 (n+x;\ n,\ \theta). \quad (4.4.5)$$

МО, дисперсии и СКО СВ X_1 и X_2 равны:

$$\hat{x}_1 = \frac{n}{\theta} = n\,(1+\mu); \quad (4.4.6)$$

$$\hat{x}_2 = \frac{n\,(1-\theta)}{\theta} = n\mu; \quad (4.4.7)$$

$$D\,[X_1] = D\,[X_2] = \frac{n\,(1-\theta)}{\theta^2} = n\mu\,(1+\mu); \quad (4.4.8)$$

$$\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \frac{1}{\theta}\sqrt{n\,(1-\theta)} = \sqrt{n\mu\,(1+\mu)}. \quad (4.4.9)$$

Распределение в форме (4.4.4) при $n=1$

$$\pi_2 (x;\ 1,\ \theta) = \theta\,(1-\theta)^x \quad (4.4.10)$$

называется *геометрическим* или распределением Фарри.

При определенных условиях распределение Паскаля близко к гипергеометрическому (§ 4.3).

В ы ч и с л е н и е. Вычисление вероятностей, задающих распределение Паскаля, сводится к вычислению вероятностей, определяющих биномиальное распределение (§ 4.1), а именно:

$$\pi_1 (x;\ n,\ \theta) = \theta b\,(n-1;\ x-1,\ \theta); \quad (4.4.11)$$

$$\prod_1 (x;\ n,\ \theta) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} b\,(j;\ x-1,\ \theta) =$$

$$= 1 - B\,(n;\ x-1,\ \theta); \quad (4.4.12)$$

$$\pi_2 (x;\ n,\ \theta) = \theta b\,(n-1;\ n+x-1,\ \theta); \quad (4.4.13)$$

$$\prod\nolimits_2 (x;\ n,\ \theta) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} b\,(j;n + x - 1,\ \theta) =$$
$$= 1 - B\,(n;\ n + x - 1,\ \theta). \qquad (4.4.14)$$

Пример 4.4.1. Предположим, что в определенных условиях вероятность получения отметки от цели на экране радиолокатора при одном обороте антенны равна $\theta = 0{,}7$. Цель считается обнаруженной, если от нее получено три отметки ($n=3$). Требуется определить вероятность того, что для обнаружения цели придется сделать не более пяти оборотов антенны.

Искомая вероятность определяется по формуле (4.4.3)

$$P\{X_1 \leqslant 5\} = P\{X_1 < 6\} = \prod\nolimits_1 (6;\ 3,\ 0{,}7) =$$
$$= 1 - \sum_{j=0}^{2} b\,(j;\ 5,\ 0{,}7) = 0{,}8369.$$

Если воспользоваться приближением (4.1.7), получим

$$\prod\nolimits_1 (6;\ 3,\ 0{,}7) \approx 0{,}8553.$$

§ 4.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Одним из наиболее распространенных дискретных распределений является распределение Пуассона. По закону Пуассона распределено число случайных событий, происходящих в каком-либо интервале времени $(t,\ t+\tau)$, если поток событий простейший с параметром λ (§ 11.2).

«Временную» модель можно заменить «пространственной», понимая под λ среднюю плотность распределения точек в пространстве, а под τ меру соответствующей части пространства. Тогда закон Пуассона будет описывать распределение числа точек, попавших в часть пространства меры τ (в отрезок длины τ, в объем τ и т. д.).

Множество возможных значений СВ, подчиненной закону Пуассона, счетно.

М а т е м а т и ч е с к о е в ы р а ж е н и е. Обозначим среднее число событий, происходящих в промежутке времени τ (или среднее число точек, попадающих в часть пространства меры τ), через μ ($\mu=\lambda\tau$).

Вероятность того, что событие A (в промежутке времени τ) осуществится x раз, равна

$$\psi(x;\ \mu) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}, \tag{4.5.1}$$

а вероятность того, что событие осуществится менее x раз, т. е. функция распределения СВ X при x целом, равна

$$\boldsymbol{P}\{X < x\} = \Psi(x;\ \mu) = \sum_{i=0}^{x-1}\psi(i;\ \mu) =$$
$$= 1 - \tilde{\Psi}(x;\ \mu), \quad (x = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{4.5.2}$$

где

$$\tilde{\Psi}(x;\ \mu) = \boldsymbol{P}\{X \geqslant x\} = \sum_{i=x}^{\infty}\psi(i;\ \mu). \tag{4.5.3}$$

МО, дисперсия и СКО числа появлений события A определяются выражениями:

$$\hat{x} = \mu; \tag{4.5.4}$$
$$D = \sigma^2 = \mu. \tag{4.5.5}$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального распределения (§ 4.1). Именно, если число испытаний n неограниченно возрастает, а вероятность θ осуществления события в каждом испытании уменьшается так, что при этом $n\theta=\mu=\mathrm{const}$, то (4.1.1) в пределе дает (4.5.1):

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\theta=\mathrm{const}}} b(x;\ n,\ \theta) = e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^x}{x!} = \psi(x;\ n\theta). \tag{4.5.6}$$

На этом основана возможность замены (4.1.9) и (4.1.10) двухпараметрического биномиального распределения, при котором СВ может принимать конечное число значений (от 0 до n), однопараметрическим распределением Пуассона, при котором СВ может принимать счетное число значений (от 0 до ∞).

Замена дает хорошую точность при малых значениях вероятности θ появления события (§ 4.1).

Замечание. Последнее обстоятельство дает основание некоторым авторам называть закон Пуассона законом редких событий.

Несмотря на то что в практических задачах чаще всего приходится иметь дело с дискретными СВ, принимающими конечное множество значений, в таких задачах широко применяется закон Пуассона, если множество возможных значений достаточно велико.

Вычисление. Значения функции $\psi(x; \mu)$, определяемой формулой (4.5.1), приведены в табл. VI, а значения функции $\tilde{\Psi}(x; \mu)$, определяемой формулой (4.5.3), в табл. VII.

Таблицы охватывают достаточно большую область значений параметра μ: 0,1 (0,1) 15, 16 (2) 30, 40 (10) 100. При больших значениях μ ($\mu>9$), которых нет в таблицах, можно пользоваться следующими приближениями:

$$\psi(x; \mu) \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\mu}}\right); \qquad (4.5.7)$$

$$\boldsymbol{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = \sum_{i=x_1}^{x_2} \psi(i; \mu) \approx$$

$$\approx \Phi_0\left(\frac{x_2+\frac{1}{2}-\mu}{\sqrt{\mu}}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1-\frac{1}{2}-\mu}{\sqrt{\mu}}\right). \qquad (4.5.8)$$

Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi_0(x)$ находятся по табл. II и III.

Многомерное распределение Пуассона

$$\psi(x_1, \ldots, x_m; \mu_1, \ldots, \mu_m) =$$

$$= e^{-(\mu_1+\ldots+\mu_m)} \frac{\mu_1^{x_1} \ldots \mu_m^{x_m}}{x_1! \ldots x_m!} \qquad (4.5.9)$$

можно рассматривать как предельное для полиномиального распределения (§ 4.2), когда n неограниченно возрастает, а $n\theta_i = \mu_i$ ($i=1, \ldots, m$) сохраняют постоянство.

Пример 4.5.1. База снабжения рассчитана на одновременное хранение n деталей. За период T между пополнениями запасов на базу в среднем поступает μ заявок (каждая заявка на одну деталь). Число поступающих заявок подчинено закону Пуассона. Заявки удовлетворяются в конце срока T, причем, если число поступивших заявок больше n, то удовлетворяются любые n из них. Определить, какое наименьшее количество n деталей нужно иметь на базе, т. е. какова должна быть емкость базы, чтобы вероятность отказа в удовлетворении заявки была не более δ.

Условная вероятность $p(i)$ того, что заявка получит отказ, если всего подано i заявок, равна

$$p_{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{, если } i \leqslant n; \\ \dfrac{i-n}{i} & \text{, если } i > n. \end{cases}$$

Вероятность поступления i заявок равна $\psi(i; \mu)$.

Безусловная (полная) вероятность $\alpha(n)$ неудовлетворения заявки согласно (1.3.2) равна

$$\alpha(n) = \sum_{i=0}^{\infty} p(i)\,\psi(i, \mu) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i-n}{i}\,\psi(i; \mu) =$$

$$= \tilde{\Psi}(n+1; \mu) - n \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\varphi(i; \mu)}{i}.$$

Пусть, например, $\mu = 100$ и $\delta = 0{,}05$.

Тогда, пользуясь табл. VI и VII, найдем: $\alpha(97) = 0{,}051$, $\alpha(98) = 0{,}045$.

Условие $\alpha(n) < \delta$ выполняется при $n \geqslant 98$. Следовательно, наименьшая емкость базы равна 98.

Глава 5

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 5.1. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В природе и различных областях человеческой деятельности весьма распространены СВ, которые представляют собой сумму большого числа независимых или слабо зависимых СВ, дисперсии которых малы по сравнению с дисперсией всей суммы. Распределения таких СВ большей частью бывают неизвестны и в то же время при весьма общих дополнительных условиях они хорошо аппроксимируются нормальным распределением (§ 3.3). Этим объясняется широкое распространение последнего. Нормальное распределение применяется и в тех случаях, когда истинный закон распределения известен, но вычисления по этому закону затруднительны, а аппроксимация его нормальным распределением допустима (§ 4.1, 4.3, 4.5, 5.3, 5.11, 5.12).

Замечание. Несмотря на широкое распространение, нормальное распределение не универсально.. Если нет уверенности в его применимости, следует проверить возможность использования нормального распределения для описания СВ с помощью критериев согласия (§ 14.1).

Математическое выражение. Общий вид плотности нормального распределения

$$\varphi(x) = Ae^{-(a_{11}x^2+2a_1x+a)}, \quad (-\infty < x < +\infty) \qquad (5.1.1)$$

при условии, что

$$a_{11} > 0; \; A = \sqrt{\frac{a_{11}}{\pi}}; \quad a = -a_1x_0, \qquad (5.1.2)$$

где

$$x_0 = -\frac{a_1}{a_{11}}. \quad (5.1.3)$$

Обычно для нормального распределения в общем виде применяют выражение

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{a_{11}}{\pi}}\, e^{-a_{11}(x-x_0)^2}. \quad (5.1.4)$$

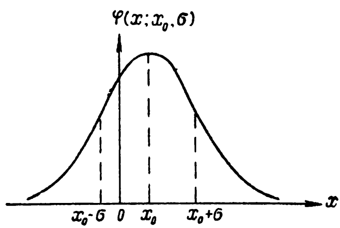

Рис. 5.1.1

МО, дисперсия и СКО определяются равенствами:

$$\hat{x} = x_0; \quad (5.1.5)$$

$$D = \sigma^2 = \frac{1}{2a_{11}}. \quad (5.1.6)$$

Нормальное распределение симметрично относительно МО x_0, которое часто называют *центром рассеивания* (рис. 5.1.1). Медиана и мода совпадают с x_0.

Нормальное распределение полностью определяется двумя параметрами. Чаще всего используются центр рассеивания и СКО. При этом плотность вероятности будем обозначать

$$\varphi(x;\ x_0,\ \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}. \quad (5.1.7)$$

График функции $\varphi(x;\ x_0,\ \sigma)$ показан на рис. 5.1.1.

Наряду с равенством (5.1.7) широко распространено выражение плотности вероятности в виде

$$\hat{\varphi}(x;\ x_0,\ E) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}\,E}\, e^{-\frac{\rho^2 (x-x_0)^2}{E^2}}, \tag{5.1.8}$$

где $\rho=0{,}4769$ является решением уравнения

$$4\int_0^{\rho} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Величину E называют *срединным* (или *вероятным*) *отклонением*. Ее название объясняется тем, что вероятности отклонений СВ X от центра рассеивания на величину, меньшую E, и на величину, большую E, равны между собой, т. е.

$$\boldsymbol{P}\{|X - x_0| < E\} = \boldsymbol{P}\{|X - x_0| > E\} = 0{,}5.$$

В некоторых курсах по теории вероятностей и ее приложениям помимо σ и E встречаются другие характеристики рассеивания СВ X: E_1 — *среднее арифметическое отклонение* и h — *мера точности*.

Величина E_1 согласно формуле (3.2.16) определяется равенством

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x - x_0|\,\varphi(x)\,dx.$$

Существо величины h можно уяснить из выражения для плотности вероятности

$$\varphi_h(x;\ x_0,\ h) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 (x-x_0)^2}.$$

Чем больше h, тем вероятнее близость СВ X к ее среднему значению x_0.

Связь между разными характеристиками рассеивания нормального распределения приведена в табл. 5.1.1. Численные значения коэффициентов, входящих в нее, указаны в табл. I. Полезно помнить приближенное равенство $E \approx \frac{2}{3}\sigma$.

Таблица 5.1.1

Характеристики рассеивания	σ	E	E_1	h
$\sigma =$	σ	$\frac{1}{\rho\sqrt{2}}E$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}E_1$	$\frac{1}{\sqrt{2}h}$
$E =$	$\rho\sqrt{2}\sigma$	E	$\rho\sqrt{\pi}E_1$	$\frac{\rho}{h}$
$E_1 =$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$	$\frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}E$	E_1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}h}$
$h =$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$	$\frac{\rho}{E}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}E_1}$	h

Функция распределения определяется равенствами:

$$\Phi(x;\ x_0,\ \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-x_0)^2}{2\sigma^2}}\,dt; \qquad (5.1.9)$$

$$\hat{\Phi}(x;\ x_0,\ E) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}\,E}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\rho^2(t-x_0)^2}{E^2}}\,dt. \qquad (5.1.10)$$

Выбор одного из этих равноправных выражений для расчетов зависит только от вкуса расчетчика и наличия соответствующих таблиц.

Вычисление. Вычисление значений плотности вероятности производится с помощью таблиц функций

$\varphi(x; 0, 1)$ и $\hat{\varphi}(x; 0, 1)$. Для краткости они обозначаются:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \tag{5.1.11}$$

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 x^2}. \tag{5.1.12}$$

Функции $\varphi(x)$ и $\hat{\varphi}(x)$ называют *нормированными плотностями* нормального распределения.

Расчетные формулы для определения значений плотности вероятности в формах (5.1.7) и (5.1.8) имеют вид:

$$\varphi(x;\ x_0,\ \sigma) = \frac{1}{\sigma}\ \varphi(s); \tag{5.1.13}$$

$$\hat{\varphi}(x;\ x_0,\ E) = \frac{1}{E}\ \hat{\varphi}(s'), \tag{5.1.14}$$

где

$$s = \frac{x - x_0}{\sigma};\ \ s' = \frac{x - x_0}{E}. \tag{5.1.15}$$

Значения нормированных плотностей приведены в табл. II и IV для положительных значений аргумента. Если аргумент отрицателен, то используется четность нормированной плотности вероятности

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \tag{5.1.16}$$

и вычисления производятся для абсолютной величины аргумента.

Для вычисления значений функции распределения в форме (5.1.9) сначала определяется величина s из первого равенства (5.1.15), а затем в табл. III находят значение функции

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{5.1.17}$$

при $x = |s|$.

Искомое значение функции распределения вычисляется по формуле

$$\Phi(x;\ x_0,\ \sigma) = \begin{cases} 0{,}5 + \Phi_0(s), \text{ если } s \geqslant 0; \\ 0{,}5 - \Phi_0(|s|), \text{ если } s \leqslant 0. \end{cases} \tag{5.1.18}$$

Вычисление значений функции распределения в форме (5.1.10) производится с помощью табл. V. После определения величины s' из второго равенства (5.1.15) в табл. V отыскивается значение функции

$$\hat{\Phi}_0(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\rho^2 t^2}\, dt \tag{5.1.19}$$

при $x = |s'|$. Затем искомое значение функции распределения вычисляется по формуле

$$\hat{\Phi}(x;\ x_0,\ E) = \begin{cases} 0{,}5 + \hat{\Phi}_0(s'), \text{ если } s' \geqslant 0; \\ 0{,}5 - \hat{\Phi}_0(|s'|), \text{ если } s' \leqslant 0. \end{cases} \tag{5.1.20}$$

Формулы (5.1.18) и (5.1.20) основаны на том, что функции $\Phi_0(x)$ и $\hat{\Phi}_0(x)$ нечетны, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0(-x) &= -\Phi_0(x); \\ \hat{\Phi}_0(-x) &= -\hat{\Phi}_0(x). \end{aligned}\right\} \tag{5.1.21}$$

В литературе по теории вероятностей и ее приложениям для вычисления значений функции нормального распределения кроме форм $\Phi_0(x)$ и $\hat{\Phi}_0(x)$ * используются другие интегральные формы. Выражения разных интегральных форм нормального распределения и формулы перехода одних форм в другие приведены в табл. 5.1.2.

---

* В данном Справочнике отдано предпочтение функциям Φ_0 и $\hat{\Phi}_0$, так как они позволяют вдвое сократить объем таблиц.

Формулы перехода интегральных

№ по пор.	Функция	Φ	$\hat{\Phi}$
1	$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$	$\Phi(x)$	$\hat{\Phi}\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)$
2	$\hat{\Phi}(x)=\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\rho^2 t^2}\,dt$	$\Phi(\rho\sqrt{2}\,x)$	$\hat{\Phi}(x$
3	$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$	$\Phi(x)-0{,}5$	$\hat{\Phi}\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)-0{,}5$
4	$\hat{\Phi}_0(x)=\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\rho^2 t^2}\,dt$	$\Phi(\rho\sqrt{2}\,x)-0{,}5$	$\hat{\Phi}(x)-0{,}5$
5	$F(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$	$2\Phi(x)-1$	$2\hat{\Phi}\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)-1$
6	$\hat{F}(x)=\frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\rho^2 t^2}\,dt$	$2\Phi(\rho\sqrt{2}\,x)-1$	$2\hat{\Phi}(x)-1$
7	$\mathrm{erf}\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt$	$2\Phi(\sqrt{2}\,x)-1$	$2\hat{\Phi}\left(\frac{x}{\rho}\right)-1$

Таблица 5.1.2

форм нормального распределения

Φ_0	$\hat{\Phi}_0$	F	$\hat{F}$	erf
$0{,}5+\Phi_0(x)$	$0{,}5+\hat{\Phi}_0\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)$	$0{,}5\,[1+F(x)]$	$0{,}5\left[1+\hat{F}\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)\right]$	$0{,}5\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$
$0{,}5+\Phi_0(\rho\sqrt{2}x)$	$0{,}5+\hat{\Phi}_0(x)$	$0{,}5\,[1+F(\rho\sqrt{2}\,x)]$	$0{,}5\,[1+\hat{F}(x)]$	$0{,}5\,[1+\operatorname{erf}(\rho x)]$
$\Phi_0(x)$	$\hat{\Phi}_0\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)$	$0{,}5F(x)$	$0{,}5\hat{F}\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)$	$0{,}5\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
$\Phi_0(\rho\sqrt{2}\,x)$	$\hat{\Phi}_0(x)$	$0{,}5F(\rho\sqrt{2}\,x)$	$0{,}5\hat{F}(x)$	$0{,}5\operatorname{erf}(\rho x)$
$2\Phi_0(x)$	$2\hat{\Phi}_0\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)$	$F(x)$	$\hat{F}\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)$	$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
$2\Phi_0(\rho\sqrt{2}\,x)$	$2\hat{\Phi}_0(x)$	$F(\rho\sqrt{2}\,x)$	$\hat{F}(x$	$\operatorname{erf}(\rho x)$
$2\Phi_0(\sqrt{2}\,x)$	$2\hat{\Phi}_0\left(\frac{x}{\rho}\right)$	$F(\sqrt{2}\,x)$	$\hat{F}\left(\frac{x}{\rho}\right)$	$\operatorname{erf}(x)$

При пользовании табл. 5.1.2 полезно учесть следующие замечания.

1) В литературе встречаются разные обозначения для одних и тех же функций и одинаковые обозначения для разных функций. Поэтому всегда следует обращать внимание не на обозначение, а на выражение функции.

2) Для функции $\Phi_0(x)$ распространены названия — интеграл вероятностей, интеграл Лапласа—Гаусса; для $\hat{\Phi}_0(x)$ — приведенный интеграл вероятностей; для $\hat{F}(x)$ — приведенная функция Лапласа; для $\mathrm{erf}\,(x)$ — функция Лапласа, интеграл вероятностей, функция Крампа, интеграл ошибок.

3) Значения постоянных величин, встречающихся в этой таблице, приведены в табл. I.

4) При вычислении значений функций Φ_0, $\hat{\Phi}_0$, F, $\hat{F}$ и erf от отрицательного аргумента следует использовать их нечетность.

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

Вероятность того, что СВ X не выйдет за пределы интервала (a, b), определяется согласно (3.1.9) равенствами:

$$P\{a < X < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_a^b e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}\, dx, \qquad (5.1.22)$$

или

$$P\{a < X < b\} = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}\,E} \int_a^b e^{-\frac{\rho^2(x-x_0)^2}{E^2}}\, dx. \qquad (5.1.23)$$

Для практического вычисления вероятности $P\{a \leqslant X \leqslant b\}$ выражения (5.1.22) и (5.1.23) преобразуются к виду:

$$P\{a<X<b\} = P\{s_1 < s < s_2\} = \Phi_0(s_2) - \Phi_0(s_1); \qquad (5.1.24)$$

$$P\{a<X<b\} = P\{s_1' < s' < s_2'\} = \hat{\Phi}_0(s_2') - \hat{\Phi}_0(s_1'), \qquad (5.1.25)$$

где

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{a - x_0}{\sigma}; \\ s_2 &= \frac{b - x_0}{\sigma}; \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} s_1' &= \frac{a - x_0}{E}; \\ s_2' &= \frac{b - x_0}{E}, \end{aligned}\right\} \tag{5.1.26}$$

и применяются табл. III и V соответственно с учетом нечетности функций Φ_0 и $\hat{\Phi}_0$.

В частном случае, когда границы интервала симметричны относительно центра рассеивания, т. е. $b - x_0 = x_0 - a = h$, то

$$P\{x_0 - h < X < x_0 + h\} = 2\Phi_0\left(\frac{h}{\sigma}\right) = 2\hat{\Phi}_0\left(\frac{h}{E}\right). \tag{5.1.27}$$

Используя формулы перехода (табл. 5.1.2), можно вычислять вероятность $P\{a < X < b\}$ с помощью таблиц других интегральных форм нормального распределения.

§ 5.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

Пусть СВ Y подчиняется закону нормального распределения. Тогда величина отклонения Y от нуля независимо от знака этого отклонения, т. е. СВ

$$X = |Y|, \tag{5.2.1}$$

образует распределение модуля СВ, подчиненной нормальному закону.

Математическое выражение. Распределение модуля СВ определяется теми же двумя параметрами, которые характеризуют исходное нормальное распределение.

Плотность вероятности равна

$$\bar{\varphi}(x;\ x_0,\ \sigma_н) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{\sigma_н}\left[\varphi\left(\dfrac{x - x_0}{\sigma_н}\right) + \varphi\left(\dfrac{x + x_0}{\sigma_н}\right)\right] \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } x > 0, \end{cases} \qquad (5.2.2)$$

где x_0, $\sigma_н$ — МО и СКО исходного нормального распределения;

$\varphi(t)$ — функция, определяемая равенством (5.1.11).

Функция распределения равна

$$\bar{\Phi}(x;\ x_0,\ \sigma_н) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ \Phi_0\left(\dfrac{x - x_0}{\sigma_н}\right) + \Phi_0\left(\dfrac{x + x_0}{\sigma_н}\right) \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } x > 0, \end{cases} \qquad (5.2.3)$$

где $\Phi_0(t)$ — функция, определяемая равенством (5.1.17).

График плотности вероятности приведен на рис. 5.2.1.

МО, дисперсия и СКО СВ X определяются равенствами:

$$\hat{x} = 2\left[x_0\Phi_0\left(\frac{x_0}{\sigma_н}\right) + \sigma_н\varphi\left(\frac{x_0}{\sigma_н}\right)\right]; \qquad (5.2.4)$$

$$D = \sigma^2 = \sigma_н^2 + x_0^2 - \hat{x}^2. \qquad (5.2.5)$$

В частности, при $x_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma_н = 0{,}7979\,\sigma_н; \\ D &= \frac{\pi - 2}{\pi}\,\sigma_н^2 = 0{,}3634\,\sigma_н^2; \\ \sigma &= \sqrt{\frac{\pi - 2}{\pi}}\,\sigma_н = 0{,}6028\,\sigma_н, \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.6)$$

а при $x_0 \to \infty$

$$\hat{x} \to x_0; \quad D \to \sigma_н^2; \quad \sigma \to \sigma_н. \qquad (5.2.7)$$

Вид распределения модуля случайной величины, распределенной по нормальному закону, зависит от соотношения между x_0 и $\sigma_н$ (рис. 5.2.1).

Для определения медианы нужно решить уравнение

$$\Phi_0\left(\frac{M_e - x_0}{\sigma_н}\right) + \Phi_0\left(\frac{M_e + x_0}{\sigma_н}\right) = 0{,}5,$$

а для определения моды — уравнение

$$\frac{M_0}{x_0} = \operatorname{th}\left(\frac{M_0}{\sigma_н} \cdot \frac{x_0}{\sigma_н}\right).$$

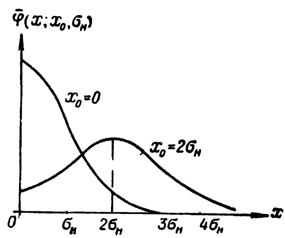

Рис. 5.2.1

Второе уравнение при $x_0 > \sigma_н$, а первое при любых x_0 и $\sigma_н$ решаются численными или графическими методами. При $x_0 \leqslant \sigma_н$ мода равна нулю.

Формулы (5.2.2) и (5.2.3) можно выразить через срединное отклонение $E_н$ исходного нормального распределения, заменив в них $\sigma_н$ на $E_н$, $\varphi(t)$ на $\hat{\varphi}(t)$, $\Phi_0(t)$ на $\hat{\Phi}_0(t)$. Функции $\hat{\varphi}(t)$ и $\hat{\Phi}_0(t)$ определяются равенствами (5.1.12) и (5.1.19).

Вычисление. Расчеты по формулам (5.2.2)—(5.2.4) производятся с помощью табл. II и III. Если расчетчик предпочитает выражение исходного нормального распределения через срединное отклонение, то используются табл. IV и V.

§ 5.3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Неотрицательная СВ X называется распределенной *логарифмически нормально*, если ее логарифм $Z = \lg X$

распределен по нормальному закону. Логарифмически нормальным распределением, как правило, хорошо аппроксимируются такие СВ X, которые образуются в результате умножения большого числа независимых или слабо зависимых неотрицательных СВ, дисперсия каждой из которых мала по сравнению с дисперсией их суммы.

Математическое выражение. Плотность вероятности при условии, что рассматривается десятичный логарифм СВ X, определяется равенством

$$l(x;\ x_0,\ \sigma_z) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{M_1 \sigma_z x} \varphi(u) = \dfrac{1}{M_1 \sigma_z x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \ \text{при} \ x > 0. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Функция распределения равна

$$L(x;\ x_0,\ \sigma_z) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \leqslant 0; \\ \Phi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ \text{при} \ x > 0. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

В равенствах (5.3.1) и (5.3.2):

$$u = \frac{\lg x - \lg x_0}{\sigma_z}; \tag{5.3.3}$$

$$M_1 = \frac{1}{\lg e} = 2{,}303.$$

График плотности вероятности приведен на рис. 5.3.1.

Логарифмически нормальное распределение определяется двумя параметрами x_0 и σ_z. Величина $\lg x_0$ представляет собой МО СВ $Z = \lg X$, а σ_z — ее СКО.

З а м е ч а н и е. Величина x_0 не является МО СВ X.

МО, дисперсия и СКО СВ X равны:

$$\hat{x} = x_0 e^{\frac{M_1^2 \sigma_z^2}{2}} = x_0 e^{2{,}651\,\sigma_z^2}; \tag{5.3.4}$$

$$D = \sigma^2 = \hat{x}^2 \left[\left(\frac{\hat{x}}{x_0} \right)^2 - 1 \right]. \tag{5.3.5}$$

При малых σ_z логарифмически нормальное распределение близко к нормальному (рис. 5.3.1). Если возни-

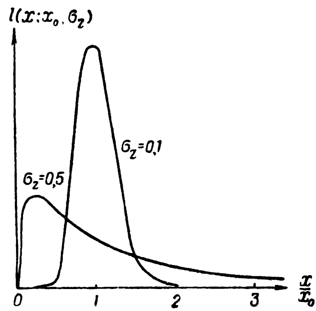

Рис. 5.3.1

кает необходимость (например, при композиции нормального распределения и логарифмически нормального распределения), то при $\sigma_z < 0{,}10—0{,}13$ допустима приближенная замена логарифмически нормального распределения нормальным с параметрами:

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= x_0 e^{\frac{M_1^2 \sigma_z^2}{2}} = x_0 e^{2{,}651\,\sigma_z^2}; \\ D &= M_1^2 x_0^2 \sigma_z^2 = 5{,}302 x_0^2 \sigma_z^2; \\ \sigma &= M_1 x_0 \sigma_z = 2{,}303 x_0 \sigma_z. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.6}$$

Медиана и мода определяются равенствами:

$$M_e = x_0; \tag{5.3.7}$$

$$M_0 = x_0 e^{-M_1^2 \sigma_z^2} = x_0 e^{-5{,}302\,\sigma_z^2}. \tag{5.3.8}$$

Вычисление. Для определения значений функции распределения $L(x; x_0, \sigma_z)$ при заданных x_0 и σ_z вычисляются значения u по формуле (5.3.3), а затем, используя табл. III, значения $\Phi_0(u)$. Искомые значения функции распределения определяются равенством

$$L(x;\ x_0,\ \sigma_z) = 0{,}5 + \Phi_0(u). \tag{5.3.9}$$

Определение значений плотности вероятности по формуле (5.3.1) производится с помощью табл. II.

Иногда рассматривается нормально распределенный натуральный логарифм СВ X. В этом случае все формулы данного параграфа остаются в силе, если величину M_1 заменить единицей, а десятичные логарифмы — натуральными.

§ 5.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

Пусть случайный вектор $\boldsymbol{R}$ подчиняется двумерному нормальному распределению, у которого главные СКО равны между собой (§ 7.1), а МО равно нулю.

СВ X, представляющая собой модуль случайного вектора $\boldsymbol{R}$, т. е. $X = |R|$, подчиняется *распределению Рэлея.*

Математическое выражение. Распределение Рэлея определяется одним параметром $\sigma_к$ — радиальным СКО исходного двумерного нормального распределения, которое называют также круговым распределением (рассеиванием) (§ 7.1).

Плотность вероятности равна

$$k(x;\ \sigma_к) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ \dfrac{x}{\sigma_к^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_к^2}} \text{ при } x > 0. \end{cases} \tag{5.4.1}$$

Функция распределения определяется равенством

$$K(x;\ \sigma_к) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_к^2}} \text{ при } x > 0. \end{cases} \qquad (5.4.2)$$

График плотности вероятности приведен на рис. 5.4.1.

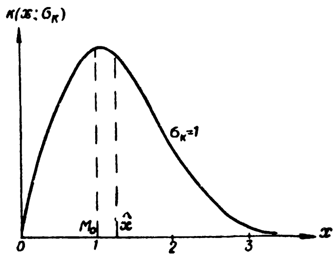

Рис. 5.4.1

МО, дисперсия и СКО равны:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_к = 1{,}253\sigma_к; \qquad (5.4.3)$$

$$D = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma_к^2 = 0{,}4292\sigma_к^2; \qquad (5.4.4)$$

$$\sigma = \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}\sigma_к = 0{,}6551\sigma_к. \qquad (5.4.5)$$

Медиана и мода определяются равенствами:

$$M_e = \sqrt{2\ln 2}\,\sigma_к = 1{,}177\sigma_к, \qquad (5.4.6)$$

$$M_0 = \sigma_к. \qquad (5.4.7)$$

Распределение Рэлея может быть выражено через другую характеристику исходного кругового распределения — радиальное срединное отклонение $E_к$, связанное с $\sigma_к$ зависимостью

$$E_к = \rho\sqrt{2}\,\sigma_к = 0{,}6745\sigma_к.$$

В этом случае плотность вероятности и функция распределения принимают вид:

$$\hat{k}(x;\ E_к) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0; \\ \dfrac{2\rho^2}{E_к^2}\, x e^{-\frac{\rho^2 x^2}{E_к^2}} & \text{при } x > 0. \end{cases} \qquad (5.4.1')$$

$$\hat{K}(x;\ E_к) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-\frac{\rho^2 x^2}{E_к^2}} & \text{при } x > 0. \end{cases} \qquad (5.4.2')$$

Вычисление. Расчеты по формулам (5.4.1) и (5.4.2) следует производить с помощью табл. XVII или табл. X.

Распределение Рэлея используется для вычисления вероятности попадания случайной точки N в круг C и круговое кольцо S при круговом распределении, если центр рассеивания совпадает с центром круга и центром кольца. Соответствующие вероятности равны:

$$P\{N \in C\} = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma_к^2}} = 1 - e^{-\frac{\rho^2 R^2}{E_к^2}}; \qquad (5.4.8)$$

$$P\{N \in S\} = e^{-\frac{R_1^2}{2\sigma_к^2}} - e^{-\frac{R_2^2}{2\sigma_к^2}} = e^{-\frac{\rho^2 R_1^2}{E_к^2}} - e^{-\frac{\rho^2 R_2^2}{E_к^2}}, \qquad (5.4.9)$$

где R — радиус круга C;

R_1, R_2 — внутренний и внешний радиусы кольца S соответственно.

Пример 5.4.1. Круговая **цель** C **радиуса** r_0 обстреливается при **следующих условиях:**

— центр двумерного нормального распределения совпадает с центром цели;

— рассеивание круговое с радиальным СКО $\sigma_К$;

— условная вероятность поражения цели $V(r)$ определяется равенством

$$V(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r < r_1; \\ \dfrac{r_2 - r}{r_2 - r_1} & \text{при } r_1 \leqslant r < r_2; \\ 0 & \text{при } r \geqslant r_2, \end{cases}$$

причем $r_2 < r_0$.

Требуется определить вероятность W поражения цели.

Вероятность dP попадания в кольцо dS с внутренним и внешним радиусами r и $r + dr$ равна приращению функции распределения dK. Следовательно, согласно формуле (5.4.2) или (5.4.1)

$$dP = dK = k\left(r\colon \sigma_К\right) dr = \frac{r}{\sigma_К^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_К^2}} dr.$$

Применяя теорему умножения вероятностей, находим вероятность dW того, что одновременно произойдут два события: попадание в кольцо dS и поражение цели при условии, что попадание в кольцо имело место:

$$dW = V(r)\,dP = \begin{cases} dP & \text{при } r < r_1; \\ \dfrac{r_2 - r}{r_2 - r_1}\,dP & \text{при } r_1 \leqslant r < r_2; \\ 0 & \text{при } r \geqslant r_2, \end{cases}$$

откуда согласно формуле полной вероятности (3.2.19)

$$W = \frac{1}{\sigma_К^2} \int_0^{r_1} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_К^2}} r\,dr + \frac{1}{\sigma_К^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma_К^2}} dr.$$

После вычислений получим

$$W = 1 - 2e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma_К^2}} + \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma_К}{r_2 - r_1}\left[\Phi_0\left(\frac{r_2}{\sigma_К}\right) - \Phi_0\left(\frac{r_1}{\sigma_К}\right)\right].$$

В частности, при $r_2 = r_1 = R$ можно путем предельного перехода получить отсюда формулу (5.4.8).

§ 5.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Пусть случайный вектор R подчиняется трехмерному нормальному распределению, у которого главные СКО равны между собой (§ 7.5), а МО равно нулю.

СВ X, равная модулю случайного вектора R, подчиняется *распределению Максвелла.*

Закон Максвелла применяется также для описания распределения скоростей молекул газа.

Математическое выражение. Распределение Максвелла определяется одним параметром σ_c — радиальным СКО исходного трехмерного нормального распределения, которое называют также сферическим распределением (рассеиванием) (§ 7.5).

Плотность вероятности определяется равенством

$$s(x;\sigma_c)=\begin{cases}0 \text{ при } x\leqslant 0;\\ \dfrac{2x^2}{\sigma_c^3}\varphi\left(\dfrac{x}{\sigma_c}\right)=\dfrac{x^2}{\sigma_c^3}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_c^2}} \text{ при } x>0.\end{cases} \tag{5.5.1}$$

Функция распределения равна

$$S(x;\sigma_c)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0;\\ 2\left[\Phi_0\left(\dfrac{x}{\sigma_c}\right)-\dfrac{x}{\sigma_c}\varphi\left(\dfrac{x}{\sigma_c}\right)\right] & \text{при } x>0,\end{cases} \tag{5.5.2}$$

где $\varphi(t)$ — функция, определяемая равенством (5.1.11);
$\Phi_0(t)$ — функция, определяемая равенством (5.1.17).

График плотности вероятности приведен на рис. 5.5.1.

МО, дисперсия и СКО равны:

$$\hat{x}=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_c=1{,}596\,\sigma_c; \tag{5.5.3}$$

$$D=\left(3-\frac{8}{\pi}\right)\sigma_c^2=0{,}4535\,\sigma_c^2; \tag{5.5.4}$$

$$\sigma=\sqrt{3-\frac{8}{\pi}}\,\sigma_c=0{,}6734\,\sigma_c. \tag{5.5.5}$$

Медиана определяется уравнением

$$\Phi_0\left(\frac{M_e}{\sigma_c}\right)-\frac{M_e}{\sigma_c}\,\varphi\left(\frac{M_e}{\sigma_c}\right)=0{,}25,$$

решение которого — $M_e=1{,}538\,\sigma_c$.

Мода определяется равенством

$$M_0=\sqrt{2}\,\sigma_c=1{,}414\,\sigma_c. \qquad (5.5.6)$$

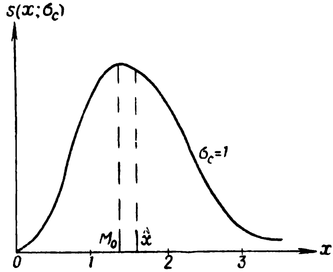

Рис. 5.5.1

При описании хаотического движения молекул газа распределение Максвелла обычно выражают через моду в виде

$$s_{M_0}(x;\ M_0)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0;\\ \dfrac{4x^2}{\sqrt{\pi}\,M_0^3}\,e^{-\frac{x^2}{M_0^2}} & \text{при } x>0,\end{cases} \qquad (5.5.7)$$

где x — скорость молекулы, а M_0 — наивероятнейшее значение скорости.

Распределение Максвелла, выраженное через радиальное срединное отклонение E_c исходного трехмерного нормального распределения, имеет вид:

$$\hat{s}(x;\ E_c)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0;\\ \dfrac{4\rho^2x^2}{E_c^3}\,\hat{\varphi}\left(\dfrac{x}{E_c}\right)=\dfrac{4\rho^3}{\sqrt{\pi}\,E_c^3}\,x^2e^{-\frac{\rho^2x^2}{E_c^2}} & \text{при } x>0.\end{cases} \qquad (5.5.1')$$

$$\hat{S}(x;\ E_c)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0;\\ 2\left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{x}{E_c}\right)-\frac{x}{E_c}\hat{\varphi}\left(\frac{x}{E_c}\right)\right] & \text{при } x>0.\end{cases}\tag{5.5.2'}$$

Вычисление. Расчеты по формулам (5.5.1) и (5.5.2) следует производить с помощью таблиц II и III, а по формулам (5.5.1′) и (5.5.2′) — с помощью табл. IV и V.

Распределение Максвелла используется для вычисления вероятности попадания случайной точки N в сферу C и слой S между двумя концентрическими сферическими поверхностями, если центр рассеивания совпадает с центром сферы и центром сферического слоя. Соответствующие вероятности равны:

$$P\{N\in C\}=4\left[\Phi_0\left(\frac{R}{\sigma_c}\right)-\frac{R}{\sigma_c}\varphi\left(\frac{R}{\sigma_c}\right)\right]=$$
$$=4\left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{R}{E_c}\right)-\frac{R}{E_c}\hat{\varphi}\left(\frac{R}{E_c}\right)\right];\tag{5.5.8}$$

$$P\{N\in S\}=4\left[\Phi_0\left(\frac{R_2}{\sigma_c}\right)-\Phi_0\left(\frac{R_1}{\sigma_c}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{R_1}{\sigma_c}\varphi\left(\frac{R_1}{\sigma_c}\right)-\frac{R_2}{\sigma_c}\varphi\left(\frac{R_2}{\sigma_c}\right)\right]=4\left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{R_2}{E_c}\right)-\right.$$
$$\left.-\hat{\Phi}_0\left(\frac{R_1}{E_c}\right)+\frac{R_1}{E_c}\hat{\varphi}\left(\frac{R_1}{E_c}\right)-\frac{R_2}{E_c}\hat{\varphi}\left(\frac{R_2}{E_c}\right)\right],\tag{5.5.9}$$

где R — радиус сферы C;
R_1, R_2 — внутренний и внешний радиусы сферического слоя S соответственно.

§ 5.6. ЗАКОН РАВНОМЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ

Пусть возможные значения СВ X лежат в интервале $(a,\ b)$ и нет оснований для того, чтобы отдать предпочтение какому-либо из этих значений. При этих условиях СВ X подчиняется *закону равномерной плотности.* Распределение называют также законом равной вероятности, равновероятным, равномерным и прямоугольным распределением.

Замечание. Термин «равномерное распределение» может быть понят как детерминированное равномерное распределение и поэтому не рекомендуется.

Закону равномерной плотности может подчиняться, например, погрешность при измерениях с округлением или положение объекта в некоторой области, если ни одному из возможных положений нельзя отдать предпочтения.

Математическое выражение. Закон равномерной плотности определяется двумя параметрами — началом a и концом b интервала изменения СВ X. В качестве параметров закона равномерной плотности часто применяют также длину интервала изменения СВ X, которую обычно обозначают $2l$, и середину интервала c. Обе системы параметров связаны зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{b-a}{2}; \\ c &= \frac{b+a}{2}; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} b &= c+l; \\ a &= c-l. \end{aligned}\right\}$$

Плотность вероятности равна

$$h(x;\ c,\ l) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant c-l; \\ \dfrac{1}{2l} & \text{при } c-l < x \leqslant c+l; \\ 0 & \text{при } x > c+l \end{cases} \qquad (5.6.1)$$

или

$$h'(x;\ a,\ b) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant a; \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a < x \leqslant b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases} \qquad (5.6.1')$$

Функция распределения определяется равенством

$$H(x;\ c,\ l) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant c - l; \\ \dfrac{x - (c - l)}{2l} & \text{при } c - l < x \leqslant c + l; \\ 1 & \text{при } x > c + l \end{cases} \tag{5.6.2}$$

или

$$H'(x;\ a,\ b) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant a; \\ \dfrac{x - a}{b - a} & \text{при } a < x \leqslant b; \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases} \tag{5.6.2'}$$

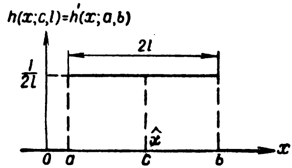

Рис. 5.6.1

Закон равномерной плотности симметричен относительно $c = \dfrac{a+b}{2}$. График плотности вероятности приведен на рис. 5.6.1.

МО, дисперсия и СКО равны:

$$\hat{x} = \frac{a+b}{2} = c; \tag{5.6.3}$$

$$D = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{l^2}{3} = 0{,}3333l^2; \tag{5.6.4}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}5774l. \tag{5.6.5}$$

Медиана совпадает с МО. Моды закон равномерной плотности не имеет, так как все значения плотности вероятности равны между собой.

Вероятность попадания СВ X в интервал (m, n), который не выходит за пределы интервала (a, b), определяется равенством

$$P\{m < X < n\} = \frac{n - m}{b - a} = \frac{h}{l}, \qquad (5.6.6)$$

где $2h$ — длина интервала (m, n). Эта вероятность не зависит от расположения интервала (m, n).

§ 5.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СИМПСОНА

Пусть каждая из двух независимых СВ Y и Z подчиняется закону равномерной плотности в интервале (a, b). Тогда их сумма

$$X = Y + Z$$

подчиняется *закону Симпсона* (треугольному распределению). Иначе говоря, распределение Симпсона представляет собой композицию двух одинаковых законов равномерной плотности (§ 9.2).

Математическое выражение. Распределение Симпсона определяется двумя параметрами a и b — границами изменения СВ Y и Z или параметрами:

$$l = \frac{b - a}{2}; \quad c = \frac{b + a}{2}.$$

Плотность вероятности определяется равенством

$$h_1(x;\ c, l) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant c - 2l; \\ \dfrac{x - (c - 2l)}{4l^2} & \text{при } c - 2l < x \leqslant c; \\ \dfrac{c + 2l - x}{4l^2} & \text{при } c < x \leqslant c + 2l; \\ 0 & \text{при } x > c + 2l. \end{cases} \qquad (5.7.1)$$

Функция распределения равна

$$H_1(x;\ c,\ l) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant c - 2l; \\ \dfrac{[x-(c-2l)]^2}{8l^2} & \text{при } c-2l < x \leqslant c; \\ 1 - \dfrac{(c+2l-x)^2}{8l^2} & \text{при } c < x \leqslant c+2l; \\ 1 & \text{при } x > c+2l. \end{cases} \quad (5.7.2)$$

Можно записать плотность вероятности и функцию распределения в зависимости от параметров a и b, выразив c и l через эти параметры.

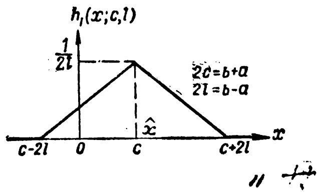

Рис. 5.7.1

Распределение Симпсона симметрично. График плотности вероятности приведен на рис. 5.7.1.

МО, дисперсия и СКО равны:

$$\hat{x} = \frac{a+b}{2} = c; \quad (5.7.3)$$

$$D = \frac{(b-a)^2}{6} = \frac{2}{3} l^2 = 0{,}6667 l^2; \quad (5.7.4)$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, l = 0{,}8165 l. \quad (5.7.5)$$

Медиана и мода совпадают с МО.

Пример 5.7.1. Длина отрезка измеряется линейкой, которая короче отрезка, но длиннее его половины.

Измерение производится следующим образом. На измеряемый отрезок вблизи его середины наносится отметка. Измеряются расстояния от отметки до концов отрезка и затем складываются. Предполагается, что совмещение начала отсчета на линейке с отметкой, сделанной на отрезке, производится достаточно точно.

Требуется определить СКО измерения, если расстояние между делениями линейки равно 1 *см* и округление производится до ближайшего деления.

При указанном порядке измерения складываются ошибки измерения (погрешности округления) на каждом конце отрезка. Каждая из ошибок, которые принимаются независимыми, равновероятна в пределах половины деления шкалы, т. е. от 0 до 0,5 *см*. Таким образом, $a=0$; $b=0,5$.

Подставив эти значения в (5.7.5), получим $\sigma=0,204$ *см*.

§ 5.8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АРКСИНУСА

Пусть СВ Y подчиняется закону равномерной плотности в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Случайная величина X, определяемая равенством

$$X = m \sin (Y + y_0), \qquad (5.8.1)$$

подчиняется *распределению арксинуса.*

Распределению арксинуса подчиняются, например, отклонения точки, колеблющейся по закону вида

$$x = m \sin (\omega t + \varphi_0)$$

при условии, что отсчеты производятся в случайные моменты t периода колебаний, подчиняющиеся закону равномерной плотности.

Математическое выражение. Распределение арксинуса определяется одним параметром m — максимальным значением СВ X и не зависит от входящей в равенство (5.8.1) величины y_0.

Плотность вероятности равна

$$a(x; m) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -m; \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{m^2 - x^2}} & \text{при } -m < x < m; \\ 0 & \text{при } x \geqslant m. \end{cases} \qquad (5.8.2)$$

Функция распределения равна

$$A(x;\ m) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -m; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{m} & \text{при } -m < x < m; \\ 1 & \text{при } x \geqslant m. \end{cases} \qquad (5.8.3)$$

Распределение арксинуса симметрично относительно нуля. График плотности вероятности приведен на рис. 5.8.1.

Из (5.8.2) следует, что при $x = \pm m$ плотность вероятности обращается в бесконечность.

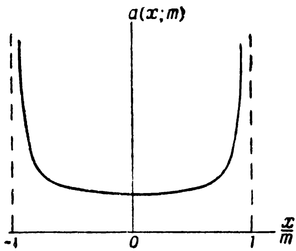

Рис. 5.8.1

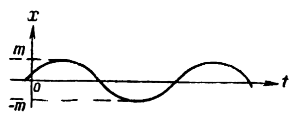

Рис. 5.8.2

МО, дисперсия и СКО равны:

$$\hat{x} = 0; \qquad (5.8.4)$$

$$D = 0{,}5\ m^2; \qquad (5.8.5)$$

$$\sigma = \frac{m\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071m. \qquad (5.8.6)$$

Медиана совпадает с МО. Моды распределение арксинуса не имеет (распределение антимодально).

З а м е ч а н и е. Если в равенстве (5.8.1) заменить синус косинусом, причем интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ заменяется интервалом $(0, \pi)$, то распределение **СВ X и** формулы (5.8.2) — (5.8.6) остаются неизменными.

Пример 5.8.1. Прямолинейный горизонтальный полет самолета сопровождается гармоническими колебаниями в горизонтальной плоскости около генерального курса (рис. 5.8.2) согласно уравнению

$$x = m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right),$$

где t — текущее время;

T — период колебаний;

φ_0 — начальная фаза, причем период существенно меньше времени полета снаряда.

Батарея зенитной артиллерии и курс самолета, по которому она стреляет, находятся в одной вертикальной плоскости.

Требуется определить среднюю квадратическую ошибку стрельбы в боковом направлении из-за отклонений самолета от генерального курса.

Определим сначала СКО самолета от генерального курса. Любое значение текущего времени не имеет преимуществ перед другими и поэтому следует считать, что при решении поставленной задачи величина t подчиняется закону равномерной плотности. Вместе с ней этому закону подчиняется угол $\varphi = \frac{2\pi t}{T} + \varphi_0$, как линейная функция от t (§ 8.1). Следовательно, отклонение самолета от генерального курса подчиняется распределению арксинуса, а СКО σ равно $\frac{m\sqrt{2}}{2}$.

Величина средней квадратической ошибки стрельбы зависит от способа выработки упреждения. Будем считать, что при определении упрежденной точки учитывается только генеральный курс самолета. При этом условии средняя квадратическая ошибка стрельбы в боковом направлении не отличается от СКО самолета от генерального курса и равна $\frac{m\sqrt{2}}{2}$. Например, при $m = 50$ *м* получим $\sigma \approx 35$ *м*.

§ 5.9. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ

Пусть СВ Y, представляющая угол между отрезком AB длины h, перпендикулярным оси Ox, и прямой BN (рис. 5.9.1), подчиняется закону равномерной плотности в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда СВ X, определяемая равенством

$$X = x_0 + h \operatorname{tg} Y, \tag{5.9.1}$$

подчиняется *распределению Коши* в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Математическое выражение. Распределение Коши определяется двумя параметрами x_0 и h, значение которых очевидно из рис. 5.9.1.

Плотность вероятности равна

$$c(x;\ x_0,\ h) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{h}{h^2+(x-x_0)^2},\quad (-\infty<x<+\infty). \tag{5.9.2}$$

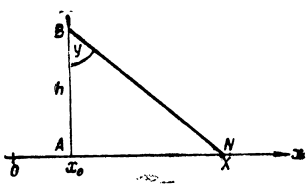

Рис. 5.9.1

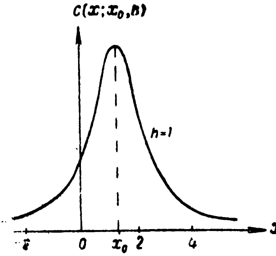

Рис. 5.9.2

Функция распределения определяется равенством

$$C(x;\ x_0,\ h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{h},\quad (-\infty<x<+\infty). \tag{5.9.3}$$

Распределение Коши симметрично относительно точки с координатой x_0. График плотности вероятности приведен на рис. 5.9.2.

МО СВ X не существует.

Замечание. Для существования МО, определяемого в соответствии с формулой (3.2.6′) равенством

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \tag{*}$$

требуется, чтобы интеграл в правой части этого равенства существовал.

Подставив вместо $f(x)$ выражение плотности вероятности (5.9.2), получим для $M[X]$ формальное выражение

$$M[X] = \frac{h}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{h^2 + (x - x_0)^2} dx \qquad (**)$$

Интеграл (**) не существует, т. е. не существует

$$\lim_{\substack{M_1 \to \infty \\ M_2 \to \infty}} \frac{h}{\pi} \int\limits_{-M_1}^{M_2} \frac{x}{h^2 + (x - x_0)^2} dx,$$

если M_1 и M_2 стремятся к бесконечности произвольным образом, а следовательно, не существует и МО СВ X. Это утверждение вызывает некоторое недоумение, так как плотность вероятности — симметричная относительно x_0 функция, и казалось бы естественным считать, что центр симметрии x_0 является средним значением (МО) СВ X. Такое заключение эквивалентно допущению, что для существования МО достаточно существования интеграла (**) в смысле главного значения, т. е. предела

$$\lim_{M \to \infty} \frac{h}{\pi} \int\limits_{-M}^{M} \frac{x}{h^2 + (x - x_0)^2} dx.$$

Ошибочность подобного заключения, а вместе с нею и фактическое содержание утверждения о несуществовании МО раскрываются тем, что попытка определения МО СВ X, подчиненной распределению Коши, по имеющейся статистической выборке ее значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не приведет к положительному результату. Иначе говоря, можно утверждать, что при беспредельном увеличении n не будет стремиться к единице вероятность того, что разность $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - x_0$ будет близка к нулю.

Дисперсии СВ X, подчиненной закону Коши, не существует.

Распределение Коши является примером распределения СВ, не имеющей МО и дисперсии.

Мода и медиана равны

$$M_o = M_e = x_0. \qquad (5.9.4)$$

§ 5.10. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть рассматривается простейший поток однородных событий (§ 11.2). Пусть произвольно назначен момент начала отсчета текущего времени. Тогда случайное время X появления очередного события подчиняется *экспоненциальному распределению.* В частности, этому распределению подчиняется величина промежутка времени между двумя смежными событиями простейшего потока.

Математическое выражение. Экспоненциальное распределение определяется одним параметром λ, который называют *интенсивностью* или *плотностью* потока событий. Наряду с λ применяют параметр x_0 — среднее время между моментами наступления двух смежных событий, связанное с λ соотношением

$$x_0 = \frac{1}{\lambda}. \tag{5.10.1}$$

Плотность вероятности, равную

$$э(x;\,\lambda) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} = \dfrac{1}{x_0}\, e^{-\frac{x}{x_0}} \quad \text{при } x > 0, \end{cases} \tag{5.10.2}$$

иногда называют также применительно к потоку отказов *частотой отказов.*

Функция распределения, равная

$$Э\,(x;\,\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{x}{x_0}} \text{ при } x > 0, \end{cases} \tag{5.10.3}$$

представляет собой вероятность того, что очередное событие наступит в промежутке времени $(0,\,x)$. Поэтому выражение

$$P = e^{-\lambda x} = e^{-\frac{x}{x_0}} \tag{5.10.4}$$

означает вероятность отсутствия событий (например, вероятность безотказной работы, если речь идет о простейшем потоке отказов) в промежутке $(0,\ x)$.

График плотности вероятности экспоненциального распределения приведен на рис. 5.10.1.

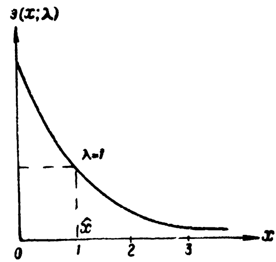

Рис. 5.10.1

Условная вероятность наступления очередного события в промежутке времени $(x,\ x+dx)$ при условии его ненаступления в промежутке $(0,\ x)$ равна λdx. Безусловная вероятность того же события равна $э(x;\ \lambda)\,dx$. Величины $\lambda, э(x;\ \lambda)$ и $Э(x;\ \lambda)$ связаны равенством

$$\lambda = \frac{э(x;\ \lambda)}{1 - Э(x;\ \lambda)}. \qquad (5.10.5)$$

МО, дисперсия и СКО равны:

$$\hat{x} = x_0 = \frac{1}{\lambda}; \qquad (5.10.6)$$

$$D = \sigma^2 = x_0^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (5.10.7)$$

Медиана и мода определяются равенствами:

$$M_e = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}6931}{\lambda} = 0{,}6931 x_0; \qquad (5.10.8)$$

$$M_0 = 0. \qquad (5.10.9)$$

Пример 5.10.1 Пусть время безотказной работы технического устройства подчиняется экспоненциальному закону. Среднее время между появлением двух смежных отказов, называемое средним временем безотказной работы, равно x_0.

Требуется определить вероятность безотказной работы к моменту x_0 после включения технического устройства.

Из формулы (5.10.4) следует, что вероятность безотказной работы к моменту $x=x_0$ равна

$$e^{-\frac{x}{x_0}}\Bigg|_{x=x_0} = e^{-1} = 0{,}3679.$$

причем эта вероятность не зависит от того, сколько времени проработало устройство до момента включения. Указанное свойство СВ, подчиняющейся экспоненциальному распределению, связано с отсутствием последействия в простейших потоках.

§ 5.11. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ χ^2

Если X_i независимые СВ, подчиняющиеся нормальному распределению, у которых МО равно нулю, а СКО равно единице, то СВ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \tag{5.11.1}$$

подчиняется распределению χ^2 (хи-квадрат) с k степенями свободы.

Замечание. Число степеней свободы СВ χ^2 определяется числом независимых СВ в сумме (5.11.1).

Распределение χ^2 применяется при решении многих задач математической статистики (§ 13.5).

Математическое выражение. Распределение χ^2 определяется одним параметром k, который называют *числом степеней свободы*.

Плотность вероятности равна

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} \text{ при } x > 0, \end{cases} \tag{5.11.2}$$

где $\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$ — гамма-функция, x — значение СВ χ^2.

Функция распределения определяется равенством

$$F_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ P\{\chi^2 < x\} = \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{k}{2}-1} dt = \\ = \dfrac{\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \text{ при } x > 0, \end{cases} \tag{5.11.3}$$

где $\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)$ — неполная гамма-функция.

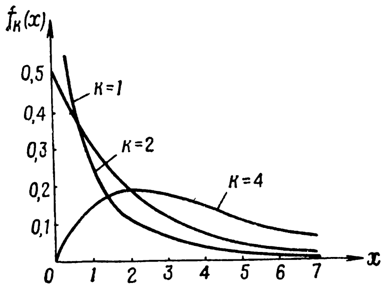

Рис. 5.11.1

График плотности вероятности приведен на рис. 5.11.1.

МО, дисперсия и СКО равны:

$$\hat{x} = k, \tag{5.11.4}$$

$$D = \sigma^2 = 2k. \tag{5.11.5}$$

Медиана может быть определена приближенным равенством

$$M_e \approx k - 0{,}66. \tag{5.11.6}$$

Мода при $k \geqslant 2$ равна

$$M_0 = k - 2. \qquad (5.11.7)$$

При $k=1$ мода отсутствует, так как $f_1=\infty$ при $x=0$.

Вычисление. В табл. XII приведены значения функции распределения $F_k(x)$ при $\chi^2 \leqslant 30$ и $k \leqslant 29$.

С увеличением k распределение χ^2 приближается к нормальному, но сравнительно медленно и поэтому приближенное выражение

$$P\{\chi^2 < x\} = F_k(x) \approx 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{x-k}{\sqrt{2k}}\right), \qquad (5.11.8)$$

где $\Phi_0(t)$ определяется равенством (5.1.17), может привести к большим погрешностям даже при k порядка 50—100. Гораздо точнее приближенное равенство

$$F_k(x) \approx 0{,}5 + \Phi_0\left(\sqrt{2x} - \sqrt{2k-1}\right), \qquad (5.11.9)$$

которым можно пользоваться при $k \geqslant 30$.

Для расчетов, связанных с распределением χ^2, распространены также таблицы функции

$$P\{\chi^2 \geqslant \chi_q^2\} = 1 - F_k(\chi_q^2) \qquad (5.11.10)$$

и другие таблицы, облегчающие решение конкретных задач (см. § 13.5 и табл. XII а).

§ 5.12. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Пусть СВ T задана равенством

$$T = \frac{Z\sqrt{k}}{V},$$

где Z — нормально распределенная СВ с нулевым МО и СКО, равным единице, а V — независимая от Z СВ, подчиненная распределению χ^2 (§ 5.11) с k степенями свободы. Тогда СВ T подчиняется распределению Стьюдента с k степенями свободы, которое называют также t-распределением.

Примером СВ, подчиняющейся распределению Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, может служить величина

$$t=\frac{(\bar{x}-x_0)\sqrt{n}}{s_1}=\frac{(\bar{x}-x_0)\sqrt{n-1}}{s}, \qquad (5.12.1)$$

где x_0 — МО нормально распределенной СВ X;
$\bar{x}$, s_1, s — статистические оценки МО и СКО СВ X (§ 13.3);
n — число наблюдений, при котором получены значения $\bar{x}$ и s_1.

Замечание. Уменьшение числа степеней свободы СВ, определяемой равенством (5.12.1), по сравнению с числом наблюдений объясняется тем, что в это равенство входит величина (§ 13.3) $s=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, образуемая разностями $x_i-\bar{x}$, между которыми существует одна связь $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$.

Распределение Стьюдента применяется при решении ряда задач математической статистики (§ 13.5).

Математическое выражение. Распределение Стьюдента определяется одним параметром k (число степеней свободы).

Плотность вероятности определяется равенством

$$s_k(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \qquad (5.12.2)$$

$$(-\infty<t<+\infty),$$

где Γ — гамма-функция.

Функция распределения

$$S_k(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt, \tag{5.12.3}$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

может быть выражена через элементарные функции с помощью громоздких рекуррентных формул.

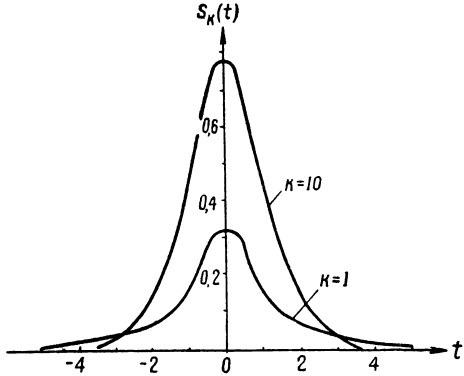

Рис. 5.12.1

Распределение Стьюдента симметрично. График плотности вероятности приведен на рис. 5.12.1.

МО, дисперсия и СКО равны:

$$\hat{t} = 0, \quad (k > 1); \tag{5.12.4}$$

$$D = \sigma_t^2 = \frac{k}{k-2}, \quad (k > 2). \tag{5.12.5}$$

При $k=1$ распределение Стьюдента приводит к распределению Коши (§ 5.9), у которого не существуют МО и дисперсия. С увеличением k распределение Стьюдента асимптотически приближается к нормальному с параметрами $\hat{x}=0$, $\sigma=1$.

Вычисление. Значение функции распределения $S_k(t)$ определяется по табл. XIII при $k \leqslant 19$ и $t \leqslant 6$. При $k \geqslant 20$ можно применять приближенное равенство

$$S_k(t) \approx 0{,}5 + \Phi_0(t). \tag{5.12.6}$$

Для расчетов, связанных с распределением Стьюдента, распространены таблицы функции

$$q(t) = 2\,[1 - S_k(t)] \tag{5.12.7}$$

и другие таблицы, облегчающие решение конкретных задач (см. § 13.5 и табл. XIIIa).

§ 5.13. УСЕЧЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При решении некоторых задач исключаются из рассмотрения значения СВ X, лежащие вне интервала (x_1, x_2). Распределение СВ X с областью изменения $x_1 < X < x_2$ называется *усеченным распределением.*

Усечение может быть односторонним. При усечении только справа $x_1 = -\infty$, при усечении только слева $x_2 = +\infty$.

Степень усечения определяется вероятностью того, что СВ X окажется вне интервала (x_1, x_2):

$$P\{X \bar{\in} (x_1, x_2)\} = 1 + F(x_1) - F(x_2), \tag{5.13.1}$$

где $F(x)$ — функция исходного распределения.

Усеченное распределение определяется параметрами исходного распределения, дополненными точками усечения x_1 и x_2.

Плотности вероятности усеченного и исходного распределений $f_{\text{ус}}$ и f связаны равенством

$$f_{\text{ус}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_1; \\ Af(x) & \text{при } x_1 < x \leqslant x_2; \\ 0 & \text{при } x > x_2, \end{cases} \tag{5.13.2}$$

где

$$A = \frac{1}{F(x_2) - F(x_1)} \tag{5.13.3}$$

Функции распределения усеченного и исходного распределений $F_{ус}$ и F связаны равенством

$$F_{ус}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_1; \\ A\,[F(x) - F(x_1)] & \text{при } x_1 < x \leqslant x_2; \\ 1 & \text{при } x > x_2. \end{cases} \quad (5.13.4)$$

Усеченное нормальное распределение

Степень усечения определяется вероятностью

$$P\{X \bar{\in} (x_1, x_2)\} = 1 + \Phi_0\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma_н}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma_н}\right) =$$

$$= 1 + \hat{\Phi}_0\left(\frac{x_1 - x_0}{E_н}\right) - \hat{\Phi}_0\left(\frac{x_2 - x_0}{E_н}\right). \quad (5.13.5)$$

В равенстве (5.13.5) x_0 и $\sigma_н$ (или $E_н$) — МО и СКО (или срединное отклонение) исходного нормального распределения; функции $\Phi_0(t)$ и $\hat{\Phi}_0(t)$ определяются равенствами (5.1.17) и (5.1.19).

Математическое выражение. Усеченное нормальное распределение определяется в общем случае четырьмя параметрами: двумя параметрами исходного нормального распределения x_0 и $\sigma_н$ и двумя точками усечения x_1 и x_2.

Плотность вероятности усеченного нормального распределения равна

$$\varphi(x;\ x_0, \sigma_н, x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_1; \\ \dfrac{A}{\sigma_н}\varphi(t) & \text{при } x_1 < x \leqslant x_2; \\ 0 & \text{при } x > x_2, \end{cases} \quad (5.13.6)$$

где

$$A = \frac{1}{\Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1)}; \quad (5.13.7)$$

$$t = \frac{x - x_0}{\sigma_н}, \quad t_1 = \frac{x_1 - x_0}{\sigma_н}, \quad t_2 = \frac{x_2 - x_0}{\sigma_н}. \quad (5.13.8)$$

Функции $\varphi(t)$ и $\Phi_0(t)$ определяются равенствами (5.1.11) и (5.1.17).

Функция распределения СВ X определяется равенством

$$\Phi(x;\ x_0,\ \sigma_н,\ x_1,\ x_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_1; \\ A\,[\Phi_0(t) - \Phi_0(t_1)] & \text{при } x_1 < x \leqslant x_2; \\ 1 & \text{при } x > x_2. \end{cases} \qquad (5.13.9)$$

График плотности вероятности приведен на рис. 5.13.1.

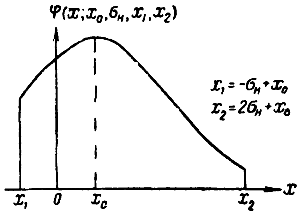

Рис. 5.13.1

МО, дисперсия и СКО СВ X равны:

$$\hat{x} = x_0 + B\sigma_н; \qquad (5.13.10)$$

$$D = \sigma^2 = \sigma_н^2\,\{1 - B^2 - A[t_2\varphi(t_2) - t_1\varphi(t_1)]\}, \qquad (5.13.11)$$

где

$$B = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_2)}{\Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1)}. \qquad (5.13.12)$$

В частности, при симметричном расположении точек усечения относительно центра рассеивания x_0, что эквивалентно равенству $t_1 = -t_2$:

$$\hat{x} = x_0; \quad D = \sigma_н^2\left[1 - \frac{t_2\varphi(t_2)}{\Phi_0(t_2)}\right]. \qquad (5.13.13)$$

Для определения медианы нужно решить уравнение

$$\Phi_0(t) = 0{,}5\,[\Phi_0(t_2) + \Phi_0(t_1)],$$

применяя табл. III.

Мода определяется равенством

$$M_o = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1 \geqslant x_0; \\ x_0, & \text{если } x_1 < x_0 < x_2; \\ x_2, & \text{если } x_2 \leqslant x_0. \end{cases} \qquad (5.13.14)$$

Равенства (5.13.6)—(5.13.13) можно выразить через срединное отклонение $E_н$ исходного нормального распределения, заменив в них $\sigma_н$ на $E_н$, $\varphi(t)$ на $\hat{\varphi}(t)$ и $\check{\Phi}_0(t)$ на $\hat{\Phi}_0(t)$. Функции $\hat{\varphi}(t)$ и $\hat{\Phi}_0(t)$ определяются равенствами (5.1.12) и (5.1.19).

Вычисление. Расчеты по формулам (5.13.6)—(5.13.13) производятся с помощью табл. II и III. Если исходное нормальное распределение выражено через срединное отклонение, то применяются табл. IV и V.

Пример 5.13.1. Из партии валов, диаметр которых X с достаточной точностью описывается нормальным распределением с параметрами $x_0=60$ *мм* и $\sigma_н=0{,}1$ *мм*, отбираются валы, удовлетворяющие условию $59{,}9 < X < 60{,}2$ *мм*. Требуется определить МО и СКО диаметра отобранных валов.

По условию $x_2=60{,}2$; $x_1=59{,}9$ *мм*. Подставив эти значения, а также x_0 и $\sigma_н$ в равенства (5.13.8), получаем $t_2=2$, $t_1=-1$. Из табл. II и III находим: $\varphi(t_1)=0{,}2420$; $\varphi(t_2)=0{,}0540$; $\Phi_0(t_1)=-0{,}3413$; $\Phi_0(t_2)=0{,}4772$ и после подстановки в равенства (5.13.7) и (5.13.12) получаем $A=1{,}222$, $B=0{,}2298$. Дальнейшая подстановка полученных величин в формулы (5.13.10) и (5.13.11) дает:

$$\bar{x} = x_0 + 0{,}023 = 60{,}023 \text{ мм}; \quad \sigma = 0{,}72\sigma_н = 0{,}072 \text{ мм}.$$

РАЗДЕЛ III
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ И МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 6
ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАВИСИМОСТИ

§ 6.1. МНОГОМЕРНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Если случайному событию приводится в соответствие точка $N(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в n-мерном пространстве, то совокупность координат этой точки называется n-мерной СВ, а соответствующий ей вектор $\boldsymbol{X}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *случайным вектором*. Совокупность СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (составляющих вектора $\boldsymbol{X}$) образует систему СВ.

Функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\} \quad (6.1.1)$$

называется *n-мерной функцией распределения вероятностей* (или сокращенно *функцией распределения*) случайного вектора $\boldsymbol{X}$ или функцией распределения системы СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Двумерное распределение называют также плоским, трехмерное — пространственным.

Вероятность того, что точка $N(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ окажется внутри параллелепипеда

$$a_1 \leqslant X_1 < b_1; \quad a_2 \leqslant X_2 < b_2; \quad \ldots; \quad a_n \leqslant X_n < b_n,$$

определяется равенством

$$P\{a_1 \leqslant X_1 < b_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2,\ \ldots,\ a_n \leqslant X_n < b_n\} =$$

$$= F(b_1, b_2, \ldots, b_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} p_{ij} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} p_{ijk} + \ldots + (-1)^n F(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad (6.1.2)$$

где $p_{ij\ldots m}$ — значение функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $x_i = a_i$, $x_j = a_j$, …, $x_m = a_m$ и при остальных x_s, равных b_s.

Многомерная функция распределения обладает следующими свойствами.

1) Не убывает по каждому аргументу.

2) Непрерывна слева по каждому аргументу.

3) Стремится к нулю, если хотя бы один аргумент стремится к $-\infty$:

$$\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

4) Стремится к единице, если все аргументы одновременно стремятся к $+\infty$:

$$\lim_{x_1 \to +\infty, \ldots, x_n \to +\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1.$$

5) При любых a_i и b_i правая часть выражения (6.1.2) не отрицательна, если соблюдается условие $a_i \leqslant b_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример 6.1.1. Пусть дана функция $F(x, y)$ такая, что

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \text{ или } x + y < 1, \text{ или } y < 0; \\ 1 \text{ в остальной части плоскости (рис. 6.1.1).} \end{cases}$$

Требуется выяснить, можно ли рассматривать $F(x, y)$ как функцию распределения.

Нетрудно убедиться, что первые четыре свойства выполнены, но при $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ и $b_1 = b_2 = 1$ правая часть (6.1.2) будет

$$F(1, 1) - F\left(\frac{1}{2}, 1\right) - F\left(1, \frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1.$$

Таким образом, пятое свойство не выполняется и функция $F(x, y)$ не может быть функцией распределения.

По аналогии с одномерными СВ (§ 3.1) многомерные СВ делят на непрерывные, дискретные и смешанные и предполагают, что функции распределения непрерывных СВ дифференцируемы во всей области возможных значений. Тогда распределение многомерной СВ можно характеризовать плотностью распределения вероятностей (или сокращенно плотностью вероятности)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}. \qquad (6.1.3)$$

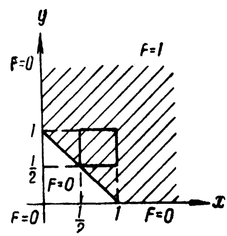

Рис. 6.1.1

При этом функция распределения выражается через плотность вероятности формулой

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n. \qquad (6.1.4)$$

В Справочнике (если нет специальных указаний) рассматриваются только непрерывные многомерные СВ, обладающие плотностью вероятности.

Свойства плотности вероятности:

1. Неотрицательная при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1. \qquad (6.1.5)$$

Вероятность попадания точки $N(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в область S равна

$$P\{N \in S\} = \int \underset{S}{\ldots} \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad (6.1.6)$$

Часто возникают задачи, при решении которых распределение некоторых СВ из числа образующих случайный вектор перестает нас интересовать.

Если подобная задача решается при известной функции распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то в последней следует оставить только интересующие нас переменные, а остальные устремить к $+\infty$.

Пример 6.1.2. Пусть дана функция распределения двумерной СВ

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}} du dv.$$

Требуется найти закон распределения СВ X.

Представляем $F(x, y)$ в виде

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(ru-v)^2}{2(1-r^2)}} dv \right] du.$$

Устремив y к $+\infty$, получим

$$F(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(ru-v)^2}{2(1-r^2)}} dv \right] du.$$

Интеграл в квадратной скобке равен $\sqrt{2\pi(1-r^2)}$. Следовательно,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Если та же задача решается при известной плотности вероятности $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то распределение интересующих нас переменных определяется путем интегрирования функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по остальным переменным в бесконечных пределах.

Пример 6.1.3. Пусть дана плотность вероятности двумерной СВ:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}}.$$

Требуется найти плотность вероятности СВ X.

Интегрируя $f(x, y)$ по y в бесконечных пределах, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}} dy,$$

откуда, действуя как в предыдущем примере, будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Если на часть составляющих случайного n-мерного вектора X $(X_1, \ldots, X_n)$ наложены некоторые ограничения (условия), то полученное при этом распределение называется *условным*. *Условной функцией распределения* случайного вектора X относительно события A называется условная вероятность (§ 1.1) совместного выполнения неравенств, входящих в (6.1.1), и неравенств и равенств, обусловленных осуществлением события A. Если последнее заключается в попадании случайной точки N_1 $(X_1, \ldots, X_n)$ в $n—m$-мерную область S, то условная функция распределения выражается формулой

$$F(x_1, \ldots, x_m \mid S) =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} \left[\int \cdots \int_S f(t_1, \ldots, t_n) dt_{m+1} \ldots dt_n\right] dt_1 \ldots dt_m}{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int \cdots \int_S f(t_1, \ldots, t_n) dt_{m+1} \ldots dt_n\right] dt_1 \ldots dt_m}. \quad (6.1.7)$$

В часто встречающемся случае фиксирования точки N_1, т. е. при $X_i = y_i$ $(i = m+1, \ldots, n)$, условная функция распределения имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_m \mid y_{m+1}, \ldots, y_n) =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} f(t_1, \ldots, t_m, y_{m+1}, \ldots, y_n) dt_1 \ldots dt_m}{f_1(y_{m+1}, \ldots, y_n)}, \quad (6.1.8)$$

а условная плотность вероятности

$$f(x_1, \ldots, x_m \mid y_{m+1}, \ldots, y_n) = \\ = \frac{f(x_1, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_n)}{f_1(y_{m+1}, \ldots, y_n)}, \quad (6.1.9)$$

где

$$f_1(y_{m+1}, \ldots, y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_m, \\ y_{m+1}, \ldots, y_n)\, dx_1 \ldots dx_m. \quad (6.1.10)$$

Плотность вероятности можно представить в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m \mid x_{m+1}, \\ \ldots, x_n) f_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad (6.1.11)$$

что бывает полезно при решении некоторых задач $(m=1, \ldots, n-1)$.

Составляющие $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ случайного вектора $\boldsymbol{X}(X_1, \ldots, X_n)$ называются *независимыми* от составляющих $X_{i_{k+1}}, \ldots, X_{i_n}$, если выполняется условие

$$F\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \mid x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right) = F\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right) \quad (6.1.12)$$

или условие

$$f\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \,\middle|\, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right) = f\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right). \quad (6.1.12')$$

Составляющие случайного вектора $X(X_1, \ldots, X_n)$ называются *независимыми в совокупности*, если для всех $i=1, 2, \ldots, n$ выполняется условие

$$F(x_i \mid x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = F(x_i) \quad (6.1.13)$$

или условие

$$f(x_i \mid x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_i). \quad (6.1.13')$$

В качестве общего признака независимости в совокупности СВ $X_1, \ldots, X_n$ может служить возможность представления n-мерной функции распределения или плотности вероятности в виде произведения n одномерных функций распределения или плотностей вероятности:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i); \qquad (6.1.14)$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (6.1.14')$$

Если возможность или невозможность такого представления вызывает сомнение, то следует вычислить условную функцию распределения или плотность вероятности для каждой СВ X_i ($i=1, \ldots, n$)

$$F(x_i \mid y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x_i} f(y_1, \ldots, y_{i-1}, t_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\, dt_i}{f_1(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)}; \qquad (6.1.15)$$

$$f(x_i \mid y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) = \frac{f(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{f_1(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)} \qquad (6.1.15')$$

и сравнить ее с безусловной функцией распределения или плотностью вероятности

$$F(x_i) = F(\infty, \ldots, \infty, x_i, \infty, \ldots, \infty); \qquad (6.1.16)$$

$$f(x_i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n. \qquad (6.1.16')$$

Если (6.1.15) совпадает с (6.1.16) для некоторых индексов, то составляющие X_i, соответствующие этим индексам, независимы от остальных составляющих случайного вектора. В частности, если такое совпадение наблюдается для всех $i=1, \ldots, n$, то СВ $X_1, \ldots, X_n$ независимы в совокупности.

Пример 6.1.4. Пусть случайный вектор $R(X, Y)$ подчинен закону равномерной плотности внутри круга C радиуса a, т. е.

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi a^2} & \text{при } x^2+y^2<a^2;\\ 0 & \text{при } x^2+y^2 \geqslant a^2.\end{cases}$$

Определить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

По формуле (6.1.15′) находим условную плотность вероятности СВ X

$$f(x \mid y)=\frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx}=\frac{1}{\pi a^2}:\int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{+\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\pi a^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi a^2}:\frac{2\sqrt{a^2-y^2}}{\pi a^2}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-y^2}} \text{ при } |y|<a.$$

В то же время по формуле (6.1.16′) получаем

$$f(x)=\frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2} \text{ при } |x|<a$$

Несовпадение $f(x \mid y)$ и $f(x)$ свидетельствует о зависимости СВ X и Y.

Операция осреднения или отыскания МО некоторой функции $g(X_1, \ldots, X_n)$ системы СВ $(X_1, \ldots, X_n)$ (см. также § 3.2) обозначается символом $M[g(X_1, \ldots, X_n)]$ и определяется следующими равенствами:

— для непрерывных распределений с плотностью вероятности $f(x_1, \ldots, x_n)$

$$M[g(X_1, \ldots, X_n)]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n; \quad (6.1.17)$$

— для дискретных распределений

$$M[g(X_1, \ldots, X_n)] =$$
$$= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} g\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\right) p_{i_1, \ldots, i_n}, \quad (6.1.17')$$

где

$$p_{i_1, \ldots, i_n} = P\{X_1 = x_{i_1}, \ldots, X_n = x_{i_n}\}. \quad (6.1.18)$$

Формула полной вероятности (3.2.19) для многомерной СВ имеет вид

$$P\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P\{A|x_1, \ldots$$
$$\ldots, x_n\} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n. \quad (6.1.19)$$

§ 6.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Вместо рассмотрения функции распределения, полностью характеризующей случайный вектор, часто бывает достаточно указать некоторые числовые параметры, характеризующие отдельные существенные стороны распределения случайного вектора. К таким характеристикам относятся *моменты* (§ 3.2).

Начальные моменты k-го порядка n-мерного случайного вектора X $(X_1, \ldots, X_n)$ определяются равенством

$$\alpha^{(k)}_{k_1, \ldots, k_n}[X_1, \ldots, X_n] = M\left[X_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{k_n}\right], \quad (6.2.1)$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — целые числа, такие, что

$$k_1 + \ldots + k_n = k; \quad k_i \geqslant 0 \text{ при } i = 1, \ldots, n. \quad (6.2.2)$$

Начальные моменты вычисляются по формулам (6.1.17) или (6.1.17′).

Если СВ $X_1, \ldots, X_n$ независимы в совокупности (§ 6.1), то

$$\alpha^{(k)}_{k_1, \ldots, k_n}[X_1, \ldots, X_n] = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{k_i}[X_i],$$

где $\alpha_{k_i}[X_i]$ — начальный момент k_i-го порядка СВ X_i, определяемый формулой (3.2.7).

Количество начальных моментов k-го порядка согласно формуле (2.1.7) равно $f(n, k) = C^k_{n+k-1}$.

Среди начальных моментов наиболее употребительны моменты первого порядка, называемые *математическими ожиданиями* (МО) составляющих случайного вектора. Они обозначаются $\hat{x}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ и определяются по формуле

$$\hat{x}_i = M[X_i], \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6.2.3}$$

МО непрерывных составляющих $X_1, \ldots, X_n$ случайного вектора вычисляются согласно (6.1.17) по формуле

$$\hat{x}_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n, \tag{6.2.3'}$$

которая для независимых в совокупности СВ приобретает вид (3.2.6')

$$\hat{x}_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_i)\, dx_i. \tag{6.2.3''}$$

Неслучайный вектор $\hat{x}$ $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ определяет точку n-мерного пространства, относительно которой группируются все возможные положения точки N $(X_1, \ldots, X_n)$, поэтому координаты вектора $\hat{x}$ — МО (6.2.3) — называют характеристиками положения случайного вектора.

Центральные моменты k-го порядка n-мерного случайного вектора X (X_1, ..., X_n) определяются равенством

$$\mu^{(k)}_{k_1, \ldots, k_n}[X_1, \ldots, X_n] =$$
$$= M\left[\left(X_1 - \hat{x}_1\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(X_n - \hat{x}_n\right)^{k_n}\right], \quad (6.2.4)$$

где k_1, ..., k_n удовлетворяют условиям (6.2.2) и вычисляются по формулам (6.1.17) и (6.1.17′). Количество центральных моментов k-го порядка равно C^k_{n+k-1}.

Для независимых в совокупности СВ X_1, ..., X_n имеет место равенство

$$\mu^{(k)}_{k_1, \ldots, k_n}[X_1, \ldots, X_n] = \prod_{i=1}^{n} \mu_{k_i}[X_i],$$

где $\mu_{k_i}[X_i]$ — центральный момент k_i-го порядка СВ X_i, определяемый формулой (3.2.8).

Из центральных моментов наиболее употребительны моменты второго порядка ($k=2$). В образовании момента второго порядка участвует не более двух составляющих случайного вектора.

Центральные моменты, образованные только одной составляющей случайного вектора, называются *дисперсиями*, обозначаются $D[X_i]$ или D_i и определяются по формуле (3.2.9)

$$D[X_i] = M\left[\left(X_i - \hat{x}_i\right)^2\right], \ (i = 1, \ldots, n). \quad (6.2.5)$$

Для непрерывных СВ

$$D_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - \hat{x}_i\right)^2 f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot dx_n. \quad (6.2.5')$$

Для независимых в совокупности СВ X_1, ..., X_n формула (6.2.5′) приобретает особенно простой вид

$$D_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - \hat{x}_i\right)^2 f(x_i)\, dx_i. \quad (6.2.5'')$$

Дисперсия характеризует степень рассеивания составляющих случайного вектора относительно их МО. В практических задачах для этих целей чаще применяют *средние квадратические отклонения* (СКО)

$$\sigma_i = +\sqrt{D_i}. \tag{6.2.6}$$

Центральные моменты, образованные двумя составляющими случайного вектора, называются *корреляционными моментами* (иногда моментами связи), обозначаются $K[X_i, X_j]$ или $K_{i,j}$ и определяются по формуле

$$K_{i,j} = M\left[\left(X_i - \hat{x}_i\right)\left(X_j - \hat{x}_j\right)\right]. \quad (i \neq j) \tag{6.2.7}$$

Для непрерывных СВ формула (6.2.7) имеет вид

$$K_{i,j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - \hat{x}_i\right)\left(x_j - \right.$$

$$\left. - \hat{x}_j\right) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{6.2.7'}$$

Корреляционные моменты симметричны относительно своих аргументов: $K_{i,j} = K_{j,i}$.

Дисперсия (6.2.5) может рассматриваться как корреляционный момент СВ X_i и той же СВ X_i: $D_i = K_{i,i}$.

Если СВ X_i и X_j независимы, их корреляционный момент равен нулю, обратное, однако, не имеет места. Неравенство нулю корреляционного момента указывает на наличие зависимости между СВ, но равенство его нулю еще не гарантирует независимости этих СВ (§ 6.1).

СВ, для которых корреляционный момент равен нулю, называются *некоррелированными* (иногда — *несвязанными*). Из независимости СВ следует их некоррелированность, но не наоборот.

Пример 6.2.1. Требуется определить корреляционный момент СВ X и Y, рассмотренных в примере 6.1.4.

По формуле (6.2.3') находим МО СВ X и Y:

$$\hat{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_C x \frac{dx\,dy}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi a^2} \int\limits_{-a}^{+a} x dx \int\limits_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{+\sqrt{a^2 - x^2}} dy =$$

$$= \frac{2}{\pi a^2} \int\limits_{-a}^{+a} x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 0$$

и аналогично

$$\hat{y} = 0.$$

Теперь по формуле (6.2.7′) находим корреляционный момент СВ X и Y.

$$K[X, Y] = \iint\limits_C xy \frac{dx\,dy}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi a^2} \int\limits_{-a}^{+a} x dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} y dy = 0.$$

Таким образом, СВ X и Y некоррелированы. Вместе с тем, как было показано в примере 6.1.4, эти величины зависимы. Это, впрочем, очевидно (рис. 6.2.1): при заданной величине $X=x$ СВ Y принимает значения вдоль хорды AB длиной $2\sqrt{a^2 - x^2}$ и чем больше x, тем меньше область возможных значений СВ Y.

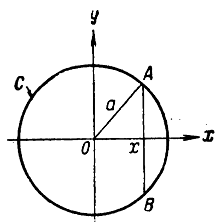

Рис. 6.2.1

Наряду с корреляционным моментом в качестве характеристики связи составляющих случайного вектора часто применяется *коэффициент корреляции* (иначе — нормированный корреляционный момент), обозначаемый $r[X_i, X_j]$ или $r_{i,j}$ и определяемый формулой

$$r_{i,j} = \frac{K_{i,j}}{\sqrt{D_i D_j}} = \frac{K_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (6.2.8)$$

Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

1) $r_{i,i} = 1$;

2) $r_{i,j} = r_{j,i}$;

3) $-1 \leqslant r_{i,j} \leqslant +1$.

Если $|r_{i,j}|=1$, то между СВ X_i и X_j существует линейная зависимость $X_i = kX_j + b$, причем $k>0$, если $r_{i,j}=+1$, и $k<0$, если $r_{i,j}=-1$.

Если $0<|r_{i,j}|<1$, то между СВ X_i и X_j существует, вообще говоря, стохастическая (вероятностная) зависимость.

Если $r_{i,j}=0$ (СВ X_i и X_j некоррелированы), вопрос о характере зависимости между СВ X_i и X_j требует дополнительного исследования (§ 6.1).

Замечание. Если между СВ X_i и X_j существует нелинейная зависимость, то коэффициент корреляции меньше единицы по абсолютной величине и в некоторых случаях может быть равен нулю.

Минимальное и наиболее употребительное множество числовых характеристик n-мерного случайного вектора $X\ (X_1, \ldots, X_n)$ или системы СВ $(X_1, \ldots, X_n)$ включает:

— n МО $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ (характеристики положения);

— n дисперсий $D_1, \ldots, D_n$ или СКО $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ (характеристики рассеивания);

— $\frac{n(n-1)}{2}$ корреляционных моментов $K_{i,j}$ $(i<j)$, или коэффициентов корреляции $r_{i,j}$ $(i<j)$ (характеристики связи).

Указанные величины обычно записывают в виде неслучайного вектора

$$\hat{x}\left(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\right)$$

и *корреляционной матрицы*

$$\|K_{i,j}\| = \left\| \begin{matrix} D_1 & K_{1,2} & K_{1,3} & \ldots & K_{1,n} \\ & D_2 & K_{2,3} & \ldots & K_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & D_n \end{matrix} \right\|, \qquad (6.2.9)$$

вместо которой иногда применяется *нормированная корреляционная матрица*

$$\|r_{i,j}\| = \left\| \begin{matrix} 1 & r_{1,2} & r_{1,3} & \ldots & r_{1,n} \\ & 1 & r_{2,3} & \ldots & r_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & 1 \end{matrix} \right\|. \qquad (6.2.10)$$

В обеих матрицах для краткости опускаются симметричные элементы.

Степень зависимости между двумя СВ X и Y характеризуется, помимо коэффициента корреляции, регрессией и корреляционными отношениями.

Регрессией Y на X называется условное МО СВ Y при фиксированном значении СВ $X=x$

$$\hat{y}(x) = M[Y \mid X = x]. \tag{6.2.11}$$

Для непрерывной двумерной СВ равенство (6.2.11) образует *линию регрессии*

$$\hat{y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y \mid x)\, dy, \tag{6.2.11'}$$

для дискретной СВ — последовательность точек $(x_i, \hat{y}_i)$ с ординатами

$$\hat{y}_i = \sum_j y_j p(y_j|x_i). \tag{6.2.11''}$$

Аналогично определяется регрессия X на Y.

Линии регрессии Y на X и X на Y, вообще говоря, не совпадают. Регрессия называется *линейной*, если линия регрессии прямая. Для независимых СВ линии регрессии превращаются в прямые, параллельные координатным осям.

Корреляционным отношением Y на X называется величина

$$\eta_{yx} = \frac{\sqrt{M[(\hat{y}(x) - \hat{y})^2]}}{\sigma_y}, \tag{6.2.12}$$

где $\hat{y}$ и σ_y определяются по формулам (€.2.3) и (6.2.6). Корреляционное отношение и коэффициент корреляции связаны зависимостью

$$\eta_{yx}^2 \geqslant r_{yx}^2,$$

которая превращается в равенство при линейной регрессии, весьма распространенной в практических задачах. В этом случае корреляционное отношение не дает ничего нового по сравнению с коэффициентом корреляции. Если же регрессия нелинейна, то корреляционное отношение характеризует зависимость Y от X лучше, чем коэффициент корреляции.

Определение корреляционного отношения X на Y и его свойства аналогичны.

§ 6.3. ВЕКТОРИАЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В практических задачах, связанных с распределением случайных векторов (многомерных СВ), большое значение имеют вырожденные случайные векторы. *Вырожденный случайный вектор* отличается неизменным направлением несущей его прямой *. МО вырожденного случайного вектора представляет собой неслучайный вектор, подчиняющийся правилам, справедливым для векторов: правилу сложения, разложения и т. д.

Для вырожденного случайного вектора с нулевым МО употребляют название *векториальная случайная величина*.

Любой вырожденный случайный вектор можно рассматривать как сумму неслучайного вектора, равного МО данного вырожденного случайного вектора, и векториальной СВ.

Векториальную СВ принято изображать вектором, величина которого OA (рис. 6.3.1) равна в выбранном масштабе какому-нибудь заранее обусловленному характерному параметру закона распределения, например СКО. Векториальная СВ может с одинаковым успехом изображаться вектором $\overline{OA}$ или равным по величине, но обратным по направлению вектором $\overline{OA'}$.

Замечание. Векториальная СВ не является вектором. К ней не применимы правила, справедливые для векторов сложения, разложения и т. д.

---

* Вообще говоря, вырожденный случайный вектор, рассматриваемый в n-мерном пространстве, отличается тем, что в системе координат, построенной надлежащим образом, число составляющих вектора будет меньше n. Мы ограничимся рассмотрением вырожденных векторов, сводящихся к одной составляющей.

Для того чтобы не путать векториальную СВ с вектором, будем обозначать ее двумя чертами сверху, например $\overline{\overline{OA}}$ или $\bar{\bar{a}}$.

Сумма независимых векториальных СВ $\overline{\overline{OA}}$, $\overline{\overline{OA}}_2$, ..., $\overline{\overline{OA}}_n$ с одинаковым направлением образует векториальную СВ $\overline{\overline{OA}}$ того же направления. Закон распре-

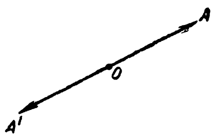

Рис. 6.3.1

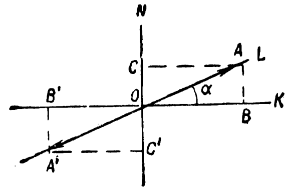

Рис. 6.3.2

деления векториальной СВ $\overline{\overline{OA}}$ вычисляется по правилам композиции законов распределения СВ (§ 9.2). СКО σ суммарной векториальной СВ $\overline{\overline{OA}}$ образуется по правилу

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \tag{6.3.1}$$

где σ_i — СКО i-й векториальной СВ.

Часто возникает необходимость в оценке отклонений от оси N, вызываемых векториальной СВ $\overline{\overline{OA}}$, расположенной на прямой L (рис. 6.3.2). Эти отклонения находятся проектированием векториальной СВ на направление K, перпендикулярное оси N. Линейные параметры, характеризующие рассеивание по направлению K (например, СКО), связаны с соответствующими параметрами векториальной СВ равенством вида (рис. 6.3.2)

$$OB = OA \cos \alpha. \tag{6.3.2}$$

Под OA понимается любой линейный параметр векториальной СВ $\overline{\overline{OA}}$ (СКО, срединное отклонение и т. д.), под OB — аналогичный параметр проекции векториальной СВ на прямую K Под OA можно также понимать величину любой реализации векториальной СВ; тогда OB — проекция этой реализации.

Замечание. Ориентировка проекций векториальной СВ $\overline{\overline{OA}}$ на любую ось («вправо» или «влево» по оси) произвольна, если проекция рассматривается изолированно. Так, например, проекции OB и OB' на рис. 6.3.2 совершенно равноправны. Однако при совместном рассмотрении проекций $\overline{\overline{OA}}$ на два направления только одна из проекций может быть ориентирована произвольно. После выбора ориентировки одной проекции другая должна быть получена по правилу разложения вектора $\overline{OA}$ (или $\overline{OA'}$) на составляющие. Например, векториальной СВ $\overline{\overline{OA}}$ можно с одинаковым успехом сопоставить совокупность проекций (OB, OC) и (OB', OC'), но не совокупность проекций (OB, OC') или (OB', OC).

Если по известным проекциям векториальной СВ нужно восстановить векториальную СВ, то ее проекции складываются по правилу сложения векторов. Это правило относится как к любым линейным параметрам векториальной СВ, так и к отдельным ее реализациям. Например, если известны СКО σ_{x_i} проекций векториальной СВ на оси n-мерной ортогональной системы координат, то СКО векториальной СВ σ определяется равенством

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2, \tag{6.3.3}$$

а направление прямой L, на которой лежит векториальная СВ, — равенствами:

$$\cos(L, {}_{x}i) = \frac{\sigma x_i}{\sigma}, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Замечание. Не следует отождествлять формулы (6.3.1) и (6.3.3). В первой n — число разных векториальных СВ, имеющих одно направление, а σ — СКО суммарной векториальной СВ; во второй n — число измерений пространства, в котором рассматривается одна векториальная СВ с СКО σ.

Совокупность двух и более независимых векториальных СВ, имеющих разные направления (векториальные

СВ, имеющие одно направление, можно считать приведенными к одной суммарной векториальной СВ с помощью композиции законов распределения), образует *систему векториальных СВ*, эквивалентную многомерному распределению (многомерному случайному вектору). Векториальные СВ, лежащие в одной плоскости, образуют двумерное (плоское) распределение, а лежащие в разных плоскостях — трехмерное (пространственное) распределение.

Конкретная реализация системы векториальных СВ представляет собой вектор. Он равен сумме векторов, изображающих конкретные реализации векториальных СВ системы.

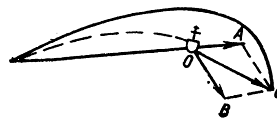

Рис. 6.3.

Пример 6.3.1. Рассмотрим конкретную систему векториальных СВ. При стрельбе по надводному кораблю снаряды с ударным взрывателем рассеиваются под действием:

а) разброса веса снаряда;
б) разной формы снаряда;
в) разброса угла бросания;
г) рассеивания начальной скорости снаряда;
д) ошибок наведения;
е) неточного учета метеорологических факторов и других причин.

Часть этих причин, например разброс угла бросания, порождает рассеивание (векториальные ошибки *) в направлении стрельбы (иначе говоря, по дальности), другие, например ошибки наведения, порождают рассеивание и в направлении стрельбы, и в боковом направлении. В результате образуется система векториальных ошибок. Взаимодействие всех причин, выражающееся сложением векториальных ошибок, приводит к рассеиванию точек падения снаряда на плоскости. На рис. 6.3.3 показаны в виде примера реализации векториальных ошибок: OA — из-за разброса угла бросания, OB — из-за ошибки в боковой наводке, OC — суммарная ошибка.

Точка падения каждого отдельного снаряда образует вектор с началом в центре рассеивания снарядов.

Систему векториальных СВ можно проектировать на любое направление K.

---

* Векториальные СВ, представляющие собой ошибки, называют векториальными ошибками.

Обусловленное системой независимых векториальных СВ СКО σ от оси N, перпендикулярной направлению K, определяется равенством

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \cos^2 \alpha_i, \tag{6.3.4}$$

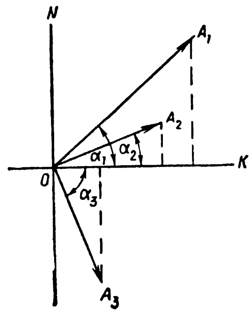

Рис. 6.3.4

в котором σ_i — СКО, соответствующее i-й векториальной СВ; α_i — угол между ее направлением и направлением K (рис. 6.3.4).

Использование векториальных СВ весьма удобно при исследовании многомерного нормального распределения.

Глава 7

МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

§ 7.1. ДВУМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть в плоскости O_1uv расположено не менее двух вырожденных случайных векторов (§ 6.3), обладающих свойствами:

— все векторы подчиняются закону нормального распределения,

— хотя бы два вектора не связаны между собой функционально и имеют разные направления.

Тогда система этих вырожденных случайных векторов образует случайный вектор $R(U, V)$, подчиняющийся двумерному нормальному распределению. Его составляющие U и V представляют собой систему СВ, каждая из которых подчиняется нормальному распределению (§ 5.1).

Математическое выражение. Общий вид плотности двумерного нормального распределения СВ U и V

$$\varphi(u, v) = Ae^{-G(u, v)}, \tag{7.1.1}$$

где

$$G(u, v) = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_1u + 2a_2v + a, \tag{7.1.2}$$

причем должны быть выполнены условия:

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0; \tag{7.1.3}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{12} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0; \tag{7.1.4}$$

$$A = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi}; \tag{7.1.5}$$

$$a = -(a_1 u_0 + a_2 v_0), \tag{7.1.6}$$

где

$$u_0 = \frac{a_{12}a_2 - a_{22}a_1}{\delta}, \qquad v_0 = \frac{a_{12}a_1 - a_{11}a_2}{\delta}. \tag{7.1.7}$$

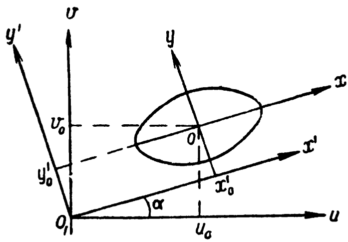

Рис. 7.1.1

Обычно общее выражение двумерного нормального распределения (7.1.1) задается в виде

$$\varphi(u, v) = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} e^{-[a_{11}(u-u_0)^2 + 2a_{12}(u-u_0)(v-v_0) + a_{22}(v-v_0)^2]}. \tag{7.1.8}$$

Оно может быть получено из (7.1.1), если воспользоваться равенствами (7.1.2)—(7.1.7).

В силу условий (7.1.3) и (7.1.4) выражение

$$a_{11}(u-u_0)^2 + 2a_{12}(u-u_0)(v-v_0) + \\ + a_{22}(v-v_0)^2 = \varkappa^2 \tag{7.1.9}$$

представляет собой эллипс с центром в точке $O(u_0, v_0)$ (рис. 7.1.1). В этой точке, называемой *центром рассеивания*, плотность вероятности $\varphi(u, v)$ достигает максимума.

Двумерное нормальное распределение называют иногда *эллиптическим.*

На эллипсах вида (7.1.9) плотность нормального распределения постоянна. Поэтому они называются *эллипсами равных вероятностей.* Существуют также другие названия — эллипсы равной плотности, эллипсы рассеивания. Оси эллипсов равных вероятностей называются *главными осями рассеивания.*

Функция распределения СВ U и V в соответствии с (6.1.4) определяется равенством

$$\Phi(u, v) =$$
$$= \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{v} e^{-[a_{11}(\xi-u_0)^2+2a_{12}(\xi-u_0)(\eta-v_0)+a_{22}(\eta-v_0)^2]} d\xi d\eta. \quad (7.1.10)$$

Двумерное нормальное распределение полностью определяется пятью параметрами. В отличие от координат центра рассеивания u_0, v_0 другие параметры нормального распределения a_{11}, a_{12}, a_{22} лишены наглядности.

В связи с этим плотность нормального распределения в общем случае выражают, как правило, в виде равенства

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\sqrt{1-r^2}} \times$$
$$\times e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{u-u_0}{\sigma_u}\right)^2 - 2r\left(\frac{u-u_0}{\sigma_u}\right)\left(\frac{v-v_0}{\sigma_v}\right) + \left(\frac{v-v_0}{\sigma_v}\right)^2\right]}, \quad (7.1.11)$$

параметры которого:

σ_u — СКО СВ U;

σ_v — то же, для СВ V;

r — коэффициент корреляции СВ U и V, являются наглядными вероятностными характеристиками. Они связаны с a_{11}, a_{12}, a_{22} зависимостями:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{a_{22}}{2\delta}}, \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{a_{11}}{2\delta}}; \quad (7.1.12)$$

$$r = -\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}. \quad (7.1.13)$$

Величины σ_u и σ_v характеризуют рассеивание в направлении осей координат O_1u и O_1v соответственно.

Уравнение эллипсов равных вероятностей (7.1.9), выраженное через параметры σ_u, σ_v, r, u_0, v_0, имеет вид

$$\frac{(u-u_0)^2}{\sigma_u^2}-2r\,\frac{(u-u_0)(v-v_0)}{\sigma_u\sigma_v}+\frac{(v-v_0)^2}{\sigma_v^2}=\lambda^2, \qquad (7.1.14)$$

где $\lambda^2=2(1-r^2)\varkappa^2$.

Функция распределения (7.1.10) СВ U и V в новых обозначениях принимает вид

$$\Phi(u, v)=\frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\sqrt{1-r^2}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{\xi-u_0}{\sigma_u}\right)^2-2r\frac{(\xi-u_0)(\eta-v_0)}{\sigma_u\sigma_v}+\left(\frac{\eta-v_0}{\sigma_v}\right)^2\right]}d\xi d\eta. \qquad (7.1.15)$$

Условное распределение СВ U — нормальное с плотностью

$$\varphi(u|v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_u^2}\left\{u-\left[u_0+r\frac{\sigma_u}{\sigma_v}(v-v_0)\right]\right\}^2}. \qquad (7.1.16)$$

Безусловное распределение СВ U — нормальное с плотностью

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-u_0}{\sigma_u}\right)^2}. \qquad (7.1.17)$$

Аналогичные формулы имеют место для СВ V.

Замечание. Если коэффициент корреляции r СВ U и V, подчиняющихся закону нормального распределения, равен нулю, то эти СВ независимы. Для других законов распределения такое утверждение, вообще говоря, несправедливо (§ 6.2).

При $r=\pm 1$ двумерное нормальное распределение вырождается в случайный вектор, расположенный на прямой:

$$\frac{u-u_0}{\sigma_u}=\pm\frac{v-v_0}{\sigma_v}, \text{ если } r=\pm 1.$$

Приведение двумерного нормального распределения к каноническому виду.

Зависимость между составляющими U и V случайного вектора $\boldsymbol{R}$ существенно затрудняет расчеты, связанные с двумерным нормальным распределением. Значительные упрощения могут быть достигнуты, если произвести преобразование координат:

$$\left.\begin{aligned} x' &= u\cos\alpha + v\sin\alpha; \\ y' &= -u\sin\alpha + v\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{7.1.18}$$

в котором

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2r\sigma_u\sigma_v}{\sigma_u^2 - \sigma_v^2}. \tag{7.1.19}$$

При этом преобразовании составляющие X' и Y' случайного вектора $\boldsymbol{R}$ становятся независимыми СВ.

Равенство (7.1.19) определяет угол α с точностью до 90°. Для устранения неопределенности принято выбирать α так, чтобы новой случайной переменной X' соответствовало большее СКО. При этом требуемая величина угла α определяется табл. 7.1.1, если плотность задана в виде (7.1.8), и табл. 7.1.2, если она задана в виде (7.1.11). В этих таблицах принято, как обычно, что угол, определяемый через арктангенс, положителен и лежит в первой четверти, если аргумент под знаком

Таблица 7.1.1

Значения угла поворота координат α в зависимости от a_{11}, a_{12}, a_{22}

	$a_{11} < a_{22}$	$a_{11} = a_{22}$	$a_{11} > a_{22}$
$a_{12} < 0$	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$	45°	$90° + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$
$a_{12}=0$	0°	Любое	90°
$a_{12} > 0$	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$	−45°	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}} - 90°$

Таблица 7.1.2

Значения угла поворота координат α в зависимости от σ_u, σ_v, r

	$\sigma_u < \sigma_v$	$\sigma_u = \sigma_v$	$\sigma_u > \sigma_v$
$r < 0$	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{r\sigma_u\sigma_v}{\sigma_u^2-\sigma_v^2} - 90°$	$-45°$	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{r\sigma_u\sigma_v}{\sigma_u^2-\sigma_v^2}$
$r = 0$	$90°$	Любое	$0°$
$r > 0$	$90° + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{r\sigma_u\sigma_v}{\sigma_u^2-\sigma_v^2}$	$45°$	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{r\sigma_u\sigma_v}{\sigma_u^2-\sigma_v^2}$

арктангенса положителен. В противном случае угол отрицателен и лежит в четвертой четверти.

Плотность двумерного распределения независимых СВ X' и Y' имеет вид

$$\varphi(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'-x_0'}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y'-y_0'}{\sigma_y}\right)^2\right]}, \quad (7.1.20)$$

где σ_x, σ_y — СКО СВ X' и Y' соответственно;

x_0', y_0' — координаты центра рассеивания в системе $Ox'y'$ (рис. 7.1.1).

Для определения величин x_0', y_0' служат равенства:

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= u_0 \cos\alpha + v_0 \sin\alpha; \\ y_0' &= -u_0 \sin\alpha + v_0 \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (7.1.18')$$

Величины σ_x, σ_y, называемые *главными СКО*, определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{4\delta}; \\ \sigma_y^2 &= \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{4\delta}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.1.21)$$

где δ — определитель (7.1.4), или формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{2}\left[\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sqrt{\left(\sigma_u^2 - \sigma_v^2\right)^2 + 4r^2\sigma_u^2\sigma_v^2}\right]; \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{2}\left[\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - \sqrt{\left(\sigma_u^2 - \sigma_v^2\right)^2 + 4r^2\sigma_u^2\sigma_v^2}\right]. \end{aligned}\right| \qquad (7.1.22)$$

Функция распределения СВ X' и Y' равна

$$\Phi(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int\limits_{-\infty}^{x'} \int\limits_{-\infty}^{y'} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi - x_0'}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\eta - y_0'}{\sigma_y}\right)^2\right]} d\xi d\eta. \qquad (7.1.23)$$

После поворота на угол α уравнение эллипсов равных вероятностей в системе координат $Ox'y'$ принимает вид

$$\left(\frac{x' - x_0'}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y' - y_0'}{\sigma_y}\right)^2 = \mu^2. \qquad (7.1.24)$$

Пример 7.1.1. Дано двумерное нормальное распределение

$$\varphi(u, v) = \frac{4}{\pi} e^{-[4(u-2)^2 + 8(u-2)(v+1) + 8(v+1)^2]}$$

Требуется найти положение эллипса равных вероятностей и главные СКО σ_x и σ_y.

Центр эллипса находится в точке $u_0 = 2$, $v_0 = -1$. Так как $a_{11} = 4$, $a_{12} = 4$, $a_{22} = 8$, то $a_{11} - a_{22} < 0$, $a_{12} > 0$. Следовательно, наклон большой оси эллипса к оси Ou определяется выражением в левой нижней клетке табл. 7.1.1:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 4}{4 - 8} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-2) = -31°43'.$$

Находим $\delta = 4 \cdot 8 - 4^2 = 16$ и из формул (7.1.21) получаем:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{4+8+\sqrt{(4-8)^2+4\cdot 4^2}}{4\cdot 16}} \approx 0{,}57;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{4+8-\sqrt{(4-8)^2+4\cdot 4^2}}{4\cdot 16}} \approx 0{,}22.$$

Уравнение (7.1.20) можно упростить, перенеся начало координат в точку $\left(x'_0, y'_0\right)$, что равносильно рассмотрению новых СВ X и Y, которые связаны с исходными СВ U и V зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} X &= X' - x'_0 = (U - u_0)\cos\alpha + (V - v_0)\sin\alpha; \\ Y &= Y' - y'_0 = -(U - u_0)\sin\alpha + (V - v_0)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (7.1.25)$$

Плотность двумерного распределения СВ X и Y выражается равенством

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}. \quad (7.1.26)$$

Это равенство называют *законом двумерного нормального распределения в каноническом виде.* Ему соответствует уравнение эллипсов равных вероятностей

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = \mu^2. \quad (7.1.27)$$

Удобство равенств (7.1.20) и (7.1.26) в том, что их правые части в силу независимости СВ X' и Y', а также X и Y распадаются на два множителя, каждый из которых содержит только одну СВ, например:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (7.1.26')$$

благодаря чему изучение двумерного нормального распределения сводится к исследованию двух одномерных нормальных распределений вида (5.1.7).

Функция распределения СВ X, Y

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{\sigma_x^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_y^2}\right)} d\xi d\eta \tag{7.1.28}$$

распадается на два множителя:

$$\Phi(x, y) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) \Phi\left(\frac{y}{\sigma_y}\right). \tag{7.1.29}$$

Выражение функции $\Phi(t)$ см. в табл. 5.1.2.

Аналогично распадается на два множителя функция распределения в форме (7.1.23).

Выражение двумерного нормального распределения через срединные отклонения. Соответствующие формулы могут быть получены из приведенных выше выражений заменой вида $\sigma = \frac{E}{\rho\sqrt{2}} \approx 1{,}483\,E$ (§ 5.1). В частности формулы (7.1.22) после такой замены становятся выражениями для главных срединных отклонений E_x и E_y через E_u и E_v.

Остальные параметры нормального распределения — координаты центра рассеивания u_0, v_0 $\left(\text{или } x_0', y_0'\right)$, и коэффициент корреляции r остаются неизменными.

Вычисление. В общем случае значения плотности вероятности (формулы (7.1.8), (7.1.11) и другие, содержащие коэффициент корреляции) вычисляются с помощью табл. XVII для функции e^{-x}. В случае независимых СВ правая часть формулы разбивается на два множителя, как это сделано в формуле (7.1.26′). Значение каждого сомножителя вычисляется с помощью табл. II и IV, как указано в § 5.1.

Значения функции распределения в общем случае (формулы (7.1.10) и (7.1.15) могут быть вычислены с помощью приближенных методов. Наиболее прост метод сеток (§ 7.3).

В случае независимых СВ для вычисления значений функции распределения используются табл. III и V, как указано в § 5.1.

Круговое распределение

Если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ (иначе говоря, $E_x = E_y = E$), то двумерное нормальное распределение называют *круговым распределением* (*рассеиванием*). Величина σ называется *радиальным СКО*, величина E — *радиальным срединным отклонением*.

Расчетные формулы значительно упрощаются при круговом распределении, если начало координат находится в центре рассеивания. Они приведены в § 5.4.

Единичные эллипсы рассеивания

Под *единичным эллипсом рассеивания* (кратко — единичным эллипсом) понимают эллипс равных вероятностей (7.1.27) при $\mu = 1$

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = 1. \qquad (7.1.30)$$

Его полуоси равны главным СКО двумерного нормального распределения.

Наряду с (7.1.30) в некоторых руководствах под единичным эллипсом рассеивания понимается эллипс с полуосями E_x и E_y. Его уравнение

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = 1. \qquad (7.1.30')$$

Вероятность попадания в плоскую область

Вероятность $P\{N \in S\}$ попадания случайной точки $N\ (X, Y)$ в плоскую область S определяется равенством

$$P\{N \in S\} = \iint\limits_{S} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \qquad (7.1.31)$$

В общем случае при произвольной форме области S для вычисления вероятности попадания применяются приближенные методы. В некоторых частных случаях вычисление интеграла (7.1.31) приводит к точным формулам. Точные и приближенные методы рассмотрены в § 7.2 и 7.3.

§ 7.2. ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ В ПЛОСКУЮ ОБЛАСТЬ ПРИ ДВУМЕРНОМ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

При рассмотрении точных методов будем пользоваться прямоугольной системой координат Oxy, начало которой лежит в центре рассеивания; ось Ox направлена по большой оси эллипсов равных вероятностей, а ось Oy — по малой оси. Такую систему координат будем для краткости называть *основной*. Если распределение круговое, то направление оси Ox произвольно.

1. Вероятность попадания в эллипс, подобный и расположенный подобно эллипсам равных вероятностей

Пусть уравнение эллипса S в основной системе координат

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Вероятность попадания в эллипс S вычисляется по формуле

$$P\{N\in S\}=1-e^{-\frac{k^2}{2}} \tag{7.2.1}$$

или по формуле

$$P\{N\in S\}=1-e^{-\rho^2 k_1^2}, \tag{7.2.1'}$$

где

$$k=\frac{a}{\sigma_x}=\frac{b}{\sigma_y},\qquad k_1=\frac{a}{E_x}=\frac{b}{E_y}.$$

Величина k_1 в $\frac{1}{\rho\sqrt{2}}=1,4826$ раз больше, чем k.

В частности, если распределение круговое, т. е. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ (или, иначе говоря, $E_x = E_y = E$), а область S — круг радиуса R с центром в центре рассеивания, то

$$k = \frac{R}{\sigma}, \quad k_1 = \frac{R}{E}.$$

Для вычисления значений функции (7.2.1) следует пользоваться либо табл. X, положив в ней $r = k$ и $h = 0$, либо табл. XVII.

Для вычисления значений функции (7.2.1′) следует пользоваться либо табл. X, вычислив предварительно величину k из равенства $k = \rho\sqrt{2}\,k_1 = 0{,}6745\,k_1$, либо табл. XVII.

На практике часто бывают нужны значения функций (7.2.1) и (7.2.1′) для целых k и k_1. Для удобства они приведены в табл. 7.2.1.

В табл. 7.2.2 приведены значения k и k_1 для нескольких значений $P\{N \in S\}$.

В литературе встречается оценка кругового распределения, обозначаемая r_{50}* и равная радиусу круга, вероятность попадания в который равна 0,50. Из

Таблица 7.2.1

$k,\ k_1$	0	1	2	3	4	5	6	7
$1 - e^{-\frac{k^2}{2}}$	0	0,3935	0,8647	0,9889	0,9997	1	1	1
$1 - e^{-\rho^2 k_1^2}$	0	0,2035	0,5974	0,8709	0,9737	0,9966	0,9997	1

табл. 7.2.2. следует, что $r_{50} = 1{,}177\,\sigma = 1{,}746\,E$, где $\sigma(E)$ — радиальное СКО (срединное отклонение).

* Иногда величину r_{50} называют радиальным вероятным отклонением. Это название не рекомендуется, так как термин «вероятное отклонение» применяется обычно как синоним срединного отклонения и применение его в другом смысле может привести к путанице.

Таблица 7.2.2

P	k	k_1	P	k	k_1	P	k	k_1
0,05	0,320	0,475	0,50	1,177	1,746	0,85	1,948	2,888
0,10	0,459	0,681	0,60	1,354	2,007	0,90	2,146	3,182
0,20	0,668	0,990	0,70	1,552	2,301	0,95	2,448	3,629
0,30	0,845	1,252	0,75	1,666	2,469	0,99	3,035	4,500
0,40	1,011	1,499	0,80	1,794	2,660	0,999	3,717	5,511

2. Вероятность попадания в бесконечную прямолинейную полосу, произвольно расположенную относительно главных осей рассеивания

Пусть угол между большой осью эллипсов равных вероятностей и перпендикуляром OC к границам по-

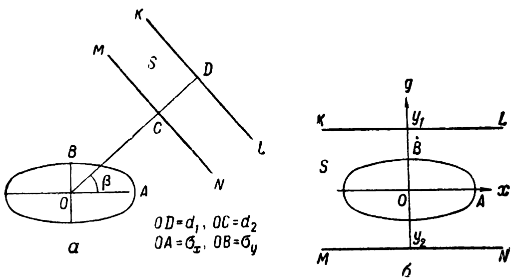

Рис. 7.2.1

лосы S равен β, а расстояния от центра рассеивания до границ полосы KL и MN равны d_1 и d_2 соответственно (рис. 7.2.1, a).

Если границы полосы S лежат по одну сторону центра рассеивания, причем $d_1 \geqslant d_2$, то

$$P\{N \in S\} = \Phi_0\left(\frac{d_1}{\sigma_\beta}\right) - \Phi_0\left(\frac{d_2}{\sigma_\beta}\right) =$$

$$= \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_1}{E_\beta}\right) - \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_2}{E_\beta}\right), \qquad (7.2.2)$$

где

$$\sigma_\beta = \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2 \beta + \sigma_y^2 \sin^2 \beta}\,; \tag{7.2.3}$$

$$E_\beta = \sqrt{E_x^2 \cos^2 \beta + E_y^2 \sin^2 \beta}. \tag{7.2.3'}$$

В этих формулах σ_β (E_β) — СКО (срединное отклонение) в направлении, перпендикулярном границам полосы.

Если границы полосы лежат по разные стороны центра рассеивания, то

$$P\{N \in S\} = \Phi_0\left(\frac{d_1}{\sigma_\beta}\right) + \Phi_0\left(\frac{d_2}{\sigma_\beta}\right) =$$

$$= \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_1}{E_\beta}\right) + \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_2}{E_\beta}\right). \tag{7.2.4}$$

Если одна из границ, например KL, удаляется на бесконечность и полоса превращается в полуплоскость, то

$$P\{N \in S\} = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{d_2}{\sigma_\beta}\right) = \frac{1}{2} - \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_2}{E_\beta}\right) \tag{7.2.2'}$$

при условии, что центр рассеивания лежит вне полуплоскости, и

$$P\{N \in S\} = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{d_2}{\sigma_\beta}\right) = \frac{1}{2} + \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_2}{E_\beta}\right) \tag{7.2.4'}$$

при условии, что центр рассеивания находится внутри полуплоскости.

Если границы полосы симметричны относительно центра рассеивания, т. е. $d_1 = d_2 = d$, то

$$P\{N \in S\} = 2\Phi_0\left(\frac{d}{\sigma_\beta}\right) = 2\hat{\Phi}_0\left(\frac{d}{E_\beta}\right). \tag{7.2.4''}$$

Если границы полосы параллельны большой оси эллипсов равных вероятностей, то формулы (7.2.2) и (7.2.4) объединяются в одну

$$P\{N \in S\} = \Phi_0\left(\frac{y_1}{\sigma_y}\right) - \Phi_0\left(\frac{y_2}{\sigma_y}\right) = \\ = \hat{\Phi}_0\left(\frac{y_1}{E_y}\right) - \hat{\Phi}_0\left(\frac{y_2}{E_y}\right), \quad (7.2.5)$$

которая справедлива независимо от взаимного расположения полосы и центра рассеивания. В этой формуле y_1, y_2 — координаты точек пересечения границ полосы осью Oy (рис. 7.2.1, *б*), причем $y_1 > y_2$. Знаки y_1 и y_2 должны быть учтены.

Аналогичная формула

$$P\{N \in S\} = \Phi_0\left(\frac{x_1}{\sigma_x}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_2}{\sigma_x}\right) = \\ = \hat{\Phi}_0\left(\frac{x_1}{E_x}\right) - \hat{\Phi}_0\left(\frac{x_2}{E_x}\right) \quad (7.2.5')$$

применяется, если границы полосы параллельны малой оси эллипсов равных вероятностей.

Вычисления по формулам (7.2.2), (7.2.4) и (7.2.5) производятся с помощью табл. III и V.

3. Вероятность попадания в параллелограмм со сторонами, параллельными сопряженным диаметрам эллипсов равных вероятностей

Пусть параллелограмм S образован пересечением полос S_1 и S_2 (рис. 7.2.2). По условию стороны KM и KL параллелограмма параллельны сопряженным диаметрам единичного эллипса GG' и HH' соответственно. Пусть угол между диаметром GG' и большой полуосью равен γ, а угол между диаметром HH' и большой полуосью равен δ. Вероятность попадания случайной точки N в параллелограмм S равна произведению вероятностей попадания этой точки в полосы S_1 и S_2.

Если центр рассеивания O лежит вне обеих полос и $OD=d_1$, $OC=d_2$, $OF=d_3$, $OE=d_4$, причем $d_1>d_2$, $d_3>d_4$ (рис. 7.2.2), то

$$P\{N\in S\}=\left[\Phi_0\left(\frac{d_1}{\sigma'}\right)-\Phi_0\left(\frac{d_2}{\sigma'}\right)\right]\left[\Phi_0\left(\frac{d_3}{\sigma''}\right)-\Phi_0\left(\frac{d_4}{\sigma''}\right)\right]=\left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{d_1}{E'}\right)-\hat{\Phi}_0\left(\frac{d_2}{E'}\right)\right]\left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{d_3}{E''}\right)-\hat{\Phi}_0\left(\frac{d_4}{E''}\right)\right], \qquad (7.2.6)$$

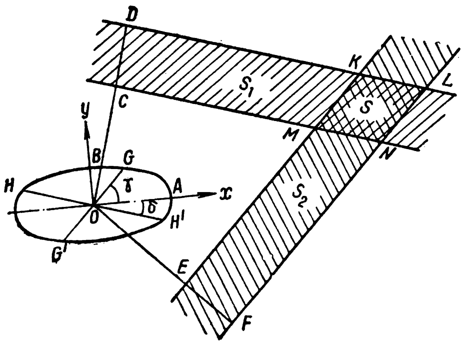

Рис. 7.2.2

где

$$\left.\begin{aligned}\sigma'&=\sqrt{\sigma_x^2\sin^2\delta+\sigma_y^2\cos^2\delta}\,;\\ \sigma''&=\sqrt{\sigma_x^2\sin^2\gamma+\sigma_y^2\cos^2\gamma}\,;\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.7)$$

$$\left.\begin{aligned}E'&=\sqrt{E_x^2\sin^2\delta+E_y^2\cos^2\delta}\,;\\ E''&=\sqrt{E_x^2\sin^2\gamma+E_y^2\cos^2\gamma}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.8)$$

Если центр рассеивания лежит внутри полосы S_1, то в первой квадратной скобке правой части формулы

(7.2.6) минус заменяется плюсом. Аналогично изменяется вторая квадратная скобка, если центр рассеивания лежит внутри полосы S_2.

4. Вероятность попадания в прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям рассеивания

Это частный случай предыдущего и вероятность попадания в прямоугольник S (рис. 7.2.3) определяется равенством

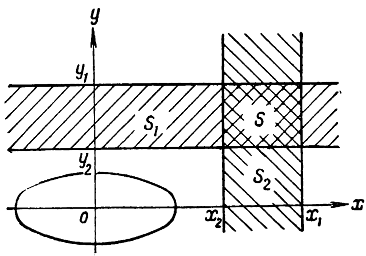

Рис. 7.2.3

$$P\{N \in S\} = \left[\Phi_0\left(\frac{x_1}{\sigma_x}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_2}{\sigma_x}\right)\right] \times \left[\Phi_0\left(\frac{y_1}{\sigma_y}\right) - \Phi_0\left(\frac{y_2}{\sigma_y}\right)\right] = \left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{x_1}{E_x}\right) - \hat{\Phi}_0\left(\frac{x_2}{E_x}\right)\right] \times \left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{y_1}{E_y}\right) - \hat{\Phi}_0\left(\frac{y_2}{E_y}\right)\right], \quad (7.2.9)$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 — координаты точек пересечения соответствующих сторон прямоугольника (или их продолжений) с осями координат, причем $x_1 > x_2$, $y_1 > y_2$. Равенство (7.2.9) справедливо независимо от взаимного расположения прямоугольника S и центра рассеивания при учете знаков координат. Если центр прямоугольника совпадает с центром рассеивания, то формула (7.2.9) принимает вид

$$P\{N \in S\} = 4\Phi_0\left(\frac{h_1}{2\sigma_x}\right)\Phi_0\left(\frac{h_2}{2\sigma_y}\right) = \\ = 4\hat{\Phi}_0\left(\frac{h_1}{2E_x}\right)\hat{\Phi}_0\left(\frac{h_2}{2E_y}\right), \qquad (7.2.9')$$

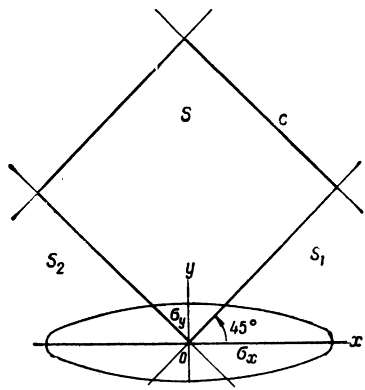

Рис. 7.2.4

где h_1, h_2 — длины сторон прямоугольника, соответственно параллельные большой и малой осям эллипсов равных вероятностей.

Замечание. Формула (7.2.6) не применима, если стороны параллелограмма S не параллельны сопряженным диаметрам эллипсов равных вероятностей, а формула (7.2.9) не применима, если стороны прямоугольника S не параллельны главным осям рассеивания. Неприменимость формул (7.2.6) и (7.2.9) объясняется тем, что при произвольном расположении полос S_1 и S_2 вероятности попадания в эти полосы зависимы. Необоснованное применение формул (7.2.6) и (7.2.9) может привести к совершенно неприемлемым результатам.

Пример 7.2.1. Рассматривается вероятность попадания в квадрат S при следующих условиях (рис. 7.2.4):

— сторона квадрата c равна $4\sqrt{2}\sigma_y$;

— координаты центра квадрата $x_c = 0$, $y_c = 4\sigma_y$;

— стороны квадрата составляют с большой главной осью рассеивания углы, каждый из которых равен 45°;

— $\sigma_x = 4\sigma_y$.

Требуется оценить погрешность вероятности попадания в квадрат, если вычислить ее как произведение вероятностей попадания в полосы S_1 и S_2.

В соответствии с условиями примера имеем

$$d_1 = c = 4\sqrt{2}\,\sigma_y = 5{,}657\sigma_y; \quad d_2 = 0; \quad \beta = 45°,$$

а из равенства (7.2.3) следует

$$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{2}} = \sqrt{\frac{16\sigma_y^2+\sigma_y^2}{2}} = 2{,}915\sigma_y.$$

Подставив полученные значения в формулу (7.2.2), получим

$$P\{N \in S_1\} = \Phi_0\left(\frac{5{,}657\sigma_y}{2{,}915\sigma_y}\right) - \Phi_0(0) = \Phi_0(1{,}941).$$

В табл. III находим

$$P\{N \in S_1\} = \Phi_0(1{,}941) = 0{,}4739.$$

В силу симметрии для $P\{N \in S_2\}$ имеем то же значение. Следовательно, пренебрегая зависимостью между вероятностями попадания в полосы S_1 и S_2, получим

$$P\{N \in S\} = 0{,}4739^2 = 0{,}225. \qquad (*)$$

Вычисление $P\{N \in S\}$ по методу сеток (§.7.3) приводит к истинному значению

$$P\{N \in S\} = 0{,}079. \qquad (**)$$

Таким образом, пренебрежение непараллельностью сторон квадрата и сопряженных диаметров или, иначе говоря, пренебрежение зависимостью попаданий в полосы S_1 и S_2 приводит к завышению вероятности попадания в квадрат примерно в три раза! Значение (*) не дает никакого представления об истинном значении (**).

Замечание. Формула (7.2.9) справедлива при любом положении прямоугольника S, если распределение круговое; в этом случае любую пару перпендикулярных направлений можно считать направлениями главных осей рассеивания.

5. Вероятность попадания в круг, центр которого смещен относительно центра кругового рассеивания

В этом случае двойной интеграл в равенстве (7.1.31) преобразуется в однократный, являющийся

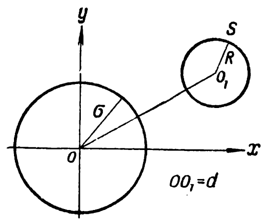

Рис. 7.2.5

функцией от двух параметров — h и r. Среди его возможных форм укажем две *:

$$P\{N\in S\} = W(r, h) = e^{-\frac{h^2}{2}} \int_0^r e^{-\frac{t^2}{2}} I_0(ht)\, t\, dt; \qquad (7.2.10)$$

$$P\{N\in S\} = W(r, h) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\Phi_0\left(\sqrt{r^2 - t^2} + h\right) + \right.$$

$$\left. + \Phi_0\left(\sqrt{r^2 - t^2} - h\right)\right] dt, \qquad (7.2.11)$$

где

$$h = \frac{d}{\sigma}, \quad r = \frac{R}{\sigma}; \qquad (7.2.12)$$

d — расстояние от центра рассеивания до центра круга S (рис. 7.2.5);

* Интегралы (7.2.10) и (7.2.11) идентичны. Существование разных форм обусловлено наличием разных подходов к преобразованию двойного интеграла в однократный.

R — радиус круга S;
σ — радиальное СКО;
I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка мнимого аргумента;
Φ_0 — функция, определяемая равенством (5.1.17).

Интегралы (7.2.10) и (7.2.11) вычисляются с помощью численных методов. Значения вероятности $W(r, h)$ приведены в табл. X.

§ 7.3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ В ПЛОСКУЮ ОБЛАСТЬ ПРИ ДВУМЕРНОМ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Большинство приближенных методов вычисления вероятности попадания случайной точки N в произвольную область S сводятся либо к применению тех или иных приемов численного интегрирования, либо к замене области S на равновеликую. Рассмотрим методы, представляющие наибольший практический интерес. Так же, как в § 7.2, будем пользоваться основной системой координат Oxy.

1. Замена области произвольной формы равновеликой фигурой

Замена области равновеликим прямоугольником

Пусть площадь области S равна A и x_c, y_c — координаты ее центра тяжести в основной системе координат Oxy.

Замена области S одним прямоугольником допустима, если S выпукла и, кроме того, ее ориентировка совпадает с ориентировкой единичного эллипса, т. е. если направления сторон прямоугольника, который «напрашивается» для замены, близки к направлениям главных осей рассеивания. В противном случае погрешность может быть чересчур велика.

При указанных условиях приближенная формула, основанная на замене области S равновеликим прямоугольником S_1 с тем же центром тяжести и сторонами, параллельными главным осям рассеивания, имеет вид

$$\begin{aligned} P\{N \in S\} &\approx \left[\Phi_0\left(\frac{x_c + 0{,}5m}{\sigma_x}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_c - 0{,}5m}{\sigma_x}\right)\right] \times \\ &\times \left[\Phi_0\left(\frac{y_c + 0{,}5n}{\sigma_y}\right) - \Phi_0\left(\frac{y_c - 0{,}5n}{\sigma_y}\right)\right] \approx \\ &\approx \left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{x_c + 0{,}5m}{E_x}\right) - \hat{\Phi}_0\left(\frac{x_c - 0{,}5m}{E_x}\right)\right] \times \\ &\times \left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{y_c + 0{,}5n}{E_y}\right) - \hat{\Phi}_0\left(\frac{y_c - 0{,}5n}{E_y}\right)\right], \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

где m, n длины сторон прямоугольника S_1, определяемые равенствами:

$$m = \sqrt{\frac{Am_1}{n_1}}; \quad n = \sqrt{\frac{An_1}{m_1}}, \tag{7.3.2}$$

а m_1, n_1 — средние хорды области S в направлениях осей Ox и Oy соответственно. Они вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{h-g}\int_g^h [x_2(\eta) - x_1(\eta)]\, d\eta; \\ n_1 &= \frac{1}{f-e}\int_e^f [y_2(\xi) - y_1(\xi)]\, d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{7.3.3}$$

Смысл обозначений, входящих в формулы (7.3.3), очевиден из рис. 7.3.1.

Если центр тяжести области S совпадает с центром рассеивания, формула (7.3.1) принимает вид

$$P\{N \in S\} = 4\Phi_0\left(\frac{m}{2\sigma_x}\right)\Phi_0\left(\frac{n}{2\sigma_y}\right). \tag{7.3.1'}$$

Вероятность попадания, вычисленная по формуле (7.3.1), практически не зависит от небольших изменений величин m и n при условии, что $S_1 = S$.

О точности формулы (7.3.1) и величине погрешности из-за неточного определения величин m и n можно судить по примерам 7.3.1 и 7.3.2.

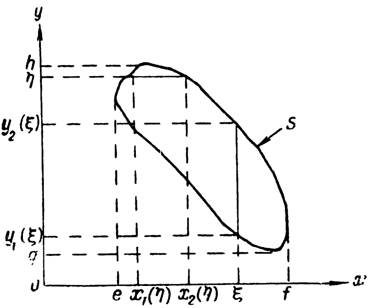

Рис. 7.3.1

Пример 7.3.1. Рассматривается вероятность попадания в эллипс S, подобный и расположенный подобно эллипсам равной вероятности. Уравнение эллипса S:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

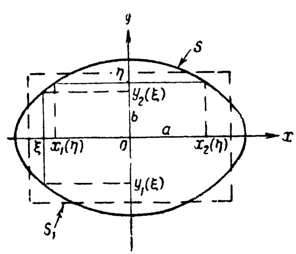

Рис. 7.3.2

Требуется оценить точность приближенной формулы (7.3.1). Найдем выражения для сторон равновеликого прямоугольника S_1. Для величин, входящих в равенства (7.3.3), имеем (рис. 7.3.2): $f = -e = a$; $h = -g = b$.

Из уравнения эллипса следует:

$$x_2(\eta) = -x_1(\eta) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-\eta^2};$$

$$y_2(\xi) = -y_1(\xi) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\xi^2}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (7.3.3), получим

$$m_1 = \frac{\pi a}{2}; \quad n_1 = \frac{\pi b}{2}.$$

Так как площадь A эллипса S равна πab, то из равенств (7.3.2) следует:

$$m = \sqrt{\pi}a; \quad n = \sqrt{\pi}b. \qquad (*)$$

Равновеликий прямоугольник S_1 показан на рис. 7.3.2 пунктиром.

По условию подобия эллипса S и эллипсов равных вероятностей

$$\frac{a}{\sigma_x} = \frac{b}{\sigma_y}. \qquad (**)$$

Подстановка равенств (*) и (**) в формулу (7.3.1′) приводит к выражению

$$P_{\text{прибл}}\{N \in S\} = 4\Phi_0^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}k\right), \qquad (***)$$

где $k = \frac{a}{\sigma_x}$.

В табл. 7.3.1 приведены точные и приближенные значения вероятности попадания в эллипс, вычисленные по формулам (7.2.1) и (***) соответственно, для ряда значений k. Там же приведены значения относительной погрешности в процентах.

Таблица 7.3.1

k	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$P_{\text{точн}}$	0,11750	0,39347	0,67535	0,86467	0,95606	0,98889	0,99781
$P_{\text{прибл}}$	0,11718	0,38996	0,66628	0,85320	0,94726	0,98437	0,99624
δ %	0,3	0,9	1,3	1,3	0,9	0,5	0,2

Замечание. Из формул (7.3.2) следует, что в конечном счете для вычисления сторон равновеликого прямоугольника нужны не сами средние хорды, а их отношение. В примере 7.3.1 оно равно отношению максимальных хорд области S в направлениях осей Ox и Oy (в примере эти хорды равны осям эллипса $2a$ и $2b$). В общем случае такое равенство не имеет места.

Пример 7.3.2. В условиях примера 7.3.1, дополненных условием

$$a = 2\sigma_x; \quad b = 2\sigma_y, \qquad (\triangle)$$

требуется оценить влияние приближенного определения сторон равновеликого прямоугольника на погрешность формулы (7.3.1).

Предположим, что в качестве m выбрана длина большой оси эллипса $2a$ (это самое грубое из возможных завышенных значений m при выборе его «на глаз»). Тогда из условия равенства площадей эллипса S и равновеликого прямоугольника следует

$$n = \frac{\pi ab}{2a} = \frac{\pi b}{2}.$$

В соответствии с условием $(\triangle)$ и выбранным значением m имеем: $m = 2a = 4\sigma_x$; $n = \pi\sigma_y$. Подставив эти равенства в формулу (7.3.1′), получим

$$P_{\text{прибл}}\{N \in S\} \approx 4\Phi_0(2)\,\Phi_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}8440. \qquad (\triangle\triangle)$$

Такой же результат получится, если в качестве n выбрана длина малой оси $2b$.

Учитывая дополнительное условие

$$k = \frac{a}{\sigma_x} = 2,$$

находим в табл. 7.3.1 истинное значение вероятности попадания, равное 0,8647. Отсюда следует, что относительная погрешность приближенного значения $P\{N \in S\}$ из равенства $(\triangle\triangle)$ составляет 2,3%. Это на 1% больше, чем при более обоснованном выборе сторон равновеликого прямоугольника.

Таким образом, весьма грубый выбор сторон равновеликого прямоугольника приводит к небольшой дополнительной погрешности. Если вычисления по формулам (7.3.3) утомительны, то их можно опустить и определять стороны приближенно, соблюдая требование равенства площадей области S и равновеликого прямоугольника.

Замена области несколькими прямоугольниками

Для уменьшения погрешности при использовании метода замены следует заменить область S несколькими прямоугольниками, суммарная площадь которых равна площади области, а стороны параллельны главным осям рассеивания. В особенности такая замена целесообразна при сложных очертаниях области S. Например, при вычислении вероятности попадания в корабль можно заменить его проекцию системой прямоугольников так, как показано на рис. 7.3.3, если ватерлиния параллельна одной из главных осей рассеивания.

Вычисление вероятности попадания в область S сводится к применению формулы (7.3.1) к каждому из прямоугольников и последующему суммированию полученных результатов. Применение формул (7.3.2) и (7.3.3) можно заменить определением одной из сторон каждого прямоугольника «на глаз». Другая определяется требованием равенства площадей.

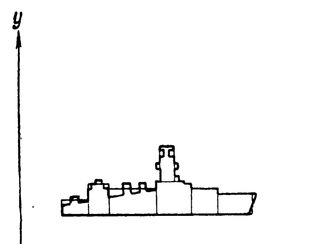

Рис. 7.3.

Область S следует заменять несколькими прямоугольниками также при несложных очертаниях области, если ее ориентировка не совпадает с ориентировкой единичного эллипса, а максимальные размеры соизмеримы или превышают длину хотя бы одной из его полуосей.

Например, непосредственное применение формул (7.3.1)—(7.3.3) к квадрату S (пример 7.2.1) приводит к приближенному значению $P\{N \in S\}=0{,}064$, которое на 20% меньше истинного значения. Если же разделить квадрат S на четыре равных квадрата и применить к каждому из них формулы (7.3.1) — (7.3.3), то погрешность практически равна нулю.

В ряде случаев метод замены области несколькими прямоугольниками более трудоемок, чем метод сеток.

2. Метод сеток

Метод основан на использовании сетки, образуемой делением плоскости Oxy на достаточно мелкие ячейки, вероятности попадания в которые заранее вычислены. Вычисление вероятности попадания в область S заключается в наложении этой области, начерченной в надлежащем масштабе, на сетку и суммировании цифр в ячейках, накрытых областью.

Наиболее распространены квадратные сетки. Они просты и во многих случаях расчеты с их помощью менее трудоемки, чем при сетках других типов.

В приложениях I и II приведены две квадратные сетки. Если рассеивание измеряется в СКО, то используется сетка приложения I, если же в срединных, — то сетка приложения II. Для расчетов с помощью квадратной сетки приложения I следует:

1) Нанести на лист кальки оси основной системы координат Oxy в масштабе, при котором величина σ_x будет совпадать с величиной σ на сетке.

2) Нанести на тот же лист границы области S.

3) Преобразовать ординаты границ области S по формуле

$$\eta = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y \tag{7.3.4}$$

и нанести их на тот же лист, не изменяя абсцисс границ области. В результате S преобразуется в некоторую область S'.

4) Наложить на сетку область S', совместив начало координат с центром сетки, и просуммировать числа в ячейках сетки, попавших в область S'. Если ячейка накрывается не полностью, то соответствующее ей число уменьшается пропорционально накрытой части ячейки. Искомая вероятность равна полученной сумме, уменьшенной в 10 000 раз.

Такой же результат будет получен, если масштаб основной системы координат выбрать так, чтобы величина σ_y совпадала с σ на сетке приложения I, и преобразовать не ординаты, а абсциссы границ области S по формуле

$$\xi = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x. \tag{7.3.5}$$

При желании производить расчет в срединных отклонениях следует соблюдать совпадение E_x или E_y с величиной E на сетке приложения II, а координаты преобразовывать по формулам $\eta = \frac{E_x}{E_y} y$ или $\xi = \frac{E_y}{E_x} x$ соответственно.

Если очертания области S сложны, то может оказаться более удобным построение прямоугольной сетки, на которой соотношение размеров σ_x и σ_y сохранено. Масштаб сетки должен совпадать с масштабом чертежа области S. Прямоугольную сетку можно нанести на кальку или непосредственно на чертеж области S, совместив центр сетки с центром рассеивания и направив оси сетки вдоль главных осей рассеивания. Размеры сторон ячеек целесообразно принять равными $0{,}2\,\sigma_x$ (E_x) и $0{,}2\,\sigma_y$ (E_y) соответственно. При этом числа в ячейках будут совпадать с соответствующими числами на квадратной сетке приложения I или приложения II.

3. Определение вероятности попадания в область малых размеров

Под областью малых размеров понимается такая область S, размеры которой в любом направлении не превосходят 0,5—0,7 СКО в том же направлении.

Согласно одной из теорем математического анализа о среднем равенство (7.1.31) может быть записано в виде

$$P\{N \in S\} = \varphi(x_{ср}, y_{ср})\, A, \tag{7.3.6}$$

где A — площадь области S;

$x_{ср}, y_{ср}$ — координаты некоторой неизвестной точки из области S.

Приближенный метод вычисления вероятности $P\{N \in S\}$ состоит в том, что в качестве координат средней точки $x_{ср}$, $y_{ср}$ принимаются координаты центра тяжести области S *. При этом условии

$$P\{N \in S\} \approx \frac{A}{2A_1} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_c}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{\sigma_y}\right)^2\right]} \approx$$

$$\approx \rho^2 \frac{A}{\hat{A}_1} e^{-\rho^2\left[\left(\frac{x_c}{E_x}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{E_y}\right)^2\right]}, \tag{7.3.7}$$

где x_c, y_c — координаты центра тяжести области S в основной системе координат;

$A_1\ (\hat{A}_1)$ — площадь единичного эллипса, т. е.

$$A_1 = \pi\sigma_x\sigma_y; \quad \hat{A}_1 = \pi E_x E_y.$$

В частности, если центр тяжести области S совпадает с центром рассеивания, то

$$P\{N \in S\} \approx \frac{A}{2A_1} \approx \frac{\rho^2 A}{\hat{A}_1}. \tag{7.3.8}$$

---

* В принципе возможен и другой выбор точки, принятой в качестве средней.

З а м е ч а н и е. Ограниченность области применения формул (7.3.7) и (7.3.8) очевидна. При больших A правая часть этих формул может стать больше единицы. В то же время, если хорды области S в любом направлении не превосходят 0,1—0,2 СКО в том же направлении, то приближенные формулы (7.3.7) и (7.3.8) приводят к достаточно точным результатам.

О точности формул (7.3.7) и (7.3.8) дают представление следующие примеры.

Пример 7.3.3. Рассматривается вероятность попадания в круг S радиуса R, центр которого совпадает с центром рассеивания. Распределение круговое с радиальным СКО σ. Требуется оценить точность приближенной формулы (7.3.8).

Сравним точные значения вероятности попадания, вычисленные по формуле (7.2.1), которая может быть представлена в виде

$$P\{N\in S\} = 1 - e^{-\frac{A}{2A_1}}$$

с приближенными, вычисленными по формуле (7.3.8). Результаты вычислений приведены в табл. 7.3.2. Там же указана относительная погрешность δ в процентах.

Пример 7.3.4. Рассматривается вероятность попадания в квадрат S со стороной $2a$, координаты центра которого $x_c = y_c = \sigma$ (рис. 7.3.4). Распределение круговое с радиальным СКО σ. Требуется оценить точность приближенной формулы (7.3.7).

В табл. 7.3.3 приведены точные и приближенные значения вероятностей попадания, вычисленные по формулам (7.2.9) и (7.3.7) соответственно, которые могут быть представлены в виде:

$$P_{\text{точн}}\{N\in S\} = \left[\Phi_0\left(1+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\sqrt{\frac{A}{A_1}}\right) - \Phi_0\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\sqrt{\frac{A}{A_1}}\right)\right]^2;$$

$$P_{\text{прибл}}\{N\in S\} = \frac{1}{2e}\cdot\frac{A}{A_1}.$$

Там же приведены значения относительной погрешности δ в процентах.

Таблица 7.3.2

$\frac{A}{A_1}$	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40
$P_{точн}$	0,00499	0,02469	0,04877	0,09516	0,13929	0,18127
$P_{прибл}$	0,00500	0,02500	0,05000	0,10000	0,15000	0,20000
δ %	0,2	1,3	2,5	5,1	7,7	10,3

Таблица 7.3.3

$\frac{A}{A_1}$	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50
$P_{точн}$	0,04593	0,09153	0,18069	0,26575	0,34552	0,41953
$P_{прибл}$	0,04598	0,09197	0,18394	0,27591	0,36788	0,45985
δ %	0,1	0,5	1,8	3,8	6,5	9,6

Из табл. 7.3.2 и 7.3.3 следует, что погрешность формул (7.3.7) и (7.3.8) существенно зависит не только от отношения $\frac{A}{A_1}$, но и от удаления d центра тяжести области S от центра рассеивания. Погрешность растет с увеличением $\frac{A}{A_1}$ и, как правило, уменьшается с увеличением d.

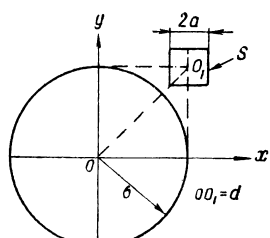

Рис. 7.3.4

При d, отличном от нуля, приближенная формула (7.3.7) может быть в отдельных случаях приемлема по точности, если размеры области достигают одного и даже двух СКО в соответствующих направлениях.

Надо иметь в виду, что для применимости приближенных формул (7.3.7), (7.3.8) недостаточно, чтобы площадь области S была мала по сравнению с площадью единичного эллипса. Должны быть малы все размеры области S. Иначе относительная погрешность может быть весьма велика.

Пример 7.3.5. Рассматривается вероятность попадания в прямоугольник S, центр которого совпадает с центром рассеивания. Распределение круговое с радиальным СКО σ. Площадь прямоугольника S равна A, площадь единичного эллипса (в данном случае круга) — A_1. Площадь A в 25 раз меньше A_1. Длины сторон прямоугольника равны a и b. Требуется оценить точность приближенной формулы (7.3.8) в зависимости от соотношения сторон прямоугольника.

Обозначим $\frac{a}{b}=c$. Достаточно рассмотреть значения $c \geqslant 1$, так как при круговом распределении замена сторон друг на друга, эквивалентная повороту прямоугольника на 90°, не меняет вероятности попадания в него.

Приближенное значение вероятности попадания равно согласно формуле (7.3.8) $1/2 \cdot 1/25 = 0{,}02$ и не зависит от отношения сторон c.

Сравним точные значения вероятности попадания, вычисленные по формуле (7.2.9′), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$P\{N \in S\} = 4\Phi_0\left(\frac{a}{2\sigma}\right)\Phi_0\left(\frac{b}{2\sigma}\right) = 4\Phi_0\left(0{,}1\sqrt{\pi c}\right)\Phi_0\left(0{,}1\sqrt{\frac{\pi}{c}}\right)$$

с приближенным значением 0,02. Результаты вычислений и значение отношения a к σ приведены в табл. 7.3.4.

Таблица 7.3.4

c	1	2	5	10	20	50
$P_{\text{точн}}$	0,01979	0,01974	0,01947	0,01899	0,01808	0,01580
δ %	1,1	1,3	2,7	5,3	10,6	26,6
$\frac{a}{\sigma}$	0,35	0,50	0,79	1,12	1,58	2,51

Из табл. 7.3.4 следует, что погрешность приближенной формулы (7.3.8) становится достаточно большой, несмотря на малую площадь области S, если хотя бы один из ее размеров такого же порядка, как СКО.

Точность формул (7.3.7) и (7.3.8) может быть повышена (в особенности при близости центра цели и центра рассеивания), если истинные значения характеристик рассеивания заменить в этих формулах так называемыми приведенными значениями, которые определяются равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_x &= \sqrt{\sigma_x^2 + \frac{m^2}{12}}; & E'_x &= \sqrt{E_x^2 + \frac{\rho^2 m^2}{6}}; \\ \sigma'_y &= \sqrt{\sigma_y^2 + \frac{n^2}{12}}; & E'_y &= \sqrt{E_y^2 + \frac{\rho^2 n^2}{6}}; \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.9)$$

где m и n — стороны прямоугольника, равновеликого области S, вычисляемые по формулам (7.3.2) или определяемые «на глаз». Такая замена позволяет применять формулы (7.3.7) и (7.3.8) к области, размеры которой в любом направлении достигают 1,5—2 СКО, если ее ориентировка близка к ориентировке одиночного эллипса.

4. Замена эллиптического распределения круговым

При определении вероятности попадания в круг и решении других задач вычисления существенно облегчаются, если заменить распределение с главными СКО σ_x и σ_y круговым распределением с радиальным СКО

$$\sigma = \left(\frac{\sqrt{\sigma_x} + \sqrt{\sigma_y}}{2}\right)^2. \qquad (7.3.10)$$

Замена допустима, если отношение большего главного СКО к меньшему не превосходит 1,5—1,6. В некоторых задачах это отношение может быть увеличено до 2—2,5.

§ 7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВУМЕРНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБРАЗУЕМОГО СИСТЕМОЙ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРИАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Система любого числа независимых векториальных СВ на плоскости, подчиняющихся закону нормального распределения, приводит к двумерному нормальному распределению, если среди векториальных СВ есть хотя бы две с разными направлениями. Определение параметров полученного двумерного нормального распределения, образуемого системой независимых векториальных СВ, — координат центра рассеивания, коэффициента корреляции и главных СКО (или срединных отклонений) — эквивалентно определению характеристик единичного эллипса рассеивания — центра рассеивания, направления большой (или малой) оси, длин большой и малой осей.

Центр рассеивания находится в точке, откуда берут начало векториальные СВ. Эта точка задается при решении практических задач или определяется как векторная сумма МО рассматриваемых вырожденных случайных векторов. Таким образом, положение центра единичного эллипса можно считать известным и определение параметров двумерного нормального распределения, образуемого системой векториальных СВ, сводится к отысканию длин полуосей единичного эллипса и направления его большой (или малой) оси.

При решении этой задачи полезно учитывать следующее:

— размеры и направления осей эллипса однозначно определяются размерами и направлениями любой пары сопряженных диаметров эллипса, и наоборот;

— единичный эллипс эквивалентен двум векториальным СВ, которые образуются половинами любой пары сопряженных диаметров эллипса (в частности, полуосями);

— две векториальные СВ образуют половины сопряженных диаметров в единичном эллипсе, который эквивалентен системе этих двух векториальных СВ.

Название «единичный эллипс рассеивания» относится к двум разным эллипсам. У одного из них полуоси равны главным СКО, у другого — главным срединным отклонениям. Выбор одного из них для производства вычислений зависит от вкуса расчетчика и от наличия таблиц (в данном справочнике табл. II—V позволяют производить расчеты применительно к обоим отклонениям). В соответствии с выбором единичного эллипса под величиной d в обозначении векториальной СВ $\bar{\bar{d}}$ понимается либо СКО, либо срединное отклонение.

Вид формул для параметров двумерного нормального распределения и единичных эллипсов не зависит от типа отклонения, выбранного расчетчиком. Поэтому все последующие рассуждения и результаты будут для краткости приводиться в обобщенном виде, пригодном для отклонений обоих типов. Это значит, что под полуосями единичного эллипса следует понимать главные СКО, если векториальные СВ выражены в СКО, и главные срединные отклонения, если векториальные СВ выражены в срединных отклонениях.

В дальнейшем предполагается, что начало координат лежит в центре рассеивания.

Сложение векториальных случайных величин

Для сложения n векториальных СВ $\bar{\bar{d}}_1$, $\bar{\bar{d}}_2$, ..., $\bar{\bar{d}}_n$ произвольно выбирается ориентация системы координат Oxy и определяются проекции векториальных СВ $d_{i,\,x}$, $d_{i,\,y}$ ($i=1, 2, \ldots, n$). С целью упрощения вычислений целесообразно выбрать одну из осей координат так, чтобы она совпадала с направлением возможно большего числа векториальных СВ.

Полуоси единичного эллипса определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{A+C}{2} + \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}}; \\ b &= \sqrt{\frac{A+C}{2} - \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (7.4.1)$$

где

$$A = \sum_{i=1}^{n} d_{i,\,x}^2; \; B = \sum_{i=1}^{n} d_{i,\,x} d_{i,\,y}; \; C = \sum_{i=1}^{n} d_{i,\,y}^2. \quad (7.4.2)$$

Формулы для вычисления угла β между осью Ox и направлением большой оси единичного эллипса приведены в табл. 7.4.1. Угол β отсчитывается против часовой стрелки.

Таблица 7.4.1

Формулы для определения угла β между осью абсцисс и большой осью единичного эллипса

	$A > C$	$A = C$	$A < C$
$B > 0$	$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A - C}$	45°	$90^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A - C}$
$B = 0$	0°	Любой	90°
$B < 0$	$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A - C}$	-45°	$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A - C} - 90^\circ$

В частном случае, когда все векториальные СВ группируются по двум направлениям, нужно каждую из этих групп привести к одной векториальной СВ по формуле вида (6.3.1). В частном случае, когда указанные два направления образуют прямой угол, они принимаются в качестве осей системы координат Oxy. При этом $B=0$ и

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{A+C}{2} + \frac{|A-C|}{2}}; \\ b &= \sqrt{\frac{A+C}{2} - \frac{|A-C|}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{7.4.3}$$

а угол β определяется средней строкой в табл. 7.4.1.

Пример 7.4.1. Дана система векториальных СВ, показанная на рис. 7.4.1. Найти эквивалентный ей единичный эллипс рассеивания.

Выбираем координатную систему Oxy, как показано на рис. 7.4.1. Определяем проекции векториальных СВ:

$$d_{1,\,x}=3\cos(-30^\circ)=\frac{3\sqrt{3}}{2},\quad d_{1,\,y}=3\sin(-30^\circ)=-\frac{3}{2};$$

$$d_{2,\,x}=2,\qquad d_{2,\,y}=0;$$

$$d_{3,\,x}=0,\qquad d_{3,\,y}=2;$$

$$d_{4,\,x}=1\cdot\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},\quad d_{4,\,y}=1\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

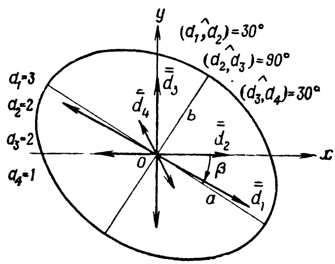

Рис. 7.4.1

Вычисляем величины A, B, C по формулам (7.4.2) и получаем $A=11$; $B=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$; C 7.

Подставив эти значения в (7.4.1), получим $a=3{,}37$; $b=2{,}57$. Так как $A>C$ и $B<0$, то из табл. 7.4.1 имеем

$$\beta=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A-C}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{-5\sqrt{3}}{4}=-32^\circ35'.$$

Полученный эллипс показан на рис. 7.4.1.

З а м е ч а н и е. Не следует отождествлять табл. 7.4.1 и 7.1.1. Одна может быть получена из другой с помощью следующих равенств.

Если векториальные СВ выражены в СКО, то

$$a_{11}=\frac{C}{2\delta_1},\quad a_{12}=-\frac{B}{2\delta_1},\quad a_{22}=\frac{A}{2\delta_1};$$

$$A=\frac{a_{22}}{2\delta},\quad B=-\frac{a_{12}}{2\delta},\quad C=\frac{a_{11}}{2\delta}.$$

Если векториальные СВ выражены в срединных отклонениях, то $a_{11} = \rho^2 \frac{C}{\delta_1}$; $A = \rho^2 \frac{a_{22}}{\delta}$ и т. д.,

где

$$\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2; \quad \delta_1 = AC - B^2.$$

Разложение двумерного нормального распределения на две векториальные случайные величины

Эта задача имеет бесконечное число решений, каждое из которых представляет векториальные СВ, обра-

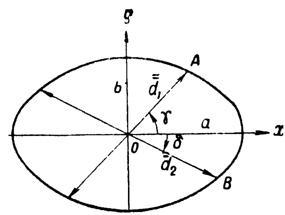

Рис. 7.4.2

зуемые половинами сопряженных диаметров единичного эллипса. Для получения определенного решения направление одной из векториальных СВ должно быть задано или выбрано расчетчиком.

Пусть уравнение единичного эллипса, соответствующего заданному двумерному распределению (рис. 7.4.2),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть одна из искомых векториальных СВ $\bar{\bar{d}}_1$ составляет угол γ с большой осью единичного эллипса. Тогда ее величина определяется равенством

$$d_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}}, \tag{7.4.4}$$

а величина другой векториальной СВ

$$\dot{a}_2 = \sqrt{\frac{a^4 \sin^2 \gamma + b^4 \cos^2 \gamma}{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}}. \qquad (7.4.5)$$

Вторая векториальная СВ образует с большой осью единичного эллипса угол δ, для определения которого служит формула

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{b^2 \operatorname{ctg} \gamma}{a^2}. \qquad (7.4.6)$$

Задача разложения на две векториальные СВ возникает, например, при полном устранении векториальной СВ в определенном направлении. Если устранена векториальная СВ в направлении OA (рис. 7.4.2), то оставшаяся векториальная СВ OB определяется равенствами (7.4.5) и (7.4.6).

Включение векториальной случайной величины в двумерное нормальное распределение

Подобные задачи возникают, например, при необходимости учесть векториальную СВ, которая по тем или иным причинам не была ранее включена в систему векториальных СВ.

Пусть единичный эллипс

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

должен быть дополнен векториальной СВ $\bar{\bar{d}}_3$, составляющей угол α с большой осью единичного эллипса (рис. 7.4.3).

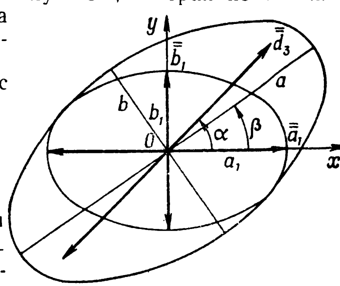

Рис. 7.4.3

Для решения задачи единичный эллипс разлагается на две векториальные СВ, образуемые его полуосями, которые вместе с $\bar{d}_3$ составляют систему трех векториальных СВ с проекциями:

$$d_{1,x} = a_1, \quad d_{2,x} = 0, \quad d_{3,x} = d_3 \cos\alpha;$$
$$d_{1,y} = 0, \quad d_{2,y} = b_1, \quad d_{3,y} = d_3 \sin\alpha.$$

Их сложение и определение характеристик нового единичного эллипса a, b и β производится по формулам (7.4.2) и (7.4.1) с учетом табл. 7.4.1.

Устранение векториальной случайной величины из двумерного нормального распределения

Подобные задачи возникают, если какая-либо векториальная СВ полностью или частично устраняется.

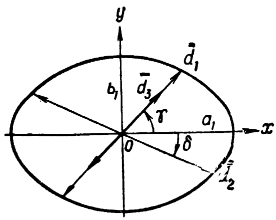

Рис. 7.4.4

Пусть подлежит устранению векториальная СВ $\bar{d}_3$, составляющая угол γ с большой осью единичного эллипса (рис. 7.4.4):

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

соответствующего заданному двумерному нормальному распределению. Для решения этой задачи следует:

— разложить заданное двумерное нормальное распределение по формулам (7.4.4) и (7.4.5) на две векториальные СВ $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$, из которых первая направлена так же, как $\bar{d}_3$;

— определить угол δ по формуле (7.4.6);

— найти величину векториальной СВ $\bar{d}_4$, которая образуется при устранении векториальной СВ $\bar{d}_3$ из векториальной СВ $\bar{d}_1$, по формуле

$$d_4 = \sqrt{d_1^2 - d_3^2}; \tag{7.4.7}$$

— найти проекции векториальных СВ $\bar{d}_2$ и $\bar{d}_4$ на оси координат ($\bar{d}_4$ направлена так же, как $\bar{d}_3$);

— определить характеристики нового единичного эллипса, образуемого векториальными СВ $\bar{\bar{d}}_2$ и $\bar{\bar{d}}_4$, по формулам (7.4.2) и (7.4.1) с учетом табл. 7.4.1.

Если $d_3 > d_1$, то задача неразрешима. Если же $d_3 = d_1$, то после устранения $\bar{\bar{d}}_3$ останется векториальная СВ $\bar{\bar{d}}_2$.

Сложение двумерных нормальных распределений

Пусть нужно сложить n двумерных нормальных распределений. Пусть полуоси единичных эллипсов равны соответственно: a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_n, b_n.

Порядок операций:

— произвольно выбирается ориентация системы координат Oxy и устанавливаются углы между осью абсцисс и большими осями единичных эллипсов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$;

— система $2n$ векториальных СВ, образуемых полуосями единичных эллипсов

$$\bar{\bar{d}}_1 = \bar{\bar{a}}_1,\ \bar{\bar{d}}_2 = \bar{\bar{a}}_2,\ \ldots,\ \bar{\bar{d}}_n = \bar{\bar{a}}_n;$$

$$\bar{\bar{d}}_{n+1} = \bar{\bar{b}}_1,\ \bar{\bar{d}}_{n+2} = \bar{\bar{b}}_2,\ \ldots,\ \bar{\bar{d}}_{2n} = \bar{\bar{b}}_n,$$

проектируется на оси координат;

— по формулам (7.4.2), используя полученные проекции

$$d_{1,x} = a_1 \cos\alpha_1;\ d_{2,x} = a_2 \cos\alpha_2;\ \ldots;\ d_{n,x} = a_n \cos\alpha_n;$$

$$d_{n+1,x} = b_1 \sin\alpha_1;\ d_{n+2,x} = b_2 \sin\alpha_2;\ \ldots;\ d_{2n,x} = b_n \sin\alpha_n;$$

$$d_{1,y} = -a_1 \sin\alpha_1;\ d_{2,y} = -a_2 \sin\alpha_2;\ \ldots;\ d_{n,y} = -a_n \sin\alpha_n;$$

$$d_{n+1,y} = b_1 \cos\alpha_1;\ d_{n+2,y} = b_2 \cos\alpha_2;\ \ldots;\ d_{2n,y} = b_n \cos\alpha_n,$$

вычисляются величины A, B и C;

— по формулам (7.4.1) и табл. 7.4.1 определяются характеристики единичного эллипса суммарного двумерного нормального распределения.

§ 7.5. ТРЕХМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть в трехмерном пространстве O_1uvw расположено не менее трех вырожденных случайных векторов, обладающих следующими свойствами:

— все векторы подчиняются закону нормального распределения;

— среди векторов, не связанных между собой функционально, по крайней мере три не лежат в одной плоскости.

Тогда система этих векторов образует случайный вектор $\boldsymbol{R}$ (U, V, W), который подчиняется трехмерному нормальному распределению. Его составляющие U, V, W представляют собой систему СВ, каждая из которых подчиняется нормальному распределению.

Математическое выражение. Общий вид плотности трехмерного нормального распределения

$$\varphi(u, v, w) = Ae^{-G(u, v, w)}, \qquad (7.5.1)$$

где

$$G(u, v, w) = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + \\ + 2a_{23}vw + 2a_1u + 2a_2v + 2a_3w + a, \qquad (7.5.2)$$

причем должны быть выполнены условия

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{33} > 0; \qquad (7.5.3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0; \qquad (7.5.4)$$

$$T = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 > 0; \quad (7.5.5)$$

$$A = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi^{\frac{3}{2}}}; \qquad (7.5.6)$$

$$a = -(a_1u_0 + a_2v_0 + a_3w_0), \qquad (7.5.7)$$

где

$$u_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad w_0 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (7.5.8)$$

В выражениях (7.5.8) Δ_i — определитель, образованный из определителя Δ заменой элементов i-го столбца на числа $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$ соответственно. Например

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -a_1 & a_{12} & a_{13} \\ -a_2 & a_{22} & a_{23} \\ -a_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (7.5.9)$$

Выражение $G(u, v, w)$ в формуле (7.5.1) для плотности трехмерного нормального распределения обычно записывается в виде

$$G(u, v, w) = a_{11}(u - u_0)^2 + a_{22}(v - v_0)^2 + a_{33}(w - w_0)^2 + 2a_{12}(u - u_0)(v - v_0) + 2a_{23}(v - v_0)(w - w_0) + 2a_{13}(u - u_0)(w - w_0). \qquad (7.5.10)$$

Равенства вида

$$G(u, v, w) = k^2 \qquad (7.5.11)$$

представляют собой уравнения эллипсоидов, на которых плотность нормального распределения постоянна. Они называются *эллипсоидами равных вероятностей* (равной плотности), или эллипсоидами рассеивания. Центр эллипсоидов находится в точке O (u_0, v_0, w_0), которая называется *центром рассеивания.* В этой точке $\varphi(u, v, w)$ достигает максимума. Оси эллипсоидов равных вероятностей называются *главными осями рассеивания.*

Функция распределения СВ U, V, W, являющихся проекциями случайного вектора **R** на оси координат, равна

$$\Phi(u, v, w) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{u} \int\limits_{-\infty}^{v} \int\limits_{-\infty}^{w} e^{-G(\xi, \eta, \zeta)} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (7.5.12)$$

Трехмерное нормальное распределение полностью определяется девятью параметрами. В выражениях (7.5.1) и (7.5.12) это величины a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} и координаты центра рассеивания u_0, v_0, w_0.

С помощью преобразования координат

$$x = (u - u_0)\cos\alpha_1 + (v - v_0)\cos\beta_1 + (w - w_0)\cos\gamma_1;$$
$$y = (u - u_0)\cos\alpha_2 + (v - v_0)\cos\beta_2 + (w - w_0)\cos\gamma_2;$$
$$z = (u - u_0)\cos\alpha_3 + (v - v_0)\cos\beta_3 + (w - w_0)\cos\gamma_3$$

трехмерное нормальное распределение приводится к каноническому виду:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)}; \quad (7.5.13)$$

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{\sigma_x^2}+\frac{\eta^2}{\sigma_y^2}+\frac{\zeta^2}{\sigma_z^2}\right)} d\xi d\eta d\zeta \quad (7.5.14)$$

или

$$\hat{\varphi}(x, y, z) = \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} E_x E_y E_z} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} + \frac{z^2}{E_z^2}\right)}; \quad (7.5.13')$$

$$\hat{\Phi}(x, y, z) = \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} E_x E_y E_z} \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\rho^2\left(\frac{\xi^2}{E_x^2}+\frac{\eta^2}{E_y^2}+\frac{\zeta^2}{E_z^2}\right)} d\xi d\eta d\zeta, \quad (7.5.14')$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — *главные СКО* в направлениях осей координат Ox, Oy, Oz соответственно;
E_x, E_y, E_z — *главные срединные отклонения* в тех же направлениях.

Величины σ_x, σ_y, σ_z определяются равенствами:

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\mu_1}}; \quad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}}; \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2\mu_3}}, \qquad (7.5.15)$$

а величины E_x, E_y, E_z равенствами:

$$E_x = \frac{\rho}{\sqrt{\mu_1}}; \quad E_y = \frac{\rho}{\sqrt{\mu_2}}; \quad E_z = \frac{\rho}{\sqrt{\mu_3}}, \qquad (7.5.15')$$

где μ_i $(i=1, 2, 3)$ — корни уравнения

$$\mu^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\mu^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2)\mu - (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23}) = 0. \qquad (7.5.16)$$

Корни уравнения (7.5.16) всегда положительны.

Для отыскания углов α_1, β_1, γ_1, определяющих положение оси Ox в системе координат O_1uvw, решается система уравнений:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \mu_1)\cos\alpha_1 + a_{12}\cos\beta_1 + a_{13}\cos\gamma_1 = 0; \\ &a_{12}\cos\alpha_1 + (a_{22} - \mu_1)\cos\beta_1 + a_{23}\cos\gamma_1 = 0; \\ &a_{13}\cos\alpha_1 + a_{23}\cos\beta_1 + (a_{33} - \mu_1)\cos\gamma_1 = 0; \\ &\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1. \end{aligned} \qquad (7.5.17)$$

Для определения положения осей Oy и Oz решаются аналогичные системы, которые получаются из (7.5.17) заменой индекса «1» при μ, α, β и γ на «2» и «3» соответственно.

Замечание. Первые три уравнения системы (7.5.17) линейно зависимы. Любое из них можно исключить из рассмотрения, но целесообразнее использовать то уравнение, которое не участвовало в определении углов α_1, β_1, γ_1, для контроля решения, полученного из остальных уравнений системы.

Проекции X, Y, Z случайного вектора R на оси координат — независимые СВ. В соответствии с этим выражения (7.5.13) — (7.5.14′) распадаются на три множителя.

Например:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x;\ 0, \sigma_x)\,\varphi(y;\ 0, \sigma_y)\,\varphi(z;\ 0, \sigma_z); \quad (7.5.18)$$

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x; 0, \sigma_x)\,\Phi(y; 0, \sigma_y)\,\Phi(z; 0, \sigma_z), \quad (7.5.19)$$

где $\varphi(t;\ 0,\ \sigma_t)$, $\Phi(t;\ 0,\ \sigma_t)$ определяются равенствами (5.1.7) и (5.1.9). Аналогичные равенства справедливы для $\hat{\varphi}(x, y, z)$ и $\hat{\Phi}(x, y, z)$.

Если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$ (иначе $E_x = E_y = E_z = E$), то трехмерное нормальное распределение называется *сферическим.* Величина σ называется *радиальным* СКО *сферического распределения*, величина E — *радиальным срединным отклонением сферического распределения.*

Систему координат $Oxyz$, начало которой лежит в центре рассеивания, а оси направлены вдоль главных осей рассеивания, назовем *основной пространственной системой координат.* В этой системе уравнения эллипсоидов равных вероятностей имеют вид

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} = \varkappa^2 \quad (7.5.20)$$

или

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} + \frac{z^2}{E_z^2} = \frac{\varkappa^2}{2\rho^2}. \quad (7.5.20')$$

Для определенности оси основной системы выбирают так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma_x \geqslant \sigma_y \geqslant \sigma_z.$$

Эллипсоид равных вероятностей с полуосями σ_x, σ_y, σ_z

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} = 1 \quad (7.5.21)$$

называют *единичным эллипсоидом рассеивания* (кратко, единичным эллипсоидом). В литературе под единичным эллипсоидом иногда понимают также эллипсоид

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} + \frac{z^2}{E_z^2} = 1. \qquad (7.5.21')$$

Задание положения центра единичного эллипсоида, направлений и величин его полуосей эквивалентно заданию девяти параметров, определяющих трехмерное нормальное распределение.

Вычисление. В общем случае значения плотности вероятности вычисляются с помощью табл. XVII, а функция распределения — приближенными методами. В случае независимых составляющих случайного вектора плотность вероятности и функция распределения, определяемые равенствами (7.5.13) — (7.5.14′), вычисляются с помощью табл. II—V соответственно. Для этого они предварительно разбиваются на множители, как в выражениях (7.5.18) и (7.5.19), а каждый из множителей вычисляется в соответствии с равенствами (5.1.13), (5.1.14), (5.1.18) и (5.1.20).

1. Вероятность попадания

Вероятность попадания случайной точки $N(x, y, z)$ в область S определяется равенством

$$P\{N \in S\} = \iiint\limits_S \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (7.5.22)$$

В общем случае для вычисления интеграла применяются приближенные методы. В некоторых частных случаях вычисление его приводит к точным формулам.

Вероятность попадания в эллипсоид, подобный и расположенный подобно эллипсоидам равных вероятностей

Пусть уравнение эллипсоида S в основной системе координат

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Вероятность попадания в него случайной точки N определяется формулой

$$P\{N\in S\}=2\left[\Phi_0(k)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ke^{-\frac{k^2}{2}}\right] \qquad (7.5.23)$$

или

$$P\{N\in S\}=2\left[\hat{\Phi}_0(k_1)-\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}k_1e^{-\rho^2k_1^2}\right]. \qquad (7.5.23')$$

Величина k, представляющая отношение подобных элементов эллипсоида S и единичного эллипсоида (7.5.21), равна

$$k=\frac{a}{\sigma_x}=\frac{b}{\sigma_y}=\frac{c}{\sigma_z}. \qquad (7.5.24)$$

Аналогично

$$k_1=\frac{a}{E_x}=\frac{b}{E_y}=\frac{c}{E_z}. \qquad (7.5.24')$$

Если распределение сферическое, а S сфера радиуса R, то в формулах (7.5.23) и (7.5.23′)

$$k=\frac{R}{\sigma},\qquad k_1=\frac{R}{E}. \qquad (7.5.24'')$$

Вероятность попадания в область, лежащую между двумя параллельными плоскостями

Пусть область S лежит между двумя параллельными плоскостями Q_1 и Q_2. Пусть углы между перпендикуляром к этим плоскостям и осями основной системы координат Ox, Oy и Oz равны α, β и γ соответственно. Пусть расстояния до плоскостей Q_1 и Q_2 равны d_1 и d_2 соответственно, причем $d_1 \geqslant d_2$. Тогда для определения вероятности попадания в область S, если центр рассеивания расположен вне ее, служит формула

$$P\{N \in S\} = \Phi_0\left(\frac{d_1}{\sigma_Q}\right) - \Phi_0\left(\frac{d_2}{\sigma_Q}\right), \qquad (7.5.25)$$

в которой

$$\sigma_Q = \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2\alpha + \sigma_y^2 \cos^2\beta + \sigma_z^2 \cos^2\gamma} \qquad (7.5.26)$$

СКО в направлении, перпендикулярном к плоскостям Q_1 и Q_2.

Если центр рассеивания расположен внутри области S, то

$$P\{N \in S\} = \Phi_0\left(\frac{d_1}{\sigma_Q}\right) + \Phi_0\left(\frac{d_2}{\sigma_Q}\right). \qquad (7.5.27)$$

Наравне с формулами (7.5.25) и (7.5.27) применяются формулы:

$$P\{N \in S\} = \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_1}{E_Q}\right) - \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_2}{E_Q}\right), \qquad (7.5.25')$$

если центр рассеивания вне области S, и

$$P\{N \in S\} = \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_1}{E_Q}\right) + \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_2}{E_Q}\right), \qquad (7.5.27')$$

если центр рассеивания внутри области S, причем

$$E_Q = \sqrt{E_x^2 \cos^2\alpha + E_y^2 \cos^2\beta + E_z^2 \cos^2\gamma}. \qquad (7.5.26')$$

Если плоскость Q_1 удаляется на бесконечность и область S превращается в полупространство, то

$$P\{N \in S\} = 0{,}5 \mp \Phi_0\left(\frac{d_2}{\sigma_Q}\right) = 0{,}5 \mp \hat{\Phi}_0\left(\frac{d_2}{E_Q}\right), \qquad (7.5.28)$$

где знак минус применяется при нахождении центра рассеивания вне S, а знак плюс в противном случае.

Вероятность попадания в прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными главным осям рассеивания

Пусть координаты центра параллелепипеда S в основной системе координат — x_c, y_c, z_c, а ребра, параллельные главным осям рассеивания, равны соответственно h_x, h_y, h_z. Тогда вероятность попадания в параллелепипед равна

$$\boldsymbol{P}\{N\in S\} = \left[\Phi_0\left(\frac{x_c+0{,}5h_x}{\sigma_x}\right)-\Phi_0\left(\frac{x_c-0{,}5h_x}{\sigma_x}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\Phi_0\left(\frac{y_c+0{,}5h_y}{\sigma_y}\right)-\Phi_0\left(\frac{y_c-0{,}5h_y}{\sigma_y}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\Phi_0\left(\frac{z_c+0{,}5h_z}{\sigma_z}\right)-\Phi_0\left(\frac{z_c-0{,}5h_z}{\sigma_z}\right)\right] \qquad (7.5.29)$$

или

$$\boldsymbol{P}\{N\in S\} = \left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{x_c+0{,}5h_x}{E_x}\right)-\hat{\Phi}_0\left(\frac{x_c-0{,}5h_x}{E_x}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{y_c+0{,}5h_y}{E_y}\right)-\hat{\Phi}_0\left(\frac{y_c-0{,}5h_y}{E_y}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\hat{\Phi}_0\left(\frac{z_c+0{,}5h_z}{E_z}\right)-\hat{\Phi}_0\left(\frac{z_c-0{,}5h_z}{E_z}\right)\right]. \qquad (7.5.29')$$

Вероятность попадания в сферу, центр которой смещен относительно центра сферического распределения

В этом случае тройной интеграл в равенстве (7.5.22) может быть вычислен в конечном виде. Одно из возможных его выражений

$$\boldsymbol{P}\{N\in S\} = V(r,h) = \Phi_0(r+h)+\Phi_0(r-h)-$$
$$-\frac{\varphi(r-h)}{h}\left(1-e^{-2rh}\right), \qquad (7.5.30)$$

где

$$h = \frac{d}{\sigma}, \quad r = \frac{R}{\sigma}; \tag{7.5.31}$$

d — расстояние от центра рассеивания до центра сферы;

R — радиус сферы S;

σ — радиальное СКО сферического распределения;

Φ_0 — функция, определяемая равенством (5.1.17),

φ — функция, определяемая равенством (5.1.11).

Значения функции $V(r, h)$ приведены в табл. XI.

Вероятность попадания в малую область

Под малой областью понимается такая область S, размеры которой в любом направлении не превосходят половины СКО в том же направлении. Вероятность попадания в нее определяется приближенной формулой

$$P\{N \in S\} \approx \frac{B}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_c}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{z_c}{\sigma_z}\right)^2\right]} \approx$$

$$\approx \frac{\rho^3 B}{\pi^{\frac{3}{2}} E_x E_y E_z} e^{-\rho^2\left[\left(\frac{x_c}{E_x}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{E_y}\right)^2 + \left(\frac{z_c}{E_z}\right)^2\right]}, \tag{7.5.32}$$

где B — объем области S;

x_c, y_c, z_c — координаты ее центра тяжести в основной системе координат.

В некоторых случаях точность формулы (7.5.32) приемлема, если размеры области S достигают одной СКО по величине.

Вероятность попадания в область произвольной формы

Для приближенного определения вероятности попадания в произвольную область S последняя заменяется одним или несколькими прямоугольными параллелепипедами с ребрами, параллельными главным осям рассеивания. Объемы этих параллелепипедов должны быть

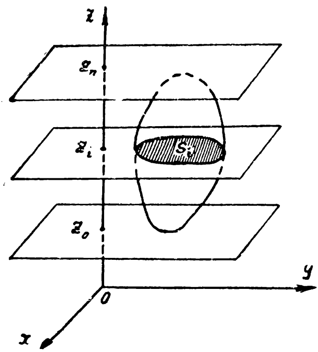

Рис. 7.5.1

в сумме равны объему области S. Вероятность попадания в каждый из параллелепипедов определяется по формуле (7.5.29) или (7.5.29′), после чего полученные вероятности суммируются.

Другой приближенный способ заключается в делении области S на слои плоскостями, параллельными одной из координатных плоскостей основной пространственной координатной системы, например Oxy. Если толщины слоев равны, то искомая вероятность равна

$$P\{N \in S\} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p_{i+1} + p_i}{2} \left[\Phi_0\left(\frac{z_{i+1}}{\sigma_z}\right) - \Phi_0\left(\frac{z_i}{\sigma_z}\right) \right], \quad (7.5.33)$$

где n — число слоев;

p_i — вероятность попадания точки N при условии, что она находится в плоскости $z=z_i$, в область S_i, образуемую при сечении области S плоскостью $z=z_i$; p_i вычисляется по методам § 7.2, 7.3;

z_i — координата пересечения плоскости i-го сечения с осью Oz; под $z=z_0$ и $z=z_n$ понимаются крайние плоскости, касающиеся области S.

2. Определение параметров трехмерного нормального распределения, образуемого системой векториальных случайных величин

Параметры трехмерного нормального распределения можно определить подобно тому, как в § 7.4 определялись параметры двумерного распределения, исходя из следующих положений:

— система векториальных СВ в пространстве, подчиняющихся закону нормального распределения, приводит к трехмерному нормальному распределению;

— определение параметров трехмерного нормального распределения эквивалентно определению характеристик единичного эллипсоида;

— любое трехмерное нормальное распределение можно заменить системой трех векториальных СВ, образуемых полуосями единичного эллипсоида.

При этом все результаты можно получить в обобщенной форме, применимой как к СКО, так и к срединным отклонениям (§ 7.4).

Сложение независимых векториальных случайных величин

Для сложения n векториальных СВ $\overline{\overline{d_1}}$, $\overline{\overline{d_2}}$, ..., $\overline{\overline{d_n}}$ в трехмерном пространстве выбирается система координат $Oxyz$ с началом в центре рассеивания и произвольно направленными осями. Затем вычисляются проекции векториальных СВ на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} d_{1,x} &= d_1 \cos \alpha_1, \ \ldots, \ d_{n,x} = d_n \cos \alpha_n; \\ d_{1,y} &= d_1 \cos \beta_1, \ \ldots, \ d_{n,y} = d_n \cos \beta_n; \\ d_{1,z} &= d_1 \cos \gamma_1, \ \ldots, \ d_{n,z} = d_n \cos \gamma_n, \end{aligned}\right\} \qquad (7.5.34)$$

где α_i, β_i, γ_i — углы i-й векториальной СВ с осями Ox, Oy, Oz соответственно, и определяются величины

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = \sum_{i=1}^{n} d_{i,x}^2; \quad A_2 = \sum_{i=1}^{n} d_{i,y}^2, \quad A_3 = \sum_{i=1}^{n} d_{i,z}^2; \\ &B_1 = \sum_{i=1}^{n} d_{i,y} d_{i,z}, \quad B_2 = \sum_{i=1}^{n} d_{i,x} d_{i,z}, \\ &B_3 = \sum_{i=1}^{n} d_{i,x} d_{i,y}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.5.35)$$

Полуоси a_1, a_2, a_3 суммарного единичного эллипсоида, соответствующего искомому трехмерному распределению, определяются равенствами:

$$a_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad a_2 = \sqrt{\lambda_2}, \quad a_3 = \sqrt{\lambda_3}, \qquad (7.5.36)$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни уравнения третьей степени;

$$\begin{vmatrix} A_1 - \lambda & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 - \lambda & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.5.37)$$

Под a_1, a_2, a_3 понимаются главные СКО трехмерного нормального распределения, если векториальные СВ выражены в СКО. Аналогичное утверждение справедливо для срединных отклонений.

Уравнение (7.5.37), которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\lambda^3 - (A_1 + A_2 + A_3)\lambda^2 + (A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 - \\ &- B_1^2 - B_2^2 - B_3^2)\lambda - \left(A_1A_2A_3 - A_1B_1^2 - A_2B_2^2 - \right. \\ &\left. - A_3B_3^2 + 2B_1B_2B_3\right) = 0, \end{aligned} \qquad (7.5.37')$$

решается методами, изложенными в курсах высшей алгебры. Корни уравнения (7.5.37) всегда положительны.

Направление каждой из полуосей a_i ($i=1, 2, 3$) определяется системой уравнений относительно углов α_i, β_i, γ_i между i-й полуосью и осями координат Ox, Oy, Oz соответственно:

$$\left.\begin{aligned} (A_1 - \lambda_i)\cos\alpha_i + B_3\cos\beta_i + B_2\cos\gamma_i &= 0;\\ B_3\cos\alpha_i + (A_2 - \lambda_i)\cos\beta_i + B_1\cos\gamma_i &= 0;\\ B_2\cos\alpha_i + B_1\cos\beta_i + (A_3 - \lambda_i)\cos\gamma_i &= 0;\\ \cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (7.5.38)$$

При решении системы уравнений (7.5.38) следует учитывать замечание по поводу системы (7.5.17).

Пример 7.5.1. Дана система трех векториальных ошибок со следующими проекциями:

$$\begin{aligned} &d_{1,x} = 6, \quad d_{2,x} = 0, \quad d_{3,x} = 0;\\ &d_{1,y} = 4, \quad d_{2,y} = 4, \quad d_{3,y} = 0;\\ &d_{1,z} = 0, \quad d_{2,z} = 3, \quad d_{3,z} = 3. \end{aligned}$$

Требуется определить полуоси единичного эллипсоида и их направление.

По формулам (7.5.35) получаем:

$$\begin{aligned} &A_1 = 52, \quad A_2 = 25, \quad A_3 = 9;\\ &B_1 = 9, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 16. \end{aligned}$$

Составляем уравнение (7.5.37′):

$$\lambda^3 - 86\lambda^2 + 1656\lambda - 5184 = 0, \qquad (\Delta)$$

находим его корни:

$$\lambda_1 = 59{,}73; \quad \lambda_2 = 22{,}40; \quad \lambda_3 = 3{,}875$$

и по формулам (7.5.36) определяем полуоси единичного эллипсоида: $a_1=7{,}729$; $a_2=4{,}733$; $a_3=1{,}969$.

Находим направление оси a_1, для чего подставляем λ_1 в систему уравнений (7.5.38):

$$\left.\begin{aligned} -7{,}73\cos\alpha_1 + 16{,}00\cos\beta_1 &= 0;\\ 16{,}00\cos\alpha_1 - 34{,}73\cos\beta_1 + 9{,}00\cos\gamma_1 &= 0;\\ 9{,}00\cos\beta_1 - 50{,}73\cos\gamma_1 &= 0;\\ \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Решение ее приводит к следующим значениям направляющих косинусов оси a_1:

$$\cos\alpha_1 = 0{,}898;\quad \cos\beta_1 = 0{,}434;\quad \cos\gamma_1 = 0{,}077, \qquad (*)$$

Подставляя последовательно в систему (7.5.38) значения λ_2 и λ_3, получим аналогично:

$$\cos\alpha_2 = -0{,}409;\quad \cos\beta_2 = 0{,}757;\quad \cos\gamma_2 = 0{,}509; \qquad (**)$$
$$\cos\alpha_3 = 0{,}162;\quad \cos\beta_3 = -0{,}488;\quad \cos\gamma_3 = 0{,}857. \qquad (***)$$

Знаки косинусов в любой из строк (*), (**) и (***) можно одновременно менять на обратные, например:

$$\cos\alpha_2 = 0{,}409;\quad \cos\beta_2 = -0{,}757;\quad \cos\gamma_2 = -0{,}509,$$

не оказывая этим никакого влияния на результат.

Определение двумерного нормального распределения в заданной плоскости, обусловленного системой векториальных СВ в пространстве

Если задана система векториальных СВ в пространстве, а по условиям задачи представляет интерес только рассеивание в плоскости Q, перпендикулярной заданному направлению L, то нет необходимости в предварительном определении суммарного трехмерного распределения по формулам (7.5.34)—(7.5.38). В подобных случаях достаточно:

— одну из осей координатной системы $Oxyz$ (для определенности пусть она будет осью Oz) выбрать по направлению L, а оси Ox и Oy — по желанию расчетчика;

— определить углы между векториальными СВ и осями Ox и Oy;

— вычислить проекции векториальных СВ на оси Ox и Oy;

— вычислить величины A_1, A_2 и B_3 по формулам (7.5.35);

— воспользоваться формулами (7.4.1) и табл. 7.4.1 для определения искомого двумерного распределения, положив $A_1 = A$; $A_2 = C$; $B_3 = B$.

Полученный единичный эллипс представляет собой проекцию единичного эллипсоида на плоскость Q.

Если подобную задачу требуется решить при заданных параметрах трехмерного нормального распределения, то нужно представить последнее как систему трех векториальных СВ, образованных главными средними квадратическими (или срединными) отклонениями, а затем произвести указанные выше действия.

РАЗДЕЛ IV

ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Глава 8

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. МЕТОД МОМЕНТОВ

§ 8.1. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функция $Y=u(X)$ СВ X сама является СВ. Ее закон распределения может быть найден, если известен закон распределения СВ X.

Обозначим функцию распределения СВ X через $F(x)$, а функцию распределения СВ Y через $G(y)$. Тогда

$$G(y)=P\{Y<y\}=P\{u(X)<y\}=P\{X\in S_y\}, \quad (8.1.1)$$

где через S_y обозначена область значений x, при которых выполняется условие $u(x)<y$.

Если $u^{-1}(y)$ — многозначная функция*, то область S_y может иметь сложную структуру, и вычисление вероятности $P\{X\in S_y\}$ представит известные трудности. Пусть, например, функция $u(x)$ имеет вид, показанный на рис. 8.1.1. Область S_y, отвечающая значению $y=\tilde{y}$, заштрихована. Следовательно, для этого случая имеем

$$P\{u(X)<\tilde{y}\}=P\{X<x_1\}+P\{x_2<X<x_3\}+$$
$$+P\{x_4<X<x_5\}+P\{X>x_6\}.$$

* Через $u^{-1}(y)$, как обычно, обозначена функция, обратная функции $y=u(x)$. Например, если $u(x)=x^2$, то $u^{-1}(y)=\sqrt{y}$.

Пример 8.1.1. Пусть СВ X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0 \text{ при } x < 0,\ x > \pi. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $G(y)$ СВ $Y = \sin X$.

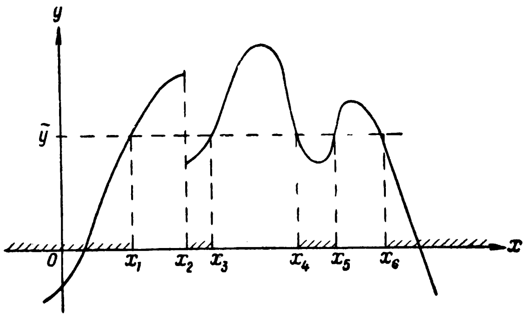

Рис. 8.1.1

В данном случае область S_y, показанная на рис. 8.1.2 штриховкой, имеет вид двух полуинтервалов *:

$$[0, x_1) = [0, \arcsin y);$$
$$(x_2, \pi] = (\pi - \arcsin y, \pi].$$

Отсюда

$$G(y) = \boldsymbol{P}\{0 \leqslant X < \arcsin y\} + \boldsymbol{P}\{\pi - \arcsin y < X \leqslant \pi\} =$$
$$= \int\limits_0^{\arcsin y} f(x)\,dx + \int\limits_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \arcsin y.$$

Таким образом,

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0; \\ \dfrac{2}{\pi} \arcsin y & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant 1; \\ 1 & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

* Квадратная (круглая) скобка указывает, что граничная точка принадлежит (не принадлежит) отрезку.

Пример 8.1.2. Найти функцию распределения СВ $Y = aX^2$ зная плотность вероятности $f(x)$ СВ X $(-\infty < X < +\infty)$.

Область S_y (рис. 8.1.3) представляет собой интервал $\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}, +\sqrt{\frac{y}{a}}\right)$. Следовательно,

$$G(y) = P\left\{-\sqrt{\frac{y}{a}} < X < +\sqrt{\frac{y}{a}}\right\} = \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{a}}}^{+\sqrt{\frac{y}{a}}} f(x)\,dx.$$

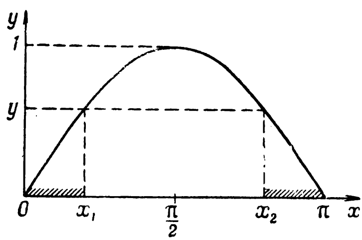

Рис. 8.1.2

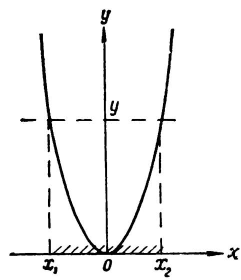

Рис. 8.1.3

Плотность вероятности СВ Y найдется дифференцированием последнего выражения

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{ay}}\left[f\left(+\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)\right], \quad (y > 0).$$

Для симметричного распределения из последней формулы получаем

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{ay}} f\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right), \quad (y > 0).$$

Если функция $u(x)$ строго монотонна в области изменения СВ X, т. е. $\frac{du(x)}{dx} > 0$ или $\frac{du(x)}{dx} < 0$, то для функции распределения $G(y)$ получаются простые формульные выражения.

Для возрастающей функции $u(x)$ (рис. 8.1.4, *а*) область S_y представляет собой отрезок $x<\tilde{x}$, где $\tilde{x}=u^{-1}(\tilde{y})$, так что

$$G(y) = P\{X<u^{-1}(y)\} = F(u^{-1}(y)). \qquad (8.1.2)$$

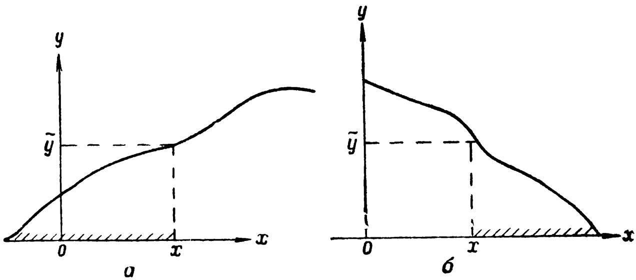

Рис. 8.1.4

Для убывающей функции $u(x)$ (рис. 8.1.4, *б*) область $S_{\tilde{y}}$ представляет собой отрезок $x>\tilde{x}$, так что

$$G(y) = P\{X > u^{-1}(y)\} =$$
$$= 1 - P\{X<u^{-1}(y)\} - P\{X = u^{-1}(y)\} =$$
$$= 1 - F(u^{-1}(y)) - [F(u^{-1}(y)+0) - F(u^{-1}(y))] =$$
$$= 1 - F(u^{-1}(y)+0). \qquad (8.1.3)$$

Формулы (8.1.1)—(8.1.3) справедливы для любых СВ — дискретных, непрерывных и смешанных.

Для непрерывной СВ X, имеющей плотность вероятности $f(x)$, и строго монотонной функции $u(x)$ плотность вероятности $g(y)$ СВ $Y=u(X)$ имеет вид

$$g(y) = f(u^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{du^{-1}(y)}{dy} \right|. \qquad (8.1.4)$$

Пример 8.1.3. Найти плотность вероятности $g(y)$ для указанных ниже СВ $Y=u(X)$ при $a>0$.

1) Если

$$Y=aX+b, \ (-\infty<X<+\infty, \ -\infty<Y<+\infty),$$

то

$$u(x)=ax+b, \quad u^{-1}(y)=\frac{y-b}{a}, \quad \frac{du^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{a};$$

$$g(y)=\frac{1}{a}\, f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

2) Если

$$Y=e^{aX}, \quad (-\infty<X<+\infty, \quad 0\leqslant Y<+\infty),$$

то

$$u(x)=e^{ax}, \quad u^{-1}(y)=\frac{1}{a}\ln y, \quad \frac{du^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{ay};$$

$$g(y)=\frac{1}{ay}\, f\left(\frac{\ln y}{a}\right).$$

3) Если

$$Y=aX^2, \quad (X\geqslant 0, \quad Y\geqslant 0),$$

то

$$u(x)=ax^2, \quad u^{-1}(y)=+\sqrt{\frac{y}{a}}, \quad \frac{du^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{ay}};$$

$$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{ay}}\, f\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right).$$

Последнее выражение отличается от полученного в примере 8.1.2 для симметричного распределения на постоянный множитель $\frac{1}{2}$. Это объясняется различным определением области возможных значений СВ X.

4) Если

$$Y=\frac{a}{X}, \quad (X>0, \ Y>0),$$

то

$$u(x)=\frac{a}{x}, \quad u^{-1}(y)=\frac{a}{y}, \quad \frac{du^{-1}(y)}{dy}=-\frac{a}{y^2};$$

$$g(y)=\frac{a}{y^2}\cdot f\left(\frac{a}{y}\right).$$

§ 8.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Если по условиям задачи достаточно знать числовые характеристики СВ $Y=u(X)$, являющейся функцией СВ X, они могут быть найдены непосредственно по закону распределения СВ X без вычисления закона распределения СВ Y (§ 8.1).

Начальные моменты СВ Y вычисляются по формуле (см. (3.1.15)—(3.1.17)

$$\alpha_k [Y] = M [u^k (X)], \quad (k = 1, 2, \ldots); \tag{8.2.1}$$

МО СВ Y

$$\hat{y} = M [u (X)] \tag{8.2.2}$$

получается из формулы (8.2.1) при $k=1$.

Центральные моменты СВ $Y=u(X)$ вычисляются по формуле

$$\mu_k [Y] = M [(u (X) - \hat{y})^k], \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{8.2.3}$$

Дисперсия СВ Y получается из (8.2.3) при $k=2$:

$$D [Y] = M [(u (X) - \hat{y})^2] = \alpha_2 [Y] - \hat{y}^2. \tag{8.2.4}$$

Пример 8.2.1. Найти дисперсию СВ $Y = \sin^2 X$, если СВ X равномерно распределена на отрезке $[0, \pi]$, т. е. имеет плотность вероятности, указанную в примере 8.1.1.

Вычисления дают:

$$\hat{y} = M [\sin^2 X] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2};$$

$$\alpha_2 [Y] = M [\sin^4 X] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 t \, dt = \frac{3}{8};$$

$$D [Y] = \alpha_2 [Y] - \hat{y}^2 = \frac{1}{8}.$$

Наиболее простой вид формулы (8.2.2) и (8.2.4) имеют для линейной функции $Y=aX+b$:

$$\hat{y} = M[aX+b] = a\hat{x} + b; \tag{8.2.5}$$

$$D[Y] = D[aX+b] = a^2 D[X]. \tag{8.2.6}$$

При сложных функциях $u(x)$ и законах распределения СВ X точное вычисление моментов СВ Y по формулам (8.2.1) и (8.2.3) может оказаться затруднительным. В этих случаях, если позволяет задача, прибегают к приближенным методам, среди которых наиболее употребителен *метод линеаризации*, основанный на разложении функции $u(x)$ в ряд.

Если функция $u(x)$ разлагается в ряд в окрестности точки $x=\hat{x}$ и существуют ограниченные центральные моменты $\mu_k[X]$ $(k=1, 2, \ldots)$ (§ 3.2), то

$$\hat{y} = u(\hat{x}) + \Delta, \tag{8.2.7}$$

где

$$\Delta = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k[X]}{k!} u^{(k)}(\hat{x}) \tag{8.2.8}$$

и

$$u^{(k)}(\hat{x}) = \left.\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right|_{x=\hat{x}}.$$

Для линейной функции $u(x)=ax+b$ будет $\Delta=0$ и

$$\hat{y} = u(\hat{x}), \tag{8.2.9}$$

что совпадает с (8.2.5).

Для других видов функции $u(x)$ будет $\Delta \neq 0$ и точное равенство (8.2.9) не имеет места. Однако если в основной области возможных значений СВ X, т. е. в таком интервале (α, β), где $P\{\alpha < X < \beta\} \approx 1$, функция $u(x)$ близка к линейной, то величина Δ мала, и равенством (8.2.9) можно пользоваться как приближенным. В этом случае (8.2.8) определяет погрешность от замены МО функции случайной величины $\hat{y}=M[u(X)]$ функцией от МО СВ $u(\hat{x})$.

Если погрешность (8.2.8) неприемлема по условиям задачи, более точные значения МО $\hat{y}$ можно получить из (8.2.7), удержав в правой части больше членов. Например, удержав два члена разложения, получим более точное приближение

$$\hat{y} \approx u(\hat{x}) + \frac{1}{2} D[X]\, u''(\hat{x}).$$

Для почти линейной на участке (α, β) функции $u(x)$ приближенное значение центральных моментов высших порядков находится по формуле

$$\mu_k[Y] \approx (u'(\hat{x}))^k \mu_k[X]. \qquad (8.2.10)$$

В частности, дисперсия и СКО находятся по формулам:

$$D[Y] \approx (u'(\hat{x}))^2 D[X]; \qquad (8.2.11)$$

$$\sigma_y \approx |u'(\bar{x})|\, \sigma_x. \qquad (8.2.11')$$

Для линейной функции $u(x)$ формулы (8.2.10)—(8.2.11′) точные и совпадают с (8.2.6).

Пример 8.2.2. Найти приближенное значение МО и дисперсии СВ $Y = 1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}$, если СВ X распределена по закону Пуассона $\psi(x; \mu)$ (§ 4.5).

Пользуясь методом линеаризации и учитывая, что

$$\hat{x} = D[X] = \mu,$$

получим

$$\hat{y} \approx 1 - e^{-\frac{\lambda}{\mu}};$$

$$D[Y] \approx \left(-\frac{\lambda}{\mu^2} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\right)^2 \mu = \frac{\lambda^2}{\mu^3} e^{-\frac{2\lambda}{\mu}}. \qquad (*)$$

Погрешность приближенного равенства (*) оценим по формуле (8.2.8). Вторая и третья производные функции $u(x)$ равны:

$$u''(x) = \frac{\lambda}{x^3} e^{-\frac{\lambda}{x}} \left(2 + \frac{\lambda}{x}\right);$$

$$u'''(x) = -\frac{\lambda}{x^4} e^{-\frac{\lambda}{x}} \left(6 + \frac{6\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^2}\right).$$

Производные с ростом x быстро убывают по абсолютной величине, поэтому в сумме (8.2.8) при не слишком малом μ достаточно сохранить два члена. При этом получаем

$$\Delta \approx \frac{\lambda}{\mu^2} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \left(1 + \frac{\lambda - 2}{2\mu} - \frac{\lambda}{\mu^2} - \frac{\lambda^2}{6\mu^3}\right).$$

§ 8.3. МЕТОД МОМЕНТОВ

В практических исследованиях может возникнуть ситуация, когда формульное выражение функции распределения $F^{(1)}(x)$ СВ X неизвестно или имеет сложную, неудобную для пользования формулу. В ряде приближенных расчетов при этом допускается аппроксимация $F^{(1)}(x)$ другой функцией распределения $F^{(2)}(x; a_1, \ldots, a_m)$, зависящей от m параметров $a_1, \ldots, a_m$ и имеющей приемлемую для данного исследования форму.

Если моменты $\alpha_k^{(1)}$ $(k=1, 2, \ldots, n, \quad n \geqslant m)$ СВ X относительно функции распределения $F^{(1)}(x)$ известны или могут быть сравнительно легко найдены (в числовом или формульном виде), то неизвестные параметры $a_1, \ldots, a_m$ можно определить с помощью метода моментов, существо которого состоит в следующем.

Находят выражения моментов $\alpha_k^{(2)}$ $(a_1, \ldots, a_m)$, $(k=1, 2, \ldots, m)$ СВ X относительно функции распределения $F^{(2)}(x; a_1, \ldots, a_m)$ через неизвестные пока параметры $a_1, \ldots, a_m$ (§ 3.2).

Например, для непрерывной СВ X будет

$$\alpha_k^{(2)}(a_1, \ldots, a_m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f^{(2)}(x;\ a_1, \ldots, a_m)dx,$$

где

$$f^{(2)}(x;\ a_1, \ldots, a_m) = \frac{d}{dx} F^{(2)}(x;\ a_1, \ldots, a_m).$$

Полученные выражения моментов $\alpha_k^{(2)}$ приравнивают известным числовым значениям или выражениям моментов $\alpha_k^{(1)}$ и из системы уравнений

$$\alpha_k^{(2)}(a_1, \ldots, a_m) = \alpha_k^{(1)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (8.3.1)$$

находят параметры $a_1, \ldots, a_m$, которые определяют функцию распределения $F^{(2)}(x)$.

Пример 8.3.1. Проводится стрельба m снарядами по n целям. Каждый снаряд с равной вероятностью может быть направлен на любую цель. Вероятность попадания снаряда в цель, на которую он направлен, равна p. При этом снаряд не может попасть в другие цели. Вероятность поражения цели при условии, что в нее попало k снарядов, равна $W_k = 1 - (1 - W_1)^k$, где W_1 — условная вероятность поражения цели одним попавшим снарядом. Найти распределение числа пораженных целей.

Обозначим вероятность того, что в первую цель попало m_1 снарядов, ..., в n-ю цель попало m_n снарядов через $L(m_1, \ldots, m_n)$, а вероятность поражения равно x целей при этом условии — через $p(x|m_1, \ldots, m_n)$. Тогда согласно (1.3.2) безусловная вероятность $p(x)$ поражения ровно x целей, характеризующая искомое распределение числа пораженных целей, определится формулой

$$p(x) = \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} L(m_1, \ldots, m_n)\, p(x|m_1, \ldots, m_n),$$

где суммирование ведется по всем неотрицательным целочисленным m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, дающим в сумме m.

При сделанных предположениях

$$L(m_1, \ldots, m_n) = C_m^{m_1, \ldots, m_n}\left(\frac{p}{n}\right)^m.$$

Согласно (2.4.1) и (2.4.1′):

$$p(x|m_1, \ldots, m_n) =$$

$$=\begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n}\left(1 - W_{m_i}\right) \text{ при } x=0; \\ \sum\limits_{i_1=1}^{n-x+1}\ \sum\limits_{i_2=i_1+1}^{n-x+2} \cdots \sum\limits_{i_x=i_{x-1}+1}^{n} \dfrac{W_{m_{i_1}} \cdot W_{m_{i_2}} \cdots W_{m_{i_x}}}{\left(1-W_{m_{i_1}}\right)\left(1-W_{m_{i_2}}\right)\cdots\left(1-W_{m_{i_x}}\right)} \times \\ \times \prod\limits_{j=1}^{n}\left(1 - W_{m_j}\right) \text{ при } x = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Расчеты по приведенным формулам достаточно громоздки. Для их упрощения в ряде случаев принимают (§ 4.1)

$$p(x) \approx b(x;\ n,\ \theta). \qquad (*)$$

Единственный неизвестный параметр θ биномиального распределения найдется из условия (8.3.1), которое в данном случае означает равенство МО:

$$n\theta = \sum_{x=0}^{n} x p(x). \qquad (**)$$

Правую часть равенства (**), представляющую собой МО числа пораженных целей, можно вычислить по приведенным выше формулам, однако проще найти ее непосредственно.

Рассмотрим i-ю цель. При сделанных предположениях вероятность ее поражения одним снарядом будет $\frac{pW_1}{n}$, а вероятность поражения m снарядами

$$g_i = g = 1 - \left(1 - \frac{pW_1}{n}\right)^m.$$

Последнее выражение справедливо для всех n целей. Следовательно, МО пораженных целей будет

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = n\left[1 - \left(1 - \frac{pW_1}{n}\right)^m\right]. \qquad (***)$$

Из (**) и (***) получаем искомый параметр

$$\theta = 1 - \left(1 - \frac{pW_1}{n}\right)^m.$$

Замечание. В рассматриваемой модели события, состоящие в поражении отдельных целей, зависимы: они зависят от характера распределения снарядов по целям. Простота точной формулы (***) обусловливается тем, что МО суммы СВ равно сумме МО СВ независимо от наличия или отсутствия связи между ними (§ 9.3).

Вместе с тем, пользуясь вероятностью $g = \theta$ для определения вероятности поражения заданного числа целей по формуле (4.1.1), справедливой только для независимых событий, мы будем получать, вообще говоря, неверный результат. Приемлемость допускаемой погрешности зависит от задачи и должна быть установлена в каждом конкретном случае.

Другой пример на применение метода моментов приведен в § 9.2 (пример 9.2.1).

Глава 9

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 9.1. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть дана система m СВ $(Y_1, \ldots, Y_m)$, каждая из которых является дифференцируемой функцией

$$Y_i = \varphi_i (X_1, \ldots, X_n), \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{9.1.1}$$

другой системы n СВ $(X_1, \ldots, X_n)$, причем $n \geqslant m$, и пусть известна плотность вероятности $f_X(x_1, \ldots, x_n)$ последней системы СВ.

Если уравнения (9.1.1) имеют единственное решение относительно $(X_1, \ldots, X_m)$ * в области возможных значений СВ $X_1, \ldots, X_n$

$$X_j = \psi_j (Y_1, \ldots, Y_m, X_{m+1}, \ldots, X_n), \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{9.1.2}$$

то плотность вероятности $f_Y(y_1, \ldots, y_m)$ системы СВ $(Y_1, \ldots, Y_m)$ найдется по формуле

$$f_Y(y_1, \ldots, y_m) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-m)} f_X(\psi_1, \ldots, \psi_m, x_{m+1}, \ldots x_n) \times$$

$$\times \left| \frac{\partial (\psi_1, \ldots, \psi_m)}{\partial (y_1, \ldots, y_m)} \right| dx_{m+1} \ldots dx_n, \tag{9.1.3}$$

* В качестве $X_1, \ldots X_m$ могут быть взяты любые m из n аргументов $X_1, \ldots, X_n$.

где

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi_m}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial\psi_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

и

$$\psi_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad (i = 1, \ldots, m).$$

В частном случае, когда $m=n$, формула (9.1.3) приобретает более простой вид

$$f_Y(y_1, \ldots, y_n) = \left|\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right| f_X(\psi_1, \ldots, \psi_n) \quad (9.1.3')$$

и представляет собой обобщение формулы (8.1.4).

В другом важном частном случае, когда СВ Y зависит от n СВ $X_1, \ldots, X_n$, упрощение не достигается, и плотность вероятности $f_Y(y)$ находится по формуле (9.1.3) при $m=1$.

Если система уравнений (9.1.1) не допускает единственного решения, то плотность вероятности системы СВ $(Y_1, \ldots, Y_m)$ не может быть найдена непосредственно по формуле (9.1.3). В этом случае следует вычислять функцию распределения по формуле

$$F_Y(y_1, \ldots, y_m) = \int\limits_{\varphi_1<y_1, \ldots, \varphi_m<y_m} \ldots \int f_X(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n, \quad (9.1.4)$$

где

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Плотность вероятности, если она существует, найдется по формуле (6.1.4).

Замечание. Рассмотренная задача может быть сформулирована в векторных терминах: найти плотность вероятности или функцию распределения m-мерного случайного вектора $Y(Y_1, \ldots, Y_m)$, составляющие которого являются функциями составляющих другого n-мерного случайного вектора $X(X_1, \ldots, X_n)$ с известной плотностью вероятности.

Пример 9.1.1. Отклонения (X, Y) точек падения ракет в системе координат Oxy описываются двумерным нормальным законом (§ 7.1):

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Найти плотность вероятности $f_R(r)$ радиального отклонения ракет

$$R = +\sqrt{X^2 + Y^2}. \qquad (*)$$

В данном случае $n=2$, $m=1$. В системе (9.1.1) всего одно уравнение (*). Оно не дает однозначного решения (9.1.2), поэтому первоначально найдем функцию распределения по формуле (9.1.4):

$$F_R(r) = \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}<r} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho d\varphi = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Искомая плотность вероятности найдется дифференцированием

$$f_R(r) = \frac{dF_R(r)}{dr} = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r \geqslant 0.$$

Мы получили распределение Рэлея (§ 5.4).

§ 9.2. КОМПОЗИЦИИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Важным частным случаем функций (9.1.1) является сумма независимых СВ $X_1, \ldots, X_n$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = X_1 + \ldots + X_n.$$

Закон распределения суммы $X = X_1 + \ldots + X_n$ независимых СВ $X_1, \ldots, X_n$ называется *композицией* законов распределения слагаемых, которые в этом случае называются *компонентами*.

Композиция законов распределения находится с помощью операции, называемой *сверткой* и обозначаемой символом $\ast$.

Замечание. Иногда термином «композиция» обозначают как операцию, так и ее результат.

Если распределения дискретных СВ X и Y задаются вероятностями

$$\boldsymbol{P}\{X = x_i\} \text{ и } \boldsymbol{P}\{Y = y_j\},$$

то функция распределения СВ $Z=X+Y$ находится из соотношения

$$F(z) = \boldsymbol{P}\{Z < z\} = \sum_{x_i + y_i < z} \boldsymbol{P}\{X = x_i\} \boldsymbol{P}\{Y = y_j\}, \quad (9.2.1)$$

где суммирование распространяется на все i, j, для которых слагаемые отличны от нуля.

Если X и Y независимые неотрицательные целочисленные СВ, то распределение СВ Z найдется из соотношения

$$\boldsymbol{P}\{Z = k\} = \sum_i \boldsymbol{P}\{X = i\} \boldsymbol{P}\{Y = k - i\} =$$

$$= \sum_j \boldsymbol{P}\{X = k - j\} \boldsymbol{P}\{Y = j\}, \quad (9.2.1')$$

где i, j, $k=0, 1, 2, \ldots$

Для непрерывных независимых СВ X, Y и для их суммы $Z=X+Y$, плотности вероятности которых обозначены через $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и $f_Z(z)$, операция свертки имеет вид

$$f_Z(z) = f_X(z) \ast f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y)\, dy. \quad (9.2.2)$$

Композиция законов распределения нескольких СВ находится повторным применением операции свертки.

Распределения, обладающие тем свойством, что их композиция является распределением того же типа, называются *устойчивыми* *. К ним, в частности, относятся:

а) биномиальное распределение (§ 4.1)

$$b(x;\ n_1,\ \theta) * b(x;\ n_2,\ \theta) = b(x;\ n_1+n_2,\ \theta);$$

б) распределение Паскаля (§ 4.4)

$$\pi_2(x;\ n_1,\ \theta) * \pi_2(x;\ n_2,\ \theta) = \pi_2(x;\ n_1+n_2,\ \theta);$$

в) распределение Пуассона (§ 4.5)

$$\psi(x;\ \mu_1) * \psi(x;\ \mu_2) = \psi(x;\ \mu_1+\mu_2);$$

г) нормальное распределение (§ 5.1)

$$\varphi(x;\ x_{01},\ \sigma_1) * \varphi(x;\ x_{02},\ \sigma_2) = \varphi\left(x;\ x_{01}+x_{02},\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right);$$

д) распределение Коши (§ 5.9)

$$c(x;\ x_{01},\ h_1) * c(x;\ x_{02},\ h_2) = c\left(x;\ x_{01}+x_{02},\ \frac{h_1h_2}{h_1+h_2}\right)$$

Примером неустойчивых распределений может служить распределение равномерной плотности (§ 5.6). Композиция двух одинаковых законов равномерной плотности представляет собой закон Симпсона (§ 5.7). Закон распределения суммы большого числа независимых слагаемых, распределенных по одному и тому же закону равномерной плотности, приближается к нормальному.

Композиция разнотипных законов распределения может иметь достаточно сложный вид, не всегда удобный для практических расчетов. Если по условиям задачи допустимо некоторое снижение точности расчетов, полученный закон сложного вида можно аппроксимировать более простым и удобным, пользуясь, напри-

* В противном случае распределение называется неустойчивым.

мер, методом моментов (§ 8.3). При сложении нескольких СВ часто бывает возможным в качестве закона распределения, аппроксимирующего закон распределения суммы, принимать нормальный закон распределения.

Пример 9.2.1. Пусть СВ X подчинена нормальному закону распределения (§ 5.1) с плотностью вероятности $\varphi(x;\ x_0,\ \sigma)$, а СВ Y — закону равномерной плотности (§ 5.6) с плотностью вероятности $h(y;\ y_0,\ l)$.

Найти закон распределения СВ $Z = X + Y$, полагая СВ X и Y независимыми.

Пользуясь (9.2.2), найдем плотность вероятности СВ Z:

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(z - y;\ x_0,\ \sigma)\, h(y;\ y_0,\ l)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2l}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{y_0-l}^{y_0+l} e^{-\frac{(z-x_0-y)^2}{2\sigma^2}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2l}\left[\Phi_0\left(\frac{z - z_0 + l}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{z - z_0 - l}{\sigma}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{2l'}\left[\Phi_0\left(z' - z_0' + l'\right) - \Phi_0\left(z' - z_0' - l'\right)\right], \qquad (*)$$

где

$$z_0 = x_0 + y_0,\quad z_0' = \frac{z_0}{\sigma};\quad z' = \frac{z}{\sigma},\quad l' = \frac{l}{\sigma},$$

а значения функции $\Phi_0(x)$ приведены в табл. III.

Из (*) получаем

$$\lim_{l'\to 0} f(z) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(z';\ z_0',\ 1\right).$$

Таким образом, при малом l можно приближенно принимать

$$f(z) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(z';\ z_0',\ 1\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(z' - z_0'\right) \qquad (**)$$

и пользоваться для вычислений табл. II

Воспользуемся методом моментов (§ 8.3) для аппроксимации распределения (*) нормальным распределением при произвольном значении параметра l.

Положим

$$f(z) \approx \varphi(z;\ \beta,\ \alpha),$$

потребовав равенства первых и вторых моментов, точнее МО и дисперсии СВ Z, относительно обоих распределений $f(z)$ и $\varphi(z;\ \beta,\ \alpha)$:

$$\left.\begin{aligned} \hat{z} &= \int_{-\infty}^{\infty} z f(z)\,dz = \beta; \\ D[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} (z-\hat{z})^2 f(z)\,dz = \alpha^2. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

Левые части могут быть вычислены непосредственно, пользуясь (*), однако такой путь утомителен. В силу независимости СВ X и Y согласно (9.3.9) и (9.3.12) имеем:

$$M[Z] = M[X] + M[Y] = x_0 + y_0;$$

$$D[Z] = D[X] + D[Y] = \sigma^2 + \frac{l^2}{3}.$$

Подставляя полученные значения в систему уравнений (***), находим

$$\beta = x_0 + y_0, \quad \alpha = \sqrt{\sigma^2 + \frac{l^2}{3}}.$$

Следовательно,

$$f(z) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(z';\ z_0',\ \sqrt{1+\frac{l'^2}{3}}\right). \qquad (****)$$

Ясно, что при малых значениях параметра l выражения (**) и (****) будут давать близкие результаты.

Сравнение плотности вероятности СВ Z, рассчитанной по формулам (*), (**) и (****) без множителя $\frac{1}{\sigma}$, приведено в табл. 9.2.1.

Как следует из табл. 9.2.1, формула (**) при $l' < 1$ дает еще более или менее удовлетворительное приближение, но при $l'=2$ она непригодна для расчета. Формула (****) показывает лучший результат при $l'=1$ и еще применима при $l'=2$.

Таблица 9.2.1

l'	1			2		
Формула / $\lvert z'-z'_0 \rvert$	(*)	(**)	(****)	(*)	(**)	(****)
0	0,341	0,399	0,346	0,239	0,399	0,261
0,5	0,312	0,352	0,314	0,232	0,352	0,247
1,0	0,239	0,242	0,237	0,210	0,242	0,211
1,5	0,151	0,130	0,149	0,173	0,130	0,161
2,0	0,079	0,054	0,077	0,125	0,054	0,111
2,5	0,033	0,018	0,033	0,077	0,018	0,068
3,0	0,011	0,004	0,012	0,040	0,004	0,038

§ 9.3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ФУНКЦИЯМИ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Вычисление законов распределения функций системы СВ (§ 9.1) зачастую связано с большими трудностями. Вместе с тем многие практические запросы могут быть удовлетворены с помощью числовых характеристик, которые, вообще говоря, вычисляются проще (§ 6.2).

Пусть дана система m СВ $(Y_1, \ldots, Y_m)$, которые являются функциями

$$Y_i = \varphi_i (X_1, \ldots, X_n), \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{9.3.1}$$

другой системы n СВ $(X_1, \ldots, X_n)$, подчиненной известному закону распределения, причем $n \geqslant m$.

Числовые характеристики системы СВ $(Y_1, \ldots, Y_m)$ определяются следующими соотношениями:

— математические ожидания

$$\hat{y}_i = M [\varphi_i (X_1, \ldots, X_n)], \quad (i = 1, \ldots, m); \tag{9.3.2}$$

— дисперсии

$$D [Y_i] = M [(\varphi_i (X_1, \ldots, X_n) - \hat{y}_i)^2], \quad (i = 1, \ldots, m); \tag{9.3.3}$$

— корреляционные моменты

$$K[Y_i, Y_j] = M[(\varphi_i(X_1, \ldots, X_n) - \\ - \hat{y}_i)(\varphi_j(X_1, \ldots, X_n) - \hat{y}_j)], \quad (i \neq j). \qquad (9.3.4)$$

Пример 9.3.1. В примере 2.2.1 показано, что при определенных предположениях вероятность обнаружения всплывшей подводной лодки самолетом определяется выражением

$$p(R, T) = \frac{1}{S}(\pi R^2 + 2RVT). \qquad (*)$$

В действительности дальность обнаружения R подводной лодки самолетным радиолокатором и время T пребывания лодки в надводном положении — случайные величины. При этом вероятность (*) сама является СВ. Найдем МО этой СВ — безусловную вероятность $\hat{p}$ обнаружения лодки самолетом, предположив, что дальность R распределена по логарифмически нормальному закону (§ 5.3):

$$l(r) = l(r; r_0, \sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma r} e^{-\frac{(\ln r - \ln r_0)^2}{2\sigma^2}} & \text{при } r > 0, \end{cases}$$

а время T по закону равномерной плотности (§ 5.6):

$$h(t) = h(t; \hat{t}, \Delta t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant \hat{t} - \Delta t; \\ \frac{1}{2\Delta t} & \text{при } \hat{t} - \Delta t < t \leqslant \hat{t} + \Delta t; \\ 0 & \text{при } \hat{t} + \Delta t < t. \end{cases}$$

Для решения задачи применим формулу (9.3.2), полагая СВ R и T независимыми:

$$\hat{p} = \frac{1}{S}\int_0^\infty \int_{\hat{t}-\Delta t}^{\hat{t}+\Delta t} (\pi r^2 + 2rVt)\, h(t)\, l(r)\, dt\, dr =$$

$$= \frac{1}{S}\int_0^\infty (\pi r^2 + 2V\hat{t})\, l(r)\, dr = \frac{1}{S}(\pi\alpha_2[R] + 2V\hat{t}\,\hat{r}).$$

Используя (5.3.4), (5.3.5) и соотношение (8.2.4), получим:

$$M[R] = \hat{r} = r_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}};$$

$$D[R] = r_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}} (e^{\sigma^2} - 1) = \hat{r}\left[\left(\frac{\hat{r}}{r_0}\right)^2 - 1\right];$$

$$\alpha_2[R] = r_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}}\left(r_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}} + e^{\sigma^4} - 1\right) = \hat{r}\left[\hat{r} + \left(\frac{\hat{r}}{r_0}\right)^2 - 1\right].$$

Окончательно

$$\hat{p} = \frac{1}{S} r_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}}\left[\pi\left(r_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}} + e^{\sigma^2} - 1\right) + 2\sqrt{\hat{t}}\right] =$$

$$= \frac{1}{S}\hat{r}\left[\pi\left(\hat{r} + \left(\frac{\hat{r}}{r_0}\right)^2 - 1\right) + 2\sqrt{\hat{t}}\right].$$

Если функции (9.3.1) линейны

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + b_i, \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{9.3.5}$$

то числовые характеристики системы СВ $(Y_1, \ldots, Y_m)$ выражаются непосредственно через числовые характеристики системы СВ $(X_1, \ldots, X_n)$:

— математические ожидания

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j + b_i; \tag{9.3.6}$$

— дисперсии

$$D[Y_i] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 D[X_j] + 2\sum_{j<k} a_{ij} a_{ik} K[X_j, X_k]; \tag{9.3.7}$$

— корреляционные моменты

$$K[Y_i, Y_k] = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{is} a_{kt} K[X_s, X_t], \tag{9.3.8}$$

где

$$K[X_s, X_s] = D[X_s].$$

Формула (9.3.6) при $a_{ij}=1$ и $b_i=0$ превращается в

$$M\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} M[X_j], \tag{9.3.9}$$

т. е. МО суммы СВ (независимых или зависимых) равно сумме их МО.

Для некоррелированных СВ формулы (9.3.7) и (9.3.8) упрощаются:

$$D[Y_i] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 D[X_j]; \tag{9.3.10}$$

$$K[Y_i, Y_k] = \sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{ks} D[X_s]. \tag{9.3.11}$$

При $a_{ij}=1$ формула (9.3.10) превращается в

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} D[X_j], \tag{9.3.12}$$

т. е. дисперсия суммы некоррелированных СВ равна сумме их дисперсий.

Последние соотношения показывают, что числовые характеристики линейных функций некоррелированных СВ полностью определяются МО и дисперсиями этих СВ.

Если функции (9.3.1) имеют вид $Y = \prod_{i=1}^{n} X_i$ и СВ X_i независимы, формула (9.3.2) приобретает вид

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i], \tag{9.3.13}$$

т. е. МО произведения независимых СВ равно произведению их МО.

При сложном виде функций (9.3.1) и законов распределения системы СВ $(X_1, \ldots, X_n)$ отыскание точных значений числовых характеристик (9.3.2) — (9.3.4) бывает затруднительно.

Если в области $(\hat{x}_i - \lambda_i < X_i < \hat{x}_i + \lambda_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$, для которой

$$P\{\hat{x}_1 - \lambda_1 < X_1 < \hat{x}_1 + \lambda_1, \ldots,$$

$$\hat{x}_n - \lambda_n < X_n < \hat{x}_n + \lambda_n\} \approx 1,$$

функции (9.3.1) близки к линейным, приближенные значения числовых характеристик могут быть найдены по формулам:

$$\hat{y}_i \approx \varphi_i(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n); \tag{9.3.14}$$

$$D[Y_i] \approx \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)^2_{\hat{x}} D[X_j] +$$

$$+ 2\sum_{j<k} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\hat{x}} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right)_{\hat{x}} K[X_j, X_k]; \tag{9.3.15}$$

$$\sigma^2_{y_i} \approx \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)^2_{\hat{x}} \sigma^2_{x_j} +$$

$$+ 2\sum_{j<k} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\hat{x}} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right)_{\hat{x}} r_{x_j, x_k} \sigma_{x_j} \sigma_{x_k}, \tag{9.3.16}$$

где

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\hat{x}} = \left.\frac{\partial\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j}\right|_{x_1 = \hat{x}_1, \ldots, x_n = \hat{x}_n}.$$

Для некоррелированных СВ $X_1, \ldots, X_n$ формулы (9.3.15) и (9.3.16) упрощаются:

$$D[Y_i] \approx \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)^2_{\hat{x}} D[X_j]; \tag{9.3.17}$$

$$\sigma_{y_i} \approx \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)^2_{\hat{x}} \sigma^2_{x_j}}. \tag{9.3.18}$$

Замечание. Системы СВ $(Y_1, \ldots, Y_m)$ и $(X_1, \ldots, X_n)$ можно рассматривать как случайные векторы (§ 6.1, 6.2). Все полученные результаты остаются в силе, меняется лишь терминология.

§ 9.4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В ряде случаев вместо непосредственного вычисления моментов сумм СВ для этих целей выгодней применять характеристические или производящие функции, которые определяются следующим образом:

— характеристическая функция СВ X

$$\chi(t) = M\left[e^{itX}\right], \tag{9.4.1}$$

где $i = \sqrt{-1}$;

— производящая функция моментов СВ

$$\lambda(t) = M\left[e^{tX}\right]; \tag{9.4.2}$$

— производящая функция СВ

$$\gamma(t) = M\left[t^X\right]. \tag{9.4.3}$$

Замечание. Производящая функция (9.4.3) обычно определяется только для неотрицательных целочисленных СВ. Формально она может быть вычислена и для непрерывных СВ, однако в последнем случае она непригодна для вычисления моментов СВ.

Функции (9.4.1)—(9.4.3) связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \chi(t) &= \lambda(it) = \gamma(e^{it}); \\ \lambda(t) &= \gamma(e^{t}) = \chi\left(\frac{1}{i}\,t\right); \\ \gamma(t) &= \lambda(\ln t) = \chi\left(\frac{1}{i}\ln t\right). \end{aligned}\right\} \qquad (9.4.4)$$

Для суммы $X=\sum_{j=1}^{n} X_j$ независимых СВ X_j $(j=1, \ldots, n)$ имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \chi(t) &= \prod_{j=1}^{n} \chi_j(t); \\ \lambda(t) &= \prod_{j=1}^{n} \lambda_j(t); \\ \gamma(t) &= \prod_{j=1}^{n} \gamma_j(t). \end{aligned}\right\} \qquad (9.4.5)$$

Моменты дискретных и непрерывных СВ, если они существуют, определяются через функции (9.4.1)—(9.4.2) следующим образом:

$$\alpha_n(X) = \frac{1}{i^n}\cdot\frac{d^n\chi(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{i^n}\,\chi^{(n)}(0) \qquad (9.4.6)$$

или

$$\alpha_n(X) = \frac{d^n\lambda(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = \lambda^{(n)}(0). \qquad (9.4.6')$$

Для дискретных СВ, кроме того, справедливы следующие формулы:

$$M[X] = \frac{d\gamma(t)}{dt}\bigg|_{t=1} = \frac{d\ln\gamma(t)}{dt}\bigg|_{t=1} = \frac{d\ln\lambda(t)}{dt}\bigg|_{t=0}; \qquad (9.4.7)$$

$$D[X] = \left[\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} + \frac{d\gamma(t)}{dt} - \left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)^2\right]_{t=1} =$$

$$= \left.\frac{d^2 \ln \lambda(t)}{dt^2}\right|_{t=0}. \qquad (9.4.8)$$

Вероятность того, что дискретная целочисленная СВ X примет определенное значение n, определяется по формуле

$$P\{X = n\} = \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n \gamma(t)}{\partial t^n}\right|_{t=0}. \qquad (9.4.9)$$

Пример 9.4.1. Некоторый аппарат предназначен для многократного действия. Вероятность его выхода из строя при j-м применении в предположении, что $j-1$ раз он применялся успешно, равна:

$$p_j = 1 - \frac{\alpha}{j}, \ (0 < \alpha \leqslant 1).$$

Найти МО и дисперсию числа X применений аппарата.

Вероятность того, что аппарат будет применен ровно k раз, равна

$$P\{X = k\} = \prod_{j=1}^{k} (1 - p_j) p_{k+1} = \frac{\alpha^k}{k!}\left(1 - \frac{\alpha}{k+1}\right).$$

Производящая функция СВ X имеет вид

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} t^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} t^k =$$

$$= e^{\alpha t} - \frac{1}{t}(e^{\alpha t} - 1).$$

Согласно (9.4.7) и (9.4.8) получаем:

$$M[X] = \gamma'(1) = e^{\alpha} - 1;$$

$$D[X] = \gamma''(1) + \gamma'(1) - [\gamma'(1)]^2 = e^{\alpha}(2\alpha + 1) - e^{2\alpha}.$$

Конечно, искомые величины можно было бы получить и непосредственным вычислением, однако оно было бы более громоздким.

Пример 9.4.2. На складе имеются запасы для удовлетворения n заявок. Заявки поступают поочередно. Интервалы времени между поступлениями очередных заявок являются независимыми СВ с плотностью вероятности

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad (t \geqslant 0).$$

Определить МО и дисперсию времени, на которое хватит запасов склада.

Запасы склада исчерпаются после получения n-й заявки. Эти n заявок разделены отрезками времени $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$, являющимися независимыми СВ. Длительность существования запасов на складе есть СВ, равная

$$T = \sum_{j=1}^{n-1} T_j.$$

Характеристические функции СВ T_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ согласно (9.4.1) равны

$$\chi_j(\tau) = \int_0^\infty e^{i\tau t}\mu e^{-\mu t}\,dt = \frac{1}{1 - i\dfrac{\tau}{\mu}}.$$

Характеристическая функция СВ T согласно (9.4.5) имеет вид

$$\chi(\tau) = \frac{1}{\left(1 - i\dfrac{\tau}{\mu}\right)^{n-1}}.$$

Из последнего выражения на основании (9.4.6) находим

$$M[T] = \frac{1}{i}\chi'(0) = \frac{n-1}{\mu};$$

$$\alpha_2[T] = \frac{1}{i^2}\chi''(0) = \frac{n(n-1)}{\mu^2};$$

$$D[T] = \alpha_2[T] - M^2[T] = \frac{n-1}{\mu^2}.$$

РАЗДЕЛ V
СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава 10
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЯХ

§ 10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Случайной функцией (СФ) $X(t)$ называется функция, значения которой при любом значении аргумента t являются СВ.

Если параметр t принимает дискретные значения из конечного $(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ или счетного $(t_1, t_2, \ldots)$ множества, СФ $X(t)$ называют *случайной последовательностью* и обозначают X_i, $i=1, 2, \ldots$, положив $X(t_i)=X_i$.

Если параметр t принимает континуум значений, СФ $X(t)$ называют *случайным (вероятностным, стохастическим) процессом.*

Множество возможных значений СФ $X(t)$ может быть дискретным (конечным или счетным) или континуальным при каждом фиксированном значении t.

Вещественная СФ задана, если заданы многомерные функции распределения для любого n:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = \boldsymbol{P}\{X(t_1) < x_1, \ldots, X(t_n) < x_n\}. \qquad (10.1.1)$$

СФ с континуальным множеством значений могут быть заданы плотностью вероятности

$$f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}. \qquad (10.1.2)$$

Во многих случаях для описания отдельных наиболее существенных сторон СФ применяются числовые характеристики, и в частности моменты. Приводимые ниже выражения для числовых характеристик соответствуют случаю, когда существует плотность вероятности (10.1.2).

Начальные моменты n-го порядка ($n=1, 2, \ldots$) СФ $X(t)$ определяются выражением

$$\alpha^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}(t_1, \ldots, t_n) = M\left[X^{k_1}(t_1) \ldots X^{k_n}(t_n)\right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} f_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) \times$$

$$\times\, dx_1 \ldots dx_n, \qquad (10.1.3)$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — целые неотрицательные числа, такие, что $k_1 + \ldots + k_n = n$.

Математическим ожиданием (МО) СФ $X(t)$ называется начальный момент первого порядка:

$$\alpha^{(1)}_1(t) = \hat{x}(t) = M\left[X(t)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_1(x;\ t)\, dx. \qquad (10.1.4)$$

Корреляционной нецентрированной или *ковариационной функцией* СФ $X(t)$ называется начальный момент второго порядка, зависящий от двух аргументов (смешанный момент):

$$\alpha^{(2)}_{1,1}(t_1, t_2) = B_X(t_1, t_2) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2;\ t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2. \qquad (10.1.5)$$

Центральный момент n-го порядка ($n=1, 2, \ldots$) СФ $X(t)$ определяется формулой

$$\mu^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= M\left[\left(X(t_1) - \hat{x}(t_1)\right)^{k_1} \ldots \left(X(t_n) - \hat{x}(t_n)\right)^{k_n}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_1 - \hat{x}(t_1)\right)^{k_1} \ldots \left(x_n - \hat{x}(t_n)\right)^{k_n} \times$$

$$\times f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad (10.1.6)$$

Дисперсией СФ $X(t)$ называют центральный момент второго порядка, зависящий от одного аргумента:

$$\mu_{2,0}^{(2)}(t) = D_X(t) = D[X(t)] = M[(X(t) - \hat{x}(t))^2] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \hat{x}(t))^2 f_1(x; t)\, dx = \alpha_{2,0}^{(2)}(t) - \hat{x}^2(t). \qquad (10.1.7)$$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) СФ $X(t)$ находится по формуле

$$\sigma_X(t) = \sigma[X(t)] = +\sqrt{D_X(t)}. \qquad (10.1.8)$$

Корреляционной центрированной функцией СФ $X(t)$ называют центральный момент второго порядка, зависящий от двух аргументов (смешанный момент):

$$\mu_{1,1}^{(2)}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) =$$

$$= M[(X(t_1) - \hat{x}(t_1))(X(t_2) - \hat{x}(t_2))] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \hat{x}(t_1))(x_2 - \hat{x}(t_2)) f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= B_X(t_1, t_2) - \hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2). \qquad (10.1.9)$$

В дальнейшем используется преимущественно центрированная корреляционная функция.

Замечание. Во многих работах обозначение $K_X(t_1, t_2)$ применяется как для центрированной, так и для нецентрированной корреляционных функций. Для определенности в Справочнике применяются разные обозначения.

Нормированная центрированная корреляционная функция СФ $X(t)$ определяется выражением

$$k_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)\, D_X(t_2)}} = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\, \sigma_X(t_2)}. \quad (10.1.10)$$

Если закон распределения (10.1.1) СФ $X(t)$ удовлетворяет условию

$$F_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = F_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau), \quad (10.1.11)$$

где τ произвольно, то СФ называется *стационарной (однородной) в узком смысле*, или строго стационарной.

Замечание. Стационарная функция должна быть задана на всей вещественной оси $(-\infty < t < +\infty)$. Действительно, если СФ удовлетворяет условия стационарности только в интервале $(t, t+T)$, а вне этого интервала она либо не задана, либо имеет другие характеристики, то при сдвиге параметра t на величину $\tau = T$ условие стационарности будет нарушено.

Если условие (10.1.11) выполнено только для $n \leqslant 2$, СФ называется *стационарной в широком смысле*. Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но, вообще говоря, не наоборот (пример 10.1.1).

Для стационарных (в обоих смыслах) процессов МО и дисперсия постоянны, $\hat{x}(t) = \hat{x}$, $D_X(t) = D_X$, а корреляционная функция зависит от одного аргумента: $K_X(t_1, t_2) = K_X(t_1 - t_2)$.

Условная функция распределения

$$F_n(x_n;\ t_n | x_1, \ldots, x_{n-1};\ t_1, \ldots, t_{n-1}) = \\ = \boldsymbol{P}\{X(t_n) < x_n \mid X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

описывает поведение СФ в момент времени t_n при заданных ее значениях в предшествующие моменты $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{n-1}$.

Если

$$F_n(x_n;\ t_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1};\ t_1, \ldots, t_{n-1}) = \\ = F_2(x_n;\ t_n \mid x_{n-1};\ t_{n-1}), \quad (10.1.12)$$

т. е. если поведение СФ «в будущем» зависит только от ее значения в данный момент и не зависит от «предыстории», то СФ называется *марковской* или *без последействия*. Для марковской СФ, обладающей плотностью вероятности, справедливо равенство

$$f_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= f_1(x_1;\ t_1) \prod_{i=2}^{n} f_2(x_i;\ t_i \mid x_{i-1};\ t_{i-1}), \qquad (10.1.13)$$

т. е. для описания марковских СФ достаточно знания одно- и двумерных законов распределения.

Пример 10.1.1. *Нормальный (гауссовский) случайный процесс* $X(t)$, ординаты которого — нормально распределенные СВ, описывается плотностью вероятности

$$f_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} K^{\frac{1}{2}}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}^{*}\,(x_i - \hat{x}(t_i))\,(x_j - \hat{x}(t_j))\right\}, \qquad (*)$$

где K — определитель матрицы вторых центральных моментов;

$$\| K_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} K_X(t_1, t_1) & K_X(t_1, t_2) & \ldots & K_X(t_1, t_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ K_X(t_n, t_1) & K_X(t_n, t_2) & \ldots & K_X(t_n, t_n) \end{matrix} \right\|$$

а K_{ij}^{*} — элементы матрицы, обратной по отношению к матрице $\| K_{ij} \|$.

Нормальный случайный процесс полностью определяется заданием МО $\hat{x}(t)$ и корреляционной функции $K(t, s)$. Если положить $\hat{x}(t) = \hat{x}$ и $K(t, s) = K(t - s)$, то плотность вероятности (*) не будет изменяться при сдвиге совокупности параметров $t_1, \ldots, t_n$ на произвольную величину τ. Таким образом, для нормального процесса стационарность в широком смысле влечет за собой стационарность в узком смысле.

Наряду с числовыми характеристиками СФ (10.1.3) — (10.1.10), полученными усреднением по множеству реализаций, рассматривают числовые характеристики, полученные усреднением по времени некоторой функции $\varphi[x(t)]$ любой реализации $x(t) С\Phi X(t)$:

$$\langle\varphi[x(t)]\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi[x(t+\tau)]\,d\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi[x(\tau)]\,d\tau. \qquad (10.1.14)$$

Стационарный процесс называется *эргодическим*, если его числовые характеристики, полученные усреднением по множеству реализаций с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равны тем же числовым характеристикам, полученным усреднением по времени из одной достаточно длинной реализации случайного процесса.

Для эргодических процессов справедливы равенства *:

$$\underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varepsilon(y - x(t))\,dt = P\{X(t) < y\} =$$

$$= F_1(y); \qquad (10.1.15)$$

---

* Символ l. i. m. означает сходимость в среднем квадратическом. Например, равенство $\langle x(t)\rangle = \hat{x}$ означает

$$\lim_{T\to\infty} M\left[\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt - \hat{x}\right)^2\right] = 0.$$

Сходимость в среднем квадратическом влечет за собой сходимость по вероятности

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt - \hat{x}\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$

(ε — любое сколь угодно малое положительное число), но не наоборот.

$$<x(t)> = \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt = \hat{x}; \qquad (10.1.16)$$

$$<x^2(t)> = \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt = \alpha^{(2)} =$$

$$= D_X + \hat{x}^2; \qquad (10.1.17)$$

$$<x(t)\,x(t+\tau)> = \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt =$$

$$= B_X(\tau) = K_X(\tau) + \hat{x}^2, \qquad (10.1.18)$$

где $\varepsilon(x)$ — единичная функция (3.1.10), а $x(t)$ — любая реализация случайного процесса $X(t)$.

Случайный процесс, обладающий свойством (10.1.16), иногда называют эргодическим относительно МО. Необходимым и достаточным условием такой эргодичности является

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_X(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2 = 0,$$

а достаточным условием

$$\lim_{|t_1-t_2|\to\infty} K_X(t_1, t_2) = 0.$$

Для стационарного в широком смысле процесса необходимое и достаточное условие эргодичности относительно МО имеет вид

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) K_X(t)\,dt = 0, \qquad (10.1.19)$$

а достаточное условие $\lim\limits_{t\to\infty} K_X(t) = 0$.

Для нормального стационарного процесса (пример 10.1.1) выражение (10.1.18) справедливо. Если же процесс не нормален, хотя стационарен в широком смысле и эргодичен относительно математического ожидания, для применимости выражения (10.1.18) требуются более сильные ограничения (стационарности в узком смысле и метрической транзитивности). Однако в практически интересных случаях оно применимо.

Замечание. Прямое и строгое доказательство эргодичности случайного процесса часто бывает весьма затруднительным. Иногда для этого бывает полезен анализ физического смысла и происхождения процесса.

§ 10.2. КОМПЛЕКСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ

Комплексная СФ имеет вид

$$X(t) = Y(t) + iZ(t), \tag{10.2.1}$$

где $Y(t)$ и $Z(t)$ — вещественные СФ.

Комплексная СФ стационарна в узком смысле, если этим же свойством обладают СФ $Y(t)$ и $Z(t)$.

МО и корреляционная функция комплексной СФ определяются выражениями:

$$\hat{x}(t) = \hat{y}(t) + i\hat{z}(t); \tag{10.2.2}$$

$$K_X(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - \hat{x}(t_1))(X(t_2) - \hat{x}(t_2))^*] = \\ = K_Y(t_1, t_2) + K_Z(t_1, t_2) - i[K_{YZ}(t_1, t_2) - \\ - K_{YZ}(t_2, t_1)], \tag{10.2.3}$$

где $X^*(t) = Y(t) - iZ(t)$ — СФ, комплексно сопряженная для СФ $X(t)$, а $K_{yz}(t_1, t_2)$ и $K_{yz}(t_2, t_1)$ — взаимные корреляционные функции (см. ниже) СФ $Y(t)$ и $Z(t)$.

Замечание. Иногда корреляционную функцию комплексной СФ определяют выражением

$$K_X(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - \hat{x}(t_1)^*(X(t_2) - \hat{x}(t_2))].$$

Комплексная СФ (10.2.1) стационарна в широком смысле, если СФ $Y(t)$ и $Z(t)$ стационарны в широком смысле и стационарно связаны (см. ниже). Для такой СФ МО (10.2.2) постоянно, а корреляционная функция и (10.2.3) зависят только от разности аргументов.

Многомерная СФ $X(t)$ от одного аргумента или система СФ $X_1(t), \ldots, X_n(t)$, (вещественных или комплексных) представляется в виде вектора-функции в n-мерном пространстве: $X(t) = \{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$. Чаще всего для ее описания используются следующие числовые характеристики:

— математическое ожидание $\hat{x}(t) = \{\hat{x}_1(t), ..., \hat{x}_n(t)\}$;
— корреляционная матрица $\|K_{X_iX_j}(t_1, t_2)\|$.

Диагональные элементы корреляционной матрицы $(i=j)$ представляют собой корреляционные функции одного процесса $K_{X_iX_i}(t_1, t_2) = K_{X_i}(t_1, t_2)$ и называются в этом случае *автокорреляционными функциями.* Остальные элементы (при $i \neq j$) образуют *взаимные корреляционные функции* различных процессов (составляющих многомерной СФ), определяемые выражением

$$K_{YZ}(t_1, t_2) = M[(Y(t_1) - \hat{y}(t_1))(Z(t_2) - \hat{z}(t_2))^*]. \quad (10.2.4)$$

СФ $X_i(t)$ и $X_j(t)$ при $i \neq j$ называются *стационарно связанными*, если их взаимная корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов $K_{X_iX_j}(t_1, t_2) = K_{X_iX_j}(t_1 - t_2)$.

Многомерная СФ $X(t)$ стационарна в широком смысле, если ее составляющие стационарны в том же смысле и стационарно связаны.

Разделы теории СФ, ограничивающиеся рассмотрением моментов первых двух порядков, получили наименование *корреляционной теории СФ.* Подавляющее большинство практических задач решается в рамках именно этой теории, для которой фундаментальную роль играет корреляционная функция. Последняя обладает следующими свойствами.

1) Если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — неслучайная функция, то $K_Y(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2)$, т. е. добавление к СФ неслучайной функции не меняет центрированной

корреляционной функции. Нецентрированная корреляционная функция при этом меняет свое значение

$$B_Y(t_1, t_2) = B_X(t_1, t_2) + \hat{x}(t_1)\varphi(t_2) + \hat{x}(t_2)\varphi(t_1) + \\ + \varphi(t_1)\varphi(t_2).$$

2) При одновременной перестановке аргументов и индексов, обозначающих СФ, взаимная корреляционная функция вещественных СФ сохраняет свое значение: $K_{XY}(t_1, t_2) = K_{YX}(t_2, t_1)$, а комплексных СФ меняет свое значение на комплексно сопряженное: $K_{XY}(t_1, t_2) = = K^*_{YX}(t_2, t_1)$.

3) Автокорреляционная функция вещественной СФ симметрична относительно своих аргументов: $K_X(t_1, t_2) = = K_X(t_2, t_1)$, и в частности для стационарных вещественных процессов

$$K_X(\tau) = K_X(-\tau).$$

4) Центрированная корреляционная функция по абсолютной величине не превосходит среднего геометрического и, следовательно, среднего арифметического дисперсий, вычисленных для тех же моментов времени

$$|K_X(t_1, t_2)| \leqslant \sqrt{D_X(t_1) D_X(t_2)} \leqslant \frac{1}{2}[D_X(t_1) + D_X(t_2)].$$

В частности, для стационарных (в узком или широком смысле) СФ

$$|K_X(\tau)| \leqslant D_X = K_X(0).$$

5) Нормированная корреляционная функция по абсолютной величине не превосходит единицы: $|k(t_1, t_2)| \leqslant 1$.

6) Для корреляционной функции стационарной СФ существует определенное среднее значение, т. е. существует предел $\lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T K_X(\tau)\, d\tau$.

Если этот предел равен нулю, то СФ эргодична относительно МО (§ 10.1).

Корреляционная функция характеризует степень связанности значений СФ, рассматриваемых в моменты времени t_1 и t_2. Чем быстрее убывает корреляционная функция с увеличением интервала $|t_1 - t_2|$, тем меньше связанность значений СФ.

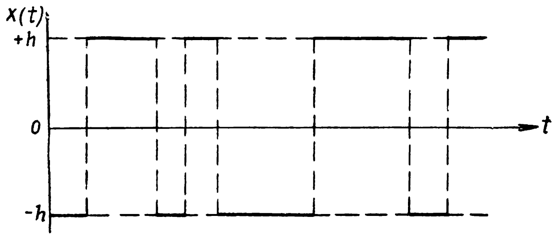

Рис. 10.2.1

Пример 10.2.1. Дана вещественная случайная последовательность $X(t_i) = X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ с независимыми членами X_i. Найти для нее корреляционную функцию.

Согласно (10.1.9) имеем

$$K_X(t_i, t_j) = M\left[(X_i - \hat{x}_i)(X_j - \hat{x}_j)\right] =$$

$$= \begin{cases} M\left[X_i - \hat{x}_i\right] \cdot M\left[X_j - \hat{x}_j\right] = 0 & \text{при } i \neq j; \\ M\left[(X_i - \hat{x}_i)^2\right] = D_i & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Пример 10.2.2. Дана СФ $X(t)$, которая может принимать (рис. 10.2.1) только два значения: $+h$ и $-h$, причем перемена знака происходит в случайные моменты времени (такая СФ называется телеграфным сигналом). Пусть число перемен знака образует пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$ (§ 11.2).

Найти корреляционную функцию процесса.

В данном случае общая формула (10.1.5) принимает вид

$$B_X(t_1, t_2) = h^2 P\{X(t_1) = X(t_2)\} - h^2 P\{X(t_1) = -X(t_2)\}.$$

Согласно § 11.2 вероятность того, что на интервале $[t_1, t_2]$ будет ровно k перемен знаков, равна

$$V_k(t_1, t_2) = e^{\Delta(t_1, t_2)} \frac{[\Delta(t_1, t_2)]^k}{k!},$$

где $\Delta(t_1, t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt$.

Следовательно,

$$P\{X(t_1) = X(t_2)\} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2k}(t_1, t_2) = e^{-\Delta(t_1, t_2)} \operatorname{ch} \Delta(t_1, t_2);$$

$$P\{X(t_1) = -X(t_2)\} = \sum_{k=1}^{\infty} V_{2k-1}(t_1, t_2) = e^{-\Delta(t_1, t_2)} \operatorname{sh} \Delta(t_1, t_2)$$

как вероятности соответственно четного и нечетного чисел перемен знака на рассматриваемом интервале.

Окончательно

$$B_X(t_1, t_2) = h^2 e^{-2\Delta(t_1, t_2)}.$$

Если дополнительно предположить стационарность процесса $\lambda(t) = \lambda$, то получим

$$B_X(\tau) = h^2 e^{-2\lambda|\tau|}.$$

§ 10.3. ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ ОТ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В результате дифференцирования или интегрирования каждой из множества реализаций СФ $X(t)$, если производная и интеграл существуют, будет получено множество реализаций некоторой другой СФ. Для характеристики полученной СФ в рамках корреляционной теории достаточно найти ее МО и корреляционную функцию.

МО и корреляционная функция производной $V(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ некоторого случайного процесса $X(t)$ следующим образом выражается через те же числовые характеристики СФ $X(t)$:

$$\hat{v}(t) = \frac{d\hat{x}(t)}{dt}, \tag{10.3.1}$$

$$K_V(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \tag{10.3.2}$$

Если СФ $X(t)$ стационарна, то

$$\hat{v}(t) = \frac{d\hat{x}}{dt} = 0; \tag{10.3.3}$$

$$K_V(\tau) = -\frac{d^2 K_X(\tau)}{d\tau^2}, \tag{10.3.4}$$

т. е. производная стационарной СФ тоже стационарна по крайней мере в широком смысле.

Необходимым условием существования производной СФ $X(t)$ является непрерывность* последней. СФ $X(t)$ будет непрерывной, если непрерывны ее МО $\hat{x}(t)$ и корреляционная функция $K_X(t_1, t_2)$ на прямой $t_1 = t_2$. Для непрерывности стационарного случайного процесса достаточно непрерывности его корреляционной функции $K_X(\tau)$ в точке $\tau = 0$.

Достаточным условием дифференцируемости случайного процесса $X(t)$ является существование второй частной производной ее корреляционной функции (10.3.2) при равных значениях аргументов $t_1 = t_2$. Если СФ $X(t)$ стационарна, то достаточно существования (10.3.4) при $\tau = 0$.

---

*Непрерывность понимается в среднем квадратическом (см. сноску на стр. 227).

Для интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$ от СФ $X(t)$ имеют место формулы:

$$\hat{y}(t) = \int\limits_0^t \hat{x}(s)\,ds; \tag{10.3.5}$$

$$K_Y(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} K_X(s_1, s_2)\,ds_1\,ds_2, \tag{10.3.6}$$

которые для вещественной стационарной СФ $X(t)$ имеют вид:

$$\hat{y}(t) = \hat{x}t; \tag{10.3.7}$$

$$K_Y(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} K_X(s_1 - s_2)\,ds_1\,ds_2; \tag{10.3.8}$$

$$D_Y(t) = 2\int\limits_0^t (t-\tau) K_X(\tau)\,d\tau. \tag{10.3.9}$$

Из последних выражений следует, что интеграл от стационарной СФ не будет стационарной СФ.

Достаточным условием существования интеграла от СФ является существование двойного интеграла от ее корреляционной функции (10.3.6).

Пример 10.3.1. Дан дифференцируемый вещественный случайный процесс **X** (t). Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1, t_2)$ этого процесса и его производной $V(t) = \dot{X}(t)$.

В соответствии с общим определением имеем

$$K_{XV}(t_1, t_2) = M\,[(X(t_1) - \hat{x}(t_1))\,(V(t_2) - \hat{v}(t_2))] =$$

$$= M\left[(X(t_1) - \hat{x}(t_1))\,\frac{d}{dt_2}(X(t_2) - \hat{x}(t_2))\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_2} M\,[(X(t_1) - \hat{x}(t_1))\,(X(t_2) - \hat{x}(t_2))] = \frac{\partial}{\partial t_2} K_X(t_1, t_2).$$

Если случайный процесс $X(t)$ стационарен (хотя бы в широком смысле), то $K_{XV}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} K_X(t_2 - t_1)$ или $K_{XV}(\tau) = K_X'(\tau)$.

Для вещественного стационарного процесса корреляционная функция $K_X(\tau)$ четна (§ 10.2) и $K_X'(0) = 0$. Следовательно, $K_{XV}(0)=0$, что указывает на несвязанность ординат процесса и его производной в совпадающие моменты времени (эти процессы в совпадающие моменты времени некоррелированы или, как иногда говорят, *некогерентны*).

§ 10.4. СПЕКТР СТАЦИОНАРНОЙ (В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ) СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Для описания стационарных СФ наряду с числовыми характеристиками (§ 10.1) широко применяются частотные спектры. Наглядно, хотя и не строго, стационарную СФ можно себе представить в виде суммы гармонических колебаний различных частот со случайными амплитудами. Распределение дисперсий случайных амплитуд по различным частотам и образует *спектр* стационарной СФ.

Если в образовании СФ участвует конечное или счетное множество частот $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, спектр называется *дискретным*. Корреляционная функция стационарной СФ с дискретным спектром имеет вид

$$K_X(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k^2 e^{i\omega_k \tau}, \qquad (10.4.1)$$

а для вещественных СФ

$$K_X(\tau) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos \omega_k \tau. \qquad (10.4.1')$$

Дискретный спектр ω_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, может быть найден по известной корреляционной функции

$K_X(\tau)$. Для этого необходимо вычислить интеграл $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} K_X(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$. Те значения ω, для которых интеграл отличен от нуля, и образуют спектр.

Если в образовании СФ участвует несчетное множество частот, спектр называется *непрерывным*. Корреляционная функция такого стационарного случайного процесса может быть представлена в виде

$$K_X(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, dS(\omega), \tag{10.4.2}$$

где $S(\omega)$ — неубывающая функция, такая, что

$$K_X(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dS(\omega) < +\infty$$

для СФ с конечной дисперсией $D_X = K_X(0)$.

Она называется *спектральной функцией* и может быть найдена по известной корреляционной функции $K_X(\tau)$ при помощи формулы

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{-i\omega\tau} - 1}{-it} K_X(\tau)\, d\tau. \tag{10.4.3}$$

Если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_X(\tau)|\, d\tau < +\infty$, то выполняется (10.4.3) и существует *спектральная плотность* $s(\omega) = \frac{dS(\omega)}{d\omega}$, определяемая через преобразование Фурье

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \tag{10.4.4}$$

Спектральная плотность неотрицательна: $s(\omega) \geqslant 0$ при любом ω и для СФ с конечной дисперсией удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\, d\omega < +\infty.$$

В свою очередь корреляционная функция может быть найдена по известной спектральной плотности с помощью обратного преобразования Фурье

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (10.4.5)$$

Для вещественных процессов корреляционная функция и спектральная плотность будут вещественными четными функциями, определяемыми косинус-преобразованиями Фурье:

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau, \qquad (10.4.6)$$

$$K_X(\tau) = 2 \int_{0}^{\infty} s(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega. \qquad (10.4.7)$$

Дисперсия случайного стационарного процесса выражается через спектральную плотность в виде

$$D_X = K_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\, d\omega = 2 \int_{0}^{\infty} s(\omega)\, d\omega. \qquad (10.4.8)$$

Замечания: 1. Спектральная плотность $s(\omega)$ случайного процесса в инженерной практике часто называется энергетическим спектром или спектральной плотностью мощности. Объясняется это тем, что спектральная плотность дает усредненную картину распределения энергии (мощности) процесса по частотам.

2. В литературе используются разные определения спектральной плотности, отличающиеся постоянным множителем. В таблице 10.4.1 дана сводка наиболее употребительных определений и указана связь с определением, данным в Справочнике.

Таблица 10.4.1

Корреляционная функция	Спектральная плотность	Связь спектральной плотности с $s(\omega)$
$K(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega$ $K(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} F(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega$	$F(\omega) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau$ $F(\omega) = 4\int\limits_{0}^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau$	$F(\omega) = 4\pi s(\omega)$
$K(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega$ $K(\tau) = \int\limits_{0}^{\infty} G(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega$	$G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$ $G(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau$	$G(\omega) = 2s(\omega)$
$K(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega$ $K(\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(\omega) \cos \omega\pi\, d\omega$	$f(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau$ $f(\omega) = 2\int\limits_{0}^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau$	$f(\omega) = 2\pi s(\omega)$

Для случайной стационарной последовательности X_n, $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ корреляционная функция представима в виде

$$K_X(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega n}\, dS(\omega),$$

где $S(\omega)$ удовлетворяет прежним условиям.

В случае $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |K(n)| < \infty$ существует спектральная плотность $s(\omega) = \frac{dS(\omega)}{d\omega} \geqslant 0$.

Корреляционная функция и спектральная плотность стационарной случайной последовательности взаимно определяют друг друга:

$$K_X(n) = \int_{-\pi}^{\pi} s(\omega)\, e^{i\omega n}\, d\omega; \tag{10.4.9}$$

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_X(n)\, e^{-i\omega n}. \tag{10.4.10}$$

Нормированная спектральная плотность $s_0(\omega) = \frac{s(\omega)}{D_X}$ и нормированная корреляционная функция $k_X(\tau)$ (10.1.10) стационарной СФ удовлетворяют соответствующим парам преобразований Фурье: (10.4.4) и (10.4.5) или (10.4.9) и (10.4.10). Для нормированной спектральной плотности выполняется условие

$$2\int_{0}^{\infty} s_0(\omega)\, d\omega = 1.$$

Если производная $Y(t) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}$ существует (§ 10.3), то $s_Y(\omega) = \omega^{2n} s_X(\omega)$, причем $\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} s_X(\omega)\, d\omega < +\infty$.

Наоборот, существование указанного интеграла подтверждает n-кратную дифференцируемость стационарного случайного процесса $X(t)$.

Если

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} X(t) = P_m(p) X(t), \qquad (10.4.11)$$

где $P_m(p)$ — полином m-й степени от оператора дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ с коэффициентами b_0, b_1, ..., b_m и стационарный случайный процесс $X(t)$ обладает спектральной плотностью $s_X(\omega)$, то спектральная плотность СФ $Z(t)$ имеет вид

$$s_Z(\omega) = \left| \sum_{k=0}^{m} b_k (i\omega)^{m-k} \right|^2 s_X(\omega) \qquad (10.4.12)$$

или с использованием обозначения (10.4.11)

$$s_Z(\omega) = |P_m(i\omega)|^2 s_X(\omega). \qquad (10.4.12')$$

Аналогично, если поведение устойчивой динамической системы под воздействием стационарного случайного процесса $X(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\sum_{l=0}^{n} a_l \frac{d^{n-l}}{dt^{n-l}} Y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} X(t) \qquad (10.4.13)$$

или в операторной форме

$$Q_n(p) Y(t) = P_m(p) X(t),$$

то спектральная плотность выходного случайного стационарного процесса $Y(t)$ имеет вид

$$s_Y(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 s_X(\omega), \qquad (10.4.14)$$

где

$$|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{|P_m(i\omega)|^2}{|Q_n(i\omega)|^2}$$

и $\Phi(i\omega)$ называется *передаточной функцией* системы.

Замечание. Выражение (10.4.14) справедливо, если существуют все производные в (10.4.13) и если решение ищется для достаточно большого времени t, при котором можно считать затухшими переходные процессы, обусловленные начальными условиями.

В табл. 10.4.2 приведены корреляционные функции и спектральные плотности стационарных случайных процессов $Y(t)$, получаемых из стационарных случайных процессов $X_i(t)$, $i=1, 2, \ldots$, с нулевыми МО путем некоторых операций (в предположении, что эти операции выполняются), причем в последней строке предполагается независимость процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$.

Таблица 10.4.2

$Y(t)$	$K_Y(\tau)$	$s_Y(\omega)$
$\sum_i X_i(t)$	$\sum_i K_{X_i}(\tau)$	$\sum_i s_{X_i}(\omega)$
$X(at)$	$K_X(a\tau)$	$s_X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$X(t-t_0)$	$K_X(\tau)$	$s_X(\omega)$
$X(t)\,e^{-i\omega_0 t}$	$K_X(\tau)\,e^{i\omega_0\tau}$	$s_X(\omega+\omega_0)$
$\frac{d^n}{dt^n}X(t)$	$(-1)^n\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}K_X(\tau)$	$\omega^{2n}s_X(\omega)$
$X_1(t)\,X_2(t)$	$K_{X_1}(\tau)\,K_{X_2}(\tau)$	$\int_{-\infty}^{\infty} s_{X_1}(\nu)\,s_{X_2}(\omega-\nu)\,d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} s_{X_1}(\omega-\nu)\,s_{X_2}(\nu)\,d\nu$

Пример 10.4.1. Пусть дано выражение

$$\sigma^2 a^{|\tau|} = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \tag{*}$$

где $0<a<1$ и $\alpha = -\ln a > 0$. Установить, может ли это выражение быть корреляционной функцией некоторого стационарного случайного процесса, и если да, то найти соответствующую ей спектральную плотность.

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\, d\tau = \frac{2\sigma^2}{\alpha} < +\infty,$$

то можно принять

$$K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

и воспользоваться (10.4.5) для отыскания спектральной плотности

$$s_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{\sigma^2}{\pi\alpha} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} > 0.$$

При достаточно большом α будем иметь

$$s_X(\omega) \approx \frac{\sigma^2}{\pi\alpha} = \text{const}.$$

В ряде исследований, особенно прикладного характера, в том случае, когда существенную роль играют лишь частоты ω, малые в сравнении с α, принимают $s(\omega) = s(0)$. Стационарный случайный процесс с постоянной спектральной плотностью называют *«белым шумом»* или «абсолютно случайным процессом».

Нормированная корреляционная функция такого процесса близка к дельте-функции

$$k_X(\tau) \approx \delta(\tau).$$

§ 10.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

В большинстве практических задач ограничиваются корреляционной теорией СФ, в рамках которой достаточно знания МО и корреляционной функции. Для оценки этих характеристик СФ $X(t)$ общего вида необходимо на некотором отрезке $(0, T)$ в одинаковых условиях получить несколько реализаций СФ $x_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, выбрать несколько равноотстоящих точек t_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ и вычислить ординаты функций $x_i(t)$ в моменты времени $t=t_j$.

Статистическая оценка МО СФ $X(t)$ в моменты времени t_j определяется по формуле

$$\bar{x}(t_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_j), \tag{10.5.1}$$

а оценка корреляционной функции по формуле

$$\bar{K}(t_j, t_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} [x_i(t_j) - \bar{x}_i(t_j)] \times$$

$$\times [x_i(t_k) - \bar{x}_i(t_k)] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_j)\, x_i(t_k) - \frac{n}{n-1}\bar{x}(t_j)\,\bar{x}(tk). \tag{10.5.2}$$

Замечание. Если при оценке корреляционной функции известно МО СФ $\hat{x}(t)$, в формуле (10.5.2) следует заменить $\bar{x}$ на $\hat{x}$ и множитель $\frac{1}{n-1}$ на $\frac{1}{n}$.

Полученные в дискретные моменты времени значения $\bar{x}$ и $\bar{K}$ могут быть аппроксимированы непрерывными функциями по известным методам.

Поскольку в данном случае изучение СФ сводится к изучению системы СВ, оценка точности полученных подходящих значений может быть произведена методами, описанными в § 13.4, 13.5 и 14.3.

Числовые характеристики эргодических стационарных СФ (§ 10.1) могут быть получены не по множеству реализаций, а по одной реализации $x(t)$ достаточной длины.

Несмещенная оценка МО стационарного случайного процесса $X(t)$ находится по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt. \tag{10.5.3}$$

Ее дисперсия равна

$$D[\bar{x}] = \frac{2}{T}\int_0^T K_X(\tau)\left(1-\frac{\tau}{T}\right)d\tau. \tag{10.5.4}$$

Если

$$\int_0^\infty K_X(\tau)\,d\tau < +\infty,$$

то $\lim\limits_{T\to\infty} D[\bar{x}] = 0$, и случайный процесс $X(t)$ будет эргодическим, а оценка (10.5.3) состоятельной.

Оценка МО стационарной случайной последовательности имеет вид

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{10.5.5}$$

а ее дисперсия определяется по формуле

$$D[\bar{x}] = \frac{D_X}{n}\left[1+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)r(k)\right]. \tag{10.5.6}$$

При определении оценки корреляционной функции (в отличие от оценок МО она будет не СВ, а СФ) различают случаи, когда МО $\hat{x}$ СФ известно и когда оно неизвестно.

В первом случае

$$\bar{K}_X(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}[x(t)-\hat{x}]\,[x(t+\tau)-\hat{x}]\,dt, \tag{10.5.7}$$

причем эта оценка несмещенная.

Во втором случае оценка корреляционной функции может быть получена по одной из формул:

$$\overline{K}_X(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau}[x(t)-\overline{x}]\,[x(t+\tau)-\overline{x}]\,dt \qquad (10.5.8)$$

или

$$\overline{K}_X(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau}x(t)\,x(t+\tau)\,dt-\overline{x}^2, \qquad (10.5.9)$$

которые при большом T дадут близкие результаты.

Эти оценки асимптотически несмещенные, так что для получения хороших результатов надо брать большой интервал T. Относительно применимости оценки (10.5.8) см. § 10.1.

Оценка корреляционной функции случайной последовательности при неизвестном МО имеет вид

$$\overline{K}_X(m)=\frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}(x_i-\overline{x})(x_{i+m}-\overline{x}) \qquad (10.5.10)$$

и также является асимптотически несмещенной.

Глава 11

ПОТОКИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

§ 11.1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОТОКОВ

В различного рода практических задачах часто встречаются ситуации, когда с течением времени случайным образом осуществляются те или иные однородные события, например прибытие самолетов в аэропорт, поступление вызовов на телефонную станцию, появление целей в зоне действия огневого комплекса, обращение пациентов в поликлинику и т. п. Абстрагируясь от конкретного содержания событий и сосредоточив внимание лишь на самом механизме их появления, все эти случаи можно рассматривать как потоки (однородных) событий.

Число $N(t)$ событий, наступающих в промежутке $(0, t)$, представляет собой неотрицательную неубывающую целочисленную функцию, возрастающую скачками на целые положительные числа в моменты осуществления событий. Последние часто называют *«вызывающими моментами»*.

Потоком однородных случайных событий называется случайный процесс $N(t)$ с целочисленными неотрицательными значениями и непрерывным временем.

Поток случайных событий может быть задан двояко:

— распределением числа событий, происходящих в интервалы времени произвольной длины и расположенных произвольно относительно начала отсчета;

— распределением длительности интервалов между осуществлениями событий.

При первом способе поток случайных событий полностью характеризуется набором функций распределения ($k=1, 2, \ldots$)

$$P\{N(t_1)=n_1, \ldots, N(t_k)=n_k\} \equiv$$
$$\equiv P\{N(t_i)=n_i;\ i=1, \ldots, k\}$$

или

$$P\{N(t_i)-N(t_{i-1})=n_i-n_{i-1};\quad i=1, \ldots, k\},\ (N(t_0)=0,$$
$$n_0=0),$$

отличных от нуля только при выполнении условий

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k,\quad 0 \leqslant n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_k.$$

Наиболее употребительны одномерные ($k=1$) функции распределения:

$$P\{N(t)=n\}=V_n(0, t) \equiv V_n(t);$$
$$P\{N(t_i)-N(t_j)=n\} \equiv V_n(t_i, t_j),$$

представляющие собой вероятности того, что в интервале $[0, t)$ или $[t_i, t_j)$ произойдет ровно n событий.

Поток случайных событий называется *потоком без последействия* (§ 10.1), если числа событий $N(t_i)-N(t_{i-1})$, наступивших в непересекающиеся интервалы времени $[t_{i-1}, t_i)$, являются независимыми СВ.

Для потоков без последействия выполняется условие

$$P\{N(t_i)-N(t_{i-1})=n_i;\quad i=1, \ldots, k\}=$$
$$=\prod_{i=1}^{k} P\{N(t_i)-N(t_{i-1})=n_i\}=\prod_{i=1}^{k} V_{n_i}(t_{i-1}, t_i).$$

Поток называется *стационарным*, если его вероятностный режим не меняется с течением времени, т. е. если

$$P\{N(t_i+\tau)-N(\tau)=n_i;\quad i=1, \ldots, k\}=$$
$$=P\{N(t_i)=n_i;\quad i=1, \ldots, k\}. \qquad (11.1.1)$$

Для описания потоков случайных событий удобно использовать производящие функции (§ 9.4):

$$\gamma_N(x, t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n V_n(t_1, t_2)$$

или при $t_1=0$

$$\gamma_N(x, t) = \gamma_N(x, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n V_n(t),$$

зная которые, по формуле (9.4.9) можно найти распределение числа событий в любом интервале времени (t_1, t_2):

$$V_n(t_1, t_2) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \gamma_N(x, t_1, t_2)}{\partial x^n} \right|_{x=0}. \quad (11.1.2)$$

Второй способ описания потоков случайных событий, равноправный с первым, состоит в задании совокупности функций распределения $P\{Z_1 < z_1, \ldots, Z_n < z_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, случайных векторов $(Z_1, \ldots, Z_n)$, где $Z_i = T_i - T_{i-1}$, а $T_0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots$ представляют собой моменты наступления событий, причем $T_0=0$ — случайно выбранный начальный момент (в частности, он может совпадать с моментом наступления одного из событий).

Поток случайных событий называется *потоком с ограниченным последействием*, если при любом n СВ $Z_1, \ldots, Z_n$ независимы в совокупности (§ 1.2). Такие потоки полностью характеризуются одномерными функциями распределения

$$A_i(t) = P\{Z_i < t\}, \quad (11.1.3)$$

так как согласно (6.1.14)

$$P\{Z_1 < z_1, \ldots, Z_n < z_n\} = \prod_{i=1}^{n} A_i(z_i). \quad (11.1.4)$$

Замечание. Не следует смешивать понятия «отсутствие последействия» и «ограниченность последействия». Первое означает независимость числа событий, происходящих в непересекающиеся промежутки времени, второе — независимость промежутков времени между наступлениями событий.

Ведущей функцией потока называется МО числа событий, происшедших в интервале времени $[0, t)$:

$$\hat{n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nV_n(t) = \left.\frac{\partial \gamma_N(x, t)}{\partial x}\right|_{x=1}, \quad t \geqslant 0. \tag{11.1.5}$$

Ведущая функция — неотрицательная, неубывающая и в практических задачах ограниченная.

Потоки с непрерывной ведущей функцией называются *регулярными*. Потоки со ступенчатой ведущей функцией называются *сингулярными*. Вероятность наступления хотя бы одного события в конкретный момент времени для регулярного потока равна нулю, для сингулярного потока — отлична от нуля в моменты времени, соответствующие точкам разрыва ведущей функции.

Ведущая функция стационарного регулярного потока линейна:

$$\hat{n}(t) = \mu t. \tag{11.1.6}$$

Регулярный поток называется *ординарным*, если вероятность осуществления в малом интервале времени Δt более одного события есть величина высшего порядка малости по сравнению с интервалом Δt.

Предел

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - V_0(t, t + \Delta t)}{\Delta t}, \tag{11.1.7}$$

рассматриваемый только для регулярных потоков, называется *параметром* (иногда — *темпом*) *потока*.

Интенсивность (плотность) регулярного потока определяется следующими равноправными соотношениями:

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{n}(t + \Delta t) - \hat{n}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{\infty} n V_n(t, t + \Delta t). \qquad (11.1.8)$$

Всегда $\mu(t) \geqslant \lambda(t)$, причем равенство имеет место только для ординарных потоков. Для стационарных потоков параметр и интенсивность постоянны: $\lambda(t) = \lambda$, $\mu(t) = \mu$.

Замечание. Если рассматривать малый интервал времени $(t, t + dt)$, то $\lambda(t)\,dt$ примерно равно вероятности осуществления в этом интервале ровно одного события, а $\mu(t)\,dt$ — вероятности осуществления хотя бы одного события.

Всякий сингулярный поток однозначно определяется заданием моментов t_i, $i = 1, 2, \ldots$, осуществления событий и вероятностей $p_k^i = p_k(t_i)$ осуществления в i-й момент времени ровно $k = 0, 1, 2, \ldots$ событий.

§ 11.2. ПОТОКИ БЕЗ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

Каждый регулярный поток без последействия может быть задан производящей функцией вида

$$\gamma_N(x, t_1, t_2) = \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} [\chi_k(t_2) - \chi_k(t_1)]\, x^k\right\},$$

где $\chi_k(t)$ — некоторые всюду непрерывные монотонные функции, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(t) = 0 \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} k\chi_k(t) < +\infty, \quad t \geqslant 0.$$

Выбирая соответствующим образом функции $\chi_k(t)$, можно получить различные виды потоков без последействия.

1) Если

$$\chi_0(t_2)-\chi_0(t_1)=-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)\,du;\ \chi_1(t_2)-\chi_1(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)\,du;$$

$$\chi_i(t_2)-\chi_i(t_1)=0 \text{ при } i\geqslant 2,$$

где $0\leqslant\lambda(u)<+\infty$, то поток будет ординарным (в общем случае нестационарным). Такой поток полностью определяется мгновенным параметром $\lambda(t)$.

2) Если в дополнение к предположениям п. 1 положить $\lambda(t)=\lambda=\mathrm{const}$, то поток будет ординарным стационарным. Такой поток называется *простейшим.*

Замечание. Требования отсутствия последействия, стационарности и ординарности являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы поток был простейшим.

3) Если

$$\chi_0(t_2)-\chi_0(t_1)=-\lambda(t_2-t_1) \quad \text{и}$$

$$\chi_i(t_2)-\chi_i(t_1)=\lambda p_i(t_2-t_1) \quad \text{при } i\geqslant 1,$$

где $p_i\geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$,

то поток будет стационарным, в общем случае неординарным. Он имеет следующую структуру: поток моментов осуществления событий (вызывающих моментов) простейший, а распределение числа K событий, происходящих в каждый вызывающий момент, задано рядом вероятностей $p_k=P\{K=k\}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ Если $p_1=1$ и $p_k=0$ при $k\geqslant 2$, поток становится простейшим.

Основные характеристики регулярных потоков без последействия приведены в табл. 11.2.1.

Распространенной формой потоков без последействия являются *пуассоновские потоки*, для которых

$$V_k(t_1,\ t_2)=e^{-[\hat{n}(t_2)-\hat{n}(t_1)]}\frac{\left[\hat{n}(t_2)-\hat{n}(t_1)\right]^k}{k!}.$$

Для того чтобы регулярный поток без последействия был пуассоновским, необходимо и достаточно, чтобы он был ординарным.

Пример 11.2.1. Придорожная гостиница рассчитана на обслуживание пассажиров автомашин. Поток прибывающих к гостинице машин — простейший с периметром λ. В каждой автомашине с равной вероятностью может находиться от одного до m пассажиров.

Определить характеристики потока посетителей.

Поток пассажиров — стационарный неординарный, причем поток вызывающих моментов простейший, а число событий, происходящих в каждый вызывающий момент, распределено с вероятностями:

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{m} \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant m; \\ 0 \text{ при } k > m. \end{cases}$$

Производящая функция потока посетителей согласно табл. 12.2.1 имеет вид

$$\gamma_N(x, t_1, t_2) = \exp\left\{ \lambda (t_2 - t_1) \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^k - 1 \right) \right\},$$

ведущая функция —

$$\hat{n}(t) = \left. \frac{\partial \gamma_N (x, 0, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = \frac{m+1}{2} \lambda t,$$

распределение числа посетителей в интервале $[T, T+t)$, взятом где угодно,

$$V_n(t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \gamma_N(x, t)}{\partial x^n} \right|_{x=0}.$$

В частности, обозначив $\frac{\lambda t}{m} = h$, получим:

$$V_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad V_1(t) = e^{-\lambda t} h,$$

$$V_2(t) = e^{-\lambda t} \left(\frac{1}{2!} h^2 + h \right),$$

$$V_3(t) = e^{-\lambda t} \left(\frac{1}{3!} h^3 + h^2 + h \right) \text{ и т. д.}$$

Из (11.1.7) находим параметр потока посетителей λ, который оказывается равным параметру потока автомашин.

Регулярные потоки случайных

Вид потока		Характери	
		Производящая функция $\gamma_N(x, t_1, t_2)$	Ведущая функция $\hat{n}(t)$
Стационарный	Ординарный	$e^{\lambda(t_2-t_1)(x-1)}$	λt
	Неординарный	$e^{\lambda(t_2-t_1)\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k x^k - 1\right)}$	$\lambda t \sum\limits_{k=1}^{\infty} k p_k$
Нестационарный	Ординарный	$e^{(x-1)\int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda(u)\,du}$	$\int\limits_{0}^{t} \lambda(u)\,du$
	Неординарный	$e^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} [\chi_k(t_2) - \chi_k(t_1)]\, x^k}$	$\left.\dfrac{\partial \gamma_N(x, 0, t)}{\partial x}\right\|_{x=1}$

Таблица 11.2.1

событий без последействия

стики потоков

Параметр $\lambda(t)$	Интенсивность $\mu(t)$	Распределение числа событий $V_n(t_1, t_2)$
λ	λ	$e^{-\lambda(t_2-t_1)} \dfrac{[\lambda(t_2-t_1)]^n}{n!}$
λ	$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} kp_k$	$\dfrac{1}{n!} \dfrac{\partial^n \gamma_N(x, t_1, t_2)}{\partial x^n}\Big\|_{x=0}$
$\lambda(t)$	$\lambda(t)$	$e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u)\,du} \dfrac{\left[\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u)\,du\right]^n}{n!}$
$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1 - V_0(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$	$\dfrac{d\hat{n}(t)}{dt}$	$\dfrac{1}{n!} \dfrac{\partial^n \gamma_N(x, t_1, t_2)}{\partial x^n}\Big\|_{x=0}$

§ 11.3. ПОТОКИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Поток с ограниченным последействием задан, если заданы функции распределения $A_i(t)$ (11.1.3) при $i = 1, 2, \ldots$ В отличие от функций распределения $A_i(t)$ при $i \geqslant 2$, определяющих распределение интервалов между смежными событиями, функция

$$A_1(t) = P\{Z_1 < t\} = P\{T_1 < t\}$$

характеризует распределение промежутка времени от произвольно выбранного начала отсчета $T_0=0$ до осуществления первого события.

Среди потоков с ограниченным последействием особое место занимают так называемые *рекуррентные потоки*, у которых все интервалы Z_i между наступлениями событий распределены одинаково: $A_i(t) = A(t)$ при $i \geqslant 2$, так что для их описания достаточно знать две функции распределения: $A_1(t)$ и $A(t)$.

МО $\hat{t}$ и дисперсия σ_T^2 случайного интервала между очередными событиями соответственно равны:

$$\hat{t} = \int_0^\infty t dA(t) = \int_0^\infty [1 - A(t)]\, dt; \qquad (11.3.1)$$

$$\sigma_T^2 = \int_0^\infty (t - \hat{t})^2\, dA(t). \qquad (11.3.2)$$

Пусть начальный момент времени $T_0=0$ совпадает с одним из событий потока, но само это событие из дальнейшего рассмотрения исключается. Тогда функция распределения числа событий, МО и дисперсия числа событий, происходящих в интервале времени $[0, t)$, находятся по формулам:

$$W_n(t) = P\{N(t) < n\} = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0; \\ 1 - A^{(n)}(t) & \text{при } n \geqslant 1; \end{cases} \qquad (11.3.3)$$

$$\hat{n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\left[A^{(n)}(t) - A^{(n+1)}(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)}(t); \quad (11.3.4)$$

$$D[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\, A^{(n)}(t) - [\hat{n}(t)]^2, \quad (11.3.5)$$

где $A^{(n)}(t)$ — n-кратная свертка (§ 9.2) функций распределения $A(t)$, причем $A^{(0)}(t) \equiv 1$.

Характеристики потоков с ограниченным последействием удобно вычислять с помощью преобразования Лапласа и Лапласа—Карсона *. Преобразование Лапласа основных характеристик описанного выше потока имеет вид:

$$L\gamma_N(x, t) = \frac{1}{s}\,\frac{1 - CA(t)}{1 - xCA(t)}; \quad (11.3.6)$$

$$L\hat{n}(t) = \left.\frac{\partial L\gamma_N(x, t)}{\partial x}\right|_{x=1} = \frac{1}{s}\,\frac{CA(t)}{1 - CA(t)}; \quad (11.3.7)$$

$$LV_0(t) = L\gamma_N(x, t)\big|_{x=0} = \frac{1}{s}\,[1 - CA(t)]; \quad (11.3.8)$$

$$LV_n(t) = \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n L\gamma_N(x, t)}{\partial x^n}\right|_{x=0}. \quad (11.3.9)$$

---

* Здесь и далее употребляются следующие обозначения:
— преобразование Лапласа функции $f(t)$:

$$Lf(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt;$$

— преобразование Лапласа — Карсона

$$Cf(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} df(t) = s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = sLf(t).$$

Обратные преобразования, восстанавливающие функцию, обозначаются

$$f(t) = L^{-1}(Lf(t)) = C^{-1}(Cf(t)).$$

Для описания поведения потока в интервале $[T, T+t)$, когда начальный момент времени $T=t_0$ не совпадает с событием, а выбирается наугад, вводится условная функция распределения (§ 6.1) промежутка времени до наступления первого события

$$A_1(t|t_0) = \int_{t_0}^{t_0+t} [1 - A(t_0 + t - u)]\, d\hat{n}(u). \quad (11.3.10)$$

При этом функция распределения числа событий (11.3.3) принимает вид

$$W_n(t_0, t_0 + t) = \boldsymbol{P}\{N(t_0 + t) - N(t_0) < n\} = 1 - A_1(t|t_0) \ast A^{(n-1)}(t). \quad (11.3.11)$$

Для регулярного стационарного рекуррентного потока с ведущей функцией (11.1.6)

$$A_1(t|t_0) = A_1(t) = \mu \int_0^t [1 - A(u)]\, du, \quad (11.3.12)$$

так что поведение такого потока полностью характеризуется распределением $A(t)$. Формулы (11.3.3—11.3.5) остаются в силе с заменой $A^{(n)}(t)$ на $A_1(t) \ast A^{n-1}(t)$. Интенсивность и параметр потока определяются по формулам:

$$\mu = \frac{1}{\hat{t}}, \quad \lambda = \frac{1}{\hat{t}}[1 - A(0 + 0)]. \quad (11.3.13)$$

Если $A(0+0) = \lim_{\varepsilon \to 0} A(0+\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon > 0$, то поток будет ординарным, при этом $\mu = \lambda = \dfrac{1}{\hat{t}}$. В противном случае $\mu > \lambda$.

Если $A_1(t) \neq A(t)$, поток называется *рекуррентным потоком с запаздыванием*; если же $A_1(t) = A(t)$, поток называется *рекуррентным без запаздывания* или просто *рекуррентным* потоком. Поскольку всегда $A_1(0) = 0$, то для рекуррентного потока без запаздывания и $A(0) = 0$, т. е. такой поток обязательно ординарный. Стационарный рекуррентный (без запаздывания) поток является простейшим (§ 11.2).

Для стационарных рекуррентных потоков вероятность

$$P(t) = A_1(t) = \frac{1}{\hat{t}} \int_0^t [1 - A(u)]\, du, \qquad (11.3.14)$$

определяемая формулой (11.3.12), означает:

— функции распределения интервалов от случайно выбранного момента времени до первого последующего события и до первого предшествующего события;

— вероятность того, что в интервале времени t, положение которого на оси времени выбрано случайно, произойдет хотя бы одно событие.

Средняя длительность интервала от случайного момента до первого предшествующего или последующего события стационарного рекуррентного потока с запаздыванием определяется выражением

$$\hat{t}_1 = \int_0^\infty t dP(t) = \frac{\hat{t}}{2} + \frac{\sigma_T^2}{2\hat{t}}. \qquad (11.3.15)$$

Замечание. Для регулярных потоков $\hat{t}_1 > \frac{\hat{t}}{2}$, в то время как для сингулярных стационарных потоков с постоянными и равными интервалами между событиями $\hat{t}_1 = \frac{t_0}{2}$.

Характеристики рекуррентных потоков с запаздыванием и без запаздывания сведены в табл. 11.3.1. Совпадение в ряде случаев характеристик потоков с ограниченным последействием с аналогичными характеристиками потоков без последействия (табл. 11.2.1) объясняется тем, что для стационарных ординарных потоков отсутствие последействия влечет за собой ограниченность последействия. Если условие ординарности не выполнено, это утверждение неверно.

Характеристики рекуррент

Вид потока	Условия, накладываемые на $A(t)$	Условия, накладываемые на $A_1(t)$	Преобразование Лапласа производящей функции потока $L\gamma_N(x, t)$
Регулярный с запаздыванием			$\dfrac{1-CA_1(t)+x\,[CA_1(t)-CA(t)]}{s\,[1-xCA(t)]}$
		$A_1(t)=\dfrac{1}{\hat{t}}\int\limits_0^t [1-A(u)]\,du$	$\dfrac{1}{s}-\dfrac{1-x}{\hat{t}\,s^2}\cdot\dfrac{1-CA(t)}{1-xCA(t)}$
	$A(0)=0$	$A_1(t)=\dfrac{1}{\hat{t}}\int\limits_0^t [1-A(u)]\,du$	$\dfrac{1}{s}-\dfrac{1-x}{\hat{t}\,s^2}\cdot\dfrac{1-CA(t)}{1-xCA(t)}$
Регулярный без запаздывания	$A(0)=0$*	$A_1(t)=A(t)$	$\dfrac{1-CA(t)}{s\,[1-xCA(t)]}$
	$A(0)=0$*	$A_1(t)=A(t)$ $A_1(t)=$ $=\dfrac{1}{\hat{t}}\int\limits_0^t [1-A(u)]\,du$	$\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{\hat{t}}(1-x)}$

* Это условие не накладывается на функцию $A(t)$, а является

Таблица 11.3.1

ных потоков

Интенсивность потока, $\mu(t)$	Параметр потока, $\lambda(t)$	Примечание
$\frac{d}{dt} L^{-1}\left[L\gamma_N(x, t)\Big\vert_{x=1}\right]$	$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\times\left\{1-\right.$ $\left.-L^{-1}\left[L\gamma_N(x, t)\right]_{x=0}\right\}$	Поток общего вида
$\frac{1}{\hat{t}}$	$\frac{1}{\hat{t}}[1-A(0+0)]$	Стационарный поток
$\frac{1}{\hat{t}}$	$\frac{1}{\hat{t}}$	Стационарный ординарный поток (поток Пальма)
$\frac{d}{dt} L^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\frac{CA(t)}{1-CA(t)}\right]$	$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{1-L^{-1}\frac{1}{s}[1-CA(t)]\right\}$	Ординарный поток
$\frac{1}{\hat{t}}$	$\frac{1}{\hat{t}}$	Стационарный ординарный поток (простейший поток)

следствием условия $A_1(t) = A(t)$, так как всегда $A_1(0) = 0$.

Потоки, для которых равенство (11.3.12) выполняется лишь в пределе при $t_0 \to \infty$, называются *асимптотически стационарными*. Для таких потоков имеют место предельные соотношения при $t \to \infty$:

$$\frac{\hat{n}(t)}{t} \to \frac{1}{\hat{t}}, \quad \frac{d\hat{n}(t)}{dt} \to \frac{1}{\hat{t}}, \quad \frac{D[N(t)]}{t} \to \frac{\sigma_T^2}{\hat{t}^3}.$$

Пример 11.3.1 (простейший поток). Функция распределения интервала между очередными событиями имеет вид

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \qquad (*)$$

Определить характеристики рекуррентного потока.

Согласно (11.3.1) и (11.3.2) $\hat{t} = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$.

Свертка (n-кратная) (§ 9.2) функций распределения (*)

$$A^{(n)}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

так что согласно (11.3.3)

$$W_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

и

$$V_n(t) = W_{n+1}(t) - W_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Ведущая функция потока может быть найдена или непосредственно по формуле (11.1.6) или через производящую функцию (11.3.6) и имеет вид $\hat{n}(t) = \lambda t$.

Условная функция распределения (11.3.10)

$$A_1(t|t_0) = \lambda \int_{t_0}^{t_0+t} \left[1 - e^{-\lambda(t_0+t-u)}\right] du = 1 - e^{-\lambda t}$$

не зависит от t_0, что указывает на стационарность потока. Так как $A_1(t) = A(t)$, то поток рекуррентный без запаздывания, а значит, и ординарный.

Рассмотренный поток — простейший (§ 11.2). Следовательно, простейший поток обладает показательным распределением интервала между осуществлениями событий. Характерное свойство простейшего потока состоит в том, что распределение (11.3.14) интервала между случайно выбранным моментом времени и ближайшими к нему событиями совпадает с распределением интервала между соседними событиями. При этом из (11.3.15) следует, что $\hat{t}_1 = \hat{t}$.

Пример 11.3.2. (потоки Эрланга). Определить характеристики потока с функцией распределения интервала между событиями вида

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t). \qquad (*)$$

МО и СКО промежутка времени между очередными событиями согласно (11.3.1) и (11.3.2) равны: $\hat{t} = \frac{2}{\lambda}$, $\sigma_T = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$.

Распределение числа событий в интервале $[0, t)$:

$$W_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!};$$

$$V_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!}\left(1 + \frac{\lambda t}{2n+1}\right).$$

Ведущая функция, найденная через преобразование Лапласа (11.3.7) и равная

$$\hat{n}(t) = \frac{\lambda}{2} t - \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda t}),$$

нелинейна, что указывает на нестационарность потока.

Условная функция распределения (11.3.10) равна

$$A_1(t|t_0) = 1 - e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t \frac{1 + e^{-2\lambda t_0}}{2}\right),$$

а ее предел

$$A_1^*(t) = \lim_{t_0 \to \infty} A_1(t|t_0) = 1 - e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{\lambda t}{2}\right).$$

Далее, согласно (11.3.14)

$$A_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{\lambda t}{2}\right).$$

Равенство $A_1^*(t) = A_1(t)$ показывает, что рассматриваемый поток асимптотически стационарный.

Интенсивность потока (11.1.8)

$$\mu(t) = \frac{d\hat{n}(t)}{dt} = \frac{\lambda}{2}(1 - e^{-2\lambda t}),$$

а его параметр (11.1.7)

$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{2}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right).$$

Равенство $\mu(t) = \lambda(t)$ указывает на ординарность потока, которая также следует из $A(0)=0$.

Рассмотренный поток относится к классу эрланговских потоков. Поток Эрланга m-го порядка задается плотностью вероятности $a(t)$ интервала между событиями:

$$a(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \lambda \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \ m > 0.$$

МО и СКО интервала между событиями равны:

$$\hat{t} = \frac{m+1}{\lambda}, \quad \sigma_T = \frac{\sqrt{m+1}}{\lambda}.$$

Потоки Эрланга ординарны и асимптотически стационарны. Они получаются «просеиванием» простейшего потока: m событий простейшего потока теряются, $(m+1)$—е остается, затем снова m событий теряются, следующее остается и т. д.

Если зафиксировать асимптотическую интенсивность потока Эрланга $\mu^* = \frac{1}{\hat{t}} = \frac{\lambda}{m+1}$, то $\sigma_T = \frac{1}{\mu^* \sqrt{m+1}} \underset{m \to \infty}{\to} 0$, т. е. с увеличением порядка поток (с фиксированным началом отсчета) приближается к сингулярному (§ 11.1) с функцией распределения промежутка между событиями

$$A^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \dfrac{1}{\mu^*}, \\ 1 & \text{при } t > \dfrac{1}{\mu^*}. \end{cases}$$

Сингулярные рекуррентные потоки являются потоками с последействием, так как числа событий, происходящих в непересекающиеся промежутки времени, функционально связаны.

В то же время простейший поток, получающийся из потока Эрланга при $m=0$, есть поток без последействия. Таким образом, фиксируя интенсивность и меняя порядок m потока Эрланга, можно получить потоки, обладающие различной степенью последействия.

В исследованиях, связанных с статистическим моделированием, бывает необходимо построить поток с заданными характеристиками. Для воссоздания потоков с ограниченным последействием используется аппарат рекуррентных потоков.

Поток однородных событий будет стационарным потоком с ограниченным последействием и конечной интенсивностью, если события могут наступать только в «вызывающие моменты», образующие поток Пальма (табл. 11.3.1) с функциями распределения:

$$B(t) = \frac{A(t) - A(0)}{1 - A(0)}, \quad B_1(t) = A_1(t),$$

а распределение числа событий, происходящих в каждый вызывающий момент, характеризуется производящей функцией

$$\gamma_k(x) = \frac{1 - A(0)}{1 - x^n A(0)} x^n.$$

Выбирая соответствующим образом функции распределения $A(t)$, $A_1(t)$ и показатель n, можно получить требуемый поток случайных событий.

Глава 12

ЦЕПИ МАРКОВА

§ 12.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ

Цепью Маркова называется марковская (§ 10.1) СФ $X(t)$ с дискретным или непрерывным параметром t и дискретным множеством возможных значений x_i, $i=1, 2, \ldots$ (или $i=0, 1, 2, \ldots$).

Рассматривая СФ $X(t)$ как характеристику состояния некоторой физической системы S, событие $\{X(t)=x_i\}$ можно определить так: система S находится в состоянии E_i или просто в i-м состоянии. Таким образом, при изучении цепей Маркова вместо СФ $X(t)$ можно рассматривать СФ $N(t)$, принимающую положительные (неотрицательные) целочисленные значения 1, 2, ... (0, 1, 2) ...

Для описания цепей Маркова с непрерывным параметром используются следующие обозначения (за начало отсчета принимается $t=0$):

$p_i(t)=\boldsymbol{P}\{N(t)=i\}$ — вероятность (абсолютная) того, что система S в момент времени $t\geqslant 0$ будет находиться в i-м состоянии;

$p_{ij}(s, t)=\boldsymbol{P}\{N(t)=j \mid N(s)=i\}$ — вероятность (условная) того, что система в момент t будет находиться в j-м состоянии, если в момент s она находилась в i-м состоянии (вероятности перехода системы из состояния i в состояние j).

Аналогичные характеристики цепей Маркова с дискретным параметром (система S меняет свои состояния только в определенные моменты времени $t_0=0$, $t_1, t_2, \ldots$) обозначаются:

$p_i(n)=\boldsymbol{P}\{N(t_n)=i\}$ — вероятность (абсолютная) того, что система S на n-м шаге (в момент t_n) будет находиться в i-м состоянии;

$p_{ij}(n, m) = P\{N(t_m) = j \mid N(t_n) = i\}$ — вероятность (условная) перехода системы из состояния i, в котором она находилась на n-м шаге, в состояние j на m-м шаге ($n, m = 0, 1, 2, \ldots$).

Так как состояния системы образуют полную группу (§ 1.2), то указанные выше вероятности подчинены условиям:

$$\sum_i p_i(t) = 1, \quad \sum_i p_i(n) = 1; \tag{12.1.1}$$

$$\sum_j p_{ij}(s, t) = 1, \quad \sum_j p_{ij}(n, m) = 1, \; i = 1, 2, \ldots \tag{12.1.2}$$

Введенные выше вероятности полностью характеризуют поведение системы, так как по свойству марковских СФ (§ 10.1) многомерная функция распределения состояний системы S в любые моменты времени $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ может быть представлена в виде

$$P\{N(0) = i_0, N(t_1) = i_1, \ldots, N(t_n) = i_n\} =$$
$$= p_{i_0}(0)\, p_{i_0 i_1}(0, t_1) \ldots p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1}, t_n). \tag{12.1.3}$$

Если вероятности перехода зависят только от разности аргументов $p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t - s)$ и $p_{ij}(n, m) = p_{ij}(m - n)$, марковская СФ называется *однородной*. При этом $p_{ij}(t)$ $(p_{ij}(n))$ означает вероятность перехода системы из состояния i в состояние j за время t (за n шагов). Для однородной цепи с дискретным параметром вероятность $p_{ij}(1)$ перехода за один шаг обозначается просто p_{ij}.

Вероятности перехода марковских цепей удовлетворяют уравнению Колмогорова—Чэпмена, имеющему вид:

— для цепей общего вида

$$p_{ij}(s, t) = \sum_k p_{ik}(s, u)\, p_{kj}(u, t), \; s \leqslant u \leqslant t; \tag{12.1.4}$$

— для однородных цепей

$$p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(u)\, p_{kj}(t-u), \quad 0 \leqslant u \leqslant t, \qquad (12.1.5)$$

где s, u, t — неотрицательные вещественные (целые) числа для цепей с непрерывным (дискретным) параметром.

Замечание. Фундаментальное значение имеет произвольность параметра u и независимость от него результата.

§ 12.2. ЦЕПИ МАРКОВА С ДИСКРЕТНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Цепь Маркова с дискретным параметром задана, если заданы начальные вероятности $p_i(0)$, $i=1, 2, \ldots$, которые удобно записывать в виде матрицы строки $\|p_i(0)\| = \|p_1(0)\, p_2(0) \ldots\|$, и вероятности перехода $p_{ij}(n, n+1)$, $i, j=1, 2, \ldots$ для каждого шага $n=0, 1, 2, \ldots$, которые можно записать в виде матриц

$$\|p_{ij}(n, n+1)\| = \begin{Vmatrix} p_{11}(n, n+1)\, p_{12}(n, n+1) \ldots \\ p_{21}(n, n+1)\, p_{22}(n, n+1) \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{Vmatrix}, \qquad (12.2.1)$$

конечных квадратных или бесконечных в зависимости оттого, конечно или счетно множество состояний системы, описываемой данной цепью.

Вероятности состояний системы на каждом n-м шаге процесса находятся по формуле

$$\|p_i(n)\| = \|p_i(0)\| \prod_{k=0}^{n-1} \|p_{ij}(k, k+1)\|, \quad n \geqslant 1.$$

Для однородной цепи $\|p_{ij}(k, k+1)\| = \|p_{ij}\|$ и вероятности состояний находятся из матричного равенства

$$\|p_i(n)\| = \|p_i(m)\|\, \|p_{ij}\|^{n-m}, \qquad (12.2.2)$$

где m — любое целое число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant m \leqslant n$.

Элементы матрицы $\|p_{ij}\|^{n-m}$ представляют собой вероятности $p_{ij}(n-m)$ перехода за $n-m$ шагов, так что матричное равенство (12.2.2) можно записать в виде системы (конечной или бесконечной) равенств

$$p_j(n) = \sum_i p_i(m)\, p_{ij}(n-m), \quad j = 1, 2, \ldots \qquad (12.2.3)$$

Пример 12.2.1. Группа из n подводных лодок должна форсировать l противолодочных рубежей. Вероятность уничтожения на данном рубеже каждой подводной лодки, не уничтоженной на предшествующих рубежах, не зависит от числа лодок, форсирующих рубеж, и равна g.

Определить распределение числа лодок в группе после форсирования каждого рубежа.

К данной задаче применима схема однородной цепи Маркова с дискретным параметром, если в качестве системы рассматривать группу лодок, а под номером состояния понимать число лодок в группе.

Начальное распределение вероятностей определяется очевидным образом: $p_0(0) = p_1(0) = \ldots = p_{n-1}(0) = 0$; $p_n(0) = 1$ или в матричном виде

$$\|p_i(0)\| = \|0\ 0 \ldots 1\|. \qquad (*)$$

Специфика рассматриваемой системы состоит в том, что она не может переходить из состояний с меньшими номерами в состояния с большими номерами (потерянные лодки не восстанавливаются), так что $p_{ij} = 0$ при $i < j$. Если $i \geqslant j$, то вероятность перехода из состояния i в состояние j равна вероятности уничтожения $i - j$ лодок, которая задается биномиальным распределением (§ 4.1) $p_{ij} = C_i^{i-j} g^{i-j} (1-g)^j$.

Для определенности далее рассмотрим случай $n=3$. Матрица (12.2.1) переходных вероятностей имеет вид

$$\|p_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ g & 1-g & 0 & 0 \\ g^2 & 2g(1-g) & (1-g)^2 & 0 \\ g^3 & 3g^2(1-g) & 3g(1-g)^2 & (1-g)^3 \end{Vmatrix}. \qquad (**)$$

Поведение марковской цепи часто наглядно изображают в виде ориентированных графов, узлами которых служат состояния, а ребрами — направления возможных переходов, возле которых пишут значения вероятностей перехода. Для рассматриваемого примера граф изображен на рис. 12.2.1.

Подставляя (*) и (**) в (12.2.2), получим искомые распределения. Поскольку $\|p_i(0)\|$ имеет вид (*), то вероятности $p_i(l)$ будут записаны в нижней строке матрицы $\|p_{ij}\|^l$. Они равны

$$\|p_i(l)\| = \left\| r_l^3 \quad 3r_l^2(1-g)^l \quad 3r_l(1-g)^{2l} \quad (1-g)^{3l} \right\|,$$

где

$$r_1 = g, \quad r_2 = 2-g, \quad r_3 = 3-3g+g^2 \text{ и т. д.}$$

Полученные распределения позволяют найти любые другие характеристики состояния группы. Например, МО числа лодок, прошедших l-й рубеж, найдется по формуле

$$M[N(l)] = \sum_{i=1}^{n} ip_i(l) = n(1-g)^l.$$

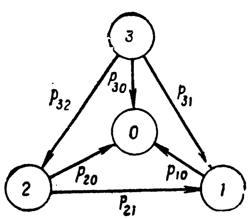

Рис. 12.2.1

Характер асимптотического при $n\to\infty$ поведения однородной цепи зависит от вида матрицы $\|p_{ij}\|$ вероятностей перехода.

З а м е ч а н и е. Квадратная матрица $\|p_{ij}\|$, элементы которой удовлетворяют условиям $p_{ij}\geqslant 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$, называется *стохастической*. Если у стохастической матрицы нет характеристических чисел, отличных от единицы и равных по модулю единице, она называется *правильной*. Если, кроме того, единица является простым корнем характеристического уравнения $\Delta\lambda = |\lambda\|1\| - \|p_{ij}\|| = 0$, где $\|1\|$ — единичная матрица, то стохастическая матрица $\|p_{ij}\|$ называется *регулярной*.

Неразложимая матрица, у которой только одно характеристическое число имеет максимальный модуль, называется *примитивной*.

Однородная цепь Маркова с дискретным параметром называется *правильной (регулярной)*, если правильной (регулярной) является матрица $\|p_{ij}\|$ вероятностей перехода.

Предельные или *финальные вероятности перехода* определяются предельным равенством

$$\left\| p_{ij}^{\infty} \right\| = \lim_{n \to \infty} \| p_{ij}(n) \|, \tag{12.2.4}$$

существуют только для правильных цепей и могут быть найдены как решения системы линейных уравнений:

$$p_{ij}^{\infty} = \sum_k p_{ik}^{\infty} p_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{12.2.5}$$

или в матричной форме

$$\left\| p_{ij}^{\infty} \right\| = \left\| p_{ij}^{\infty} \right\| \left\| p_{ij} \right\|. \tag{12.2.5'}$$

Если, в частности, правильная цепь регулярна, то финальные вероятности перехода не зависят от начальных условий

$$\lim_{n \to \infty} \| p_{ij}(n) \| = \left\| p_{*j}^{\infty} \right\| \tag{12.2.6}$$

и находятся из системы линейных уравнений

$$p_{*j}^{\infty} = \sum_k p_{*k}^{\infty} p_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{12.2.7}$$

или в матричной форме

$$\left\| p_{*j}^{\infty} \right\| = \left\| p_{*j}^{\infty} \right\| \| p_{ij} \|. \tag{12.2.7'}$$

Если матрица вероятностей перехода однородной правильной цепи Маркова примитивна, то цепь называется *ациклической* и все финальные переходные вероятности отличны от нуля.

Предельные (финальные) абсолютные вероятности пребывания системы в j-м состоянии определяются предельным равенством

$$\left\| p_j^{\infty} \right\| = \lim_{n \to \infty} \| p_i(n) \|. \tag{12.2.8}$$

и находятся из соотношений

$$p_j^{\infty} = \sum_i p_i(0)\, p_{ij}^{\infty} \qquad (12.2.9)$$

или в матричной форме

$$\left\| p_i^{\infty} \right\| = \left\| p_i(0) \right\| \left\| p_{ij}^{\infty} \right\|. \qquad (12.2.9')$$

В однородной правильной цепи Маркова предельные абсолютные вероятности состояний существуют при любых начальных условиях. Если цепь регулярна, они не зависят от начальных условий (эргодическая теорема) и равны предельным вероятностям перехода:

$$p_j^{\infty} = \sum_i p_i(0)\, p_{*j}^{\infty} = p_{*j}^{\infty}. \qquad (12.2.10)$$

Для ациклической цепи все $p_j^{\infty} > 0$.

Пример 12.2.2. Для условий примера 12.2.1 найти абсолютные финальные вероятности состояний.

Для характеристического многочлена матрицы (**) примера 12.2.1

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)[\lambda - (1-g)][\lambda - (1-g)^2][\lambda - (1-g^3)] = 0$$

$\lambda = 1$ является простым корнем. Следовательно, цепь регулярная и предельные абсолютные вероятности состояний могут быть найдены по формулам (12.2.10), имеющим в данном случае вид:

$$\begin{aligned}
p_0^{\infty} &= p_0^{\infty} + g p_1^{\infty} + g^2 p_2^{\infty} + g^3 p_3^{\infty};\\
p_1^{\infty} &= (1-g) p_1^{\infty} + 2g(1-g) p_2^{\infty} + 3g^2(1-g) p_3^{\infty};\\
p_2^{\infty} &= (1-g)^2 p_2^{\infty} + 3g(1-g)^2 p_3^{\infty};\\
p_3^{\infty} &= (1-g)^3 p_3^{\infty}.
\end{aligned}$$

Решение системы:

$$p_0^{\infty} = 1, \quad p_1^{\infty} = p_2^{\infty} = p_3^{\infty} = 0.$$

Так как матрица (**) рассматриваемой цепи разложима и, следовательно, не примитивна, то часть финальных вероятностей равна нулю.

§ 12.3. ЦЕПИ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Переход системы с непрерывным параметром из одного состояния в другое может происходить, вообще говоря, в любой момент времени. Если в данный момент t_0 система находится в i-м состоянии, $N(t_0)=i$, то изменение этого состояния может произойти в некоторый случайный момент $t_0+\tau$. *Время ожидания* τ перемены состояния распределено по некоторому закону

$$F_i(t;\ t_0)=\boldsymbol{P}\{\tau>t \mid N(t_0)=i\},$$

который для однородного процесса имеет вид

$$F_i(t)=e^{-\lambda_i t}, \tag{12.3.1}$$

где λ_i есть плотность перехода системы из i-го в какое-либо, безразлично какое, состояние.

Поведение цепи Маркова во времени определяется переходными вероятностями $p_{ij}(s,\ t)$. При их нахождении обычно вводят следующие предположения:

а) если в момент времени t система находится в i-м состоянии, то вероятность изменения этого состояния в интервале $(t,\ t+\Delta t)$ с точностью до малых высших порядков равна $\lambda_i(t)\Delta t$. Иначе это предположение формулируется в виде

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[1-p_{ii}(t,\ t+\Delta t)\right]=\lambda_i(t) \tag{12.3.2}$$

и означает, что $\lim\limits_{s\to t} p_{ii}(t,\ s)=1$ и что $p_{ii}(t,\ s)$ имеет производную по s при $t=s$. Для однородного процесса $\lambda_i(t)=\lambda_i=\text{const}$;

б) если в интервале $(t,\ t+\Delta t)$ система переходит из i-го состояния, то с вероятностью $u_{ij}(t)$ она перейдет в состояние $j\neq i$, причем

$$\sum_j u_{ij}(t)=1. \tag{12.3.3}$$

Иначе это предположение можно сформулировать в виде

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} p_{ij}(t, t+\Delta t) = \lambda_i(t) u_{ij}(t), \quad i \neq j. \tag{12.3.4}$$

Для однородного процесса $u_{ij}(t) = u_{ij} = \text{const}$.

При выполнении указанных предположений имеют место основные системы дифференциальных уравнений Колмогорова для определения вероятностей перехода $p_{ij}(s, t)$, удовлетворяющих уравнению Колмогорова—Чэпмена (§ 12.1):

— прямая

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} = \sum_k p_{ik}(s, t) \lambda_{kj}(t) \tag{12.3.5}$$

или в матричном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \| p_{ij}(s, t) \| = \| p_{ij}(s, t) \| \| \lambda_{ij}(t) \|; \tag{12.3.5$'$}$$

— обратная

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s} = -\sum_k \lambda_{ik}(s) p_{kj}(s, t) \tag{12.3.6}$$

или в матричном виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \| p_{ij}(s, t) \| = -\| \lambda_{ij}(s) \| \| p_{ij}(s, t) \|, \tag{12.3.6$'$}$$

где

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_i(t) u_{ij}(t) \text{ при } i \neq j, \ \lambda_i i(t) = -\lambda_i(t) \tag{12.3.7}$$

и

$$\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}(t) = \lambda_i(t) = -\lambda_{ii}(t). \tag{12.3.7$'$}$$

Функция $\lambda_i(t)$ есть плотность (интенсивность) перехода системы в момент t из состояния i в какое-либо другое состояние, а $\lambda_{ij}(t)$, $j \neq i$ — плотность перехода в определенное j — е, не равное исходному, состояние.

Начальные условия для написанных систем уравнений имеют вид

$$p_{ij}(t, t) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j; \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \qquad (12.3.8)$$

Для однородной цепи получаем следующие основные системы дифференциальных уравнений:

— прямую

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_k p_{ik}(t)\,\lambda_{kj}, \qquad (12.3.9)$$

или в матричном виде

$$\frac{d}{dt}\,\|p_{ij}(t)\| = \|p_{ij}(t)\|\,\|\lambda_{ij}\|; \qquad (12.3.9')$$

— обратную

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(t) \qquad (12.3.10)$$

или в матричном виде

$$\frac{d}{dt}\,\|p_{ij}(t)\| = \|\lambda_{ij}\|\,\|p_{ij}(t)\| \qquad (12.3.10')$$

при начальных условиях

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j; \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \qquad (12.3.11)$$

Плотности перехода λ_{ij} определяются равенствами (12.3.7) в предположении постоянства всех фигурирующих там членов.

Абсолютные вероятности состояний $p_i(t)$ определяются из следующей системы уравнений:

— для цепей общего вида

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_k p_k(t)\lambda_{ki}(t) \tag{12.3.12}$$

или в матричной форме

$$\frac{d}{dt}\|p_i(t)\| = \|p_i(t)\|\|\lambda_{ij}(t)\|; \tag{12.3.12'}$$

— для однородных цепей

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_k p_k(t)\lambda_{kj} \tag{12.3.13}$$

или в матричной форме

$$\frac{d}{dt}\|p_i(t)\| = \|p_i(t)\|\|\lambda_{ij}\|. \tag{12.3.13'}$$

Замечание. Часто используется несколько иная запись основных дифференциальных уравнений, где вместо матриц-строк фигурируют матрицы-столбцы. Например, (12.3.13′) в этой форме имеет вид

$$\frac{d}{dt}\|p_i(t)\|^T = \|\lambda_{ij}\|^T\|p_i(t)\|^T,$$

где индекс Т обозначает транспонированную матрицу.

Таким образом, в случае цепей Маркова с непрерывным параметром отыскание вероятностей перехода и вероятностей состояний сводится к решению систем дифференциальных уравнений. Сложность решения зависит от порядка и структуры матрицы $\|\lambda_{ij}(t)\|$ интенсивностей перехода.

Пример 12.3.1. В некоторой аппаратуре имеется звено, состоящее из двух однотипных приборов, дублирующих друг друга. Постоянно работает один прибор, а второй немедленно включается в работу после выхода из строя первого. Отказавший прибор сразу же начинает восстанавливаться. Если отказали оба прибора, звено выходит из строя. Потоки отказов и восстановлений простейшие с интенсивностями μ и ν соответственно (гл. 11).

Найти МО времени безотказной работы дублированного звена аппаратуры.

Рассматриваемая система может находиться в одном из трех состояний: E_0, E_1 и E_2, соответствующих случаям, когда в нерабочем состоянии находятся 0, 1 и 2 прибора. Состояние E_2 отвечает случаю выхода звена из строя.

Прежде всего найдем интенсивности λ_{ij} перехода из одного состояния в другое.

Из состояния E_0 за малый промежуток времени Δt с вероятностью $\approx \mu \Delta t$ система может перейти в состояние E_1 (отказал работающий аппарат, подключен резервный). Следовательно, $\lambda_{01} = \mu$. В силу ординарности простейшего потока

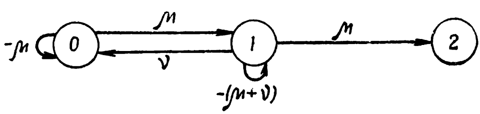

Рис. 12.3.1

(§ 11.2) вероятность перехода системы из E_0 в E_2 за малый промежуток времени Δt близка к нулю, так что $\lambda_{02} = 0$. Согласно (12.3.7′) $\lambda_{00} = -(\lambda_{01} + \lambda_{02}) = -\mu$.

Из состояния E_1 система с вероятностью $\approx \nu\Delta t$ может перейти в состояние E_0 (отказавший аппарат отремонтирован и снова выполняет функции резерва) или с вероятностью $\approx \mu\Delta t$ может перейти в состояние E_2 (резервный аппарат еще не восстановлен, а работавший отказал). Таким образом, $\lambda_{10} = \nu$, $\lambda_{12} = \mu$. Согласно (12.3.7′) $\lambda_{11} = -(\lambda_{10} + \lambda_{12}) = -(\nu + \mu)$.

Попав в состояние E_2, система становится нерабочей, и переходами из него в другое состояние в данной модели мы не интересуемся.

Таким образом, в рассматриваемом примере матрица интенсивностей перехода имеет вид

$$\|\lambda_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} -\mu & \mu & 0 \\ \nu & -(\mu+\nu) & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

граф переходов изображен на рис. 12.3.1, а система уравнений (12.3.13) записывается в виде

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\mu p_0(t) + \nu p_1(t);$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \mu p_0(t) - (\mu + \nu) p_1(t);$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \mu p_1(t).$$

при начальных условиях $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = p_2(0) = 0$, Вероятность безотказной работы звена равна $R(t) = p_0(t) + p_1(t)$, так что для ее определения достаточно решить систему из первых двух уравнений. Проделав вычисления, опускаемые для краткости, получим:

$$p_0(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\left(\mu+\frac{\nu}{2}\right)t} \left[\left(\frac{\nu}{2}+\alpha\right)e^{\alpha t} - \left(\frac{\nu}{2}-\alpha\right)e^{-\alpha t}\right];$$

$$p_1(t) = \frac{\mu}{2\alpha} e^{-\left(\mu+\frac{\nu}{2}\right)t} \left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right);$$

$$R(t) = e^{-\left(\mu+\frac{\nu}{2}\right)t} \left(\frac{\mu+\frac{\nu}{2}}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha t + \mathrm{ch}\,\alpha t\right), \qquad (*)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\mu\nu + \frac{\nu^2}{4}}.$$

Если случайное время безотказной работы обозначить T, то вероятность безотказной работы будет задавать распределение этой СВ: $R(t) = P\{T \geqslant t\}$. Поэтому МО времени безотказной работы найдется по формуле (11.3.1):

$$\hat{t} = \int_0^\infty t\, d[1 - R(t)] = \int_0^\infty R(t)\, dt. \qquad (**)$$

Подставляя (*) в (**), получаем

$$\hat{t} = \frac{2}{\mu} + \frac{\nu}{\mu^2}. \qquad (***)$$

Если вышедший из строя аппарат не восстанавливается ($\nu = 0$), вместо (*) и (***) будем иметь

$$R(t) = e^{-\mu t}(\mu t + 1), \quad \hat{t} = \frac{2}{\mu}.$$

что соответствует полученному в примере 11.3.2.

РАЗДЕЛ VI
ТЕХНИКА СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ. ПРАКТИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ РАСЧЕТЧИКУ

Глава 13
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 13.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При решении многих практических задач функция распределения СВ не может быть определена теоретическим путем. В таких случаях используются полученные в опыте результаты наблюдений над СВ, позволяющие (при достаточном их числе и надлежащей обработке) определить с известной степенью уверенности вид функции распределения и оценить ее числовые характеристики.

Множество, включающее все однородные объекты (например, возможные точки падения снаряда, звезды данной галактики, жители данного города), которым присущи или не присущи определенные количественные и качественные признаки (например, расстояние точки падения снаряда от цели, температура и цвет звезды, регулярно пользующиеся и не пользующиеся городским транспортом жители данного города), образует *генеральную совокупность* (статистический коллектив). Наряду с генеральной совокупностью объектов можно рассматривать генеральную совокупность их признаков. В соответствии с числом объектов генеральные совокупности могут быть конечными (звезды в галактике) и бесконечными (возможные точки падения снаряда).

Часть генеральной совокупности, отобранная наугад для наблюдений, называется *случайной выборкой* или, для краткости, *выборкой* (выборочной совокупностью). Результаты наблюдений образуют *эмпирическое* (статистическое, выборочное) *распределение*. Обработка результатов измерений позволяет вычислить числовые характеристики эмпирического распределения (выборки), называемые *статистическими оценками* (иначе эмпирическими или выборочными характеристиками). В силу случайности выборки ее характеристики являются СВ, отличаясь этим от достоверных числовых характеристик теоретического распределения (§ 3.2), которому подчиняется генеральная совокупность.

Статистические оценки представляют собой функции результатов наблюдений. В соответствии с законом больших чисел (§ 3.3) статистические оценки могут служить приближенными оценками соответствующих числовых характеристик теоретического распределения при весьма общих предположениях о его характере.

Наблюдения, на основе которых вычисляются статистические оценки, должны производиться над однородными объектами в одинаковых условиях.

Замечание. Требование об однородности объектов наблюдения и неизменности условий опыта означает, что одинаковыми должны быть те качества объектов и те условия, которые можно и целесообразно выделять. Например, при испытании ламп данной марки на надежность подбираются лампы одной партии определенного завода, но не учитываются неизбежные различия в качестве отдельных элементов ламп одной партии. Не учитываются также колебания напряжения, если они лежат в допустимых пределах. Следовательно, требование о неизменности условий и однородности объектов является условным. Необходимая степень выполнения этого требования устанавливается наблюдателем в зависимости от цели опыта.

Пропорции в выборке должны соответствовать пропорциям в генеральной совокупности. Такую выборку называют *репрезентативной* (представительной). Для обеспечения репрезентативности выборка должна производиться без невольной или сознательной предвзятости по отношению к отдельным частям генеральной совокупности.

Среди возможных и встречающихся в литературе статистических оценок более приемлемы, вообще говоря, оценки, удовлетворяющие требованиям состоятельности, несмещенности и эффективности.

Пусть x_1, x_2, ..., x_n — результаты n наблюдений. Статистическая оценка $\bar{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемой теоретической характеристике θ при неограниченном увеличении числа наблюдений, т. е. если при любом $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\bar{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1. \quad (13.1.1)$$

Статистическая оценка называется *несмещенной*, если ее МО равно оцениваемой характеристике независимо от числа наблюдений, т. е. при любом n:

$$M\left[\bar{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] = \theta. \quad (13.1.2)$$

Если равенство (13.1.2) выполняется при $n \to \infty$, то оценку называют *асимптотически несмещенной*.

Несмещенная статистическая оценка называется *эффективной*, если она имеет наименьшую возможную дисперсию.

Если объект, отобранный для наблюдения, не возвращается в генеральную совокупность, то выборка называется *бесповторной* (или безвозвратной). В противном случае выборку называют *повторной* (с возвратом). Различение повторных и бесповторных выборок необходимо только для конечных генеральных совокупностей.

Методы статистического оценивания * распределения СВ полностью применимы к оцениванию вероятностей случайных событий. Достаточно каждому возможному исходу сопоставить определенное число (например, наступлению события A можно сопоставить единицу, а ненаступлению — нуль) и рассматривать эти числа как выборочную совокупность возможных значений дискретной СВ.

* В соответствии с установившейся терминологией под оцениванием понимается процесс, а под оценкой — число, полученное в результате этого процесса.

§ 13.2. ЭМПИРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Непрерывные СВ

Результаты n независимых наблюдений над объектами одной генеральной совокупности можно рассматривать как значения n независимых одинаково распределенных СВ или как n независимых значений одной СВ. Упорядоченные по величине результаты наблюдений

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}, \; \left(x_{(i)} \leqslant x_{(i+1)}\right) \qquad (13.2.1)$$

называют *вариационным рядом* или рядом распределения. Разность между наибольшим и наименьшим членами

$$R = x_{(n)} - x_{(1)} \qquad (13.2.2)$$

называют *размахом* эмпирического распределения, а число наблюдений n — объемом выборки (ряда).

Условия наблюдения могут быть таковы, что независимо от воли наблюдателя определяется не точный результат, а разряд (интервал округления), в который этот результат попадает. Выбор величины разряда может производиться и по желанию наблюдателя для облегчения обработки результатов наблюдения. Всем значениям СВ, попавшим в i-й разряд, приписывается значение x_i, соответствующее середине разряда. Число разрядов m выбирают обычно в пределах 10—15. При малом объеме выборки число разрядов приходится уменьшать до 5—6.

Замечание. Увеличение числа разрядов свыше 15—20, как правило, нецелесообразно даже при большом объеме выборки, так как точность статистических оценок увеличивается при этом несущественно, а объем вычислений растет значительно.

Число наблюдений в разряде называется *частотой* (иначе, абсолютной частотой). Частота n_i в i-м разряде, отнесенная к объему ряда и определяемая равенством

$$\bar{p}_i = \frac{n_i}{n}, \; (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (13.2.3)$$

называется *относительной частотой* (иначе, частостью, эмпирической вероятностью) и является статистическим аналогом вероятности попадания СВ в i-й разряд.

Таблицу, в которой указаны границы разрядов x'_{i-1}, x'_i или их средние точки x_i и соответствующие абсолютные или относительные частоты, называют *статистическим рядом* (табл. 13.2.1). Статистический ряд можно рассматривать как частный случай вариационного ряда с повторяющимися результатами наблюдений.

Таблица 13.2.1

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
987	1	995	4	1003	4	1011	1
988	—	996	3	1004	7	1012	2
989	1	997	6	1005	6	1013	1
990	1	998	6	1006	4	1014	—
991	—	999	5	1007	5	1015	—
992	2	1000	8	1008	3	1016	—
993	3	1001	10	1009	4	1017	—
994	3	1002	6	1010	3	1018	1

Замечание. Распространено правило, согласно которому все наблюдения, совпадающие с границей x'_{i-1}, следует относить к i-му разряду $\left(x'_{i-1}, x'_i\right)$. Это правило приемлемо, если округление измерений производится в меньшую сторону. Если же равновероятно округление в обе стороны, то следует наблюдения, совпадающие с границей между двумя разрядами, относить к ним в равных долях. При этом частота может оказаться дробной, что не должно смущать расчетчика.

При выборе числа разрядов и их границ полезен учет следующих рекомендаций.

1. Характерные особенности эмпирического распределения не должны, с одной стороны, исчезнуть из-за слишком малого числа разрядов, а с другой стороны — не должны быть искажены случайными колебаниями частот при слишком большом числе разрядов.

2. Желательно, чтобы разряды были равны по длине, если колебания плотности распределения (13.2.7) не очень велики.

3. Области сгущения результатов наблюдений (если они существуют) должны быть по возможности ближе к середине разрядов.

4. Возможно меньшее число наблюдений должно совпадать с границами разрядов.

Наиболее простой способ группирования состоит из следующих операций:

— размах делится на $m-1$ равных частей, длина каждой из которых равна

$$h=\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{m-1}; \qquad (13.2.4)$$

— левая и правая границы области распределения $(x_{(1)}, x_{(n)})$ раздвигаются на $\frac{h}{2}$ и принимаются соответственно

$$x_0'=x_{(1)}-\frac{h}{2}; \quad x_m'=x_{(n)}+\frac{h}{2}; \qquad (13.2.5)$$

— границы разрядов определяются равенством

$$x_{(i)}'=x_{(0)}'+ih, \quad (i=0,\ 1,\ldots,\ m). \qquad (13.2.6)$$

Замечание. Изменение границ области распределения на $\frac{h}{2}$ не обязательно и может быть в интересах удобства вычислений или по условиям опыта принято различным в пределах от 0 до $\frac{h}{2}$ (пример 13.2.1).

Рассмотренный способ группирования приемлем, если нет существенных нарушений указанных выше рекомендаций. В противном случае изменяются границы и размер разрядов. Если объем выборки велик и плотность распределения, определяемая равенством (13.2.7), резко изменяется в области распределения СВ, то может оказаться целесообразным выбор неравных разрядов, длины которых уменьшают по мере увеличения плотности.

Для наглядного представления об эмпирическом распределении и оценки качества произведенного группирования строят ступенчатый многоугольник, называемый *гистограммой* (рис. 13.2.1). На оси абсцисс откладывают границы разрядов и на каждом разряде строят прямоугольник с высотой, равной:

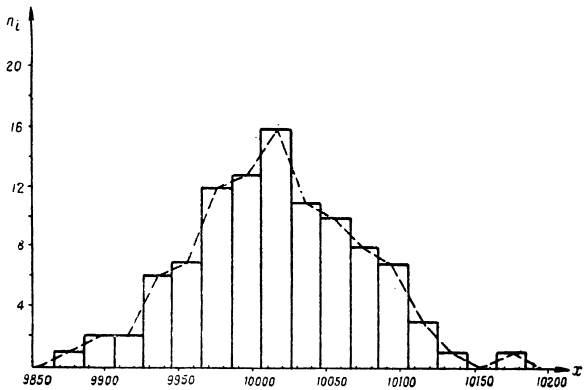

Рис. 13.2.1

— или *плотности эмпирического распределения*

$$r_i = \frac{n_i}{h_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{13.2.7}$$

где h_i — величина i-го разряда;

— или *относительной плотности*

$$p_i' = \frac{n_i}{nh_i}. \tag{13.2.8}$$

Площадь каждого прямоугольника в первом случае равна частоте n_i, во втором — относительной частоте $\bar{p}_i$. Сумма площадей всех прямоугольников равна в первом случае объему выборки n, а во втором — единице. Во втором случае гистограмма является аналогом графика плотности вероятности теоретического распределения.

Если разряды равны, то для сокращения вычислений можно строить гистограмму непосредственно по данным об абсолютной или относительной частоте (при этом площадь гистограммы будет равна nh и h соответственно).

Замечание. Если не все разряды равны, то такое построение гистограммы искажает распределение и недопустимо. В этом случае вычисление плотности или относительной плотности эмпирического распределения обязательно для построения гистограммы.

Для удобства обозрения гистограммы ее основание должно быть в $1\frac{1}{2}$ —2 раза больше высоты.

Пример 13.2.1. Для определения рассеивания снарядов по дальности произведено 100 выстрелов при расчетной дальности $x_p=1000$ *м*. Результаты стрельбы приведены в табл. 13.2.1, где x_i — дальность в *м*, n_i — число снарядов, упавших на этой дальности. Требуется построить гистограмму.

Интервал округления в статистическом ряде (табл. 13.2.1) равен 1 *м*. Поэтому было бы естественным принять $h=1$ *м*. При этом границы области эмпирического распределения будут согласно равенствам (13.2.5): $x_0' = 987-0{,}5=986{,}5$; $x_m' = 1018+0{,}5= =1018{,}5$, а число разрядов m равно 32. Для сокращения дальнейших вычислений принимаем $m=16$, не изменяя границ области эмпирического распределения. Тогда $h=\dfrac{1018{,}5-986.5}{16}=2$ *м* и границы области будут отстоять от крайних членов статистического ряда на $\frac{h}{4}$.

По формуле (13.2.6) определяем границы разрядов и, используя данные табл. 13.2.1, заполняем графы 1—4 расчетной таблицы 13.2.2. Для сокращения записи в графе 2 приводим только нижнюю границу разряда, снабжая ее, как обычно принято, горизонтальной чертой. Поскольку разряды равны, строим гистограмму непосредственно по данным о частотах (рис. 13.2.1).

Замечание. Построение гистограммы при $m=32$ нецелесообразно не только из-за увеличения объема вычислений, но и в связи со случайными колебаниями частот, которые отчетливо видны в табл. 13.2.1. В то же время дальнейшее уменьшение числа разрядов (например, до 8) загрубляет данные эксперимента и поэтому не рекомендуется.

Таблица 13.2.2.

Расчетная таблица к примерам 13.2.1 и 13.3.1

$h = 2;\ d = x_8 = 1001{,}5;\ r = 8$

Интервалы								
номер i	нижняя граница x_{i-1}	x_i	n_i	$\frac{x_i-d}{h}$	$n_i(i-r)$	$n_i(i-r)^2$	$n_i(i-r)^3$	$n_i(i-r)^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	986,5—	987,5	1	−7	−7	49	−343	2401
2	988,5—	989,5	2	−6	−12	72	−432	2592
3	990,5—	991,5	2	−5	−10	50	−250	1250
4	992,5—	993,5	6	−4	−24	96	−384	1536
5	994,5—	995,5	7	−3	−21	63	−189	567
6	996,5—	997,5	12	−2	−24	48	−96	192
7	998,5—	999,5	13	−1	−13	13	−13	13
8	1000,5—	1001,5	16	0	0	0	0	0
9	1002,5—	1003,5	11	1	11	11	11	11
10	1004,5—	1005,5	10	2	20	40	80	160
11	1006,5—	1007,5	8	3	24	72	216	648
12	1008,5—	1009,5	7	4	28	112	448	1792
13	1010,5—	1011,5	3	5	15	75	375	1875
14	1012,5—	1013,5	1	6	6	36	216	1296
15	1014,5—	1015,5	—	7	—	—	—	—
16	1016,5—	1017,5	1	8	8	64	512	4096
		$\sum$	100		1	801	151	18429

Эмпирическое распределение иногда представляют *полигоном* — ломаной линией (пунктирная линия на рис. 13.2.1), соединяющей точки с абсциссами x_i (середины разрядов) и ординатами r_i (n_i — при равных разрядах). Гистограмме обычно отдают предпочтение, в частности, потому, что площадь гистограммы, построенной для плотности r_i, всегда равна объему выборки, а площадь под полигоном этим качеством не обладает.

Замечание. Гистограмма (или полигон) может иметь не одну, а несколько вершин, наличие которых трудно объяснить случайными колебаниями. Тогда можно предположить, что статистический ряд составлен при существенно разных

условиях, т. е. из элементов разных генеральных совокупностей. В подобных случаях следует тщательно проанализировать условия наблюдения.

Статистическим аналогом функции распределения является *накопленная частость*, определяемая равенством:

— для вариационного ряда

$$\bar{F}_1(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant x_{(1)}; \\ \dfrac{i}{n} \text{ при } x_{(i)} < x \leqslant x_{(i+1)}, \\ \qquad\qquad (i=1, 2, \ldots, n-1); \\ 1 \quad \text{при } x > x_{(n)}; \end{cases} \tag{13.2.9}$$

— для статистического ряда

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} 0 \qquad\qquad \text{при } x \leqslant x_1 - \dfrac{h_1}{2}; \\ \dfrac{\bar{p}_1}{h_1}\left(x - x_1 + \dfrac{h_1}{2}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } x_1 - \dfrac{h_1}{2} < x \leqslant x_1 + \dfrac{h_1}{2}; \\ \sum\limits_{j=1}^{i-1} \bar{p}_j + \dfrac{\bar{p}_i}{h_i}\left(x - x_i + \dfrac{h_i}{2}\right) \\ \text{при } x_{i-1} + \dfrac{h_{i-1}}{2} < x \leqslant x_i + \dfrac{h_i}{2}, \\ \qquad\qquad (i = 2, \ldots, m); \\ 1 \qquad\qquad \text{при } x > x_m + \dfrac{h_m}{2}. \end{cases} \tag{13.2.10}$$

Ступенчатую кривую $\bar{F}_1(x)$ называют *полигоном накопленных частостей*, а ломаную $\bar{F}(x)$ — *кумулятивной кривой*. На рис. 13.2.2 показана кумулятивная кривая, вычисленная по данным табл. 13.2.2.

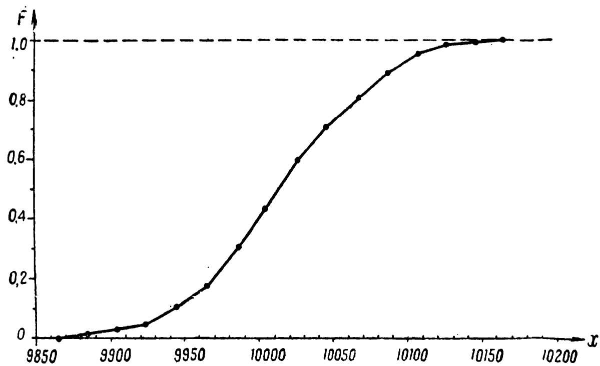

Рис. 13.2.2

Дискретные СВ

Обработка полученных в опыте значений СВ, дискретность которой невозможно или нецелесообразно учитывать вследствие большой плотности, производится так же, как для непрерывной СВ.

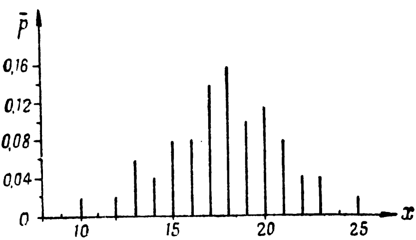

Рис. 13.2.3

Если дискретность существенна, то частоту каждого возможного значения СВ, отложенного на оси абсцисс, можно представить графически в виде отрезков прямых, параллельных оси ординат (рис. 13.2.3). Накопленная частость изображается полигоном.

Относительная частота появления случайного события A, определяемая равенством

$$\bar{p} = \frac{m}{n}, \tag{13.2.11}$$

где m — число появлений события в n опытах, является аналогом вероятности осуществления события. Вместе с m относительная частота является СВ.

§ 13.3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СВ

Определение статистических оценок производится преимущественно с помощью моментов эмпирического распределения, которые являются состоятельными оценками соответствующих моментов теоретического распределения.

Эмпирический начальный момент k-го порядка определяется равенством *

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^k. \tag{13.3.1}$$

Начальный момент нулевого порядка равен единице.

Начальный момент первого порядка обозначают $\bar{x}$ и называют обычно *«среднее»* (среднее выборочное, среднее арифметическое). Среднее

$$\bar{x} = a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \tag{13.3.2}$$

является несмещенной состоятельной оценкой МО теоретического распределения.

---

* Здесь и в последующих подобных формулах приведены два вида суммы: один для вариационного, другой для статистического ряда.

Начальный момент второго порядка называют *средним квадратом.*

Эмпирическим центральным моментом k-го порядка называется величина

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^k. \qquad (13.3.3)$$

Первый центральный момент равен нулю. Второй центральный момент обозначают часто s^2. Величина

$$s^2 = m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \qquad (13.3.4)$$

является состоятельной, но смещенной оценкой дисперсии теоретического распределения. В связи с этим (особенно при $n \leqslant 40$—50) следует применять несмещенную состоятельную оценку дисперсии

$$s_1^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2. \qquad (13.3.5)$$

В задачах математической статистики используются величины:

$$s = \sqrt{m_2}; \qquad (13.3.6)$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{n}{n-1}m_2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,s, \qquad (13.3.6')$$

которые являются состоятельными, но смещенными оценками СКО теоретического распределения. Величину s_1 иногда называют *стандартом* (стандартным отклонением). При желании получить несмещенную состоятельную оценку s_2 СКО нормального распределения следует пользоваться формулой

$$s_2 = k_n s_1 = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,s_1 \approx$$

$$\approx \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{9}{32n^2}\right) s_1, \qquad (13.3.7)$$

где Г — гамма-функция. Значения k_n для $4 \leqslant n \leqslant 9$ приведены в табл. 13.3.1. При $n \geqslant 10$ применимо приближенное выражение в правой части формулы (13.3.7).

Таблица 13.3.1

Значения коэффициента k_n

n	4	5	6	7	8	9
k_n	1,085	1,064	1,051	1,042	1,036	1,032

При достаточно большой выборке (не менее 30—40) для суждения о виде теоретического распределения привлекаются третий и четвертый центральные моменты, с помощью которых вычисляются оценки асимметрии и эксцесса (§ 3.2):

$$g_1 = \frac{m_3}{s^3}, \qquad (13.3.8)$$

$$g_2 = \frac{m_4}{s^4} - 3. \qquad (13.3.9)$$

При вычислении начальных и центральных моментов, в особенности когда результаты наблюдений группируются вокруг некоторого числа d, называемого обычно «ложным нулем», целесообразно применять выражения:

$$a_k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j M_j d^{k-j}; \tag{13.3.10}$$

$$m_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j M_j M_1^{k-j}; \tag{13.3.11}$$

где

$$M_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{(i)} - d)^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - d)^j. \tag{13.3.12}$$

В частности,

$$\bar{x} = a_1 = d + M_1, \quad a_2 = d^2 + 2M_1 d + M_2; \tag{13.3.13}$$

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= M_2 - M_1^2; \\ m_3 &= M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3; \\ m_4 &= M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4. \end{aligned}\right\} \tag{13.3.14}$$

Замечание. Величины M_j представляют собой моменты относительно начала d, которое может быть выбрано произвольно, в частности, можно положить $d = 0$. При этом величины M_j становятся начальными моментами, а формулы (13.3.14) выражают центральные моменты через начальные.

Если члены статистического ряда имеют вид $x_i = x_1 + (i-1)h$, где h — величина разряда, то в качестве «ложного нуля» следует принять тот элемент статистического ряда x_r, вблизи которого предположительно расположено среднее, и вычислять моменты по формулам:

$$a_k = h^k \sum_{j=0}^{k} C_k^j N_j \left(\frac{x_r}{h}\right)^{k-j}; \tag{13.3.15}$$

$$m_k = h^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j N_j N_1^{k-j}, \tag{13.3.16}$$

где

$$N_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i (i-r)^j. \tag{13.3.17}$$

В частности,

$$\bar{x} = x_r + N_1 h. \tag{13.3.18}$$

Пример 13.3.1. В условиях примера 13.2.1 требуется определить статистические оценки: среднее, стандарт, асимметрию и эксцесс.

Так как величины разрядов равны ($h=2$), то с целью сокращения расчетов используем формулы (13.3.16), выбрав в качестве ложного нуля $d=x_8=1001{,}5$, и заполняем графы 5—9 табл. 13.2.2. Вычислив суммы в этих графах, находим по формуле (13.3.17): $N_1=0{,}01$; $N_2=8{,}01$; $N_3=1{,}51$; $N_4=184{,}3$.

Из (13.3.18) и (13.3.16) следует:

$\bar{x} = 1001{,}5 + 0{,}01 \cdot 2 \approx 1001{,}5$ *м*;

$m_2 = 2^2 (8{,}01 - 0{,}01^2) = 32{,}04$;

$m_3 = 2^3 (1{,}51 - 3 \cdot 8{,}01 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 0.01^3) = 10{,}16$;

$m_4 = 2^4 (184{,}3 - 4 \cdot 1{,}51 \cdot 0{,}01 + 6 \cdot 8{,}01 \cdot 0{,}01^2 - 3 \cdot 0{,}01^4) = 2948$,

откуда, используя формулы (13.3.6'), (13.3.6), (13.3.8) и (13.3.9), получим $s_1 = 5{,}69$; $g_1 = 0{,}056$, $g_2 = -0{,}13$.

Заметим, что вычисление требуемых статистических оценок непосредственно по данным исходного статистического ряда (табл. 13.2.1) с помощью формул (13.3.11) и (13.3.13) привело бы к $\bar{x} = 1001{,}5$; $s_1 = 5{,}70$; $g_1 = 0{,}064$; $g_2 = -0{,}04$. Значения $\bar{x}$ и s_1 остаются практически неизменными при уменьшении числа разрядов с 32 до 16.

Вычисление моментов приводит, вообще говоря, к более точным результатам, если оно производится непосредственно по данным наблюдений. Если по тем или иным причинам результаты наблюдений округляются, то возникают погрешности, которые при некоторых предположениях о характере теоретического распределения могут быть устранены с помощью поправок Шеппарда по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}_1 = a_1; \quad \tilde{a}_2 = a_2 - \frac{1}{12} h^2; \\ &\tilde{a}_3 = a_3 - \frac{1}{4} a_1 h^2; \\ &\tilde{a}_4 = a_4 - \frac{1}{2} a_2 h^2 + \frac{7}{240} h^4; \end{aligned}\right\} \qquad (13.3.19)$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{m}_1 = m_1 = 0; \\ &\tilde{m}_2 = m_2 - \frac{1}{12} h^2; \\ &\tilde{m}_3 = m_3; \\ &\tilde{m}_4 = m_4 - \frac{1}{2} m_2 h^2 + \frac{7}{240} h^4, \end{aligned}\right\} \qquad (13.3.19')$$

где знаком $\sim$ отмечены исправленные моменты *.

Если выборка объема n состоит из m подвыборок, для каждой из которых вычислены среднее $\bar{x}_j$ и дисперсия s_j^2, то для всей выборки

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} g_j \bar{x}_j; \qquad (13.3.20)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} g_j \left(s_j^2 + \bar{x}_j^2\right) - \bar{x}^2, \qquad (13.3.21)$$

где g_j — число наблюдений в j-й подвыборке.

---

* Поправки Шеппарда применимы, например, к распределениям — нормальному, Рэлея, Максвелла и Симпсона, но не применимы к распределениям — равномерной плотности, арксинуса и экспоненциальному.

Замечание. Справедливо неравенство $s^2 \geqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} g_j s_j^2$, которое обращается в равенство только при условии, что все $\overline{x}_j$ равны между собой.

К характеристикам положения эмпирического распределения помимо среднего относятся статистические оценки *медианы* и *моды* (§ 3.2).

При нечетном числе членов вариационного ряда медиана принимается равной среднему результату $x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, а при четном — среднему арифметическому из двух средних результатов $\frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}+x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)$. Если наблюдения сгруппированы, то медиана принимается равной

$$M_e = x_k + \frac{h_k}{2} + \frac{\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{k} n_i}{n_{k+1}} h_{k+1}, \qquad (13.3.22)$$

где h_k — величина k-го разряда, а k таково, что:

— при нечетном k $\quad \sum_{i=1}^{k} n_i < \frac{n+1}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} n_i;$

— при четном k $\quad \sum_{i=1}^{k} n_i < \frac{n}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} n_i.$

Мода может быть определена только для распределения, представленного в виде статистического ряда. Если среди плотностей есть наибольшая r_i, то мода принимается равной соответствующему значению x_i. Если же несколько смежных разрядов — i-й, $i+1$-й..., $i+j$-й — имеют одинаковую плотность, превосходящую плотности остальных разрядов, то в качестве моды можно условно принять величину

$$M_0 = \frac{1}{2}\left(x_i + x_{i+j} - \frac{h_i}{2} + \frac{h_{i+j}}{2}\right). \quad (13.3.23)$$

К характеристикам эмпирического распределения относятся также статистические оценки *квантилей* и *коэффициента вариации* (§ 3.2). Оценкой квантиля служит значение СВ x_P, отвечающее накопленной частости $\overline{F_1}(x) = P$ или $\overline{F}(x) = P$ (§ 13.2). Если P задана в процентах, то x_P называют $P\%$-квантилем. Оценка коэффициента вариации v вычисляется по формуле

$$\bar{v} = \frac{s_1}{\bar{x}}. \quad (13.3.24)$$

Определение среднего для выборки из конечной генеральной совокупности, а также дисперсии для повторной выборки производится по приведенным выше формулам. Для несмещенной оценки дисперсии s^{*2} в бесповторной выборке справедлива формула

$$s^{*2} = \frac{N-1}{N} s_1^2, \quad (13.3.25)$$

где N — объем генеральной совокупности, а s_1^2 определяется равенством (13.3.5).

§ 13.4. ТОЧНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

В связи с тем что статистические оценки являются СВ, необходимо иметь представление об их близости к оцениваемым характеристикам теоретического распределения.

Если СКО генеральной совокупности σ известно, то СКО среднего равно

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (13.4.1)$$

Как правило, σ неизвестно и в качестве оценки $\sigma_{\bar{x}}$ используется приближенное равенство

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{s_1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \qquad (13.4.2)$$

Для оценки СКО эмпирической дисперсии $D_1 = s_1^2$ и СКО стандартного отклонения s_1 в общем случае служат приближенные равенства

$$\sigma_{D_1} \approx \sqrt{\frac{m_4 - m_2^2}{n}}, \qquad (13.4.3)$$

$$\sigma_{s_1} \approx \frac{\sqrt{m_4 - m_2^2}}{2s_1\sqrt{n}}. \qquad (13.4.4)$$

Для нормальной генеральной совокупности предпочтительны оценки

$$\sigma_{D_1} \approx \sqrt{\frac{2}{n}}\, s_1^2, \qquad (13.4.5)$$

$$\sigma_{s_1} \approx \frac{s_1}{\sqrt{2n}}. \qquad (13.4.6)$$

Пример 13.4.1. В условиях примера 13.3.1 требуется определить точность вычисленных оценок МО, дисперсии и СКО теоретического распределения.

Из примера 13.3.1 имеем: $s_1 = 5{,}69$; $m_4 = 2948$. Подставив эти результаты в формулы (13.4.2), (13.4.3) и (13.4.4), получим $\sigma_{\bar{x}} = 0{,}569$; $\sigma_{D_1} = 4{,}36$; $\sigma_{s_1} = 0{,}383$.

Если произвести вычисления, пользуясь данными исходного статистического ряда с 32 разрядами (табл. 13.2.1), то значения σ_{D_1} и σ_{s_1} окажутся больше примерно на 3%.

З а м е ч а н и е. Устойчивость результатов для σ_{D_1} и σ_{s_1} при разном числе разрядов в примере 13.4.1 объясняется в значительной степени сравнительно большим объемом выборки

($n = 100$). Нужно иметь в виду, что при $n < 40$—50 все оценки, основанные на применении моментов m_3 и m_4 могут быть весьма неточны.

Близость относительной частоты появления события A (формула (13.2.11) к вероятности его появления оценивается приближенным равенством

$$\sigma_{\bar{p}} \approx \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}. \qquad (13.4.7)$$

При бесповторной выборке из конечной генеральной совокупности объема N правые части формул (13.4.2) и (13.4.7) должны быть умножены на $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$.

При малых n и при p, близких к 0 или 1, погрешность равенства (13.4.7) может быть существенной.

§ 13.5. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И ИНТЕРВАЛЫ

Степень близости статистической оценки $\bar{\theta}$ к соответствующей характеристике θ теоретического распределения может быть определена более полно, чем в § 13.4, с помощью равенства

$$P\{\bar{\theta} - \theta_2 < \theta < \bar{\theta} - \theta_1\} = \gamma, \quad (\theta_2 > \theta_1), \qquad (13.5.1)$$

которое означает: вероятность того, что случайный интервал ($\bar{\theta}$—θ_2, $\bar{\theta}$—θ_1) содержит в себе достоверную, но неизвестную наблюдателю характеристику θ, равна γ.

Вероятность γ называется *доверительной вероятностью,* интервал ($\bar{\theta}$—θ_2, $\bar{\theta}$—θ_1) — *доверительным интервалом,* величины $\bar{\theta}$—θ_2 и $\bar{\theta}$—θ_1 — *доверительными границами.* Иногда говорят, что вероятность γ характеризует надежность статистической оценки $\bar{\theta}$ и наряду с термином «доверительная вероятность» применяют для γ

термин «надежность». Если θ_1 и θ_2 равны по абсолютной величине и обратны по знаку, то вместе с «надежностью» вводят «точность» ε статистической оценки

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) = \theta_2 = |\theta_1|. \qquad (13.5.2)$$

Замечание. Близость доверительной вероятности к единице не гарантирует (в вероятностном смысле) близости оценки $\overline{\theta}$ к характеристике θ, если данному значению γ соответствует широкий доверительный интервал. Узкий доверительный интервал тоже не характеризует сам по себе качества оценки $\overline{\theta}$, если ему соответствует невысокая доверительная вероятность. Таким образом, доверительную вероятность (надежность) γ и доверительный интервал (точность ε) нужно всегда рассматривать в совокупности.

С помощью равенств вида (13.5.1) можно решать следующие задачи после производства наблюдений.

1. Найти доверительный интервал при заданной доверительной вероятности (пример 13.5.3).

2. Найти доверительную вероятность при заданном доверительном интервале (пример 13.5.1).

3. Установить, в какой степени результаты опыта согласуются с предполагаемым значением оцениваемой характеристики (пример 13.5.2).

Первая задача решается неоднозначно и должна быть дополнена условием для доверительных границ. Чаще всего задачу конкретизируют в виде

$$\boldsymbol{P}\{\theta > \overline{\theta} - \theta_1\} = \boldsymbol{P}\{\theta < \overline{\theta} - \theta_2\} = \frac{1-\gamma}{2} \qquad (13.5.3)$$

или (в особенности при симметричном распределении статистической оценки)

$$\boldsymbol{P}\{\overline{\theta} - \varepsilon < \theta < \overline{\theta} + \varepsilon\} = \gamma. \qquad (13.5.4)$$

Замечание. Равенство (13.5.3) означает, что равны доверительные вероятности для частей доверительного интервала, лежащих справа и слева от $\overline{\theta}$. Равенство (13.5.4) означает, что $\overline{\theta}$ находится посредине доверительного интервала. При симметричном распределении оценки $\overline{\theta}$ эти равенства равносильны.

В некоторых случаях (особенно при оценке положительных характеристик) представляет ннтерес доверительный интервал $(0,\ \theta^*)$, которому отвечает равенство

$$P\{0<\theta<\theta^*\}=\gamma. \tag{13.5.5}$$

По данным, полученным после небольшого числа наблюдений, можно с помощью равенств вида (13.5.1) приближенно определить число наблюдений, необходимое для достижения заданной точности оценки (пример 13.5.4).

Если СВ X удовлетворяет условиям центральной предельной теоремы (§ 3.3), что обычно имеет место в практических задачах, то независимо от закона распределения СВ X степень близости основных статистических оценок — среднего, эмпирической дисперсии и стандарта — к МО, дисперсии и СКО соответственно может быть установлена при $n>30$—40 с помощью приближенных формул вида:

$$P\left\{\alpha\frac{s_1}{\sqrt{n}}<\hat{x}-\bar{x}<\beta\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi_0(\beta)-\Phi_0(\alpha); \tag{13.5.6}$$

$$P\left\{\alpha\sqrt{\frac{m_4-m_2^2}{n}}<\sigma^2-s_1^2<\beta\sqrt{\frac{m_4-m_2^2}{n}}\right\}\approx$$
$$\approx\Phi_0(\beta)-\Phi_0(\alpha); \tag{13.5.7}$$

$$P\left\{\alpha\frac{\sqrt{m_4-m_2^2}}{2s_1\sqrt{n}}<\sigma-s_1<\beta\frac{\sqrt{m_4-m_2^2}}{2s_1\sqrt{n}}\right\}\approx$$
$$\approx\Phi_0(\beta)-\Phi_0(\alpha), \tag{13.5.8}$$

где $\Phi_0(x)$ — функция, значения которой приведены в табл. III. В частности, при $\beta=-\alpha$ и $\varepsilon=\frac{\beta s_1}{\sqrt{n}}$

$$P\{|\hat{x}-\bar{x}|<\varepsilon\}\approx 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{s_1}\right); \tag{13.5.6$'$}$$

аналогично

$$P\left\{\left|\sigma^2 - s_1^2\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{m_4 - m_2^2}}\right); \qquad (13.5.7')$$

$$P\left\{|\sigma - s_1| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi_0\left(\varepsilon\,\frac{2s_1\sqrt{n}}{\sqrt{m_4 - m_2^2}}\right). \qquad (13.5.8')$$

Замечание. Выражения (13.5.6) — (13.5.8′) не следует применять (в особенности при $n < 30$) к СВ X, подчиняющихся нормальному распределению, для которого ниже приведены точные формулы.

Точность выражений (13.5.7) — (13.5.8′) повышается, если известен вид теоретического распределения СВ X и существует зависимость $\mu_4 = f(\mu_2, \bar{x})$. Например, при законе равномерной плотности, для которого $\mu_4 = 1{,}8\mu_2^2$, величина $m_4 - m_2^2$ заменяется на $0{,}8\,m_2^2$.

Пример 13.5.1. В условиях примера 13.2.1 найти доверительную вероятность того, что доверительный интервал $(1000, +\infty)$ содержит в себе МО теоретического распределения.

Из примера 13.3.1 имеем: $n=100$; $\bar{x}=1001{,}5$; $s_1=5{,}69$. Неравенство в формуле (13.5.6) представим в виде $1001{,}5 + \alpha\frac{5{,}69}{\sqrt{100}} < \hat{x} < 1001{,}5 + \beta\frac{5{,}69}{\sqrt{100}}$.

Сопоставив это неравенство с границами доверительного интервала, получим:
$1001{,}5 + 0{,}569\alpha = 1000$; $1001{,}5 + 0{,}569\beta = +\infty$, откуда $\alpha = -2{,}64$, $\beta = +\infty$. Тогда как следует из (13.5.6), $\gamma = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(-2{,}64)$. Используя формулу (5.1.21) и табл. III, получим

$$\gamma = 0{,}5000 + 0{,}4959 \approx 0{,}996.$$

Пример 13.5.2. В условиях примера 13.2.1 требуется выяснить, можно ли считать разницу между $\bar{x}=1001{,}5$ *м* и расчетной дальностью $x_0=1000$ *м* случайной.

Поскольку $x_0 < \bar{x}$, то степень случайности расхождения между $\bar{x}$ и x_0 может быть оценена вероятностью того, что МО $\hat{x}$ содержится в доверительном интервале $(0,\ x_p)$. Представим ее в виде

$$\gamma = P\left\{-\bar{x} < \hat{x} - \bar{x} < x_p - \bar{x}\right\}. \qquad (*)$$

Из примера 13.3.1 имеем: $n=100$, $s_1=5{,}69$. Сопоставив выражения (*) и (13.5.6), получим:

$$\alpha = -\bar{x}\frac{\sqrt{n}}{s_1} = -1760;\quad \beta = \left(x_p - \bar{x}\right)\frac{\sqrt{n}}{s_1} = -2{,}64.$$

Пользуясь табл. III и равенством (5.1.21), находим из (13.5.6) $\gamma = \Phi_0(-2{,}64) - \Phi_0(-1760) = -0{,}4959 - (-0{,}5000) \approx 0{,}004$.

Таким образом, вероятность случайного расхождения расчетной и средней дальностей ничтожно мала и следует предполагать наличие систематической ошибки стрельбы. Причиной ее появления могут быть неточная выверка прицела, неточный учет метеорологических условий или другие факторы, влияющие на точность стрельбы.

Доверительные вероятности и интервалы при нормальном распределении СВ

Пусть наблюдаемая СВ подчиняется нормальному распределению с известным СКО σ. Тогда равенства (13.5.1) и (13.5.4) для оценки МО принимают вид:

$$\gamma = P\left\{\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \hat{x} - \bar{x} < \beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \Phi_0(\beta) - \Phi_0(\alpha), \tag{13.5.9}$$

$$\gamma = P\left\{\left|\hat{x} - \bar{x}\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right). \tag{13.5.9'}$$

При неизвестном СКО теоретического распределения доверительная вероятность определяется формулой

$$\gamma = P\left\{\alpha\frac{s_1}{\sqrt{n}} < \hat{x} - \bar{x} < \beta\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right\} = S_{n-1}(\beta) - S_{n-1}(\alpha), \tag{13.5.10}$$

где $S_k(t)$ — функция распределения Стьюдента с k степенями свободы (§ 5.12).

Обычно рассматриваются симметричные доверительные интервалы ($\alpha=-\beta$). Для них

$$\gamma = P\left\{\left|\hat{x} - \bar{x}\right| < \beta\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right\} = 2S_{n-1}(\beta) - 1 \tag{13.5.10'}$$

или

$$\gamma = P\{|\hat{x} - \bar{x}| < \varepsilon\} = 2S_{n-1}\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{s_1}\right) - 1, \tag{13.5.10''}$$

причем подразумевается, что $\varepsilon = \frac{\beta s_1}{\sqrt{n}}$.

Для вычислений по формулам (13.5.10)—(13.5.10″) используется табл. XIII. Табл. XIIIа облегчает определение границ симметричного доверительного интервала.

При $n>30$ вместо (13.5.10) и (13.5.10′) можно пользоваться для вычислений приближенными выражениями (13.5.6) и (13.5.6′).

Замечание. Разница между равенствами (13.5.6) и (13.5.9) состоит в том, что последнее точное и применимо только к нормальному распределению при известном СКО σ и любом n, а первое — приближенное и применимо к любому распределению при неизвестном σ и достаточно больших n, если выполняются условия центральной предельной теоремы.

Пример 13.5.3. В результате 16 наблюдений над нормально распределенной СВ получены оценки $\bar{x}=1$, $s_1=2$. Требуется найти симметричный доверительный интервал для МО генеральной совокупности, если доверительная вероятность выбрана равной 0,95.

Симметричность искомого доверительного интервала позволяет использовать табл. XIIIа. В строке $k=n-1=15$ для $\gamma = 0{,}95$ находим $\beta_\gamma = 2{,}132$. Тогда $\varepsilon = \frac{2{,}132\cdot 2}{\sqrt{16}} \approx 1{,}07$ и границы доверительного интервала будут: $\bar{x}-\varepsilon = -0{,}07$; $\bar{x}+\varepsilon = 2{,}07$.

Если бы мы приняли s_1 в качестве истинного значения теоретического распределения и воспользовались формулой (13.5.9′), то получили бы $\varepsilon = 0{,}98$. Больший доверительный интервал при использовании распределения Стьюдента объясняется тем, что оно учитывает неточность оценки s_1.

Пример 13.5.4. Требуется найти число наблюдений n, необходимое для того, чтобы среднее $\bar{x}$ нормально распределенной СВ отличалось бы от МО $\hat{x}$ не более чем на $\varepsilon = 0{,}05\bar{x}$ с вероятностью $\gamma = 0{,}95$. Заведомо известно, что $\bar{x} \neq 0$.

Чтобы определить порядок величин $\bar{x}$ и s_1, проведено несколько наблюдений. Пусть после 10 наблюдений получено $\bar{x}=10$ и $s_1=1$. Подставив эти значения в равенство (13.5.10″), получим уравнение относительно n: $S_{n-1}(0{,}5\sqrt{n}) = 0{,}975$. Решение этого уравнения с помощью табл. XIII приводит к $n=18$.

Нужно отдавать себе отчет в приближенности результата, так как $\bar{x}$ и s_1 — случайные величины, и после 18 наблюдений (достаточно добавить 8 к прежним 10) их значения не будут совпадать с предварительно полученными. Поэтому после 18 наблюдений доверительная вероятность и доверительный интервал могут оказаться лучше или хуже ожидаемых. Тем не менее полученный результат дает представление о порядке необходимого числа наблюдений.

Примерное число наблюдений может быть определено также по предварительно известным ориентировочным значениям $\bar{x}$ и s_1.

Близость оценки s^2 к теоретической дисперсии σ^2 устанавливают с помощью распределения χ^2 (§ 5.11), используя равенство

$$\gamma = P\left\{\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}\right\}. \qquad (13.5.11)$$

Если задана доверительная вероятность γ, то доверительный интервал определяется обычно следующим образом. По табл. XII при $k=n-1$ находят значения χ_1^2 и χ_2^2 из видоизмененных условий (13.5.3):

$$F_k\left(\chi_1^2\right) = \frac{1-\gamma}{2}; \quad F_k\left(\chi_2^2\right) = \frac{1+\gamma}{2}, \qquad (13.5.12)$$

и определяют границы доверительного интервала

$$\sigma_1^2 = \frac{ns^2}{\chi_1^2}, \quad \sigma_2^2 = \frac{ns^2}{\chi_2^2}. \qquad (13.5.13)$$

Для γ, равных 0,99; 0,95 и 0,90, значения χ_1^2 и χ_2^2 можно определить непосредственно по табл. XII а.

Если же заданы границы σ_1^2 и σ_2^2, то из равенств (13.5.13) находят χ_1^2 и χ_2^2. Затем по табл. XII при $k=n-1$ находят $F_k\left(\chi_1^2\right)$ и $F_k\left(\chi_2^2\right)$ и определяют

$$\gamma = F_k\left(\chi_2^2\right) - F_k\left(\chi_1^2\right). \qquad (13.5.14)$$

Наряду с двусторонними доверительными границами σ_1^2, σ_2^2 исследователя может интересовать односторонняя граница σ_1^2, которой соответствует неравенство $0 < \sigma^2 < \sigma_1^2$. В этом случае $\chi_2^2 = \infty$.

Пример 13.5.5. В условиях примера 13.2.1 найти доверительный интервал для СКО нормальной генеральной совокупности, если доверительная вероятность γ равна 0,95, а границы доверительного интервала определяются формулами (13.5.12).

Из примеров 13.2.1 и 13.3.1 имеем $n=100$, $m_2 = s^2 = 32{,}04$. Число степеней свободы $k=n-1=99$. По формулам (13.5.12) находим $F_{99}\left(\chi_1^2\right)=0{,}025$, $F_{99}\left(\chi_2^2\right)=0{,}975$.

Поскольку $k>30$, пользуемся формулой (5.11.9), из которой для определения χ_1^2 и χ_2^2 имеем:

$$0{,}025 = 0{,}5 + \Phi_0\left(\sqrt{2\chi_1^2} - \sqrt{197}\right);$$
$$0{,}975 = 0{,}5 + \Phi_0\left(\sqrt{2\chi_2^2} - \sqrt{197}\right),$$

откуда, воспользовавшись равенством (5.1.21), получим

$$\Phi_0\left(14{,}04 - \sqrt{2\chi_1^2}\right) = 0{,}475; \quad \Phi_0\left(\sqrt{2\chi_2^2} - 14{,}04\right) = 0{,}475.$$

По табл. III находим: $14{,}04 - \sqrt{2\chi_1^2} = \sqrt{2\chi_2^2} - 14{,}04 = 1{,}96$ и, следовательно, $\chi_1^2 = 73{,}0$; $\chi_2^2 = 128{,}0$.

Из формул (13.5.13) следует $\sigma_1^2 = 43{,}9$; $\sigma_2^2 = 25{,}0$, откуда $\sigma_1 = 6{,}63$, $\sigma_2 = 5{,}00$ и длина доверительного интервала равна $6{,}63 - 5{,}00 = 1{,}63$. Он несимметричен относительно $s_1 = 5{,}69$.

Следует отметить, что, допуская замену распределения χ^2 нормальным и определив границы доверительного интервала по формуле вида (13.5.8¹)

$$P\left\{-\beta\sigma_{s_1} < \sigma - s_1 < \beta\sigma_{s_1}\right\} \approx 2\Phi_0(\beta) = 0{,}95,$$

где σ_{s_1} — определяется по формуле (13.4.6), мы получили бы $\sigma_1 = 6{,}494$, $\sigma_2 = 4{,}906$. Длина интервала, равная 1,59, несколько меньше длины 1,63, определенной более точным методом, а положение интервала заметно смещено. При малых n применение нормального распределения вместо χ^2 привело бы к значительным погрешностям.

Глава 14

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 14.1. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Определение закона распределения СВ на основе статистических данных состоит в том, что исследователь выдвигает на основе своего опыта и имеющейся информации определенную гипотезу о теоретическом распределении и вычисляет вероятность, характеризующую ее приемлемость. Если эта вероятность превосходит некоторую величину, называемую *уровнем значимости,* то считают, что гипотеза не противоречит опытным данным и она может быть принята. Если же вероятность мала, то гипотеза отвергается и исследователь должен либо выдвинуть другую гипотезу, либо пополнить статистический материал, либо сделать и то и другое.

При определении закона распределения возможны ошибки: 1-го рода — отказ от верной гипотезы, 2-го рода — принятие неверной гипотезы.

Степень соответствия между выдвинутой гипотезой и статистическим материалом устанавливается с помощью *критериев согласия.*

Наиболее распространен критерий согласия χ^2. Для возможности его использования исходный статистический (или вариационный) ряд должен быть преобразован так, чтобы в каждом из разрядов было не менее 5 элементов. Размеры разрядов могут быть различными. Желательно, чтобы число разрядов было равно 8—12.

Замечание. Требование о числе элементов в разряде не является обязательным, но его выполнение уменьшает возможные ошибки 1-го рода. Рекомендация о доведении числа разрядов примерно до 8—12 преследует (при выполнении указанного выше требования) прежде всего сокращение вычислений.

Исходными данными для применения критерия χ^2 являются: число наблюдений n, число разрядов преобразованного статистического ряда m, частоты n_i, границы разрядов x'_{i-1}, x'_i и несколько первых моментов (вычисленных до преобразования ряда), число которых равно числу параметров теоретического распределения.

Вычисления по критерию χ^2 производятся следующим образом.

Выдвинув гипотезу о распределении, исследователь тем самым устанавливает, от каких параметров $r_1, r_2 \ldots$ оно зависит (для нормального распределения, например, это центр рассеивания x_0 и СКО σ). Если значения всех или части параметров неизвестны, то они заменяются оценками, которые обычно определяются по формулам, связывающим их с эмпирическими моментами. Для нормального распределения, например, используются моменты a_1 и m_2 (§ 13.3) и формулы для параметров имеют вид

$$x_0 \approx \bar{x} = a_1, \quad \sigma \approx s_1 = \sqrt{\frac{n}{n-1}\, m_2}. \qquad (14.1.1)$$

После определения оценок параметров теоретической функции распределения F вычисляются вероятности p_i попадания в каждый из разрядов $\left(x'_{i-1}, x'_i\right)$:

$$p_i = F\left(x'_i;\ r_1, r_2, \ldots\right) - F\left(x'_{i-1};\ r_1, r_2, \ldots\right), \qquad (14.1.2)$$

и величина

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{p_i} - n, \qquad (14.1.3)$$

которая представляет собой значение СВ χ^2 (§ 5.11), соответствующее данной выборке и выдвинутой гипотезе. Случайность величины χ^2 обусловлена случайностью частот n_i.

Затем определяется число степеней свободы распределения χ^2 по формуле

$$k = m - 1 - l, \tag{14.1.4}$$

где l — число неизвестных параметров теоретического распределения, определяемых по данным выборки. Далее с помощью табл. XII вычисляется

$$P\left\{\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right\} = 1 - F_k\left(\chi_q^2\right) \tag{14.1.5}$$

P — вероятность того, что при принятой гипотезе СВ χ^2 превзойдет значение, полученное по формуле (14.1.3). Если вероятность P меньше принятого уровня значимости P_δ, то гипотезу отвергают как неправдоподобную. Значение P_δ не может быть определено из каких-либо соображений математической статистики. Оно выбирается исследователем обычно в пределах 0,01—0,10.

Критерий согласия позволяет делать уверенные выводы при достаточно большом числе измерений. При $n<50$ критерий может привести к сомнительным результатам.

Если вид распределения известен заранее, а его параметры оценены по данным выборки (§ 13.3), то с помощью критерия χ^2 по формулам (14.1.2) — (14.1.5) проверяется, насколько выборка согласуется с теоретическим распределением.

Пример 14.1.1. В условиях примера 13.2.1 требуется определить, насколько оправдана гипотеза о нормальности теоретического распределения, которая подсказывается внешним видом гистограммы (рис. 13.2.1).

Исходя из требований к числу элементов в каждом разряде, объединяем разряды в начале и конце табл. 13.2.2 и доводим их число до $m=11$ (табл. 14.1.1). Из примеров 13.2.1 и 13.3.1 имеем: $n=100$; $\bar{x}=1001{,}5$; $s_1=5{,}69$.

В соответствии с гипотезой и формулой (5.1.24) выражение (14.1.2) приобретает вид

$$p_i = \Phi_0\left(\frac{x_i' - x_0}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_{i-1}' - x_0}{\sigma}\right).$$

Границы разрядов x_{i-1}', x_i' приведены в табл. 14.1.1.

Согласно формулам (14.1.1) $x_0 \approx 1001{,}5$; $\sigma \approx 5{,}69$. Вычисленные с помощью табл. III вероятности p_i приведены в графе 7 табл. 14.1.1. Вычисляя χ_q^2 по формуле (14.1.3), получаем $\chi_q^2 = 1{,}82$.

Так как нормальное распределение содержит два неизвестных параметра x_0 и σ, то согласно формуле (14.1.4) $k = 11 - 1 - 2 = 8$ и из табл. XII получаем F_8 (1,82) $\approx 0{,}015$, откуда $P\left\{\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right\} \approx 0{,}985$. **Вероятность P близка к единице, и гипотезу нужно считать согласующейся с опытом.**

Таблица 14.1.1

$x_0 \approx \overline{x} = 1001{,}5$; $\sigma \approx s_1 = 5{,}69$

Разряды			n_i	$x_i' - x_0$	$\Phi_0\left(\frac{x_i'-x_0}{\sigma}\right)$	p_i	$\frac{n_i^2}{p_i}$
номер i	границы x_{i-1}'	x_i'					
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-\infty$	992,5	5	−9	−0,4432	0,0568	440
2	992,5	994,5	6	−7	−0,3907	0,0525	686
3	994,5	996,5	7	−5	−0,3102	0,0805	609
4	996,5	998,5	12	−3	−0,2010	0,1092	1319
5	998,5	1000,5	13	−1	−0,0698	0,1312	1288
6	1000,5	1002,5	16	1	0,0698	0,1396	1834
7	1002,5	1004,5	11	3	0,2010	0,1312	922
8	1004,5	1006,5	10	5	0,3102	0,1092	916
9	1006,5	1008,5	8	7	0,3907	0,0805	795
10	1008,5	1010,5	7	9	0,4432	0,0525	933
11	1010,5	$+\infty$	5	$+\infty$	0,5000	0,0568	440
		Σ	100			1,0000	10182

$$\chi_q^2 = \frac{10182}{100} - 100 = 1{,}82$$

Замечание. Произведя вычисления для исходного статистического ряда (табл. 13.2.1), в котором 23 разряда из 32 содержат менее 5 элементов, получим $\chi^2_q = 18{,}9$ и $\boldsymbol{P}\left\{\chi^2 \geqslant \chi^2_q\right\} = 0{,}924$. Перейдя к укрупненному ряду (табл. 13.2.2), в котором 7 разрядов из 16 содержат менее 5 элементов, получим $\chi^2_q = 5{,}2$ и $\boldsymbol{P}\left\{\chi^2 \geqslant \chi^2_q\right\} = 0{,}970$.

Таким образом, в рассматриваемом примере гипотеза о нормальности теоретического распределения не теряет убедительности, несмотря на грубое нарушение требований о числе элементов в разряде. Нужно иметь в виду, что этот результат является следствием особенностей статистического материала и большого объема выборки. При малом n наличие разрядов с малым числом элементов может стать решающим для появления ошибок 1-го рода.

Если проверяется соответствие выборки распределению, которое полностью известно (и вид распределения, и его параметры), то применим критерий согласия А. Н. Колмогорова, основанный на рассмотрении СВ

$$D = \max \left| \overline{F}_1(x) - F(x) \right|, \tag{14.1.6}$$

где $F(x)$ — теоретическая, а $\overline{F}_1(x)$ — эмпирическая функция распределения, определяемая равенством (13.2.9). При использовании критерия А. Н. Колмогорова нельзя преобразовывать полученный в выборке вариационный ряд.

Вычисления по критерию А. Н. Колмогорова производятся следующим образом. Для каждого значения СВ X, полученного в выборке, вычисляются значения $\overline{F}_1(x)$, $F(x)$ и их разности. Отыскивается D_1 — наибольшая по модулю разность и вычисляется величина $\lambda = D_1 \sqrt{n}$.

Соответствие между $\overline{F}_1(x)$ и $F(x)$ оценивается вероятностью

$$\boldsymbol{P}\left\{D\sqrt{n} > \lambda\right\} \approx P(\lambda) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2\lambda^2}, \tag{14.1.7}$$

значения которой приведены в табл. XIV. Если значение $P(\lambda)$ меньше принятого уровня значимости P_δ, то гипотеза отвергается. Уровень значимости назначается исследователем в пределах 0,01—0,10.

Замечание. Близость значений вероятностей (14.1.5) и (14.1.7) к единице формально означает очень хорошее согласование гипотезы со статистическим материалом. Но вероятность подобной близости мала (если объем выборки не очень велик) и, она часто объясняется неоправданным сглаживанием результатов наблюдений и необоснованным исключением оторвавшихся измерений. Поэтому в подобных случаях расчетчик должен тщательно проверить доброкачественность обрабатываемого статистического материала и устранить возможные искажения.

§ 14.2. ИСКЛЮЧЕНИЕ ГРУБЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

При производстве измерений случается, что один из результатов (реже два и более) резко отличается от других. Причиной этого может быть нарушение условий опыта, которое прошло мимо внимания наблюдателя. С другой стороны, возможно, что оторвавшееся измерение является элементом данной генеральной совокупности, вероятность появления которого весьма мала.

В обоих случаях «подозрительный» результат независимо от его происхождения может существенно исказить статистическую оценку МО и в еще большей степени оценку СКО. С другой стороны, оценки искажаются при необоснованном исключении «подозрительных» отклонений. В связи с этим возникает необходимость решения задачи — считать ли данное оторвавшееся измерение принадлежащим данной генеральной совокупности или анормальным, подлежащим исключению из выборки.

Применительно к нормальному распределению представляют практический интерес две задачи по оцениванию резко выделяющихся измерений:

— при известном СКО σ и неизвестном МО $\hat{x}$,

— при неизвестных σ и $\hat{x}$.

Обе задачи могут быть поставлены, если принадлежность выборки нормальной генеральной совокупности достоверна или не опровергается критерием согласия (§ 14.1).

Первая задача возникает, например, при измерениях с помощью отрегулированного прибора. Примером может служить измерение дальности радиолокационной станцией, рассеивание ошибок которой известно. Вторая задача может возникнуть при испытаниях новой техники или при определении характеристик рассеивания в новых условиях.

Пусть при известном σ вызывает сомнение $x_{(n)}$ — наибольшее из n измерений. Для решения вопроса о его анормальности используется приближенное равенство для вероятности p того, что случайное значение наибольшего измерения $X_{(n)}$ превосходит $x_{(n)}$:

$$p = P\{X_{(n)} > x_{(n)}\} \approx n\left[0{,}5 - \Phi_0\left(\beta\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right], \quad (14.2.1)$$

где

$$\beta = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{\sigma}, \quad (14.2.2)$$

а $\Phi_0(t)$ — функция, значения которой приведены в табл. III.

Если вероятность p ниже принятого уровня значимости p_δ, то измерение $x_{(n)}$ исключается из рассмотрения. В качестве уровня значимости можно принять величину порядка 0,05 и даже меньше, если исследователь найдет это целесообразным.

При оценке оторвавшегося $x_{(1)}$ — наименьшего из измерений, в равенстве (14.2.1) принимается $\beta = \dfrac{\bar{x} - x_{(1)}}{\sigma}$.

Замечание. Погрешность равенства (14.2.1) становится существенной, если она приводит к $p > 0{,}2$. Но точное значение p будет при этом тоже порядка 0,2 или больше. Поэтому, получив $p > 0{,}2$ из (14.2.1), можно утверждать, не зная точного значения p, что оно значительно превосходит рационально выбранный уровень значимости p_δ.

При использовании равенства (14.2.1) величина $\Phi_0\left(\beta\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)$ будет, как правило, близка к 0,5, что может привести к значительной погрешности при использовании табл. III. Для более точного определения значения Φ_0 рекомендуется при $\beta\sqrt{\frac{n}{n-1}} > 3$ пользоваться формулой (16.3.3).

Если наибольшее измерение $x_{(n)}$ вызывает сомнение при неизвестных $\hat{x}$ и σ, то для проверки его анормальности используется равенство

$$p = P\{X_{(n)} > x_{(n)}\} = P\left\{\frac{X_{(n)} - \bar{x}}{s_1} > \beta\right\}, \qquad (14.2.3)$$

где

$$\beta = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{s_1}. \qquad (14.2.4)$$

В табл. XV приведены значения β_p, удовлетворяющие уравнению (14.2.3), для трех уровней значимости p_δ и $n \leqslant 25$. Если $\beta > \beta_p$, то измерение исключается. При $n > 25$ используют равенство (14.2.1), заменив σ на s_1.

Табл. XV применима и при оценке оторвавшегося наименьшего измерения $x_{(1)}$, если положить $\beta = \frac{\bar{x} - x_{(1)}}{s_1}$.

Пример 14.2.1. Определить, является ли крайнее значение $x=1018$ в статистическом ряду (табл. 13.2.1) анормальным, если уровень значимости $p_\delta = 0{,}05$.

Из примеров 13.2.1 и 13.3.1 для исходного статистического ряда имеем: $n=100$; $\bar{x}=1001{,}5$; $s_1=5{,}70$.

Из формулы (14.2.4) следует $\beta = \frac{1018 - 1001{,}5}{5{,}7} = 2{,}89$.

Поскольку $n > 25$, применяем равенство (14.2.1) и находим с помощью табл. III: $p = 100\left[0{,}5 - \Phi_0\left(2{,}89\sqrt{\frac{100}{99}}\right)\right] = 0{,}18$.

Таким образом, $p > 0{,}05$ и нет оснований для исключения из выборки крайнего значения $x=1018$.

§ 14.3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Объекты некоторых генеральных совокупностей обладают несколькими подлежащими измерению признаками. Ограничимся двумя признаками X и Y, которые в совокупности можно рассматривать как двумерную СВ или двумерный случайный вектор $R(X, Y)$ или систему двух СВ. Статистические оценки характеристик двумерной генеральной совокупности (в предположении, что теоретическое распределение неизвестно) вычисляются по приводимым ниже формулам с учетом правил и рекомендаций § 13.2 и 13.3.

Пусть в результате наблюдений над двумерной СВ получено n пар значений X и Y. Полученную выборку сводят в корреляционную таблицу (табл. 14.3.2), выбрав предварительно размеры и положение разрядов $\left(x'_{i-1}, x'_i\right)$, $\left(y'_{j-1}, y'_j\right)$, на которые делят область эмпирического распределения каждого признака. Число разрядов для каждого признака следует брать не более 10, так как при увеличении числа разрядов точность оценок изменяется несущественно, а объем вычислений быстро растет.

В каждую клетку корреляционной таблицы заносится частота n_{ij} — число пар измерений, удовлетворяющих условиям $x'_{i-1} < x < x'_i$, $y'_{j-1} < y < y'_j$. Этим измерениям приписываются значения:

$$x_i = \frac{1}{2}\left(x'_{i-1} + x'_i\right), \quad y_j = \frac{1}{2}\left(y'_{j-1} + y'_j\right). \qquad (14.3.1)$$

В нижнюю строку заносятся частоты n_{xi}, а в крайний правый столбец — частоты n_{yj}, определяемые равенством:

$$n_{xi} = \sum_{j=1}^{m_y} n_{ij}, \quad n_{yj} = \sum_{i=1}^{m_x} n_{ij}, \qquad (14.3.2)$$

$$(i = 1, \ldots, m_x) \quad (j = 1, \ldots, m_y),$$

где m_x — число разрядов для признака x;
m_y — число разрядов для признака y.

По данным корреляционной таблицы могут быть определены следующие статистические оценки:

— *условные выборочные средние*

$$\bar{y}(x_i) = \frac{1}{n_{xi}} \sum_{j=1}^{m_y} n_{ij} y_j, \quad (i = 1, \ldots, m_x); \qquad (14.3.3)$$

$$\bar{x}(y_j) = \frac{1}{n_{yj}} \sum_{i=1}^{m_x} n_{ij} x_i, \quad (j = 1, \ldots, m_y); \qquad (14.3.4)$$

— *условные эмпирические дисперсии*

$$s_{1y}^2(x_i) = \frac{1}{n_{xi}-1}\sum_{j=1}^{m_y} n_{ij}\,[y_j - \bar{y}(x_i)]^2; \qquad (14.3.5)$$

$$s_{1x}^2(y_j) = \frac{1}{n_{yj}-1}\sum_{i=1}^{m_x} n_{ij}\,[x_i - \bar{x}(y_j)]^2; \qquad (14.3.6)$$

— *выборочные средние*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m_x} n_{xi}x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m_y} n_{yj}\bar{x}(y_j); \qquad (14.3.7)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m_y} n_{yj}y_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m_x} n_{xi}\bar{y}(x_i); \qquad (14.3.8)$$

— *эмпирические дисперсии*

$$s_{1x}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m_x} n_{xi}\,(x_i - \bar{x})^2; \qquad (14.3.9)$$

$$s_{1y}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{m_y} n_{yj}\,(y_j - \bar{y})^2; \qquad (14.3.10)$$

— *эмпирический коэффициент корреляции*

$$\bar{r} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m_x}\sum\limits_{j=1}^{m_y} n_{ij}x_iy_j - n\bar{x}\bar{y}}{(n-1)\,s_{1x}s_{1y}}; \qquad (14.3.11)$$

— *эмпирические корреляционные отношения:*

$$\left.\begin{aligned}\bar{\eta}_{yx} &= \frac{1}{s_{1y}}\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m_x} n_{xi}\,[\bar{y}(x_i)-\bar{y}]^2}{n-1}}\,;\\ \bar{\eta}_{xy} &= \frac{1}{s_{1x}}\sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{m_y} n_{yj}\,[\bar{x}(y_j)-\bar{x}]^2}{n-1}}\,.\end{aligned}\right\} \quad (14.3.12)$$

Для упрощения вычислений эмпирических характеристик двумерного распределения полезны линейные преобразования, приводящие к формулам вида (13.3.10) и (13.3.15), в особенности при вычислении коэффициента корреляции и корреляционных отношений, так как эти характеристики инвариантны по отношению к линейному преобразованию СВ (пример 14.3.1).

Если генеральная совокупность подчиняется хотя бы приближенно двумерному нормальному распределению и число испытаний не менее 30—40, то СКО эмпирического коэффициента корреляции определяется приближенной формулой

$$\sigma_i \approx \frac{1-\bar{r}^2}{\sqrt{n}}. \quad (14.3.13)$$

При $n>70$—80 величина $\bar{r}$ приближенно подчиняется нормальному распределению, что позволяет оценивать коэффициент корреляции с помощью доверительной вероятности

$$\gamma = P\left\{\bar{r}-\beta\frac{1-\bar{r}^2}{\sqrt{n}} < r < \bar{r}+\beta\frac{1-\bar{r}^2}{\sqrt{n}}\right\} \approx$$

$$\approx 2\Phi_0(\beta). \quad (14.3.14)$$

При небольшом объеме выборки применяется равенство

$$\gamma = P\left\{\bar{z} - \frac{\beta}{\sqrt{n-3}} < z < \bar{z} + \frac{\beta}{\sqrt{n-3}}\right\} \approx$$

$$\approx 2\Phi_0(\beta), \qquad (14.3.15)$$

где

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}, \quad \bar{z} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\bar{r}}{1-\bar{r}}. \qquad (14.3.16)$$

Значения z в зависимости от r приведены в табл. XVI.

Пример 14.3.1. В результате обработки $n=200$ независимых испытаний получена корреляционная таблица для предела текучести u ($кг/мм^2$) и предела прочности v стали (табл. 14.3.1). Случайные колебания значений этих величин и ошибки их измерения подчиняются нормальному закону. Требуется определить коэффициент корреляции между u и v, корреляционные отношения v на u и u на v и доверительный интервал для коэффициента корреляции при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$.

Таблица 14.3.1

v \ u	95	105	115	125
105	5			
113	7	46	1	
121		29	72	
129			29	8
137				3

Для упрощения вычислений производим линейную замену:

$$x = \frac{u-105}{10}, \quad y = \frac{v-121}{8},$$

которая приводит к корреляционной табл. 14.3.2. Число разрядов в таблице: $m_x = 4$; $m_y = 5$.

Вычисляем частоты и условные средние по формулам (14.3.2) — (14.3.4). Результаты приведены в табл. 14.3.2. Далее вычисляем выборочные средние по формулам (14.3.7) и (14.3.8)

Таблица 14.3.2

	i	1	2	3	4		
j	$y_j \backslash x_i$	-1	0	1	2	n_{y_j}	$\bar{x}(y_j)$
1	-2	2 5				5	$-1{,}000$
2	-1	1 7	0 46	-1 1		54	$-0{,}111$
3	0		0 29	0 72		101	0,713
4	1			1 29	2 8	37	1,216
5	2				4 3	3	2,000
	n_{x_i}	12	75	102	11	200	
	$\bar{y}(x_i)$	$-1{,}417$	$-0{,}613$	0,275	1,273		

и выборочные СКО, используя формулы (14.3.9) и (14.3.10). В результате получим: $\bar{x}=0{,}560$; $\bar{y}=-0{,}105$; $s_{1x}=0{,}692$; $s_{1y}=0{,}779$.

Для облегчения расчетов записываем в верхнем правом углу клеток табл. 14.3.2 произведения x_i, y_j и вычисляем

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} n_{ij}x_iy_j = 5\cdot2+7\cdot1+1\cdot(-1)+29\cdot1+8\cdot2+3\cdot4 = 73.$$

Подставив полученные значения в формулу (14.3.11), получим $\bar{r}=0{,}791$. Вычисление корреляционных отношений по формулам (14.3.12) приводит к $\bar{\eta}_{yx}=0{,}791$; $\bar{\eta}_{xy}=0{,}800$.

Близость $\bar{r}$ к $\bar{\eta}_{yx}$ и $\bar{\eta}_{xy}$ означает, что регрессию можно считать линейной (§ 6.2), что, впрочем, достаточно ясно из корреляционной таблицы, в которой частоты расположены вдоль диагонали.

Объем выборки достаточен для возможности использования формулы (14.3.14), из которой следует $\Phi_0(\beta) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}475$. По табл. III находим $\beta = 1{,}96$. Следовательно, с вероятностью 0,95 выполняется неравенство в фигурных скобках формулы (14.3.14), которое после вычислений приводит к

$$0{,}739 < r < 0{,}843. \qquad (*)$$

Для сравнения произведем оценку по формуле (14.3.15). Пользуясь табл. XVI, по $\bar{r} = 0{,}791$ находим $\bar{z} = 1{,}074$. При $\beta = 1{,}96$ из (14.3.15) следует $0{,}974 < z < 1{,}214$. По доверительным границам для z находим в табл. XVI соответствующие значения r и последнее неравенство записываем в виде

$$0{,}732 < r < 0{,}838. \qquad (**)$$

Близость оценок (*) и (**) объясняется тем, что n велико.

При малых n точность определения r резко падает и может возникнуть сомнение в коррелированности СВ X и Y, несмотря на то, что эмпирический коэффициент корреляции достаточно велик. Для проверки гипотезы об отсутствии корреляционной связи ($r=0$) служит выражение

$$P\{\bar{Z} > \bar{z}\} = 0{,}5 - \Phi_0\left(\bar{z}\sqrt{n-3}\right), \qquad (14.3.17)$$

где $\bar{z}$ величина, определяемая равенством (14.3.16).

Если вероятность P меньше принятого уровня значимости P_δ, то гипотеза об отсутствии корреляционной связи отвергается.

Замечание. Для применимости выражений (14.3.14), (14.3.15) и (14.3.17) достаточно, чтобы распределение, соответствующее исследуемой генеральной совокупности, было близко к нормальному. Следует иметь в виду, что близость распределения каждой из составляющих X и Y к нормальному не является доказательством близости самого двумерного распределения к нормальному.

§ 14.4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

При исследовании зависимости между двумя величинами x и y (для определенности будем считать x

аргументом, а y функцией) по результатам наблюдений точная функциональная зависимость не может быть получена, поскольку:

— либо эти величины (или одна из них) являются СВ, между которыми существует не функциональная, а стохастическая связь; кроме того, на измерения накладываются случайные ошибки;

— либо между этими величинами существует функциональная зависимость $y(x)$, но результаты наблюдений недостоверны из-за ошибок измерений.

В первом случае вид функции $\bar{y}(x)$ — линии регрессии СВ Y по X (§ 6.2), а во втором — вид $y(x)$ может быть известен из физических или иных соображений, и перед наблюдателем возникает задача определения параметров $y(x)$ или $\bar{y}(x)$ по результатам наблюдений. Если же вид $y(x)$ или $\bar{y}(x)$ неизвестен, то наблюдатель должен до определения параметров выдвинуть гипотезу о виде этой функциональной зависимости.

Параметры известных или предполагаемых зависимостей $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ оцениваются с помощью излагаемого ниже метода наименьших квадратов.

Результаты n наблюдений могут быть представлены в виде таблицы пар значений (табл. 14.4.1) или

Таблица 14.4.1

x_1	x_2	....	x_n
y_1	y_2	....	y_n

в виде корреляционной таблицы (табл. 14.3.1). Графическое представление всех пар (рис. 14.4.1) позволяет наглядно проверить соответствие между результатами наблюдений и известным заранее видом функциональной зависимости или облегчить выдвижение правдоподобной гипотезы о виде неизвестной зависимости.

В качестве известных или гипотетических зависимостей чаще всего встречаются полиномы *

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m, \quad (0 \leqslant m < n). \quad (14.4.1)$$

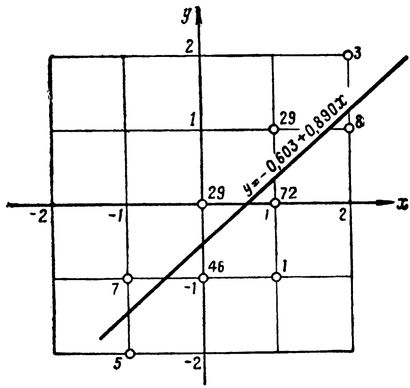

Рис. 14.4.1

Оценки $a_0, a_1, \ldots, a_m$ неизвестных параметров α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ определяются из требования

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m - y_i\right)^2 = \text{minimum}, \quad (14.4.2)$$

которое приводит к системе $m+1$ уравнений относительно $a_0, a_1, \ldots, a_m$, называемых *нормальными:*

$$\left.\begin{array}{l} c_{00}a_0 + c_{01}a_1 + \ldots + c_{0m}a_m = d_0; \\ c_{10}a_0 + c_{11}a_1 + \ldots + c_{1m}a_m = d_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m0}a_0 + c_{m1}a_1 + \ldots + c_{mm}a_m = d_m, \end{array}\right\} \quad (14.4.3)$$

* Дальнейшие рассуждения относятся к функциональной зависимости $y(x)$. Они применимы и к зависимости $\overline{y}(x)$, если x не СВ. Если же X СВ, то приведенные ниже оценки параметров становятся менее точными.

где

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{r+s}; \quad d_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r y_i. \qquad (14.4.4)$$

$$(r, \ s = 0, \ 1, \dots, \ m)$$

Для обозначения коэффициентов и свободных членов системы приняты символы вида $[x^{r+s}]$ и $[x^r y]$. Символ $[x^2]$ обычно записывают в виде $[xx]$.

Решение системы (14.4.3) может быть представлено в виде

$$a_s = \sum_{r=0}^{m} M_{rs} d_r, \quad (s = 0, 1, \dots, m), \qquad (14.4.5)$$

где

$$M_{rs} = \frac{\Delta_{rs}}{\Delta}, \qquad (14.4.6)$$

Δ — определитель системы;
Δ_{rs} — алгебраическое дополнение элемента c_{rs}.

Полученный в результате решения системы полином

$$y^* (x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \qquad (14.4.7)$$

представляет собой аппроксимацию полинома (14.4.1) по методу наименьших квадратов.

В частности при линейной зависимости $(m = 1)$

$$y = \alpha + \beta x, \qquad (14.4.8)$$

решение системы вида (14.4.3) относительно параметров аппроксимирующей прямой

$$y^* = a + bx \qquad (14.4.9)$$

приводит к выражениям:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{[y][xx]-[x][xy]}{n[xx]-[x]^2} = \bar{y} - b\bar{x}; \\ b &= \frac{n[xy]-[x][y]}{n[xx]-[x]^2} = \frac{[x'y]}{[x'x']}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.4.10)$$

где $x' = x - \bar{x}$; $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$; $\bar{y} = \frac{[y]}{n}$.

Замечание. Способ наименьших квадратов применим в любой зависимости вида $y = \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \varphi_j(x)$, где $\varphi_j(x)$ известные функции. При этом в системе (14.4.3):

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_r(x_i)\varphi_s(x_i), \quad d_r = \sum_{i=1}^{n} \varphi_r(x_i) y_i.$$

Результаты измерений y_i можно представить в виде

$$y_i = y(x_i) + \delta_i, \qquad (14.4.11)$$

где $y(x_i)$ — неизвестное значение функции (14.4.1),
δ_i — случайная ошибка i-го измерения.

Если СВ δ_i независимы и подчиняются (хотя бы приближенно) нормальному распределению с МО, равным нулю, и независящей от x неизвестной дисперсией σ^2, то статистическая оценка для σ^2 определяется по формуле

$$s'^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n} [y^*(x_i) - y_i]^2. \qquad (14.4.12)$$

При выполнении указанных выше условий, наложенных на ошибки измерения, оценки (14.4.5) несмещенные.

Для определения статистических оценок корреляционных моментов K_{rs} связи между коэффициентами a_r и a_s служат формулы

$$\bar{K}_{rs} = M_{rs} s'^2, \quad (r, s = 0, 1, \ldots, m) \qquad (14.4.13)$$

и, в частности, для оценок дисперсий коэффициентов a_r

$$s_{a_r}^2 = M_{rr}s'^2. \qquad (14.4.14)$$

Величины M_{rs} определяются формулой (14.4.6).

Оценка дисперсии отклонения аппроксимирующей зависимости (14.4.7) от теоретической (14.4.1) при любом заданном x, т. е. дисперсии величины $\varepsilon(x) = y^*(x) - y(x)$, производится по формуле

$$s_\varepsilon^2(x) = \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m} \overline{K}_{rs}x^{r+s}. \qquad (14.4.15)$$

В частности, для линейной аппроксимирующей зависимости (14.4.9):

$$s'^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - y_i)^2; \qquad (14.4.16)$$

$$s_a^2 = \frac{[xx]}{n[xx]-[x]^2}s'^2 = \frac{[xx]}{n[x'x']}s'^2; \qquad (14.4.17)$$

$$s_b^2 = \frac{n}{n[xx]-[x]^2}s'^2 = \frac{s'^2}{[x'x']}; \qquad (14.4.18)$$

$$\overline{K}_{ab} = -\frac{[x]}{n[xx]-[x]^2}s'^2 = -\frac{[x]}{n[x'x']}s'^2; \qquad (14.4.19)$$

$$s_\varepsilon^2 = s_a^2 + 2\overline{K}_{ab}x + s_b^2x^2. \qquad (14.4.20)$$

Замечание. Для упрощения вычислений в некоторых случаях может быть удобна линейная замена аргумента x, в частности $x' = x - \overline{x}$. Следует иметь в виду, что только оценки b, s', s_b, s_ε инвариантны по отношению к началу отсчета аргумента, а оценки a, s_a и $\overline{K}_{ab}$ зависят от положения начала.

Сущность оценок s', s_a, s_b и s_ε можно раскрыть следующим образом. Оценка s' характеризует отклонение измерений относительно теоретической прямой (14.4.8) по оси ординат при условии, что дисперсия измерений не зависит от x; s_b — угловое отклонение аппроксимирующей прямой от теоретической; $s_\varepsilon(x)$ — линейное отклонение аппроксимирующей прямой от теоретической по оси ординат в точке с абсциссой x; s_a равно значению $s_\varepsilon(x)$ при $x=0$.

$s_э(x)$ достигает минимума при $x=\bar{x}$ и растет вместе с величиной $|x-\bar{x}|$. Поэтому за пределами области наблюдения x аппроксимирующую прямую следует использовать с осторожностью. Это относится к любой аппроксимации по методу наименьших квадратов.

Степень близости полученной аппроксимирующей функции, ее коэффициентов и эмпирического СКО измерений к соответствующим теоретическим величинам можно оценить с помощью доверительных интервалов по формулам:

$$\gamma = P\{y^*(x) - t_\gamma s_\varepsilon(x) < y(x) < y^*(x) + t_\gamma s_\varepsilon(x)\} = \\ = 2S_{n-m}(t_\gamma) - 1; \qquad (14.4.21)$$

$$\gamma = P\{a_r - t_\gamma s_{a_r} < a_r < a_r + t_\gamma s_{a_r}\} = \\ = 2S_{n-m}(t_\gamma) - 1; \qquad (14.4.22)$$

$$\gamma = P\left\{\frac{\sqrt{n-m}\,s'}{\chi_2} < \sigma < \frac{\sqrt{n-m}\,s'}{\chi_1}\right\} = \\ = F_{n-m}(\chi_2^2) - F_{n-m}(\chi_1^2), \qquad (14.4.23)$$

где $S_{n-m}(t)$ — функция распределения Стьюдента с $n-m$ степенями свободы (§ 5.12);

$F_{n-m}(\chi^2)$ — функция распределения χ^2 с $n-m$ степенями свободы (§ 5.11);

t_γ — значение β_γ из табл. XIII а, соответствующее значениям функции $S_k(t) = \frac{1+\gamma}{2}$ при $k=n-m$ степенях свободы;

χ_1^2, χ_2^2 — значения χ^2 из табл. XII а, соответствующие значениям функций $F_k(\chi_1^2) = \frac{1-\gamma}{2}$; $F_k(\chi_2^2) = \frac{1+\gamma}{2}$ при $k=n-m$ степенях свободы;

γ — доверительная вероятность.

При $k \geqslant 30$ в оценках (14.4.21) и (14.4.22) правая часть заменяется на $2\Phi_0(t_\gamma)$, где $\Phi_0(t)$ — функция, значения которой приведены в табл. III.

Пример 14.4.1. В условиях примера 14.3.1 найти линию регрессии Y по X и оценить ее параметры.

Нанесем данные табл. 14.3.2 на график (рис. 14.4.1) в виде кружков, снабженных указанием числа измерений, соответствующих каждой точке. Из рис. 14.4.1 следует, что весьма правдоподобна гипотеза о линейной зависимости вида (14.4.8). Приняв эту гипотезу, вычислим значения оценок a и b по формулам (14.4.10).

Применительно к данной задаче величины, входящие в выражения (14.4.10), удобно вычислять по формулам:

$$[x'y] = \sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y} n_{ij}(x_i - \bar{x})\,y_j = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} n_{ij}x_i y_j - n\bar{x}\bar{y} =$$

$$= 73 - 200\cdot 0{,}56\cdot(-0{,}105) = 84{,}8;$$

$$[x'x'] = \sum_{i=1}^{m_x} n_{xi}(x_i - \bar{x})^2 = (n-1)\,s_{1x}^2 =$$

$$= 199\cdot 0{,}692^2 = 95{,}3.$$

Приведенные выражения следуют из формул (14.3.3), (14.3.8) и (14.3.9); числа взяты из примера 14.3.1. Учтя, что $\bar{y} = -0{,}105$ и подставив полученные значения в формулы (14.4.10), получим $b = 0{,}890$; $a = -0{,}603$. Прямая $y^* = -0{,}603 + 0{,}890x$ проведена на рис. 14.4.1.

Найдем оценку для СКО по формуле (14.4.12), которая в условиях примера 14.3.1 принимает вид

$$s' = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y} n_{ij}(a + bx_i - y_j)^2}.$$

В результате вычислений получим $s' = 0{,}480$.

Из (14.4.17) и (14.4.18) после вычислений получим: $s_a = 0{,}044$; $s_b = 0{,}049$.

Определим доверительные границы при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$. Так как $n > 30$, пользуемся формулой (14.4.22) с правой частью $2\Phi_0(t_\gamma)$. Тогда $\Phi_0(t_\gamma)=0{,}475$. По табл. III находим $t_\gamma=1{,}96$ и, следовательно, с вероятностью 0,95:

$$-0{,}603-1{,}96\cdot 0{,}044<\alpha<-0{,}603+1{,}96\cdot 0{,}044;$$
$$0{,}890-1{,}96\cdot 0{,}049<\beta<0{,}890+1{,}96\cdot 0{,}049$$

или

$$-0{,}689<\alpha<-0{,}517;\ 0{,}794<\beta<0{,}986.$$

Аппроксимация по методу наименьших квадратов может сопровождаться k дополнительными линейными условиями ($k<m$), например, чтобы аппроксимирующая прямая проходила через заданную точку. В подобных задачах k коэффициентов аппроксимирующего полинома (14.4.7) исключаются с помощью заданных условий через остальные $m-k$, для которых составляются нормальные уравнения.

Пример 14.4.2. Аппроксимирующая прямая должна проходить через начало координат. Требуется найти уравнение этой прямой для двух вариантов измерений.

1. При каждом наблюдаемом x_i определяется y_i. Согласно условию в уравнении прямой $y=\alpha+\beta x$ полагаем $\alpha=0$. Применив требование (14.4.2), получим $b=\dfrac{[xy]}{[xx]}$.

2. При каждом наблюдаемом x_i определяется отношение $b_i=\left(\dfrac{y}{x}\right)_i$. Согласно условию должно быть $b=\text{const}$. Из требования (14.4.2) следует $\sum_{i=1}^{n}(b-b_i)^2=\text{minimum}$, откуда $b=\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{y}{x}\right]$.

Метод наименьших квадратов можно применять к функциональным зависимостям, которые приводятся к линейной посредством замены переменных. Например, зависимость $y=\alpha\beta^x$ ($\alpha>0$, $\beta>0$) может быть представлена в виде $z=\gamma+\delta x$, где $z=\ln y$; $\gamma=\ln\alpha$; $\delta=\ln\beta$. Применение метода наименьших квадратов к полученному линейному выражению для z приводит к оценкам g и d для γ и δ соответственно. Возвратившись к исходной зависимости, можно в качестве оценок для α и β принять соответственно $a=e^g$; $b=e^d$. Следует иметь в виду, что оценки, полученные подобным образом, смещенные.

Глава 15

НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ НАЧИНАЮЩЕМУ РАСЧЕТЧИКУ

Лица, не имеющие достаточного опыта в вероятностных расчетах, допускают, как правило, сходные по характеру ошибки. Приведенные ниже замечания помогут начинающим расчетчикам избежать по крайней мере хотя бы части из них.

§ 15.1. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ КОНТРОЛЯ

1. Используя не опробованные должным образом формулы для определения вероятности или функции распределения, полезно убедиться в том, что среди их значений нет отрицательных или превышающих единицу. Следует также учитывать, что функция распределения не убывает. Нарушение хотя бы одного из этих положений означает, что используемые формулы требуют проверки и исправления.

2. Плотность вероятности $f(x)$ может быть в принципе сколь угодно большой. Например, плотность вероятности при нормальном распределении

$$\varphi(x;\ x_0, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

стремится к ∞ при $\sigma \to 0$, если $x=x_0$. Поэтому величина плотности вероятности сама по себе не может служить для проверки правильности соответствующей формулы. Но весьма полезна проверка выполнения условий

$$f(x) \geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то следует найти и устранить ошибку в формуле для $f(x)$.

В отличие от функции распределения, являющейся безразмерной величиной, плотность вероятности — величина размерная. Например, плотность вероятности линейного рассеивания снарядов имеет размерность $\left(\frac{1}{\textit{длина}}\right)$. Это обстоятельство также может служитьконтролем правильности расчетов.

3. При действиях с дискретными СВ следует помнить, что вероятности $p_i = \boldsymbol{P}\{X = x_i\}$, задающие закон распределения СВ X, должны в сумме давать единицу. Если это условие нарушено, то по крайней мере одно, а может быть, и несколько (и даже все) p_i требуют исправления.

4. При вычислении вероятности некоторого события полезно установить исчерпывающее множество событий, к которому оно принадлежит, вычислить вероятности всех событий множества и проверить выполнение условия (1.3.1). Такой контроль дает значительную уверенность в правильности полученного результата, хотя и требует большего объема вычислений. Не проведя контроля, можно незаметно для себя впасть в грубую ошибку.

Пример 15.1.1. По группе из n однородных целей практически одновременно выпускаются две однородные ракеты. Каждая ракета независимо от другой с равной вероятностью может быть направлена на любую цель. Ракета поражает с вероятностью W только ту цель, на которую она направлена. Требуется найти вероятность $p(2)$ поражения ровно двух целей (событие A_2).

Найдем исчерпывающее множество событий, в которое входит интересующее нас событие A_2. Очевидно, такое множество образуют события:

A_0 — не поражена ни одна цель;

A_1 — поражена ровно одна цель;
A_2 — поражены ровно две цели.

Вероятности событий обозначим $P\{A_i\} = p(i)$, $(i=0, 1, 2)$. В силу (1.3.1) должно быть

$$p(0) + p(1) + p(2) = 1. \qquad (*)$$

Если мы найдем $p(0)$, $p(1)$ и $p(2)$ и проверим выполнимость условия (*), то уверенность в правильности вычисления искомой вероятности $p(2)$ возрастет.

Вероятности $p(i)$ вычисляются по формулам, приведенным в примере 8.3.1, если положить $p=1$.

Чтобы избежать ошибок, расчет удобно вести по схеме, указанной в табл. 15.1.1.

Итоговые вероятности в табл. 15.1.1 получены следующим образом. Число различных распределений двух ракет по n целям согласно (2.1.7) равно $f(n, 2) = \frac{n(n+1)}{2}$. Из них в n случаях обе ракеты направляются на одну цель и в $\frac{n(n-1)}{2}$ случаях — на две цели. Отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned}
p(0) &= n\left[\frac{1}{n^2}(1-W)^2\right] + \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{2}{n^2}(1-W)^2\right] = (1-W)^2;\\
p(1) &= n\left\{\frac{1}{n^2}\left[1-(1-W)^2\right]\right\} + \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{2}{n^2}2W(1-W)\right] = \\
&= 2W\left[1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)W\right];\\
p(2) &= n\left(\frac{1}{n^2}\cdot 0\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2}{n^2}W^2\right) = \frac{n-1}{n}W^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Убеждаемся, что условие (*) выполнено. Это повышает доверие к найденной вероятности $p(2)$.

Не применяя указанного контроля, в подобных задачах часто допускают ошибки. Особенно часто принимают $p(2) = W^2$. Контроль по формуле (*) сразу укажет на ошибочность такого результата.

5. В качестве весьма действенного контроля правильности формул, полученных расчетчиком, можно рекомендовать вывод их другим путем, если это удастся.

Пример 15.1.2. В условиях примера 15.1.1 найти вероятности $p_i(i)$, не прибегая к результатам примера 8.3.1.

Применим последовательно формулу полной вероятности (1.3.2) к каждому из событий A_i. Поскольку цели и ракеты

Таблица 15.1.1

m_1	m_2	...	m_n	$L(m_1, m_2, \ldots, m_n)$	$p(0/m_1, m_2, \ldots, m_n)$	$p(1/m_1, m_2, \ldots, m_n)$	$p(2/m_1, m_2, \ldots, m_n)$
2	0	...	0	$\frac{1}{n^2}$	$(1-W)^2$	$1-(1-W)^2$	0
1	1	...	0	$\frac{2}{n^2}$	$(1-W)^2$	$2W(1-W)$	W^2
0	2	...	0	$\frac{1}{n^2}$	$(1-W)^2$	$1-(1-W)^2$	0
...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	2	$\frac{1}{n^2}$	$(1-W)^2$	$1-(1-W)^2$	0
					$p(0)=(1-W)^2$	$p(1)= =2W\left[1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)W\right]$	$p(2)=\frac{n-1}{n}W^2$

однородны, то в рассматриваемой задаче исчерпывающее множество составляют следующие события:

B_1 — обе ракеты направлены в одну цель;

B_2 — ракеты направлены в разные цели,

и формула (1.3.2) примет вид

$$p(i) = P\{A_i\} = \sum_{j=1}^{2} P\{B_j\} P\{A_i \mid B_j\}, \quad (i=0, 1, 2). \qquad (***)$$

Вероятность $P\{B_1\}$ равна произведению вероятностей двух событий: одна из ракет направлена в любую цель, другая ракета — в ту же цель. Первая вероятность равна единице, вторая согласно (2.1.1) — $\frac{1}{n}$. Следовательно, $P\{B_1\} = 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$.

Подобные рассуждения приводят к $P\{B_2\} = \frac{n-1}{n}$. Выражение $P\{B_2\}$ можно получить также из формулы (1.3.1).

Для условных вероятностей $P\{A_i \mid B_j\}$ легко получить таблицу

j \ i	0	1	2
1	$(1-W)^2$	$1-(1-W)^2$	0
2	$(1-W)^2$	$2W(1-W)$	W^2

Подставив полученные выражения в формулу (***), получим для $p(i)$ формулы, совпадающие с выражениями (**).

6. Не следует переоценивать значения контроля за справедливостью расчетных формул, рекомендованного в предыдущих пунктах. Неблагополучный исход контроля достоверно указывает на наличие ошибки в формулах; благополучный исход дает высокую, но не абсолютную уверенность в их безупречности.

§ 15.2. УЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ И СОВМЕСТНОСТИ СОБЫТИЙ

1. Формулы (1.2.4) и (1.2.7) привлекают своей простотой и их подчас применяют при определении ве-

роятностей сложных событий без достаточных оснований. Следует помнить, что формула (1.2.4) (теорема умножения вероятностей) применима только к независимым событиям, а формула (1.2.7) (теорема сложения вероятностей) справедлива только для несовместных событий. Применение формулы (1.2.4) к зависимым, а формулы (1.2.7) к совместным событиям может привести к серьезным погрешностям.

Пример 15.2.1. Зенитная батарея включает в себя радиолокатор и n пусковых установок. Вероятности безотказной работы равны: для радиолокатора — $R_л$, для ракеты (вместе с пусковой установкой) — $R_р$. Вероятность поражения самолета дошедшей ракетой равна W.

Определить вероятность поражения самолета, если стрельба по нему ведется n-ракетным залпом и все ракеты управляются одним радиолокатором.

Введем следующие обозначения событий:

A — самолет поражен;

A_i — самолет поражен i-й ракетой;

B — радиолокатор исправен;

C_i — i-я ракета исправна (вместе с пусковой установкой).

Противоположные события снабдим чертой (например $\overline{B}$ — радиолокатор вышел из строя).

В этих обозначениях искомая вероятность поражения самолета согласно (1.3.2) определяется формулой

$$P\{A\} = P\{B\}\, P\{A \mid B\} + P\{\overline{B}\}\, P\{A \mid \overline{B}\} = \\ = R_л\, P\{A \mid B\} - (1 - R_л)\, 0 = R_л P\{A \mid B\}.$$

В свою очередь условная вероятность поражения самолета, если радиолокатор исправен, согласно (1.2.6) равна

$$P\{A \mid B\} = P\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \Big| \, B\right\} = 1 - P\left\{\left(\prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) \Big| \, B\right\}.$$

Полагая, что события A_i независимы в совокупности, имеем согласно (1.2.4)

$$P\{A \mid B\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\{\overline{A}_i \mid B\}.$$

Снова применяя (1.3.2), находим для всех $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$P\{\overline{A}_i \mid B\} = P\{C_i\}\, P\{\overline{A}_i \mid C_i \mid B\} + P\{\overline{C}_i\}\, P\{\overline{A}_i \mid \overline{C}_i \mid B\} = \\ = R_р (1 - W) + (1 - R_р)\, 1 = 1 - R_р W.$$

Следовательно,

$$P\{A \mid B\} = 1 - (1 - R_{\text{р}} W)^{n}$$

и

$$P\{A\} = R_{\text{л}}\left[1 - (1 - R_{\text{р}} W)^{n}\right]. \qquad (\triangle)$$

Приведенная цепь рассуждений, которую при достаточной тренировке не обязательно полностью отражать на бумаге, необходима, иначе можно невольно впасть в заблуждение. Примером такого довольно распространенного заблуждения является следующее рассуждение:

а) вероятность того, что ракета достигнет цели, равна $R_{\text{л}} R_{\text{р}}$;

б) следовательно, вероятность поражения цели одной ракетой равна $R_{\text{л}} R_{\text{р}} W$;

в) значит, вероятность поражения цели хотя бы одной ракетой будет

$$P\{A\} = 1 - (1 - R_{\text{л}} R_{\text{р}} W)^{n}. \qquad (\triangle\triangle)$$

Формулы $(\triangle)$ и $(\triangle\triangle)$ дают принципиально разные ответы: правая часть $(\triangle\triangle)$ с увеличением n стремится к единице, а правая часть $(\triangle)$ никогда не может превысить $R_{\text{л}}$.

Правильная формула $(\triangle)$ учитывает зависимость событий, состоящих в достижении самолета каждой ракетой. Зависимость событий заключается в том, что при выходе из строя радиолокатора ни одна ракета не достигнет цели. Формула $(\triangle\triangle)$ этого не учитывает. В результате положения пп. «а» и «б» ошибочного рассуждения, справедливые сами по себе и уместные при стрельбе одной ракетой, не применимы для решения поставленной задачи и приводят к неправильному выводу п. «в».

Пример 15.2.2. Самолет атакует танк и сбрасывает на него три бомбы. Вероятность попадания i-й бомбы в танк (событие A_i, $i = 1, 2, 3$) равна

$$P\{A_i\} = p_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Определить вероятность P попадания в танк хотя бы одной бомбы, если события A_i можно считать независимыми.

Попадание одной из бомб в танк не исключает возможности попадания других бомб. Следовательно, события A_i совместны, так что для расчета искомой вероятности следует применить формулу (1.2.6), которая в данном случае принимает вид

$$P = P\left\{\sum_{i=1}^{3} A_i\right\} = 1 - P\left\{\prod_{i=1}^{3} \bar{A}_i\right\}.$$

Используя независимость событий A_i, применим формулу (1.2.4) и окончательно получим

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{3} P\{\bar{A}_i\} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3).$$

При решении подобных задач зачастую забывают выяснить, совместны ли события или нет, и действуют так, как если бы события были несовместными. Примером может служить следующее нередко встречающееся ошибочное рассуждение.

Попадание в танк хотя бы одной бомбы представляет собой сумму элементарных событий A_i ($i = 1, 2, 3$), состоящих в попадании отдельных бомб. Вероятности элементарных событий по условию равны

$$P\{A_i\} = p_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Пользуясь формулой (1.2.7) (в данном случае непригодной!), получим

$$P = P\{A_1 + A_2 + A_3\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\} = p_1 + p_2 + p_3.$$

Ошибочность результата видна хотя бы из того, что при $p_i > \frac{1}{3}$ (для всех i) получим $P > 1$, а этого быть не может.

2. Приведенные в этой и в других главах Справочника многочисленные примеры и замечания не дают каких-либо конкретных рецептов для установления зависимости и совместности событий. Единственная общая рекомендация по этому поводу сводится к необходимости твердого знания и ясного понимания основных теорем теории вероятностей — теоремы сложения и теоремы умножения, а также следствий из них.

Необходимо также четко различать причинную и вероятностную (стохастическую) связи. Первая предполагает наличие направленной цепи событий, наличие причины и следствия, а для второй причина и следствие в известном смысле равноправны. Именно этим объясняется наличие двух выражений для $P\{AB\}$:

$$P\{AB\} = P\{A\}\, P\{B \mid A\} = P\{B\}\, P\{A \mid B\}.$$

Нечеткое понимание существа вероятностной связи может привести к заблуждению о необходимости всегда разделять события на происходящие «раньше» и «позже», что в свою очередь может вызвать дополнительные трудности при решении вероятностных задач.

Пусть, например, цель обстреливается последовательно двумя снарядами. Стрельба сопровождается групповыми ошибками, общими для обоих выстрелов (поэтому они зависимы), и индивидуальными ошибками, независимыми для каждого из выстрелов. Не обязательно вычислять вероятность попадания в цель обоих снарядов как произведение безусловной вероятности попадания первого снаряда на условную вероятность попадания второго снаряда (при условии, что первый попал). С таким же успехом можно умножать безусловную вероятность попадания второго снаряда на условную вероятность попадания первого снаряда (при условии, что второй попал).

Встречаются заблуждения, возникающие при необходимости учета совместности событий. Они заключаются в том, что проблема совместности или несовместности событий будто бы должна рассматриваться в определенный момент времени. В результате возможны ошибки при решении вероятностных задач.

Оценка совместности событий должна производиться в рамках производимого опыта. При этом совместными или несовместными могут оказаться события, происходящие как одновременно, так и в разные моменты времени. Например, при стрельбе несколькими снарядами по двум целям, для поражения каждой из которых достаточно одного попадания, такие события, как поражение цели № 1 и поражение цели № 2, совместны независимо от того, велась ли стрельба залпом или одиночными выстрелами.

§ 15.3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. В практических расчетах широко распространено пользование различного рода средними значениями, в том числе и средними вероятностями. Само по себе пользование средними значениями не предосудительно, однако требует осторожности и ясного представления, где такое пользование теоретически строго обосновано,

а где является лишь приближенным вычислительным приемом. В последнем случае надо особенно тщательно следить за погрешностью применяемых приближенных формул, чтобы не допустить слишком большой ошибки.

Пример 15.3.1. Используя условия примера 15.1.1 при $n=2$ и $W=0{,}6$, найти распределение и МО числа пораженных целей.

Распределение числа пораженных целей найдется по формулам, полученным в примере 15.1.1:

$$p(0) = (1 - 0{,}6)^2 = 0{,}16;$$

$$p(1) = 2\cdot 0{,}6 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) 0{,}6\right] = 0{,}66;$$

$$p(2) = {}^1/_2\, (0{,}6)^2 = 0{,}18.$$

Отсюда по формуле (3.2.2) находим МО $\hat{\nu}$ числа пораженных целей:

$$\hat{\nu} = 0p(0) + 1p(1) + 2p(2) = 1{,}02.$$

Расчет **по схеме, указанной в табл. 15.1.1,** при большом n, вообще говоря, обременителен. Поэтому для получения МО часто применяют понятие средней вероятности поражения каждой цели. Как показано в примере 8.3.1, средняя вероятность поражения в данном случае будет равна

$$\theta = 1 - \left(1 - \frac{W}{2}\right)^2 = 0{,}51.$$

При этом МО числа пораженных целей вычисляется по простой формуле

$$\hat{\nu} = n\theta = 1{,}02,$$

которая следует из формулы (9.3.9).

Здесь пользование средней вероятностью теоретически обосновано (пример 8.3.1) и не искажает результата. Поскольку к тому же оно существенно упрощает расчеты, то является оправданным и полезным.

Иногда среднюю вероятность θ используют для отыскания распределения числа пораженных целей, предполагая неявно, что события, состоящие в поражении отдельных целей, независимы, и принимая биномиальное распределение. В данном случае такой прием даст:

$$\tilde{p}(0) = (1 - \theta)^2 = (1 - 0{,}51)^2 = 0{,}24;$$

$$\tilde{p}(1) = 2\theta(1 - \theta) = 2\cdot 0{,}51\,(1 - 0{,}51) = 0{,}50;$$

$$\tilde{p}(2) = \theta^2 = (0{,}51)^2 = 0{,}26.$$

Найденные вероятности $\tilde{p}(i)$ в сумме дают единицу, что создает впечатление правильности полученного результата.

Вместе с тем их отличие от правильных значений вероятностей $p(i)$ значительно. Так, ошибка в вероятности поражения ровно двух целей составляет 44%. Это уже не приближенный, а попросту неверный результат.

Причина состоит в том, что к зависимым событиям, а поражения отдельных объектов в данном случае являются зависимыми событиями, применена схема независимых событий (гл. 1), т. е. речь идет не о замене некоторых формул приближенными выражениями, а о применении формул, совершенно не отвечающих существу задачи. Теоретическая порочность такого приема сразу будет видна при большом n.

Правильный метод при большом n дает

$$p(0) = (1 - W)^2, \quad p(1) \approx 2W(1 - W), \quad p(2) \approx W^2$$

или

$$p(i) = \begin{cases} C_2^i W^i (1 - W)^{2-i} & \text{при } i = 0, 1, 2; \\ 0 & \text{при } i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

При пользовании средней вероятностью получим

$$\tilde{p}(i) = C_n^i \theta^i (1 - \theta)^{n-i}, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

В рассматриваемой задаче событие, состоящее в поражении более двух объектов, невозможно. В то же время метод средней вероятности для указанных событий дает вероятности, отличные от нуля.

2. В практических расчетах часто для сокращения объема вычислений приходится заменять МО функции функцией от МО (§ 8.2). Такие упрощения неизбежны, особенно в сложных многошаговых моделях, однако применять их надо осторожно, ясно представляя последствия, к которым это может привести.

Во всех случаях надо стремиться сначала найти точные зависимости и осреднения проводить на конечных, а не на начальных этапах решения задачи. Всякие осреднения надо соразмерять с требуемой точностью результата расчета. Как правило, точность применяемых приближений в общем виде оценить практически невозможно. Тем бóльшую важность приобретают проверки на отдельных частных случаях.

Пример 15.3.2. Разведка с вероятностью $u(x; n)$ обнаруживает x транспортов из общего числа n, находящихся в данном районе, и сообщает их координаты m подводным лодкам. Каждая лодка самостоятельно и независимо выбирает один из обнаруженных транспортов и атакует его. Вероятность поражения транспорта, атакованного одной лодкой, равна W. Найти МО M числа пораженных транспортов.

Число X обнаруженных разведкой транспортов есть СВ с распределением

$$P\left\{X = x\right\} = u(x;\ n), \quad (x = 0,\ 1, \ldots,\ n).$$

Число пораженных транспортов тоже СВ, которую будем обозначать через Y. Ее распределение

$$P\left\{Y = y \mid x\right\} = v(y \mid x), \quad (y = 0,\ 1, \ldots,\ x)$$

зависит от того, какое значение приняла СВ X. Следовательно, СВ X и Y зависимы.

Условное МО числа пораженных транспортов определяется по формуле вида (3.2.2):

$$\hat{y}(x) = \sum_{y=0}^{x} yv(y|x),$$

а искомое безусловное МО по формуле

$$M = \sum_{x=0}^{n} \hat{y}(x)\, u(x;\ n) = \sum_{x=0}^{n} u(x;\ n) \sum_{y=0}^{x} yv(y|x). \qquad (*)$$

Пользуясь примером 8.3.1 и указаниями п. 1 § 15.3 о средней вероятности, получим

$$\hat{y}(x) = x\left[1 - \left(1 - \frac{W}{x}\right)^m\right],$$

причем $\hat{y}(0) = 0$.

Можно попытаться упростить расчеты по формуле (*), приняв

$$M \approx \hat{y}\left(\hat{x}\right) = \hat{x}\left[1 - \left(1 - \frac{W}{\hat{x}}\right)^m\right], \qquad (**)$$

где

$$\hat{x} = \sum_{x=0}^{n} xu(x;\ n)$$

есть МО числа обнаруженных разведкой транспортов.

Пригодность такого осреднения должна быть проверена. Предположим, что СВ X подчинена биноминальному распределению (§ 4.1), т. е. что

$$u(x;\ n) = b(x;\ n,\ r),$$

где r — вероятность обнаружения разведкой каждого отдельного транспорта, и пусть $n=3$, $m=2$, $W=0{,}6$.

Тогда в зависимости от величины вероятности r получим следующие значения МО числа пораженных транспортов.

Вероятность обнаружения (r)	0,8	0,4
Математическое ожидание M:		
по точной формуле (*)	0,953	0,705
по приближенной формуле (**) . . .	1,050	0,900
Погрешность, %	10	28

Как видно, возможность применения формулы (**) зависит от условий. При $r>0{,}8$ точность результата может быть приемлемой для практических расчетов, при $r \leqslant 0{,}4$ даже практика вряд ли удовлетворит столь большая погрешность.

3. Последнее замечание предыдущего пункта относится к любым приближенным формулам. Часто, сделав какое-либо допущение, в процессе дальнейших вычислений забывают, что оно справедливо в определенных условиях, и пользуются полученными приближенными формулами за пределами их применимости.

Если неправильное применение приближенных формул приводит к нелепостям, то ошибка быстро обнаруживается. Хуже обстоит дело, когда внешне результат выглядит правдоподобным, но в действительности содержит большие ошибки. Избавить от таких промахов может только пунктуальное соблюдение ограничений, определяющих область применения приближенных формул.

Пример 15.3.3. В соответствии с § 7.3 вероятность попадания в малоразмерную плоскую область S площади A при круговом распределении с радиальным средним квадратическим отклонением σ может быть найдена по приближенной формуле

$$p(A) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2}},$$

где d — расстояние от центра цели до центра рассеивания.

При достаточно большой площади A может оказаться $p(A)>1$, что сразу укажет на непригодность формулы. Между тем она может оказаться совершенно непригодной и при

$p(A) < 1$. Пусть, например, $d=0$, $\sigma=10$ *м*, S — круг радиуса 13 *м*. Тогда значение $p(A)$, которое можно некритически считать приближенным, окажется равным 0,845, а точное значение, полученное из табл. X при $h=0$, $r=1,3$, равно 0,5705. Истинный результат завышен на 0,275, т. е. почти в полтора раза. Чрезмерная погрешность объясняется тем, что размер области (диаметр 26 *м*) в 2,6 раза больше σ, в то время как допустимая величина этого отношения равна 0,5—0,7.

4. Точность вычислений должна соответствовать точности исходных данных и требуемой точности результатов расчета. В промежуточных вычислениях и применяемых таблицах следует удерживать на одну-две значащие цифры больше, чем в исходных данных. В противном случае результат может оказаться менее точным, чем исходные данные. Повышение точности вычислений может оказаться необходимым при проведении сравнительных расчетов, а также если в расчетных формулах встречаются разности двух близких по значению величин. Понижение точности вычислений возможно при низких требованиях к результатам расчета.

5. Все статистические оценки, полученные при обработке опытных данных, случайны и поэтому приближенны в вероятностном смысле. Иначе говоря, можно говорить только о вероятности близости оценки к неизвестному оцениваемому параметру. При больших доверительных вероятностях (порядка 0,99 и выше) можно с большой (но не абсолютной) уверенностью считать полученные оценки приближенными в обычном смысле слова.

Учитывая случайный характер оценок, совершенно излишне указывать их более чем с тремя значащими цифрами. Точность оценок, в которых используются моменты третьего и более высоких порядков, невелика даже при числе измерений порядка 50.

6. Расчетчик должен твердо знать, что рациональная величина доверительной вероятности не может быть определена из каких-либо положений теории вероятностей и математической статистики. Поэтому при выборе доверительной вероятности используют опыт, интуицию, рекомендации специалистов и т. д. Часто довольствуются доверительной вероятностью 0,95. При ответственных расчетах требования повышают, при менее ответственных расчетах требования могут быть снижены.

РАЗДЕЛ VII

ТАБЛИЦЫ

Глава 16

ОПИСАНИЕ И ПРАВИЛА ПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦАМИ

I. ТАБЛИЦА ПОСТОЯННЫХ ЧИСЕЛ

В таблице приведены значения чисел, встречающихся при вероятностных расчетах, с точностью до шести знаков.

II. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\varphi(x)$

В таблице приведены значения функции (§ 5.1)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (16.2.1)$$

для x от 0 до 4,238. При $x \geqslant 4{,}239$ значения $\varphi(x)$ меньше чем 0,00005 и округлены до нуля. Таблица разбита на две части. В первой приведены значения функции для $x=0(0{,}001)3{,}009$ *, во второй сгруппированы превосходящие 3,000 значения x, которым соответствуют одинаковые табличные значения функции.

Пример 16.2.1. Найти значения $\varphi(x)$ при $x=3{,}6$. Находим во второй части таблицы интервал 3,584—3,629, содержащий заданное значение $x=3{,}6$, и получаем $\varphi(x)=0{,}0006$.

---

* Запись $x=a(n)\,b$ означает, что таблица составлена для значений аргумента x от a до b, а шаг ее равен n.

Таблица позволяет получить более точные значения $\varphi(x)$ (до трех — четырех значащих цифр) при больших x, если в этом есть необходимость. Достаточно воспользоваться равенством

$$\varphi(x) = (2\pi)^{\frac{1-k}{2k}} [\varphi(\sqrt{k}x)]^{\frac{1}{k}} = \\ = (6{,}2832)^{\frac{1-k}{2k}} [\varphi(\sqrt{k}x)]^{\frac{1}{k}}, \qquad (16.2.2)$$

где k произвольно. Погрешность полученного результата определяется погрешностью табличного значения $\varphi(\sqrt{k}x)$, обусловленной его округлением. Величину k целесообразно выбирать так, чтобы значение $\varphi(\sqrt{k}x)$ содержало четыре значащие цифры.

Пример 16.2.2. Требуется найти более точное значение функции $\varphi(x)$ при $x=3{,}6$. Принимаем $k=\frac{1}{16}$. Тогда $\sqrt{k}\ x=0{,}9$ и согласно формуле (16.2.1)

$$\varphi(3{,}6) = (6{,}2832)^{7{,}5} [\varphi(0{,}9)]^{16}. \qquad (*)$$

Из таблицы находим $\varphi(0{,}9)=0{,}2661$. Подставив это значение в равенство (*) и произведя вычисления с помощью таблицы логарифмов, получим 0,0006124. Погрешность этого результата меньше 0,1%.

III. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\Phi_0(x)$

В таблице приведены значения функции (§ 5.1)

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (16.3.1)$$

для x от 0 до 3,890. При $x \geqslant 3{,}891$ значения $\Phi_0(x)$ отличаются от 0,5 меньше чем на 0,00005 и округлены до 0,5000. Таблица разбита на две части: в первой приведены значения функции для $x=0(0{,}001)3{,}009$, во второй сгруппированы превосходящие 3,000 значения x, которым соответствуют одинаковые табличные значения функции.

Если есть необходимость получить при малых x более точные значения функции, то следует воспользоваться рядом

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,2^k\,k!} =$$
$$= 0{,}39894\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \ldots\right). \qquad (16.3.2)$$

При $x<0{,}4$ достаточно учесть два члена ряда, чтобы получить значения $\Phi_0(x)$ с погрешностью не более $0{,}1\%$.

Если есть необходимость получить более точное значение функции при $x \geqslant 3$, то следует применять приближенное равенство

$$\Phi_0(x) \approx 0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{x^4} - \frac{15}{x^6}\right). \qquad (16.3.3)$$

IV. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\hat{\varphi}(x)$

В таблице приведены значения функции (§ 5.1)

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 x^2} \qquad (16.4.1)$$

для x от 0 до 6,145. При $x \geqslant 6{,}146$ значения $\hat{\varphi}(x)$ меньше 0,00005 и округлены до нуля. Таблица разбита на две части: в первой приведены значения функции для $x = 0\,(0{,}001)\,3{,}609$, во второй сгруппированы превосходящие 3,600 значения x, которым соответствуют одинаковые табличные значения функции. Таблица рассчитана с помощью семизначной таблицы функции e^{-x}.

Таблица позволяет получить более точные значения $\hat{\varphi}(x)$ при больших x. Достаточно воспользоваться равенством

$$\hat{\varphi}(x) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\rho}\right)^{\frac{1-k}{k}} \left[\hat{\varphi}(\sqrt{k}x)\right]^{\frac{1}{k}} = (3{,}7163)^{\frac{1-k}{k}} \left[\hat{\varphi}(\sqrt{k}x)\right]^{\frac{1}{k}}, \qquad (16.4.2)$$

где k произвольно. Порядок вычислений по этой формуле такой же, как по формуле (16.2.2).

V. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\hat{\Phi}_0(x)$

В таблице приведены значения функции (§ 5.1)

$$\hat{\Phi}_0(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\rho^2 t^2}\, dt \qquad (16.5.1)$$

для x от 0 до 5,768. При $x \geqslant 5{,}769$ значения $\hat{\Phi}_0(x)$ отличаются от 0,5 меньше чем на 0,00005 и округлены до 0,5000. Таблица разбита на две части: в первой приведены значения функции для $x = 0(0{,}001)3{,}509$, во второй сгруппированы превосходящие 3,504 значения x, которым соответствуют одинаковые табличные значения функции. Для расчета таблицы использовано разложение $\hat{\Phi}_0(x)$ в ряд

$$\hat{\Phi}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\rho x)^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}. \qquad (16.5.2)$$

Если при малых x есть необходимость получить более точные значения функции, то следует воспользоваться указанным выше рядом в виде

$$\hat{\Phi}_0(x) = 0{,}26908\,(x - 0{,}07582x^3 + 0{,}00517x^5 - \ldots). \qquad (16.5.3)$$

При $x<0,5$ достаточно учесть два члена ряда, чтобы получить значения $\hat{\Phi}_0(x)$ с погрешностью не более 0,1%.

Если есть необходимость получить более точное значение функции при $x \geqslant 4,5$, то следует вычислить величину $y=0,6745\,x$ и применить к y равенство (16.3.3).

VI. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\varphi(x;\ \mu)$

В таблице приведены значения функции (§ 4.5)

$$\psi(x;\ \mu) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!} \tag{16.6.1}$$

для $\mu=0,1(0,1)15$; 16(2)30; 40(10)100 и целых значений x. Таблица не заполнена для тех значений аргументов, при которых значения функции меньше 0,00005 и округлены до нуля.

VII. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\widetilde{\Psi}(x;\ \mu)$

В таблице приведены значения функций (§ 4.5)

$$\widetilde{\Psi}(x;\ \mu) = \sum_{i=x}^{\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^i}{i!}. \tag{16.7.1}$$

Таблица построена так же, как табл. VI.

VIII. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ $p(x;\ N,\ n,\ k)$ и $P(x;\ N,\ n,\ k)$

В таблице приведены значения функций (§ 4.3)

$$p(x;\ N,\ n,\ k) = \frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}; \tag{16.8.1}$$

$$P(x;\ N,\ n,\ k) = \sum_{i=0}^{x} p(i;\ N,\ n,\ k) \tag{16.8.2}$$

для $N=2(2)24$, $n=1(1)\frac{N}{2}$, $k=1(1)n$, $x=1(1)k$. Для вычисления значений функций p и P при других возможных сочетаниях N, n, k и x следует пользоваться формулами приведения (4.3.6) и (4.3.7).

Для вычисления значений функции P при нечетных N допускается линейная интерполяция по следующему правилу:

$$P(x;\ 2m+1,\ n,\ k) \approx \frac{1}{2}[P(x;\ 2m,\ n,\ k) + P(x;\ 2m+2,\ n,\ k)]. \qquad (16.8.3)$$

Аналогичная формула справедлива для функции p.

Пример 16.8.1. Требуется вычислить P (3; 15, 6, 4). Находим в таблице для $N=14$, $n=6$, $\kappa=4$ и $x=3$ значение P, равное 0,9850. Аналогично находим P (3; 16, 6, 4) = 0,9918, откуда

$$P(3;\ 15,\ 6,\ 4) \approx \frac{1}{2}(0{,}9850 + 0{,}9918) = 0{,}9884.$$

Точное значение P(3; 15, 6, 4) = 0,9890; погрешность интерполяции — 0,06%.

Пример 16.8.2. Требуется вычислить P(3; 21, 7, 10) и p(3; 21, 7, 10). Так как в этом примере $k>n$, то непосредственно найти в таблице требуемые значения P и p нельзя. Поэтому используем формулу (4.3.6′), согласно которой

$$P(3;\ 21,\ 7,\ 10) = P(3;\ 21,\ 10,\ 7).$$

Далее находим в таблице P(3; 20, 10, 7) = 0,5000 и P(3; 22, 10, 7) = 0,6161, откуда

$$P(3;\ 21,\ 7,\ 10) \approx \frac{1}{2}(0{,}5000 + 0{,}6161) = 0{,}5580.$$

Точное значение P(3; 21, 7, 10) = 0,5619; погрешность интерполяции — 0,7%.

Аналогично находим, пользуясь формулой (4.3.6):

$$p(3;\ 21,\ 7,\ 10) = p(3;\ 21,\ 10,\ 7) \approx \frac{1}{2}[p(3;\ 20,\ 10,\ 7) + p(3;\ 22,\ 10,\ 7)] = \frac{1}{2}(0{,}3251 + 0{,}3483) = 0{,}3367.$$

Точное значение p(3; 21, 7, 10) = 0,3410, погрешность интерполяции — 1,3%.

Пример 16.8.3. Требуется вычислить $P(3;\ 19,\ 11,\ 8)$. Так как $n > \frac{N}{2}$, то непосредственное применение таблицы невозможно. Используя последнюю строку формулы (4.3.7′), получим

$$P(3;\ 19,\ 11,\ 8) = 1 - P(4;\ 19,\ 8,\ 8) = 1 - \frac{1}{2}\,[P(4;\ 18,\ 8,\ 8) +$$

$$+ P(4;\ 20,\ 8,\ 8)] = 1 - \frac{1}{2}\,(0,8158 + 0,8868) = 0,1487.$$

Точное значение $P(3,\ 19,\ 11,\ 8) = 0,1438$; погрешность интерполяции — 3,4%.

IX. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $y = -\ln(1-x)$*

Таблица содержит абсолютные значения натуральных логарифмов чисел $(1-x)$ для $x=0(0,0001)0,9999$. В диапазонах $x=0$—0,0099; 0,0100—0,0951; 0,0952—0,9999 таблица содержит соответственно 6, 5 и 4 знака после запятой.

Таблица служит для вычисления значений функции $P=1-(1-p)^n$ при целых и дробных значениях n. Вычисления с дробными n весьма распространены в приближенных методах.

Использование таблицы основано на том, что равенство $P=1-(1-p)^n$ эквивалентно равенству

$$\ln(1-P) = n\ln(1-p)$$

и состоит в следующем:

— по заданному значению p, полагая $x=p$, отыскивают в таблице соответствующее значение $y=-\ln(1-p)$, которое умножается на n; в результате получаем $-\ln(1-P)$;

---

* Преимущество натуральных логарифмов перед десятичными состоит прежде всего в том, что устраняются два лишних действия: 1) переход от искусственной формы десятичных логарифмов к естественной; 2) обратный переход при определении конечного результата. Но даже при составлении таблицы десятичных логарифмов в естественной форме, чем были бы устранены эти лишние действия, не исчезают некоторые преимущества натуральных логарифмов чисел вида $(1-x)$; 1) близость малых значений x и $\ln(1-x)$, что облегчает контроль вычислений; 2) простота ряда для $\ln(1-x)$, если возникает необходимость его использовать.

— полученное число или ближайшее к нему отыскивается в табл. IX; соответствующее значение входа x равно искомому значению P.

Пример 16.9.1. Куплено 11 билетов лотереи. Вероятность p выигрыша на один билет равна 0,08. Требуется определить вероятность P хотя бы одного выигрыша. Находим в таблице $y=-\ln(1-0{,}08)=0{,}08338$. Умножаем это число на 11 и получаем 0,9172. Отыскиваем полученное число в таблице. Ему отвечает значение входа в таблицу, равное 0,6004. Это и есть искомое значение P.

Пример 16.9.2. По цели стреляют две пушки. Вероятность поражения цели p при безотказной стрельбе одной пушки равна 0,43. Вероятность r безотказной стрельбы — 0,9. Требуется найти вероятность поражения цели. Для приближенного решения находим n — математическое ожидание числа стрельб, равное $2\times 0{,}9=1{,}8$, и принимаем $P=1-(1-0{,}43)^{1,8}$. Из табл. IX находим $\ln(1-0{,}43)=0{,}5621$, умножаем на 1,8 и получаем 1,0118. Отыскиваем в табл. IX это число и определяем соответствующее ему значение входа 0,6364, равное искомому значению P. Значение P, вычисленное по точной формуле, равно 0,6242, погрешность — 1,7%.

Если есть необходимость уточнить значения функции $y=-\ln(1-x)$ при малых x, то следует использовать ряд

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots \qquad (16.9.1)$$

При $x\leqslant 0{,}001000$ достаточно учесть один член ряда, чтобы погрешность табличного значения функции не превосходила 0,1%.

Табл. IX позволяет решать следующие задачи.

1. Определить число n независимых испытаний, необходимых для того, чтобы событие A произошло хотя бы один раз с вероятностью P, если вероятность его появления при одном испытании равна p.

Решение этой задачи производится по формуле

$$n=\frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}. \qquad (16.9.2)$$

Пример 16.9.3. Цель поражается одним снарядом с вероятностью $p=0{,}048$. Сколько снарядов следует израсходовать, чтобы вероятность поражения цели P равнялась 0,9, если выстрелы независимы. Находим $-\ln(1-0{,}048)=0{,}04919$ и $-\ln(1-0{,}9)=2{,}3026$. Делим 2,3026 на 0,04919 и получаем $n=47$.

2. Определить, какова должна быть вероятность p наступления события A при одном испытании для того, чтобы при заданном числе независимых испытаний n была достигнута заданная вероятность P появления события хотя бы один раз. Задача решается с помощью формулы

$$\ln(1-p)=\frac{\ln(1-P)}{n}.$$

Пример 16.9.4. Пусть $P=0{,}8$; $n=10$. Требуется определить p. Находим в таблице $-\ln(1-0{,}8)=1{,}6094$. Отсюда

$$-\ln(1-p)=\frac{1{,}6094}{10}\approx 0{,}1609.$$

Отыскиваем это число в таблице и соответствующее ему значение входа 0,1486, равное искомому значению p.

3. Определить вероятность Q того, что событие A не произойдет ни разу при n независимых испытаниях, если вероятность его появления при одном испытании равна p. Для решения задачи надо найти P по заданным n и p, а затем вычислить

$$Q=1-P.$$

X. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $W(r, h)$

В таблице приведены вероятности попадания в круг S радиуса R при смещении центра круга относительно центра рассеивания на величину d и круговом нормальном распределении с радиальным СКО σ (§ 7.1). Входами в таблицу являются величины:

$$r=\frac{R}{\sigma},\quad h=\frac{d}{\sigma}.$$

Искомая вероятность определяется равенством

$$W(r,\ h)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_k} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy, \qquad (16.10.1)$$

где $S_к$ — круг радиуса r с центром, смещенным на величину h относительно центра рассеивания.

Таблица составлена для $r=0(0,1)10$ и $h=0(0,1)9,9$. Для значений аргументов, при которых значения функции меньше 0,00005 и округлены до нуля или больше 0,99995 и округлены до единицы, таблица не заполнена.

Для вычисления таблицы функция $W(r,\ h)$ была выражена в виде

$$W(r,\ h)=r\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^1 e^{-\frac{r^2t^2}{2}}\left[\Phi_0\left(r\sqrt{1-t^2}+h\right)+\right.$$

$$\left.+\,\Phi_0\left(r\sqrt{1-t^2}-h\right)\right]dt. \qquad (16.10.2)$$

Интеграл в правой части вычислялся по формуле Гаусса с 20 узлами. Для контроля он был вычислен также по формуле Симпсона с делением промежутка интегрирования на 500 частей.

Пример 16.10.1. Найти вероятность попадания в круг, радиус которого равен 5 *м*, а удаление центра — 15 и 25 *м*, если радиальное СКО равно 5 *м*.

Находим $r=\frac{5}{5}=1$; $h_1=\frac{15}{5}=3$; $h_2=\frac{25}{5}=5$.

При $r=1$ и $h_1=3$ находим в таблице $W=0{,}0108$.

При $r=1$ и $h_2=5$ значение W в таблице отсутствует.

Значит, оно меньше 0,00005 и принимается равным нулю.

Если круговое распределение задано через радиальное срединное отклонение E, то перед пользованием таблицей следует вычислить $\sigma=1{,}4826\,E$.

Если требуется вычислить значение $W(r,\ h)$ за пределами табл. X, то используется асимптотическое разложение

$$W(r,\ h) = 0{,}5 + \Phi_0(a) - 0{,}5\varphi(a)\left[\frac{1}{r} + \frac{3a}{4r^2} + \frac{5a^2+1}{8r^3} + \frac{5a(7a^2+3)}{64r^4} + \ldots\right], \quad (16.10.3)$$

где $a = r - h$.

В частности, если $r \geqslant 10$ и $a > 4$, то $W(r,\ h) = 1$, а если $h \geqslant 10$ и $a < -4$, то $W(r,\ h) = 0$.

Пример 16.10.2. Найти $W(r,\ h)$ при $r = 9$ и $h = 10$. Определяем $a = 9 - 10 = -1$. В табл. III находим $\Phi_0(-1) = -\Phi_0(1) = -0{,}3413$, а в табл. II — $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0{,}2420$. Подставив эти величины в (16.10.3), получим $W(9,\ 10) = 0{,}1462$.

XI. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $V(r,\ h)$

В таблице приведены вероятности попадания в сферу S радиуса R при смещении центра сферы относительно центра рассеивания на величину d и сферическом нормальном распределении с радиальным СКО σ (§ 7.5). Входами в таблицу являются величины:

$$r = \frac{R}{\sigma}; \quad h = \frac{d}{\sigma}.$$

Искомая вероятность определяется равенством

$$V(r,\ h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{S_c} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz, \quad (16.11.1)$$

где S_c — сфера радиуса r с центром, смещенным на h относительно центра рассеивания.

Таблица составлена для $r = 0(0{,}1)9{,}9$ и $h = 0(0{,}1)9{,}9$. Для значений аргументов, при которых значения функции меньше 0,00005 и округлены до нуля или больше 0,99995 и округлены до единицы, таблица не заполнена.

Для вычисления таблицы функция $V(r, h)$ была выражена в виде

$$V(r, h) = \Phi_0(r+h) + \Phi_0(r-h) - \frac{\varphi(r-h)}{h}\left(1-e^{-2rh}\right), \tag{16.11.2}$$

где Φ_0 — функция, определяемая равенством (5.1.17);
φ — функция, определяемая равенством (5.1.11).

Пример 16.11.1. Найти вероятность попадания в сферу, радиус которой 5 *м*, а удаление центра — 15 *м*, если $\sigma = 5$ *м*. Вычисляем $r = \frac{5}{5} = 1$; $h = \frac{15}{5} = 3$ и находим в таблице $V = 0{,}0048$.

Если сферическое распределение задано через радиальное срединное отклонение E, то перед пользованием таблицей следует вычислить $\sigma = 1{,}4826E$.

Если требуется вычислить значение $V(r, h)$ за пределами табл. XI, то используется формула (16.11.2).

При $r \geqslant 10$ и $r - h > 4$ значения $V(r, h)$ превосходят 0,99995 и могут быть округлены до единицы, а при $h \geqslant 10$ и $r - h < -4$ значения $V(r, h)$ меньше 0,00005 и могут быть округлены до нуля.

При $rh > 5$ можно вычислять $V(r, h)$ по приближенной формуле

$$V(r, h) \approx \Phi_0(r+h) + \Phi_0(r-h) - \frac{\varphi(r-h)}{h}, \tag{16.11.3}$$

а при $rh < 0{,}0002$

$$V(r, h) \approx \Phi_0(r+h) + \Phi_0(r-h) - 2r\varphi(r-h). \tag{16.11.4}$$

XII. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ χ^2

В таблице приведены значения функции распределения χ^2 (§ 5.11)

$$F_k(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{k}{2}-1}\, dt \tag{5.11.3}$$

для $\chi^2 = 1(1)30$ и $k = 1(1)20$. При $k > 20$ значения функции $F_k(\chi^2)$ следует вычислять по приближенной формуле (5.11.9).

XIIa. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ χ_1^2 и χ_2^2

В таблице приведены значения величин χ_1^2 и χ_2^2, удовлетворяющие уравнениям (§ 13.5):

$$F_k\left(\chi_1^2\right) = \frac{1-\gamma}{2};\ F_k\left(\chi_2^2\right) = \frac{1+\gamma}{2} \qquad (16.12\text{a}.1)$$

для $k = 1(0)30$ и γ, равных 0,99; 0,95; 0,90. Для других γ и $k \leqslant 30$ χ_1^2 и χ_2^2 находят с помощью табл. XII. При $k > 30$ приближенные значения χ_1^2 и χ_2^2 находят из уравнений:

$$2\Phi_0\left(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2\chi_1^2}\right) = 2\Phi_0\left(\sqrt{2\chi_2^2} - \sqrt{2k-1}\right) = \gamma. \qquad (16.12\text{a}.2)$$

XIII. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $S_k(t)$

В таблице приведены значения функции распределения Стьюдента (§ 5.12)

$$S_k(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt \qquad (16.13.1)$$

для $t = 0{,}0(0{,}1)6{,}0$ и $k = 1(1)19$, а также $k = \infty$. При $k \to \infty$ $S_k(t) \to 0{,}5 + \Phi_0(t)$. При $k \geqslant 20$ значения функции $S_k(t)$ следует вычислять по приближенной формуле (5.12.6).

XIIIa. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ β_γ

В таблице приведены значения величины β_γ, удовлетворяющие уравнению (§ 13.5)

$$2S_k(\beta_\gamma) - 1 = \gamma \qquad (16.13а.1)$$

для $k = 1(0)20$ и γ, равных 0,99; 0,95 и 0,90. Для других γ и $k \leqslant 20$ β_γ находят с помощью табл. XIII. При $k > 20$ приближенное значение β_γ находят из уравнения

$$2\Phi_0(\beta_\gamma) = \gamma. \qquad (16.13а.2)$$

XIV. ТАБЛИЦА ВЕРОЯТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛМОГОРОВА $P(\lambda)$

В таблице приведены значения функции (§ 14.1)

$$P(\lambda) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2\lambda^2}, \qquad (16.14.1)$$

оценивающей вероятность соответствия эмпирического распределения теоретическому по критерию согласия А. Н. Колмогорова для $\lambda = 0{,}33(0{,}01)2{,}31$. При $\lambda < 0{,}33$ значения $P(\lambda)$ равны 1,0000.

XV. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ β_p

В таблице приведены значения величины β_p (§ 14.2), удовлетворяющие уравнению

$$p_\delta = P\left\{\frac{X_{(n)} - \bar{x}}{s_1} > \beta_p\right\} \qquad (16.15.1)$$

и являющиеся границей между допустимыми и анормальными измерениями, для трех уровней значимости

P_δ и для числа измерений $n=4(1)25$. При $n>25$ следует использовать приближенное равенство (14.2.1).

XVI. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

$$z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$$

В таблице приведены значения функции (§ 14.3)

$$z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} \tag{16.16.1}$$

для $r=0{,}00(0{,}01)0{,}99$. В последней строке таблицы приведены значения z для $r=0{,}990(0{,}001)0{,}999$.

XVII. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ e^{-x}

Таблица разбита на три части. В первых двух частях приведены значения e^{-x} для $x=0(0{,}001)$ 9,903. При $x\geqslant 9{,}904$ значения e^{-x} меньше чем 0,00005 и округлены до нуля. В первой части приведены значения функции для $x=0(0{,}001)4{,}009$, во второй сгруппированы превосходящие 4,000 значения x, которым соответствуют одинаковые табличные значения функции. В третьей части приведены значения функции с пятью значащими цифрами для $x=1(1)20$; $30(10)100$; 150; 200.

Если при больших x есть необходимость уточнить значения e^{-x}, то следует воспользоваться равенством

$$e^{-x}=\left(e^{-kx}\right)^{\frac{1}{k}}, \tag{16.17.1}$$

где k произвольно. Целесообразно выбирать k так, чтобы значение e^{-kx} содержало четыре значащие цифры.

ТАБЛИЦА 1

НЕКОТОРЫЕ ПОСТОЯННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИНТЕГРАЛЫ

π	3,141593	$\frac{1}{\pi}$	0,318310	ρ	0,476936
2π	6,283185	$\frac{1}{2\pi}$	0,159155	ρ^2	0,227468
$\frac{\pi}{2}$	1,570796	$\frac{2}{\pi}$	0,636620	ρ^3	0,108488
π^2	9,869604	$\frac{1}{\pi^2}$	0,101321	$\rho\sqrt{2}$	0,674490
$\sqrt{\pi}$	1,772454	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,564190	$\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}$	0,269082
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,398942	$\frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}$	0,538165
$\pi\sqrt{\pi}$	5,568328	$\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}$	0,179587	$\frac{\rho^2}{\pi}$	$0{,}724054 \cdot 10^{-1}$
$2\pi\sqrt{2\pi}$	15,749610	$\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}$	$0{,}634936 \cdot 10^{-1}$	$\frac{\rho^3}{\pi\sqrt{\pi}}$	$0{,}194830 \cdot 10^{-1}$
$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$	1,128379	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,886227	$\rho\sqrt{\pi}$	0,845348

Продолжение

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,253314	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,797885	$\frac{1}{\rho}$	2,096716
e	2,718282	$\frac{1}{e}$	0,367879	$\frac{1}{\rho^2}$	4,396219
e^2	7,389056	$\frac{1}{e^2}$	0,135335	$\frac{1}{\rho^3}$	9,217623
$\sqrt{e}$	1,648721	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	0,606531	$\frac{1}{\rho\sqrt{2}}$	1,482602
$M' = \log_e 10$	2,302585	$M = \log_{10} e$	0,434294	$\frac{\sqrt{\pi}}{\rho}$	3,716333
$\log_e \pi$	1,144730	$\log_{10} \pi$	0,497150	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\rho}$	1,858166
$\sqrt{2}$	1,414214	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,707107	$\frac{\pi}{\rho^2}$	13,811128
Радиан	$57^\circ,2958$	1°	$0,174533 \cdot 10^{-1}$	$\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\rho^3}$	51,326747
»	$3437',75$	$1'$	$0,290888 \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}$	1,182945
»	$206265''$	$1''$	$0,484814 \cdot 10^{-5}$	1 т. д.	$1,047198 \cdot 10^{-3}$
»	954,930 т. д.	1°	16,666667 т. д.	»	$0^\circ,060000$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\rho}$
$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\rho^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\rho}$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = 0$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\rho^2x^2}dx = 0$
$\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$	$\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$	$\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\rho^2x^2}dx = \frac{1}{2\rho^2}$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\rho^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\rho^3}$
$\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$	$\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-\rho^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\rho^3}$

ТАБЛИЦА II

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989
0,01	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989
0,02	3989	3989	3988	3988	3988	3988	3988	3988	3988	3988
0,03	3988	3988	3987	3987	3987	3987	3987	3987	3987	3986
0,04	3986	3986	3986	3986	3986	3985	3985	3985	3985	3985
0,05	3984	3984	3984	3984	3984	3983	3983	3983	3983	3982
0,06	3982	3982	3982	3982	3981	3981	3981	3980	3980	3980
0,07	3980	3979	3979	3979	3979	3978	3978	3978	3977	3977
0,08	3977	3976	3976	3976	3975	3975	3975	3974	3974	3974
0,09	3973	3973	3973	3972	3972	3971	3971	3971	3970	3970
0,10	3970	3969	3969	3968	3968	3967	3967	3967	3966	3966
0,11	3965	3965	3964	3964	3964	3963	3963	3962	3962	3961
0,12	3961	3960	3960	3959	3959	3958	3958	3957	3957	3956
0,13	3956	3955	3955	3954	3954	3953	3953	3952	3952	3951
0,14	3951	3950	3949	3949	3948	3948	3947	3947	3946	3945
0,15	3945	3944	3944	3943	3942	3942	3941	3941	3940	3939
0,16	3939	3938	3937	3937	3936	3935	3935	3934	3934	3933
0,17	3932	3932	3931	3930	3929	3929	3928	3927	3927	3926
0,18	3925	3925	3924	3923	3922	3922	3921	3920	3920	3919
0,19	3918	3917	3917	3916	3915	3914	3914	3913	3912	3911
0,20	3910	3910	3909	3908	3907	3906	3906	3905	3904	3903
0,21	3902	3902	3901	3900	3899	3898	3897	3897	3896	3895
0,22	3894	3893	3892	3891	3891	3890	3889	3888	3887	3886
0,23	3885	3884	3883	3883	3882	3881	3880	3879	3878	3877
0,24	3876	3875	3874	3873	3872	3871	3871	3870	3869	3868
0,25	3867	3866	3865	3864	3863	3862	3861	3860	3859	3858
0,26	3857	3856	3855	3854	3853	3852	3851	3850	3849	3848
0,27	3847	3846	3845	3843	3842	3841	3840	3839	3838	3837
0,28	3836	3835	3834	3833	3832	3831	3830	3828	3827	3826
0,29	3825	3824	3823	3822	3821	3820	3818	3817	3816	3815
0,30	3814	3813	3812	3810	3809	3808	3807	3806	3805	3803
0,31	3802	3801	3800	3799	3798	3796	3795	3794	3793	3792
0,32	3790	3789	3788	3787	3785	3784	3783	3782	3780	3779
0,33	3778	3777	3776	3774	3773	3772	3770	3769	3768	3767
0,34	3765	3764	3763	3762	3760	3759	3758	3756	3755	3754
0,35	3752	3751	3750	3748	3747	3746	3744	3743	3742	3740
0,36	3739	3738	3736	3735	3734	3732	3731	3730	3728	3727
0,37	3725	3724	3723	3721	3720	3719	3717	3716	3714	3713
0,38	3712	3710	3709	3707	3706	3704	3703	3702	3700	3699
0,39	3697	3696	3694	3693	3691	3690	3689	3687	3686	3684
0,40	3683	3681	3680	3678	3677	3675	3674	3672	3671	3669

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,41	0,3668	3666	3665	3663	3662	3660	3659	3657	3656	3654
0,42	3653	3651	3650	3648	3646	3645	3643	3642	3640	3639
0,43	3637	3636	3634	3632	3631	3629	3628	3626	3625	3623
0,44	3621	3620	3618	3617	3615	3613	3612	3610	3609	3607
0,45	3605	3604	3602	3600	3599	3597	3595	3594	3592	3591
0,46	3589	3587	3586	3584	3582	3581	3579	3577	3576	3574
0,47	3572	3571	3569	3567	3566	3564	3562	3560	3559	3557
0,48	3555	3554	3552	3550	3548	3547	3545	3543	3542	3540
0,49	3538	3536	3535	3533	3531	3529	3528	3526	3524	3522
0,50	3521	3519	3517	3515	3514	3512	3510	3508	3506	3505
0,51	3503	3501	3499	3498	3496	3494	3492	3490	3489	3487
0,52	3485	3483	3481	3479	3478	3476	3474	3472	3470	3468
0,53	3467	3465	3463	3461	3459	3457	3456	3454	3452	3450
0,54	3448	3446	3444	3443	3441	3439	3437	3435	3433	3431
0,55	3429	3428	3426	3424	3422	3420	3418	3416	3414	3412
0,56	3410	3409	3407	3405	3403	3401	3399	3397	3395	3393
0,57	3391	3389	3387	3385	3383	3382	3380	3378	3376	3374
0,58	3372	3370	3368	3366	3364	3362	3360	3358	3356	3354
0,59	3352	3350	3348	3346	3344	3342	3340	3338	3336	3334
0,60	3332	3330	3328	3326	3324	3322	3320	3318	3316	3314
0,61	3312	3310	3308	3306	3304	3302	3300	3298	3296	3294
0,62	3292	3290	3288	3286	3284	3282	3280	3278	3275	3273
0,63	3271	3269	3267	3265	3263	3261	3259	3257	3255	3253
0,64	3251	3249	3246	3244	3242	3240	3238	3236	3234	3232
0,65	3230	3228	3226	3223	3221	3219	3217	3215	3213	3211
0,66	3209	3207	3204	3202	3200	3198	3196	3194	3192	3190
0,67	3187	3185	3183	3181	3179	3177	3175	3172	3170	3168
0,68	3166	3164	3162	3159	3157	3155	3153	3151	3149	3146
0,69	3144	3142	3140	3138	3136	3133	3131	3129	3127	3125
0,70	3123	3120	3118	3116	3114	3112	3109	3107	3105	3103
0,71	3101	3098	3096	3094	3092	3090	3087	3085	3083	3081
0,72	3079	3076	3074	3072	3070	3067	3065	3063	3061	3059
0,73	3056	3054	3052	3050	3047	3045	3043	3041	3038	3036
0,74	3034	3032	3029	3027	3025	3023	3020	3018	3016	3014
0,75	3011	3009	3007	3005	3002	3000	2998	2996	2993	2991
0,76	2989	2986	2984	2982	2980	2977	2975	2973	2971	2968
0,77	2966	2964	2961	2959	2957	2955	2952	2950	2948	2945
0,78	2943	2941	2938	2936	2934	2932	2929	2927	2925	2922
0,79	2920	2918	2915	2913	2911	2908	2906	2904	2902	2899
0,80	2897	2895	2892	2890	2888	2885	2883	2881	2878	2876
0,81	2874	2871	2869	2867	2864	2862	2860	2857	2855	2853
0,82	2850	2848	2846	2843	2841	2839	2836	2834	2832	2829
0,83	2827	2825	2822	2820	2818	2815	2813	2810	2808	2806
0,84	2803	2801	2799	2796	2794	2792	2789	2787	2785	2782
0,85	2780	2777	2775	2773	2770	2768	2766	2763	2761	2759

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,86	0,2756	2754	2751	2749	2747	2744	2742	2740	2737	2735
0,87	2732	2730	2728	2725	2723	2721	2718	2716	2713	2711
0,88	2709	2706	2704	2701	2699	2697	2694	2692	2690	2687
0,89	2685	2682	2680	2678	2675	2673	2670	2668	2666	2663
0,90	2661	2658	2656	2654	2651	2649	2646	2644	2642	2639
0,91	2637	2634	2632	2630	2627	2625	2622	2620	2618	2615
0,92	2613	2610	2608	2606	2603	2601	2598	2596	2594	2591
0,93	2589	2586	2584	2582	2579	2577	2574	2572	2570	2567
0,94	2565	2562	2560	2557	2555	2553	2550	2548	2545	2543
0,95	2541	2538	2536	2533	2531	2529	2526	2524	2521	2519
0,96	2516	2514	2512	2509	2507	2504	2502	2500	2497	2495
0,97	2492	2490	2487	2485	2483	2480	2478	2475	2473	2471
0,98	2468	2466	2463	2461	2458	2456	2454	2451	2449	2446
0,99	2444	2441	2439	2437	2434	2432	2429	2427	2425	2422
1,00	2420	2417	2415	2412	2410	2408	2405	2403	2400	2398
1,01	2396	2393	2391	2388	2386	2383	2381	2379	2376	2374
1,02	2371	2369	2366	2364	2362	2359	2357	2354	2352	2350
1,03	2347	2345	2342	2340	2337	2335	2333	2330	2328	2325
1,04	2323	2321	2318	2316	2313	2311	2308	2306	2304	2301
1,05	2299	2296	2294	2292	2289	2287	2284	2282	2280	2277
1,06	2275	2272	2270	2267	2265	2263	2260	2258	2255	2253
1,07	2251	2248	2246	2243	2241	2239	2236	2234	2231	2229
1,08	2227	2224	2222	2219	2217	2215	2212	2210	2207	2205
1,09	2203	2200	2198	2195	2193	2191	2188	2186	2183	2181
1,10	2179	2176	2174	2171	2169	2167	2164	2162	2159	2157
1,11	2155	2152	2150	2147	2145	2143	2140	2138	2135	2133
1,12	2131	2128	2126	2124	2121	2119	2116	2114	2112	2109
1,13	2107	2104	2102	2100	2097	2095	2093	2090	2088	2085
1,14	2083	2081	2078	2076	2074	2071	2069	2066	2064	2062
1,15	2059	2057	2055	2052	2050	2048	2045	2043	2040	2038
1,16	2036	2033	2031	2029	2026	2024	2022	2019	2017	2014
1,17	2012	2010	2007	2005	2003	2000	1998	1996	1993	1991
1,18	1989	1986	1984	1982	1979	1977	1975	1972	1970	1968
1,19	1965	1963	1961	1958	1956	1954	1951	1949	1947	1944
1,20	1942	1940	1937	1935	1933	1930	1928	1926	1923	1921
1,21	1919	1916	1914	1912	1909	1907	1905	1902	1900	1898
1,22	1895	1893	1891	1888	1886	1884	1882	1879	1877	1875
1,23	1872	1870	1868	1865	1863	1861	1859	1856	1854	1852
1,24	1849	1847	1845	1842	1840	1838	1836	1833	1831	1829
1,25	1826	1824	1822	1820	1817	1815	1813	1811	1808	1806
1,26	1804	1801	1799	1797	1795	1792	1790	1788	1786	1783
1,27	1781	1779	1777	1774	1772	1770	1767	1765	1763	1761
1,28	1758	1756	1754	1752	1749	1747	1745	1743	1741	1738
1,29	1736	1734	1732	1729	1727	1725	1723	1720	1718	1716
1,30	1714	1711	1709	1707	1705	1703	1700	1698	1696	1694

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,31	0,1691	1689	1687	1685	1683	1680	1678	1676	1674	1672
1,32	1669	1667	1665	1663	1661	1658	1656	1654	1652	1650
1,33	1647	1645	1643	1641	1639	1636	1634	1632	1630	1628
1,34	1626	1623	1621	1619	1617	1615	1613	1610	1608	1606
1,35	1604	1602	1600	1597	1595	1593	1591	1589	1587	1584
1,36	1582	1580	1578	1576	1574	1572	1569	1567	1565	1563
1,37	1561	1559	1557	1554	1552	1550	1548	1546	1544	1542
1,38	1539	1537	1535	1533	1531	1529	1527	1525	1523	1520
1,39	1518	1516	1514	1512	1510	1508	1506	1504	1501	1499
1,40	1497	1495	1493	1491	1489	1487	1485	1483	1481	1478
1,41	1476	1474	1472	1470	1468	1466	1464	1462	1460	1458
1,42	1456	1454	1452	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437
1,43	1435	1433	1431	1429	1427	1425	1423	1421	1419	1417
1,44	1415	1413	1411	1408	1406	1404	1402	1400	1398	1396
1,45	1394	1392	1390	1388	1386	1384	1382	1380	1378	1376
1,46	1374	1372	1370	1368	1366	1364	1362	1360	1358	1356
1,47	1354	1352	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1338	1336
1,48	1334	1332	1330	1328	1326	1324	1323	1321	1319	1317
1,49	1315	1313	1311	1309	1307	1305	1303	1301	1299	1297
1,50	1295	1293	1291	1289	1287	1285	1284	1282	1280	1278
1,51	1276	1274	1272	1270	1268	1266	1264	1262	1260	1259
1,52	1257	1255	1253	1251	1249	1247	1245	1243	1241	1240
1,53	1238	1236	1234	1232	1230	1228	1226	1224	1223	1221
1,54	1219	1217	1215	1213	1211	1209	1208	1206	1204	1202
1,55	1200	1198	1196	1195	1193	1191	1189	1187	1185	1183
1,56	1182	1180	1178	1176	1174	1172	1171	1169	1167	1165
1,57	1163	1161	1160	1158	1156	1154	1152	1150	1149	1147
1,58	1145	1143	1141	1140	1138	1136	1134	1132	1131	1129
1,59	1127	1125	1123	1122	1120	1118	1116	1115	1113	1111
1,60	1109	1107	1106	1104	1102	1100	1099	1097	1095	1093
1,61	1092	1090	1088	1086	1085	1083	1081	1079	1078	1076
1,62	1074	1072	1071	1069	1067	1065	1064	1062	1060	1058
1,63	1057	1055	1053	1052	1050	1048	1046	1045	1043	1041
1,64	1040	1038	1036	1035	1033	1031	1029	1028	1026	1024
1,65	1023	1021	1019	1018	1016	1014	1013	1011	1009	1008
1,66	1006	1004	1003	1001	0999	0998	0996	0994	0993	0991
1,67	0989	0988	0986	0984	0983	0981	0979	0978	0976	0974
1,68	0973	0971	0970	0968	0966	0965	0963	0961	0960	0958
1,69	0957	0955	0953	0952	0950	0949	0947	0945	0944	0942
1,70	0940	0939	0937	0936	0934	0933	0931	0929	0928	0926
1,71	0925	0923	0921	0920	0918	0917	0915	0914	0912	0910
1,72	0909	0907	0906	0904	0903	0901	0900	0898	0896	0895
1,73	0893	0892	0890	0889	0887	0886	0884	0883	0881	0879
1,74	0878	0876	0875	0873	0872	0870	0869	0867	0866	0864
1,75	0863	0861	0860	0858	0857	0855	0854	0852	0851	0849

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,76	0,0848	0846	0845	0843	0842	0840	0839	0837	0836	0834
1,77	0833	0831	0830	0829	0827	0826	0824	0823	0821	0820
1,78	0818	0817	0815	0814	0812	0811	0810	0808	0807	0805
1,79	0804	0802	0801	0799	0798	0797	0795	0794	0792	0791
1,80	0790	0788	0787	0785	0784	0782	0781	0780	0778	0777
1,81	0775	0774	0773	0771	0770	0768	0767	0766	0764	0763
1,82	0761	0760	0759	0757	0756	0755	0753	0752	0750	0749
1,83	0748	0746	0745	0744	0742	0741	0739	0738	0737	0735
1,84	0734	0733	0731	0730	0729	0727	0726	0725	0723	0722
1,85	0721	0719	0718	0717	0715	0714	0713	0711	0710	0709
1,86	0707	0706	0705	0703	0702	0701	0700	0698	0697	0696
1,87	0694	0693	0692	0690	0689	0688	0687	0685	0684	0683
1,88	0681	0680	0679	0678	0676	0675	0674	0673	0671	0670
1,89	0669	0667	0666	0665	0664	0662	0661	0660	0659	0657
1,90	0656	0655	0654	0652	0651	0650	0649	0647	0646	0645
1,91	0644	0643	0641	0640	0639	0638	0636	0635	0634	0633
1,92	0632	0630	0629	0628	0627	0626	0624	0623	0622	0621
1,93	0620	0618	0617	0616	0615	0614	0612	0611	0610	0609
1,94	0608	0606	0605	0604	0603	0602	0601	0599	0598	0597
1,95	0596	0595	0594	0592	0591	0590	0589	0588	0587	0586
1,96	0584	0583	0582	0581	0580	0579	0578	0576	0575	0574
1,97	0573	0572	0571	0570	0569	0567	0566	0565	0564	0563
1,98	0562	0561	0560	0559	0557	0556	0555	0554	0553	0552
1,99	0551	0550	0549	0548	0546	0545	0544	0543	0542	0541
2,00	0540	0539	0538	0537	0536	0535	0533	0532	0531	0530
2,01	0529	0528	0527	0526	0525	0524	0523	0522	0521	0520
2,02	0519	0518	0517	0516	0514	0513	0512	0511	0510	0509
2,03	0508	0507	0506	0505	0504	0503	0502	0501	0500	0499
2,04	0498	0497	0496	0495	0494	0493	0492	0491	0490	0489
2,05	0488	0487	0486	0485	0484	0483	0482	0481	0480	0479
2,06	0478	0477	0476	0475	0474	0473	0472	0471	0470	0469
2,07	0468	0467	0466	0465	0464	0463	0462	0461	0461	0460
2,08	0459	0458	0457	0456	0455	0454	0453	0452	0451	0450
2,09	0449	0448	0447	0446	0445	0444	0444	0443	0442	0441
2,10	0440	0439	0438	0437	0436	0435	0434	0433	0432	0432
2,11	0431	0430	0429	0428	0427	0426	0425	0424	0423	0423
2,12	0422	0421	0420	0419	0418	0417	0416	0415	0415	0414
2,13	0413	0412	0411	0410	0409	0408	0408	0407	0406	0405
2,14	0404	0403	0402	0401	0401	0400	0399	0398	0397	0396
2,15	0396	0395	0394	0393	0392	0391	0390	0390	0389	0388
2,16	0387	0386	0385	0385	0384	0383	0382	0381	0380	0380
2,17	0379	0378	0377	0376	0376	0375	0374	0373	0372	0371
2,18	0371	0370	0369	0368	0367	0367	0366	0365	0364	0363
2,19	0363	0362	0361	0360	0359	0359	0358	0357	0356	0356
2,20	0355	0354	0353	0352	0352	0351	0350	0349	0349	0348

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,21	0,0347	0346	0345	0345	0344	0343	0342	0342	0341	0340
2,22	0339	0339	0338	0337	0336	0336	0335	0334	0333	0333
2,23	0332	0331	0330	0330	0329	0328	0328	0327	0326	0325
2,24	0325	0324	0323	0322	0322	0321	0320	0320	0319	0318
2,25	0317	0317	0316	0315	0315	0314	0313	0312	0312	0311
2,26	0310	0310	0309	0308	0308	0307	0306	0305	0305	0304
2,27	0303	0303	0302	0301	0301	0300	0299	0299	0298	0297
2,28	0297	0296	0295	0295	0294	0293	0293	0292	0291	0291
2,29	0290	0289	0289	0288	0287	0287	0286	0285	0285	0284
2,30	0283	0283	0282	0281	0281	0280	0279	0279	0278	0277
2,31	0277	0276	0276	0275	0274	0274	0273	0272	0272	0271
2,32	0270	0270	0269	0269	0268	0267	0267	0266	0265	0265
2,33	0264	0264	0263	0262	0262	0261	0261	0260	0259	0259
2,34	0258	0258	0257	0256	0256	0255	0255	0254	0253	0253
2,35	0252	0252	0251	0250	0250	0249	0249	0248	0247	0247
2,36	0246	0246	0245	0245	0244	0243	0243	0242	0242	0241
2,37	0241	0240	0239	0239	0238	0238	0237	0237	0236	0235
2,38	0235	0234	0234	0233	0233	0232	0232	0231	0230	0230
2,39	0229	0229	0228	0228	0227	0227	0226	0226	0225	0224
2,40	0224	0223	0223	0222	0222	0221	0221	0220	0220	0219
2,41	0219	0218	0218	0217	0217	0216	0215	0215	0214	0214
2,42	0213	0213	0212	0212	0211	0211	0210	0210	0209	0209
2,43	0208	0208	0207	0207	0206	0206	0205	0205	0204	0204
2,44	0203	0203	0202	0202	0201	0201	0200	0200	0199	0199
2,45	0198	0198	0197	0197	0196	0196	0195	0195	0195	0194
2,46	0194	0193	0193	0192	0192	0191	0191	0190	0190	0189
2,47	0189	0188	0188	0187	0187	0187	0186	0186	0185	0185
2,48	0184	0184	0183	0183	0182	0182	0182	0181	0181	0180
2,49	0180	0179	0179	0178	0178	0177	0177	0177	0176	0176
2,50	0175	0175	0174	0174	0174	0173	0173	0172	0172	0171
2,51	0171	0171	0170	0170	0169	0169	0168	0168	0168	0167
2,52	0167	0166	0166	0165	0165	0165	0164	0164	0163	0163
2,53	0163	0162	0162	0161	0161	0160	0160	0160	0159	0159
2,54	0158	0158	0158	0157	0157	0156	0156	0156	0155	0155
2,55	0154	0154	0154	0153	0153	0153	0152	0152	0151	0151
2,56	0151	0150	0150	0149	0149	0149	0148	0148	0148	0147
2,57	0147	0146	0146	0146	0145	0145	0145	0144	0144	0143
2,58	0143	0143	0142	0142	0142	0141	0141	0140	0140	0140
2,59	0139	0139	0139	0138	0138	0138	0137	0137	0137	0136
2,60	0136	0135	0135	0135	0134	0134	0134	0133	0133	0133

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,61	0,0132	0132	0132	0131	0131	0131	0130	0130	0130	0129
2,62	0129	0129	0128	0128	0128	0127	0127	0127	0126	0126
2,63	0126	0125	0125	0125	0124	0124	0124	0123	0123	0123
2,64	0122	0122	0122	0121	0121	0121	0120	0120	0120	0119
2,65	0119	0119	0118	0118	0118	0118	0117	0117	0117	0116
2,66	0116	0116	0115	0115	0115	0114	0114	0114	0114	0113
2,67	0113	0113	0112	0112	0112	0111	0111	0111	0111	0110
2,68	0110	0110	0109	0109	0109	0109	0108	0108	0108	0107
2,69	0107	0107	0106	0106	0106	0106	0105	0105	0105	0104
2,70	0104	0104	0104	0103	0103	0103	0103	0102	0102	0102
2,71	0101	0101	0101	0101	0100	0100	0100	0100	0099	0099
2,72	0099	0098	0098	0098	0098	0097	0097	0097	0097	0096
2,73	0096	0096	0096	0095	0095	0095	0094	0094	0094	0094
2,74	0093	0093	0093	0093	0092	0092	0092	0092	0091	0091
2,75	0091	0091	0090	0090	0090	0090	0089	0089	0089	0089
2,76	0088	0088	0088	0088	0087	0087	0087	0087	0087	0086
2,77	0086	0086	0086	0085	0085	0085	0085	0084	0084	0084
2,78	0084	0083	0083	0083	0083	0083	0082	0082	0082	0082
2,79	0081	0081	0081	0081	0080	0080	0080	0080	0080	0079
2,80	0079	0079	0079	0078	0078	0078	0078	0078	0077	0077
2,81	0077	0077	0077	0076	0076	0076	0076	0075	0075	0075
2,82	0075	0075	0074	0074	0074	0074	0074	0073	0073	0073
2,83	0073	0073	0072	0072	0072	0072	0072	0071	0071	0071
2,84	0071	0071	0070	0070	0070	0070	0070	0069	0069	0069
2,85	0069	0069	0068	0068	0068	0068	0068	0067	0067	0067
2,86	0067	0067	0066	0066	0066	0066	0066	0065	0065	0065
2,87	0065	0065	0065	0064	0064	0064	0064	0064	0063	0063
2,88	0063	0063	0063	0063	0062	0062	0062	0062	0062	0061
2,89	0061	0061	0061	0061	0061	0060	0060	0060	0060	0060
2,90	0060	0059	0059	0059	0059	0059	0058	0058	0058	0058
2,91	0058	0058	0057	0057	0057	0057	0057	0057	0056	0056
2,92	0056	0056	0056	0056	0056	0055	0055	0055	0055	0055
2,93	0055	0054	0054	0054	0054	0054	0054	0053	0053	0053
2,94	0053	0053	0053	0052	0052	0052	0052	0052	0052	0052
2,95	0051	0051	0051	0051	0051	0051	0051	0050	0050	0050
2,96	0050	0050	0050	0049	0049	0049	0049	0049	0049	0049
2,97	0048	0048	0048	0048	0048	0048	0048	0047	0047	0047
2,98	0047	0047	0047	0047	0046	0046	0046	0046	0046	0046
2,99	0046	0046	0045	0045	0045	0045	0045	0045	0045	0044
3,00	0044	0044	0044	0044	0044	0044	0044	0043	0043	0043

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
3,000—3,006	0,0044	3,133—3,143	0,0029	3,352—3,373	0,0014
3,007—3,013	0,0043	3,144—3,155	0,0028	3,374—3,395	0,0013
3,014—3,021	0,0042	3,156—3,166	0,0027	3,396—3,420	0,0012
3,022—3,029	0,0041	3,167—3,178	0,0026	3,421—3,446	0,0011
3,030—3,038	0,0040	3,179—3,191	0,0025	3,447—3,475	0,0010
3,039—3,046	0,0039	3,192—3,204	0,0024	3,476—3,507	0,0009
3,047—3,055	0,0038	3,205—3,218	0,0023	3,508—3,543	0,0008
3,056—3,064	0,0037	3,219—3,232	0,0022	3,544—3,583	0,0007
3,065—3,073	0,0036	3,233—3,246	0,0021	3,584—3,629	0,0006
3,074—3,082	0,0035	3,247—3,262	0,0020	3,630—3,684	0,0005
3,083—3,091	0,0034	3,263—3,278	0,0019	3,685—3,751	0,0004
3,092—3,101	0,0033	3,279—3,295	0,0018	3,752—3,840	0,0003
3,102—3,111	0,0032	3,296—3,313	0,0017	3,841—3,971	0,0002
3,112—3,122	0,0031	3,314—3,331	0,0016	3,972—4,238	0,0001
3,123—3,132	0,0030	3,332—3,351	0,0015	4,239— ∞	0,0000

ТАБЛИЦА III

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0004	0008	0012	0016	0020	0024	0028	0032	0036
0,01	0040	0044	0048	0052	0056	0060	0064	0068	0072	0076
0,02	0080	0084	0088	0092	0096	0100	0104	0108	0112	0116
0,03	0120	0124	0128	0132	0136	0140	0144	0148	0152	0156
0,04	0160	0164	0168	0171	0175	0179	0183	0187	0191	0195
0,05	0199	0203	0207	0211	0215	0219	0223	0227	0231	0235
0,06	0239	0243	0247	0251	0255	0259	0263	0267	0271	0275
0,07	0279	0283	0287	0291	0295	0299	0303	0307	0311	0315
0,08	0319	0323	0327	0331	0335	0339	0343	0347	0351	0355
0,09	0359	0363	0367	0370	0374	0378	0382	0386	0390	0394
0,10	0398	0402	0406	0410	0414	0418	0422	0426	0430	0434
0,11	0438	0442	0446	0450	0454	0458	0462	0466	0470	0474
0,12	0478	0482	0486	0489	0493	0497	0501	0505	0509	0513
0,13	0517	0521	0525	0529	0533	0537	0541	0545	0549	0553
0,14	0557	0561	0565	0569	0572	0576	0580	0584	0588	0592
0,15	0596	0600	0604	0608	0612	0616	0620	0624	0628	0632
0,16	0636	0640	0643	0647	0651	0655	0659	0663	0667	0671
0,17	0675	0679	0683	0687	0691	0695	0699	0702	0706	0710
0,18	0714	0718	0722	0726	0730	0734	0738	0742	0746	0750
0,19	0753	0757	0761	0765	0769	0773	0777	0781	0785	0789
0,20	0793	0797	0800	0804	0808	0812	0816	0820	0824	0828
0,21	0832	0836	0839	0843	0847	0851	0855	0859	0863	0867
0,22	0871	0875	0878	0882	0886	0890	0894	0898	0902	0906
0,23	0910	0913	0917	0921	0925	0929	0933	0937	0941	0944
0,24	0948	0952	0956	0960	0964	0968	0972	0975	0979	0983
0,25	0987	0991	0995	0999	1003	1006	1010	1014	1018	1022
0,26	1026	1030	1033	1037	1041	1045	1049	1053	1057	1060
0,27	1064	1068	1072	1076	1080	1083	1087	1091	1095	1099
0,28	1103	1106	1110	1114	1118	1122	1126	1129	1133	1137
0,29	1141	1145	1149	1152	1156	1160	1164	1168	1171	1175
0,30	1179	1183	1187	1191	1194	1198	1202	1206	1210	1213
0,31	1217	1221	1225	1229	1232	1236	1240	1244	1248	1251
0,32	1255	1259	1263	1267	1270	1274	1278	1282	1285	1289
0,33	1293	1297	1301	1304	1308	1312	1316	1319	1323	1327
0,34	1331	1334	1338	1342	1346	1350	1353	1357	1361	1365
0,35	1368	1372	1376	1380	1383	1387	1391	1395	1398	1402
0,36	1406	1410	1413	1417	1421	1424	1428	1432	1436	1439
0,37	1443	1447	1451	1454	1458	1462	1465	1469	1473	1477
0,38	1480	1484	1488	1491	1495	1499	1503	1506	1510	1514
0,39	1517	1521	1525	1528	1532	1536	1539	1543	1547	1551
0,40	1554	1558	1562	1565	1569	1573	1576	1580	1584	1587

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,41	0,1591	1595	1598	1602	1606	1609	1613	1617	1620	1624
0,42	1628	1631	1635	1639	1642	1646	1649	1653	1657	1660
0,43	1664	1668	1671	1675	1679	1682	1686	1689	1693	1697
0,44	1700	1704	1708	1711	1715	1718	1722	1726	1729	1733
0,45	1736	1740	1744	1747	1751	1754	1758	1762	1765	1769
0,46	1772	1776	1780	1783	1787	1790	1794	1798	1801	1805
0,47	1808	1812	1815	1819	1823	1826	1830	1833	1837	1840
0,48	1844	1847	1851	1855	1858	1862	1865	1869	1872	1876
0,49	1879	1883	1886	1890	1893	1897	1901	1904	1908	1911
0,50	1915	1918	1922	1925	1929	1932	1936	1939	1943	1946
0,51	1950	1953	1957	1960	1964	1967	1971	1974	1978	1981
0,52	1985	1988	1992	1995	1999	2002	2006	2009	2013	2016
0,53	2019	2023	2026	2030	2033	2037	2040	2044	2047	2051
0,54	2054	2057	2061	2064	2068	2071	2075	2078	2082	2085
0,55	2088	2092	2095	2099	2102	2106	2109	2112	2116	2119
0,56	2123	2126	2129	2133	2136	2140	2143	2146	2150	2153
0,57	2157	2160	2163	2167	2170	2174	2177	2180	2184	2187
0,58	2190	2194	2197	2201	2204	2207	2211	2214	2217	2221
0,59	2224	2227	2231	2234	2237	2241	2244	2247	2251	2254
0,60	2257	2261	2264	2267	2271	2274	2277	2281	2284	2287
0,61	2291	2294	2297	2301	2304	2307	2311	2314	2317	2320
0,62	2324	2327	2330	2334	2337	2340	2343	2347	2350	2353
0,63	2356	2360	2363	2366	2370	2373	2376	2379	2383	2386
0,64	2389	2392	2396	2399	2402	2405	2409	2412	2415	2418
0,65	2422	2425	2428	2431	2434	2438	2441	2444	2447	2451
0,66	2454	2457	2460	2463	2467	2470	2473	2476	2479	2483
0,67	2486	2489	2492	2495	2498	2502	2505	2508	2511	2514
0,68	2517	2521	2524	2527	2530	2533	2536	2540	2543	2546
0,69	2549	2552	2555	2558	2562	2565	2568	2571	2574	2577
0,70	2580	2583	2587	2590	2593	2596	2599	2602	2605	2608
0,71	2611	2615	2618	2621	2624	2627	2630	2633	2636	2639
0,72	2642	2645	2649	2652	2655	2658	2661	2664	2667	2670
0,73	2673	2676	2679	2682	2685	2688	2691	2694	2697	2700
0,74	2704	2707	2710	2713	2716	2719	2722	2725	2728	2731
0,75	2734	2737	2740	2743	2746	2749	2752	2755	2758	2761
0,76	2764	2767	2770	2773	2776	2779	2782	2785	2788	2791
0,77	2794	2796	2799	2802	2805	2808	2811	2814	2817	2820
0,78	2823	2826	2829	2832	2835	2838	2841	2844	2847	2849
0,79	2852	2855	2858	2861	2864	2867	2870	2873	2876	2879
0,80	2881	2884	2887	2890	2893	2896	2899	2902	2905	2907
0,81	2910	2913	2916	2919	2922	2925	2927	2930	2933	2936
0,82	2939	2942	2945	2947	2950	2953	2956	2959	2962	2964
0,83	2967	2970	2973	2976	2979	2981	2984	2987	2990	2993
0,84	2995	2998	3001	3004	3007	3009	3012	3015	3018	3021
0,85	3023	3026	3029	3032	3034	3037	3040	3043	3046	3048

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,86	0,3051	3054	3057	3059	3062	3065	3068	3070	3073	3076
0,87	3078	3081	3084	3087	3089	3092	3095	3098	3100	3103
0,88	3106	3108	3111	3114	3117	3119	3122	3125	3127	3130
0,89	3133	3135	3138	3141	3143	3146	3149	3151	3154	3157
0,90	3159	3162	3165	3167	3170	3173	3175	3178	3181	3183
0,91	3186	3189	3191	3194	3196	3199	3202	3204	3207	3210
0,92	3212	3215	3217	3220	3223	3225	3228	3230	3233	3236
0,93	3238	3241	3243	3246	3248	3251	3254	3256	3259	3261
0,94	3264	3266	3269	3272	3274	3277	3279	3282	3284	3287
0,95	3289	3292	3295	3297	3300	3302	3305	3307	3310	3312
0,96	3315	3317	3320	3322	3325	3327	3330	3332	3335	3337
0,97	3340	3342	3345	3347	3350	3352	3355	3357	3360	3362
0,98	3365	3367	3370	3372	3374	3377	3379	3382	3384	3387
0,99	3389	3392	3394	3396	3399	3401	3404	3406	3409	3411
1,00	3413	3416	3418	3421	3423	3426	3428	3430	3433	3435
1,01	3438	3440	3442	3445	3447	3449	3452	3454	3457	3459
1,02	3461	3464	3466	3468	3471	3473	3476	3478	3480	3483
1,03	3485	3487	3490	3492	3494	3497	3499	3501	3504	3506
1,04	3508	3511	3513	3515	3518	3520	3522	3525	3527	3529
1,05	3531	3534	3536	3538	3541	3543	3545	3547	3550	3552
1,06	3554	3557	3559	3561	3563	3566	3568	3570	3572	3575
1,07	3577	3579	3581	3584	3586	3588	3590	3593	3595	3597
1,08	3599	3602	3604	3606	3608	3610	3613	3615	3617	3619
1,09	3621	3624	3626	3628	3630	3632	3635	3637	3639	3641
1,10	3643	3646	3648	3650	3652	3654	3656	3659	3661	3663
1,11	3665	3667	3669	3671	3674	3676	3678	3680	3682	3684
1,12	3686	3689	3691	3693	3695	3697	3699	3701	3703	3706
1,13	3708	3710	3712	3714	3716	3718	3720	3722	3724	3726
1,14	3729	3731	3733	3735	3737	3739	3741	3743	3745	3747
1,15	3749	3751	3753	3755	3757	3760	3762	3764	3766	3768
1,16	3770	3772	3774	3776	3778	3780	3782	3784	3786	3788
1,17	3790	3792	3794	3796	3798	3800	3802	3804	3806	3808
1,18	3810	3812	3814	3816	3818	3820	3822	3824	3826	3828
1,19	3830	3832	3834	3836	3838	3840	3842	3843	3845	3847
1,20	3849	3851	3853	3855	3857	3859	3861	3863	3865	3867
1,21	3869	3871	3872	3874	3876	3878	3880	3882	3884	3886
1,22	3888	3890	3891	3893	3895	3897	3899	3901	3903	3905
1,23	3907	3908	3910	3912	3914	3916	3918	3920	3921	3923
1,24	3925	3927	3929	3931	3933	3934	3936	3938	3940	3942
1,25	3944	3945	3947	3949	3951	3953	3954	3956	3958	3960
1,26	3962	3963	3965	3967	3969	3971	3972	3974	3976	3978
1,27	3980	3981	3983	3985	3987	3988	3990	3992	3994	3996
1,28	3997	3999	4001	4003	4004	4006	4008	4010	4011	4013
1,29	4015	4016	4018	4020	4022	4023	4025	4027	4029	4030
1,30	4032	4034	4035	4037	4039	4041	4042	4044	4046	4047

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,31	0,4049	4051	4052	4054	4056	4057	4059	4061	4062	4064
1,32	4066	4067	4069	4071	4072	4074	4076	4077	4079	4081
1,33	4082	4084	4086	4087	4089	4091	4092	4094	4096	4097
1,34	4099	4100	4102	4104	4105	4107	4108	4110	4112	4113
1,35	4115	4117	4118	4120	4121	4123	4125	4126	4128	4129
1,36	4131	4132	4134	4136	4137	4139	4140	4142	4143	4145
1,37	4147	4148	4150	4151	4153	4154	4156	4157	4159	4161
1,38	4162	4164	4165	4167	4168	4170	4171	4173	4174	4176
1,39	4177	4179	4180	4182	4183	4185	4186	4188	4189	4191
1,40	4192	4194	4195	4197	4198	4200	4201	4203	4204	4206
1,41	4207	4209	4210	4212	4213	4215	4216	4218	4219	4221
1,42	4222	4223	4225	4226	4228	4229	4231	4232	4234	4235
1,43	4236	4238	4239	4241	4242	4244	4245	4246	4248	4249
1,44	4251	4252	4253	4255	4256	4258	4259	4261	4262	4263
1,45	4265	4266	4267	4269	4270	4272	4273	4274	4276	4277
1,46	4279	4280	4281	4283	4284	4285	4287	4288	4289	4291
1,47	4292	4294	4295	4296	4298	4299	4300	4302	4303	4304
1,48	4306	4307	4308	4310	4311	4312	4314	4315	4316	4318
1,49	4319	4320	4322	4323	4324	4325	4327	4328	4329	4331
1,50	4332	4333	4335	4336	4337	4338	4340	4341	4342	4344
1,51	4345	4346	4347	4349	4350	4351	4352	4354	4355	4356
1,52	4357	4359	4360	4361	4362	4364	4365	4366	4367	4369
1,53	4370	4371	4372	4374	4375	4376	4377	4379	4380	4381
1,54	4382	4383	4385	4386	4387	4388	4389	4391	4392	4393
1,55	4394	4395	4397	4398	4399	4400	4401	4403	4404	4405
1,56	4406	4407	4409	4410	4411	4412	4413	4414	4416	4417
1,57	4418	4419	4420	4421	4423	4424	4425	4426	4427	4428
1,58	4429	4431	4432	4433	4434	4435	4436	4437	4439	4440
1,59	4441	4442	4443	4444	4445	4446	4448	4449	4450	4451
1,60	4452	4453	4454	4455	4456	4458	4459	4460	4461	4462
1,61	4463	4464	4465	4466	4467	4468	4470	4471	4472	4473
1,62	4474	4475	4476	4477	4478	4479	4480	4481	4482	4483
1,63	4484	4486	4487	4488	4489	4490	4491	4492	4493	4494
1,64	4495	4496	4497	4498	4499	4500	4501	4502	4503	4504
1,65	4505	4506	4507	4508	4509	4510	4511	4512	4513	4514
1,66	4515	4516	4517	4518	4519	4520	4521	4522	4523	4524
1,67	4525	4526	4527	4528	4529	4530	4531	4532	4533	4534
1,68	4535	4536	4537	4538	4539	4540	4541	4542	4543	4544
1,69	4545	4546	4547	4548	4549	4550	4551	4552	4552	4553
1,70	4554	4555	4556	4557	4558	4559	4560	4561	4562	4563
1,71	4564	4565	4566	4566	4567	4568	4569	4570	4571	4572
1,72	4573	4574	4575	4576	4576	4577	4578	4579	4580	4581
1,73	4582	4583	4584	4585	4585	4586	4587	4588	4589	4590
1,74	4591	4592	4592	4593	4594	4595	4596	4597	4598	4599
1,75	4599	4600	4601	4602	4603	4604	4605	4605	4606	4607

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,76	0,4608	4609	4610	4610	4611	4612	4613	4614	4615	4616
1,77	4616	4617	4618	4619	4620	4621	4621	4622	4623	4624
1,78	4625	4625	4626	4627	4628	4629	4630	4630	4631	4632
1,79	4633	4634	4634	4635	4636	4637	4638	4638	4639	4640
1,80	4641	4641	4642	4643	4644	4645	4645	4646	4647	4648
1,81	4649	4649	4650	4651	4652	4652	4653	4654	4655	4655
1,82	4656	4657	4658	4658	4659	4660	4661	4662	4662	4663
1,83	4664	4664	4665	4666	4667	4667	4668	4669	4670	4670
1,84	4671	4672	4673	4673	4674	4675	4676	4676	4677	4678
1,85	4678	4679	4680	4681	4681	4682	4683	4683	4684	4685
1,86	4686	4686	4687	4688	4688	4689	4690	4690	4691	4692
1,87	4693	4693	4694	4695	4695	4696	4697	4697	4698	4699
1,88	4699	4700	4701	4701	4702	4703	4704	4704	4705	4706
1,89	4706	4707	4708	4708	4709	4710	4710	4711	4712	4712
1,90	4713	4713	4714	4715	4715	4716	4717	4717	4718	4719
1,91	4719	4720	4721	4721	4722	4723	4723	4724	4724	4725
1,92	4726	4726	4727	4728	4728	4729	4729	4730	4731	4731
1,93	4732	4733	4733	4734	4734	4735	4736	4736	4737	4737
1,94	4738	4739	4739	4740	4741	4741	4742	4742	4743	4744
1,95	4744	4745	4745	4746	4746	4747	4748	4748	4749	4749
1,96	4750	4751	4751	4752	4752	4753	4754	4754	4755	4755
1,97	4756	4756	4757	4758	4758	4759	4759	4760	4760	4761
1,98	4761	4762	4763	4763	4764	4764	4765	4765	4766	4766
1,99	4767	4768	4768	4769	4769	4770	4770	4771	4771	4772
2,00	4772	4773	4774	4774	4775	4775	4776	4776	4777	4777
2,01	4778	4778	4779	4779	4780	4780	4781	4782	4782	4783
2,02	4783	4784	4784	4785	4785	4786	4786	4787	4787	4788
2,03	4788	4789	4789	4790	4790	4791	4791	4792	4792	4793
2,04	4793	4794	4794	4795	4795	4796	4796	4797	4797	4798
2,05	4798	4799	4799	4800	4800	4801	4801	4802	4802	4803
2,06	4803	4803	4804	4804	4805	4805	4806	4806	4807	4807
2,07	4808	4808	4809	4809	4810	4810	4811	4811	4811	4812
2,08	4812	4813	4813	4814	4814	4815	4815	4816	4816	4816
2,09	4817	4817	4818	4818	4819	4819	4820	4820	4820	4821
2,10	4821	4822	4822	4823	4823	4824	4824	4824	4825	4825
2,11	4826	4826	4827	4827	4827	4828	4828	4829	4829	4830
2,12	4830	4830	4831	4831	4832	4832	4832	4833	4833	4834
2,13	4834	4835	4835	4835	4836	4836	4837	4837	4837	4838
2,14	4838	4839	4839	4839	4840	4840	4841	4841	4841	4842
2,15	4842	4843	4843	4843	4844	4844	4845	4845	4845	4846
2,16	4846	4847	4847	4847	4848	4848	4848	4849	4849	4850
2,17	4850	4850	4851	4851	4851	4852	4852	4853	4853	4853
2,18	4854	4854	4854	4855	4855	4856	4856	4856	4857	4857
2,19	4857	4858	4858	4858	4859	4859	4860	4860	4860	4861
2,20	4861	4861	4862	4862	4862	4863	4863	4863	4864	4864

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,21	0,4864	4865	4865	4866	4866	4866	4867	4867	4867	4868
2,22	4868	4868	4869	4869	4869	4870	4870	4870	4871	4871
2,23	4871	4872	4872	4872	4873	4873	4873	4874	4874	4874
2,24	4875	4875	4875	4876	4876	4876	4876	4877	4877	4877
2,25	4878	4878	4878	4879	4879	4879	4880	4880	4880	4881
2,26	4881	4881	4882	4882	4882	4882	4883	4883	4883	4884
2,27	4884	4884	4885	4885	4885	4885	4886	4886	4886	4887
2,28	4887	4887	4888	4888	4888	4888	4889	4889	4889	4890
2,29	4890	4890	4890	4891	4891	4891	4892	4892	4892	4892
2,30	4893	4893	4893	4894	4894	4894	4894	4895	4895	4895
2,31	4896	4896	4896	4896	4897	4897	4897	4897	4898	4898
2,32	4898	4899	4899	4899	4899	4900	4900	4900	4900	4901
2,33	4901	4901	4901	4902	4902	4902	4903	4903	4903	4903
2,34	4904	4904	4904	4904	4905	4905	4905	4905	4906	4906
2,35	4906	4906	4907	4907	4907	4907	4908	4908	4908	4908
2,36	4909	4909	4909	4909	4910	4910	4910	4910	4911	4911
2,37	4911	4911	4912	4912	4912	4912	4912	4913	4913	4913
2,38	4913	4914	4914	4914	4914	4915	4915	4915	4915	4916
2,39	4916	4916	4916	4916	4917	4917	4917	4917	4918	4918
2,40	4918	4918	4918	4919	4919	4919	4919	4920	4920	4920
2,41	4920	4920	4921	4921	4921	4921	4922	4922	4922	4922
2,42	4922	4923	4923	4923	4923	4923	4924	4924	4924	4924
2,43	4925	4925	4925	4925	4925	4926	4926	4926	4926	4926
2,44	4927	4927	4927	4927	4927	4928	4928	4928	4928	4928
2,45	4929	4929	4929	4929	4929	4930	4930	4930	4930	4930
2,46	4931	4931	4931	4931	4931	4931	4932	4932	4932	4932
2,47	4932	4933	4933	4933	4933	4933	4934	4934	4934	4934
2,48	4934	4934	4935	4935	4935	4935	4935	4936	4936	4936
2,49	4936	4936	4936	4937	4937	4937	4937	4937	4938	4938
2,50	4938	4938	4938	4938	4939	4939	4939	4939	4939	4939
2,51	4940	4940	4940	4940	4940	4940	4941	4941	4941	4941
2,52	4941	4941	4942	4942	4942	4942	4942	4942	4943	4943
2,53	4943	4943	4943	4943	4944	4944	4944	4944	4944	4944
2,54	4945	4945	4945	4945	4945	4945	4946	4946	4946	4946
2,55	4946	4946	4946	4947	4947	4947	4947	4947	4947	4948
2,56	4948	4948	4948	4948	4948	4948	4949	4949	4949	4949
2,57	4949	4949	4949	4950	4950	4950	4950	4950	4950	4950
2,58	4951	4951	4951	4951	4951	4951	4951	4952	4952	4952
2,59	4952	4952	4952	4952	4953	4953	4953	4953	4953	4953
2,60	4953	4954	4954	4954	4954	4954	4954	4954	4954	4955
2,61	4955	4955	4955	4955	4955	4955	4956	4956	4956	4956
2,62	4956	4956	4956	4956	4957	4957	4957	4957	4957	4957
2,63	4957	4957	4958	4958	4958	4958	4958	4958	4958	4958
2,64	4959	4959	4959	4959	4959	4959	4959	4959	4960	4960
2,65	4960	4960	4960	4960	4960	4960	4960	4961	4961	4961

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,66	0,4961	4961	4961	4961	4961	4962	4962	4962	4962	4962
2,67	4962	4962	4962	4962	4963	4963	4963	4963	4963	4963
2,68	4963	4963	4963	4964	4964	4964	4964	4964	4964	4964
2,69	4964	4964	4964	4965	4965	4965	4965	4965	4965	4965
2,70	4965	4965	4966	4966	4966	4966	4966	4966	4966	4966
2,71	4966	4966	4967	4967	4967	4967	4967	4967	4967	4967
2,72	4967	4967	4968	4968	4968	4968	4968	4968	4968	4968
2,73	4968	4968	4969	4969	4969	4969	4969	4969	4969	4969
2,74	4969	4969	4969	4970	4970	4970	4970	4970	4970	4970
2,75	4970	4970	4970	4970	4971	4971	4971	4971	4971	4971
2,76	4971	4971	4971	4971	4971	4972	4972	4972	4972	4972
2,77	4972	4972	4972	4972	4972	4972	4972	4973	4973	4973
2,78	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4974
2,79	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974
2,80	4974	4975	4975	4975	4975	4975	4975	4975	4975	4975
2,81	4975	4975	4975	4975	4976	4976	4976	4976	4976	4976
2,82	4976	4976	4976	4976	4976	4976	4976	4977	4977	4977
2,83	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977
2,84	4977	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4978
2,85	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4979	4979	4979	4979
2,86	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979
2,87	4979	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980
2,88	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4981	4981	4981
2,89	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981
2,90	4981	4981	4981	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982
2,91	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982
2,92	4982	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983
2,93	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4984
2,94	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984
2,95	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4985	4985
2,96	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985
2,97	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4986
2,98	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986
2,99	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986
3,00	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
3,000—3,023	0,4987	3,139—3,174	0,4992	3,390—3,480	0,4997
3,024—3,048	0,4988	3,175—3,215	0,4993	3,481—3,615	0,4998
3,049—3,075	0,4989	3,216—3,263	0,4994	3,616—3,890	0,4999
3,076—3,105	0,4990	3,264—3,320	0,4995	3,891— ∞	0,5000
3,106—3,138	0,4991	3,321—3,389	0,4996		

ТАБЛИЦА IV

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\hat{\varphi}(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 x^2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,2691	2691	2691	2691	2691	2691	2691	2691	2691	2691
0,01	2691	2691	2691	2691	2691	2691	2691	2691	2691	2691
0,02	2691	2691	2691	2691	2690	2690	2690	2690	2690	2690
0,03	2690	2690	2690	2690	2690	2690	2690	2690	2690	2690
0,04	2690	2690	2690	2690	2690	2690	2690	2689	2689	2689
0,05	2689	2689	2689	2689	2689	2689	2689	2689	2689	2689
0,06	2689	2689	2688	2688	2688	2688	2688	2688	2688	2688
0,07	2688	2688	2688	2688	2687	2687	2687	2687	2687	2687
0,08	2687	2687	2687	2687	2687	2686	2686	2686	2686	2686
0,09	2686	2686	2686	2686	2685	2685	2685	2685	2685	2685
0,10	2685	2685	2684	2684	2684	2684	2684	2684	2684	2684
0,11	2683	2683	2683	2683	2683	2683	2683	2682	2682	2682
0,12	2682	2682	2682	2682	2681	2681	2681	2681	2681	2681
0,13	2680	2680	2680	2680	2680	2680	2680	2679	2679	2679
0,14	2679	2679	2679	2678	2678	2678	2678	2678	2677	2677
0,15	2677	2677	2677	2677	2676	2676	2676	2676	2676	2675
0,16	2675	2675	2675	2675	2674	2674	2674	2674	2674	2673
0,17	2673	2673	2673	2673	2672	2672	2672	2672	2672	2671
0,18	2671	2671	2671	2670	2670	2670	2670	2670	2670	2669
0,19	2669	2669	2668	2668	2668	2668	2667	2667	2667	2667
0,20	2666	2666	2666	2666	2665	2665	2665	2665	2664	2664
0,21	2664	2664	2663	2663	2663	2663	2662	2662	2662	2662
0,22	2661	2661	2661	2661	2660	2660	2660	2659	2659	2659
0,23	2659	2658	2658	2658	2657	2657	2657	2657	2656	2656
0,24	2656	2656	2655	2655	2655	2654	2654	2654	2653	2653
0,25	2653	2653	2652	2652	2652	2651	2651	2651	2650	2650
0,26	2650	2649	2649	2649	2649	2648	2648	2648	2647	2647
0,27	2647	2646	2646	2646	2645	2645	2645	2644	2644	2644
0,28	2643	2643	2643	2642	2642	2642	2641	2641	2641	2640
0,29	2640	2639	2639	2639	2638	2638	2638	2637	2637	2637
0,30	2636	2636	2636	2635	2635	2634	2634	2634	2633	2633
0,31	2633	2632	2632	2631	2631	2631	2630	2630	2630	2629
0,32	2629	2629	2628	2628	2627	2627	2627	2626	2626	2625
0,33	2625	2625	2624	2624	2623	2623	2623	2622	2622	2621
0,34	2621	2621	2620	2620	2619	2619	2619	2618	2618	2617
0,35	2617	2616	2616	2616	2615	2615	2614	2614	2614	2613
0,36	2613	2612	2612	2611	2611	2611	2610	2610	2609	2609
0,37	2608	2608	2607	2607	2607	2606	2606	2605	2605	2604
0,38	2604	2603	2603	2603	2602	2602	2601	2601	2600	2600
0,39	2599	2599	2598	2598	2597	2597	2597	2596	2596	2595
0,40	2595	2594	2594	2593	2593	2592	2592	2591	2591	2590

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,41	0,2590	2589	2589	2588	2588	2587	2587	2586	2586	2585
0,42	2585	2584	2584	2584	2583	2583	2582	2582	2581	2581
0,43	2580	2579	2579	2578	2578	2577	2577	2576	2576	2575
0,44	2575	2574	2574	2573	2573	2572	2572	2571	2571	2570
0,45	2570	2569	2569	2568	2568	2567	2567	2566	2565	2565
0,46	2564	2564	2563	2563	2562	2562	2561	2561	2560	2560
0,47	2559	2558	2558	2557	2557	2556	2556	2555	2555	2554
0,48	2553	2553	2552	2552	2551	2551	2550	2549	2549	2548
0,49	2548	2547	2547	2546	2546	2545	2544	2544	2543	2543
0,50	2542	2542	2541	2540	2540	2539	2539	2538	2537	2537
0,51	2536	2536	2535	2534	2534	2533	2533	2532	2531	2531
0,52	2530	2530	2529	2529	2528	2527	2527	2526	2525	2525
0,53	2524	2524	2523	2522	2522	2521	2521	2520	2519	2519
0,54	2518	2517	2517	2516	2516	2515	2514	2514	2513	2513
0,55	2512	2511	2511	2510	2509	2509	2508	2507	2507	2506
0,56	2506	2505	2504	2504	2503	2502	2502	2501	2500	2500
0,57	2499	2498	2498	2497	2497	2496	2495	2495	2494	2493
0,58	2493	2492	2491	2491	2490	2489	2489	2488	2487	2487
0,59	2486	2485	2485	2484	2483	2483	2482	2481	2481	2480
0,60	2479	2479	2478	2477	2477	2476	2475	2474	2474	2473
0,61	2472	2472	2471	2470	2470	2469	2468	2468	2467	2466
0,62	2466	2465	2464	2463	2463	2462	2461	2461	2460	2459
0,63	2459	2458	2457	2456	2456	2455	2454	2454	2453	2452
0,64	2451	2451	2450	2449	2449	2448	2447	2446	2446	2445
0,65	2444	2444	2443	2442	2441	2441	2440	2439	2438	2438
0,66	2437	2436	2436	2435	2434	2433	2433	2432	2431	2430
0,67	2430	2429	2428	2427	2427	2426	2425	2424	2424	2423
0,68	2422	2421	2421	2420	2419	2418	2418	2417	2416	2415
0,69	2415	2414	2413	2412	2412	2411	2410	2409	2409	2408
0,70	2407	2406	2405	2405	2404	2404	2403	2402	2401	2400
0,71	2399	2398	2397	2397	2396	2395	2395	2394	2393	2392
0,72	2392	2391	2390	2389	2388	2388	2387	2386	2385	2384
0,73	2384	2383	2382	2381	2380	2380	2379	2378	2377	2376
0,74	2376	2375	2374	2373	2372	2372	2371	2370	2369	2368
0,75	2368	2367	2366	2365	2364	2364	2363	2362	2361	2360
0,76	2360	2359	2358	2357	2356	2355	2355	2354	2353	2352
0,77	2351	2350	2350	2349	2348	2347	2346	2346	2345	2344
0,78	2343	2342	2341	2341	2340	2339	2338	2337	2336	2336
0,79	2335	2334	2333	2332	2331	2330	2330	2329	2328	2327
0,80	2326	2325	2325	2324	2323	2322	2321	2320	2319	2319
0,81	2318	2317	2316	2315	2314	2313	2313	2312	2311	2310
0,82	2309	2308	2307	2307	2306	2305	2304	2303	2302	2301
0,83	2301	2300	2299	2298	2297	2296	2295	2294	2294	2293
0,84	2292	2291	2290	2289	2288	2287	2287	2286	2285	2284
0,85	2283	2282	2281	2280	2279	2279	2278	2277	2276	2275

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,86	0,2274	2273	2272	2271	2271	2270	2269	2268	2267	2266
0,87	2265	2264	2263	2263	2262	2261	2260	2259	2258	2257
0,88	2256	2255	2254	2254	2253	2252	2251	2250	2249	2248
0,89	2247	2246	2245	2244	2244	2243	2242	2241	2240	2239
0,90	2238	2237	2236	2235	2234	2233	2232	2232	2231	2330
0,91	2229	2228	2227	2226	2225	2224	2223	2222	2221	2221
0,92	2220	2219	2218	2217	2216	2215	2214	2213	2212	2211
0,93	2210	2209	2208	2207	2207	2206	2205	2204	2203	2202
0,94	2201	2200	2199	2198	2197	2196	2195	2194	2193	2192
0,95	2191	2190	2190	2189	2188	2187	2186	2185	2184	2183
0,96	2182	2181	2180	2179	2178	2177	2176	2175	2174	2173
0,97	2172	2171	2170	2170	2169	2168	2167	2166	2165	2164
0,98	2163	2162	2161	2160	2159	2158	2157	2156	2155	2154
0,99	2153	2152	2151	2150	2149	2148	2147	2146	2145	2144
1,00	2143	2142	2141	2140	2139	2138	2138	2137	2136	2135
1,01	2134	2133	2132	2131	2130	2129	2128	2127	2126	2125
1,02	2124	2123	2122	2121	2120	2119	2118	2117	2116	2115
1,03	2114	2113	2112	2111	2110	2109	2108	2107	2106	2105
1,04	2104	2103	2102	2101	2100	2099	2098	2097	2096	2095
1,05	2094	2093	2092	2091	2090	2089	2088	2087	2086	2085
1,06	2084	2083	2082	2081	2080	2079	2078	2077	2076	2075
1,07	2074	2073	2072	2071	2070	2069	2068	2067	2066	2065
1,08	2064	2063	2062	2061	2060	2059	2058	2057	2056	2055
1,09	2054	2053	2052	2051	2050	2049	2047	2046	2045	2044
1,10	2043	2042	2041	2040	2039	2038	2037	2036	2035	2034
1,11	2033	2032	2031	2030	2029	2028	2027	2026	2025	2024
1,12	2023	2022	2021	2020	2019	2018	2017	2016	2015	2014
1,13	2013	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005	2004	2003
1,14	2002	2001	2000	1999	1998	1997	1996	1995	1994	1993
1,15	1992	1991	1990	1989	1988	1987	1986	1984	1983	1982
1,16	1981	1980	1979	1978	1977	1976	1975	1974	1973	1972
1,17	1971	1970	1969	1968	1967	1966	1965	1963	1962	1961
1,18	1960	1959	1958	1957	1956	1955	1954	1953	1952	1951
1,19	1950	1949	1948	1947	1946	1945	1943	1942	1941	1940
1,20	1939	1938	1937	1936	1935	1934	1933	1932	1931	1930
1,21	1929	1928	1926	1925	1924	1923	1922	1921	1920	1919
1,22	1918	1917	1916	1915	1914	1913	1912	1911	1909	1908
1,23	1907	1906	1905	1904	1903	1902	1901	1900	1899	1898
1,24	1897	1896	1895	1893	1892	1891	1890	1889	1888	1887
1,25	1886	1885	1884	1883	1882	1881	1879	1878	1877	1876
1,26	1875	1874	1873	1872	1871	1870	1869	1868	1867	1865
1,27	1864	1863	1862	1861	1860	1859	1858	1857	1856	1855
1,28	1854	1853	1852	1850	1849	1848	1847	1846	1845	1844
1,29	1843	1842	1841	1840	1839	1837	1836	1835	1834	1833
1,30	1832	1831	1830	1829	1828	1827	1826	1824	1823	1822

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,31	0,1821	1820	1819	1818	1817	1816	1815	1814	1812	1811
1,32	1810	1809	1808	1807	1806	1805	1804	1803	1802	1800
1,33	1799	1798	1797	1796	1795	1794	1793	1792	1791	1790
1,34	1789	1787	1786	1785	1784	1783	1782	1781	1780	1779
1,35	1778	1777	1775	1774	1773	1772	1771	1770	1769	1768
1,36	1767	1766	1765	1763	1762	1761	1760	1759	1758	1757
1,37	1756	1755	1754	1752	1751	1750	1749	1748	1747	1746
1,38	1745	1744	1743	1742	1740	1739	1738	1737	1736	1735
1,39	1734	1733	1732	1731	1729	1728	1727	1726	1725	1724
1,40	1723	1722	1721	1720	1719	1717	1716	1715	1714	1713
1,41	1712	1711	1710	1709	1708	1706	1705	1704	1703	1702
1,42	1701	1700	1699	1698	1697	1695	1694	1693	1692	1691
1,43	1690	1689	1688	1687	1686	1684	1683	1682	1681	1680
1,44	1679	1678	1677	1676	1675	1673	1672	1671	1670	1669
1,45	1668	1667	1666	1665	1664	1662	1661	1660	1659	1658
1,46	1657	1656	1655	1654	1653	1651	1650	1649	1648	1647
1,47	1646	1645	1644	1643	1642	1640	1639	1638	1637	1636
1,48	1635	1634	1633	1632	1631	1629	1628	1627	1626	1625
1,49	1624	1623	1622	1621	1620	1618	1617	1616	1615	1614
1,50	1613	1612	1611	1610	1609	1607	1606	1605	1604	1603
1,51	1602	1601	1600	1599	1598	1596	1595	1594	1593	1592
1,52	1591	1590	1589	1588	1587	1585	1584	1583	1582	1581
1,53	1580	1579	1578	1577	1576	1574	1573	1572	1571	1570
1,54	1569	1568	1567	1566	1565	1563	1562	1561	1560	1559
1,55	1558	1557	1556	1555	1554	1552	1551	1550	1549	1548
1,56	1547	1546	1545	1544	1543	1541	1540	1539	1538	1537
1,57	1536	1535	1534	1532	1531	1530	1529	1528	1527	1526
1,58	1525	1524	1523	1522	1521	1520	1518	1517	1516	1515
1,59	1514	1513	1512	1511	1510	1509	1507	1506	1505	1504
1,60	1503	1502	1501	1500	1499	1498	1497	1495	1494	1493
1,61	1492	1491	1490	1489	1488	1487	1486	1485	1483	1482
1,62	1481	1480	1479	1478	1477	1476	1475	1474	1472	1471
1,63	1470	1469	1468	1467	1466	1465	1464	1463	1462	1460
1,64	1459	1458	1457	1456	1455	1454	1453	1452	1451	1450
1,65	1449	1448	1446	1445	1444	1443	1442	1441	1440	1439
1,66	1438	1437	1436	1434	1433	1432	1431	1430	1429	1428
1,67	1427	1426	1425	1424	1422	1421	1420	1419	1418	1417
1,68	1416	1415	1414	1413	1412	1411	1410	1408	1407	1406
1,69	1405	1404	1403	1402	1401	1400	1399	1398	1397	1395
1,70	1394	1393	1392	1391	1390	1389	1388	1387	1386	1385
1,71	1384	1383	1381	1380	1379	1378	1377	1376	1375	1374
1,72	1373	1372	1371	1370	1369	1368	1366	1365	1364	1363
1,73	1362	1361	1360	1359	1358	1357	1356	1355	1354	1352
1,74	1351	1350	1349	1348	1347	1346	1345	1344	1343	1342
1,75	1341	1340	1339	1338	1336	1335	1334	1333	1332	1331

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,76	0,1330	1329	1328	1327	1326	1325	1324	1323	1322	1320
1,77	1319	1318	1317	1316	1315	1314	1313	1312	1311	1310
1,78	1309	1308	1307	1306	1305	1304	1302	1301	1300	1299
1,79	1298	1297	1296	1295	1294	1293	1292	1291	1290	1289
1,80	1288	1287	1286	1285	1283	1282	1281	1280	1279	1278
1,81	1277	1276	1275	1274	1273	1272	1271	1270	1269	1268
1,82	1267	1266	1265	1264	1262	1261	1260	1259	1258	1257
1,83	1256	1255	1254	1253	1252	1251	1250	1249	1248	1247
1,84	1246	1245	1244	1243	1242	1241	1239	1238	1237	1236
1,85	1235	1234	1233	1232	1231	1230	1229	1228	1227	1226
1,86	1225	1224	1223	1222	1221	1220	1219	1218	1217	1216
1,87	1215	1214	1213	1212	1210	1209	1208	1207	1206	1205
1,88	1204	1203	1202	1201	1200	1199	1198	1197	1196	1195
1,89	1194	1193	1192	1191	1190	1189	1188	1187	1186	1185
1,90	1184	1183	1182	1181	1180	1179	1178	1177	1176	1175
1,91	1174	1173	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1165	1164
1,92	1163	1162	1161	1160	1159	1158	1157	1156	1155	1154
1,93	1153	1152	1151	1150	1149	1148	1147	1146	1145	1144
1,94	1143	1142	1141	1140	1139	1138	1137	1136	1135	1134
1,95	1133	1132	1131	1130	1129	1128	1127	1126	1125	1124
1,96	1123	1122	1121	1120	1119	1118	1117	1116	1115	1114
1,97	1113	1112	1111	1110	1109	1108	1107	1106	1105	1104
1,98	1103	1102	1101	1100	1099	1098	1097	1096	1095	1094
1,99	1093	1092	1091	1090	1089	1088	1087	1086	1085	1084
2,00	1083	1082	1081	1980	1079	1078	1077	1076	1075	1074
2,01	1073	1072	1071	1070	1069	1069	1068	1067	1066	1065
2,02	1064	1063	1062	1061	1060	1059	1058	1057	1056	1055
2,03	1054	1053	1052	1051	1050	1049	1048	1047	1046	1045
2,04	1044	1043	1042	1041	1040	1039	1038	1037	1036	1035
2,05	1034	1034	1033	1032	1031	1030	1029	1028	1027	1026
2,06	1025	1024	1023	1022	1021	1020	1019	1018	1017	1016
2,07	1015	1014	1013	1012	1011	1011	1010	1009	1008	1007
2,08	1006	1005	1004	1003	1002	1001	1000	0999	0998	0997
2,09	0996	0995	0994	0993	0992	0992	0991	0990	0989	0988
2,10	0987	0986	0985	0984	0983	0982	0981	0980	0979	0978
2,11	0977	0976	0976	0975	0974	0973	0972	0971	0970	0969
2,12	0968	0967	0966	0965	0964	0963	0962	0962	0961	0960
2,13	0959	0958	0957	0956	0955	0954	0953	0952	0951	0950
2,14	0949	0949	0948	0947	0946	0945	0944	0943	0942	0941
2,15	0940	0939	0938	0938	0937	0936	0935	0934	0933	0932
2,16	0931	0930	0929	0928	0927	0926	0926	0925	0924	0923
2,17	0922	0921	0920	0919	0918	0917	0916	0916	0915	0914
2,18	0913	0912	0911	0910	0909	0908	0907	0907	0906	0905
2,19	0904	0903	0902	0901	0900	0899	0898	0898	0897	0896
2,20	0895	0894	0893	0892	0891	0890	0889	0889	0888	0887

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,21	0,0886	0885	0884	0883	0882	0881	0881	0880	0879	0878
2,22	0877	0876	0875	0874	0873	0873	0872	0871	0870	0869
2,23	0868	0867	0866	0866	0865	0864	0863	0862	0861	0860
2,24	0859	0859	0858	0857	0856	0855	0854	0853	0852	0852
2,25	0851	0850	0849	0848	0847	0846	0845	0845	0844	0843
2,26	0842	0841	0840	0839	0839	0838	0837	0836	0835	0834
2,27	0833	0833	0832	0831	0830	0829	0828	0827	0827	0826
2,28	0825	0824	0823	0822	0821	0821	0820	0819	0818	0817
2,29	0816	0815	0815	0814	0813	0812	0811	0810	0809	0809
2,30	0808	0807	0806	0805	0804	0804	0803	0802	0801	0800
2,31	0799	0799	0798	0797	0796	0795	0794	0793	0793	0792
2,32	0791	0790	0789	0788	0788	0787	0786	0785	0784	0784
2,33	0783	0782	0781	0780	0779	0779	0778	0777	0776	0775
2,34	0774	0774	0773	0772	0771	0770	0769	0769	0768	0767
2,35	0766	0765	0765	0764	0763	0762	0761	0760	0760	0759
2,36	0758	0757	0756	0756	0755	0754	0753	0752	0752	0751
2,37	0750	0749	0748	0747	0747	0746	0745	0744	0743	0743
2,38	0742	0741	0740	0739	0739	0738	0737	0736	0735	0735
2,39	0734	0733	0732	0731	0731	0730	0729	0728	0727	0727
2,40	0726	0725	0724	0724	0723	0722	0721	0720	0720	0719
2,41	0718	0717	0716	0716	0715	0714	0713	0712	0712	0711
2,42	0710	0709	0709	0708	0707	0706	0705	0705	0704	0703
2,43	0702	0702	0701	0700	0699	0698	0698	0697	0696	0696
2,44	0695	0694	0693	0692	0692	0691	0690	0689	0688	0688
2,45	0687	0686	0685	0685	0684	0683	0682	0682	0681	0680
2,46	0679	0679	0678	0677	0676	0676	0675	0674	0673	0672
2,47	0672	0671	0670	0669	0669	0668	0667	0666	0666	0665
2,48	0664	0663	0663	0662	0661	0660	0660	0659	0658	0657
2,49	0657	0656	0655	0655	0654	0653	0652	0652	0651	0650
2,50	0649	0649	0648	0647	0646	0646	0645	0644	0643	0643
2,51	0642	0641	0641	0640	0639	0638	0638	0637	0636	0635
2,52	0635	0634	0633	0632	0632	0631	0630	0630	0629	0628
2,53	0627	0627	0626	0625	0625	0624	0623	0622	0622	0621
2,54	0620	0619	0619	0618	0617	0617	0616	0615	0615	0614
2,55	0613	0612	0612	0611	0610	0610	0609	0608	0607	0607
2,56	0606	0605	0605	0604	0603	0602	0602	0601	0600	0600
2,57	0599	0598	0598	0597	0596	0595	0595	0594	0593	0593
2,58	0592	0591	0591	0590	0589	0589	0588	0587	0586	0586
2,59	0585	0584	0584	0583	0582	0582	0581	0580	0580	0579
2,60	0578	0578	0577	0576	0575	0575	0574	0573	0573	0572
2,61	0571	0571	0570	0569	0569	0568	0567	0567	0566	0565
2,62	0565	0564	0563	0563	0562	0561	0561	0560	0559	0559
2,63	0558	0557	0557	0556	0555	0555	0554	0553	0553	0552
2,64	0551	0551	0550	0549	0549	0548	0547	0547	0546	0545
2,65	0545	0544	0543	0543	0542	0541	0541	0540	0539	0539

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,66	0,0538	0538	0537	0536	0536	0535	0534	0534	0533	0532
2,67	0532	0531	0530	0530	0529	0528	0528	0527	0527	0526
2,68	0525	0525	0524	0523	0523	0522	0521	0521	0520	0519
2,69	0518	0518	0518	0517	0516	0516	0515	0514	0514	0513
2,70	0513	0512	0511	0511	0510	0509	0509	0508	0507	0507
2,71	0506	0506	0505	0504	0504	0503	0502	0502	0501	0501
2,72	0500	0499	0499	0498	0497	0497	0496	0496	0495	0494
2,73	0494	0493	0493	0492	0491	0491	0490	0490	0489	0488
2,74	0488	0487	0487	0486	0485	0485	0484	0484	0483	0482
2,75	0482	0481	0481	0480	0479	0479	0478	0478	0477	0476
2,76	0476	0475	0475	0474	0473	0473	0472	0472	0471	0470
2,77	0470	0469	0469	0468	0467	0467	0466	0466	0465	0464
2,78	0464	0463	0463	0462	0462	0461	0460	0460	0459	0459
2,79	0458	0457	0457	0456	0456	0455	0455	0454	0453	0453
2,80	0452	0452	0451	0451	0450	0449	0449	0448	0448	0447
2,81	0447	0446	0445	0445	0444	0444	0443	0443	0442	0441
2,82	0441	0440	0440	0439	0439	0438	0437	0437	0436	0436
2,83	0435	0435	0434	0434	0433	0432	0432	0431	0431	0430
2,84	0430	0429	0429	0428	0427	0427	0426	0426	0425	0425
2,85	0424	0424	0423	0422	0422	0421	0421	0420	0420	0419
2,86	0419	0418	0418	0417	0416	0416	0415	0415	0414	0414
2,87	0413	0413	0412	0412	0411	0411	0410	0409	0409	0408
2,88	0408	0407	0407	0406	0406	0405	0405	0404	0404	0403
2,89	0403	0402	0401	0401	0400	0400	0399	0399	0398	0398
2,90	0397	0397	0396	0396	0395	0395	0394	0394	0393	0393
2,91	0392	0392	0391	0391	0390	0389	0389	0388	0388	0387
2,92	0387	0386	0386	0385	0385	0384	0384	0383	0383	0382
2,93	0382	0381	0381	0380	0380	0379	0379	0378	0378	0377
2,94	0377	0376	0376	0375	0375	0374	0374	0373	0373	0372
2,95	0372	0371	0371	0370	0370	0369	0369	0368	0368	0367
2,96	0367	0366	0366	0365	0365	0364	0364	0363	0363	0362
2,97	0362	0361	0361	0360	0360	0359	0359	0358	0358	0357
2,98	0357	0356	0356	0355	0355	0355	0354	0354	0353	0353
2,99	0352	0352	0351	0351	0350	0350	0349	0349	0348	0348
3,00	0347	0347	0346	0346	0345	0345	0345	0344	0344	0343
3,01	0343	0342	0342	0341	0341	0340	0340	0339	0339	0338
3,02	0338	0338	0337	0337	0336	0336	0335	0335	0334	0334
3,03	0333	0333	0332	0332	0332	0331	0331	0330	0330	0329
3,04	0329	0328	0328	0327	0327	0327	0326	0326	0325	0325
3,05	0324	0324	0323	0323	0322	0322	0322	0321	0321	0320
3,06	0320	0319	0319	0318	0318	0318	0317	0317	0316	0316
3,07	0315	0315	0314	0314	0314	0313	0313	0312	0312	0311
3,08	0311	0311	0310	0310	0309	0309	0308	0308	0308	0307
3,09	0307	0306	0306	0305	0305	0305	0304	0304	0303	0303
3,10	0302	0302	0302	0301	0301	0300	0300	0299	0299	0299

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,11	0,0298	0298	0297	0297	0296	0296	0296	0295	0295	0294
3,12	0294	0294	0293	0293	0292	0292	0291	0291	0291	0290
3,13	0290	0289	0289	0289	0288	0288	0287	0287	0286	0286
3,14	0286	0285	0285	0284	0284	0284	0283	0283	0282	0282
3,15	0282	0281	0281	0280	0280	0280	0279	0279	0278	0278
3,16	0278	0277	0277	0276	0276	0276	0275	0275	0274	0274
3,17	0274	0273	0273	0272	0272	0272	0271	0271	0270	0270
3,18	0270	0269	0269	0269	0268	0268	0267	0267	0267	0266
3,19	0266	0265	0265	0265	0264	0264	0264	0263	0263	0262
3,20	0262	0262	0261	0261	0260	0260	0260	0259	0259	0259
3,21	0258	0258	0257	0257	0257	0256	0256	0255	0255	0255
3,22	0254	0254	0254	0253	0253	0253	0252	0252	0252	0251
3,23	0251	0250	0250	0250	0249	0249	0249	0248	0248	0247
3,24	0247	0247	0246	0246	0246	0245	0245	0245	0244	0244
3,25	0243	0243	0243	0242	0242	0242	0241	0241	0241	0240
3,26	0240	0240	0239	0239	0238	0238	0238	0237	0237	0237
3,27	0236	0236	0236	0235	0235	0235	0234	0234	0234	0233
3,28	0233	0233	0232	0232	0231	0231	0231	0230	0230	0230
3,29	0229	0229	0229	0228	0228	0228	0227	0227	0227	0226
3,30	0226	0226	0225	0225	0225	0224	0224	0224	0223	0223
3,31	0223	0222	0222	0222	0221	0221	0221	0220	0220	0220
3,32	0219	0219	0219	0218	0218	0218	0217	0217	0217	0216
3,33	0216	0216	0215	0215	0215	0214	0214	0214	0213	0213
3,34	0213	0212	0212	0212	0211	0211	0211	0210	0210	0210
3,35	0210	0209	0209	0209	0208	0208	0208	0207	0207	0207
3,36	0206	0206	0206	0205	0205	0205	0204	0204	0204	0204
3,37	0203	0203	0203	0202	0202	0202	0201	0201	0201	0200
3,38	0200	0200	0200	0199	0199	0198	0198	0198	0197	0197
3,39	0197	0197	0196	0196	0196	0196	0195	0195	0195	0194
3,40	0194	0194	0194	0193	0193	0193	0192	0192	0192	0191
3,41	0191	0191	0190	0190	0190	0190	0189	0189	0189	0188
3,42	0188	0188	0188	0187	0187	0187	0186	0186	0186	0185
3,43	0185	0185	0185	0184	0184	0184	0183	0183	0183	0183
3,44	0182	0182	0182	0181	0181	0181	0181	0180	0180	0180
3,45	0179	0179	0179	0179	0178	0178	0178	0178	0177	0177
3,46	0177	0176	0176	0176	0176	0175	0175	0175	0174	0174
3,47	0174	0174	0173	0173	0173	0173	0172	0172	0172	0171
3,48	0171	0171	0171	0170	0170	0170	0170	0169	0169	0169
3,49	0169	0168	0168	0168	0167	0167	0167	0167	0166	0166
3,50	0166	0166	0165	0165	0165	0165	0164	0164	0164	0163
3,51	0163	0163	0163	0162	0162	0162	0162	0161	0161	0161
3,52	0161	0160	0160	0160	0160	0159	0159	0159	0159	0158
3,53	0158	0158	0158	0157	0157	0157	0157	0156	0156	0156
3,54	0156	0155	0155	0155	0155	0154	0154	0154	0154	0153
3,55	0153	0153	0153	0152	0152	0152	0152	0151	0151	0151

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,56	0,0151	0150	0150	0150	0150	0149	0149	0149	0149	0148
3,57	0148	0148	0148	0147	0147	0147	0147	0147	0146	0146
3,58	0146	0146	0145	0145	0145	0145	0144	0144	0144	0144
3,59	0143	0143	0143	0143	0142	0142	0142	0142	0142	0141
3,60	0141	0141	0141	0140	0140	0140	0140	0139	0139	0139

x	$\hat{\varphi}(x)$	x	$\hat{\varphi}(x)$	x	$\hat{\varphi}(x)$
3,600—3,602	0,0141	3,742—3,746	0,0111	3,921—3,927	0,0081
3,603—3,606	0,0140	3,747—3,751	0,0110	3,928—3,935	0,0080
3,607—3,611	0,0139	3,752—3,757	0,0109	3,936—3,941	0,0079
3,612—3,615	0,0138	3,758—3,762	0,0108	3,942—3,949	0,0078
3,616—3,620	0,0137	3,763—3,767	0,0107	3,950—3,957	0,0077
3,621—3,624	0,0136	3,768—3,773	0,0106	3,958—3,963	0,0076
3,625—3,629	0,0135	3,774—3,779	0,0105	3,964—3,970	0,0075
3,630—3,633	0,0134	3,780—3,784	0,0104	3,971—3,978	0,0074
3,634—3,638	0,0133	3,785—3,790	0,0103	3,979—3,985	0,0073
3,639—3,643	0,0132	3,791—3,795	0,0102	3,986—3,994	0,0072
3,644—3,647	0,0131	3,796—3,801	0,0101	3,995—4,001	0,0071
3,648—3,652	0,0130	3,802—3,807	0,0100	4,002—4,009	0,0070
3,653—3,656	0,0129	3,808—3,813	0,0099	4,010—4,016	0,0069
3,657—3,661	0,0128	3,814—3,819	0,0098	4,017—4,025	0,0068
3,662—3,666	0,0127	3,820—3,825	0,0097	4,026—4,033	0,0067
3,667—3,670	0,0126	3,826—3,831	0,0096	4,034—4,041	0,0066
3,671—3,675	0,0125	3,832—3,837	0,0095	4,042—4,050	0,0065
3,676—3,680	0,0124	3,838—3,843	0,0094	4,051—4,058	0,0064
3,681—3,685	0,0123	3,844—3,849	0,0093	4,059—4,066	0,0063
3,686—3,690	0,0122	3,850—3,855	0,0092	4,067—4,076	0,0062
3,691—3,695	0,0121	3,856—3,861	0,0091	4,077—4,085	0,0061
3,696—3,700	0,0120	3,862—3,868	0,0090	4,086—4,093	0,0060
3,701—3,705	0,0119	3,869—3,874	0,0089	4,094—4,102	0,0059
3,706—3,710	0,0118	3,875—3,880	0,0088	4,103—4,111	0,0058
3,711—3,715	0,0117	3,881—3,887	0,0087	4,112—4,121	0,0057
3,716—3,720	0,0116	3,888—3,893	0,0086	4,122—4,131	0,0056
3,721—3,725	0,0115	3,894—3,900	0,0085	4,132—4,140	0,0055
3,726—3,730	0,0114	3,901—3,907	0,0084	4,141—4,150	0,0054
3,731—3,735	0,0113	3,908—3,914	0,0083	4,151—4,160	0,0053
3,736—3,741	0,0112	3,915—3,920	0,0082	4,161—4,170	0,0052

x	$\hat{\varphi}(x)$	x	$\hat{\varphi}(x)$	x	$\hat{\varphi}(x)$
4,171—4,181	0,0051	4,422—4,438	0,0031	4,897—4,936	0,0011
4,182—4,191	0,0050	4,439—4,454	0,0030	4,937—4,980	0,0010
4,192—4,202	0,0049	4,455—4,471	0,0029	4,981—5,030	0,0009
4,203—4,212	0,0048	4,472—4,487	0,0028	5,031—5,087	0,0008
4,213—4,224	0,0047	4,488—4,506	0,0027	5,088—5,149	0,0007
4,225—4,235	0,0046	4,507—4,525	0,0026	5,150—5,217	0,0006
4,236—4,246	0,0045	4,526—4,545	0,0025	5,218—5,300	0,0005
4,247—4,258	0,0044	4,546—4,565	0,0024	5,301—5,340	0,0004
4,259—4,270	0,0043	4,566—4,585	0,0023	5,341—5,547	0,0003
4,271—4,283	0,0042	4,586—4,607	0,0022	5,548—5,751	0,0002
4,284—4,295	0,0041	4,608—4,630	0.0021	5,752—6,145	0,0001
4,296—4,307	0,0040	4,631—4,654	0,0020	6,146— ∞	0,0000
4,308—4,320	0,0039	4,655—4,680	0,0019		
4,321—4,334	0,0038	4,681—4,705	0,0018		
4,335—4,348	0,0037	4,706—4,730	0,0017		
4,349—4,361	0,0036	4,731—4,750	0,0016		
4,362—4,375	0,0035	4,751—4,792	0,0015		
4,376—4,391	0,0034	4,793—4,823	0,0014		
4,392—4,406	0,0033	4,824—4,860	0,0013		
4,407—4,421	0,0032	4,861—4,896	0,0012		

ТАБЛИЦА V

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\hat{\Phi}_0(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\rho^2 t^2} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0003	0005	0008	0011	0013	0016	0019	0022	0024
0,01	0027	0030	0032	0035	0038	0040	0043	0046	0048	0051
0,02	0054	0057	0059	0062	0065	0067	0070	0073	0075	0078
0,03	0081	0083	0086	0089	0091	0094	0097	0100	0102	0105
0,04	0108	0110	0113	0116	0118	0121	0124	0126	0129	0132
0,05	0135	0137	0140	0143	0145	0148	0151	0153	0156	0159
0,06	0161	0164	0167	0169	0172	0175	0178	0180	0183	0186
0,07	0188	0191	0194	0196	0199	0202	0204	0207	0210	0212
0,08	0215	0218	0221	0223	0226	0229	0231	0234	0237	0239
0,09	0242	0245	0247	0250	0253	0255	0258	0261	0264	0266
0,10	0269	0272	0274	0277	0280	0282	0285	0288	0290	0293
0,11	0296	0298	0301	0304	0306	0309	0312	0315	0317	0320
0,12	0323	0325	0328	0331	0333	0336	0339	0341	0344	0347
0,13	0349	0352	0355	0357	0360	0363	0365	0368	0371	0373
0,14	0376	0379	0382	0384	0387	0390	0392	0395	0398	0400
0,15	0403	0406	0408	0411	0414	0416	0419	0422	0424	0427
0,16	0430	0432	0435	0438	0440	0443	0446	0448	0451	0454
0,17	0456	0459	0462	0464	0467	0470	0472	0475	0478	0480
0,18	0483	0486	0489	0491	0494	0497	0499	0502	0505	0507
0,19	0510	0513	0515	0518	0521	0523	0526	0529	0531	0534
0,20	0537	0539	0542	0545	0547	0550	0553	0555	0558	0561
0,21	0563	0566	0569	0571	0574	0577	0579	0582	0584	0587
0,22	0590	0592	0595	0598	0600	0603	0606	0608	0611	0614
0,23	0616	0619	0622	0624	0627	0630	0632	0635	0638	0640
0,24	0643	0646	0648	0651	0654	0656	0659	0662	0664	0667
0,25	0670	0672	0675	0677	0680	0683	0685	0688	0691	0693
0,26	0696	0699	0701	0704	0707	0709	0712	0715	0717	0720
0,27	0723	0725	0728	0730	0733	0736	0738	0741	0744	0746
0,28	0749	0752	0754	0757	0760	0762	0765	0767	0770	0773
0,29	0775	0778	0781	0783	0786	0789	0791	0794	0796	0799
0,30	0802	0804	0807	0810	0812	0815	0818	0820	0823	0825
0,31	0828	0831	0833	0836	0839	0841	0844	0847	0849	0852
0,32	0854	0857	0860	0862	0865	0868	0870	0873	0875	0878
0,33	0881	0883	0886	0889	0891	0894	0896	0899	0902	0904
0,34	0,907	0910	0912	0915	0917	0920	0923	0925	0928	0930
0,35	0933	0936	0938	0941	0944	0946	0949	0951	0954	0957

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,36	0,0959	0962	0964	0967	0970	0972	0975	0978	0980	0983
0,37	0985	0988	0991	0993	0996	0998	1001	1004	1006	1009
0,38	1011	1014	1017	1019	1022	1024	1027	1030	1032	1035
0,39	1037	1040	1043	1045	1048	1050	1053	1056	1058	1061
0,40	1063	1066	1069	1071	1074	1076	1079	1082	1084	1087
0,41	1089	1092	1095	1097	1100	1102	1105	1107	1110	1113
0,42	1115	1118	1120	1123	1126	1128	1131	1133	1136	1138
0,43	1141	1144	1146	1149	1151	1154	1157	1159	1162	1164
0,44	1167	1169	1172	1175	1177	1180	1182	1185	1187	1190
0,45	1193	1195	1198	1200	1203	1205	1208	1211	1213	1216
0,46	1218	1221	1223	1226	1228	1231	1234	1236	1239	1241
0,47	1244	1246	1249	1251	1254	1257	1259	1262	1264	1267
0,48	1269	1272	1274	1277	1280	1282	1285	1287	1290	1292
0,49	1295	1297	1300	1303	1305	1308	1310	1313	1315	1318
0,50	1320	1323	1325	1328	1331	1333	1336	1338	1341	1343
0,51	1346	1348	1351	1353	1356	1358	1361	1363	1366	1369
0,52	1371	1374	1376	1379	1381	1384	1386	1389	1391	1394
0,53	1396	1399	1401	1404	1406	1409	1411	1414	1417	1419
0,54	1422	1424	1427	1429	1432	1434	1437	1439	1442	1444
0,55	1447	1449	1452	1454	1457	1459	1462	1464	1467	1469
0,56	1472	1474	1477	1479	1482	1484	1487	1489	1492	1494
0,57	1497	1499	1502	1504	1507	1509	1512	1514	1517	1519
0,58	1522	1524	1527	1529	1532	1534	1537	1539	1542	1544
0,59	1547	1549	1552	1554	1557	1559	1562	1564	1567	1569
0,60	1571	1574	1576	1579	1581	1584	1586	1589	1591	1594
0,61	1596	1599	1601	1604	1606	1609	1611	1614	1616	1618
0,62	1621	1623	1626	1628	1631	1633	1636	1638	1641	1643
0,63	1646	1648	1650	1653	1655	1658	1660	1663	1665	1668
0,64	1670	1673	1675	1677	1680	1682	1685	1687	1690	1692
0,65	1695	1697	1699	1702	1704	1707	1709	1712	1714	1717
0,66	1719	1721	1724	1726	1729	1731	1734	1736	1738	1741
0,67	1743	1746	1748	1751	1753	1755	1758	1760	1763	1765
0,68	1768	1770	1772	1775	1777	1780	1782	1785	1787	1789
0,69	1792	1794	1797	1799	1801	1804	1806	1809	1811	1813
0,70	1816	1818	1821	1823	1825	1828	1830	1833	1835	1838
0,71	1840	1842	1845	1847	1849	1852	1854	1857	1859	1861
0,72	1864	1866	1869	1871	1873	1876	1878	1881	1883	1885
0,73	1888	1890	1893	1895	1897	1900	1902	1904	1907	1909
0,74	1912	1914	1916	1919	1921	1923	1926	1928	1931	1933
0,75	1935	1938	1940	1942	1945	1947	1949	1952	1954	1957
0,76	1959	1961	1964	1966	1968	1971	1973	1975	1978	1980
0,77	1982	1985	1987	1989	1992	1994	1997	1999	2001	2004
0,78	2006	2008	2011	2015	2015	2018	2020	2022	2025	2027
0,79	2029	2032	2034	2036	2039	2041	2043	2046	2048	2050
0,80	2053	2055	2057	2060	2062	2064	2067	2069	2071	2074

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,81	0,2076	2078	2080	2083	2085	2087	2090	2092	2094	2097
0,82	2099	2101	2104	2106	2108	2110	2113	2115	2117	2120
0,83	2122	2124	2127	2129	2131	2134	2136	2138	2140	2143
0,84	2145	2147	2150	2152	2154	2156	2159	2161	2163	2166
0,85	2168	2170	2172	2175	2177	2179	2182	2184	2186	2188
0,86	2191	2193	2195	2197	2200	2202	2204	2207	2209	2211
0,87	2213	2216	2218	2220	2222	2225	2227	2229	2231	2234
0,88	2236	2238	2240	2243	2245	2247	2249	2252	2254	2256
0,89	2258	2261	2263	2265	2267	2270	2272	2274	2276	2279
0,90	2281	2283	2285	2288	2290	2292	2294	2297	2299	2301
0,91	2303	2305	2308	2310	2312	2314	2317	2319	2321	2323
0,92	2325	2328	2330	2332	2334	2337	2339	2341	2343	2345
0,93	2348	2350	2352	2354	2356	2359	2361	2363	2365	2367
0,94	2370	2372	2374	2376	2378	2381	2383	2385	2387	2389
0,95	2392	2394	2396	2398	2400	2403	2405	2407	2409	2411
0,96	2413	2416	2418	2420	2422	2424	2427	2429	2431	2433
0,97	2435	2437	2440	2442	2444	2446	2448	2450	2453	2455
0,98	2457	2459	2461	2463	2466	2468	2470	2472	2474	2476
0,99	2479	2481	2483	2485	2487	2489	2491	2494	2496	2498
1,00	2500	2502	2504	2506	2509	2511	2513	2515	2517	2519
1,01	2521	2524	2526	2528	2530	2532	2534	2536	2538	2541
1,02	2543	2545	2547	2549	2551	2553	2555	2558	2560	2562
1,03	2564	2566	2568	2570	2572	2574	2577	2579	2581	2583
1,04	2585	2587	2589	2591	2593	2595	2598	2600	2602	2604
1,05	2606	2608	2610	2612	2614	2616	2618	2621	2623	2625
1,06	2627	2629	2631	2633	2635	2637	2639	2641	2643	2646
1,07	2648	2650	2652	2654	2656	2658	2660	2662	2664	2666
1,08	2668	2670	2672	2674	2677	2679	2681	2683	2685	2687
1,09	2689	2691	2693	2695	2697	2699	2701	2703	2705	2707
1,10	2709	2711	2713	2716	2718	2720	2722	2724	2726	2728
1,11	2730	2732	2734	2736	2738	2740	2742	2744	2746	2748
1,12	2750	2752	2754	2756	2758	2760	2762	2764	2766	2768
1,13	2770	2772	2774	2776	2778	2780	2782	2784	2786	2788
1,14	2790	2792	2794	2796	2798	2800	2802	2804	2806	2808
1,15	2810	2812	2814	2816	2818	2820	2822	2824	2826	2828
1,16	2830	2832	2834	2836	2838	2840	2842	2844	2846	2848
1,17	2850	2852	2854	2856	2858	2860	2862	2864	2866	2868
1,18	2870	2872	2873	2875	2877	2879	2881	2883	2885	2887
1,19	2889	2891	2893	2895	2897	2899	2901	2903	2905	2907
1,20	2909	2910	2912	2914	2916	2918	2920	2922	2924	2926
1,21	2928	2930	2932	2934	2936	2938	2939	2941	2943	2945
1,22	2947	2949	2951	2953	2955	2957	2959	2961	2962	2964
1,23	2966	2968	2970	2972	2974	2976	2978	2980	2981	2983
1,24	2985	2987	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3000	3002
1,25	3004	3006	3008	3010	3012	3014	3015	3017	3019	3021

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,26	0,3023	3025	3027	3029	3030	3032	3034	3036	3038	3040
1,27	3042	3044	3045	3047	3049	3051	3053	3055	3057	3058
1,28	3060	3062	3064	3066	3068	3070	3071	3073	3075	3077
1,29	3079	3081	3082	3084	3086	3088	3090	3092	3093	3095
1,30	3097	3099	3101	3103	3104	3106	3108	3110	3112	3114
1,31	3115	3117	3119	3121	3123	3124	3126	3128	3130	3132
1,32	3134	3135	3137	3139	3141	3143	3144	3146	3148	3150
1,33	3152	3153	3155	3157	3159	3161	3162	3164	3166	3168
1,34	3170	3171	3173	3175	3177	3178	3180	3182	3184	3186
1,35	3187	3189	3191	3193	3194	3196	3198	3200	3202	3203
1,36	3205	3207	3209	3210	3212	3214	3216	3217	3219	3221
1,37	3223	3224	3226	3228	3230	3231	3233	3235	3237	3238
1,38	3240	3242	3244	3245	3247	3249	3251	3252	3254	3256
1,39	3258	3259	3261	3263	3265	3266	3268	3270	3271	3273
1,40	3275	3277	3278	3280	3282	3283	3285	3287	3289	3290
1,41	3292	3294	3295	3297	3299	3301	3302	3304	3306	3307
1,42	3309	3311	3313	3314	3316	3318	3319	3321	3323	3324
1,43	3326	3328	3329	3331	3333	3335	3336	3338	3340	3341
1,44	3343	3345	3346	3348	3350	3351	3353	3355	3356	3358
1,45	3360	3361	3363	3365	3366	3368	3370	3371	3373	3375
1,46	3376	3378	3380	3381	3383	3385	3386	3388	3389	3391
1,47	3393	3394	3396	3398	3399	3401	3403	3404	3406	3408
1,48	3409	3411	3412	3414	3416	3417	3419	3421	3422	3424
1,49	3425	3427	3429	3430	3432	3434	3435	3437	3438	3440
1,50	3442	3443	3445	3447	3448	3450	3451	3453	3455	3456
1,51	3458	3459	3461	3463	3464	3466	3467	3469	3471	3472
1,52	3474	3475	3477	3478	3480	3482	3483	3485	3486	3488
1,53	3490	3491	3493	3494	3496	3497	3499	3501	3502	3504
1,54	3505	3507	3508	3510	3512	3513	3515	3516	3518	3519
1,55	3521	3523	3524	3526	3527	3529	3530	3532	3533	3535
1,56	3536	3538	3540	3541	3543	3544	3546	3547	3549	3550
1,57	3552	3553	3555	3556	3558	3560	3561	3563	3564	3566
1,58	3567	3569	3570	3572	3573	3575	3576	3578	3579	3581
1,59	3582	3584	3585	3587	3588	3590	3591	3593	3594	3596
1,60	3597	3599	3600	3602	3603	3605	3606	3608	3609	3611
1,61	3612	3614	3615	3617	3618	3620	3621	3623	3624	3626
1,62	3627	3629	3630	3632	3633	3635	3636	3638	3639	3641
1,63	3642	3644	3645	3646	3648	3649	3651	3652	3654	3655
1,64	3657	3658	3660	3661	3663	3664	3665	3667	3668	3670
1,65	3671	3673	3674	3676	3677	3678	3680	3681	3683	3684
1,66	3686	3687	3689	3690	3691	3693	3694	3696	3697	3699
1,67	3700	3701	3703	3704	3706	3707	3709	3710	3711	3713
1,68	3714	3716	3717	3718	3720	3721	3723	3724	3726	3727
1,69	3728	3730	3731	3733	3734	3735	3737	3738	3740	3741
1,70	3742	3744	3745	3747	3748	3749	3751	3752	3753	3755

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,71	0,3756	3758	3759	3760	3762	3763	3765	3766	3767	3769
1,72	3770	3771	3773	3774	3775	3777	3778	3780	3781	3782
1,73	3784	3785	3786	3788	3789	3790	3792	3793	3795	3796
1,74	3797	3799	3800	3801	3803	3804	3805	3807	3808	3809
1,75	3811	3812	3813	3815	3816	3817	3819	3820	3821	3823
1,76	3824	3825	3827	3828	3829	3831	3832	3833	3835	3836
1,77	3837	3839	3840	3841	3843	3844	3845	3847	3848	3849
1,78	3850	3852	3853	3854	3856	3857	3858	3860	3861	3862
1,79	3863	3865	3866	3867	3869	3870	3871	3873	3874	3875
1,80	3876	3878	3879	3880	3882	3883	3884	3885	3887	3888
1,81	3889	3891	3892	3893	3894	3896	3897	3898	3899	3901
1,82	3902	3903	3904	3906	3907	3908	3910	3911	3912	3913
1,83	3915	3916	3917	3918	3920	3921	3922	3923	3925	3926
1,84	3927	3928	3930	3931	3932	3933	3935	3936	3937	3938
1,85	3939	3941	3942	3943	3944	3946	3947	3948	3949	3951
1,86	3952	3953	3954	3955	3957	3958	3959	3960	3962	3963
1,87	3964	3965	3966	3968	3969	3970	3971	3972	3974	3975
1,88	3976	3977	3978	3980	3981	3982	3983	3984	3986	3987
1,89	3988	3989	3990	3992	3993	3994	3995	3996	3998	3999
1,90	4000	4001	4002	4004	4005	4006	4007	4008	4009	4011
1,91	4012	4013	4014	4015	4016	4018	4019	4020	4021	4022
1,92	4023	4025	4026	4027	4028	4029	4030	4032	4033	4034
1,93	4035	4036	4037	4038	4040	4041	4042	4043	4044	4045
1,94	4046	4048	4049	4050	4051	4052	4053	4054	4056	4057
1,95	4058	4059	4060	4061	4062	4064	4065	4066	4067	4068
1,96	4069	4070	4071	4073	4074	4075	4076	4077	4078	4079
1,97	4080	4081	4083	4084	4085	4086	4087	4088	4089	4090
1,98	4091	4093	4094	4095	4096	4097	4098	4099	4100	4101
1,99	4102	4103	4105	4106	4107	4108	4109	4110	4111	4112
2,00	4113	4114	4115	4117	4118	4119	4120	4121	4122	4123
2,01	4124	4125	4126	4127	4128	4129	4130	4132	4133	4134
2,02	4135	4136	4137	4138	4139	4140	4141	4142	4143	4144
2,03	4145	4146	4147	4148	4150	4151	4152	4153	4154	4155
2,04	4156	4157	4158	4159	4160	4161	4162	4163	4164	4165
2,05	4166	4167	4168	4169	4170	4171	4172	4173	4174	4175
2,06	4177	4178	4179	4180	4181	4182	4183	4184	4185	4186
2,07	4187	4188	4189	4190	4191	4192	4193	4194	4195	4196
2,08	4197	4198	4199	4200	4201	4202	4203	4204	4205	4206
2,09	4207	4208	4209	4210	4211	4212	4213	4214	4215	4216
2,10	4217	4218	4219	4220	4221	4222	4223	4224	4225	4226
2,11	4227	4228	4229	4229	4230	4231	4232	4233	4234	4235
2,12	4236	4237	4238	4239	4240	4241	4242	4243	4244	4245
2,13	4246	4247	4248	4249	4250	4251	4252	4253	4254	4255
2,14	4255	4256	4257	4258	4259	4260	4261	4262	4263	4264
2,15	4265	4266	4267	4268	4269	4270	4271	4271	4272	4273

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,16	0,4274	4275	4276	4277	4278	4279	4280	4281	4282	4283
2,17	4284	4284	4285	4286	4287	4288	4289	4290	4291	4292
2,18	4293	4294	4295	4295	4296	4297	4298	4299	4300	4301
2,19	4302	4303	4304	4305	4305	4306	4307	4308	4309	4310
2,20	4311	4312	4313	4313	4314	4315	4316	4317	4318	4319
2,21	4320	4321	4321	4322	4323	4324	4325	4326	4327	4328
2,22	4329	4329	4330	4331	4332	4333	4334	4335	4335	4336
2,23	4337	4338	4339	4340	4341	4342	4342	4343	4344	4345
2,24	4346	4347	4348	4348	4349	4350	4351	4352	4353	4354
2,25	4354	4355	4356	4357	4358	4359	4360	4360	4361	4362
2,26	4363	4364	4365	4365	4366	4367	4368	4369	4370	4370
2,27	4371	4372	4373	4374	4375	4375	4376	4377	4378	4379
2,28	4380	4380	4381	4382	4383	4384	4384	4385	4386	4387
2,29	4388	4389	4389	4390	4391	4392	4393	4393	4394	4395
2,30	4396	4397	4397	4398	4399	4400	4401	4402	4402	4403
2,31	4404	4405	4406	4406	4407	4408	4409	4409	4410	4411
2,32	4412	4413	4413	4414	4415	4416	4417	4417	4418	4419
2,33	4420	4421	4421	4422	4423	4424	4424	4425	4426	4427
2,34	4428	4428	4429	4430	4431	4431	4432	4433	4434	4434
2,35	4435	4436	4437	4438	4438	4439	4440	4441	4441	4442
2,36	4443	4444	4444	4445	4446	4447	4447	4448	4449	4450
2,37	4450	4451	4452	4453	4453	4454	4455	4456	4456	4457
2,38	4458	4459	4459	4460	4461	4462	4462	4463	4464	4464
2,39	4465	4466	4467	4467	4468	4469	4470	4470	4471	4472
2,40	4473	4473	4474	4475	4475	4476	4477	4478	4478	4479
2,41	4480	4480	4481	4482	4483	4483	4484	4485	4485	4486
2,42	4487	4488	4488	4489	4490	4490	4491	4492	4493	4493
2,43	4494	4495	4495	4496	4497	4497	4498	4499	4500	4500
2,44	4501	4502	4502	4503	4504	4504	4505	4506	4506	4507
2,45	4508	4509	4509	4510	4511	4511	4512	4513	4513	4514
2,46	4515	4515	4516	4517	4517	4518	4519	4519	4520	4521
2,47	4521	4522	4523	4523	4524	4525	4525	4526	4527	4527
2,48	4528	4529	4529	4530	4531	4531	4532	4533	4533	4534
2,49	4535	4535	4536	4537	4537	4538	4539	4539	4540	4541
2,50	4541	4542	4543	4543	4544	4544	4545	4546	4546	4547
2,51	4548	4548	4549	4550	4550	4551	4552	4552	4553	4553
2,52	4554	4555	4555	4556	4557	4557	4558	4559	4559	4560
2,53	4560	4561	4562	4562	4563	4564	4564	4565	4565	4566
2,54	4567	4567	4568	4568	4569	4570	4570	4571	4572	4572
2,55	4573	4573	4574	4575	4575	4576	4576	4577	4578	4578
2,56	4579	4579	4580	4581	4581	4582	4583	4583	4584	4584
2,57	4585	4586	4586	4587	4587	4588	4588	4589	4590	4590
2,58	4591	4591	4592	4593	4593	4594	4594	4595	4596	4596
2,59	4597	4597	4598	4599	4599	4600	4600	4601	4601	4602
2,60	4603	4603	4604	4604	4605	4605	4606	4607	4607	4608

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,61	0,4608	4609	4609	4610	4611	4611	4612	4612	4613	4613
2,62	4614	4615	4615	4616	4616	4617	4617	4618	4618	4619
2,63	4620	4620	4621	4621	4622	4622	4623	4623	4624	4625
2,64	4625	4626	4626	4627	4627	4628	4628	4629	4630	4630
2,65	4631	4631	4632	4632	4633	4633	4634	4634	4635	4636
2,66	4636	4637	4637	4638	4638	4639	4639	4640	4640	4641
2,67	4641	4642	4642	4643	4644	4644	4645	4645	4646	4646
2,68	4647	4647	4648	4648	4649	4649	4650	4650	4651	4651
2,69	4652	4652	4653	4653	4654	4654	4655	4656	4656	4657
2,70	4657	4658	4658	4659	4659	4660	4660	4661	4661	4662
2,71	4662	4663	4663	4664	4664	4665	4665	4666	4666	4667
2,72	4667	4668	4668	4669	4669	4670	4670	4671	4671	4672
2,73	4672	4673	4673	4674	4674	4675	4675	4676	4676	4677
2,74	4677	4678	4678	4679	4679	4679	4680	4680	4681	4681
2,75	4682	4682	4683	4683	4683	4684	4685	4685	4686	4686
2,76	4687	4687	4688	4688	4689	4689	4690	4690	4690	4691
2,77	4691	4692	4692	4693	4693	4694	4694	4695	4695	4696
2,78	4696	4697	4697	4697	4698	4698	4699	4699	4700	4700
2,79	4701	4701	4702	4702	4703	4703	4703	4704	4704	4705
2,80	4705	4706	4706	4707	4707	4708	4708	4708	4709	4709
2,81	4710	4710	4711	4711	4712	4712	4712	4713	4713	4714
2,82	4714	4715	4715	4716	4716	4716	4717	4717	4718	4718
2,83	4719	4719	4719	4720	4720	4721	4721	4722	4722	4722
2,84	4723	4723	4724	4724	4725	4725	4725	4726	4726	4727
2,85	4727	4728	4728	4728	4729	4729	4730	4730	4731	4731
2,86	4731	4732	4732	4733	4733	4733	4734	4734	4735	4735
2,87	4736	4736	4736	4737	4737	4738	4738	4738	4739	4739
2,88	4740	4740	4740	4741	4741	4742	4742	4742	4743	4743
2,89	4744	4744	4744	4745	4745	4746	4746	4746	4747	4747
2,90	4748	4748	4748	4749	4749	4750	4750	4750	4751	4751
2,91	4752	4752	4752	4753	4753	4754	4754	4754	4755	4755
2,92	4756	4756	4756	4757	4757	4757	4758	4758	4759	4759
2,93	4759	4760	4760	4761	4761	4761	4762	4762	4762	4763
2,94	4763	4764	4764	4764	4765	4765	4765	4766	4766	4767
2,95	4767	4767	4768	4768	4768	4769	4769	4769	4770	4770
2,96	4771	4771	4771	4772	4772	4772	4773	4773	4774	4774
2,97	4774	4775	4775	4775	4776	4776	4776	4777	4777	4777
2,98	4778	4778	4779	4779	4779	4780	4780	4780	4781	4781
2,99	4781	4782	4782	4782	4783	4783	4783	4784	4784	4785
3,00	4785	4785	4786	4786	4786	4787	4787	4787	4788	4788
3,01	4788	4789	4789	4789	4790	4790	4790	4791	4791	4791
3,02	4792	4792	4792	4793	4793	4793	4794	4794	4794	4795
3,03	4795	4795	4796	4796	4796	4797	4797	4797	4798	4798
3,04	4798	4799	4799	4799	4800	4800	4800	4801	4801	4801
3,05	4802	4802	4802	4803	4803	4803	4804	4804	4804	4805

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,06	0,4805	4805	4806	4806	4806	4806	4807	4807	4807	4808
3,07	4808	4808	4809	4809	4809	4810	4810	4810	4811	4811
3,08	4811	4812	4812	4812	4812	4813	4813	4813	4814	4814
3,09	4814	4815	4815	4815	4816	4816	4816	4816	4817	4817
3,10	4817	4818	4818	4818	4819	4819	4819	4819	4820	4820
3,11	4820	4821	4821	4821	4822	4822	4822	4822	4823	4823
3,12	4823	4824	4824	4824	4824	4825	4825	4825	4826	4826
3,13	4826	4826	4827	4827	4827	4828	4828	4828	4829	4829
3,14	4829	4829	4830	4830	4830	4831	4831	4831	4831	4832
3,15	4832	4832	4832	4833	4833	4833	4834	4834	4834	4834
3,16	4835	4835	4835	4836	4836	4836	4836	4837	4837	4837
3,17	4837	4838	4838	4838	4839	4839	4839	4839	4840	4840
3,18	4840	4840	4841	4841	4841	4842	4842	4842	4842	4843
3,19	4843	4843	4843	4844	4844	4844	4844	4845	4845	4845
3,20	4846	4846	4846	4846	4847	4847	4847	4847	4848	4848
3,21	4848	4848	4849	4849	4849	4849	4850	4850	4850	4850
3,22	4851	4851	4851	4851	4852	4852	4852	4852	4853	4853
3,23	4853	4853	4854	4854	4854	4854	4855	4855	4855	4855
3,24	4856	4856	4856	4856	4857	4857	4857	4857	4858	4858
3,25	4858	4858	4859	4859	4859	4859	4860	4860	4860	4860
3,26	4861	4861	4861	4861	4862	4862	4862	4862	4862	4863
3,27	4863	4863	4863	4864	4864	4864	4864	4865	4865	4865
3,28	4865	4866	4866	4866	4866	4866	4867	4867	4867	4867
3,29	4868	4868	4868	4868	4869	4869	4869	4869	4869	4870
3,30	4870	4870	4870	4871	4871	4871	4871	4871	4872	4872
3,31	4872	4872	4873	4873	4873	4873	4873	4874	4874	4874
3,32	4874	4875	4875	4875	4875	4875	4876	4876	4876	4876
3,33	4876	4877	4877	4877	4877	4878	4878	4878	4878	4878
3,34	4879	4879	4879	4879	4879	4880	4880	4880	4880	4881
3,35	4881	4881	4881	4881	4882	4882	4882	4882	4882	4883
3,36	4883	4883	4883	4883	4884	4884	4884	4884	4884	4885
3,37	4885	4885	4885	4885	4886	4886	4886	4886	4886	4887
3,38	4887	4887	4887	4887	4888	4888	4888	4888	4888	4889
3,39	4889	4889	4889	4889	4890	4890	4890	4890	4890	4891
3,40	4891	4891	4891	4891	4892	4892	4892	4892	4892	4893
3,41	4893	4893	4893	4893	4894	4894	4894	4894	4894	4894
3,42	4895	4895	4895	4895	4895	4896	4896	4896	4896	4896
3,43	4897	4897	4897	4897	4897	4897	4898	4898	4898	4898
3,44	4898	4899	4899	4899	4899	4899	4899	4900	4900	4900
3,45	4900	4900	4901	4901	4901	4901	4901	4901	4902	4902
3,46	4902	4902	4902	4902	4903	4903	4903	4903	4903	4904
3,47	4904	4904	4904	4904	4904	4905	4905	4905	4905	4905
3,48	4905	4906	4906	4906	4906	4906	4906	4907	4907	4907
3,49	4907	4907	4907	4908	4908	4908	4908	4908	4908	4909
3,50	4909	4909	4909	4909	4909	4910	4910	4910	4910	4910

x	$\hat{\Phi}_0(x)$	x	$\hat{\Phi}_0(x)$	x	$\hat{\Phi}_0(x)$
3,505—3,510	0,4910	3,721—3,728	0,4940	4,066—4,082	0,4970
3,511—3,516	0,4911	3,729—3,737	0,4941	4,083—4,098	0,4971
3,517—3,522	0,4912	3,738—3,746	0,4942	4,099—4,115	0,4972
3,523—3,528	0,4913	3,747—3,755	0,4943	4,116—4,133	0,4973
3,529—3,535	0,4914	3,756—3,765	0,4944	4,134—4,152	0,4974
3,536—3,541	0,4915	3,766—3,774	0,4945	4,153—4,171	0,4975
3,542—3,548	0,4916	3,775—3,784	0,4946	4,172—4,191	0,4976
3,549—3,554	0,4917	3,785—3,793	0,4947	4,192—4,211	0,4977
3,555—3,561	0,4918	3,794—3,803	0,4948	4,212—4,233	0,4978
3,562—3,568	0,4919	3,804—3,813	0,4949	4,234—4,255	0,4979
3,569—3,574	0,4920	3,814—3,824	0,4950	4,256—4,278	0,4980
3,575—3,581	0,4921	3,825—3,834	0,4951	4,279—4,303	0,4981
3,582—3,588	0,4922	3,835—3,845	0,4952	4,304—4,329	0,4982
3,589—3,595	0,4923	3,846—3,855	0,4953	4,330—4,356	0,4983
3,596—3,602	0,4924	3,856—3,867	0,4954	4,357—4,385	0,4984
3,603—3,609	0,4925	3,868—3,878	0,4955	4,386—4,415	0,4985
3,610—3,617	0,4926	3,879—3,889	0,4956	4,416—4,447	0,4986
3,618—3,624	0,4927	3,890—3,901	0,4957	4,448—4,482	0,4987
3,625—3,631	0,4928	3,902—3,913	0,4958	4,483—4,519	0,4988
3,632—3,639	0,4929	3,914—3,925	0,4959	4,520—4,560	0,4989
3,640—3,646	0,4930	3,926—3,938	0,4960	4,561—4,604	0,4990
3,647—3,654	0,4931	3,939—3,951	0,4961	4,605—4,652	0,4991
3,655—3,662	0,4932	3,952—3,964	0,4962	4,653—4,706	0,4992
3,663—3,670	0,4933	3,965—3,977	0,4963	4,707—4,768	0,4993
3,671—3,678	0,4934	3,978—3,991	0,4964	4,769—4,838	0,4994
3,679—3,686	4,4935	3,992—4,005	0,4965	4,839—4,922	0,4995
3,687—3,694	0,4936	4,006—4,019	0,4966	4,923—5,025	0,4996
3,695—3,703	0,4937	4,020—4,034	0,4967	5,026—5,160	0,4997
3,704—3,711	0,4938	4,035—4,050	0,4968	5,161—5,360	0,4998
3,712—3,720	0,4939	4,051—4,065	0,4969	5,361—5,768	0,4999
				5,769— ∞	0,5000

ТАБЛИЦА VI

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\psi(x;\ \mu) = e^{-\mu}\dfrac{\mu^x}{x!}$

x \ μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4		0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031
6							0001	0002	0003	0005
7										0001

x \ μ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	3662	3614	3543	3452	3347	3230	3106	2975	2842	2707
2	2014	2169	2303	2417	2510	2584	2640	2678	2700	2707
3	0738	0867	0998	1128	1255	1378	1496	1607	1710	1804
4	0203	0260	0324	0395	0471	0551	0636	0723	0812	0902
5	0045	0062	0084	0110	0141	0176	0216	0260	0309	0361
6	0008	0012	0018	0026	0035	0047	0061	0078	0098	0120
7	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0015	0020	0026	0034
8			0001	0001	0001	0002	0003	0005	0006	0009
9							0001	0001	0001	0002

x \ μ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	1108	1003	0907	0821	0743	0672	0608	0550	0498
1	2572	2438	2306	2177	2052	1931	1815	1703	1596	1494
2	2700	2681	2652	2613	2565	2510	2450	2384	2314	2240
3	1890	1966	2033	2090	2138	2176	2205	2225	2237	2240
4	0992	1082	1169	1254	1336	1414	1488	1557	1622	1680
5	0417	0476	0538	0602	0668	0735	0804	0872	0940	1008
6	0146	0174	0206	0241	0278	0319	0362	0407	0455	0504
7	0044	0055	0068	0083	0099	0118	0139	0163	0188	0216
8	0011	0015	0019	0025	0031	0038	0047	0057	0068	0081
9	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0018	0022	0027
10	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0008
11						0001	0001	0001	0002	0002
12										0001

x \ μ	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0408	0369	0334	0302	0273	0247	0224	0202	0183
1	1397	1304	1217	1135	1057	0984	0915	0850	0789	0733
2	2165	2087	2008	1929	1850	1771	1692	1615	1539	1465
3	2237	2226	2209	2186	2158	2125	2087	2046	2001	1954
4	1733	1781	1823	1858	1888	1912	1931	1944	1951	1954
5	1075	1140	1203	1264	1322	1377	1429	1477	1522	1563
6	0555	0608	0662	0716	0771	0826	0881	0936	0989	1042
7	0246	0278	0312	0348	0385	0425	0466	0508	0551	0595
8	0095	0111	0129	0148	0169	0191	0215	0241	0269	0298
9	0033	0040	0047	0056	0066	0076	0089	0102	0116	0132
10	0010	0013	0016	0019	0023	0028	0033	0039	0045	0053
11	0003	0004	0005	0006	0007	0009	0011	0013	0016	0019
12	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0003	0004	0005	0006
13					0001	0001	0001	0001	0002	0002
14										0001

x \ μ	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0150	0136	0123	0111	0101	0091	0082	0074	0067
1	0679	0630	0583	0540	0500	0462	0427	0395	0365	0337
2	1393	1323	1254	1188	1125	1063	1005	0948	0894	0842
3	1904	1852	1798	1743	1687	1631	1574	1517	1460	1404
4	1951	1944	1933	1917	1898	1875	1849	1820	1789	1755
5	1600	1633	1662	1687	1708	1725	1738	1747	1753	1755
6	1093	1143	1191	1237	1281	1323	1362	1398	1432	1462
7	0640	0686	0732	0778	0824	0869	0914	0959	1002	1044
8	0328	0360	0393	0428	0463	0500	0537	0575	0614	0653
9	0150	0168	0188	0209	0232	0255	0280	0307	0334	0363
10	0061	0071	0081	0092	0104	0118	0132	0147	0164	0181
11	0023	0027	0032	0037	0043	0049	0056	0064	0073	0082
12	0008	0009	0011	0014	0016	0019	0022	0026	0030	0034
13	0002	0003	0004	0005	0006	0007	0008	0009	0011	0013
14	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0003	0004	0005
15					0001	0001	0001	0001	0001	0002

x \ μ	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0055	0050	0045	0041	0037	0033	0030	0027	0025
1	0311	0287	0265	0244	0225	0207	0191	0176	0162	0149
2	0793	0746	0701	0659	0618	0580	0544	0509	0477	0446
3	1348	1293	1239	1185	1133	1082	1033	0985	0938	0892
4	1719	1681	1641	1600	1558	1515	1472	1428	1383	1339
5	1753	1748	1740	1728	1714	1697	1678	1656	1632	1606

x \ μ	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5.6	5,7	5,8	5,9	6,0
6	0,1490	1515	1537	1555	1571	1584	1594	1601	1605	1606
7	1086	1125	1163	1200	1234	1267	1298	1326	1353	1377
8	0692	0731	0771	0810	0849	0887	0925	0962	0998	1033
9	0392	0423	0454	0486	0519	0552	0586	0620	0654	0688
10	0200	0220	0241	0262	0285	0309	0334	0359	0386	0413
11	0093	0104	0116	0129	0143	0157	0173	0190	0207	0225
12	0039	0045	0051	0058	0065	0073	0082	0092	0102	0113
13	0015	0018	0021	0024	0028	0032	0036	0041	0046	0052
14	0006	0007	0008	0009	0011	0013	0015	0017	0019	0022
15	0002	0002	0003	0003	0004	0005	0006	0007	0008	0009
16	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0003
17						0001	0001	0001	0001	0001

x \ μ	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	0,0022	0020	0018	0017	0015	0014	0012	0011	0010	0009
1	0137	0126	0116	0106	0098	0090	0082	0076	0070	0064
2	0417	0390	0364	0340	0318	0296	0276	0258	0240	0223
3	0848	0806	0765	0726	0688	0652	0617	0584	0552	0521
4	1294	1249	1205	1162	1118	1076	1034	0992	0952	0912
5	1579	1549	1519	1487	1454	1420	1385	1349	1314	1277
6	1605	1601	1595	1586	1575	1562	1546	1529	1511	1490
7	1399	1418	1435	1450	1462	1472	1480	1486	1489	1490
8	1066	1099	1130	1160	1188	1215	1240	1263	1284	1304
9	0723	0757	0791	0825	0858	0891	0923	0954	0985	1014
10	0441	0469	0498	0528	0558	0558	0618	0649	0679	0710
11	0244	0265	0285	0307	0330	0353	0377	0401	0426	0452
12	0124	0137	0150	0164	0179	0194	0210	0227	0245	0263
13	0058	0065	0073	0081	0089	0098	0108	0119	0130	0142
14	0025	0029	0033	0037	0041	0046	0052	0058	0064	0071
15	0010	0012	0014	0016	0018	0020	0023	0026	0029	0033
16	0004	0005	0005	0006	0007	0008	0010	0011	0013	0014
17	0001	0002	0002	0002	0003	0003	0004	0004	0005	0006
18		0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002
19								0001	0001	0001

x \ μ	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	0,0008	0007	0007	0006	0006	0005	0005	0004	0004	0003
1	0059	0054	0049	0045	0041	0038	0035	0032	0029	0027
2	0208	0194	0180	0167	0156	0145	0134	0125	0116	0107
3	0492	0464	0438	0413	0389	0366	0345	0324	0305	0286
4	0874	0836	0799	0764	0729	0696	0663	0632	0602	0573
5	1241	1204	1167	1130	1094	1057	1021	0986	0951	0916
6	1468	1445	1420	1394	1367	1339	1311	1282	1252	1221
7	1489	1486	1481	1474	1465	1454	1442	1428	1413	1396
8	1321	1337	1351	1363	1373	1382	1388	1392	1395	1396
9	1042	1070	1096	1121	1144	1167	1187	1207	1224	1241
10	0740	0770	0800	0829	0858	0887	0914	0941	0967	0993
11	0478	0504	0531	0558	0585	0613	0640	0667	0695	0722
12	0283	0303	0323	0344	0366	0388	0411	0434	0457	0481
13	0154	0168	0181	0196	0211	0227	0243	0260	0278	0296
14	0078	0086	0095	0104	0113	0123	0134	0145	0157	0169
15	0037	0041	0046	0051	0057	0062	0069	0075	0083	0090
16	0016	0019	0021	0024	0026	0030	0033	0037	0041	0045
17	0007	0008	0009	0010	0012	0013	0015	0017	0019	0021
18	0003	0003	0004	0004	0005	0006	0006	0007	0008	0009
19	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004
20			0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002
21									0001	0001

x \ μ	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	0,0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
1	0025	0023	0021	0019	0017	0016	0014	0013	0012	0011
2	0100	0092	0086	0079	0074	0068	0063	0058	0054	0050
3	0269	0252	0237	0222	0208	0195	0183	0171	0160	0150
4	0544	0517	0491	0466	0443	0420	0398	0377	0357	0337
5	0882	0849	0816	0784	0752	0722	0692	0663	0635	0607
6	1191	1160	1128	1097	1066	1034	1003	0972	0941	0911
7	1378	1358	1338	1317	1294	1271	1247	1222	1197	1171
8	1395	1392	1388	1382	1375	1366	1356	1344	1332	1318
9	1256	1269	1280	1290	1299	1306	1311	1315	1317	1318
10	1017	1040	1063	1084	1104	1123	1140	1157	1172	1186
11	0749	0776	0802	0828	0853	0878	0902	0925	0948	0970
12	0505	0530	0555	0579	0604	0629	0654	0679	0703	0728
13	0315	0334	0354	0374	0395	0416	0438	0459	0481	0504
14	0182	0196	0210	0225	0240	0256	0272	0289	0306	0324
15	0098	0107	0116	0126	0136	0147	0158	0169	0182	0194

x \ μ	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
16	0,0050	0055	0060	0066	0072	0079	0086	0093	0101	0109
17	0024	0026	0029	0033	0036	0040	0044	0048	0053	0058
18	0011	0012	0014	0015	0017	0019	0021	0024	0026	0029
19	0005	0005	0006	0007	0008	0009	0010	0011	0012	0014
20	0002	0002	0002	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006
21	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0002	0003
22					0001	0001	0001	0001	0001	0001

x \ μ	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
0	0,0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001		
1	0010	0009	0008	0008	0007	0006	0006	0005	0005	0005
2	0046	0043	0040	0037	0034	0031	0029	0027	0025	0023
3	0140	0131	0123	0115	0107	0100	0093	0087	0081	0076
4	0319	0302	0285	0269	0254	0240	0226	0213	0201	0189
5	0581	0555	0530	0506	0483	0460	0439	0418	0398	0378
6	0881	0851	0822	0793	0764	0736	0709	0682	0656	0631
7	1145	1118	1091	1064	1037	1010	0982	0955	0928	0901
8	1302	1286	1269	1251	1232	1212	1191	1170	1148	1126
9	1317	1315	1311	1306	1300	1293	1284	1274	1263	1251
10	1198	1210	1219	1228	1235	1241	1245	1249	1250	1251
11	0991	1012	1031	1049	1067	1083	1098	1112	1125	1137
12	0752	0776	0799	0822	0844	0866	0888	0908	0928	0948
13	0526	0549	0572	0594	0617	0640	0662	0685	0707	0729
14	0342	0361	0380	0399	0419	0439	0459	0479	0500	0521
15	0208	0221	0235	0250	0265	0281	0297	0313	0330	0347
16	0118	0127	0137	0147	0157	0168	0180	0192	0204	0217
17	0063	0069	0075	0081	0088	0095	0103	0111	0119	0128
18	0032	0035	0039	0042	0046	0051	0055	0060	0065	0071
19	0015	0017	0019	0021	0023	0026	0028	0031	0034	0037
20	0007	0008	0009	0010	0011	0012	0014	0015	0017	0019
21	0003	0003	0004	0004	0005	0006	0006	0007	0008	0009
22	0001	0001	0002	0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004
23		0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002
24								0001	0001	0001

x \ μ	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	11,0
0										
1	0,0004	0004	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
2	0021	0019	0018	0016	0015	0014	0013	0012	0011	0010
3	0071	0066	0061	0057	0053	0049	0046	0043	0040	0037
4	0178	0168	0158	0148	0139	0131	0123	0116	0109	0102
5	0360	0342	0325	0309	0293	0278	0264	0250	0237	0224
6	0606	0581	0558	0535	0513	0491	0470	0450	0430	0411
7	0874	0847	0821	0795	0769	0743	0718	0694	0669	0646
8	1103	1080	1057	1033	1009	0985	0961	0936	0912	0888
9	1238	1224	1209	1194	1177	1160	1142	1124	1105	1085
10	1250	1249	1246	1241	1236	1230	1222	1214	1204	1194
11	1148	1158	1166	1174	1180	1185	1189	1192	1193	1194
12	0966	0984	1001	1017	1032	1047	1060	1072	1084	1094
13	0751	0772	0793	0814	0834	0853	0872	0891	0909	0926
14	0542	0563	0584	0604	0625	0646	0667	0687	0708	0728
15	0365	0383	0401	0419	0438	0457	0476	0495	0514	0534
16	0230	0244	0258	0272	0287	0303	0318	0334	0350	0367
17	0137	0146	0156	0167	0177	0189	0200	0212	0225	0237
18	0077	0083	0089	0096	0104	0111	0119	0127	0136	0145
19	0041	0045	0048	0053	0057	0062	0067	0072	0078	0084
20	0021	0023	0025	0027	0030	0033	0036	0039	0043	0046
21	0010	0011	0012	0014	0015	0017	0018	0020	0022	0024
22	0005	0005	0006	0006	0007	0008	0009	0010	0011	0012
23	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006
24	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0002	0003
25				0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001

x \ μ	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	12,0
0										
1	0,0002	0002	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
2	0009	0009	0008	0007	0007	0006	0006	0005	0005	0004
3	0034	0032	0030	0028	0026	0024	0022	0021	0019	0018
4	0096	0090	0084	0079	0074	0069	0065	0061	0057	0053
5	0212	0201	0190	0180	0170	0160	0152	0143	0135	0127
6	0393	0375	0358	0341	0325	0310	0295	0281	0268	0255
7	0623	0600	0578	0556	0535	0514	0494	0474	0455	0437
8	0864	0840	0816	0792	0769	0745	0722	0700	0677	0655
9	1065	1045	1024	1003	0982	0961	0939	0917	0895	0874
10	1182	1170	1157	1144	1129	1114	1099	1082	1066	1048
11	1193	1192	1189	1185	1181	1175	1169	1161	1153	1144
12	1104	1112	1120	1126	1131	1136	1139	1142	1143	1144
13	0942	0958	0973	0987	1001	1014	1025	1036	1046	1056

x \ μ	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	12,0
14	0,0747	0767	0786	0804	0822	0840	0857	0874	0889	0905
15	0553	0572	0592	0611	0630	0649	0668	0687	0706	0724
16	0384	0401	0418	0435	0453	0471	0489	0507	0525	0543
17	0250	0264	0278	0292	0306	0321	0336	0352	0367	0383
18	0154	0164	0174	0185	0196	0207	0219	0231	0243	0256
19	0090	0097	0104	0111	0119	0126	0135	0143	0152	0161
20	0050	0054	0059	0063	0068	0073	0079	0084	0091	0097
21	0026	0029	0032	0034	0037	0040	0044	0047	0051	0055
22	0013	0015	0016	0018	0020	0021	0023	0025	0028	0030
23	0006	0007	0008	0009	0010	0011	0012	0013	0014	0016
24	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	0006	0007	0008
25	0001	0002	0002	0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004
26	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002
27							0001	0001	0001	0001

x \ μ	12,1	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	13,0
0										
1	0,0001	0001	0001	0001						
2	0004	0004	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3	0016	0015	0014	0013	0012	0011	0010	0010	0009	0008
4	0050	0046	0043	0041	0038	0035	0033	0031	0029	0027
5	0120	0113	0107	0101	0095	0089	0084	0079	0074	0070
6	0242	0230	0219	0208	0197	0187	0178	0169	0160	0152
7	0419	0402	0385	0368	0353	0337	0323	0308	0295	0181
8	0634	0612	0591	0571	0551	0531	0512	0493	0475	0457
9	0852	0830	0808	0787	0765	0744	0723	0702	0681	0661
10	1031	1013	0994	0975	0956	0937	0918	0898	0878	0859
11	1134	1123	1112	1100	1087	1074	1060	1045	1030	1015
12	1143	1142	1139	1136	1132	1127	1121	1115	1107	1099
13	1064	1072	1078	1084	1089	1093	1096	1098	1099	1099
14	0920	0934	0947	0960	0972	0983	0994	1004	1013	1021
15	0742	0759	0777	0794	0810	0826	0841	0856	0871	0885
16	0561	0579	0597	0615	0633	0650	0668	0685	0702	0719
17	0399	0416	0432	0449	0465	0482	0499	0516	0533	0550
18	0268	0282	0295	0309	0323	0337	0352	0367	0382	0397
19	0171	0181	0191	0202	0213	0224	0235	0247	0259	0272
20	0103	0110	0118	0125	0133	0141	0149	0158	0167	0177
21	0060	0064	0069	0074	0079	0085	0090	0096	0103	0109
22	0033	0036	0038	0042	0045	0048	0052	0056	0060	0065
23	0017	0019	0021	0022	0024	0027	0029	0031	0034	0037
24	0009	0010	0011	0012	0013	0014	0015	0017	0018	0020
25	0004	0005	0005	0006	0006	0007	0008	0009	0009	0010

x \ μ	12,1	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	13,0
26	0,0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0005	0005
27	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0002	0002
28				0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
29										0001

x \ μ	13,1	13,2	13,3	13,4	13,5	13,6	13,7	13,8	13,9	14,0
0										
1										
2	0,0002	0002	0001							
3	0008	0007	0007	0006	0006	0005	0005	0004	0004	0004
4	0025	0023	0022	0020	0019	0018	0016	0015	0014	0013
5	,0066	0062	0058	0055	0051	0048	0045	0042	0040	0037
6	0144	0136	0129	0122	0115	0109	0103	0097	0092	0087
7	0269	0256	0245	0233	0222	0212	0202	0192	0183	0174
8	0440	0423	0407	0391	0375	0360	0345	0331	0318	0304
9	0640	0620	0601	0582	0563	0544	0526	0508	0491	0473
10	0839	0819	0799	0779	0760	0740	0720	0701	0682	0663
11	0999	0983	0966	0949	0932	0915	0897	0880	0862	0844
12	1091	1081	1071	1060	1049	1037	1024	1011	0998	0984
13	1099	1098	1096	1093	1089	1085	1080	1074	1067	1060
14	1028	1035	1041	1046	1050	1054	1056	1058	1060	1060
15	0898	0911	0923	0934	0945	0955	0965	0974	0982	0989
16	0735	0751	0767	0783	0798	0812	0826	0840	0853	0866
17	0567	0583	0600	0617	0633	0650	0666	0682	0697	0713
18	0412	0428	0443	0459	0475	0491	0507	0523	0539	0554
19	0284	0297	0310	0324	0338	0351	0365	0380	0394	0409
20	0186	0196	0206	0217	0228	0239	0250	0262	0274	0286
21	0116	0123	0131	0138	0146	0155	0163	0172	0181	0191
22	0069	0074	0079	0084	0090	0096	0102	0108	0115	0121
23	0039	0042	0046	0049	0053	0057	0061	0065	0069	0074
24	0022	0023	0025	0027	0030	0032	0035	0037	0040	0043
25	0011	0012	0013	0015	0016	0017	0019	0021	0022	0024
26	0006	0006	0007	0008	0008	0009	0010	0011	0012	0013
27	0003	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	0006	0007
28	0001	0001	0002	0002	0002	0002	0002	0003	0003	0003
29	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002
30							0001	0001	0001	0001

x \ μ	14,1	14,2	14,3	14,4	14,5	14,6	14,7	14,8	14,9	15,0
0										
1										
2	0,0001	0001	0001	0001	0001					
3	0004	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
4	0012	0012	0011	0010	0009	0009	0008	0007	0007	0006
5	0035	0033	0031	0029	0027	0025	0024	0022	0021	0019
6	0082	0078	0073	0069	0065	0061	0058	0055	0051	0048
7	0165	0157	0149	0142	0135	0128	0122	0115	0109	0104
8	0292	0279	0267	0256	0244	0234	0223	0213	0204	0194
9	0457	0440	0424	0409	0394	0379	0365	0351	0337	0324
10	0644	0625	0607	0589	0571	0553	0536	0519	0502	0486
11	0825	0807	0789	0771	0753	0735	0716	0698	0681	0663
12	0970	0955	0940	0925	0910	0894	0878	0861	0845	0829
13	1052	1043	1034	1025	1014	1004	0992	0981	0969	0956
14	1060	1058	1057	1054	1051	1047	1042	1037	1031	1024
15	0996	1002	1007	1012	1016	1019	1021	1023	1024	1024
16	0878	0889	0900	0911	0920	0930	0938	0946	0954	0960
17	0728	0743	0757	0771	0785	0798	0811	0824	0836	0847
18	0570	0586	0602	0617	0632	0648	0663	0677	0692	0706
19	0423	0438	0453	0468	0483	0498	0513	0528	0543	0557
20	0298	0311	0324	0337	0350	0363	0377	0390	0404	0418
21	0200	0210	0220	0231	0242	0253	0264	0275	0287	0299
22	0128	0136	0143	0151	0159	0168	0176	0185	0194	0204
23	0079	0084	0089	0095	0100	0106	0113	0119	0126	0133
24	0046	0050	0053	0057	0061	0065	0069	0073	0078	0083
25	0026	0028	0030	0033	0035	0038	0041	0043	0047	0050
26	0014	0015	0017	0018	0020	0021	0023	0025	0027	0029
27	0007	0008	0009	0010	0011	0011	0012	0014	0015	0016
28	0004	0004	0005	0005	0005	0006	0007	0007	0008	0009
29	0002	0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0004
30	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0002
31				0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
32										0001

x \ μ	16,0	18,0	20,0	22,0	24,0	26,0	28,0	30,0
0								
1								
2								
3	0,0001							
4	0003	0001						
5	0010	0002	0001					

x \ μ	16,0	18,0	20,0	22,0	24,0	26,0	28,0	30,0
6	0,0026	0007	0002					
7	0060	0018	0005	0001				
8	0120	0042	0013	0004	0001			
9	0213	0083	0029	0009	0003	0001		
10	0341	0150	0058	0020	0007	0002	0001	
11	0496	0245	0106	0041	0014	0005	0001	
12	0661	0368	0176	0075	0029	0010	0003	0001
13	0814	0509	0271	0127	0053	0020	0007	0002
14	0930	0655	0387	0199	0091	0038	0014	0005
15	0992	0786	0516	0292	0146	0066	0027	0010
16	0992	0884	0646	0401	0219	0106	0047	0019
17	0934	0936	0760	0520	0309	0163	0078	0034
18	0830	0936	0844	0635	0412	0235	0121	0057
19	0699	0887	0888	0735	0520	0322	0178	0089
20	0559	0798	0888	0809	0624	0418	0249	0134
21	0426	0684	0846	0847	0713	0518	0332	0192
22	0310	0560	0769	0847	0778	0612	0423	0261
23	0216	0438	0669	0810	0812	0692	0515	0341
24	0144	0328	0557	0743	0812	0750	0601	0426
25	0092	0237	0446	0654	0779	0780	0673	0511
26	0057	0164	0343	0553	0719	0780	0725	0590
27	0034	0109	0254	0451	0639	0751	0752	0655
28	0019	0070	0181	0354	0548	0697	0752	0702
29	0011	0044	0125	0269	0453	0625	0726	0726
30	0006	0026	0083	0197	0363	0542	0677	0726
31	0003	0015	0054	0140	0281	0454	0612	0703
32	0001	0009	0034	0096	0211	0369	0535	0659
33	0001	0005	0020	0064	0153	0291	0454	0599
34		0002	0012	0041	0108	0222	0374	0529
35		0001	0007	0026	0074	0165	0299	0453
36		0001	0004	0016	0049	0119	0233	0378
37			0002	0009	0032	0084	0176	0306
38			0001	0005	0020	0057	0130	0242
39			0001	0003	0012	0038	0093	0186
40				0002	0007	0025	0065	0139
41				0001	0004	0016	0045	0102
42					0002	0010	0030	0073
43					0001	0006	0019	0051
44					0001	0003	0012	0035
45						0002	0008	0023
46						0001	0005	0015
47						0001	0003	0010
48							0002	0006
49							0001	0004
50							0001	0002
51								0001
52								0001

$\mu = 40$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
18	0,0000	28	0,0100	38	0,0614	48	0,0271	58	0,0015
19	0,0001	29	0,0138	39	0,0630	49	0,0221	59	0,0010
20	0,0002	30	0,0185	40	0,0630	50	0,0177	60	0,0007
21	0,0004	31	0,0238	41	0,0614	51	0,0139	61	0,0005
22	0,0007	32	0,0298	42	0,0585	52	0,0107	62	0,0003
23	0,0012	33	0,0361	43	0,0544	53	0,0081	63	0,0002
24	0,0019	34	0,0425	44	0,0495	54	0,0060	64	0,0001
25	0,0031	35	0,0485	45	0,0440	55	0,0043	65	0,0001
26	0,0047	36	0,0539	46	0,0382	56	0,0031	66	0,0000
27	0,0070	37	0,0583	47	0,0325	57	0,0022		

$\mu = 50$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
25	0,0000	36	0,0075	47	0,0530	58	0,0285	69	0,0019
26	0,0001	37	0,0102	48	0,0552	59	0,0241	70	0,0014
27	0,0001	38	0,0134	49	0,0563	60	0,0201	71	0,0010
28	0,0002	39	0,0172	50	0,0563	61	0,0165	72	0,0007
29	0,0004	40	0,0215	51	0,0552	62	0,0133	73	0,0005
30	0,0007	41	0,0262	52	0,0531	63	0,0106	74	0,0003
31	0,0011	42	0,0312	53	0,0501	64	0,0082	75	0,0002
32	0,0017	43	0,0363	54	0,0464	65	0,0063	76	0,0001
33	0,0026	44	0,0412	55	0,0422	66	0,0048	77	0,0001
34	0,0038	45	0,0458	56	0,0376	67	0,0036	78	0,0001
35	0,0054	46	0,0498	57	0,0330	68	0,0026	79	0,0000

$\mu = 60$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
33	0,0000	36	0,0002	41	0,0021	46	0,0099	51	0,0274
34	0,0001	37	0,0004	42	0,0030	47	0,0127	52	0,0316
35	0,0002	38	0,0006	43	0,0042	48	0,0158	53	0,0358
		39	0,0010	44	0,0057	49	0,0194	54	0,0397
		40	0,0014	45	0,0076	50	0,0233	55	0,0434

$\mu = 60$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
56	0,0464	64	0,0437	72	0,0152	80	0,0022	88	0,0001
57	0,0489	65	0,0404	73	0,0125	81	0,0016	89	0,0001
58	0,0506	66	0,0367	74	0,0101	82	0,0012	90	0,0001
59	0,0514	67	0,0328	75	0,0081	83	0,0009	91	0,0000
60	0,0514	68	0,0290	76	0,0064	84	0,0006		
61	0,0506	69	0,0252	77	0,0050	85	0,0004		
62	0,0490	70	0,0216	78	0,0038	86	0,0003		
63	0,0466	71	0,0183	79	0,0029	87	0,0002		

$\mu = 70$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
41	0,0000	54	0,0074	67	0,0456	80	0,0225	93	0,0014
42	0,0001	55	0,0095	68	0,0470	81	0,0195	94	0,0010
43	0,0001	56	0,0118	69	0,0476	82	0,0166	95	0,0007
44	0,0002	57	0,0145	70	0,0476	83	0,0140	96	0,0005
45	0,0004	58	0,0175	71	0,0470	84	0,0117	97	0,0004
46	0,0005	59	0,0208	72	0,0456	85	0,0096	98	0,0003
47	0,0008	60	0,0243	73	0,0438	86	0,0078	99	0,0002
48	0,0012	61	0,0278	74	0,0414	87	0,0063	100	0,0001
49	0,0017	62	0,0314	75	0,0386	88	0,0050	101	0,0001
50	0,0024	63	0,0349	76	0,0356	89	0,0039	102	0,0001
51	0,0032	64	0,0382	77	0,0324	90	0,0031	103	0,0000
52	0,0043	65	0,0412	78	0,0290	91	0,0024		
53	0,0057	66	0,0436	79	0,0257	92	0,0018		

$\mu = 80$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
49	0,0000	55	0,0007	61	0,0044	67	0,0159	73	0,0340
50	0,0001	56	0,0010	62	0,0056	68	0,0187	74	0,0368
51	0,0001	57	0,0013	63	0,0071	69	0,0217	75	0,0392
52	0,0002	58	0,0018	64	0,0089	70	0,0248	76	0,0413
53	0,0003	59	0,0025	65	0,0110	71	0,0279	77	0,0429
54	0,0005	60	0,0033	66	0,0133	72	0,0310	78	0,0440

$\mu = 80$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
79	0,0446	86	0,0345	94	0,0129	101	0,0031	109	0,0003
80	0,0446	87	0,0317	95	0,0109	102	0,0024	110	0,0002
81	0,0440	88	0,0288	96	0,0090	103	0,0019	111	0,0002
82	0,0429	89	0,0259	97	0,0075	104	0,0015	112	0,0001
83	0,0414	90	0,0230	98	0,0061	105	0,0011	113	0,0001
84	0,0394	91	0,0203	99	0,0049	106	0,0008	114	0,0001
85	0,0371	92	0,0176	100	0,0039	107	0,0006	115	0,0000
		93	0,0152			108	0,0005		

$\mu = 90$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
57	0,0000	71	0,0054	86	0,0393	101	0,0208	116	0,0012
58	0,0001	72	0,0068	87	0,0406	102	0,0183	117	0,0009
59	0,0001	73	0,0084	88	0,0416	103	0,0160	118	0,0007
60	0,0002	74	0,0102	89	0,0420	104	0,0139	119	0,0005
61	0,0003	75	0,0122	90	0,0420	105	0,0119	120	0,0004
62	0,0004	76	0,0145	91	0,0416	106	0,0101	121	0,0003
63	0,0005	77	0,0169	92	0,0406	107	0,0085	122	0,0002
64	0,0008	78	0,0195	93	0,0393	108	0,0071	123	0,0002
65	0,0010	79	0,0222	94	0,0377	109	0,0058	124	0,0001
66	0,0014	80	0,0250	95	0,0357	110	0,0048	125	0,0001
67	0,0019	81	0,0278	96	0,0334	111	0,0039	126	0,0001
68	0,0026	82	0,0305	97	0,0310	112	0,0031	127	0,0000
69	0,0033	83	0,0331	98	0,0285	113	0,0025		
70	0,0043	84	0,0354	99	0,0259	114	0,0020		
		85	0,0375	100	0,0233	115	0,0015		

$\mu = 100$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
65	0,0000	68	0,0002	71	0,0004	75	0,0015	78	0,0033
66	0,0001	69	0,0002	72	0,0006	76	0,0020	79	0,0042
67	0,0001	70	0,0003	73	0,0008	77	0,0026	80	0,0052
				74	0,0011				

$\mu = 100$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
81	0,0064	93	0,0322	105	0,0344	117	0,0094	129	0,0008
82	0,0078	94	0,0342	106	0,0324	118	0,0079	130	0,0006
83	0,0094	95	0,0360	107	0,0303	119	0,0067	131	0,0004
84	0,0112	96	0,0375	108	0,0281	120	0,0056	132	0,0003
85	0,0132	97	0,0387	109	0,0258	121	0,0046	133	0,0002
86	0,0154	98	0,0395	110	0,0234	122	0,0038	134	0,0002
87	0,0176	99	0,0399	111	0,0211	123	0,0031	135	0,0001
88	0,0201	100	0,0399	112	0,0188	124	0,0025	136	0,0001
89	0,0225	101	0,0395	113	0,0167	125	0,0020	137	0,0001
90	0,0250	102	0,0387	114	0,0146	126	0,0016	138	0,0000
91	0,0275	103	0,0376	115	0,0127	127	0,0012		
92	0,0299	104	0,0361	116	0,0110	128	0,0010		

ТАБЛИЦА VII

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\widetilde{\Psi}(x;\mu)=\sum\limits_{i=x}^{\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^{i}}{i!}$

x \ μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,0952	1813	2592	3297	3935	4512	5034	5507	5934	6321
2	0047	0175	0369	0616	0902	1219	1558	1912	2275	2642
3	0002	0011	0036	0079	0144	0231	0341	0474	0629	0803
4		0001	0003	0008	0018	0034	0058	0091	0135	0190
5				0001	0002	0004	0008	0014	0023	0037
6							0001	0002	0003	0006
7										0001

x \ μ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,6671	6988	7275	7534	7769	7981	8173	8347	8504	8647
2	3010	3374	3732	4082	4422	4751	5068	5372	5663	5940
3	0996	1205	1429	1665	1912	2166	2428	2694	2963	3233
4	0257	0338	0431	0537	0656	0788	0932	1087	1253	1429
5	0054	0077	0107	0143	0186	0237	0296	0364	0441	0527
6	0010	0015	0022	0032	0045	0060	0080	0104	0132	0166
7	0001	0003	0004	0006	0009	0013	0019	0026	0034	0045
8			0001	0001	0002	0003	0004	0006	0008	0011
9							0001	0001	0002	0002

x \ μ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,8775	8892	8997	9093	9179	9257	9328	9392	9450	9502
2	6204	6454	6691	6916	7127	7326	7513	7689	7854	8009
3	3504	3773	4040	4303	4562	4816	5064	5305	5540	5768
4	1614	1806	2007	2213	2424	2640	2859	3081	3304	3528
5	0621	0725	0838	0959	1088	1226	1371	1523	1682	1847
6	0204	0249	0300	0357	0420	0490	0567	0651	0742	0839
7	0059	0075	0094	0116	0142	0172	0206	0244	0287	0335
8	0015	0020	0026	0033	0042	0053	0066	0081	0099	0119
9	0003	0005	0006	0009	0011	0015	0019	0024	0031	0038
10	0001	0001	0001	0002	0003	0004	0005	0007	0009	0011
11					0001	0001	0001	0002	0002	0003
12									0001	0001

μ / x	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,9550	9592	9631	9666	9698	9727	9753	9776	9798	9817
2	8153	8288	8414	8532	8641	8743	8838	8926	9008	9084
3	5988	6201	6406	6603	6792	6973	7146	7311	7469	7619
4	3752	3975	4197	4416	4634	4848	5058	5265	5468	5665
5	2018	2194	2374	2558	2746	2936	3128	3322	3516	3712
6	0943	1054	1171	1295	1424	1559	1699	1844	1994	2149
7	0388	0446	0510	0579	0653	0733	0818	0909	1005	1107
8	0142	0168	0198	0231	0267	0308	0352	0401	0454	0511
9	0047	0057	0069	0083	0099	0117	0137	0160	0185	0214
10	0014	0018	0022	0027	0033	0040	0048	0058	0069	0081
11	0004	0005	0006	0008	0010	0013	0016	0019	0023	0028
12	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0007	0009
13				0001	0001	0001	0001	0002	0002	0003
14									0001	0001

μ / x	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,9834	9850	9864	9877	9889	9899	9909	9918	9926	9933
2	9155	9220	9281	9337	9389	9437	9482	9523	9561	9596
3	7762	7898	8026	8149	8264	8374	8477	8575	8667	8753
4	5858	6046	6228	6406	6577	6743	6903	7058	7207	7350
5	3907	4102	4296	4488	4679	4868	5054	5237	5418	5595
6	2307	2469	2633	2801	2971	3142	3316	3490	3665	3840
7	1214	1325	1442	1564	1689	1820	1954	2092	2233	2378
8	0573	0639	0710	0786	0866	0951	1040	1133	1231	1334
9	0245	0279	0317	0358	0403	0451	0503	0558	0618	0681
10	0095	0111	0129	0149	0171	0195	0222	0251	0283	0318
11	0034	0041	0048	0057	0067	0078	0090	0104	0120	0137
12	0011	0014	0017	0020	0024	0029	0034	0040	0047	0055
13	0003	0004	0005	0007	0008	0010	0012	0014	0017	0020
14	0001	0001	0002	0002	0003	0003	0004	0005	0006	0007
15				0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002
16									0001	0001

x \ μ	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,9939	9945	9950	9955	9959	9963	9967	9970	9973	9975
2	9628	9658	9686	9711	9734	9756	9776	9794	9811	9826
3	8835	8912	8984	9052	9116	9176	9232	9285	9334	9380
4	7487	7619	7746	7867	7983	8094	8200	8300	8396	8488
5	5769	5939	6105	6267	6425	6579	6728	6873	7013	7149
6	4016	4191	4365	4539	4711	4881	5050	5217	5381	5543
7	2526	2676	2829	2983	3140	3297	3456	3616	3776	3937
8	1440	1551	1665	1783	1905	2030	2159	2290	2424	2560
9	0748	0819	0894	0974	1056	1143	1234	1328	1426	1528
10	0356	0397	0441	0488	0538	0591	0648	0708	0772	0839
11	0156	0177	0200	0225	0253	0282	0314	0349	0386	0426
12	0063	0073	0084	0096	0110	0125	0141	0160	0179	0201
13	0024	0028	0033	0038	0045	0051	0059	0068	0078	0088
14	0008	0010	0012	0014	0017	0020	0023	0027	0031	0036
15	0003	0003	0004	0005	0006	0007	0009	0010	0012	0014
16	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0004	0004	0005
17				0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002
18										0001

x \ μ	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,9978	9980	9982	9983	9985	9986	9988	9989	9990	9991
2	9841	9854	9866	9877	9887	9897	9905	9913	9920	9927
3	9423	9464	9502	9537	9570	9600	9629	9656	9680	9704
4	8575	8658	8736	8811	8882	8948	9012	9072	9129	9182
5	7281	7408	7531	7649	7763	7873	7978	8080	8177	8270
6	5702	5859	6012	6163	6310	6453	6594	6730	6863	6993
7	4098	4258	4418	4577	4735	4892	5047	5201	5353	5503
8	2699	2840	2983	3127	3272	3419	3567	3715	3864	4013
9	1633	1741	1852	1967	2084	2204	2327	2452	2580	2709
10	0910	0984	1061	1142	1226	1314	1404	1498	1595	1695
11	0469	0514	0563	0614	0668	0726	0786	0849	0916	0985
12	0224	0250	0277	0307	0339	0373	0409	0448	0490	0534
13	0100	0113	0127	0143	0160	0179	0199	0221	0245	0270
14	0042	0048	0055	0063	0071	0080	0091	0102	0115	0128
15	0016	0019	0022	0026	0030	0034	0039	0044	0050	0057

x \ μ	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
16	0,0006	0007	0008	0010	0012	0014	0016	0018	0021	0024
17	0002	0003	0003	0004	0004	0005	0006	0007	0008	0010
18	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0003	0004
19					0001	0001	0001	0001	0001	0001

x \ μ	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,9992	9993	9993	9994	9994	9995	9995	9996	9996	9997
2	9933	9939	9944	9949	9953	9957	9961	9964	9967	9970
3	9725	9745	9764	9781	9797	9812	9826	9839	9851	9862
4	9233	9281	9326	9368	9409	9446	9482	9515	9547	9576
5	8359	8445	8527	8605	8679	8751	8819	8883	8945	9004
6	7119	7241	7360	7474	7586	7693	7797	7897	7994	8088
7	5651	5796	5940	6080	6218	6354	6486	6616	6743	6866
8	4162	4311	4459	4607	4754	4900	5044	5188	5330	5470
9	2840	2973	3108	3243	3380	3518	3657	3796	3935	4075
10	1798	1904	2012	2123	2236	2351	2469	2589	2710	2834
11	1058	1133	1212	1293	1378	1465	1555	1648	1743	1841
12	0580	0629	0681	0735	0792	0852	0915	0980	1048	1119
13	0297	0327	0358	0391	0427	0464	0504	0546	0591	0638
14	0143	0159	0176	0195	0216	0238	0261	0286	0313	0342
15	0065	0073	0082	0092	0103	0114	0127	0141	0156	0173
16	0028	0031	0036	0041	0046	0052	0059	0066	0074	0082
17	0011	0013	0015	0017	0020	0023	0026	0029	0033	0037
18	0004	0005	0006	0007	0008	0009	0011	0012	0014	0016
19	0002	0002	0002	0003	0003	0004	0004	0005	0006	0007
20	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003
21							0001	0001	0001	0001

x \ μ	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,9997	9997	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9999	9999
2	9972	9974	9977	9979	9981	9982	9984	9985	9986	9988
3	9873	9882	9891	9900	9907	9914	9921	9927	9932	9938

x \ μ	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
4	0,9604	9630	9654	9677	9699	9719	9738	9756	9772	9788
5	9060	9113	9163	9211	9256	9299	9340	9379	9416	9450
6	8178	8264	8347	8427	8504	8578	8648	8716	8781	8843
7	6987	7104	7219	7330	7438	7543	7645	7744	7840	7932
8	5609	5746	5881	6013	6144	6272	6398	6522	6643	6761
9	4214	4353	4493	4631	4769	4906	5042	5177	5311	5443
10	2959	3085	3212	3341	3470	3600	3731	3863	3994	4126
11	1942	2045	2150	2257	2366	2478	2591	2706	2822	2940
12	1193	1269	1348	1429	1513	1600	1689	1780	1874	1970
13	0687	0739	0793	0850	0909	0971	1035	1102	1171	1242
14	0372	0405	0439	0476	0514	0555	0597	0642	0689	0739
15	0190	0209	0229	0251	0274	0299	0325	0353	0383	0415
16	0092	0102	0113	0125	0138	0152	0168	0184	0202	0220
17	0042	0047	0053	0059	0066	0074	0082	0091	0101	0111
18	0018	0021	0023	0027	0030	0034	0038	0043	0048	0053
19	0008	0009	0010	0011	0013	0015	0017	0019	0022	0024
20	0003	0003	0004	0005	0005	0006	0007	0008	0009	0011
21	0001	0001	0002	0002	0002	0002	0003	0003	0004	0004
22			0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002
23									0001	0001

x \ μ	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	0,9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	1,0000
2	9989	9990	9991	9991	9992	9993	9993	9994	9995	9995
3	9942	9947	9951	9955	9958	9962	9965	9967	9970	9972
4	9802	9816	9828	9840	9851	9862	9871	9880	9889	9897
5	9483	9514	9544	9571	9597	9622	9645	9667	9688	9707
6	8902	8959	9014	9065	9115	9162	9207	9250	9290	9329
7	8022	8108	8192	8273	8351	8426	8498	8567	8634	8699
8	6877	6990	7101	7208	7313	7416	7515	7612	7706	7798
9	5574	5704	5832	5958	6082	6204	6324	6442	6558	6672
10	4258	4389	4521	4651	4782	4911	5040	5168	5295	5421
11	3059	3180	3301	3424	3547	3671	3795	3920	4045	4170
12	2068	2168	2270	2374	2480	2588	2697	2807	2919	3032
13	1316	1393	1471	1552	1636	1721	1809	1899	1991	2084
14	0790	0844	0900	0958	1019	1081	1147	1214	1284	1355
15	0448	0483	0520	0559	0600	0643	0688	0735	0784	0835

x \ μ	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
16	0,0240	0262	0285	0309	0335	0362	0391	0421	0454	0487
17	0122	0135	0148	0162	0177	0194	0211	0230	0249	0270
18	0059	0066	0073	0081	0089	0098	0108	0119	0130	0143
19	0027	0031	0034	0038	0043	0048	0053	0059	0065	0072
20	0012	0014	0015	0017	0020	0022	0025	0028	0031	0035
21	0005	0006	0007	0008	0009	0010	0011	0012	0014	0016
22	0002	0002	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	0007
23	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0003
24					0001	0001	0001	0001	0001	0001

x \ μ	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	11,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
2	0,9995	9996	9996	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998
3	9974	9977	9978	9980	9982	9983	9984	9986	9987	9988
4	9904	9911	9917	9923	9929	9934	9938	9943	9947	9951
5	9726	9743	9759	9775	9789	9803	9815	9827	9838	9849
6	9366	9401	9434	9466	9496	9525	9552	9577	9602	9625
7	8760	8820	8877	8931	8984	9034	9082	9128	9172	9214
8	7887	7973	8056	8137	8215	8291	8364	8434	8502	8568
9	6783	6892	6999	7104	7206	7306	7403	7498	7590	7680
10	5545	5668	5790	5910	6029	6146	6261	6374	6485	6595
11	4295	4420	4544	4669	4793	4916	5039	5160	5281	5401
12	3147	3262	3378	3495	3613	3731	3850	3969	4088	4207
13	2180	2278	2377	2478	2580	2684	2790	2896	3004	3113
14	1429	1506	1584	1664	1747	1831	1917	2005	2095	2187
15	0888	0943	1000	1060	1121	1185	1250	1318	1388	1460
16	0523	0560	0600	0641	0683	0728	0775	0823	0874	0926
17	0293	0316	0342	0368	0396	0426	0457	0489	0523	0559
18	0156	0170	0185	0201	0219	0237	0256	0277	0299	0322
19	0079	0087	0096	0105	0115	0126	0137	0150	0163	0177
20	0038	0043	0047	0052	0058	0064	0070	0077	0085	0093
21	0018	0020	0022	0025	0028	0031	0034	0038	0042	0047
22	0008	0009	0010	0011	0013	0014	0016	0018	0020	0023
23	0003	0004	0004	0005	0006	0006	0007	0008	0009	0010
24	0001	0002	0002	0002	0002	0003	0003	0004	0004	0005
25	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002
26							0001	0001	0001	0001

x \ μ	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	12,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
2	0,9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3	9989	9990	9991	9991	9992	9993	9993	9994	9994	9995
4	9954	9958	9961	9964	9966	9969	9971	9973	9975	9977
5	9859	9868	9877	9885	9893	9900	9906	9913	9919	9924
6	9647	9667	9687	9705	9723	9739	9755	9770	9783	9797
7	9254	9292	9329	9364	9397	9429	9459	9488	9516	9542
8	8632	8693	8751	8808	8863	8915	8965	9014	9060	9105
9	7768	7853	7936	8016	8094	8170	8243	8314	8383	8450
10	6702	6808	6911	7013	7112	7209	7304	7397	7488	7576
11	5520	5638	5754	5869	5983	6095	6206	6315	6422	6528
12	4327	4446	4565	4684	4802	4920	5037	5153	5269	5384
13	3223	3334	3445	3558	3671	3784	3898	4012	4126	4240
14	2281	2376	2472	2570	2670	2770	2872	2965	3080	3185
15	1533	1609	1687	1766	1847	1931	2015	2102	2190	2280
16	0980	1037	1095	1155	1217	1281	1347	1415	1484	1556
17	0597	0636	0677	0720	0764	0810	0858	0908	0960	1013
18	0346	0372	0399	0428	0458	0489	0522	0556	0592	0630
19	0192	0208	0225	0243	0262	0282	0303	0326	0349	0374
20	0102	0111	0121	0132	0143	0155	0168	0182	0197	0213
21	0052	0057	0062	0068	0075	0082	0090	0098	0107	0116
22	0025	0028	0031	0034	0038	0042	0046	0050	0055	0061
23	0012	0013	0015	0016	0018	0020	0022	0025	0028	0030
24	0005	0006	0007	0008	0008	0009	0011	0012	0013	0015
25	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	0007
26	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0002	0003	0003
27			0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
28										0001

x \ μ	12,1	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	13,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
2	0,9999	9999	9999	9999	9999	1,0000	0000	0000	0000	0000
3	9995	9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	9998	9998
4	9979	9980	9982	9983	9984	9986	9987	9988	9989	9990
5	9929	9934	9938	9943	9947	9950	9954	9957	9960	9963

x \ μ	12,1	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	13,0
6	0,9809	9821	9832	9842	9852	9861	9869	9878	9885	9893
7	9567	9590	9613	9634	9654	9674	9692	9709	9726	9741
8	9148	9189	9228	9266	9302	9336	9369	9401	9431	9460
9	8514	8576	8637	8695	8751	8805	8857	8907	8956	9002
10	7662	7746	7828	7908	7986	8061	8134	8206	8275	8342
11	6632	6734	6834	6933	7029	7124	7217	7307	7396	7483
12	5498	5611	5722	5833	5942	6050	6157	6262	6366	6468
13	4355	4469	4583	4697	4810	4923	5036	5147	5259	5369
14	3291	3397	3505	3613	3722	3831	3940	4050	4160	4270
15	2371	2464	2558	2653	2750	2847	2946	3046	3147	3249
16	1629	1704	1781	1860	1940	2022	2105	2190	2276	2364
17	1068	1125	1184	1245	1307	1371	1437	1505	1574	1645
18	0669	0710	0752	0796	0842	0889	0938	0989	1041	1095
19	0400	0428	0457	0487	0519	0552	0586	0622	0659	0698
20	0229	0247	0266	0285	0306	0328	0351	0375	0400	0427
21	0126	0137	0148	0160	0173	0187	0201	0217	0233	0250
22	0066	0073	0079	0086	0094	0102	0111	0120	0130	0141
23	0034	0037	0041	0045	0049	0054	0059	0064	0070	0076
24	0016	0018	0020	0022	0025	0027	0030	0033	0036	0040
25	0008	0009	0010	0011	0012	0013	0015	0016	0018	0020
26	0003	0004	0004	0005	0006	0006	0007	0008	0009	0010
27	0002	0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0005
28	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002
29						0001	0001	0001	0001	0001

x \ μ	13,1	13,2	13,3	13,4	13,5	13,6	13,7	13,8	13,9	14,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
2	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
3	0,9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4	9990	9991	9992	9992	9993	9993	9994	9994	9995	9995
5	9965	9968	9970	9972	9974	9976	9978	9979	9981	9982
6	9899	9906	9912	9917	9923	9928	9932	9937	9941	9945
7	9756	9770	9783	9796	9807	9819	9829	9839	9849	9858
8	9487	9513	9539	9562	9585	9607	9628	9647	9666	9684
9	9047	9090	9132	9172	9210	9247	9282	9316	9348	9379
10	8407	8470	8531	8590	8647	8703	8756	8808	8858	8906

x \ μ	13,1	13,2	13,3	13,4	13,5	13,6	13,7	13,8	13,9	14,0
11	0,7568	7651	7732	7811	7888	7963	8036	8107	8176	8243
12	6569	6668	6766	6861	6955	7048	7138	7227	7314	7400
13	5478	5587	5695	5801	5907	6011	6114	6216	6316	6415
14	4379	4489	4599	4708	4818	4926	5034	5142	5249	5356
15	3351	3454	3558	3662	3767	3872	3978	4084	4190	4296
16	2453	2544	2635	2728	2822	2917	3013	3110	3208	3306
17	1718	1792	1868	1946	2025	2105	2187	2270	2355	2441
18	1151	1209	1268	1329	1391	1455	1521	1589	1657	1728
19	0739	0781	0824	0870	0916	0965	1014	1066	1119	1174
20	0454	0484	0514	0546	0579	0613	0649	0686	0725	0765
21	0268	0287	0308	0329	0351	0374	0399	0424	0451	0479
22	0152	0164	0177	0190	0204	0220	0235	0252	0270	0288
23	0083	0090	0098	0106	0115	0124	0134	0144	0155	0167
24	0044	0048	0052	0057	0062	0067	0073	0079	0086	0093
25	0022	0024	0027	0029	0032	0035	0039	0042	0046	0050
26	0011	0012	0013	0015	0016	0018	0020	0022	0024	0026
27	0005	0006	0006	0007	0008	0009	0010	0011	0012	0013
28	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	0006
29	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0002	0003	0003
30		0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
31									0001	0001

x \ μ	14,1	14,2	14,3	14,4	14,5	14,6	14,7	14,8	14,9	15,0
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
2	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
3	0,9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	1,0000	0000	0000
4	9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998
5	9983	9984	9986	9987	9988	9988	9989	9990	9991	9991
6	9948	9952	9955	9958	9961	9963	9966	9968	9970	9972
7	9866	9874	9882	9889	9896	9902	9908	9913	9919	9924
8	9701	9717	9732	9747	9761	9774	9786	9798	9809	9820
9	9409	9438	9465	9491	9516	9540	9563	9584	9606	9626
10	8953	8997	9041	9082	9122	9161	9198	9234	9268	9301
11	8309	8372	8434	8493	8551	8608	8662	8715	8766	8815
12	7483	7565	7645	7723	7799	7873	7946	8016	8085	8152
13	6513	6609	6704	6797	6889	6979	7068	7155	7240	7324
14	5461	5566	5670	5773	5875	5976	6075	6174	6272	6368
15	4402	4508	4613	4719	4824	4929	5033	5137	5241	5343

x \ μ	14,1	14,2	14,3	14,4	14,5	14,6	14,7	14,8	14,9	15,0
16	0,3406	3506	3606	3707	3808	3910	4012	4114	4217	4319
17	2528	2616	2706	2796	2888	2980	3074	3168	3263	3359
18	1800	1874	1949	2025	2103	2182	2262	2344	2427	2511
19	1230	1288	1347	1408	1470	1534	1600	1667	1735	1805
20	0807	0850	0894	0940	0988	1037	1087	1139	1193	1248
21	0508	0539	0570	0604	0638	0674	0710	0749	0789	0830
22	0308	0329	0350	0373	0396	0421	0447	0474	0502	0531
23	0180	0193	0207	0221	0237	0253	0271	0289	0308	0327
24	0101	0109	0118	0127	0137	0147	0158	0169	0182	0195
25	0055	0059	0065	0070	0076	0082	0089	0096	0104	0112
26	0029	0031	0034	0037	0041	0044	0048	0053	0057	0062
27	0014	0016	0018	0019	0021	0023	0025	0028	0030	0033
28	0007	0008	0009	0010	0011	0012	0013	0014	0016	0017
29	0003	0004	0004	0005	0005	0006	0006	0007	0008	0009
30	0002	0002	0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0004
31	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002
32						0001	0001	0001	0001	0001

x \ μ	16	18	20	22	24	26	28	30
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
2	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
3	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
4	0,9999	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
5	9996	0,9999	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000
6	9986	9997	0,9999	1,0000	0000	0000	0000	0000
7	9960	9990	9997	0,9999	1,0000	0000	0000	0000
8	9900	9971	9992	9998	1,0000	0000	0000	0000
9	9780	9929	9979	9994	0,9998	1,0000	0000	0000
10	9567	9846	9950	9985	9996	0,9999	1,0000	0000
11	9226	9696	9892	9965	9989	9997	0,9999	1,0000
12	8730	9451	9786	9924	9975	9992	9998	9999
13	8069	9083	9610	9849	9946	9982	9994	9998
14	7255	8574	9339	9722	9893	9962	9987	9996
15	6325	7919	8951	9523	9802	9924	9973	9991
16	5333	7133	8435	9231	9656	9858	9946	9981
17	4340	6250	7789	8830	9437	9752	9899	9961
18	3407	5314	7030	8310	9129	9589	9821	9927
19	2577	4378	6186	7675	8717	9354	9700	9871
20	1878	3491	5297	6940	8197	9032	9522	9781

x \ μ	16	18	20	22	24	26	28	30
21	0,1318	2693	4409	6131	7574	8613	9273	9647
22	0892	2009	3563	5284	6861	8095	8940	9456
23	0582	1449	2794	4436	6083	7483	8517	9194
24	0367	1011	2125	3626	5272	6791	8002	8854
25	0223	0683	1568	2883	4460	6041	7401	8428
26	0131	0446	1122	2229	3681	5261	6728	7916
27	0075	0282	0779	1676	2962	4481	6003	7327
28	0041	0173	0525	1225	2323	3730	5251	6671
29	0022	0103	0343	0871	1775	3033	4500	5969
30	0011	0059	0218	0602	1321	2407	3774	5243
31	0006	0033	0135	0405	0958	1866	3097	4516
32	0003	0018	0081	0265	0678	1411	2485	3814
33	0001	0010	0047	0169	0467	1042	1949	3155
34	0001	0005	0027	0105	0314	0751	1495	2556
35		0002	0015	0064	0206	0528	1121	2027
36		0001	0008	0038	0132	0363	0822	1574
37		0001	0004	0022	0082	0244	0589	1196
38			0002	0012	0050	0160	0413	0890
39			0001	0007	0030	0103	0283	0648
40			0001	0004	0017	0064	0190	0463
41				0002	0010	0039	0125	0323
42				0001	0005	0024	0080	0221
43					0003	0014	0050	0148
44					0002	0008	0031	0087
45					0001	0004	0019	0063
46						0002	0011	0040
47						0001	0006	0024
48						0001	0004	0015
49							0002	0009
50							0001	0005
51							0001	0003
52								0002
53								0001

$\mu = 40$

x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$
18	1,0000	28	0,9807	38	0,6453	48	0,1196	58	0,0044
19	0,9999	29	0,9706	39	0,5840	49	0,0924	59	0,0029
20	0,9998	30	0,9568	40	0,5210	50	0,0703	60	0,0019
21	0,9996	31	0,9383	41	0,4581	51	0,0526	61	0,0012
22	0,9993	32	0,9143	42	0,3967	52	0,0387	62	0,0007
23	0,9986	33	0,8847	43	0,3382	53	0,0280	63	0,0005
24	0,9974	34	0,8486	44	0,2838	54	0,0200	64	0,0003
25	0,9955	35	0,8061	45	0,2343	55	0,0140	65	0,0002
26	0,9924	36	0,7576	46	0,1903	56	0,0097	66	0,0001
27	0,9877	37	0,7036	47	0,1521	57	0,0066	67	0,0000

$\mu = 50$

x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$
25	1,0000	37	0,9769	49	0,5751	61	0,0722	73	0,0014
26	0,9999	38	0,9660	50	0,5188	62	0,0557	74	0,0009
27	0,9999	39	0,9526	51	0,4625	63	0,0424	75	0,0006
28	0,9997	40	0,9354	52	0,4073	64	0,0318	76	0,0004
29	0,9995	41	0,9139	53	0,3542	65	0,0236	77	0,0002
30	0,9991	42	0,8877	54	0,3041	66	0,0173	78	0,0001
31	0,9984	43	0,8565	55	0,2577	67	0,0125	79	0,0001
32	0,9973	44	0,8202	56	0,2155	68	0,0089	80	0,0000
33	0,9956	45	0,7790	57	0,1779	69	0,0062		
34	0,9930	46	0,7331	58	0,1449	70	0,0043		
35	0,9892	47	0,6833	59	0,1164	71	0,0030		
36	0,9838	48	0,6303	60	0,0923	72	0,0020		

$\mu = 60$

x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$
33	1,0000	36	0,9997	39	0,9984	42	0,9939	44	0,9867
34	0,9999	37	0,9994	40	0,9974	43	0,9909	45	0,9810
35	0,9998	38	0,9990	41	0,9960				

x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$
46	0,9734	56	0,7145	66	0,2355	76	0,0260	86	0,0009
47	0,9635	57	0,6681	67	0,1988	77	0,0196	87	0,0006
48	0,9508	58	0,6192	68	0,1660	78	0,0146	88	0,0004
49	0,9350	59	0,5686	69	0,1370	79	0,0107	89	0,0003
50	0,9156	60	0,5172	70	0,1118	80	0,0078	90	0,0002
51	0,8923	61	0,4657	71	0,0902	81	0,0056	91	0,0001
52	0,8649	62	0,4151	72	0,0719	82	0,0040	92	0,0001
53	0,8336	63	0,3662	73	0,0567	83	0,0028	93	0,0000
54	0,7976	64	0,3196	74	0,0442	84	0,0020		
55	0,7578	65	0,2758	75	0,0341	85	0,0014		

$\mu = 70$

x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$
40	1,0000	54	0,9792	68	0,6105	80	0,1291	93	0,0049
41	0,9999	55	0,9718	69	0,5635	81	0,1066	94	0,0036
42	0,9999	56	0,9623	70	0,5159	82	0,0871	95	0,0026
43	0,9998	57	0,9505	71	0,4683	83	0,0705	96	0,0018
44	0,9997	58	0,9360	72	0,4213	84	0,0565	97	0,0013
45	0,9994	59	0,9184	73	0,3757	85	0,0448	98	0,0009
46	0,9991	60	0,8976	74	0,3319	86	0,0352	99	0,0006
47	0,9985	61	0,8734	75	0,2905	87	0,0274	100	0,0004
48	0,9977	62	0,8455	76	0,2518	88	0,0211	101	0,0003
49	0,9966	63	0,8140	77	0,2162	89	0,0161	102	0,0002
50	0,9949	64	0,7791	78	0,1839	90	0,0121	103	0,0001
51	0,9925	65	0,7409	79	0,1548	91	0,0091	104	0,0001
52	0,9893	66	0,6997			92	0,0067	105	0,0000
53	0,9850	67	0,6561						

$\mu = 80$

x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$
48	1,0000	51	0,9998	54	0,9992	57	0,9971	59	0,9939
49	0,9999	52	0,9997	55	0,9987	58	0,9957	60	0,9914
50	0,9999	53	0,9995	56	0,9980				

x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$
61	0,9881	73	0,7976	85	0,3026	97	0,0356	109	0,0012
62	0,9837	74	0,7636	86	0,2655	98	0,0281	110	0,0008
63	0,9781	75	0,7268	87	0,2310	99	0,0220	111	0,0006
64	0,9710	76	0,6876	88	0,1992	100	0,0171	112	0,0004
65	0,9620	77	0,6463	89	0,1704	101	0,0132	113	0,0003
66	0,9510	78	0,6034	90	0,1445	102	0,0100	114	0,0002
67	0,9377	79	0,5594	91	0,1214	103	0,0076	115	0,0001
68	0,9218	80	0,5149	92	0,1012	104	0,0057	116	0,0001
69	0,9031	81	0,4703	93	0,0835	105	0,0042	117	0,0000
70	0,8814	82	0,4263	94	0,0684	106	0,0031		
71	0,8566	83	0,3834	95	0,0555	107	0,0023		
72	0,8287	84	0,3420	96	0,0446	108	0,0016		

$\mu = 90$

x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$
56	1,0000	71	0,9830	86	0,6775	101	0,1349	116	0,0048
57	0,9999	72	0,9775	87	0,6382	102	0,1142	117	0,0036
58	0,9999	73	0,9707	88	0,5976	103	0,0958	118	0,0027
59	0,9998	74	0,9624	89	0,5560	104	0,0798	119	0,0020
60	0,9997	75	0,9522	90	0,5140	105	0,0659	120	0,0015
61	0,9995	76	0,9400	91	0,4720	106	0,0540	121	0,0011
62	0,9992	77	0,9255	92	0,4305	107	0,0440	122	0,0008
63	0,9989	78	0,9086	93	0,3898	108	0,0355	123	0,0006
64	0,9983	79	0,8891	94	0,3505	109	0,0284	124	0,0004
65	0,9976	80	0,8668	95	0,3128	110	0,0226	125	0,0003
66	0,9965	81	0,8418	96	0,2772	111	0,0178	126	0,0002
67	0,9951	82	0,8140	97	0,2437	112	0,0139	127	0,0001
68	0,9931	83	0,7835	98	0,2127	113	0,0108	128	0,0001
69	0,9906	84	0,7504	99	0,1842	114	0,0083	129	0,0001
70	0,9872	85	0,7150	100	0,1582	115	0,0063	130	0,0000

$\mu = 100$

x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$	x	$\tilde{\Psi}(x)$
64	1,0000	80	0,9826	96	0,6688	112	0,1260	128	0,0040
65	0,9999	81	0,9774	97	0,6313	113	0,1072	129	0,0030
66	0,9999	82	0,9709	98	0,5926	114	0,0905	130	0,0023
67	0,9998	83	0,9631	99	0,5532	115	0,0759	131	0,0017
68	0,9997	84	0,9537	100	0,5133	116	0,0632	132	0,0012
69	0,9996	85	0,9424	101	0,4734	117	0,0522	133	0,0009
70	0,9994	86	0,9292	102	0,4340	118	0,0428	134	0,0007
71	0,9990	87	0,9139	103	0,3953	119	0,0349	135	0,0005
72	0,9986	88	0,8962	104	0,3577	120	0,0282	136	0,0003
73	0,9980	89	0,8762	105	0,3216	121	0,0227	137	0,0002
74	0,9972	90	0,8536	106	0,2872	122	0,0181	138	0,0002
75	0,9960	91	0,8286	107	0,2547	123	0,0143	139	0,0001
76	0,9945	92	0,8011	108	0,2244	124	0,0112	140	0,0001
77	0,9925	93	0,7712	109	0,1963	125	0,0088	141	0,0000
78	0,9900	94	0,7390	110	0,1706	126	0,0068		
79	0,9867	95	0,7048	111	0,1471	127	0,0052		

ТАБЛИЦА VIII

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ $p(x;\, N,\, n,\, k) = \dfrac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}$

и $P(x;\, N,\, n,\, k) = \sum\limits_{i=0}^{x} p(i;\, N,\, n,\, k)$

n	k	x	$P(x)$	$p(x)$
		$N = 2$		
1	1	0	0,5000	0,5000
1	1	1	1,0000	0,5000
		$N = 4$		
1	1	0	0,7500	0,7500
2	1	1	1,0000	0,2500
2	1	0	0,5000	0,5000
2	1	1	1,0000	0,5000
2	2	0	0,1667	0,1667
2	2	1	0,8333	0,6667
2	2	2	1,0000	0,1667
		$N = 6$		
1	1	0	0,8333	0,8333
1	1	1	1,0000	0,1667
2	1	0	0,0007	0,0007
2	1	1	1,0000	0,3333
2	2	0	0,4000	0,4000
2	2	1	0,9333	0,5333
2	2	2	1,0000	0,0667
3	1	0	0,5000	0,5000
3	1	1	1,0000	0,5000
3	2	0	0,2000	0,2000
3	2	1	0,8000	0,6000
3	2	2	1,0000	0,2000
3	3	0	0,0500	0,0500
3	3	1	0,5000	0,4500
3	3	2	0,9500	0,4500
3	3	3	1,0000	0,0500
		$N = 8$		
1	1	0	0,8750	0,8750
1	1	1	1,0000	0,1250
2	1	0	0,7500	0,7500
2	1	1	1,0000	0,2500
2	2	0	0,5357	0,5357
2	2	1	0,9643	0,4286
2	2	2	1,0000	0,0357
3	1	0	0,6250	0,6250
3	1	1	1,0000	0,3750
3	2	0	0,3571	0,3571
3	2	1	0,8929	0,5357
3	2	2	1,0000	0,1071
3	3	0	0,1786	0,1786
3	3	1	0,7143	0,5357
3	3	2	0,9821	0,2679
3	3	3	1,0000	0,0179
4	1	0	0,5000	0,5000
4	1	1	1,0000	0,5000
4	2	0	0,2143	0,2143
4	2	1	0,7857	0,5714
4	2	2	1,0000	0,2143
4	3	0	0,0714	0,0714
4	3	1	0,5000	0,4286
4	3	2	0,9286	0,4286
4	3	3	1,0000	0,0714
4	4	0	0,0143	0,0143
4	4	1	0,2429	0,2286
4	4	2	0,7571	0,5143

n	k	x	P (x)	p (x)
		$N = 8$		
4	4	3	0,9857	0,2286
4	4	4	1,0000	0,0143
		$N = 10$		
1	1	0	0,9000	0,9000
1	1	1	1,0000	0,1000
2	1	0	0,8000	0,8000
2	1	1	1,0000	0,2000
2	2	0	0,6222	0,6222
2	2	1	0,9778	0,3556
2	2	2	1,0000	0,0222
3	1	0	0,7000	0,7000
3	1	1	1,0000	0,3000
3	2	0	0,4667	0,4667
3	2	1	0,9333	0,4667
3	2	2	1,0000	0,0667
3	3	0	0,2917	0,2917
3	3	1	0,8167	0,5250
3	3	2	0,9917	0,1750
3	3	3	1,0000	0,0083
4	1	0	0,6000	0,6000
4	1	1	1,0000	0,4000
4	2	0	0,3333	0,3333
4	2	1	0,8667	0,5333
4	2	2	1,0000	0,1333
4	3	0	0,1667	0,1667
4	3	1	0,6667	0,5000
4	3	2	0,9667	0,3000
4	3	3	1,0000	0,0333
4	4	0	0,0714	0,0714
4	4	1	0,4524	0,3810
4	4	2	0,8810	0,4286
4	4	3	0,9952	0,1143
4	4	4	1,0000	0,0048
5	1	0	0,5000	0,5000
5	1	1	1,0000	0,5000
5	2	0	0,2222	0,2222
5	2	1	0,7778	0,5556
5	2	2	1,0000	0,2222
5	3	0	0,0833	0,0833
5	3	1	0,5000	0,4167
5	3	2	0,9167	0,4167
5	3	3	1,0000	0,0833

n	k	x	P (x)	p (x)
		$N = 10$		
5	4	0	0,0238	0,0238
5	4	1	0,2619	0,2381
5	4	2	0,7381	0,4762
5	4	3	0,9762	0,2381
5	4	4	1,0000	0,0238
5	5	0	0,0040	0,0040
5	5	1	0,1032	0,0992
5	5	2	0,5000	0,3968
5	5	3	0,8968	0,3968
5	5	4	0,9960	0,0992
5	5	5	1,0000	0,0040
		$N = 12$		
1	1	0	0,9167	0,9167
1	1	1	1,0000	0,0833
2	1	0	0,8333	0,8333
2	1	1	1,0000	0,1667
2	2	0	0,6818	0,6818
2	2	1	0,9848	0,3030
2	2	2	1,0000	0,0152
3	1	0	0,7500	0,7500
3	1	1	1,0000	0,2500
3	2	0	0,5454	0,5454
3	2	1	0,9545	0,4091
3	2	2	1,0000	0,0455
3	3	0	0,3818	0,3818
3	3	1	0,8727	0,4909
3	3	2	0,9955	0,1227
3	3	3	1,0000	0,0045
4	1	0	0,6667	0,6667
4	1	1	1,0000	0,3333
4	2	0	0,4242	0,4242
4	2	1	0,9091	0,4848
4	2	2	1,0000	0,0909
4	3	0	0,2545	0,2545
4	3	1	0,7636	0,5091
4	3	2	0,9818	0,2182
4	3	3	1,0000	0,0182
4	4	0	0,1414	0,1414
4	4	1	0,5939	0,4525
4	4	2	0,9333	0,3394
4	4	3	0,9980	0,0646
4	4	4	1,0000	0,0020

n	k	x	$P(x)$	$p(x)$
		$N = 12$		
5	1	0	0,5833	0,5833
5	1	1	1,0000	0,4167
5	2	0	0,3182	0,3182
5	2	1	0,8485	0,5303
5	2	2	1,0000	0,1515
5	3	0	0,1591	0,1591
5	3	1	0,6364	0,4773
5	3	2	0,9545	0,3182
5	3	3	1,0000	0,0455
5	4	0	0,0707	0,0707
5	4	1	0,4242	0,3535
5	4	2	0,8485	0,4242
5	4	3	0,9899	0,1414
5	4	4	1,0000	0,0101
5	5	0	0,0265	0,0265
5	5	1	0,2475	0,2210
5	5	2	0,6894	0,4419
5	5	3	0,9545	0,2651
5	5	4	0,9987	0,0442
5	5	5	1,0000	0,0013
6	1	0	0,5000	0,5000
6	1	1	1,0000	0,5000
6	2	0	0,2273	0,2273
6	2	1	0,7727	0,5454
6	2	2	1,0000	0,2273
6	3	0	0,0909	0,0909
6	3	1	0,5000	0,4091
6	3	2	0,9091	0,4091
6	3	3	1,0000	0,0909
6	4	0	0,0303	0,0303
6	4	1	0,2727	0,2424
6	4	2	0,7273	0,4545
6	4	3	0,9697	0,2424
6	4	4	1,0000	0,0303
6	5	0	0,0076	0,0076
6	5	1	0,1212	0,1136
6	5	2	0,5000	0,3788
6	5	3	0,8788	0,3788
6	5	4	0,9924	0,1136
6	5	5	1,0000	0,0076
6	6	0	0,0011	0,0011
6	6	1	0,0400	0,0390
6	6	2	0,2835	0,2435
6	6	3	0,7164	0,4329
6	6	4	0,9600	0,2435
6	6	5	0,9989	0,0390
6	6	6	1,0000	0,0011

n	k	x	$P(x)$	$p(x)$
		$N = 14$		
1	1	0	0,9286	0,9286
1	1	1	1,0000	0,0714
2	1	0	0,8571	0,8571
2	1	1	1,0000	0,1429
2	2	0	0,7253	0,7253
2	2	1	0,9890	0,2637
2	2	2	1,0000	0,0110
3	1	0	0,7857	0,7857
3	1	1	1,0000	0,2143
3	2	0	0,6044	0,6044
3	2	1	0,9670	0,3626
3	2	2	1,0000	0,0330
3	3	0	0,4533	0,4533
3	3	1	0,9066	0,4533
3	3	2	0,9973	0,0907
3	3	3	1,0000	0,0027
4	1	0	0,7143	0,7143
4	1	1	1,0000	0,2857
4	2	0	0,4945	0,4945
4	2	1	0,9341	0,4396
4	2	2	1,0000	0,0659
4	3	0	0,3297	0,3297
4	3	1	0,8242	0,4945
4	3	2	0,9890	0,1648
4	3	3	1,0000	0,0110
4	4	0	0,2098	0,2098
4	4	1	0,6893	0,4795
4	4	2	0,9590	0,2697
4	4	3	0,9990	0,0400
4	4	4	1,0000	0,0010
5	1	0	0,6429	0,6429
5	1	1	1,0000	0,3571
5	2	0	0,3956	0,3956
5	2	1	0,8901	0,4945
5	2	2	1,0000	0,1099
5	3	0	0,2308	0,2308
5	3	1	0,7253	0,4945
5	3	2	0,9725	0,2472
5	3	3	1,0000	0,0275
5	4	0	0,1259	0,1259
5	4	1	0,5455	0,4196
5	4	2	0,9051	0,3596
5	4	3	0,9950	0,0899
5	4	4	1,0000	0,0050

n	k	x	$P(x)$	$p(x)$
		$N = 14$		
5	5	0	0,0629	0,0629
5	5	1	0,3776	0,3147
5	5	2	0,7972	0,4196
5	5	3	0,9770	0,1798
5	5	4	0,9995	0,0225
5	5	5	1,0000	0,0005
6	1	0	0,5714	0,5714
6	1	1	1,0000	0,4286
6	2	0	0,3077	0,3077
6	2	1	0,8352	0.5275
6	2	2	1,0000	0,1648
6	3	0	0,1538	0,1538
6	3	1	0,6154	0,4615
6	3	2	0,9450	0,3297
6	3	3	1,0000	0,0550
6	4	0	0,0699	0,0699
6	4	1	0,4056	0,3357
6	4	2	0,8252	0,4196
6	4	3	0,9850	0,1598
6	4	4	1,0000	0,0150
6	5	0	0,0280	0,0280
6	5	1	0,2378	0,2098
6	5	2	0,6573	0,4196
6	5	3	0,9371	0,2797
6	5	4	0,9970	0,0599
6	5	5	1,0000	0,0030
6	6	0	0,0093	0,0093
6	6	1	0,1212	0,1119
6	6	2	0,4709	0,3497
6	6	3	0,8438	0,3730
6	6	4	0,9837	0,1399
6	6	5	0,9997	0,0160
6	6	6	1,0000	0,0003
7	1	0	0,5000	0,5000
7	1	1	1,0000	0,5000
7	2	0	0,2308	0,2308
7	2	1	0,7692	0,5385
7	2	2	1,0000	0,2308
7	3	0	0,0962	0,0962
7	3	1	0,5000	0,4038
7	3	2	0,9038	0,4038
7	3	3	1,0000	0,0962
7	4	0	0,0350	0,0350
7	4	1	0,2797	0,2447
7	4	2	0,7203	0,4406
7	4	3	0,9650	0,2447
7	4	4	1,0000	0,0350
7	5	0	0,0105	0,0105
7	5	1	0,1329	0,1224
7	5	2	0,5000	0,3671
7	5	3	0,8671	0,3671
7	5	4	0,9895	0,1224
7	5	5	1,0000	0,0105
7	6	0	0,0023	0,0023
7	6	1	0,0513	0,0490
7	6	2	0,2960	0,2447
7	6	3	0,7040	0,4079
7	6	4	0,9487	0,2447
7	6	5	0,9977	0,0490
7	6	6	1,0000	0,0023
7	7	0	0,0003	0,0003
7	7	1	0,0146	0,0143
7	7	2	0,1431	0,1285
7	7	3	0,5000	0,3569
7	7	4	0,8569	0,3569
7	7	5	0,9854	0,1285
7	7	6	0,9997	0,0143
7	7	7	1,0000	0,0003
		$N = 16$		
1	1	0	0,9375	0,9375
1	1	1	1,0000	0,0625
2	1	0	0,8750	0,8750
2	1	1	1,0000	0,1250
2	2	0	0,7583	0,7583
2	2	1	0,9917	0,2333
2	2	2	1,0000	0,0083
3	1	0	0,8125	0,8125
3	1	1	1,0000	0,1875
3	2	0	0,6500	0,6500
3	2	1	0,9750	0,3250
3	2	2	1,0000	0,0250
3	3	0	0,5107	0,5107
3	3	1	0,9286	0,4179
3	3	2	0,9982	0,0696
3	3	3	1,0000	0,0018
4	1	0	0,7500	0,7500
4	1	1	1,0000	0,2500
4	2	0	0,5500	0,5500
4	2	1	0,9500	0,4000

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 16		
4	2	2	1,0000	0,0500
4	3	0	0,3929	0,3929
4	3	1	0,8643	0,4714
4	3	2	0,9929	0,1286
4	3	3	1,0000	0,0071
4	4	0	0,2720	0,2720
4	4	1	0,7555	0,4835
4	4	2	0,9731	0,2176
4	4	3	0,9995	0,0264
4	4	4	1,0000	0,0005
5	1	0	0,6875	0,6875
5	1	1	1,0000	0,3125
5	2	0	0,4583	0,4583
5	2	1	0,9167	0,4583
5	2	2	1,0000	0,0833
5	3	0	0,2946	0,2946
5	3	1	0,7857	0,4911
5	3	2	0,9821	0,1964
5	3	3	1,0000	0,0179
5	4	0	0,1813	0,1813
5	4	1	0,6346	0,4533
5	4	2	0,9368	0,3022
5	4	3	0,9973	0,0604
5	4	4	1,0000	0,0027
5	5	0	0,1058	0,1058
5	5	1	0,4835	0,3777
5	5	2	0,8613	0,3777
5	5	3	0,9872	0,1259
5	5	4	0,9998	0,0126
5	5	5	1,0000	0,0002
6	1	0	0,6250	0,6250
6	1	1	1,0000	0,3750
6	2	0	0,3750	0,3750
6	2	1	0,8750	0,5000
6	2	2	1,0000	0,1250
6	3	0	0,2143	0,2143
6	3	1	0,6964	0,4821
6	3	2	0,9643	0,2679
6	3	3	1,0000	0,0357
6	4	0	0,1154	0,1154
6	4	1	0,5110	0,3956
6	4	2	0,8819	0,3709
6	4	3	0,9918	0,1099
6	4	4	1,0000	0,0082
6	5	0	0,0577	0,0577
6	5	1	0,3462	0,2885

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 16		
6	5	2	0,7582	0,4121
6	5	3	0,9643	0,2060
6	5	4	0,9986	0,0343
6	5	5	1,0000	0,0014
6	6	0	0,0262	0,0262
6	6	1	0,2150	0,1888
6	6	2	0,6084	0,3934
6	6	3	0,9081	0,2997
6	6	4	0,9924	0,0843
6	6	5	0,9999	0,0075
6	6	6	1,0000	0,0001
7	1	0	0,5625	0,5625
7	1	1	1,0000	0,4375
7	2	0	0,3000	0,3000
7	2	1	0,8250	0,5250
7	2	2	1,0000	0,1750
7	3	0	0,1500	0,1500
7	3	1	0,6000	0,4500
7	3	2	0,9375	0,3375
7	3	3	1,0000	0,0625
7	4	0	0,0692	0,0692
7	4	1	0,3923	0,3231
7	4	2	0,8077	0,4154
7	4	3	0,9808	0,1731
7	4	4	1,0000	0,0192
7	5	0	0,0288	0,0288
7	5	1	0,2308	0,2019
7	5	2	0,6346	0,4038
7	5	3	0,9231	0,2885
7	5	4	0,9952	0,0721
7	5	5	1,0000	0,0048
7	6	0	0,0105	0,0105
7	6	1	0,1206	0,1101
7	6	2	0,4510	0,3304
7	6	3	0,8182	0,3671
7	6	4	0,9755	0,1573
7	6	5	0,9991	0,0236
7	6	6	1,0000	0,0009
7	7	0	0,0031	0,0031
7	7	1	0,0545	0,0514
7	7	2	0,2858	0,2313
7	7	3	0,6713	0,3855
7	7	4	0,9283	0,2570
7	7	5	0,9944	0,0661
7	7	6	0,9999	0,0055
7	7	7	1,0000	0,0001

n	k	x	$P(x)$	$p(x)$
		$N = 16$		
8	1	0	0,5000	0,5000
8	1	1	1,0000	0,5000
8	2	0	0,2333	0,2333
8	2	1	0,7667	0,5333
8	2	2	1,0000	0,2333
8	3	0	0,1000	0,1000
8	3	1	0,5000	0,4000
8	3	2	0,9000	0,4000
8	3	3	1,0000	0,1000
8	4	0	0,0385	0,0385
8	4	1	0,2846	0,2461
8	4	2	0,7154	0,4308
8	4	3	0,9615	0,2461
8	4	4	1,0000	0,0385
8	5	0	0,0128	0,0128
8	5	1	0,1410	0,1282
8	5	2	0,5000	0,3590
8	5	3	0,8590	0,3590
8	5	4	0,9872	0,1282
8	5	5	1,0000	0,0128
8	6	0	0,0035	0,0035
8	6	1	0,0594	0,0559
8	6	2	0,3042	0,2448
8	6	3	0,6958	0,3916
8	6	4	0,9406	0,2448
8	6	5	0,9965	0,0559
8	6	6	1,0000	0,0035
8	7	0	0,0007	0,0007
8	7	1	0,0203	0,0196
8	7	2	0,1573	0,1370
8	7	3	0,5000	0,3427
8	7	4	0,8427	0,3427
8	7	5	0,9797	0,1370
8	7	6	0,9993	0,0196
8	7	7	1,0000	0,0007
8	8	0	0,0001	0,0001
8	8	1	0,0051	0,0050
8	8	2	0,0660	0,0609
8	8	3	0,3096	0,2437
8	8	4	0,6904	0,3807
8	8	5	0,9340	0,2437
8	8	6	0,9949	0,0609
8	8	7	0,9999	0,0050
8	8	8	1,0000	0,0001
		$N = 18$		
1	1	0	0,9444	0,9444
1	1	1	1,0000	0,0556
2	1	0	0,8889	0,8889
2	1	1	1,0000	0,1111
2	2	0	0,7843	0,7843
2	2	1	0,9935	0,2092
2	2	2	1,0000	0,0065
3	1	0	0,8333	0,8333
3	1	1	1,0000	0,1667
3	2	0	0,6863	0,6863
3	2	1	0,9804	0,2941
3	2	2	1,0000	0,0196
3	3	0	0,5576	0,5576
3	3	1	0,9436	0,3860
3	3	2	0,9988	0,0551
3	3	3	1,0000	0,0012
4	1	0	0,7778	0,7778
4	1	1	1,0000	0,2222
4	2	0	0,5948	0,5948
4	2	1	0,9608	0,3660
4	2	2	1,0000	0,0392
4	3	0	0,4461	0,4461
4	3	1	0,8922	0,4461
4	3	2	0,9951	0,1029
4	3	3	1,0000	0,0049
4	4	0	0,3271	0,3271
4	4	1	0,8029	0,4758
4	4	2	0,9814	0,1784
4	4	3	0,9997	0,0183
4	4	4	1,0000	0,0003
5	1	0	0,7222	0,7222
5	1	1	1,0000	0,2778
5	2	0	0,5098	0,5098
5	2	1	0,9346	0,4248
5	2	2	1,0000	0,0654
5	3	0	0,3505	0,3505
5	3	1	0,8284	0,4779
5	3	2	0,9877	0,1593
5	3	3	1,0000	0,0123
5	4	0	0,2337	0,2337
5	4	1	0,7010	0,4673
5	4	2	0,9559	0,2549
5	4	3	0,9984	0,0425
5	4	4	1,0000	0,0016
5	5	0	0,1502	0,1502
5	5	1	0,5675	0,4173
5	5	2	0,9013	0,3338

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 18		
5	5	3	0,9923	0,0910
5	5	4	0,9999	0,0076
5	5	5	1,0000	0,0001
6	1	0	0,6667	0,6667
6	1	1	1,0000	0,3333
6	2	0	0,4314	0,4314
6	2	1	0,9020	0,4706
6	2	2	1,0000	0,0980
6	3	0	0,2696	0,2696
6	3	1	0,7549	0,4853
6	3	2	0,9755	0,2206
6	3	3	1,0000	0,0245
6	4	0	0,1618	0,1618
6	4	1	0,5931	0,4314
6	4	2	0,9167	0,3235
6	4	3	0,9951	0,0784
6	4	4	1,0000	0,0049
6	5	0	0,0924	0,0924
6	5	1	0,4391	0,3466
6	5	2	0,8242	0,3851
6	5	3	0,9783	0,1541
6	5	4	0,9993	0,0210
6	5	5	1,0000	0,0007
6	6	0	0,0498	0,0498
6	6	1	0,3057	0,2560
6	6	2	0,7057	0,4000
6	6	3	0,9427	0,2370
6	6	4	0,9961	0,0533
6	6	5	0,9999	0,0039
6	6	6	1,0000	0,0001
7	1	0	0,6111	0,6111
7	1	1	1,0000	0,3889
7	2	0	0,3595	0,3595
7	2	1	0,8627	0,5033
7	2	2	1,0000	0,1373
7	3	0	0,2022	0,2022
7	3	1	0,6740	0,4718
7	3	2	0,9571	0,2831
7	3	3	1,0000	0,0429
7	4	0	0,1078	0,1078
7	4	1	0,4853	0,3775
7	4	2	0,8627	0,3774
7	4	3	0,9886	0,1258
7	4	4	1,0000	0,0114
7	5	0	0,0539	0,0539
7	5	1	0,3235	0,2696

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 18		
7	5	2	0,7279	0,4044
7	5	3	0,9526	0,2247
7	5	4	0,9975	0,0449
7	5	5	1,0000	0,0025
7	6	0	0,0249	0,0249
7	6	1	0,1991	0,1742
7	6	2	0,5724	0,3733
7	6	3	0,8835	0,3111
7	6	4	0,9872	0,1037
7	6	5	0,9996	0,0124
7	6	6	1,0000	0,0004
7	7	0	0,0104	0,0104
7	7	1	0,1120	0,1016
7	7	2	0,4169	0,3049
7	7	3	0,7798	0,3629
7	7	4	0,9613	0,1815
7	7	5	0,9975	0,0363
7	7	6	1,0000	0,0024
7	7	7	1,0000	0,0000
8	1	0	0,5556	0,5556
8	1	1	1,0000	0,4444
8	2	0	0,2941	0,2941
8	2	1	0,8170	0,5229
8	2	2	1,0000	0,1830
8	3	0	0,1471	0,1471
8	3	1	0,5882	0,4412
8	3	2	0,9314	0,3431
8	3	3	1,0000	0,0686
8	4	0	0,0686	0,0686
8	4	1	0,3823	0,3137
8	4	2	0,7941	0,4118
8	4	3	0,9771	0,1830
8	4	4	1,0000	0,0229
8	5	0	0,0294	0,0294
8	5	1	0,2255	0,1961
8	5	2	0,6176	0,3922
8	5	3	0,9118	0,2941
8	5	4	0,9935	0,0817
8	5	5	1,0000	0,0065
8	6	0	0,0113	0,0113
8	6	1	0,1199	0,1086
8	6	2	0,4366	0,3167
8	6	3	0,7986	0,3620
8	6	4	0,9683	0,1697
8	6	5	0,9985	0,0302
8	6	6	1,0000	0,0015
8	7	0	0,0038	0,0038

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 18		
8	7	1	0,0566	0,0528
8	7	2	0,2783	0,2217
8	7	3	0,6478	0,3695
8	7	4	0,9118	0,2640
8	7	5	0,9910	0,0792
8	7	6	0,9997	0,0088
8	7	7	1,0000	0,0003
8	8	0	0,0010	0,0010
8	8	1	0,0230	0,0219
8	8	2	0,1573	0,1344
8	8	3	0,4798	0,3225
8	8	4	0,8158	0,3359
8	8	5	0,9694	0,1536
8	8	6	0,9981	0,0288
8	8	7	1,0000	0,0018
8	8	8	1,0000	0,0000
9	1	0	0,5000	0,5000
9	1	1	1,0000	0,5000
9	2	0	0,2353	0,2353
9	2	1	0,7647	0,5294
9	2	2	1,0000	0,2353
9	3	0	0,1029	0,1029
9	3	1	0,5000	0,3971
9	3	2	0,8971	0,3971
9	3	3	1,0000	0,1029
9	4	0	0,0412	0,0412
9	4	1	0,2882	0,2471
9	4	2	0,7118	0,4235
9	4	3	0,9588	0,2471
9	4	4	1,0000	0,0412
9	5	0	0,0147	0,0147
9	5	1	0,1471	0,1324
9	5	2	0,5000	0,3529
9	5	3	0,8529	0,3529
9	5	4	0,9853	0,1324
9	5	5	1,0000	0,0147
9	6	0	0,0045	0,0045
9	6	1	0,0656	0,0611
9	6	2	0,3100	0,2443
9	6	3	0,6900	0,3801
9	6	4	0,9344	0,2443
9	6	5	0,9955	0,0611
9	6	6	1,0000	0,0045
9	7	0	0,0011	0,0011
9	7	1	0,0249	0,0238
9	7	2	0,1674	0,1425
9	7	3	0,5000	0,3326

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 18		
9	7	4	0,8326	0,3326
9	7	5	0,9751	0,1425
9	7	6	0,9989	0,0238
9	7	7	1,0000	0,0011
9	8	0	0,0002	0,0002
9	8	1	0,0076	0,0074
9	8	2	0,0767	0,0691
9	8	3	0,3186	0,2419
9	8	4	0,6814	0,3628
9	8	5	0,9233	0,2419
9	8	6	0,9924	0,0691
9	8	7	0,9998	0,0074
9	8	8	1,0000	0,0002
9	9	0	0,0000	0,0000
9	9	1	0,0017	0,0017
9	9	2	0,0283	0,0267
9	9	3	0,1735	0,1451
9	9	4	0,5000	0,3265
9	9	5	0,8265	0,3265
9	9	6	0,9716	0,1451
9	9	7	0,9983	0,0267
9	9	8	1,0000	0,0017
9	9	9	1,0000	0,0000
		N = 20		
1	1	0	0,9500	0,9500
1	1	1	1,0000	0,0500
2	1	0	0,9000	0,9000
2	1	1	1,0000	0,1000
2	2	0	0,8053	0,8053
2	2	1	0,9947	0,1895
2	2	2	1,0000	0,0053
3	1	0	0,8500	0,8500
3	1	1	1,0000	0,1500
3	2	0	0,7158	0,7158
3	2	1	0,9842	0,2684
3	2	2	1,0000	0,0158
3	3	0	0,5965	0,5965
3	3	1	0,9544	0,3579
3	3	2	0,9991	0,0447
3	3	3	1,0000	0,0009
4	1	0	0,8000	0,8000
4	1	1	1,0000	0,2000

$N = 20$

n	k	x	$P(x)$	$p(x)$
4	2	0	0,6316	0,6316
4	2	1	0,9684	0,3368
4	2	2	1,0000	0,0316
4	3	0	0,4912	0,4912
4	3	1	0,9123	0,4211
4	3	2	0,9965	0,0842
4	3	3	1,0000	0,0035
4	4	0	0,3756	0,3756
4	4	1	0,8380	0,4623
4	4	2	0,9866	0,1486
4	4	3	0,9998	0,0132
4	4	4	1,0000	0,0002
5	1	0	0,7500	0,7500
5	1	1	1,0000	0,2500
5	2	0	0,5526	0,5526
5	2	1	0,9474	0,3947
5	2	2	1,0000	0,0526
5	3	0	0,3991	0,3991
5	3	1	0,5596	0,4605
5	3	2	0,9912	0,1316
5	3	3	1,0000	0,0088
5	4	0	0,2817	0,2817
5	4	1	0,7513	0,4696
5	4	2	0,9680	0,2167
5	4	3	0,9990	0,0310
5	4	4	1,0000	0,0010
5	5	0	0,1937	0,1937
5	5	1	0,6339	0,4402
5	5	2	0,9274	0,2935
5	5	3	0,9951	0,0677
5	5	4	0,9999	0,0048
5	5	5	1,0000	0,0001
6	1	0	0,7000	0,7000
6	1	1	1,0000	0,3000
6	2	0	0,4789	0,4789
6	2	1	0,9210	0,4421
6	2	2	1,0000	0,0789
6	3	0	0,3193	0,3193
6	3	1	0,7982	0,4789
6	3	2	0,9825	0,1842
6	3	3	1,0000	0,0175
6	4	0	0,2066	0,2066
6	4	1	0,6574	0,4508
6	4	2	0,9391	0,2817
6	4	3	0,9969	0,0578
6	4	4	1,0000	0,0031

$N = 20$

n	k	x	$P(x)$	$p(x)$
6	5	0	0,1291	0,1291
6	5	1	0,5165	0,3874
6	5	2	0,8687	0,3522
6	5	3	0,9861	0,1174
6	5	4	0,9996	0,0135
6	5	5	1,0000	0,0004
6	6	0	0,0775	0,0775
6	6	1	0,3874	0,3099
6	6	2	0,7748	0,3874
6	6	3	0,9626	0,1878
6	6	4	0,9978	0,0352
6	6	5	1,0000	0,0022
6	6	6	1,0000	0,0000
7	1	0	0,6500	0,6500
7	1	1	1,0000	0,3500
7	2	0	0,4105	0,4105
7	2	1	0,8895	0,4789
7	2	2	1,0000	0,1105
7	3	0	0,2509	0,2509
7	3	1	0,7298	0,4789
7	3	2	0,9693	0,2395
7	3	3	1,0000	0,0307
7	4	0	0,1476	0,1476
7	4	1	0,5608	0,4132
7	4	2	0,8989	0,3381
7	4	3	0,9928	0,0939
7	4	4	1,0000	0,0072
7	5	0	0,0830	0,0830
7	5	1	0,4058	0,3228
7	5	2	0,7932	0,3874
7	5	3	0,9693	0,1761
7	5	4	0,9986	0,0293
7	5	5	1,0000	0,0014
7	6	0	0,0443	0,0443
7	6	1	0,2767	0,2324
7	6	2	0,6641	0,3874
7	6	3	0,9223	0,2583
7	6	4	0,9928	0,0704
7	6	5	0,9998	0,0070
7	6	6	1,0000	0,0002
7	7	0	0,0221	0,0221
7	7	1	0,1771	0,1550
7	7	2	0,5257	0,3486
7	7	3	0,8455	0,3228
7	7	4	0,9777	0,1291
7	7	5	0,9998	0,0211

n	k	x	P(x)	p(x)
		$N = 20$		
7	7	6	1,0000	0,0012
7	7	7	1,0000	0,0000
8	1	0	0,6000	0,6000
8	1	1	1,0000	0,4000
8	2	0	0,3474	0,3474
8	2	1	0,8526	0,5053
8	2	2	1,0000	0,1474
8	3	0	0,1930	0,1930
8	3	1	0,6561	0,4631
8	3	2	0,9509	0,2947
8	3	3	1,0000	0,0491
8	4	0	0,1022	0,1022
8	4	1	0,4654	0,3633
8	4	2	0,8468	0,3814
8	4	3	0,9856	0,1387
8	4	4	1,0000	0,0144
8	5	0	0,0511	0,0511
8	5	1	0,3065	0,2554
8	5	2	0,7038	0,3973
8	5	3	0,9422	0,2384
8	5	4	0,9964	0,0542
8	5	5	1,0000	0,0036
8	6	0	0,0238	0,0238
8	6	1	0,1873	0,1635
8	6	2	0,5449	0,3576
8	6	3	0,8627	0,3178
8	6	4	0,9819	0,1192
8	6	5	0,9993	0,0173
8	6	6	1,0000	0,0007
8	7	0	0,0102	0,0102
8	7	1	0,1056	0,0954
8	7	2	0,3916	0,2861
8	7	3	0,7492	0,3576
8	7	4	0,9479	0,1987
8	7	5	0,9956	0,0477
8	7	6	0,9999	0,0043
8	7	7	1,0000	0,0001
8	8	0	0,0039	0,0039
8	8	1	0,0542	0,0503
8	8	2	0,2596	0,2054
8	8	3	0,6117	0,3521
8	8	4	0,8868	0,2751
8	8	5	0,9846	0,0978
8	8	6	0,9992	0,0147
8	8	7	1,0000	0,0008
8	8	8	1,0000	0,0000

n	k	x	P(x)	p(x)
		$N = 20$		
9	1	0	0,5500	0,5500
9	1	1	1,0000	0,4500
9	2	0	0,2895	0,2895
9	2	1	0,8105	0,5210
9	2	2	1,0000	0,1895
9	3	0	0,1447	0,1447
9	3	1	0,5789	0,4342
9	3	2	0,9263	0,3474
9	3	3	1,0000	0,0737
9	4	0	0,0681	0,0681
9	4	1	0,3746	0,3065
9	4	2	0,7833	0,4087
9	4	3	0,9740	0,1907
9	4	4	1,0000	0,0260
9	5	0	0,0298	0,0298
9	5	1	0,2214	0,1916
9	5	2	0,6045	0,3831
9	5	3	0,9025	0,2980
9	5	4	0,9919	0,0894
9	5	5	1,0000	0,0081
9	6	0	0,0119	0,0119
9	6	1	0,1192	0,1073
9	6	2	0,4257	0,3065
9	6	3	0,7833	0,3576
9	6	4	0,9621	0,1788
9	6	5	0,9978	0,0358
9	6	6	1,0000	0,0022
9	7	0	0,0043	0,0043
9	7	1	0,0579	0,0536
9	7	2	0,2724	0,2145
9	7	3	0,6300	0,3576
9	7	4	0,8982	0,2682
9	7	5	0,9876	0,0894
9	7	6	0,9995	0,0119
9	7	7	1,0000	0,0005
9	8	0	0,0013	0,0013
9	8	1	0,0249	0,0236
9	8	2	0,1569	0,1320
9	8	3	0,4650	0,3081
9	8	4	0,7951	0,3301
9	8	5	0,9601	0,1650
9	8	6	0,9968	0,0367
9	8	7	0,9999	0,0031
9	8	8	1,0000	0,0001
9	9	0	0,0003	0,0003
9	9	1	0,0092	0,0088
9	9	2	0,0799	0,0707
9	9	3	0,3110	0,2311

n	k	x	P (x)	p (x)
		$N = 20$		
9	9	4	0,6575	0,3466
9	9	5	0,9051	0,2476
9	9	6	0,9876	0,0825
9	9	7	0,9994	0,0118
9	9	8	1,0000	0,0006
9	9	9	1,0000	0,0000
10	1	0	0,5000	0,5000
10	1	1	1,0000	0,5000
10	2	0	0,2368	0,2368
10	2	1	0,7632	0,5263
10	2	2	1,0000	0,2368
10	3	0	0,1053	0,1053
10	3	1	0,5000	0,3947
10	3	2	0,8947	0,3947
10	3	3	1,0000	0,1053
10	4	0	0,0433	0,0433
10	4	1	0,2910	0,2477
10	4	2	0,7090	0,4180
10	4	3	0,9567	0,2477
10	4	4	1,0000	0,0433
10	5	0	0,0163	0,0163
10	5	1	0,1517	0,1354
10	5	2	0,5000	0,3483
10	5	3	0,8483	0,3483
10	5	4	0,9837	0,1354
10	5	5	1,0000	0,0163
10	6	0	0,0054	0,0054
10	6	1	0,0704	0,0650
10	6	2	0,3142	0,2438
10	6	3	0,6858	0,3715
10	6	4	0,9296	0,2438
10	6	5	0,9946	0,0650
10	6	6	1,0000	0,0054
10	7	0	0,0015	0,0015
10	7	1	0,0286	0,0271
10	7	2	0,1749	0,1463
10	7	3	0,5000	0,3251
10	7	4	0,8251	0,3251
10	7	5	0,9714	0,1463
10	7	6	0,9985	0,0271
10	7	7	1,0000	0,0015
10	8	0	0,0004	0,0004
10	8	1	0,0099	0,0095
10	8	2	0,0849	0,0750
10	8	3	0,3250	0,2401
10	8	4	0,6750	0,3501
10	8	5	0,9151	0,2401

n	k	x	P (x)	p (x)
		$N = 20$		
10	8	6	0,9901	0,0750
10	8	7	0,9996	0,0095
10	8	8	1,0000	0,0004
10	9	0	0,0001	0,0001
10	9	1	0,0027	0,0027
10	9	2	0,0349	0,0322
10	9	3	0,1849	0,1500
10	9	4	0,5000	0,3151
10	9	5	0,8151	0,3151
10	9	6	0,9651	0,1500
10	9	7	0,9973	0,0322
10	9	8	0,9999	0,0027
10	9	9	1,0000	0,0001
10	10	0	0,0000	0,0000
10	10	1	0,0005	0,0005
10	10	2	0,0115	0,0110
10	10	3	0,0894	0,0779
10	10	4	0,3281	0,2387
10	10	5	0,6719	0,3437
10	10	6	0,9106	0,2387
10	10	7	0,9885	0,0779
10	10	8	0,9995	0,0110
10	10	9	1,0000	0,0005
10	10	10	1,0000	0,0000
		$N = 22$		
1	1	0	0,9545	0,9545
1	1	1	1,0000	0,0455
2	1	0	0,9091	0,9091
2	1	1	1,0000	0,0909
2	2	0	0,8225	0,8225
2	2	1	0,9957	0,1732
2	2	2	1,0000	0,0043
3	1	0	0,8636	0,8636
3	1	1	1,0000	0,1364
3	2	0	0,7403	0,7403
3	2	1	0,9870	0,2467
3	2	2	1,0000	0,0130
3	3	0	0,6292	0,6292
3	3	1	0,9623	0,3331
3	3	2	0,9994	0,0370
3	3	3	1,0000	0,0006
4	1	0	0,8182	0,8182
4	1	1	1,0000	0,1818

n	k	x	$P(x)$	$p(x)$
		$N = 22$		
4	2	0	0,6623	0,6623
4	2	1	0,9740	0,3117
4	2	2	1,0000	0,0260
4	3	0	0,5299	0,5299
4	3	1	0,9273	0,3974
4	3	2	0,9974	0,0701
4	3	3	1,0000	0,0026
4	4	0	0,4183	0,4183
4	4	1	0,8645	0,4462
4	4	2	0,9900	0,1255
4	4	3	0,9999	0,0098
4	4	4	1,0000	0,0001
5	1	0	0,7727	0,7727
5	1	1	1,0000	0,2273
5	2	0	0,5887	0,5887
5	2	1	0,9567	0,3680
5	2	2	1,0000	0,0433
5	3	0	0,4416	0,4416
5	3	1	0,8831	0,4416
5	3	2	0,9935	0,1104
5	3	3	1,0000	0,0065
5	4	0	0,3254	0,3254
5	4	1	0,7902	0,4648
5	4	2	0,9761	0,1859
5	4	3	0,9993	0,0232
5	4	4	1,0000	0,0007
5	5	0	0,2350	0,2350
5	5	1	0,6869	0,4519
5	5	2	0,9451	0,2582
5	5	3	0,9967	0,0516
5	5	4	1,0000	0,0032
5	5	5	1,0000	0,0000
6	1	0	0,7273	0,7273
6	1	1	1,0000	0,2727
6	2	0	0,5195	0,5195
6	2	1	0,9351	0,4156
6	2	2	1,0000	0,0649
6	3	0	0,3636	0,3636
6	3	1	0,8312	0,4675
6	3	2	0,9870	0,1558
6	3	3	1,0000	0,0130
6	4	0	0,2488	0,2488
6	4	1	0,7081	0,4593
6	4	2	0,9542	0,2461
6	4	3	0,9979	0,0437
6	4	4	1,0000	0,0021
6	5	0	0,1659	0,1659

n	k	x	$P(x)$	$p(x)$
		$N = 22$		
6	5	1	0,5805	0,4147
6	5	2	0,8995	0,3190
6	5	3	0,9907	0,0911
6	5	4	0,9998	0,0091
6	5	5	1,0000	0,0002
6	6	0	0,1073	0,1073
6	6	1	0,4586	0,3513
6	6	2	0,8245	0,3659
6	6	3	0,9746	0,1501
6	6	4	0,9987	0,0241
6	6	5	1,0000	0,0013
6	6	6	1,0000	0,0000
7	1	0	0,6818	0,6818
7	1	1	1,0000	0,3182
7	2	0	0,4545	0,4545
7	2	1	0,9091	0,4545
7	2	2	1,0000	0,0909
7	3	0	0,2955	0,2955
7	3	1	0,7727	0,4773
7	3	2	0,9773	0,2045
7	3	3	1,0000	0,0227
7	4	0	0,1866	0,1866
7	4	1	0,6220	0,4354
7	4	2	0,9234	0,3014
7	4	3	0,9952	0,0718
7	4	4	1,0000	0,0048
7	5	0	0,1140	0,1140
7	5	1	0,4769	0,3628
7	5	2	0,8397	0,3628
7	5	3	0,9793	0,1396
7	5	4	0,9992	0,0199
7	5	5	1,0000	0,0008
7	6	0	0,0671	0,0671
7	6	1	0,3488	0,2817
7	6	2	0,7330	0,3842
7	6	3	0,9464	0,2134
7	6	4	0,9957	0,0493
7	6	5	0,9999	0,0042
7	6	6	1,0000	0,0001
7	7	0	0,0377	0,0377
7	7	1	0,2432	0,2054
7	7	2	0,6129	0,3698
7	7	3	0,8931	0,2801
7	7	4	0,9864	0,0934
7	7	5	0,9994	0,0129
7	7	6	1,0000	0,0006
7	7	7	1,0000	0,0000

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 22		
8	1	0	0,6364	0,6364
8	1	1	1,0000	0,3636
8	2	0	0,3939	0,3939
8	2	1	0,8788	0,4848
8	2	2	1,0000	0,1212
8	3	0	0,2364	0,2364
8	3	1	0,7091	0,4727
8	3	2	0,9636	0,2545
8	3	3	1,0000	0,0364
8	4	0	0,1368	0,1368
8	4	1	0,5349	0,3981
8	4	2	0,8832	0,3483
8	4	3	0,9904	0,1072
8	4	4	1,0000	0,0096
8	5	0	0,0760	0,0760
8	5	1	0,3801	0,3041
8	5	2	0,7671	0,3870
8	5	3	0,9607	0,1935
8	5	4	0,9979	0,0372
8	5	5	1,0000	0,0021
8	6	0	0,0402	0,0402
8	6	1	0,2549	0,2147
8	6	2	0,6305	0,3756
8	6	3	0,9037	0,2732
8	6	4	0,9891	0,0854
8	6	5	0,9996	0,0105
8	6	6	1,0000	0,0004
8	7	0	0,0201	0,0201
8	7	1	0,1610	0,1409
8	7	2	0,4897	0,3287
8	7	3	0,8184	0,3287
8	7	4	0,9678	0,1494
8	7	5	0,9977	0,0299
8	7	6	1,0000	0,0023
8	7	7	1,0000	0,0000
8	8	0	0,0094	0,0094
8	8	1	0,0953	0,0859
8	8	2	0,3582	0,2630
8	8	3	0,7088	0,3506
8	8	4	0,9279	0,2191
8	8	5	0,9917	0,0637
8	8	6	0,9996	0,0080
8	8	7	1,0000	0,0004
8	8	8	1,0000	0,0000
9	1	0	0,5909	0,5909
9	1	1	1,0000	0,4091
9	2	0	0,3377	0,3377

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 22		
9	2	1	0,8442	0,5065
9	2	2	1,0000	0,1558
9	3	0	0,1857	0,1857
9	3	1	0,6416	0,4558
9	3	2	0,9455	0,3039
9	3	3	1,0000	0,0545
9	4	0	0,0977	0,0977
9	4	1	0,4496	0,3519
9	4	2	0,8335	0,3839
9	4	3	0,9828	0,1493
9	4	4	1,0000	0,0172
9	5	0	0,0489	0,0489
9	5	1	0,2932	0,2444
9	5	2	0,6842	0,3910
9	5	3	0,9330	0,2488
9	5	4	0,9952	0,0622
9	5	5	1,0000	0,0048
9	6	0	0,0230	0,0230
9	6	1	0,1782	0,1552
9	6	2	0,5232	0,3450
9	6	3	0,8452	0,3220
9	6	4	0,9769	0,1317
9	6	5	0,9989	0,0220
9	6	6	1,0000	0,0011
9	7	0	0,0101	0,0101
9	7	1	0,1006	0,0906
9	7	2	0,3723	0,2717
9	7	3	0,7245	0,3522
9	7	4	0,9358	0,2113
9	7	5	0,9934	0,0576
9	7	6	0,9998	0,0064
9	7	7	1,0000	0,0002
9	8	0	0,0040	0,0040
9	8	1	0,0523	0,0483
9	8	2	0,2455	0,1932
9	8	3	0,5836	0,3381
9	8	4	0,8653	0,2817
9	8	5	0,9780	0,1127
9	8	6	0,9985	0,0205
9	8	7	1,0000	0,0015
9	8	8	1,0000	0,0000
9	9	0	0,0014	0,0014
9	9	1	0,0247	0,0233
9	9	2	0,1489	0,1242
9	9	3	0,4387	0,2898
9	9	4	0,7647	0,3260
9	9	5	0,9458	0,1811
9	9	6	0,9941	0,0483

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 22		
9	9	7	0,9998	0,0056
9	9	8	1,0000	0,0002
9	9	9	1,0000	0,0000
10	1	0	0,5455	0,5455
10	1	1	1,0000	0,4545
10	2	0	0,2857	0,2857
10	2	1	0,8052	0,5195
10	2	2	1,0000	0,1948
10	3	0	0,1429	0,1429
10	3	1	0,5714	0,4286
10	3	2	0,9221	0,3506
10	3	3	1,0000	0,0779
10	4	0	0,0677	0,0677
10	4	1	0,3684	0,3007
10	4	2	0,7744	0,4060
10	4	3	0,9713	0,1969
10	4	4	1,0000	0,0287
10	5	0	0,0301	0,0301
10	5	1	0,2180	0,1880
10	5	2	0,5940	0,3759
10	5	3	0,8947	0,3007
10	5	4	0,9904	0,0957
10	5	5	1,0000	0,0096
10	6	0	0,0124	0,0124
10	6	1	0,1185	0,1061
10	6	2	0,4171	0,2985
10	6	3	0,7709	0,3538
10	6	4	0,9567	0,1858
10	6	5	0,9972	0,0405
10	6	6	1,0000	0,0028
10	7	0	0,0046	0,0046
10	7	1	0,0588	0,0542
10	7	2	0,2678	0,2090
10	7	3	0,6161	0,3483
10	7	4	0,8870	0,2709
10	7	5	0,9845	0,0975
10	7	6	0,9993	0,0148
10	7	7	1,0000	0,0007
10	8	0	0,0015	0,0015
10	8	1	0,0263	0,0248
10	8	2	0,1563	0,1300
10	8	3	0,4536	0,2972
10	8	4	0,7786	0,3251
10	8	5	0,9520	0,1734
10	8	6	0,9954	0,0433
10	8	7	0,9999	0,0045
10	8	8	1,0000	0,0001

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 22		
10	9	0	0,0004	0,0004
10	9	1	0,0104	0,0100
10	9	2	0,0820	0,0716
10	9	3	0,3050	0,2229
10	9	4	0,6393	0,3344
10	9	5	0,8901	0,2508
10	9	6	0,9830	0,0929
10	9	7	0,9989	0,0159
10	9	8	1,0000	0,0011
10	9	9	1,0000	0,0000
10	10	0	0,0001	0,0001
10	10	1	0,0035	0,0034
10	10	2	0,0380	0,0344
10	10	3	0,1849	0,1470
10	10	4	0,4850	0,3001
10	10	5	0,7936	0,3086
10	10	6	0,9544	0,1608
10	10	7	0,9952	0,0408
10	10	8	0,9998	0,0046
10	10	9	1,0000	0,0002
10	10	10	1,0000	0,0000
11	1	0	0,5000	0,5000
11	1	1	1,0000	0,5000
11	2	0	0,2381	0,2381
11	2	1	0,7619	0,5238
11	2	2	1,0000	0,2381
11	3	0	0,1071	0,1071
11	3	1	0,5000	0,3929
11	3	2	0,8929	0,3929
11	3	3	1,0000	0,1071
11	4	0	0,0451	0,0451
11	4	1	0,2932	0,2481
11	4	2	0,7068	0,4135
11	4	3	0,9549	0,2481
11	4	4	1,0000	0,0451
11	5	0	0,0175	0,0175
11	5	1	0,1554	0,1378
11	5	2	0,5000	0,3446
11	5	3	0,8446	0,3446
11	5	4	0,9825	0,1378
11	5	5	1,0000	0,0175
11	6	0	0,0062	0,0062
11	6	1	0,0743	0,0681
11	6	2	0,3176	0,2433
11	6	3	0,6824	0,3649
11	6	4	0,9257	0,2433
11	6	5	0,9938	0,0681

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 22		
11	6	6	1,0000	0,0062
11	7	0	0,0019	0,0019
11	7	1	0,0317	0,0298
11	7	2	0,1807	0,1490
11	7	3	0,5000	0,3193
11	7	4	0,8193	0,3193
11	7	5	0,9683	0,1490
11	7	6	0,9981	0,0298
11	7	7	1,0000	0,0019
11	8	0	0,0005	0,0005
11	8	1	0,0119	0,0114
11	8	2	0,0913	0,0795
11	8	3	0,3297	0,2384
11	8	4	0,6703	0,3406
11	8	5	0,9087	0,2384
11	8	6	0,9881	0,0795
11	8	7	0,9995	0,0113
11	8	8	1,0000	0,0005
11	9	0	0,0001	0,0001
11	9	1	0,0038	0,0036
11	9	2	0,0402	0,0365
11	9	3	0,1935	0,1533
11	9	4	0,5000	0,3065
11	9	5	0,8065	0,3065
11	9	6	0,9598	0,1533
11	9	7	0,9962	0,0365
11	9	8	0,9999	0,0036
11	9	9	1,0000	0,0001
11	10	0	0,0000	0,0000
11	10	1	0,0010	0,0009
11	10	2	0,0150	0,0140
11	10	3	0,0992	0,0842
11	10	4	0,3350	0,2358
11	10	5	0,6650	0,3301
11	10	6	0,9008	0,2358
11	10	7	0,9850	0,0842
11	10	8	0,9990	0,0140
11	10	9	1,0000	0,0009
11	10	10	1,0000	0,0000
11	11	0	0,0000	0,0000
11	11	1	0,0002	0,0002
11	11	2	0,0045	0,0043
11	11	3	0,0430	0,0386
11	11	4	0,1974	0,1544
11	11	5	0,5000	0,3026
11	11	6	0,8026	0,3026
11	11	7	0,9569	0,1544
11	11	8	0,9955	0,0386

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 22		
11	11	9	0,9998	0,0043
11	11	10	1,0000	0,0002
11	11	11	1,0000	0,0000
		N = 24		
1	1	0	0,9583	0,9583
1	1	1	1,0000	0,0417
2	1	0	0,9167	0,9167
2	1	1	1,0000	0,0833
2	2	0	0,8370	0,8370
2	2	1	0,9964	0,1594
2	2	2	1,0000	0,0036
3	1	0	0,8750	0,8750
3	1	1	1,0000	0,1250
3	2	0	0,7609	0,7609
3	2	1	0,9891	0,2283
3	2	2	1,0000	0,0109
3	3	0	0,6571	0,6571
3	3	1	0,9684	0,3113
3	3	2	0,9995	0,0311
3	3	3	1,0000	0,0005
4	1	0	0,8333	0,8333
4	1	1	1,0000	0,1667
4	2	0	0,6884	0,6884
4	2	1	0,9783	0,2899
4	2	2	1,0000	0,0217
4	3	0	0,5632	0,5632
4	3	1	0,9387	0,3755
4	3	2	0,9980	0,0593
4	3	3	1,0000	0,0020
4	4	0	0,4560	0,4560
4	4	1	0,8851	0,4291
4	4	2	0,9924	0,1073
4	4	3	0,9999	0,0075
4	4	4	1,0000	0,0001
5	1	0	0,7917	0,7917
5	1	1	1,0000	0,2083
5	2	0	0,6196	0,6196
5	2	1	0,9638	0,3442
5	2	2	1,0000	0,0362
5	3	0	0,4788	0,4788
5	3	1	0,9012	0,4224
5	3	2	0,9951	0,0939

N = 24

n	k	x	P (x)	p (x)
5	3	3	1,0000	0,0049
5	4	0	0,3648	0,3648
5	4	1	0,8207	0,4560
5	4	2	0,9816	0,1609
5	4	3	0,9995	0,0179
5	4	4	1,0000	0,0005
5	5	0	0,2736	0,2736
5	5	1	0,7295	0,4560
5	5	2	0,9575	0,2280
5	5	3	0,9977	0,0402
5	5	4	1,0000	0,0022
5	5	5	1,0000	0,0000
6	1	0	0,7500	0,7500
6	1	1	1,0000	0,2500
6	2	0	0,5543	0,5543
6	2	1	0,9457	0,3913
6	2	2	1,0000	0,0543
6	3	0	0,4032	0,4032
6	3	1	0,8567	0,4536
6	3	2	0,9901	0,1334
6	3	3	1,0000	0,0099
6	4	0	0,2880	0,2880
6	4	1	0,7487	0,4608
6	4	2	0,9647	0,2160
6	4	3	0,9986	0,0339
6	4	4	1,0000	0,0014
6	5	0	0,2016	0,2016
6	5	1	0,6335	0,4320
6	5	2	0,9215	0,2880
6	5	3	0,9935	0,0720
6	5	4	0,9999	0,0064
6	5	5	1,0000	0,0001
6	6	0	0,1379	0,1379
6	6	1	0,5199	0,3819
6	6	2	0,8609	0,3410
6	6	3	0,9821	0,1212
6	6	4	0,9992	0,0171
6	6	5	1,0000	0,0008
6	6	6	1,0000	0,0000
7	1	0	0,7083	0,7083
7	1	1	1,0000	0,2917
7	2	0	0,4928	0,4928
7	2	1	0,9239	0,4312
7	2	2	1,0000	0,0761
7	3	0	0,3360	0,3360
7	3	1	0,8063	0,4704
7	3	2	0,9827	0,1764
7	3	3	1,0000	0,0173
7	4	0	0,2240	0,2240
7	4	1	0,6719	0,4480
7	4	2	0,9407	0,2688
7	4	3	0,9967	0,0560
7	4	4	1,0000	0,0033
7	5	0	0,1456	0,1456
7	5	1	0,5375	0,3920
7	5	2	0,8735	0,3360
7	5	3	0,9855	0,1120
7	5	4	0,9995	0,0140
7	5	5	1,0000	0,0005
7	6	0	0,0919	0,0919
7	6	1	0,4138	0,3218
7	6	2	0,7851	0,3713
7	6	3	0,9619	0,1768
7	6	4	0,9973	0,0354
7	6	5	0,9999	0,0027
7	6	6	1,0000	0,0001
7	7	0	0,0562	0,0562
7	7	1	0,3065	0,2503
7	7	2	0,6820	0,3755
7	7	3	0,9226	0,2407
7	7	4	0,9914	0,0688
7	7	5	0,9997	0,0083
7	7	6	1,0000	0,0003
7	7	7	1,0000	0,0000
8	1	0	0,6667	0,6667
8	1	1	1,0000	0,3333
8	2	0	0,4348	0,4348
8	2	1	0,8986	0,4638
8	2	2	1,0000	0,1014
8	3	0	0,2767	0,2767
8	3	1	0,7510	0,4743
8	3	2	0,9723	0,2213
8	3	3	1,0000	0,0277
8	4	0	0,1713	0,1713
8	4	1	0,5929	0,4216
8	4	2	0,9091	0,3162
8	4	3	0,9934	0,0843
8	4	4	1,0000	0,0066
8	5	0	0,1028	0,1028
8	5	1	0,4453	0,3426
8	5	2	0,8142	0,3689
8	5	3	0,9723	0,1581
8	5	4	0,9987	0,0264

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 24		
8	5	5	1,0000	0,0013
8	6	0	0,0595	0,0595
8	6	1	0,3191	0,2596
8	6	2	0,6977	0,3786
8	6	3	0,9307	0,2330
8	6	4	0,9931	0,0624
8	6	5	0,9998	0,0067
8	6	6	1,0000	0,0002
8	7	0	0,0331	0,0331
8	7	1	0,2182	0,1851
8	7	2	0,5715	0,3534
8	7	3	0,8660	0,2945
8	7	4	0,9793	0,1133
8	7	5	0,9987	0,0194
8	7	6	1,0000	0,0013
8	7	7	1,0000	0,0000
8	8	0	0,0175	0,0175
8	8	1	0,1419	0,1244
8	8	2	0,4468	0,3049
8	8	3	0,7794	0,3326
8	8	4	0,9526	0,1732
8	8	5	0,9953	0,0426
8	8	6	0,9998	0,0046
8	8	7	1,0000	0,0002
8	8	8	1,0000	0,0000
9	1	0	0,6250	0,6250
9	1	1	1,0000	0,3750
9	2	0	0,3804	0,3804
9	2	1	0,8696	0,4891
9	2	2	1,0000	0,1304
9	3	0	0,2248	0,2248
9	3	1	0,6917	0,4669
9	3	2	0,9585	0,2668
9	3	3	1,0000	0,0415
9	4	0	0,1285	0,1285
9	4	1	0,5138	0,3854
9	4	2	0,8696	0,3557
9	4	3	0,9881	0,1186
9	4	4	1,0000	0,0119
9	5	0	0,0707	0,0707
9	5	1	0,3597	0,2890
9	5	2	0,7451	0,3854
9	5	3	0,9526	0,2075
9	5	4	0,9970	0,0445
9	5	5	1,0000	0,0030
9	6	0	0,0372	0,0372
9	6	1	0,2380	0,2008

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 24		
9	6	2	0,6031	0,3651
9	6	3	0,8870	0,2840
9	6	4	0,9853	0,0983
9	6	5	0,9994	0,0140
9	6	6	1,0000	0,0006
9	7	0	0,0186	0,0186
9	7	1	0,1487	0,1301
9	7	2	0,4611	0,3124
9	7	3	0,7924	0,3313
9	7	4	0,9580	0,1656
9	7	5	0,9963	0,0382
9	7	6	0,9999	0,0036
9	7	7	1,0000	0,0001
9	8	0	0,0087	0,0087
9	8	1	0,0875	0,0787
9	8	2	0,3325	0,2450
9	8	3	0,6755	0,3430
9	8	4	0,9093	0,2338
9	8	5	0,9873	0,0780
9	8	6	0,9992	0,0120
9	8	7	1,0000	0,0007
9	8	8	1,0000	0,0000
9	9	0	0,0038	0,0038
9	9	1	0,0481	0,0443
9	9	2	0,2253	0,1772
9	9	3	0,5468	0,3215
9	9	4	0,8362	0,2894
9	9	5	0,9678	0,1315
9	9	6	0,9970	0,0292
9	9	7	0,9999	0,0029
9	9	8	1,0000	0,0001
9	9	9	1,0000	0,0000
10	1	0	0,5833	0,5833
10	1	1	1,0000	0,4167
10	2	0	0,3297	0,3297
10	2	1	0,8370	0,5072
10	2	2	1,0000	0,1630
10	3	0	0,1798	0,1798
10	3	1	0,6294	0,4496
10	3	2	0,9407	0,3113
10	3	3	1,0000	0,0593
10	4	0	0,0942	0,0942
10	4	1	0,4368	0,3426
10	4	2	0,8221	0,3854
10	4	3	0,9802	0,1581
10	4	4	1,0000	0,0198
10	5	0	0,0471	0,0471

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 24		
10	5	1	0,2826	0,2355
10	5	2	0,6680	0,3854
10	5	3	0,9249	0,2569
10	5	4	0,9941	0,0692
10	5	5	1,0000	0,0059
10	6	0	0,0223	0,0223
10	6	1	0,1710	0,1487
10	6	2	0,5057	0,3347
10	6	3	0,8302	0,3245
10	6	4	0,9722	0,1420
10	6	5	0,9984	0,0262
10	6	6	1,0000	0,0016
10	7	0	0,0099	0,0099
10	7	1	0,0967	0,0868
10	7	2	0,3570	0,2603
10	7	3	0,7040	0,3771
10	7	4	0,9249	0,2209
10	7	5	0,9912	0,0663
10	7	6	0,9997	0,0085
10	7	7	1,0000	0,0003
10	8	0	0,0041	0,0041
10	8	1	0,0507	0,0467
10	8	2	0,2345	0,1837
10	8	3	0,5611	0,3266
10	8	4	0,8469	0,2858
10	8	5	0,9717	0,1247
10	8	6	0,9977	0,0260
10	8	7	0,9999	0,0023
10	8	8	1,0000	0,0001
10	9	0	0,0015	0,0015
10	9	1	0,0245	0,0230
10	9	2	0,1426	0,1181
10	9	3	0,4182	0,2756
10	9	4	0,7398	0,3215
10	9	5	0,9327	0,1929
10	9	6	0,9912	0,0585
10	9	7	0,9995	0,0083
10	9	8	1,0000	0,0005
10	9	9	1,0000	0,0000
10	10	0	0,0005	0,0005
10	10	1	0,0107	0,0102
10	10	2	0,0796	0,0689
10	10	3	0,2896	0,2100
10	10	4	0,6111	0,3215
10	10	5	0,8684	0,2572
10	10	6	0,9756	0,1072
10	10	7	0,9978	0,0223
10	10	8	0,9999	0,0021

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 24		
10	10	9	1,0000	0,0001
10	10	10	1,0000	0,0000
11	1	0	0,5417	0,5417
11	1	1	1,0000	0,4583
11	2	0	0,2826	0,2826
11	2	1	0,8007	0,5181
11	2	2	1,0000	0,1993
11	3	0	0,1413	0,1413
11	3	1	0,5652	0,4239
11	3	2	0,9185	0,3533
11	3	3	1,0000	0,0815
11	4	0	0,0673	0,0673
11	4	1	0,3634	0,2961
11	4	2	0,7671	0,4037
11	4	3	0,9689	0,2019
11	4	4	1,0000	0,0311
11	5	0	0,0303	0,0303
11	5	1	0,2153	0,1850
11	5	2	0,5854	0,3701
11	5	3	0,8882	0,3028
11	5	4	0,9891	0,1009
11	5	5	1,0000	0,0109
11	6	0	0,0127	0,0127
11	6	1	0,1179	0,1052
11	6	2	0,4101	0,2922
11	6	3	0,7607	0,3506
11	6	4	0,9519	0,1912
11	6	5	0,9966	0,0446
11	6	6	1,0000	0,0034
11	7	0	0,0050	0,0050
11	7	1	0,0595	0,0545
11	7	2	0,2640	0,2045
11	7	3	0,6049	0,3409
11	7	4	0,8776	0,2727
11	7	5	0,9817	0,1041
11	7	6	0,9990	0,0173
11	7	7	1,0000	0,0010
11	8	0	0,0017	0,0017
11	8	1	0,0274	0,0257
11	8	2	0,1557	0,1283
11	8	3	0,4445	0,2887
11	8	4	0,7653	0,3208
11	8	5	0,9449	0,1797
11	8	6	0,9939	0,0490
11	8	7	0,9998	0,0058
11	8	8	1,0000	0,0002
11	9	0	0,0005	0,0005

n	k	x	P (x)	p (x)
			$N = 24$	
11	9	1	0,0114	0,0108
11	9	2	0,0836	0,0722
11	9	3	0,3001	0,2165
11	9	4	0,6249	0,3248
11	9	5	0,8776	0,2526
11	9	6	0,9786	0,1011
11	9	7	0,9983	0,0197
11	9	8	1,0000	0,0016
11	9	9	1,0000	0,0000
11	10	0	0,0001	0,0001
11	10	1	0,0042	0,0040
11	10	2	0,0402	0,0361
11	10	3	0,1846	0,1444
11	10	4	0,4733	0,2887
11	10	5	0,7765	0,3032
11	10	6	0,9449	0,1684
11	10	7	0,9931	0,0481
11	10	8	0,9996	0,0066
11	10	9	1,0000	0,0004
11	10	10	1,0000	0,0000
11	11	0	0,0000	0,0000
11	11	1	0,0013	0,0013
11	11	2	0,0170	0,0157
11	11	3	0,1021	0,0851
11	11	4	0,3290	0,2269
11	11	5	0,6466	0,3176
11	11	6	0,8848	0,2382
11	11	7	0,9793	0,0945
11	11	8	0,9982	0,0189
11	11	9	0,9999	0,0017
11	11	10	1,0000	0,0001
11	11	11	1,0000	0,0000
12	1	0	0,5000	0,5000
12	1	1	1,0000	0,5000
12	2	0	0,2391	0,2391
12	2	1	0,7609	0,5217
12	2	2	1,0000	0,2391
12	3	0	0,1087	0,1087
12	3	1	0,5000	0,3913
12	3	2	0,8913	0,3913
12	3	3	1,0000	0,1087
12	4	0	0,0466	0,0466
12	4	1	0,2950	0,2484
12	4	2	0,7050	0,4099
12	4	3	0,9534	0,2484
12	4	4	1,0000	0,0466
12	5	0	0,0186	0,0186
			$N = 24$	
12	5	1	0,1584	0,1398
12	5	2	0,5000	0,3416
12	5	3	0,8416	0,3416
12	5	4	0,9814	0,1398
12	5	5	1,0000	0,0186
12	6	0	0,0069	0,0069
12	6	1	0,0775	0,0706
12	6	2	0,3202	0,2427
12	6	3	0,6798	0,3596
12	6	4	0,9225	0,2427
12	6	5	0,9931	0,0706
12	6	6	1,0000	0,0069
12	7	0	0,0023	0,0023
12	7	1	0,0343	0,0320
12	7	2	0,1853	0,1510
12	7	3	0,5000	0,3146
12	7	4	0,8146	0,3146
12	7	5	0,9657	0,1510
12	7	6	0,9977	0,0320
12	7	7	1,0000	0,0023
12	8	0	0,0007	0,0007
12	8	1	0,0136	0,0129
12	8	2	0,0965	0,0829
12	8	3	0,3334	0,2369
12	8	4	0,6666	0,3332
12	8	5	0,9035	0,2369
12	8	6	0,9864	0,0829
12	8	7	0,9993	0,0129
12	8	8	1,0000	0,0007
12	9	0	0,0002	0,0002
12	9	1	0,0047	0,0045
12	9	2	0,0447	0,0400
12	9	3	0,2002	0,1555
12	9	4	0,5000	0,2998
12	9	5	0,7998	0,2998
12	9	6	0,9553	0,1555
12	9	7	0,9953	0,0400
12	9	8	0,9998	0,0045
12	9	9	1,0000	0,0002
12	10	0	0,0000	0,0000
12	10	1	0,0014	0,0013
12	10	2	0,0180	0,0167
12	10	3	0,1069	0,0888
12	10	4	0,3401	0,2332
12	10	5	0,6599	0,3198
12	10	6	0,8931	0,2332
12	10	7	0,9820	0,0888
12	10	8	0,9986	0,0167

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 24		
12	10	9	1,0000	0,0013
12	10	10	1,0000	0,0000
12	11	0	0,0000	0,0000
12	11	1	0,0003	0,0003
12	11	2	0,0061	0,0058
12	11	3	0,0498	0,0436
12	11	4	0,2068	0,1571
12	11	5	0,5000	0,2932
12	11	6	0,7932	0,2932
12	11	7	0,9502	0,1571
12	11	8	0,9939	0,0436
12	11	9	0,9997	0,0058
12	11	10	1,0000	0,0003
12	11	11	1,0000	0,0000

n	k	x	P (x)	p (x)
		N = 24		
12	12	0	0,0000	0,0000
12	12	1	0,0001	0,0001
12	12	2	0,0017	0,0016
12	12	3	0,0196	0,0179
12	12	4	0,1102	0,0906
12	12	5	0,3421	0,2320
12	12	6	0,6579	0,3157
12	12	7	0,8898	0,2320
12	12	8	0,9804	0,0906
12	12	9	0,9983	0,0179
12	12	10	0,9999	0,0016
12	12	11	1,0000	0,0001
12	12	12	1,0000	0,0000

ТАБЛИЦА IX

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $y = -\ln(1-x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,000	0,000000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0700	0800	0900
0,001	1001	1101	1201	1301	1401	1501	1601	1701	1802	1902
0,002	2002	2102	2202	2303	2403	2503	2603	2704	2804	2904
0,003	3005	3105	3205	3305	3406	3506	3606	3707	3807	3908
0,004	4008	4108	4209	4309	4410	4510	4611	4711	4812	4912
0,005	5013	5113	5214	5314	5415	5515	5616	5716	5817	5917
0,006	6018	6119	6219	6320	6421	6521	6622	6723	6823	6924
0,007	7025	7125	7226	7327	7428	7528	7629	7730	7831	7931
0,008	8032	8133	8234	8335	8435	8536	8637	8738	8839	8940
0,009	9041	9142	9243	9344	9444	9545	9646	9747	9848	9949
0,010	0,01005	1015	1025	1035	1045	1056	1066	1076	1086	1096
0,011	1106	1116	1126	1136	1147	1157	1167	1177	1187	1197
0,012	1207	1217	1228	1238	1248	1258	1268	1278	1288	1298
0,013	1309	1319	1329	1339	1349	1359	1369	1379	1390	1400
0,014	1410	1420	1430	1440	1450	1461	1471	1481	1491	1501
0,015	1511	1522	1532	1542	1552	1562	1572	1582	1593	1603
0,016	1613	1623	1633	1643	1654	1664	1674	1684	1694	1704
0,017	1715	1725	1735	1745	1755	1765	1776	1786	1796	1806
0,018	1816	1827	1837	1847	1857	1867	1878	1888	1898	1908
0,019	1918	1928	1939	1949	1959	1969	1979	1990	2000	2010
0,020	2020	2030	2041	2051	2061	2071	2082	2092	2102	2112
0,021	2122	2133	2143	2153	2163	2173	2184	2194	2204	2214
0,022	2225	2235	2245	2255	2265	2276	2286	2296	2306	2317
0,023	2327	2337	2347	2358	2368	2378	2388	2399	2409	2419
0,024	2429	2440	2450	2460	2470	2481	2491	2501	2511	2522
0,025	2532	2542	2552	2563	2573	2583	2593	2604	2614	2624
0,026	2634	2645	2655	2665	2675	2686	2696	2706	2717	2727
0,027	2737	2747	2758	2768	2778	2789	2799	2809	2819	2830
0,028	2840	2850	2861	2871	2881	2891	2902	2912	2922	2933
0,029	2943	2953	2963	2974	2984	2994	3005	3015	3025	3036
0,030	3046	3056	3067	3077	3087	3097	3108	3118	3128	3139
0,031	3149	3159	3170	3180	3190	3201	3211	3221	3232	3242
0,032	3252	3263	3273	3283	3294	3304	3314	3325	3335	3345
0,033	3356	3366	3376	3387	3397	3407	3418	3428	3438	3449
0,034	3459	3469	3480	3490	3501	3511	3521	3532	3542	3552
0,035	3563	3573	3583	3594	3604	3615	3625	3635	3646	3656
0,036	3666	3677	3687	3698	3708	3718	3729	3739	3749	3760
0,037	3770	3781	3791	3801	3812	3822	3833	3843	3853	3864
0,038	3874	3884	3895	3905	3916	3926	3936	3947	3957	3968
0,039	3978	3988	3999	4009	4020	4030	4041	4051	4061	4072
0,040	4082	4093	4103	4113	4124	4134	4145	4155	4166	4176

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,041	0,04186	4197	4207	4218	4228	4239	4249	4259	4270	4280
0,042	4291	4301	4312	4322	4333	4343	4353	4364	4374	4385
0,043	4395	4406	4416	4427	4437	4447	4458	4468	4479	4489
0,044	4500	4510	4521	4531	4542	4552	4563	4573	4583	4594
0,045	4604	4615	4625	4636	4646	4657	4667	4678	4688	4699
0,046	4709	4720	4730	4741	4751	4762	4772	4783	4793	4804
0,047	4814	4825	4835	4846	4856	4867	4877	4888	4898	4909
0,048	4919	4930	4940	4951	4961	4972	4982	4993	5003	5014
0,049	5024	5035	5045	5056	5066	5077	5087	5098	5108	5119
0,050	5129	5140	5150	5161	5171	5182	5193	5203	5214	5224
0,051	5235	5245	5256	5266	5277	5287	5298	5308	5319	5330
0,052	5340	5351	5361	5372	5382	5393	5403	5414	5425	5435
0,053	5446	5456	5467	5477	5488	5498	5509	5520	5530	5541
0,054	5551	5562	5572	5583	5594	5604	5615	5625	5636	5646
0,055	5657	5668	5678	5689	5699	5710	5721	5731	5742	5752
0,056	5763	5774	5784	5795	5805	5816	5826	5837	5848	5858
0,057	5869	5880	5890	5901	5911	5922	5933	5943	5954	5964
0,058	5975	5986	5996	6007	6017	6028	6039	6049	6060	6071
0,059	6081	6092	6102	6113	6124	6134	6145	6156	6166	6177
0,060	6188	6198	6209	6219	6230	6241	6251	6262	6273	6283
0,061	6294	6305	6315	6326	6337	6347	6358	6369	6379	6390
0,062	6401	6411	6422	6433	6443	6454	6465	6475	6486	6497
0,063	6507	6518	6529	6539	6550	6561	6571	6582	6593	6603
0,064	6614	6625	6635	6646	6657	6667	6678	6689	6699	6710
0,065	6721	6732	6742	6753	6764	6774	6785	6796	6806	6817
0,066	6828	6839	6849	6860	6871	6881	6892	6903	6914	6924
0,067	6935	6946	6956	6967	6978	6989	6999	7010	7021	7032
0,068	7042	7053	7064	7074	7085	7096	7107	7117	7128	7139
0,069	7150	7160	7171	7182	7193	7203	7214	7225	7236	7246
0,070	7257	7268	7279	7289	7300	7311	7322	7332	7343	7354
0,071	7365	7375	7386	7397	7408	7418	7429	7440	7451	7462
0,072	7472	7483	7494	7505	7515	7526	7537	7548	7559	7569
0,073	7580	7591	7602	7613	7623	7634	7645	7656	7667	7677
0,074	7688	7699	7710	7721	7731	7742	7753	7764	7775	7785
0,075	7796	7807	7818	7829	7839	7850	7861	7872	7883	7893
0,076	7904	7915	7926	7937	7948	7958	7969	7980	7991	8002
0,077	8013	8023	8034	8045	8056	8067	8078	8088	8099	8110
0,078	8121	8132	8143	8154	8164	8175	8186	8197	8208	8219
0,079	8230	8240	8251	8262	8273	8284	8295	8306	8316	8327
0,080	8338	8349	8360	8371	8382	8393	8403	8414	8425	8436
0,081	8447	8458	8469	8480	8490	8501	8512	8523	8534	8545
0,082	8556	8567	8578	8588	8599	8610	8621	8632	8643	8654
0,083	8665	8676	8687	8698	8708	8719	8730	8741	8752	8763
0,084	8774	8785	8796	8807	8818	8828	8839	8850	8861	8872
0,085	8883	8894	8905	8916	8927	8938	8949	8960	8971	8982

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,086	0,08992	9003	9014	9025	9036	9047	9058	9069	9080	9091
0,087	9102	9113	9124	9135	9146	9157	9168	9179	9190	9201
0,088	9212	9222	9233	9244	9255	9266	9277	9288	9299	9310
0,089	9321	9332	9343	9354	9365	9376	9387	9398	9409	9420
0,090	9431	9442	9453	9464	9475	9486	9497	9508	9519	9530
0,091	9541	9552	9563	9574	9585	9596	9607	9618	9629	9640
0,092	9651	9662	9673	9684	9695	9706	9717	9728	9739	9750
0,093	9761	9772	9783	9794	9805	9816	9827	9838	9850	9861
0,094	9872	9883	9894	9905	9916	9927	9938	9949	9960	9971
0,095	9982	9993								
0,095			0,1000	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008
0,096	0,1009	1010	1011	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019
0,097	1020	1021	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030
0,098	1031	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041
0,099	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052
0,100	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1064
0,101	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1073	1074	1075
0,102	1076	1077	1078	1079	1080	1081	1083	1084	1085	1086
0,103	1087	1088	1089	1090	1091	1093	1094	1095	1096	1097
0,104	1098	1099	1100	1101	1103	1104	1105	1106	1107	1108
0,105	1109	1110	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119
0,106	1120	1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1131
0,107	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1140	1141	1142
0,108	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1150	1151	1152	1153
0,109	1154	1155	1156	1157	1159	1160	1161	1162	1163	1164
0,110	1165	1166	1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175
0,111	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1186	1187
0,112	1188	1189	1190	1191	1192	1193	1195	1196	1197	1198
0,113	1199	1200	1201	1202	1204	1205	1206	1207	1208	1209
0,114	1210	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1221
0,115	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1230	1231	1232
0,116	1233	1234	1235	1236	1238	1239	1240	1241	1242	1243
0,117	1244	1245	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254
0,118	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	1264	1265	1266
0,119	1267	1268	1269	1270	1272	1273	1274	1275	1276	1277
0,120	1278	1279	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1289
0,121	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1297	1298	1299	1300
0,122	1301	1302	1303	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311
0,123	1312	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1322	1323
0,124	1324	1325	1326	1327	1328	1330	1331	1332	1333	1334
0,125	1335	1336	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1346

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,126	0,1347	1348	1349	1350	1351	1352	1354	1355	1356	1357
0,127	1358	1359	1360	1362	1363	1364	1365	1366	1367	1369
0,128	1370	1371	1372	1373	1374	1375	1377	1378	1379	1380
0,129	1381	1382	1383	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391
0,130	1393	1394	1395	1396	1397	1398	1400	1401	1402	1403
0,131	1404	1405	1406	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414
0,132	1416	1417	1418	1419	1420	1421	1423	1424	1425	1426
0,133	1427	1428	1429	1431	1432	1433	1434	1435	1436	1438
0,134	1439	1440	1441	1442	1443	1444	1446	1447	1448	1449
0,135	1450	1451	1453	1454	1455	1456	1457	1458	1460	1461
0,136	1462	1463	1464	1465	1466	1468	1469	1470	1471	1472
0,137	1473	1475	1476	1477	1478	1479	1480	1482	1483	1484
0,138	1485	1486	1487	1488	1490	1491	1492	1493	1494	1495
0,139	1497	1498	1499	1500	1501	1502	1504	1505	1506	1507
0,140	1508	1509	1511	1512	1513	1514	1515	1516	1518	1519
0,141	1520	1521	1522	1523	1525	1526	1527	1528	1529	1530
0,142	1532	1533	1534	1535	1536	1537	1539	1540	1541	1542
0,143	1543	1544	1546	1547	1548	1549	1550	1551	1553	1554
0,144	1555	1556	1557	1558	1560	1561	1562	1563	1564	1565
0,145	1567	1568	1569	1570	1571	1572	1574	1575	1576	1577
0,146	1578	1579	1581	1582	1583	1584	1585	1586	1588	1589
0,147	1590	1591	1592	1593	1595	1596	1597	1598	1599	1601
0,148	1602	1603	1604	1605	1606	1608	1609	1610	1611	1612
0,149	1613	1615	1616	1617	1618	1619	1620	1622	1623	1624
0,150	1625	1626	1628	1629	1630	1631	1632	1633	1635	1636
0,151	1637	1638	1639	1640	1642	1643	1644	1645	1646	1648
0,152	1649	1650	1651	1652	1653	1655	1656	1657	1658	1659
0,153	1661	1662	1663	1664	1665	1666	1668	1669	1670	1671
0,154	1672	1674	1675	1676	1677	1678	1679	1681	1682	1683
0,155	1684	1685	1687	1688	1689	1690	1691	1692	1694	1695
0,156	1696	1697	1698	1700	1701	1702	1703	1704	1706	1707
0,157	1708	1709	1710	1711	1713	1714	1715	1716	1717	1719
0,158	1720	1721	1722	1723	1725	1726	1727	1728	1729	1730
0,159	1732	1733	1734	1735	1736	1738	1739	1740	1741	1742
0,160	1744	1745	1746	1747	1748	1749	1751	1752	1753	1754
0,161	1755	1757	1758	1759	1760	1761	1763	1764	1765	1766
0,162	1767	1769	1770	1771	1772	1773	1775	1776	1777	1778
0,163	1779	1781	1782	1783	1784	1785	1786	1788	1789	1790
0,164	1791	1792	1794	1795	1796	1797	1798	1800	1801	1802
0,165	1803	1804	1806	1807	1808	1809	1810	1812	1813	1814
0,166	1815	1816	1818	1819	1820	1821	1822	1824	1825	1826
0,167	1827	1828	1830	1831	1832	1833	1834	1836	1837	1838
0,168	1839	1840	1842	1843	1844	1845	1846	1848	1849	1850
0,169	1851	1852	1854	1855	1856	1857	1858	1860	1861	1862
0,170	1863	1865	1866	1867	1868	1869	1871	1872	1873	1874

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,171	0,1875	1877	1878	1879	1880	1881	1883	1884	1885	1886
0,172	1887	1889	1890	1891	1892	1893	1895	1896	1897	1898
0,173	1900	1901	1902	1903	1904	1906	1907	1908	1909	1910
0,174	1912	1913	1914	1915	1916	1918	1919	1920	1921	1923
0,175	1924	1925	1926	1927	1929	1930	1931	1932	1933	1935
0,176	1936	1937	1938	1939	1941	1942	1943	1944	1946	1947
0,177	1948	1949	1950	1952	1953	1954	1955	1956	1958	1959
0,178	1960	1961	1963	1964	1965	1966	1967	1969	1970	1971
0,179	1972	1974	1975	1976	1977	1978	1980	1981	1982	1983
0,180	1985	1986	1987	1988	1989	1991	1992	1993	1994	1995
0,181	1997	1998	1999	2000	2002	2003	2004	2005	2006	2008
0,182	2009	2010	2011	2013	2014	2015	2016	2017	2019	2020
0,183	2021	2022	2024	2025	2026	2027	2029	2030	2031	2032
0,184	2033	2035	2036	2037	2038	2040	2041	2042	2043	2044
0,185	2046	2047	2048	2049	2051	2052	2053	2054	2055	2057
0,186	2058	2059	2060	2062	2063	2064	2065	2067	2068	2069
0,187	2070	2071	2073	2074	2075	2076	2078	2079	2080	2081
0,188	2083	2084	2085	2086	2087	2089	2090	2091	2092	2094
0,189	2095	2096	2097	2099	2100	2101	2102	2104	2105	2106
0,190	2107	2108	2110	2111	2112	2113	2115	2116	2117	2118
0,191	2120	2121	2122	2123	2125	2126	2127	2128	2129	2131
0,192	2132	2133	2134	2136	2137	2138	2139	2141	2142	2143
0,193	2144	2146	2147	2148	2149	2151	2152	2153	2154	2155
0,194	2157	2158	2159	2160	2162	2163	2164	2165	2167	2168
0,195	2169	2170	2172	2173	2174	2175	2177	2178	2179	2180
0,196	2182	2183	2184	2185	2187	2188	2189	2190	2192	2193
0,197	2194	2195	2196	2198	2199	2200	2201	2203	2204	2205
0,198	2206	2208	2209	2210	2211	2213	2214	2215	2216	2218
0,199	2219	2220	2221	2223	2224	2225	2226	2228	2229	2230
0,200	2231	2233	2234	2235	2236	2238	2239	2240	2241	2243
0,201	2244	2245	2246	2248	2249	2250	2251	2253	2254	2255
0,202	2256	2258	2259	2260	2261	2263	2264	2265	2266	2268
0,203	2269	2270	2272	2273	2274	2275	2277	2278	2279	2280
0,204	2282	2283	2284	2285	2287	2288	2289	2290	2292	2293
0,205	2294	2295	2297	2298	2299	2300	2302	2303	2304	2305
0,206	2307	2308	2309	2310	2312	2313	2314	2316	2317	2318
0,207	2319	2321	2322	2323	2324	2326	2327	2328	2329	2331
0,208	2332	2333	2334	2336	2337	2338	2340	2341	2342	2343
0,209	2345	2346	2347	2348	2350	2351	2352	2353	2355	2356
0,210	2357	2358	2360	2361	2362	2364	2365	2366	2367	2369
0,211	2370	2371	2372	2374	2375	2376	2377	2379	2380	2381
0,212	2383	2384	2385	2386	2388	2389	2390	2391	2393	2394
0,213	2395	2397	2398	2399	2400	2402	2403	2404	2405	2407
0,214	2408	2409	2411	2412	2413	2414	2416	2417	2418	2419
0,215	2421	2422	2423	2425	2426	2427	2428	2430	2431	2432

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,216	0,2433	2435	2436	2437	2439	2440	2441	2442	2444	2445
0,217	2446	2448	2449	2450	2451	2453	2454	2455	2456	2458
0,218	2459	2460	2462	2463	2464	2465	2467	2468	2469	2471
0,219	2472	2473	2474	2476	2477	2478	2479	2481	2482	2483
0,220	2485	2486	2487	2488	2490	2491	2492	2494	2495	2496
0,221	2497	2499	2500	2501	2503	2504	2505	2506	2508	2509
0,222	2510	2512	2513	2514	2515	2517	2518	2519	2521	2522
0,223	2523	2524	2526	2527	2528	2530	2531	2532	2533	2535
0,224	2536	2537	2539	2540	2541	2542	2544	2545	2546	2548
0,225	2549	2550	2552	2553	2554	2555	2557	2558	2559	2561
0,226	2562	2563	2564	2566	2567	2568	2570	2571	2572	2573
0,227	2575	2576	2577	2579	2580	2581	2583	2584	2585	2586
0,228	2588	2589	2590	2592	2593	2594	2595	2597	2598	2599
0,229	2601	2602	2603	2605	2606	2607	2608	2610	2611	2612
0,230	2614	2615	2616	2618	2619	2620	2621	2623	2624	2625
0,231	2627	2628	2629	2631	2632	2633	2634	2636	2637	2638
0,232	2640	2641	2642	2644	2645	2646	2647	2649	2650	2651
0,233	2653	2654	2655	2657	2658	2659	2661	2662	2663	2664
0,234	2666	2667	2668	2670	2671	2672	2674	2675	2676	2677
0,235	2679	2680	2681	2683	2684	2685	2687	2688	2689	2691
0,236	2692	2693	2694	2696	2697	2698	2700	2701	2702	2704
0,237	2705	2706	2708	2709	2710	2712	2713	2714	2715	2717
0,238	2718	2719	2721	2722	2723	2725	2726	2727	2729	2730
0,239	2731	2733	2734	2735	2736	2738	2739	2740	2742	2743
0,240	2744	2746	2747	2748	2750	2751	2752	2754	2755	2756
0,241	2758	2759	2760	2761	2763	2764	2765	2767	2768	2769
0,242	2771	2772	2773	2775	2776	2777	2779	2780	2781	2783
0,243	2784	2785	2787	2788	2789	2791	2792	2793	2794	2796
0,244	2797	2798	2800	2801	2802	2804	2805	2806	2808	2809
0,245	2810	2812	2813	2814	2816	2817	2818	2820	2821	2822
0,246	2824	2825	2826	2828	2829	2830	2832	2833	2834	2836
0,247	2837	2838	2840	2841	2842	2844	2845	2846	2848	2849
0,248	2850	2852	2853	2854	2856	2857	2858	2860	2861	2862
0,249	2863	2865	2866	2867	2869	2870	2871	2873	2874	2875
0,250	2877	2878	2879	2881	2882	2883	2885	2886	2887	2889
0,251	2890	2891	2893	2894	2896	2897	2898	2900	2901	2902
0,252	2904	2905	2906	2908	2909	2910	2912	2913	2914	2916
0,253	2917	2918	2920	2921	2922	2924	2925	2926	2928	2929
0,254	2930	2932	2933	2934	2936	2937	2938	2940	2941	2942
0,255	2944	2945	2946	2948	2949	2950	2952	2953	2954	2956
0,256	2957	2958	2960	2961	2963	2964	2965	2967	2968	2969
0,257	2971	2972	2973	2975	2976	2977	2979	2980	2981	2982
0,258	2984	2985	2987	2988	2989	2991	2992	2993	2995	2996
0,259	2998	2999	3000	3002	3003	3004	3006	3007	3008	3010
0,260	3011	3012	3014	3015	3016	3018	3019	3021	3022	3023

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,261	0,3025	3026	3027	3029	3030	3031	3033	3034	3035	3037
0,262	3038	3039	3041	3042	3044	3045	3046	3048	3049	3050
0,263	3052	3053	3054	3056	3057	3058	3060	3061	3063	3064
0,264	3065	3067	3068	3069	3071	3072	3073	3075	3076	3077
0,265	3079	3080	3082	3083	3084	3086	3087	3088	3090	3091
0,266	3092	3094	3095	3097	3098	3099	3101	3102	3103	3105
0,267	3106	3107	3109	3110	3112	3113	3114	3116	3117	3118
0,268	3120	3121	3122	3124	3125	3127	3128	3129	3131	3132
0,269	3133	3135	3136	3138	3139	3140	3142	3143	3144	3146
0,270	3147	3148	3150	3151	3153	3154	3155	3157	3158	3159
0,271	3161	3162	3164	3165	3166	3168	3169	3170	3172	3173
0,272	3175	3176	3177	3179	3180	3181	3183	3184	3186	3187
0,273	3188	3190	3191	3192	3194	3195	3197	3198	3199	3201
0,274	3202	3203	3205	3206	3208	3209	3210	3212	3213	3214
0,275	3216	3217	3219	3220	3221	3223	3224	3225	3227	3228
0,276	3230	3231	3232	3234	3235	3237	3238	3239	3241	3242
0,277	3243	3245	3246	3248	3249	3250	3252	5253	3255	3256
0,278	3257	3259	3260	3261	3263	3264	3266	3267	3268	3270
0,279	3271	3273	3274	3275	3277	3278	3279	3281	3282	3284
0,280	3285	3286	3288	3289	3291	3292	3293	3295	3296	3298
0,281	3299	3300	3302	3303	3305	3306	3307	3309	3310	3311
0,282	3313	3314	3316	3317	3318	3320	3321	3323	3324	3325
0,283	3327	3328	3330	3331	3332	3334	3335	3337	3338	3339
0,284	3341	3342	3344	3345	3346	3348	3349	3351	3352	3353
0,285	3355	3356	3358	3359	3360	3362	3363	3365	3366	3367
0,286	3369	3370	3372	3373	3374	3376	3377	3379	3380	3381
0,287	3383	3384	3386	3387	3388	3390	3391	3393	3394	3395
0,288	3397	3398	3400	3401	3402	3404	3405	3407	3408	3409
0,289	3411	3412	3414	3415	3416	3418	3419	3421	3422	3423
0,290	3425	3426	3428	3429	3431	3432	3433	3435	3436	3438
0,291	3439	3440	3442	3443	3445	3446	3447	3449	3450	3452
0,292	3453	3455	3456	3457	3459	3460	3462	3463	3464	3466
0,293	3467	3469	3470	3471	3473	3474	3476	3477	3479	3480
0,294	3481	3483	3484	3486	3487	3488	3490	3491	3493	3494
0,295	3496	3497	3498	3500	3501	3503	3504	3506	3507	3508
0,296	3510	3511	3513	3514	3515	3517	3518	3520	3521	3523
0,297	3524	3525	3527	3528	3530	3531	3533	3534	3535	3537
0,298	3538	3540	3541	3542	3544	3545	3547	3548	3550	3551
0,299	3552	3554	3555	3557	3558	3560	3561	3562	3564	3565
0,300	3567	3568	3570	3571	3572	3574	3575	3577	3578	3580
0,301	3581	3582	3584	3585	3587	3588	3590	3591	3592	3594
0,302	3595	3597	3598	3600	3601	3603	3604	3605	3607	3608
0,303	3610	3611	3613	3614	3615	3617	3618	3620	3621	3623
0,304	3624	3625	3627	3628	3630	3631	3633	3634	3636	3637
0,305	3638	3640	3641	3643	3644	3646	3647	3649	3650	3651

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,306	0,3653	3654	3656	3657	3659	3660	3661	3663	3664	3666
0,307	3667	3669	3670	3672	3673	3674	3676	3677	3679	3680
0,308	3682	3683	3685	3686	3687	3689	3690	3692	3693	3695
0,309	3696	3698	3699	3700	3702	3703	3705	3706	3708	3709
0,310	3711	3712	3714	3715	3716	3718	3719	3721	3722	3724
0,311	3725	3727	3728	3729	3731	3732	3734	3735	3737	3738
0,312	3740	3741	3743	3744	3745	3747	3748	3750	3751	3753
0,313	3754	3756	3757	3759	3760	3761	3763	3764	3766	3767
0,314	3769	3770	3772	3773	3775	3776	3778	3779	3780	3782
0,315	3783	3785	3786	3788	3789	3791	3792	3794	3795	3797
0,316	3798	3799	3801	3802	3804	3805	3807	3808	3810	3811
0,317	3813	3814	3816	3817	3818	3820	3821	3823	3824	3826
0,318	3827	3829	3830	3832	3833	3835	3836	3838	3839	3840
0,319	3842	3843	3845	3846	3848	3849	3851	3852	3854	3855
0,320	3857	3858	3860	3861	3863	3864	3865	3867	3868	3870
0,321	3871	3873	3874	3876	3877	3879	3880	3882	3883	3885
0,322	3886	3888	3889	3891	3892	3893	3895	3896	3898	3899
0,323	3901	3902	3904	3905	3907	3908	3910	3911	3913	3914
0,324	3916	3917	3919	3920	3922	3923	3925	3926	3927	3929
0,325	3930	3932	3933	3935	3936	3938	3939	3941	3942	3944
0,326	3945	3947	3948	3950	3951	3953	3954	3956	3957	3959
0,327	3960	3962	3963	3965	3966	3968	3969	3971	3972	3973
0,328	3975	3976	3978	3979	3981	3982	3984	3985	3987	3988
0,329	3990	3991	3993	3994	3996	3997	3999	4000	4002	4003
0,330	4005	4006	4008	4009	4011	4012	4014	4015	4017	4018
0,331	4020	4021	4023	4024	4026	4027	4029	4030	4032	4033
0,332	4035	4036	4038	4039	4041	4042	4044	4045	4047	4048
0,333	4050	4051	4053	4054	4056	4057	4059	4060	4062	4063
0,334	4065	4066	4068	4069	4071	4072	4074	4075	4077	4078
0,335	4080	4081	4083	4084	4086	4087	4089	4090	4092	4093
0,336	4095	4096	4098	4099	4101	4102	4104	4105	4107	4108
0,337	4110	4111	4113	4114	4116	4117	4119	4120	4122	4123
0,338	4125	4126	4128	4129	4131	4132	4134	4135	4137	4139
0,339	4140	4142	4143	4145	4146	4148	4149	4151	4152	4154
0,340	4155	4157	4158	4160	4161	4163	4164	4166	4167	4169
0,341	4170	4172	4173	4175	4176	4178	4179	4181	4182	4184
0,342	4186	4187	4189	4190	4192	4193	4195	4196	4198	4199
0,343	4201	4202	4204	4205	4207	4208	4210	4211	4213	4214
0,344	4216	4217	4219	4221	4222	4224	4225	4227	4228	4230
0,345	4231	4233	4234	4236	4237	4239	4240	4242	4243	4245
0,346	4246	4248	4250	4251	4253	4254	4256	4257	4259	4260
0,347	4262	4263	4265	4266	4268	4269	4271	4273	4274	4276
0,348	4277	4279	4280	4282	4283	4285	4286	4288	4289	4291
0,349	4292	4294	4296	4297	4299	4300	4302	4303	4305	4306
0,350	4308	4309	4311	4312	4314	4316	4317	4319	4320	4322

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,351	0,4323	4325	4326	4328	4329	4331	4332	4334	4336	4337
0,352	4339	4340	4342	4343	4345	4346	4348	4349	4351	4353
0,353	4354	4356	4357	4359	4360	4362	4363	4365	4366	4368
0,354	4370	4371	4373	4374	4376	4377	4379	4380	4382	4383
0,355	4385	4387	4388	4390	4391	4393	4394	4396	4397	4399
0,356	4401	4402	4404	4405	4407	4408	4410	4411	4413	4415
0,357	4416	4418	4419	4421	4422	4424	4425	4427	4429	4430
0,358	4432	4433	4435	4436	4438	4439	4441	4443	4444	4446
0,359	4447	4449	4450	4452	4454	4455	4457	4458	4460	4461
0,360	4463	4464	4466	4468	4469	4471	4472	4474	4475	4477
0,361	4479	4480	4482	4483	4485	4486	4488	4489	4491	4493
0,362	4494	4496	4497	4499	4500	4502	4504	4505	4507	4508
0,363	4510	4511	4513	4515	4516	4518	4519	4521	4522	4524
0,364	4526	4527	4529	4530	4532	4533	4535	4537	4538	4540
0,365	4541	4543	4544	4546	4548	4549	4551	4552	4554	4555
0,366	4557	4559	4560	4562	4563	4565	4567	4568	4570	4571
0,367	4573	4574	4576	4578	4579	4581	4582	4584	4585	4587
0,368	4589	4590	4592	4593	4595	4597	4598	4600	4601	4603
0,369	4604	4606	4608	4609	4611	4612	4614	4616	4617	4619
0,370	4620	4622	4624	4625	4627	4628	4630	4631	4633	4635
0,371	4636	4638	4639	4641	4643	4644	4646	4647	4649	4651
0,372	4652	4654	4655	4657	4659	4660	4662	4663	4665	4666
0,373	4668	4670	4671	4673	4674	4676	4678	4679	4681	4682
0,374	4684	4686	4687	4689	4690	4692	4694	4695	4697	4698
0,375	4700	4702	4703	4705	4706	4708	4710	4711	4713	4714
0,376	4716	4718	4719	4721	4722	4724	4726	4727	4729	4730
0,377	4732	4734	4735	4737	4739	4740	4742	4743	4745	4747
0,378	4748	4750	4751	4753	4755	4756	4758	4759	4761	4763
0,379	4764	4766	4767	4769	4771	4772	4774	4776	4777	4779
0,380	4780	4782	4784	4785	4787	4788	4790	4792	4793	4795
0,381	4797	4798	4800	4801	4803	4805	4806	4808	4809	4811
0,382	4813	4814	4816	4818	4819	4821	4822	4824	4826	4827
0,383	4829	4830	4832	4834	4835	4837	4839	4840	4842	4843
0,384	4845	4847	4848	4850	4852	4853	4855	4856	4858	4860
0,385	4861	4863	4865	4866	4868	4869	4871	4873	4874	4876
0,386	4878	4879	4881	4882	4884	4886	4887	4889	4891	4892
0,387	4894	4896	4897	4899	4900	4902	4904	4905	4907	4909
0,388	4910	4912	4913	4915	4917	4918	4920	4922	4923	4925
0,389	4927	4928	4930	4931	4933	4935	4936	4938	4940	4941
0,390	4943	4945	4946	4948	4950	4951	4953	4954	4956	4958
0,391	4959	4961	4963	4964	4966	4968	4969	4971	4973	4974
0,392	4976	4977	4979	4981	4982	4984	4986	4987	4989	4991
0,393	4992	4994	4996	4997	4999	5001	5002	5004	5005	5007
0,394	5009	5010	5012	5014	5015	5017	5019	5020	5022	5024
0,395	5025	5027	5029	5030	5032	5034	5035	5037	5039	5040

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,396	0,5042	5043	5045	5047	5048	5050	5052	5053	5055	5057
0,397	5058	5060	5062	5063	5065	5067	5068	5070	5072	5073
0,398	5075	5077	5078	5080	5082	5083	5085	5087	5088	5090
0,399	5092	5093	5095	5097	5098	5100	5102	5103	5105	5107
0,400	5108	5110	5112	5113	5115	5117	5118	5120	5122	5123
0,401	5125	5127	5128	5130	5132	5133	5135	5137	5138	5140
0,402	5142	5143	5145	5147	5148	5150	5152	5153	5155	5157
0,403	5158	5160	5162	5163	5165	5167	5168	5170	5172	5173
0,404	5175	5177	5179	5180	5182	5184	5185	5187	5189	5190
0,405	5192	5194	5195	5197	5199	5200	5202	5204	5205	5207
0,406	5209	5210	5212	5214	5215	5217	5219	5221	5222	5224
0,407	5226	5227	5229	5231	5232	5234	5236	5237	5239	5241
0,408	5242	5244	5246	5248	5249	5251	5253	5254	5256	5258
0,409	5259	5261	5263	5264	5266	5268	5270	5271	5273	5275
0,410	5276	5278	5280	5281	5283	5285	5287	5288	5290	5292
0,411	5293	5295	5297	5298	5300	5302	5303	5305	5307	5309
0,412	5310	5312	5314	5315	5317	5319	5320	5322	5324	5326
0,413	5327	5329	5331	5332	5334	5336	5338	5339	5341	5343
0,414	5344	5346	5348	5349	5351	5353	5355	5356	5358	5360
0,415	5361	5363	5365	5367	5368	5370	5372	5373	5375	5377
0,416	5379	5380	5382	5384	5385	5387	5389	5391	5392	5394
0,417	5396	5397	5399	5401	5403	5404	5406	5408	5409	5411
0,418	5413	5415	5416	5418	5420	5421	5423	5425	5427	5428
0,419	5430	5432	5433	5435	5437	5439	5440	5442	5444	5446
0,420	5447	5449	5451	5452	5454	5456	5458	5459	5461	5463
0,421	5465	5466	5468	5470	5471	5473	5475	5477	5478	5480
0,422	5482	5484	5485	5487	5489	5490	5492	5494	5496	5497
0,423	5499	5501	5503	5504	5506	5508	5510	5511	5513	5515
0,424	5516	5518	5520	5522	5523	5525	5527	5529	5530	5532
0,425	5534	5536	5537	5539	5541	5543	5544	5546	5548	5550
0,426	5551	5553	5555	5556	5558	5560	5562	5563	5565	5567
0,427	5569	5570	5572	5574	5576	5577	5579	5581	5583	5584
0,428	5586	5588	5590	5591	5593	5595	5597	5598	5600	5602
0,429	5604	5605	5607	5609	5611	5612	5614	5616	5618	5619
0,430	5621	5623	5625	5626	5628	5630	5632	5633	5635	5637
0,431	5639	5641	5642	5644	5646	5648	5649	5651	5653	5655
0,432	5656	5658	5660	5662	5663	5665	5667	5669	5670	5672
0,433	5674	5676	5677	5679	5681	5683	5685	5686	5688	5690
0,434	5692	5693	5695	5697	5699	5700	5702	5704	5706	5708
0,435	5709	5711	5713	5715	5716	5718	5720	5722	5723	5725
0,436	5727	5729	5731	5732	5734	5736	5738	5739	5741	5743
0,437	5745	5747	5748	5750	5752	5754	5755	5757	5759	5761
0,438	5763	5764	5766	5768	5770	5771	5773	5775	5777	5779
0,439	5780	5782	5784	5786	5787	5789	5791	5793	5795	5796
0,440	5798	5800	5802	5804	5805	5807	5809	5811	5812	5814

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,441	0,5816	5818	5820	5821	5823	5825	5827	5829	5830	5832
0,442	5834	5836	5838	5839	5841	5843	5845	5847	5848	5850
0,443	5852	5854	5855	5857	5859	5861	5863	5864	5866	5868
0,444	5870	5872	5873	5875	5877	5879	5881	5882	5884	5886
0,445	5888	5890	5891	5893	5895	5897	5899	5900	5902	5904
0,446	5906	5908	5910	5911	5913	5915	5917	5919	5920	5922
0,447	5924	5926	5928	5929	5931	5933	5935	5937	5938	5940
0,448	5942	5944	5946	5948	5949	5951	5953	5955	5957	5958
0,449	5960	5962	5964	5966	5967	5969	5971	5973	5975	5977
0,450	5978	5980	5982	5984	5986	5987	5989	5991	5993	5995
0,451	5997	5998	6000	6002	6004	6006	6008	6009	6011	6013
0,452	6015	6017	6018	6020	6022	6024	6026	6028	6029	6031
0,453	6033	6035	6037	6039	6040	6042	6044	6046	6048	6050
0,454	6051	6053	6055	6057	6059	6061	6062	6064	6066	6068
0,455	6070	6072	6073	6075	6077	6079	6081	6083	6084	6086
0,456	6088	6090	6092	6094	6095	6097	6099	6101	6103	6105
0,457	6106	6108	6110	6112	6114	6116	6118	6119	6121	6123
0,458	6125	6127	6129	6130	6132	6134	6136	6138	6140	6142
0,459	6143	6145	6147	6149	6151	6153	6154	6156	6158	6160
0,460	6162	6164	6166	6167	6169	6171	6173	6175	6177	6179
0,461	6180	6182	6184	6186	6188	6190	6192	6193	6195	6197
0,462	6199	6201	6203	6205	6206	6208	6210	6212	6214	6216
0,463	6218	6219	6221	6223	6225	6227	6229	6231	6232	6234
0,464	6236	6238	6240	6242	6244	6246	6247	6249	6251	6253
0,465	6255	6257	6259	6260	6262	6264	6266	6268	6270	6272
0,466	6274	6275	6277	6279	6281	6283	6285	6287	6289	6290
0,467	6292	6294	6296	6298	6300	6302	6304	6305	6307	6309
0,468	6311	6313	6315	6317	6319	6321	6322	6324	6326	6328
0,469	6330	6332	6334	6336	6337	6339	6341	6243	6345	6347
0,470	6349	6351	6353	6354	6356	6358	6360	6362	6364	6366
0,471	6368	6370	6371	6373	6375	6377	6379	6381	6383	6385
0,472	6387	6388	6390	6392	6394	6396	6398	6400	6402	6404
0,473	6406	6407	6409	6411	6413	6415	6417	6419	6421	6423
0,474	6425	6426	6428	6430	6432	6434	6436	6438	6440	6442
0,475	6444	6445	6447	6449	6451	6453	6455	6457	6459	6461
0,476	6463	6465	6466	6468	6470	6472	6474	6476	6478	6480
0,477	6482	6484	6486	6487	6489	6491	6493	6495	6497	6499
0,478	6501	6503	6505	6507	6509	6510	6512	6514	6516	6518
0,479	6520	6522	6524	6526	6528	6530	6532	6533	6535	6537
0,480	6539	6541	6543	6545	6547	6549	6551	6553	6555	6557
0,481	6559	6560	6562	6564	6566	6568	6570	6572	6574	6576
0,482	6578	6580	6582	6584	6586	6587	6589	6591	6593	6595
0,483	6597	6599	6601	6603	6605	6607	6609	6611	6613	6615
0,484	6616	6618	6620	6622	6624	6626	6628	6630	6632	6634
0,485	6636	6638	6640	6642	6644	6646	6648	6649	6651	6653

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,486	0,6655	6657	6659	6661	6663	6665	6667	6669	6671	6673
0,487	6675	6677	6679	6681	6683	6685	6686	6688	6690	6692
0,488	6694	6696	6698	6700	6702	6704	6706	6708	6710	6712
0,489	6714	6716	6718	6720	6722	6724	6726	6728	6730	6731
0,490	6733	6735	6737	6739	6741	6743	6745	6747	6749	6751
0,491	6753	6755	6757	6759	6761	6763	6765	6767	6769	6771
0,492	6773	6775	6777	6779	6781	6783	6785	6787	6788	6790
0,493	6792	6794	6796	6798	6800	6802	6804	6806	6808	6810
0,494	6812	6814	6816	6818	6820	6822	6824	6826	6828	6830
0,495	6832	6834	6836	6838	6840	6842	6844	6846	6848	6850
0,496	6852	6854	6856	6858	6860	6862	6864	6866	6868	6870
0,497	6872	6874	6876	6878	6880	6882	6884	6886	6888	6890
0,498	6892	6894	6896	6898	6900	6902	6904	6906	6908	6909
0,499	6911	6913	6915	6917	6919	6921	6923	6925	6927	6929
0,500	6931	6933	6935	6937	6939	6941	6943	6945	6947	6949
0,501	6951	6953	6956	6958	6960	6962	6964	6966	6968	6970
0,502	6972	6974	6976	6978	6980	6982	6984	6986	6988	6990
0,503	6992	6994	6996	6998	7000	7002	7004	7006	7008	7010
0,504	7012	7014	7016	7018	7020	7022	7024	7026	7028	7030
0,505	7032	7034	7036	7038	7040	7042	7044	7046	7048	7050
0,506	7052	7054	7056	7058	7060	7062	7064	7066	7068	7070
0,507	7072	7074	7077	7079	7081	7083	7085	7087	7089	7091
0,508	7093	7095	7097	7099	7101	7103	7105	7107	7109	7111
0,509	7113	7115	7117	7119	7121	7123	7125	7127	7129	7131
0,510	7133	7136	7138	7140	7142	7144	7146	7148	7150	7152
0,511	7154	7156	7158	7160	7162	7164	7166	7168	7170	7172
0,512	7174	7176	7178	7181	7183	7185	7187	7189	7191	7193
0,513	7195	7197	7199	7201	7203	7205	7207	7209	7211	7213
0,514	7215	7218	7220	7222	7224	7226	7228	7230	7232	7234
0,515	7236	7238	7240	7242	7244	7246	7248	7251	7253	7255
0,516	7257	7259	7261	7263	7265	7267	7269	7271	7273	7275
0,517	7277	7279	7282	7284	7286	7288	7290	7292	7294	7296
0,518	7298	7300	7302	7304	7306	7308	7311	7313	7315	7317
0,519	7319	7321	7323	7325	7327	7329	7331	7333	7336	7338
0,520	7340	7342	7344	7346	7348	7350	7352	7354	7356	7358
0,521	7361	7363	7365	7367	7369	7371	7373	7375	7377	7379
0,522	7381	7384	7386	7388	7390	7392	7394	7396	7398	7400
0,523	7402	7404	7407	7409	7411	7413	7415	7417	7419	7421
0,524	7423	7425	7428	7430	7432	7434	7436	7438	7440	7442
0,525	7444	7447	7449	7451	7453	7455	7457	7459	7461	7463
0,526	7465	7468	7470	7472	7474	7476	7478	7480	7482	7484
0,527	7487	7489	7491	7493	7495	7497	7499	7501	7504	7506
0,528	7508	7510	7512	7514	7516	7518	7520	7523	7525	7527
0,529	7529	7531	7533	7535	7537	7540	7542	7544	7546	7548
0,530	7550	7552	7554	7557	7559	7561	7563	7565	7567	7569

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,531	0,7572	7574	7576	7578	7580	7582	7584	7586	7589	7591
0,532	7593	7595	7597	7599	7601	7604	7606	7608	7610	7612
0,533	7614	7616	7619	7621	7623	7625	7627	7629	7631	7634
0,534	7636	7638	7640	7642	7644	7646	7649	7651	7653	7655
0,535	7657	7659	7661	7664	7666	7668	7670	7672	7674	7677
0,536	7679	7681	7683	7685	7687	7689	7692	7694	7696	7698
0,537	7700	7702	7705	7707	7709	7711	7713	7715	7718	7720
0,538	7722	7724	7726	7728	7731	7733	7735	7737	7739	7741
0,539	7744	7746	7748	7750	7752	7754	7757	7759	7761	7763
0,540	7765	7767	7770	7772	7774	7776	7778	7781	7783	7785
0,541	7787	7789	7791	7794	7796	7798	7800	7802	7804	7807
0,542	7809	7811	7813	7815	7818	7820	7822	7824	7826	7829
0,543	7831	7833	7835	7837	7839	7842	7844	7846	7848	7850
0,544	7853	7855	7857	7859	7861	7864	7866	7868	7870	7872
0,545	7875	7877	7879	7881	7883	7886	7888	7890	7892	7894
0,546	7897	7899	7901	7903	7905	7908	7910	7912	7914	7916
0,547	7919	7921	7923	7925	7927	7930	7932	7934	7936	7939
0,548	7941	7943	7945	7947	7950	7952	7954	7956	7958	7961
0,549	7963	7965	7967	7970	7972	7974	7976	7978	7981	7983
0,550	7985	7987	7990	7992	7994	7996	7998	8001	8003	8005
0,551	8007	8010	8012	8014	8016	8018	8021	8023	8025	8027
0,552	8030	8032	8034	8036	8039	8041	8043	8045	8047	8050
0,553	8052	8054	8056	8059	8061	8063	8065	8068	8070	8072
0,554	8074	8077	8079	8081	8083	8086	8088	8090	8092	8095
0,555	8097	8099	8101	8104	8106	8108	8110	8113	8115	8117
0,556	8119	8122	8124	8126	8128	8131	8133	8135	8137	8140
0,557	8142	8144	8146	8149	8151	8153	8155	8158	8160	8162
0,558	8164	8167	8169	8171	8174	8176	8178	8180	8183	8185
0,559	8187	8189	8192	8194	8196	8198	8201	8203	8205	8208
0,560	8210	8212	8214	8217	8219	8221	8223	8226	8228	8230
0,561	8233	8235	8237	8239	8242	8244	8246	8249	8251	8253
0,562	8255	8258	8260	8262	8265	8267	8269	8271	8274	8276
0,563	8278	8281	8283	8285	8287	8290	8292	8294	8297	8299
0,564	8301	8303	8306	8308	8310	8313	8315	8317	8319	8322
0,565	8324	8326	8329	8331	8333	8336	8338	8340	8343	8345
0,566	8347	8349	8352	8354	8356	8359	8361	8363	8366	8368
0,567	8370	8372	8375	8377	8379	8382	8384	8386	8389	8391
0,568	8393	8396	8398	8400	8403	8405	8407	8410	8412	8414
0,569	8416	8419	8421	8423	8426	8428	8430	8433	8435	8437
0,570	8440	8442	8444	8447	8449	8451	8454	8456	8458	8461
0,571	8463	8465	8468	8470	8472	8475	8477	8479	8482	8484
0,572	8486	8489	8491	8493	8496	8498	8500	8503	8505	8507
0,573	8510	8512	8514	8517	8519	8521	8524	8526	8528	8531
0,574	8533	8536	8538	8540	8543	8545	8547	8550	8552	8554
0,575	8557	8559	8561	8564	8566	8568	8571	8573	8576	8578

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,576	0,8580	8583	8585	8587	8590	8592	8594	8597	8599	8601
0,577	8604	8606	8609	8611	8613	8616	8618	8620	8623	8625
0,578	8627	8630	8632	8635	8637	8639	8642	8644	8646	8649
0,579	8651	8654	8656	8658	8661	8663	8665	8668	8670	8673
0,580	8675	8677	8680	8682	8685	8687	8689	8692	8694	8696
0,581	8699	8701	8704	8706	8708	8711	8713	8716	8718	8720
0,582	8723	8725	8728	8730	8732	8735	8737	8739	8742	8744
0,583	8747	8749	8751	8754	8756	8759	8761	8763	8766	8768
0,584	8771	8773	8776	8778	8780	8783	8785	8788	8790	8792
0,585	8795	8797	8800	8802	8804	8807	8809	8812	8814	8816
0,586	8819	8821	8824	8826	8829	8831	8833	8836	8838	8841
0,587	8843	8845	8848	8850	8853	8855	8858	8860	8862	8865
0,588	8867	8870	8872	8875	8877	8879	8882	8884	8887	8889
0,589	8892	8894	8896	8899	8901	8904	8906	8909	8911	8914
0,590	8916	8918	8921	8923	8926	8928	8931	8933	8936	8938
0,591	8940	8943	8945	8948	8950	8953	8955	8958	8960	8962
0,592	8965	8967	8970	8972	8975	8977	8980	8982	8985	8987
0,593	8989	8992	8994	8997	8999	9002	9004	9007	9009	9012
0,594	9014	9016	9019	9021	9024	9026	9029	9031	9034	9036
0,595	9039	9041	9044	9046	9049	9051	9054	9056	9058	9061
0,596	9063	9066	9068	9071	9073	9076	9078	9081	9083	9086
0,597	9088	9091	9093	9096	9098	9101	9103	9105	9108	9111
0,598	9113	9116	9118	9120	9123	9125	9128	9130	9133	9135
0,599	9138	9140	9143	9145	9148	9150	9153	9155	9158	9160
0,600	9163	9165	9168	9170	9173	9175	9178	9180	9183	9185
0,601	9188	9190	9193	9195	9198	9200	9203	9205	9208	9211
0,602	9213	9216	9218	9221	9223	9226	9228	9231	9233	9236
0,603	9238	9241	9243	9246	9248	9251	9253	9256	9258	9261
0,604	9263	9266	9268	9271	9274	9276	9279	9281	9284	9286
0,605	9289	9291	9294	9296	9299	9301	9304	9306	9309	9312
0,606	9314	9317	9319	9322	9324	9327	9329	9332	9334	9337
0,607	9339	9342	9345	9347	9350	9352	9355	9357	9360	9362
0,608	9365	9367	9370	9373	9375	9378	9380	9383	9385	9388
0,609	9390	9393	9396	9398	9401	9403	9406	9408	9411	9414
0,610	9416	9419	9421	9424	9426	9429	9431	9434	9437	9439
0,611	9442	9444	9447	9449	9452	9455	9457	9460	9462	9465
0,612	9467	9470	9473	9475	9478	9480	9483	9486	9488	9491
0,613	9493	9496	9498	9501	9504	9506	9509	9511	9514	9517
0,614	9519	9522	9524	9527	9530	9532	9535	9537	9540	9543
0,615	9545	9548	9550	9553	9556	9558	9561	9563	9566	9569
0,616	9571	9574	9576	9579	9582	9584	9587	9589	9592	9595
0,617	9597	9600	9602	9605	9608	9610	9613	9615	9618	9621
0,618	9623	9626	9629	9631	9634	9636	9639	9642	9644	9647
0,619	9650	9652	9655	9657	9660	9663	9665	9668	9671	9673
0,620	9676	9678	9681	9684	9686	9689	9692	9694	9697	9700

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,621	0,9702	9705	9707	9710	9713	9715	9718	9721	9723	9726
0,622	9729	9731	9734	9737	9739	9742	9744	9747	9750	9752
0,623	9755	9758	9760	9763	9766	9768	9771	9774	9776	9779
0,624	9782	9784	9787	9790	9792	9795	9798	9800	9803	9806
0,625	9808	9811	9814	9816	9819	9822	9824	9827	9830	9832
0,626	9835	9838	9840	9843	9846	9848	9851	9854	9856	9859
0,627	9862	9864	9867	9870	9872	9875	9878	9881	9883	9886
0,628	9889	9891	9894	9897	9899	9902	9905	9907	9910	9913
0,629	9916	9918	9921	9924	9926	9929	9932	9934	9937	9940
0,630	9943	9945	9948	9951	9953	9956	9959	9961	9964	9967
0,631	9970	9972	9975	9978	9980	9983	9986	9989	9991	9994
0,632	9997	9999								
0,632			1,0002	0005	0008	0010	0013	0016	0018	0021
0,633	1,0024	0027	0029	0032	0035	0038	0040	0043	0046	0048
0,634	0051	0054	0057	0059	0062	0065	0068	0070	0073	0076
0,635	0079	0081	0084	0087	0090	0092	0095	0098	0101	0103
0,636	0106	0109	0112	0114	0117	0120	0123	0125	0128	0131
0,637	0134	0136	0139	0142	0145	0147	0150	0153	0156	0158
0,638	0161	0164	0167	0169	0172	0175	0178	0180	0183	0186
0,639	0189	0192	0194	0197	0200	0203	0205	0208	0211	0214
0,640	0217	0219	0222	0225	0228	0230	0233	0236	0239	0242
0,641	0244	0247	0250	0253	0256	0258	0261	0264	0267	0269
0,642	0272	0275	0278	0281	0283	0286	0289	0292	0295	0297
0,643	0300	0303	0306	0309	0311	0314	0317	0320	0323	0325
0,644	0328	0331	0334	0337	0339	0342	0345	0348	0351	0354
0,645	0356	0359	0362	0365	0368	0370	0373	0376	0379	0382
0,646	0385	0387	0390	0393	0396	0399	0402	0404	0407	0410
0,647	0413	0416	0419	0421	0424	0427	0430	0433	0436	0438
0,648	0441	0444	0447	0450	0453	0455	0458	0461	0464	0467
0,649	0470	0473	0475	0478	0481	0484	0487	0490	0493	0495
0,650	0498	0501	0504	0507	0510	0513	0515	0518	0521	0524
0,651	0527	0530	0533	0535	0538	0541	0544	0547	0550	0553
0,652	0556	0558	0561	0564	0567	0570	0573	0576	0579	0581
0,653	0584	0587	0590	0593	0596	0599	0602	0604	0607	0610
0,654	0613	0616	0619	0622	0625	0628	0631	0633	0636	0639
0,655	0642	0645	0648	0651	0654	0657	0660	0662	0665	0668
0,656	0671	0674	0677	0680	0683	0686	0689	0692	0694	0697
0,657	0700	0703	0706	0709	0712	0715	0718	0721	0724	0727
0,658	0729	0732	0735	0738	0741	0744	0747	0750	0753	0756
0,659	0759	0762	0765	0768	0770	0773	0776	0779	0782	0785
0,660	0788	0791	0794	0797	0800	0803	0806	0809	0812	0815

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,661	1,0818	0821	0823	0826	0829	0832	0835	0838	0841	0844
0,662	0847	0850	0853	0856	0859	0862	0865	0868	0871	0874
0,663	0877	0880	0883	0886	0889	0892	0895	0898	0900	0903
0,664	0906	0909	0912	0915	0918	0921	0924	0927	0930	0933
0,665	0936	0939	0942	0945	0948	0951	0954	0957	0960	0963
0,666	0966	0969	0972	0975	0978	0981	0984	0987	0990	0993
0,667	0996	0999	1002	1005	1008	1011	1014	1017	1020	1023
0,668	1026	1029	1032	1035	1038	1041	1044	1047	1050	1053
0,669	1056	1059	1062	1065	1068	1071	1075	1078	1081	1084
0,670	1087	1090	1093	1096	1099	1102	1105	1108	1111	1114
0,671	1117	1120	1123	1126	1129	1132	1135	1138	1141	1144
0,672	1147	1150	1154	1157	1160	1163	1166	1169	1172	1175
0,673	1178	1181	1184	1187	1190	1193	1196	1199	1202	1206
0,674	1209	1212	1215	1218	1221	1224	1227	1230	1233	1236
0,675	1239	1242	1245	1249	1252	1255	1258	1261	1264	1267
0,676	1270	1273	1276	1279	1282	1286	1289	1292	1295	1298
0,677	1301	1304	1307	1310	1313	1317	1320	1323	1326	1329
0,678	1332	1335	1338	1341	1344	1348	1351	1354	1357	1360
0,679	1363	1366	1369	1372	1376	1379	1382	1385	1388	1391
0,680	1394	1397	1401	1404	1407	1410	1413	1416	1419	1423
0,681	1426	1429	1432	1435	1438	1441	1444	1448	1451	1454
0,682	1457	1460	1463	1466	1470	1473	1476	1479	1482	1485
0,683	1489	1492	1495	1498	1501	1504	1507	1511	1514	1517
0,684	1520	1523	1526	1530	1533	1536	1539	1542	1545	1549
0,685	1552	1555	1558	1561	1565	1568	1571	1574	1577	1580
0,686	1584	1587	1590	1593	1596	1600	1603	1606	1609	1612
0,687	1616	1619	1622	1625	1628	1632	1635	1638	1641	1644
0,688	1648	1651	1654	1657	1660	1664	1667	1670	1673	1676
0,689	1680	1683	1686	1689	1692	1696	1699	1702	1705	1709
0,690	1712	1715	1718	1722	1725	1728	1731	1734	1738	1741
0,691	1744	1747	1751	1754	1757	1760	1764	1767	1770	1773
0,692	1777	1780	1783	1786	1790	1793	1796	1799	1803	1806
0,693	1809	1812	1816	1819	1822	1825	1829	1832	1835	1838
0,694	1842	1845	1848	1852	1855	1858	1861	1865	1868	1871
0,695	1874	1878	1881	1884	1888	1891	1894	1897	1901	1904
0,696	1907	1911	1914	1917	1920	1924	1927	1930	1934	1937
0,697	1940	1944	1947	1950	1953	1957	1960	1963	1967	1970
0,698	1973	1977	1980	1983	1987	1990	1993	1996	2000	2003
0,699	2006	2010	2013	2016	2020	2023	2026	2030	2033	2036
0,700	2040	2043	2046	2050	2053	2056	2060	2063	2066	2070
0,701	2073	2076	2080	2083	2087	2090	2093	2097	2100	2103
0,702	2107	2110	2113	2117	2120	2123	2127	2130	2133	2137
0,703	2140	2144	2147	2150	2154	2157	2160	2164	2167	2171
0,704	2174	2177	2181	2184	2187	2191	2194	2198	2201	2204
0,705	2208	2211	2215	2218	2221	2225	2228	2232	2235	2238

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,706	1,2242	2245	2249	2252	2255	2259	2262	2266	2269	2272
0,707	2276	2279	2283	2286	2289	2293	2296	2300	2303	2307
0,708	2310	2313	2317	2320	2324	2327	2331	2334	2337	2341
0,709	2344	2348	2351	2355	2358	2362	2365	2368	2372	2375
0,710	2379	2382	2386	2389	2393	2396	2399	2403	2406	2410
0,711	2413	2417	2420	2424	2427	2431	2434	2438	2441	2444
0,712	2448	2451	2455	2458	2462	2465	2469	2472	2476	2479
0,713	2483	2486	2490	2493	2497	2500	2504	2507	2511	2514
0,714	2518	2521	2525	2528	2532	2535	2539	2542	2546	2549
0,715	2553	2556	2560	2563	2567	2570	2574	2577	2581	2584
0,716	2588	2591	2595	2598	2602	2605	2609	2612	2616	2620
0,717	2623	2627	2630	2634	2637	2641	2644	2648	2651	2655
0,718	2658	2662	2666	2669	2673	2676	2680	2683	2687	2690
0,719	2694	2698	2701	2705	2708	2712	2715	2719	2723	2726
0,720	2730	2733	2737	2740	2744	2748	2751	2755	2758	2762
0,721	2765	2769	2773	2776	2780	2783	2787	2791	2794	2798
0,722	2801	2805	2809	2812	2816	2819	2823	2827	2830	2834
0,723	2837	2841	2845	2848	2852	2855	2859	2863	2866	2870
0,724	2874	2877	2881	2884	2888	2892	2895	2899	2903	2906
0,725	2910	2913	2917	2921	2924	2928	2932	2935	2939	2943
0,726	2946	2950	2954	2957	2961	2965	2968	2972	2976	2979
0,727	2983	2986	2990	2994	2997	3001	3005	3009	3012	3016
0,728	3020	3023	3027	3031	3034	3038	3042	3045	3049	3053
0,729	3056	3060	3064	3067	3071	3075	3079	3082	3086	3090
0,730	3093	3097	3101	3104	3108	3112	3116	3119	3123	3127
0,731	3130	3134	3138	3142	3145	3149	3153	3156	3160	3164
0,732	3168	3171	3175	3179	3183	3186	3190	3194	3198	3201
0,733	3205	3209	3213	3216	3220	3224	3228	3231	3235	3239
0,734	3243	3246	3250	3254	3258	3261	3265	3269	3273	3276
0,735	3280	3284	3288	3292	3295	3299	3303	3307	3310	3314
0,736	3318	3322	3326	3329	3333	3337	3341	3345	3348	3352
0,737	3356	3360	3364	3367	3371	3375	3379	3383	3386	3390
0,738	3394	3398	3402	3406	3409	3413	3417	3421	3425	3429
0,739	3432	3436	3440	3444	3448	3452	3455	3459	3463	3467
0,740	3471	3475	3478	3482	3486	3490	3494	3498	3502	3505
0,741	3509	3513	3517	3521	3525	3529	3532	3536	3540	3544
0,742	3548	3552	3556	3560	3563	3567	3571	3575	3579	3583
0,743	3587	3591	3595	3598	3602	3606	3610	3614	3618	3622
0,744	3626	3630	3634	3638	3641	3645	3649	3653	3657	3661
0,745	3665	3669	3673	3677	3681	3685	3688	3692	3696	3700
0,746	3704	3708	3712	3716	3720	3724	3728	3732	3736	3740
0,747	3744	3748	3752	3756	3759	3763	3767	3771	3775	3779
0,748	3783	3787	3791	3795	3799	3803	3807	3811	3815	3819
0,749	3823	3827	3831	3835	3839	3843	3847	3851	3855	3859
0,750	3863	3867	3871	3875	3879	3883	3887	3891	3895	3899

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,751	1,3903	3907	3911	3915	3919	3923	3927	3931	3935	3939
0,752	3943	3947	3951	3955	3959	3963	3967	3972	3976	3980
0,753	3984	3988	3992	3996	4000	4004	4008	4012	4016	4020
0,754	4024	4028	4032	4036	4041	4045	4049	4053	4057	4061
0,755	4065	4069	4073	4077	4081	4085	4089	4094	4098	4102
0,756	4106	4110	4114	4118	4122	4126	4130	4135	4139	4143
0,757	4147	4151	4155	4159	4163	4168	4172	4176	4180	4184
0,758	4188	4192	4196	4201	4205	4209	4213	4217	4221	4225
0,759	4230	4234	4238	4242	4246	4250	4255	4259	4263	4267
0,760	4271	4275	4280	4284	4288	4292	4296	4300	4305	4309
0,761	4313	4317	4321	4325	4330	4334	4338	4342	4346	4351
0,762	4355	4359	4363	4367	4372	4376	4380	4384	4389	4393
0,763	4397	4401	4405	4410	4414	4418	4422	4427	4431	4435
0,764	4439	4443	4448	4452	4456	4460	4465	4469	4473	4477
0,765	4482	4486	4490	4494	4499	4503	4507	4512	4516	4520
0,766	4524	4529	4533	4537	4541	4546	4550	4554	4559	4563
0,767	4567	4571	4576	4580	4584	4589	4593	4597	4602	4606
0,768	4610	4614	4619	4623	4627	4632	4636	4640	4645	4649
0,769	4653	4658	4662	4666	4671	4675	4679	4684	4688	4692
0,770	4697	4701	4705	4710	4714	4719	4723	4727	4732	4736
0,771	4740	4745	4749	4753	4758	4762	4767	4771	4775	4780
0,772	4784	4788	4793	4797	4802	4806	4810	4815	4819	4824
0,773	4828	4832	4837	4841	4846	4850	4855	4859	4863	4868
0,774	4872	4877	4881	4885	4890	4894	4899	4903	4908	4912
0,775	4917	4921	4925	4930	4934	4939	4943	4948	4952	4957
0,776	4961	4966	4970	4974	4979	4983	4988	4992	4997	5001
0,777	5006	5010	5015	5019	5024	5028	5033	5037	5042	5046
0,778	5051	5055	5060	5064	5069	5073	5078	5082	5087	5091
0,779	5096	5100	5105	5110	5114	5119	5123	5128	5132	5137
0,780	5141	5146	5150	5155	5159	5164	5169	5173	5178	5182
0,781	5187	5191	5196	5201	5205	5210	5214	5219	5223	5228
0,782	5233	5237	5242	5246	5251	5256	5260	5265	5269	5274
0,783	5279	5283	5288	5292	5297	5302	5306	5311	5316	5320
0,784	5325	5329	5334	5339	5343	5348	5353	5357	5362	5367
0,785	5371	5376	5380	5385	5390	5394	5399	5404	5408	5413
0,786	5418	5422	5427	5432	5437	5441	5446	5451	5455	5460
0,787	5465	5469	5474	5479	5483	5488	5493	5498	5502	5507
0,788	5512	5516	5521	5526	5531	5535	5540	5545	5549	5554
0,789	5559	5564	5568	5573	5578	5583	5587	5592	5597	5602
0,790	5606	5611	5616	5621	5626	5630	5635	5640	5645	5649
0,791	5654	5659	5664	5669	5673	5678	5683	5688	5693	5697
0,792	5702	5707	5712	5717	5721	5726	5731	5736	5741	5746
0,793	5750	5755	5760	5765	5770	5775	5779	5784	5789	5794
0,794	5799	5804	5809	5813	5818	5823	5828	5833	5838	5843
0,795	5847	5852	5857	5862	5867	5872	5877	5882	5887	5891

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,796	1,5896	5901	5906	5911	5916	5921	5926	5931	5936	5941
0,797	5945	5950	5955	5960	5965	5970	5975	5980	5985	5990
0,798	5995	6000	6005	6010	6015	6020	6025	6030	6035	6040
0,799	6045	6049	6054	6059	6064	6069	6074	6079	6084	6089
0,800	6094	6099	6104	6109	6114	6119	6124	6129	6134	6139
0,801	6145	6150	6155	6160	6165	6170	6175	6180	6185	6190
0,802	6195	6200	6205	6210	6215	6220	6225	6230	6235	6240
0,803	6246	6251	6256	6261	6266	6271	6276	6281	6286	6291
0,804	6296	6302	6307	6312	6317	6322	6327	6332	6337	6342
0,805	6348	6353	6358	6363	6368	6373	6378	6384	6389	6394
0,806	6399	6404	6409	6414	6420	6425	6430	6435	6440	6445
0,807	6451	6456	6461	6466	6471	6477	6482	6487	6492	6497
0,808	6503	6508	6513	6518	6523	6529	6534	6539	6544	6550
0,809	6555	6560	6565	6571	6576	6581	6586	6592	6597	6602
0,810	6607	6613	6618	6623	6628	6634	6639	6644	6650	6655
0,811	6660	6665	6671	6676	6681	6687	6692	6697	6703	6708
0,812	6713	6718	6724	6729	6734	6740	6745	6750	6756	6761
0,813	6766	6772	6777	6783	6788	6793	6799	6804	6809	6815
0,814	6820	6825	6831	6836	6842	6847	6853	6858	6863	6869
0,815	6874	6879	6885	6890	6896	6901	6906	6912	6917	6923
0,816	6928	6934	6939	6945	6950	6955	6961	6966	6972	6977
0,817	6983	6988	6994	6999	7005	7010	7016	7021	7027	7032
0,818	7037	7043	7048	7054	7059	7065	7071	7076	7082	7087
0,819	7093	7098	7104	7109	7115	7120	7126	7131	7137	7142
0,820	7148	7154	7159	7165	7170	7176	7181	7187	7193	7198
0,821	7204	7209	7215	7220	7226	7232	7237	7243	7248	7254
0,822	7260	7265	7271	7277	7282	7288	7293	7299	7305	7310
0,823	7316	7322	7327	7333	7339	7344	7350	7356	7361	7367
0,824	7373	7378	7384	7390	7395	7401	7407	7413	7418	7424
0,825	7430	7435	7441	7447	7453	7458	7464	7470	7476	7481
0,826	7487	7493	7499	7504	7510	7516	7522	7527	7533	7539
0,827	7545	7550	7556	7562	7568	7574	7579	7585	7591	7597
0,828	7603	7608	7614	7620	7626	7632	7638	7643	7649	7655
0,829	7661	7667	7673	7678	7684	7690	7696	7702	7708	7714
0,830	7720	7725	7731	7737	7743	7749	7755	7761	7767	7773
0,831	7779	7784	7790	7796	7802	7808	7814	7820	7826	7832
0,832	7838	7844	7850	7856	7862	7868	7874	7880	7886	7892
0,833	7898	7904	7910	7916	7922	7928	7934	7940	7946	7952
0,834	7958	7964	7970	7976	7982	7988	7994	8000	8006	8012
0,835	8018	8024	8030	8036	8042	8048	8055	8061	8067	8073
0,836	8079	8085	8091	8097	8103	8109	8116	8122	8128	8134
0,837	8140	8146	8152	8158	8165	8171	8177	8183	8189	8195
0,838	8202	8208	8214	8220	8226	8233	8239	8245	8251	8257
0,839	8264	8270	8276	8282	8288	8295	8301	8307	8313	8320
0,840	8326	8332	8338	8345	8351	8357	8363	8370	8376	8382

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,841	1,8389	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8433	8439	8445
0,842	8452	8458	8464	8471	8477	8483	8490	8496	8502	8509
0,843	8515	8521	8528	8534	8541	8547	8553	8560	8566	8573
0,844	8579	8586	8592	8598	8605	8611	8618	8624	8630	8637
0,845	8643	8650	8656	8663	8669	8676	8682	8689	8695	8702
0,846	8708	8715	8721	8728	8734	8741	8747	8754	8760	8767
0,847	8773	8780	8786	8793	8799	8806	8812	8819	8826	8832
0,848	8839	8845	8852	8859	8865	8872	8878	8885	8892	8898
0,849	8905	8911	8918	8925	8931	8938	8945	8951	8958	8965
0,850	8971	8978	8985	8991	8998	9005	9011	9018	9025	9031
0,851	9038	9045	9052	9058	9065	9072	9078	9085	9092	9099
0,852	9105	9112	9119	9126	9132	9139	9146	9153	9160	9166
0,853	9173	9180	9187	9194	9200	9207	9214	9221	9228	9235
0,854	9241	9248	9255	9262	9269	9276	9283	9290	9296	9303
0,855	9310	9317	9324	9331	9338	9345	9352	9359	9366	9372
0,856	9379	9386	9393	9400	9407	9414	9421	9428	9435	9442
0,857	9449	9456	9463	9470	9477	9484	9491	9498	9505	9512
0,858	9519	9526	9533	9540	9547	9555	9562	9569	9576	9583
0,859	9590	9597	9604	9611	9618	9625	9633	9640	9647	9654
0,860	9661	9668	9675	9683	9690	9697	9704	9711	9718	9726
0,861	9733	9740	9747	9754	9762	9769	9776	9783	9791	9798
0,862	9805	9812	9820	9827	9834	9841	9849	9856	9863	9870
0,863	9878	9885	9892	9900	9907	9914	9922	9929	9936	9944
0,864	9951	9958	9966	9973	9980	9988	9995			
0,864								2,0003	0010	0017
0,865	2,0025	0032	0040	0047	0054	0062	0069	0077	0084	0092
0,866	0099	0107	0114	0122	0129	0137	0144	0152	0159	0167
0,867	0174	0182	0189	0197	0204	0212	0219	0227	0234	0242
0,868	0250	0257	0265	0272	0279	0287	0295	0303	0310	0318
0,869	0326	0333	0341	0349	0356	0364	0371	0379	0387	0395
0,870	0402	0410	0418	0425	0433	0441	0448	0456	0464	0472
0,871	0479	0487	0495	0503	0510	0518	0526	0534	0542	0549
0,872	0557	0565	0573	0581	0589	0596	0604	0612	0620	0628
0,873	0636	0644	0651	0659	0667	0675	0683	0691	0699	0707
0,874	0715	0723	0731	0739	0747	0754	0762	0770	0778	0786
0,875	0794	0802	0810	0818	0826	0834	0843	0851	0859	0867
0,876	0875	0883	0891	0899	0907	0915	0923	0931	0939	0948
0,877	0956	0964	0972	0980	0988	0996	1005	1013	1021	1029
0,878	1037	1046	1054	1062	1070	1078	1087	1095	1103	1111
0,879	1120	1128	1136	1144	1153	1161	1169	1178	1186	1194
0,880	1203	1211	1219	1228	1236	1244	1253	1261	1270	1278

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,881	2,1286	1295	1303	1312	1320	1328	1337	1345	1354	1362
0,882	1371	1379	1388	1396	1405	1413	1422	1430	1439	1447
0,883	1456	1464	1473	1481	1490	1499	1507	1516	1524	1533
0,884	1542	1550	1559	1568	1576	1585	1594	1602	1611	1620
0,885	1628	1637	1646	1654	1663	1672	1681	1689	1698	1707
0,886	1716	1724	1733	1742	1751	1760	1768	1777	1786	1795
0,887	1804	1813	1821	1830	1839	1848	1857	1866	1875	1884
0,888	1893	1901	1910	1919	1928	1937	1946	1955	1964	1973
0,889	1982	1991	2000	2009	2018	2027	2036	2046	2055	2064
0,890	2073	2082	2091	2100	2109	2118	2127	2137	2146	2155
0,891	2164	2173	2182	2192	2201	2210	2219	2229	2238	2247
0,892	2256	2266	2275	2284	2293	2303	2312	2321	2331	2340
0,893	2349	2359	2368	2377	2387	2396	2405	2415	2424	2434
0,894	2443	2453	2462	2472	2481	2490	2500	2509	2519	2528
0,895	2538	2547	2557	2567	2576	2586	2595	2605	2614	2624
0,896	2634	2643	2653	2663	2672	2682	2692	2701	2711	2721
0,897	2730	2740	2750	2759	2769	2779	2789	2798	2808	2818
0,898	2828	2838	2847	2857	2867	2877	2887	2897	2907	2916
0,899	2926	2936	2946	2956	2966	2976	2986	2996	3006	3016
0,900	3026	3036	3046	3056	3066	3076	3086	3096	3106	3116
0,901	3126	3136	3147	3157	3167	3177	3187	3197	3207	3218
0,902	3228	3238	3248	3259	3269	3279	3289	3300	3310	3320
0,903	3330	3341	3351	3361	3372	3382	3392	3403	3413	3424
0,904	3434	3444	3455	3465	3476	3486	3497	3507	3518	3528
0,905	3539	3549	3560	3570	3581	3592	3602	3613	3623	3634
0,906	3645	3655	3666	3677	3687	3698	3709	3719	3730	3741
0,907	3752	3762	3773	3784	3795	3805	3816	3827	3838	3849
0,908	3860	3871	3881	3892	3903	3914	3925	3936	3947	3958
0,909	3969	3980	3991	4002	4013	4024	4035	4046	4057	4068
0,910	4079	4091	4102	4113	4124	4135	4146	4158	4169	4180
0,911	4191	4202	4214	4225	4236	4248	4259	4270	4281	4293
0,912	4304	4316	4327	4338	4350	4361	4373	4384	4396	4407
0,913	4418	4430	4441	4453	4465	4476	4488	4499	4511	4522
0,914	4534	4546	4557	4569	4581	4592	4604	4616	4628	4639
0,915	4651	4663	4675	4686	4698	4710	4722	4734	4746	4757
0,916	4769	4781	4793	4805	4817	4829	4841	4853	4865	4877
0,917	4889	4901	4913	4925	4937	4950	4962	4974	4986	4998
0,918	5010	5023	5035	5047	5059	5072	5084	5096	5108	5121
0,919	5133	5145	5158	5170	5183	5195	5207	5220	5232	5245
0,920	5257	5270	5282	5295	5307	5320	5333	5345	5358	5370
0,921	5383	5396	5408	5421	5434	5447	5459	5472	5485	5498
0,922	5510	5523	5536	5549	5562	5575	5588	5601	5614	5627
0,923	5639	5652	5666	5679	5692	5705	5718	5731	5744	5757
0,924	5770	5783	5797	5810	5823	5836	5849	5863	5876	5889
0,925	5903	5916	5929	5943	5956	5970	5983	5996	6010	6023

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,926	2,6037	6050	6064	6078	6091	6105	6118	6132	6146	6159
0,927	6173	6187	6200	6214	6228	6242	6255	6269	6283	6297
0,928	6311	6325	6339	6353	6367	6381	6395	6409	6423	6437
0,929	6451	6465	6479	6493	6507	6521	6536	6550	6564	6578
0,930	6593	6607	6621	6636	6650	6664	6679	6693	6708	6722
0,931	6736	6751	6766	6780	6795	6809	6824	6838	6853	6868
0,932	6882	6897	6912	6927	6941	6956	6971	6986	7001	7016
0,933	7031	7046	7061	7076	7091	7106	7121	7136	7151	7166
0,934	7181	7196	7211	7227	7242	7257	7272	7288	7303	7318
0,935	7334	7349	7364	7380	7395	7411	7426	7442	7458	7473
0,936	7489	7504	7520	7536	7551	7567	7583	7599	7615	7630
0,937	7646	7662	7678	7694	7710	7726	7742	7758	7774	7790
0,938	7806	7822	7839	7855	7871	7887	7903	7920	7936	7952
0,939	7969	7985	8002	8018	8035	8051	8068	8084	8101	8117
0,940	8134	8151	8167	8184	8201	8218	8235	8251	8268	8285
0,941	8302	8319	8336	8353	8370	8387	8404	8422	8439	8456
0,942	8473	8490	8508	8525	8542	8560	8577	8595	8612	8630
0,943	8647	8665	8682	8700	8717	8735	8753	8771	8788	8806
0,944	8824	8842	8860	8878	8896	8914	8932	8950	8968	8986
0,945	9004	9022	9041	9059	9077	9096	9114	9132	9151	9169
0,946	9188	9206	9225	9243	9262	9281	9299	9318	9337	9356
0,947	9375	9394	9412	9431	9450	9469	9488	9508	9527	9546
0,948	9565	9584	9604	9623	9642	9662	9681	9701	9720	9740
0,949	9759	9779	9799	9818	9838	9858	9878	9898	9917	9937
0,950	9957	9977	9997							
0,950				3,0018	0038	0058	0078	0098	0119	0139
0,951	3,0159	0180	0200	0221	0241	0262	0283	0303	0324	0345
0,952	0366	0386	0407	0428	0449	0470	0491	0512	0534	0555
0,953	0576	0597	0619	0640	0662	0683	0705	0726	0748	0769
0,954	0791	0813	0835	0857	0878	0900	0922	0944	0967	0989
0,955	1011	1033	1055	1078	1100	1123	1145	1168	1190	1213
0,956	1236	1258	1281	1304	1327	1350	1373	1396	1419	1442
0,957	1466	1489	1512	1536	1559	1583	1606	1630	1653	1677
0,958	1701	1725	1749	1773	1797	1821	1845	1869	1893	1917
0,959	1942	1966	1991	2015	2040	2065	2089	2114	2139	2164
0,960	2189	2214	2239	2264	2289	2315	2340	2365	2391	2416
0,961	2442	2468	2493	2519	2545	2571	2597	2623	2649	2675
0,962	2702	2728	2754	2781	2808	2834	2861	2888	2914	2941
0,963	2968	2995	3023	3050	3077	3104	3132	3159	3187	3215
0,964	3242	3270	3298	3326	3354	3382	3410	3439	3467	3496
0,965	3524	3553	3581	3610	3639	3668	3697	3726	3755	3785

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,966	3,3814	3843	3873	3903	3932	3962	3992	4022	4052	4082
0,967	4112	4143	4173	4204	4234	4265	4296	4327	4358	4389
0,968	4420	4451	4483	4514	4546	4578	4609	4641	4673	4705
0,969	4738	4770	4802	4835	4868	4900	4933	4966	4999	5032
0,970	5066	5099	5132	5166	5200	5234	5268	5302	5336	5370
0,971	5405	5439	5474	5509	5543	5579	5614	5649	5684	5720
0,972	5756	5791	5827	5863	5899	5936	5972	6009	6045	6082
0,973	6119	6156	6194	6231	6268	6306	6344	6382	6420	6458
0,974	6497	6535	6574	6613	6652	6691	6730	6770	6809	6849
0,975	6889	6929	6969	7010	7050	7091	7132	7173	7214	7255
0,976	7297	7339	7381	7423	7465	7508	7550	7593	7636	7679
0,977	7723	7766	7810	7854	7898	7942	7987	8032	8077	8122
0,978	8167	8213	8258	8304	8351	8397	8444	8490	8538	8585
0,979	8632	8680	8728	8776	8825	8873	8922	8971	9021	9070
0,980	9120	9170	9221	9271	9322	9373	9425	9477	9528	9581
0,981	9633	9686	9739	9792	9846	9900	9954			
0,981								4,0009	0063	0118
0,982	4,0174	0230	0286	0342	0399	0456	0513	0570	0628	0687
0,983	0745	0804	0864	0923	0984	1044	1105	1166	1227	1289
0,984	1352	1414	1477	1541	1605	1669	1734	1799	1865	1931
0,985	1997	2064	2131	2199	2267	2336	2405	2475	2545	2616
0,986	2687	2759	2831	2904	2977	3051	3125	3200	3275	3351
0,987	3428	3505	3583	3662	3741	3820	3901	3982	4063	4145
0,988	4228	4312	4397	4482	4568	4654	4741	4830	4918	5008
0,989	5099	5190	5282	5375	5469	5564	5659	5756	5854	5952
0,990	6052	6152	6254	6356	6460	6565	6670	6777	6886	6995
0,991	7105	7217	7330	7444	7560	7677	7795	7915	8036	8159
0,992	8283	8409	8536	8665	8796	8929	9063	9199	9337	9477
0,993	9618	9762	9908							
0,993				5,0056	0207	0360	0515	0672	0832	0995
0,994	5,1160	1328	1499	1673	1850	2030	2214	2400	2591	2785
0,995	2983	3185	3391	3602	3817	4037	4262	4491	4727	4968
0,996	5215	5468	5728	5994	6268	6550	6840	7138	7446	7764
0,997	8091	8430	8781	9145	9522	9915				
0,997							6,0323	0748	1193	1658
0,998	6,2146	2659	3200	3771	4378	5023	5713	6454	7254	8124
0,999	9078									
0,999		7,0131	1309	2644	4186	6009	8240			
0,999								8,1117	5172	
0,999										9,2103

ТАБЛИЦА X

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $W(r, h)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_k} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dxdy$

r \ h	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0,1	0050	0050	0049	0048	0046	0044	0042	0039	0036	0033
0,2	0198	0197	0194	0189	0183	0175	0166	0155	0144	0133
0,3	0440	0438	0432	0421	0407	0389	0369	0346	0322	0296
0,4	0769	0765	0754	0736	0712	0682	0647	0608	0565	0521
0,5	1175	1170	1153	1126	1090	1045	0992	0934	0870	0803
0,6	1647	1640	1618	1581	1531	1470	1398	1317	1230	1138
0,7	2173	2163	2135	2088	2025	1946	1854	1750	1638	1519
0,8	2739	2727	2692	2636	2559	2463	2350	2224	2087	1941
0,9	3330	3317	3277	3211	3121	3009	2877	2729	2568	2396
1,0	3935	3920	3875	3801	3699	3573	3424	3256	3072	2876
1,1	4539	4523	4474	4393	4282	4144	3981	3795	3592	3375
1,2	5132	5115	5063	4977	4859	4712	4537	4338	4119	3884
1,3	5704	5686	5632	5543	5421	5267	5084	4876	4645	4396
1,4	6247	6229	6174	6083	5959	5802	5615	5400	5162	4904
1,5	6753	6735	6681	6591	6466	6309	6122	5906	5665	5401
1,6	7220	7202	7149	7061	6939	6785	6600	6386	6146	5883
1,7	7643	7626	7575	7490	7373	7224	7045	6837	6602	6343
1,8	8021	8005	7957	7877	7767	7625	7454	7255	7029	6778
1,9	8355	8340	8296	8222	8119	7987	7826	7638	7424	7184
2,0	8647	8633	8593	8525	8430	8309	8160	7986	7785	7559
2,1	8898	8885	8849	8788	8702	8592	8457	8297	8112	7902
2,2	9111	9100	9068	9014	8937	8839	8717	8572	8404	8212
2,3	9290	9281	9252	9205	9138	9051	8943	8814	8663	8489
2,4	9439	9431	9406	9365	9307	9231	9137	9023	8889	8734
2,5	9561	9554	9533	9498	9448	9383	9302	9203	9085	8949
2,6	9660	9654	9636	9607	9565	9510	9440	9355	9254	9134
2,7	9739	9734	9720	9695	9660	9614	9555	9483	9396	9294
2,8	9802	9798	9786	9766	9737	9699	9650	9589	9516	9429
2,9	9851	9848	9838	9822	9798	9767	9727	9677	9616	9542
3,0	9889	9886	9879	9866	9847	9822	9789	9748	9697	9636
3,1	9918	9916	9910	9900	9885	9865	9838	9805	9764	9714
3,2	9940	9939	9934	9926	9914	9898	9877	9851	9818	9777
3,3	9957	9956	9952	9946	9937	9924	9908	9887	9860	9827
3,4	9969	9968	9965	9961	9954	9944	9931	9915	9894	9868
3,5	9978	9977	9975	9972	9967	9959	9949	9937	9920	9900

r \ h	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,6	0,9985	9984	9983	9980	9976	9970	9963	9953	9941	9925
3,7	9989	9989	9988	9986	9983	9979	9973	9966	9956	9944
3,8	9993	9992	9991	9990	9988	9985	9981	9975	9968	9959
3,9	9995	9995	9994	9993	9992	9989	9986	9982	9977	9970
4,0	9997	9997	9996	9995	9994	9993	9990	9987	9983	9978
4,1	9998	9998	9997	9997	9996	9995	9993	9991	9988	9984
4,2	9999	9998	9998	9998	9997	9997	9995	9994	9992	9989
4,3	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9997	9996	9994	9992
4,4	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9997	9996	9995
4,5	1,0000	1,0000	1,0000	9999	9999	9999	9999	9998	9997	9996
4,6				1,0000	9999	9999	9999	9999	9998	9997
4,7					1,0000	1,0000	9999	9999	9999	9998
4,8							1,0000	9999	9999	9999
4,9								1,0000	9999	9999
5,0									1,0000	9999
5,1										1,0000

r \ h	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
0	0,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0,1	0030	0027	0024	0021	0019	0016	0014	0012	0010	0008
0,2	0121	0109	0097	0086	0075	0065	0056	0047	0040	0033
0,3	0270	0244	0218	0193	0169	0146	0126	0107	0090	0075
0,4	0476	0430	0385	0341	0300	0261	0225	0192	0162	0136
0,5	0735	0666	0598	0531	0468	0408	0353	0302	0256	0215
0,6	1043	0948	0853	0761	0673	0589	0511	0439	0374	0316
0,7	1397	1273	1150	1029	0913	0803	0700	0604	0517	0439
0,8	1790	1637	1484	1334	1188	1050	0919	0798	0687	0586
0,9	2217	2035	1852	1672	1496	1328	1169	1021	0883	0758
1,0	2671	2461	2250	2040	1836	1638	1450	1272	1108	0956
1,1	3146	2911	2673	2436	2203	1976	1759	1553	1361	1183
1,2	3635	3378	3117	2855	2595	2341	2096	1863	1642	1436
1,3	4132	3857	3575	3291	3008	2730	2459	2198	1951	1718
1,4	4628	4340	4043	3741	3439	3138	2844	2559	2286	2027
1,5	5120	4823	4515	4200	3881	3563	3249	2942	2645	2361
1,6	5599	5299	4985	4661	4331	3999	3668	3343	3025	2719
1,7	6062	5763	5447	5120	4783	4442	4099	3759	3424	3098
1,8	6504	6210	5898	5571	5233	4887	4537	4185	3837	3494
1,9	6921	6636	6332	6010	5675	5329	4975	4618	4260	3905
2,0	7310	7038	6745	6433	6105	5763	5411	5052	4689	4325

r \ h	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
2,1	0,7669	7412	7134	6835	6518	6185	5839	5482	5118	4751
2,2	7997	7758	7497	7214	6912	6591	6255	5905	5544	5177
2,3	8293	8074	7832	7568	7282	6977	6654	6315	5962	5599
2,4	8557	8358	8137	7893	7627	7340	7034	6709	6368	6013
2,5	8791	8613	8413	8190	7945	7679	7391	7083	6757	6415
2,6	8996	8838	8659	8458	8236	7990	7723	7435	7127	6800
2,7	9174	9035	8877	8698	8497	8275	8030	7763	7474	7166
2,8	9326	9206	9067	8910	8731	8531	8309	8064	7797	7509
2,9	9455	9352	9232	9095	8938	8760	8560	8339	8095	7828
3,0	9563	9476	9374	9255	9118	8962	8785	8586	8365	8122
3,1	9653	9580	9494	9392	9274	9138	8983	8807	8609	8389
3,2	9727	9666	9594	9509	9408	9291	9156	9002	8827	8630
3,3	9787	9737	9678	9606	9522	9422	9306	9172	9019	8844
3,4	9835	9795	9746	9687	9617	9533	9434	9319	9186	9034
3,5	9874	9842	9802	9754	9696	9626	9543	9445	9331	9199
3,6	9904	9879	9847	9808	9761	9703	9634	9552	9455	9342
3,7	9928	9908	9883	9852	9813	9766	9710	9641	9560	9464
3,8	9946	9931	9911	9887	9856	9818	9772	9715	9648	9567
3,9	9960	9949	9933	9914	9890	9859	9822	9776	9720	9653
4,0	9971	9962	9950	9935	9916	9892	9863	9826	9780	9725
4,1	9979	9972	9963	9952	9937	9918	9895	9865	9829	9784
4,2	9985	9980	9973	9965	9953	9939	9920	9897	9868	9832
4,3	9989	9986	9981	9974	9966	9954	9940	9922	9899	9870
4,4	9993	9990	9986	9981	9975	9967	9955	9941	9923	9901
4,5	9995	9993	9990	9987	9982	9976	9968	9956	9943	9925
4,6	9996	9995	9993	9991	9987	9982	9976	9968	9957	9944
4,7	9998	9997	9995	9993	9991	9987	9983	9977	9968	9958
4,8	9998	9998	9997	9995	9993	9991	9988	9983	9977	9969
4,9	9999	9999	9998	9997	9995	9994	9991	9988	9983	9977
5,0	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9984
5,1	1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9991	9988
5,2		1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992
5,3			1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994
5,4				1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996
5,5					1,0000	9999	9999	9999	9998	9997
5,6						1,0000	9999	9999	9999	9998
5,7							1,0000	9999	9999	9999
5,8								1,0000	9999	9999
5,9									1,0000	9999
6,0										1,0000

r \ h	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
0	0,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0,1	0007	0006	0004	0004	0003	0002	0002	0001	0001	0001
0,2	0027	0022	0018	0014	0011	0009	0007	0005	0004	0003
0,3	0062	0051	0041	0033	0026	0021	0016	0012	0010	0007
0,4	0112	0092	0075	0060	0048	0038	0030	0023	0018	0013
0,5	0179	0148	0121	0098	0078	0062	0049	0038	0029	0022
0,6	0264	0219	0180	0146	0118	0094	0074	0058	0045	0035
0,7	0369	0307	0254	0208	0168	0135	0108	0085	0066	0051
0,8	0495	0415	0345	0284	0232	0187	0150	0119	0094	0073
0,9	0645	0544	0455	0377	0310	0252	0204	0163	0129	0102
1,0	0819	0695	0585	0489	0404	0332	0270	0218	0174	0138
1,1	1019	0871	0739	0621	0518	0428	0351	0285	0230	0184
1,2	1247	1073	0917	0776	0652	0543	0449	0368	0299	0241
1,3	1501	1302	1120	0956	0809	0679	0566	0467	0383	0311
1,4	1784	1558	1350	1161	0990	0838	0703	0586	0483	0396
1,5	2092	1840	1607	1392	1197	1021	0863	0725	0603	0498
1,6	2426	2150	1890	1650	1429	1228	1048	0886	0744	0619
1,7	2784	2484	2200	1935	1688	1463	1257	1072	0907	0761
1,8	3161	2840	2534	2245	1974	1723	1492	1283	1094	0926
1,9	3556	3217	2891	2579	2285	2010	1754	1520	1306	1114
2,0	3965	3611	3267	2936	2620	2321	2042	1782	1544	1328
2,1	4383	4018	3660	3312	2977	2657	2354	2071	1808	1567
2,2	4806	4434	4066	3705	3353	3014	2690	2384	2098	1832
2,3	5229	4855	4481	4109	3745	3390	3048	2721	2412	2123
2,4	5648	5276	4899	4523	4149	3781	3423	3079	2749	2437
2,5	6059	5692	5318	4940	4561	4184	3814	3454	3107	2775
2,6	6457	6100	5732	5356	4976	4595	4217	3845	3483	3133
2,7	6839	6495	6137	5768	5391	5010	4627	4247	3874	3509
2,8	7201	6873	6529	6171	5801	5423	5041	4657	4275	3900
2,9	7540	7232	6905	6561	6202	5831	5453	5069	4684	4301
3,0	7856	7569	7261	6934	6589	6230	5859	5480	5095	4709
3,1	8147	7882	7595	7287	6960	6616	6256	5885	5505	5120
3,2	8411	8169	7905	7618	7311	6984	6640	6280	5909	5528
3,3	8649	8430	8190	7926	7640	7333	7006	6662	6303	5931
3,4	8861	8666	8448	8208	7945	7660	7354	7027	6683	6324
3,5	9047	8875	8681	8465	8225	7963	7678	7373	7047	6703
3,6	9210	9060	8889	8695	8480	8241	7980	7696	7390	7065
3,7	9351	9221	9071	8901	8708	8495	8256	7995	7711	7407
3,8	9472	9360	9230	9082	8912	8720	8507	8269	8009	7726
3,9	9573	9479	9368	9239	9091	8922	8732	8518	8282	8023
4,0	9659	9579	9486	9375	9247	9100	8932	8742	8530	8294

r \ h	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
4,1	0,9729	9664	9585	9492	9382	9255	9108	8941	8752	8540
4,2	9787	9733	9668	9590	9497	9388	9262	9116	8949	8761
4,3	9834	9790	9737	9672	9594	9502	9394	9268	9123	8957
4,4	9872	9837	9793	9740	9676	9599	9507	9400	9274	9130
4,5	9902	9874	9839	9796	9743	9679	9602	9511	9405	9280
4,6	9926	9904	9876	9841	9798	9746	9682	9606	9516	9409
4,7	9944	9927	9905	9877	9843	9800	9748	9685	9610	9520
4,8	9959	9945	9928	9906	9879	9845	9802	9751	9688	9613
4,9	9970	9960	9946	9929	9907	9880	9846	9804	9753	9691
5,0	9978	9970	9960	9947	9930	9909	9882	9848	9806	9755
5,1	9984	9978	9970	9960	9947	9931	9910	9883	9849	9808
5,2	9989	9984	9978	9971	9961	9948	9932	9910	9884	9851
5,3	9992	9989	9984	9979	9971	9961	9949	9932	9911	9885
5,4	9994	9992	9989	9985	9979	9972	9962	9949	9933	9912
5,5	9996	9994	9992	9989	9985	9979	9972	9962	9950	9934
5,6	9997	9996	9994	9992	9989	9985	9980	9972	9963	9950
5,7	9998	9997	9996	9995	9992	9989	9985	9980	9973	9963
5,8	9999	9998	9997	9996	9995	9992	9989	9985	9980	9973
5,9	9999	9999	9998	9997	9996	9995	9992	9990	9986	9980
6,0	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9995	9993	9990	9986
6,1	1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9995	9993	9990
6,2		1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9995	9993
6,3			1,0000	9999	9999	9999	9998	9998	9996	9995
6,4				1,0000	9999	9999	9999	9998	9998	9996
6,5					1,0000	9999	9999	9999	9998	9998
6,6						1,0000	9999	9999	9999	9998
6,7							1,0000	9999	9999	9999
6,8								1,0000	9999	9999
6,9									1,0000	1,0000

r \ h	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
0	0,0000									
0,1	0001	0000	0000	0000	0000					
0,2	0002	0002	0001	0001	0001	0000	0000	0000		
0,3	0005	0004	0003	0002	0002	0001	0001	0001	0000	0000
0,4	0010	0008	0006	0004	0003	0002	0002	0001	0001	0001
0,5	0017	0013	0009	0007	0005	0004	0003	0002	0001	0001
0,6	0027	0020	0015	0011	0008	0006	0004	0003	0002	0002
0,7	0039	0030	0023	0017	0012	0009	0007	0005	0003	0002
0,8	0057	0043	0033	0025	0018	0014	0010	0007	0005	0004
0,9	0079	0061	0047	0035	0027	0020	0015	0011	0008	0006
1,0	0108	0084	0065	0050	0038	0028	0021	0016	0011	0008

h / r	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
1,1	0,0145	0114	0089	0069	0052	0040	0030	0022	0016	0012
1,2	0192	0152	0119	0093	0072	0055	0041	0031	0023	0017
1,3	0250	0200	0158	0124	0096	0074	0057	0043	0032	0024
1,4	0321	0259	0207	0163	0128	0100	0077	0059	0044	0033
1,5	0408	0331	0267	0213	0168	0132	0103	0079	0061	0046
1,6	0511	0419	0340	0274	0218	0173	0136	0105	0081	0062
1,7	0634	0523	0428	0348	0280	0224	0177	0139	0108	0083
1,8	0777	0647	0534	0437	0355	0286	0228	0181	0142	0110
1,9	0943	0792	0659	0544	0446	0362	0292	0233	0185	0145
2,0	1133	0959	0805	0670	0554	0454	0368	0297	0237	0188
2,1	1348	1150	0973	0817	0681	0562	0461	0374	0302	0242
2,2	1588	1366	1166	0986	0829	0690	0570	0467	0380	0306
2,3	1854	1607	1383	1180	0999	0840	0699	0578	0474	0385
2,4	2145	1874	1625	1398	1194	1011	0850	0708	0585	0479
2,5	2461	2166	1893	1642	1413	1206	1022	0858	0715	0591
2,6	2799	2483	2186	1911	1658	1426	1218	1032	0867	0723
2,7	3158	2822	2504	2205	1928	1672	1439	1229	1041	0875
2,8	3534	3181	2843	2522	2221	1942	1685	1451	1239	1050
2,9	3924	3557	3202	2863	2539	2237	1956	1698	1462	1250
3,0	4325	3947	3578	3222	2880	2556	2252	1970	1710	1474
3,1	4733	4348	3968	3598	3240	2897	2572	2266	1983	1722
3,2	5142	4754	4368	3988	3616	3257	2913	2587	2280	1996
3,3	5550	5163	4775	4388	4006	3634	3274	2929	2601	2293
3,4	5952	5571	5184	4794	4406	4024	3650	3289	2943	2614
3,5	6343	5971	5590	5202	4812	4424	4041	3666	3304	2956
3 6	6721	6361	5989	5607	5220	4829	4440	4057	3681	3318
3,7	7081	6737	6379	6007	5624	5237	4845	4456	4071	3695
3,8	7422	7098	6754	6395	6023	5640	5252	4860	4470	4085
3,9	7740	7436	7112	6769	6410	6038	5655	5266	4875	4484
4,0	8035	7754	7450	7126	6783	6424	6052	5669	5280	4888
4,1	8305	8047	7765	7462	7139	6796	6437	6065	5683	5293
4,2	8550	8315	8058	7777	7474	7151	6809	6450	6078	5695
4,3	8769	8559	8325	8068	7788	7485	7162	6820	6462	6090
4,4	8964	8777	8567	8334	8078	7798	7496	7173	6832	6474
4,5	9136	8971	8785	8575	8343	8087	7808	7506	7184	6842
4,6	9285	9142	8978	8792	8583	8351	8095	7817	7516	7194
4,7	9414	9290	9147	8984	8798	8590	8359	8104	7825	7525
4,8	9523	9418	9295	9152	8990	8805	8597	8366	8111	7834
4,9	9616	9527	9422	9299	9157	8995	8811	8603	8373	8119
5,0	9693	9619	9530	9426	9303	9162	9000	8816	8610	8380
5,1	9757	9696	9621	9533	9429	9307	9166	9005	8822	8615
5,2	9809	9759	9698	9624	9536	9432	9311	9171	9010	8827
5,3	9852	9811	9761	9700	9626	9539	9435	9315	9175	9014
5,4	9886	9853	9812	9762	9702	9629	9541	9438	9318	9178
5,5	9913	9887	9854	9814	9764	9704	9631	9544	9441	9321

h / r	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
5,6	0,9934	9914	9888	9855	9815	9765	9705	9633	9546	9444
5,7	9951	9935	9914	9888	9856	9816	9767	9707	9635	9549
5,8	9963	9951	9935	9915	9889	9857	9817	9768	9709	9637
5,9	9973	9964	9951	9936	9916	9890	9858	9818	9770	9710
6,0	9980	9973	9964	9952	9936	9916	9891	9859	9819	9771
6,1	9986	9981	9973	9964	9952	9937	9917	9891	9860	9820
6,2	9990	9986	9981	9974	9964	9952	9937	9917	9892	9860
6,3	9993	9990	9986	9981	9974	9965	9953	9937	9918	9893
6,4	9995	9993	9990	9986	9981	9974	9965	9953	9938	9918
6,5	9996	9995	9993	9990	9986	9981	9974	9965	9953	9938
6,6	9998	9997	9995	9993	9990	9986	9981	9974	9965	9954
6,7	9998	9998	9997	9995	9993	9990	9986	9981	9975	9966
6,8	9999	9998	9998	9997	9995	9993	9990	9987	9981	9975
6,9	9999	9999	9998	9998	9997	9995	9993	9990	9987	9982
7,0	1,0000	9999	9999	9998	9998	9997	9995	9993	9990	9987
7,1		1,0000	9999	9999	9998	9998	9997	9995	9993	9991
7,2			1,0000	9999	9999	9998	9998	9997	9995	9993
7,3				1,0000	9999	9999	9998	9998	9997	9995
7,4					1,0000	9999	9999	9998	9998	9997
7,5						1,0000	9999	9999	9998	9998
7,6							1,0000	9999	9999	9998
7,7								1,0000	9999	9999
7,8									1,0000	9999
7,9										1,0000

h / r	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
0,4	0,0000									
0,5	0001	0000								
0,6	0001	0001	0000	0000						
0,7	0002	0001	0001	0001	0000					
0,8	0003	0002	0001	0001	0001	0000				
0,9	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000			
1,0	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000		
1,1	0009	0006	0004	0003	0002	0002	0001	0001	0000	
1,2	0012	0009	0006	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0000
1,3	0018	0013	0009	0007	0005	0003	0002	0002	0001	0001
1,4	0025	0018	0013	0010	0007	0005	0003	0002	0002	0001
1,5	0034	0026	0019	0014	0010	0007	0005	0004	0003	0002
1,6	0047	0035	0026	0019	0014	0011	0007	0005	0004	0003
1,7	0064	0048	0036	0027	0020	0015	0011	0008	0005	0004
1,8	0085	0065	0049	0037	0027	0021	0015	0011	0008	0005
1,9	0112	0087	0066	0050	0038	0028	0021	0015	0011	0008
2,0	0147	0115	0089	0067	0051	0038	0028	0021	0015	0011

r \ h	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
2,1	0,0191	0150	0116	0090	0069	0052	0039	0029	0022	0015
2,2	0245	0193	0152	0118	0092	0070	0053	0040	0030	0022
2,3	0310	0247	0196	0154	0120	0093	0071	0053	0041	0031
2,4	0390	0314	0251	0200	0156	0122	0095	0072	0055	0041
2,5	0485	0394	0318	0254	0202	0158	0123	0095	0073	0056
2,6	0598	0490	0399	0322	0257	0204	0161	0124	0096	0073
2,7	0731	0603	0496	0402	0325	0259	0206	0161	0126	0096
2,8	0883	0736	0609	0500	0406	0328	0262	0208	0163	0127
2,9	1058	0891	0742	0614	0504	0410	0331	0264	0209	0165
3,0	1259	1067	0898	0748	0619	0508	0414	0333	0267	0211
3,1	1483	1268	1074	0904	0754	0624	0512	0417	0336	0269
3,2	1732	1492	1276	1082	0911	0760	0629	0516	0420	0339
3,3	2007	1742	1502	1284	1089	0916	0765	0633	0519	0423
3,4	2305	2017	1752	1510	1291	1096	0922	0769	0637	0523
3,5	2626	2316	2028	1761	1518	1299	1102	0927	0774	0641
3,6	2969	2638	2327	2037	1770	1526	1305	1108	0932	0778
3,7	3331	2981	2649	2337	2047	1778	1533	1312	1113	0937
3,8	3708	3343	2993	2660	2347	2055	1786	1540	1318	1119
3,9	4098	3721	3355	3004	2670	2356	2064	1794	1547	1324
4,0	4497	4111	3733	3366	3014	2680	2365	2072	1801	1553
4,1	4901	4510	4123	3744	3377	3024	2689	2374	2079	1808
4,2	5306	4913	4522	4134	3755	3387	3034	2698	2382	2087
4,3	5707	5318	4925	4533	4145	3765	3397	3043	2706	2389
4,4	6102	5719	5329	4936	4544	4155	3775	3406	3051	2714
4,5	6484	6112	5730	5340	4947	4554	4165	3784	3415	3060
4,6	6853	6495	6123	5740	5350	4957	4564	4175	3793	3423
4,7	7203	6862	6505	6133	5750	5360	4967	4573	4184	3802
4,8	7533	7212	6872	6514	6142	5760	5370	4976	4582	4192
4,9	7842	7542	7221	6880	6523	6151	5769	5379	4985	4591
5,0	8126	7849	7550	7229	6889	6532	6160	5777	5387	4993
5,1	8386	8133	7856	7557	7237	6897	6540	6168	5786	5396
5,2	8621	8392	8139	7863	7564	7244	6904	6548	6176	5794
5,3	8832	8626	8398	8145	7869	7571	7251	6912	6555	6184
5,4	9018	8836	8631	8403	8151	7876	7578	7258	6919	6562
5,5	9182	9022	8841	8636	8408	8157	7882	7584	7265	6926
5,6	9324	9185	9026	8845	8641	8413	8162	7887	7590	7271
5,7	9447	9327	9189	9030	8849	8645	8418	8167	7893	7596
5,8	9551	9449	9330	9192	9033	8853	8649	8423	8172	7898
5,9	9638	9553	9451	9333	9195	9037	8856	8654	8427	8177
6,0	9711	9640	9555	9454	9335	9198	9040	8860	8657	8431
6,1	9772	9713	9642	9556	9456	9338	9200	9043	8863	8661
6,2	9821	9773	9714	9643	9558	9458	9340	9203	9046	8867
6,3	9861	9822	9774	9715	9645	9560	9460	9342	9206	9049
6,4	9893	9862	9823	9775	9717	9646	9562	9462	9344	9208
6,5	9919	9894	9863	9824	9776	9718	9647	9563	9463	9346

r \ h	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
6,6	0,9938	9919	9894	9863	9825	9777	9719	9649	9565	9465
6,7	9954	9939	9919	9895	9864	9825	9778	9720	9650	9566
6,8	9966	9954	9939	9920	9895	9864	9826	9779	9721	9651
6,9	9975	9966	9954	9939	9920	9896	9865	9827	9780	9722
7,0	9982	9975	9966	9955	9940	9920	9896	9866	9827	9780
7,1	9987	9982	9975	9966	9955	9940	9921	9897	9866	9828
7,2	9991	9987	9982	9975	9967	9955	9940	9921	9897	9867
7,3	9993	9991	9987	9982	9975	9967	9955	9940	9921	9897
7,4	9995	9993	9991	9987	9982	9976	9967	9955	9941	9922
7,5	9997	9995	9993	9991	9987	9982	9976	9967	9956	9941
7,6	9998	9997	9995	9993	9991	9987	9982	9976	9967	9956
7,7	9998	9998	9997	9995	9993	9991	9987	9982	9976	9967
7,8	9999	9998	9998	9997	9995	9994	9991	9987	9982	9976
7,9	9999	9999	9998	9998	9997	9995	9994	9991	9987	9983
8,0	1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9995	9994	9991	9987
8,1		1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9995	9994	9991
8,2			1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994
8,3				1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996
8,4					1,0000	9999	9999	9999	9998	9997
8,5						1,0000	9999	9999	9999	9998
8,6							1,0000	9999	9999	9999
8,7								1,0000	9999	9999
8,8									1,0000	9999
8,9										1,0000

r \ h	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
1,3	0,0000									
1,4	0001	0000								
1,5	0001	0001	0000							
1,6	0002	0001	0001	0000	0000					
1,7	0003	0002	0001	0001	0001	0000				
1,8	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000			
1,9	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000		
2,0	0008	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000	0000
2,1	0011	0008	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0001
2,2	0016	0011	0008	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001
2,3	0022	0016	0012	0008	0006	0004	0003	0002	0001	0001
2,4	0031	0022	0016	0012	0009	0006	0004	0003	0002	0002
2,5	0041	0031	0022	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002

h / r	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
2,6	0,0056	0042	0031	0023	0017	0012	0009	0006	0004	0003
2,7	0074	0056	0042	0032	0023	0017	0012	0009	0006	0004
2,8	0098	0075	0057	0043	0032	0024	0017	0012	0009	0006
2,9	0128	0099	0076	0058	0043	0032	0024	0017	0013	0009
3,0	0166	0130	0100	0076	0058	0044	0033	0025	0018	0013
3,1	0213	0168	0131	0101	0077	0059	0044	0033	0024	0018
3,2	0271	0215	0169	0132	0102	0078	0059	0044	0033	0024
3,3	0341	0273	0216	0170	0133	0102	0078	0059	0045	0033
3,4	0426	0343	0275	0218	0171	0134	0103	0079	0060	0045
3,5	0526	0428	0346	0277	0219	0173	0135	0104	0080	0060
3,6	0644	0529	0431	0348	0278	0221	0174	0135	0105	0080
3,7	0783	0648	0532	0433	0350	0280	0222	0175	0136	0105
3,8	0942	0787	0651	0535	0436	0352	0282	0223	0176	0137
3,9	1124	0946	0790	0654	0538	0438	0354	0283	0225	0177
4,0	1330	1129	0951	0794	0658	0540	0440	0355	0285	0226
4,1	1560	1335	1133	0955	0797	0661	0543	0442	0357	0286
4,2	1814	1565	1340	1138	0959	0801	0664	0545	0444	0359
4,3	2094	1821	1571	1345	1142	0962	0804	0666	0547	0446
4,4	2397	2100	1827	1576	1350	1147	0966	0807	0669	0550
4,5	2722	2404	2107	1833	1582	1354	1151	0969	0810	0671
4,6	3068	2729	2411	2113	1838	1587	1359	1154	0973	0813
4,7	3432	3075	2737	2417	2119	1844	1591	1363	1158	0976
4,8	3810	3439	3083	2743	2423	2125	1849	1596	1367	1162
4,9	4201	3818	3447	3090	2750	2429	2130	1854	1601	1371
5,0	4599	4209	3826	3454	3097	2756	2435	2136	1858	1605
5,1	5001	4607	4216	3833	3461	3103	2762	2441	2141	1863
5,2	5403	5009	4615	4224	3840	3468	3109	2768	2446	2146
5,3	5801	5411	5017	4622	4231	3847	3474	3115	2774	2451
5,4	6191	5809	5418	5024	4629	4238	3854	3480	3121	2779
5,5	6569	6198	5816	5425	5031	4636	4244	3860	3486	3127
5,6	6932	6576	6205	5823	5432	5038	4642	4251	3866	3492
5,7	7277	6938	6582	6212	5829	5439	5044	4649	4257	3872
5,8	7601	7283	6944	6589	6218	5836	5445	5050	4655	4263
5,9	7903	7607	7288	6950	6595	6224	5842	5451	5056	4661
6,0	8181	7908	7612	7294	6956	6600	6230	5848	5457	5062
6,1	8435	8186	7913	7617	7299	6961	6606	6235	5853	5463
6,2	8665	8439	8190	7917	7621	7304	6966	6611	6241	5859
6,3	8870	8668	8443	8194	7922	7626	7309	6971	6616	6246
6,4	9051	8873	8672	8447	8198	7926	7631	7313	6976	6621
6,5	9210	9054	8876	8675	8450	8202	7930	7635	7318	6981
6,6	9348	9213	9057	8879	8678	8454	8206	7934	7639	7322
6,7	9467	9350	9215	9059	8881	8681	8457	8209	7938	7643
6,8	9568	9468	9352	9217	9061	8884	8684	8460	8212	7941
6,9	9652	9569	9470	9354	9219	9064	8886	8687	8463	8216
7,0	9723	9653	9570	9471	9356	9221	9066	8889	8689	8466

r \ h	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
7,1	0,9781	9724	9654	9571	9473	9357	9223	9068	8891	8692
7,2	9829	9782	9725	9655	9573	9474	9359	9225	9070	8894
7,3	9867	9829	9783	9725	9656	9574	9476	9360	9226	9072
7,4	9898	9867	9830	9783	9726	9657	9575	9477	9362	9228
7,5	9922	9898	9868	9830	9784	9727	9658	9576	9478	9363
7,6	9941	9922	9898	9868	9831	9784	9728	9659	9577	9479
7,7	9956	9941	9923	9899	9869	9831	9785	9729	9660	9578
7,8	9967	9956	9942	9923	9899	9869	9832	9786	9729	9661
7,9	9976	9968	9956	9942	9923	9899	9870	9832	9786	9730
8,0	9983	9976	9968	9956	9942	9923	9900	9870	9833	9787
8,1	9987	9983	9976	9968	9957	9942	9924	9900	9870	9833
8,2	9991	9987	9983	9976	9968	9957	9942	9924	9900	9871
8,3	9994	9991	9988	9983	9976	9968	9957	9943	9924	9901
8,4	9996	9994	9991	9988	9983	9976	9968	9957	9943	9924
8,5	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9968	9957	9943
8,6	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9968	9957
8,7	9999	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9968
8,8	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977
8,9	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9983
9,0	1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9991	9988
9,1		1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9991
9,2			1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994
9,3				1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996
9,4					1,0000	9999	9999	9999	9998	9997
9,5						1,0000	9999	9999	9999	9998
9,6							1,0000	9999	9999	9999
9,7								1,0000	9999	9999
9,8									1,0000	9999
9,9										1,0000

r \ h	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
2,2	0,0000									
2,3	0001	0000								
2,4	0001	0001	0000							
2,5	0001	0001	0001	0000						
2,6	0002	0001	0001	0001	0000					
2,7	0003	0002	0001	0001	0001	0000				
2,8	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000			
2,9	0006	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0000		
3,0	0009	0007	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0000	

h / r	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
3,1	0,0013	0009	0007	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0000
3,2	0018	0013	0009	0007	0005	0003	0002	0002	0001	0001
3,3	0025	0018	0013	0009	0007	0005	0003	0002	0002	0001
3,4	0034	0025	0018	0013	0009	0007	0005	0003	0002	0002
3,5	0045	0034	0025	0018	0013	0010	0007	0005	0003	0002
3,6	0061	0046	0034	0025	0018	0013	0010	0007	0005	0003
3,7	0081	0061	0046	0034	0025	0019	0013	0010	0007	0005
3,8	0106	0081	0062	0046	0035	0026	0019	0014	0010	0007
3,9	0138	0107	0082	0062	0047	0035	0026	0019	0014	0010
4,0	0178	0139	0107	0082	0062	0047	0035	0026	0019	0014
4,1	0227	0179	0139	0108	0083	0063	0047	0035	0026	0019
4,2	0287	0228	0180	0140	0108	0083	0063	0047	0035	0026
4,3	0360	0289	0229	0180	0141	0109	0083	0063	0048	0036
4,4	0448	0362	0290	0230	0181	0141	0109	0084	0064	0048
4,5	0552	0450	0363	0291	0231	0182	0142	0110	0084	0064
4,6	0674	0554	0451	0365	0292	0232	0183	0143	0110	0085
4,7	0816	0676	0556	0453	0366	0293	0233	0183	0143	0111
4,8	0979	0819	0679	0558	0455	0368	0294	0234	0184	0144
4,9	1165	0982	0821	0681	0560	0456	0369	0296	0235	0185
5,0	1375	1168	0985	0824	0683	0562	0458	0370	0297	0236
5,1	1609	1379	1172	0988	0826	0685	0563	0459	0371	0298
5,2	1868	1613	1382	1175	0991	0828	0687	0565	0461	0372
5,3	2150	1872	1617	1385	1178	0993	0831	0689	0567	0462
5,4	2456	2155	1876	1620	1389	1181	0996	0833	0691	0568
5,5	2784	2461	2159	1880	1624	1392	1184	0998	0835	0693
5,6	3132	2790	2466	2164	1884	1628	1395	1186	1001	0837
5,7	3498	3138	2794	2471	2168	1888	1631	1398	1189	1003
5,8	3878	3503	3143	2799	2475	2172	1891	1634	1401	1191
5,9	4268	3883	3508	3148	2804	2479	2176	1895	1637	1404
6,0	4666	4274	3888	3513	3152	2808	2483	2179	1898	1640
6,1	5068	4672	4279	3894	3518	3157	2813	2487	2183	1902
6,2	5468	5073	4677	4284	3898	3523	3162	2817	2491	2187
6,3	5864	5474	5078	4682	4289	3903	3528	3166	2821	2495
6,4	6251	5869	5479	5083	4687	4294	3908	3532	3170	2825
6,5	6626	6256	5874	5484	5088	4692	4299	3913	3536	3174
6,6	6986	6631	6261	5879	5489	5093	4697	4304	3917	3541
6,7	7327	6990	6635	6266	5884	5493	5098	4701	4308	3921
6,8	7647	7331	6994	6640	6270	5888	5498	5102	4706	4312
6,9	7945	7651	7335	6998	6644	6274	5893	5502	5107	4710
7,0	8219	7948	7654	7338	7002	6648	6279	5897	5506	5111
7,1	8469	8222	7951	7658	7342	7006	6652	6283	5901	5511
7,2	8694	8472	8225	7955	7661	7346	7010	6656	6287	5905
7,3	8896	8697	8474	8228	7958	7664	7349	7013	6660	6290
7,4	9074	8898	8699	8477	8231	7961	7668	7353	7017	6663
7,5	9230	9076	8900	8701	8479	8233	7964	7671	7356	7020

r \ h	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
7,6	0,9365	9231	9078	8902	8704	8482	8236	7967	7674	7359
7,7	9481	9366	9233	9079	8904	8706	8484	8239	7969	7677
7,8	9579	9482	9367	9234	9081	8906	8708	8487	8241	7972
7,9	9662	9580	9483	9369	9236	9083	8908	8710	8489	8244
8,0	9731	9663	9581	9484	9370	9237	9084	8909	8712	8491
8,1	9787	9731	9663	9582	9485	9371	9239	9086	8911	8714
8,2	9834	9788	9732	9664	9583	9486	9372	9240	9087	8913
8,3	9871	9834	9788	9732	9665	9584	9487	9373	9241	9089
8,4	9901	9871	9834	9789	9733	9665	9584	9488	9375	9242
8,5	9925	9901	9872	9835	9789	9734	9666	9585	9489	9376
8,6	9943	9925	9901	9872	9835	9790	9734	9667	9586	9490
8,7	9957	9943	9925	9902	9872	9836	9790	9735	9667	9587
8,8	9968	9958	9943	9925	9902	9873	9836	9791	9735	9668
8,9	9977	9969	9958	9944	9925	9902	9873	9836	9791	9736
9,0	9983	9977	9969	9958	9944	9925	9902	9873	9837	9792
9,1	9988	9983	9977	9969	9958	9944	9926	9903	9873	9837
9,2	9991	9988	9983	9977	9969	9958	9944	9926	9903	9874
9,3	9994	9991	9988	9983	9977	9969	9958	9944	9926	9903
9,4	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9969	9958	9944	9926
9,5	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9969	9958	9944
9,6	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9969	9958
9,7	9999	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9969
9,8	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9984	9977
9,9	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992	9988	9984
10,0	1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992	9988

r \ h	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
3,2	0,0000									
3,3	0001	0000								
3,4	0001	0001	0000							
3,5	0002	0001	0001	0000						
3,6	0002	0002	0001	0001	0000					
3,7	0003	0002	0002	0001	0001	0000				
3,8	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0000	0000		
3,9	0007	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0001	0000	
4,0	0010	0007	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0001	0000
4,1	0014	0010	0007	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0001
4,2	0019	0014	0010	0007	0005	0004	0002	0002	0001	0001
4,3	0026	0019	0014	0010	0007	0005	0004	0002	0002	0001
4,4	0036	0026	0019	0014	0010	0007	0005	0004	0002	0002
4,5	0048	0036	0027	0019	0014	0010	0007	0005	0004	0002

r \ h	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
4,6	0,0064	0048	0036	0027	0020	0014	0010	0007	0005	0004
4,7	0085	0065	0049	0036	0027	0020	0014	0010	0007	0005
4,8	0111	0085	0065	0049	0036	0027	0020	0014	0010	0007
4,9	0144	0112	0086	0065	0049	0036	0027	0020	0014	0010
5,0	0186	0145	0112	0086	0065	0049	0037	0027	0020	0014
5,1	0236	0186	0145	0112	0086	0066	0049	0037	0027	0020
5,2	0299	0237	0187	0146	0113	0087	0066	0050	0037	0027
5,3	0374	0299	0238	0187	0146	0113	0087	0066	0050	0037
5,4	0463	0375	0300	0239	0188	0147	0114	0087	0066	0050
5,5	0570	0465	0376	0301	0239	0189	0147	0114	0087	0066
5,6	0694	0571	0466	0377	0302	0240	0189	0148	0114	0088
5,7	0839	0696	0573	0467	0378	0303	0241	0190	0148	0115
5,8	1005	0841	0698	0574	0468	0379	0304	0241	0190	0149
5,9	1194	1007	0843	0699	0575	0469	0380	0304	0242	0191
6,0	1407	1196	1009	0845	0701	0577	0471	0381	0305	0243
6,1	1643	1409	1199	1011	0846	0702	0578	0472	0382	0306
6,2	1905	1646	1412	1201	1013	0848	0704	0579	0473	0382
6,3	2190	1908	1649	1414	1203	1015	0850	0705	0580	0474
6,4	2499	2193	1911	1652	1417	1205	1017	0851	0707	0582
6,5	2829	2502	2197	1914	1655	1419	1207	1019	0853	0708
6,6	3178	2832	2505	2200	1917	1657	1421	1209	1021	0854
6,7	3545	3182	2836	2509	2203	1919	1660	1424	1211	1022
6,8	3925	3549	3186	2839	2512	2206	1922	1662	1426	1213
6,9	4316	3929	3553	3189	2843	2515	2209	1925	1664	1428
7,0	4714	4320	3933	3556	3193	2846	2518	2212	1927	1667
7,1	5115	4718	4324	3937	3560	3196	2849	2521	2214	1930
7,2	5515	5119	4722	4328	3941	3563	3200	2852	2524	2217
7,3	5909	5518	5123	4726	4332	3944	3567	3203	2855	2527
7,4	6294	5913	5522	5127	4730	4336	3948	3570	3206	2858
7,5	6667	6298	5916	5526	5130	4733	4339	3951	3573	3209
7,6	7024	6670	6301	5920	5530	5134	4737	4343	3955	3577
7,7	7362	7027	6674	6305	5923	5533	5137	4740	4346	3958
7,8	7680	7365	7030	6677	6308	5927	5536	5141	4744	4349
7,9	7975	7682	7368	7033	6680	6311	5930	5540	5144	4747
8,0	8246	7977	7685	7371	7036	6683	6315	5933	5543	5147
8,1	8493	8248	7980	7688	7374	7039	6686	6318	5936	5546
8,2	8716	8495	8251	7982	7690	7376	7042	6689	6321	5940
8,3	8915	8718	8497	8253	7984	7693	7379	7045	6692	6324
8,4	9090	8916	8719	8499	8255	7987	7695	7382	7047	6695
8,5	9244	9092	8918	8721	8501	8257	7989	7698	7384	7050
8,6	9377	9245	9093	8919	8723	8503	8259	7991	7700	7387
8,7	9491	9378	9246	9094	8921	8724	8505	8261	7993	7702
8,8	9587	9492	9379	9247	9095	8922	8726	8506	8263	7995
8,9	9669	9588	9492	9380	9248	9097	8923	8728	8508	8265
9,0	9736	9669	9589	9493	9381	9249	9098	8925	8729	8510

r \ h	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
9,1	0,9792	9737	9670	9589	9494	9381	9250	9099	8926	8731
9,2	9837	9792	9737	9670	9590	9495	9382	9251	9100	8927
9,3	9874	9838	9793	9738	9671	9591	9495	9383	9252	9101
9,4	9903	9874	9838	9793	9738	9671	9591	9496	9384	9253
9,5	9926	9903	9874	9838	9793	9739	9672	9592	9497	9385
9,6	9944	9926	9904	9875	9839	9794	9739	9673	9593	9498
9,7	9958	9945	9927	9904	9875	9839	9794	9739	9673	9593
9,8	9969	9959	9945	9927	9904	9875	9839	9794	9740	9673
9,9	9977	9969	9959	9945	9927	9904	9875	9839	9795	9740
10,0	9984	9978	9969	9959	9945	9927	9904	9876	9840	9795

r \ h	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
4,1	0,0000									
4,2	0001	0000								
4,3	0001	0001	0000							
4,4	0001	0001	0001	0000						
4,5	0002	0001	0001	0001	0000					
4,6	0002	0002	0001	0001	0001	0000				
4,7	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000			
4,8	0005	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000		
4,9	0007	0005	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000	
5,0	0010	0007	0005	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000
5,1	0015	0010	0007	0005	0004	0003	0002	0001	0001	0001
5,2	0020	0015	0010	0007	0005	0004	0003	0002	0001	0001
5,3	0027	0020	0015	0011	0008	0005	0004	0003	0002	0001
5,4	0037	0028	0020	0015	0011	0008	0005	0004	0003	0002
5,5	0050	0037	0028	0020	0015	0011	0008	0005	0004	0003
5,6	0067	0050	0038	0028	0020	0015	0011	0008	0005	0004
5,7	0088	0067	0050	0038	0028	0020	0015	0011	0008	0005
5,8	0115	0088	0067	0051	0038	0028	0020	0015	0011	0008
5,9	0149	0115	0089	0067	0051	0038	0028	0021	0015	0011
6,0	0191	0149	0116	0089	0067	0051	0038	0028	0021	0015
6,1	0243	0192	0150	0116	0089	0068	0051	0038	0028	0021
6,2	0307	0244	0192	0150	0116	0089	0068	0051	0038	0028
6,3	0383	0307	0244	0193	0151	0117	0089	0068	0051	0038
6,4	0475	0384	0308	0245	0193	0151	0117	0090	0068	0051
6,5	0583	0476	0385	0309	0246	0194	0151	0117	0090	0068
6,6	0709	0584	0477	0386	0309	0246	0194	0152	0117	0090
6,7	0856	0711	0585	0477	0386	0310	0247	0194	0152	0118
6,8	1024	0857	0712	0586	0478	0387	0311	0247	0195	0152
6,9	1215	1026	0859	0713	0587	0479	0388	0311	0248	0195
7,0	1430	1217	1027	0860	0714	0588	0480	0389	0312	0248

r \ h	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
7,1	0,1669	1432	1219	1029	0861	0715	0589	0481	0389	0312
7,2	1932	1671	1434	1220	1030	0863	0716	0590	0482	0390
7,3	2220	1935	1673	1436	1222	1032	0864	0718	0591	0482
7,4	2530	2222	1937	1675	1438	1224	1033	0865	0719	0592
7,5	2861	2532	2225	1939	1677	1439	1225	1035	0867	0720
7,6	3212	2864	2535	2227	1941	1679	1441	1227	1036	0868
7,7	3580	3215	2867	2538	2229	1944	1681	1443	1229	1037
7,8	3961	3583	3218	2870	2540	2232	1946	1683	1445	1230
7,9	4352	3964	3586	3221	2872	2543	2234	1948	1685	1446
8,0	4750	4355	3967	3589	3223	2875	2545	2236	1950	1687
8,1	5150	4753	4358	3970	3591	3226	2877	2547	2238	1952
8,2	5549	5154	4756	4361	3973	3594	3229	2880	2550	2240
8,3	5942	5552	5157	4759	4364	3976	3597	3231	2882	2552
8,4	6326	5945	5555	5159	4762	4367	3978	3599	3234	2884
8,5	6698	6329	5948	5558	5162	4765	4370	3981	3602	3236
8,6	7053	6700	6332	5951	5561	5165	4768	4373	3984	3604
8,7	7389	7055	6703	6335	5954	5564	5168	4770	4375	3986
8,8	7704	7391	7058	6705	6337	5956	5566	5170	4773	4378
8,9	7997	7707	7394	7060	6708	6340	5959	5569	5173	4776
9,0	8266	7999	7709	7396	7062	6710	6342	5961	5571	5176
9,1	8511	8268	8001	7711	7398	7064	6713	6345	5964	5574
9,2	8732	8513	8270	8003	7713	7400	7067	6715	6347	5966
9,3	8929	8733	8514	8272	8005	7715	7402	7069	6717	6349
9,4	9102	8930	8735	8516	8273	8007	7717	7404	7071	6719
9,5	9254	9104	8931	8736	8517	8275	8008	7718	7406	7073
9,6	9386	9255	9105	8932	8737	8519	8276	8010	7720	7408
9,7	9498	9387	9256	9106	8934	8739	8520	8278	8012	7722
9,8	9594	9499	9387	9257	9107	8935	8740	8522	8279	8013
9,9	9674	9594	9500	9388	9258	9108	8936	8741	8523	8281
10,0	9741	9674	9595	9500	9389	9259	9109	8937	8742	8524

r \ h	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
5,1	0,0000									
5,2	0001	0000								
5,3	0001	0001	0000							
5,4	0001	0001	0001	0000						
5,5	0002	0001	0001	0001	0000					
5,6	0003	0002	0001	0001	0001	0000				
5,7	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000			
5,8	0005	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000		
5,9	0008	0005	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000	
6,0	0011	0008	0005	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000

r \ h	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
6,1	0,0015	0011	0008	0005	0004	0003	0002	0001	0001	0001
6,2	0021	0015	0011	0008	0005	0004	0003	0002	0001	0001
6,3	0028	0021	0015	0011	0008	0005	0004	0003	0002	0001
6,4	0038	0028	0021	0015	0011	0008	0006	0004	0003	0002
6,5	0052	0039	0029	0021	0015	0011	0008	0006	0004	0003
6,6	0069	0052	0039	0029	0021	0015	0011	0008	0006	0004
6,7	0090	0069	0052	0039	0029	0021	0015	0011	0008	0006
6,8	0118	0091	0069	0052	0039	0029	0021	0015	0011	0008
6,9	0153	0118	0091	0069	0052	0039	0029	0021	0015	0011
7,0	0196	0153	0118	0091	0069	0052	0039	0029	0021	0015
7,1	0248	0196	0153	0119	0091	0069	0052	0039	0029	0021
7,2	0313	0249	0196	0153	0119	0091	0069	0052	0039	0029
7,3	0391	0313	0249	0197	0154	0119	0091	0070	0052	0039
7,4	0483	0391	0314	0250	0197	0154	0119	0092	0070	0053
7,5	0593	0484	0392	0314	0250	0197	0154	0120	0092	0070
7,6	0721	0594	0485	0392	0315	0251	0198	0155	0120	0092
7,7	0869	0722	0594	0485	0393	0315	0251	0198	0155	0120
7,8	1039	0870	0723	0595	0486	0394	0316	0251	0198	0155
7,9	1231	1040	0871	0724	0596	0487	0394	0316	0252	0199
8,0	1448	1233	1041	0872	0725	0597	0487	0395	0317	0252
8,1	1689	1450	1234	1043	0873	0725	0598	0488	0395	0317
8,2	1954	1690	1451	1236	1044	0874	0726	0598	0489	0396
8,3	2242	1955	1692	1453	1237	1045	0875	0727	0599	0489
8,4	2554	2244	1957	1694	1454	1238	1046	0876	0728	0600
8,5	2887	2556	2246	1959	1695	1455	1240	1047	0877	0729
8,6	3239	2889	2558	2248	1961	1697	1457	1241	1048	0878
8,7	3607	3241	2891	2560	2250	1962	1698	1458	1242	1049
8,8	3989	3609	3243	2893	2562	2252	1964	1700	1460	1243
8,9	4380	3991	3612	3245	2895	2564	2254	1966	1701	1461
9,0	4778	4383	3993	3614	3247	2897	2566	2255	1967	1703
9,1	5178	4780	4385	3996	3616	3250	2899	2568	2257	1969
9,2	5576	5180	4783	4387	3998	3618	3252	2901	2570	2259
9,3	5969	5579	5183	4785	4390	4000	3620	3254	2903	2571
9,4	6352	5971	5581	5185	4787	4392	4002	3622	3256	2905
9,5	6721	6354	5973	5583	5187	4790	4394	4005	3625	3258
9,6	7075	6723	6356	5975	5585	5190	4792	4396	4007	3627
9,7	7410	7077	6726	6358	5978	5588	5192	4794	4398	4009
9,8	7724	7412	7079	6728	6360	5980	5590	5194	4796	4400
9,9	8015	7725	7414	7081	6730	6362	5982	5592	5196	4798
10,0	8282	8016	7727	7415	7083	6731	6364	5984	5594	5198

ТАБЛИЦА XI

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $V(r,\, h) =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{S_c} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz$$

r \ h	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0,1	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	0002
0,2	0021	0021	0021	0020	0019	0019	0018	0016	0015	0014
0,3	0070	0070	0068	0067	0065	0062	0059	0055	0051	0047
0,4	0162	0162	0159	0155	0150	0144	0136	0128	0119	0110
0,5	0309	0307	0303	0296	0286	0274	0260	0244	0228	0210
0,6	0516	0514	0507	0495	0479	0460	0437	0411	0383	0354
0,7	0789	0786	0775	0758	0734	0705	0670	0632	0591	0547
0,8	1128	1123	1108	1084	1052	1011	0963	0910	0852	0790
0,9	1529	1523	1504	1472	1429	1376	1313	1243	1166	1085
1,0	1988	1980	1956	1916	1863	1796	1717	1629	1532	1430
1,1	2494	2485	2456	2409	2344	2264	2169	2062	1945	1820
1,2	3038	3027	2994	2939	2864	2771	2660	2535	2398	2252
1,3	3608	3596	3559	3497	3413	3308	3183	3041	2885	2717
1,4	4193	4179	4138	4071	3979	3863	3726	3569	3397	3210
1,5	4779	4764	4721	4649	4551	4427	4279	4111	3924	3722
1,6	5355	5340	5295	5220	5117	4988	4833	4656	4458	4244
1,7	5911	5896	5850	5774	5669	5536	5378	5195	4990	4767
1,8	6440	6424	6378	6302	6197	6064	5904	5720	5512	5284
1,9	6933	6918	6873	6798	6695	6564	6406	6223	6016	5788
2,0	7385	7371	7328	7257	7157	7030	6877	6698	6496	6270
2,1	7795	7782	7741	7674	7580	7459	7313	7141	6946	6728
2,2	8161	8149	8111	8048	7960	7847	7710	7548	7363	7155
2,3	8483	8471	8437	8379	8299	8195	8068	7918	7744	7549
2,4	8761	8751	8720	8668	8595	8501	8385	8248	8089	7907
2,5	8999	8990	8963	8917	8852	8768	8664	8540	8396	8230
2,6	9201	9193	9169	9128	9072	8998	8906	8795	8666	8517
2,7	9368	9361	9340	9306	9257	9192	9112	9016	8901	8769
2,8	9506	9500	9482	9453	9411	9356	9287	9203	9104	8988
2,9	9617	9613	9598	9573	9538	9492	9433	9362	9276	9175
3,0	9707	9703	9691	9671	9641	9603	9554	9493	9421	9334

h / r	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,1	0,9778	9775	9765	9748	9724	9692	9652	9602	9541	9468
3,2	9834	9831	9823	9810	9790	9764	9731	9690	9640	9579
3,3	9877	9875	9868	9858	9842	9821	9795	9761	9720	9670
3,4	9909	9908	9903	9895	9882	9866	9844	9818	9784	9744
3,5	9934	9933	9929	9923	9913	9900	9883	9862	9836	9803
3,6	9953	9952	9949	9944	9937	9927	9914	9897	9876	9850
3,7	9966	9966	9964	9960	9954	9947	9936	9924	9907	9887
3,8	9976	9976	9974	9971	9967	9961	9954	9944	9931	9915
3,9	9984	9983	9982	9980	9977	9972	9967	9959	9950	9937
4,0	9987	9987	9987	9986	9984	9981	9976	9971	9963	9954
4,1	9992	9992	9991	9990	9989	9986	9983	9979	9974	9967
4,2	9995	9995	9994	9993	9992	9991	9988	9985	9981	9976
4,3	9997	9996	9996	9996	9995	9994	9992	9990	9987	9983
4,4	9998	9998	9997	9997	9996	9996	9994	9993	9991	9988
4,5	9998	9998	9998	9998	9998	9997	9996	9995	9994	9992
4,6	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9997	9997	9996	9994
4,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9997	9996
4,8	1,0000	1,0000	1,0000	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9997
4,9				1,0000	1,0000	9999	9999	9999	9999	9998
5,0						1,0000	1,0000	9999	9999	9999
5,1								1,0000	9999	9999
5,2									1,0000	9999
5,3										1,0000

h / r	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
0	0,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0,1	0002	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0000	0000
0,2	0013	0012	0010	0009	0008	0007	0006	0005	0004	0004
0,3	0043	0039	0034	0030	0027	0023	0020	0017	0014	0012
0,4	0100	0090	0081	0072	0063	0054	0047	0040	0034	0028
0,5	0192	0174	0156	0138	0121	0106	0091	0078	0066	0055
0,6	0324	0294	0264	0235	0207	0181	0157	0134	0114	0096
0,7	0502	0456	0411	0367	0325	0285	0247	0213	0182	0153
0,8	0727	0663	0599	0537	0477	0419	0366	0316	0271	0230
0,9	1001	0916	0830	0747	0666	0588	0515	0448	0385	0329
1,0	1323	1214	1105	0998	0893	0793	0698	0609	0527	0453
1,1	1690	1557	1422	1290	1160	1034	0915	0803	0699	0604
1,2	2098	1940	1780	1621	1464	1313	1168	1031	0902	0784
1,3	2541	2359	2174	1989	1806	1627	1456	1292	1138	0994
1,4	3014	2809	2600	2390	2181	1976	1777	1587	1406	1236
1,5	3507	3283	3053	2820	2587	2356	2131	1914	1707	1510

r \ h	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1,6	0,4015	3774	3526	3272	3017	2764	2514	2272	2038	1816
1,7	4528	4275	4012	3742	3468	3194	2923	2657	2399	2151
1,8	5038	4777	4504	4222	3934	3643	3353	3066	2785	2513
1,9	5540	5275	4996	4706	4407	4104	3798	3494	3194	2901
2,0	6025	5760	5480	5187	4883	4571	4255	3937	3621	3309
2,1	6488	6229	5952	5659	5354	5038	4716	4389	4061	3735
2,2	6925	6674	6404	6117	5815	5500	5176	4844	4509	4172
2,3	7331	7092	6833	6555	6261	5951	5630	5298	4959	4616
2,4	7704	7480	7235	6970	6687	6386	6072	5744	5406	5062
2,5	8043	7836	7607	7357	7088	6801	6497	6178	5846	5504
2,6	8348	8157	7947	7715	7463	7192	6902	6594	6272	5937
2,7	8617	8446	8254	8042	7809	7555	7282	6990	6681	6357
2,8	8854	8701	8529	8336	8123	7890	7636	7362	7069	6759
2,9	9058	8924	8771	8599	8407	8195	7961	7707	7433	7140
3,0	9234	9117	8983	8831	8660	8469	8257	8024	7771	7497
3,1	9382	9282	9166	9034	8883	8713	8523	8312	8080	7828
3,2	9507	9422	9323	9208	9077	8928	8759	8570	8361	8130
3,3	9610	9539	9455	9357	9244	9115	8967	8800	8613	8405
3,4	9694	9635	9566	9483	9387	9276	9148	9001	8836	8650
3,5	9763	9715	9657	9588	9507	9413	9303	9177	9032	8868
3,6	9818	9779	9732	9675	9608	9528	9435	9327	9202	9060
3,7	9861	9830	9792	9746	9690	9625	9547	9455	9348	9225
3,8	9895	9871	9840	9803	9758	9704	9639	9563	9473	9368
3,9	9922	9902	9878	9849	9813	9769	9716	9652	9577	9488
4,0	9942	9927	9909	9885	9856	9821	9778	9726	9664	9590
4,1	9958	9946	9932	9914	9891	9863	9828	9786	9736	9674
4,2	9969	9961	9950	9936	9918	9896	9868	9835	9794	9744
4,3	9978	9971	9963	9952	9939	9922	9900	9874	9841	9800
4,4	9984	9980	9973	9965	9955	9942	9925	9904	9878	9846
4,5	9989	9985	9981	9975	9967	9957	9944	9928	9907	9882
4,6	9992	9990	9986	9982	9976	9968	9959	9946	9930	9910
4,7	9995	9993	9990	9987	9983	9977	9970	9960	9948	9933
4,8	9996	9995	9993	9991	9988	9984	9978	9971	9962	9950
4,9	9998	9997	9995	9994	9991	9988	9984	9979	9972	9963
5,0	9998	9998	9997	9996	9994	9992	9989	9985	9980	9973
5,1	9999	9998	9998	9997	9996	9994	9992	9989	9986	9981
5,2	9999	9999	9998	9998	9997	9996	9994	9992	9990	9986
5,3	1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9995	9993	9990
5,4		1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9995	9993
5,5			1,0000	9999	9999	9999	9998	9998	9996	9995
5,6				1,0000	9999	9999	9999	9998	9998	9997
5,7					1,0000	9999	9999	9999	9998	9998
5,8						1,0000	9999	9999	9999	9998
5,9							1,0000	1,0000	9999	9999
6,0									1,0000	9999
6,1										1,0000

r \ h	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
0,1	0,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0,2	0003	0002	0002	0002	0001	0001	0001	0001	0000	0000
0,3	0010	0008	0006	0005	0004	0003	0002	0002	0001	0001
0,4	0023	0019	0016	0012	0010	0008	0006	0005	0004	0003
0,5	0046	0038	0031	0025	0020	0016	0012	0010	0007	0006
0,6	0080	0066	0054	0044	0035	0028	0022	0017	0013	0010
0,7	0128	0107	0088	0071	0058	0046	0036	0029	0022	0017
0,8	0194	0162	0134	0109	0089	0071	0057	0045	0035	0027
0,9	0278	0234	0194	0160	0131	0106	0085	0068	0053	0042
1,0	0385	0325	0272	0225	0185	0151	0122	0098	0078	0061
1,1	0517	0439	0369	0308	0255	0209	0170	0137	0110	0087
1,2	0675	0577	0489	0411	0342	0283	0232	0188	0152	0121
1,3	0862	0741	0632	0535	0449	0374	0309	0253	0206	0165
1,4	1079	0934	0803	0684	0579	0485	0404	0333	0273	0221
1,5	1327	1157	1001	0859	0732	0619	0519	0431	0356	0291
1,6	1606	1410	1228	1062	0912	0776	0656	0550	0457	0377
1,7	1915	1692	1485	1294	1118	0960	0817	0690	0578	0481
1,8	2253	2005	1772	1554	1354	1170	1004	0855	0722	0605
1,9	2617	2345	2087	1844	1618	1409	1218	1045	0890	0752
2,0	3005	2711	2430	2162	1911	1677	1461	1263	1084	0923
2,1	3414	3100	2797	2507	2232	1972	1731	1508	1304	1119
2,2	3837	3508	3186	2876	2578	2295	2029	1781	1552	1343
2,3	4272	3930	3594	3265	2948	2643	2354	2082	1828	1593
2,4	4713	4363	4015	3672	3338	3014	2703	2408	2130	1871
2,5	5154	4800	4446	4092	3744	3404	3075	2759	2458	2176
2,6	5591	5238	4880	4521	4163	3810	3465	3131	2811	2505
2,7	6019	5671	5314	4953	4590	4228	3871	3522	3184	2859
2,8	6433	6094	5743	5384	5020	4654	4288	3928	3575	3233
2,9	6829	6502	6161	5809	5448	5081	4712	4344	3980	3624
3,0	7204	6892	6565	6223	5869	5506	5138	4766	4396	4029
3,1	7554	7261	6950	6622	6279	5925	5561	5190	4817	4444
3,2	7879	7606	7314	7003	6675	6332	5976	5611	5239	4864
3,3	8175	7925	7653	7362	7051	6723	6380	6023	5657	5284
3,4	8444	8216	7967	7696	7406	7095	6767	6424	6068	5701
3,5	8685	8480	8253	8005	7736	7446	7136	6809	6465	6108
3,6	8898	8715	8512	8287	8040	7772	7483	7174	6847	6504
3,7	9084	8924	8744	8542	8318	8073	7806	7518	7209	6883
3,8	9246	9107	8948	8769	8569	8347	8103	7837	7550	7242
3,9	9385	9265	9127	8970	8792	8594	8373	8130	7866	7579
4,0	9503	9401	9282	9146	8990	8814	8617	8398	8156	7892
4,1	9602	9516	9415	9298	9163	9009	8834	8638	8420	8180
4,2	9684	9612	9527	9428	9312	9178	9026	8853	8658	8441
4,3	9751	9692	9622	9538	9440	9325	9193	9041	8870	8676
4,4	9806	9758	9700	9630	9548	9451	9337	9206	9056	8886
4,5	9850	9812	9764	9707	9638	9557	9461	9348	9219	9070

r \ h	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
4,6	0,9886	9854	9816	9770	9713	9646	9565	9470	9359	9230
4,7	9913	9889	9858	9821	9775	9719	9652	9573	9479	9369
4,8	9935	9916	9892	9862	9825	9780	9725	9659	9580	9487
4,9	9952	9937	9918	9894	9865	9828	9784	9730	9664	9587
5,0	9964	9953	9938	9920	9897	9868	9832	9788	9734	9670
5,1	9974	9965	9954	9940	9922	9899	9870	9835	9792	9739
5,2	9981	9975	9966	9956	9942	9924	9901	9873	9838	9795
5,3	9986	9982	9976	9967	9956	9943	9925	9903	9875	9841
5,4	9990	9987	9982	9976	9968	9958	9944	9927	9905	9878
5,5	9993	9991	9987	9983	9977	9969	9958	9945	9928	9907
5,6	9995	9994	9991	9988	9983	9977	9969	9959	9946	9929
5,7	9997	9996	9994	9991	9988	9984	9978	9970	9960	9947
5,8	9998	9997	9996	9994	9992	9988	9984	9978	9971	9961
5,9	9998	9998	9997	9996	9994	9992	9988	9984	9979	9971
6,0	9999	9998	9998	9997	9996	9994	9992	9989	9985	9979
6,1	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992	9989	9985
6,2	1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992	9989
6,3		1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992
6,4			1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9995
6,5				1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996
6,6					1,0000	9999	9999	9999	9998	9997
6,7						1,0000	9999	9999	9999	9998
6,8							1,0000	9999	9999	9999
6,9								1,0000	9999	9999
7,0									1,0000	9999
7,1										1,0000

r \ h	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
0,2	0,0000	0000								
0,3	0001	0001	0000	0000	0000					
0,4	0002	0002	0001	0001	0001	0000	0000			
0,5	0004	0003	0002	0002	0001	0001	0001	0000	0000	
0,6	0008	0006	0004	0003	0002	0002	0001	0001	0001	0000
0,7	0013	0010	0007	0006	0004	0003	0002	0002	0001	0001
0,8	0021	0016	0012	0009	0007	0005	0004	0002	0002	0001
0,9	0032	0025	0019	0014	0010	0008	0006	0004	0003	0002
1,0	0048	0037	0028	0021	0016	0012	0009	0006	0005	0003

r \ h	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
1,1	0,0068	0053	0041	0032	0024	0018	0013	0010	0007	0005
1,2	0096	0075	0059	0045	0035	0026	0020	0015	0011	0008
1,3	0132	0104	0082	0064	0049	0038	0028	0021	0016	0012
1,4	0178	0142	0112	0088	0069	0053	0040	0031	0023	0017
1,5	0236	0190	0152	0120	0094	0073	0056	0043	0033	0024
1,6	0308	0250	0201	0160	0127	0100	0077	0060	0046	0034
1,7	0396	0324	0263	0212	0169	0134	0105	0082	0063	0048
1,8	0503	0415	0339	0275	0222	0177	0140	0110	0085	0066
1,9	0630	0524	0432	0354	0287	0231	0184	0146	0114	0089
2,0	0780	0654	0544	0448	0367	0298	0240	0191	0151	0119
2,1	0953	0806	0676	0562	0464	0380	0308	0248	0198	0157
2,2	1153	0982	0830	0696	0579	0478	0391	0318	0256	0204
2,3	1378	1184	1009	0853	0716	0596	0492	0403	0327	0263
2,4	1631	1412	1213	1034	0874	0734	0611	0505	0413	0336
2,5	1912	1667	1444	1240	1058	0895	0751	0626	0517	0423
2,6	2218	1949	1701	1473	1266	1080	0914	0768	0639	0528
2,7	2549	2258	1985	1732	1501	1290	1101	0932	0783	0652
2,8	2904	2590	2295	2018	1762	1527	1314	1121	0949	0798
2,9	3278	2946	2629	2330	2050	1790	1552	1335	1140	0966
3,0	3670	3321	2985	2665	2362	2079	1816	1575	1356	1158
3,1	4075	3713	3361	3022	2699	2393	2107	1842	1598	1375
3,2	4489	4118	3753	3399	3057	2731	2422	2134	1865	1619
3,3	4908	4531	4158	3791	3434	3090	2761	2450	2159	1888
3,4	5327	4949	4570	4195	3826	3467	3121	2790	2476	2182
3,5	5741	5367	4987	4608	4231	3860	3499	3150	2817	2501
3,6	6147	5779	5403	5023	4642	4264	3892	3529	3178	2843
3,7	6540	6183	5814	5438	5057	4675	4296	3922	3557	3205
3,8	6916	6573	6216	5848	5471	5089	4706	4325	3950	3584
3,9	7273	6947	6605	6248	5879	5502	5120	4736	4354	3977
4,0	7607	7301	6976	6634	6278	5909	5531	5148	4764	4380
4,1	7917	7633	7328	7004	6662	6306	5937	5559	5175	4790
4,2	8202	7941	7658	7353	7030	6688	6332	5963	5585	5201
4,3	8461	8223	7963	7680	7377	7054	6713	6357	5988	5610
4,4	8694	8480	8243	7984	7702	7399	7077	6737	6381	6012
4,5	8900	8710	8497	8261	8003	7722	7420	7099	6759	6403
4,6	9082	8914	8725	8513	8278	8021	7742	7440	7119	6780
4,7	9241	9094	8928	8739	8528	8295	8038	7760	7459	7139
4,8	9378	9251	9106	8940	8752	8543	8310	8055	7777	7477
4,9	9494	9386	9261	9116	8951	8765	8556	8325	8070	7793
5,0	9593	9501	9394	9270	9126	8962	8777	8569	8339	8085

r \ h	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
5,1	0,9675	9599	9508	9402	9278	9135	8972	8788	8581	8352
5,2	9743	9680	9604	9514	9409	9286	9144	8982	8799	8593
5,3	9798	9747	9684	9609	9520	9415	9293	9152	8991	8809
5,4	9843	9802	9750	9688	9614	9526	9422	9300	9160	9000
5,5	9880	9846	9804	9754	9692	9618	9531	9428	9307	9168
5,6	9908	9881	9848	9807	9757	9696	9623	9536	9433	9313
5,7	9931	9910	9883	9850	9810	9760	9699	9627	9540	9438
5,8	9948	9932	9911	9885	9852	9812	9762	9703	9631	9545
5,9	9962	9949	9933	9912	9886	9854	9814	9765	9706	9634
6,0	9972	9962	9950	9934	9914	9888	9856	9816	9768	9709
6,1	9979	9972	9963	9950	9935	9915	9889	9858	9818	9770
6,2	9985	9980	9973	9963	9951	9936	9916	9891	9859	9820
6,3	9989	9985	9980	9973	9964	9952	9936	9917	9892	9861
6,4	9992	9990	9986	9980	9974	9964	9952	9937	9918	9893
6,5	9995	9993	9990	9986	9981	9974	9965	9953	9938	9919
6,6	9996	9995	9993	9990	9986	9981	9974	9965	9954	9939
6,7	9998	9996	9995	9993	9990	9986	9981	9974	9966	9954
6,8	9998	9998	9996	9995	9993	9990	9986	9982	9975	9966
6,9	9999	9998	9998	9996	9995	9993	9990	9987	9982	9975
7,0	9999	9999	9998	9998	9997	9995	9993	9990	9987	9982
7,1	9999	9999	9999	9998	9998	9997	9995	9993	9991	9987
7,2	1,0000	1,0000	9999	9999	9998	9998	9997	9995	9993	9991
7,3			1,0000	9999	9999	9998	9998	9997	9995	9993
7,4				1,0000	9999	9999	9998	9998	9997	9995
7,5					1,0000	9999	9999	9998	9998	9997
7,6						1,0000	9999	9999	9998	9998
7,7							1,0000	9999	9999	9998
7,8								1,0000	9999	9999
7,9									1,0000	9999
8,0										1,0000

r \ h	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
0,7	0,0000	0000								
0,8	0001	0001	0000							
0,9	0002	0001	0001	0000						
1,0	0002	0002	0001	0001	0000	0000				
1,1	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000			
1,2	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000		
1,3	0009	0006	0004	0003	0002	0002	0001	0001	0000	
1,4	0013	0009	0007	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0000
1,5	0018	0013	0010	0007	0005	0004	0002	0002	0001	0001

r \ h	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
1,6	0,0026	0019	0014	0010	0008	0005	0004	0003	0002	0001
1,7	0036	0027	0020	0015	0011	0008	0006	0004	0003	0002
1,8	0050	0038	0029	0021	0016	0011	0008	0006	0004	0003
1,9	0069	0052	0040	0030	0022	0016	0012	0009	0006	0004
2,0	0092	0071	0054	0041	0031	0023	0017	0012	0009	0006
2,1	0123	0096	0074	0056	0043	0032	0024	0018	0013	0009
2,2	0162	0127	0099	0076	0058	0044	0033	0025	0018	0013
2,3	0210	0167	0131	0102	0079	0060	0046	0034	0026	0019
2,4	0270	0216	0171	0134	0105	0081	0062	0047	0035	0026
2,5	0344	0277	0222	0176	0138	0107	0083	0063	0048	0036
2,6	0433	0352	0284	0227	0180	0141	0110	0085	0065	0049
2,7	0539	0442	0360	0290	0232	0184	0144	0112	0087	0066
2,8	0665	0550	0451	0367	0296	0236	0188	0147	0115	0089
2,9	0812	0677	0560	0459	0374	0301	0241	0191	0150	0117
3,0	0981	0825	0688	0569	0467	0380	0307	0245	0195	0153
3,1	1175	0996	0838	0699	0578	0475	0386	0312	0250	0198
3,2	1394	1191	1010	0850	0709	0587	0482	0392	0317	0254
3,3	1639	1412	1207	1024	0861	0719	0595	0489	0398	0321
3,4	1909	1658	1428	1221	1036	0872	0728	0603	0495	0404
3,5	2205	1929	1676	1444	1236	1048	0883	0737	0611	0502
3,6	2525	2226	1949	1693	1460	1249	1060	0893	0746	0618
3,7	2867	2547	2247	1967	1710	1474	1262	1071	0902	0754
3,8	3230	2890	2569	2266	1985	1725	1488	1274	1082	0912
3,9	3609	3253	2912	2589	2285	2002	1740	1502	1286	1092
4,0	4002	3633	3276	2934	2608	2303	2018	1755	1515	1297
4,1	4406	4027	3656	3298	2954	2627	2320	2033	1769	1527
4,2	4815	4430	4050	3678	3318	2973	2645	2336	2048	1782
4,3	5226	4839	4453	4072	3699	3338	2992	2662	2352	2062
4,4	5634	5249	4862	4475	4093	3719	3357	3009	2678	2366
4,5	6035	5656	5271	4883	4496	4113	3739	3375	3026	2694
4,6	6425	6056	5677	5292	4904	4516	4133	3757	3392	3042
4,7	6800	6445	6076	5698	5312	4924	4535	4151	3774	3409
4,8	7157	6819	6464	6096	5717	5332	4942	4554	4169	3791
4,9	7494	7175	6837	6483	6115	5736	5350	4960	4571	4186
5,0	7809	7511	7192	6854	6500	6132	5754	5368	4978	4588
5,1	8099	7824	7526	7208	6871	6517	6149	5771	5385	4994
5,2	8364	8112	7838	7541	7223	6887	6533	6166	5787	5401
5,3	8604	8376	8125	7851	7555	7238	6902	6549	6181	5803
5,4	8818	8614	8387	8137	7864	7568	7252	6916	6563	6196
5,5	9008	8828	8624	8398	8148	7876	7581	7265	6930	6578

r \ h	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
5,6	0,9175	9016	8836	8634	8408	8160	7888	7594	7278	6943
5,7	9320	9182	9024	8844	8643	8418	8170	7899	7605	7290
5,8	9444	9325	9188	9031	8852	8652	8428	8180	7910	7617
5,9	9549	9448	9331	9194	9038	8860	8660	8436	8190	7920
6,0	9638	9553	9453	9336	9200	9044	8867	8668	8445	8199
6,1	9712	9641	9557	9457	9341	9206	9051	8874	8675	8453
6,2	9772	9714	9644	9560	9462	9346	9211	9057	8881	8683
6,3	9822	9774	9717	9647	9564	9466	9350	9216	9062	8887
6,4	9862	9824	9777	9719	9650	9567	9469	9354	9221	9068
6,5	9894	9864	9825	9779	9722	9653	9570	9473	9359	9226
6,6	9920	9895	9865	9827	9780	9724	9655	9573	9476	9363
6,7	9939	9920	9896	9866	9828	9782	9726	9658	9576	9480
6,8	9955	9940	9921	9897	9867	9830	9784	9728	9660	9579
6,9	9966	9955	9940	9922	9898	9868	9831	9786	9730	9662
7,0	9975	9967	9956	9941	9922	9899	9869	9833	9787	9732
7,1	9982	9976	9967	9956	9942	9923	9900	9870	9834	9789
7,2	9987	9982	9976	9968	9956	9942	9924	9901	9871	9835
7,3	9991	9987	9982	9976	9968	9957	9943	9924	9901	9872
7,4	9994	9991	9987	9983	9976	9968	9957	9943	9925	9902
7,5	9995	9994	9991	9988	9983	9977	9968	9958	9944	9926
7,6	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9969	9958	9944
7,7	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9969	9958
7,8	9998	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9983	9977	9969
7,9	9999	9998	9998	9997	9996	9994	9991	9988	9984	9977
8,0	9999	9999	9998	9998	9997	9996	9994	9992	9988	9984
8,1	1,0000	9999	9999	9998	9998	9997	9996	9994	9992	9988
8,2		1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992
8,3			1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994
8,4				1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996
8,5					1,0000	9999	9999	9999	9998	9997
8,6						1,0000	9999	9999	9999	9998
8,7							1,0000	9999	9999	9999
8,8								1,0000	9999	9999
8,9									1,0000	9999
9,0										1,0000

r \ h	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
1,4	0,0000									
1,5	0001	0000								
1,6	0001	0001	0000							
1,7	0001	0001	0001	0000						
1,8	0002	0001	0001	0001	0000					
1,9	0003	0002	0002	0001	0001	0000				
2,0	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0000			
2,1	0007	0005	0003	0002	0002	0001	0001	0000		
2,2	0010	0007	0005	0004	0002	0002	0001	0001	0000	
2,3	0014	0010	0007	0005	0004	0002	0002	0001	0001	0000
2,4	0019	0014	0010	0007	0005	0004	0003	0002	0001	0001
2,5	0027	0020	0015	0011	0008	0005	0004	0003	0002	0001
2,6	0037	0028	0020	0015	0011	0008	0006	0004	0003	0002
2,7	0050	0038	0028	0021	0015	0011	0008	0006	0004	0003
2,8	0068	0052	0039	0029	0021	0016	0011	0008	0006	0004
2,9	0090	0069	0053	0040	0030	0022	0016	0012	0008	0006
3,0	0119	0092	0071	0054	0040	0030	0022	0016	0012	0009
3,1	0156	0122	0094	0072	0055	0041	0031	0023	0017	0012
3,2	0201	0158	0124	0096	0073	0056	0042	0031	0023	0017
3,3	0257	0204	0161	0126	0097	0074	0056	0043	0032	0024
3,4	0326	0261	0207	0163	0127	0099	0076	0057	0043	0032
3,5	0409	0330	0265	0210	0166	0129	0100	0077	0058	0044
3,6	0508	0414	0334	0268	0213	0168	0131	0101	0078	0059
3,7	0625	0514	0419	0338	0271	0216	0170	0133	0103	0079
3,8	0762	0632	0519	0423	0342	0274	0218	0172	0134	0104
3,9	0921	0770	0638	0525	0428	0346	0278	0221	0174	0136
4,0	1102	0929	0777	0644	0530	0432	0350	0280	0223	0176
4,1	1308	1112	0937	0784	0650	0535	0436	0353	0283	0225
4,2	1539	1318	1121	0945	0791	0656	0540	0441	0357	0286
4,3	1795	1550	1328	1130	0953	0797	0662	0545	0444	0360
4,4	2076	1807	1561	1338	1138	0960	0804	0667	0549	0448
4,5	2381	2089	1819	1572	1348	1146	0967	0810	0672	0554
4,6	2709	2395	2101	1830	1582	1356	1154	0974	0816	0677
4,7	3058	2723	2408	2113	1841	1591	1365	1162	0981	0821
4,8	3425	3073	2737	2421	2125	1852	1601	1373	1169	0987
4,9	3808	3440	3087	2751	2433	2136	1862	1610	1381	1176
5,0	4202	3823	3455	3101	2764	2445	2147	1871	1619	1389
5,1	4604	4218	3838	3469	3114	2776	2456	2158	1881	1627
5,2	5010	4620	4233	3853	3483	3127	2788	2467	2168	1890
5,3	5416	5026	4635	4247	3866	3496	3140	2799	2478	2177
5,4	5818	5431	5041	4649	4261	3880	3509	3152	2810	2488
5,5	6211	5832	5446	5055	4663	4274	3893	3521	3163	2821

r \ h	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
5,6	0,6591	6224	5846	5460	5068	4676	4288	3905	3533	3174
5,7	6956	6604	6238	5859	5473	5082	4689	4300	3917	3544
5,8	7302	6968	6617	6250	5872	5486	5094	4702	4312	3929
5,9	7628	7314	6980	6629	6263	5885	5498	5106	4714	4324
6,0	7930	7638	7325	6991	6641	6275	5897	5510	5118	4725
6,1	8208	7939	7648	7335	7002	6652	6286	5908	5522	5130
6,2	8461	8216	7948	7658	7345	7013	6663	6297	5919	5533
6,3	8690	8469	8225	7957	7667	7355	7023	6673	6308	5930
6,4	8893	8696	8476	8233	7966	7676	7364	7033	6683	6318
6,5	9073	8899	8703	8483	8240	7974	7684	7374	7042	6693
6,6	9230	9078	8905	8709	8490	8248	7982	7693	7382	7051
6,7	9366	9235	9083	8910	8715	8496	8255	7989	7701	7391
6,8	9483	9370	9239	9088	8915	8721	8503	8261	7997	7709
6,9	9582	9486	9374	9243	9092	8920	8726	8509	8268	8004
7,0	9665	9584	9489	9377	9247	9097	8925	8732	8515	8274
7,1	9734	9667	9587	9492	9380	9251	9101	8930	8737	8520
7,2	9790	9735	9669	9589	9495	9384	9254	9105	8935	8742
7,3	9836	9792	9737	9671	9592	9497	9387	9258	9109	8939
7,4	9873	9837	9793	9738	9673	9594	9500	9390	9261	9113
7,5	9903	9874	9838	9794	9740	9674	9596	9502	9392	9264
7,6	9926	9904	9875	9839	9795	9742	9676	9598	9505	9395
7,7	9945	9927	9904	9876	9840	9797	9743	9678	9600	9507
7,8	9959	9945	9927	9905	9877	9841	9798	9744	9680	9602
7,9	9969	9959	9945	9928	9906	9877	9842	9799	9746	9681
8,0	9978	9970	9959	9946	9928	9906	9878	9843	9800	9747
8,1	9984	9978	9970	9960	9946	9929	9907	9879	9844	9801
8,2	9988	9984	9978	9970	9960	9946	9929	9907	9880	9845
8,3	9992	9988	9984	9978	9970	9960	9947	9930	9908	9880
8,4	9994	9992	9989	9984	9978	9970	9960	9947	9930	9908
8,5	9996	9994	9992	9989	9984	9978	9971	9961	9947	9930
8,6	9997	9996	9994	9992	9989	9984	9979	9971	9961	9948
8,7	9998	9997	9996	9994	9992	9989	9984	9979	9971	9961
8,8	9999	9998	9997	9996	9994	9992	9989	9985	9979	9971
8,9	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992	9989	9985	9979
9,0	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992	9989	9985
9,1	1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992	9989
9,2		1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992
9,3			1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996	9995
9,4				1,0000	9999	9999	9999	9998	9997	9996
9,5					1,0000	9999	9999	9999	9998	9997
9,6						1,0000	9999	9999	9999	9998
9,7							1,0000	9999	9999	9999
9,8								1,0000	9999	9999
9,9									1,0000	9999

r \ h	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
2,4	0,0000	0000								
2,5	0001	0001	0000							
2,6	0001	0001	0001	0000						
2,7	0002	0001	0001	0001	0000					
2,8	0003	0002	0001	0001	0001	0000				
2,9	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000			
3,0	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000		
3,1	0009	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000	
3,2	0012	0009	0006	0004	0003	0002	0002	0001	0001	0000
3,3	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002	0002	0001	0001
3,4	0024	0018	0013	0009	0006	0005	0003	0002	0002	0001
3,5	0033	0024	0018	0013	0009	0007	0005	0003	0002	0002
3,6	0045	0033	0025	0018	0013	0009	0007	0005	0003	0002
3,7	0061	0045	0034	0025	0018	0013	0010	0007	0005	0003
3,8	0080	0061	0046	0034	0025	0019	0014	0010	0007	0005
3,9	0106	0081	0061	0046	0035	0026	0019	0014	0010	0007
4,0	0138	0106	0082	0062	0047	0035	0026	0019	0014	0010
4,1	0178	0139	0108	0083	0063	0047	0035	0026	0019	0014
4,2	0227	0179	0140	0109	0084	0064	0048	0036	0027	0020
4,3	0289	0230	0181	0142	0110	0084	0064	0048	0036	0027
4,4	0363	0291	0232	0183	0143	0111	0085	0065	0049	0037
4,5	0452	0366	0294	0234	0184	0144	0112	0086	0066	0049
4,6	0558	0456	0369	0296	0236	0186	0146	0113	0087	0066
4,7	0682	0562	0459	0372	0298	0238	0188	0147	0114	0088
4,8	0827	0687	0566	0462	0374	0301	0240	0189	0148	0115
4,9	0993	0832	0691	0570	0465	0377	0303	0241	0190	0149
5,0	1183	0999	0837	0696	0573	0468	0380	0305	0243	0192
5,1	1397	1190	1005	0842	0700	0577	0472	0382	0307	0245
5,2	1635	1404	1196	1010	0847	0704	0580	0474	0385	0309
5,3	1899	1643	1411	1202	1016	0852	0708	0584	0477	0387
5,4	2187	1907	1651	1418	1208	1021	0856	0712	0587	0480
5,5	2498	2196	1916	1658	1424	1214	1026	0860	0716	0590
5,6	2832	2508	2205	1924	1666	1431	1220	1031	0865	0719
5,7	3185	2842	2517	2213	1931	1672	1437	1225	1036	0869
5,8	3555	3195	2852	2526	2222	1939	1679	1443	1230	1040
5,9	3940	3566	3205	2861	2535	2230	1946	1686	1449	1236
6,0	4335	3951	3576	3215	2870	2543	2237	1953	1692	1455

r \ h	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
6,1	0,4737	4346	3961	3586	3225	2879	2552	2245	1960	1698
6,2	5141	4748	4356	3971	3596	3234	2888	2560	2252	1967
6,3	5544	5152	4758	4367	3981	3606	3243	2896	2567	2259
6,4	5940	5554	5162	4768	4376	3991	3615	3251	2904	2575
6,5	6328	5951	5564	5172	4778	4386	4000	3624	3260	2912
6,6	6702	6338	5960	5574	5182	4788	4395	4009	3632	3268
6,7	7060	6711	6347	5970	5583	5191	4797	4404	4018	3640
6,8	7399	7069	6720	6356	5979	5592	5200	4806	4413	4026
6,9	7716	7407	7077	6729	6365	5988	5601	5209	4814	4422
7,0	8010	7724	7414	7085	6737	6373	5996	5610	5218	4823
7,1	8281	8017	7730	7422	7093	6745	6381	6005	5618	5226
7,2	8526	8286	8024	7737	7429	7100	6753	6389	6013	5626
7,3	8747	8531	8292	8030	7744	7436	7108	6760	6397	6021
7,4	8943	8751	8536	8298	8036	7750	7443	7114	6768	6404
7,5	9116	8947	8756	8541	8303	8042	7756	7449	7121	6775
7,6	9267	9120	8951	8760	8546	8308	8047	7762	7456	7128
7,7	9398	9270	9123	8955	8764	8551	8314	8053	7768	7462
7,8	9509	9400	9273	9127	8959	8769	8555	8318	8058	7774
7,9	9604	9512	9403	9276	9130	8962	8773	8560	8323	8063
8,0	9683	9605	9514	9405	9279	9133	8966	8776	8564	8328
8,1	9748	9684	9607	9516	9408	9282	9136	8969	8780	8568
8,2	9802	9749	9686	9609	9518	9410	9284	9139	8972	8784
8,3	9846	9803	9750	9687	9610	9519	9412	9287	9142	8976
8,4	9881	9846	9804	9752	9688	9612	9521	9414	9289	9144
8,5	9909	9881	9847	9805	9753	9690	9614	9523	9416	9292
8,6	9931	9909	9882	9848	9806	9754	9691	9615	9525	9418
8,7	9948	9931	9910	9882	9849	9806	9755	9692	9616	9526
8,8	9961	9948	9932	9910	9883	9849	9807	9756	9693	9618
8,9	9971	9962	9948	9932	9911	9884	9850	9808	9757	9694
9,0	9979	9972	9962	9949	9932	9911	9884	9851	9809	9758
9,1	9985	9979	9972	9962	9949	9932	9911	9885	9851	9810
9,2	9989	9985	9979	9972	9962	9949	9933	9912	9885	9852
9,3	9992	9989	9985	9979	9972	9962	9950	9933	9912	9886
9,4	9995	9992	9989	9985	9980	9972	9962	9950	9933	9912
9,5	9996	9995	9992	9989	9985	9980	9972	9963	9950	9934
9,6	9997	9996	9995	9992	9989	9985	9980	9972	9963	9950
9,7	9998	9997	9996	9995	9992	9989	9985	9980	9973	9963
9,8	9999	9998	9997	9996	9995	9992	9990	9985	9980	9973
9,9	9999	9999	9998	9997	9996	9995	9992	9990	9986	9980

h / r	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
3,3	0,0000									
3,4	0001	0000								
3,5	0001	0001	0000							
3,6	0002	0001	0001	0000						
3,7	0002	0002	0001	0001	0000					
3,8	0003	0002	0002	0001	0001	0000				
3,9	0005	0004	0002	0002	0001	0001	0000			
4,0	0007	0005	0004	0002	0002	0001	0001	0000		
4,1	0010	0007	0005	0004	0002	0002	0001	0001	0000	
4,2	0014	0010	0007	0005	0004	0002	0002	0001	0001	0000
4,3	0020	0014	0010	0007	0005	0004	0002	0002	0001	0001
4,4	0027	0020	0014	0010	0007	0005	0004	0003	0002	0001
4,5	0037	0027	0020	0015	0010	0008	0005	0004	0003	0002
4,6	0050	0037	0028	0020	0015	0011	0008	0005	0004	0003
4,7	0067	0050	0038	0028	0021	0015	0011	0008	0005	0004
4,8	0088	0067	0051	0038	0028	0021	0015	0011	0008	0006
4,9	0116	0089	0068	0051	0038	0028	0021	0015	0011	0008
5,0	0150	0116	0090	0068	0052	0039	0029	0021	0015	0011
5,1	0193	0151	0117	0090	0069	0052	0039	0029	0021	0016
5,2	0246	0195	0152	0118	0091	0069	0052	0039	0029	0021
5,3	0311	0248	0196	0153	0119	0092	0070	0053	0040	0029
5,4	0389	0313	0249	0197	0154	0120	0092	0070	0053	0040
5,5	0483	0391	0315	0251	0198	0155	0121	0093	0071	0054
5,6	0593	0485	0394	0317	0252	0200	0156	0121	0093	0071
5,7	0723	0596	0488	0396	0318	0254	0201	0157	0122	0094
5,8	0873	0726	0599	0490	0398	0320	0255	0202	0158	0123
5,9	1045	0877	0730	0602	0493	0400	0322	0257	0203	0159
6,0	1240	1049	0881	0733	0605	0495	0402	0323	0258	0204
6,1	1460	1245	1054	0884	0736	0608	0497	0404	0325	0259
6,2	1704	1465	1250	1058	0888	0739	0610	0500	0406	0326
6,3	1973	1710	1471	1255	1062	0891	0742	0613	0502	0407
6,4	2266	1979	1716	1476	1259	1066	0895	0745	0615	0504
6,5	2582	2273	1986	1721	1481	1264	1070	0898	0748	0618
6,6	2919	2589	2279	1992	1727	1485	1268	1073	0901	0751
6,7	3276	2927	2596	2286	1997	1732	1490	1272	1077	0904
6,8	3649	3283	2934	2603	2292	2003	1737	1495	1276	1080
6,9	4034	3656	3291	2941	2609	2298	2008	1742	1499	1280
7,0	4430	4042	3664	3298	2948	2616	2304	2014	1747	1503
7,1	4831	4438	4050	3672	3305	2954	2622	2309	2019	1751
7,2	5234	4839	4446	4058	3679	3312	2961	2628	2315	2024
7,3	5634	5242	4847	4453	4065	3686	3319	2967	2634	2320
7,4	6028	5642	5250	4854	4461	4072	3693	3325	2973	2639
7,5	6412	6036	5650	5257	4862	4468	4079	3699	3332	2979

r \ h	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
7,6	0,6782	6419	6043	5657	5264	4869	4475	4086	3706	3338
7,7	7135	6788	6426	6050	5664	5271	4876	4482	4093	3712
7,8	7468	7141	6795	6433	6057	5671	5278	4883	4488	4099
7,9	7780	7474	7147	6801	6439	6063	5677	5285	4889	4495
8,0	8068	7785	7479	7153	6807	6445	6070	5684	5291	4896
8,1	8332	8073	7790	7485	7159	6813	6452	6076	5690	5298
8,2	8572	8337	8078	7795	7490	7164	6819	6458	6082	5696
8,3	8788	8576	8341	8082	7800	7496	7170	6825	6463	6088
8,4	8979	8791	8580	8345	8087	7805	7501	7175	6830	6469
8,5	9147	8982	8794	8584	8349	8091	7810	7506	7180	6836
8,6	9294	9150	8985	8798	8587	8353	8095	7814	7510	7185
8,7	9420	9296	9152	8988	8801	8591	8357	8100	7819	7515
8,8	9528	9422	9298	9155	8990	8804	8594	8361	8104	7823
8,9	9619	9530	9424	9300	9157	8993	8807	8597	8364	8108
9,0	9696	9621	9531	9426	9302	9160	8996	8810	8601	8368
9,1	9759	9697	9622	9533	9428	9304	9162	8998	8813	8604
9,2	9810	9760	9698	9623	9534	9429	9306	9164	9001	8815
9,3	9852	9811	9760	9699	9624	9536	9431	9308	9166	9003
9,4	9886	9853	9812	9761	9700	9626	9537	9432	9310	9168
9,5	9913	9887	9854	9812	9762	9701	9627	9538	9434	9312
9,6	9934	9913	9887	9854	9813	9763	9702	9628	9540	9436
9,7	9950	9934	9914	9887	9854	9814	9764	9702	9629	9541
9,8	9963	9951	9935	9914	9888	9855	9814	9764	9703	9630
9,9	9973	9963	9951	9935	9914	9888	9856	9815	9765	9704

r \ h	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
4,3	0,0000									
4,4	0001	0000								
4,5	0001	0001	0000							
4,6	0002	0001	0001	0000						
4,7	0003	0002	0001	0001	0000					
4,8	0004	0003	0002	0001	0001	0000				
4,9	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0000			
5,0	0008	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0000		
5,1	0011	0008	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0000	0000
5,2	0016	0011	0008	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001
5,3	0022	0016	0011	0008	0006	0004	0003	0002	0001	0001
5,4	0030	0022	0016	0011	0008	0006	0004	0003	0002	0001
5,5	0040	0030	0022	0016	0012	0008	0006	0004	0003	0002

r \ h	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
5,6	0,0054	0040	0030	0022	0016	0012	0008	0006	0004	0003
5,7	0072	0054	0041	0030	0022	0016	0012	0008	0006	0004
5,8	0095	0072	0055	0041	0030	0022	0016	0012	0008	0006
5,9	0124	0095	0073	0055	0041	0030	0022	0016	0012	0008
6,0	0160	0124	0096	0073	0055	0041	0031	0023	0016	0012
6,1	0205	0161	0125	0096	0073	0056	0042	0031	0023	0017
6,2	0260	0206	0162	0126	0097	0074	0056	0042	0031	0023
6,3	0328	0262	0207	0162	0126	0097	0074	0056	0042	0031
6,4	0409	0329	0263	0208	0163	0127	0098	0075	0056	0042
6,5	0506	0411	0331	0264	0209	0164	0127	0098	0075	0057
6,6	0620	0508	0412	0332	0265	0210	0164	0128	0099	0075
6,7	0753	0622	0510	0414	0333	0266	0211	0165	0128	0099
6,8	0908	0756	0625	0512	0416	0335	0267	0212	0166	0129
6,9	1084	0911	0758	0627	0514	0417	0336	0268	0212	0167
7,0	1284	1087	0914	0761	0629	0515	0419	0337	0269	0213
7,1	1508	1287	1091	0916	0764	0631	0517	0420	0338	0270
7,2	1756	1512	1291	1094	0919	0766	0633	0519	0422	0340
7,3	2029	1760	1516	1295	1097	0922	0768	0635	0521	0423
7,4	2326	2034	1765	1520	1298	1100	0924	0771	0637	0522
7,5	2645	2331	2038	1769	1523	1302	1103	0927	0773	0639
7,6	2985	2650	2336	2043	1773	1527	1305	1106	0930	0775
7,7	3344	2991	2656	2341	2048	1777	1531	1308	1109	0932
7,8	3718	3350	2996	2661	2346	2052	1781	1534	1311	1112
7,9	4105	3724	3356	3002	2666	2350	2056	1785	1538	1314
8,0	4501	4112	3730	3361	3007	2671	2355	2060	1789	1541
8,1	4902	4507	4118	3736	3367	3012	2676	2359	2064	1793
8,2	5304	4908	4513	4123	3742	3372	3017	2680	2364	2068
8,3	5702	5310	4914	4519	4129	3747	3377	3022	2685	2368
8,4	6094	5708	5316	4920	4525	4134	3752	3382	3027	2689
8,5	6475	6100	5714	5322	4926	4530	4140	3758	3387	3032
8,6	6841	6480	6105	5720	5327	4931	4536	4145	3763	3392
8,7	7190	6846	6485	6111	5725	5332	4937	4541	4150	3768
8,8	7520	7195	6851	6491	6116	5730	5338	4942	4546	4156
8,9	7827	7524	7200	6856	6496	6121	5736	5343	4947	4552
9,0	8111	7831	7528	7204	6861	6501	6126	5741	5348	4952
9,1	8371	8115	7835	7533	7209	6866	6505	6131	5746	5353
9,2	8607	8375	8119	7839	7537	7213	6870	6510	6136	5751
9,3	8818	8610	8378	8122	7843	7541	7218	6875	6515	6140
9,4	9006	8821	8613	8381	8126	7847	7545	7222	6879	6519
9,5	9170	9008	8823	8616	8384	8129	7850	7549	7226	6883
9,6	9314	9172	9010	8826	8618	8387	8132	7854	7552	7230
9,7	9437	9315	9174	9012	8828	8621	8390	8136	7857	7556
9,8	9542	9438	9317	9176	9014	8831	8624	8393	8139	7861
9,9	9631	9543	9440	9319	9178	9017	8833	8626	8396	8142

h / r	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
5,2	0,0000									
5,3	0001	0000								
5,4	0001	0001	0000							
5,5	0001	0001	0001	0000						
5,6	0002	0001	0001	0001	0000					
5,7	0003	0002	0001	0001	0001	0000				
5,8	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000			
5,9	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000		
6,0	0009	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000	
6,1	0012	0009	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001	0000
6,2	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002	0001	0001	0001
6,3	0023	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002	0001	0001
6,4	0031	0023	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002	0001
6,5	0043	0032	0023	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
6,6	0057	0043	0032	0023	0017	0012	0009	0006	0004	0003
6,7	0076	0057	0043	0032	0024	0017	0012	0009	0006	0004
6,8	0100	0076	0058	0043	0032	0024	0017	0012	0009	0006
6,9	0130	0100	0076	0058	0043	0032	0024	0017	0012	0009
7,0	0167	0130	0100	0077	0058	0044	0032	0024	0017	0013
7,1	0214	0168	0131	0101	0077	0058	0044	0033	0024	0018
7,2	0271	0215	0169	0131	0101	0077	0058	0044	0033	0024
7,3	0341	0272	0216	0169	0132	0102	0078	0059	0044	0033
7,4	0424	0342	0273	0216	0170	0132	0102	0078	0059	0044
7,5	0524	0426	0343	0274	0217	0170	0133	0102	0078	0059
7,6	0641	0525	0427	0344	0275	0218	0171	0133	0103	0078
7,7	0777	0643	0527	0428	0345	0276	0219	0172	0134	0103
7,8	0935	0779	0644	0528	0430	0346	0277	0219	0172	0134
7,9	1114	0937	0781	0646	0530	0431	0347	0278	0220	0173
8,0	1317	1117	0939	0783	0648	0531	0432	0348	0279	0221
8,1	1544	1320	1120	0942	0785	0650	0532	0433	0349	0279
8,2	1796	1548	1323	1122	0944	0787	0651	0534	0434	0350
8,3	2072	1800	1551	1326	1124	0946	0789	0653	0536	0436
8,4	2372	2076	1803	1554	1329	1127	0948	0791	0654	0537
8,5	2694	2376	2080	1807	1557	1331	1129	0950	0793	0656
8,6	3036	2698	2380	2084	1810	1560	1334	1132	0952	0794
8,7	3397	3041	2702	2384	2087	1813	1563	1337	1134	0954
8,8	3773	3402	3045	2706	2388	2091	1816	1566	1339	1136
8,9	4160	3778	3406	3050	2710	2391	2094	1820	1568	1342
9,0	4557	4165	3782	3411	3054	2714	2395	2097	1822	1571

r \ h	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
9,1	0,4957	4562	4170	3787	3415	3058	2718	2399	2101	1826
9,2	5358	4962	4566	4175	3791	3419	3062	2722	2402	2104
9,3	5755	5363	4967	4571	4179	3796	3423	3066	2726	2406
9,4	6145	5760	5368	4971	4576	4184	3800	3427	3070	2729
9,5	6524	6150	5765	5372	4976	4580	4188	3804	3431	3074
9,6	6887	6528	6154	5769	5377	4980	4584	4192	3808	3435
9,7	7234	6892	6532	6158	5773	5381	4985	4589	4196	3812
9,8	7560	7238	6896	6536	6163	5778	5385	4989	4593	4201
9,9	7864	7563	7241	6899	6540	6167	5782	5390	4993	4597

ТАБЛИЦА XII

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $F_k(\chi^2)$

χ^2 \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,6827	3935	1987	0902	0374	0144	0052	0018	0006	0002
2	8426	6321	4276	2642	1509	0803	0402	0190	0085	0037
3	9167	7769	6084	4422	3000	1912	1150	0656	0357	0186
4	9545	8647	7385	5940	4506	3233	2202	1429	0886	0527
5	9746	9179	8282	7127	5841	4562	3400	2424	1657	1088
6	9857	9502	8884	8009	6938	5768	4602	3528	2601	1847
7	9919	9698	9281	8641	7794	6792	5711	4634	3629	2746
8	9953	9817	9540	9084	8438	7619	6674	5665	4659	3712
9	9973	9889	9707	9389	8909	8264	7473	6577	5627	4679
10	9984	9933	9814	9596	9248	8753	8114	7350	6495	5595
11	9991	9959	9883	9734	9486	9116	8614	7983	7243	6425
12	9995	9975	9926	9826	9652	9380	8994	8488	7867	7149
13	9997	9985	9954	9887	9766	9570	9279	8881	8374	7763
14	9998	9991	9971	9927	9854	9704	9488	9182	8777	8270
15	9999	9994	9982	9953	9896	9797	9640	9409	9091	8679
16	9999	9997	9989	9970	9932	9862	9749	9576	9331	9004
17	1,0000	9998	9993	9981	9955	9907	9826	9699	9513	9256
18		9999	9996	9988	9971	9938	9880	9788	9648	9450
19		9999	9997	9992	9981	9958	9918	9851	9748	9597
20		1,0000	9998	9995	9987	9972	9944	9897	9821	9707
21			9999	9997	9992	9982	9962	9929	9874	9789
22			9999	9998	9995	9988	9975	9951	9911	9849
23			1,0000	9999	9997	9992	9983	9966	9938	9893
24				9999	9998	9995	9989	9977	9957	9924
25				9999	9999	9997	9992	9984	9970	9947
26				1,0000	9999	9998	9995	9990	9980	9963
27					9999	9999	9997	9993	9986	9974
28					1,0000	9999	9998	9995	9990	9982
29						9999	9999	9997	9994	9988
30						1,0000	9999	9998	9996	9991

χ^2 \ k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,0001	0000								
2	0015	0006	0002	0001	0000	0000	0000			
3	0093	0045	0021	0009	0004	0002	0001	0000	0000	
4	0301	0166	0088	0045	0023	0011	0005	0002	0001	0000
5	0688	0420	0248	0142	0079	0042	0022	0011	0006	0003

χ^2 \ k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	0,1266	0839	0538	0335	0203	0119	0068	0038	0021	0011
7	2009	1424	0978	0653	0424	0217	0165	0099	0058	0033
8	2867	2149	1564	1107	0762	0511	0335	0214	0133	0081
9	3781	2971	2271	1689	1225	0866	0597	0403	0265	0171
10	4696	3840	3061	2378	1803	1334	0964	0681	0461	0318
11	5567	4711	3892	3140	2474	1905	1434	1056	0762	0538
12	6374	5543	4724	3937	3210	2560	1999	1528	1144	0839
13	7067	6310	5522	4735	3977	3272	2638	2084	1614	1226
14	7670	6993	6262	5503	4745	4013	3329	2709	2163	1695
15	8175	7586	6926	6218	5486	4754	4045	3380	2774	2236
16	8589	8088	7509	6866	6179	5470	4762	4075	3427	2834
17	8921	8504	8007	7438	6811	6144	5456	4769	4101	3470
18	9184	8843	8425	7932	7373	6761	6112	5443	4776	4126
19	9389	9115	8769	8351	7863	7313	6715	6082	5432	4782
20	9547	9329	9048	8699	8281	7798	7258	6672	6054	5421
21	9666	9496	9271	8984	8632	8215	7737	7206	6632	6029
22	9756	9625	9446	9214	8922	8568	8153	7680	7157	6595
23	9823	9723	9583	9397	9159	8863	8507	8094	7627	7112
24	9873	9797	9689	9542	9349	9105	8806	8450	8038	7576
25	9909	9852	9769	9654	9501	9302	9053	8751	8395	7986
26	9935	9893	9830	9741	9620	9460	9255	9002	8698	8342
27	9954	9923	9876	9807	9713	9585	9419	9210	8953	8647
28	9968	9945	9910	9858	9784	9684	9551	9379	9166	8906
29	9977	9961	9935	9896	9839	9761	9655	9516	9340	9122
30	9984	9972	9953	9924	9881	9820	9737	9626	9482	9301

χ^2 \ k	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
4	0,0000	0000								
5	0001	0001	0000	0000						
6	0006	0003	0001	0001	0000	0000				
7	0019	0010	0005	0003	0001	0001	0000	0000		
8	0049	0028	0016	0009	0005	0003	0001	0001	0000	
9	0108	0067	0040	0024	0014	0008	0005	0003	0001	
10	0211	0137	0087	0055	0033	0020	0012	0007	0004	
11	0372	0253	0168	0110	0071	0045	0028	0017	0010	
12	0604	0426	0295	0201	0134	0088	0057	0036	0023	
13	0914	0668	0480	0339	0235	0160	0108	0071	0046	
14	1304	0985	0731	0534	0383	0270	0187	0128	0086	
15	1770	1378	1054	0792	0586	0427	0306	0216	0150	

k / χ^2	21	22	23	24	25	26	27	28	29
16	0,2304	1841	1447	1119	0852	0638	0471	0342	0245
17	2889	2366	1907	1513	1182	0909	0689	0514	0378
18	3510	2940	2425	1970	1571	1242	0965	0739	0557
19	4149	3547	2988	2480	2029	1636	1300	1019	0787
20	4787	4170	3581	3032	2532	2084	1692	1355	1071
21	5411	4793	4189	3613	3074	2580	2137	1747	1409
22	6005	5401	4797	4207	3643	3113	2626	2187	1798
23	6560	5983	5392	4802	4224	3671	3150	2670	2235
24	7069	6528	5962	5384	4806	4240	3697	3185	2711
25	7528	7029	6497	5942	5376	4810	4255	3722	3218
26	7936	7483	6991	6468	5924	5369	4814	4270	3745
27	8291	7838	7440	6955	6441	5907	5362	4818	4283
28	8598	8243	7842	7400	6921	6415	5890	5356	4821
29	8860	8551	8197	7799	7361	6889	6391	5875	5349
30	9080	8815	8506	8152	7757	7324	6858	6368	5860

Таблица XIIa

ЗНАЧЕНИЯ χ_1^2 И χ_2^2, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯМ

$$F_k\left(\chi_1^2\right) = \frac{1-\gamma}{2}; \; F_k\left(\chi_2^2\right) = \frac{1+\gamma}{2} \quad (\S\, 13.5)$$

γ	0,99		0,95		0,90	
k	χ_1^2	χ_2^2	χ_1^2	χ_2^2	χ_1^2	χ_2^2
1	$39\cdot10^{-6}$	7,88	$98\cdot10^{-5}$	5,02	$39\cdot10^{-4}$	3,84
2	0,010	10,6	0,051	7,38	0,103	5,99
3	0,072	12,8	0,216	9,35	0,352	7,81
4	0,207	14,9	0,484	11,1	0,711	9,49
5	0,412	16,7	0,831	12,8	1,15	11,1
6	0,676	18,5	1,24	14,4	1,64	12,6
7	0,989	20,3	1,69	16,0	2,17	14,1
8	1,34	22,0	2,18	17,5	2,73	15,5
9	1,73	23,6	2,70	19,0	3,33	16,9
10	2,16	25,2	3,25	20,5	3,94	18,3
11	2,60	26,8	3,82	21,9	4,57	19,7
12	3,07	28,3	4,40	23,3	5,23	21,0
13	3,57	29,8	5,01	24,7	5,89	22,4
14	4,07	31,3	5,63	26,1	6,57	23,7
15	4,60	32,8	6,26	27,5	7,26	25,0
16	5,14	34,3	6,91	28,8	7,96	26,3
17	5,70	35,7	7,56	30,2	8,67	27,6
18	6,26	37,2	8,23	31,5	9,39	28,9
19	6,84	38,6	8,91	32,9	10,1	30,1
20	7,43	40,0	9,59	34,2	10,9	31,4
21	8,03	41,4	10,3	35,5	11,6	32,7
22	8,64	42,8	11,0	36,8	12,3	33,9
23	9,26	44,2	11,7	38,1	13,1	35,2
24	9,89	45,6	12,4	39,4	13,8	36,4
25	10,5	46,9	13,1	40,6	14,6	37,7
26	11,2	48,3	13,8	41,9	15,4	38,9
27	11,8	49,6	14,6	43,2	16,2	40,1
28	12,5	51,0	15,3	44,5	16,9	41,3
29	13,1	52,3	16,0	45,7	17,7	42,6
30	13,8	53,7	16,8	47,0	18,5	43,8

ТАБЛИЦА XIII

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

$$S_k(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$$

t \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0	0,500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
0,1	532	535	537	537	538	538	538	539	539	539
0,2	563	570	573	574	575	576	576	577	577	577
0,3	593	604	608	610	612	613	614	614	614	615
0,4	621	636	642	645	647	648	650	650	651	651
0,5	648	667	674	678	681	683	684	685	686	686
0,6	672	695	705	710	713	715	716	717	718	719
0,7	694	722	733	739	742	745	747	748	749	750
0,8	715	746	759	766	770	773	775	777	778	779
0,9	733	768	783	790	795	799	801	803	804	805
1,0	750	789	804	813	818	822	825	827	828	830
1,1	765	807	824	834	839	843	846	848	850	851
1,2	779	824	842	852	858	862	865	868	870	871
1,3	791	838	858	868	875	879	883	885	887	889
1,4	803	852	872	883	890	894	898	900	902	904
1,5	813	864	885	896	903	908	911	914	916	918
1,6	822	875	896	908	915	920	923	926	928	930
1,7	831	884	906	918	925	930	934	936	938	940
1,8	839	893	915	927	934	939	943	945	947	949
1,9	846	901	923	935	942	947	950	953	955	957
2,0	852	908	930	942	949	954	957	960	962	963
2,2	864	921	942	954	960	965	968	970	972	974
2,4	874	931	952	963	969	973	976	978	980	981
2,6	883	938	960	970	976	980	982	984	986	987
2,8	891	946	966	976	981	984	987	988	990	991
3,0	898	952	971	980	985	988	990	992	992	993
3,2	904	957	975	984	988	991	992	994	995	995
3,4	909	962	979	986	990	993	994	995	996	997
3,6	914	965	982	989	992	994	996	996	997	998
3,8	918	969	984	990	994	996	997	997	998	998
4,0	922	971	986	992	995	996	997	998	998	999

k / t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4,2	0,926	974	988	993	996	997	998	998	999	999
4,4	929	976	989	994	996	998	998	999	999	999
4,6	932	978	990	995	997	998	999	999	999	1,000
4,8	935	980	991	996	998	998	999	999	1,000	
5,0	937	981	992	996	998	999	999	1,000		
5,2	940	982	993	997	998	999	999			
5,4	942	984	994	997	998	999	1,000			
5,6	944	985	994	998	999	999				
5,8	946	986	995	998	999	999				
6,0	947	987	995	998	999	1,000				

k / t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	∞
0,0	0,500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
0,1	539	539	539	539	539	539	539	539	539	540
0,2	577	578	578	578	578	578	578	578	578	579
0,3	615	615	616	616	616	616	616	616	616	618
0,4	652	652	652	652	653	653	653	653	653	655
0,5	686	687	687	688	688	688	688	688	689	691
0,6	720	720	721	721	721	722	722	722	722	726
0,7	751	751	752	752	753	753	753	754	754	758
0,8	780	780	781	782	782	782	783	783	783	788
0,9	806	807	808	808	809	809	810	810	810	816
1,0	831	832	832	833	833	834	834	835	835	841
1,1	853	854	854	855	856	856	857	857	858	864
1,2	872	873	874	875	876	876	877	877	878	885
1,3	890	891	892	893	893	894	894	895	895	903
1,4	906	907	908	908	909	910	910	911	911	919
1,5	919	920	921	922	923	924	924	924	925	933
1,6	931	932	933	934	935	935	936	936	937	945
1,7	941	943	944	945	945	946	946	947	947	955
1,8	950	952	952	953	954	955	955	956	956	964
1,9	958	959	960	961	962	962	963	963	964	971
2,0	965	967	967	967	968	969	969	970	970	977
2,2	975	976	977	977	978	979	979	979	980	986
2,4	982	983	984	985	985	986	986	986	987	992
2,6	988	988	989	990	990	990	991	991	991	995
2,8	991	992	992	993	993	994	994	994	994	997
3,0	994	994	995	995	996	996	996	996	996	999

t \ k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	∞
3,2	0,996	996	996	997	997	997	997	998	998	999
3,4	997	997	998	998	998	998	998	998	998	1,000
3,6	998	998	998	999	999	999	999	999	999	
3,8	998	999	999	999	999	999	999	999	999	
4,0	999	999	999	999	999	1,000	1,000	1,000	1,000	
4,2	999	999	1,000	1,000	1,000					
4,4	1,000	1,000								

Таблица XIIIa

ЗНАЧЕНИЯ β_γ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЮ $2S_k(\beta_\gamma) - 1 = \gamma$

k \ γ	0,99	0,95	0,90	k \ γ	0,99	0,95	0,90
1	63,66	12,71	6,314	11	3,106	2,201	1,796
2	9,925	4,303	2,920	12	3,055	2,179	1,782
3	5,841	3,182	2,353	13	3,012	2,160	1,771
4	4,604	2,776	2,132	14	2,977	2,145	1,761
5	4,032	2,571	2,015	15	2,947	2,132	1,753
6	3,707	2,447	1,943	16	2,921	2,120	1,746
7	3,499	2,365	1,895	17	2,898	2,110	1,740
8	3,355	2,306	1,860	18	2,878	2,101	1,734
9	3,250	2,262	1,833	19	2,861	2,093	1,729
10	3,169	2,228	1,812	20	2,845	2,086	1,725

ТАБЛИЦА XIV

ВЕРОЯТНОСТИ $P(\lambda) = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}e^{-2k^2\lambda^2}$ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3				9999	9998	9997	9995	9992	9987	9981
0,4	0,9972	9960	9945	9926	9903	9874	9840	9800	9753	9700
0,5	9639	9572	9497	9415	9325	9228	9124	9013	8896	8772
0,6	8643	8508	8368	8222	8073	7920	7764	7604	7442	7278
0,7	7112	6945	6777	6609	6440	6272	6104	5936	5770	5605
0,8	5441	5280	5120	4962	4806	4653	4503	4355	4209	4067
0,9	3927	3791	3657	3527	3399	3275	3154	3036	2921	2809
1,0	2700	2594	2492	2392	2296	2202	2111	2024	1939	1857
1,1	1777	1700	1626	1555	1486	1420	1356	1294	1235	1177
1,2	1122	1070	1019	0970	0924	0879	0836	0794	0755	0717
1,3	0681	0646	0613	0582	0551	0522	0495	0469	0444	0420
1,4	0397	0375	0354	0335	0316	0298	0282	0266	0250	0236
1,5	0222	0209	0197	0185	0174	0164	0154	0145	0136	0127
1,6	0120	0112	0105	0098	0092	0086	0081	0076	0071	0066
1,7	0062	0058	0054	0050	0047	0044	0041	0038	0035	0033
1,8	0031	0029	0027	0025	0023	0021	0020	0019	0017	0016
1,9	0015	0014	0013	0012	0011	0010	0009	0009	0008	0007
2,0	0007	0006	0006	0005	0005	0004	0004	0004	0003	0003
2,1	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
2,2	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
2,3	0001	0000								

ТАБЛИЦА XV

ЗНАЧЕНИЯ β_p, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЮ

$$p_б = P\left\{\frac{X_{(n)} - \bar{x}}{s_1} > \beta_p\right\} \qquad (§ 14.2)$$

n \ $p_б$	0,10	0,05	0,01	n \ $p_б$	0,10	0,05	0,01
4	1,42	1,46	1,49	15	2,25	2,41	2,70
5	1,60	1,67	1,75	16	2,28	2,44	2,75
6	1,73	1,82	1,94	17	2,31	2,48	2,78
7	1,83	1,94	2,10	18	2,34	2,50	2,82
8	1,91	2,03	2,22	19	2,36	2,53	2,85
9	1,98	2,11	2,32	20	2,38	2,56	2,88
10	2,04	2,18	2,41	21	2,41	2,58	2,91
11	2,09	2,23	2,48	22	2,43	2,60	2,94
12	2,13	2,28	2,55	23	2,45	2,62	2,96
13	2,18	2,33	2,61	24	2,47	2,64	2,99
14	2,21	2,37	2,66	25	2,49	2,66	3,01

ТАБЛИЦА XVI

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
0,3	0,310	0,321	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,388	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,497	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,662	0,678
0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,775	0,793	0,811	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,950	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,188	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,528	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647
0,99	2,647	2,700	2,759	2,826	2,903	2,994	3,106	3,250	3,454	3,800

ТАБЛИЦА XVII

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ e^{-x}

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	1,0000	0,9990	9980	9970	9960	9950	9940	9930	9920	9910
0,01	0,9900	9891	9881	9871	9861	9851	9841	9831	9822	9812
0,02	9802	9792	9782	9773	9763	9753	9743	9734	9724	9714
0,03	9704	9695	9685	9675	9666	9656	9646	9637	9627	9618
0,04	9608	9598	9589	9579	9570	9560	9550	9541	9531	9522
0,05	9512	9503	9493	9484	9474	9465	9455	9446	9436	9427
0,06	9418	9408	9399	9389	9380	9371	9361	9352	9343	9333
0,07	9324	9315	9305	9296	9287	9277	9268	9259	9250	9240
0,08	9231	9222	9213	9204	9194	9185	9176	9167	9158	9148
0,09	9139	9130	9121	9112	9103	9094	9085	9076	9066	9057
0,10	9048	9039	9030	9021	9012	9003	8994	8985	8976	8967
0,11	8958	8949	8940	8932	8923	8914	8905	8896	8887	8878
0,12	8869	8860	8851	8843	8834	8825	8816	8807	8799	8790
0,13	8781	8772	8763	8755	8746	8737	8728	8720	8711	8702
0,14	8694	8685	8676	8668	8659	8650	8642	8633	8624	8616
0,15	8607	8598	8590	8581	8573	8564	8556	8547	8538	8530
0,16	8521	8513	8504	8496	8487	8479	8470	8462	8454	8445
0,17	8437	8428	8420	8411	8403	8395	8386	8378	8369	8361
0,18	8353	8344	8336	8328	8319	8311	8303	8294	8286	8278
0,19	8270	8261	8253	8245	8237	8228	8220	8212	8204	8195
0,20	8187	8179	8171	8163	8155	8146	8138	8130	8122	8114
0,21	8106	8098	8090	8082	8073	8065	8057	8049	8041	8033
0,22	8025	8017	8009	8001	7993	7985	7977	7969	7961	7953
0,23	7945	7937	7929	7922	7914	7906	7898	7890	7882	7874
0,24	7866	7858	7851	7843	7835	7827	7819	7811	7804	7796
0,25	7788	7780	7772	7765	7757	7749	7741	7734	7726	7718
0,26	7711	7703	7695	7687	7680	7672	7664	7657	7649	7641
0,27	7634	7626	7619	7611	7603	7596	7588	7581	7573	7565
0,28	7558	7550	7543	7535	7528	7520	7513	7505	7498	7490
0,29	7483	7475	7468	7460	7453	7445	7438	7430	7423	7416
0,30	7408	7401	7393	7386	7379	7371	7364	7357	7349	7342
0,31	7334	7327	7320	7312	7305	7298	7291	7283	7276	7269
0,32	7261	7254	7247	7240	7233	7225	7218	7211	7204	7196
0,33	7189	7182	7175	7168	7161	7153	7146	7139	7132	7125
0,34	7118	7111	7103	7096	7089	7082	7075	7068	7061	7054
0,35	7047	7040	7033	7026	7019	7012	7005	6998	6991	6984

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,36	0.6977	6970	6963	6956	6949	6942	6935	6928	6921	6914
0,37	6907	6900	6894	6887	6880	6873	6866	6859	6852	6845
0,38	6839	6832	6825	6818	6811	6805	6798	6791	6784	6777
0,39	6771	6764	6757	6750	6744	6737	6730	6723	6717	6710
0,40	6703	6697	6690	6683	6676	6670	6663	6656	6650	6643
0,41	6637	6630	6623	6617	6610	6603	6597	6590	6584	6577
0,42	6570	6564	6557	6551	6544	6538	6531	6525	6518	6512
0,43	6505	6499	6492	6486	6479	6473	6466	6460	6453	6447
0,44	6440	6434	6427	6421	6415	6408	6402	6395	6389	6383
0,45	6376	6370	6364	6357	6351	6344	6338	6332	6325	6319
0,46	6313	6307	6300	6294	6288	6281	6275	6269	6263	6256
0,47	6250	6244	6238	6231	6225	6219	6213	6206	6200	6194
0,48	6188	6182	6175	6169	6163	6157	6151	6145	6139	6132
0,49	6126	6120	6114	6108	6102	6096	6090	6084	6077	6071
0,50	6065	6059	6053	6047	6041	6035	6029	6023	6017	6011
0,51	6005	5999	5993	5987	5981	5975	5969	5963	5957	5951
0,52	5945	5939	5933	5927	5921	5916	5910	5904	5898	5892
0,53	5886	5880	5874	5868	5863	5857	5851	5845	5839	5833
0,54	5827	5822	5816	5810	5804	5798	5793	5787	5781	5775
0,55	5769	5764	5758	5752	5746	5741	5735	5729	5724	5718
0,56	5712	5706	5701	5695	5689	5684	5678	5672	5667	5661
0,57	5655	5650	5644	5638	5633	5627	5621	5616	5610	5605
0,58	5599	5593	5588	5582	5577	5571	5565	5560	5554	5549
0,59	5543	5538	5532	5527	5521	5516	5510	5505	5499	5494
0,60	5488	5483	5477	5472	5466	5461	5455	5450	5444	5439
0,61	5434	5428	5423	5417	5412	5406	5401	5396	5390	5385
0,62	5379	5374	5369	5363	5358	5353	5347	5342	5337	5331
0,63	5326	5321	5315	5310	5305	5299	5294	5289	5283	5278
0,64	5273	5268	5262	5257	5252	5247	5241	5236	5231	5226
0,65	5220	5215	5210	5205	5200	5194	5189	5184	5179	5174
0,66	5169	5163	5158	5153	5148	5143	5138	5132	5127	5122
0,67	5117	5112	5107	5102	5097	5092	5086	5081	5076	5071
0,68	5066	5061	5056	5051	5046	5041	5036	5031	5026	5021
0,69	5016	5011	5006	5001	4996	4991	4986	4981	4976	4971
0,70	4966	4961	4956	4951	4946	4941	4936	4931	4926	4921
0,71	4916	4912	4907	4902	4897	4892	4887	4882	4877	4872
0,72	4868	4863	4858	4853	4848	4843	4838	4834	4829	4824
0,73	4819	4814	4809	4805	4800	4795	4790	4785	4781	4776
0,74	4771	4766	4762	4757	4752	4747	4743	4738	4733	4728
0,75	4724	4719	4714	4710	4705	4700	4695	4691	4686	4681

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,76	0,4677	4672	4667	4663	4658	4653	4649	4644	4639	4635
0,77	4630	4626	4621	4616	4612	4607	4602	4598	4593	4589
0,78	4584	4579	4575	4570	4566	4561	4557	4552	4548	4543
0,79	4538	4534	4529	4525	4520	4516	4511	4507	4502	4498
0,80	4493	4489	4484	4480	4475	4471	4466	4462	4457	4453
0,81	4449	4444	4440	4435	4431	4426	4422	4418	4413	4409
0,82	4404	4400	4396	4391	4387	4382	4378	4374	4369	4365
0,83	4360	4356	4352	4347	4343	4339	4334	4330	4326	4321
0,84	4317	4313	4308	4304	4300	4296	4291	4287	4283	4278
0,85	4274	4270	4266	4261	4257	4253	4249	4244	4240	4236
0,86	4232	4227	4223	4219	4215	4211	4206	4202	4198	4194
0,87	4190	4185	4181	4177	4173	4169	4164	4160	4156	4152
0,88	4148	4144	4140	4135	4131	4127	4123	4119	4115	4111
0,89	4107	4102	4098	4094	4090	4086	4082	4078	4074	4070
0,90	4066	4062	4058	4054	4049	4045	4041	4037	4033	4029
0,91	4025	4021	4017	4013	4009	4005	4001	3997	3993	3989
0,92	3985	3981	3977	3973	3969	3965	3961	3957	3953	3949
0,93	3946	3942	3938	3934	3930	3926	3922	3918	3914	3910
0,94	3906	3902	3898	3895	3891	3887	3883	3879	3875	3871
0,95	3867	3864	3860	3856	3852	3848	3844	3840	3837	3833
0,96	3829	3825	3821	3817	3814	3810	3806	3802	3798	3795
0,97	3791	3787	3783	3779	3776	3772	3768	3764	3761	3757
0,98	3753	3749	3746	3742	3738	3734	3731	3727	3723	3719
0,99	3716	3712	3708	3705	3701	3697	3694	3690	3686	3682
1,00	3679	3675	3671	3668	3664	3660	3657	3653	3649	3646
1,01	3642	3639	3635	3631	3628	3624	3620	3617	3613	3610
1,02	3606	3602	3599	3595	3592	3588	3584	3581	3577	3574
1,03	3570	3567	3563	3559	3556	3552	3549	3545	3542	3538
1,04	3535	3531	3527	3524	3520	3517	3513	3510	3506	3503
1,05	3499	3496	3492	3489	3485	3482	3478	3475	3471	3468
1,06	3465	3461	3458	3454	3451	3447	3444	3440	3437	3434
1,07	3430	3427	3423	3420	3416	3413	3410	3406	3403	3399
1,08	3396	3393	3389	3386	3382	3379	3376	3372	3369	3366
1,09	3362	3359	3355	3352	3349	3345	3342	3339	3335	3332
1,10	3329	3325	3322	3319	3315	3312	3309	3305	3302	3299
1,11	3296	3292	3289	3286	3282	3279	3276	3273	3269	3266
1,12	3263	3260	3256	3253	3250	3247	3243	3240	3237	3234
1,13	3230	3227	3224	3221	3217	3214	3211	3208	3205	3201
1,14	3198	3195	3192	3189	3185	3182	3179	3176	3173	3170
1,15	3166	3163	3160	3157	3154	3151	3147	3144	3141	3138

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,16	0,3135	3132	3129	3125	3122	3119	3116	3113	3110	3107
1,17	3104	3101	3097	3094	3091	3088	3085	3082	3079	3076
1,18	3073	3070	3067	3064	3061	3057	3054	3051	3048	3045
1,19	3042	3039	3036	3033	3030	3027	3024	3021	3018	3015
1,20	3012	3009	3006	3003	3000	2997	2994	2991	2988	2985
1,21	2982	2979	2976	2973	2970	2967	2964	2961	2958	2955
1,22	2952	2949	2946	2943	2941	2938	2935	2932	2929	2926
1,23	2923	2920	2917	2914	2911	2908	2905	2903	2900	2897
1,24	2894	2891	2888	2885	2882	2879	2877	2874	2871	2868
1,25	2865	2862	2859	2856	2854	2851	2848	2845	2842	2839
1,26	2837	2834	2831	2828	2825	2822	2820	2817	2814	2811
1,27	2808	2806	2803	2800	2797	2794	2792	2789	2786	2783
1,28	2780	2778	2775	2772	2769	2767	2764	2761	2758	2755
1,29	2753	2750	2747	2744	2742	2739	2736	2734	2731	2728
1,30	2725	2723	2720	2717	2714	2712	2709	2706	2704	2701
1,31	2698	2696	2693	2690	2687	2685	2682	2679	2677	2674
1,32	2671	2669	2666	2663	2661	2658	2655	2653	2650	2647
1,33	2645	2642	2639	2637	2634	2632	2629	2626	2624	2621
1,34	2618	2616	2613	2611	2608	2605	2603	2600	2598	2595
1,35	2592	2590	2587	2585	2582	2579	2577	2574	2572	2569
1,36	2567	2564	2561	2559	2556	2554	2551	2549	2546	2544
1,37	2541	2539	2536	2533	2531	2528	2526	2523	2521	2518
1,38	2516	2513	2511	2508	2506	2503	2501	2498	2496	2493
1,39	2491	2488	2486	2483	2481	2478	2476	2473	2471	2468
1,40	2466	2464	2461	2459	2456	2454	2451	2449	2446	2444
1,41	2441	2439	2437	2434	2432	2429	2427	2424	2422	2420
1,42	2417	2415	2412	2410	2407	2405	2403	2400	2398	2395
1,43	2393	2391	2388	2386	2384	2381	2379	2376	2374	2372
1,44	2369	2367	2365	2362	2360	2357	2355	2353	2350	2348
1,45	2346	2343	2341	2339	2336	2334	2332	2329	2327	2325
1,46	2322	2320	2318	2315	2313	2311	2308	2306	2304	2302
1,47	2299	2297	2295	2292	2290	2288	2286	2283	2281	2279
1,48	2276	2274	2272	2270	2267	2265	2263	2260	2258	2256
1,49	2254	2251	2249	2247	2245	2242	2240	2238	2236	2234
1,50	2231	2229	2227	2225	2222	2220	2218	2216	2214	2211
1,51	2209	2207	2205	2202	2200	2198	2196	2194	2191	2189
1,52	2187	2185	2183	2181	2178	2176	2174	2172	2170	2168
1,53	2165	2163	2161	2159	2157	2155	2152	2150	2148	2146
1,54	2144	2142	2140	2137	2135	2133	2131	2129	2127	2125
1,55	2122	2120	2118	2116	2114	2112	2110	2108	2106	2103

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,56	0,2101	2099	2097	2095	2093	2091	2089	2087	2085	2083
1,57	2080	2078	2076	2074	2072	2070	2068	2066	2064	2062
1,58	2060	2058	2056	2054	2052	2049	2047	2045	2043	2041
1,59	2039	2037	2035	2033	2031	2029	2027	2025	2023	2021
1,60	2019	2017	2015	2013	2011	2009	2007	2005	2003	2001
1,61	1999	1997	1995	1993	1991	1989	1987	1985	1983	1981
1,62	1979	1977	1975	1973	1971	1969	1967	1965	1963	1961
1,63	1959	1957	1955	1953	1951	1950	1948	1946	1944	1942
1,64	1940	1938	1936	1934	1932	1930	1928	1926	1924	1922
1,65	1920	1919	1917	1915	1913	1911	1909	1907	1905	1903
1,66	1901	1899	1898	1896	1894	1892	1890	1888	1886	1884
1,67	1882	1881	1879	1877	1875	1873	1871	1869	1867	1866
1,68	1864	1862	1860	1858	1856	1854	1853	1851	1849	1847
1,69	1845	1843	1842	1840	1838	1836	1834	1832	1830	1829
1,70	1827	1825	1823	1821	1820	1818	1816	1814	1812	1810
1,71	1809	1807	1805	1803	1801	1800	1798	1796	1794	1792
1,72	1791	1789	1787	1785	1784	1782	1780	1778	1776	1775
1,73	1773	1771	1769	1768	1766	1764	1762	1760	1759	1757
1,74	1755	1753	1752	1750	1748	1746	1745	1743	1741	1739
1,75	1738	1736	1734	1733	1731	1729	1727	1726	1724	1722
1,76	1720	1719	1717	1715	1714	1712	1710	1708	1707	1705
1,77	1703	1702	1700	1698	1697	1695	1693	1691	1690	1688
1,78	1686	1685	1683	1681	1680	1678	1676	1675	1673	1671
1,79	1670	1668	1666	1665	1663	1661	1660	1658	1656	1655
1,80	1653	1651	1650	1648	1646	1645	1643	1641	1640	1638
1,81	1637	1635	1633	1632	1630	1628	1627	1625	1624	1622
1,82	1620	1619	1617	1615	1614	1612	1611	1609	1607	1606
1,83	1604	1603	1601	1599	1598	1596	1595	1593	1591	1590
1,84	1588	1587	1585	1583	1582	1580	1579	1577	1576	1574
1,85	1572	1571	1569	1568	1566	1565	1563	1561	1560	1558
1,86	1557	1555	1554	1552	1551	1549	1547	1546	1544	1543
1,87	1541	1540	1538	1537	1535	1534	1532	1530	1529	1527
1,88	1526	1524	1523	1521	1520	1518	1517	1515	1514	1512
1,89	1511	1509	1508	1506	1505	1503	1502	1500	1499	1497
1,90	1496	1494	1493	1491	1490	1488	1487	1485	1484	1482
1,91	1481	1479	1478	1476	1475	1473	1472	1470	1469	1468
1,92	1466	1465	1463	1462	1460	1459	1457	1456	1454	1453
1,93	1451	1450	1449	1447	1446	1444	1443	1441	1440	1438
1,94	1437	1436	1434	1433	1431	1430	1428	1427	1426	1424
1,95	1423	1421	1420	1418	1417	1416	1414	1413	1411	1410

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,96	0,1409	1407	1406	1404	1403	1402	1400	1399	1397	1396
1,97	1395	1393	1392	1390	1389	1388	1386	1385	1383	1382
1,98	1381	1379	1378	1377	1375	1374	1372	1371	1370	1368
1,99	1367	1366	1364	1363	1361	1360	1359	1357	1356	1355
2,00	1353	1352	1351	1349	1348	1347	1345	1344	1343	1341
2,01	1340	1339	1337	1336	1335	1333	1332	1331	1329	1328
2,02	1327	1325	1324	1323	1321	1320	1319	1317	1316	1315
2,03	1313	1312	1311	1309	1308	1307	1305	1304	1303	1302
2,04	1300	1299	1298	1296	1295	1294	1293	1291	1290	1289
2,05	1287	1286	1285	1283	1282	1281	1280	1278	1277	1276
2,06	1275	1273	1272	1271	1269	1268	1267	1266	1264	1263
2,07	1262	1261	1259	1258	1257	1256	1254	1253	1252	1251
2,08	1249	1248	1247	1246	1244	1243	1242	1241	1239	1238
2,09	1237	1236	1234	1233	1232	1231	1229	1228	1227	1226
2,10	1225	1223	1222	1221	1220	1218	1217	1216	1215	1214
2,11	1212	1211	1210	1209	1208	1206	1205	1204	1203	1202
2,12	1200	1199	1198	1197	1196	1194	1193	1192	1191	1190
2,13	1188	1187	1186	1185	1184	1182	1181	1180	1179	1178
2,14	1177	1175	1174	1173	1172	1171	1170	1168	1167	1166
2,15	1165	1164	1163	1161	1160	1159	1158	1157	1156	1154
2,16	1153	1152	1151	1150	1149	1147	1146	1145	1144	1143
2,17	1142	1141	1139	1138	1137	1136	1135	1134	1133	1132
2,18	1130	1129	1128	1127	1126	1125	1124	1123	1121	1120
2,19	1119	1118	1117	1116	1115	1114	1112	1111	1110	1109
2,20	1108	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100	1099	1098
2,21	1097	1096	1095	1094	1093	1092	1090	1089	1088	1087
2,22	1086	1085	1084	1083	1082	1081	1080	1079	1077	1076
2,23	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1069	1068	1067	1066
2,24	1065	1064	1062	1061	1060	1059	1058	1057	1056	1055
2,25	1054	1053	1052	1051	1050	1049	1048	1047	1046	1045
2,26	1044	1042	1041	1040	1039	1038	1037	1036	1035	1034
2,27	1033	1032	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024
2,28	1023	1022	1021	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014
2,29	1013	1012	1011	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004
2,30	1003	1002	1001	1000	0999	0998	0997	0996	0995	0994
2,31	0993	0992	0991	0990	0989	0988	0987	0986	0985	0984
2,32	0983	0982	0981	0980	0979	0978	0977	0976	0975	0974
2,33	0973	0972	0971	0970	0969	0968	0967	0966	0965	0964
2,34	0963	0962	0961	0960	0959	0958	0958	0957	0956	0955
2,35	0954	0953	0952	0951	0950	0949	0948	0947	0946	0945

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,36	0,0944	0943	0942	0941	0940	0939	0939	0938	0937	0936
2,37	0935	0934	0933	0932	0931	0930	0929	0928	0927	0926
2,38	0926	0925	0924	0923	0922	0921	0920	0919	0918	0917
2,39	0916	0915	0914	0914	0913	0912	0911	0910	0909	0908
2,40	0907	0906	0905	0904	0904	0903	0902	0901	0900	0899
2,41	0898	0897	0896	0895	0895	0894	0893	0892	0891	0890
2,42	0889	0888	0887	0887	0886	0885	0884	0883	0882	0881
2,43	0880	0879	0879	0878	0877	0876	0875	0874	0873	0872
2,44	0872	0871	0870	0869	0868	0867	0866	0866	0865	0864
2,45	0863	0862	0861	0860	0859	0859	0858	0857	0856	0855
2,46	0854	0853	0853	0852	0851	0850	0849	0848	0848	0847
2,47	0846	0845	0844	0843	0842	0842	0841	0840	0839	0838
2,48	0837	0837	0836	0835	0834	0833	0832	0832	0831	0830
2,49	0829	0828	0827	0827	0826	0825	0824	0823	0822	0822
2,50	0821	0820	0819	0818	0818	0817	0816	0815	0814	0813
2,51	0813	0812	0811	0810	0809	0809	0808	0807	0806	0805
2,52	0805	0804	0803	0802	0801	0801	0800	0799	0798	0797
2,53	0797	0796	0795	0794	0793	0793	0792	0791	0790	0789
2,54	0789	0788	0787	0786	0786	0785	0784	0783	0782	0782
2,55	0781	0780	0779	0778	0778	0777	0776	0775	0775	0774
2,56	0773	0772	0772	0771	0770	0769	0768	0768	0767	0766
2,57	0765	0765	0764	0763	0762	0762	0761	0760	0759	0758
2,58	0758	0757	0756	0755	0755	0754	0753	0752	0752	0751
2,59	0750	0749	0749	0748	0747	0746	0746	0745	0744	0743
2,60	0743	0742	0741	0741	0740	0739	0738	0738	0737	0736
2,61	0735	0735	0734	0733	0732	0732	0731	0730	0729	0729
2,62	0728	0727	0727	0726	0725	0724	0724	0723	0722	0722
2,63	0721	0720	0719	0719	0718	0717	0716	0716	0715	0714
2,64	0714	0713	0712	0711	0711	0710	0709	0709	0708	0707
2,65	0707	0706	0705	0704	0704	0703	0702	0702	0701	0700
2,66	0699	0699	0698	0697	0697	0696	0695	0695	0694	0693
2,67	0693	0692	0691	0690	0690	0689	0688	0688	0687	0686
2,68	0686	0685	0684	0684	0683	0682	0682	0681	0680	0679
2,69	0679	0678	0677	0677	0676	0675	0675	0674	0673	0673
2,70	0672	0671	0671	0670	0669	0669	0668	0667	0667	0666
2,71	0665	0665	0664	0663	0663	0662	0661	0661	0660	0659
2,72	0659	0658	0657	0657	0656	0655	0655	0654	0653	0653
2,73	0652	0652	0651	0650	0650	0649	0648	0648	0647	0646
2,74	0646	0645	0644	0644	0643	0642	0642	0641	0641	0640
2,75	0639	0639	0638	0637	0637	0636	0635	0635	0634	0634

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,76	0,0633	0632	0632	0631	0630	0630	0629	0628	0628	0627
2,77	0627	0626	0625	0625	0624	0623	0623	0622	0622	0621
2,78	0620	0620	0619	0619	0618	0617	0617	0616	0615	0615
2,79	0614	0614	0613	0612	0612	0611	0611	0610	0609	0609
2,80	0608	0607	0607	0606	0606	0605	0604	0604	0603	0603
2,81	0602	0601	0601	0600	0600	0599	0598	0598	0597	0597
2,82	0596	0595	0595	0594	0594	0593	0592	0592	0591	0591
2,83	0590	0590	0589	0588	0588	0587	0587	0586	0585	0585
2,84	0584	0584	0583	0583	0582	0581	0581	0580	0580	0579
2,85	0578	0578	0577	0577	0576	0576	0575	0574	0574	0573
2,86	0573	0572	0572	0571	0570	0570	0569	0569	0568	0568
2,87	0567	0566	0566	0565	0565	0564	0564	0563	0562	0562
2,88	0561	0561	0560	0560	0559	0559	0558	0557	0557	0556
2,89	0556	0555	0555	0554	0554	0553	0552	0552	0551	0551
2,90	0550	0550	0549	0549	0548	0547	0547	0546	0546	0545
2,91	0545	0544	0544	0543	0543	0542	0541	0541	0540	0540
2,92	0539	0539	0538	0538	0537	0537	0536	0536	0535	0535
2,93	0534	0533	0533	0532	0532	0531	0531	0530	0530	0529
2,94	0529	0528	0528	0527	0527	0526	0525	0525	0524	0524
2,95	0523	0523	0522	0522	0521	0521	0520	0520	0519	0519
2,96	0518	0518	0517	0517	0516	0516	0515	0515	0514	0514
2,97	0513	0513	0512	0511	0511	0510	0510	0509	0509	0508
2,98	0508	0507	0507	0506	0506	0505	0505	0504	0504	0503
2,99	0503	0502	0502	0501	0501	0500	0500	0499	0499	0498
3,00	0498	0497	0497	0496	0496	0495	0495	0494	0494	0493
3,01	0493	0492	0492	0491	0491	0490	0490	0489	0489	0489
3,02	0488	0488	0487	0487	0486	0486	0485	0485	0484	0484
3,03	0483	0483	0482	0482	0481	0481	0480	0480	0479	0479
3,04	0478	0478	0477	0477	0476	0476	0475	0475	0475	0474
3,05	0474	0473	0473	0472	0472	0471	0471	0470	0470	0469
3,06	0469	0468	0468	0467	0467	0467	0466	0466	0465	0465
3,07	0464	0464	0463	0463	0462	0462	0461	0461	0461	0460
3,08	0460	0459	0459	0458	0458	0457	0457	0456	0456	0455
3,09	0455	0455	0454	0454	0453	0453	0452	0452	0451	0451
3,10	0450	0450	0450	0449	0449	0448	0448	0447	0447	0446
3,11	0446	0446	0445	0445	0444	0444	0443	0443	0442	0442
3,12	0442	0441	0441	0440	0440	0439	0439	0438	0438	0438
3,13	0437	0437	0436	0436	0435	0435	0435	0434	0434	0433
3,14	0433	0432	0432	0432	0431	0431	0430	0430	0429	0429
3,15	0429	0428	0428	0427	0427	0426	0426	0426	0425	0425

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,16	0,0424	0424	0423	0423	0423	0422	0422	0421	0421	0420
3,17	0420	0420	0419	0419	0418	0418	0418	0417	0417	0416
3,18	0416	0415	0415	0415	0414	0414	0413	0413	0413	0412
3,19	0412	0411	0411	0410	0410	0410	0409	0409	0408	0408
3,20	0408	0407	0407	0406	0406	0406	0405	0405	0404	0404
3,21	0404	0403	0403	0402	0402	0402	0401	0401	0400	0400
3,22	0400	0399	0399	0398	0398	0398	0397	0397	0396	0396
3,23	0396	0395	0395	0394	0394	0394	0393	0393	0392	0392
3,24	0392	0391	0391	0390	0390	0390	0389	0389	0389	0388
3,25	0388	0387	0387	0387	0386	0386	0385	0385	0385	0384
3,26	0384	0384	0383	0383	0382	0382	0382	0381	0381	0380
3,27	0380	0380	0379	0379	0379	0378	0378	0377	0377	0377
3,28	0376	0376	0376	0375	0375	0374	0374	0374	0373	0373
3,29	0373	0372	0372	0371	0371	0371	0370	0370	0370	0369
3,30	0369	0368	0368	0368	0367	0367	0367	0366	0366	0366
3,31	0365	0365	0364	0364	0364	0363	0363	0363	0362	0362
3,32	0362	0361	0361	0360	0360	0360	0359	0359	0359	0358
3,33	0358	0358	0357	0357	0357	0356	0356	0355	0355	0355
3,34	0354	0354	0354	0353	0353	0353	0352	0352	0352	0351
3,35	0351	0350	0350	0350	0349	0349	0349	0348	0348	0348
3,36	0347	0347	0347	0346	0346	0346	0345	0345	0345	0344
3,37	0344	0344	0343	0343	0343	0342	0342	0341	0341	0341
3,38	0340	0340	0340	0339	0339	0339	0338	0338	0338	0337
3,39	0337	0337	0336	0336	0336	0335	0335	0335	0334	0334
3,40	0334	0333	0333	0333	0332	0332	0332	0331	0331	0331
3,41	0330	0330	0330	0329	0329	0329	0328	0328	0328	0327
3,42	0327	0327	0326	0326	0326	0325	0325	0325	0325	0324
3,43	0324	0324	0323	0323	0323	0322	0322	0322	0321	0321
3,44	0321	0320	0320	0320	0319	0319	0319	0318	0318	0318
3,45	0317	0317	0317	0317	0316	0316	0316	0315	0315	0315
3,46	0314	0314	0314	0313	0313	0313	0312	0312	0312	0311
3,47	0311	0311	0311	0310	0310	0310	0309	0309	0309	0308
3,48	0308	0308	0307	0307	0307	0307	0306	0306	0306	0305
3,49	0305	0305	0304	0304	0304	0303	0303	0303	0303	0302
3,50	0302	0302	0301	0301	0301	0300	0300	0300	0300	0299
3,51	0299	0299	0298	0298	0298	0297	0297	0297	0297	0296
3,52	0296	0296	0295	0295	0295	0295	0294	0294	0294	0293
3,53	0293	0293	0292	0292	0292	0292	0291	0291	0291	0290
3,54	0290	0290	0290	0289	0289	0289	0288	0288	0288	0288
3,55	0287	0287	0287	0286	0286	0286	0286	0285	0285	0285
3,56	0284	0284	0284	0284	0283	0283	0283	0282	0282	0282
3,57	0282	0281	0281	0281	0280	0280	0280	0280	0279	0279
3,58	0279	0278	0278	0278	0278	0277	0277	0277	0277	0276
3,59	0276	0276	0275	0275	0275	0275	0274	0274	0274	0274
3,60	0273	0273	0273	0272	0272	0272	0272	0271	0271	0271

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,61	0,0271	0270	0270	0270	0269	0269	0269	0269	0268	0268
3,62	0268	0268	0267	0267	0267	0266	0266	0266	0266	0265
3,63	0265	0265	0265	0264	0264	0264	0264	0263	0263	0263
3,64	0263	0262	0262	0262	0261	0261	0261	0261	0260	0260
3,65	0260	0260	0259	0259	0259	0259	0258	0258	0258	0258
3,66	0257	0257	0257	0257	0256	0256	0256	0256	0255	0255
3,67	0255	0255	0254	0254	0254	0253	0253	0253	0253	0252
3,68	0252	0252	0252	0251	0251	0251	0251	0250	0250	0250
3,69	0250	0249	0249	0249	0249	0248	0248	0248	0248	0247
3,70	0247	0247	0247	0246	0246	0246	0246	0246	0245	0245
3,71	0245	0245	0244	0244	0244	0244	0243	0243	0243	0243
3,72	0242	0242	0242	0242	0241	0241	0241	0241	0240	0240
3,73	0240	0240	0239	0239	0239	0239	0238	0238	0238	0238
3,74	0238	0237	0237	0237	0237	0236	0236	0236	0236	0235
3,75	0235	0235	0235	0234	0234	0234	0234	0234	0233	0233
3,76	0233	0233	0232	0232	0232	0232	0231	0231	0231	0231
3,77	0231	0230	0230	0230	0230	0229	0229	0229	0229	0228
3,78	0228	0228	0228	0228	0227	0227	0227	0227	0226	0226
3,79	0226	0226	0226	0225	0225	0225	0225	0224	0224	0224
3,80	0224	0223	0223	0223	0223	0223	0222	0222	0222	0222
3,81	0221	0221	0221	0221	0221	0220	0220	0220	0220	0219
3,82	0219	0219	0219	0219	0218	0218	0218	0218	0218	0217
3,83	0217	0217	0217	0216	0216	0216	0216	0216	0215	0215
3,84	0215	0215	0215	0214	0214	0214	0214	0213	0213	0213
3,85	0213	0213	0212	0212	0212	0212	0212	0211	0211	0211
3,86	0211	0210	0210	0210	0210	0210	0209	0209	0209	0209
3,87	0209	0208	0208	0208	0208	0208	0207	0207	0207	0207
3,88	0207	0206	0206	0206	0206	0205	0205	0205	0205	0205
3,89	0204	0204	0204	0204	0204	0203	0203	0203	0203	0203
3,90	,0202	0202	0202	0202	0202	0201	0201	0201	0201	0201
3,91	0200	0200	0200	0200	0200	0199	0199	0199	0199	0199
3,92	0198	0198	0198	0198	0198	0197	0197	0197	0197	0197
3,93	0196	0196	0196	0196	0196	0195	0195	0195	0195	0195
3,94	0194	0194	0194	0194	0194	0194	0193	0193	0193	0193
3,95	0193	0192	0192	0192	0192	0192	0191	0191	0191	0191
3,96	0191	0190	0190	0190	0190	0190	0189	0189	0189	0189
3,97	0189	0189	0188	0188	0188	0188	0188	0187	0187	0187
3,98	0187	0187	0186	0186	0186	0186	0186	0186	0185	0185
3,99	0185	0185	0185	0184	0184	0184	0184	0184	0184	0183
4,00	0183	0183	0183	0183	0182	0182	0182	0182	0182	0182

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
4,001—4,003	0,0183	4,280—4,286	0,0138	4,673—4,683	0,0093
4,004—4,009	0182	4,287—4,294	0137	4,684—4,694	0092
4,010—4,014	0181	4,295—4,301	0136	4,695—4,704	0091
4,015—4,020	0180	4,302—4,308	0135	4,705—4,716	0090
4,021—4,025	0179	4,309—4,316	0134	4,717—4,727	0089
4,026—4,031	0178	4,317—4,323	0133	4,728—0,738	0088
4,032—4,037	0177	4,324—4,331	0132	4,739—4,750	0087
4,038—4,042	0176	4,332—4,338	0131	4,751—4,761	0086
4,043—4,048	0175	4,339—4,346	0130	4,762—4,773	0085
4,049—4,054	0174	4,347—4,354	0129	4,774—4,785	0084
4,055—4,059	0173	4,355—4,362	0128	4,786—4,797	0083
4,060—4,065	0172	4,363—4,370	0127	4,798—4,809	0082
4,066—4,071	0171	4,371—4,378	0126	4,810—4,822	0081
4,072—4,077	0170	4,379—4,386	0125	4,823—4,834	0080
4,078—4,083	0169	4,387—4,394	0124	4,835—4,847	0079
4,084—4,089	0168	4,395—4,402	0123	4,848—4,860	0078
4,090—4,095	0167	4,403—4,410	0122	4,861—4,873	0077
4,096—4,101	0166	4,411—4,418	0121	4,874—4,886	0076
4,102—4,107	0165	4,419—4,427	0120	4,887—4,899	0075
4,108—4,113	0164	4,428—4,435	0119	4,900—4,913	0074
4,114—4,119	0163	4,436—4,443	0118	4,914—4,926	0073
4,120—4,125	0162	4,444—4,452	0117	4,927—4,940	0072
4,126—4,132	0161	4,453—4,461	0116	4,941—4,954	0071
4,133—4,138	0160	4,462—4,469	0115	4,955—4,969	0070
4,139—4,144	0159	4,470—4,478	0114	4,970—4,983	0069
4,145—4,150	0158	4,479—4,487	0113	4,984—4,998	0068
4,151—4,157	0157	4,488—4,496	0112	4,999—5,013	0067
4,158—4,163	0156	4,497—4,505	0111	5,014—5,028	0066
4,164—4,170	0155	4,506—4,514	0110	5,029—5,043	0065
4,171—4,176	0154	4,515—4,523	0109	5,044—5,059	0064
4,177—4,183	0153	4,524—4,532	0108	5,060—5,075	0063
4,184—4,189	0152	4,533—4,542	0107	5,076—5,091	0062
4,190—4,196	0151	4,543—4,551	0106	5,092—5,107	0061
4,197—4,203	0150	4,552—4,561	0105	5,108—5,124	0060
4,204—0,209	0149	4,562—4,570	0104	5,125—5,141	0059
4,210—4,216	0148	4,571—4,580	0103	5,142—5,158	0058
4,217—4,223	0147	4,581—4,590	0102	5,159—5,176	0057
4,224—4,230	0146	4,591—4,600	0101	5,177—5,193	0056
4,231—4,237	0145	4,601—4,610	0100	5,194—5,212	0055
4,238—4,244	0144	4,611—4,620	0099	5,213—5,230	0054
4,245—4,250	0143	4,621—4,630	0098	5,231—5,249	0053
4,251—4,258	0142	4,631—4,640	0097	5,250—5,268	0052
4,259—4,265	0141	4,641—4,651	0096	5,269—5,288	0051
4,266—4,272	0140	4,652—4,661	0095	5,289—5,308	0050
4,273—4,279	0139	4,662—4,672	0094	5,309—5,328	0049

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
5,329—5,349	0,0048	5,861—5,896	0,0028	7,071—7,195	0,0008
5,350—5,370	0047	5,897—5,933	0027	7,196—7,338	0007
5,371—5,392	0046	5,934—5,971	0026	7,339—7,505	0006
5,393—5,414	0045	5,972—6,011	0025	7,506—7,706	0005
5,415—5,437	0044	6,012—6,053	0024	7,707—7,957	0004
5,438—5,460	0043	6,054—6,096	0023	7,958—8,294	0003
5,461—5,484	0042	6,097—6,142	0022	8,295—8,804	0002
5,485—5,509	0041	6,143—6,189	0021	8,805—9,903	0001
5,510—5,534	0040	6,190—6,239	0020	9,904— ∞	0000
5,535—5,559	0039	6,240—6,292	0019		
5,560—5,585	0038	6,293—6,348	0018		
5,586—5,613	0037	6,349—6,406	0017		
5,614—5,640	0036	6,407—6,469	0016		
5,641—5,669	0035	6,470—6,536	0015		
5,670—5,698	0034	6,537—6,607	0014		
5,699—5,729	0033	6,608—6,684	0013		
5,730—5,760	0032	6,685—6,767	0012		
5,761—5,792	0031	6,768—6,858	0011		
5,793—5,825	0030	6,859—6,959	0010		
5,826—5,860	0029	6,960—7,070	0009		

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
1	0,36788	11	$0,16702\cdot10^{-4}$	30	$0,93576\cdot10^{-13}$
2	0,13534	12	$0,61442\cdot10^{-5}$	40	$0,42483\cdot10^{-17}$
3	$0,49787\cdot10^{-1}$	13	$0,22603\cdot10^{-5}$	50	$0,19287\cdot10^{-21}$
4	$0,18316\cdot10^{-1}$	14	$0,83153\cdot10^{-6}$	60	$0,87565\cdot10^{-26}$
5	$0,67379\cdot10^{-2}$	15	$0,30590\cdot10^{-6}$	70	$0,39754\cdot10^{-30}$
6	$0,24788\cdot10^{-2}$	16	$0,11254\cdot10^{-6}$	80	$0,18049\cdot10^{-34}$
7	$0,91188\cdot10^{-3}$	17	$0,41399\cdot10^{-7}$	90	$0,81940\cdot10^{-39}$
8	$0,33546\cdot10^{-3}$	18	$0,15230\cdot10^{-7}$	100	$0,37201\cdot10^{-43}$
9	$0,12341\cdot10^{-3}$	19	$0,56028\cdot10^{-8}$	150	$0,71751\cdot10^{-65}$
10	$0,45400\cdot10^{-4}$	20	$0,20612\cdot10^{-8}$	200	$0,13839\cdot10^{-86}$

ЛИТЕРАТУРА

Ко всем разделам

1. Боев Г. П. Теория вероятностей. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Изд. 3-е. М., «Наука», 1964.

3. Ганин М. П., Свешников А. А. Теория вероятностей и ее применение для решения задач ВМФ. Л., ВМОЛУА, 1968.

4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

5. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гостехиздат, 1955.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд. 2-е, т. 1, М., «Мир», 1964.

К разделам I и II

1. Динер И. Я. Математические методы исследования операций. Вып. 1. Основы теории вероятностей. Случайные события и случайные величины. Л., ВМОЛА, 1964.

2. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963.

К разделу V

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.

2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.

3. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966.

4. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., ГИТТЛ, 1957.

5. Романовский В. И. Дискретные цепи Маркова. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.

6. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961.

7. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.

К разделу VI

1. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. М., ИЛ, 1960.

2. Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.

3. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.

4. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М., Физматгиз, 1961.

5. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М., ИЛ, 1956.

6. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., «Советское радио», 1962.

Таблицы

1. Барк Л. С. и др. Таблицы распределения Рэлея-Райса. М., изд. АН СССР, 1964.

2. Большев Л. Н. и Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965.

3. Слуцкий Е. С. Таблицы для неполной Г-функции и .функции вероятностей χ^2. М.—Л., изд. АН СССР, 1950.

4. Таблицы функций распределения и плотностей распределения Стьюдента. М., изд. АН СССР, 1960.

5. Таблицы e^x и e^{-x}. М., изд. АН СССР, 1955.

6. Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и ее нормированных производных. М., изд. АН СССР, 1960.

7. Янко Я. Математико-статистические таблицы. М., Госстатиздат, 1961.

8. Lieberman G. J., Owen D. B. Tables of the Hypergeometric Probability Distribution. Stanford, University Press, 1961.

9. Table of natural logarithms for argument between zero and five to sixteen decimal places. Applied Mathematics Series 31. Washington, National Bureau of Standarts, 1953.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Раздел III

Случайные векторы и многомерные распределения вероятностей

Раздел IV

Функции случайных величин

Стр.

Раздел V

Случайные функции

Раздел VI

Техника статистических расчетов. Практические советы расчетчику

Абезгауз Гилель Григорьевич
Тронь Анатолий Петрович
Копенкин Юрий Николаевич
Коровина Ираида Александровна
Редактор *Федоров А. В.*
Переплет художника *Афанасьева В. П.*
Технический редактор *Коновалова Е. К.*
Корректор *Дубань Е. М.*

Сдано в набор 2.1.69 г. Подписано к печати 23.10.69 г. Г-62566
Формат бумаги 70×90 1/32 — 16 3/4 п. л. = 19,597 усл. п. л. + + 2 вкл. 3/4 п. л. = 0,87 усл. п. л. 26,066 уч.-изд. л.
Бумага типографская № 1. Тираж 40 000 *Цена 1 р. 52 к.*
Изд. № 9/576 Зак. № 2581

Ордена Трудового Красного Знамени
Военное издательство Министерства обороны СССР
Москва, К-160

2-я типография Военииздата
Ленинград, Д-65, Дворцовая пл., 10

Цена 1 р. 52 к.