УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Е76

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета

Рецензенты:
доктор филологических наук,
профессор *А. А. Гируцкий*;
доктор физико-математических наук,
профессор *В. И. Янчевский*

Еровенко, В. А.
Е76 Основы высшей математики для филологов : методические замечания и примеры : курс лекций / В. А. Еровенко. — Минск : БГУ, 2006. — 175 с. : ил.
ISBN 985-485-608-9.

Курс лекций по основам высшей математики предназначен для студентов-филологов классического университета, изучающих основы высшей математики в течение одного семестра. Состоит из введения «Математика в филологическом образовании», глав «Элементы теории множеств», «Комбинаторика и вероятность» и дополнения «Вероятность случайного события». В пособии, ориентированном на современные стандарты университетского математического образования гуманитариев, приводится большое количество математических примеров и задач с лингвистическим содержанием.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 985-485-608-9

ВВЕДЕНИЕ

МАТЕМАТИКА В ФИЛОЛОГИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

… Доказанная правда есть, собственно, не правда, а всего лишь сумма доказательств. Но теперь не говорят «я верю», а «согласен».

Иосиф Бродский

В современном университетском образовании присутствует естественнонаучная и математическая составляющая в учебных программах гуманитарных факультетов. Традиционное представление об общей культуре наряду с гуманитарными ценностями включает в себя определенный уровень естественнонаучного и математического знания. В соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования Российской Федерации математика — необходимый компонент высшего гуманитарного образования. В контексте формирования единого образовательного пространства в Белорусском государственном университете на всех гуманитарных факультетах читаются в разных объемах соответствующие курсы по математике. *Что же изучает математика*? Стандартный ответ: «множества с заданными в них отношениями и структурами» вряд ли можно признать удовлетворительным даже для профессиональных математиков. Среди континуума мыслимых множеств математиков реально привлекают очень редкие подмножества с соответствующими структурами и заданными в них отношениями. Смысл вопроса заключается в том, чтобы понять, чем так ценна для познания в целом эта малая часть научного знания. Данное учебное пособие по курсу «Основы высшей математики» подготовлено на основе односеместрового курса лекций, читаемого в течение ряда лет для студентов филологического факультета Белорусского государственного университета.

Зачем филологу нужна математика? Математические методы в языкознании применяются для создания математических моделей, объясняющих как можно большее количество языковых явлений и фактов, а также дающих возможность предсказывать такие явления. Применение математических методов в языкознании позволяет иногда заменить интуитивно сформулированную лингвистическую задачу одной или несколькими более простыми и четко логически сформулированными математическими задачами, имеющими алгоритмическое решение. Такой подход необходим при решении прикладных вопросов языкознания, связанных с автоматическим анализом и синтезом устной речи, информационной переработкой текста или созданием систем машинного перевода, с помощью современных компьютеров. Такого рода задачи возникают в области прикладной лингвистики, которую также называют математической, информационной и компьютерной. В осеннем семестре 1960 года выдающийся математик академик Андрей Николаевич Колмогоров прочел на механико-математическом факультете Московского государственного университета цикл докладов, озаглавленный «*Теория вероятностей и анализ ритма русского стиха*», слушателями которого были будущие академики, литературоведы А. А. Зализняк, В. В. Иванов, В. Н. Топоров и многие другие. Вспоминая совместную работу на этом семинаре по математической лингвистике, он говорил, что не уловил во мнениях литературоведов ничего противоречащего его установкам в отношении математического, статистического и вообще «формального исследования стиха», изложенным в его докладах. Профессиональный разговор о поэзии невозможен без стиховедческих знаний в области форм стиха — метрики, рифмовки, строфики, что является важным компонентом университетского филологического образования. Тут явно недостаточно простой арифметики — здесь нужна «алгебра» слогоисчисления и «комбинаторика» конфигураций рифм. *Математика — это особый тип универсального знания, в котором «мысль движется дедуктивно», освобождаясь от неисчерпаемых особенностей конкретных явлений*. В таком движении мысли математики опираются на свои слова-символы, поэтому научное знание во все большей мере осваивает современный математический язык.

Известного специалиста по общей поэтике академика Михаила Леоновича Гаспарова спрашивали, не убивают ли подсчеты алгеброй гармонию, не мешают ли они непосредственному наслаждению поэзией. Он неизменно отвечал: нет, помогают, поскольку «многие мелочи, из которых складывается гармония, лежат ниже уровня сознания и непосредственно слухом не отмечаются, только когда нащупаешь их подсчетами, начинаешь их замечать». Применение математических методов в стиховедении так же строго, как и сама наука о стихе, поскольку еще античные стиховеды устанавливали количественные отношения для долгих и кратких слогов, находили простейшие единицы измерения — стопы, а также более сложные единицы — стихи и строфы. В разное время и в разных языках сочетания долгих и кратких слогов или ударных и безударных может быть различным, но суть от этого не меняется, поскольку все это — математика. Подсчеты требуют медленного чтения и перечитывания стихов, кроме того, часть подсчетов могут оказаться излишними, но все равно это полезно. «*Я хорошо понимаю*, — писал Гаспаров, — *что это — черта личная*: *другим* (*и многим*) *анализировать поэзию*, *поверять алгеброй гармонию значит убивать художественное наслаждение от нее*. *Ничего плохого в таком отношении нет*, *просто это значит*, *что такому человеку противопоказано заниматься филологией — как близорукому водить машину и т. п.*»[1]. Сошлемся также на мнение другого выдающегося филолога С. С. Аверинцева, который говорил, что «поверять алгеброй гармонию — не выдумка человеконенавистников из компании Сальери, а закон науки. Но свести гармонию к алгебре нельзя». На одной алгебре общекультурно значимой вещи не сделаешь, но без закона, хорошей модели или формулы никакой создатель значимых и содержательных вещей обойтись не может.

Эмоциональные доводы в пользу того, что математические методы не дают дополнительного инструмента познания, по отношению к филологическому знанию, основаны на том, что научное изучение ритмики стихотворения относится к его внутреннему смыслу, как лингвистический анализ текста математической статьи к оценке ее содержательности, истинности и убедительности. Несмотря на это, трудно поверить в то, что современный образованный человек может отказаться от веры в общезначимое математическое знание. Опасна вера, не имеющая для себя оснований. Откуда она у математиков? И, вообще, кто может называть себя математиком? Вот как ответил на этот вопрос, выдающийся математик XX века, один из основоположников функционального анализа Стефан Банах: «*Математик — это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями; лучший математик тот, кто устанавливает аналогии доказательств; более сильный математик тот, кто замечает аналогии теорий; но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии*». Сам Банах с помощью языка функционального анализа блестяще выявлял аналогии между различными математическими теориями, поэтому его вера в математическое знание покоилась на более серьезных основаниях. Мысль, выраженная гениальным поэтом, многозначна и трудно уловима, а сфера ее применимости очерчена неясно, в отличие от ясной и недвусмысленной мысли, изложенной в ординарной математической работе. Поэтому столь естественным выглядит желание математиков расширить сферу познания, чтобы получить все знания о мире, в том числе и гуманитарные, с той же степенью ясности, которая свойственна математическим наукам.

Математика не отличается от других форм культурной деятельности, хотя она стала важнейшим принципом научного знания. Образованные люди должны уметь логически грамотно формировать новые понятия, строить непротиворечивые классификации, иметь представление о некоторых математических структурах, отделять существенные признаки от не-

---

[1] *Гаспаров М. Л.* Записи и выписки. — М.: Новое литературное обозрение, 2000. — С. 316.

существенных, как это делается в аксиоматических теориях. Уместно заметить, что смысл математического понятия не содержится только в его формальном определении. Как сказал известный математик академик В. И. Арнольд: «*Математика сводится к исследованию формальных следствий из аксиом не более чем стихосложение — к последовательному вы писыванию букв алфавита*». Выделение математики из других наук произошло по способу конструирования объектов. Хотя математические объекты довольно абстрактны, считать, что будущему филологу или лингвисту трудно оперировать с такими категориями, явное преувеличение, поскольку с абстрактными категориями в гуманитарных науках приходится иметь дело не меньше, чем в естественных науках. Не только интеллектуальное, но и чувственное познание нормально протекает как движение от абстрактного к конкретному, как последовательная конкретизация первоначального общего представления. В математике так же, как и в любом гуманитарном знании, есть недоказуемые и неразрешимые утверждения, которые трудно считать истинными или ложными, что тем не менее не портит репутацию математики как проверенного метода достижения достоверного знания. Методологическая значимость современной математики состоит в том, что даже студенты-нематематики имеют уникальную возможность осознать и понять, что можно считать основанием хорошо формализованной теории, необходимым для аргументированного исследования.

Целью обучения математике студентов-филологов является формирование понимания ими сущности ряда математических методов, полезных в языкознании и стиховедении, и воспитание у них определенной математической культуры, т. е. умения математически исследовать гуманитарные явления реальности. Одной из объективных трудностей преподавания математики гуманитариям является предубеждение части студентов-гуманитариев против математики, сложившееся под влиянием отсутствия ощущения целесообразности. «*Математика имеет задачей не обучение исчислению,* — говорил Лев Толстой, — *но обучение приемам человеческой мысли при исчислении*». К сожалению, многие отождествляют математику с собственным представлением о ней или неудачным школьным опытом ее изучения. К субъективным трудностям можно отнести отсутствие потребности у многих людей с гуманитарным стилем мышления в логически полноценной аргументации и слабой личной мотивацией мировоззренческих функций обучения математике. Стиховед с мировым именем, профессор В. Е. Холшевников писал: «Немудрящей арифметикой мы пользуемся охотно, миримся с немного более сложной элементарной статистикой, но обработка статистических данных методами теории вероятностей вызывает у некоторых из нас протест и подозрения в формализме. Почему? Не потому ли, попросту, что мы, филологи, не знаем высшей математики, не понимаем ее языка?»[2]. У противников математических методов анализа под поверхностью их мольбы за «гуманизм» и «чистоту» их науки иногда бессознательно, а иногда и агрессивно отчетливо скрывается стремление предохранить «душу» от современных методов научного познания.

«*Мы живем в такие времена, когда, ненаучно выражаясь, все слова уже сказаны*», — писал Сергей Аверинцев. Даже отталкивание от «косности» слова и его недостаточности, согласно тютчевской формуле «мысль изреченная есть ложь», служит для мысли конструктивным стимулом. В математике объекты создаются из интерпретации слов и их сочетаний, входящих в словесное определение термина, описывающего исследуемый объект. Соответствующая культура мышления воспитывается на конкретных примерах, которыми столь богата математика, показывающих, как несоблюдение логических правил рассуждения приводит к ошибкам и несоответствиям. Не следует думать, что знание стандартных математических структур исчерпывает математику. Можно сказать, что все как раз наоборот: эти структуры представляют собой лишь наиболее поверхностные аспекты современной математики. Обыкновенно понятие «структура» относится к распознанию некоторого единства и взаимодействия частей, образующих целое, в применении к реальным объектам познания. Четкое осознание конкретного типа математической структуры как эффективного средства ориентации на «безбрежных просторах математики» в духе методологического принципа «бритвы Оккама» произошло сравнительно недавно. Универсальность математических структур проявляется в том, что они составляют основу языка и аппарата различных областей математики и фундаментального знания. Классический университет, в соответствии с его предназначением, должен выпускать хорошо образованных филологов с фундаментальной подготовкой, не позволяющей замыкаться на своей профессии.

Принципиальная возможность осуществления машинного перевода доказывает, что законы лингвистики в основном достаточно просты для того, чтобы допустить их математическое описание. Большинство явлений лингвистики и стиховедения имеет по существу дискретный характер, поэтому для их исследования нужно применять в первую очередь *методы дискретной математики*. Заметим, что стремление к строгости, логической убедительности доказательств и однозначности терминов независимо возникли в самом языкознании и теории стиха, а сотрудничество с математикой в любой области знания только стимулирует этот процесс. На этом основании стало возможным говорить о «математической лингвистике». *Что такое математическая лингвистика*? Математическую лингвистику определяют, как применение математических методов в исследова-

[2] *Холшевников В.* Стиховедение и математика // Содружество наук и тайны творчества. — М.: Искусство, 1968. — С. 385.

нии языка или как описание языковых фактов точными методами, что связано с двумя точками зрения на возможности применения конкретного математического аппарата и специфических математических методов к языку. С одной стороны, выразить математическим языком научные данные, сформулированные на языке лингвистики, а с другой стороны, изучить математическими методами лингвистические объекты для установления новых свойств этих объектов, которые не поддаются изучению нематематическими методами. В лингвистике пока речь идет о первых шагах применения математики, поэтому нельзя сравнивать, например, термин «математическая лингвистика» с аналогичным термином «математическая физика». Математическая физика — это раздел математики, нацеленный на физические приложения, который по своим методам не менее сложен, чем любой другой раздел математики. Выделится ли математическая лингвистика в качестве промежуточной или самостоятельной дисциплины, как это произошло с математической логикой, и какое влияние она окажет на лингвистику? Решение этого вопроса зависит от точек зрения на проблему единства научного знания.

Курсы высшей математики для гуманитариев пытаются ликвидировать «ореол непознаваемости», созданный вокруг математики самими математиками дедуктивно-аксиоматическим изложением. Вера в адекватность формализма и знание отдельных черт сложного явления позволяет предвосхищать математические истины, не доступные чистой интуиции. Интуитивные и логические компоненты творчества необходимы как в процессе математического, так и гуманитарного познания. Вот что писал по этому поводу выдающийся математик XX века Рихард Курант: «*Математика содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к естественному совершенству. Ее основные и взаимно противоположные элементы — логика и интуиция, анализ и конструкция, общность и конкретность. Как бы ни были различны точки зрения, питаемые теми или иными традициями, только совместное действие этих полярных начал и борьба за их синтез обеспечивают жизненность, полезность и высокую ценность математической науки*»[3]. Гуманитарные аспекты развития математического знания в контексте единства науки и культуры дополняют и проясняют различные естественнонаучные подходы. Потребность в целостном осмыслении действительности способствуют выявлению влияния социальных и культурных факторов на становление научных теорий. Рассматривая математическое образование студентов-филологов с этой точки зрения, можно говорить об общности интеллектуальных задач гуманитарного и математического познания.

Хорошо известно, что моральные навыки, приобретенные в какой-либо области знания, в значительной мере переносятся и на более широкие сферы

[3] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2004. — С. 20.

мышления и практической деятельности. В этом смысле полнота аргументации, интеллектуальная честность и правдивость, являются составной частью научного мышления человека, занимающегося математикой, и довлеют над ним в жизненных ситуациях практического поведения. Педагогическая сторона аксиоматического метода для студентов-гуманитариев состоит в том, что большое воспитательное значение для мышления имеет поиск экономии средств и аргументация связи гипотез с заключениями. В математике нет «наполовину доказанных» или «почти доказанных» утверждений. *Одна из главных функций математического доказательства — создание надежной основы для проникновения в суть вещей.* Современное требование математической строгости основано на том, что доказательство должно опираться на математические аксиомы и не использовать ничего такого, пусть даже интуитивно очевидного, что не содержится в аксиомах, а также выводить математические утверждения из аксиом и уже доказанных теорем с помощью определенных логических рассуждений. Трудности в соответствовании стандартам математической строгости возникают иногда не за счет недостатка аксиом, а из-за ограниченности принятых средств логического вывода или способов доказательства.

Точность математики служила моделью для размышления в других сферах жизни, включая этику и политику. Филолог тоже не имеет «права на субъективность», на культивирование субъективности, но, с другой стороны, он не может оградиться надежной стеной точных методов, хотя в обычном языке поверхностные лингвистические структуры постоянно нарушаются, «обстреливаются» со стороны более глубоких смысловых структур. Выдающийся специалист не только по проблемам литературы, но и гуманитарной культуры в целом Сергей Аверинцев в «Похвальном слове филологии» писал: «*Филология есть* “*строгая*” *наука*, *но не* “*точная*” *наука. Ее строгость состоит не в искусственной точности математизированного мыслительного аппарата*, *но в постоянном нравственно-интеллектуальном усилии*, *преодолевающем произвол и высвобождающем возможности человеческого понимания*». А насколько правилен термин «*точные науки*»? Может быть, в действительности все науки должны быть точными, а неточность — это привилегия искусства? Чтобы избежать субъективных оценок, филологу необходимо сочетать в себе интуицию художника, не всегда надежную и правильную, и логичность ученого, стремящегося к точному объективному знанию.

Хорошо известно, что Александру Сергеевичу Пушкину математика не давалась с детства, и поэтому он ее не любил наряду с политическими науками. Однако уже в первом номере журнала «Современник», издававшегося Пушкиным, была напечатана статья дипломата и популяризатора науки князя П. Б. Козловского «*Разбор Парижского математического ежегодника*», а в третьем номере журнала — статья о теории вероятностей того же автора под красноречивым названием «*О надежде*» (Современник. 1836. Т. 3) По мнению современников, эти статьи украшали страницы журнала. Последняя статья представляла собой первое популярное изложение на русском языке теории вероятностей. Она была написана столь искусно, что позволяла вполне успешно решать простейшие вероятностные задачи, не предполагая в читателе никакого познания высшей математики. В пушкинскую эпоху верили в возможность найти надежные математические формулы порядка выпадения случайных чисел, относящихся к картам или рулетке, и изучали с этой точки зрения теорию вероятностей. Средством охранения от пагубных и горьких следствий обманчивых надежд Петр Козловский считал распространение «философской математики, называемой исчислением вероятностей» или «наукой исчисления удобосбытностей», чтобы «с первыми алгебраическими понятиями она в самых средних умах ясно и глубоко впечатлевалась». Это не казалось ему столь трудным, «как многие воображают от страха алгебраических формул». Более того, он полагал, что «*постепенное перехождение от одного умозаключения к другому есть само по себе уже умственное движение, небесполезное для здравия рассудка*». Почему же Пушкин, не понимавший математику, печатал «излишне умные» работы о ней в своем журнале? Может быть, поэт хотел «в просвещении стать с веком наравне»? Это был его посильный вклад в мировоззренческий уровень образованности современного общества. Мода на математику и представление о том, что математика стоит наравне с просвещением века и даже определяет его, было широко распространено в то время не только в научных, но и в литературных кругах.

«Поверка алгеброй гармонии» — дело необычайно трудное и сложное, но тем не менее необходимое для научного анализа творческого процесса. Во-первых, отрицание какой бы то ни было близости между художественным и математическим мышлением означало бы отрицание единства гносеологических основ всех форм познания и мышления. Во-вторых, помимо глобальной теоретико-познавательной, гносеологической цели, «поверка алгеброй» имеет и более конкретные цели. Следует различать *формализм* как метод отрыва формы от содержания и *формализацию*, способствующую более глубокому пониманию содержания на основе изучения структуры и соотношений исследуемых явлений. Формализация в сфере языка полезна и необходима, поскольку уже доказала свою пользу и нужность, хотя не следует забывать о том, что любая успешная формализация в гуманитарной сфере с помощью логико-математического упорядочивания выявляет лишь структуры «низших слоев бытия». Из вышесказанного можно сделать вывод, что «*применение математических методов не превращает лингвистику в чисто дедуктивную науку*»[4]. Человеческое позна-

[4] *Мачавариани М. В.* О взаимоотношении математики и лингвистики // Вопр. языкознания. — 1963. — № 3. — С. 91.

ние невозможно ограничить заданными дедуктивными процедурами в рамках некоторой формальной системы. Математические методы взаимодействуют с эмпирическим изучением факторов, что требует от исследователя в равной мере разбираться в лингвистической проблематике и владеть соответствующим математическим аппаратом.

У математики с любой наукой можно обнаружить содержательные связи. На самом деле, с точки зрения методологии исследования, математика и филология соприкасались давно. Например, в стихотворной речи с большей или меньшей степенью регулярности повторяются и строятся в ряды чем-то подобные элементы. Поэтому, определяя основные категории стихотворной речи, нельзя обойтись без математики. *В паре математика и филология в качестве основной связи выступает язык, поскольку именно филологи и математики работают со словом с особой тщательностью*. Математика — это один из языков, точнее международный язык, поэтому можно представить какой будет результат, если, например, при изучении иностранного языка студенты только слушают преподавателя, не разговаривая на нем. Математика не просто один из языков, а еще и рассуждение или способ размышления, т. е. как бы язык и логика вместе. Основная задача языка математики — дать точное и удобное определение математического суждения, т. е. дать такой язык, на который можно было бы перевести математические утверждения, допускающий сравнительно легкий перевод на естественный язык. С точки зрения эффективности математики, самое опасное при этом не незнание языка, а недостаточное знание. Основные расхождения между естественным языком и языком математики связаны с различным построением языкового знака и знака математического в системах передачи информации. Язык математики оказывается эффективным именно потому, что математика только к нему не сводится.

Австрийский философ и логик Людвиг Витгенштейн сравнивал язык со старинным городом, в котором лабиринты маленьких улочек и площадей окружены множеством новых районов с прямыми улицами регулярной планировки. Развитие внутри самой математики приводит к терминологическим изменениям языка науки, хотя всегда остается некоторое расхождение между интуитивной идеей и точным математическим языком, описывающим ее в научных и логических терминах. Переход на лаконичный стиль языка математики освобождает от тавтологического многословия, а суммарный эффект от такого манипулирования проявляется в свободе мышления. При этом следует помнить о том, что математические обозначения и языковые обозначения в каких-то отношениях сходны, но зато в других отношениях, совершенно различны. Поэтому если языковые явления обозначать только математически, то можно лишить язык всякого содержания, и он перестанет быть языком. Витгенштейн считал, что *следует* *говорить только о том, что поддается высказыванию, и молчать об остальном*. В мышлении многое зависит от слова, которое стоит на границе высказываемого. Мысль выявляет себя, поверяет себя и утверждает себя, соотносясь со словом. *Цель языковой деятельности — это достижение взаимопонимания.* Полная формализация естественных языков представляется априори невозможной, поскольку жесткое разграничение синтаксических и семантических неправильностей может быть только условным. Примеры подобного рода можно встретить среди парадоксов теории множеств, описанных на естественном языке. Настаивая на исключении из теории множеств таких противоречий, не следует всякий раз «поверять алгеброй гармонию» и пытаться втиснуть все многообразие противоречий в узкое ложе истины.

При изучении количественных закономерностей языка приходится встречаться с такими лингвистическими явлениями, как употребительность слова, длина буквосочетания, информационный вес слова и т. п., что может быть выражено с помощью числа и, следовательно, можно рассматривать в качестве математической величины. Определение целей и конкретного содержания курса «Основы высшей математики» для студентов-филологов связано с ответом на вопрос о том, зачем вообще люди многих поколений вот уже более двух с половиной тысяч лет занимаются математикой. Вот что сказал по этому поводу в эссе «Математический человек» выдающийся мыслитель немецкоязычной литературы прошлого века Роберт Музиль: «*Математика есть роскошь, которую позволяет себе чистый разум, — роскошь броситься вперед очертя голову. Одна из немногих, какие еще остались. Некоторые филологи тоже заняты предметами, польза которых сомнительна для них самих… А вот математики предаются самому отважному и восхитительному авантюризму, какой доступен человеку, именно посреди этих проблем, в их средоточии*»[5]. Математика представляет собой культурную ценность не только в лоне общечеловеческой культуры, но и сама по себе, как важнейшая составляющая гуманитарно-ориентированного научного мировоззрения. Знакомство с основами таких разделов математики XX века, как теория множеств и их отображений, классическая теория вероятности, финансовая математика и др., при создании специальной содержательно-методической линии, воспитывает у студентов-филологов высокую требовательность к полноценной аргументации, что, в свою очередь, способствует формированию устойчивых моральных принципов.

В пределах ограниченного по объему курса «Основы высшей математики», нельзя определить и доказать все необходимое с учетом математи-

---

[5] *Музиль Р.* Малая проза. — М.: Канон-пресс-Ц, 1999. — Т. 2. — С. 302.

ческих сложностей основных ее принципов. В таких условиях основная методическая задача математики для филологов — это заинтересовать в расширенном университетском образовании, преодолев академизм теоретического материала. Например, «непостижимая эффективность математики» в современных науках — это расширение понятия реальности, лежащее в основе психологии математического творчества, обеспечивающее ему подлинную свободу. Ценивший «простоту» и «ясность» Стендаль говорил: «*Я любил и теперь еще люблю математику ради нее самой, как не допускающую лицемерия и неясности — двух свойств, которые мне отвратительны до крайности*». Для университетского образования характерно то, что студенты учатся благодаря своей активности. Полноценное обучение математике не индуктивно, оно включает в себя «проход через ошибки и заблуждения». На первых же занятиях по математике следует приучать студентов-гуманитариев не стесняться ошибок. Ошибки играют в математике не меньшую роль, чем доказательства. Ошибка в изучении новой теории вполне демократична, хотя некоторым «учебным» заблуждениям вполне можно придать методическую упорядоченность. Тем не менее эти ошибки полезно «пережить», чтобы знать, «куда ходить не надо». Даже негативные результаты в обучении математике студентов-гуманитариев можно использовать как один из важных методических приемов университетского образования. Анализируя их причины и пути их преодоления можно более осознанно идти вперед. Поэтому отдельные примеры и упражнения курса «математики для филологов» ориентированы на выработку навыков исправления неточностей в формулировках, рассуждениях и доказательствах.

Готовая истина не способствует развитию творческого мышления. Даже в самой математике невозможно полностью вытеснить элемент человеческого понимания, заменив его алгоритмическими процедурами. Поэтому филологическая ориентация этого учебного пособия обусловила особое внимание к естественному языку, который используется в рассмотренных разделах математики. *Важнейшая методическая проблема преподавания математики для филологов — это не проблема уровня строгости изложения, а проблема построения смысла*. Абсолютная строгость, утверждал известный французский математик и лингвист Рене Том, возможна только благодаря отсутствию смысла, поэтому можно сказать, что понятия «строгости» и «смысла» дополнительны друг к другу. Естественный язык является наиболее фундаментальной и универсальной знаковой системой. В языкознании также говорят о дополнительности смысла некоторого высказывания и его формальной структуры. Образно говоря, излишне акцентированное внимание к анализу структуры высказывания может отдалить понимание его смысла, подобно тому, как это происходит при чтении по слогам. Даже в математике понятие «математической структуры» не претендует на объяснение успехов математизированного мышления. Оно возникло из стремления к объединению математики, систематизации ее приемов и к установлению общих закономерностей, подчиняющих себе другие сферы деятельности, поскольку *высшее назначение математики* — «*находить порядок в хаосе, который нас окружает*».

Какой должна быть научная осведомленность любого человека с университетским гуманитарным образованием? Известный литературовед Ю. М. Лотман доказывал в своих работах, что художественный текст со свойственными ему образами, метафорами и ритмикой, несет в себе гораздо большую информацию, чем обычный текст, поэтому вне художественной структуры, созданной для этого произведения автором, трудно передать присущее ему содержание. Не слишком ли далеко зашла гуманитарная специализация в классическом университете? Не ограничивает ли она возможности сближения «двух культур» Чарльза Сноу? Наконец, должны ли классические университеты стремиться к воспитанию утраченной гармоничности? Наука обретает точность на таком этапе своего развития, когда обнаружены законы, которым подчиняются изучаемые явления, допускающие строгую математическую формулировку. Именно поэтому в методологии языкознания и литературоведения должен закрепиться «сравнительно-статистический метод» исследования в различных творческих проявлениях. В одном из своих последних интервью профессор Ю. М. Лотман признал, что «*для нас гораздо актуальнее введение в учебные планы гуманитарных факультетов курсов новейшей лингвистики, семиотики, теории культуры, а также разработка специального курса математики для гуманитариев*». Коренные вопросы жизни общества, считал он, будут решаться в сфере синтетической науки о человеке, которая потребует сложного синтеза гуманитарного и математического знания.

Математическому творчеству всегда сопутствует высокое эмоциональное напряжение и, как всякому творчеству, свойственно стремление к совершенству. Эти две черты роднят математику с поэзией, поэтому неудивительно, что математика может стать источником поэтического вдохновения. Свидетельством тому является финальное стихотворение загадочного цикла «Восьмистиший» Осипа Мандельштама «*И я выхожу из пространства…*». Оно поражает глубокими, возможно, не всегда осознанными связями математических образов и поэтического мышления Мандельштама. Не знал же он современную математику, в которой заметную роль играют «бесконечно мерные линейные пространства» и «неархимедовы величины». Не об отказе ли от поверхностных представлений о реальности говорит Осип Мандельштам с помощью вовлечения математики в поэзию:

И я выхожу из пространства
В запущенный сад величин
И мнимое рву постоянство
И самосогласье причин.

И твой, бесконечность, учебник
Читаю один, без людей —
Безлиственный, дикий лечебник,
Задачник огромных корней.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Мысль о пространстве рождает «ах»,
оперу, взгляд в лорнет.
В цифрах есть нечто, чего в словах,
даже крикнув их, нет.

Иосиф Бродский

Наиболее важным характерным свойством современной математики является тенденция к формированию более высокой степени абстракции языка математики. ***Язык математики*** не только оказывает влияние на познание, но и сам формируется в процессе изучения действительности как средство ее адекватного отображения с помощью соответствующих эффективных математических структур. Язык математики опирается на понятия, имеющие относительно ясное и устойчивое содержание, используемое в естественном языке.

Следует помнить о том, что *понятия, лежащие в основании отдельных научных теорий, включая математические, по необходимости остаются содержательно неясными до тех пор, пока эти теории способны развиваться*. Каждое содержательное математическое понятие охватывает много объектов, имеющих какое-нибудь общее свойство. Следствия, выводимые из этого свойства в рамках некоторой абстрактной теории, можно применить к любому из указанных выше объектов. В качестве наиболее популярного примера обычно рассматривают понятие «множества». По мнению академика А. Н. Колмогорова, под ***современной математикой*** понимается такая концепция, которая может быть охарактеризована следующими двумя тезисами:

А. *В основе всей современной теоретической* (*абстрактной*) *математики лежит чистая теория множеств.*

Б. *Специальные разделы математики занимаются структурами, причем каждый род структур определяется соответствующей системой аксиом, выраженной на языке теории множеств.*

Хотя математические теории, построенные с помощью формальных аксиоматических систем, обладают сами по себе достаточной точностью и надежностью, они ограничены принятыми средствами логического вывода, т. е. способами доказательства. Чтобы лучшие качества математических теорий эффективно проявились в лингвистике и литературоведении нужно точно определить сферу их приложений, а именно найти такую адекватную область, где работа математического аппарата имела бы смысл и давала конкретные результаты. Вопрос о выборе наилучшего варианта аксиоматики теории множеств будет решаться исходя из соображения — насколько содержательной в прикладном плане окажется математика, построенная на данной теории множеств. Одна из первых попыток такого рода была предпринята математиком О. С. Кулагиной в работе «*Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств*» (Проблемы кибернетики. М., 1958), в которой основная идея построения связана с понятием эквивалентности слов. Это сложная задача, требующая совместных творческих усилий математиков и лингвистов или будущих лингвистов-математиков.

Относительную медленность развития ***математической лингвистики*** можно объяснить тем, что область приложения лингвистики определилась очень давно и была стабильна в течение столетий, поскольку в ней не было «революционных открытий», сыгравших значительную роль в развитии человечества. Но во второй половине прошлого столетия положение коренным образом изменилось, поскольку требования, которые предъявляют к лингвистике компьютеры и люди, совершенно разные. В чем трудность взаимоотношения между традиционной лингвистикой и вновь вторгающимися в лингвистику идеями? Как сказал известный математик Р. Л. Добрушин: «*Большинство современных лингвистов полагает, что новыми приложениями, новыми задачами и методами могут заниматься математики, техники, физики — все, кто хочет, лишь бы только оставили в покое самих лингвистов и их науку*»[6]. Среди лингвистов, сетует он, имеются лишь отдельные горячие приверженцы новых идей, хотя отношение к этим идеям большинства лингвистов напоминает испуг. В результате новыми областями лингвистики как побочным делом занимаются в основном математики и информатики, хотя в новой лингвистике, основанной не только на качественных методах рассуждения, но и на глубоком количественном изучении, много нерешенных проблем теоретического характера.

Для современной математики характерно использование языка теории множеств, опирающегося на *здравый смысл*, *облеченный в математические символы*. Не пользующаяся математическими символами человеческая логика может запутаться в словесных определениях сложных явлений реального мира и сделать вследствие этого ошибочные выводы. Во второй половине XIX века в математическом мышлении определился математический объект, а именно «множество», занявший центральное положение в иерархии рассматриваемых математиками сущностей. Наступила эпоха

[6] *Добрушин Р. Л.* Математические методы в лингвистике // Математическое просвещение. — 1961. — Вып. 6. — С. 50.

теоретико-множественной математики. *Понятие* ***множества*** *является в математике первичным, не сводимым к более простым понятиям.*

С такого рода ситуацией можно встретиться и в других областях знания. Например, в лингвистике не существует удовлетворительного определения «слова». *Понятие* ***слова*** *до сих пор остается одним из сложнейших в науке о языке*, поскольку, несмотря на трудности с определением этого понятия, слово занимает центральное место во всем «механизме языка». Отмечая различие слов в разных языках, академик Л. В. Щерба считал, что понятия «слово вообще» не существует. Общее понятие слова дробится на множество эмпирических разновидностей слов: «слова фонетические», «слова грамматические», «слова лексические». Важнейшими признаками слова являются его *форма*, *значение*, *смысл* и *содержание*.

1.1. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА

Любая теория начинается с введения основных начальных понятий, т. е. минимального списка неопределяемых терминов и понятий, которые называются ***неопределяемыми*** потому, что любая попытка определить их через другие термины приводит к появлению других понятий, которые также нуждаются в определении. *Не всякая наука есть доказывающая наука, но знание неопосредованных начал недоказуемо*. Всегда при построении новой теории есть соблазн «все определить». Даже *Евклид* пытался дать определения неопределяемым понятиям: «точка есть то, что не имеет частей», «линия — длина без ширины», «прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней». Изучить какую-либо науку только по определениям невозможно, поскольку содержащаяся в определении информация о предмете не может дать достаточно полного знания о нем. Так, например, в математике используются разные определения понятия «линия», глубина определения которых зависит от уровня знаний об определяемом предмете.

Рассмотрим, например, свойство выпуклости, которое характеризует геометрические фигуры как отдельную совокупность математических объектов. Известный популяризатор математики А. П. Савин в книге «*Математические миниатюры*» проанализировал как понятие ***выпуклый*** определяется в «*Словаре русского языка*» *С. И. Ожегова*. «Выпуклый — имеющий дугообразную поверхность, обращенную наружу». А что значит дугообразную? Там же читаем: «Дугообразный — имеющий форму дуги». А что такое дуга? «Дуга — часть окружности, круга или другой кривой линии». Во-первых, кривые линии довольно разнообразны, а во-вторых, круг — это не линия. Можно ли, исходя из такого определения, что-нибудь утверждать о выпуклости (или невыпуклости) куба? Такое «определение» понятия выпуклости некорректно, с точки зрения математики. Как бы ни переосмыслялись термины в языковом обиходе, в научном языке термины могут употребляться только *терминологически*, несмотря на эту тавтологию. В связи с тем, что всякая наука вынуждена работать с неопределяемыми понятиями или недоказанными допущениями, поэтому есть не только сама наука, но также и некоторое «начало науки».

Основоположник теории множеств немецкий математик ***Георг Кантор*** под множеством понимал «*всякое многое, мыслимое, как единое*». Он впервые в математической науке изучил свойства абстрактных множеств и осуществил их классификацию, отвлекаясь от конкретной природы элементов множеств. *В математике под* ***множеством*** *понимается совокупность некоторых объектов, объединяемых по общим характеристическим свойствам и мыслимых в качестве «единого».*

В современной науке понятие множества окутано наибольшим числом предрассудков. В математике множества являются удобным средством превращать высказывания в математические объекты, а операции над высказываниями в отображения или функции. Множество можно охарактеризовать как «*единое имя для совокупности всех объектов, обладающих данным свойством*». Это предложение, как и предыдущие, с точки зрения математической строгости, не может считаться определением.

Дать хорошее определение — значит раскрыть сущность определяемого объекта. Но сущность, как правило, не лежит на поверхности. Возможность неограниченного углубления в сущность даже самого простого первичного объекта делает понятными те трудности, которые встают на пути их определения. Кроме того, углубление знаний о противоречивых свойствах этих объектов ведет к изменению представлений об их сущности, а значит и их определений. Академик Н. Н. Лузин подчеркивал, что «*самое существенное в понятии множества — это акт объединения различных предметов в одно целое*». С понятием ***множество лингвистических объектов*** мы встречаемся довольно часто, например, множество образуют буквы русского алфавита, множеством является совокупность некоторых слов, описанных в конкретном словаре и т. д.

Канторовское определение множества потребовало введения следующих трех символов.

Первый символ должен представлять множество как «*единое*», т. е. представлять само множество. Для обозначения множеств используются *прописные буквы* латинского алфавита A, B, C, …, X, Y, Z или какого-либо другого по соглашению.

Второй символ должен представлять «*многое*», т. е. рассматриваться как «элемент множества». ***Элементами множества*** называются объекты, составляющие множество. Например, если множество представляет собой совокупность всех слов некоторого реального языка, перечисленных в академическом словаре, то его элементами будут слова. Для обозначения элементов используются *строчные буквы* того же алфавита, например, a, b, c, …, x, y, z.

Третий символ должен «*соотносить*» элемент множеству. Тот факт, что «x *является элементом множества M*» записывается в виде

$$x \in M.$$

Это высказывание можно также прочесть следующим образом: «*x принадлежит множеству M*» или «*x содержится в множестве M*». Символ «$\in$» называется ***символом принадлежности***. Он происходит от первой буквы греческого слова εστι — быть. Если «*x не является элементом множества M*», то пишут

$$x \notin M,$$

а читают, как «*x не принадлежит множеству M*», «*x не содержится в множестве M*».

Множество предполагается ***заданным****, если о каждом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или нет*. Например, нельзя говорить о «множестве слов русского языка», так как русский язык непрерывно обогащается новыми словами. С другой стороны, «множество всех русских слов», содержащихся в конкретном издании «Словаря русского языка С. И. Ожегова», определено однозначно, поскольку о каждом слове можно сказать, есть оно в этом издании или нет.

Пример. *Рассмотрим, какие из следующих совокупностей задают множества, а какие нет.*

1. *Совокупность студентов-филологов на потоке.*
2. *Совокупность динозавров в Минском зоопарке.*
3. *Совокупность великих русских писателей.*

Первый пример не вызывает затруднений — это множество, поскольку про каждого студента можно однозначно сказать, числится ли он на данном потоке или нет.

Для понимания второго примера заметим, что, во-первых, в «определении» множества ничего не сказано о числе элементов множества, в частности элементов может не быть вообще, хотя само название «множество» вызывает ассоциации, что каждое множество должно содержать много элементов. Во-вторых, вторую совокупность можно считать заданной — про каждый объект можно точно сказать принадлежит он этой совокупности или нет. *Если множество не содержит ни одного элемента, его называют* ***пустым множеством*** *и обозначают символом* « $\varnothing$ ». По существу, мы расширяем понятие множества, вводя объект «пустое множество», который соответствует характеристическим свойствам, не определяющим никакое множество в смысле определения Кантора.

Второй пример — это пример пустого множества. Нельзя сказать, что пустое множество — это «ничто» или что оно не существует. *Оно существует точно так же, как любое другое множество, не существуют его элементы*, а абстрактное понятие «ничто» впервые обрело свой осязаемый символ, например, в теории чисел в виде нуля.

Примером пустого множества может служить множество грамматических форм, выражающих категорию «определенность — неопределенность», т. е. артиклей, в русском и белорусском языках. Хотя, например, в болгарском языке, в котором употребляются определенный, неопределенный и нулевой артикли, множество артиклей не является пустым множеством.

Замечание. *Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно.*

В самом деле предположим, что существуют два разных пустых множества. Что значит, что множества разные? Это значит, что в одном из них найдется элемент, который не принадлежит другому. Но в пустых множествах вообще нет элементов, поэтому можно утверждать, что пустое множество единственно.

Разберем третий пример. Кто является великим русским писателем? Например, Л. Н. Толстой определенно великий, Ф. М. Достоевский тоже, И. С. Тургенев и еще несколько не вызывающих сомнения имен. А как насчет М. Е. Салтыкова-Щедрина? Здесь, возможно, единогласия уже нет. Нечеток сам критерий отнесения к сонму великих. Поэтому третью совокупность нельзя считать множеством. Подобных примеров довольно много, что послужило основанием для введения понятия «*нечеткого множества*». Множества, включающие только такие объекты, принадлежность или не принадлежность которых к тому или иному множеству не вызывает сомнения, называются «*четкими множествами*». Таким множеством противопоставлены ***нечеткие,*** или ***лингвистические, множества***, включающие объекты, которые могут быть отнесены к тому или иному множеству лишь с определенной долей достоверности.

Третий пример — это пример нечеткого множества. Понятие нечеткого множества можно проиллюстрировать на примере семантических полей прилагательных *младенческий, детский, отроческий, юношеский, молодой, зрелый, старый*. Например, 20-летний мужчина может быть с достоверностью 50 % отнесен к множеству юношей, и с той же достоверностью может быть отнесен к множеству молодых людей. Аппарат нечетких множеств применяется для описания не только лингвистических явлений, но и для моделирования таких аспектов человеческого поведения, которые не поддаются строгому и однозначному математическому описанию.

А что такое строгое математическое описание? Или вообще, *что дала математика людям*? Принято считать, что математика возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. По поводу древности математики никто не спорит, а вот по поводу того, что побудило людей ею заниматься, существует и другое мнение. Согласно ему, ***математика**, так же как поэзия и вообще — **искусство**, была вызвана к жизни духовными потребностями человека, его стремлением к познанию и красоте*. Одних вдохновляет прикладной аспект математики, других — ее внутренняя красота и гармония, а третьих привлекает и то и другое. Все это накладывает определенные ограничения как на язык математики, так и на ее логическую аргументацию, когда из верных исходных положений получаются верные результаты.

Определенные трудности связаны также с тем, что сложные математические утверждения записываются на обычном языке с «вкраплением» формул. Чем дальше развивалась математика, и чем больше понятий входило в ее словарь, тем ближе к границе между математикой и естественным языком продвигались парадоксы, связанные с неоднозначностью и недоопределенностью предложений естественного языка. Рассмотрим одну из самых ярких и элементарных фраз, конструкция которой встречается в определении некоторых множеств.

Парадокс Берри. *Наименьшее натуральное число, которое нельзя определить предложением русского языка, содержащим менее ста букв.*

С одной стороны, такое число существует, поскольку в русском языке предложений, «содержащих менее ста букв» конечное число, а натуральных чисел бесконечно много, следовательно, среди них есть наименьшее, которое нельзя определить указанной фразой. С другой стороны, такого числа не существует, так как оно определено фразой, состоящей менее чем из ста букв, т. е. это парадокс, поскольку предположение противоречит самому себе.

Для избежания парадоксов следует придерживаться *эмпирического правила*, которое заключается в том, что лучше *не говорить о слишком больших или слишком расплывчато заданных множествах*. Например, запрещается говорить о «множестве всех множеств, для задания которых требуется не более ста слов русского языка».

В заключение этого раздела сформулируем ***задачу о трех языках***, для решения которой потребуется не только понятие множества, но и знание операций над множествами. Министерство образования направило в гуманитарный лицей инспектора для проверки преподавания иностранных языков. Он представил в министерство следующий отчет.

Отчет инспектора: «*В лицее* 100 *учащихся, каждый из которых изучает, по крайней мере, один из трех языков: английский, немецкий или французский. Причем все три языка изучают* 5 *человек, английский и французский* — 8, *немецкий и французский* — 10, *английский и немецкий* — 20, *немецкий* — 23, *французский* — 30, *английский* — 50 *человек*».

Инспектор, представивший этот отчет, был уволен. ***Почему?***

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли говорить о «множестве всех стихотворений, опубликованных в Республике Беларусь»?

2. Можно ли говорить о «множестве коротких рассказов, содержащих не более тысячи слов»?

3. Можно ли говорить о «множестве фэнтези в социальной постсоветской фантастике»?

1.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА

Определенные трудности при задании множеств возникают из-за недостаточной четкости обыденного языка, а также неоднозначности человеческой речи. Кроме того, различные «промежуточные формы» затрудняют идентификацию объектов на их принадлежность тому или иному множеству.

Множество считается ***заданным****, если его элементы можно описать таким образом, что при каждом его рассмотрении имеется в виду одна и та же совокупность объектов.*

Возможны различные способы задания множества. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих в это множество. Например, множество букв алфавита белорусского языка, множество студентов данной учебной группы определяется их списком в экзаменационной ведомости, множество всех стран на земном шаре — их списком в последнем издании географического атласа, множество произведений выдающегося писателя — оглавлением полного собрания его сочинений.

Сравнительно просты ***конечные множества***. Смысл этого термина ясен — это множества, состоящие из конечного числа элементов. *Конечное множество можно задать, перечисляя его элементы*. Элементы, принадлежащие конечному множеству, записывают между двумя *фигурными скобками* и разделяют их запятыми.

Например, множество букв русского алфавита, обозначающих гласные звуки, можно представить в виде {а, е, ё, и, о, у, ы, э, ю, я}, а множество первых n положительных целых чисел как $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, где *многоточие* означает продолжение перечисления этих элементов.

Замечание. *Фигурные скобки вводят искусственный порядок, поскольку мы читаем слева направо, но множество $\{x, y\}$ состоит из тех же самых элементов, что и $\{y, x\}$, следовательно, это то же самое множество, т. е. порядок внутри фигурных скобок не имеет никакого значения.*

Сказанное можно пояснить с помощью списка избирателей. Порядок в этом списке не предполагает каких-нибудь привилегий.

Понятие множества, «безобидное» на первый взгляд, порождает различные проблемы. Разберем одну из них на примере множества букв слова МНОЖЕСТВО. Перечислим элементы, из которых состоит это множество:

$$\{М, Н, О, Ж, Е, С, Т, В\}.$$

Проблема, которую мы хотим обсудить, состоит в том, что в русском алфавите одна буква О, а в слове МНОЖЕСТВО их две. Почему мы не записали в фигурных скобках вторую букву О? Мы могли бы говорить о паре «букв-близнецов» О, но если у нас нет способа их различать, то на самом деле в нашем распоряжении нет ничего, кроме одной буквы О. *Множество определяется своими элементами, т. е. каждый элемент в множестве достаточно указать один раз*. Следовательно, вторая буква О не нужна, поскольку буква О в нашем множестве уже есть.

Но как тогда быть в ситуации, когда нам все-таки нужны две буквы О, например, если мы составляем слова из букв слова МНОЖЕСТВО. Ведь если букву О можно использовать два раза, то мы составим больше слов. Выход в том, чтобы различать эти две необходимые нам буквы, например, назвать их $О_1$ и $О_2$. Тогда перечисляя элементы, из которых состоит нужное нам множество, получим

$$\{М, Н, О_1, Ж, Е, С, Т, В, О_2\}.$$

С точки зрения теории множеств, проблема решена, поскольку двух одинаковых элементов в одном множестве нет. Такие тонкости, связанные с неточностью и несовершенством обычного языка, используемого в математических терминах, возникают, как правило, в самых простых случаях. Проиллюстрируем это на еще одном примере.

Пример. *Пусть A — множество, состоящее из первых n натуральных чисел, т. е. $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, где n — число букв первой строки основного стихотворного текста романа «Евгений Онегин». Определим чему равно n.*

С одной стороны, под числом n можно понимать общее число различных букв русского алфавита, встречающихся в первой строке:

$$М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л.$$

Получается, что $n = 18$ и $A = \{1, 2, 3, \ldots, 18\}$. С другой стороны, под числом n можно понимать количество всех вхождений в первую строку, как количество типографских знаков:

$$М_1, О_1, Й_1, \quad Д_1, Я_1, Д_2, Я_2, \quad С_1, А_1, М_2, Ы_1, Х_1,$$
$$Ч_1, Е_1, С_2, Т_1, Н_1, Ы_2, Х_2 \quad П_1, Р_1, А_2, В_1, И_1, Л_1.$$

Тогда получается, что $n = 25$ и $A = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$. Этот пример показывает, с какой тщательностью нужно формулировать и подробно разъяснять *понятие множества*, чтобы избежать неясности и двусмысленности, свойственной нашему естественному языку.

Заметим, что многоточие, как продолжение перечисления, можно использовать и для некоторых бесконечных множеств. В математике бесконечному множеству чаще всего дают негативное определение, т.е. ***бесконечное множество** — это множество, не являющееся конечным*. Например, множество положительных целых чисел можно обозначить как $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. При перечислении элементов множества часто используются их *характеристические свойства*, однозначно определяющие эти элементы, т. е. свойства, которым удовлетворяют элементы данного множества, и только они. Например, множество квадратов всех положительных целых чисел, которые меньше или равны n, можно описать как $\{1, 4, 9, \ldots, n^2\}$, а бесконечное множество кубов всех положительных целых чисел можно записать как $\{1, 8, 27, \ldots, k^3, \ldots\}$. Очевидно, что задание множества с помощью перечисления элементов удобно только в том случае, когда число элементов множества мало или характеристические свойства элементов множества легко описать.

Члены Лапутянской академии, о которых писал *Джонатан Свифт* в романе «*Путешествие Гулливера*», *считали, что говорить вредно*, поскольку «каждое произносимое нами слово сопряжено с изнашиванием легких». Поэтому они таскали с собой мешки с разнообразными предметами, «необходимыми для выражения наших мыслей и желаний». Вместо того чтобы назвать ту или иную вещь, «академик» вынимал ее из мешка и показывал на нее. Эта процедура очень похожа на задание нужных элементов множества, т. е. предметов из мешка, с помощью перечисления. В данном случае нелепость такого описания множества очевидна — *мешки с предметами могут стать неподъемными*.

*В общем случае множество задается с помощью указания **характеристических свойств** его элементов*, при этом используются фигурные скобки, а внутри них приводятся характеристические свойства, описывающие элементы множества. Так, запись

$$\{x : \ x \text{ обладает свойством } P\}$$

задает множество, содержащее только те объекты, которые имеют свойство P. *Двоеточие в этой записи можно читать как «такой, что»*. Например, совокупность чисел $\{n : \ n$ — целое число и $1 \le n \le 1\ 000\ 000\}$ задает множество всех целых чисел от 1 до 1 000 000, а совокупность людей $\{x : x$ — гражданин Республики Беларусь$\}$ описывает множество всех граждан Республики Беларусь.

Может случиться так, что два разных характеристических свойства задают одно и то же множество. Например, множество $A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ — это «множество двузначных натуральных чисел, обе цифры которых одинаковы» и «множество двузначных натуральных чисел, делящихся на 11». Задание множеств их характеристическими свойствами может привести к осложнениям, когда два различных характеристических свойства задают одно и то же множество. Например, «множество толстокожих сухопутных животных, имеющих два бивня» и «множество толстокожих животных, имеющих хобот» — это одно и то же *множество слонов*.

Замечание. *Способ задания множества путем указания характеристического свойства должен быть адекватным, т. е. должен полностью определять множество.*

Например, рассмотрим следующие совокупности:

$$A = \{x : \ x \text{ — высокий студент данной группы}\};$$
$$B = \{x : \ x \text{ — хороший студент данной группы}\};$$
$$C = \{x : \ x \text{ — привлекательная студентка группы}\}.$$

Если совокупности A и B определены неоднозначно, т. е. в качестве элементов как из A, так и из B разные люди могут рассматривать, вообще говоря, разных студентов, то *определить студенток совокупности С настолько трудно, что даже не стоит пытаться это делать*.

Замечание. *Множество, состоящее из одного элемента* $\{x\}$ *не следует путать с самим этим элементом* x.

Это можно пояснить исходя из следующего соображения. Множество $\{x\}$, которое можно определить как $\{z : \ z = x\}$, состоит ровно из одного элемента x, а элемент x сам может оказаться множеством, содержащим сколько угодно элементов или вообще без элементов, т. е. пустым множеством $\varnothing$.

Например, если рассмотреть множество групп студентов на филологическом факультете, то элементами такого множества являются другие множества, а именно множества, составленные из студентов конкретных групп. В частности, $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ — это двухэлементное множество, составленное из двух разных элементов $\{1, 2\}$ и $\{2, 3\}$, поэтому множество $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ не совпадает с множеством $\{1, 2, 3\}$. В силу сделанного замечания, пустое множество $\varnothing$, которое можно, например, определить как $\{x : \ x \neq x\}$, и множество вида $\{\varnothing\}$ — это совершенно разные множества. Первое — это пустое множество, не содержащее ни одного элемента, а второе — не пусто, его единственным элементом является само пустое множество, т. е. $\varnothing \in \{\varnothing\}$. В частности, $\{\varnothing\}$ — это единственный элемент непустого множества вида $\{\{\varnothing\}\}$, т. е. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$.

Драматические сомнения, составившие главную тему тютчевского «*Silentium*!» (Молчание!) — это, по существу, философская рефлексия над словом: «*Другому как понять тебя*?» Даже если нечто и существует, то как передать или растолковать это другому? Например, можно ввести в рассмотрение ***пустое слово***, *совсем не содержащее букв*, рассуждая о нем так, как если бы для его осуществления не существовало бы никаких препятствий. Такую манеру рассуждений называют *абстракцией потенциальной осуществимости*, где слово «абстракция» означает отвлечение. Вся сложность в том, что абстрактные и отвлеченные методы применяются к живым, естественным языкам. Поэтому такие методы применяются в том случае, когда конкретные факты и характеристики языка *поддаются математической обработке* и выявляют неявные аспекты самого языка.

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что в числовом множестве $\{9, 9, 10\}$ не три, а только два элемента?

2. Можно ли утверждать для заданного множества $M = \{\{5, 6, 7\}\}$, что $5 \notin M$?

3. Верно ли, что множества $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ и $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ — это три разных множества?

1.3. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Введение *понятия множества* в математику оказалось очень полезным и плодотворным. Элементами множеств могут быть объекты различной природы, поэтому одни и те же утверждения, касающиеся множеств, можно истолковывать, например, и как *утверждения о числах*, и как *утверждения о лингвистических объектах*.

Из множеств с помощью определенных операций, которые называются ***теоретико-множественными операциями***, можно образовывать новые множества, подобно тому, как из чисел посредством операций сложения и умножения получаются новые числа. *Задать операцию над множествами* — это, прежде всего, значит указать способ как по двум заданным множествам A и B строить третье множество. Во всех операциях, которые мы будем рассматривать, вопрос о том, входит ли какой-либо элемент в построенное новое множество, полностью решается исходя только из того, в какие из множеств A и B он входит, а в какие — нет. Это требование входит в определение всех, рассматриваемых в этом разделе операций.

Изучение операций над множествами составляет предмет ***алгебры множеств***, т. е. математической структуры, в которой определены некоторые отношения и операции. Алгебра множеств имеет много общего с обыкновенной числовой алгеброй, хотя кое в чем существенно отличается от нее. В частности, тот факт, что *алгебраические методы могут быть применены к изучению нечисловых объектов*, указывает на общность идей современной математики. Заметим, что математические понятия и теоремы теории множеств обладают большой общностью. Рассмотрим некоторые из них.

Прежде чем давать определения операций над множествами заметим, что *определение* может быть более глубоким или менее глубоким, и его глубина зависит, прежде всего, от общего уровня тех, для кого оно предназначается, и от уровня знаний об определяемом математическом объекте или операции над ним. Чем больше мы сами знаем и чем лучше знаем определяемый предмет, тем больше вероятность того, что нам удастся найти удовлетворяющее всех определение.

Определение множества. *Множество A называется* ***подмножеством*** *множества B, обозначается* $A \subset B$ (*или* $B \supset A$)*, если каждый элемент множества A является элементом множества B.*

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

В этой символической записи использованы логические обозначения: *символ* $\forall$ — ***квантор всеобщности*** («для всех», «*для любого*»), *знак* $\Rightarrow$ — ***импликация*** (т. е. $X \Rightarrow Y$ означает: «*если X, то Y*», «в случае X выполняется Y»), наконец, *логическая связка* $\Leftrightarrow$ — ***эквивалентность*** («*если и только если*», или ритуальное выражение «*тогда и только тогда*, *когда*»), называемая иногда «*двойной импликацией*».

Наши рассуждения слагаются из высказываний. *Понятие высказывания* — одно из исходных, ключевых понятий логики. В таком качестве, как и понятие множества, оно не допускает точного определения, в равной мере приложимого в разных ее разделах. Тем не менее можно сказать, что ***высказывание*** — *это грамматически правильное предложение, взятое вместе с выражаемым им смыслом*, дающим представление о том, в какой ситуации оно будет истинным, а в какой ложным. Хотя *с истиной бывает по-разному.* Мы все стремимся к ней, но редко ее достигаем, поэтому ***хорошо быть математиком*** *либо тем, кто* «*знает явленную ему истину*».

Высказывание «множество A есть подмножество множества B», т. е. $A \subset B$, можно также прочесть следующим образом: «*множество A включено в множество B*», или «*множество B включает множество A*», а *символ* $\subset$ называется ***символом включения***.

Например, множество M = {всех книг русских авторов некоторой библиотеки} есть подмножество множества N = {все книги этой библиотеки}, т. е. $M \subset N$. Множество студентов третьего курса филологического факультета университета является подмножеством в множестве всех студентов данного факультета. В свою очередь, множество студентов филологического факультета является подмножеством в множестве всех студентов университета.

Замечание. *В число «подмножеств» непустого множества A удобно включить само A и пустое множество* $\varnothing$*, т.е.* $A \subset A$ *и* $\varnothing \subset A$.

Таким образом, *всякое множество есть подмножество самого себя*. Второе включение можно мотивировать исходя из следующего рассуждения. Если бы *пустое множество* $\varnothing$ не было подмножеством множества A, то оно содержало бы элемент, принадлежащий множеству $\varnothing$, но не принадлежащий множеству A, а поскольку пустое множество не содержит элементов, то это невозможно. Эти два подмножества, т.е. $\varnothing$ и A, называются ***несобственными подмножествами*** множества A. Остальные подмножества, если таковые есть, называются ***собственными подмножествами*** множества A. Например, множество букв, обозначающих гласные звуки, является собственным подмножеством множества букв русского алфавита.

Пример. *Посчитаем число подмножеств следующих трех конечных множеств.*

1. Подмножествами двухэлементного множества $\{0, 1\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.

2. Подмножествами трехэлементного множества $\{0, 1, 2\}$ являются восемь множеств: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$.

3. Наконец, у конечного множества, состоящего из n элементов, будет ровно 2^n подмножеств, включая пустое и его самого.

Замечание. *Отметим* ***приятное свойство подмножеств****: подмножество подмножества само является подмножеством, т. е. если*

$$C \subset B \text{ и } B \subset A, \text{ то } C \subset A.$$

Действительно, если каждый элемент множества C является элементом множества B, а каждый элемент множества B является элементом множества A, то каждый элемент множества C есть элемент множества A.

Чтобы избежать некоторых противоречий *ограничим круг рассматриваемых множеств*, т. е. будем работать с множествами, которые получаются из множеств, встречающихся в «природе» или конкретной области знания с помощью теоретико-множественных операций. *Обычно все множества, с которыми имеют дело в математическом рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества*. Поэтому будем предполагать, что множества, рассматриваемые в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, называемого ***универсальным множеством***. Будем обозначать его через $\boldsymbol{U}$. Крайне редко встречаются рассуждения, в которых идет речь, например, о множестве всех действительных чисел и множестве всех книг в университетской библиотеке. В дальнейшем *слово* «множество» всегда будет означать подмножество некоторого универсального множества.

Существует очень удобный прием *наглядного изображения взаимоотношений между множествами*, позволяющий иллюстрировать операции над ними, — так называемые ***диаграммы Эйлера – Венна***. Множества в этих диаграммах чаще всего изображаются кругами, точнее внутренностью этих кругов, а прямоугольник изображает *универсальное множество* ***U***. Достаточно основательно «метод кругов» развил швейцарский математик *Леонард Эйлер*, хотя этим методом математики пользовались и до него. Идея графических методов стала особенно популярной после того, как английский логик *Джон Венн* подробно изложил их в книге «Символическая логика».

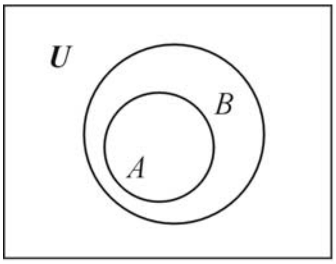

Рис. 1.1

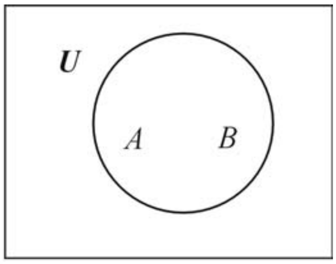

Рис. 1.2

В диаграммах Эйлера – Венна не имеет значения относительный размер кругов, а только их взаимное расположение. На рис. 1.1 два множества A и B изображены кругами, причем видно, что множество A включено в множество B, т. е. $A \subset B$, и A — собственное подмножество множества B, которое не совпадает с ним. На рис. 1.2 также изображено включение $A \subset B$, но при этом множества A и B совпадают. Вообще говоря, *диаграммы Эйлера – Венна сами ничего не доказывают, а только иллюстрируют и помогают доказать*.

Два множества считаются равными, если их характеристические свойства *эквивалентны*. Если математики условливаются считать некоторые множества равными, то тем самым они отказываются рассматривать те свойства этих объектов, которые нарушают равенство.

Замечание. *Отождествляя множества, характеристические свойства которых эквивалентны, тем самым косвенно заявляется, что, во-первых, элементы в множествах равноправны, поскольку только характеристические свойства элемента принимаются во внимание при образовании множества, а, во-вторых, элементы не повторяются.*

Из определения подмножества следует, что множество A включено в множество B, т. е. $A \subset B$, если *характеристические свойства B* $\{\text{х. с. } B\}$ следуют из *характеристических свойств A* $\{\text{х. с. } A\}$, т. е. справедлива импликация $\{\text{х. с. } A\} \Rightarrow \{\text{х. с. } B\}$. Свойства эквивалентности $\{\text{х. с. } A\}$ и $\{\text{х. с. } B\}$

через логические связки импликации можно символически записать в виде:

$$(\{\text{х. с.}\, A\} \Leftrightarrow \{\text{х. с.}\, B\}) \Leftrightarrow (\{\text{х. с.}\, A\} \Rightarrow \{\text{х. с.}\, B\} \text{ и } \{\text{х. с.}\, B\} \Rightarrow \{\text{х. с.}\, A\}).$$

Следовательно, для равенства множеств можно дать следующее формальное определение.

Определение равенства множеств. *Множества A и B* ***равны****, обозначается* $A = B$, *если все элементы множества A принадлежат также множеству B, а все элементы множества B принадлежат также множеству A:*

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Согласно этому определению $A = B$, если *каждое из двух множеств есть подмножество другого множества*, поэтому можно говорить, что множества A и B «*состоят из одних и тех же элементов*».

Например, сравнивая множество A, состоящее из ***словоформ*** *вы*, *вас*, *вам*, *вами* с множеством B, состоящим из форм склонения местоимения *вы*, убеждаемся, что $A \subset B$ и $B \subset A$, т. е. что эти множества равны, $A = B$.

Определение равенства множеств распространяется и на ту ситуацию, когда эти множества вообще не содержат элементов.

Замечание. *Все пустые множества равны между собой, т. е. существует только одно пустое множество* $\varnothing$.

Поскольку пустое множество задается тождественно ложным характеристическим свойством, то в соответствии с этим все пустые множества должны быть равны.

Тривиальные идеи иногда трудно осознать. Любые два пустых множества равны, потому что нет элементов, по которым их можно было бы различать.

Поэтому, например, можно считать, что «множество динозавров в Минском зоопарке» равно «множеству квадратных кругов». Когда математика расходится со здравым смыслом, вступает в свои права *контекст*, т. е. некоторые тонкости математической интерпретации рассматриваемых множеств.

Неравенство множеств *A и B*, *обозначается* $A \neq B$, указывает на то, что, по крайней мере, в одном из этих множеств есть такой элемент, которого нет в другом множестве. Для того чтобы доказать, что *множества A и B не равны друг другу*, нужно показать, что одно из включений $A \subset B$ или $B \subset A$ неверно. Для этого достаточно предъявить хотя бы один элемент, принадлежащий одному множеству, но не являющийся элементом другого множества.

Например, множество ударных гласных фонем по классификации Л. В. Щербы не равно множеству тех же фонем в классификационной схеме Р. И. Аванесова (см.: Пиотровский Р. Г., Бектаев К. Б., Пиотровская А. А. «*Математическая лингвистика*». М., 1977).

Пример. *Пусть элементами множеств A и B являются тома собрания сочинений одного и того же классика, представленные номерами томов:* $A = \{1, 2, 3\}$ *и* $B = \{1, 2, 3\}$. *Выясним, равны ли множества A и B.*

Вообще говоря, из попарного равенства числовых значений элементов двух различных множеств еще не следует их взаимное включение. Если принадлежность элементов одного множества другому множеству не определена по условию задачи, то тогда можно попытаться установить ее на основании *дополнительных свойств элементов*. Рассмотрим, например, следующие *два случая*.

Пусть известно, что множество книг A — часть домашней библиотеки, а множество книг B — часть университетской библиотеки. Поскольку одни и те же тома данного классика принадлежат разным библиотекам, то при таких условиях нельзя сказать, что $A = B$, т. е. эти множества различны.

Пусть теперь в множествах A и B элементы 1, 2, 3 — тома данного классика из университетской библиотеки, выдаваемые в разное время двум различным читателям: первый читатель получил тома множества A, а второй — множества B. В таком контексте можно заключить, что $A = B$, т. е. эти множества равны.

Замечание. *Если порядок элементов множества специально не оговорен, то любое множество рассматривается как* ***неупорядоченное***.

Например, *если x и y различные элементы, то двухэлементное множество $\{x, y\}$ можно определить как неупорядоченную пару следующим образом*:

$$\{z : \ z = x \ \text{или} \ z = y\}.$$

При этом мы исходим из существования в естественном языке объективно заданного разделения фраз на *грамматически допустимые* и *грамматически недопустимые*, так что о каждой фразе мы можем сделать один из двух взаимно исключающих друг друга выводов: эта фраза допустима или недопустима. Действительно, из определения равенства множеств следует, что если, например, $M = \{a, b\}$, т. е. двухэлементное множество, то $M = \{b, a\}$, поскольку как $a, b \in M$, так и $b, a \in M$, в частности, можно записать равенство $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Примером *упорядоченного множества* является *предложение*, если под ним понимать совокупность конечного числа слов, расставленных в определенном порядке. Например:

1. *Эта юноша молодая.*
2. *Эта девушка прекрасна.*

Определение пересечения множеств. *Пересечением двух множеств A и B, обозначается $A \cap B$, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B:*

$$A \cap B \overset{def}{=} \{x : x \in A \ \text{ и } \ x \in B\}.$$

Символ «*равенства с def*» в этой формуле означает «*равенство по определению*», т.е. то, что стоит слева от этого символа, определяется через то, что стоит справа, а *def* — это сокращение от латинского слова *definito* — определение.

Например, если A — «множество студентов 3-го курса филологического факультета», а B — «множество девушек, которые учатся на филологическом факультете», то $A \cap B$ — «множество девушек-студенток 3-го курса, которые учатся на филологическом факультете». Если A — «множество четных чисел», а B — «множество двузначных чисел», то $A \cap B$ — «множество четных двузначных чисел».

Операция пересечения множеств широко применяется в *лексикографической практике*, в частности, при составлении двуязычных и многоязычных словарей.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение пусто, $A \cap B = \varnothing$, и в таком случае говорят, что *множества A и B* ***не пересекаются***. На рис. 1.3 и 1.4 приведены диаграммы Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \neq \varnothing$ и $A \subset B$. Множеству $A \cap B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

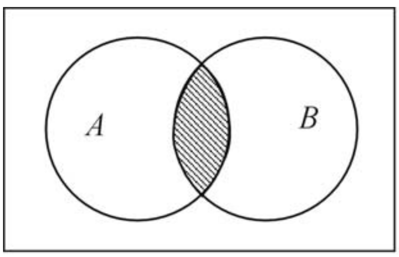

Рис. 1.3

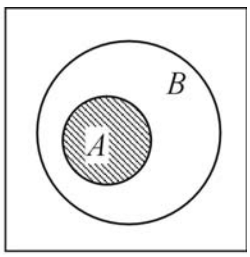

Рис. 1.4

Операция «пересечение» множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции «умножения» чисел. Однако *некоторые свой-*

ства пересечения множеств отличаются от соответствующих свойств умножения.

Если A подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cap B = A$ (см. рис. 1.4), поскольку общими для множеств A и B будут все элементы множества A и только они. Отметим *свойства пересечения* справедливые для любых множеств A, B и C:

$$A \cap B \subset A \quad \text{и} \quad A \cap B \subset B.$$

Кроме того, *из включения* $A \subset B$ *следует включение* $A \cap C \subset B \cap C$. В частности, для любого множества A имеет место равенство $A \cap \varnothing = \varnothing$. Также верно равенство $A \cap A = A$ (*идемпотентность пересечения*), поэтому нет смысла говорить, например, о «степени» множества в том смысле, в каком говорят о степени числа. Эти свойства отличают операцию пересечения множеств от операции умножения чисел и легко проверяются на различных множествах.

Пример. *Пусть A — «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в первую строку "Евгения Онегина"», B — «множество, состоящее из различных букв, входящих во вторую строку этого романа в стихах». Найдем пересечения этих множеств $A \cap B$.*

Множество A состоит из 18 различных букв:

$$A = \{\text{М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 13 букв:

$$B = \{\text{К, О, Г, Д, А, Н, Е, В, Ш, У, Т, З, М}\}.$$

Пересечением этих множеств является следующий набор из 8 букв:

$$A \cap B = \{\text{М, О, Д, А, Е, Т, Н, В}\},$$

который содержится как во множестве A, так и во множестве B.

Замечание. *В предложениях естественного языка возможны относящиеся к подлежащему определения, которые не ограничивают его значения и являются отдельными множествами, задаваемыми характеристическими свойствами.*

Например, с помощью имеющихся у нас понятий «подмножество» и «пересечение множеств» запишем на языке теории множеств математическую формулировку предложения: «*Онегин, добрый мой приятель, родился на брегах Невы*».

Пусть универсальным множеством будет все множество людей. Обозначим через A — «одноэлементное множество, состоящее из Онегина», B — «множество добрых приятелей автора», C — «множество людей, родившихся на брегах Невы». Тогда *математической формулой* данной строки из «Евгения Онегина» в терминах теории множеств будет включение:

$$A \subset (B \cap C).$$

Напомним, что в пересечении множеств использована связка « *и* ».

Определение объединения множеств. *Объединением двух множеств A и B, обозначается $A \cup B$, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B:*

$$A \cup B \overset{def}{=} \{x : x \in A \ \text{или} \ x \in B\}.$$

Например, если A — «множество всех девушек, которые учатся на филологическом факультете», а B — «множество всех юношей, которые учатся на том же факультете», то $A \cup B$ — «множество всех студентов филологического факультета». Если A — «множество всех нечетных натуральных чисел», а B — «множество всех четных натуральных чисел», то $A \cup B$ — «множество всех натуральных чисел».

В рассмотренных примерах объединяемые множества не имели общих элементов, т. е. их пересечение было пусто. Если какой-нибудь элемент входит в множество A и в множество B, т. е. $A \cap B \neq \varnothing$, то *в их объединение* $A \cup B$ он входит один раз. На рис. 1.5—1.7 приведены диаграммы Эйлера – Венна для двух множеств A и B в случаях, когда $A \cap B \neq \varnothing$, $A \subset B$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \cup B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

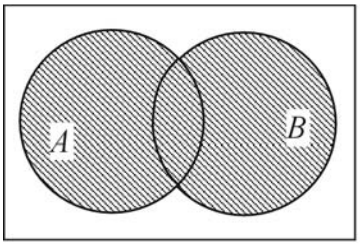

Рис. 1.5

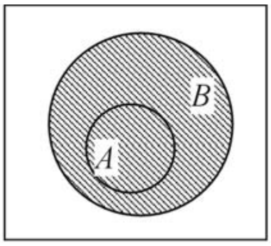

Рис. 1.6

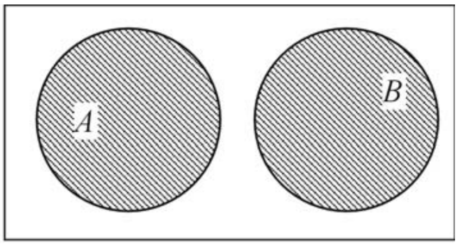

Рис. 1.7

Операция «объединение» множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции «сложения» чисел. Однако некоторые свойства объединения множеств отличаются от соответствующих свойств сложения чисел.

Если A подмножество множества B, т.е. $A \subset B$, то $A \cup B = B$ (см. рис. 1.6), так как элементы из множества A принадлежат множеству B и второй раз включать их в объединение не надо. Отметим *свойства объединения*, справедливые для любых множеств A, B и C:

$$A \subset A \cup B \quad \text{и} \quad B \subset A \cup B.$$

Кроме того, *из включения* $A \subset B$ *следует включение* $A \cup C \subset B \cup C$. В частности, для любого множества A имеют место равенства: $A \cup A = A$ (*идемпотентность объединения*), а также $A \cup \varnothing = A$.

Пример. *Пусть А — «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в первую строку "Евгения Онегина"», В — «множество, состоящее из различных букв, входящих во вторую строку этого романа в стихах». Найдем объединение этих множеств* $A \cup B$.

Множество A состоит из 18 различных букв:

$$A = \{\text{М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 13 букв:

$$B = \{\text{К, О, Г, Д, А, Н, Е, В, Ш, У, Т, З, М}\}.$$

Объединением этих множеств является следующий набор из 23 букв:

$$\text{А} \cup \text{В} = \{\text{М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л, К, Г, Ш, У, З}\}.$$

Поскольку 8 букв М, О, Д, А, Е, Т, Н, В, принадлежащих пересечению множеств A и B, вошли в объединение этих множеств только один раз, то поэтому мы получили только 23 буквы, а не $18 + 13 = 31$ букву, т. е. $(18 + 13) - 8 = 23$.

Замечание. *Союз «или» в русском языке может использоваться в двух смыслах:* ***исключающем*** *и* ***неисключающем****. В определении объединения множеств союз «или» используется в неисключающем смысле.*

В естественном языке союз «или» порою используется как *раздели тельная связка*: «то или другое, но не оба вместе». Используя союз *или*, мы можем иметь в виду *исключающее или*. Например, когда мы говорим: «студент сдаст зачет по математике или он не сдаст этот зачет», то, конечно, предполагаем, что он сделает что-то одно. В логике *исключающее или* используется довольно редко, и мы, за редким исключением, будем обходиться без него. Для хозяев был довольно неожиданным вполне логичный ответ ***Ходжи Насреддина*** на вопрос: «*Что желаете поесть: плова или бешбармака*?» — «*А разве у вас всего один котел*?» На следующем примере проиллюстрируем еще одну тонкость в определении объединения и пересечения множеств.

Пример. *Пусть А — «множество студентов филфака, прогуливающих занятия по высшей математике», В — «множество студентов филфака, надеющихся получить "зачет" по математике». Найдем объединение* $A \cup B$ *и пересечение* $A \cap B$ *этих множеств А и В.*

Напомним, что формально определения для объединения и пересечения множеств отличаются только *союзами « или » и « и »*, *соединяющими условия* $x \in A$ *и* $x \in B$. В формальном определении важную смысловую нагрузку имеет словосочетание «соединяющие условия». Поскольку множества A и B описаны не в виде $\{x: \ x \text{ обладает свойством } P\}$, то союз « *и* » без «соединяющих условий» может оказаться двусмысленным. Рассмотрим, например, следующие два множества:

C — «множество студентов филфака, прогуливающих занятия по математике ***или*** надеющихся получить “зачет” по математике».

D — «множество студентов филфака, прогуливающих занятия по математике ***и*** надеющихся получить “зачет” по математике».

Очевидно, что $C = A \cup B$, но так как в множестве D перечисляются или различные студенты из множеств A и B, или одни и те же студенты из этих множеств, то, по существу, это тоже объединение множеств A и B, т. е. $D = A \cup B$. Рассмотрим еще одно множество.

E — «множество студентов филфака, прогуливающих занятия по математике, которые надеются получить “зачет” по математике».

Студенты из множества E принадлежат каждому из множеств A и B, поэтому $E = A \cap B$.

Соответствующий вывод: *При работе с неформально описанными множествами следует пользоваться неформальной, но содержательной частью определений операций над множествами.*

Замечание. *Выражение «A и B» в* ***естественном языке*** *при перечислении однородных членов часто означает совокупность, в которую включаются объекты множеств A и B. На* ***математическом языке*** *принадлежность к такой совокупности выражается через* $A \cup B$.

В естественном языке практически все слова многозначны. Смысл слова зачастую невозможно понять, вырвав его из контекста предложения, в которое оно входит. Поэтому при переводе с естественного языка на язык математического формализма нужно пытаться понять смысл переводимого предложения.

Определение разности множеств. *Разностью двух множеств A и B, обозначается* $A \setminus B$ *(или* $A - B$*), называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B:*

$$A / B \overset{def}{=} \{x : x \in A \ \text{ и } \ x \notin B\}.$$

В определении разности множеств *не предполагается, что множество B является подмножеством множества A*. Например, если A и B —

«множество студентов филологического факультета, изучающих соответственно английский и немецкий языки», то $A \setminus B$ — «множество студентов филологического факультета, которые изучают английский язык, но не изучают немецкий язык». Если множество $A = \{x:\ |x| \le 1\}$ и множество $B = \{x:\ x < 0\}$, тогда разность $A \setminus B = \{x:\ 0 \le x \le 1\}$.

Если A подмножество множества B, т. е. $A \subset$ В, то тогда $A \setminus B = \varnothing$. На рис. 1.8–1.10 приведены диаграммы Эйлера – Венна для двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \ne \varnothing$, $B \subset A$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \setminus B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

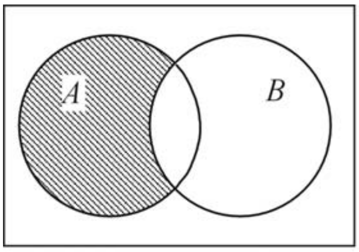

Рис. 1.8

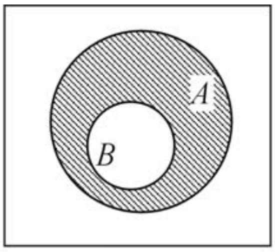

Рис. 1.9

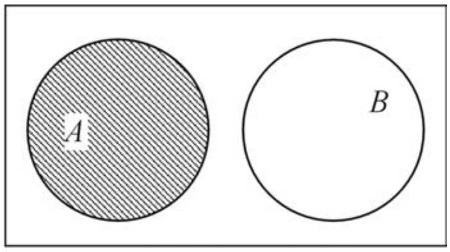

Рис. 1.10

Операция «разность» множеств обладает рядом свойств напоминающих свойства операции «вычитания» или «разности» чисел. Но следует обратить внимание на то, что *разность множеств не является операцией, обратной объединению множеств*, которую иногда называют «сложением» множеств. В этом можно убедиться, доказав следующие соотношения (см. для наглядности рис. 1.8—1.10):

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B \quad \text{и} \quad (A \setminus B) \cup (A \cap B) = A.$$

В частности, если $B \subset A$, то $A \cap B = B$ и из предыдущего равенства следует, что $(A \setminus B) \cup B = A$ (см. рис. 1.9). Если множества A и B не пересекаются, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то $A \setminus B = A$, поскольку в этом случае множество A не содержит элементов множества B (см. рис. 1.10). Отметим *свойство разности*, справедливое для любых множеств A, B и C:

$$A \setminus B \subset A.$$

Кроме того, *из включения $A \subset B$ следуют включения $(A \setminus C) \subset (B \setminus C)$ и $(C \setminus B) \subset (C \setminus A)$*. В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \setminus A = \varnothing, \quad A \setminus \varnothing = A \quad \text{и} \quad \varnothing \setminus A = \varnothing.$$

Пример. *Пусть А — «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в первую строку “Евгения Онегина”», В — «множество, состоящее из различных букв, входящих во вторую строку этого романа в стихах». Найдем разность этих множеств А \ В.*

Множество A состоит из 18 различных букв:

$$A = \{\text{М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 13 букв:

$$B = \{\text{К, О, Г, Д, А, Н, Е, В, Ш, У, Т, З, М}\}.$$

Разностью этих множеств вида A \ B является набор из 10 букв:

$$A \setminus B = \{\text{Й, Я, С, Ы, Х, Ч, П, Р, И, Л}\},$$

которые принадлежат множеству A, но не содержатся в множестве B. Так как только 8 букв М, О, Д, А, Е, Т, Н, В принадлежат пересечению $A \cap B$, т. е. содержатся в множестве A и множестве B, то множество $A \setminus B$ содержит 18 – 8 = 10 букв, а не 18 – 13 = 5 букв.

Замечание. *Операция разности множеств «несимметрична» относительно множеств A и B, в том смысле, что*

$$A \setminus B \neq B \setminus A, \text{ кроме того } (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing.$$

Например, в предыдущем примере разность $A \setminus B = \{$Й, Я, С, Ы, Х, Ч, П, Р, И, Л$\}$, а разность $B \setminus A = \{$К, Г, Ш, У, З$\}$. Убедимся в этом на еще одном примере.

Если в операциях объединения и пересечения оба множества участвуют равноправно, то операция разности, как говорят математики, *некоммутативна*. Ничего удивительного здесь нет, так как арифметическая разность чисел тоже некоммутативна.

Пример. *Пусть A — «множество студентов-филологов, слушавших лекции по курсу "Основы высшей математики"», а B — «множество людей, изучавших медицинскую латынь». Найдем следующие разности множеств A \ B и B \ A.*

Тогда $A \setminus B$ — «множество студентов-филологов, слушавших лекции по "Основам высшей математики", но не изучавших медицинскую латынь», а $B \setminus A$ — «множество людей, изучавших медицинскую латынь, не являющиеся студентами-филологами, которые слушали лекции по "Основам высшей математики"».

Замечание. *«Вычитание» из множества A множества B сводится к «удалению» из множества A общей части A и B, т. е. множества $A \cap B$:*

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

С такой операцией над множествами мы часто сталкиваемся в реальной жизни. Проанализируем следующий эпизод из работы ***инспектора Варнике***.

Полицейский инспектор Варнике осмотрел сейф, закурил свою трубку и сказал: «Электродрелью вскрывают сейфы только пять взломщиков: Алек Кунце, Фриц Шмидт, Густав Хойгер, Генрих Кунтцман и Томас Мюллер. Но Алек, Фриц и Густав сейчас находятся в тюрьме Моабит. Придется спросить Генриха и Томаса, где они провели прошлую ночь…»

Если обозначить через A — «множество подозреваемых взломщиков, пользующихся электродрелью», а через B — «множество подозреваемых, находившихся в тюрьме Моабит», то, удалив из множества A все элементы множества B, инспектор Варнике сузил круг подозреваемых в ограблении преступников. Его метод рассуждения основан на применении операции разности множеств.

Определение дополнения множеств. *Если обозначить через* $\boldsymbol{U}$ — *универсальное множество, содержащее множество* A*, то разность* $\boldsymbol{U} \setminus A$ *называется* ***дополнением*** *множества* A *и обозначается* $\overline{A}$*:*

$$\overline{A} \overset{def}{=} \{x : x \in \boldsymbol{U} \text{ и } x \notin A\}.$$

Дополнение $\overline{A}$ множества A — это множество элементов фиксированного универсального множества $\boldsymbol{U}$, не входящих в A. Например, если $\boldsymbol{U}$ — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, то дополнением множества всех рациональных чисел в множестве действительных чисел будет множество всех иррациональных чисел.

Напомним, что при графической иллюстрации *универсальное множество* представляется обычно прямоугольником на плоскости, а множества — кругами, лежащими внутри этого прямоугольника (рис. 1.11). На рис. 1.12 дополнению множества A, т. е. $\overline{A}$, соответствует заштрихованная часть этого прямоугольника.

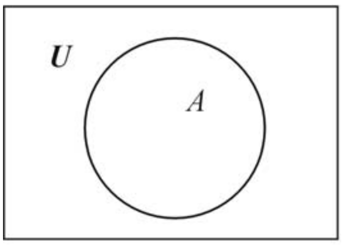

Рис. 1.11

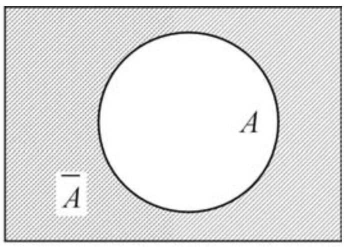

Рис. 1.12

Чтобы избежать трудностей при изображении дополнения множества будем следовать ***правилу Джона Венна***: «*Не следует стараться заштриховать всю внешнюю часть диаграммы*». Тем более что в реальных ситуациях дополнение может оказаться не таким уж «большим» множеством.

Например, *Марина Цветаева* в «*Записных книжках*» писала:

«Меня презирают — (и в праве презирать) — все.

Служащие — за то, что не служу, писатели — за то, что не печатаю, прислуга — за то, что не барыня, барыни — за то, что в мужицких сапогах (прислуги и барыни!).

Кроме того — все — за безденежье.

1/4 презирают, 1/4 презирает и жалеет, 1/2 — жалеет.
(1/2 + 1/4 + 1/4 = 1)

А то, что уже вне единицы — Поэты! — восторгаются».

Заметим, что такая операция, как *дополнение*, *отсутствует в обычной алгебре*. Вообще говоря, в теории множеств дополнений у множеств тоже нет, но о них тем не менее говорят, имея в виду дополнение до фиксированного подразумеваемого множества ***U***.

Отметим следующие *свойства дополнения*, справедливые для любого множества *A*, и содержащего его универсального множества ***U***:

$$A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U} \quad \text{и} \quad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Кроме того, дополнение пустого множества совпадает с универсальным множеством, а дополнение универсального множества — с пустым множеством.

Пример. *Пусть А — «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в первую строку “Евгения Онегина”», а универсальное множество* ***U*** *— «множество всех букв русского алфавита». Найдем дополнение множества А, т. е. множество* $\overline{A} = \boldsymbol{U} \setminus A$.

Множество *A* состоит из 18 различных букв русского алфавита:

$$A = \{\text{М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л}\}.$$

Поскольку в русском алфавите 33 буквы, то дополнением является следующее множество, состоящее из 15 букв:

$$\overline{A} = \{\text{Б, Г, Ё, Ж, З, К, У, Ф, Ц, Ш, Щ, Ъ, Ь, Э, Ю}\}.$$

Замечание. *Для разности произвольных множеств А и В справедливо следующее равенство:*

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

т. е. разность множеств А \ В есть пересечение множества А и дополнения множества В.

С помощью понятия «дополнение» и имеющихся у нас понятий «подмножество» и «пересечение подмножеств» дадим на языке теории множеств формальное определение хорошего поступка. Будем считать, что «***хороший поступок*** *— это такой поступок, который приносит добро хотя бы некоторым людям и не приносит зла никому*».

Пусть универсальным множеством $\boldsymbol{U}$ будет множество всех поступков. Обозначим через A — «множество хороших поступков», B — «множество поступков, приносящих добро хотя бы одному человеку», а через C — «множество поступков, приносящих зло хотя бы одному человеку». Тогда математической формулой данного выше определения хорошего поступка будет соотношение:

$$A \subset B \setminus \overline{C}.$$

Замечание. *Чем «больше» само множество, тем «меньше» элементов остается в его дополнении, т. е.*

$$A \subset B \;\Rightarrow\; \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Для понимания этого утверждения воспользуемся следующей графической иллюстрацией диаграммы Эйлера – Венна. На рис. 1.13 универсальное множество $\boldsymbol{U}$ изображено в виде прямоугольника, а множества A и B в виде кругов, где $A \subset B$.

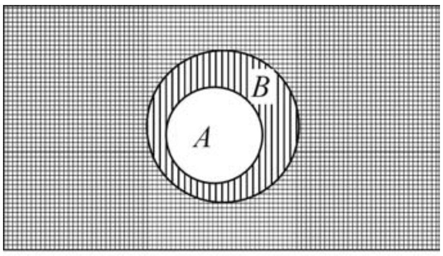

Рис. 1.13

Дополнение к множеству A состоит из точек прямоугольника, лежащих вне меньшего круга (обозначено *вертикальной штриховкой*), а дополнение к множеству B состоит из точек прямоугольника, лежащих вне большего круга (обозначено *горизонтальной штриховкой*). Ясно, что для этих дополнений справедливо включение $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Определение симметрической разности множеств. *Симметрической разностью двух множеств A и B, обозначается A Δ B, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A и B:*

$$A \,\Delta\, B \overset{def}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Например, если A и B — «множество студентов филологического факультета, изучающих соответственно английский и немецкий языки», то $A \,\Delta\, B$ — «множество студентов филологического факультета, которые изучают английский, но не изучают немецкий язык, или изучают немецкий язык, но не изучают английский язык». Если $A = \{x :\ 0 \le x \le 2\}$ и множество $B = \{x :$ $1 \le x \le 3\}$, то тогда симметрическая разность $A \Delta B = \{x :\ 0 \le x < 1$ или $2 < x \le 3\}$.

Если A подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то тогда в отличие от разности $A \setminus B$ симметрическая разность $A \Delta B \ne \varnothing$. На рис. 1.14—1.16 приведены диаграммы Эйлера – Венна для двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \ne \varnothing$, $A \subset B$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \Delta B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

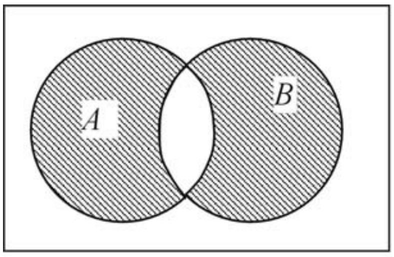

Рис. 1.14

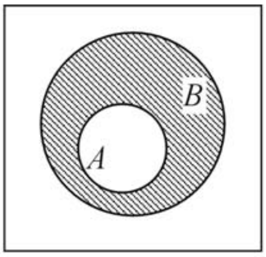

Рис. 1.15

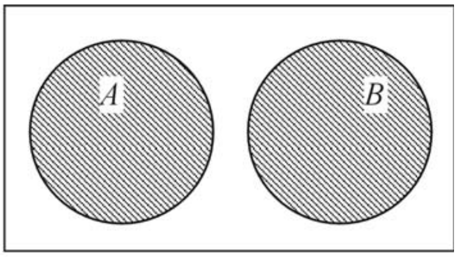

Рис. 1.16

Для операции *симметрической разности*, исходя из ее определения, можно дать другое *эквивалентное определение* в виде

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Другими словами ***симметрическая разность*** *множеств A и B есть разность между объединением и пересечением данных множеств*.

Если множества A и B не пересекаются, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то $A \Delta B = A \cup B$ (см. рис. 1.16). Отметим *свойство симметрической разности* справедливое для любых множеств A и B: $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$. В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \Delta A = \varnothing,\ \ A \Delta \varnothing = A \ \text{ и } \ \varnothing \Delta A = A.$$

Пример. *Пусть A — «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в первую строку “Евгения Онегина”», B — «множество, состоящее из различных букв, входящих во вторую строку этого романа в стихах». Найдем симметрическую разность этих множеств $A \Delta B$.*

Множество A состоит из 18 различных букв:

A = {М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л},

а множество B состоит из другой совокупности 13 букв:

B = {К, О, Г, Д, А, Н, Е, В, Ш, У, Т, З, М}.

Симметрической разностью этих множеств является следующий набор из 15 букв:

$$A \Delta B = \{Й, Я, С, Ы, Х, Ч, П, Р, И, Л, К, Г, Ш, У, З\},$$

которые принадлежат разностям множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$ или, по другому определению, принадлежат объединению множеств $A \cup B$, но не принадлежат пересечению заданных множеств $A \cap B$, поэтому количество букв в множестве $A \Delta B$ равно 23 – 8 = 15.

Замечание. *Для разности произвольных множеств A и B справедливы следующие равенства:*

$$A \setminus B = A \cap (A \Delta B), \quad A \setminus B = A \Delta (A \cap B).$$

Симметрическая разность множеств A и B состоит из тех элементов, которые принадлежат в точности одному из этих множеств. *В определении симметрической разности, по существу, используется связка* ***«исключающее или»***.

Известный английский писатель и ученый *Чарлз Сноу* в знаменитой лекции «*Две культуры и научная революция*» утверждал, что духовный мир, в который он включал и практическую деятельность, все явственнее поляризуется на противоположные части. На одном из полюсов — художественная интеллигенция, которая стала называть себя просто *интеллигенцией*, а на другом — представители естественнонаучного знания, лучшими из которых он считал физиков.

Пусть A — «множество людей, имеющих представление о гуманитарном знании», а B — «множество людей, имеющих представление о естественнонаучном знании», тогда $A \Delta B$ — «множество людей, имеющих представление только о гуманитарном знании или только о естественнонаучном знании». ***Проблема «двух культур»*** *состоит в том, чтобы сделать множество $A \Delta B$ пренебрежимо малым*. Учитывая то, что для литературной культуры в целом характерна подчеркнутая неосведомленность в области естественных и математических наук, *его особенно беспокоила составляющая $A \setminus B$ множества $A \Delta B$*.

В заключение этого раздела с помощью понятия «стиля» проиллюстрируем все четыре операции над множествами: пересечение, объединение, разность и симметрическую разность множеств.

Пример. *Пусть A — «множество стилистических приемов писателя **N**», а B — «множество стилистических приемов писателя **P**». Опишем следующие пять множеств: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.*

Будем считать, что *стиль* — это совокупность абсолютно специфических единиц языка, или, другими словами, сумма черт, отличающая его от всех других, выделенных конкретным исследователем. Кратчайшее определение: ***стиль*** *есть специфика языка данного писателя*.

Тогда пересечение $A \cap B$ — «множество общих стилистических приемов писателей ***N*** и ***P***»; объединение $A \cup B$ — это «все многообразие стилистических приемов писателей ***N*** и ***P***»; разность $A \setminus B$ — «множество стилистических приемов, отличающих писателя ***N*** от писателя ***P***», соответственно разность $B \setminus A$ — «множество стилистических приемов, отличающих писателя ***P*** от писателя ***N***»; наконец, симметрическая разность $A \Delta B$ — это «множество всех неповторимых стилистических приемов писателей ***N*** и ***P***».

В эссе «*Катастрофы в воздухе*» *Иосиф Бродский* писал: «*Причина, по которой русская проза пошла за Толстым, заключается, конечно, в стилистике его выразительных средств, соблазнительной для любого подражателя. … В каком-то смысле Толстой был неизбежен, потому что Достоевский был неповторим*».

Стиль каждого большого писателя или поэта имеет свои неповторимые ***количественные характеристики***. Эти характеристики служат, прежде всего, профессиональным лингвистам и литературоведам, позволяя им решать *спорные вопросы об авторстве* с помощью чисел.

Замечание. *Из двух определений симметрической разности непосредственно следует, что для объединения множеств справедливы равенства:*

$$A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

Обозначим через $n(S)$ — ***число элементов*** *конечного множества S.* Используя последнее равенство для $A \cup B$ можно посчитать *число элементов $n(A \cup B)$* объединения множеств A и B, когда их пересечение не пусто, т. е. $A \cap B \neq \varnothing$. Заметим, что когда число элементов множества A суммируется с числом элементов множества B, то элементы, принадлежащие множеству $A \cap B$, учитываются дважды.

Утверждение. *Для произвольных конечных множеств A и B* ***число элементов объединения*** *этих множеств $n(A \cup B)$ равно*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Доказательство. Поскольку $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \cap B$ — попарно непересекающиеся множества, то из представления объединения множеств A и B в виде $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ следует, что $n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A)$. Из представлений множеств A и B в виде объединения непересекающихся множеств вида $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ и

$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ следует, что $n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B)$ и $n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B)$. Поэтому

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A) + n(A \cap B) - \\ - n(A \cap B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + + n(B \setminus A) = n(A \cup B),$$

что и требовалось доказать.

Пример. *На потоке из* 100 *студентов* 75 *человек изучают английский язык,* 60 — *немецкий язык, а* 45 *человек — одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов изучают английский или немецкий язык?*

Пусть A — «множество студентов, изучающих английский язык», B — «множество студентов, изучающих немецкий язык». Тогда в силу предыдущего утверждения количество студентов, изучающих английский или немецкий язык, равно

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 75 + 60 - 45 = 90.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что пересечением множества согласных звуков русского языка и множества гласных звуков русского языка будет множество всех слогов?

2. Верно ли, что операцию пересечения множеств можно определить с помощью операции разности множеств по формуле $A \cap B = = A \setminus (A \setminus B)$?

3. Можно ли сказать, что дополнение к дополнению множества совпадает с исходным множеством?

4. Верно ли, что из равенства объединения и пересечения множеств A и B, т. е. $A \cup B = A \cap B$, следует равенство этих множеств $A = B$?

5. Верно ли, что соотношение $A \subset B$ эквивалентно каждому из следующих равенств: $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \varnothing$?

1.4. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Рассмотренные выше операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств составляют основной арсенал операций теории множеств. Заметим, что всякий контекст, в котором встречается интересующее нас понятие множества, является в некотором смысле его неявным определением. Можно сказать, что ***контекст*** *ставит понятие множества в связь с другими понятиями и тем самым косвенно раскрывает его содержание.* Поэтому возникает естественный вопрос о более подробном исследовании их свойств, распространяя эти операции на большее число множеств.

В качестве *модельного примера* рассмотрим *основные свойства операций сложения и умножения чисел*. Математическую теорию натуральных чисел называют иногда ***арифметикой***. Сформулируем *пять основных законов арифметики*, известных всем студентам, окончившим среднюю школу, а именно соотношения:

$$1)\ a + b = b + a; \quad 2)\ a{\cdot}b = b{\cdot}a; \quad 3)\ a + (b + c) = (a + b) + c;$$
$$4)\ a\ (b{\cdot}c) = (a{\cdot}b){\cdot}c; \quad 5)\ a{\cdot}(b + c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c,$$

справедливые для любых натуральных чисел, обозначенных символическими буквами a, b, c. Два первых закона — *коммутативный* (*переместительный*) *закон* сложения и коммутативный закон умножения, которые говорят о том, что при сложении и при умножении можно менять порядок чисел, над которыми совершается это действие. Два следующих закона — *ассоциативный* (*сочетательный*) *закон* сложения и ассоциативный закон умножения, которые утверждают, что при выполнении соответствующих операций для трех чисел получается один и тот же результат, независимо от того, в каком порядке совершаются соответствующие действия. Пятый закон — *дистрибутивный* (*распределительный*) *закон* — устанавливает, что при умножении суммы двух чисел на некоторое третье число можно умножить на это число каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

Эти *арифметические законы могут оказаться неприменимыми к нечисловым объектам*. Например, если a и b обозначают *не числа*, *а химические вещества* и под «сложением» или «объединением» понимается прибавление к одному химическому веществу другого, то коммутативность такой операции может не выполняться для любых химических веществ. Действительно, если к воде прибавлять серную кислоту, то получится разбавленный раствор, тогда как прибавление воды к чистой кислоте может закончиться неприятностями для эксперимента. В такой ***«химической арифметике»*** иногда нарушается и ассоциативность.

Рассмотрим теперь *основные свойства операции объединения и пересечения множеств*, аналогичные свойствам операций сложения и умножения чисел.

1. ***Законы коммутативности.*** *Для любых двух множеств A и B выполняются свойства коммутативности операций объединения и пересе чения*:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Коммутативный закон показывает, что можно как угодно менять порядок множеств в указанных операциях. Действительно, множества $A \cup B$ и $B \cup A$ состоят из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B, и не содержат никаких других элементов, а множества $A \cap B$ и $B \cap A$ состоят из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B.

Уместно отметить, что в естественном языке ***синтаксис***, *изучающий соотношения знаков друг с другом*, связан с ***семантикой***, *изучающей отношение между знаком и смыслом*, поэтому даже в некоторых простейших ситуациях перестановка слов может изменить смысл предложения, т. е. свойство «коммутативности» выполняется не всегда.

Пример. *Рассмотрим комбинации «красный + желтый» и «желтый + красный» простейшей знаковой системы —* ***светофора***. *Покажем, что эти комбинации не совпадают друг с другом.*

Достаточно сравнить синтаксис указанных комбинаций с семантикой светофора. Комбинации «*красный* + *желтый*» соответствует действие «стоять + приготовиться к движению», а комбинации «*желтый* + *красный*» соответствует действие «приготовиться к остановке + остановиться».

Замечание. *Операция симметрической разности коммутативна:*

$$A \Delta B = B \Delta A,$$

а операция разности некоммутативна, т. е.

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

Первое утверждение следует из определения симметрической разности, а второе показано на примерах в предыдущем разделе 1.3. Кроме того, на рис. 1.17, 1.18 приведены диаграммы Эйлера – Венна для двух множеств A и B, на которых множествам $A \setminus B$ и $B \setminus A$ соответствует заштрихованная часть диаграмм.

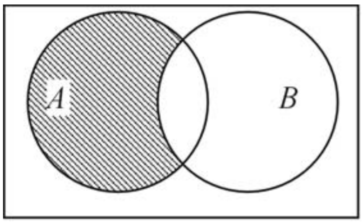

Рис. 1.17

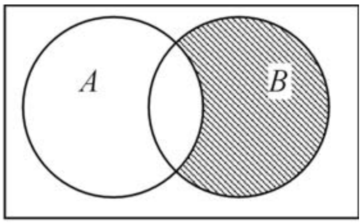

Рис. 1.18

2. ***Законы ассоциативности.*** *Для любых трех множеств A, B и C выполняются свойства ассоциативности для операций объединения и пересечения*:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Ассоциативность указанных операций позволяет не фиксировать при помощи скобок порядок, в котором проводятся операции. Действительно, множества $A \cup (B \cup C)$ и $(A \cup B) \cup C$ состоят их всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A, B и C (заштрихованная часть диаграммы на рис. 1.19) и не содержат никаких других элементов, а множества $A \cap (B \cap C)$ и $(A \cap B) \cap C$ состоят только из общих элементов множеств A, B и C (заштрихованная часть диаграммы на рис. 1.20).

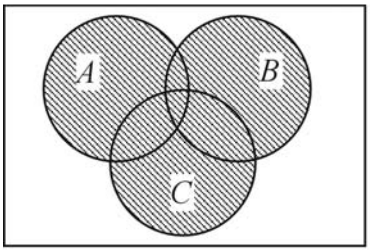

Рис. 1.19

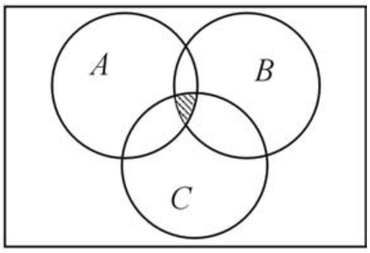

Рис. 1.20

Заметим, что *по закону ассоциативности*, результат не зависит от порядка действий. *Но промежуточные результаты — зависят*! Произведение abc можно понимать двояко: $(ab)c$ и $a(bc)$. Произведение $abcd$ можно понимать 5 способами: $((ab)c)d$, $(a(bc)d)$, $a((bc)d)$, $a(b(cd))$ и $(ab)(cd)$. Произведение $abcde$ — 14 способами. Чтобы убедиться в этом, не обязательно их все выписывать. Достаточно заметить, что есть 5 способов вида $a(bcde)$, 2 способа вида $(ab)(cde)$, 2 способа вида $(abc)(de)$ и 5 способов вида $(abcd)e$. В математике есть специальные числа, позволяющие посчитать количество способов расстановки скобок в произведении n множителей — это *числа Каталана*.

Пример. *В естественном языке, в некоторых ситуациях, роль скобок играют запятые. Рассмотрим хорошо известный набор слов* {***казнить, нельзя, помиловать***}.

Место запятой (скобок) в фразе из этих трех слов определяет смысл соответствующего предложения: «казнить, нельзя помиловать», а с помощью скобок «казнить (нельзя помиловать)», или «казнить нельзя, помиловать», соответственно «(казнить нельзя) помиловать». Очевидно, что смысл этих предложений совершенно противоположен.

Понятие пересечения множеств используется не только в математике. В рассказе *Артура Конан Дойля* «*Пять апельсиновых зернышек*» в сентябре 1887 года знаменитому сыщику ***Шерлоку Холмсу*** понадобилось выяснить название одного парусного судна.

Он знал об этом корабле не слишком много: в январе или феврале 1883 года оно было в Пондишери, в январе 1885 года — в Данди, а сейчас стояло в Лондонском порту. Он сравнил *три множества*: «множество парусников, бывших в указанное время в Пондишери», «множество парусников, бывших в указанное время в Данди» и «множество парусников, находившихся сейчас в Лондоне». Только одно судно входило во все три множества — корабль «Одинокая звезда».

Замечание. *Операция симметрической разности ассоциативна:*

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C,$$

а операция разности неассоциативна, т. е.

$$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C.$$

Ассоциативность симметрической разности не очевидна. Доказательство ассоциативности симметрической разности приведено, например, в книге польских математиков К. Куратовского и А. Мостовского «*Теория множеств*».

Отметим только, что симметрическая разность трех множеств A, B и C состоит из элементов, принадлежащих или всем трем множествам A, B и C, или только одному из них (см. ниже диаграмму рис. 1.23), т. е.

$$A \Delta B \Delta C = (A \cap B \cap C) \cup [(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (C \cup A)) \cup (C \setminus (A \cup B))].$$

Утверждение о неассоциативности операции разности множеств в общем случае можно проверить на конкретных примерах. На рис. 1.21 и 1.22 приведены диаграммы Эйлера – Венна для трех множеств A, B и C, на которых множествам $A \setminus (B \setminus C)$ и $(A \setminus B) \setminus C$ соответствуют заштрихованная часть диаграмм.

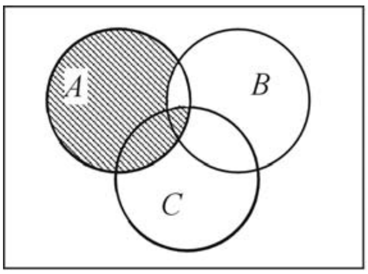

Рис. 1.21

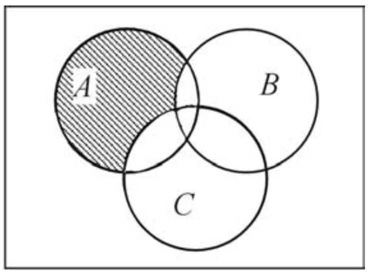

Рис. 1.22

В действительности для второго множества, изображенного на рис. 1.22, справедливо равенство $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

В частности, например, из ассоциативности операции симметрической разности и свойства симметрической разности $A \Delta A = \varnothing$ следует, что для произвольных множеств A и B выполняется равенство:

$$A \Delta (A \Delta B) = B.$$

Отметим еще раз, что *диаграммы Эйлера – Венна иллюстрируют, помогают представить и доказать, но сами ничего не доказывают*. Покажем это на следующем примере. Выясним, справедливо ли равенство:

$$A \Delta B \Delta C = (A \cup B \cup C) \setminus [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]. \qquad (*)$$

Рассмотрим несколько диаграмм Эйлера – Венна для левой и правой части этого равенства. Кроме того, отдельно рассмотрим диаграмму для случая $A \cap B \cap C = \varnothing$.

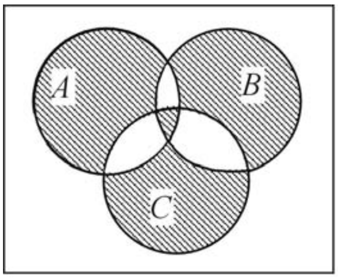

Рис. 1.23

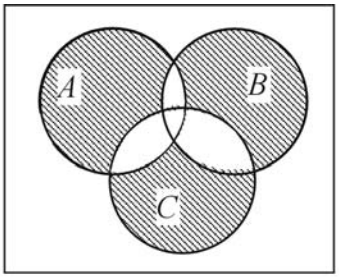

Рис. 1.24

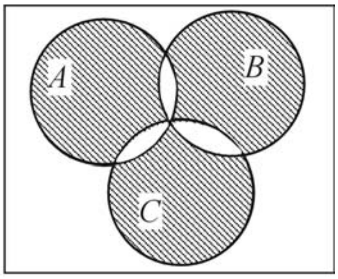

Рис. 1.25

На рис. 1.23 и 1.24 заштрихованная часть диаграмм соответствует левой и правой части исследуемого равенства (∗), т. е. эти две диаграммы показывают, что это равенство для указанных множеств A, B и C не выполнено. Если рассмотреть частный случай множеств A, B и C, когда, например, на диаграмме пропадает внутренняя область, т. е. $A \cap B \cap C = \varnothing$, как на рис. 1.25, то тогда рассматриваемое равенство (∗) выполнено. В общем случае справедливо следующее равенство:

$$(A \Delta B \Delta C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \cup B \cup C) \setminus [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)].$$

Мораль проста: *при использовании диаграмм Эйлера – Венна необходимо следить за тем, чтобы все составляющие рассматриваемых множеств были не пусты.*

Рассмотрим, как в случае пересечения конечных множеств A, B и C посчитать число элементов множества $A \cup B \cup C$. Если просуммировать количество элементов в каждом множестве A, B и C, то согласно диаграмме Эйлера — Венна (см. рис. 1.19), некоторые подмножества при подсчете будут учтены дважды. Если вычесть число элементов множеств $A \cap B$, $A \cap C$ и $B \cap C$, т. е. в наших обозначениях $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ и $n(B \cap C)$, соответственно из числа элементов $n(A \cup B \cup C)$, то как видно из диаграммы Эйлера – Венна (см. рис. 1.20) число элементов множества $A \cap B \cap C$ совсем не будет учтено. Поэтому если к указанной разности добавить $n(A \cap B \cap C)$, то каждый элемент множества $A \cup B \cup C$ будет учтен ровно один раз. Таким образом, получаем следующую формулу:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

В частности, *пользуясь этой формулой, можно решить **задачу о трех языках***, сформулированную в конце раздела 1.1.

Начнем как всегда с обозначений. Пусть A — «множество учащихся, изучающих английский язык», B — «множество учащихся, изучающих немецкий язык», C — «множество учащихся, изучающих французский язык» и $\boldsymbol{U}$ — «множество всех учащихся лицея». Напомним, что $n(\boldsymbol{U}) = 100$, $n(A) = 50$, $n(B) = 23$, $n(C) = 30$, $n(A \cap B) = 20$, $n(A \cap C) = 8$, $n(B \cap C) = 10$, $n(A \cap B \cap C) = 5$. По предыдущей формуле для числа элементов $n(A \cup B \cup C)$ имеем:

$$n(A \cup B \cup C) = 50 + 23 + 30 - 20 - 8 - 10 + 5 = 70.$$

Напомним, что в ***отчете инспектора*** сказано, что каждый из 100 учащихся изучает хотя бы один из трех языков. Получили противоречие $100 \neq 70$. Аналогичным образом посчитаем, *сколько учащихся согласно отчету инспектора изучают только один немецкий язык*?

$$n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 23 - 20 - 10 + 5 = -2.$$

Опять нелепость!

Естественный вывод. *Проверка была проведена плохо или совсем не проводилась, возможно, инспектор неудачно взял произвольные числа.*

Поэтому были все основания для его увольнения, как «*математически малограмотного*» и профессионально непригодного специалиста.

3. ***Законы дистрибутивности.*** *При чередовании операций объединения и пересечения для любых трех множеств A, B и C выполняются свойства дистрибутивности одной операции относительно другой*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Напомним, что в числовом случае дистрибутивность умножения относительно сложения позволяет выносить общий множитель за скобку и раскрывать скобки. В случае множеств соотношений такого рода больше. На рис. 1.26 приведена диаграмма Эйлера – Венна для трех множеств A, B и C, на которой множество $A \cup (B \cap C)$ изображено заштрихованной частью соответственно на рис. 1.27 дана графическая иллюстрация для множества $A \cap (B \cup C)$.

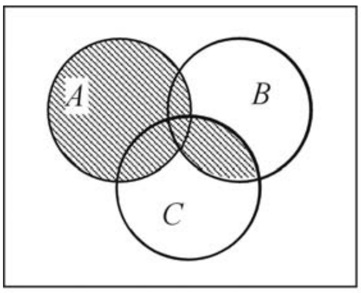

Рис. 1.26

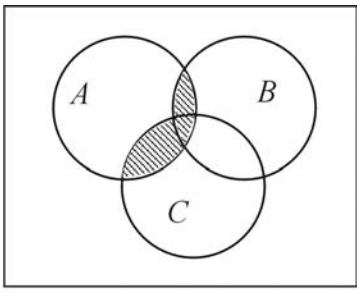

Рис. 1.27

Диаграммы Эйлера – Венна подводят нас к следующему фундаментальному вопросу: *Что такое доказательство с математической точки зрения*? Рассуждения, использующие слова, подобные «значит», «таким образом», «следовательно», на самом деле не являются доказательствами, поскольку логические связи подменяются в них поверхностными, чисто *психологическими ассоциациями*. Для использования указанных слов не на метафорическом уровне, а на уровне операциональном нужно хорошее знание хотя бы некоторых, доступных для всех, разделов математики. Если суденты-гуманитарии отказываются от этого, то тем самым они отказываются от многих возможностей развития и обоснования своих идей. Поэтому одна из целей обучения математике гуманитариев — чисто психологическая, состоящая в создании новой психологии обучения, параллельной обычной, гуманитарной, с целью формирования ***дисциплины мышления***. Ответом на поставленный вопрос для филологов может быть следующая характеристика доказательства:

«***Доказательство*** *— это такая конструкция, синтаксическая правильность которой гарантирует семантическую*».

С точки зрения любого гуманитарного и естественнонаучного знания, кроме ма тематики, это не просто характеристика, а вполне приемлемое определение. Группа математиков, выступавшая под общим псевдонимом *Никола Бурбаки,* начинала свои «Начала математики» словами: «*Со времен греков говорить математика — значит говорить доказательство*». Хотя термин «доказательство» является едва ли не самым главным в математике, он не имеет точного определения. Вторгаясь в область психологии, можно сказать, что «*доказательство*» — *это такое рассуждение*, *которое убеждает нас настолько*, *что с его помощью мы готовы убеждать других*.

Английский писатель и пропагандист науки *Чарлз Сноу* в получившей широкий отклик лекции «*Две культуры и научная революция*» утверждал, что существуют две отдельные культуры: одна — культура естественников и математиков, другая — литературная и традиционная, которая принадлежит гуманитариям. Известный логик и математик профессор В. А. Успенский считает, что «*под видом математики мы на самом деле преподаем ... русский язык, но со смыслом, с семантикой*». В школе изучают морфологию и синтаксис, а семантике не учат, поскольку это гораздо труднее.

Сложные доказательства представляют собой длинную цепочку правильных умозаключений, поэтому ***доказательство*** можно рассматривать как последовательность утверждений, каждое из которых в силу одной из следующих причин:

а) по предположению;
б) по аксиоме или определению;
в) по ранее доказанной лемме или теореме;
г) по способу вывода из предыдущих утверждений;
д) по логической эквивалентности предыдущему утверждению.

С точки зрения ***теории познания***, ценность математического доказательства состоит в том, что *математическое сообщество обладает уникальной способностью отделять правильные доказательства от ошибочных*. Оно также способно устанавливать окончательность доказательства, учитывая методологические представления о ***допустимом и недопустимом в математике***.

Докажем *дистрибутивность объединения относительно пересечения для множеств*, *т. е. равенство*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

По *определению равенства множеств* надо доказать справедливость следующих двух включений:

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ и } (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

По *определению подмножества* необходимо показать, что если элемент x принадлежит левой части включения, то он принадлежит правой части включения.

Начнем с первого включения. Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. По определению объединения множеств отсюда следует, что $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то тогда по *свойству объединения* $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, по определению пересечения множеств имеем, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то по определению пересечения множеств $x \in B$ и $x \in C$, отсюда по *свойству объединения* получим $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, по определению пересечения множеств имеем, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, т. е. включение доказано.

Рассмотрим второе включение. Пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. По определению пересечения множеств отсюда следует, что $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Возможны следующие варианты для рассматриваемого элемента x, а именно $x \in A$ или $x \notin A$. Если $x \in A$, то по *свойству объединения* имеем $x \in A \cup (B \cap C)$. Если $x \notin A$ и одновременно $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, то из этих трех соотношений и из определения объединения множеств получим, что $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, по определению пересечения множеств $x \in B \cap C$ и по *свойству объединения* получим, что $x \in A \cup (B \cap C)$. Второе включение доказано.

Таким образом, доказана дистрибутивность объединения относительно пересечения для множеств.

Отметим, что в числовом случае доказанное соотношение, т. е. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, имело бы вид $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$, что разумеется неверно, т. е. *для чисел не выполняется закон «дистрибутивности сложения относительно умножения»*. Однако *для чисел выполняется закон «дистрибутивности умножения относительно сложения»*, т. е. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, аналог которого для операций на множествах имеет вид: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Нетрудно привести строгое доказательство этого равенства.

Докажем *дистрибутивность пересечения относительно объединения для множеств, т. е. равенство*:

$$A \cap (B \cup C) \ = \ (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

По *определению равенства множеств* надо доказать справедливость следующих двух включений:

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ и } (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C).$$

Начнем с первого включения. Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$. По определению пересечения множеств отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B \cup C$. Итак, всегда $x \in A$, кроме того, для него по определению объединения множеств возможны следующие варианты: $x \in B$ или $x \in C$. Если $x \in B$, то тогда, поскольку он еще содержится в множестве A, получим $x \in A \cap B$, поэтому по *свойству объединения* $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Если $x \in C$ и так как $x \in A$, то можно утверждать, что $x \in A \cap C$, поэтому по *свойству объединения* $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Первое включение доказано.

Рассмотрим второе включение. Пусть $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. По определению объединения множеств отсюда следует, что $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$. Если $x \in A \cap B$, то по определению пересечения множеств $x \in A$ и $x \in B$. Если $x \in A \cap C$, то аналогично $x \in A$ и $x \in C$. Отсюда получим, что в любом случае $x \in A$ и $x \in B$ или $x \in C$, последнее означает, что $x \in B \cup C$. Следовательно, по определению пересечения множеств $x \in A \cap (B \cup C)$. Второе включение доказано.

Таким образом, доказана дистрибутивность пересечения относительно объединения для множеств.

Пример. *Множество всех студентов филологического факультета является объединением следующих трех множеств: A — «множество всех успевающих студентов»; B — «множество всех девушек»; C — «множество всех неуспевающих юношей». Опишем множества, входящие в равенства законов дистрибутивности.*

Ясно, что каждый студент филологического факультета принадлежит хотя бы одному из указанных множеств. Заметим, что множества A и B имеют общие элементы — успевающие девушки входят и в первое, и во второе множество.

С одной стороны, поскольку $B \cap C = \varnothing$, то $A \cup (B \cap C) = A \cup \varnothing = A$. С другой стороны, $A \cup B$ — «множество всех успевающих студентов и всех девушек», $A \cup C$ — «множество всех успевающих студентов и всех неуспевающих юношей», следовательно, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ — «множество всех успевающих студентов», т. е. это опять множество A. В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства:

$$A \cup (B \cap C) = A = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Аналогично, поскольку $B \cup C$ — «множество всех девушек и всех неуспевающих юношей», то $A \cap (B \cup C)$ — «множество всех успевающих девушек», а так как $A \cap C = \varnothing$, то $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap B$ — это тоже «множество всех успевающих девушек». В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства:

$$A \cap (B \cup C) \;=\; A \cap B \;=\; (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

С помощью этого примера мы еще раз убедились в справедливости доказанных выше законов дистрибутивности.

В большинстве математических доказательств логика «скрыта» в том смысле, что о ней специально не упоминается. Предполагается, что каждый может самостоятельно отслеживать логику без посторонней помощи, так как ее специальное рассмотрение может, на первый взгляд, усложнить сам процесс доказательства. В доказательствах законов дистрибутивности для объединения и пересечения неявно использованы логические свойства дистрибутивности для дизъюнкции и конъюнкции.

Обозначим высказывания буквами латинского алфавита p, q, r. Выражение $p \vee q$ называется ***дизъюнкцией*** *высказываний p и q*, где символ « $\vee$ » обозначает слово « *или* » в переводе на символический язык. Выражение $p \wedge q$ называется ***конъюнкцией*** *высказываний p и q*, где символ « $\wedge$ » обозначает слово « *и* » на языке символических выражений. Используя *таблицы истинности*, перечисляющие все возможные комбинации истинности и ложности сложных высказываний, можно доказать следующие ***логические законы дистрибутивности***:

$$p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$
$$p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Центральная задача логики *— отделение правильных схем рассуждения, правильность которых определяется логической формой от неправильных рассуждений.* Отсюда интерес *формальной логики* к таким обычно не привлекающим внимания словам естественного языка, как «и», «или», «если, то», «тогда и только тогда, когда» и т. п. О том, что это действительно так, говорит всем знакомая с детства ***загадка-шутка***: «*А и В сидели на трубе*, *А упало*, *В пропало*, *что осталось на трубе*?» осталось «*и*».

Покажем, как при доказательстве законов дистрибутивности в теории множеств можно использовать символы дизъюнкции, конъюнкции, эквивалентности и соответствующие логические законы дистрибутивности.

Утверждение. *Для произвольных множеств A, B и C справедливо равенство:*

$$A \cup (B \cap C) \;=\; (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Доказательство. Покажем одновременно с помощью логической связки эквивалентности, что каждое из множеств, входящих в это равенство, есть подмножество другого множества. Напомним, что мы используем логический знак « $\Leftrightarrow$ » вместо выражения «тогда и только тогда, когда».

$x \in A \cup (B \cap C) \;\Leftrightarrow\; (x \in A) \vee (x \in B \cap C)$	определение объединения
$\Leftrightarrow\; (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C))$	определение пересечения

$\Leftrightarrow\ ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))$ логический закон дистрибутивности
$\Leftrightarrow\ (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$ определение объединения
$\Leftrightarrow\ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ определение пересечения

Утверждение. *Для произвольных множеств A, B и C справедливо равенство:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Доказательство. Опять покажем с помощью логического рассуждения, используя логический знак « $\Leftrightarrow$ », что каждое из множеств, входящих в это равенство, является подмножеством другого множества.

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cap C)$ определение пересечения
$\Leftrightarrow\ (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$ определение объединения
$\Leftrightarrow\ ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C))$ логический закон дистрибутивности
$\Leftrightarrow\ (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$ определение пересечения
$\Leftrightarrow\ x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$ определение объединения

Свойства дистрибутивности, доказанные в теории множеств, имеют аналоги в логике. Такого рода связь, а именно один из законов логики — *закон де Моргана* — существенно используется для доказательства соответствующего *аналога свойства де Моргана для операции дополнения* в теории множеств.

Отрицание (или *опровержение*) *высказывания p обозначается символом через* « $\sim p$ ». Например, если p есть высказывание «x принадлежит множеству M», то $\sim p$ — это высказывание «x не принадлежит множеству M». Используя таблицы истинности, можно доказать следующие ***логические законы де Моргана***:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q,$$
$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q.$$

Эти законы, названные именем шотландского математика и логика Августа де Моргана, широко используются в естественном языке и позволят переходить от утверждений с союзом *и* к утверждениям с союзом *или*, и наоборот.

Например, используя эти законы от высказывания «***Неверно, что изучение ма тематики для студентов-филологов трудно и бесполезно***», можно перейти к логически эквивалентному высказыванию «***Изучение математики студентами-филологами не является трудным или же оно не бесполезно***».

На основе *законов де Моргана* связку *и* можно определить, используя отрицание, через связку *или*, и наоборот:

«*p и q*» означает «*неверно, что не-p или не-q*»,
«*p или q*» означает «*неверно, что не-p и не-q*».

Например, высказывание «Студенты филфака изучают концепции современного естествознания и основы высшей математики» означает «Неверно, что студенты филфака не изучают концепций современного естествознания или не изучают основы высшей математики».

Утверждение. *Для произвольных множеств A и B справедливы* ***формулы де Моргана в теории множеств****, т. е. имеют место равенства*:

$$\boldsymbol{U} \setminus (A \cup B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B),$$
$$\boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B),$$

где $\boldsymbol{U}$ — универсальное множество, содержащее множества A и B.

Для понимания этих равенств воспользуемся графическими иллюстрациями диаграмм Эйлера – Венна. На рис. 1.28–1.30 универсальное множество $\boldsymbol{U}$ изображено в виде прямоугольника. Множеству $\boldsymbol{U} \setminus (A \cup B)$ на рис. 1.28 и множеству $\boldsymbol{U} \setminus (A \cap B)$ на рис. 1.30 соответствует заштрихованная часть диаграммы. На рис. 1.29 *вертикальной штриховкой* изображено множество $\boldsymbol{U} \setminus A$, а *горизонтальной штриховкой* — множество $\boldsymbol{U} \setminus B$.

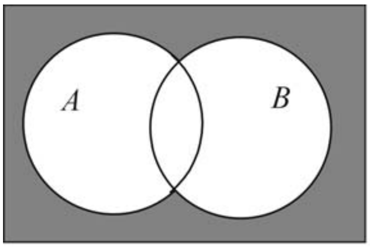

Рис. 1.28

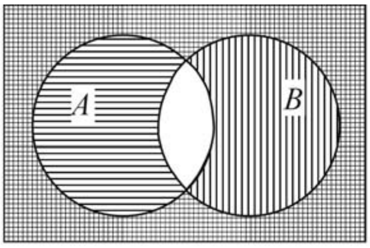

Рис. 1.29

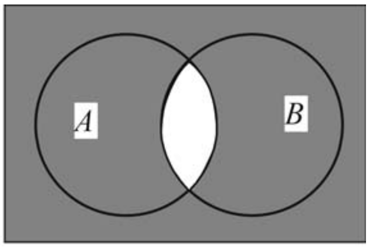

Рис. 1.30

Доказательство. Покажем одновременно, что каждое из множеств, входящих в равенство, есть подмножество другого множества. Начнем с первого равенства.

$x \in \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B$	определение дополнения
$\Leftrightarrow \sim (x \in A \cup B)$	определение $\notin$ и отрицания
$\Leftrightarrow \sim ((x \in A) \vee (x \in B))$	определение объединения
$\Leftrightarrow \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B)$	закон де Моргана
$\Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$	определение $\notin$ и отрицания
$\Leftrightarrow (x \in \boldsymbol{U} \setminus A) \wedge (x \in \boldsymbol{U} \setminus B)$	определение дополнения
$\Leftrightarrow x \in (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)$	определение пересечения

Аналогично с помощью общего рассуждения доказывается второе равенство.

$x \in \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B$	определение дополнения
$\Leftrightarrow \sim (x \in A \cap B)$	определение $\notin$ и отрицания
$\Leftrightarrow \sim ((x \in A) \wedge (x \in B))$	определение пересечения
$\Leftrightarrow \sim (x \in A) \vee \sim (x \in B)$	закон де Моргана
$\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$	определение $\notin$ и отрицания
$\Leftrightarrow (x \in \boldsymbol{U} \setminus A) \vee (x \in \boldsymbol{U} \setminus B)$	определение дополнения
$\Leftrightarrow x \in (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B)$	определение объединения

Пример. *На потоке из* 100 *студентов* 75 *человек изучают английский язык,* 60 — *немецкий, а* 45 *человек — одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов не изучают ни английский, ни немецкий язык?*

Пусть A — «множество студентов, изучающих английский язык», B — «множество студентов, изучающих немецкий язык», а универсальное множество $\boldsymbol{U}$ — это поток из 100 студентов. Тогда множество студентов, не изучающих ни английский, ни немецкий язык равно пересечению дополнений $(\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)$. В силу предыдущего утверждения $(\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B) = \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B)$. Напомним, что число студентов, изучающих английский или немецкий язык, равно $n(A \cup B)$=90, поэтому

$$n((\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)) = n(\boldsymbol{U} \setminus (A \cup B)) = 100 - 90 = 10,$$

т. е. всего 10 студентов не изучают эти иностранные языки.

Замечание. *Из доказанных в предыдущем утверждении равенств, следуют важные* ***для практических рассуждений*** *утверждения:*

$$\text{« } x \notin A \cup B \text{ » } \textit{эквивалентно} \text{ « } x \notin A \; \textbf{\textit{и}} \; x \notin B \text{ »},$$
$$\text{« } x \notin A \cap B \text{ » } \textit{эквивалентно} \text{ « } x \notin A \; \textbf{\textit{или}} \; x \notin B \text{ »}.$$

Пример. *Используя это замечание, докажем еще раз* ***формулы де Моргана*** *на языке теории множеств.*

Начнем с равенства вида $\boldsymbol{U} \setminus (A \cup B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)$. Если $x \in \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B)$, то по определению дополнения $x \notin A \cup B$, значит в силу предыдущего замечания $x \notin A$ и $x \notin B$, т. е. $x \in \boldsymbol{U} \setminus A$ и $x \in \boldsymbol{U} \setminus B$. Следовательно, по определению пересечения множеств $x \in (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)$. Если $x \in (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)$, то $x \in \boldsymbol{U} \setminus A$ и $x \in \boldsymbol{U} \setminus B$, значит по определению дополнения $x \notin A$ и $x \notin B$. Тогда в силу предыдущего замечания отсюда следует, что $x \notin A \cup B$, т. е. $x \in \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B)$, и нужное равенство для множеств доказано.

Рассмотрим равенство $\boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B)$. Если $x \in \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B)$, то по определению дополнения $x \notin A \cap B$, значит в силу предыдущего замечания $x \notin A$ или $x \notin B$, т. е. $x \in \boldsymbol{U} \setminus A$ или $x \in \boldsymbol{U} \setminus B$. Следовательно, по определению объединения множеств $x \in (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B)$. Если $x \in (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B)$, то $x \in \boldsymbol{U} \setminus A$ или $x \in \boldsymbol{U} \setminus B$, значит по определению дополнения $x \notin A$ или $x \notin B$. Тогда в силу предыдущего замечания следует, что $x \notin A \cap B$, т. е. $x \in \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B)$, и, таким образом, второе равенство доказано.

Утверждение. *Для любых трех множеств A, B и C выполняется свойство дистрибутивности пересечения относительно симметрической разности для множеств:*

$$A \cap (B \,\Delta\, C) \; = \; (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C).$$

Доказательство. Для доказательства этого равенства проверим справедливость включений:

$$A \cap (B \,\Delta\, C) \subset (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C) \;\text{ и }\; (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C) \subset A \cap (B \,\Delta\, C).$$

Начнем с первого включения. Пусть $x \in A \cap (B \,\Delta\, C)$. По определению пересечения множеств следует, что $x \in A$ и $x \in B \,\Delta\, C$. Итак, x всегда принадлежит множеству A, и, кроме того, по определению симметрической разности для него возможны следующие варианты: $x \in B \setminus C$ или $x \in C \setminus B$, т. е. по определению разности множеств $x \in B$, но $x \notin C$, или $x \in C$, но $x \notin B$. Тогда из предыдущего с учетом того, что $x \in A$, имеем $x \in A \cap B$, но $x \notin A \cap C$, так как по *свойству пересечения* $A \cap C \subset C$, или $x \in A \cap C$, но $x \notin A \cap B$, так как по *свойству пересечения* $A \cap B \subset B$. Таким образом, $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ или $x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B)$ и по определению симметрической разности множеств $x \in (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$. Первое включение доказано.

Рассмотрим второе включение. Пусть $x \in (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$. По определению симметрической разности множеств возможны варианты: $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ или $x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B)$, что по определению разности множеств означает $x \in A \cap B$, но

$x \notin A \cap C$, или $x \in A \cap C$, но $x \notin A \cap B$. Если $x \in A \cap B$, но $x \notin A \cap C$, то по определению пересечения множеств и предыдущему замечанию имеем $x \in A$ и $x \in B$, но $x \notin A$ или $x \notin C$. Следовательно, $x \in A$ и $x \in B$, но $x \notin C$, т. е. $x \in A \cap (B \setminus C)$. Значит по определению симметрической разности множеств и одному из *свойств пересечения* из последней принадлежности элемента x получим, что $x \in A \cap (B \,\Delta\, C)$. Если $x \in A \cap C$, но $x \notin A \cap B$, то по аналогии с предыдущим рассуждением будем иметь $x \in A$ и $x \in C$, но $x \notin B$, т. е. $x \in A \cap (C \setminus B)$, откуда следует $x \in A \cap (B \,\Delta\, C)$. Таким образом, второе включение доказано.

Отметим, что в доказанном равенстве, вообще говоря, нельзя поменять местами операции « $\cap$ » и « Δ » тем не менее выполняется одно из включений вида $A \,\Delta\, (B \cap C) \supset (A \,\Delta\, B) \cap (A \,\Delta\, C)$.

Замечание. *Для любых трех множеств A, B и C выполняется свойство дистрибутивности пересечения относительно разности для множеств:*

$$A \cap (B \setminus C) \;=\; (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

Для своих открытий математика пользуется аналогиями, моделями, примерами, но математическое утверждение входит в математическую систему знаний только после того, как оно доказано логическим рассуждением.

Математическое утверждение — *это*, *прежде всего*, *строгое логическое доказательство*. Их образцы были продемонстрированы в этом разделе на примере основных свойств операций над множествами. Доказательство состояло в выводе их с помощью строго логически обоснованных и на каждой ступени доказательства явно сформулированных правил из начальных положений, которые фигурируют в данных утверждениях.

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что для произвольных множеств A, B и C справедливы следующие равенства: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$ и $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$?

2. Верно ли, что для произвольных множеств A, B выполняется *закон поглощения для объединения* $A \cup (A \cap B) = A$ и *закон поглощения для пересечения* $A \cap (A \cup B) = A$?

3. Верно ли, что для произвольных множеств A, B и C в силу закона дистрибутивности равенство $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ эквивалентно включению $C \subset A$?

1.5. ПОНЯТИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Содержанием речевой деятельности является передача различных желаний, мыслей, чувств и т. п., которые можно назвать «смыслами». Согласно Сергею Аверинцеву, «***филология*** *занимается* “смыслом” — *смыслом* *человеческого слова и человеческой мысли, смыслом культуры, — но не нагим смыслом, как это делает* ***философия****, а смыслом, живущим внутри слова и одушевляющим слово*». Эволюции понятия «смысл» посвящено несколько книг и множество специальных статей, но определить его оказалось чрезвычайно трудно. Перебирая близкие по значению слова, такие как идея, сущность, целостное содержание и т. п., можно увидеть глубокую связь смысла с целостностью. Как сказала Надежда Мандельштам: «*Стихотворение воспринимается как целое, когда смысл и слова неразделимы, а позже раскрываются мелкие подробности, детали, углубляющие основной смысл*».

Истинными или ложными бывают только осмысленные высказывания. Не об этом ли знаменитые поэтические строки: «*Я понять тебя хочу Смысла я в тебе ищу*» (А. С. Пушкин*),* «*Так современных проявлений Смысл иногда и бестолков*» (Ф. И. Тютчев), «*Их тьма, им нет числа и сметы, Их смысл досель еще не полн*» (Б. Л. Пастернак). Средством передачи содержания ***смыслов*** служат последовательности звуковых, мимических или графических взаимосвязанных знаков и сигналов, которые можно назвать ***текстами***. В духе *концепции дополнительности Бора* можно говорить о том, что понимая то, что нам говорят, мы, вообще говоря, не воспринимаем, из каких именно отдельных элементов (*слов, морфем, фонем*) состоит то, что произносится. Но такой подход не оказал никакого влияния на языкознание, поскольку доминировавшей идеей в науке о языке в прошлом столетии было представление о соответствии между «смыслом» и «текстом», точнее между «означаемым» и «означающим». В сопоставлении этих двух элементов выдающийся языковед из Женевы *Фердинанд де Соссюр* видел основную функцию языка как знаковой системы. С помощью смысла знание входит в сознание, поэтому смысл рассматривают как интуитивную компоненту сознания, наряду с текстом (рацио) и языком (эмоцио).

Даже соблюдение правил синтаксиса не всегда гарантирует осмысленность. Предложение **«*Квадратичность пьет воображение*»** является, судя по всему, бессмысленным, хотя и не нарушает ни одного правила синтаксиса русского языка. В разных книгах можно встретить знаменитую фразу академика Л. В. Щербы: **«*Глокая куздра штеко будланула бокра и кудрячит бокренка*»**. Грамматические окончания в этом предложении русские, хотя корни слов — нет. Тем не менее носители русского языка находят в предложении подлежащее, сказуемое и второстепенные члены предложения, толкуя его приблизительно так: «Некая самка сильно ударила какого-то самца и наносит удары его детенышу». Логика математики и компьютерных «систем понимания» отличается от логики языка, допускающего кроме прямого смысла еще и переносный.

Если какой-то вопрос обсуждается за «круглым столом», то сидеть, обсуждая его, можно за столом любой формы — круглой, прямоугольной, квадратной. Тогда фраза «*Этот круглый стол — четырехугольный*» может оказаться правильной не только грамматически, но и семантически. Например, для пятилетнего ребенка вполне осмысленной может оказаться фраза «*бумсик неутолстял*» (*Полина Михайлова*), что означает «на тебя все каштаны попадали». Осмысленная последовательность слов всегда означает что-то, описывает или оценивает некоторую ситуацию. Правила, определяющие, какие тексты соответствуют каким смыслам (или «сгусткам словосмыслов») принято иногда называть *языком*. Сопоставление множеств приводит к понятию ***соответст-***

вие, которое подобно понятию множества является одним из основных понятий математической лингвистики.

Формальная наука, например, математика или логика, отличается тем, что она проверяет прежде всего форму и поэтому может рассуждать про лишенную смысла в естественном языке «*глокую куздру*» столь же уверенно, как про «*круглый квадрат*». С точки зрения математики, систему правил или формальный язык можно интерпретировать как частный случай важнейшего понятия математики *отображения* (или *функции*), которое, строго говоря, не подлежит формальному определению.

Определение отображения. *Пусть X и Y — заданные множества. Если указано некоторое правило (способ, закон), согласно которому каждому элементу $x \in X$ соответствует один-единственный элемент $y \in Y$, то тогда говорят, что определено* ***отображение*** *f (или функция f) из множества X в множество Y, обозначается $f : X \to Y$.*

Заметим, что в определении отображения использован символ f от «*function*» (функция), хотя для обозначения отображения используются и другие символы g, h и т. п.

Пример. *Пусть X — множество населенных пунктов Республики Беларусь, $Y = \boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел. Отображение $f : X \to Y$ — правило, указывающее для каждого населенного пункта $x \in X$ его расстояние $y = f(x) \in Y$ от Октябрьской площади города Минска.*

Если вышеупомянутое правило (способ, закон) обозначено буквой f, то тогда элемент $y \in Y$, соответствующий какому-нибудь элементу $x \in X$, может быть записан как $y = f(x)$. Запись $f : X \to Y$ читается: «*отображение f действует из множества X в множество Y*». Отметим, что упомянутое правило или соответствие не будет задавать отображение, если:

- найдется элемент $x \in X$ такой, что ему не соответствует ни один элемент $y \in Y$, т. е. ни для какого $y \in Y$, $y \neq f(x)$;
- найдется элемент $x \in X$ такой, что ему соответствует более одного элемента из Y, т. е. найдется, например, $y_1, y_2 \in Y$ такие, что для этих элементов $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(x)$.

Например, пусть X — «множество пальто, висящих в университетском гардеробе», Y — «множество крючков на вешалках в этом гардеробе». Если каждому пальто $x \in X$ поставить в соответствие крючок $y \in Y$, на котором это пальто висит, то получим отображение $f : X \to Y$. Поскольку каждое пальто висит на крючке и никакое пальто не висит на нескольких крючках, то можно сказать, что задано отображение.

Замечание. *Отображение $f : X \to Y$ характеризуется: множеством X, из которого оно действует, его также называют* ***областью определения*** *отображения f и обозначают $D(f)$; множеством Y, в которое оно действует, его также называют* ***областью значений*** *отображения f и* *обозначают $R(f)$; правилом (способом), определяющим действие этого отображения.*

Отметим еще раз, что для любого отображения $f : X \to Y$ каждому $x \in D(f)$ соответствует только один элемент y множества $R(f)$, т. е. $y = f(x)$, который называется ***образом элемента*** x. Вспомним, например, «*И образ мира, в слове явленный*» (Борис Пастернак). С другой стороны, один и тот же элемент множества $R(f)$ может быть образом нескольких элементов из $D(f)$.

Пример. *Пусть $X = \{k, m, n, p, q\}$ — английские согласные, $Y = \{к, м, н, п\}$ — буквы русского алфавита, соответствующие при чтении указанным английским согласным, и это соответствие $f : X \to Y$ задано по правилу: $f(k) = к$, $f(m) = м$, $f(n) = н$, $f(p) = п$, $f(q) = к$. Покажем, что f — отображение.*

Действительно, каждому элементу множества X, т. е. каждой из указанных английских согласных по заданному правилу f, соответствует единственный элемент из множества Y, а именно вариант их чтения, записанный русскими буквами.

Примерами отображений являются ***числовые функции,*** *которые все изучали в школе*, т. е. функции, определенные на множестве действительных чисел и принимающие значения также в множестве действительных чисел. Причем функциональная зависимость $y = f(x)$ задавалась, как правило, в явном виде, например, $y = x^2$, $y = x^3 + 1$, $y = \sqrt{x}$ и т. д. Область определения первой и второй функции — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, а третьей функции — множество всех неотрицательных действительных чисел $\boldsymbol{R}_+$. Область значений первой и третьей функции — множество $\boldsymbol{R}_+$, а второй функции — множество $\boldsymbol{R}$.

Простые примеры *отображений*, *которые не являются числовыми функциями*, встречаются в геометрии. Все геометрические преобразования, играющие важную роль в этом разделе математики, являются отображениями. Довольно часто *понятие функции* используется в качестве синонима *понятия отображения*.

Заметив вначале, что немцы больше всех других народов мира знают о художественных стилях прошлых времен, хотя их собственное искусство сегодня безнадежно скучно, классик английской литературы *Олдос Хаксли* сказал: «*Если прибегнуть к математическим терминам*, *то их унылое искусство — это функция от их просвещенности*». Так как язык — это *система*, т. е. упорядоченное определенным образом множество, то отдельные элементы этой системы взаимосвязаны, что предполагает эффективность применения математического понятия отображения и функции.

В классической лингвистике ***знаком*** называется сопоставление двух элементов: некоторого «*означающего*» — формы и некоторого «*означаемого*», или «*смысла*», который приписывается произнесенному или написанному выражению. В соссюровской схеме «***означаемое*** $\to$ ***означающее***» для объяснения структуры языка «означаемое» определяет «означающее» и наоборот. Отображения (или функции), описывающие лингвистические процессы, могут задаваться различными способами.

***Основные способы задания отображений*:**
- *табличный*;
- *аналитический*;
- *алгоритмический*.

Рассмотрим на примерах эти способы задания отображений:

1. Пусть $X = Y = \{a, b\}$. Рассмотрим отображения, область определения которых состоит их двух букв $\{a, b\}$, а область значений принадлежит тому же множеству. Таких отображений всего четыре, f_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Их можно задать *табличным способом*:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
a	a	a	b	b
b	a	b	a	b

Область значений отображений f_1 и f_4 состоит из одного (единственного) элемента, а именно $R(f_1) = \{a\}$ и $R(f_2) = \{b\}$. Это *отображение множества X в себя*, а f_2 и f_3 — *это отображение множества X на себя*, причем $f_2(x) = x$ для всех $x \in X$, т. е. это *тождественное отображение*.

Основное достоинство табличного способа задания отображения состоит в том, что оно непосредственно соотносит значение аргумента $x \in X$ и отвечающее ему значение отображения (функции) $f(x) \in Y$. Существенный недостаток этого способа в том, что он используется в основном для «небольших» конечных множеств или для выборочных значений аргумента $x \in X$.

2. Под *аналитическим способом* задания отображения понимается способ задания отображения с помощью формулы, содержащей «известные» функции, включая иногда «предельный переход».

Пусть для $x \in R$ — множеству действительных чисел *символ* $[x]$ — *целая часть числа*, определяемая как наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[0] = 0$, $[1] = 1$, $[-2] = -2$, $[3{,}4] = 3$, $[-3{,}4] = -4$, $[\sqrt{2}] = 1$. И пусть для $x \in \boldsymbol{R}$, *символ* $\{x\}$ — *дробная часть числа*, определяемая как разность между x и $[x]$, т. е. $\{x\} = x - [x]$. Например, $\{0\} = 0$, $\{3\} = 0$, $\{-5\} = 0$, $\{0{,}3\} = 0{,}3$, $\{-0{,}3\} = 0{,}7$, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$. Тогда следующее отображение, точнее числовую функцию, можно задать аналитическим способом по формуле:

$$f(x) = [x] + \frac{1}{2}\{x\}\ (1 + (-1)^{[x]}).$$

Не следует бояться этой функции! Используя данные выше определения функций целой и дробной части числа, можно показать, что $f(x) = x$, для всех x, удовлетворяющих неравенствам вида $2n \le x \le 2n + 1$, где n — целое число и что $f(x) = [x]$, для всех x, удовлетворяющих неравенствам вида $2n + 1 \le x \le 2n + 2$, где n — целое число.

Достоинство аналитического способа задания функций состоит в том, что он дает возможность «вычислять» значения функций $f(x) \in Y$ при любом значении аргумента $x \in X$, что позволяет анализировать с помощью математического аппарата различные свойства функции, недоступные при прямом наблюдении соответствующих функциональных зависимостей. Недостаток этого способа состоит в том, что составить формулу представления функции, описывающую лингвистическое явление, можно лишь тогда, когда заранее известен «внутренний механизм» интересующего нас явления.

3. Под *алгоритмическим способом* задания отображения понимается способ задания с помощью определенных правил последовательных действий, т. е. *алгоритма*, с использованием функций «словесного описания», например, так задается ***функция Дирихле***:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ когда } x \text{ рациональное число,} \\ 0, \text{ когда } x \text{ иррациональное число.} \end{cases}$$

Некоторые тексты, в частности, тексты на русском языке, являются ***алгоритмами*** — *предписаниями, которые можно выполнить*. Рассмотрим это понятие на примере увлекательной игры, которую придумал ***Льюис Кэрролл***, автор «*Приключения Алисы в стране Чудес*». Чарлз Додгсон — таково подлинное имя Кэрролла, которым он подписывал свои математические работы. Сочетание безупречной логики математика с беспредельной фантазией литератора создало неповторимое своеобразие кэрролловского стиля, поэтому в диаде «математика и литература» Льюис Кэрролл оказался не только более ярким, но и более удачливым, чем Додгсон-математик.

«*Любопытно, что вы проделывали со своим разумом в последнее время. Хватало ли ему пищи? Он очень бледен, и пульс у него чрезвычайно замедлен*», — волновался Кэрролл. Игра «*цепочка слов*», основанная на «*словах-метаграммах*», была придумана им для «двух юных леди, изнывающих от праздности». Предлагаются два слова, состоящие из одинакового числа букв. ***Метаграмма*** *данного слова получается заменой одной из его букв на другую, без перестановки букв*. Алгоритм игры заключается в нахождении цепочки метаграмм, соединяющей два заданных слова. Например,

КОЗА → ЛОЗА → ЛУЗА → ЛУПА → ЛИПА → ЛИСА.

Побеждает тот, кто построит цепочку из наименьшего количества числа звеньев. Более простая игра состоит в нахождении *наибольшего количества метаграмм* для одного слова. Так, например, слово ДОМ порождает девять метаграмм:

КОМ, ЛОМ, РОМ, СОМ, ТОМ, ДЫМ, ДОГ, ДОК, ДОЛ.

Рекорд числа метаграмм, образованных из одного слова, неизвестен. В самых популярных цепочках метаграмм МУХУ ***можно превратить в*** СЛОНА. Вот одна из них, где цель достигается за 16 ходов:

МУХА → МУРА → ТУРА → ТАРА → КАРА → КАРЕ → КАФЕ →
→ КАФР → КАЮР → КАЮК → КРЮК → УРЮК → УРОК → СРОК →
→ СТОК → СТОН → СЛОН.

Многие короткие слова не имеют метаграмм. Если разрешить произвольно менять порядок всех букв, то в такой «модифицированной цепочке слов» ***из*** МУХИ ***можно сделать*** СЛОНА за четыре хода:

МУХА → ХЛАМ → ХОЛМ → СЛОМ → СЛОН.

Математики ограничиваются рассмотрением только тех алгоритмов, в которых исходными данными являются *конструктивные объекты*, т. е. объекты, задаваемые конечными, конструктивным образом с помощью эффективных вычислительных процедур, которые в условиях интенсивного развития вычислительной техники, могут служить входными данными для компьютеров.

Замечание. *Суть понятия отображения состоит в том, что это действия, а не объекты их приложения. С точки зрения лингвистики, с помощью отображений изучаются* ***глаголы*** *в отрыве от* ***существительных***.

В современной математике понятие функционального пространства сместило акценты и дало новое направление развития математического анализа. *Отображения функциональных пространств* — это «отображения отображений (функций)», подобно «глаголам над глаголами» — «иди учи».

Заметим также, что, кроме указанных основных способов задания отображений, наглядное представление функции дает графический способ. Его преимущество заключается в том, что он дает возможность охватить рассматриваемую функциональную зависимость «в целом», поэтому простейшие графики, наряду с таблицами, являются эффективным методом получения *лингвистических выводов на основе математического анализа количественных методов*. Приведенная классификация основных способов задания отображений весьма условна, так как некоторые отображения можно задать разными способами.

Определение образа множества. *Пусть отображение f действует из множества X в множество Y.* ***Образом множества*** *$A \subset X$ при отображении $f : X \to Y$, обозначается $f(A)$, называется множество всех образов $f(x) \in Y$ элементов $x \in A$:*

$$f(A) \overset{def}{=} \{y : y = f(x),\ x \in A\}.$$

Например, рассмотрим фразу «***Я вас люблю***». По мнению известного филолога и философа А. Ф. Лосева, в этой простой фразе можно найти, по меньшей мере, три, а на самом деле гораздо больше предложений, отличающихся по смыслу: «*Я, и именно я, вас люблю*», «*Я люблю именно вас*», «*Я на самом деле люблю вас*».

С точки зрения языка — это три разные фразы в области смысловых интонаций и формальных трансформаций, а с точки зрения чистой логики — здесь только одно суждение. Поэтому можно задать отображение f, ставящее в соответствие каждой из перечисленных трех фраз, отличающихся смысловыми ударениями, одну и ту же фразу «***Я вас люблю***». Эта единственная фраза будет образом множества, состоящего из трех разных суждений при указанном отображении.

Пример. *Пусть* $X = \{k, m, n, p, q\}$ *— английские согласные,* $Y = \{к, м, н, п\}$ *— буквы русского алфавита, соответствующие при чтении указанным английским согласным, и отображение* $f : X \to Y$ *задано по правилу:* $f(k) = к,\ f(m) = м,\ f(n) = н,\ f(p) = п,\ f(q) = к$. *Найдем образы множеств* $A = \{k, m, n, p\},\ B = \{m, p, q\}$ *и* $C = \{k, q\}$.

Нетрудно видеть, что образы указанных множеств соответственно равны: $f(A) = \{к, м, н, п\}$, $f(B) = \{к, м, п\}$ и $f(C) = \{к\}$.

Замечание. *Пусть* $f : X \to Y$ *и* $A \subset X$. *Если* $y \in f(A)$, *то тогда* ***существует такой элемент*** $x \in A$, *обозначается* $\exists\, x \in A$, *для которого* $y = f(x)$:

$$y \in f(A) \ \Rightarrow\ \exists\, x \in A,\ y = f(x).$$

Это утверждение непосредственно следует из определения образа множества. Отметим следующее *простое свойство образов множеств*:

$$A \subset B \ \Rightarrow\ f(A) \subset f(B).$$

Кроме того,

$$f(A) = \varnothing \ \Leftrightarrow\ A \cap D(f) = \varnothing,$$

где $D(f)$ — область определения отображения f.

Рассмотрим *свойства образов объединения и пересечения.*

Утверждение. *Для любого отображения* $f : X \to Y$ *и множеств* $A, B \subset X$ *справедливо равенство и включение:*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad и \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Доказательство. Рассмотрим первое равенство. Покажем, что $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Пусть $y \in f(A \cup B)$, тогда в силу последнего замечания $\exists\, x \in A \cup B$ такой, что $y = f(x)$. Отсюда по определению объединения множеств $x \in A$ или $x \in B$, причем $y = f(x)$. Значит по определению образа множества $y \in f(A)$ или $y \in f(B)$. Следовательно, по определению объединения множеств $y \in f(A) \cup f(B)$.

Покажем теперь, что $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Пусть $y \in f(A) \cup f(B)$, тогда по определению объединения множеств $y \in f(A)$ или $y \in f(B)$. Отсюда, по предыдущему замечанию, учитывая также то, что множества A и B, вообще говоря, разные, получим $\exists\, x_1 \in A$ такой, что $y = f(x_1)$ или $\exists\, x_2 \in B$ такой, что $y = f(x_2)$. Поэтому в силу *свойства объединения* $x_1 \in A \cup B$, а $y = f(x_1)$, или $x_2 \in A \cup B$, а $y = f(x_2)$. Следовательно, по определению образа множества $y \in f(A \cup B)$. Таким образом, первое равенство доказано.

Доказательство включения для образа пересечения множеств $f(A \cap B) \subset f(A) \cap (B)$ проводится так же, как и для аналогичного включения образа объединения множеств, только в соответствующем рассуждении вместо слов «объединение» надо записать «пересечение», а вместо союза «или» надо поставить союз «и».

Покажем на **контрпримере**, что $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e\}$. Рассмотрим множества $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ и зададим отображение $f : X \to Y$ по правилу: $f(a) = d$, $f(b) = e$, $f(c) = d$. Тогда, так как $A \cap B = \{b\}$, то $f(A \cap B) = \{e\}$. С другой стороны, $f(A) = \{d, e\}$ и $f(B) = \{e, d\}$, следовательно, $f(A) \cap f(B) = \{d, e\}$, т. е.

$$\{e\} = f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) = \{d, e\},$$

хотя всегда тем не менее справедливо включение $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Сделаем одно полезное замечание для тех, кто собирается заниматься ***сравнительным литературоведением***. Пусть, например, A — «множество определенных литературных стилей, описанных в классической терминологии», B — «множество определенных литературных традиций, описанных в классической терминологии». Если f — отображение этих стилей и традиций в соответствующие им литературные стили и традиции в постклассической терминологии, то *образ пересечения стилей и традиций прошлого*, т. е. $f(A \cap B)$, *вообще говоря, не совпадает с пересечением образов стилей и традиций настоящего*, т. е. с $f(A) \cap f(B)$. Можно лишь утверждать, что первое множество содержится во втором.

Замечание. *Для любого отображения* $f : X \to Y$ *и множеств* $A,\ B \subset X$ *справедливы включения:*

$$f(A \,\Delta\, B) \supset f(A) \,\Delta\, f(B) \quad \text{и} \quad f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B).$$

На контрпримерах можно показать, что обратные включения для образов разности и симметрической разности множеств, вообще говоря, не выполняются.

Определение прообраза множества. *Пусть отображение f действует из множества X в множество Y.* ***Прообразом множества*** *$B \subset Y$ при отображении $f: X \to Y$, обозначается $f^{-1}(B)$, называется множество всех элементов $x \in X$, образы которых $f(x) \in B$:*

$$f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{x : f(x) \in B\}.$$

Например, прообразом одноэлементного множества, состоящего из фразы «***Я вас люблю***» при отображении f, построенном после определения образа множества, является трехэлементное множество, состоящее из фраз: «*Я, и именно я, люблю вас*», «*Я люблю именно вас*», «*Я на самом деле люблю вас*». Напомним, что с точки зрения языка, это три разные фразы в области смысловых интонаций и формальных трансформаций.

Пример. *Пусть $X = \{k, m, n, p, q\}$ — английские согласные, $Y = \{к, м, н, п\}$ — буквы русского алфавита, соответствующие при чтении указанным английским согласным, и отображение $f: X \to Y$ задано по правилу: $f(k) = к$, $f(m) = м$, $f(n) = н$, $f(p) = п$, $f(q) = к$. Найдем прообразы множеств $B = \{к\}$, $C = \{м, н, п\}$ и $D = \{к, м, н, п\}$.*

Нетрудно видеть, что прообразы указанных множеств соответственно равны:

$$f^{-1}(B) = \{k, q\},\ f^{-1}(C) = \{m, n, p\},\ f^{-1}(D) = \{k, m, n, p, q\}.$$

Замечание. *Пусть $f: X \to Y$ и $B \subset Y$. Элемент $x \in f^{-1}(B)$ тогда и только тогда, когда образ этого элемента $f(x) \in B$:*

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Это утверждение следует из определения прообраза множества. Отметим следующее простое свойство прообразов множеств:

$$C \subset D \Leftrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D).$$

Кроме того, $f^{-1}(B) = \varnothing \Leftrightarrow B \cap R(f) = \varnothing$, где $R(f)$ — область значений отображения f.

Рассмотрим *свойства прообразов объединения и пересечения.*

Утверждение. *Для любого отображения $f: X \to Y$ и множеств $B, D \subset Y$ справедливы равенства:*

$$f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D),$$
$$f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D).$$

Доказательство. Рассмотрим первое равенство. Покажем выполнение включения $f^{-1}(B \cup D) \subset f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$. Пусть $x \in f^{-1}(B \cup D)$, тогда в силу последнего замечания $f(x) \in B \cup D$. Отсюда по определению объединения множеств $f(x) \in B$ или $f(x) \in D$. Значит в силу последнего замечания $x \in f^{-1}(B)$ или $x \in f^{-1}(D)$. Следовательно, по определению объединения множеств $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$.

Покажем теперь, что $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(B \cup D)$. Пусть $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$, тогда по определению объединения множеств $x \in f^{-1}(B)$ или $x \in f^{-1}(D)$. Отсюда в силу последнего замечания $f(x) \in B$ или $f(x) \in D$, а по определению объединения множеств $f(x) \in B \cup D$. Следовательно, по предыдущему замечанию $x \in f^{-1}(B \cup D)$. Таким образом, первое равенство доказано.

Доказательство равенства для прообразов пересечения множеств $f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$ проводится так же, как и в случае аналогичного равенства для прообраза объединения множеств, только в соответствующем рассуждении вместо слов «объединение» надо записать «пересечение», а вместо союза «или» надо поставить союз «и».

Замечание. *Для любого отображения $f : X \to Y$ и множеств B, $D \subset Y$ справедливы равенства:*

$$f^{-1}(B \setminus D) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(D) \ \text{ и } \ f^{-1}(B \,\Delta\, D) = f^{-1}(B) \,\Delta\, f^{-1}(D).$$

Отметим также, что для произвольного отображения $f : X \to Y$ справедливы включения $A \subset f^{-1}(f(A))$, для множества $A \subset X$ и $f(f^{-1}(B)) \subset B$ для множества $B \subset Y$. В частности, если множество B содержится в области значений отображения f, т. е. $B \subset R(f)$, то тогда $f(f^{-1}(B)) = B$.

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что если X — «множество слов русского языка», Y — «множество слов английского языка», то соответствие между X и Y, задаваемое с помощью словарей является отображением из множества X в множество Y?

2. Верно ли, что на множестве *палиндромов* (*перевертышей*), т. е. слов, которые выглядят одинаково при чтении как слева направо, так и справа налево, отображение, которое каждому слову ставит в соответствие слово, записанное теми же буквами, но в обратном порядке является тождественным отображением?

3. Верно ли, что на множестве N, составленного из n различных букв n-буквенного слова, можно определить m^n отображений в множество M, составленного из m различных букв m-буквенного слова?

Чем математика может быть полезна гуманитарию? С точки зрения рационалистического решения научной проблемы, ***математика — это культура исследований***. Различие между математическим и непосредственным познанием определяет задачу математического образования гуманитариев: для понимания скрытой гармонии мира, кроме эмоциональных средств, нужны концептуальные соглашения, выражающиеся в виде простых математических законов. Поскольку традиции преподавания курса «*Основы высшей математики для филологов*» только складываются, то наиболее интересны примеры использования «математического диалекта» у классиков.

В романе *Льва Толстого* «*Война и мир*» имеется рассуждение *Пьера Безухова* на интересующую нас тему: «Отображение множества букв французского языка в множество натуральных чисел». Французские буквы в соответствии с одним из известных способов числоизображений, по которому первые десять букв обозначаются цифрами от единицы до десяти, а прочие буквы — десятками, имеют следующие значения:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160

Написав на этой азбуке слова *L'empereur Napoléon* (император Наполеон), выходит, что сумма этих чисел равна 666 и что поэтому ***Наполеон*** есть тот зверь, о котором предсказано в Апокалипсисе. Эта аргументация, которая есть в собрании сочинений *графа Л. Н. Толстого*, изданном в Москве в 1886 году, и приведена в заметке Б. С. Стечкина «*Арифметическая ошибка в "Войне и мире"*». Что можно сказать по поводу этой литературно-числовой интерпретации исторического персонажа?

Во-первых, любого грамотного человека может смутить непосредственная числовая проверка вынесенного заключения. Действительно, воспользовавшись заданным отображением, получим, что $20 + 5 + 30 + 60 + 5 + 80 + 5 + 110 + 80 + 40 + + 1 + 60 + 50 + 20 + 5 + 50 + 40 = 661 \neq 666$. Куда делась недостающая пятерка? На этот вопрос страницей ниже отвечает сам Лев Николаевич: «5 означает «е», то самое «е», которое было откинуто в article перед словом l'empereur». Во-вторых, и это самое главное, проблема в заданном отображении.

Ошибка Безухова. *В ряду «очислованных» букв отсутствует одна буква французского алфавита, а именно буква j.*

Безусловно, в контексте литературно-художественной характеристики Наполеона, гипотеза Пьера Безухова впечатляет, но с точки зрения математического формализма следует признать, что это всего лишь художественный вымысел автора.

В математике наша способность к соотнесению данностей формализована в понятии отображения, а в литературе — привела к формированию аналогий. Именно аналогии лежат в основе логики образования метафор и аллегорий. Американский лингвист *Ноам Хомский* придумал фразу «*Бесцветные зеленые идеи яростно спят*». Вторая фраза, которую он приводил вместе с первой, была приблизительно такой: «*Бесцветное зеленая идея яростна спят*». Они обе одинаково бессмысленны, но первая из них правильна, так как законы грамматики в ней не нарушены, а вторая — неправильна, так как в ней нарушено согласование слов. К фразе Хомского о «***зеленой идее***», приводимой как хрестоматийный образец бессмыслицы, можно подыскать контекст, благодаря которому она станет более или менее осмысленной. Тоже можно сказать и о «*будетлянах*» *Велимира Хлебникова* или «*кинтуруляторе*» *Полины Михайловой*.

Своим знаменитым примером Хомский хотел показать, что грамматику надо изучать отдельно от семантики, оставив временно проблемы смысла, которые сложны и неоднозначны. В отличие от вопросов семантики, грамматика обладает настолько четкими логическими правилами, что ее можно свести к математике. Как замечательно сказал дипломат и поэт *Федор Тютчев*:

Многозначительное слово
Тобою оправдалось вновь:
В крушении всего земного
Была ты — кротость и любовь.

Оригинальные работы Ноама Хомского, связанные с порождающими грамматиками, способствовали раскрытию механизма создания речевых произведений. В математике «порождающие системы» — это формальные исчисления, позволяющие с помощью правил построения формул и вывода одних утверждений из других, исходя из определенного набора аксиом, строить с помощью этих систем правильные и хорошо аргументированные высказывания. Хомский провел смелую *аналогию между* ***математикой и языком***, состоящим из конечного числа элементов-слов и грамматических категорий.

«*Изучение потока речи без гипотез о механизме его порождения не только малопродуктивно, но и неинтересно*», — говорил академик А. Н. Колмогоров. Математика случайного и статистика, а также комбинаторика, рассматриваемые в следующей главе, дают возможность с помощью анализа частоты употребления слов, слогов, букв, типов рифм и различных грамматических конструкций улавливать общие закономерности механизма порождения языка.

Глава 2

КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

Взятая в цифрах, вещь может дать
тамерланову тьму,
род астрономии. Что под стать
воздуху самому.

Иосиф Бродский

Стремление увидеть за словом цифры (число), представить искусство как определенного вида математику или описать его через нее берет начало в ***принципе математической эстетики пифагорейцев***, согласно которому «*сущность красоты кроется во внутренних числовых отношениях*». Заметим, что синтаксические определения, знаки которых имеют содержательный смысл, могут превращаться в семантические. Поэтому на вопрос о «*сохранении гармонии*» нужно отвечать с учетом постоянного совершенствования математических методов в сторону все более полного и всестороннего охвата «*поверяемой гармонии*».

Математику как олицетворение рассудочности обычно противопоставляют поэзии, постигающей мир «иными путями». Тем не менее именно в анализе поэтического языка содержатся наиболее оправданные сопоставления элементов логики художественного и математического мышления. В стремлении к многоохватному анализу может исчезнуть сама проблема «*поэзия и математика*». Выделение аспектов, для анализа которых необходим математический анализ, методологически допустимо, если они не отрицают иных постановок вопросов, связанных с проблемами эстетической ценности и многозначности поэтического языка. В начале прошлого века были предприняты попытки «поверить алгеброй гармонию». Русский математик академик А. А. Марков в работе «*Пример статистического исследования над текстом "Евгения Онегина" иллюстрирующий связь испытаний в цепь*» (Известия Императорской академии наук. СПб., 1913) провел статистическое исследование чередования гласных и согласных букв, в качестве иллюстрации к созданной им математической теории «марковских цепей». Это был неслучайный факт. Поскольку в языке можно наблюдать регулярные отношения и, кроме того, так как язык содержит поддающиеся счету дискретные единицы, то он допускает возможность математического описания. До сих пор эти факты не оказывали существенного влияния на методологию лингвистики. За исключением структурной лингвистики она оставалась эмпирической наукой.

Для решения проблем, касающихся построения математических моделей языка, применения статистических методов в изучении языка, построения языков-посредников машинного перевода необходима нормализация системы математической подготовки специалистов-филологов и издание математической литературы для студентов-филологов. Необходимо также понимание ***прикладной лингвистики***, *как проведение широких экспериментов на современных вычислительных машинах с соответствующим лингвистическим и математическим анализом*. Границы между науками создаются независимо от их формального определения. Однако если относить к лингвистике лишь то, чем большинство из лингвистов занималось на протяжении многих лет, и то, чем они могли бы заниматься в дальнейшем на основе уже имеющихся знаний, без освоения высшей математики, физики и вычислительной техники, то при таком узкоутилитарном подходе описанные выше проблемы к лингвистике, конечно, не относятся. Поэтому *полноценное университетское филологическое образование* должно способствовать устранению двух нежелательных крайностей: узкого эмпиризма и оторванности от конкретных лингвистических задач, для понимания которых необходим понятийный аппарат современных методов исследования.

Парадоксальность ситуации с работой, выполняемой на стыке интересов математиков и лингвистов, в том, что она рискует оказаться не принятой ни теми ни другими. В журнале «Успехи математических наук» была опубликована работа французского математика Рене Тома «*Топология и лингвистика*», хотя ее вполне можно было бы напечатать, например, в «Вопросах языкознания». Основной результат этой работы состоит в обнаружении «*тесного структурного параллелизма между фрагментами двух языков: «человеческого» языка обыденной жизни и языка ньютоновской механики в его крайне схематизированном и топологизированном варианте*»[7]. В этой работе Том опирался на математическую теорию, которой он дал рекламный вариант названия — «*теория катастроф*». В частности, он отмечал, что полная формализация естественных языков представляется невозможной по следующим причинам:

А. Если бы одновременная формализация данного языка и метаязыка, его описывающего, оказалась возможной, то как и в математике *появились бы парадоксы*, препятствующие полной формализации арифметики.

Б. Даже если не требовать одновременной формализации метаязыка, *невозможно избежать аксиом «обрамления»*, которые позволяют неограниченно удлинять правильно составленные выражения.

[7] *Том Р.* Топология и лингвистика // Успехи математических наук. — 1975. — Т. 30, вып. 1. — С. 199.

В. Наконец, само понятие «правильной составленности» в естественном языке не является *ни жестко определенным*, *ни четко ограниченным*.

Это в первую очередь относится к тем случаям, когда с языком приходится иметь дело вычислительной машине. ***Математические методы*** оказываются в этом случае необходимыми из-за того, что современные машины пока еще плохо приспособлены, для того чтобы непосредственно «понимать» язык лингвистов, которые сами понимают друг друга далеко не однозначно. Например, как говорил академик А. Н. Колмогоров: «*Стиховедение вместе со всеми филологическими дисциплинами переживает сейчас закономерный этап устремления к более точным и объективным методам исследований, опирающимся лишь на факты, непосредственно данные в изучаемом материале*». В свое время он организовал семинар по изучению русской поэзии при статистической лаборатории МГУ. Исходная позиция Колмогорова состояла в том, что в поэтических произведениях имеются количественные закономерности, которые могут быть восприняты в отрыве от их содержания. Математический аппарат, необходимый для изучения этих закономерностей, включает в себя *комбинаторику, теорию вероятностей и математическую статистику*.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КОМБИНАТОРИКИ

Классической теории вероятностей предшествуют разделы комбинаторики. В знаменитой басне *И. А. Крылова* ***«Квартет»*** группа музыкантов «*проказница Мартышка*, *Осёл*, *Козёл да косолапый Мишка*» устроили любопытный эксперимент — они исследовали влияние взаимного расположения музыкантов на качество исполнения. Если бы не вмешался *Соловей*, участники квартета, наверное, перепробовали бы все возможные варианты. ***Первичная мотивация:*** *Сколько всего способов имеется для того, чтобы рассадить в один ряд этих четырех «музыкантов»*? Такого рода задачами занимается отдельная область математики, которая называется «комбинаторикой».

Комбинаторика *— это раздел математики, изучающий расположения объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета числа всех возможных способов, которыми эти расположения могут быть сделаны.*

Некоторые комбинаторные задачи решали еще в Древнем Китае, а позднее — в Римской империи, однако как самостоятельный раздел математики комбинаторика оформилась в Европе лишь в XIII веке в связи с развитием теории вероятностей. В XX веке комбинаторику стали рассматривать как часть *теории множеств*, изучающей различные проблемы, возникающие при изучении конечных множеств, поскольку любую комбинаторную задачу можно свести к задаче о конечных множествах или их отображений. Такая точка зрения более естественна с точки зрения классификации основных понятий и задач комбинаторики.

Иногда по смыслу задачи, очевидно, что существует лишь конечное число интересующих нас объектов. Они, как правило, являются определенными комбинациями других объектов, например, букв, чисел, слов и т. д. Отсюда и соответствующее название — *комбинаторика* (от латинского слова *combinatio* — соединение). Из сказанного ясно, что комбинаторика имеет дело лишь с натуральными числами и поэтому может показаться, что она более «элементарна», чем другие разделы математики. Такое впечатление обманчиво. Как говорил Альберт Эйнштейн: «*Не все, что можно сосчитать, сосчитано, и не все, что сосчитано, можно сосчитать*». В последнее время роль комбинаторики возросла в связи с бурным развитием вычислительной техники и потребностями теории информации, изучающей методы оптимального кодирования, декодирования и передачи информации.

Кроме того, комбинаторный подсчет числа случаев, благоприятствующих тому или иному событию, служит хорошей психологической подготовкой к введению *понятия вероятности*. Лучший способ освоения комбинаторики — решение задач. О простых и типовых, но в то же время важных задачах пойдет речь ниже. Начнем *с основных принципов комбинаторики — принципа сложения и принципа умножения*, которые рассмотрим сначала на следующем примере.

Пример. *Пусть в магазине имеются 7 различных видов коробок конфет и 5 различных коробок печенья. Сколькими способами можно выбрать в подарок коробку конфет или коробку печенья? Сколькими способами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья?*

Ответ на первый вопрос очевиден. Коробку конфет можно выбрать 7 способами, коробку печенья — 5 способами. Следовательно, коробку конфет или коробку печенья можно выбрать $7 + 5 = 12$ способами.

Для ответа на второй вопрос заметим, что если мы составляем набор из коробки конфет и коробки печенья, то к каждой из 7 различных коробок конфет можно подобрать коробку печенья 5 способами, а именно к первой коробке конфет можно подобрать 5 различных коробок печенья, но второй коробке конфет — опять 5 различных коробок печенья и т. д. Таким образом, набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья, можно выбрать $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 \cdot 5 = 35$ способами.

На этом простейшем примере мы продемонстрировали применение принципов сложения и умножения. Выше говорилось, что комбинаторика тесно связана с теорией конечных множеств. Такие понятия теории множеств, как *подмножество*, *объединение множеств*, *пересечение множеств*, рассмотренные в первой главе, оказываются весьма полезными при решении комбинаторных задач. Сформулируем теперь основные принципы комбинаторики в самом общем виде.

Комбинаторный принцип сложения. *Если множество A содержит n разных элементов, а множество B — m разных элементов и $A \cap B = \varnothing$, то множество $A \cup B$ содержит $n + m$ элементов.*

Доказательство. Пересчитаем элементы объединения непересекающихся множеств A и B, т. е. $A \cup B$. Сначала пересчитаем все элементы, входящие в множество A, и дадим им номера от 1 до n, поскольку в множестве A по условию n элементов. Напомним, что среди элементов множества A нет элементов множества B, так как по условию $A \cap B = \varnothing$. Поэтому, когда мы перейдем к пересчету элементов, принадлежащих множеству B, то придется начать с номера $n + 1$, затем будут номера $n + 2$, $n + 3$ и т. д. до номера $n + m$, поскольку в множестве B по условию m элементов. С помощью этой процедуры подсчета элементов множества $A \cup B$ все они будут исчерпаны, а так как они получили номера от 1 до $n + m$, то, следовательно, заданное множество $A \cup B$ содержит $n + m$ элементов.

Замечание. *Если некоторый объект «A» можно выбрать n способами, а другой объект «B», отличный от «A», — m способами, то согласно комбинаторному принципу сложения объект «A или B» можно выбрать $n + m$ способами.*

Поясним сказанное на следующем примере.

Пример. *Рассмотрим, сколькими способами студенту филфака можно выбрать одну книгу, когда на полке находятся* 15 *книг по философии,* 10 *книг по информатике и* 5 *книг по «математике для гуманитариев».*

Заметим, что книгу по философии можно выбрать 15 способами, книгу по информатике — 10 способами, а книгу по «математике для гуманитариев» — 5 способами. Согласно *комбинаторному принципу сложения* и в силу предыдущего замечания студент филфака может выбрать одну книгу на полке $15 + 10 + 5 = 30$ способами.

Комбинаторный принцип сложения по индукции можно распространить на объединение k попарно непересекающихся множеств.

Если все варианты выбора делятся на k взаимоисключающих типов, причем имеется n_1 вариантов 1*-го типа, n_2 вариантов* 2*-го типа, …, n_k вариантов k-го типа, то общее число вариантов равно $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.*

Рассмотрим пример, иллюстрирующий комбинаторный принцип умножения.

Пример. *Из города A в город B ведет n путей, а из города B в город C ведет m путей. Каково число различных путей, которыми можно совершить путешествие из города A в город C через город B?*

Выбрав один из n возможных путей из A в B, дальше можно продолжить путешествие m способами, поэтому общее число различных путей из города A в город C равно $n \cdot m$.

Комбинаторный принцип умножения. *Если множество A содержит n различных элементов, т. е.* $A = \{a_i : i = 1, 2, ..., n\}$, *а множество B — m различных элементов, т. е.* $B = \{b_j : j = 1, 2, ..., m\}$, *то тогда множество C, составленное из всех возможных пар, т. е.* $C = \{(a_i, b_j) : i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., m\}$, *содержит n·m элементов.*

Доказательство. Покажем, что множество C можно разбить на непересекающиеся подмножества вида:

$$C_1 = \{(a_1, b_j):\ j = 1, 2, \ldots, m\},$$
$$C_2 = \{(a_2, b_j):\ j = 1, 2, \ldots, m\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_i = \{(a_i, b_j):\ j = 1, 2, \ldots, m\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n = \{(a_n, b_j):\ j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Заметим, что $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, поскольку подмножество C_1 состоит из пар, содержащих a_1, а подмножество C_2 — только из пар, содержащих a_2. Аналогично показывается, что $C_i \cap C_k = \varnothing$ при $i \neq k$.

Убедимся в том, что множество C является объединением попарно непересекающихся множеств C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$. Действительно, пусть (a_i, b_j) — любая возможная пара, тогда она по определению принадлежит множеству C, т. е. $(a_i, b_j) \in C$, но так как пара $(a_i, b_j) \in C_i$, то $(a_i, b_j) \in C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$.

Поскольку каждое подмножество C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, содержит m элементов, то в силу комбинаторного принципа сложения число элементов в их объединении равно $n \cdot m$, что завершает доказательство.

Замечание. *Если некоторый объект «A» можно выбрать n способами, а другой объект «B» можно независимо от выбора «A» выбрать m способами, то согласно комбинаторному принципу умножения объект «A и B» можно выбрать n·m способами.*

Поясним сказанное на следующем примере.

Пример. *Рассмотрим, сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова* ПРОЦЕНТ.

Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или Е), а согласную — пятью способами (П, Р, Ц, Н или Т). Следовательно, согласно комбинаторному принципу умножения и в силу сделанного замечания гласную и согласную буквы можно выбрать $2 \cdot 5 = 10$ способами.

Комбинаторный принцип умножения по индукции можно распространить на любое число множеств. В частности, *если требуется выполнить одно за другим k действий и первое действие можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами и так далее до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.*

Принцип умножения достаточно очевиден, хотя и не в такой степени, как принцип сложения. «*Складывать или умножать — вот в чем вопрос*». *В такой* ***«гамлетовской ситуации»*** *иногда оказываются многие студенты, изучающие комбинаторику*. Комбинаторный принцип умножения можно объяснить на арифметических задачах следующего типа: «сколько всего листов в 5 стопках тетрадей, если в каждой стопке по 20 тетрадей, а в каждой тетради по 12 листов?». Без упоминания комбинаторики или индукции школьник даст правильный ответ $5 \cdot 20 \cdot 12 = 1200$ листов. Никто ведь не станет подсчитывать число листов, например, так: «есть 5 стоп, да в каждой по 20 тетрадей, да еще в каждой по 12 листов — итого $5 + 20 + 12 = 37$ листов».

Рассмотрим пример еще одной задачи, при решении которой используются оба принципа комбинаторики.

Пример. *Рассмотрим, сколькими способами студенту филфака можно выбрать две книги по разным наукам, когда на полке находятся* 15 *книг по философии,* 10 *книг по информатике и* 5 *книг по «математике для гуманитариев».*

Если выбирать книгу по философии и книгу по информатике, то существует 15 вариантов выбора книги по философии и 10 вариантов выбора книги по информатике, поэтому по *комбинаторному принципу умножения* для этого выбора существует $15 \cdot 10 = 150$ возможностей. Если выбирать книгу по философии и книгу по «математике для гуманитариев», то имеется 15 вариантов выбора книги по философии и 5 — книги по «математике для гуманитариев», поэтому по *комбинаторному принципу умножения* для указанного выбора имеется $15 \cdot 5 = 75$ возможностей. Если выбирается книга по информатике и книга по «математике для гуманитариев», то существуют 10 способов выбора книги по информатике и 5 — книги по «математике для гуманитариев», поэтому по *комбинаторному принципу умножения* для такого выбора существует $10 \cdot 5 = 50$ возможностей. Наконец, поскольку указанных три выбора разных пар книг отличаются друг от друга, то согласно *комбинаторному принципу сложения всего существ*ует $150 + 75 + 50 = 275$ способов выбора двух книг.

В заключение этого раздела необходимо сказать еще о том, что в связи с развитием электронной вычислительной техники, во многих случаях разумно изучение реальных явлений вести без промежуточного этапа на языке бесконечных и непрерывных математических объектов, переходя прямо к дискретным моделям, поскольку человеческий мозг работает в существенном по дискретному принципу.

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что если пересечение множества A, состоящего из n разных элементов, и множества B, состоящего из m разных элементов, не пусто, т. е. $A \cap B \neq \varnothing$, то тогда множество $A \cup B$ содержит меньше чем $n + m$ элементов?

2. Верно ли, что если в библиотеке имеются отдельные издания разных лет пьес А. П. Чехова: «Дядя Ваня» — 5 экземпляров, «Три сестры» — 4 экземпляра, «Чайка» — 3 экземпляра, то выбор по одному экземпляру каждой из этих пьес можно сделать 60 способами?

3. Верно ли, что если в магазине одежды продается 5 разных рубашек, 4 разных галстука и 3 разных пар носков нужного размера, то в подарок можно купить два предмета с разными названиями 47 способами?

2.2. КОМБИНАТОРИКА: ВЫБОР БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Характерной чертой математического анализа комбинаторных задач является ***абстрагирование****, т. е. отвлечение от конкретных черт в целях выявления глубинного содержания, общего для задач, внешне отличающихся друг от друга*. Пользуясь своим мозгом, как изначально данным, математик, психолог и лингвист могли не интересоваться комбинаторными основами его работы, тем не менее, как сказал академик А. Н. Колмогоров в работе «*Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей*» (Успехи математических наук. М., 1983), «искусственный интеллект машин должен быть создан человеком, и человеку приходится погрузиться в неизбежную при этом комбинаторную математику».

Для построения соответствующих математических моделей комбинаторных задач будем использовать *математический аппарат теории множеств*. Если множество состоит из элементов a, b и c, то нам безразличен порядок, в котором указаны элементы, например:

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\}.$$

Но есть задачи, в которых важен порядок следования элементов. При этом указывается, какой элемент считается первым, какой — вторым, какой — третьим и т. д.

Порядок в множестве *M из n элементов — это нумерация его элементов первыми n натуральными числами, т. е. отображение множества M на множество* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Например, 33 буквы русского алфавита принято располагать в таком порядке:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, Ж, З, И, Й, К, Л, М, О, П,
Р, С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ь, Э, Ю, Я.

При таком порядке расположения буква А является первой, буква Б — второй, буква В — третьей и т. д., вплоть до последней тридцать третьей буквы Я. Но можно те же буквы расположить, например, в обратном порядке, тогда буква Я будет считаться первой, буква Ю — второй и т. д., вплоть до последней тридцать третьей буквы А.

Множество вместе с заданным в нем порядком расположения его элементов называют ***упорядоченным множеством***.

Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. *Упорядоченные множества записывают, располагая по порядку их элементы, в круглых скобках:*

$$(a, b, c), \quad (b, a, c), \quad (c, b, a).$$

Например, из двух букв А и Б можно построить упорядоченное множество двумя различными способами:

(А, Б), (Б, А).

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами. Разумеется, когда мы говорим о *последовательности*, то имеем в виду *упорядоченное множество элементов*, так что перестановки элементов не допускаются. Например, АБ и БА — это разные последовательности. К каждой последовательности вида АБ и БА можно подставить букву В тремя различными способами: поставить ее спереди, между буквами или сзади. Тогда из АБ получим: ВАБ, АВБ, АБВ, а из БА получим: ВБА, БВА и БАВ. Все получившиеся последовательности разные и их можно записать в виде следующих упорядоченных множеств:

(А, Б, В), (А, В, Б), (Б, А, В), (Б, В, А), (В, А, Б), (В, Б, А).

Нередко подсчет вариантов облегчают ***графы***. Так называют геометрические фигуры, состоящие из точек, называемых *вершинами*, и линий, их соединяющих, называемых *ребрами графа*. С помощью вершин изображают элементы некоторого множества, а с помощью ребер — определенные связи между этими элементами. *Теория графов* дает простой, доступный и мощный инструмент для построения моделей и решения задач упорядочения объектов. Основателем теории графов считается *Леонард Эйлер*, который решил познавательную и развлекательную *задачу о кенигсбергских мостах*, заключающуюся в определении маршрута обхода 4 частей суши по 7 мостам с возвратом в исходный пункт без повторений проходов по каждому мосту.

Для удобства иллюстрации условия задачи с помощью графа его вершины-точки могут быть заменены, например, кругами или прямоугольниками. Проиллюстрируем предыдущую задачу о способах упорядочивания трехэлементного множества на *модельном примере способов рассаживания троих друзей* на трех местах во время футбольного матча с помощью графа, называемого *деревом* за внешнее сходство с деревом.

Пример. *Антон, Борис и Владимир купили* 3 *билета на* 1-*е,* 2-*е и* 3-*е места первого ряда центрального сектора на футбольный матч. Рассмотрим, сколькими способами они могут занять имеющиеся места.*

На 1-е место может сесть любой из трех друзей, т. е. имеется 3 варианта их рассадки, на 2-е место может сесть любой из двух оставшихся, т. е. на каждый из предыдущих вариантов приходится еще 2 варианта, на 3-е место садится последний, т. е. это единственный оставшийся человек. Следовательно, по комбинаторному признаку умножения трех друзей можно рассадить $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами. Изобразим эти варианты с помощью дерева (рис. 2.1), помещая в вершины графа (круги) первые буквы имен трех друзей А, Б и В.

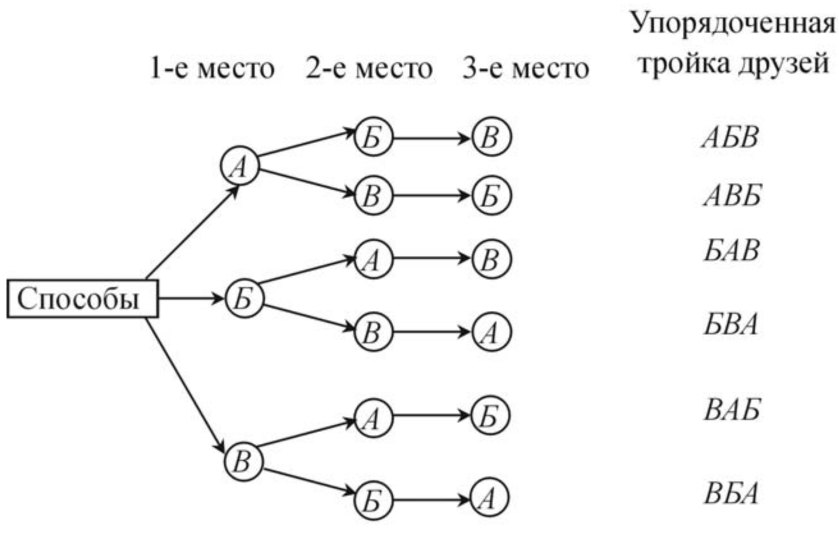

Рис. 2.1

Для четырех букв А, Б, В и Г, добавляя букву Г либо спереди, либо сзади, либо между имеющимися буквами, получим 24 разные последовательности этих букв, которые можно записать в виде следующих упорядоченных множеств:

(А, Б, В, Г), (А, Б, Г, В), (А, В, Б, Г), (А, В, Г, Б), (А, Г, Б, В), (А, Г, В, Б),
(Б, А, В, Г), (Б, А, Г, В), (Б, В, А, Г), (Б, В, Г, А), (Б, Г, А, В), (Б, Г, В, А),
(В, А, Б, Г), (В, А, Г, Б), (В, Б, А, Г), (В, Б, Г, А), (В, Г, А, Б), (В, Г, Б, А),
(Г, А, Б, В), (Г, А, В, Б), (Г, Б, А, В), (Г, Б, В, А), (Г, В, А, Б), (Г, В, Б, А).

Заметим, что приведенный алгоритм нахождения различных последовательностей заданных букв не единственный. Например, все последовательности букв можно получить из начальной, поочередно меняя местами соседние буквы:

АБВ→АВБ→ВАБ→ВБА→БВА→БАВ.

Определение перестановки. *Установленный в конечном множестве порядок называют* ***перестановкой*** *его элементов.*

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Замечание. *Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, т. е. могут быть получены из одного и того же множества, называются* ***перестановками*** *этого множества.*

Для сокращения записи произведения всех натуральных чисел от 1 до n в математике используется ***n-факториал***, который *обозначают* $n!$ (читают «эн-факториал»), т. е. $n! \overset{def}{=} 1\cdot2\cdot3\cdot(n-1)\cdot n$.

В комбинаторике ***факториал*** *не гость, а хозяин.* Но на калькуляторе *функция «факториал»* обычно отсутствует, поэтому при практических расчетах приходится иногда последовательно умножать натуральные числа.

Число всевозможных перестановок множества из n элементов *обозначают символом* P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка). Читается: «Число перестановок из эн элементов» или «Пэ из эн».

Утверждение. *Число перестановок* P_n *множества из* n *элементов можно вычислить по формуле*:

$$\boxed{P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot3\cdot2\cdot1 = n!}$$

Доказательство. Рассмотрим множество из n элементов. На первое место можно поставить любой из n элементов множества. Если он уже выбран, то останется $n - 1$ элементов. Оставшиеся $n - 1$ мест занимает некоторая перестановка из оставшихся n–1 элементов. Число таких перестановок равно P_{n-1} (по определению P_{n-1}). Таким образом, перестановку из n элементов можно рассматривать как пару, состоящую из одного элемента, выбранного из n элементов заданного множества, и перестановки n–1 элементов, оставшихся после выбора первого элемента. В силу *комбинаторного принципа умножения* число всех таких пар или всех перестановок равно $n \cdot P_{n-1}$, т. е. мы доказали равенство вида

$$P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

Из этой формулы последовательно получим:

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot P_{n-2} = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Таким образом, формула для числа перестановок доказана.

В частности, из определения $n!$ видно, что *факториалы двух натуральных ближайших чисел* $n + 1$ и n *связаны формулой*

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

При помощи этой формулы последовательно получаем:

$$1! = 1,\ 2!=1!\cdot 2 = 2,\ 3!=2!\cdot 3 = 6,\ 4!=3!\cdot 4 = 24,\ 5!=4!\cdot 5 = 120,\ 6!=5!\cdot 6 = 720,$$
$$7!=6!\cdot 7 = 5040,\ 8!=7!\cdot 8 = 40\,320,\ 9!=8!\cdot 9 = 362\,880,\ 10!=9!\cdot 10 = 3\,628\,800.$$

Отметим, что для вычисления суммы первых n натуральных чисел можно воспользоваться *простой формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии*, т. е. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. *Для произведения первых n натуральных чисел такой простой формулы нет,* хотя эта величина часто встречается не только в комбинаторике, но и в других разделах математики.

Замечание. *Выбор для обозначения* $n!$ ***восклицательного знака****, возможно, связан с тем, что даже для сравнительно небольших значений n число* $n!$ *очень велико!*

Заметим также, что если в равенство $(n + 1)! = n!\cdot(n + 1)$ подставить $n = 0$, то получится $1! = 0!\cdot 1$. Поэтому *принято считать, что* $0! = 1$, поскольку это соглашение часто оказывается удобным в различных общих математических формулах.

Пример. *Рассмотрим, сколькими способами можно реализовать перестановку слов знаменитой фразы Бориса Пастернака* ***«быть знаменитым некрасиво»****.*

Число перестановок фразы, состоящей из трех различных слов, равно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Запишем эти шесть вариантов:

быть знаменитым некрасиво,
быть некрасиво знаменитым,
знаменитым быть некрасиво,
знаменитым некрасиво быть,
некрасиво быть знаменитым,
некрасиво знаменитым быть.

Количество комбинаций быстро растет с увеличением числа составляющих фразу слов. Например, фраза из четырех слов *«быть очень знаменитым некрасиво*» дает 24 комбинации перестановок слов, фраза из пяти слов «*быть очень знаменитым совсем некрасиво*» порождает 120 комбинаций перестановок этих слов.

Пример. *Рассмотрим, сколько всего существует способов, чтобы рассадить в один ряд или по кругу четырех* ***горе-музыкантов из басни «Квартет»****.*

Напомним, что в ходе этого творческого поиска *Осёл* внес предложение: «*Мы*, *верно*, *уж поладим*, *коль рядом сядем*». Все равно это им не помогло, хотя в ряд можно сесть по-разному. Различных способов «*усесться чинно в ряд*» по формуле для числа перестановок имеется $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. *Новые варианты, безусловно, могли бы украсить популярную басню Крылова*.

Теперь представим, что «музыканты» сели не в ряд, а по кругу. В этом случае можно рассуждать следующим образом. Пусть, например, *Осёл* садится куда угодно, понятно почему. Если считать одинаковыми остальные расположения «музыкантов» при вращении их по кругу, то тогда число оставшихся пересадок относительно *Осла* равно $P_3 = 3! = 6$. Поэтому число различных способов рассадки наших «музыкантов» по кругу равно шести, но *что это добавит к звучанию квартета*?

Замечание. *Если рассматривать перестановки n предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно* $P_{n-1} = (n-1)!$.

Рассмотрим, например, *сколькими способами 7 девушек могут организовать хоровод*? Для решения задачи отметим одну из девушек, скажем *самую красивую*. Теперь надо указать, где будут располагаться остальные девушки: кто будет первой по кругу от самой красивой, кто второй, третьей, …, шестой. Задача свелась к пересчету способов расположения шести оставшихся девушек в последовательность, по существу речь идет обо всех перестановках из $n - 1$ элемента, где $n = 7$. Число таких перестановок равно $(n-1)! = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Перестановки букв некоторого слова называют ***анаграммами***.

Открытые еще в III веке до нашей эры греческим грамматиком и поэтом *Ликофроном* анаграммы до сих пор привлекают внимание языковедов, поэтов и любителей словесности. *Мастера словесных игр* помимо эрудиции и большого запаса слов знают много секретов, связанных с комбинаторными навыками, один из которых — *анаграммы*. Часто требуется среди всех перестановок выбрать те, которые обладают определенным свойством. Например, среди анаграмм слова КОРТ, которых всего $P_4 = 4! = 24$, только одна, не считая самого слова КОРТ, имеет смысл в русском языке — КРОТ.

Приведем **рекордный пример** *пятибуквенных анаграмм, имеющих смысл в русском языке*, содержащий шесть слов:

АВТОР – В[Ф]ТОРА – ОТВАР – РВОТА – ТАВРО – ТОВАР.

Заметим, что тут всего 6 из 120 анаграмм для слова АВТОР. Любопытно, что *одно из слов с наибольшим числом различных букв*, найденное электронной вычислительной машиной, РАЗГИЛЬДЯЙСТВО содержит четырнадцать букв.

Известна **старинная головоломка**, *в которой надо найти набор слов, использующий все 33 буквы алфавита, причем по одному разу каждую*. Вот, например, набор из девяти слов:

БЫК, ВЯЗ, ГНОЙ, ДИЧЬ, ПЛЮЩ, СЪЕМ, ЦЕХ, ШУРФ, ЭТАЖ.

Неизвестно существует ли набор, состоящий из меньшего числа слов. Если под «словом-головоломкой» понимать любую комбинацию из 33 не повторяющихся букв, то тогда теоретически возможно 33! вариантов решения этой головоломки. Эту *старинную головоломку* можно усложнить, если потребовать, чтобы слова образовывали осмысленную фразу.

Заметим, что в определенном смысле *число* 10!, *которое примерно равно* 3,6 *миллиона*, по мнению автора трехтомного труда «*Искусство программирования для ЭВМ*» американского математика *Дональда Кнута*, является «*границей между тем, что можно сосчитать на компьютере, и тем, что нельзя*». Если алгоритм требует перебора более чем 10! вариантов, то такой счет может занять слишком много машинного времени, чтобы быть практически осуществимым. Поэтому важно уметь находить такие соображения, которые позволяют существенно сократить перебор вариантов.

Иногда бывает нужно из n имеющихся различных объектов отобрать произвольные m штук ($m \le n$) и расположить их в некотором порядке. *Сколько существует упорядоченных расположений при заданных числах n и m*?

Например, пусть даны четыре буквы А, Б, В, Г. Требуется выделить из них две буквы и эти две буквы расположить в определенном порядке. Таких способов 12. Действительно, первую букву можно выбрать четырьмя способами, а вторую придется выбирать из оставшихся трех, следовательно, в силу *комбинаторного принципа умножения* всего получается $4 \cdot 3 = 12$ способов. Запишем их в виде упорядоченных множеств:

(А, Б), (А, В), (А, Г),
(Б, А), (Б, В), (Б, Г),
(В, А), (В, Б), (В, Г),
(Г, А), (Г, Б), (Г, В).

В комбинаторике важно научиться считать число вариантов выбора, как бы велико оно не было. Поэтому надо начинать с простых модельных примеров. Проиллюстрируем предыдущую задачу с помощью еще одного примера, частный случай которого связан с ней.

Пример. *Рассмотрим, сколькими способами можно разложить m пронумерованных шаров в n пронумерованных корзин ($m \le n$), так, чтобы в каждой корзине оказалось не больше одного шара.*

Решим сначала частный случай этой задачи для $n = 4$ и $m = 2$. Первый шар мы можем положить в любую из четырех имеющихся корзин, после чего второй шар может быть размещен в любой из оставшихся трех корзин. Поэтому по *комбинаторному принципу умножения* 2 шара можно разложить в 4 корзинах $4 \cdot 3 = 12$ способами. Представим эти варианты выбора с помощью дерева, каждая ветка которого оканчивается одним из вариантов размещения, поэтому такой граф называют еще *деревом вариантов*.

Для большей наглядности мы обозначили корзины по порядку буквами А, Б, В, Г, а шары — числами 1 и 2. В вершины графа-дерева (рис. 2.2) поместили обозначения корзин соответствующими буквами А, Б, В и Г.

Это рассуждение можно распространить на случай произвольных n и m следующим образом:

первый шар может быть положен в любую из n корзин;
второй шар может быть положен в любую из оставшихся $n - 1$ корзин;
…………………………………………………………………………..
m-й шар может быть положен в любую из оставшихся $n - (m - 1)$ корзин.

Таким образом, всего получается $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - (m - 1))$ способов.

Определение размещения. *Конечные упорядоченные множества называют* ***размещениями****.*

Напомним, что нас интересует следующий вопрос: *сколько упорядоченных множеств по m элементов в каждом можно получить из заданно-*

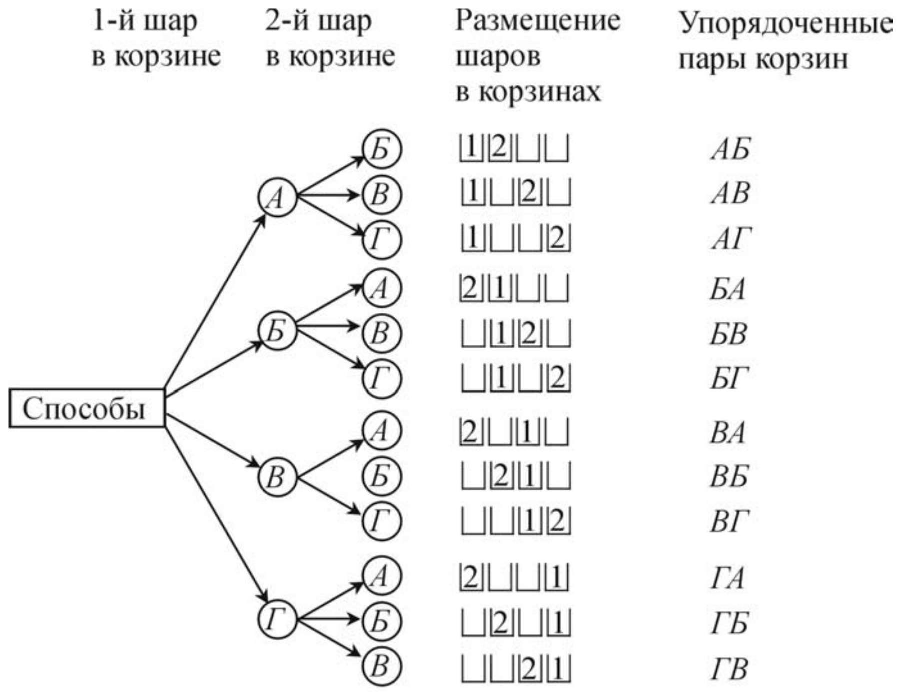

Рис. 2.2

го множества, содержащего n элементов? Сейчас мы можем записать ее короче: *сколько существует размещений из n элементов по m*?

Число всевозможных размещений из n элементов по m *обозначают символом* A_n^m (A — первая буква французского слова *arrangement* — размещение). Читается: «Число размещений из эн элементов по эм» или «А из эн по эм».

Утверждение. *Число размещений* A_n^m, *где* $m \leq n$, *можно вычислить по формуле*:

$$\boxed{A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

Доказательство. Рассмотрим множество из n элементов. Первое место в размещении, состоящем из m элементов, можно занять любым из n элементов множества. Оставшиеся m–1 мест упорядоченного множества можно занять некоторым размещением из оставшихся n–1 элементов по m–1 элементов. Число таких размещений равно A_{n-1}^{m-1} (по определению A_{n-1}^{m-1}). Таким образом, размещение из n по m можно рассматривать как пару, состоящую из одного элемента, выбранного из n элементов заданного множества, и размещения из n–1 элементов по m–1, оставшихся после выбора первого элемента. В силу *комбинаторного принципа умножения* число всех таких пар или число всех размещений из n по m равно $n \cdot A_{n-1}^{m-1}$, т. е. мы доказали равенство вида

$$A_n^m = n \cdot A_{n-1}^{m-1} .$$

Из этой формулы последовательно получим:

$$A_n^m = n \cdot A_{n-1}^{m-1} = n \cdot (n-1) \cdot A_{n-2}^{m-2} =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot A_{n-3}^{m-3} = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Но произведение m последовательных убывающих натуральных чисел от n до $n - m + 1$ равно отношению факториалов чисел n и $n - m$, т. е.

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} .$$

Поэтому получаем окончательную, искомую нами формулу для числа перестановок из n по m:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} .$$

Очевидно, что *дробь, стоящая в правой части этой формулы, сокращается и равна целому числу*. В частности, из формулы числа размещений следует:

$$A_n^1 = n,\ \ A_n^2 = n \cdot (n-1),\ \ A_n^3 = n \cdot (n-1) \cdot (n-2),$$
$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6,\ \ A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24,\ \ A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

Если в найденной формуле для A_n^m положить $m = 0$, то получим, что $A_n^0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = 1$, поэтому *принято считать*, *что* $A_n^0 = 1$. Это верно, поскольку *существует только одно пустое множество* $\varnothing$ и можно считать, что *оно может быть упорядочено одним-единственным образом*. Кроме того, это логично: есть единственный способ не выбирать ни одного объекта из n имеющихся — *ничего не делать*.

Замечание. *Перестановки — это частный случай размещений при* $m = n$, *т. е.* $A_n^n = P_n = n!$. *Кроме того, для* $m = n-1$ *в формуле для числа размещений имеем* $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$.

Последнее равенство только на первый взгляд удивительно. В действительности, если из n различных объектов выбраны $n-1$ и расположены в некотором порядке, то на оставшееся место может претендовать только один оставшийся элемент, который можно и не выбирать, т. е. действительно $A_n^n = A_n^{n-1}$.

Пример. *Посчитаем, сколько существует в n-буквенном алфавите m-буквенных слов, состоящих из различных букв. По формуле для размещений искомое число равно* $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

В этой формулировке мы для краткости говорим ***«n-буквенный алфавит»*** вместо слов «*множество, содержащее n элементов*» и ***«m-буквенное слово»*** вместо слов «*упорядоченное множество из m элементов*». Кроме того, ***слова*** здесь имеют иной смысл, чем в филологии, — допускаются, например, такие «слова», как *абвгд*, т. е. мы будем иметь дело со «словами» в некотором фиксированном «алфавите». Например, в качестве «букв» такого алфавита могут выступать *числа*, например, 1, 2, …, *n*. Удобная алфавитно-буквенная терминология не меняет сути дела в комбинаторных задачах, так как элементы конечного множества всегда можно перенумеровать.

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить всего

$$A_{33}^2 = \frac{33!}{(33-2)!} = 33 \cdot 32 = 1056$$

различных двухбуквенных слов, не содержащих повторений букв.

Пример. *Студенту необходимо пересдать* 3 *экзамена на протяжении* 6 *дней. Посчитаем, сколько теоретически существует вариантов для дней сдачи этих экзаменов.*

Искомое число способов равно числу 3-элементных упорядоченных подмножеств, т. е. дни сдачи экзаменов, 6-элементного множества. По формуле числа размещений это число равно $A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$

В некоторых задачах по комбинаторике не имеет значения порядок расположения объектов в той или иной совокупности. Важно лишь то, какие именно элементы ее составляют. Вот интересующий нас сейчас вопрос: *скольким способами можно выбрать из n различных предметов m штук* ($m \le n$)?

Например, пусть из четырех корзин, обозначенных буквами А, Б, В, Г нужно выбрать две. Сколькими способами это можно сделать? Свяжем этот пример с примером, рассмотренным выше, а именно выбранные корзины будем отмечать тем, что положим в них шары. Тогда дерево вариантов, изображенное на рис. 2.2, дает первый шаг решения. Однако можно заметить, что каждый выбор пары корзин встречается в списке из 12 соответствующих размещений дважды, например, АБ и БА. Сейчас для нас не существенно, какой шар, первый или второй оказался в корзине, или, другими словами, в каком порядке осуществлялся выбор корзин. Поскольку в нашем случае перемен мест двух выбранных корзин, т. е. перестановок, всего две, то две корзины из четырех можно выбрать 12:2 = 6 способами.

Пример. *Пусть имеется две гласные и три согласные* ***фонемы****. Рассмотрим, сколько можно построить пятифонемных «слов», отличающихся друг от друга только расположением гласных и согласных фонем.*

Задача сводится к выбору, например, двух позиций из пяти, на которых могут находиться гласные фонемы. С учетом порядка число таких размещений равно $4 \cdot 5 = 20$, а так как нас интересует только, на каких позициях расположены две гласные фонемы без учета их порядка, то окончательно имеем $20:2 = 10$ пятифонемных «слов».

Определение сочетания. *Конечные* (*неупорядоченные*) *множества называют* ***сочетаниями***.

Отметим, что перестановки и размещения — это упорядоченные множества, а сочетание — это неупорядоченные множества. *Сочетания — это такая выборка элементов, при которой их порядок совершенно не важен.*

Рассмотрим, например, все подмножества трехбуквенного множества {А, Б, В}. Таких подмножеств заданного множества всего восемь. Перечислим их: $\varnothing$ — пустое множество; {А}, {Б}, {В} — три множества по 1 элементу в каждом; {А, Б}, {А, В}, {Б, В} — три множества по 2 элемента в каждом; множество {А, Б, В}, состоящее из 3 элементов.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m *обозначают символом* C_n^m (С — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание). Читается: «Число сочетаний из эн элементов по эм» или «Цэ из эн по эм».

Утверждение. *Число сочетаний* C_n^m, *где* $m \le n$, *можно вычислить по формуле*

$$\boxed{C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

Доказательство. Будем основываться на том, что нам известно о перестановках и размещениях. Будем для краткости писать «*k-элементное множество* (*подмножество*)» вместо слов «*множество* (*подмножество*), *содержащее k элементов*». Из каждого m-элементного подмножества (сочетания) n-элементного множества получается P_m упорядоченных множеств, состоящих из тех же элементов, из которых состоит взятое подмножество. Следовательно, число A_n^m всех упорядоченных m-элементных подмножеств n-элементного множества и число C_n^m всех m-элементных подмножеств того же множества связаны равенством $P_m \cdot C_n^m = A_n^m$, откуда, так как $P_m = m!$, $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$, имеем

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Дадим другое, *непосредственное*, *доказательство* последней формулы этого равенства. Если из n-элементного множества отобраны m элементов, то их можно занумеровать номерами 1, 2, 3, …, m всего $m!$ способами. Оставшиеся $n–m$ элементов можно занумеровать номерами $m+1$, $m+2$, …, n всего $(n - m)!$ способами. Кроме того, сам отбор m элементов из n можно произвести C_n^m способами. Таким образом, мы получили $m!(n - m)! \cdot C_n^m$ вариантов нумераций полного множества из n элементов, которых всего $n!$. Поэтому $m!(n - m)! \cdot C_n^m = n!$ или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!},$$

что и требовалось доказать.

Формула числа сочетаний интересна уже тем, что *дробь, стоящая в ее правой части, равна целому числу*, т. е. все числа, стоящие в знаменателе, сократятся с числами, стоящими в числителе. В частности, из формулы числа сочетаний следует:

$$C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3, \quad C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4, \quad C_5^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} = 5.$$

Если в этой формуле для сочетаний C_n^m положить $m = 0$, то получим, что $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$, поэтому *принято считать, что* $C_n^0 = 1$. Это равенство имеет содержательный смысл, состоящий в том, что *есть только один способ не выбирать ни один элемент* (или выбрать 0 элементов) из n-элементного множества. В частности, отметим, что $C_n^n = 1$.

Замечание. *Обратим внимание на своеобразную симметричность формулы для числа сочетаний: если заменить m на m–n, то получится то же самое выражение, только факториалы в знаменателе поменяются местами:*

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Например, пусть в группе из n студентов надо выбрать m студентов для участия в литературном конкурсе. Выбор m участников конкурса равносилен выбору $n–m$ студентов группы, не участвующих в конкурсе.

Поэтому число способов, которым можно выбрать m человек из n, равно числу способов, которым можно выбрать $n - m$ человек из n. Это означает, что $C_n^m = C_n^{n-m}$ или непосредственно имеем

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!\,(n-n+m)!}.$$

В частности, $C_5^0 = C_5^5 = 1$, $C_5^1 = C_5^4 = 5$, $C_5^2 = C_5^3 = 10$.

Замечание. *Укажем на важную зависимость между сочетаниями для* $0 \le m < n$*, которую называют иногда* ***тождеством Паскаля****:*

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

Например, пусть в группе учится $n+1$ студентов. Отметим *старосту группы*. Разобьем всевозможные подгруппы по m человек на два множества, а именно на те, в которые староста входит, и на те, в которые староста не входит. Посчитаем, сколько подгрупп в первом множестве. Так как один человек в них зафиксирован, то к нему добавляется разными способами еще $m-1$ человек из оставшихся n. Значит в первом множестве C_n^{m-1} подгрупп. Во втором множестве выбираются подгруппы по m человек из n человек группы, так как староста не рассматривается. Их число равно C_n^m. Но C_{n+1}^m — это общее число подгрупп тех, в которые староста входит, и тех, в которые староста не входит. Следовательно, $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$ или, непосредственно, $\frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!}$. В частности, $C_5^4 + C_5^3 = C_6^4$, $C_7^5 + C_7^4 = C_8^5$, $C_9^6 + C_9^5 = C_{10}^6$.

Числа C_n^m возникают в самых разных задачах комбинаторики и теории вероятностей. Например, из *тождества Паскаля* $C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$ следует, что *для всех натуральных чисел n и m, $0 \le m < n$, справедливо равенство*

$$C_m^m + C_{m+1}^m + \ldots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}.$$

Для $m = 1$ это известная формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Замечание. *Для любых подмножеств $A_1, A_2, ..., A_m$ справедливо общее правило подсчета числа элементов объединения множеств $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, называемое* ***формулой включений и исключений****:*

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m) - n(A_1 \cap A_2) -$$
$$- n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_{m-1} \cap A_m) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots +$$
$$+ n(A_{m-2} \cap A_{m-1} \cap A_m) + \ldots + (-1)^{m-1} n(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_m).$$

В частности, если $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_m) = n_1$, $n(A_1 \cap A_2) = \ldots = n(A_{m-1} \cap A_m) = n_2, \ldots, n(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_m) = n_m$, то по этому замечанию из *формулы включений и исключений* получим, что

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} C_m^k \, n_k .$$

Замечание. *Отметим еще одно использование числа сочетаний. Для произвольных чисел a и b и произвольного натурального числа n справедлива формула* ***бинома Ньютона****:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Само название «*бином Ньютона*» многим знакомо благодаря роману *Михаила Булгакова* «*Мастер и Маргарита*». Небезызвестный *Коровьев* говаривал: ***«Подумаешь, бином Ньютона»***. Он, возможно, имел в виду, что для него это не проблема. Но что же, собственно, это такое?

Биномом (или в переводе с латыни *двучленом*) *называют сумму двух слагаемых*, например, $a + b$. Хорошо известна формула для квадратного бинома: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Аналогичная формула для $(a + b)^n$ в случае произвольного натурального n называется *биномом Ньютона* и имеет прямое отношение к комбинаторике. Эта формула носит имя английского физика и математика *Исаака Ньютона*, хотя она была известна задолго до него, например, в Европе ее знал французский математик и философ *Блез Паскаль*. Заслуга Ньютона состоит в том, что он нашел обобщение этой формулы на случай нецелых показателей. Тем не менее приведенное выше разложение называют обычно *биномом Ньютона*, а коэффициенты C_n^m называются ***биномиальными коэффициентами***. Например, если положить в этой формуле $n = 3$, 4 и 5, то получим следующие разложения:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

В частности, если положить в формуле бинома Ньютона $a = b = 1$, то получим равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Укажем на некоторые *следствия из формулы бинома Ньютона*:

1. Сумма показателей степени при a и b в любом слагаемом разложения равна n.
2. Биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны между собой, так как $C_n^m = C_n^{n-m}$.
3. Биномиальные коэффициенты сначала возрастают, а затем убывают.

Пример. *Рассмотрим, сколькими способами из четырех слов* ***быть, очень, знаменитым, некрасиво*** *можно выбрать три слова, которые отличаются, по крайней мере, одним словом.*

Чтобы определить число интересующих нас вариантов, можно посчитать число сочетаний C_4^3 или C_4^1. Напомним, что сочетания считаются различными, если они отличаются хотя бы одним элементом. Всего $C_4^3 = C_4^1 = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$ способами можно выбрать эти три слова:

быть очень знаменитым,
быть очень некрасиво,
быть знаменитым некрасиво,
очень знаменитым некрасиво.

Пример. *Посчитаем, сколько* ***карточек лотто-миллион*** *нужно купить и заполнить, чтобы на них оказались все комбинации по 6 номеров из 49 возможных.*

Нужное количество карточек равно числу сочетаний из 49 элементов по 6, т. е. всего их

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6!},$$

а это составляет почти 49 млн карточек. ***Мораль проста:*** *для реализации подобной идеи уже надо быть миллионером.*

Заметим, что если на карточке угадано 5 номеров, то это значит, что из 6 выпавших номеров могут быть вычеркнуты любые 5 из них, а из остальных 43 номеров — только 1. Поэтому в силу *комбинаторного принципа умножения* число способов угадать 5 номеров выигрышного тиража равно $C_6^5 \cdot C_{43}^1$. Точно также карточек с совпавшими 4 номерами теоретически может быть $C_6^4 \cdot C_{43}^2$.

Большинство задач этого раздела содержит слова ***сколько***. *Одна из причин, по которой мы затрудняемся ответить на вопросы, начинающиеся с этого слова, состоит в отсутствии универсальной схемы, с помощью которой на них всегда можно было бы точно ответить*. В этом разделе были рассмотрены некоторые общие формулы для подсчета вариантов, использованные при решении отдельных задач.

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что вершины нарисованного на плоскости правильного пятиугольника можно буквами А, Б, С, Д, Е обозначить 120 способами?

2. Верно ли, что если есть материи шести различных цветов, то трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины можно сделать 120 способами?

3. Верно ли, что если $5 \le n < 9$, то для сочетаний справедливо неравенство $C_n^5 < C_n^4$, если $n = 9$, то справедливо равенство $C_n^5 = C_n^4$, наконец, если $n > 9$, то справедливо неравенство $C_n^5 > C_n^4$?

2.3. КОМБИНАТОРИКА: ВЫБОР С ПОВТОРЕНИЯМИ

Одна из особенностей комбинаторики заключается в том, что в ней исключительно большую роль играет точная формулировка задачи. Большинство ошибок связано с некорректными постановками задач из-за неопределенности формулировок. Когда речь идет о подсчете числа студентов в группе никакой неопределенности не возникает. Менее определенная ситуация возникает, когда посчитать нужно число вариантов или способов. Некоторая расплывчатость понятия: «о числе вариантов» связана с тем, что ***варианты*** — *это умозрительные понятия и их нельзя увидеть непосредственно, если нет полного перечня различных вариан-*

тов, описанных с помощью математических символов. Рассмотрим следующий вопрос:

Сколькими способами можно распределить три шоколадки между тремя девушками?

Решение зависит от выбранного способа понимания этой задачи. В зависимости от этого возможны, например, пять разных ответов на поставленный вопрос, а именно 1, 3, 6, 10, 27.

Один из источников неопределенности заключается в слове «распределить». Пусть, например, все шоколадки одинаковые. Социально-справедливый вариант распределения дает 1 вариант типа (1,1,1), т. е. когда каждой девушке достается шоколадка. Если все шоколадки отданы одной девушке, то получим 3 варианта типа (3,0,0), (0,3,0), (0,0,3). Наконец, если понимать «распределить» в широком смысле, то можно добавить еще 6 вариантов типа (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2), (0,2,1), (0,1,2). Таким образом, «распределения» дают 10 различных вариантов. Если дополнительно предположить, что все шоколадки различные, то можно получить максимальное число «распределения» — 27 вариантов.

***Главное правило комбинаторики**: прежде чем подсчитывать число различных вариантов, необходимо точно выяснить смысл слов «различные варианты».*

Заметим, что если число вариантов не слишком велико, то его можно найти прямым перебором этих вариантов. ***Сцилла и Харибда комбинаторных подсчетов** — не пропустить ни один вариант и ни один из них не посчитать дважды*. Рассмотрим *модельную задачу на тему «перестановки с повторениями»*, которую нельзя непосредственно решить с помощью формул подсчета вариантов «перестановки без повторений», рассмотренных в предыдущем разделе.

Пример. *Посчитаем число **анаграмм** слова* БАОБАБ.

Напомним, что комбинаторика позволяет считать ***словом*** любую комбинацию букв. Математики любят сводить новые задачи к уже решенным задачам. Для того чтобы воспользоваться способом подсчета числа перестановок, применим новый для нас ***прием растождествления***. Он показывает, как можно переходить от одного понятия «различия» к другому. При точном понимании терминов, т. е. при соблюдении *главного правила комбинаторики*, можно открыть дополнительные возможности решения комбинаторных задач. Слово *растождествление* вряд ли есть в словарях, но оно достаточно точно передает суть дела. Суть его в том, чтобы рассматривать одинаковые буквы слова как различные, например, с помощью их индексации.

После индексации букв слова БАОБАБ, в котором 3 буквы Б, 2 буквы А и 1 буква О, получим 6=3+2+1 различных букв $Б_1$, $А_1$, $О_1$, $Б_2$, $А_2$, $Б_3$. Из них можно составить $P_6 = 6!$ различных 6-буквенных слов, т. е. перестановок из 6 различных букв. Это *вспомогательный перечень*.

Не трогая остальных букв и меняя местами лишь три буквы Б всеми возможными способами, а их будет по числу перестановок из трех букв $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$ всего 3!, получим вроде бы новые перестановки, но без индексации букв они будут неразличимы. Поэтому общее число перестановок уменьшится в 3! раз. Аналогичные рассуждения верны и для двух букв А, и лишь буква О одна. В итоге количество анаграмм слова БАОБАБ, без учета повторов слов, пересчитанных с помощью *комбинаторного принципа умножения*, окажется равным числу $\frac{6!}{3!\,2!} = 60$. Чтобы не нарушать единообразия поделим указанное выражение на $1! = 1$, соответствующее числу перестановок одной буквы О в указанных анаграммах, поскольку полученное *число анаграмм* принято записывать в общем виде $\frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$.

Для того чтобы частный случай подсчета анаграмм не стал, как сказал бы *Козьма Прутков* «*пустою забавою*», рассмотрим эту задачу в более общей постановке.

Определение перестановок с повторениями. *Слова, составленные из n букв, которые можно получить из повторяющихся n_1 букв a_1, n_2 букв a_2, ..., n_k букв a_k, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, называют* ***перестановками с повторениями***.

Число всевозможных перестановок с повторениями, а именно выборов n объектов с $n_1, n_2, \ldots, n_k$ повторяющимися элементами, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, *обозначают* $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. С помощью *горизонтальной черты над буквой P* отличают случай с повторениями от обычных перестановок. Читается: «Число перестановок с повторениями из эн-один, эн-два и т. д. до эн-ка» или «Пэ с чертой из эн-один, эн-два и до эн-ка».

Утверждение. *Число перестановок с повторениями $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, можно вычислить по формуле*

$$\boxed{\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}}$$

Доказательство. Воспользуемся рассуждением, проведенным выше с использованием *приема растождествления*, который переносится на общий случай практически без изменений. Сначала предположим, что все n объектов различны. Если это так, то имеется $n!$ способов переставить или упорядочить его элементы. Заметим, что n_i объектов для каждого i =1, 2, …, k является неразличимыми. Поэтому и способы расположения таких объектов, при которых остальные объекты остаются на своих местах, неразличимы. Поскольку имеется всего $n_i!$ для каждого i =1, 2, …, k таких расположений, то для нахождения общего количества различных перестановок с повторениями, когда все n_i объектов для каждого i являются неразличимыми, необходимо $n!$ разделить на $n_i!$ для каждого i =1, 2, …, k. В результате получим следующее число:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!},\ \text{где}\ n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

что и требовалось доказать.

В частности, из доказанного утверждения следует, что *эта дробь всегда является целым числом*. С помощью формулы числа перестановок с повторениями число анаграмм слова БАОБАБ, подсчитанное выше, можно записать в виде $\overline{P}_{3,2,1} = \dfrac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$. Другой пример: *число анаграмм слова* ФИЛОЛОГИЯ, составленного из 9 букв, а именно 1-й буквы Ф, 2 букв И, 2 букв Л, 2 букв О, 1-й буквы Г и 1-й буквы Я, равно $\overline{P}_{1,2,2,2,1,1} = \dfrac{9!}{1!\,2!\,2!\,2!\,1!\,1!} = 45\,360$.

Заметим также, что в силу *принятого соглашения* $0! = 1$ в формуле числа перестановок с повторениями $\overline{P}_{n_1,n_2,\dots,n_k}$, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, некоторые $n_i \ge 0$ могут быть равны 0. Например, если $n_1 = 3$, $n_2 = 0$, $n_3 = 2$, то $n = 3 + 0 + 2 = 5$ и $\overline{P}_{3,0,2} = \dfrac{5!}{3!\,0!\,2!} = 10$.

Пример. *Предположим, что, не поверив Соловью,* ***горе-музыканты из «Квартета»*** *решили создать вместо квартета камерный оркестр. Для этого Мартышка привела с собой еще трех таких же Мартышек, Осёл — еще двух Ослов, а Козёл — еще одного Козла и лишь Мишка поленился и остался в одиночестве. Рассмотрим, сколькими способами можно рассадить их в один ряд.*

Музыкантов стало $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, из них 4 Мартышки, 3 Осла, 2 Козла и 1 Мишка. Полагая $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $n_4 = 1$ и $n = 10$, по *формуле для числа перестановок с повторениями* получим

$$\overline{P}_{4,3,2,1} = \frac{10!}{4!\,3!\,2!\,1!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!\,2!} = 4\cdot5\cdot7\cdot9\cdot10 = 12\,600.$$

Вариантов много, но *заиграет ли когда-нибудь такой оркестр*?

Замечание. *Формула для числа перестановок с повторением как частный случай содержит формулу для числа обычных перестановок* (*при* $k=n$) *и формулу для числа сочетаний* (*при* $k=2$): $\overline{P}_{m,n-m} = C_n^m$.

Действительно, если $k = n$, то тогда $n_1 = 1, n_2 = 1, \ldots, n_n = 1$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n$, а $\overline{P}_{1,1,\ldots,1} = \dfrac{n!}{1!\,1!\ldots 1!} = n! = P_n$, т. е. обычные перестановки P_n — это частный случай перестановок с повторениями $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_n}$ для $n_1 = n_2 = \ldots = n_n = 1$. Если $k = 2$, то $n_1 + n_2 = n$ или $n_2 = n - n_1$, тогда по определению $\overline{P}_{n_1,n_2}$ и $C_n^{n_1}$ имеем, $\overline{P}_{n_1,n_2} = \overline{P}_{n_1,n-n_1} = \dfrac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} = C_n^{n_1}$. Таким образом, мы показали, что если положить $n_1 = m$, то последнее равенство примет более естественный для формулы числа сочетаний вид:

$$\overline{P}_{m,n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m.$$

Замечание. *Число перестановок с повторяющимися* m *и* $n–m$ *объектами, т. е.* $\overline{P}_{m,n-m}$, *равно числу сочетаний* C_n^m.

Пример. *Докажем формулу* ***бинома Ньютона*** *воспользовавшись последним замечанием.*

Запишем $(a + b)^n$ в виде произведения n сомножителей $(a + b)$:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ раз}}.$$

Теперь раскроем скобки, выписывая множители в порядке их появления, а именно $(a + b)^2$ запишем в виде

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = aa + ab + ba + bb,$$

а выражение $(a + b)^3$ запишем в виде

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb.$$

Продолжая подобным образом, получим $(a + b)^n$ в виде представления n сомножителей, т. е. $(a + b)\cdot(a + b)\cdot \ldots \cdot(a + b)$, в правой части которого будут всевозможные перестановки с повторениями, составленные из n букв с повторяющимися буквами a и b. Чтобы привести подобные члены, достаточно посчитать число перестановок с повторениями, имеющих фиксированный набор букв a и b, т. е. *число* ***анаграмм*** *слов*, составленных из фиксированного набора букв a и b. По последнему замечанию *число перестановок с повторениями* $\overline{P}_{m,n-m} = C_n^m$, поэтому слагаемое $a^{n-m}b^m$ входит в правую часть с коэффициентом C_n^m. Таким образом, получаем искомую *формулу бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = \overline{P}_{0,n}\,a^n + \overline{P}_{1,n-1}a^{n-1}b + \ldots + \overline{P}_{m,n-m}\,a^{n-m}b^m + \ldots + \overline{P}_{n-1,1}ab^{n-1} + \overline{P}_{n,0}\,b^n =$$
$$= C_n^0\,a^n + C_n^1\,a^{n-1}b + \ldots + C_n^m\,a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^{n-1}\,ab^{n-1} + C_n^n\,b^n.$$

Заметим, что, делая повторяющиеся объекты неразличимыми, мы игнорируем их порядок, как это было в сочетаниях, поэтому можно получить аналог равенства для перестановок с повторениями и сочетаний в общем случае. *Обозначим символом* $C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, произведения следующих k сочетаний $C_n^{n_1}$, $C_{n-n_1}^{n_2}$, …, $C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$, т. е.

$$C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} \overset{def}{=} C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}.$$

Замечание. *Для формулы числа перестановок с повторениями* $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ *справедливо равенство*

$$\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}.$$

Действительно, пусть имеется совокупность из n объектов, в которую входит n_1 неразличимых объектов 1-го типа, n_2 неразличимых объектов 2-го типа и вообще n_i неразличимых объектов i-го типа для $i=1, 2, \ldots, k$. Рассмотрим, как можно заполнить n мест объектами заданной совокупности. Существует $C_n^{n_1}$ способов выбрать места для n_1 неразличимых объектов 1-го типа. Если эти все места выбраны, то для заполнения остается $n-n_1$ мест, поэтому имеется $C_{n-n_1}^{n_2}$ способов выбрать места для n_2 неразличимых объектов 2-го типа. Если места для объектов 1-го и 2-го типов выбраны, то для заполнения останется $n-n_1-n_2$ мест, поэтому объекты 3-го типа можно разместить $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ способами.

Рассуждая аналогичным образом и используя *комбинаторный принцип умножения*, получим

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$
$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\,\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\,\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots$$
$$\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots-n_k)!} = \frac{n!}{n_1!\;n_2!\;\ldots\;n_k!},$$

а это и есть число способов перестановок с повторениями.

Это удивительно: *хотя мы не рассматривали никаких перестановок, тем не менее выведена формула, повторяющая формулу для числа перестановок с повторениями.* Дело в том, что поставленную задачу о подсчете вариантов можно трактовать двояко. Например, попытаемся ответить на следующий вопрос: *сколькими способами n студентов можно распределить по k мероприятиям так, чтобы на первом мероприятии оказалось n_1 студентов, на втором — n_2 студентов и т. д., где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$* ? С одной стороны, мы распределяем отличающихся друг от друга студентов по разным мероприятиям. В этой трактовке задачи получаются *сочетания*. С другой стороны, если бы мы распределяли среди студентов, например, n билетов на k мероприятий, причем сами билеты были бы неотличимы друг от друга, то в такой интерпретации задачи получаются *перестановки с повторениями* билетов на одно и то же мероприятие, предназначенных для n студентов.

Анаграммы, т. е. *комбинации фиксированного числа букв*, естественно возникают при получении формул n-й степени суммы трех и большего числа слагаемых. Приведенное доказательство для формулы *бинома Ньютона* без изменений переносится на несколько слагаемых. Рассуждая точно также, получим

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum \overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \; a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k},$$

где суммирование распространено на все наборы $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, для которых $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ и $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, …, $n_k \geq 0$.

Замечание. *Коэффициент при $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$, получающийся при возведении в n-ю степень суммы из k слагаемых $a_1+a_2+\ldots+a_k$ (здесь $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ и $n_i \geq 0$, для $i = 1, 2, \ldots, k$), равен числу анаграмм слова из n_1 букв a_1, n_2 букв a_2, …, n_k букв a_k, т. е.* $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \;\ldots\; n_k!}$.

Следует иметь в виду, что если некоторое число $n_i = 0$, то тогда $a_i^{n_i} = a_i^0 = 1$, т. е. буква a_i в соответствующем одночлене отсутствует, и, кроме того, напомним, что $n_i! = 0! = 1$ в формуле для коэффициента при таком одночлене.

Например, если для $n = 3$, $k = 3$ аккуратно перемножить $(a + b + c)$ три раза на себя получится формула вида

$$(a + b + c)^3 = (a + b + c)\cdot(a + b + c)\cdot(a + b + c) =$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.$$

Коэффициенты 1, 3 и 6 — это известные нам количества *анаграмм*. Напомним, что ***одночленом*** *называется произведение двух или нескольких сомножителей, каждый из которых есть либо число, либо буква, либо степень буквы*. Одночлен a^3 получается только одним способом $\overline{P}_{3,0,0} = 3!/(3!0!0!) = 1$, аналогично b^3 — $\overline{P}_{0,3,0} = 3!/(0!3!0!) = 1$ и c^3 — $\overline{P}_{0,0,3} = 3!/(0!0!3!) = 1$. Одночлену a^2b соответствуют aab, aba, baa, т. е.

анаграммы слова из двух букв a и одной буквы b, их количество равно $\overline{P}_{2,1,0} = 3!/(2!1!0!) = 3$. Для других одночленов подобного вида получим такой же коэффициент, например, для b^2c — это $\overline{P}_{0,2,1} = 3!/(0!2!1!) = 3$. Наконец, коэффициент при одночлене abc равен $\overline{P}_{1,1,1} = 3!/(1!1!1!) = 6$, т. е. числу *анаграмм слова* из трех букв a, b, c.

Аналогичная формула получится и для куба суммы большего числа слагаемых, например, если $n = 3$ и $k = 5$, то

$$(a + b + c + d + e)^3 = (a^3 + \dots) + 3(a^2b + \dots) + 6(abc + \dots),$$

где многоточием в каждой скобке обозначены одночлены, получаемые из первого, записанного в скобке, всевозможными заменами из имеющихся пяти букв.

Пример. *Посчитаем, сколько одночленов будет в каждой скобке правой части равенства:*

$$(a + b + c + d + e)^3 = (a^3 +\dots+ e^3) + 3(a^2b +\dots+ e^2d) + 6(abc +\dots+ edc).$$

Эта задача тоже сводится к подсчету *перестановок с повторениями*. Выпишем в строчку все 5 букв: $abcde$ и под каждой буквой будем писать показатель, с которым она входит в соответствующий одночлен, а если она не входит в одночлен, то будем писать показатель 0. Тогда каждому одночлену в скобке $(a^3 +\dots+ e^3)$ соответствует «*слово из* 5 *чисел*»: одной 3 и четырех 0, поэтому в этой скобке будет столько же одночленов, сколько *анаграмм слова* «30 000», т. е. $5!/(1!4!) = 5$. Каждому одночлену в скобке $(a^2b +\dots+ e^2d)$ соответствует «*слово из* 5 *чисел*»: одной 2, одной 1 и трех 0, поэтому их общее количество равно числу *анаграмм слова* «21 000», т. е. $5!/(1!1!3!) = 20$. Наконец, каждому одночлену в скобке $(abc +\dots+ edc)$ соответствует «*слово из* 5 *чисел*»: трех 1 и двух 0, поэтому их число равно количеству *анаграмм слова* «11 100», т. е. $5!/(3!2!) = 10$.

Для проверки этих подсчетов положим $a = b = c = d = e = 1$. Тогда в правой части равенства получим число $5^3=125$, а в левой части с учетом найденного количества одночленов получим число $5 + 3\cdot20 + 6\cdot10 = 125$, что подтверждает правильность наших рассуждений.

* * *

Что можно сказать о словосочетании: ***математика и поэзия***? «*Стих только тогда убедителен, когда проверен математической* (*или музыкальной, что то же*) *формулой. Проверять буду не я*», — писала Марина Цветаева. Одним из самых заметных элементов стиха, его средством организации и средством фонетического украшения является рифма. Ей посвящено одно из стихотворений *Александра Сергеевича Пушкина*:

Рифма, звучная подруга
Вдохновенного досуга,
Вдохновенного труда…

Рифма — звуковые повторы, несущие организующую функцию в композиции стихотворения, т. е. это звукосочетание, как правило, включающее в себя ударный слог, систематически повторяющийся на определенном месте стиха, обычно на конце. *Концевое созвучие* — это самый простой из множества способов связывать строки. *Рифма* — явление историческое, органически связанное с природой языка и литературной традицией. Рифмующиеся строки могут сочетаться между собой различным образом.

Вопрос: *Сколькими способами могут сочетаться между собой рифмующиеся строчки катрена с двумя парами рифм?*

Катрены — *это четверостишия*. Рифмующиеся строчки принято обозначать одинаковыми буквами алфавита. Пусть одна пара рифмующихся строк обозначена *aa*, а другая *bb*. Заметим, что поскольку буквы *a* и *b* равноправны, то достаточно рассмотреть четырехбуквенные «слова», составленные из двух букв *a* и двух букв *b*, начинающиеся на букву *a*. Так как первая буква во всех интересующих нас «словах» *a*, то ее можно в комбинаторном выборе не рассматривать, поэтому задача свелась к подсчету числа *перестановок с повторениями* 1-й буквы *a* и 2 букв *b*, т. е. это $\overline{P}_{1,2} = \dfrac{3!}{1!\,2!} = 3$, а именно: *abb*, *bab* и *bba*. Им отвечают следующие способы рифмовки:

смежная рифмовка — схема сочетания рифм *aabb*,
перекрестная рифмовка — схема сочетания рифм *abab*,
опоясывающая рифмовка — схема сочетания рифм *abba*.

Комбинирование смежной, перекрестной и опоясывающей рифмовок приводило к выработке более сложных конфигураций. Стихотворный текст, рассчитанный на запоминание, достигает этой цели тем, что делит речь на определенные, легко охватываемые сознанием, части. Это членение подчеркивается *графически*. Низшей смысловой единицей стихотворной речи является ***стих*** — объединение слогов в слова и объединения слов в промодулированные строками высказывания. Стих печатается отдельной строкой. Стихи объединяются в замкнутую группу высшего единства, образуя ***строфу***, графически выделенную пробелом.

Основные признаки строфы — это интонационно-синтаксическая завершенность и определенное чередование рифмующихся стихов. Строение строфы могут определять и другие признаки. Первый из них — упорядоченное чередование ***клаузул***, т. е. *ритмических окончаний*. Клаузулы различают по месту ударения. Окончания с ударением на последнем слоге называются ***мужскими*** и обозначают *строчными буквами* (*a*, *b*, *c*, …), а с ударением на предпоследнем слоге — ***женскими*** и обозначают *прописными буквами* (*A*, *B*, *C*, …). Так как в стихах с рифмами созвучны чаще всего клаузулы, то именно поэтому употребляют термины *мужская рифма*, *женская рифма* и т. д.

Вопрос: *Сколько упорядоченных чередований клаузул допустимо по правилу альтернанса в катрене с парой мужских и женских рифм?*

Правило ***альтернанса*** (от французского слова *alternance* — чередование) запрещает ставить рядом нерифмующиеся слова с однотипными клаузами. Например, при перекрестной рифмовке допускались схемы *AbAb* или *aBaB*, но не *abab* или *ABAB*. Чтобы учесть *правило альтернанса*, обозначим мужскую пару рифм *aa*, а женскую через *AA*. Задача свелась к подсчету числа *перестановок с повторениями* 2 букв *a* и 2 букв *A*, т. е. это $\overline{P}_{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$, а именно:

aaAA, *AAaa* — *смежная* рифмовка,
aAaA, *AaAa* — *перекрестная* рифмовка,
aAAa, *AaaA* — *опоясывающая* рифмовка.

Заметим, что по правилу альтернанса не допустимы схемы, рифмовки *aabb* и *AABB*, *abab* и *ABAB*, *abba* и *ABBA*. Главное свойство стихотворной речи, отличающее ее от прозы, — это ***ритмичность***, т. е. повторяемость, создаваемая упорядоченным расположением звуков речи. *Можно ли говорить о* ***математической теории стихосложения*** *?* Ведь научное изучение ритмики стихотворения относится к его внутреннему смыслу, как лингвистический анализ текста математической статьи к оценке ее истинности и содержательности. Тем не менее *современному филологу, даже не знающему основ высшей математики, трудно отказаться от веры в «кредитоспособность» науки, основанной на строгом знании*.

Благодаря таланту и мастерству поэта иногда кажется, что речь в строфе льется, совершено непринужденно, не скованная никакими рамками. Особым характером отличаются строфы, состоящие из нечетного количества стихов. Они несимметричны, это *«беспокойные» строфы*. Самые распространенные среди них — *пятистишия* с удвоенным третьим или четвертым стихом, создающие впечатление неожиданного нарушения равновесия.

Вопрос: *Сколькими способами могут сочетаться строчки пятистишия с двумя и тремя рифмующимися стихами?*

Пусть одна пара рифмующихся строк обозначена *aa*, а три другие рифмующиеся строки — *bbb*. Задача сводится к подсчету числа *перестановок с повторениями* $\overline{P}_{2,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$, а именно:

aabbb, *ababb*, *abbab*, *abbba*,
baabb, *babab*, *babba*,
bbaab, *bbaba*,
bbbaa.

Самые распространенные среди пятистиший: *ababb* и *babba*. Заметим, что хотя смежная тройная рифмовка, *bbb*, появилась три века назад, в целом нечетность стихов в строфе в русском стихосложении не успела сложиться в систему.

Возвращаясь к вопросу о «*математической теории стихосложения*», обратим внимание на статью Б. Г. Каца «*О программе*, *сочиняющей стихи*», в которой на основе информации о мужской и женской рифме, количества слогов в соответствующей строке стихотворения, метрического и грамматического анализа стиха предлагается некоторый *алгоритм «сочинения» стихов* ***с помощью компьютера***. Целью этой работы было желание «*узнать, какие минимальные средства позволяют добиться иллюстрации осмысленного стихосложения*»[8]. Оказалось, что такой иллюзии можно добиться «очень малыми средствами». Компьютер, игнорируя семантику, сочинял, например, такие стихи:

Добрый воздух равнодушный
Добрый мир иной ненужный
Вновь печальна реет радость
Только в опьяненьи сладость.

Помимо обычных размещений бывают и *размещения с повторениями* точно так же, как и перестановки с повторениями. Рассмотрим *модельную задачу на тему: «размещения с повторениями»*, решение которой отличается от способов подсчета вариантов «размещений без повторений», рассмотренных в предыдущем разделе.

Пример. *Посчитаем число двухбуквенных слов, составленных из алфавита, содержащего три буквы:* А, Б *и* В.

На первое место мы можем поставить любую из трех букв А, Б, В, независимо от этого на второе место опять можно поставить любую из трех букв А, Б, В, откуда получается $3 \cdot 3 = 9$ вариантов двухбуквенных слов:

АА, АБ, АВ, БА, ББ, БВ, ВА, ВБ, ВВ.

Если алфавит содержит n букв, например, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$*, то тогда можно составить* $n \cdot n = n^2$ *двухбуквенных слов*.

Действительно, каждое двухбуквенное слово представляет собой пару (a_i, a_j) из двух элементов $a_i, a_j \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, поэтому по *комбинаторному принципу умножения* число таких двухбуквенных слов n^2.

Далее из алфавита $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ можно составить n^3 трехбуквенных слов, поскольку каждому из n^2 двухбуквенных слов можно приписать на третьем месте любую из n букв заданного алфавита, т. е. по *комбинаторному принципу умножения* получается $n^2 \cdot n = n^3$ трехбуквенных слов.

Определение размещений с повторениями. *Слова, составленные из k букв, которые можно получить из повторяющихся n букв, называют* ***размещениями с повторениями***.

Число всевозможных размещений с повторениями, а именно выборов k объектов из повторяющихся n элементов, *обозначают символом* $\overline{A_n^k}$.

[8] *Кац Б. Г.* О программе, сочиняющей стихи // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 2. — С. 151.

С помощью *горизонтальной черты над буквой А* отличают случай с повторениями от обычных размещений. Читается: «Число размещений с повторениями из эн по ка» или «А с чертой из эн по ка». Первое название излишне длинное и «торжественное», но в ясности ему не откажешь.

Утверждение. *Число размещений с повторениями* $\overline{A_n^k}$ *можно вычислить по формуле:*

$$\boxed{\overline{A_n^k} = n^k}$$

Доказательство. Если имеется k упорядоченных мест, для каждого из которых можно выбрать любой из n объектов, то по *комбинаторному принципу умножения* существует n^k способов выбора объектов. Таким образом, число перестановок с повторением, когда k объектов выбираются из n объектов, равно n^k, что и требовалось доказать.

В частности, с помощью формулы числа размещений с повторениями, подсчитанное выше число двухбуквенных слов, составленных из трех букв алфавита {А, Б, В}, можно записать в виде $\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$. При этом мы, по-прежнему, не обращаем внимания на семантическую значимость этих «слов».

Отличие между размещениями с повторениями и размещениями без повторений можно пояснить следующим образом. Допустим, у нас имеется набор «образцов» букв, входящих в выбранный алфавит. При использовании какой-нибудь буквы мы изготавливаем ее копию, поэтому можно считать, что каждая буква при наборе слова может быть использована во многих экземплярах. Тогда слова получаются с возможными повторениями букв, т. е. получаются *размещения с повторениями*. Если каждый элемент алфавита имеется лишь в единственном числе, то тогда повторно использовать его в наборе слова нельзя. Это уже случай *размещения без повторений* или «обычного» размещения.

Пример. *Посчитаем, сколько k-буквенных слов, содержащих хотя бы одну букву* А, *существует в русском алфавите.*

Всего k-буквенных слов в русском алфавите, содержащем 33 буквы, включая *ё, й, ъ, ь,* согласно формуле числа *размещений с повторениями*, равно числу $\overline{A_{33}^k} = 33^k$. Попробуем подсчитать, сколько среди них нужных, т. е. содержащих букву А. На 1-м, 2-м, …, (k–1)-м месте могут стоять любые из 33 букв, независимо от того, какие буквы стояли на предыдущих местах. На последнем шаге возникает *альтернатива*: если среди предыдущих букв была буква А, то для k-го места имеем 33 варианта, а если нет, то всего 1 вариант — буква А.

Можно выбрать прямой, но трудный способ подсчета нужных объектов. Например, разбить нужные слова на k типов: содержащих ровно одну букву А, ровно две буквы А и т. д. до содержащих ровно k букв А. Затем попытаться подсчитать число слов каждого типа и после этого сложить полученные результаты. Опишем другой способ. *Когда в условии задачи есть выражение* ***«хотя бы один»****, часто удобно перейти к дополнению искомого множества вариантов, где таких вариантов нет.*

Переход к дополнительному множеству вариантов в этом примере дает компактный ответ почти что сразу. В нашем примере — это всевозможные k-буквенные слова в алфавите, содержащем 32 буквы, кроме буквы А, число которых равно $\overline{A_{32}^{k}} = 32^k$. Поэтому число k-буквенных слов равно $\overline{A_{33}^{k}} - \overline{A_{32}^{k}} = 33^k - 32^k$.

К сожалению, довольно часто ни множество нужных объектов, ни дополнительное к нему множество не обладают простой структурой.

Сейчас у нас уже есть возможность дать более содержательный комментарий ***парадоксу Берри***, рассмотренному в разделе 1.1. Хорошо известно, что некоторые фразы служат определениями натуральных чисел, например: «*десять в степени десять в степени десять*», «*наименьшее простое число, больше миллиона*». Заметим, что в русском языке 33 буквы, а *предложений, состоящих не более чем из ста букв*, конечное число, которое с помощью формулы числа размещений с повторениями можно оценить как не превосходящее $\overline{A_{33}^{100}} = 33^{100}$. Поскольку натуральных чисел бесконечно много, то среди них должны быть такие, которые нельзя описать (определить) с помощью «*фразы, состоящей менее чем из ста букв*». Тогда есть и наименьшее такое число. Его можно определить с помощью следующей фразы:

«*Наименьшее натуральное число, которое нельзя определить предложением русского языка, содержащим менее ста букв*».

Это предложение содержит 96 букв. Это и есть знаменитый *парадокс Берри, поскольку предыдущая фраза противоречит самой себе*. Несмотря на то что, казалось бы, рассуждение из *парадокса Берри* явно нематематическое, подобного рода конструкции встречались и в *теории множеств*. В частности, подобная идея лежит в основе знаменитой *теоремы Гёделя о неполноте* любой достаточно сильной непротиворечивой формальной теории, содержащей арифметику.

Замечание. *Обратим внимание на то, что в формуле числа размещений с повторениями* $\overline{A_n^k} = n^k$ *допустим случай, когда* $k > n$.

Например, число размещений с повторениями четырехбуквенных слов, составленных из алфавита, содержащего всего две буквы А и М, равно $\overline{A_2^4} = 2^4 = 16$. Среди этих размещений с повторениями есть, например, слова: АААА, АААМ, АММА, МАМА, МААМ, МААА, ММММ.

Пример. *Шестизначный велосипедный номер считается* ***«счастливым»,*** *если в нем нет ни одной цифры 8, поскольку «восьмерка» — один из дефектов велосипедного колеса. Посчитаем, каких номеров больше «счастливых» или «несчастливых».*

На первый взгляд кажется, что поскольку 8 — это лишь одна цифра из десяти возможных, то счастливых номеров должно быть в несколько раз больше. *Счастливый номер* — это шестибуквенное слово в «*алфавите, содержащем девять цифр*», т. е. все цифры, кроме восьмерки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Число таких «слов», по формуле числа *размещений с повторениями*, равно $\overline{A_9^6} = 9^6 = 531441$. Если отбросить слово «000000», непригодное в качестве велосипедного номера, то счастливых номеров будет 531440. Всего шестизначных номеров, за вычетом непригодного, равно $\overline{A_{10}^6} - 1 = 1\,000\,000 - 1 = 999\,999$. Поэтому несчастливых номеров $999\,999 - 531\,440 = 468\,559$, т. е. ненамного меньше, чем счастливых.

Любопытно то, что если бы номера были бы семизначными, то тогда счастливых номеров было бы меньше, чем несчастливых.

Напомним, что *перестановки — частный случай размещений* и *формула для числа перестановок — частный случай формулы для числа размещений*. А как обстоит дело для перестановок и размещений с повторениями? Являются ли *перестановки с повторениями* частным случаем *размещений с повторениями*?

Замечание. *Формула для числа перестановок с повторениями не является частным случаем формулы для числа размещений с повторениями.*

Разберем в чем тут дело. Когда речь идет о повторениях в упорядоченном или неупорядоченном наборе объектов, то возможны две противоположные ситуации:

а) каждый объект должен повторяться в наборе строго заданное число раз;

б) нет никаких ограничений на число повторений объектов, кроме общего их числа в наборе.

В этом отличие перестановок с повторениями и размещений с повторениями. *Объединяет их другое — это* ***упорядоченные наборы***. Отметим, что *для* ***неупорядоченных наборов*** *ситуация с фиксированным набором каждого объекта бессодержательна*, поскольку в таком случае это один вариант.

* * *

Мы воспринимаем поэзию не только «*поверяя алгеброй*», но и всей своей духовной сущностью. «*Надо всегда помнить, что русская поэзия, как и русская музыка, есть самое высшее достижение нашей культуры*», — писал *Дмитрий Лихачев*. Среди поэтических размеров по количеству стихов, им написанных, лидирует ***четырехстопный ямб***. Этому стихотворному размеру посвящено специальное стихотворение *Владислава Ходасевича*:

Не ямбом ли четырехстопным,
Заветным ямбом, допотопным,
О чем, как не о нем самом —
О благодатном ямбе том?

Античный метрический стих строился на упорядоченном чередовании долгих и кратких слогов. Напомним, что ***слог*** — это «согласная + гласная», либо «гласная + согласная», либо «согласная + гласная + согласная», либо «одна гласная», например, «а + та + ман». Комбинации долгих и кратных слогов назывались ***стопами*** и каждая стопа имела свое название. В стихосложении, введенном М. В. Ломоносовым, как и в античном метрическом стихе, каждый стих состоит из повторяющихся однообразных «стоп». Каждая *стопа* состоит из одного ударного и одного или двух безударных слогов. Порядок слогов в стопе играет существенную роль. Слова могут иметь разное количество слогов, а стопы всегда одинаковы, поэтому стопа не является реальной словесной единицей — это чисто *ритмическое понятие*. Теперь принято делить стих на ***сильные*** *слоги*, на которых стоят метрические ударения, слышимые при скандировке, и на ***слабые*** *слоги*. Реальные словесные ударения стоят на сильных слогах, но не обязательно на всех, только *последний сильный слог всегда ударен*.

Названия стоп были по аналогии заимствованы из античного греческого стиха. Если условно обозначить сильный слог *знаком* « – » , а слабый слог *знаком* « ∪ », то в двусложных размерах стопа с первым ударным слогом называется ***хореем*** (графически можно *обозначить* « – ∪ »), а со вторым сильным — ***ямбом*** (графическое *обозначение* « ∪ – »). Это определение недостаточно точно, так как довольно часто на месте, где должен стоять сильный слог, оказывается слабый.

Вопрос: *Сколько комбинаций ритмических форм с реальными ударениями теоретически возможно в четырехстопном ямбе?*

Говоря здесь о ***реальном*** *ударении*, мы имеем в виду не искусственное скандирование стиха, а ударность слога в соответствии с нормальным для русского языка внестиховым произношениям. Заметим, что последний слог в ямбе всегда ударен, т. е. графически *общая схема четырехстопного ямба* имеет вид ∪ – ∪ – ∪ – ∪ –′, где *знаком* « –′ » обозначено ударение на сильном слоге. Таким образом, только на трех оставшихся сильных слогах может стоять или не стоять реальное ударение. Поэтому задача свелась к подсчету числа *размещений с повторениями* $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$, а именно:

$$\begin{array}{ll} \cup -' \cup -' \cup -' \cup -', & \cup - \cup - \cup -' \cup -', \\ \cup - \cup -' \cup -' \cup -', & \cup - \cup -' \cup - \cup -', \\ \cup -' \cup - \cup -' \cup -', & \cup -' \cup - \cup - \cup -', \\ \cup -' \cup -' \cup - \cup -', & \cup - \cup - \cup - \cup -'. \end{array}$$

Среди этих восьми ритмических форм практически употребляются шесть, *редчайшая* $\cup - \cup - \cup -' \cup -'$ и *неупотребительна* $\cup - \cup - \cup - \cup -'$. Например, «***Евгений Онегин***» написан четырехстопным ямбом:

Мой дя́дя са́мых че́стных пра́вил, $(\cup -' \cup -' \cup -' \cup -')$
Когда́ не в шу́тку занемо́г… $(\cup -' \cup -' \cup - \cup -')$

Однако главный герой этого романа так и не научился различать стихотворные размеры: «*Не мог он ямба от хорея*, *Как мы ни бились*, *отличить*». Первые теоретические исследования четырехстопного ямба с применением математических методов принадлежат известному поэту и теоретику символизма *Андрею Белому*. Он изучал математику в Московском университете, где читал лекции его отец, известный профессор математики Н. В. Бугаев. *В стихах он сумел интуитивно воплотить то, что* ***доказывали комбинаторные формулы****: возможно, такое ритмическое разнообразие форм ямба, которого не было ни в стихах поэтов пушкинской поры, ни в стихах его современников.*

Современные филологи поколебали представление о том, что сильный слог в ямбе «преимущественно» ударный. Можно лишь сказать, как отмечает стиховед М. И. Шапир, что «*ударения неодносложных слов в ямбической строке падают на четные слоги*»[9]. Четырехстопный ямб заверен классиками, но так ли сильны были его позиции в прошлом веке? В «*Очерках истории русского стиха*» академик М. Л. Гаспаров утверждает, что во второй половине XX века *пятистопный ямб теснил четырехстопный*, а «передовитость» русского стиха того времени определялась долей неклассических стихотворных размеров.

Основными признаками, определяющими деление стихотворного текста на строфы, являются чередование различных клаузул и упорядоченность рифмовки. Характер ритмических окончаний, или *клаузул*, оказывает влияние на ритм стиха. Наряду с *мужскими* и *женскими* окончаниями встречаются еще и ***дактилические*** окончания с ударением на третьем от конца слоге. Сочетания всех этих признаков может быть разнообразным.

Вопрос: *Сколько комбинаций мужских, женских и дактилических клаузул дают две пары рифм, расположенных перекрестно?*

---

[9] *Шапир М. И.* Нечто о «механизме российских стихов», или Почему Онегин не мог отличить ямб от хорея // Известия РАН. Сер. лит. и яз. — 2002. — Т. 61, № 5. — С. 42.

Напомним, что если в схеме строфы хотят показать не только порядок следования рифм, но и характер клаузул, то *мужские* обозначают строчными буквами (*а*, *в*, …), а *женские* — прописными (*А*, *Б*, …). *Дактилические* обозначают *прописными буквами со штрихом* (A', $Б'$, …). Поскольку схема сочетания рифм, расположенных перекрестно, имеет вид *авав*, то достаточно рассмотреть только первые две строфы с различными комбинациями клаузул. Поэтому задача свелась к подсчету числа *размещений с повторениями* $\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$, а именно:

$$\begin{array}{lll} \text{авав}, & \text{АвАв}, & A'вA'в, \\ \text{аВаВ}, & \text{АВАВ}, & A'BA'B, \\ \text{а}B'\text{а}B', & AB'AB', & A'B'A'B'. \end{array}$$

Стихотворения пишутся разными размерами, поэтому строфических вариантов даже из четырех стихов может быть огромное количество, и каждый вариант будет иметь собственное звучание. Например, приступая к работе над «Евгением Онегиным» Пушкин создавал весьма своеобразную крупную строфу, называемую ***онегинской строфой***. Она содержит четырнадцать стихов и ее схема — *АвАвCCddEffEgg*. Внутренняя структура строфы состоит из четырех подструктур. Первое четверостишие имеет перекрестную рифмовку, второе — смежную, третье — опоясывающую, плюс двустишие смежной рифмовки.

В *античном метрическом стихосложении* были распространены трехсложные стопы, состоящие из одного краткого и двух долгих слогов. Кроме того, были возможны замены долгих слогов краткими и наоборот. Целый ряд таких стоп не имеет аналогов в русском стихосложении.

Вопрос: *Сколько всего трехсложных стоп существовало в античном метрическом стихосложении?*

Обозначим *долгий* слог *знаком* «–», а *краткий* — *знаком* «$\cup$» и посчитаем всевозможные упорядоченные комбинации, составленные из трех таких знаков. Задача свелась к подсчету числа *размещений с повторениями* $\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$, а именно:

дактиль $- \cup \cup$, *амфибрахий* $\cup - \cup$, *анапест* $\cup \cup -$,
бакхий $\cup - -$, *амфимакр* $- \cup -$, *палимбакхий* $- - \cup$,
трибрахий $\cup \cup \cup$, *молосс* или *тримарк* $- - -$.

Классическими размерами русской поэзии считаются два двусложных и три трехсложных размера с названиями, позаимствованными из античного греческого стиха. Вот как их охарактеризовал *Николай Гумилев*, считавший, что у каждого из них свои особенности и задачи. ***Ямб***, как бы спускающийся по ступеням, свободен, ясен, тверд и прекрасно передает человеческую речь. ***Хорей***, поднимающийся, окрыленный, всегда взволнован и то растроган, то смешлив, его область — пение. ***Дактиль***, опираясь на первый ударяемый слог и качая два неударяемые, как пальма свою верхушку, мощен, торжественен, говорит о стихиях в их покое. ***Анапест***, его противоположность, стремителен, порывист, это стихии в движенье. ***Амфибрахий***, их синтез, баюкающий и прозрачный, говорит о покое божественно легкого и мудрого бытия.

Трехсложный размер придает стихам некоторую торжественность и роднит стихотворение с задушевной песней. Чтобы побороть тягучее однообразие трехсложного размера нужно не следовать ему строго, а систематически нарушать его ритм. Существование в русском стихе более длинных стоп — вопрос спорный, но как замечательно сказал *Борис Пастернак*:

Есть в опыте больших поэтов
Черты естественности той,
Что невозможно, их изведав,
Не кончить полной немотой.

Размещение с повторениями термин достаточно явный и удобный. В случае «сочетаний с повторениями» с ясностью не все благополучно. Хотя если перестановки и размещения могут быть с повторениями, имеет смысл поговорить и о *сочетаниях с повторениями*. Такое название связано с классом задач, типичным представителем которых является следующая *модельная задача о* ***наборе пирожных***.

Пример. *В магазине продаются пирожные* 4 *сортов:* ***бисквитные, песочные, слоеные*** *и* ***эклеры***. *Рассмотрим, сколькими способами можно составить набор из* 8 *пирожных.*

Эта простенькая на вид задача сама по себе не так уж и проста. В духе *главного правила комбинаторики* сделаем следующее уточнение: пирожные одного сорта естественно считать неразличимыми. Кроме того, надо уточнить, какие наборы пирожных допустимы. Рассмотрим два варианта.

Вариант I. *Все пирожные хороши, надо взять хотя бы по одному каждого сорта.* Допускается любой способ набора пирожных, при котором каждый сорт пирожного берется, по крайней мере, один раз.

На первый взгляд неясно, *при чем тут сочетания*. Математики знают, что *пока задача не формализована, первый взгляд часто обманчив*. Поэтому *перейдем сразу ко второму*, направив его на 8 пирожных, обозначенных «*кружками*», отделенными вертикальными палочками, т. е. «*разделителями*» (или «перегородками»), на соответствующей графической иллюстрации (рис. 2.3), указывающей конкретный способ набора пирожных.

●● | ● | ●●● | ●●

Рис. 2.3

Символически разделители означают, что выбрано 2 бисквитных пирожных, 1 песочное, 3 слоеных и 2 эклера. Три разделителя делят пирожные на четыре группы по соответствующим сортам. Заметим, что в рассматриваемом варианте разделители могут находиться только в промежутках между кружками, но не слева ни справа от них, и в каждом промежутке должно быть не более одного разделителя, поскольку в наборе должно быть хотя бы по одному пирожному каждого сорта.

Теперь ситуация по поводу *сочетаний* проясняется. В построенной «модели» задачи речь идет о выборе 3 мест для разделителей из 7 возможных мест (промежутков), т. е. способов выбора пирожных столько же, сколько существует 3-элементных подмножеств в 7-элементном множестве. Это число *сочетаний* $C_7^3 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = 35$. В частности, если $n = 4$, $m = 8$, заметим, что $m \geq n$, то полученный результат способов набора из n сортов пирожных m пирожных, когда каждый сорт встречается хотя бы один раз, можно записать в виде C_{n-1}^{m-1}.

Вариант II. *Пирожные не так хороши, как показалось вначале.* Допускается любой способ набора, вплоть до того, что все они могут оказаться одного сорта.

Теперь возможны любые расположения 8 кружков и 3 разделителей в графической иллюстрации, использованной выше. Рассмотрим, например, их расположение, отвечающее случаю (рис. 2.4), когда в наборе пирожных 3 бисквитных, ни одного песочного, 5 слоеных и ни одного эклера.

Рис. 2.4

В рассматриваемом варианте нет ограничений на расположение разделителей, они могут стоять на любых трех местах из 8 + 3 = 11 мест, занимаемых 8 кружками и 3 разделителями. В этой «модели» задачи надо выбрать 3 места для разделителей из 11 мест или 8 мест для кружков из 11 мест, т. е. способов выбора пирожных столько же, сколько существует 3-элементных подмножеств в 11-элементном множестве. Это число сочетаний $C_{11}^3 = \dfrac{11\cdot 10\cdot 9}{3!} = 165$. В частности, если $n = 4$, $m = 8$, то полученный результат произвольных способов набора из n сортов пирожных m пирожных можно записать в виде $C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m}$.

Таким образом, мы получили формулу для способов выбора m объектов из n типов объектов с неограниченным повторением. Такие выборки принято называть «сочетания с повторениями».

Определение сочетаний с повторениями. *Группы, составленные из m объектов, которые принадлежат одному из n типов элементов, называют* ***сочетаниями с повторениями****.*

Число всевозможных сочетаний с повторениями, а именно выборов m объектов из повторяющихся n элементов, *обозначают символом* $\overline{C_n^m}$. С помощью *горизонтальной черты над буквой С* отличают случай с повторениями от обычных сочетаний. Читается: «Число сочетаний из эн по эм» или «Цэ с чертой из эн по эм». Для нахождения числа $\overline{C_n^m}$ сочетаний с повторениями из n элементов по m приходится проявить определенную изобретательность.

Утверждение. *Число сочетаний с повторениями* $\overline{C_n^m}$ *можно вычислить по формуле:*

$$\boxed{\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m} = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}}$$

Доказательство. Пронумеруем элементы исходного множества числами от 1 до n. Пусть в одно из сочетаний с повторениями вошло m_1 элементов под номером 1, m_2 элементов под номером 2, …, m_n элементов под номером n. Поскольку составляются группы m из объектов, то ясно, что $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$.

Изобразим это сочетание с повторениями в виде последовательности чисел из 1 и 0. Единица будет обозначать каждый отдельный объект сочетания, а нуль — символическую «границу» между соседними группами. Если, например, некоторое $m_i = 0$, т. е. элементов под номером i в сочетании нет, то в соответствующем месте последовательности окажется два «граничных» нуля подряд. Например, для $n = 4$ и $m = 8$, как в предыдущем примере, последовательность 11100111110 означает, что в этом сочетании 3 элемента под номером 1, ни одного элемента под номером 2, 5 элементов под номером 3 и ни одного элемента под номером 4. Поскольку сумма всех m_i равна m, то в построенной последовательности содержится m единиц, а так как различных по составу элементов групп n, то нулей $n - 1$. Верно обратное: каждой такой последовательности соответствует сочетание с определенными повторениями.

Таким образом, задача свелась к поиску ответа на вопрос: *сколько различных последовательностей длиной* m+n–1 *можно составить из* m *единиц и* n–1 *нулей*? Это число *перестановок с повторениями* из m единиц и n–1 нулей, т. е. $\overline{P}_{m,n-1} = \dfrac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$, а так как $\overline{P}_{m,n-1} = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m}$, получим искомую формулу, в частности

$$\overline{C_n^m} = \overline{P}_{m,n-1} = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что в предыдущем модельном примере вместо единиц мы рисовали кружки, а вместо нулей разделители, т. е. вертикальные черточки. Рассмотрим *модельную задачу о* ***голосовании***.

Пример. *При принятии решения члены комитета из 7 человек голосуют: «за», «против», «воздержался». Посчитаем, сколько может быть возможных исходов голосования по данному решению.*

Если нас интересует, кто и как голосовал, т. е. открытое ***поименное голосование***, то тогда речь идет о *размещениях с повторениями*, что даст $\overline{A_3^7} = 3^7 = 2187$ возможных исходов голосования.

Если нас не интересует, кто и как голосовал, а только общий результат голосования или, например, ***голосование тайное***, то тогда речь идет о *сочетаниях с повторениями*. В этом случае подсчитывается число всевозможных сочетаний $m = 7$ голосований членов комитета из повторяющихся $n = 3$ видов голосования: «за», «против», «воздержался», что даст $\overline{C_n^m} = \overline{C_3^7} = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = 9!\,/\,(7!\cdot 2!) = (9\cdot 8)\,/\,2 = 36$ возможных исходов голосования.

Замечание. *Сочетания с повторениями и размещения с повторениями объединяет то, что нет никаких ограничений на число повторений элементов, кроме общего их числа в наборе, поэтому в формуле числа сочетаний с повторениями* $\overline{C_n^m} = \dfrac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$ *допустим случай, когда выполняется неравенство* $m > n$.

Например, так было в задаче о «*наборе пирожных*» и в задаче о «*голосовании*». Но может быть и наоборот, т. е. в $\overline{C_n^m}$, $m < n$ или $m = n$. Например, *«костяшки»* ***домино*** можно рассматривать как сочетания с повторениями из 7 по 2 цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Их число равно

$$\overline{C_7^2} = C_{2+7-1}^2 = C_8^2 = 8!\,/\,(2!\ 6!) = (8\cdot 7)\,/\,2 = 28,$$

т. е. в домино всего 28 различных «костяшек».

Замечание. *Сочетания (с повторениями или без) отличаются от размещений (с повторениями или без) прежде всего тем, что первые — неупорядоченные наборы, а вторые — упорядоченные.*

Разбивать на отдельные части можно не только множества, но даже числа. Натуральное число n можно представить в виде суммы натуральных чисел разными способами, например:

$$4 = 1+1+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 2+1+1 = 2+2 = 1+3 = 3+1.$$

Сколькими способами можно представить произвольное натуральное число m в виде суммы из n натуральных слагаемых? Эта задача сводится к решению уравнения в целых неотрицательных числах.

Пример. *Посчитаем, сколько решений в целых неотрицательных числах для натурального числа m имеет уравнение:*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m, \text{ где } x_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Воспользуемся подсказкой древнегреческого математика *Диофанта Александрийского*. Одна из его книг начинается фразой: «*Ты, конечно, знаешь, что каждое целое есть просто некоторое количество единиц*».

Как и при доказательстве формулы числа сочетаний с повторениями, изобразим число m в виде последовательности m единиц и расставим n–1 нулей, обозначающих «границу» между соседними n группами единиц, в каждой из которых содержится некоторое натуральное число единиц x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что если единиц в некоторой группе нет, то соответствующее число единиц $x_i = 0$. Поэтому число решений в целых неотрицательных числах заданного уравнения равно числу *сочетаний с повторениями* $\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^m = \dfrac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$.

Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, у которых ищутся решения в целых числах, называются *диофантовы уравнения* по имени *Диофанта*, изучавшего такие уравнения. Мы нашли число решений диофантова уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ при предположении $x_i \geq 0$. Число решений этого уравнения при предположении $x_i > 0$ (заметим, что тогда $m \geq n$)находится, как и в случае варианта I модельного примера о «*наборе пирожных*», по формуле C_{m-1}^{n-1}.

Рассмотрим еще раз модельную задачу о «*наборе пирожных*», переформулировав ее в виде следующей *задачи о* ***дележе монет***.

Пример. *Рассмотрим, сколькими способами могут* 4 *пирата разделить между собой* 8 *одинаковых монет.*

Вариант I — *пираты с признаками морали*, т. е. допускается любой способ дележа монет, при котором каждый пират получает хотя бы одну монету. Воспользовавшись графической иллюстрацией на рис. 2.3, где «кружки» — это монеты, разделенные «перегородками», указывающими конкретный способ дележа монет среди пиратов, а именно первому пирату — 2 монеты, второму — 1 монету, третьему — 3 монеты и четвертому — 2 монеты, получим с помощью аналогичных рассуждений, что способов дележа в этом варианте равно $C_{8-1}^{4-1} = C_7^3 = 35$.

Вариант II — *пираты без признаков морали*, т. е. допускаются любые способы дележа, когда, например, некоторые пираты могут остаться без монет или все монеты достанутся одному пирату. Воспользовавшись графической иллюстрацией на рис. 2.4, где указан конкретный способ дележа монет среди аморальных пиратов, а именно первому пирату — 3 монеты, второму — ни одной, третьему — 5 монет и четвертому — ни одной, получим с помощью соответствующих рассуждений, что способов дележа во втором варианте ровно $C_{8+4-1}^{4-1} = C_{11}^{3} = 165$, т. е. это *сочетания с повторениями* $\overline{C_4^8}$.

А что, собственно, повторяется в **варианте II**? Это не монеты, поскольку, несмотря на их идентичность, они были и в **варианте I.** Каждый пират представлен на дележе монет в единственном экземпляре. Что же тогда? Если забыть о способе решения этой задачи и сосредоточиться на ее аналогии с выбором наборов пирожных, то придется признать, что «*повторяются*» *все-таки пираты*!

Мораль проста: *без особой надобности не следует связываться с термином* «*сочетания с повторениями*».

* * *

Математик прав, подходя ко всему со своими методами исследования, но прав и филолог, ставящий под сомнения математические методы познания в тот момент, когда математик облекает эстетические ценности и «горячку рифм» (Пушкин) в число. «***Формы познания*** *— это способы определений природы существующего*, *т. е. методы*, *образующие точное знание*», — писал Андрей Белый. Поэзия утверждает жизнь как творчество. Как сказал об этом *Андрей Белый*:

В строфах — рифмы, *в рифмах — мысли*
Созидают бытие:
Смысли, *сформулируй*, *счисли*, —
Стань во царствие твое!

Приступая к исследованию ритма русского четырехстопного ямба, он, с присущим поэту пристрастием, сосредоточивал свое внимание не на частоте ритмических вариаций, а на их *сочетании* в тексте. «*Числа, рифмы, сочетанья образов и слов*» для него лишь символ, но, углубляя и расширяя любой природный символ, художник осознает относительность образа, от которого он исходит. ***Слово*** *— это незаменимый образ действительности*.

Пусть в некотором языке имеется два типа фонем: гласные и согласные. Предположим, что слово может быть образовано из гласных и согласных, а также одних гласных или согласных, как, например, в чешском и сербско-хорватском языках.

Вопрос: *Сколькими способами можно образовать трехфонемное слово?*

При построении трехфонемного слова из двух типов фонем возможны следующие случаи: в слово входят гласные и согласные, а также слово составлено из фонем одного типа. Поэтому задача свелась к подсчету числа *сочетаний с повторениями* $\overline{C_2^3} = C_{3+2-1}^3 = C_4^3 = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$. Действительно, слово может быть образовано из одной гласной и двух согласных фонем, либо из двух гласных и одной согласной фонем, либо оно состоит из гласных, либо из согласных фонем. Поэтому существует только четыре способа образования трехфонемных слов.

Глубокий интерес к естественной истории и истории отдельной личности стал истоком ведущего мотива Велимира Хлебникова: *феномена времени*. На формирование этого мотива сильное влияние оказал его преподаватель в Казанском университете известный профессор математики А. В. Васильев. Свою мысль об отношениях времени с пространством Хлебников выражает через понятия *симбиоза* и *метабиоза*. Понятие «симбиоз» возникло как вспомогательное средство для описания некоторых частных явлений растительного мира. Можно условно считать, что следствием сосуществования одной жизни с другой жизнью является «***польза***», «***безразличие***» и «**вред**».

Вопрос: *Сколько возможно случаев отношений, как следствий сосуществования двух жизней?*

Следует уточнить, что речь идет об отношениях между обеими жизнями, протекающими в одно и то же время и на соседних, но разных, частях пространства. Обозначим следствия, испытываемые одной жизнью от сосуществования с ней другой жизни, через *знаки*: «$+$», что означает *пользу*, «$\cdot$», что означает *безразличное состояние*, и «$-$», что означает *вред*. Тогда задача сводится к подсчету числа *сочетаний с повторениями* $\overline{C_3^2} = C_{2+3-1}^2 = C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 4$, а именно получим шесть пар следствий сосуществования двух жизней:

$$(+,+),\ \ (+,\cdot),\ \ (+,-),\ \ (\cdot,\cdot),\ \ (\cdot,-),\ \ (-,-).$$

По аналогии с понятием «симбиоз» Велимир Хлебников вводит симметричное понятие «метабиоз» для описания «*отношений двух жизней*, *протекающих в одном и том же месте*, *но в последовательные промежутки времени*»[10]. Время связано в нашем сознании с жизнью, поэтому в определении метабиоза «*время живого*» необратимо. Областью приложения понятия «метабиоз» является представление о биосфере, играющее ключевую роль в современном естествознании и в жизни современного человека. Как сказал *Велимир Хлебников* в поэме «Гибель Атлантиды»:

И уважение к числу
Растет, *ручьи ведя к руслу*.

[10] *Бабков В. В.* Между наукой и поэзией: «метабиоз» Велимира Хлебникова // ВИЕТ. — 1987. — № 2. — С. 139.

Каждый язык имеет свою собственную динамику и свои самопорождающие приемы. ***Алфавит языка молекул ДНК***, содержащих генетическую информацию, — это «*слова из четырех букв* А, Г, Т, Ц», которым соответствуют первые буквы названий азотистых оснований, входящих в состав нуклеиновых кислот: ***аденин***, ***гуанин***, ***тимин***, ***цитозин***. Наследственная информация, содержащаяся в каждом гене, записывается в виде слова из различных комбинаций букв этого алфавита. В процессе эволюции или в результате мутаций слова, состоящие из этих четырех букв, меняются. Одна буква может замениться на другую, может выпасть, а может добавиться новая, которой в «слове» не было, что указывает на ***комбинаторную природу генетического кода***. Сформулируем вопрос, имеющий отношение к теории белкового кода.

Вопрос: *Сколькими способами можно выбрать без учета порядка следования три буквы из повторяющегося набора четырех букв* А, Г, Т, Ц ?

Число троек нуклеотидов равно числу стандартных *аминокислот*, на которые разлагаются молекулы белка. Для нахождения нужного числа надо посчитать число *сочетаний с повторениями* $\overline{C_n^m}$. В рассматриваемом случае имеем $n = 4$ вида повторяющихся объектов А, Г, Т, Ц, из которых надо составить трехбуквенный объект, т. е. $m = 3$. Следовательно, $\overline{C_4^3} = C_{3+4-1}^3 = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\,3!} = 20$ — это и есть искомое число стандартных аминокислот.

Возвращаясь к *Ноаму Хомскому*, заметим, что когда один из слушателей доклада, который он иллюстрировал фразой «*бесцветные зеленые идеи яростно спят*», крикнул: «Это не бессмыслица, а современная поэзия», то Хомский отшутился: «Это хорошая современная поэзия!» Есть различные варианты поэтического осмысления ***«зеленой идеи»***, хотя ее можно понять, не прибегая к поэзии. ***«Поэзия*** *такая же наука*, *как скажем*, ***математика»***, — говорил *Николай Гумилев*. Поэтому, не учив эти науки, нельзя стать не только поэтом, но и понимающим читателем. Вот оригинальный пример поэтического осмысления одного из контекстов знаменитой фразы Хомского:

Идеи зеленые яростно спят,
Ворочаются в голове,
Бесцветные, скачут опять и опять
Кузнечиками по траве.

Мы рассмотрели в этом разделе размещения и сочетания с повторениями, когда каждый элемент может повторяться любое число раз, но могут встретиться и различные промежуточные случаи, рассмотрение которых оказывается более сложным. Например, если каждая «буква» может копироваться не более трех раз, то тогда в качестве «*размещений с ограниченными повторениями*» можно рассматривать только те последовательности букв, в каждой из которых любая заданная буква может встретиться не более трех раз. *В комбинаторике много трудных задач, но есть и такие, решения которых еще никому не удалось найти.*

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что число анаграмм слова *баллада* равно 210 ?

2. Верно ли, что число классических трехсложных размеров в русском стихосложении можно посчитать по формуле $\overline{P}_{1,2} = 3$?

3. Верно ли, что число белорусских паспортов, отличающихся по номерам, только первыми семью арабскими цифрами, равно $\overline{A_{10}^{7}} = 10^7$?

4. Верно ли, что число теоретически возможных комбинаций ритмических форм с реальными ударениями в пятистопном ямбе равно $\overline{A_{2}^{4}} = 16$?

5. Верно ли, что для участия в студенческом конкурсе красоты пять девушек с 16 факультетов БГУ, без ограничения представителей от одного факультета, можно отобрать $\overline{C_{16}^{5}} = 15\,504$ способами?

2.4. ВЕРОЯТНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНОГО СОБЫТИЯ

Стихотворная речь — категория двуединая. С одной стороны, она эстетическое явление, а с другой — только на основе строгого научного описания многообразных явлений возможен ее научный анализ. ***Статистические методы исследования*** при изучении стиха, без которых современное стиховедение в ряде случаев не может обойтись, впервые широко применил *Андрей Белый*. Статистический метод позволил ему показать историческую эволюцию четырехстопного ямба. «*То, что ныне доказано, некогда только воображалось*», — утверждал английский поэт *Уильям Блейк*. Превращая талантливые предположения в доказанный факт, исследователи стиха давали также критерии, с помощью которых можно было бы отличать субъективно-вкусовые оценки от объективного анализа.

Основой всех точных исследований в языкознании является наблюдение за поведением и признаками изучаемых лингвистических объектов, которое может осуществляться с помощью соответствующего опыта или эксперимента. Осуществление такого опыта или эксперимента называется ***испытанием***. Понятие «*вероятности*» зависит от того, что мы понимаем под испытанием. Оставив термин «*испытание*» неопределенным, будем предполагать, что он отвечает следующим условиям:

а) ***исход*** (*результат*) *испытания точно неизвестен, т. е. испытание даст более одного исхода*;

б) *конечное множество всех исходов может быть определено до начала испытания*;

в) *испытание можно повторить неограниченное число раз при тех же условиях*.

Многие задачи теории вероятностей сконцентрированы вокруг азартных игр, поскольку они служат замечательным наглядным примером использования вероятности. Французский математик ***Пьер Лаплас*** в своей основополагающей работе «Аналитическая теория вероятностей», опубликованной в 1812 г., писал: «*Замечательно, что наука, которая начала с рассмотрения азартных игр, обещает стать наиболее важным объектом человеческого знания… Ведь большей частью важнейшие жизненные вопросы являются на самом деле лишь задачами из теории вероятностей*». Любопытно, что ***Наполеон***, утверждавший, что «*усовершенствование математических наук тесно связано с благоденствием государства*», назначил Лапласа на должность министра внутренних дел. Сам термин ***вероятность*** стал центральным в «*математике случайного*» после упомянутого классического труда, и с этого времени соответствующая наука называется «*теория вероятностей*».

Однако и сейчас при изложении основных понятий теории вероятности ситуации с бросанием игральных костей, подбрасыванием монет и выбором карт из колоды служат наглядным материалом для примеров и иллюстраций. Почему? Потому что в азартных играх главную роль играет ***случай*** — от него, например, зависит, какие именно карты окажутся у партнеров. Поэтому игры, в которых источник неопределенности — случайность, называются *азартными* (от французского *hazard* — случай). Заметим, что в русском языке слово «азарт» имеет совсем другой смысл. Такие игровые модели очень удобны для первоначального рассмотрения элементарной теории вероятностей. Напомним, что ***игральная кость*** — это кубик с округленными углами, на гранях которого нанесены точки, изображающие числа от 1 до 6. Опыт, состоящий в бросании кости, представляет собой *испытание*, а его результат (выпавшее число очков) — *исход* этого испытания. В этом случае исходами являются числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бросании монеты могут быть два исхода: О — выпадение «орла» (герба) и Р — выпадение «решки» (цифры).

Определение события. *Множество всех исходов испытания называется множеством (пространством) элементарных событий, а событием — подмножество множества элементарных событий.*

Например, студент филологического факультета отвечает на вопросы по курсу «*Основы высшей математики*» — это ***испытание***, и получает «зачет» — это ***событие***.

Юрий Лотман в своей книге «Структура художественного текста» (М., 1972) утверждает, что любые события происходят только на границе: «*Событием в тексте является перемещение персонажа через границу семантического поля*». Чем резче проведена граница, тем сильнее событийность ее пересечения, тем напряженнее сюжет. Под ***событием в математической лингвистике*** *понимается не конкретный лингвистический факт, а лишь возможный исход лингвистического опыта или наблюдения*.

Рассмотрим другие модельные примеры испытаний. Пусть опыт состоит в бросании двух костей, которые будем считать различными, например, одна синяя, а другая — красная (или одну кость бросим дважды: первое бросание, второе бросание). В этом случае исходами являются пары (1, 2), (3, 5), (6, 4), (3, 3) и т. д. — всего $\overline{A_6^2} = 6^2 = 36$ элементарных событий. Если мы три раза подбрасываем монету, то в этом случае исходами испытания будут упорядоченные тройки: ООО, ООР, ОРО, РОО, ОРР, РОР, РРО, РРР — всего $\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$ элементарных событий. Наконец, если из колоды в 36 игральных карт вытаскивается наудачу (не глядя) 6 любых карт, то тогда множество элементарных событий содержит C_{36}^6 элементов.

Элементарное событие характеризуется тем, что при каждом испытании наступает одно и только одно из них. *Любое событие, связанное с данным испытанием, распадается на элементарные*, т. е. представляется в виде объединения множества элементарных событий. Например, событие, связанное с бросанием кости, — «число очков четное» или «число очков превосходит 2».

В теории вероятностей не рассматривается техническая сторона испытания, а только то, какие события в нем могут наблюдаться, и что в результате проведенного эксперимента действительно наблюдалось. В каждой области знания точные законы регулировали отнюдь не все. Они намечали лишь границы, в пределах которых возможна «*игра случая*». С этой точки зрения слово ***случайность*** приобретает объективный смысл, так как то, что было случайностью для одного, должно быть случайностью и для других.

Определение случайного события. *Событие, наступление или ненаступление которого в некотором испытании зависит от ряда случайных факторов, называется* ***случайным событием***.

Результатом *лингвистического испытания* является *лингвистическое событие*. Например, пусть испытание (опыт, эксперимент) состоит в угадывании буквы, которой предшествует последовательность букв КОТОРО. Множество всех исходов (результатов) этого испытания — это событие, состоящее в появлении букв: Г (которого), Е (которое), Й (которой), M (которым, которому). Каждое из этих событий может произойти, а может и не произойти, т. е. это случайные события.

Реальную ***лингвистическую задачу*** в качестве иллюстрации понятия случайного сформулировал и решил замечательный венгерский математик *Дьердь Пойа*: «*С каким языком теснее всего связан английский язык — с венгерским или польским*?»

Эту задачу можно решить, найдя закономерности, присущие этим языкам, а чтобы они носили общий характер, Пойа рассмотрел не 3, а 10 европейских языков: английский, шведский, датский, голландский, немецкий, французский, испанский, итальянский, польский и венгерский. Он сравнил наименования чисел (от одного до десяти) на этих 10 языках, как наиболее устойчивые на протяжении многолетней истории объекты, и воспользовался *критерием похожести языков*, основанном на сравнении первых букв в соответствующих словах. Это позволило ему обосновать *статистическую гипотезу* о том, что английский язык теснее связан с польским языком, чем с венгерским.

Источником *случайных лингвистических событий* может, например, служить то, что из-за недостаточности сведений о начальном состоянии лингвистического объекта (явления) оно описывается лишь в основных своих чертах. Перечисление или классификация лингвистических событий, принадлежащих лингвистическому испытанию, имеет сравнительно ограниченный познавательный интерес. Гораздо важнее оценить степень возможности появления того или иного случайного события.

Определение вероятности. *Числовая характеристика степени возможности наступления какого-либо определенного случайного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз, испытаниях, называется* ***вероятностью***.

Для случайного события постулируется *мера возможности* его появления, т. е. определенная вероятность его наступления при данных условиях. Каждому случайному событию ставится в соответствие, характеризующее его, число $\mathbf{p}$, $0 \le \mathbf{p} \le 1$ (от первой буквы французского слова *probabilite* — вероятность), которое и называется ***вероятностью*** этого события. Цель *математики случайного*, которую принято называть *теорией вероятностей*, состоит в том, чтобы давать определенное знание о случайных, неопределенных событиях с помощью исчисления вероятностей. Для лингвистики и филологии особый интерес представляют «*классическое*» и «*статистическое*» определения вероятности.

Поясним теперь смысл выражения «степень возможности появления случайного события в данном испытании» и каким образом она характеризуется числом $\mathbf{p}$. Это означает следующее: *если испытание повторили n раз, то интересующее нас событие при этом произойдет* *приблизительно* $n \cdot \mathbf{p}$ *раз*. Можно сказать и по другому: если при n-кратном повторении испытания событие произошло m раз, то ***частота появления события***, а именно число m/n приблизительно равно числу $\mathbf{p}$ и чем больше n, тем выше точность этого утверждения. Поэтому связь между испытанием и событием, которая характеризуется вероятностью события в этом испытании, т. е. числом $\mathbf{p}$, выявляется только при многократном повторении этого испытания. При этом *теория оперирует вероятностями, а практика — статистическими данными исходов испытаний*.

Рассмотрим сначала статистическое определение вероятности, поскольку в лингвистической практике статистические исследования являются основным способом оценки вероятностей событий. Даже стилистическое отличие каждого большого поэта и писателя имеет свои количественные статистические характеристики литературного языка. *Если в одних и тех же условиях при* n *испытаниях случайное событие* A *произошло* m *раз, то отношение* $\frac{m}{n}$ *называется* ***относительной частотой*** *события* A *в* n *испытаниях*. Частота может быть вычислена лишь после того, как проведена серия испытаний (экспериментов), и, вообще говоря, частота изменяется, если провести другую серию из n испытаний или если изменить n.

Например, как ответить на вопрос, *какие звуки встречаются в русских литературных текстах чаще: гласные или согласные*?

Для этого надо исследовать различные литературные тексты, подсчитывая в них число гласных и число согласных. Может быть, удастся заметить, что, например, буква «а» встречается в 5 раз чаще, чем буква «ч», а буква «о» встречается в 55 раз чаще, чем буква «ф». В результате дальнейших исследований можно придти к выводу, что, например, событие «встретить в литературном тексте букву е» является более вероятным, чем событие «встретить в литературном тексте букву а». Это и есть на данном этапе качественная оценка вероятности по частоте.

Определение статистической вероятности. *При достаточно больших значениях* n *относительная частота* $\frac{m}{n}$ *случайного события* A *мало отличается от некоторого числа* $\mathbf{p}(A)$*, которое называют* ***статистической вероятностью*** *события* A*, т. е. справедливо приближенное равенство:*

$$\mathbf{p}(A) \approx \frac{m}{n}.$$

Заметим, что «*статистика*» (от немецкого слова *statistik*) — это функция от результатов наблюдений.

Приведенное *эмпирическое определение* статистической устойчивости относительных частот случайного события характеризует естественнонаучное содержание понятия вероятности, но не является его формальным определением, так как опирается на такие понятия, как «достаточно большие», «случайного события», «мало отличается». Однако, во-первых, мы не собираемся строить теорию, исходя из этого определения, а во-вторых, для определения вероятности случайного события на основе аксиоматической теории требуется глубокое знание ряда разделов высшей математики. С точки зрения реального смысла, вкладываемого в понятие вероятности: ***вероятность случайного события*** *A — это число близкое к относительной частоте наступления события A в длинной серии тождественных испытаний*.

Часто в процессе совершенствования экспериментов возникает такое положение дел, когда полной устойчивости исходов испытания добиться не удается, но возникает явление ***статистической устойчивости***, которая характеризуется устойчивостью частот наступления различных событий, связанных с исходом эксперимента. *Исчерпывающая проверка устойчивости частот невозможна, хотя в некоторых случаях наличие статистической устойчивости достаточно достоверно*. Поэтому следует обратить внимание на то, что точное численное значение статистической вероятности остается, вообще говоря, неизвестным.

Рассмотрим, например, статистическую вероятность глагола «быть» в русском литературном языке. Текст «*Капитанской дочки*» Пушкина состоит из 29 343 словоупотреблений. Формы слова «быть» встречаются здесь 430 раз. Отсюда следует, что статистическая вероятность *события* A_1 = {появления в тексте «Капитанской дочки» форм слова БЫТЬ} равна

$$\mathbf{p}(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{430}{29343} \approx 0{,}0147.$$

Всем известны двуязычные словари (например, англо-русский), толковые и энциклопедические словари. Но существуют еще и особые — так называемые «частотные словари». ***Частотный словарь*** указывает, сколько раз употребляется то или иное слово в тексте. Наряду со «словарем языка писателя» он необходим для анализа литературоведческой стилистики. Согласно данным «*Материалов к частотному словарю А. С. Пушкина*», все произведения Пушкина содержат 544 777 словоупотреблений, из них формы слова «быть» употреблены автором 8771 раз. Поэтому статистическая вероятность *события* A_2 = {появления в любом произведении Пушкина форм слова БЫТЬ} равна

$$\mathbf{p}(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{8771}{544\,777} \approx 0{,}0161.$$

При небольшом числе испытаний относительные частоты события могут изменяться от одной группы событий к другой. Например, в случайно выбранном куске текста из произведений Пушкина длиной в 100 слов формы глагола «быть» может не появиться ни разу, поэтому относительная частота равна 0, а в другом отрывке той же длины формы этого глагола могут появиться три раза и соответственно относительная частота возрастет до 0,03. Однако при последовательном увеличении объема выбираемых текстов разных авторов относительная частота глагола «быть» колеблется около величины 0,01, которая равна статистической вероятности в этом случае.

Почти любая лингвистическая работа использует иногда неосознанно ***статистические методы***, поскольку в языке есть частые и редкие явления, поэтому без выделения частых явлений невозможны какие-либо лингвистические выводы. Количественные оценки частот лингвистических явлений на «*языке цифр*», которого, к сожалению, боятся некоторые филологи, помогают не только выдвигать гипотезы и иллюстрировать выводы, но и делать их более доказательными. По мнению профессора Б. И. Ярхо, одного из пионеров успешного применения статистических методов в области стиховедения, «*сила статистического доказательства заключается, конечно, в максимальной объективности категории числа*». Но «математический акт» не должен совершаться до тех пор, пока не будет вложен литературоведческий смысл в соответствующие статистические операции.

В любом осмысленном тексте не все буквы появляются одинаково часто, т. е. они отличаются своей относительной частотой. Например, человеку, получившему шифрованное достаточно длинное сообщение, достаточно подсчитать частоту появления в нем шифровальных знаков и сопоставить ее с относительной частотой появления букв русского алфавита, с которой они приблизительно встречаются в длинных текстах:

Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
А	0,075	Ж	0,009	М	0,031	Т	0,065	Ш	0,007
Б	0,017	З	0,018	Н	0,065	У	0,025	Щ	0,004
В	0,046	И	0,075	О	0,110	Ф	0,002	Ы	0,019
Г	0,016	Й	0,012	П	0,023	Х	0,011	Э	0,003
Д	0,030	К	0,034	Р	0,048	Ц	0,005	Ю	0,007
Е	0,087	Л	0,042	С	0,055	Ч	0,015	Я	0,022

Для чего все это нужно? Законы словообразования, если они действительно законы и выражены количественно, помогают формировать ту научную базу данных, которая необходима для создания и совершенствования *новых информационных технологий*, в частности, кодирования и декодирования соотношений, переводов, распознавания образов слов и слогов. Для этого нужны сведения о частотности слов в разговорном языке и литературе различных стилей.

В частности, этими проблемами занимались сотрудники группы «*Статистика речи*» под руководством профессора Р. Г. Пиотровского из Санкт-Петербурга. Даже в не слишком длинном тексте можно отделить знаки для согласных от знаков для гласных. Знание относительных частот букв алфавита облегчает разгадку кодов, основанных на простой замене букв знаками. Заметим, что буквосочетания по две, три, четыре и т. д. буквы также имеют свой закон распределения.

Хотя статистическую вероятность точно определить невозможно, поскольку нельзя реализовать неограниченную серию испытаний, главное — это уверенность в том, что вероятность $\mathbf{p}(A)$ существует. В связи с этим попытаемся ответить на вопрос: «*Всегда ли неограниченное повторение условий неизбежно влечет наличие вероятности*?» Разумеется, нет, тут дело в конкретном опыте или реальной «практике». Например, возьмем наугад несколько русских книг и подсчитаем частоту употребления каждого слова в каждой книге — *частоты редких слов будут различны*. Можно взять очень много книг, но частоты редких слов не станут приблизительно одинаковыми, а наоборот не так уж редко будут появляться все новые слова.

Заметим, что частотные словари языка нужны не только специалистам по машинному переводу или теории информации, но и лингвистам, составляющим учебник языка. Известный российский математик Р. Л. Добрушин в упоминавшейся статье ***«Математические методы в лингвистике»*** писал: «*Невнимание к частотным характеристикам языка* (*идущее от пренебрежения ко всему тому*, *что связано с математикой*) *приводит к тому*, *что многие элементарные учебники иностранного языка содержат на первых страницах очень редкие слова и не содержат широко распространенных*». В действительности сравнительно небольшое количество слов «покрывает» большую часть текста. Именно на этом основан своеобразный язык Basic English, представляющий собой упрощенный вариант реального английского языка, содержащий всего около 1000 слов, и тем не менее их оказывается достаточно для общения.

Составление *частотных словарей* — это не такое простое дело, как может, на первый взгляд, показаться. Во-первых, невозможно использовать все тексты, напечатанные, например, по-русски, — необходим отбор. Во-вторых, интересно сравнить частоту употребления различных слов в литературе и в обыденной речи, что очень затруднительно. Существующие частотные словари языка далеки от совершенства, поскольку в них приводятся частоты слов, которые подвержены случайным отклонениям и не делается оценок для их вероятностей. *Лингвистический смысл имеют именно вероятности*, *а не частоты*.

Долгое время устойчивость относительных частот была первична по отношению к понятию вероятности, затем точка зрения изменилась на противоположную, оставив близость относительных частот, при увеличении числа испытаний, в арсенале математики в виде строго доказанных теорем. Для случаев, когда есть симметрия исходов испытаний, можно определить *классическую вероятность*, которая взаимодополнительна *статистической вероятности*, поскольку первая — ***абстракция***, а вторая — ***опыт***. Классическое определение вероятности связано с понятием «равновозможных» событий.

Понятие ***равновозможных*** (или *равновероятных*) событий в математике не определяется, оно считается интуитивно ясным и лишь поясняется примерами. Обычно понятие *классической вероятности* иллюстрируется на азартных играх, потому что здесь равновозможность прямо задана внешней или геометрической симметрией объекта — *монеты, игральной кости, колоды карт* и т. д. Если монета ровная, неизогнутая, то можно ожидать, что при ее многократном бросании орел и решка будут выпадать одинаково часто, т. е. примерно в половине случаев будет выпадать орел, а в половине случаев — решка. Поэтому в условиях этого эксперимента принято считать, что для такой монеты вероятность выпадения орла или решки равна 1/2.

Даже если мы не знаем, что такое равновозможность, но если она имеет смысл, то ею должны обладать грани симметричной кости. Естественно ожидать, что при многократном бросании идеально правильной игральной кости на долю каждого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 будет приходиться примерно шестая часть общего числа испытаний, т. е. бросаний кости. Поэтому считают, что вероятность выпадения каждой грани, соответствующей числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, равна 1/6.

Какова в таком случае вероятность события A = «*выпадение нечетного числа очков*»? Поскольку имеется шесть одинаково возможных исходов, причем три из них (выпадение чисел 1, 3, 5) «благоприятствуют» событию A, то вероятность $\mathbf{p}(A)$ можно считать равной 3/6 = 1/2.

Один из первых исследователей случайного французский математик и философ ***Блез Паскаль*** противопоставлял задачи теории вероятностей задачам статистического эксперимента: «*Колебания счастья и удачи подчиняются рассуждениям, опирающимся на справедливость… Это в тем большей мере должно определяться усилиями разума, чем в меньшей мере может быть найдено из опыта*». Естественно, что «справедливость» в этом контексте понималась как «равновозможность», а сама равновозможность имела более чем широкий смысл. ***Равновозможность*** (или *равновероятность*) исходов элементарных событий означает, что если все эти исходы равноправны, то любой из них должен встречаться одинаково часто.

Определение классической вероятности. *В условиях равновозможности исходов элементарных событий* ***классическая вероятность*** *события A равна* $\mathbf{p}(A) = \frac{m}{n}$, *где n — число всех равновозможных исходов испытания, а m — число исходов, составляющих событие A*.

Иначе говоря, *классическая вероятность* события равна *отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению этого события, к общему числу всех равновозможных исходов*. Центральной фигурой периода становления «теории вероятностей» был швейцарский математик ***Якоб Бернулли***, которому принадлежит заслуга введения в науку «классического» понятия «вероятность события» как отношения числа возможных исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу всех мыслимых исходов, которые предполагаются равновозможными. Согласно Бернулли, ***вероятность*** *есть* «*степень уверенности и относится к достоверности как часть к целому*». Трудность правильного формирования вероятностного представления связана с тем, что довольно сложно указать разбиение на равновозможные случаи, если результаты испытаний не принадлежат к азартным играм.

Замечание. *Существенный недостаток классической вероятности заключается в том, что новое понятие «вероятности» определяется с помощью неопределенного понятия «равновозможный исход события».*

Однако было бы ошибкой полагать, что есть какая-то альтернатива равновозможности. По-видимому, *без равновозможности нет и классической вероятности*, т. е. стоит нам принять элементарные исходы не равновозможными, как мы вынуждены будем изменить определение вероятности. Для понимания сути этой проблемы рассмотрим следующий модельный пример.

Задача о трех картонках. *На каждой из трех одинаковых картонках с обеих сторон нарисованы буквы: на первой —* А, А; *на второй —* Б, Б; *на третьей, с одной стороны,* А, *с другой —* Б. *Одна из картонок выбирается наугад и кладется на стол. Пусть на ней нарисована буква* А. *Какова вероятность, что на другой стороне будет буква* А?

В условиях этого испытания случайно выбрана первая картонка с буквами А и А или третья картонка с буквами А и Б с разных сторон. Заметим, что в первом случае вторая буква будет А, во втором — Б. Интуиция подсказывает, что искомая вероятность равна 1/2, но это заключение неверно и причина заблуждения не очевидна. Дело в том, что два рассмотренных исхода испытания, а именно *событие* АА = {выбрана первая картонка} и *событие* АБ = {выбрана третья картонка} *не были равновозможными*. В действительности в событии АА два исхода благоприятны для обнаружения буквы А, а в событии АБ — только один исход. Поэтому вероятность того, что на столе лежит картонка с буквами А и А с разных сторон, равна 2/3.

Реальных прикладных задач, где здравый смысл противоречит логике рассуждений, довольно много. Слабое место ***интуиции вероятностного мышления*** в том, что смесь различных комбинаторных вариантов с наглядностью в теории вероятностей такова, что как сказал автор современных пособий по математике В. Босс «*все время искрит*». Тем не менее при указании равновозможных событий основную роль играют конкретные условия рассматриваемого опыта и здравый смысл. В этом могут помочь и *соображения симметрии*, *понятые в широком смысле*, т. е. условия проводимого испытания симметричны относительно рассматриваемых событий.

Пример. *Четыре буквы-кубика* А, А, М, М *положены в мешок, откуда их вынимают наудачу и располагают один за другим в порядке, в котором они появляются. Какова вероятность получить при таком извлечении слово* МАМА?

Число всех равновозможных исходов этого испытания — это число *перестановок с повторениями* (2 буквы А и 2 — М), $\overline{P}_{1,2} = 4!/(2!\cdot 2!) = 6$, а именно: AAMM, AMAM, AMMA, MAAM, MAMA, MMAA. Среди всех исходов данного испытания есть только один благоприятный для слова МАМА случай, поэтому

$$\mathbf{p}(\text{МАМА}) = 1/\overline{P}_{2,2} = 1/6.$$

Пример. *Пусть четыре одинаковые картонки со словами «быть», «очень», «знаменитым», «некрасиво» сложены в черном ящике и затем наугад извлекаются три карточки одна за другой, составляя в порядке их появления предложение. Какова вероятность получения пастернаковской строки* ***«быть знаменитым некрасиво»*** *?*

Число всех равновозможных исходов этого испытания — это число размещений $A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$. Среди этих исходов есть единственный благоприятный для поэтической строки Пастернака вариант, который для простоты обозначим первыми буквами соответствующих слов «б. з. к.», следовательно, $\mathbf{p}$(«б. з. к.») = $1/A_4^3 = 1/24$.

Пример. *Допустим, что в некотором языке имеется* 2 *типа фонем: гласные и согласные, которые, так же как и гласные, являются слогообразующими, и любые трехфонемные слова равновозможны. Какова вероятность выбрать случайным образом из множества указанного типа трехфонемных слов такое слово, которое составлено из фонем следующего типа —* 1*-й гласной и* 2 *согласных фонем, без учета порядка их следования*?

Число всех равновозможных исходов этого испытания — это число *сочетаний с повторениями* $\overline{C_2^3} = C_{2+3-1}^3 = 4!/(3!\cdot 1!) = 4$. Среди исходов данного испытания только один благоприятствует трехфонемному слову указанного типа, т. е. составленному из одной гласной и двух согласных фонем без учета порядка их следования. Обозначим это событие символом «такое слово», тогда

$$\mathbf{p}(\text{«такое слово»}) = 1/\overline{C_2^3} = 1/4.$$

Замечание. *Классическое определение вероятности не является строго математическим определением, а дает лишь метод ее вычисления в простейших случаях.*

Одним из первых, кто стал математически анализировать игровые шансы, был итальянский математик ***Джироламо Кардано***, известный, так же как изобретатель «карданного вала». В его манускрипте «*Книга об азартных играх*» впервые была высказана *идея комбинаций*, с помощью которых удобно описывать множество всех возможных исходов испытания, например, при бросании игральных костей в разном числе. Он также обнаружил, что для правильной игральной кости «отношение числа благоприятных комбинаций к общему числу возможных комбинаций находится в хорошем согласии с игровой практикой».

В теории вероятностей классическим является ***эксперимент с урной***, из которой надо не глядя извлекать *одинаковые шары разных окрасок*. Вероятность при этом вводится просто: если в урне находится 30 шаров, 10 из которых — белые, то вероятность извлечь белый шар равна 10/30 = 1/3. Схема опыта настолько проста, что кажется очевидной, хотя, в сущности, все проблемы, относящиеся к случайным событиям, связанным с экспериментами с подбрасыванием игральной кости или монеты, упрятаны «во тьму урны». Хотя классики науки «математики случайного» довольно широко пользовались *урновой схемой*, смысл из нее они извлекали различный. Рассмотрим, например, ***задачу о выборке***, имеющую практические применения в разных областях знания.

Пример. *В урне имеется всего n шаров, из них m белых и n–m черных шаров. Из урны наудачу вынимается k шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых k шаров окажется l белых?*

Исход этого испытания состоит в появлении любых k шаров из общего числа n шаров. В данном примере *событие* A = {среди вынутых k шаров окажется l белых}. Поскольку нас не интересует порядок появления этих шаров, то число всех исходов равно числу *сочетаний* C_n^k. Заметим, что мы извлекаем не только l белых шаров, но и оставшиеся $k - l$ черных. Очевидно, что $0 \le l \le m$ и $0 \le k - l \le n - m$ в противном случае вероятность появления интересующего нас события равна 0. Извлечь l белых шаров из имеющихся в урне m белых шаров можно C_m^l способами. Соответственно извлечь $k - l$ черных шаров из $n - m$ черных шаров можно C_{n-m}^{k-l} способами. По *комбинаторному принципу умножения* число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}$. Следовательно, искомая вероятность в *задаче о выборке* равна

$$\mathbf{p}(A) = \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k} \cdot.$$

Пример. *В группе студентов из* 17 *девушек и* 3 *юношей выбирают по жребию* 3 *человек в оргкомитет **«Дней филфака»**. Какова вероятность того, что в составе выбранных окажется* 2 *девушки и* 1 *юноша?*

Это типичная *задача о выборке*, где в условиях предыдущего примера «шары» — это студенты, «белые шары» — девушки, «черные шары» — юноши. Тогда $n = 20$, $m = 17$, $n - m = 3$, $k = 3$, $l = 2$, $k - l = 1$. Следовательно, вероятность *события* A = {среди выбранных студентов окажется 2 девушки и 1 юноша} равна

$$\mathbf{p}(A) = \frac{C_{17}^2 \cdot C_3^1}{C_{20}^3} = \left(\frac{17 \cdot 16}{2!} \cdot \frac{3}{1!}\right) / \left(\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!}\right) \approx 0{,}35.$$

Пример. *Из колоды, состоящей из* 36 *карт, наудачу вытаскивается* 6 *карт. Какова вероятность того, что среди них окажется* 1 *король и* 2 *дамы?*

Для решения этого примера можно применить ***общую схему задачи о выборке***. Общее число всех исходов *события* A = {среди вытянутых 6 карт окажется 1 король и 2 дамы} равно числу *сочетаний* C_{36}^6. Вытянуть 1 короля из 4, имеющихся в колоде, можно C_4^1 способами, а 2 дам из 4 соответственно C_4^2 способами. Кроме того, вытягиваются еще 3 карты из 36 – 4 – 4 = 28 карт, не содержащих ни королей, ни дам, что можно сделать C_{28}^3 способами. Таким образом, согласно *комбинаторному принципу умножения* число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{28}^3$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\mathbf{p}(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{28}^3}{C_{36}^6} = \left(\frac{4}{1!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3!}\right) / \left(\frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{6!}\right) \approx 0{,}04.$$

Замечание. *Все рассмотренные примеры являются частными случаями **урновой схемы**.*

Например, бросание *монеты* можно заменить урновой схемой с 2 шарами, которые обозначены буквами О и Р. Вынимание из колоды карт одной *карты* можно заменить урной с 36 шарами, обозначенной парой знаков (a, $в$), где a — буквы П (пики), Т (трефы), Б (бубны), Ч (червы), а $в$ — достоинства карты: 6 — шестерка, …, 10 — десятка, 11 — валет, …, 14 — туз. Например, *событию* A = {вынут туз} соответствует вынимание из урны шара, принадлежащего подмножеству A = {(П, 14), (Т, 14), (Б, 14), (Ч, 14)}, а *событию* B = {вынута карта червовой масти} соответствует подмножество B = {(Ч, 6), (Ч, 7), …, (Ч, 14)}.

Замечание. *Статистическое понимание вероятности состоит в том, что постулируется не симметрия условий проводимого испытания (равновозможность), а беспорядочность.*

Например, во многих естественных явлениях мы вообще не находим симметрии подобной правильной кости, т. е. не все события в мире равновозможны. Кроме того, *статистический подход* к пониманию вероятности *в отличие от классического* исходит из предположения, что испытание, в котором может появиться данное случайное событие, можно идентично воспроизвести хотя бы теоретически любое число раз.

Предположение равновозможности позволяет нам использовать *комбинаторные принципы*, поскольку *подсчет вероятностей — это одно из основных* ***приложений комбинаторики***. С учетом этого предположения рассмотрим еще несколько примеров нахождения классической вероятности.

Пример. *Монету бросают* 10 *раз. Какова вероятность события A* = {*орел выпадет ровно* 3 *раза*}?

Десятикратное бросание монеты можно рассматривать как упорядоченную последовательность букв, составленную из 10 повторяющихся элементов множества {О, Р}. Поэтому число всех исходов испытания равно числу *размещений с повторениями* $\overline{A_2^{10}} = 2^{10}$. Благоприятными для события *A* исходами будут последовательности, в которых буква О встречается 3 раза, соответственно буква Р — 7 раз. Их число равно числу *сочетаний* $C_{10}^3 = C_{10}^7 = 10!\,/\,(3!\cdot 7!) = (10\cdot 9\cdot 8)\,/\,3! = 120$. В частности, число благоприятных исходов в этом испытании можно посчитать с помощью формулы числа *перестановок с повторениями* $\overline{P}_{3,7} = 10!\,/\,(3!\cdot 7!) = C_{10}^3$. Таким образом, искомая вероятность:

$$\mathbf{p}(A) = C_{10}^3 / \overline{A_2^{10}} = 120 / 2^{10} = (15\cdot 2^3) / (2^{10}) = 15 / 128 \approx 0{,}12.$$

Пример. *Игральную кость бросают* 10 *раз. Какова вероятность события B* = {*грани, отвечающие числам* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *выпадут соответственно* 0, 1, 2, 4, 2, 1 *раз*}?

Число всех исходов испытания равно числу всех упорядоченных последовательностей цифр, составленных из 10 повторяющихся элементов множества {1, 2, 3, 4, 5, 6} — это число *размещений с повторениями* $\overline{A_6^{10}} = 6^{10}$. Благоприятными для события *B* исходами будут последовательности, в которых число 1 ни разу не встречается, а числа 2, 3, 4, 5, 6 встречаются соответственно 1, 2, 4, 2, 1 раз. Их число равно числу *перестановок с повторениями* $\overline{P}_{0,1,2,4,2,1} = \dfrac{(0+1+2+4+2+1)!}{0!\,1!\,2!\,4!\,2!\,1!} =$

$= 10!\,/\,(2!\cdot 4!\cdot 2!) = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 10$. Поэтому искомая вероятность:

$$\mathbf{p}(B) = \overline{P}_{0,1,2,4,2,1} / \overline{A_6^{10}} = \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 10}{6^{10}} = \frac{175}{6^7} \approx 0{,}0006.$$

Пример. *Пусть из совокупности, состоящей из n предметов, извлекаются с возвращением k предметов. Какова вероятность события S* = {*все предметы, составляющие выборку, окажутся различными*}?

В данной модели число всех исходов испытания равно числу *размещений с повторениями* $\overline{A_n^k} = n^k$, а число благоприятных исходов для события *S* равно числу *размещений* A_n^k. Отсюда искомая вероятность:

$$\mathbf{p}(S) = A_n^k / \overline{A_n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}.$$

Например, вероятность того, что наугад взятый телефонный номер, состоящий из пяти различных цифр, в том числе и начинающий с цифры 0, равна

$$A_{10}^{5} / \overline{A_{10}^{5}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} \approx 0{,}3.$$

Замечание. *Парадоксально, что весьма легкое определение классической вероятности, вызывающее ассоциацию* ***«вероятность — это дробь»*** *вызывает определенную трудность его понимания, когда начинают действовать с «дробями-вероятностями», совершенно не задумываясь о смысле этой «дроби».*

Рассмотрим, например, простейший вопрос: *Чему равна вероятность одновременного выпадения «орлов» или «решки» при подбрасывании двух монет*?

Множество всех исходов этого испытания {(О, О), (О, Р), (Р, О), (Р, Р)}. Вместо двукратного бросания монет можно было рассмотреть случайный *выбор с возвращением* двух элементов из множества {О, Р}. Благоприятных исходов для *события* A = {обе монеты выпадают одинаково — {О, О}, {Р, Р}}, поэтому искомая вероятность $\mathbf{p}(A) = 2/4 = 1/2$. Означает ли это, что если мы подбросим две монеты четыре раза, то на двух монетах выпадут одновременно «орлы» и «решки» точно два раза? Конечно, нет! Найденная вероятность означает, что если мы подбросим две монеты, например 1000 раз, то можно лишь ожидать, что монеты приблизительно в половине случаев выпадут интересующим нас образом.

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что вероятность появления слова ДВА, если наугад выбираются три карточки из пяти с буквами А, Б, В, Г, Д и располагаются в ряд в порядке появления, равна $1/A_5^3 = 1/(5{\cdot}4{\cdot}3) = 1/60$?

2. Верно ли, что вероятность доставания наудачу двух кубиков с гласными из ящика, в котором находится 15 одинаковых кубиков с 5 гласными и 10 согласными, равна $C_5^2 / C_{15}^2 = ((5{\cdot}4)/2) / ((15{\cdot}14)/2) = 2/21$?

3. Верно ли, что вероятность появления всех граней при шестикратном бросании игральной кости, равна $P_6 / \overline{A_6^6} = 6! / 6^6 = 10/648$?

Знакомство с основами вероятностного мышления необходимо каждому грамотному специалисту-филологу, но, прежде всего, будущему исследователю. Возможностям и путям использования точных методов в литературоведении посвящена книга главы «смоленской филологической школы», профессора В. С. Баевского «*Лингвистические, математические, семиотические и компьютерные модели в истории и теории литературы*» (М., 2001). Подводя итог истории литературы XX столетия и открывая перспективы исследований в XXI веке, автор исходит из убеждения, что ***нет такой сложной проблемы, в которой невозможно продвинуться с помощью математических методов***, прежде всего теории вероятностей и математической статистики, а также логики и компьютерного моделирования.

ДОПОЛНЕНИЕ
ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

В будущем цифры рассеют мрак.
Цифры не умира.
Только меняют порядок, как
телефонные номера.

Иосиф Бродский

В нашей жизни достаточно примеров вероятностных предрассудков, обусловленных вероятностной безграмотностью. Например, миллионы людей совершенно серьезно однозначно соотносят себя с одним из 12 знаков зодиака, произвольно толкуя предсказания астрологов, забывая при этом ошибочные и фиксируя в памяти лишь сбывшиеся. Примеры подобного рода можно многократно умножить, поскольку они каким-то образом связаны с ожиданиями и человеческой психологией.

Вполне традиционно представление о том, что «случайность» состоит, прежде всего, в отсутствии «закономерности». Создатель логического обоснования теории вероятностей на базе теории множеств и теории меры академик А. Н. Колмогоров писал: «*Применяя теорию вероятностей, мы не ограничиваемся отрицанием закономерности, а делаем из гипотез о случайности наблюдаемых явлений определенные положительные выводы*». ***Теория вероятностей*** обычно определяется как математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятность других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми.

Классическое определение вероятности исходит из предположения о равновозможности (или равновероятности) элементарных событий. Однако это предположение оправдывается не всегда. *Теория вероятностей в самом широком смысле как математическая дисциплина имеет дело с задачами вычисления вероятностей случайных событий, состоящих из совокупностей «элементарных» событий, вероятности которых известны или постулируются.* Правила вычисления вероятностей сложных событий подобны тем, которые употребляются для вычисления площадей и объемов в геометрии. Если вместо слова «событие» подставить слово «множество» и вместо слова «вероятность» — слово «площадь», то тогда задача сводится к сопоставлению множествам подходящих площадей, а это уже раздел *теории меры*, где слово «мера» означает площадь в применении к довольно сложным множествам.

Определение несовместных событий. *События, которые не могут произойти одновременно в рассматриваемом испытании, называются* ***несовместными****. События, которые в рассматриваемом испытании могут произойти одновременно, называют* ***совместными****.*

Заметим, что *если* $A \cap B = \varnothing$, *то события* A *и* B *несовместны*. Рассмотрим теперь утверждения, при помощи которых по вероятности одних случайных событий вычисляются вероятности других случайных событий. Простейшие из этих утверждений можно объединить в группу *теорем сложения*.

Утверждение. *Для несовместных событий* A *и* B *имеет место* ***теорема сложения вероятностей***

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B).$$

Доказательство. Проведем его для случая классической вероятности. Пусть рассматриваемое испытание имеет n равновозможных исходов. Если событию A благоприятствует m исходов, а событию B — k исходов, то $\mathbf{p}(A) = m/n$ и $\mathbf{p}(B) = k/n$. Поскольку события A и B несовместны, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то нет исходов, благоприятствующих одновременно событию A и событию B. Следовательно, по комбинаторному принципу сложения событию $A \cup B$ благоприятствует $m + k$ исходов и поэтому

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B),$$

т. е. *вероятность объединения* (*суммы*) *двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*.

Например, при бросании двух игральных костей *событие* $A = \{$выпало 5 очков$\}$ и *событие* $B = \{$выпало 10 очков$\}$ несовместны, т. е. $A \cap B = \varnothing$. Поэтому вероятность *события* $A \cup B = \{$выпало число очков, кратное 5$\}$ можно вычислить в силу предыдущего утверждения по формуле $\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B)$. Всего исходов в этом испытании — это число размещений с повторениями $\overline{A_6^2} = 36$. Благоприятных исходов для события A четыре — это выпадение в двух бросаниях следующих очков (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), а для события B три благоприятных исхода — это (4, 6), (6, 4), (5, 5). Поэтому $\mathbf{p}(A \cup B) = 4/36 + 3/36 = 7/36$.

Когда мы говорим, что *задачей математической теории вероятностей является нахождение одних случайных событий по вероятностям других случайных событий*, то при этом предполагается, что имеются некоторые исходные события, вероятности которых уже известны. Но откуда берутся вероятности исходных событий? Они берутся из тех наук, в рамках которых возникают решаемые задачи, и на этом этапе постановки задачи важны не математические, а профессиональные знания в той области науки, к которой относится вероятностная задача.

Сформулируем теперь более общее понимание вероятности чем-то, которое содержится в классическом определении. Поясним *сущность проблемы определения вероятности*. Речь идет о том, чтобы *приписать каждому событию, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания, число, т. е. его вероятность*. С помощью этого числа должны характеризоваться шансы события быть реализованы при проведении испытания. Еще *Цицерон* говорил: «*Жизнью правит случай, а не мудрость*». Попробуем формализовать это понимание происходящих событий с помощью следующей модели.

Проводится некоторое испытание, имеющее n случайных исходов, т. е. допускающее n элементарных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. По каким-либо соображениям, например, лингвистическим, физическим или даже чисто субъективным, каждому элементарному событию A_i поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число $\mathbf{p}(A_i)$, называемое *вероятностью элементарного события A_i*, причем эти числа выбраны так, что для их суммы выполняется равенство:

$$\mathbf{p}(A_1) + \mathbf{p}(A_2) + \ldots + \mathbf{p}(A_n) = 1.$$

Вероятностью события *A, составленного из некоторых элементарных событий A_i, называется сумма вероятностей этих элементарных событий*:

$$\mathbf{p}(A) = \sum_i \mathbf{p}(A_i),$$

где суммирование распространяется на все элементарные события, содержащиеся в событии A. В частности, для *достоверного события* $\boldsymbol{U} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ его вероятность в силу данного определения равна $\mathbf{p}(\boldsymbol{U}) = \mathbf{p}(A_1) + \mathbf{p}(A_2) + \ldots + \mathbf{p}(A_n) = 1$, а *невозможное событие* $\varnothing$ имеет вероятность 0, $\mathbf{p}(\varnothing) = 0$, поскольку такое событие не содержит ни одного элементарного события.

Советский математик Андрей Николаевич Колмогоров показал, что теорию вероятностей можно развивать на основе аксиом подобно обычной математической теории. В общем случае ***основные свойства вероятности*** *случайного события, которые принимаются в качестве* ***аксиоматики Колмогорова*** таковы.

1. *Аксиома неотрицательности*. Для любого события A его вероятность $\mathbf{p}(A)$ есть неотрицательное число:

$$\mathbf{p}(A) \geq 0.$$

2. *Аксиома нормированности*. Вероятность достоверного события $\boldsymbol{U}$ равна 1:

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{U}) = 1.$$

3. *Аксиома аддитивности*. Вероятность объединения (суммы) двух несовместных событий A и B равна сумме их вероятностей:

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B).$$

Заслуга академика А. Н. Колмогорова состоит не только в том, что он внес «полную ясность в формальное строение теории вероятностей», но и в том, что для этого не понадобилось конструировать какую-либо новую систему формальных понятий, определяемых с помощью аксиом, как это пытались сделать его предшественники. Он сумел использовать для аксиоматизации теории вероятностей готовый раздел математики, называемый «теория меры».

Замечание. *Из основных свойств вероятности следует, что если* $A \subset B$, *то* $\mathbf{p}(A) \leq \mathbf{p}(B)$ *и для каждого события* A *имеем* $0 \leq \mathbf{p}(A) \leq 1$.

Действительно, если $A \subset B$, то тогда $B = A \cup (B \setminus A)$ (см. раздел 1.3), где события A и $B \setminus A$ несовместны, так как $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Поэтому в силу аксиомы аддитивности $\mathbf{p}(B) = \mathbf{p}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B \setminus A)$, откуда $\mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A) = \mathbf{p}(B \setminus A)$. А так как вероятность любого события неотрицательна, то $\mathbf{p}(B \setminus A) \geq 0$ и, следовательно, $\mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A) \geq 0$ или $\mathbf{p}(A) \leq \mathbf{p}(B)$. Второе утверждение следует из первого и того, что $A \subset \boldsymbol{U}$, тогда $\mathbf{p}(A) \leq \mathbf{p}(\boldsymbol{U})$. Поскольку $\mathbf{p}(\boldsymbol{U}) = 1$ и $\mathbf{p}(A) \geq 0$, то из предыдущего неравенства получаем $0 \leq \mathbf{p}(A) \leq \mathbf{p}(\boldsymbol{U}) = 1$, т. е. $0 \leq \mathbf{p}(A) \leq 1$.

Напомним, что в теории вероятности два события называются несовместными, если они не могут произойти вместе и тогда вероятность объединения (суммы) несовместных событий равна сумме вероятностей. Немецкий математик *Рихард Мизес* придумал следующий *парадокс с теннисистом*.

Парадокс Мизеса. *Пусть некий теннисист может поехать на турнир либо в Москву, либо в Лондон, причем турниры происходят одновременно. Вероятность того, что он займет первое место в Москве, равна* 9/10, *а в Лондоне* — 6/10, *конечно, если он туда поедет. Чему равна вероятность того, что он займет где-либо первое место?*

Решение: поскольку *событие* A = {выигрыш турнира в Москве} и *событие* B = {выигрыш в Лондоне} несовместны, то вероятность *события* $A \cup B$ = {выигрыш турнира в Москве или Лондоне} равна

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) = 9/10 + 6/10 = 15/10 = 3/2.$$

Это противоречит согласно предыдущему замечанию тому, что вероятность любого события, в том числе и *события* $A \cup B$, не превосходит числа 1, т. е. $0 \le \mathbf{p}(A \cup B) \le 1$. Почему?

Несмотря на очевидную нелепость этого рассуждения, *в рамках аксиоматики Колмогорова парадокс с теннисистом решается просто*: вероятности 0,9 и 0,6 относятся к разным пространствам элементарных событий, поэтому сложение вероятностей в данном случае не имеет смысла.

Пример. *Студент филологического факультета сдаст зачет по курсу **«Основы высшей математики»**, если по пятибалльной системе получит оценку не ниже* 4 *баллов. Какова вероятность сдачи зачета, если известно, что студент филфака получает оценку* 5 *с вероятностью* 1/3 *и оценку* 4 *с вероятностью* 1/2 ?

Вероятности получения оценок 5 и 4 по курсу «Основы высшей математики» определены из опыта проведения зачетов в предыдущие годы. В этом испытании *событие* A = {на зачете студент филфака получил оценку 5} и *событие* B = {на зачете студент филфака получил оценку 4} несовместны. Поэтому в силу аксиомы аддитивности вероятность интересующего нас *события* $A \cup B$ = {зачет студент филфака сдал} равна: $\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) = 1/3 + 1/2 = 5/6$.

Формулу для вероятности объединения двух несовместных событий можно обобщить на любое число попарно несовместных событий.

Замечание. *Если события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ***попарно несовместны****, т. е. любые два события не могут произойти одновременно, то тогда для них справедливо равенство:*

$$\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbf{p}(A_1) + \mathbf{p}(A_2) + \ldots + \mathbf{p}(A_n).$$

Покажем, например, как доказать это равенство для $n = 3$. Напомним, что оно верно для двух событий, т. е. $\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B)$. В силу свойства ассоциативности операции объединения множеств (см. раздел 1.4) объединение трех событий A, B и C можно записать в виде объединения двух событий, т. е. $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$. По *свойству дистрибутивности* (см. раздел 1.4) имеем $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, так как события A, B, C попарно несовместны и их пересечения равны $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$. Следовательно, события $A \cup B$ и C несовместны и поэтому, применяя дважды формулу для вероятности объединения событий, получим

$$\mathbf{p}(A \cup B \cup C) = \mathbf{p}((A \cup B) \cup C) = \mathbf{p}(A \cup B) + \mathbf{p}(C) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) + \mathbf{p}(C),$$

т. е.

$$\mathbf{p}(A \cup B \cup C) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) + \mathbf{p}(C).$$

Пример. *В лотерее* 10 000 *билетов и установлено* 10 *выигрышей по* 100 000 *рублей,* 40 *выигрышей по* 50 000 *рублей и* 1000 *выигрышей по* 500 *рублей. Какова вероятность выигрыша наудачу по одному билету?*

Пусть *событие* A_1 = {выигрыш составил 100 000 рублей}, *событие* A_2 = {выигрыш равен 50 000 рублей} и *событие* A_3 = {выигрыш всего лишь 500 рублей}. Выигрыш по одному билету — *событие* $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, причем события A_i попарно несовместны. Воспользовавшись классической вероятностью этих событий $\mathbf{p}(A_1) = 10/10\,000$, $\mathbf{p}(A_2) = 40/10\,000$ и $\mathbf{p}(A_3) = 1000/10\,000$, получим в силу последнего замечания, что $\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbf{p}(A_1) + \mathbf{p}(A_2) + \mathbf{p}(A_3) = 0{,}001 + 0{,}004 + 0{,}1 = 0{,}105$.

С античных времен известны слова и предложения, которые читаются одинаково как слева направо, так и справа налево. Это ***палиндромы*** (или *перевертыши*), что в переводе с греческого означает «бегущие назад», «возвращающиеся». Они породили особый литературный жанр — *палиндроматику*. Каждый палиндромист, переворачивая слова, неизбежно делает множество «открытий», приходя к таким палинромам-однострокам, как «*город дорог*», «*лапоть топал*», «*искать такси*». Палиндрому отдавали дань *Гаврила Державин*, *Афанасий Фет*, *Валерий Брюсов*, а увлекавшийся математикой поэт *Велимир Хлебников* написал целое стихотворение «*Перевертень*», где все строчки можно прочитать в обратном порядке. Но *палиндромы — это не только* «*урна жанру*» и не просто литературное развлечение. Понимание законов их образования способствует появлению новых идей в информационных технологиях.

Первый неожиданный результат был получен при частотном анализе распределения слов по числу букв. Оказалось, что почти все слова-палиндромы русского языка насчитывают нечетное число букв, от 1 до 11. Ничего подобного нет среди обычных, т. е. «несимметричных», слов. «Закон нечетности числа букв» распространяется исключительно на буквенно-симметричные словоформы, т. е. на палиндромы. Однако, как утверждает Б. Горобец в статье «*Закон нечетности числа букв в русских палиндромах*» (Наука и жизнь. М., 2004), это утверждение требует более строгой математико-лингвистической проверки путем подсчета слов со сдвоенным центром, имеющих как четное, так и нечетное число букв.

Простейшее лингвистическое, хотя и явно недостаточное, объяснение *события* A = {частота симметричных слов с четным и нечетным числом букв в данной выборке разного порядка} можно дать, рассмотрев *противоположное событие* $\overline{A}$ = {частота симметричных слов с четным и нечетным числом букв в данной выборке одного порядка}. Однако статистическая вероятность противоположного события $\overline{A}$ очень мала, так как среди симметричных слов с четным числом букв существовали бы слова со сдвоенным центром в виде двух одинаковых гласных или согласных, но *палиндромов среди них почти нет*, хотя таких слов довольно много: *веер*, *леер*, *пиит*, *баллон*, *галлон*, *зуммер*, *перрон* и т. д.

Установим теперь полезную для приложений *связь между вероятностями исходного и противоположного события, т. е. между событием A и его дополнением* $\overline{A} = \boldsymbol{U} \setminus A$. Например, при бросании игральной кости сумма вероятностей *события* А = {выпадет шестерка} и *противоположного события* $\overline{A}$ = {шестерка не выпадет} равна единице.

Замечание. *Из основных свойств вероятности следует, что для каждого события A верно равенство*

$$\mathbf{p}(A) = 1 - \mathbf{p}(\overline{A}).$$

Действительно, так как $A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U}$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, т. е. события A и $\overline{A}$ несовместны, и $\mathbf{p}(\boldsymbol{U}) = 1$, то $1 = \mathbf{p}(\boldsymbol{U}) = \mathbf{p}(A \cup \overline{A}) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(\overline{A})$. Из этого равенства следует, что $\mathbf{p}(A) = 1 - \mathbf{p}(\overline{A})$. В частности, так как дополнение пустого множества совпадает с универсальным множеством $\boldsymbol{U}$, то тогда $\mathbf{p}(\varnothing) = 1 - \mathbf{p}(\boldsymbol{U}) = 1 - 1 = 0$.

Рассмотрим частный случай последнего примера из раздела 2.4, известный как ***задача о днях рождения***.

Пример. *В группе обучается* 23 *студента. Какова вероятность того, что хотя бы у двух студентов дни рождения совпадают?*

Определение дней рождения у 23 случайно объединенных в группу студентов можно заменить случайным выбором с возвращением 23 элементов из множества дней в году, т. е. множества {1, 2, …, 365}. Пусть событие B = {хотя бы у двух студентов дни рождения совпадают}. Будем искать вероятность противоположного события, состоящего в том, что в группе нет студентов, у которых дни рождения совпадают. Противоположное событие $\overline{B}$, т. е. все дни рождения студентов группы различны, обозначим через S. Так как по предыдущему замечанию $\mathbf{p}(B) = 1 - \mathbf{p}(\overline{B})$ и $\overline{B} = S$, то $\mathbf{p}(B) = 1 - \mathbf{p}(S)$. Из упомянутого выше примера следует, что $\mathbf{p}(S) = A_n^k / \overline{A_n^k}$ для $n = 365$ и $k = 23$, поэтому

$$\mathbf{p}(S) = \frac{365 \cdot 364 \cdot ... \cdot 341}{365^{23}} = \frac{364 \cdot ... \cdot 341}{365^{22}} = (1-\frac{1}{365})\cdot(1-\frac{2}{365})\cdot \ldots \cdot(1-\frac{22}{365}),$$

откуда следует, что вероятность искомого события B равна:

$$\mathbf{p}(B) = 1 - (1-\frac{1}{365})\cdot(1-\frac{2}{365})\cdot\ \ldots\ \cdot(1-\frac{22}{365}) \approx 0{,}507.$$

Заметим, что у группы из 22 студентов вероятность того, что, по крайней мере, у двух студентов дни рождения совпадают, равна 0,475, т. е. меньше 1/2, а для 23 студентов уже больше 1/2.

Пример. *Рассмотрим испытание, в котором бросается две монеты. Чему равна вероятность выпадения хотя бы одного орла?*

Пусть *событие* A = {выпал орел при подбрасывании первой монеты}, а *событие* B = {выпал орел при подбрасывании второй монеты}. Требуется найти вероятность *события* $A \cup B$ = {выпал хотя бы один орел при подбрасывании двух монет}. Легко видеть, что $\mathbf{p}(A) = 1/2$, $\mathbf{p}(B) = 1/2$, но $\mathbf{p}(A \cup B) \neq 1$, так как событие $A \cup B$ не является достоверным. В рассматриваемом случае $\mathbf{p}(A \cup B) \neq \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B)$, поскольку события A и B не являются несовместными, т. е. они совместны и $A \cap B \neq \varnothing$. При бросании двух монет могут произойти следующие 4 события: (О, О), (О, Р), (Р, О), (Р, Р). Благоприятными для события $A \cup B$ являются 3 события, следовательно, $\mathbf{p}(A \cup B) = 3/4$.

Опишем эту ситуацию в общем случае. Пусть n — число всех равновозможных элементарных событий, которые попарно несовместны в данном испытании, m — число элементарных событий, благоприятных событию A, а k — число элементарных событий, благоприятных событию B. Допустим, что события A и B совместны, т. е. могут происходить одновременно, и среди $m + k$ событий содержится l событий, благоприятных событию A и событию B. По определению классической вероятности $\mathbf{p}(A) = m/n$, $\mathbf{p}(B) = k/n$ и $\mathbf{p}(A \cap B) = l/n$. Нетрудно видеть, что событию $A \cup B$ благоприятствует $m + k - l$ равновозможных элементарных событий, поэтому

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \frac{m + k - l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B).$$

В частности, в рассмотренном примере с монетами, где $\mathbf{p}(A) = 1/2$, $\mathbf{p}(B) = 1/2$, $\mathbf{p}(A \cap B) = 1/4$, имеем $\mathbf{p}(A \cup B) = 1/2 + 1/2 - 1/4 = 3/4$.

Для полноты изложения выведем формулу для вероятности объединения двух событий в общем случае, т. е. не обязательно несовместных. При этом мы будем опираться на некоторые соотношения из теории множеств.

Утверждение. *Для любых событий A и B справедлива* ***формула для вероятности объединения (суммы) событий*** *вида:*

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B).$$

Доказательство. Если события A и B несовместны, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то тогда $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(\varnothing) = 0$ и доказываемое равенство примет вид $\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B)$. Поэтому необходимо исследовать случай совместных событий A и B, т. е. когда $A \cap B \neq \varnothing$. Рассмотрим равенства для множеств A, B и $A \cup B$ (рис. 2.5) следующего вида:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B), \quad B = (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

Они были рассмотрены в разделе 1.3 «Операции над множествами» первой главы.

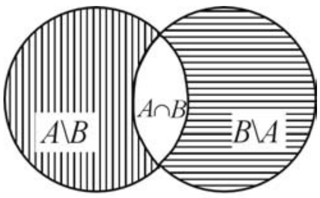

Рис. 2.5

Напомним, что пересечение множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$ равно пустому множеству (см. раздел 1.3). Покажем, что пересечение множеств $A \cap B$ и $A \setminus B$, а также $A \cap B$ и $B \setminus A$, тоже равно пустому множеству. Для этого воспользуемся свойством дистрибутивности пересечения относительно разности для множеств, рассмотренным в разделе 1.4 «Основные свойства операций над множествами», а именно:

$$C \cap (D \setminus E) = (C \cap D) \setminus (C \cap E).$$

Полагая $C = A \cap B$, $D = A$ и $E = B$, получим следующее равенство

$$(A \cap B) \cap (A \setminus B) = (A \cap B \cap A) \setminus (A \cap B \cap B) = (A \cap B) \setminus (A \cap B) = \varnothing.$$

Аналогично, полагая $C = A \cap B$, $D = B$ и $E = A$, получим, что $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Таким образом, $A \setminus B$, $A \cap B$ и $B \setminus A$ — попарно непересекающиеся множества. Поэтому по аксиоме аддитивности имеем:

$$\mathbf{p}(A) = \mathbf{p}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = \mathbf{p}(A \setminus B) + \mathbf{p}(A \cap B),$$
$$\mathbf{p}(B) = \mathbf{p}((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = \mathbf{p}(B \setminus A) + \mathbf{p}(A \cap B),$$

наконец

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)) =$$
$$\mathbf{p}(A \setminus B) + \mathbf{p}(A \cap B) + \mathbf{p}(B \setminus A).$$

Непосредственно из этих равенств следует, что

$$\mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) = (\mathbf{p}(A \setminus B) + \mathbf{p}(A \cap B)) + (\mathbf{p}(B \setminus A) + \mathbf{p}(A \cap B)) =$$
$$= (\mathbf{p}(A \setminus B) + \mathbf{p}(A \cap B) + \mathbf{p}(B \setminus A)) + \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A \cap B) + \mathbf{p}(A \cap B).$$

Откуда получаем искомое равенство вида $\mathbf{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbf{p}(\mathrm{A}) + \mathbf{p}(\mathrm{B}) - \mathbf{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, т. е. *вероятность объединения (суммы) любых двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления.*

Пример. *Бросают две игральные кости. Какова вероятность выпадения хотя бы одной шестерки?*

Пусть *событие* $A = \{$выпадение 6 на первой кости$\}$ и *событие* $B = \{$выпадение 6 на второй кости$\}$. Вероятность $\mathbf{p}(A \cup B)$ можно вычислить в силу предыдущего утверждения по формуле $\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B)$. Очевидно, что $\mathbf{p}(A) = 1/6$, $\mathbf{p}(B) = 1/6$, $\mathbf{p}(A \cap B) = 1/6^2 = 1/36$, поэтому $\mathbf{p}(A \cup B) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$.

Например, для построения алгоритма работы *вероятностного автомата, распознающего устную речь*, приходится вычислять вероятность совпадения хотя бы одной из словоформ обрабатываемого текста с соответствующей лексемой, заданной в словаре автомата.

Чему равна вероятность того, что хотя бы одно из двух выбранных слов текста будет местоимением ОН? Обозначим через *событие* $A = \{$первое появление местоимения ОН$\}$, а через *событие* $B = \{$второе появление местоимения ОН$\}$. События A и B совместны, так как можно одновременно извлечь слово ОН из первого и второго отрывков. Согласно данным *частотного словаря* статистическая вероятность местоимения ОН равна 0,0099. Следовательно, в силу последнего утверждения

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B) =$$
$$= 0{,}0099 + 0{,}0099 - 0{,}0099 \cdot 0{,}0099 \approx 0{,}02.$$

Формулу для вероятности объединения двух совместных событий можно обобщить на объединение любого числа событий.

Замечание. *Для случайных событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *справедлива следующая* ***формула для вероятности объединения (суммы) событий****:*

$$\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} \mathbf{p}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{p}(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbf{p}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathbf{p}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Покажем, например, как доказать это равенство для $n = 3$, которое в этом случае для событий A, B и C примет вид

$$\mathbf{p}(A \cup B \cup C) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) + \mathbf{p}(C) -$$
$$- \mathbf{p}(A \cap B) - \mathbf{p}(A \cap C) - \mathbf{p}(B \cap C) + \mathbf{p}(A \cap B \cap C).$$

Воспользуемся свойством ассоциативности операции объединения множеств (см. раздел 1.4) и сведем объединение трех случайных событий к объединению двух событий, т. е. $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$. Используя последнее утверждение о вероятности объединения двух событий и свойство дистрибутивности, получим

$$\mathbf{p}(A \cup B \cup C) = \mathbf{p}((A \cup B) \cup C) = \mathbf{p}(A \cup B) + \mathbf{p}(C) - \mathbf{p}((A \cup B) \cap C) =$$
$$= \mathbf{p}(A \cup B) + \mathbf{p}(C) - \mathbf{p}((A \cap C) \cup (B \cap C)).$$

Применяя утверждение о вероятности объединения дважды для событий A и B, а также для событий $A \cap C$ и $B \cap C$, учитывая, что $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, окончательно получим

$$\mathbf{p}(A \cup B \cup C) = [\mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B)] + \mathbf{p}(C) -$$
$$- [\mathbf{p}(A \cap C) + \mathbf{p}(B \cap C) - \mathbf{p}((A \cap C) \cap (B \cap C))] =$$
$$= \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) + \mathbf{p}(C) - \mathbf{p}(A \cap B) - \mathbf{p}(A \cap C) - \mathbf{p}(B \cap C) + \mathbf{p}(A \cap B \cap C).$$

В качестве иллюстрации общей формулы для вероятности объединения любого числа событий рассмотрим следующий пример, известный как ***задача о совпадениях***, в случае, когда $\mathbf{p}(A_1) = \mathbf{p}(A_2) = \ldots = \mathbf{p}(A_n)$, $\mathbf{p}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{p}(A_1 \cap A_3) = \ldots = \mathbf{p}(A_{n-1} \cap A_n)$, и т. д.

Пример. *На отдельных одинаковых карточках написаны числа* 1, 2, …, n, *которые затем раскладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что хотя бы одно из чисел окажется на месте с таким же номером?*

Под раскладыванием карточек в случайном порядке будем понимать все возможные перестановки карточек как равновозможные исходы. Поэтому число всех исходов испытания равно числу перестановок $P_n = n!$. Пусть *событие* A_i = {карточка с номером i окажется на месте с номером i}, тогда *событие* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ = {хотя бы у одной карточки ее номер совпадет с номером места}. Для нахождения вероятности интересующего нас события в силу предыдущего замечания необходимо вычислить вероятности $\mathbf{p}(A_i)$, $\mathbf{p}(A_i \cap A_j)$, …, $\mathbf{p}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$. Так как в событии A_i карточка с номером i находится на месте с номером i, а остальные $n-1$ карточек могут как угодно раскладываться на оставшихся $n-1$ местах, то тогда число благоприятных исходов для события A_i равно числу перестановок $P_{n-1} = (n-1)!$. Так как в событии

$A_i \cap A_j$ у двух карточек их номера i и j совпали с соответствующими номерами мест, то число благоприятных исходов для события $A_i \cap A_j$ равно числу перестановок $P_{n-2} = (n-2)!$ и т. д., когда, наконец, для события $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ останется единственный благоприятный исход. Поэтому для вероятностей соответствующих событий:

$$\mathbf{p}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!},\quad \mathbf{p}(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!},\quad \mathbf{p}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!}, \ldots,$$

$$\mathbf{p}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{n!}.$$

Используя формулу для вероятности объединения событий $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ из последнего замечания и приводя в ней подобные члены, получим

$$\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Заметим, что для больших n вероятность $\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \approx 0{,}63$.

Известны различные шуточные варианты этой задачи. Вот один из них: *Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо из трех будет получено своим адресатом, если адреса на конвертах написаны в случайном порядке?*

Искомая вероятность для $n = 3$ равна:

$$\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = C_3^1 \frac{(3-1)!}{3!} - C_3^2 \frac{(3-2)!}{3!} + C_3^3 \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Мы определили ранее вероятность события как некоторую числовую характеристику возможности его наступления. Такую вероятность называют ***безусловной вероятностью***, подчеркивая этим, что *она не зависит ни от каких дополнительных условий, кроме условий испытания*. В ряде случаев приходится рассматривать вероятность некоторого случайного события A, которая зависит от того, произошло или не произошло другое случайное событие B. В таком случае говорят, что *событие A зависит от события B*, а вероятность появления события A называют ***условной вероятностью***. Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, *обозначается* $\mathbf{p}(A \mid B)$, а если событие B не произошло, то *обозначается* $\mathbf{p}(A \mid \overline{B})$, где $\overline{B} = \boldsymbol{U} \setminus B$.

Прежде чем давать точное определение условной вероятности, рассмотрим следующий пример. Пусть из урны, в которой находится 10 белых и 5 черных шаров, вынимается наудачу один за другим 2 шара. Рассмотрим *событие* $B = \{$первый вынутый шар белый$\}$ и *событие* $A = \{$второй вынутый шар белый$\}$. Очевидно, что $\mathbf{p}(B) = 10/15 = 2/3$. Вероятность события A в этом испытании зависит от того, произошло событие B или противоположное событие $\overline{B}$. Если событие B произошло, то среди оставшихся 14 шаров только 9 белых и поэтому вероятность события A будет равна 9/14. Если событие B не произошло, а произошло противоположное событие $\overline{B}$, т. е. первый шар оказался черным, то среди оставшихся 14 шаров будет 10 белых и поэтому вероятность события A в этом случае равна $10/14 = 5/7$. Таким образом, вероятность события A зависит от того, произошло или не произошло событие B, т. е. это условная вероятность и $\mathbf{p}(A \mid B) = 9/14$, $\mathbf{p}(A \mid \overline{B}) = 5/7$.

Пример. *Пусть множество элементарных событий состоит из n равновозможных элементарных событий, событию A благоприятствует m исходов испытания, событию B — l исходов и событию $A \cap B$ — r исходов. Найдем условные вероятности* $\mathbf{p}(A \mid B)$ *и* $\mathbf{p}(B \mid A)$.

Понятно, что $r \le m$ и $r \le l$. Заметим, что $\mathbf{p}(A) = \frac{m}{n} > 0$, $\mathbf{p}(B) = \frac{l}{n} > 0$, $\mathbf{p}(A \cap B) = \frac{r}{n}$. Если произошло событие B, то произошло одно из l элементарных событий, событие A произойдет только тогда, когда произойдет одно из элементарных событий, составляющих событие $A \cap B$. Поэтому

$$\mathbf{p}(A \mid B) = \frac{r}{l} = \frac{r/n}{l/n} = \frac{\mathbf{p}(A \cap B)}{\mathbf{p}(B)}.$$

Аналогично показывается, что

$$\mathbf{p}(B \mid A) = \frac{r}{m} = \frac{r/n}{m/n} = \frac{\mathbf{p}(A \cap B)}{\mathbf{p}(A)}.$$

В частности, на основании последних формул можно записать, что

$$(A \cap B) = \mathbf{p}(B)\mathbf{p}(A \mid B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B \mid A).$$

В этом примере рассмотрен промежуточный случай, когда $A \cap B \ne \varnothing$, т. е. когда *события совместны*. Рассмотрим более простые случаи. Когда $A \cap B = \varnothing$, т. е. *события несовместны*, то ясно, что если событие B произошло, то тогда событие A произойти не может, следовательно, его условная вероятность равна 0, так как

$$\mathbf{p}(A \mid B) = \mathbf{p}(A \cap B) \,/\, \mathbf{p}(B) = 0 \,/\, \mathbf{p}(B) = 0.$$

Другой простой случай. Когда справедливо включение $B \subset A$, тогда если событие B произошло, то событие A тоже произошло, т. е. в этой ситуации событие A играет роль достоверного события и его условная вероятность равна 1, так как

$$\mathbf{p}(A \mid B) = \mathbf{p}(A \cap B) \,/\, \mathbf{p}(B) = \mathbf{p}(B) \,/\, \mathbf{p}(B) = 1.$$

Пример. *Грани игральной кости* 1, 2, 3 *заклеены красной бумагой, а грани* 4, 5, 6 — *черной. При бросании кости выпала черная грань. Какова вероятность того, что на этой грани стоит четное число?*

Пусть в этом испытании *событие* $A = \{$выпало четное число очков$\}$ и *событие* $B = \{$выпало более чем 3 очка$\}$. Тогда $\mathbf{p}(B) = 3/6 = 1/2$ и $\mathbf{p}(A \cap B) = 2/6 = 1/3$. Поэтому в силу предыдущего примера условная вероятность $\mathbf{p}(A \mid B)$ равна $\mathbf{p}(A \mid B) = (1/3)/(1/2) = 2/3$. Для сравнения отметим, что безусловная вероятность события A равна $\mathbf{p}(A) = 3/6 = 1/2$.

Определение условной вероятности. *Если вероятность события B не нулевая,* $\mathbf{p}(B) > 0$*, то* ***условной вероятностью*** *события A при условии, что произошло событие B, называют число*

$$\mathbf{p}(A \mid B) = \frac{\mathbf{p}(A \cap B)}{\mathbf{p}(B)}.$$

Отметим, что поскольку вероятность случайного события B величина неотрицательная, т. е. $\mathbf{p}(B) \geq 0$, то в определении условной вероятности $\mathbf{p}(A \mid B)$ *условие* $\mathbf{p}(B) > 0$ *означает*, *что* $\mathbf{p}(B) \neq 0$.

В частности, из этого определения следует, что

$$\mathbf{p}(A \mid \overline{B}) = \mathbf{p}(A \cap \overline{B}) \,/\, \mathbf{p}(\overline{B}).$$

Например, при бросании игральной кости *событие* $A = \{$выпало простое число очков$\}$ и *событие* $B = \{$число выпавших очков четно$\}$ совместны, $A \cap B \neq \varnothing$ и $\mathbf{p}(B) > 0$. Поэтому можно вычислить условную вероятность $\mathbf{p}(A \mid B)$. Так как событию B благоприятствуют три равновозможных исхода опыта, т. е. выпадение трех чисел 2, 4, 6, из них событию A благоприятствует только выпадение числа 2, т. е. *событие* $A \cap B$ — это выпадение одного числа 2, то тогда условная вероятность $\mathbf{p}(A \mid B) = 1/3$. Кроме того, так как событию $\overline{B}$ благоприятствует выпадение трех нечетных чисел 1, 3, 5, а из этих выпадений событию A благоприятствует только выпадение чисел 3 и 5, т. е. *событие* $A \cap \overline{B}$ — это выпадение чисел 3 и 5, поэтому условная вероятность равна $\mathbf{p}(A \mid \overline{B}) = 2/3$.

Замечание*. Если событию B благоприятствуют l равновозможных исходов испытания и r из них благоприятствуют событию A, то тогда условную вероятность* $\mathbf{p}(A \mid B)$ *можно вычислить по формуле*

$$\mathbf{p}(A \mid B) = \frac{r}{l}.$$

Это равенство, по существу, было получено в примере перед определением условной вероятности. Действительно, если в рассматриваемом испытании n равновозможных исходов, то в силу заданных условий $\mathbf{p}(B) = l/n$ и $\mathbf{p}(A \cap B) = r/n$. Тогда по определению условной вероятности справедливо равенство $\mathbf{p}(A \mid B) = (r/n) / (l/n) = r/l$.

Пример. *Из колоды игральных карт вынимают наугад одну карту, которая оказалась черной масти. Чему равна вероятность того, что вынута карта туз?*

Пусть в этом испытании *событие* $A = \{$вынут туз$\}$, а *событие* $B = \{$вынута карта черной масти$\}$. Событию B благоприятствуют 18 исходов этого испытания, из них событию A благоприятствуют 2 исхода. Следовательно, искомая вероятность равна $\mathbf{p}(A \mid B) = 2/18 = 1/9$.

Для большей ясности укажем, что $\mathbf{p}(A)$ и $\mathbf{p}(A \mid B)$ определяют вероятности события A по отношению к *двум разным пространствам элементарных событий*. Если в первом испытании это, например, универсальное множество $\boldsymbol{U}$, то во втором испытании таким пространством является множество B, т. е. подмножество множества $\boldsymbol{U}$, так как $B \subset \boldsymbol{U}$. Событиями во втором испытании служат пересечения событий из первого испытания с множеством B, а соответствующая им вероятность находится путем деления вероятности события $A \cap B$ в первом испытании, т. е. $\mathbf{p}(A \cap B)$, на вероятность $\mathbf{p}(B)$. В принципе *условная вероятность* не отличается от понятия *вероятность.* На самом деле, вероятность любого события зависит от некоторых условий, при которых рассматривается его наступление или не наступление, а если условия испытания изменились, то, естественно, меняется и вероятность. Поэтому все аксиомы вероятностей будут справедливы и для условных вероятностей $\mathbf{p}(A \mid B)$.

Замечание. *В формуле* $\mathbf{p}(A \mid B)$ *выражение, стоящее в скобках, то есть символ* $A \mid B$*, не обозначает какого-либо события и отдельно не употребляется.*

Из определения условной вероятности и основных свойств вероятности случайного события непосредственно следуют ***основные свойства условной вероятности***:

1. $\mathbf{p}(A \mid B) \geq 0$ для любого события A при условии, что произошло событие B;

2. $\mathbf{p}(\boldsymbol{U} \mid B) = 1$ для достоверного события $\boldsymbol{U}$ при условии, что произошло событие $B \subset \boldsymbol{U}$;

3. $\mathbf{p}((A \cup B) \mid D) = \mathbf{p}(A \mid D) + \mathbf{p}(B \mid D)$ для любых несовместных событий A и B, т. е. $A \cap B = \varnothing$, при условии, что произошло событие D.

Всегда $0 \leq \mathbf{p}(A \mid B) \leq 1$, в частности, $\mathbf{p}(A \mid B) = 0$, если $A \cap B = \varnothing$, т. е. $A \cap B$ — невозможное событие, и $\mathbf{p}(A \mid B) = 1$, если $B \subset A$.

Замечание. *Если события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несовместны, т. е.* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то тогда для них справедлива* ***формула для условной вероятности объединения (суммы) событий***:

$$\mathbf{p}((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\mathrm{n}) \mid D) = \mathbf{p}(A_1 \mid D) + \mathbf{p}(A_2 \mid D) + \ldots + \mathbf{p}(A_\mathrm{n} \mid D).$$

Покажем, например, как проверить равенство для $n = 2$, т. е. докажем третье свойство условной вероятности:

$$\mathrm{p}((A \cup B) \mid D) = \mathbf{p}(A \mid D) + \mathbf{p}(B \mid D)$$

при условии, что $A \cap B = \varnothing$. Из последнего условия следует, что $(A \cap D) \cap (B \cap D) = \varnothing$. В силу свойства дистрибутивности операции пересечения относительно операции объединения множеств (см. раздел 1.4), $(A \cup B) \cap D = (A \cap D) \cup (B \cap D)$, а так как события $A \cap D$ и $B \cap D$ несовместны, то $\mathbf{p}((A \cap D) \cup (B \cap D)) = \mathbf{p}(A \cap D) + \mathbf{p}(B \cap D)$. Поэтому по определению условной вероятности имеем

$$\mathbf{p}((A \cup B) \mid D) = \frac{\mathbf{p}((A \cup B) \cap D)}{\mathbf{p}(D)} = \frac{\mathbf{p}((A \cap D) \cup (B \cap D))}{\mathbf{p}(D)} =$$
$$= \frac{\mathbf{p}(A \cap D) + \mathbf{p}(B \cap D)}{\mathbf{p}(D)} = \mathbf{p}\ (A \mid D) + \mathbf{p}(B \mid D).$$

Рассмотрим, как связаны условные вероятности *противоположных событий*, т. е. между *событием* A и *его дополнением* $\overline{A} = \boldsymbol{U} \setminus A$.

Замечание. *Из основных свойств условной вероятности следует, что для каждого события* A *при условии, что произошло событие* $B \subset \boldsymbol{U}$ *с вероятностью* $\mathbf{p}(B) > 0$, *верно равенство:*

$$\mathbf{p}(A \mid B) = 1 - \mathbf{p}(\overline{A} \mid B).$$

Действительно, $A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U}$ и $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Из последнего равенства следует, что $((A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B)) = \varnothing$. Кроме того, для достоверного события $\boldsymbol{U}$ условная вероятность $\mathbf{p}(\boldsymbol{U} \mid B) = 1$. Поэтому по определению условной вероятности и в силу свойства дистрибутивности операций пересечения относительно операции объединения (см. раздел 1.4) имеем

$$1 = \mathbf{p}(\mathbf{U} \mid B) = \mathbf{p}((A \cup \overline{A}) \mid B) = \mathbf{p}((A \cup \overline{A}) \cap B) \,/\, \mathbf{p}(B) =$$
$$= \mathbf{p}((A \cap B) \cup \mathbf{p}(\overline{A} \cap B)) \,/\, \mathbf{p}(B) = (\mathbf{p}(A \cap B) + \mathbf{p}(\overline{A} \cap B)) \,/\, \mathbf{p}(B) =$$
$$= \mathbf{p}(A \mid B) + \mathbf{p}(\overline{A} \mid B).$$

Из этого равенства следует искомое равенство $\mathbf{p}(A \mid B) = 1 - \mathbf{p}(\overline{A} \mid B)$.

Формулу определения условной вероятности для $\mathbf{p}(A \mid B)$, где $\mathbf{p}(B) > 0$ можно записать в виде $\mathbf{p}(A \cap \mathrm{B}) = \mathbf{p}(B)\mathbf{p}(A \mid B)$ соответственно, если $\mathbf{p}(A) > 0$, формулу определения условной вероятности $\mathbf{p}(B \mid A)$ можно записать в виде $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B \mid A)$. Таким образом, имеет место следующее утверждение, относящееся к группе *теорем умножения.*

Утверждение. *Если* $\mathbf{p}(B) > 0$ *или* $\mathbf{p}(A) > 0$*, то тогда справедлива* ***формула для вероятности пересечения (произведения) событий*** *вида:*

$$\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(B)\mathbf{p}(A \mid B) \ \ \textit{или} \ \ \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B \mid A).$$

Способ вычисления вероятности пересечения двух событий получен с помощью формулы условной вероятности, т. е. *вероятность пересечения (произведения) двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло*.

На практике *теорему умножения* (или формулу для вероятности пересечения событий) применяют чаще всего вместе с *теоремой сложения* (или формулой для вероятности объединения событий). При этом событие, вероятность которого требуется найти, стараются представить в виде суммы нескольких попарно несовместных событий. Заметим, что первым систематическим исследованием по «исчислению вероятностей», в котором приводятся правила сложения и умножения вероятностей, был трактат нидерландского механика и математика ***Христиана Гюйгенса*** «*О расчетах при игре в кости или о расчетах при азартной игре*». Долгое время эта книга была основным пособием по «элементарной теории вероятности». Рассмотрим на примере одновременное применение указанных теорем.

Пример. *Пусть из колоды карт одну за другой наудачу вытягивают две карты. Какова вероятность того, что хотя бы одна из карт будет пиковой масти?*

Обозначим через *событие* A = {первой вытянута карта пиковой масти} и *событие* B = {второй вытянута карта пиковой масти}. Надо посчитать вероятность *события* $A \cup B$ = {хотя бы одна из вытянутых карт пиковой масти}. Заметим, что $A \cap B \neq \varnothing$, т. е. события A и B совместные, поэтому

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B), \ \text{где} \ \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B \mid A).$$

Пусть в колоде 36 карт. Очевидно, что $\mathbf{p}(A) = 9/36 = 1/4$, поскольку 9 из 36 карт — пиковой масти. Для нахождения условной вероятности $\mathbf{p}(B \mid A)$ заметим, что одну пиковую карту вытянули, но не вернули, теперь в колоде 35 карт и из них 8 — пиковой масти, поэтому $\mathbf{p}(B \mid A) = 8/35$. Следовательно, вероятность того, что вытянуты две карты пиковой масти, равна $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B \mid A) = (1/4)(8/35) = 2/35$.

Этот результат можно получить с помощью формулы *задачи о выборке:*

$$\mathbf{p}(A \cap B) = (C_9^2 \cdot C_{36-9}^0) \,/\, C_{36}^2 = \left(\frac{9 \cdot 8}{2!}\right) \Big/ \left(\frac{36 \cdot 35}{2!}\right) = \frac{2}{35}.$$

Найдем теперь вероятность $\mathbf{p}(B)$. Так как $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, то $\mathbf{p}(B) = \mathbf{p}(A \cap B) + \mathbf{p}(\overline{A} \cap B)$, где $\overline{A}$ = {первой вытянута карта не пиковой масти}. Очевидно, что $\mathbf{p}(\overline{A}) = 27/36$, поскольку из 36 карт $27 = 36 - 9$ карт — не пиковой масти. Кроме того, $\mathbf{p}(B \mid \overline{A}) = 9/35$, поэтому $\mathbf{p}(\overline{A} \cap B) = \mathbf{p}(\overline{A})\mathbf{p}(B \mid \overline{A}) = \frac{27}{36}\cdot\frac{9}{35} = \frac{27}{4\cdot 35}$. Для нахождения вероятности $\mathbf{p}(\overline{A} \cap B)$ с помощью формулы *задачи о выборке* необходимо учесть, что в этой схеме учтен вариант, когда первая карта пиковой масти, а вторая не пиковой, т. е.

$$\mathbf{p}(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{2}(C_{27}^{1} \cdot C_{9}^{1}) / C_{36}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{1!}\right)\left(\frac{9}{1!}\right)/\left(\frac{36\cdot 35}{2!}\right) = \frac{27}{4\cdot 35}.$$

Следовательно, $\mathbf{p}(B) = \mathbf{p}(A \cap B) + \mathbf{p}(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{35} + \frac{27}{4\cdot 35} = \frac{1}{4}$. В частности, теперь видно, что вероятность доставания второй карты такая же, как если бы это происходило без реализации события A. Теперь можно найти искомую вероятность:

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2}{35} = \frac{31}{70}.$$

В связи с примерами подобного рода уместно отметить, что как сказал в своем трактате Христиан Гюйгенс, «*при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории*».

Полученная для двух случайных событий формула допускает следующее обобщение. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — случайные события и $\mathbf{p}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Поскольку

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \subset A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \subset \ldots \subset A_1 \cap A_2 \subset A_1,$$

то из замечания после основных свойств вероятности, т. е. из того, что $A \subset B \Rightarrow \mathbf{p}(A) \le \mathbf{p}(B)$, и условия $\mathbf{p}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ следует $\mathbf{p}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) > 0$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Следовательно, различные условные вероятности вида $\mathbf{p}(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$ определены. Поэтому можно рассмотреть следующее обобщение предыдущего утверждения для n событий.

Замечание. *Если для случайных событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *вероятность* $\mathbf{p}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$*, то тогда справедлива следующая* ***формула для вероятности пересечения (произведения) событий****:*

$$\mathbf{p}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{p}(A_1)\mathbf{p}(A_2 \mid A_1)\mathbf{p}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots \mathbf{p}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Смысл этой формулы в том, что *вероятность пересечения (произведения) нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого последующего события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место*.

Покажем, как доказать это равенство для $n = 3$, например, для A, B и D. Пусть $\mathbf{p}(A \cap B) > 0$. Напомним, что для событий A и B верна формула $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B \mid A)$. Пользуясь свойством ассоциативности операции пересечения множеств (см. раздел 1.4) пересечение трех событий можно записать в виде $A \cap B \cap D = (A \cap B) \cap D$. Применяя дважды формулу для вероятности пересечения событий, получим

$$\mathbf{p}(A \cap B \cap D) = \mathbf{p}((A \cap B) \cap D) = \mathbf{p}(A \cap B)\mathbf{p}(D \mid A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B \mid A)\mathbf{p}(D \mid A \cap B),$$

т. е.

$$\mathbf{p}(A \cap B \cap D) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B \mid A)\mathbf{p}(D \mid A \cap B).$$

В языкознании сравнительно редко встречаются безусловные вероятности. Даже *вероятности* ***букв, слогов, слов*** *и т. д. являются условными*, так как зависят от позиции этих лингвистических объектов в слове, словосочетании и предложении.

Пример. *Слово* ЛОТОС, *составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные кубики, сложенные в коробке, из которой наугад произвольно извлекаются один за другим три буквы-кубика. Какова вероятность того, что при этом сложится слово* СТО?

Ведем обозначения для следующих *событий*: A = {первой извлечена буква С}, B = {второй извлечена буква Т}, D = {третьей извлечена буква О}. Надо посчитать вероятность события $A \cap B \cap D$. Очевидно, что $\mathbf{p}(A) = 1/5$, а условные вероятности $\mathbf{p}(B \mid A) = 1/4$ и $\mathbf{p}(D \mid A \cap B) = 2/3$. Поэтому по формуле для вероятности пересечения трех событий имеем

$$\mathbf{p}(A \cap B \cap D) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B \mid A)\mathbf{p}(D \mid A \cap B) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{30}.$$

Этот пример можно решить другим способом с помощью *приема растождествления*, описанного в разделе 2.3. После индексации букв слова ЛОТОС получим 5 различных букв $Л_1$,$О_1$,$Т_1$,$О_2$,$С_1$. Из них можно составить $A_5^3 = 5{\cdot}4{\cdot}3$ различных 3-буквенных «слов», т. е. упорядоченных выборок или размещений. Они составляют все равновозможные исходы интересующего нас испытания в новом контексте «растождествления букв». Благоприятными исходами для появления слова СТО являются для буквы С — $A_1^1 = 1$, т. е. одно размещение; для буквы Т — $A_1^1 = 1$ тоже одно размещение; для буквы О — $A_2^1 = 2{\cdot}1 = 2$ размещения. По *комбинаторному принципу умножения* число благоприятных исходов для появления слова СТО равно $A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_2^1 = 1{\cdot}1{\cdot}2 = 2$, поэтому

$$\mathbf{p}(«СТО») = \frac{A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_2^1}{A_5^3} = \frac{1\cdot1\cdot2}{5\cdot4\cdot3} = \frac{1}{30}.$$

По существу, это *аналог задачи о выборке*, который можно назвать ***задача об упорядоченной выборке***. В отличие от задачи о выборке мы сейчас рассматриваем упорядоченные подмножества, поэтому в задаче об упорядоченной выборке вместо сочетаний рассматриваются размещения. Продемонстрируем это еще на одном примере.

Пример. *Из урны с шарами, на которых написаны буквы, составляющие слово* МАТЕМАТИКА*, выбираются наугад последовательно четыре шара и укладываются в порядке их появления. Какова вероятность того, что при этом сложится слово* ТАТА?

Число всех равновозможных исходов этого испытания — это число всех 4-буквенных «слов», составленных из 10 «растождествленных» букв $А_1$, $А_2$, $А_3$, $Е_1$, $И_1$, $К_1$, $М_1$, $М_2$, $Т_1$, $Т_2$, число которых равно числу размещений A_{10}^4=10·9·8·7. Число благоприятных исходов составления слова ТАТА равно числу $A_2^2\cdot A_3^2$, где A_2^2 = 2·1 — число размещений для двух из двух букв Т и A_3^2 = 3·2 — число размещений для двух из трех букв А. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\mathbf{p}(«ТАТА») = \frac{A_2^2\cdot A_3^2}{A_{10}^4} = \frac{2\cdot1\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{420}.$$

Из формулы вероятности пересечения (произведения) событий и определения условной вероятности можно получить формулу для условной вероятности пересечения (произведения) событий.

Замечание. *Для случайного события C, где* $\mathbf{p}(C) > 0$, *и для случайных событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *справедлива* ***формула для условной вероятности пересечения (произведения) событий*** *вида:*

$$\mathbf{p}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\,|\,C) = \mathbf{p}(A_1\,|\,C)\mathbf{p}(A_2\,|\,C\cap A_1)\ldots\mathbf{p}(A_n\,|\,C\cap A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

Напомним, что в силу свойства коммутативности $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\cap C =$ $= C\cap A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$. Тогда по определению условной вероятности и по формуле вероятности для полученного пересечения из предыдущего замечания получим

$$\mathbf{p}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\,|\,C) = \frac{\mathbf{p}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\cap C)}{\mathbf{p}(C)} = \frac{\mathbf{p}(C\cap A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)}{\mathbf{p}(C)} =$$
$$= \mathbf{p}(A_1\,|\,C)\mathbf{p}(A_2\,|\,C\cap A_1)\ldots\mathbf{p}(A_n\,|\,C\cap A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

Совместные испытания разделяются на *независимые* и *зависимые*. Это можно пояснить на простых примерах с помощью ***урновой схемы***.

Например, в урне три шара: белый, черный и красный, из которой последовательно извлекают два шара. Пусть первое испытание состоит в том, что извлекают первый шар, запоминают его, а затем кладут обратно в урну. Второе испытание состоит в том, что после перемешивания шаров извлекается второй шар. В этом случае результаты испытаний никак не влияют друг на друга, и такие испытания называются *независимыми*. Пусть теперь после извлечения первого шара его в урну не возвращают, а сразу за ним извлекают второй шар. В этом случае исходы второго испытания зависят от того, какой исход имел место в первом испытании, так как во втором испытании этот шар появиться уже не может, поэтому такие испытания называют *зависимыми*.

Определение независимых событий. *Событие A называется* ***независимым*** *от события B, если условная вероятность* $\mathbf{p}(A \mid B)$ *равна безусловной вероятности* $\mathbf{p}(A)$, *т. е. выполняется равенство*

$$\mathbf{p}(A \mid B) = \mathbf{p}(A).$$

Например, из колоды игральных карт вынимают наудачу одну карту. Чему равна вероятность *события* A = {вынута карта туз}? Если в колоде 36 карт, то вероятность этого события $\mathbf{p}(A) = 4/36 = 1/9$. Предположим, что *событие* B = {вынута карта черной масти}. Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, равна $\mathbf{p}(B \mid A) = 2/18 = 1/9$. Таким образом, условная вероятность $\mathbf{p}(B \mid A)$ равна безусловной вероятности $\mathbf{p}(A)$ и, следовательно, событие A не зависит от события B.

Если вероятность события A принимает разные значения в зависимости от того, произошло событие B или не произошло, то говорят, что событие A ***зависит*** *от события B.*

Например, при подготовке к экзамену две студентки успели выучить только первые 10 билетов («счастливых» для них) из 20 экзаменационных билетов. Пусть *событие* B = {первая студентка вытянула «счастливый» билет}, а *событие* A = {вторая студентка вытянула «счастливый» билет}. Если событие B произошло, то среди оставшихся 19 билетов окажется только 9 «счастливых» и значит $\mathbf{p}(A) = 9/19$. Если событие B не произошло, т. е. первая студентка вытянула «несчастливый» билет, то число «счастливых» билетов среди оставшихся 19 билетов не изменится, и значит $\mathbf{p}(A) = 10/19$. Поэтому событие A зависит от события B.

В частности, из формулы для вероятности пересечения двух событий следует, что если $\mathbf{p}(A \mid B) = \mathbf{p}(A)$, т. е. если событие A не зависит от события B и $\mathbf{p}(A) > 0$, то по определению условной вероятности $\mathbf{p}(B \mid A)$ имеем

$$\mathbf{p}(B \mid A) = \frac{\mathbf{p}(B \cap A)}{\mathbf{p}(A)} = \frac{\mathbf{p}(B)\mathbf{p}(A \mid B)}{\mathbf{p}(A)} = \frac{\mathbf{p}(B)\mathbf{p}(A)}{\mathbf{p}(A)} = \mathbf{p}(B),$$

т. е. тогда событие B также будет независимо от события A.

Замечание. *Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A, поэтому вполне допустимо говорить просто о* ***независимых событиях*** *A и B.*

Если события A и B независимы, то наступление одного из них никак не влияет на шансы наступления другого. Из этого замечания и формулы для вероятности пересечения (произведения) событий вытекает важное следствие.

Утверждение. *Для независимых событий A и B имеет место* ***теорема умножения вероятностей:***

$$\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B).$$

Например, пусть два игрока бросают по одной игральной кости. Рассмотрим следующие *события*: A = {на 1-й кости выпадает шестерка}, B = {на 2-й кости выпадает шестерка}, тогда *событие* $A \cap B$ = {выпадают две шестерки}. Поскольку события A и B независимы, то $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.

Справедливо также утверждение, в известном смысле, обратное к предыдущему.

***Утверждение**. Если выполняется равенство* $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)$, *причем* $\mathbf{p}(B) > 0$, *то событие A не зависит от события B.*

Доказательство. Из имеющегося равенства следует, что $\mathbf{p}(A) = \mathbf{p}(A \cap B) / \mathbf{p}(B)$, которое по определению равно $\mathbf{p}(B \mid A)$, поэтому $\mathbf{p}(B \mid A) = \mathbf{p}(A)$, т. е. получили независимость событий A и B.

Согласно определению данному выше, говорить о независимости события A от B имеет смысл лишь при условии $\mathbf{p}(B) > 0$, т. е. когда $\mathbf{p}(B) \neq 0$. В некоторых случаях такое ограничение представляется ненужным. Поэтому вводится более широкое понятие независимости событий.

***Замечание**. События A и B называются **независимыми**, если*

$$\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B).$$

В дальнейшем *независимость событий A и B будет пониматься как выполнение этого равенства.*

Например, игральная кость бросается дважды. Рассмотрим *событие* A = {при первом бросании выпало 6 очков} и *событие* B = { при втором бросании выпало нечетное число очков}. Покажем, что события A и B независимы.

В этом испытании всего $6^2 = 36$ различных элементарных событий (i, j), где i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Из них 6 благоприятствуют событию A, т. е. (6, j), где j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, и 18 благоприятствуют событию B, т. е. (i, 1), (i, 3), (i, 5), где i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Событие $A \cap B$ содержит только 3 элементарных события: (6, 1), (6, 3), (6, 5). Таким образом,

$\mathbf{p}(A) = 6/36 = 1/6$, $\mathbf{p}(B) = 18/36 = 1/2$ и $\mathbf{p}(A \cap B) = 3/36 = 1/12 = 1/6 \cdot 1/2 = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)$, что и требовалось доказать.

В случае, когда, например, $\mathbf{p}(B) = 0$, *то равенство* $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)$ *выполняется автоматически*. Действительно, в силу свойства дистрибутивности операции пересечения относительно операции объединения множеств (см. раздел 1.4) имеем

$$B = B \cap \boldsymbol{U} = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}),$$

а так как пересечение $(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}) = \varnothing$, то по теореме сложения вероятностей $\mathbf{p}(B) = (B \cap A) + \mathbf{p}(B \cap \overline{A})$. Если $\mathbf{p}(B) = 0$ получим, что сумма двух неотрицательных чисел $\mathbf{p}(B \cap A)$ и $\mathbf{p}(B \cap \overline{A})$ равна 0. Следовательно, каждое из них равно 0 в отдельности. Таким образом, если $\mathbf{p}(B) = 0$, то $\mathbf{p}(B \cap A) = 0$ соответственно $\mathbf{p}(A \cap B) = 0$, и выполняется равенство $0 = \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B) = 0$.

Пример. *Из колоды игральных карт наугад выбирают одну карту. Пусть событие A = {вынута карта туз}, а событие B = {вынута карта красной масти}. Являются ли события A и B независимыми?*

Интуитивно ясно, что событие A не зависит от события B, так как «цена» карты не зависит от масти. Проверим эту гипотезу вычислением вероятностей. Так как $\mathbf{p}(A) = 4/36 = 1/9$, $\mathbf{p}(B) = 18/36 = 1/2$ и $\mathbf{p}(A \cap B) = 2/36 = 1/18$, то $1/18 = 1/9 \cdot 1/2$, т. е. равенство $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)$ выполняется. Следовательно, события A и B независимы.

Вполне естественно, что *событие* A = {вынута карта туз} и *событие* B = = {вынута карта красной масти} независимы. Но согласно принятому *определению независимости* событие B и *событие* C = {вынуты четыре карты: дама и король червей, семерка пик и треф} также будут независимы, так как $\mathbf{p}(B) = 18/36 = 1/2$, $\mathbf{p}(\mathrm{C}) = 4/36 = 1/9$, $\mathbf{p}(B \cap \mathrm{C}) = 2/36 = 1/18$ и $1/18 = \mathbf{p}(B \cap \mathrm{C}) = \mathbf{p}(B)\mathrm{p}(\mathrm{C}) = 1/9 \cdot 1/2 = 1/18$.

В чем естественность независимости событий A и B? Множество элементарных событий является согласно *комбинаторному принципу умножения* произведением двух множеств: мастей и значений карты, поэтому вполне естественно считать, что выбор масти и значения карты происходит независимо. Во взаимодействии событий B и C таких аргументов нет — их *независимость определяется **игрой чисел***.

***Замечание**. Независимость случайных событий, определяемая равенством* $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)$, *является результатом численного совпадения, однако **арифметическое понимание независимости** не всегда отвечает интуитивному пониманию независимости.*

Тем не менее именно «арифметическое» равенство определяет независимость в теории вероятности. Поскольку понятие независимости играет фундаментальную роль в теории вероятности, поясним сказанное в этом замечании на следующем примере. Это, по существу, аналог одного из контрпримеров российского математика академика С. Н. Бернштейна, которому принадлежит первая попытка аксиоматического построения теории вероятности.

Парадокс Бернштейна. *Бросаются две монеты. Пусть выпадение первой монеты орлом — это событие A, второй — событие B. Наконец, только одна монета выпала орлом — событие C. Какие события попарно независимы?*

Для симметричных монет пространство элементарных событий $\boldsymbol{U}$ = {(О, О), (О, Р), (Р, О), (Р, Р)}. Тогда A = {(О, О), (О, Р)}, B = {(О, О), (Р, О)}, C = {(О, Р), (Р, О)}, пересечение событий $A \cap B$ = {(О, О)}, $A \cap C$ = {(О, Р)}, $B \cap C$ = {(Р, О)}, а соответствующие вероятности равны

$$\mathbf{p}(A) = \mathbf{p}(B) = \mathbf{p}(C) = 2/4 = 1/2, \quad \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A \cap \mathrm{C}) = \mathbf{p}(B \cap \mathrm{C}) = 1/4$$

и, следовательно,

$$1/4 = \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B) = 1/2 \cdot 1/2,$$
$$1/4 = \mathbf{p}(A \cap \mathrm{C}) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(\mathrm{C}) = 1/2 \cdot 1/2, \quad 1/4 = \mathbf{p}(B \cap \mathrm{C}) = \mathbf{p}(B)\mathbf{p}(\mathrm{C}) = 1/2 \cdot 1/2.$$

Поэтому все три события попарно независимы. Независимость A и B отвечает и интуитивному пониманию независимости, однако с независимостью событий A и C или событий B и C ситуация сложнее.

Качественные отличия взаимосвязей этих событий выявляются при нарушении симметрии монет. Например, для несимметричных монет с вероятностью выпадения орла не равной 1/2 свойство независимости событий A и B сохраняется, а равенства $\mathbf{p}(A \cap C) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(C)$ и $\mathbf{p}(B \cap C) = \mathbf{p}(B)\mathbf{p}(C)$ нарушаются.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***независимыми***, *независимыми в совокупности* или *взаимно независимыми*, если вероятность любого из них, например, A_i не меняется при наступлении какого угодно числа других событий A_j, $j \neq i$ из той же совокупности, т. е. *любое из этих событий независимо от любого набора остальных*. Это означает, что *события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *независимы*, если для любого набора $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ этих событий, где $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, событие A_{i_1} не зависит от события $A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k}$.

Утверждение. *Если события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *независимы, то для любого набора* $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ *этих событий справедливо равенство*

$$\mathbf{p}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbf{p}(A_{i_1})\mathbf{p}(A_{i_2})\ldots\mathbf{p}(A_{i_k}).$$

Доказательство. Из определения независимости событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, в частности, следует независимость A_{i_1} от $A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k}$, что можно записать в виде

$$\mathbf{p}(A_{i_1} \cap (A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k})) = \mathbf{p}(A_{i_1})\mathbf{p}(A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Если такое же соотношение записать для набора событий $A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots, A_{i_k}$, то получим

$$\mathbf{p}(A_{i_2} \cap (A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k})) = \mathbf{p}(A_{i_2})\mathbf{p}(A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Из этих двух равенств непосредственно следует:

$$\mathbf{p}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbf{p}(A_{i_1})\mathbf{p}(A_{i_2})\mathbf{p}(A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Рассуждая дальше аналогичным образом, получим нужное равенство:

$$\mathbf{p}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbf{p}(A_{i_1})\mathbf{p}(A_{i_2})\ldots\mathbf{p}(A_{i_k}),$$

т. е. *вероятность пересечения (произведения) независимых событий равна произведению вероятностей*.

Это утверждение называется ***теоремой умножения вероятностей для n событий.*** Заметим, что определение независимости для n событий можно сформулировать по-другому: *события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ***независимы***, *если для них справедливы соотношения*:

$\mathbf{p}(A_i \cap A_j) = \mathbf{p}(A_i)\mathbf{p}(A_j)$, если $1 \leq i < j \leq n$,
$\mathbf{p}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \mathbf{p}(A_i)\mathbf{p}(A_j)\mathbf{p}(A_k)$, если $1 \leq i < j < k \leq n$,
…………………………………………………………
$\mathbf{p}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{p}(A_1)\mathbf{p}(A_2)\ldots\mathbf{p}(A_n)$.

В частности, *из независимости в совокупности следует попарная независимость*, т. е. если $j \neq i$, то $\mathbf{p}(A_i \cap A_j) = \mathbf{p}(A_i)\mathbf{p}(A_j)$, хотя попарная независимость не гарантирует независимости.

Замечание. *Для* $n > 2$ *из попарной независимости событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *вообще говоря, не следует их независимость.*

Например, в примере ***парадокс Бернштейна*** при ненулевых вероятностях $\mathbf{p}(A) = 1/2$, $p(B) = 1/2$, $\mathbf{p}(C) = 1/2$ из попарной независимости событий A, B, C, т. е. $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)$, $\mathbf{p}(A \cap C) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(C)$ и $\mathbf{p}(B \cap C) = \mathbf{p}(B)\mathbf{p}(C)$ не следует их независимость, т. к. не выполняется равенство $\mathbf{p}(A \cap B \cap C) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)\mathbf{p}(C)$, поскольку $A \cap B \cap C = \varnothing$ и $\mathbf{p}(A \cap B \cap C) = 0$, а $\mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)\mathbf{p}(C) = 1/8$ в этом примере.

Этот контпример можно подправить так, чтобы пересечение трех событий было возможное событие, т. е. чтобы $A \cap B \cap C \neq \varnothing$.

Пример. *Бросаются две монеты. Рассмотрим следующие события: A = {на первой монете выпал орел}, B = {на второй монете выпал орел}, C = {обе монеты упали на одну сторону}. Являются ли эти события независимыми в совокупности*?

В отличие от примера ***парадокс Бернштейна*** событие C = {(О, О), (Р, Р)}. Тогда пересечение двух событий $A \cap B = A \cap C = B \cap C$ = {(О, О)}, а пересечение трех событий $A \cap B \cap C$ = {(О, О)}. Следовательно, соответствующие вероятности равны $\mathbf{p}(A) = \mathbf{p}(B) = \mathbf{p}(C) = 1/2$, $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A \cap C) = \mathbf{p}(B \cap C) = 1/4$, т. е. события A, B, C попарно независимы. Но, с другой стороны, $1/4 = \mathbf{p}(A \cap B \cap C) \neq \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)\mathbf{p}(C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$, поэтому события A, B, C не являются независимыми.

Следовательно, когда рассматривается большое число событий, скажем $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n > 2$, следует различать попарную независимость этих событий и их независимость (или независимость в совокупности). Рассмотрим некоторые простые, но важные свойства независимых событий и их противоположных, т. е. дополнительных событий, которые хорошо согласуются с интуицией.

Замечание. *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то при замене хотя бы одного из них противоположным независимость события не нарушается, в частности, события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$ независимы.*

Покажем сначала, что *если события A и B независимы*, *то независимы также пары событий A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.*

Действительно, так как $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ и $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$, то по *теореме сложения вероятностей* для указанных несовместных событий имеем $\mathbf{p}(A) = \mathbf{p}(A \cap B) + \mathbf{p}(A \cap \overline{B})$. Откуда по *теореме умножения вероятностей для независимых событий* и из равенства $\mathbf{p}(\overline{B}) = 1 - \mathbf{p}(B)$ получим

$$\mathbf{p}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{p}(A) - \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A) - \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B) = \mathbf{p}(A)(1 - \mathbf{p}(B)) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(\overline{B}).$$

Следовательно, события A и $\overline{B}$ независимы. Повторяя эти рассуждения для независимых событий A и $\overline{B}$ получим, что события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы. Аналогичным образом показывается, например, что *если события A, B и C независимы, то независимы и тройки событий $\overline{A}$, B, C, а также $\overline{A}, \overline{B}, C$ и $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$.*

Воспользуемся этим замечанием для нахождения вероятности объединения независимых событий с помощью вероятностей противоположных событий.

Утверждение. *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то для* ***вероятности объединения (суммы) событий*** *справедлива формула*

$$\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \mathbf{p}(\overline{A}_1)\mathbf{p}(\overline{A}_2)\ldots\mathbf{p}(\overline{A}_n).$$

Доказательство. Обозначим через $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, тогда, так как $B \cup \overline{B} = \boldsymbol{U}$, т. е. достоверное событие, то $\mathbf{p}(\overline{B}) + \mathbf{p}(B) = \mathbf{p}(\boldsymbol{U}) = 1$ или $\mathbf{p}(B) = 1 - \mathbf{p}(\overline{B})$. Напомним, что по *формулам де Моргана* для дополнений множеств (см. раздел 1.4) $\overline{B} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$. Кроме того, из независимости событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в силу предыдущего замечания следует, что события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ также независимы. Поэтому в силу сказанного, а также по *теореме умножения вероятностей* для n событий получим: $\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \mathbf{p}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}) =$ $= 1 - \mathbf{p}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) = 1 - \mathbf{p}(\overline{A_1})\mathbf{p}(\overline{A_2})\ldots\mathbf{p}(\overline{A_n})$, что и требовалось доказать.

В частности, *если события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *независимы и* $\mathbf{p}(A_1) = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}(A_2) = \mathbf{p}_2$, … $\mathbf{p}(A_n) = \mathbf{p}_n$, *то* $\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\ldots\mathbf{q}_n$, *где* $\mathbf{q}_i = 1 - \mathbf{p}_i$ *для* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пример. *Проводится n независимых повторных испытаний, в которых событие A происходит с вероятностью* $\mathbf{p}$. *Какова вероятность того, что при этом событие A произойдет хотя бы один раз*?

Рассмотрим *события* A_k = {событие A произошло при k-м испытании}, где $k=1, 2, \ldots, n$. То, что испытание повторяли независимо, означает, что n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы. По условию задачи $\mathbf{p}(A_k) = \mathbf{p}$ и $\mathbf{p}(\overline{A_n}) = 1 - \mathbf{p} = \mathbf{q}$ для всех k.

Нам надо посчитать вероятность *события* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ = {событие *A произошло хотя бы один раз* при n независимых испытаниях}. А что означает противоположное событие $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$? Оно означает, что *ни разу не произошло* событие A при этих испытаниях.

По предыдущему утверждению в силу независимости событий и, следовательно, независимости противоположных им событий, имеем для $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$, что

$$\mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \mathbf{p}(\overline{A_1})\mathbf{p}(\overline{A_2})\ldots\mathbf{p}(\overline{A_n}) = 1 - \mathbf{q}^n.$$

Отметим, что поскольку $0 < \mathbf{q} < 1$, то при достаточно больших n эта вероятность близка к 1, т. е. при достаточно большом числе испытаний событие A почти наверняка (с вероятностью близкой к 1) произойдет хотя бы один раз.

Пример. *Предположим, что автоматическая система, распознающая устную речь, анализирует* 10 *взятых наугад словоформ. Чему равна вероятность того, что хотя бы одна из этих словоформ окажется местоимением* ОН?

Поскольку значение *статистической вероятности* местоимения ОН согласно данным частотного словаря $\mathbf{p} = 0{,}0099$, то $\mathbf{q} = 1 - 0{,}0099 \approx 0{,}99$. Поэтому в силу предыдущего примера, искомая вероятность равна (для $n = 10$)

$$1 - \mathbf{q}^n = 1 - (0{,}99)^{10} \approx 0{,}095.$$

Рассмотрим некоторые типичные задачи, связанные с серией независимых повторных испытаний.

Если вероятность успеха при каждом из n независимых испытаний равна $\mathbf{p}$, то *вероятность наступления успеха во всех n испытаниях*, т. е. вероятность пересечения этих независимых событий по *теореме умножения* для n событий, *равна произведению их вероятностей* $\mathbf{p}^n$.

Если вероятность неуспеха при каждом из n независимых испытаний равна $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$, то, рассуждая аналогично, получим, что *вероятность того что при всех n*

независимых испытаниях нас будет преследовать неудача, как показано в предыдущем примере *равна* $\mathbf{q}^n$. Тогда вероятность дополнительного события равна $1 - \mathbf{q}^n$.

Замечание. *Вероятность наступления хотя бы одного успеха с вероятностью* $\mathbf{p}$ *при n независимых испытаниях равна* $1 - \mathbf{q}^n$*, где* $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$.

Например, при бросании игральной кости, где *успех* — выпадение шестерки при одном бросании и его вероятность $\mathbf{p} = 1/6$, а *неуспех* — выпадение остальных граней и его вероятность $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p} = 5/6$, вероятность наступления успеха при всех n испытаниях (каждый раз выпадала шестерка) равна $\mathbf{p}^n = (1/6)^n$. Вероятность неудачи при всех n испытаниях (ни разу не выпала шестерка) равна $\mathbf{q}^n$. Вероятность дополнительного события (при n испытаниях хотя бы один раз выпала шестерка) равна $1 - \mathbf{q}^n = 1 - (5/6)^n$.

Принято считать, что развитие теории вероятностей как самостоятельной науки начинается в 1654 году знаменитой перепиской французов: математика и философа ***Блеза Паскаля*** и математика и юриста ***Пьера Ферма***. Поводом для нее послужили два вопроса, заданные Паскалю французским писателем и моралистом ***кавалером де Мере***, который был к тому же азартным игроком. Благодаря этим вопросам имя этого аристократа вошло в историю науки, что еще раз подтверждает популярный тезис *о роли случайности в нашей жизни*.

Денежный выигрыш при игре в кости зависит от комбинации выпавших чисел, на которую делается ставка. Одна из таких комбинаций — выпадение хотя бы одной шестерки, т. е. 6 очков, при четырех бросаниях игральной кости. Де Мере смог подсчитать число шансов этой комбинации. Более сложные комбинации возникали, если бросала сразу 2 игральные кости. Де Мере пытался самостоятельно определить, сколько раз надо бросать пару костей, чтобы вероятность хотя бы одного появления двух шестерок (6, 6), т. е. 12 очков, было больше 1/2. По его подсчетам было достаточно 24 бросаний, однако игровой опыт заставил его усомниться в правильности своих вычислений. Тогда он обратился со своей проблемой к Блезу Паскалю, который предложил правильное решение.

Проблема де Мере. *Что вероятнее: при* 4 *бросаниях одной игральной кости хотя бы один раз получить* 6 *очков или при* 24 *бросаниях двух костей хотя бы один раз получить* 12 *очков?*

Как было показано выше, вероятность выпадения хотя бы один раз 6 очков при $n = 4$ бросаниях одной кости (для $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p} = 1 - 1/6 = 5/6$) равна

$$1 - \mathbf{q}^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518,$$

т. е. немного больше половины, а значит чаще происходит, чем не происходит. Поэтому при четырех бросаниях выгоднее делать ставку на то, что выпадет хотя бы одна шестерка, чем на то, что не выпадет ни одной.

Аналогично, вероятность выпадения хотя бы один раз 12 очков при 24 бросаниях пары костей (для $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p} = 1 - 1/6^2 = 35/36$) равна

$$1 - \mathbf{q}^{24} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491,$$

т. е. немного меньше половины. Поэтому вероятность получить при 4 бросаниях одной игральной кости хотя бы один раз 6 очков больше, чем при 24 бросаниях двух игральных костей хотя бы один раз получить 12 очков.

Заметим, что во второй игре при 25 бросаниях пары костей две шестерки, т. е. 12 очков, появляются хотя бы один раз с вероятностью $1 - (35/36)^{25} \approx 0{,}505$. Поэтому игрок, делающий ставку на успех этого события при 25 бросаниях, выигрывает примерно в 50,5 % игр, а игрок, делающий ставку на успех этого события при 24 бросаниях, выигрывает примерно в 49,1 % игр.

Важным примером применения теоремы умножения вероятностей являются *повторные независимые испытания*, рассмотренные ***Якобом Бернулли***. *Испытания проводятся при одинаковых условиях, причем в серии из n испытаний результаты каждого из них никак не сказываются на последующих результатах.* Особенно интересна при рассмотрении *испытаний Бернулли* задача о том, с какой вероятностью при n независимых испытаниях успех осуществится ровно k раз. Заметим, что случаи $k = 0$ или $k = n$ были рассмотрены выше и сейчас мы приступаем к рассмотрению случая при произвольном k, где $0 \le k \le n$.

Утверждение. *В эксперименте с n повторными независимыми испытаниями, называемыми* ***испытаниями Бернулли****, где каждое из них имеет два исхода* (*успех с вероятностью* $\mathbf{p}$ *и неудачу с вероятностью* $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$), *вероятность получения ровно k успехов при n испытаниях называется* ***формулой Бернулли*** *и равна*

$$C_n^k \mathbf{p}^k \mathbf{q}^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \mathbf{p}^k \mathbf{q}^{n-k}.$$

Доказательство. В заданном эксперименте с повторением n независимых испытаний для нахождения вероятности k успехов предположим сначала, что первыми реализуются *k успехов*, а вторыми *n–k неудач*. Так как успех или неудача при каждом испытании представляют собой события, независимые от результатов других испытаний, то согласно *теореме умножения вероятностей* вероятность осуществления k успехов с последующей реализацией $n–k$ неудач равна $\mathbf{p}^k\mathbf{q}^{n-k}$. Фактически каждое осуществление k успехов, соответственно $n–k$ неудач, независимо от порядка их наступления будет иметь вероятность $\mathbf{p}^k\mathbf{q}^{n-k}$. Общее событие, состоящее в k успехах при n испытаниях, есть объединение элементарных событий рассмотренного типа, которые несовместны. Поскольку существует C_n^k способов получения k успехов в n испытаниях, то по *теореме сложения вероятностей*, вероятность получить ровно k успехов при n испытаниях равна $C_n^k \mathbf{p}^k \mathbf{q}^{n-k}$, что и требовалось доказать.

Например, пусть все различные наиболее употребительные слова пронумерованы и для каждого слова указана вероятность его появления. Если говорить о каком-то определенном, ограниченном «участке» языка, то более или менее точное количество слов известно. Так, в разных стилях и жанрах наиболее употребительно по данным «*Частотного словаря русского языка*» (М., 1977) около 40 тысяч слов. На фоне данных о лексических богатствах всего русского языка представляет интерес объем «личного словника», или, как говорят лингвисты, объем *активного словаря*, т. е. количество слов, употребляемых одним человеком, которое у образованных людей оценивается в среднем в 5—10 тысяч слов.

Обозначим общее число различных наиболее употребительных слов через N, номер слова в списке через i, а вероятность появления i-го слова — через $\mathbf{p}_i$. При проведении численных расчетов в качестве вероятности можно использовать отношение указанной частоты появления слова в выборке к объему выборки, т. е. *статистическую вероятность*.

Тогда в ***лингвистической трактовке испытаний Бернулли*** *вероятность использования i-го слова k раз в тексте из n слов определяется формулой Бернулли*:

$$C_n^k \mathbf{p}_i^k (1-\mathbf{p}_i)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\mathbf{p}_i^k (1-\mathbf{p}_i)^{n-k}.$$

Говорят также, что такой эксперимент с испытаниями Бернулли имеет *биномиальное распределение*, а вероятности $C_n^k \mathbf{p}^k \mathbf{q}^{n-k}$ называются ***биномиальными вероятностями***, поскольку согласно формуле *бинома Ньютона* (см. раздел 2.2) справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathbf{p}^k \mathbf{q}^{n-k} = (\mathbf{q} + \mathbf{p})^n = 1^n = 1.$$

Последнее равенство означает, что объединение всех событий в испытании Бернулли, т. е. для всех $k = 0, 1, \ldots, n$, является достоверным событием и согласно *колмогоровской аксиоматике* имеем

$$C_n^0 \mathbf{q}^n + C_n^1 \mathbf{p}\mathbf{q}^{n-1} + C_n^2 \mathbf{p}^2 \mathbf{q}^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \mathbf{p}^{n-1}\mathbf{q} + C_n^n \mathbf{p}^n = 1.$$

Каждому одночлену, возникающему при возведении суммы, не только двух слагаемых в степень, можно придать вероятностный смысл. Напомним, что коэффициент при $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_r^{n_r}$ в выражении $(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n$ из суммы r слагаемых, где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ равен числу *анаграмм слова,* составленного из n_1 букв a_1, n_2 букв a_2, …, n_r букв a_r, т. е. это число *перестановок с повторением* $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$ (см. раздел 2.3). Рассмотрим в заключение этого раздела несколько примеров, использующих *схему испытаний Бернулли*, а затем решим задачу, обобщающую эту схему с помощью филологического понятия ***анаграмма***.

Пример. *Игральная кость бросается не четыре, а шесть раз. Больше или меньше половины вероятность выпадения одного очка ровно один раз?*

В этом эксперименте с шестью независимыми испытаниями «*успех*», т. е. выпадение 1-го очка, имеет вероятность $\mathbf{p} = 1/6$, тогда как «*неудача*», т. е. выпадение не менее 2 очков, имеет вероятность $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p} = 1 - 1/6 = 5/6$. Поэтому согласно *схеме испытаний Бернулли* вероятность одного успеха при шести бросаниях, т. е. для $k = 1$ и $n = 6$ в *формуле Бернулли* $C_n^k \mathbf{p}^k \mathbf{q}^{n-k}$ равна $C_6^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{6!}{1!\,5!}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}4.$

Искомая вероятность примерно равна 2/5, т. е. меньше 1/2 — половины.

Пример. *Пусть вероятность падения бутерброда маслом вниз равна* 3/4. *Произошла досадная неприятность: поднос с пятью бутербродами опрокинулся. Что более вероятно: два или три бутерброда упадут маслом вниз?*

Надо рассмотреть пять независимых испытаний с падением бутербродов. Поскольку $\mathbf{p} = 3/4$, $\mathbf{q} = 1/4$ и $n = 5$, то в *схеме испытаний Бернулли* надо сравнить соответствующие *биномиальные вероятности* двух экспериментов для $k = 2$ и $k = 3$, т. е. $C_5^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{45}{312}$ и $C_5^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{135}{312}$. Таким образом, вероятнее, что все же три, а не два бутерброда упадут маслом вниз.

Пример. *В корзине лежит много красивых перцев, причем* 1/3 *часть из них — красные,* 1/2 *— желтые и* 1/6 *— зеленые. Какова вероятность того, что продавец, не глядя, выбирает* 6 *перцев, среди которых* 2 *красных,* 3 *желтых и* 1 *зеленый?*

Если продавец, не глядя, выбирает из корзины один перец, то мы полагаем вероятность того, что он окажется красным (*к*) равной 1/3, желтым (*ж*) — 1/2, зеленым (*з*) — 1/6. Посчитаем сначала вероятность появления слова *ккжжжз*, т. е. события, состоящего в последовательном выборе двух красных, затем трех желтых и, наконец, одного зеленого перцев. Поскольку перцы выбираются независимо от результатов других испытаний, то по *теореме умножения вероятностей,* соответствующая вероятность равна $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1$. Так как число *анаграмм* слова *ккжжжз* равно числу *перестановок с повторениями* $\frac{6!}{2!\,3!\,1!}$ (см. раздел 2.3), то по *теореме сложения вероятностей*, искомая вероятность равна $\frac{6!}{2!\,3!\,1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{5}{36}$.

Сосчитать абсолютно все слова «живого» русского языка никто не может, поэтому языковеды и пришли к выводу: *язык в количественном отношении неисчислим*. Однако любой язык обладает любопытным свойством, которое называется ***избыточностью языка***. Имеется в виду тот факт, что не все элементы, из которых состоит текст или устная речь, являются необходимыми для восприятия этого текста или речи. Как поясняет математик и лингвист Ю. И. Левин в работе «*Математика и лингвистика*» (М., 1964), избыточность языка вредна в одних отношениях и полезна — даже необходима — в других. С одной стороны, благодаря этому свойству языка нам, например, не слишком мешают опечатки или описки в книгах, а с другой стороны, благодаря этой избыточности приходится передавать, например, по линиям связи много лишнего, что приводит к их перегрузке. *Количественная оценка избыточности языка оценивается с помощью математического понятия* ***количества информации****, приходящейся на букву текста*, для определения которого нужны различные вероятностные и комбинаторные характеристики локальных лингвистических событий, рассмотренные в этой главе.

Компьютерная революция и новые информационные технологии необычайно расширили оттенки смысла, передаваемого числами с помощью цифровых устройств. Нельзя не восхищаться красотой, поэтому ***эстетическое начало****, заложенное в математическое знание, всегда* *вызывало ответные ассоциации у выдающихся поэтов*. У поэтов начала прошлого века *Николая Гумилева*, *Максимилиана Волошина*, *Велимира Хлебникова* и др. есть замечательные стихи о числах и формулах с неожиданными прозрениями для каждого, кому не чужда научная тематика. В этом проявляется естественная потребность каждого образованного человека ощутить себя носителем культуры как общего процесса духовного, интеллектуального и эстетического развития. Вот достойный образец поэтического осмысления *Валерием Брюсовым* классического дифференциального и интегрального исчисления:

Здесь что? Мысль роль мечты играла,
Металл ей дал пустой рельеф;
Смысл — там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f.

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что вероятность того, что из рассыпанных кубиков с буквами слова ФИЛОЛОГИЯ, выбранные последовательно наудачу пять кубиков составят слово ЛИЛИЯ, равна $\frac{A_2^2 A_2^2 A_1^1}{A_9^5} = \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{3780}$?

2. Верно ли, что если симметричная монета подбрасывается 10 раз, то вероятность того, что орел выпадет при этом ровно 3 раза равна $C_{10}^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{15}{128}$?

3. Верно ли, что вероятность того, что нужное слово угадано, если два студента одновременно и независимо друг от друга угадывают слова с вероятностью 0,6 и 0,5, равна 0,6 + 0,5 – 0,6·0,5 = 0,8?

* * *

Можно ли считать, что в гуманитарных науках *новое знание* — область исследовательская, а *новые смыслы* — область творческая. Замечательный филолог *Михаил Гаспаров* в одной из своих последних книг «*Записи и выписки*» (М., 2000), в которой равно сочетается талант ученого и талант писателя, спрашивал: «*Способна ли филология производить новые смыслы, новое знание или только устанавливать уже существующие смыслы текстов?*». Вспомним в связи с этим две строки «*Стихов, сочиненных ночью во время бессонницы*» А. С. Пушкина:

Я понять тебя хочу,
Смысла я в тебе ищу…

Последняя строка допускает несколько толкований: «*Смысла в жизни я ищу…*» и «*Смысла в сне твоем ищу…*». К этим личностным смыслам нужно добавить вариант *Василия Жуковского*, который в силу политических соображений заменил пушкинскую строку на «*Темный твой язык учу…*». Юрий Лотман объяснял возможность такой подмены оригинала следующим образом: «*Чтобы понять смысл жизни, нужно выучить ее темный язык...*». Готовая истина не способствует развитию творческого мышления.

В чем заключается ценность математического языка и математической методологии в лингвистике и литературоведении? Ценность их в том, что при помощи математического языка и соответствующих методов, направленных на изучение лингвистических объектов, удается раскрыть механизмы действия определенных структур, наполненных лингвистическим содержанием, задавая определенный уровень строгости и точности исследования. В одном из номеров американского журнала «Scientific American», когда его математический раздел редактировал профессор Даглас Хофштадтер, автор имевшей заслуженный успех книги «*Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда*» (Самара, 2001), было опубликовано «честное» предложение, статистически строго и точно говорящее о самом себе.

В этой фразе два раза встречается слово «в», два раза встречается слово «этой», два раза встречается слово «фразе», четырнадцать раз встречается слово «встречается», четырнадцать раз встречается слово «слово», шесть раз встречается слово «раз», девять раз встречается слово «раза», семь раз встречается слово «два», три раза встречается слово «четырнадцать», три раза встречается слово «три», два раза встречается слово «девять», два раза встречается слово «семь», два раза встречается слово «шесть».

Хотя читать его нелегко, и оно утверждает «чистую» самодостаточную правду, для научной истины оно бесполезно. Как говорил английский писатель *Олдос Хаксли*, «*истина — понятие бесконечное: каждая часть ее, однажды открытая, требует открытия других частей*». В классический период развития *сравнительного языкознания* требования логической строгости не достаточно широко применялись языковедами, что было отчасти обусловлено уровнем исследовательской практики и недостаточностью собранных лингвистических фактов. Поэтому классическое языкознание отставало, например, от классической математики по точности и объективности аргументации. Под влиянием лингвистических идей, отображающих свойства языковой структуры, математических методов дискретной математики и практических запросов прикладной лингвистики в современном языкознании делаются позитивные шаги к созданию подлинно научной, в математическом смысле, теории.

Языкознание в отличие от математики имеет дело не с абстрактными системами отношений, а с реально действующей системой языка. Причиной существования различных литературных стилей является то, что в естественном языке одинаковое содержание может быть выражено различными художественными средствами. ***Понятие стиля*** *не ограничено соотношением средств выражения и выражаемого содержания, поскольку оно содержит количественные характеристики, не имеющие непосредственного отношения к содержанию и смыслу, которые наиболее объективно характеризуют авторские стили индивидуальных языков*. Даже размышления над случайными закономерностями азартных игр способны погрузить думающего человека в *мир мышления*. Исследования математических задач оказали на *кавалера де Мере* самое положительное влияние. Он не только сам поставил математические задачи, связанные с игрой в кости, но даже нашел решение наиболее простой из них. Кроме познаваемого *мира мышления* есть *мир чувств* и *мир человечества*, поэтому тем, кто стремится узнавать новое, трудно пресытиться в этих «трех» мирах, поскольку новому нет конца.

Главная проблема, с которой сталкивается исследователь, — это *проблема контекста осмысления* в расколотом мире «двух культур» *Чарльза Сноу* с его установкой на несовместимость гуманитарного и естественнонаучного взгляда на мир. Как предсказал профессор Б. И. Ярхо в «Методологии точного литературоведения» своему более счастливому продолжателю: «Тот, кто сумеет путем *математической аргументации* развернуть перед нами грандиозную картину литературного потока в виде тысяч отдельных волн, набегающих друг на друга, то текущих рядом, то вновь расходящихся в бесконечном движении, — тот завершит закладку фундамента точного литературоведения». Отвечая на вопрос академика М. Л. Гаспарова о новых смыслах и новом знании, можно сказать, что филологическая наука в отличие от литературной критики, опираясь на строгие математические методы, может объяснить, какие смыслы вычитываются у автора с большей, меньшей или наименьшей вероятностью. Хотя Пушкин начинает пятую строфу «Евгения Онегина» ироничными стихами «*Мы все учились понемногу Чему-нибудь и как-нибудь…*» не следует это принимать всерьез: *учились не «чему-нибудь» и не «как-нибудь», а многим полезным наукам*. В домашней библиотеке Пушкина были, например, книги по математике, в частности, по теории вероятностей. Он не исследовал случай как математическое понятие или как философскую категорию, а как художник показывал всевластие случая.

В хрестоматийном отрывке 1829 года «*О, сколько нам открытий чудных…*», перечисляя благословенные силы, готовящие «просвещенья дух», Александр Сергеевич Пушкин в один ряд с «опытом» и «гением» поставил «случай». Вникая в заложенные в это незавершенное пятистишие перекрещивающиеся житейские, художественные и философские смыслы, нельзя не обратить внимание на внутреннее сходство пушкинского поэтического дискурса и принципов современного научного мышления. Особенно восхищают и ошеломляют последние две строчки пятистишия, показывающие нам не только *пушкинскую концепцию случая*, но и *акт самопознания культуры*, неотъемлемой частью которой является научное знание:

О, сколько нам открытий чудных
Готовит просвещенья дух,
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, бог-изобретатель…

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность рецензентам профессору А. А. Гируцкому и профессору В. И. Янчевскому за доброжелательное отношение и конструктивные замечания, а также поблагодарить преподавателей кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ М. В. Мартон, Т. С. Петрушину и Т. И. Рабцевич за помощь в компьютерном наборе рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. *Воронов, М. В.* Математика для студентов гуманитарных факультетов: учебник / М. В. Воронов, Г. П. Мещерякова. — Ростов н/Д: Феникс, 2002. — 384 с.
2. *Грес, П. В.* Математика для гуманитариев: учеб. пособие / П. В. Грес. — М.: Логос, 2003. — 120 с.
3. *Дорофеева, А. В.* Высшая математика. Гуманитарные специальности: учеб. пособие для вузов / А. В. Дорофеева. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Дрофа, 2003. — 384 с.
4. *Жолков, С. Ю.* Математика и информатика для гуманитариев: учебник / С. Ю. Жолков. — М.: Гардарики, 2002. — 531 с.
5. *Пиотровский, Р. Г.* Математическая лингвистика: учеб. пособие для педагогических институтов / Р. Г. Пиотровский, К. Б. Бектаев, А. А. Пиотровская. — М.: Высш. шк., 1977. — 383 с.
6. *Турецкий, В. Я.* Математика и информатика: учеб. пособие для гуманитарных специальностей / В. Я. Турецкий. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: ИНФРА-М, 2002. — 560 с.
7. *Шикин, Е. В.* Гуманитариям о математике: учебник / Е. В. Шикин, Г. Е. Шикина. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 272 с.

СБОРНИКИ ЗАДАЧ

8. *Вентцель, Е. С.* Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М.: Радио и связь, 1983. — 416 с.
9. *Виленкин, Н. Я.* Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики: учеб. пособие / Н. Я. Виленкин, В. Г. Потапов. — М.: Просвещение, 1979. — 111 с.
10. *Гаврилов, Г. П.* Задачи и упражнения по курсу дискретной математики: учеб. пособие / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1992. — 408 с.
11. *Гмурман, В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. — 7-е изд., доп. — М.: Высш. шк., 2003. — 405 с.
12. *Лавров, И. А.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. — 4-е изд. — М.: Физматлит, 2001. — 256 с.
13. *Мельников, В. Н.* Логические задачи / В. Н. Мельников. — Киев; Одесса: Выща шк., 1989. — 344 с.
14. *Очан, Ю. С.* Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: учеб. пособие / Ю. С. Очан. — М.: Просвещение, 1981. — 271 с.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

15. *Андерсон, Дж. А.* Дискретная математика и комбинаторика / Дж. А. Андерсон. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. — 960 с.
16. *Баевский, В. С.* Лингвистические, математические, семиотические и компьютерные модели в истории и теории литературы / В. С. Баевский. — М.: Языки современных культур, 2001. — 336 с.
17. *Бектаев, К. Б.* Математические методы в языкознании. Ч. 1: Теория вероятностей и моделирование нормы языка / К. Б. Бектаев, Р. Г. Пиотровский. — Алма-Ата: Изд-во КГУ, 1973. — 281 с.
18. *Бектаев, К. Б.* Математические методы в языкознании. Ч. 2: Математическая статистика и моделирование текста / К. Б. Бектаев, Р. Г. Пиотровский. — Алма-Ата: Изд-во КГУ, 1974. — 334 с.
19. *Болтянский, В. Г.* Беседы о математике. Кн. 1: Дискретные объекты / В. Г. Болтянский, А. П. Савин. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2002. — 368 с.
20. *Виленкин, Н. Я.* Рассказы о множествах / Н. Я. Виленкин. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004. — 162 с.
21. *Гладкий, А. В.* Элементы математической лингвистики / А. В. Гладкий, И. А. Мельчук . — М.: Наука, 1969. — 192 с.
22. *Кононов, С. Г.* Введение в математику: в 3 ч. / С. Г. Кононов, Р. И. Тышкевич, В. И. Янчевский. — Минск: БГУ, 2003. — Ч. 1: Множества и функции. — 171 с.
23. *Кононов, С. Г.* Введение в математику: в 3 ч. / С. Г. Кононов, Р. И. Тышкевич, В. И. Янчевский. — Минск: БГУ, 2003. — Ч. 2: Числа и координаты. — 126 с.
24. *Кононов, С. Г.* Введение в математику: в 3 ч. / С. Г. Кононов, Р. И. Тышкевич, В. И. Янчевский. — Минск: БГУ, 2003. — Ч. 3: Множества и порядки. — 74 с.
25. *Курант, Р.* Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2004. — 568 с.
26. *Куратовский, К.* Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. — М.: Мир, 1970. — 416 с.
27. *Лесохин, М. М.* Введение в математическую лингвистику: Лингвистические приложения основ математики / М. М. Лесохин, К. Ф. Лукьяненков, Р. Г. Пиотровский. — Минск: Наука и техника, 1982. — 263 с.
28. *Маковский, М. М.* Лингвистическая комбинаторика: опыт топологической стратификации языковых структур / М. М. Маковский. — М.: Наука, 1988. — 321 с.
29. *Маркус, С.* Теоретико-множественные модели языков / С. Маркус. — М.: Наука, 1970. — 332 с.
30. *Пиотровский, Р. Г.* Инженерная лингвистика и теория языка / Р. Г. Пиотровский. — Л.: Наука, 1979. — 112 с.
31. *Семенов, А. Л.* Математика текстов / А. Л. Семенов. — М.: Изд-во МЦНМО, 2002. — 16 с.
32. *Солодовников, А. С.* Теория вероятностей: учеб. пособие / А. С. Солодовников. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Вербум-М, 1999. — 208 с.
33. *Стюарт, Я.* Концепции современной математики / Я. Стюарт. — Минск: Вышэйш. шк., 1980. — 384 с.

34. *Фрумкина, Р. М.* Вероятность элементов текста и речевое поведение / Р. М. Фрумкина. — М.: Наука, 1971. — 168 с.
35. *Холшевников, В. Е.* Основы стихосложения: Русское стихосложение: учеб. пособие / В. Е. Холшевников. — 4-е изд., испр. и доп. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та; М.: Академия, 2002. — 208 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

36. *Алексеев, П. М.* Статистическая лексикография / П. М. Алексеев. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. — 120 с.
37. *Арапов, М. В.* Математические методы в исторической лингвистике / М. В. Арапов, М. М. Херц. — М.: Наука, 1974. — 167 с.
38. *Гаспаров, М. Л.* Записки и выписки / М. Л. Гаспаров. — М.: Новое литературное обозрение, 2000. — 416 с.
39. *Гинзбург, С.* Математическая теория контекстно свободных языков / С. Гинзбург. — М.: Мир, 1970. — 326 с.
40. *Гируцкий, А. А.* Общее языкознание: учеб. пособие для студентов вузов / А. А. Гируцкий. — 2-е изд., стереотип. — Минск: ТетраСистемс, 2001. — 304 с.
41. *Гладкий, А. В.* Формальные грамматики и языки / А. В. Гладкий. — М.: Наука, 1973. — 230 с.
42. *Доксиадис, А.* Дядя Петрос и проблема Гольдбаха / А. Доксиадис. — М.: Изд-во АСТ, 2002. — 208 с.
43. *Илюшин, А. А.* Русское стихосложение: учеб. пособие для филологических специальностей вузов / А. А. Илюшин. — М.: Высш. шк., 2004. — 239 с.
44. *Кондратов, А. М.* Математика и поэзия / А. М. Кондратов.— М.: Знание, 1962. — 48 с.
45. *Крейдлин, Г. Е.* Математика помогает лингвистике / Г. Е. Крейдлин, А. Д. Шмелев. — М.: Просвещение, 1994. — 176 с.
46. *Курбатов, В. И.* Логика в вопросах и ответах: учеб. пособие / В. И. Курбатов. — Ростов н/Д: Феникс, 1997. — 384 с.
47. *Левин, Ю. И.* Математика и языкознание / Ю. И. Левин. — М.: Знание, 1964. — 48 с.
48. *Марчук, Ю. Н.* Математические методы в языкознании: Обзор материалов конференции COLING—88 / Ю. Н. Марчук. — М.: ИНИОН АН СССР, 1990. — 45 с.
49. *Мельчук, И. А.* Опыт теории лингвистических моделей «смысл—текст»: Семантика, синтаксис / И. А. Мельчук. — М.: Языки русской культуры, 1999. —367 с.
50. *Налимов, В. В.* Вероятностная модель языка. О соотношении естественных и искусственных языков / В. В. Налимов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1979. — 303 с.
51. *Никитина, С. Е.* Тезаурус по теоретической и прикладной лингвистике (Автоматическая обработка текста) / С. Е. Никитина. — М.: Наука, 1978. — 375 с.
52. *Петров, В. М.* Количественные методы в искусствознании / В. М. Петров. — М.: Смысл, 2000. — Вып. 1: Пространство и время художественного мира. 204 с.
53. *Пиотровский, Р. Г.* Текст, машина, человек / Р. Г. Пиотровский. — Л.: Наука, 1975. — 327 с.
54. *Пиотровский, Р. Г.* Лингвистический автомат и его речемыслительное обоснование: учеб. пособие для языковых вузов / Р. Г. Пиотровский. — Минск: МГЛУ, 1999. — 195 с.

55 *Фрумкина, Р. М.* Статистические методы изучения лексики / Р. М. Фрумкина. — М.: Наука, 1964. — 115 с.
56. *Хофштадтер, Д.* Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда / Д. Хофштадтер. — Самара: Изд. дом «Бахлах-М», 2001. —752 с.

ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ

57. *Азгальдов, Г. Г.* Поверить алгеброй гармонию… Можно ли? Нужно ли? / Г. Г. Азгальдов // Число и мысль. — М.: Знание, 1980. — Вып. 3. — С. 24—43.
58. *Башмаков, М. И.* Математические образы в поэзии / М. И. Башмаков // Квант. — 1988. — № 2. — С. 14—16.
59. *Будагов, Р. А.* Понятие точности в филологии (к его истории и теории) / Р. А. Будагов // Изв. АН СССР. Сер. лит. и яз. — 1977. — Т. 36, № 2. — С. 123—134; Т. 36, № 3. — С. 201—212.
60. *Гаспаров, М. Л.* Статистическое обследование русского трехударного дольника / М. Л. Гаспаров // Теория вероятности и ее применение. — 1963. — Т. 8, вып. 1. — С. 102—108.
61. *Гольштейн, Б. Н.* О поэзии генетического языка / Б. Н. Гольштейн // Химия и жизнь. — 1978. — № 2. — С. 66—76.
62. *Горобец, Б.* Закон нечетности числа букв в русских палиндромах / Б. Горобец // Наука и жизнь. — 2004. — № 11. — С. 97—100.
63. *Добрушин, Р. Л.* Математические методы в лингвистике. Приложение: опыт определения элементарной грамматической категории / Р. Л. Добрушин // Математическое просвещение. — 1961. — № 6. — С. 37—60.
64. *Дорофеев, Г. В.* О некоторых особенностях реального языка математики / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. — 1999. — № 6. — С. 41—43.
65. *Егоров, Б.* Литературоведение и математические методы / Б. Егоров // Содружество наук и тайны творчества: сб. ст. — М.: Искусство, 1968. — С. 327—347.
66. *Ермилова, Е.* Поэзия и математика / Е. Ермилова // Вопр. литературы. — 1962. — № 3. — С. 71—82.
67. *Еровенко, В.* «И сладок нам лишь узнаванья миг»: Метафизические мотивы поэзии Осипа Мандельштама / В. Еровенко // Всемирная литература. — 2001. — № 12. — С. 139—150.
68. *Еровенко-Риттер, В. А.* Две культуры Чарлза Сноу в проблеме интуитивного познания / В. А. Еровенко-Риттер // Вышэйш. шк. — 2001. — № 5. — С. 47—52.
69. *Еровенко-Риттер, В*. Феномен «Пигмалиона» в социологии современного языка математики / В. Еровенко-Риттер // Alma mater. — 2002. — № 6. — С. 26—31.
70. *Еровенко-Риттер, В. А.* Интеллектуальная сущность «бритвы Оккама», или иллюзия знаний / В. А. Еровенко-Риттер // Вышэйш. шк. — 2002. — № 3. — С. 24—29.
71. *Еровенко-Риттер, В*. Ненаглядность мыслимого или искусство понимания в облике реальности / В. Еровенко-Риттер // Неман. — 2003. — № 12. — С. 138—156.
72. *Еровенко-Риттер, В. А.* Дорога Картезия — пройден ли путь? В поисках новой философии познания / В. А. Еровенко-Риттер // Народная асвета. — 2003. — № 12. — С. 8—12.
73. *Еровенко-Риттер, В*. Парадокс Олдоса Хаксли: к философии математического познания / В. Еровенко-Риттер // Беларуская думка. — 2003. — № 12. — С. 35—39.

74. *Еровенко-Риттер, В. А.* Проблема познания по Гераклиту Эфесскому / В. А. Еровенко-Риттер // Вышэйш. шк. — 2003. — № 3. — С. 58—61.
75. *Еровенко-Риттер, В.* «Подводный камень веры» / В. Еровенко-Риттер // Свободная мысль-XXI. — 2004. — № 2. — С. 112—129.
76. *Еровенко-Риттер, В. А.* Философско-образовательное значение математики / В. А. Еровенко-Риттер // Педагогика. — 2004. — № 5. — С. 35—39.
77 *Еровенко, В.* Математика для гуманитариев: диалог в культуре / В. Еровенко // Беларуская думка. — 2005. — № 9. — С. 98—103.
78. *Зиновьев, А. А.* О математической лингвистике / А. А. Зиновьев // Вопр. философии. — 1959. — № 9. — С. 132—140.
79. *Калинин, В. М.* Некоторые статистические законы математической лингвистики / В. М. Калинин // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1964. — Вып. 11. — С. 245—255.
80. *Кац, Б. Г.* О программе, сочиняющей стихи / Б. Г. Кац // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 2. — С. 151—156.
81. *Кийко, Е. И.* Восприятие Достоевским неевклидовой геометрии / Е. И. Кийко // Достоевский. Материалы и исследования. — Л.: Наука, 1985. — Вып. 6. — С. 120—128.
82. *Колмогоров, А. Н.* Пример изучения метра и его ритмических вариантов / А. Н. Колмогоров // Теория стиха. — Л.: Наука, 1968. — С. 145—167.
83. *Колмогоров, А. Н.* К основам русской классической метрики / А. Н. Колмогоров, А. В. Прохоров // Содружество наук и тайны творчества: сб. ст. — М.: Искусство, 1968. — С. 397—432.
84. *Колмогоров, А. Н.* Модель ритмического строения русской речи, приспособленная к изучению метрики классического русского стиха / А. Н. Колмогоров, А. В. Прохоров // Русское стихосложение. Традиции и проблемы развития. — М.: Наука, 1985. — С. 113—134.
85. *Кондратов, А. М.* Теория информации и поэтика (Энтропия ритма русской речи) / А. М. Кондратов // Проблемы кибернетики. — 1963. — Вып. 9. — С. 279—286.
86. *Кулагина, О. С.* Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств / О. С. Кулагина // Проблемы кибернетики. — 1958. — Вып. 1. — С. 203—214.
87. *Ламбек, Дж.* Математическое исследование структуры предложений / Дж. Ламбек // Математическая лингвистика. — М.: Мир, 1964. — С. 47—69.
88. *Левин, Ю. И.* Знаки, язык, математика / Ю. И. Левин // О некоторых вопросах современной математики и кибернетики. — М.: Просвещение, 1965. — С. 428—467.
89. *Мачавариани, М. В.* О взаимоотношении математики и лингвистики / М. В. Мачавариани // Вопр. языкознания. — 1963. — № 3. — С. 85—91.
90. *Мицкевич, А.* Поэты и математика / А. Мицкевич // Молодая гвардия. — 1961. — № 7. — С. 277—281.
91. *Новотный, М.* Об алгебраизации теоретико-множественной модели языка / М. Новотный // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1965. — Вып. 15. — С. 235—244.
92. *Орлов, Ю. К.* Модель частотной структуры лексики / Ю. К. Орлов // Исследования в области вычислительной лингвистики и лингвостатистики. — М.: Изд-во МГУ, 1978. — С. 59—118.

93. *Пиотровская, А. А.* Математические модели диахронии и текстообразования / А. А. Пиотровская, Р. Г. Пиотровский // Статистика речи и автоматический анализ текста. — Л.: Наука, 1974. — С. 361—400.
94. *Том, Р.* Топология и лингвистика / Р. Том // Успехи математических наук. — 1975. — Т. 30, вып. 1. — С. 199—221.
95. *Успенский, В. А.* К определению части речи в теоретико-множественной системе языка / В. А. Успенский // Бюл. Объединения по проблемам машинного перевода. — 1957. — № 5. — С. 22—26.
96. *Фрумкина, Р. М.* Соотношение точных методов и гуманитарного подхода: лингвистика, психология, психолингвистика / Р. М. Фрумкина // Известия АН СССР. Сер. лит. и яз. — 1978. — Т. 37, № 4. — С. 318—332.
97. *Холшевников, В.* Стиховедение и математика / В. Холшевников // Содружество наук и тайны творчества: сб. ст. — М.: Искусство, 1968. — С. 384—396.
98. *Хомский, Н.* Введение в формальный анализ естественных языков / Н. Хомский, Дж. Миллер // Кибернетический сб. Новая сер. — М.: Мир, 1965. — Вып. 1. — С. 229—297.
99. *Шикин, Е.* Стихи и фигуры / Е. Шикин, Г. Шикина // Квант. — 2001. — № 4. — С. 8—11.
100. *Эпштейн, М.* Русский язык в свете творческой филологии / М. Эпштейн // Знамя. — 2006. — № 1. — С. 192—207.

ОГЛАВЛЕНИЕ

На обложке картина
Ж. Абелье «Исследование планеты», 1961 г.

Учебное издание

Еровенко Валерий Александрович

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ФИЛОЛОГОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПРИМЕРЫ

Курс лекций

В авторской редакции

Художник обложки *Е. П. Протасеня*
Технический редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *Н. П. Ракицкая*

Ответственный за выпуск *А. Г. Купцова*

Подписано в печать 26.04.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 11,18. Тираж 200 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
Лицензия на осуществление издательской деятельности
№ 02330/0056804 от 02.03.2004.
220050, Минск, проспект Независимости, 4.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности
№ 02330/0056850 от 30.04.2004.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.