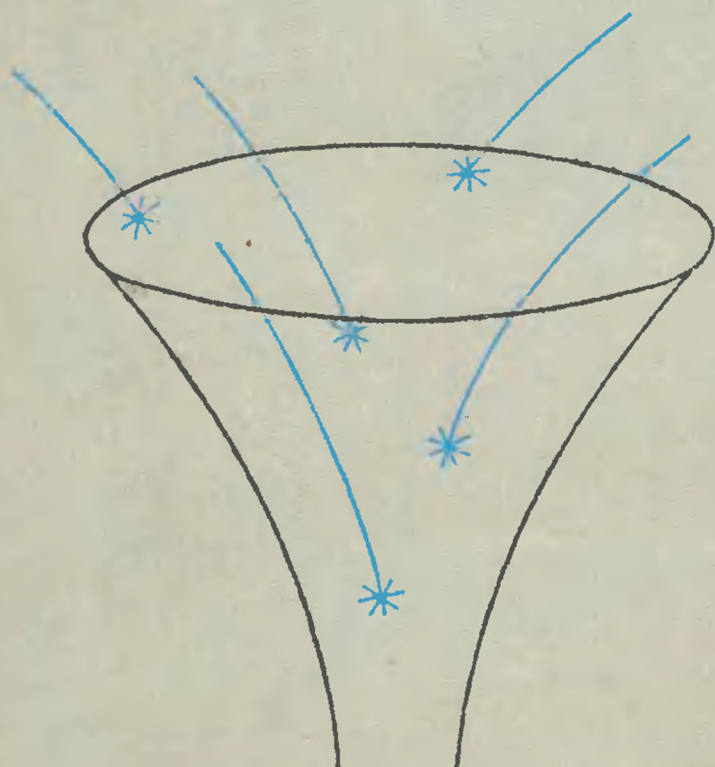


Л. В. ЗЕЛЬДОВИЧ
И. Д. НОВИКОВ

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ И ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД



Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, И. Д. НОВИКОВ

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ И ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

Яков Борисович Зельдович, Игорь Дмитриевич Новиков
Теория тяготения и эволюция звезд

М., 1971 г., 484 стр. с илл.

Редактор Л. М. Озерной

Техн. редактор К. Ф. Врудно

Корректоры Е. А. Белицкая, Т. А. Панькова

Сдано в набор 25/VIII 1971 г.	Подписано к печати 9/XII 1971 г.	Бумага 60×90/16.
Физ. печ. л. 30,25.	Условн. печ. л. 30,25.	Уч.-изд. л. 32,12.
Тираж 3500 экз.	Т-19573.	Цена книги 2 р. 14 к. Заказ 2811

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука», Москва. Шубинский пер., д. 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
-----------------------	---

РАЗДЕЛ I

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

Глава 1. Уравнения тяготения Эйнштейна	11
§ 1. Равенство инертной и гравитационной масс	11
§ 2. Основная идея ОТО	14
§ 3. Неинерциальные и нестатические системы в пространстве — времени Минковского	17
§ 4. Измерение времени и пространственных расстояний	20
§ 5. Векторы, тензоры и геодезические линии	25
§ 6. Динамические и кинематические величины	29
§ 7. Кривизна пространства — времени	32
§ 8. Уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения движения	34
§ 9. Космологическая постоянная	39
§ 10. Закон Ньютона и слабое поле тяготения	45
§ 11. Аналог зееман-эффекта в гравитационном поле вращающегося тела	51
§ 12. Гравитационное излучение	52
§ 13. Гравитационное излучение двойных звезд	59
§ 14. Торможение гравитационным излучением	64
§ 15. Детектирование гравитационных волн	73
§ 16. Гравитационные волны: численные оценки и взаимодействие с веществом	76
Глава 2. Неизбежность общей теории относительности (ОТО) и задачи теории тяготения	85
§ 1. Введение	85
§ 2. Единая теория поля, геометродинамика, фундаментальная масса и длина	86
§ 3. Теория тяготения в плоском пространстве — времени	87
§ 4. Неизбежность идеи кривизны пространства — времени	93
§ 5. О возможности вычисления гравитационной постоянной на основе теории элементарных частиц	96
§ 6. Квантование тяготения	100
§ 7. Скалярная теория тяготения	104
Глава 3. Сферически-симметричное поле тяготения	107
§ 1. Введение	107
§ 2. Поле тяготения Шварцшильда	110
§ 3. Поле тяготения внутри звезды	112

§ 4.	Движение по радиусу лучей света и ультрарелятивистских частиц	114
§ 5.	Радиальное движение нерелятивистских частиц	118
§ 6.	Потенциальные кривые движения	122
§ 7.	Круговые орбиты	124
§ 8.	Движение релятивистской частицы в кулоновском поле	126
§ 9.	Гравитационный захват нерелятивистской частицы	128
§ 10.	Движение ультрарелятивистских частиц и лучей света	129
§ 11.	Движение тел в поле тяготения Шварцшильда с учетом гравитационного излучения	130
§ 12.	\dot{R} - и T -области в пространстве—времени Шварцшильда	134
§ 13.	Внутреннее решение для нестатического шара	139
§ 14.	Метрика Крускала	142
Г л а в а 4.	Несферические поля тяготения	151
§ 1.	Введение	151
§ 2.	Статическое поле с аксиальной симметрией	152
§ 3.	Внешнее поле вращающегося тела; метрика Керра	157
§ 4.	Сфера Шварцшильда во внешнем квадрупольном поле	163
§ 5.	Коллапс вращающегося тела с малыми отклонениями от сферической симметрии	164
§ 6.	Сингулярность при коллапсе; что происходит с веществом после ухода под $\dot{S}_{\text{гор}}$	170
Р А З Д Е Л II		
УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА		
Г л а в а 5.	Введение. Понятие давления	178
§ 1.	Разные виды давления	178
§ 2.	Случай далекодействующих сил	179
Г л а в а 6.	Холодное вещество	184
§ 1.	Подразделение на области	184
§ 2.	Вырожденный электронный газ	187
§ 3.	Поправки в области высоких давлений	191
§ 4.	Область средних плотностей	194
§ 5.	Ядерные процессы и ядерное взаимодействие, влияние на уравнение состояния	200
§ 6.	Свойства нейтронного газа	206
§ 7.	Плотность, превышающая ядерную	210
§ 8.	Идеальный нейтронный газ при сверхвысокой плотности	212
§ 9.	Идеальный газ с учетом взаимного превращения частиц	214
§ 10.	Все ли «элементарные» частицы элементарны?	218
§ 11.	Электромагнитное взаимодействие частиц	220
§ 12.	Предельно жесткое уравнение состояния	223
Г л а в а 7.	Свойства вещества при высокой температуре	227
§ 1.	Физические условия в обычных звездах	227
§ 2.	Высокие температуры	229
§ 3.	Различные типы равновесия	232

Глава 8. Термодинамические величины при высоких температурах	238
§ 1. Нейтральный газ; плазма, равновесие ионизации	238
§ 2. Термодинамика излучения	241
§ 3. Пары и нейтрино	244
§ 4. Диссоциация ядер	248
§ 5. Плотное вещество при низких температурах	253
§ 6. Безразмерная энтропия	
§ 7. Общие термодинамические соотношения для истинно нейтральной материи	253
	256

РАЗДЕЛ III

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СТАДИИ ЭВОЛЮЦИИ ЗВЕЗД

Глава 9. Введение	259
Глава 10. Равновесие и устойчивость звезд	267
§ 1. Общие задачи теории равновесия звезд	267
§ 2. Аналитическая теория политропных газовых сфер (теория Лейна — Эмдена)	279
§ 3. Релятивистские уравнения равновесия звезды	289
§ 4. Теория холодных белых карликов	306
§ 5. Нейтронные звезды	316
§ 6. Дефект массы	321
§ 7. Устойчивость нейтронных звезд	323
§ 8. О решениях с положительной энергией	326
§ 9. Нестабильность любого равновесного состояния	329
§ 10. Критические состояния массивных звезд	332
Глава 11. Эволюция звезд	339
§ 1. Эволюция звезды, вплоть до потери устойчивости или стадии белого карлика	339
§ 2. Нестабильность массивных звезд с ядерными источниками энергии	347
§ 3. Устойчивость эволюции звезды	349
§ 4. Вспышки сверхновых	355
§ 5. Физика нейтронных звезд	376
§ 6. Эволюция звезды с массой, большей ОВ-предела	382
§ 7. Релятивистский коллапс и «застывшие» звезды («черные дыры»)	383
§ 8. Испускание нейтрино при коллапсе остывшей звезды	387
§ 9. Помешает ли быстрое вращение коллапсу звезды?	390
Глава 12. Аккреция газа на релятивистские объекты	394
§ 1. Газ, подвергающийся аккреции	394
§ 2. Падение взаимодействующих частиц	396
§ 3. Четыре режима газодинамического течения в случае сферической симметрии	398
§ 4. Сверхзвуковая аккреция	401
§ 5. Выделение энергии при симметричной аккреции на нейтронные звезды и белые карлики	404
§ 6. Симметричная аккреция в гравитационном поле застывших звезд	407

§ 7.	Случай несимметричного течения газа	408
§ 8.	Силы, препятствующие аккреции	412
§ 9.	Аккреция как эволюционный фактор	415
§ 10.	Об электрическом заряде звезд	416
Г л а в а 13.	Пульсары	420
§ 1.	Общий обзор, излучение пульсаров	420
§ 2.	Энергетика пульсаров, их гравитационное излучение	425
§ 3.	Электродинамика пульсара	428
§ 4.	Плазма в поле излучения вблизи пульсара	431
§ 5.	Сверхтекучесть и сверхпроводимость сверхплотного вещества; их влияние на свойства нейтронной звезды	434
§ 6.	Пульсары в Галактике	437
§ 7.	Таблица свойств нейтронных звезд, как пульсаров	438
Г л а в а 14.	Коллапсировавшие звезды и «белые дыры» (отоны)	441
§ 1.	Коллапсировавшие звезды в двойных системах	441
§ 2.	Магнитные явления при релятивистском коллапсе	445
§ 3.	Аккреция на отоны	449
§ 4.	Статистика звезд в конечной точке звездной эволюции	451
§ 5.	Отоны космологического происхождения	458
П р и л о ж е н и е 1.	Физические процессы в окрестности «черной дыры» с вращением	462
П р и л о ж е н и е 2.	Таблица результатов расчетов взрывов сверхновых	465
Л и т е р а т у р а		467
П р е д м е т н ы й у к а з а т е л ь		480
А л ф а в и т н ы й с п и с о к а в т о р о в и н о с т р а н н ы х п у б л и к а ц и й		482

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эволюция звезд и грандиозные явления их взрыва и сжатия, недавно открытые пульсары и предсказанные теорией, но до настоящего времени не обнаруженные «черные дыры» составляют предмет предлагаемой книги, вместе с теми теоретическими сведениями, которые необходимы для их понимания.

Астрономия переживает в настоящее время период бури и натиска. Десятилетие с 1960 по 1970 гг. вместило в себя открытие квазаров, пульсаров, рентгеновских источников и реликтового излучения. В теоретической астрофизике важные гипотезы и открытия появляются еще чаще.

Наблюдательные открытия в значительной мере связаны с новыми, послевоенными методиками исследований — радиоастрономией и приборами на ракетах и спутниках.

Часть упомянутых открытий была предсказана заранее и это показывает правильность физических теорий, применимость физических законов, открытых в лабораторных экспериментах, к астрономическим объектам.

Теоретическими основами современной астрофизики являются:

- 1) теория тяготения в ньютоновской форме и общая теория относительности Эйнштейна;
- 2) теория элементарных частиц и, более узко, ядерная физика, свойства электронного газа и фотонов, их взаимодействие;
- 3) электромагнетизм — уравнения Максвелла;
- 4) макроскопическая физика — статистика и термодинамика, гидродинамика, теория плазмы, теория коллективных взаимодействий. Для интерпретации спектров важна атомная физика, теория переноса излучения.

Этот перечень по необходимости схематичен и чрезмерно краток.

Последовательное развитие астрофизических теорий, основанных на этом фундаменте, иногда приводило к странным и на первый взгляд парадоксальным выводам о наиболее кардинальных моментах в эволюции отдельных небесных тел и окружающей нас Вселенной. Таким было, например, предсказание Л. Д. Ландау (в начале тридцатых годов) о нейтронных звездах, или предсказание (в сороковых годах) возможности «горячего» состояния материи в начале расширения Метагалактики. отождествление пульсаров с нейтронными звездами (1968) и объяснение реликтового излучения теорией горячей Вселенной (1965) являются прекрасными примерами плодотворности теоретической астрофизики.

Выводы и предсказания теоретической физики должны рассматриваться с полной серьезностью в астрономии — таков обоб-

появляющийся итог всего послевоенного развития астрономии и физики. С другой стороны, в настоящее время в печати можно видеть обилие теоретических работ, не выдерживающих последующей проверки опытом, обилие сменяющих друг друга объяснений, таких, например, объектов, как квазары. Однако эти несомненные недостатки и трудности теории относятся, по нашему мнению, к выбору конкретных моделей, к современному стилю быстрой публикации приоритетных заявок и т. п. Подобные недостатки не должны подрывать принципиальной уверенности в физических основах теории, и развитие науки неоднократно подтверждало это.

Однако очень принципиальный вопрос заключается в том, не должны ли мы именно в астрофизике ожидать возникновения новых фундаментальных физических теорий и связанного с ним разрушения существующих взглядов и догм.

Разумеется, в необычных астрофизических условиях, например, сверхбольших плотностей и температур, еще не исследованных земной физикой, могут проявляться новые, пока не известные законы природы. Однако современная астрофизика оперирует главным образом с условиями, где применимость надежно установленных законов природы не вызывает сомнений. Астрофизика встречается лишь с необычной комбинацией этих условий.

Поэтому, по нашему убеждению, в рамках существующих физических теорий заключена возможность огромного количества новых эффектов, новых явлений, и это дает возможность объяснения астрофизических открытий. Может быть, примеры из других областей лучше пояснят эту мысль: сверхпроводимость есть своеобразное явление, но и до создания конкретной теории было ясно, что явление сверхпроводимости есть следствие квантовой механики и не потребует изменения ее основных положений; такое же соотношение имеет место между турбулентностью и гидродинамикой. Весьма вероятно, что и совокупность всех известных до настоящего времени астрономических явлений удастся объяснить, комбинируя известные законы физики, проявляющиеся в необычных условиях астрофизических объектов, причем, однако, нет сомнения, что это «комбинирование» будет абсолютно нетривиальным. Можно напомнить в этой связи, что применение общей теории относительности в астрономии (требуемое новыми открытиями), по существу, только начинается, и одна из задач книги способствовать этому.

Еще раз подчеркнем, что при столкновении в астрономии с условиями, выходящими за рамки применимости современной физики (например, при плотностях, в начале космологического расширения намного превышающих плотность атомного ядра), можно ожидать проявления действия еще не известных законов природы.

Особенно хочется отметить роль моделей (или, на другом языке, схематической упрощенной картины явления) в развитии теоре-

тической астрофизики. За редким исключением, наблюдательные данные не дают такой прямой, всесторонней и однозначной информации, какую можно получить в лабораторном опыте. Поэтому первые интерпретации открытого в астрофизике явления обычно отличаются большим разнообразием попыток теоретического объяснения, неоднозначностью теоретической модели.

Кроме того, огромная сложность процессов, изучаемых астрофизикой, часто заставляет делать те или иные упрощения для построения физико-математической теории.

Только после определенных предположений можно развить теорию явления и, сравнивая отдельные выводы теории с наблюдениями, судить о правильности исходных предположений, исходной модели.

Значительная часть предлагаемой книги посвящена именно рассмотрению отдельных моделей.

В предлагаемой книге авторы старались соблюсти равновесие и правильные пропорции между изложением достигнутых результатов и постановкой задач, подлежащих решению. В значительной мере книга адресована тем, кто продолжит исследования, т. е. тем, чьи труды через несколько лет сделают книгу в некоторой части устаревшей. Наша задача заключается в том, чтобы вооружить исследователя теоретическими основами, наряду с изложением наблюдательных фактов.

Мы старались сосредоточить внимание на наглядной интерпретации теории (что, как показал опыт, является наиболее трудным и важным), в меньшей степени уделяя внимание математическому формализму *). Особое внимание уделено общей теории относительности, т. е. релятивистской теории тяготения.

Теория предсказывает, в частности, явление релятивистского коллапса — катастрофического сжатия, сопровождающегося нарастанием гравитационных полей, останавливающих даже кванты и нейтрино. Открытие этого явления — дело будущего и мы хотели бы способствовать приближению этого будущего.

Уже сейчас появляются сообщения об открытии гравитационных волн и об огромном (даже по астрономическим масштабам) количестве энергии, уносимом этими волнами. Теория гравитационных волн и их излучения подробно изложена в книге.

Выше отмечены только разделы, необычные для классической астрофизики. Полное представление о содержании книги, вклю-

*) Такого рода заявления или, скорее, заклинания встречаются, впрочем, в предисловиях к самым абстрактным и формальным трудам. По-видимому, сказывается отсутствие ГОСТа (Государственного общесоюзного стандарта) на «физическую наглядность». Каждый автор считает наглядной ту теорию, которую ему удалось понять или развить. Конечно, мы приводим и математическую теорию рассматриваемых процессов; утверждение в тексте означает, что мы ставили акцент на то, чтобы показать, как применяется абстрактный формализм в конкретной ситуации,

чающем вкратце и более привычные разделы (белые карлики, равновесие и эволюция горячих звезд и т. д.) можно составить, ознакомившись с оглавлением.

Разумеется, наша книга не заменяет учебников теоретической физики. Вкратце повторяя стандартные формулы, мы сосредоточивали внимание на их приложениях и разъяснении. Советский читатель располагает прекрасными учебниками Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Теория поля» и «Статистическая физика».

Очевидна трудность создания монографии о быстро развивающейся области науки; претензии на пророчества и наглядность еще увеличивают трудность задачи и риск неудачи.

На примере «Релятивистской астрофизики», вышедшей в конце 1967 года, авторы имели возможность убедиться в том, как трудно и «опасно» писать монографию. Говорят, что «главный урок истории заключается в том, что никто не усваивает уроки истории». После выхода «Релятивистской астрофизики» появилось много работ и сделан ряд открытий, которые заставляют развить дальше часть конкретных вопросов, изложенных там. Вскоре мы убедились, что необходимо написать две новые книги: одна из них перед вами, вторая посвящена космологии и выйдет на год позже. Проблема квазаров и звездных скоплений также будет рассмотрена во второй книге.

В предлагаемой книге, посвященной теории тяготения, теории уравнивания состояния вещества и звездам материал из «Релятивистской астрофизики» использован лишь частично, тем не менее в новой книге мы старались сохранить структуру и стиль нашей прежней книги.

Большую помощь в работе над книгой оказали нам сотрудники группы теоретической астрофизики Института прикладной математики, к которой мы принадлежим: Г. С. Бисноватый-Коган, А. Г. Дорошкевич, В. С. Имшенник, Б. В. Комберг, Д. К. Надёжин, А. А. и Т. В. Рузмайкины, Р. А. Сюняев, В. М. Чечеткин, Н. И. Шакура, А. А. Шварц, В. Ф. Шварцман.

Мы особенно благодарны В. С. Имшеннику и Д. К. Надежину, написавшим для нашей книги параграф о вспышках сверхновых звезд, и В. Ф. Шварцману, являющемуся соавтором главы об аккреции газа на релятивистские объекты. Мы благодарны проф. К. С. Торну (США), который, являясь одним из редакторов английского перевода «Релятивистской астрофизики», сделал много ценных замечаний, учтенных при работе над данной книгой. Им написано несколько параграфов по вопросам, в которых Торн является крупнейшим специалистом. Мы благодарны всем друзьям и коллегам за критические замечания и дискуссии.

Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков

РАЗДЕЛ I

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

ГЛАВА 1

УРАВНЕНИЯ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

§ 1. Равенство инертной и гравитационной масс

Современная теория тяготения, сформулированная в 1916 г. Альбертом Эйнштейном, явилась развитием специальной теории относительности (СТО) и поэтому часто называется «общей теорией относительности» (ОТО).

Суть СТО выражена в преобразованиях Лоренца для координат и времени и соответствующих законах преобразования таких физических величин, как энергия, импульс и т. д. Все предпосылки и выводы СТО — постоянство скорости света, зависимость массы от скорости, дефект массы и его связь с энергией системы, растяжение времени при быстром движении на примере распада частиц — подтверждены опытом. СТО вошла в практику инженерных расчетов. Поэтому в правильности СТО никаких сомнений нет.

Общая теория относительности (ОТО) находится в совершенно ином положении. Опыты, специфически подтверждающие ОТО, до сих пор немногочисленны. К ним относятся движение перигелия Меркурия, отклонение света в поле тяжести Солнца, изменение частоты света в поле тяжести и релятивистское запаздывание радиолокационных сигналов, проходящих вблизи солнечного диска. По существу, главным аргументом в пользу ОТО является тот известный каждому школьнику исходный факт, который вдохновил Эйнштейна — пропорциональность веса и массы, т. е. равенство ускорения различных тел в поле тяжести.

Закон тяготения Ньютона $F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}$ очень похож на закон Кулона $F = \frac{e_1e_2}{r^2}$. Естественно, возникает вопрос, почему так различны по своему содержанию теория электромагнитного поля, которая рассматривается в евклидовом пространстве, и ОТО с понятием кривизны пространства; нельзя ли поле тяготения также описывать как какое-то поле в евклидовом пространстве?

Ниже будет показано, что СТО и квантовая механика делают логически неизбежным характерное для ОТО искривление пространства — времени. ОТО является не только математически наиболее изящной и стройной, но и физически необходимой теорией тяготения.

Как уже подчеркивалось, самой важной особенностью поля тяготения является то, что оно совершенно одинаково действует на различные тела, сообщая им одинаковые ускорения. Этот факт был установлен еще Галилеем. Поле тяготения тем самым в корне отличается от всех других известных в физике полей.

Естественно, что в последнее время, когда наблюдается оживление интереса к теории тяготения, одной из первых задач было экспериментальное выяснение вопроса о фактической точности вывода об одинаковости ускорений, сообщаемых полем тяготения разным телам. Иначе этот принцип формулируется как принцип строгой пропорциональности инертной и весомой массы. Последняя формулировка особенности действия поля гравитации на тела эквивалентна предыдущей. Действительно, в уравнениях движения тела в поле тяжести

$$m_{\text{и}} \frac{d^2 r}{dt^2} = - m_{\text{г}} \text{grad } U$$

слева стоит инертная масса, а справа гравитационная. Если для любых тел $m_{\text{и}} = \alpha m_{\text{г}}$, то масса слева и справа сокращается, и мы приходим к закону Галилея, поскольку масса вообще не входит в уравнения движения. Множитель α , очевидно, зависит только от единиц измерения и его выбирают равным единице.

В 1890 г. Этвеш применил чрезвычайно точный способ для проверки пропорциональности гравитационной и инертной масс. Суть опыта состояла в следующем. Всякое тело, находящееся на поверхности Земли и покоящееся относительно Земли, подвергается действию притяжения не только со стороны Земли, но также со стороны Солнца, Луны и других небесных тел. На тело действуют также центробежные силы, связанные с суточным вращением Земли вокруг своей оси, с годовым обращением Земли вокруг Солнца, с месячным взаимным обращением центра Земли вокруг центра тяжести системы Земля — Луна.

Притяжением планет и других небесных тел можно пренебречь. Точно так же можно пренебречь ускорениями, связанными с движением Солнца в Галактике и т. д. Ускорение земного тяготения около 980 см/сек^2 , центробежное ускорение суточного вращения на широте Москвы около $1,5 \text{ см/сек}^2$. Ускорение солнечного поля тяготения на орбите Земли около $0,5 \text{ см/сек}^2$: центробежное ускорение годичного вращения Земли, очевидно, также равно $0,5 \text{ см/сек}^2$. Действие Луны характеризуется ускорением $4 \cdot 10^{-3} \text{ см/сек}^2$.

Представим себе два тела, A и B , равной массы, уравновешенные на коромысле, подвешенном за середину к тонкой нити. Силы притяжения к Земле, к Солнцу и Луне пропорциональны гравитационной массе, центробежные силы пропорциональны инертной массе.

Для тел с одинаковым соотношением инертной и весовой масс результирующая сила, действующая на каждое тело, имеет одинаковое направление. Равновесие при определенном положении коромысла сохранится и при любом повороте коромысла относительно земной оси и относительно Солнца. Если же отношения масс разные, то при коромысле, установленном перпендикулярно к направлению центробежных сил, эти силы не будут уравновешены и вызовут поворот коромысла вокруг оси, совпадающей с нитью, на которой подвешено коромысло. Центробежная сила суточного вращения больше центробежной силы годового вращения; однако поворот коромысла относительно Солнца совершается просто в процессе вращения Земли, без изменения взаимного расположения коромысла и окружающих его лабораторных предметов и рельефа поверхности Земли. Поэтому практически удобнее следить за тем, испытывает ли коромысло повороты в зависимости от его ориентации относительно Солнца.

Из отсутствия таких поворотов Этвеш сделал вывод, что отношение весовой и инертной масс для разных тел различается не более, чем на 10^{-8} . В последнее время в США опыты Этвеша были повторены Дикке (1961), Роллом, Кротковым и Дикке (1964) и в Советском Союзе Брагинским, Пановым (1971). Группа Дикке довела точность до 10^{-10} , а группа Брагинского до 10^{-12} . Их результаты совпадают с результатом Этвеша: отношение гравитационной и инертной масс разных веществ совпадают. Но, по Брагинскому, точность этого совпадения 10^{-12} ! Остановимся на смысле полученного результата.

Инертная масса зависит от энергии — это вывод СТО. Действительно, из СТО известно, что когда два атома дейтерия соединяются в один атом гелия, то инертная масса уменьшается приблизительно на $6 \cdot 10^{-3}$ своей величины в соответствии с дефектом масс гелия и дейтерия. Точные определения массы при помощи масс-спектрографа, с одной стороны, и прямые измерения энергии ядерных реакций, — с другой, подтверждают этот вывод СТО.

От чего же зависит гравитационная масса тела, и, следовательно, сила, испытываемая им в поле тяготения? Зависит ли она от числа барионов в теле, т. е. от барионного заряда, наподобие того как электростатическое притяжение зависит от электрического заряда, или эта сила зависит от полной энергии тела? Для обычных веществ (не мезонов, не антивещества) число барионов и инертная масса приблизительно пропорциональны

друг другу с расхождениями около 10^{-3} . Поэтому при малой точности опыт типа Этвеша не мог бы решить вопрос. Однако точность опыта 10^{-12} приводит к категорическому выводу о том, что сила тяжести пропорциональна именно энергии тела, как и инертная масса. Такая точность означает прочность фундамента ОТО.

Эксперимент Этвеша показывает, что притяжение не определяется барионным зарядом тела и всемирное тяготение нельзя представлять себе наподобие электростатического притяжения разноименных электрических зарядов. Поэтому абсолютно ошибочны и антинаучны представления о том, что какие-то частицы, например, так называемая антиматерия (позитроны, антипротоны, антинейтроны), могут испытывать «антигравитацию». Из опытов на ускорителях хорошо известно, что для создания античастиц нужно затратить энергию; эта энергия является источником массы античастицы, античастица имеет весомую массу, в точности такую же, как и соответствующая частица. Косвенным доказательством этого являются и опыты Этвеша и Дикке.

Ли и Янг (1955) (см. также работу Дикке (1962)) ставили вопрос, нет ли *наряду* со всемирным тяготением еще аналога кулоновских сил, пропорциональных числу нуклонов; опыты Этвеша и Дикке показывают, что таких сил нет или, точнее, что если есть, то во всяком случае эти силы находятся за пределами точности опыта; для этого нужно, чтобы предполагаемые Янгом и Ли силы были в 10^7 раз слабее гравитационных и в 10^{43} раз слабее кулоновских (для двух протонов *).

Подчеркнем, что если бы силы, связанные с барионным зарядом, существовали, то ОТО тем не менее осталась бы в силе. Правда, в этом случае выявить из опыта фундаментальные факты, лежащие в основе ОТО, было бы гораздо сложнее.

§ 2. Основная идея ОТО

Ньютону представлялось очевидным, что физическое пространство — евклидово; существуют параллельные линии, сумма углов треугольника с прямыми сторонами равна π , длина окружности равна $2\pi r$ и т. д., а время течет всегда и везде одинаково.

Сама идея, что свойства пространства могут быть иными (например, сумма углов треугольника зависит от его площади), возникла гораздо позже. Математически такие пространства были открыты и исследованы Лобачевским.

*) Существование сил Ли и Янга невозможно в однородной изотропной космологической модели (см. об этом гл. 22 нашей книги «Релятивистская астрофизика»).

В СТО в инерциальной системе отчета квадрат четырехмерного расстояния (в пространстве и времени) между двумя бесконечно близкими событиями (интервал) записывается в виде

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2, \quad (1.2.1)$$

где c — скорость света, t — время, x, y, z — декартовы координаты. Такая система координат носит название галилеевой.

Выражение (1.2.1) имеет вид, аналогичный выражению для квадрата расстояния в евклидовом трехмерном пространстве в декартовых координатах (с точностью до числа измерений и знаков перед квадратами дифференциалов в правой части). Такое пространство — время принято называть плоским евклидовым или, точнее, псевдоевклидовым, подчеркивая особый характер времени: в выражении (1.2.1) перед квадратом дифференциала времени стоит знак (+), в отличие от знаков перед пространственными координатами. Таким образом, СТО является теорией физических процессов в плоском пространстве — времени, носящем название пространства — времени Минковского.

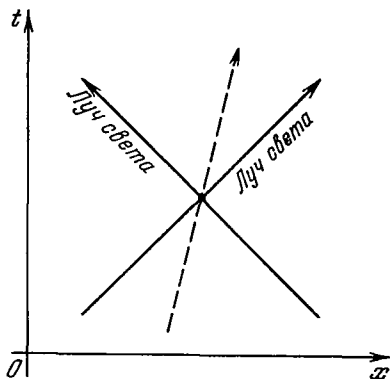


Рис. 1. Пространство — время Минковского. x — пространственная координата t — время. Пунктир — мировая линия пробной частицы, движущейся по инерции.

Движение свободной частицы по инерции в этом пространстве — времени изображается прямой линией (рис. 1). Эта линия носит название мировой линии свободной частицы. Мы не останавливаемся на упомянутых вопросах более подробно, предполагая, что читатель знаком с основами СТО.

Идея Эйнштейна, вдохновленная принципом эквивалентности и положенная в основу теории тяготения, заключается в том, что и в поле тяготения все тела движутся по экстремальным (геодезическим) линиям в пространстве — времени, которое, однако, уже не плоское, а искривленное.

Массы, создающие поле тяжести, искривляют пространство — время. Те тела, которые движутся в этом искривленном пространстве — времени, и в этом случае движутся по одним и тем же геодезическим линиям, независимо от массы или состава тела. Движение по геодезической в искривленном пространстве — времени воспринимается нами как движение по кривой с переменной скоростью. Но с самого начала в теории Эйнштейна заложено, что искривление траектории, закон изменения скорости — это

свойства пространства — времени, свойства геодезических в этом пространстве, а значит, ускорение любых разных тел должно быть одинаково, значит, отношение весовой массы к инертной (от которого зависит ускорение тела в данном поле тяжести) одинаково для всех тел. Таким образом, поле тяготения есть отклонение свойств реального пространства — времени от свойств плоского многообразия. Однако исторически Эйнштейн исходил из более наглядных представлений, из простой физической модели поля тяготения, обладающего свойством равенства ускорения всех тел.

Хорошо известна модель лифта: в отсутствие истинного поля тяготения в замкнутом, ускоренно движущемся объеме (в кабине лифта, к которой извне приложена сила) все явления протекают в точности так же, как в поле тяготения в таком же объеме, покоящемся или движущемся равномерно *). Относительно кабины тела движутся ускоренно и это ускорение одинаково для всех тел. В ускоренно движущейся кабине (без истинного тяготения) можно наблюдать и другие проявления тяготения, например, изменение частоты распространяющегося света. В самом деле, будем сравнивать частоту испущенного света с частотой света, принятого через время Δt после испускания. За это время скорости кабины и всехпредметов изменятся вследствие ускорения. Значит, скорость приемника света в момент приема будет отличаться от скорости источника. За счет доплер-эффекта возникает разность частот испущенного и принятого света, зависящая от направления луча света и направления ускорения. Такова трактовка внешнего наблюдателя, знающего, что кабина движется ускоренно.

Внутренний наблюдатель в лифте приписывает изменения частоты действию на свет того же «гравитационного» поля, которое вызывает ускоренное движение (относительно кабины) свободных тел внутри кабины.

Если это ускорение направлено от излучателя к приемнику, то свет испытывает «синее» смещение, в противоположном случае — «красное».

Точно так же легко убедиться, что в кабине будет наблюдаться искривление траектории светового луча относительно трехмерной системы координат, скрепленной с кабиной. Таким образом, явления в ускоренно движущейся системе отсчета и в поле тяготения в точности одинаковы.

Однако этот прием описывает только однородное гравитационное поле, одинаковое по величине и направлению во всем пространстве. Поля тяготения, создаваемые отдельными телами, не таковы.

*) В поле тяготения для того, чтобы кабина покоилась, к ней также должна быть приложена внешняя сила, уравновешивающая силу тяготения.

Для того чтобы имитировать поле тяготения Земли, например, нужны лифты с различным направлением ускорения в различных точках. Установив между собой связь, наблюдатели в различных лифтах обнаружат, что они движутся друг относительно друга и! тем самым установят наличие истинного поля тяготения, которое нельзя свести к одной ускоренно движущейся системе координат. Истинное гравитационное поле нельзя устранить преобразованием координат; это особенно подчеркивает в своей известной монографии Фок (1964). Однако модель лифта настолько естественно описывает важнейшие свойства тяготения (равенство ускорений всех тел, влияние на свет), что от нее неразумно отказываться. Для того чтобы сохранить применимость этой модели локально (в каждой точке пространства — времени), вводят соответствующее преобразование системы отсчета в каждой области. При этом, однако, оказывается, что в целом глобально преобразование уже не сводится просто к иному движению в плоском пространстве — времени, а означает переход к искривленному пространству — времени.

В следующих параграфах будут кратко изложены математические методы описания кривизны пространства — времени, необходимые для дальнейшего. Читателей, интересующихся подробным изложением вопроса, мы отсылаем к книгам Рашевского (1964), Ландау и Лифшица (1967) и работе Зельманова (1959а).

§ 3. Неинерциальные и нестатические системы в пространстве — времени Минковского

Для того чтобы лучше уяснить смысл кривизны пространства — времени, напомним сначала особенности геометрии пространства и течения времени в неинерциальных и нестатических системах отсчета, движущихся с ускорением в плоском пространстве — времени Минковского. Это позволит нам ввести понятия, необходимые для вычислений в искривленном пространстве — времени *).

В мире Минковского (т. е. вдали от тяготеющих масс) геометрия в инерциальной системе отсчета евклидова и время течет везде одинаково.

Рассмотрим теперь, следуя Эйнштейну (1965 **)) (см. также Ландау и Лифшиц (1967)), равномерно вращающийся диск. Наблюдатель А, не участвующий во вращении, может измерить длину

*) С математической точки зрения это соответствует введению криволинейных координат на плоскости. полученный аппарат затем используется для вычислений на кривой поверхности, где пользоваться криволинейными координатами просто необходимо.

**) Мы ссылаемся на собрание трудов Эйнштейна, первый том которых вышел в 1965 г.

окружности края диска l и его диаметр d (например, измеряя длину окружности, начерченную непосредственно под вращающимся диском, и диаметр этой окружности). Очевидно, что $l/d = \pi$. Другой наблюдатель, B , находящийся на вращающемся диске, тоже измеряет длину окружности, непосредственно прикладывая масштаб к его краю, а затем к диаметру.

Наблюдатель A замечает, что когда наблюдатель B прикладывает движущийся масштаб к краю диска, масштаб испытывает лоренцово сокращение длины. Следовательно, на длине той же окружности уложится больше масштабных отрезков, и длина окружности получится больше, чем при измерении в инерциальной системе, а именно, $\tilde{l} = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, где v — скорость края

диска. Когда на вращающемся диске масштаб прикладывают к диаметру, для неподвижного наблюдателя A он не сокращается в длине, так как движется в поперечном направлении. Следовательно, измерение диаметра даст то же число, что и в инерциальной системе $\tilde{d} = d$. Поэтому по изменению на вращающемся

диске отношение $\frac{\tilde{l}}{\tilde{d}} = \frac{l}{d \sqrt{1 - v^2/c^2}} > \pi$, что не соответствует геометрии Евклида *). Заметим, что если скорость вращения диска меняется, то геометрия будет меняться со временем.

Обратимся теперь к свойствам течения времени. Чем дальше от центра диска, тем больше линейная скорость вращения, тем медленнее идут часы согласно формуле СТО: $\tilde{t} = t \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Таким образом, темп течения времени разный в разных точках диска. Если же скорость вращения меняется, то и темп этот меняется с течением времени.

Но это еще не все. Рассмотрим часы, расположенные на одной окружности диска. Они движутся с одинаковой линейной скоростью v , и темп их хода одинаков. Чтобы они всегда показывали одинаковое время, у них должно быть начало отсчета, т. е. их нужно синхронизовать. Из СТО известно, что если синхронизовать с помощью лучей света часы I и II в двух точках движущегося тела (рис. 2), то для неподвижного наблюдателя часы I идут несколько впереди часов II . Поэтому, если попытаться синхронизировать часы, расположенные на окружности на вращающемся диске, получим следующее (рис. 2). Часы II отстают для внешнего наблюдателя от I , часы III от II и тем более от I и т. д. Обойдя всю окружность и вернувшись к I , мы

*) Заметим, что здесь нельзя обратить рассуждения, считая наблюдателя B покоящимся, а наблюдателя A движущимся, ибо на диске действуют центробежные и кориолисовы силы (вызванные вращением), которых нет в инерциальной системе A . Системы A и B неравноправны.

должны заключить, что в этой же точке часы, синхронные с I , должны идти позади I , что явно нелепо.

Рассуждение показывает, что на вращающемся теле нельзя установить единое время. Время не только течет по-разному в разных точках, но и понятия одновременности в одной и той же системе отсчета не существует.

До сих пор мы рассматривали диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью. Предполагалось, что свойства диска не изменяются со временем. Когда мы анализировали измерение длины окружности прикладыванием масштаба, мы не заботились о покрытии масштабом всех частей в один и тот же «момент времени», так как с течением времени свойства не менялись. Теперь мы понимаем, что представление об одновременности не применимо к конечным областям диска. Вот почему бессмысленно говорить о свойствах диска как целого в данный «момент», если диск вращается с переменной угловой скоростью. Однако для малых частей диска можно с достаточной точностью ввести понятие одновременности, чтобы определить геометрические свойства этих малых частей диска и говорить об отклонении их геометрии от евклидовой (т. е. отклонение суммы углов треугольника от π и т. п.).

Если угловая скорость диска меняется со временем, то меняются и геометрические свойства его различных частей.

Подведем итог. Уже в обычном (и привычном) плоском пространстве — времени с телами, движущимися ускоренно, нельзя связать жесткую систему пространственных координат, в которой выполняется трехмерная геометрия Евклида и течет единое время, как это можно сделать с телами, движущимися по инерции. За исключением специальных случаев (например, равномерно вращающийся диск), любая система отсчета будет с течением времени деформироваться, ее геометрические свойства (как говорят, свойства сопутствующего пространства системы отсчета) будут меняться так же, как и ход связанных с ней часов.

В ньютоновской физике жесткая декартова система отсчета могла быть задана положением в каждый момент начала отсчета и ориентацией осей. В релятивистской теории, в инерциальной системе СТО, ситуация не меняется, но при неинерциальном движении, чтобы определить систему отсчета, надо задать не только движение и повороты одного ее участка (начала отсчета), но и всех других участков. Таким образом, системой отсчета

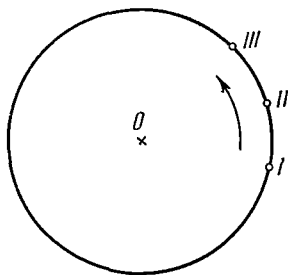


Рис. 2. К синхронизации часов на вращающемся диске (см. текст).

является совокупность пробных частиц (с каждой из которых связаны часы), заполняющих всю интересующую нас область пространства и движущихся по нашему произвольному выбору.

Аналогичная ситуация имеет место и в ОТО. Различие заключается в том, что в СТО в отсутствие полей тяготения всегда можно перейти от неинерциальной системы отсчета к инерциальной и пользоваться ею во всей интересующей нас области пространства — времени. В ОТО этого сделать нельзя вследствие кривизны пространства — времени.

Обратимся теперь к математическому выражению указанных выше особенностей. Все формулы, которые мы получим, будут справедливы не только в плоском пространстве — времени, но и в искривленном пространстве — времени общей теории относительности, так как они формулируются локально, а в силу принципа эквивалентности гравитационное поле локально неотличимо от ускоренной системы отсчета.

§ 4. Измерение времени и пространственных расстояний

В инерциальной системе отсчета СТО не обязательно пользоваться декартовыми пространственными координатами. Можно использовать любые криволинейные координаты, например, сферические. В общем виде преобразование от одних пространственных координат к другим записывается в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3). \quad (1.4.1)$$

Здесь индекс α пробегает значения 1, 2, 3, а x^1, x^2, x^3 обозначают три пространственные координаты.

Выражение для ds^2 примет теперь вид, отличный от (1.2.1). Вместо последних трех квадратов дифференциалов декартовых координат будет стоять выражение квадрата элемента пространственного расстояния в криволинейных координатах (взятое с обратным знаком). В сферических координатах это будет — $dl^2 = -(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2)$, и интервал запишется в виде

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.4.2)$$

В цилиндрических координатах

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2. \quad (1.4.3)$$

Преобразование (1.4.1) означает, что мы от одной 3-мерной пространственной сетки координат перешли к другой, но система отсчета (см. § 3 этой главы) осталась прежней. При переходе к иной системе отсчета, произвольно движущейся относительно инерциальной системы, преобразование координат содержит уже

время

$$x^i = x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, t). \quad (1.4.4)$$

Латинские индексы пробегает значение (0, 1, 2, 3).

Пространственная часть ($i = 1, 2, 3$) этого преобразования полностью определяет движение новой системы отсчета. Индекс «0» относится ко времени. Временная часть ($i = 0$) преобразования (которая включает в себя не физическое, а координатное время; см. ниже) может быть произвольной; она определяет лишь способ отсчета координаты времени и в этом смысле не существенна. О связи между координатным и физическим временем см. ниже.

Переход к равномерно вращающейся системе отсчета записывается в виде (Ω — угловая скорость)

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= \tilde{x}^1 \cos \Omega t - \tilde{x}^2 \sin \Omega t, \\ x^2 &= \tilde{x}^1 \sin \Omega t + \tilde{x}^2 \cos \Omega t, \\ x^3 &= \tilde{x}^3 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.5a)$$

или в цилиндрических координатах

$$r = \tilde{r}, \quad z = \tilde{z}, \quad \varphi = \tilde{\varphi} + \Omega t. \quad (1.4.5b)$$

Символ t будет сохранен для обозначения координатного (не физического!) времени в новой системе отсчета. Способ отсчета координаты времени при (1.4.5a, b) мы никак не меняли, т. е. $\tilde{x}_0 = t$.

Теперь, подставляя (1.4.5a) в (1.4.3), мы видим, что в общем случае меняется все выражение для ds^2 :

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 \tilde{r}^2) dt^2 - 2\Omega \tilde{r}^2 d\varphi dt - d\tilde{z}^2 - r^2 d\tilde{\varphi}^2 - d\tilde{r}^2 \quad (1.4.6)$$

Теперь квадрат интервала является некоторой общей квадратичной формой:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (1.4.7)$$

Здесь (и в дальнейшем) по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование: латинские индексы пробегает значение 0, 1, 2, 3; x^1, x^2, x^3 обозначают пространственные координаты (вообще говоря, криволинейные), $x^0 = ct$ — координата времени; g_k — функции координат и времени. При $i \neq k$ каждое слагаемое с произведением одинаковых дифференциалов входит в сумму дважды, например, $g_{01} dx^0 dx^1$ и $g_{10} dx^1 dx^0$. По определению, всегда считается $g_{ik} = g_{ki}$.

Величины g_{ik} называются компонентами метрического тензора: они определяют метрические свойства или, как говорят, метрику пространства — времени. Конкретный вид g_{ik} как функций координат и времени определяется не только свойствами пространства — времени, но и выбором системы отсчета, выбором

пространственных координат в ней и выбором способа отсчета времени (временной координаты).

В выражении (1.4.7) содержатся все сведения о геометрических свойствах системы отсчета и свойствах времени. Как пользоваться этим выражением? Во-первых, для определения течения времени в некоторой фиксированной точке данной системы отсчета, очевидно, надо считать x^1 , x^2 и x^3 постоянными: $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$. Тогда ds будет выраженным в единицах длины промежутком времени между двумя близкими событиями, т. е. умноженный на скорость света интервал времени $ds = cd\tau$. Следовательно,

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} dx^0. \quad (1.4.8)$$

В любой системе отсчета, образованной реальными телами, всегда $g_{00} > 0$.

Определим теперь пространственное расстояние dl . Это нельзя сделать, положив в (1.4.7) $dx^0 = 0$, $x^0 = \text{const}$. Дело в том, что одинаковым показаниям часов в разных точках пространства вовсе не обязательно соответствует один и тот же момент реального времени. Поэтому, прежде чем проводить вычисление, надо определить, какому значению x^0 в соседней точке соответствует «одновременное» с данным значение x^0 в исходной точке. Такая синхронизация часов осуществляется с помощью световых сигналов. Мы не будем здесь останавливаться на вычислениях, отсылая интересующихся к учебнику Ландау и Лифшица (1967), и приведем сразу окончательную формулу для квадрата пространственного расстояния dl^2 :

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (1.4.9)$$

Величины, стоящие в скобке, обозначают через $h_{\alpha\beta}^*$. Они определяют метрику трехмерного пространства системы отсчета *).

*) Это трехмерное пространство определено только локально, в следующем смысле: в каждой точке пространства — времени это бесконечно малая трехмерная поверхность, ортогональная к мировой линии $(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$. Но эту трехмерную поверхность в общем случае нельзя непрерывно продолжить к соседним точкам так, чтобы она была ортогональна к проходящим через них мировым линиям $(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$. Это легко понять на следующем простом примере для линий в привычном для нас трехмерном пространстве. Пусть в трехмерном пространстве имеется семейство линий, закрученных винтом. При попытке провести поверхность, ортогональную к ним, наподобие винтовой лестницы, мы получали бы разрывы, как у оси винтовой лестницы. Возвращаясь к четырехмерному пространству, заметим, что в соответствии с теоремой дифференциальной геометрии, бесконечно малые трехмерные поверхности можно соединить в конечную трехмерную поверхность тогда и только тогда, когда мировые линии $(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$ имеют нулевое кручение, или, что тоже самое, когда система отсчета не вращается, что обычно

Элемент объема трехмерного пространства определяется выражением $dV = \sqrt{h^*} dx^1 dx^2 dx^3$; $h^* = |h_{\alpha\beta}^*|$ — определитель матрицы, составленной из элементов $h_{\alpha\beta}^*$.

Рассмотрим для примера тот же вращающийся диск. По формуле (1.4.8) находим из (1.4.6) для интеграла времени (только над координатами в дальнейшем не пишем)

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} dt.$$

На оси вращения $r = 0$ и $d\tau = dt$. Предыдущая формула теперь переписывается в виде

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} d\tau_{\text{оси}}.$$

Время течет тем медленнее, чем дальше точка от оси вращения.

Для элемента пространственного расстояния из (1.4.6) и (1.4.9) находим

$$dl = \sqrt{dr^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} + dz^2}. \quad (1.4.10)$$

С помощью (1.4.10) получаем, что при $z = \text{const}$, $r = \text{const}$,

$dl = \frac{r d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}}$ и отношение длины окружности к диаметру равно

$$\frac{l_{\text{окр}}}{d} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}},$$

т. е. больше π , в соответствии со сказанным в предыдущем параграфе.

Приведем еще пример нестатической, т. е. деформирующейся с течением времени системы отсчета.

Рассмотрим в пространстве — времени Минковского совокупность частиц, вылетающих в некоторый момент из одной точки со всевозможными скоростями по всем направлениям. Мировые линии таких частиц заполняют внутреннюю часть светового конуса. Систему отсчета, связанную с частицами, назовем системой Милна (рассматривавшего такую модель).

не выполнено. Следовательно, хотя пространственная метрика $h_{\alpha\beta}^*$ определена в каждой точке пространства — времени, она обычно не является метрикой крупномасштабной трехмерной поверхности, вписанной в пространство — время. Это метрика трехмерной поверхности, геометрические свойства которой (риманова и гауссова кривизны; см. конец этого параграфа и конец § 8), а также деформации ее со временем и т. д. описывают геометрические и кинематические свойства системы отсчета в малой окрестности данной точки.

Переход от сферических координат \tilde{r} , $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}$ недеформирующей-ся системы отсчета и лабораторного времени \tilde{t} к координатам Милна ψ , θ , φ и собственному времени частиц t дается формулами

$$t^2 = \tilde{t}^2 - \tilde{r}^2/c^2, \quad th\psi = \tilde{r}/c\tilde{t}, \\ \theta = \tilde{\theta}, \quad \varphi = \tilde{\varphi}.$$

Эти формулы легко получить из следующих соображений. Для каждой частицы имеем $\tilde{r} = v\tilde{t}$, где v — постоянная скорость частицы. Можно выбрать v в качестве лагранжевой координаты. Однако удобно в качестве такой координаты выбрать не само v , а величину $\psi = \operatorname{arth} \frac{v}{c} = \operatorname{arth} \frac{\tilde{r}}{c\tilde{t}}$. Кроме того, согласно лоренцевой формуле для сокращения времени $t = \tilde{t} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\tilde{t}^2 - \frac{\tilde{r}^2}{c^2}}$.

Таким образом,

$$t = \sqrt{\tilde{t}^2 - \frac{\tilde{r}^2}{c^2}}, \quad \psi = \operatorname{arth} \frac{\tilde{r}}{c\tilde{t}}, \quad \theta = \tilde{\theta}, \quad \varphi = \tilde{\varphi}.$$

Подставляя эти преобразования в $ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2)$, получаем выражение для ds^2 в системе Милна:

$$ds^2 = d(ct)^2 - (ct)^2 [d\psi^2 + \operatorname{sh}^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

В фиксированный момент времени проведем через начало координат экваториальную плоскость $\theta = \pi/2$. Очевидно, отношение длины экватора $l = 2\pi ct \operatorname{sh} \psi$ к диаметру $d = 2\psi ct$ равно $\frac{l}{d} = \pi \frac{\operatorname{sh} \psi}{\psi} > \pi$.

Заметим, что если в данном месте поверхности отношение длины малой окружности к диаметру l/d меньше π , то кривизна поверхности положительна и геометрия подобна геометрии на сфере. Если же $l/d > \pi$, то кривизна отрицательна и геометрия подобна геометрии на псевдосфере (седлообразной поверхности).

Численно кривизна поверхности характеризуется квадратом радиуса кривизны a^2 , который определяется следующим образом. На поверхности чертится малый треугольник, стороны которого — кратчайшие линии (геодезические). Обозначим через Σ сумму углов треугольника. Можно доказать, что разность $\Sigma - \pi$ пропорциональна площади треугольника S :

$$\Sigma - \pi = c\tilde{S}.$$

Коэффициент пропорциональности \tilde{c} носит название кривизны, а величина $a = 1/\tilde{c}^{1/2}$ — радиуса кривизны. Если $\Sigma > \pi$, то $\tilde{c} =$

$= 1/a^2 > 0$, т. е. кривизна положительна. Если $\Sigma > \pi$, то $\varepsilon = 1/a^2 < 0$, т. е. кривизна отрицательна, a — мнимо. Чем меньше $|a^2|$, тем больше кривизна, и геометрия сильнее отличается от евклидовой.

Кривизна 3-мерного пространства в данной точке находится следующим образом. Через точку проводится геодезическая поверхность (аналог плоскости в евклидовом пространстве) и определяется ее кривизна. Эта кривизна называется римановской кривизной пространства в данном двумерном направлении. В разных направлениях кривизна может быть разная. Кривизна, усредненная по всем направлениям, носит название гауссовой кривизны пространства. Формулы для вычисления кривизны в общем случае мы выписывать не будем. Для важных частных случаев формулы даны в конце § 8 этой главы.

Нетрудно понять математическую причину неевклидовости 3-мерной геометрии в неинерциальной или нестатической системе отсчета в плоском 4-мерном пространстве — времени. Когда рассматривается 3-мерное пространство и н е р ц и а л ь н о й системы, это означает сечение 4-мерного пространства — времени «плоской» 3-мерной гиперповерхностью. Пространство 3-мерной н е и н е р ц и а л ь н о й (или нестатической) системы является искривленным сечением 4-мерного пространства — времени. Неудивительно, что геометрия этого искривленного сечения неевклидова. Ситуация полностью аналогична геометрии на искривленной двумерной поверхности в обычном (плоском) 3-мерном пространстве. Несмотря на то, что это пространство плоское, геометрия на кривой поверхности неевклидова.

§ 5. Векторы, тензоры и геодезические линии

В СТО вводится понятие 4-мерного вектора (4-вектора) B_i как совокупности четырех величин (функций координат и времени), которые при преобразовании Лоренца преобразуются как координаты x^i . Примерами 4-вектора являются 4-скорость $u^i = \frac{dx^i}{ds}$, 4-импульс или 4-потенциал электромагнитного поля A_i . 4-тензор второго ранга B_{ik} определяется как совокупность величин, преобразующихся при преобразовании Лоренца как произведение координат $x^i x^k$. Примером 4-тензора является тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

По аналогии с тензором второго ранга вводится понятие тензора третьего и более высоких рангов.

В инерциальных системах СТО пользуются галилеевыми координатами, в которых интервал записывается в виде (1.2.1). При переходе к криволинейным координатам в 4-мерном пространстве понятие тензора и вектора обобщаются. Прежде всего вводится понятие *ковариантных* и *контрвариантных* компонент вектора.

Контрвариантным 4-вектором называется совокупность величин B^i (с индексом вверху), которые при преобразовании координат $x^i = x^i(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ преобразуются по закону

$$B^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} B^k. \quad (1.5.1)$$

Контрвариантным вектором является, например, совокупность дифференциалов координат dx^i , поскольку $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k$.

Ковариантные компоненты того же вектора B_i (с индексом внизу) определяются следующим образом:

$$B_i = g_{ik} B^k. \quad (1.5.2)$$

Из определения g_{ik} как коэффициентов в (1.4.7) следует закон их преобразования $g_{ik} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} \tilde{g}_{lm}$. Используя этот закон и (1.5.2), находим закон преобразования для ковариантных компонент вектора:

$$B_i = g_{ik} B^k = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} \tilde{g}_{lm} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^n} B^n = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \tilde{B}_l. \quad (1.5.3)$$

По аналогии обобщается понятие тензора: для контрвариантного тензора B^{ik}

$$B^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^m} \tilde{B}^{lm}, \quad (1.5.4)$$

для его ковариантных компонент

$$B_{ik} = g_{li} g_{mk} B^{lm} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} \tilde{B}_{lm}. \quad (1.5.5)$$

Можно использовать также смешанные компоненты:

$$B^i_k = B^{il} g_{lk} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m} \tilde{B}^m_l. \quad (1.5.6)$$

Аналогично обобщается понятие тензора более высокого ранга.

Компоненты g_{ik} , как показывает закон их преобразования, составляют тензор. Этот тензор играет в теории фундаментальную роль и носит название *фундаментального метрического тензора*.

Определитель

$$g = |g_{ik}| \quad (1.5.7)$$

называется *фундаментальным определителем*.

Величины

$$g^{ik} = \frac{A^{ik}}{g}, \quad (1.5.8)$$

где A^{ik} — алгебраические дополнения элемента g_{ik} , называются *контрвариантными компонентами* метрического тензора.

Из (1.5.8) следует, что

$$g_{il}g^{im} = \delta_l^m, \quad (1.5.9)$$

где δ_l^m — символ Кронекера. Отсюда, используя (1.5.5), находим

$$B^{ik} = g^{il}g^{mk}B_{lm}. \quad (1.5.10)$$

Таким образом, если опускание значков производится с помощью ковариантных компонент g_{ik} , то их поднятие — с помощью контрвариантных компонент g^{ik} .

Смешанный тензор g_k^i равен символу Кронекера $g_k^i = \delta_k^i$. образуем величину $A^i B_i$. Она является скалярным произведением векторов и не изменяется при преобразовании координат. В частности, квадрат длины вектора есть

$$A^2 = A^i A_i. \quad (1.5.11)$$

Аналогично можно составить скаляр из двух тензоров.

$$A^{ik} B_{ik} = A_i^k B_k^i = A_{ik} B^{ik}.$$

Все три записи эквивалентны. В частности, если второй тензор — фундаментальный, то $A^{ik} g_{ik} = A_i^i$ называют *следом* тензора.

Подобным же способом из тензоров высшего ранга можно образовывать тензоры более низкого ранга. Например,

$$A_{klm}^i g_i^m = A_{kli}^i = A_{kl}.$$

Такая операция называется *свертыванием* тензоров.

В криволинейных координатах обобщается также понятие дифференцирования векторов и тензоров. Ковариантной производной (обозначается точкой с запятой) контрвариантного вектора и ковариантного вектора называются величины (тензоры)

соответственно

$$B^i_{;k} = \frac{\partial B^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} B^l, \quad (1.5.12)$$

$$B_{i;k} = \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} B_l. \quad (1.5.13)$$

Здесь Γ^l_{mn} — символы Кристофеля (не тензоры!), определяемые выражениями

$$\Gamma^l_{mn} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} \right). \quad (1.5.14)$$

В декартовых координатах, очевидно, все $\Gamma^l_{mn} = 0$, и ковариантное дифференцирование сводится к обычному.

Аналогично дифференцируются тензоры:

$$B^{ik}_{;l} = \frac{\partial B^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} B^{mk} + \Gamma^k_{ml} B^{im}, \quad (1.5.15)$$

$$B^i_{k;l} = \frac{\partial B^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} B^i_m + \Gamma^i_{ml} B^m_k, \quad (1.5.16)$$

$$B_{ik;l} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} B_{mk} - \Gamma^m_{kl} B_{im}. \quad (1.5.17)$$

Полезно заметить, что из (1.5.12), (1.5.14) и выражения для ds^2 можно получить следующую формулу для ковариантной расходимости вектора:

$$B^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} B^i}{\partial x^i}. \quad (1.5.18)$$

Наконец, приведем уравнение в криволинейных координатах, которое определяет геодезическую линию, соединяющую в 4-мерном пространстве две точки (в плоском пространстве это прямая):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (1.5.19)$$

Движение тела по инерции в пространстве Минковского, как известно из СТО, изображается прямой (и к тому же времениподобной) линией. Следовательно, (1.5.19) есть уравнения движения тела по инерции, записанные в криволинейных координатах неинерциальной системы отсчета. Дифференциальное уравнение для геодезической в искривленном пространстве — времени имеет точно такую же форму, что и уравнения (1.5.19) для прямой линии в плоском пространстве — времени в криволинейных координатах.

§ 6. Динамические и кинематические величины

Величины g_{ik} в (1.4.7) составляются из производных преобразования (1.4.4), определяющего движение системы отсчета относительно исходной инерциальной системы. В частности, в g_{ik} входят $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0}$, т. е. скорости. Поэтому естественно, что g_{ik} содержит информацию не только о течении времени и геометрии системы, но и о ее ускорениях и деформации. Приведем здесь окончательные формулы для вычисления динамических и кинематических величин, отсылая за подробностями к работам Зельманова (1944; 1959b). Трехмерный вектор ускорения, который испытывает относительно системы отсчета свободное покоящееся в данный момент в этой системе тело, определяется, как будет показано ниже, выражением

$$F^\alpha = - \frac{c^2 \Gamma_{00}^\alpha}{g_{00}} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (1.6.1)$$

Величины Γ_{00}^α определены в предыдущем параграфе [см. (1.5.14)], F^α образует в системе отсчета поле инерциальных сил. Вектор F^α является трехмерным и для операций с ним надо использовать тензор $h^*_{\alpha\beta}$ (см. § 4 этой главы). Напомним, что для вычисления величины вектора F^α (в данном случае 3-мерного), т. е. величины ускорения, необходимо образовать скаляр [см. (1.5.11)]:

$$F = \sqrt{F^\alpha F_\alpha} = \sqrt{F^\alpha F^\beta h^*_{\alpha\beta}}.$$

Например, на вращающемся диске из (1.4.6) находим

$$F^1 = \frac{\Omega^2 r}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}, \quad F^2 = F^3 = 0, \quad F = \frac{\Omega^2 r}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}.$$

Вращение системы отсчета, т. е. поле кориолисовых сил, определяется 3-мерным тензором угловой скорости вращения $A^{\alpha\beta}$. С помощью этого тензора можно вычислить 3-мерный вектор угловой скорости вращения *) $\tilde{\Omega}_\alpha$:

$$\tilde{\Omega}_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{\beta\gamma}. \quad (1.6.2)$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ определяется следующим образом: $\varepsilon_{123} = \left(-\frac{g}{g_{00}}\right)^{1/2}$; любая перестановка индексов меняет только знак компоненты; если хотя бы два значка совпадают, то $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Тензор угловой

*) Мы обозначаем здесь вектор $\tilde{\Omega}_\alpha$, чтобы не путать с вектором Ω нерелятивистской теории.

скорости вращения определяется с помощью выражений

$$A^{\alpha\beta} = \frac{-c}{\sqrt{g_{00}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^0} + g^{\alpha i} \Gamma_{i0}^{\beta} \right). \quad (1.6.3)$$

Скаляр $\tilde{\Omega} = \sqrt{\tilde{\Omega}_{\alpha} \tilde{\Omega}_{\beta} h^{*\alpha\beta}}$ есть угловая скорость поворота за единицу собственного времени $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$.

Для вращающегося диска в цилиндрической системе координат имеем

$$A^{12} = -A^{21} = \frac{\Omega}{r \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}}.$$

Остальные $A^{\alpha\beta} = 0$. Вектор угловой скорости имеет компоненты

$$\tilde{\Omega}_3 = \frac{\Omega}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}, \quad \tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_1 = 0.$$

В системе отсчета, в которой все $g_{0\alpha} \equiv 0$, все $A_{\alpha\beta} \equiv 0$. Если в некоторой области $A_{\alpha\beta} \neq 0$, т. е. система отсчета вращается, то в этой области нельзя синхронизовать часы. Для вращающегося диска это было показано выше. Если же $A_{\alpha\beta} = 0$, то это означает, что система не вращается и преобразованием координаты времени $\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3)$ можно обратить все g_{0i} в нули, т. е. синхронизовать часы.

Пусть в некоторый момент тело покоится в данной системе отсчета. Тогда $ds^2 = g_{00} (dx^0)^2$ и его 4-скорость имеет компоненты

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = g_{00}^{-1/2}; \quad u^{\alpha} = 0.$$

Из формулы (1.5.19) находим для пространственных компонент α :

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} = - \frac{\Gamma_{00}^{\alpha}}{g_{00}}.$$

Подставляя выражение $ds^2 = c^2 d\tau^2$ и используя символ F^{α} для инерциальной силы, получаем

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} = - \frac{c^2 \Gamma_{00}^{\alpha}}{g_{00}} = F^{\alpha}. \quad (1.6.1a)$$

Мы получили уравнение (1.6.1).

В частном случае стационарности метрики, т. е. при $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0} = 0$ выражение (1.6.1) переписывается в виде *)

$$F_\alpha = - \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \right) / g_{00}. \quad (1.6.1b)$$

Наконец, деформация координатной системы определяется 3 мерным тензором $D_{\alpha\beta}$:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{c}{V_{g_{00}}} \frac{\partial h_{\alpha\beta}^*}{\partial x^0}. \quad (1.6.4)$$

Скаляр $D = D_\alpha^\alpha = D_{\alpha\beta} h^{*\alpha\beta}$ — скорость относительного объемного расширения элемента объема системы dV . Если система с течением времени не деформируется, как, например, равномерно вращающийся диск, то $D_{\alpha\beta} = 0$.

Заметим, что F^α , $A^{\alpha\beta}$, Ω^α , $D^{\alpha\beta}$, не зависят от выбора координаты времени. Если мы будем преобразовывать координату времени [иными словами, по-разному выбирать единицу измерения времени (масштаб)]; кроме того, берется разное начало отсчета времени в разных точках системы отсчета]:

$$x^0 = x^0(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \quad (1.6.5)$$

то перечисленные величины вообще не меняются. Так и должно быть для величин, описывающих состояние движения системы отсчета, ибо преобразование (1.6.5) это состояние не меняет. Такие величины были названы А. Л. Зельмановым (1956) хронометрическими инвариантами. Далее, если менять только пространственные координаты, т. е. по-разному чертить координатную сетку системы отсчета:

$$x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \quad (1.6.6)$$

то компоненты вектора F^α , например, меняются, аналогично изменениям компонент вектора при повороте декартовых координат, но сам вектор неизменен, неизменна его длина — скаляр \bar{F} . То же относится к скалярам Ω , D .

Лишь при переходе к другой системе отсчета, т. е. к другому состоянию движения: $x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$, $\partial x^\alpha / \partial \tilde{x}^0 \neq 0$ меняются и величины, его характеризующие, скаляры \bar{F} , Ω , D .

*) Точнее, для справедливости (1.6.1b) требуется только, чтобы $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}^{1/2}} \right) = 0$.

§ 7. Кривизна пространства — времени

В предыдущих параграфах коротко перечислены геометрические и физические свойства неинерциальных систем в плоском пространстве — времени Минковского.

Согласно ОТО вблизи массивных тел пространство — время искривлено и является 4-мерным римановым пространством (точнее, псевдоримановым)*). В конечной (не малой) области этого 4-мерного пространства уже нельзя ввести галилееву систему координат, в которой интервал имел бы вид (1.2.1)

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

но это можно сделать в малой области, введя в данном месте свободно движущуюся (свободно падающую в поле тяготения) систему отсчета. Такая система отсчета называется *локально галилеевой* **). В локально галилеевой системе поле тяготения не проявляется — имеет место невесомость. Математически возможность выбрать такую систему, очевидно, связана с тем, что малый участок кривого пространства совпадает с плоским касательным пространством.

По отношению к локально галилеевой системе другие системы, в которых уже проявляется действие тяготения, движутся ускоренно, и переход от галилеевой в данный точке системы к этим системам есть просто переход в малой области от инерциальной системы к неинерциальным. Силы инерции и силы тяготения локально неразличимы. Следовательно, как мы уже отмечали, все формулы для геометрических, динамических и кинематических величин, приведенные в предыдущих параграфах и имеющие локальный характер, т. е. описывающие свойства системы в малой области в данный момент времени, будут справедливы и в общем случае кривого пространства — времени. Вычисление длин, промежутков времени гравитационно-инерциальных сил, вращения и т. д. производится в ОТО по приведенным выше формулам. Подчеркнем только, что теперь уравнения (1.5.19) определяют в произвольных координатах не прямую, а экстремальную в кривом пространстве — времени геодезическую линию (в искрив-

*) Кривизна пространства — времени в ОТО не обязательно связана с присутствием вещества или (негравитационного) поля. Как будет видно из дальнейшего, ОТО предсказывает существование гравитационных волн, несущих энергию и вызывающих искривление пространства. С другой стороны, возможны нестационарные решения для пустого искривленного пространства — времени, описывающие анизотропную деформацию пространства и нигде не содержащие вещества. Эти решения, так же как и решения для гравитационных волн, описывают свободное гравитационное поле.

**) Число таких систем в каждой точке — ∞^6 . В такой системе в данной точке не только ds^2 имеет галилеев вид, но и все $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = 0$.

ленном пространстве — времени, очевидно, не может быть прямых линий; аналогами их являются геодезические линии).

Обратимся теперь к математическим средствам описания кривизны четырехмерного пространства — времени. Эта кривизна характеризуется тензором четвертого ранга:

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n. \quad (1.7.1)$$

Тензор R_{klm}^i носит название *тензора кривизны Римана*. Геометрический смысл этого тензора состоит в следующем. Пусть вектор из некоторой точки скользит вдоль малого замкнутого контура, составленного из геодезических линий так, чтобы составляющие вектора по ортогональным координатным осям в каждой точке были при малом продвижении неизменны (параллельный перенос вектора). В плоском пространстве — времени при возвращении в исходную точку вектор совпадает с первоначальным; в искривленном — ориентация вектора изменится (при неизменной длине!). Изменение компонент вектора A_k при обходе по контуру, огибающему малую двумерную поверхность Δf^{lm} , описывается формулой

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R_{klm}^i A_i \Delta f^{lm}.$$

Мы не будем здесь останавливаться на алгебраических и дифференциальных свойствах тензора кривизны. Отметим только, что число его независимых компонент равно 20 *).

Из тензора Римана путем операции свертывания (см. § 5 этой главы) можно получить тензор второго ранга:

$$R_{km} = R_{klm}^l g_i^l = R_{kim}^i. \quad (1.7.2)$$

Этот тензор симметричен:

$$R_{km} = R_{mk}; \quad (1.7.3)$$

он носит название *тензора Риччи*. Наконец, свертка R_{km} дает скаляр кривизны пространства:

$$R = R_{km} g^{km} = R_k^k. \quad (1.7.4)$$

*) Для трехмерного пространства число независимых компонент равно шести, что и позволяет, как отмечено на стр. 25, характеризовать его кривизну сферическим избытком трех ортогональных площадок. Ориентация в трехмерном пространстве трех взаимно ортогональных площадок + 3 кривизны дают шесть компонент.

Тензор R_{klm}^i полностью характеризует кривизну 4-мерного пространства — времени. В частности, равенство этого тензора нулю в некоторой области $R_{klm}^i = 0$ есть необходимое и достаточное условие того, что пространство — время в данной области неискривленное (плоское).

Равенство нулю скаляра $R = 0$ и даже тензора $R_{ik} = 0$ еще отнюдь не достаточно для того, чтобы пространство — время было плоским. Более того, поле тяготения вне материи как раз описывается уравнением $R_{ik} = 0$. Классификацию полей тяготения по алгебраическим свойствам тензора кривизны см. в книге Петрова (1966)

§ 8. Уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения движения

Уравнения Эйнштейна определяют связь между кривизной пространства — времени и распределением и движением вещества и полей. Они записываются в виде *)

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\kappa}{c^2} T_{ik}. \quad (1.8.1)$$

Здесь $\kappa = 8\pi G/c^2$ — постоянная тяготения Эйнштейна, T_{ik} — тензор энергии-импульса, зависящий от распределения и движения вещества и электромагнитного поля (в принципе, и других полей). Для газа этот тензор в криволинейных координатах записывается в виде

$$T^{ik} = (\varepsilon + P) u^i u^k - P g^{ik}. \quad (1.8.2)$$

Здесь $\varepsilon = \rho c^2$ — плотность энергии вещества (включая и массу покоя частиц) в той системе отсчета, в которой элемент вещества покоится; P — давление. Мы считаем вязкость газа малой и пренебрегаем также потоком энергии относительно вещества по сравнению с ρc^3 .

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} g_{lm} F^{il} F^{km} + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm}, \quad (1.8.3)$$

где F_{lm} — тензор электромагнитного поля.

Выпишем явный вид тензора (1.8.2) для газа в локально лоренцевой системе координат, в которой покоится газ:

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{vmatrix}.$$

*) О так называемом Λ члене в уравнениях Эйнштейна см. § 9 этой главы.

В этой системе $T_{0\alpha} = T_{\alpha 0} = 0$, потому, что нет потоков энергии и равен нулю импульс газа. Пространственная часть тензора диагональна $T_{\alpha}^{\beta} = P\delta_{\alpha}^{\beta}$, давление одинаково по всем осям. Принято называть этот факт законом Паскаля; говорят о паскалевой жидкости или газе.

В лоренцовой системе для магнитного поля, направленного вдоль оси $x^1 \equiv x$ (так что $H_y = H_z = 0$, $E = 0$), тензор энергии импульса записывается в форме (частный случай (1. 8. 3.))

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon = \frac{H^2}{8\pi}$ — плотность энергии. По оси x действует отрицательное давление (натяжение), равное $T_{11} = -\varepsilon$, по осям y и z действует положительное давление равное ε . Если поле направлено не по определенной оси, а произвольно, то в $T_{\alpha\beta}$ появляются недиагональные компоненты. Однако след T_{α}^{α} (равный $-T_{11} - T_{22} - T_{33}$ в декартовых координатах) остается инвариантным.

Для хаотического магнитного поля, усредняя тензор энергии-импульса по масштабам, значительно превышающим размер неоднородностей, получаем

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon/3 \end{vmatrix},$$

т. е. в среднем имеет место «паскалевость», хаотическое поле, подобно газу, но со специальным уравнением состояния $P = \varepsilon/3$.

Релятивистские частицы, движущиеся со скоростью света в положительном направлении оси x , дадут тензор

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Такие же частицы, движущиеся в противоположную сторону, дадут

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

При сложении потоков частиц со всеми равноправными направлениями снова получим тензор энергии-импульса релятивистского газа $P = \varepsilon/3$.

Вернемся к общему T_{ih} и запишем уравнения сохранения энергии и импульса. В СТО в декартовых координатах инерциальной системы отсчета тензор энергии-импульса удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad (1.8.4)$$

которое, как известно, выражает закон сохранения энергии и количества движения.

Обобщением выражения (1.8.4) для криволинейных координат является равенство нулю ковариантной дивергенции:

$$T_{i;k}^k = \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^k T_i^l - \Gamma_{ik}^l T_l^k = 0. \quad (1.8.5)$$

Очень важно, что закон (1.8.5) следует из уравнения поля (1.8.1). Действительно, как показывается в учебниках, левая часть уравнений поля удовлетворяет соотношению

$$\left(R_i^k - \frac{1}{2} g_i^k R\right)_{;k} = 0. \quad (1.8.6)$$

Тем не менее, (1.8.5) не выражает непосредственно закон сохранения каких-либо величин (т. е. неизменности этих величин во времени), ибо для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство (1.8.4), а не (1.8.5)*).

Выражение (1.8.5) было бы правильнее называть уравнениями движения, так как они непосредственно выражают законы движения материи с учетом тяготения **). Чтобы это показать для случая T_{ik} газа, выберем систему отсчета, движущуюся вместе с веществом (сопутствующую систему отсчета), т. е. будем пользоваться лагранжевыми координатами и собственным временем каждого элемента вещества. Обозначив через E энергию объема V элемента вещества $E = \varepsilon V$ и используя (1.8.2), выражение (1.8.5) для нулевого индекса $i=0$ можно привести к виду

$$dE + PdV = 0, \quad (1.8.7)$$

*) Только в случае (1.8.4) мы для суммы производных по пространственным координатам можем применить теорему Гаусса и перейти к интегралу по поверхности. В (1.8.5) атому мешают слагаемые, не имеющие вида обычной дивергенции.

**) Уравнения (1.8.4) также содержат уравнения движения в отсутствие поля тяготения.

а выражение (1.8.5) для пространственных значений индекса i записывается в виде

$$\frac{\partial P}{\partial x^\alpha} - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \frac{\partial P}{\partial x^0} = (\varepsilon + P) \frac{F_\alpha}{c^2}. \quad (1.8.8)$$

Уравнение (1.8.7) описывает изменение энергии за счет работы сил давления при деформации газа, уравнения (1.8.8) определяют сохранение импульса вещества в лагранжевых координатах. Очевидно, что при переходе к нерелятивистскому случаю $g_{0\alpha} \rightarrow 0$, $\varepsilon \gg P$ мы приходим в (1.8.8) к обычным уравнениям для импульса.

Точные уравнения (1.8.8) в случае покоящегося вещества являются уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial P}{\partial x^\alpha} = \frac{(\varepsilon + P)}{c^2} F_\alpha. \quad (1.8.8a)$$

Подчеркнем, что справа стоит множитель $\frac{(\varepsilon + P)}{c^2}$, а не ρ , как в нерелятивистской теории.

Запишем в криволинейных координатах закон сохранения числа исчезающих частиц (например, барионов). Пусть n_0 — плотность числа частиц в сопутствующей системе отсчета; составим 4-вектор

$$j^k = n_0 \frac{dx^k}{ds}, \quad (1.8.9)$$

Равенство нулю его ковариантной расходимости [см. (1.5.18)]

$$j^k_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} \frac{dx^k}{ds} n_0 \right)}{\partial x^k} = 0 \quad (1.8.10)$$

означает сохранение с течением времени интеграла по трехмерному объему (если нет потока через поверхность):

$$N = \iiint n_0 \frac{dx^0}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 = \iiint n_0 \frac{dx^0}{ds} \sqrt{g_{00}} dV. \quad (1.8.11)$$

Величина $n = n_0 \sqrt{g_{00}} \frac{dx^0}{ds}$ есть плотность распределения частиц в данной системе отсчета (см. ниже). Следовательно, полное число частиц N при выполнении (1.8.10) остается неизменным во времени.

Перепишем величину плотности распределения частиц $n = n_0 \sqrt{g_{00}} \frac{dx^0}{ds}$ через трехмерные величины. Определим прежде всего вектор трехмерной скорости v^α . Интервал собственного времени между двумя событиями в близких пространственных

точках определяется выражением

$$cd\tau = \frac{g_{0i} dx^i}{V g_{00}}.$$

Отсюда для компонент скорости получаем

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad v^2 = h_{\alpha\beta}^* v^\alpha v^\beta = \left(\frac{dl}{d\tau} \right)^2;$$

с помощью последнего выражения переписываем интеграл (1.8.11),

$$N = \iiint_V \frac{n_0 dV}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \left(1 + \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00} dx^0} \right)}}. \quad (1.8.12)$$

Выражение (1.8.12) отличается от обычной формулы специальной теории относительности только множителем $\left(1 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \frac{dx^\alpha}{dx^0} \right)$ в знаменателе *). Этот множитель возник потому, что одновременному физическому моменту в разных (близких) пространственных точках благодаря наличию компонент $g_{0\alpha}$ в выражении для интвала, соответствует разность координатного времени $\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}$.

Если в СТО использовать криволинейные 4-мерные координаты, в которых $g_{0\alpha} \neq 0$, то и там формула для числа частиц примет вид (1.8.12). Таким образом, в ОТО закон сохранения частиц записывается точно так же, как и в отсутствие тяготения. Это и не удивительно, так как тяготение, очевидно, не меняет числа частиц.

Наконец, выпишем еще выражение для гауссовой кривизны 3-мерного пространства (см. § 4 этой главы) сопутствующей системы отсчета в статистическом случае (т. е. когда все $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$):

$$G_G = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}. \quad (1.8.13)$$

В нестатическом случае изотропной (одинаковой по всем направлениям) деформации вещества и при отсутствии вращения имеет место формула

$$C_G = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{1}{9} D^2. \quad (1.8.14)$$

Вывод приведенных формул, см., например, в работе Зельманова (1959а).

*) Множитель $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ описывает лоренцево сокращение объема.

§ 9. Космологическая постоянная

Общие требования, обычно предъявляемые к уравнениям теории тяготения, допускают написание вариационного принципа с действием в следующей форме:

$$S = -mc \int ds - \frac{c^3}{16\pi G} \left[\int R dV + \int 2\Lambda dV \right], \quad (1.9.1)$$

где V — 4-мерный объем. При этом уравнения имеют вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{\kappa}{c^2} T_{ik}. \quad (1.9.2)$$

Здесь Λ — так называемая космологическая постоянная, а пропорциональные ей величины (ΛdV , Λg_{ik}) называют космологическими членами. Уравнения, очевидно, удовлетворяют условию локальной лоренц-инвариантности, и в том же смысле, что и уравнения без Λ , содержат в себе уравнения движения, так как по-прежнему $T^k_{i;k} = 0$.

Первоначально Эйнштейн выбрал Λ таким образом, чтобы получить стационарное космологическое решение с отличной от нуля средней плотностью $T^0_0 = \rho c^2 = \text{const}$; для этого нужно положить $\Lambda = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}$. После того как было открыто красное смещение, Эйнштейн склонялся к уравнениям с $\Lambda = 0$. В период до 1930 г. космологические решения с $\Lambda \neq 0$, стационарные и нестационарные, были подробно исследованы, однако вплоть до 1967 г. не было реальных указаний на необходимость или хотя бы желательность введения Λ . В 1967 г. одна из возможных интерпретаций распределения квазаров по красным смещениям показала, что Λ может быть не нулем, а иметь величину порядка $\Lambda \approx 10^{-55} \text{ см}^{-2}$. [Детали см. Петросян, Сальпетер, Жекерс (1967), Шкловский (1967b), Кардашев (1967).]

В настоящее время эта интерпретация не является доказанной; более того, она сталкивается с трудностями при объяснении новых наблюдений квазаров. Однако в ходе дискуссий выяснилось, что простейшее предположение $\Lambda = 0$ хотя и не опровергнуто, но не имеет еще сегодня четкого доказательства. Можно предвидеть, что в ближайшие годы предстоит большая и трудная работа по определению величины Λ или по крайней мере границ, в которых может быть заключена эта величина. После того как джин выпущен из бутылки (предположено, что может быть $\Lambda \neq 0$), легенды говорят, что загнать джина обратно бывает трудно. Даже если отпадает конкретная гипотеза $\Lambda \approx 10^{-55} \text{ см}^{-2}$, мы вернемся не к простодушному $\Lambda \equiv 0$, а к осторожному $-\tilde{a}^2 < \Lambda < \tilde{b}^2$, и к постепенному, мучительному уменьшению \tilde{a}^2 и \tilde{b}^2 .

Каков физический смысл космологической постоянной? Почему она интересна для физики в целом?

Один из подходов, уже упомянутый выше, подсказан размерностью $[\Lambda] = \text{см}^{-2}$. При таком подходе Λ рассматривается как принципиально неустранимая кривизна пустого пространства (без материи и гравитационных волн). Но теория тяготения связывает кривизну с энергией, импульсом и давлением материи. Перенос Λ -член в правую часть уравнений поля, получаем

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} - g_{ik} \Lambda. \quad (1.9.3)$$

Предположение $\Lambda \neq 0$ означает, что пустое пространство создает гравитационное поле, идентичное полю в теории с $\Lambda = 0$, но с заполняющей все пространство материей с плотностью массы $\rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}$, плотностью энергии $\epsilon_\Lambda = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}$ и давлением $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$. Для $\Lambda \approx 10^{-55} \text{ см}^{-2}$, $\rho_\Lambda = 10^{-28} \text{ г/см}^3$, $\epsilon_\Lambda = 10^{-7} \text{ эрг/см}^3$.

В этом смысле можно говорить о плотности энергии и давлении (тензоре натяжений) вакуума.

Заметим, что наши предположения относительно ϵ_Λ и P_Λ сформулированы таким способом, что релятивистская инвариантность теории не нарушается; ϵ_Λ и P_Λ одинаковы во всех системах координат, движущихся друг относительно друга (преобразованиях по Лоренцу).

Эти величины не проявляют себя в экспериментах с элементарными частицами или в атомной и молекулярной физике: вакуумная энергия сосуда, в котором проводится эксперимент, играет роль постоянного члена, который можно исключить в законе сохранения энергии.

Единственное явление, в котором проявляются ϵ_Λ и P_Λ , есть тяготение. В этом случае ϵ_Λ и P_Λ «действуют» не только в пустом пространстве, но, как ясно из формулы (1.9.2), являются вполне равноправными членами уравнений поля даже в присутствии материи. Поэтому эксперимент Кавендиша, в принципе, может служить для открытия и измерения ϵ_Λ и P_Λ . Притяжение свинцовой сферы зависит от суммы плотности свинца (11 г/см^3) и плотности вакуума ρ_Λ ($|\rho_\Lambda| < 10^{-28} \text{ г/см}^3$), проинтегрированной по объему сферы.

Практическое измерение влияния P_Λ и ϵ_Λ невозможно ни в лабораторных экспериментах, ни в наблюдениях движений планет в Солнечной системе или движения звезд в Галактике. Действительно, средняя плотность материи в Солнечной системе в сфере с радиусом, равным земной орбите, составляет $\langle \rho \rangle \approx 10^{-7} \text{ г/см}^3$. Средняя плотность материи в Галактике около 10^{-24} г/см^3 . Влияние ρ_Λ может быть существенным только в масштабе всей Вселенной, т. е. в космологии.

Остановимся подробнее на природе Λ . Возможен подход, в котором определенное значение Λ и соответствующие ρ_Λ , ε_Λ , P_Λ объявляются мировыми постоянными, не подлежащими дальнейшему пояснению. Возможна и другая точка зрения: предположим, что в каком-то нулевом приближении $\Lambda = \rho_\Lambda = \varepsilon_\Lambda = P_\Lambda = 0$. Отличные от нуля величины, характеризующие вакуум, получаются в следующем приближении из рассмотрения квантовых свойств вакуума. Они должны, в принципе, получаться из каких-то представлений теории элементарных частиц. В настоящее время такой теории нет, как нет и теории, доказывающей, что $\Lambda = 0$. Ниже мы изложим некоторые соображения о возможных путях создания теории Λ .

Первые попытки квантования электромагнитного поля привели к парадоксальному заключению о бесконечной плотности энергии вакуума. Вакуум определяется как наинизшее энергетическое состояние рассматриваемой системы и, например, при рассмотрении электромагнитных явлений может быть охарактеризован с помощью уравнений Максвелла. Частицы (в данном случае фотоны) представляют собой элементарные возбуждения системы. В аналогичной квантовомеханической задаче о движении атомных ядер в кристаллической решетке ситуация та же: элементарные возбуждения называются фононами (звуковыми квантами), в основном состоянии кристалл не содержит фононов, т. е. имеет температуру нуль. Это состояние подобно вакууму.

Энергия основного энергетического состояния кристалла имеет совершенно определенное значение, которое можно измерить. Различие в энергиях основного состояния для разных изотопов одного и того же элемента приводит к зависимости теплоты испарения от атомного веса изотопа. В простейшем варианте теории поля основное состояние имеет бесконечную энергию. Однако теорию можно переформулировать так, чтобы энергия основного состояния свободного поля была равна нулю.

В классической теории Максвелла плотность энергии равна $\varepsilon = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$, где E и H — электрическая и магнитная напряженности. Как подчеркивается Берестецким, Лифшицем и Питаевским (1968), не существует такой формулировки квантовой электродинамики, в которой среднее значение E^2 или H^2 равны нулю в вакууме (т. е. вдали от зарядов и в отсутствие реальных фотонов). Следовательно, чтобы сформулировать эти теории с помощью обычных произведений операторов при условии, что в вакууме $\varepsilon = 0$, необходимо отказаться от классического соотношения, связывающего ε с напряженностями полей.

Другой источник энергии вакуума проистекает из дираковской теории электрона: идея заполненных уровней с отрицательной энергией неизбежно ведет к отрицательному значению плотности

энергии. В этом случае теорию также необходимо переформулировать, чтобы сделать ее тождественным нулем для вакуума невзаимодействующих частиц. Однако это вовсе не гарантирует, что при учете взаимодействия энергия вакуума останется равной нулю. Особенность современной теории состоит в том, что взаимодействие между частицами эффективно не только в случае реальных частиц, но и тогда, когда частицы являются виртуальными. Следует напомнить, что термин «взаимодействие» в проведенном выше обсуждении использовался не в смысле классической физики. В школе говорят о взаимодействии двух сталкивающихся тел и о (кулоновском) взаимодействии протона с электроном. В квантовой теории поля говорят о 4-фермионном взаимодействии, если нейтрон распадается на электрон, протон и нейтрино, и говорят о фотон-электронном взаимодействии, если электрон испускает фотон.

Свободно движущийся электрон, как известно, не может испустить реальный фотон, который можно зарегистрировать вдали от электрона. Однако можно говорить, что свободный электрон испускает, а затем поглощает «виртуальные» фотоны. Это вызывает изменения свойств электрона (например, его массы, магнитного момента и т. д.), как было доказано в эксперименте Лэмба — Резерфорда.

Экспериментальное измерение изменения массы электрона невозможно, так как не существует экспериментов, которые могли бы, даже в принципе, измерить массу электрона, лишенного его оболочки «виртуальных» фотонов. Однако изменение магнитного момента электрона подтверждено экспериментально с высочайшей точностью.

Существует много других процессов, аналогичных рассмотренным выше, которые имеют место в вакууме, например, рождение и аннигиляция пар e^+ , e^- .

Теория вакуумного состояния и его свойства не так же просты и очевидны сегодня, как это было 50 лет назад!

Первый возможный подход к теории вакуума заключается в предположении, что энергия вакуума равна тождественно нулю в отсутствие полей и взаимодействий. При учете их энергия вакуума становится не нулевой; она будет аддитивной постоянной при рассмотрении процессов, включающих реальные частицы. Теория частиц, основанная на таком подходе, стоит перед проблемой описания всех наблюдаемых процессов таким способом, чтобы ответ не зависел от неизвестной (или не определенной или даже бесконечной) энергии вакуума.

Именно так сформулировал проблему Фейнман и получил успешное решение. В его формулировке амплитуда перехода A_{12} (вакуум плюс частицы в начальном состоянии 1 \rightarrow вакуум плюс частицы в конечном состоянии 2) делится на амплитуду пере-

хода A_V (вакуум \rightarrow вакуум) и лишь отношение A_{12}/A_V представляет собой реальное значение, соответствующее взаимодействию реальных частиц. Такой способ ухода от вопроса об энергии вакуума хорош везде, кроме теории тяготения. Плотность энергии вакуума в гравитационных проблемах является, как уже упоминалось выше, реальной, измеримой величиной!

Существует второй, так называемый аксиоматический подход к теории частиц. В нем постулируется, что плотность энергии вакуума и соответствующее давление тождественно равны нулю.

Не вызывает возражения, если такое утверждение постулируется только как одна из возможностей. Однако в литературе можно часто встретить утверждения, что эта аксиома необходима, что лишь она согласуется с релятивистской инвариантностью. Такое утверждение абсолютно несправедливо. Как было отмечено выше, соотношение между давлением и плотностью энергии вакуума, которое обеспечивается введением космологической постоянной в уравнения Эйнштейна, $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$, релятивистски инвариантно.

Ниже мы покажем, как теория частиц, в принципе, может дать по порядку величины оценку ϵ_Λ , которая не равна нулю при сохранении релятивистской инвариантности.

Часто совершаемая ошибка проистекает из-за введения определенного ограниченного объема V и рассмотрении энергии $E = \epsilon V$. Трехмерный импульс вакуума p , очевидно, равен нулю, так как в вакууме нет выделенных направлений. Энергия и импульс образуют 4-мерный вектор (E, p) , который в нашем случае для данного ограниченного объема есть $(E, 0)$.

Ясно, что такая комбинация не инвариантна и даст $p \neq 0$ в другой системе координат, движущейся относительно данной, если не положить $E = 0$ (а следовательно, $\epsilon = 0$).

Ошибка заключается в выборе специального ограниченного объема, так как это нарушает релятивистскую инвариантность. Неограниченная среда и, в частности, вакуум можно характеризовать плотностью энергии, которая есть T_0^0 компонента тензора энергии-импульса. Тензор содержит также компоненты T_α^0 ($\alpha = 1, 2, 3$), которые описывают поток и одновременно плотность импульса в пространстве. Компоненты T_β^α тензора энергии-импульса соответствуют напряжениям, входящим в теорию упругости. Для газа или жидкости (без анизотропии) $T_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha P$.

Эти хорошо известные истины повторяются здесь для того, чтобы подчеркнуть, что проблема заключается не в вопросе, имеет ли вакуум *вектор* энергии-импульса, а в том, имеет ли он *тензор* энергии-импульса? Нет релятивистски инвариантного вектора (он тождественно равен нулю по величине), но вполне может существовать релятивистски инвариантный тензор. Он

должен иметь вид (в лоренцевой системе)

$$T_{ik} = \text{const.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

и это именно тот тензор, о котором говорят в случае $\Lambda \neq 0$. Нельзя исключить такой связанный с вакуумом тензор *a priori*.

Следующие вопросы остаются:

1. Существует ли какой-нибудь принцип, который требует $\Lambda \neq 0$?
2. Должны ли мы рассматривать $\Lambda \neq 0$ как новую независимую универсальную постоянную? Или же
3. возможно вычислить Λ (хотя бы по порядку величины) из других универсальных постоянных?

Попытка ответить на третий вопрос, не касаясь первых двух, сделана ниже. Этот ответ (основанный на анализе размерностей и сравнении порядков величин), вероятно, будет полезен при конструировании будущей более правильной и логически последовательной теории.

Все работы по теории поляризации вакуума и квантовой теории частиц строились на основе того, что в лабораторной физике мы измеряем разности энергии системы частица + вакуум и одного вакуума; отличное от нуля ϵ_Λ сокращается в вычислениях.

Величина ϵ_Λ входит лишь в гравитационную теорию. Хотя точной теории и нет, однако уже сейчас можно высказать существенные соображения с помощью анализа размерностей.

Теория элементарных частиц позволяет построить величину размерности ϵ_Λ : из фундаментальных постоянных теории можно сконструировать энергию mc^2 , длину $\frac{\hbar}{mc}$, плотность $n = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3$

и $\epsilon_\Lambda = mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3$. Полученная таким образом величина ϵ_Λ заведомо не годится: мы получаем для $\epsilon_\Lambda = 10^{22}$ эрг/см³, если подставить в качестве m массу электрона, а для массы протона ϵ_Λ получается порядка 10^{35} эрг/см³. По-видимому, именно на сопоставлении такого «теоретического» ϵ_Λ с тем, что допустимо в космологии ($\epsilon_\Lambda < 10^{-7}$ эрг/см³), основывалось подсознательное отвращение физиков к $\Lambda \neq 0$: если уж нельзя взять большое ϵ_Λ и, соответственно, большое λ , пусть не будет никакого!

Под влиянием предложений астрономов (см. ссылки в начале параграфа) было отмечено (Зельдович, 1967b), что разумное ϵ_Λ можно получить, умножая $mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3$ на безразмерную величину $\frac{Gm^2}{\hbar c}$, характерную для гравитации. Это выражение можно интерпретировать следующим образом:

в вакууме рождаются виртуальные частицы с массой m , которые пространственно разделены в среднем на $\lambda = \hbar/mc$. Их полная собственная энергия, по предположению, тождественно равна нулю, так что плотность энергии вакуума полностью определяется только гравитационным взаимодействием соседних частиц:

$$\varepsilon_{\Lambda} = \frac{Gm^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^3} = \frac{Gm^6 c^4}{\hbar^4}.$$

Выражение для ε_{Λ} соответствует упомянутым выше соотношениям. Это даст для $m = m_e$, $\varepsilon_{\Lambda} = 10^{-19}$ эрг/см³ и для $m = m_p$, $\varepsilon_{\Lambda} = 1$ эрг/см³. Таким образом, допустимое (но отнюдь не обязательное!) с точки зрения астрономии ε_{Λ} находится между значениями для m_e и m_p . С другой стороны, нужно еще раз подчеркнуть, что приведенное выражение совершенно не является логическим выводом из теории элементарных частиц: его нужно рассматривать в лучшем случае как пример возможности (в смысле размерности) построить разумное значение ε_{Λ} из мировых констант.

Связь между Λ и теорией частиц, и, в частности, связь этой проблемы с формулами, предложенными Дираком и Эддингтоном, анализируется Зельдовичем (1968). Аналогичное выражение для R_{Λ} получено Станюковичем (1965) из соображений, с которыми мы не согласны.

Существует другая сторона проблемы: часто говорят, что $\Lambda \neq 0$ означает, что гравитоны обладают ненулевой массой покоя. Но $\Lambda \neq 0$ означает также, что даже в отсутствие материи пространство — время не может быть всюду плоским. А в кривом пространстве нет ясного определения массы гравитонов. Этот вопрос подробно обсуждается Тредером (1968).

Космологический член, если он и отличен от нуля, то по абсолютной величине настолько мал, что может быть существен только в космологии. Вот почему далее в этой книге мы пишем уравнения Эйнштейна без Λ -члена.

§ 10. Закон Ньютона и слабое поле тяготения

Рассмотрим слабое поле тяготения. В этом случае, очевидно, можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора мало отличаются от своих галилеевых значений (обозначенных индексом ⁽⁰⁾):

$$\left. \begin{aligned} g_{ik} &= g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \\ g_{\alpha\beta}^{(0)} &= -\delta_{\alpha\beta}, g_{0\alpha}^{(0)} = 0, g_{00}^{(0)} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.10.1)$$

Величины h_{ik} и их производные по координатам будем считать малыми. Рассмотрим простейший случай, когда поле создается медленно движущимися телами ($v/c \ll 1$) и электромагнитные

поля слабы. Тогда, как показал еще Эйнштейн (см., например, Эйнштейн (1965), [ср. § 12, формула (1.12.1)] можно так выбрать координаты, что уравнения тяготения запишутся (с точностью до малых первого порядка) в виде

$$\square h_{ik} = -\kappa \rho \delta_{ik} \quad (1.10.2)$$

где \square — оператор Д'Аламбера в невозмущенной метрике

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}}$$

Решение уравнений (1.9.2), как известно, записывается в виде запаздывающих потенциалов

$$h_{ik} = -\frac{\kappa}{4\pi} \delta_{ik} \int \left(\frac{\rho dV}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}}, \quad (1.10.3)$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$. Написав решение (1.9.3) для неволновой зоны (т. е. на расстояниях $r \ll \tau c$, где τ — характерное время смещения масс в системе), получим

$$h_{ik} = -\frac{\kappa}{4\pi} \delta_{ik} \int \frac{\rho dV}{r} = -\delta_{ik} \frac{2\varphi}{c^2}, \quad (1.10.4)$$

где φ — ньютоновский потенциал тяготения. Выражения (1.10.1) теперь переписутся в виде

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} \right), \\ g_{11} &= g_{22} = g_{33} = - \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.10.5)$$

остальные $g_{ik} = 0$. Гравитационная сила F_α по формуле (1.6.1b) равна

$$F_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}.$$

Уравнения движения медленной частицы (1.5.19) в случае метрики (1.10.5) сводятся в первой приближении к уравнениям

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}. \quad (1.10.6)$$

Уравнения (1.10.6) соответствуют второму закону Ньютона. Таким образом, уравнения (1.10.4) и (1.10.6), следующие из уравнений Эйнштейна (1.8.1), в случае слабого поля содержат в себе

теорию тяготения и механику Ньютона. С помощью метрики (1.10.5) можно получить первые поправки к теории Ньютона.

По формуле (1.4.8) для интервала времени находим

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 = \sqrt{1 - \frac{2\Phi}{c^2}} dt \approx \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) dt. \quad (1.10.7)$$

На бесконечности $\Phi = 0$ и $d\tau_\infty = dt$. Вблизи тяготеющих масс темп течения времени меньше, чем на бесконечности:

$$d\tau = \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) d\tau_\infty. \quad (1.10.8)$$

Из формулы (1.10.8) следует, например, что колебания в атомных системах в поле тяготения происходят с меньшей частотой (по часам далекого наблюдателя). Следовательно, кванты света, испущенные такими системами, будут восприняты наблюдателем как кванты с меньшей частотой, т. е. как покрасневшие. Это — знаменитое гравитационное красное смещение, одно из первых наблюдательных предсказаний ОТО. Мы еще вернемся к этому вопросу при анализе точного решения уравнений Эйнштейна для сильного поля тяготения.

Если теперь при написании уравнений движения для метрики (1.10.5) отказаться от предположения о малости скорости пробной частицы [что предполагалось в (1.10.6)], то из них легко получить два других известных вывода ОТО, уточняющих теорию Ньютона: вековое смещение перигелия орбиты Меркурия и отклонение луча света, проходящего вблизи Солнца. Мы вернемся к этим вопросам в параграфах о сильном поле тяготения.

Наконец, откажемся от предположения о пренебрежимой малости скоростей масс, создающих поле; тогда, написав сами уравнения поля с точностью до величин более высокого порядка малости по v/c , чем (1.10.2), можно получить первые исчезающие поправки $h_{0\alpha}$ в пространственно-временных компонентах метрического тензора.

Оказывается, что при надлежащем выборе координат величины $h_{0\alpha}$ в первом приближении определяются формулами

$$h_{0\alpha} = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{\rho v^\alpha}{cr} dV, \quad (1.10.9)$$

где v^α — компоненты трехмерной скорости вещества. Посмотрим, к каким следствиям приводят эти поправки.

В § 6 этой главы было показано, что если в системе отсчета имеются отличные от нуля $h_{0\alpha}$ (неустраняемые преобразованием координаты времени), то система вращается, т. е. в ней действуют силы Кориолиса. В случае малого отличия метрики g_{ik} от

галилеевой и стационарности $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0} = 0$ формулы § 6 для определения вектора угловой скорости вращения системы Ω сводятся к следующему результату:

$$\Omega = -\frac{c}{2} \overrightarrow{\text{rot}} (g_{01}, g_{02}, g_{03}), \quad (1.10.10)$$

где (g_{01}, g_{02}, g_{03}) обозначает вектор с компонентами g_{01}, g_{02}, g_{03} .

Из уравнений (1.10.9) и (1.10.10) следует, что вблизи вращающегося тела в гравитационном поле возникает поле кориолисовых сил, т. е. местная инерциальная система отсчета вращается относительно далекой от тела инерциальной системы.

Рассмотрим для примера вращающуюся полую сферу. Заметим, что в ньютоновской теории силы тяготения не зависят от движения вещества, и внутри полой сферы в ньютоновском приближении $\varphi = \text{const}$, гравитационных сил нет. Действительно, в силу сферической симметрии решение ньютоновского уравнения в пустоте $\nabla\varphi = 0$ должно иметь вид $\varphi = \frac{a}{r} + \text{const}$. Из отсутствия особенности в центре следует $a = 0$, $\varphi = \text{const}$.

Вычислим теперь компоненты $h_{0\alpha}$ внутри однородной полой сферы массы M и радиуса R , вращающейся с угловой скоростью ω . С помощью (1.10.9) находим (вычисления приведены в приложении к параграфу)

$$\left. \begin{aligned} h_{10} &= -\frac{4GM\omega}{3c^2 R} \tilde{r} \sin \theta \sin \varphi, \\ h_{20} &= \frac{4GM\omega}{3c^2 R} \tilde{r} \sin \theta \cos \varphi, \\ h_{30} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10.11)$$

Здесь \tilde{r} , θ и φ — сферические координаты точки внутри сферы.

Из (1.10.11) определяем по формуле (1.10.10) вектор Ω :

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= 0, \\ \Omega_2 &= 0, \\ \Omega_3 &= -\frac{4}{3} \frac{GM\omega}{c^2 R}, \\ \Omega^2 &= \Omega_\alpha \Omega^\alpha = \frac{16G^2 M^2 \omega^2}{9c^4 R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.10.12)$$

Таким образом, вращение сферы приводит к возникновению кориолисовых сил внутри сферы. Это явление аналогично возникновению магнитных сил внутри вращающейся заряженной сферы.

Подчеркнем, что наблюдатель внутри сферы, если он не может получить информацию из областей вне сферы, никаких корио-

лисовых сил не обнаружит. Действительно, внутри сферы прецессия гирокомпасов (система гироскопов, указывающих неизменное направление в инерциальной системе отсчета) во всех точках одинакова и поэтому обнаружить ее невозможно. Только сравнив свою инерциальную систему с инерциальной системой вне сферы на бесконечности, наблюдатель обнаружит, что его система медленно прецессирует.

Аналогичный эффект вызывает вращение тела и во внешнем поле. Приведем сразу окончательную формулу:

$$|\Omega| = \frac{G|K|}{c^2 r^3} (3\cos^2 \theta + 1)^{1/2}, \quad (1.10.13)$$

где K — полный момент тела.

Наличие кориолисовых сил означает, что инерциальный компас (система гироскопов), который вдали от движущихся масс указывает на одни и те же далекие звезды, будет вблизи вращающегося тела поворачиваться с указанной угловой скоростью, меняя ориентацию относительно далеких звезд.

Скорость прецессии гирокомпаса у полюса вращающегося тела ($\theta = 0$) в два раза больше, чем у экватора ($\theta = \pi/2$). При этом у полюса прецессия происходит в ту же сторону, что и вращение тела, а у экватора — в противоположную сторону.

Для однородного шара, вращающегося с частотой ω , формула (1.10.13) может быть переписана в следующем виде:

$$|\Omega| = \frac{2GM}{5c^2 R} (3\cos^2 \theta + 1)^{1/2} |\omega| \left(\frac{R}{r}\right)^3. \quad (1.10.14)$$

Вблизи обычных звезд и планет прецессия ничтожно мала (хотя в принципе измерима!). Так, у полюса Солнца $\Omega_{\odot} \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ сек}^{-1} \approx \approx 30 \text{ угл.сек/год}$. У поверхности Земли $\Omega_{\oplus} \approx -0,1 \text{ угл.сек/год}$ на экваторе и $0,2 \text{ угл.сек/год}$ на полюсе (за положительное выбрано направление вращения тела). Заметим, что у нейтронных звезд — пульсаров (см. гл. 14) Ω может быть порядка 20 сек^{-1} .

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 10

Вычислим смешанные компоненты метрического тензора внутри полой однородной вращающейся сферы. Эти компоненты вычисляются по формуле (1.10.9):

$$h_{0\alpha} = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{\rho v^{\alpha}}{cr} dV. \quad (1.10.1\text{п})$$

Здесь v^{α} — компоненты скорости сферы в декартовой системе координат, r — расстояние от элемента dV до данной точки. Перейдем под знаком интегрирования к сферическим координатам. Компоненты скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= v^1 = -\omega y = -R\omega \sin \varphi \sin \theta, \\ v_y &= v^2 = \omega x = R\omega \cos \varphi \sin \theta, \\ v_z &= v^3 = 0. \end{aligned}$$

Здесь ω — угловая скорость вращения, R — радиус сферы. Очевидно, что компонента h_{03} равна нулю. Величину r в (1.10.1п) выразим через угловые координаты: $r = R \sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos \alpha}$, где $\eta = \bar{r}/R$, \bar{r} — радиальная координата точки, где вычисляются $h_{0\alpha}$, α — угол между направлением из центра на эту точку интегрирования и на элемент на сфере dV . Заменяя ρdV на $\frac{M}{4\pi} \sin \theta d\varphi d\theta$, где M — масса сферы, имеем для h_{01} и h_{02}

$$\begin{Bmatrix} h_{01} \\ h_{02} \end{Bmatrix} = \frac{\kappa M \omega}{8\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix}}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos \alpha}} d\varphi d\theta. \quad (1.10.2п)$$

Преобразуем знаменатель подынтегрального выражения. Прежде всего,

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0),$$

где θ_0 , φ_0 и θ , φ — угловые координаты рассматриваемой точки и элемента интегрирования соответственно. Теперь можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos \alpha}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n P_n(\cos \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \left\{ P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta_0) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_0) \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \right\}, \quad (1.10.3п) \end{aligned}$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $P_n^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра. Первое слагаемое в фигурных скобках в (1.10.3п) после умножения на $\sin \varphi$ или $\cos \varphi$ и интегрирования по φ в пределах $0 \div 2\pi$ в выражении (1.10.2п) дают нуль. Далее, используя соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos [m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{ \sin [(m+1)\varphi - m\varphi_0] + \\ &\quad + \sin [\varphi(1-m) + m\varphi_0] \} d\varphi = \pi \sin \varphi_0 \delta_m^1, \\ \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos [m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{ \cos [(m+1)\varphi - m\varphi_0] + \\ &\quad + \cos [(1-m)\varphi + m\varphi_0] \} d\varphi = \pi \cos \varphi_0 \delta_m^1, \end{aligned}$$

где δ_m^1 — символ Кронекера, получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} h_{01} \\ h_{02} \end{Bmatrix} &= -\frac{\kappa M \omega}{8\pi c} 2 \int_{-1}^1 P_1^1(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \eta^n P_n^1(x) P_n^1 \times \\ &\quad \times (\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 \end{Bmatrix} dx = -\frac{\kappa M \omega}{6\pi c} \eta P_1^1(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{4GM\omega}{3c^3 R} \tilde{r} \sin \theta_0 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Последнее выражение и приведено в тексте (с небольшим изменением обозначений).

§ 11. Аналог зееман-эффекта в гравитационном поле вращающегося тела

В предыдущем параграфе показано, что гравитационное поле вращающегося тела отличается от поля невращающегося тела, подобно тому как в электродинамике вращающееся заряженное тело создает не только электростатическое, но и магнитное поле.

Оказывается, эта аналогия простирается еще глубже. Компоненты гравитационного поля $h_{0\alpha}$, аналогичные магнитному полю, вызывают изменение спектра излучателя, подобные эффекту Зеемана [Зельдович (1965а); см. также Скроцкий (1957)].

Ниже будет показано, что линия спектра атома с частотой ω_0 , испущенная на полюсе вращающегося тела и принятая далеким наблюдателем над полюсом, расщепляется на две компоненты с противоположной круговой поляризацией и с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Величина Ω вычисляется по формуле (1.10.14).

В отличие от классического магнитного зееман-эффекта, гравитационный эффект является универсальным, т. е. расщепление линии не зависит от конкретных свойств системы, испускающей свет. Оно одинаково для атома и молекулы, и в оптическом и в радиодиапазоне.

Для доказательства рассмотрим линейный осциллятор на полюсе вращающегося тела. Аналогично маятнику Фуко, осциллятор все время колеблется в одном и том же направлении в местной инерциальной системе, т. е. в направлении, неизменном относительно местного инерциального компаса. С точки зрения наблюдателя, находящегося рядом, осциллятор испускает плоско-поляризованную волну, которую можно рассматривать как суперпозицию двух волн с равной частотой, поляризованных по кругу в разные стороны.

Но относительно далекого наблюдателя инерциальный компас прецессирует с угловой скоростью Ω (см. § 10). Следовательно, с той же скоростью поворачивается и плоскость поляризации. Линейно поляризованный свет с поворачивающейся плоскостью поляризации, очевидно, представляет собой суперпозицию двух волн, поляризованных по кругу, но с различными частотами $\omega_0 \pm \Omega$. Итак, мы показали, что свет, испущенный зарядом, колеблющимся в центральном поле сил на полюсе вращающегося тела, воспринимается далеким наблюдателем как совокупность волн с круговой поляризацией, расщепленных по частоте. Из принципа соответствия между квантовой теорией и классической механикой следует, что результат останется справедливым для любой атомной или молекулярной системы.

Альтернативное описание явления заключается в том, что право- и левополяризованные по кругу кванты испытывают различное красное смещение в поле тяготения. Таким образом,

здесь имеет место частный случай влияния момента вращения частицы (фотона) на движение частицы в гравитационном поле.

Из симметрии задачи ясно, что это различие целиком связано с вращением тела, создающего поле тяготения. Разность частот, пришедших на бесконечность право- и левополяризованных квантов, равная 2Ω , не зависит от первоначальной частоты квантов. Легко вычислить скорость, с которой растет эта разность для квантов, движущихся радиально наружу. Из уравнения (1.10.14) с $\theta = 0$ (фотон на полюсе) мы находим

$$\left| \frac{d\Omega}{dr} \right| = \frac{12}{5} \frac{GM}{c^2} \frac{R^2}{r^4} \omega_{\text{тела}}, \quad (1.11.1)$$

откуда вблизи земной поверхности

$$\left| \frac{d\Omega}{dr} \right| = \frac{12}{5} \frac{GM_{\oplus}}{c^2 R_{\oplus}^2} \omega_{\oplus} \approx 10^{-23} \text{ гц/см}. \quad (1.11.2)$$

Это изменение можно сравнить с измеренным Паундом и Ребкой красным смещением всех квантов (правых и левых) в статическом поле Земли:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dr} = \frac{g}{c^2} = GM/R^2 c^2 = 10^{-18} \text{ см}^{-1}.$$

Для квантов с энергией 14 кэв , частота которых $4 \cdot 10^{18} \text{ гц}$, изменение частоты равно 4 гц/см , так что отношение первого эффекта ко второму составляет $\left| \frac{d\Omega}{dr} \right| / \left| \frac{d\omega}{dr} \right| \approx \frac{\omega_{\oplus}}{\omega} \approx 10^{-23}$ и влияние спина (круговой поляризации), жестких квантов неизмеримо мало. Для протона влияние направления спина на его вес, связанное с вращением Земли, порядка 10^{-28} веса протона.

§ 12. Гравитационное излучение

В ньютоновской теории сила тяготения сферического тела убывает как $1/r^2$. В поле тяготения можно локально измерять только относительные ускорения. Относительное ускорение (обозначенное ниже через A) двух пробных частиц в поле тяготения убывает как $1/r^3$. Это — общеизвестные приливные силы. Квадрупольная составляющая поля тяготения тела или системы несферической формы порядка $GMR^2/r^4 = GK/r^4$, где M — массы, разнесенные на расстояние R и создающие квадрупольный момент K . Относительные ускорения пробных частиц от этой составляющей поля порядка $A \approx GMR^2/lr^5$, где l — расстояние между пробными частицами*). Если квадрупольный момент периодически зависит

*) Очевидно, A есть тензор $\frac{d^2 l_{\alpha}}{dt^2} = A_{\alpha\beta} l_{\beta}$.

от времени (например, при вращении двойной звезды), эти относительные ускорения меняются в той же фазе. Таков вывод ньютоновской теории. Релятивистская теория тяготения утверждает, что выводы о квадрупольной составляющей несправедливы при $r > cT$, где T — характерное время изменения квадрупольного момента источника поля. Начиная с этого расстояния относительное ускорение двух пробных частиц меняется как $1/r$; тогда можно говорить о гравитационной волне: при периодическом изменении квадрупольного момента фаза относительного ускорения пробных тел смещена по сравнению с фазой в источнике на угол r/cT . Из условия непрерывности A при $r = cT$ получаем оценку величины A в волновой зоне (т. е. при $r > cT$): $A \approx \frac{GMR^2}{(cT)^4 r}$. На больших расстояниях от источника относительное ускорение пробных тел от статического поля источника (убывающее как $1/r^3$) пренебрежимо мало по сравнению с относительным ускорением в гравитационной волне, убывающим как $1/r$. Именно это относительное ускорение в волне и должно измеряться при приеме гравитационных волн.

Существует другой аспект различия между ньютоновской и релятивистской теориями тяготения по отношению к гравитационным волнам. Система, состоящая из двух гравитационно взаимодействующих точечных частиц, не теряет энергии по ньютоновской теории. Частицы в такой системе будут вечно обращаться вокруг их центра масс. Правда, такая система может терять энергию, если поблизости имеется неупругое тело. Двухчастичная система вызовет в этом теле изменяющиеся со временем приливные деформации, которые нагревают тело и в пространство будет излучаться тепло. Однако в отсутствие третьего тела система двух точечных тел не будет терять энергию.

В противоположность этому, по релятивистской теории тяготения, движение гравитирующих частиц друг относительно друга вызывает гравитационные волны, которые уносят энергию из системы. Этот факт обычно демонстрируют, вычисляя поток энергии, связанный с гравитационными волнами, в «волновой зоне», т. е. вдали от системы на расстояниях $r \gg cT$. Однако потерю энергии можно также вычислить, исследуя обратную реакцию гравитационного поля на излучающую систему. Барк, Торн и их сотрудники прямым вычислением поля вблизи излучающей системы показали, как излучение гравитационных волн вызывает затухание движений в системе (подробнее см. § 14 этой главы). Скорость потери энергии вычислялась двумя методами — по потоку энергии в волновой зоне и по затуханию движений в системе, которые, конечно, дали одинаковый результат. Не может быть сомнений в том, что испускаемые системой гравитационные волны уносят из нее энергию.

В электромагнитной системе заряд сохраняется, но дипольные моменты (магнитный и электрический) могут изменяться со временем. В силу сохранения заряда сферически-симметричная компонента электрического поля (соответствующая закону Кулона) также сохраняется: не существует продольных, сферически-симметричных волн, в которых эта компонента изменялась бы со временем. Низшими мультиполями в электромагнитных волнах являются электрическое и магнитное дипольное излучения; поле волн поперечное.

Рассмотрим излучение гравитационных волн, действуя методом последовательных приближений. Без учета гравитационных волн масса m и угловой момент K системы сохраняются. Соответственно, в вакууме, окружающем систему, ни продольная сферически-симметричная статическая компонента гравитационного поля (пропорциональная массе), ни гравимагнитная стационарная дипольная компонента (пропорциональная угловому моменту) не могут меняться. Следовательно, низшим мультиполем гравитационных волн является квадруполь. Однако следует помнить, что с учетом излучения гравитационных волн квадрупольная волна и волны более высокого порядка могут уносить массу и угловой момент; в результате продольная и стационарная дипольная компоненты поля будут изменяться медленно и монотонно.

Обратимся теперь от качественного к количественному описанию гравитационных волн.

В пустоте компоненты h_{ik} , описывающие слабое гравитационное поле, удовлетворяют уравнениям

$$\square h_{ik} = 0. \quad (1.12.1)$$

Эти уравнения справедливы лишь при определенном выборе координатной системы, а именно такой, в которой

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h \right) = 0^* \quad (1.12.2)$$

В произвольном слабом поле такую систему всегда можно выбрать (Гильберт, 1917). Уравнение (1.12.1) есть волновое уравнение, аналогичное уравнениям электродинамики. Следовательно, нестационарные поля тяготения распространяются в пространстве подобно электромагнитным волнам.

Преобразованием координат всегда можно перейти к системе, в которой новые \tilde{h}_{ik} уже не будут удовлетворять (1.12.1). Ясно, что в этом случае на гравитационные возмущения накладываются неинерциальные движения системы отсчета (также «возмущающие» \tilde{h}_{ik}); это и «портит» уравнения (1.12.1).

*) По определению, $h_i^k = h_{ims}^{(0)mk}$, $h = h_i^i$.

Чтобы отделить распространение истинных гравитационных возмущений, обусловленных кривизной пространства — времени, от возмущений, связанных с произволом в выборе системы отсчета, проще всего надо рассматривать распространение величины, не зависящей от выбора системы отсчета, т. е. какого-либо инварианта кривизны.

Однако в гравитационной волне нет истинного ненулевого инварианта, который бы не зависел от системы отсчета (аналогично электромагнитной волне!) тем не менее, можно показать, что изменения кривизны пространства—времени распространяются с фундаментальной скоростью. В противоположность этому «возмущения» h_{ik} , связанные с преобразованиями координат, можно заставить распространяться с любой скоростью; это не возмущения кривизны, а в определенном смысле математические фикции.

От каких величин зависит гравитационное возмущение? Рассмотрим малый участок пространства — времени с распространяющейся волной h_{ik} . В малой области волну можно считать плоской. Выберем ось x^1 вдоль направления изменения поля в пространстве (вдоль распространения волны). Если теперь вычислить компоненты тензора Римана R_{iklm} , то окажется, что при выполнении уравнений поля $R_{ik} = 0$ компоненты R_{iklm} зависят лишь от «поперечных» составляющих h_{22} , h_{23} и h_{33} , причем

$$\frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.12.3)$$

Поскольку мы интересуемся только частью поля, меняющейся со временем, это уравнение можно проинтегрировать и получить $h_{22} = -h_{33}$, вследствие чего тензор Римана зависит лишь от двух независимых компонент h_{ik} : h_{23} и $h_{22} = -h_{33}$. Отсюда следует, что в гравитационной волне подходящим выбором координат всегда можно обратить в нуль все компоненты h_{ik} , кроме h_{22} , h_{23} и h_{33} . Это указывает на «поперечный» характер гравитационных волн.

Рассмотрим, как меняется относительное расстояние двух пробных частиц при прохождении гравитационной волны. Из (1.6.1а) следует, что если $h_{0i} \equiv 0$, то линии $x^a = \text{const}$ суть геодезические, т. е. пробные частицы, неподвижные относительно данной системы в начальный момент, будут неподвижны все время. Таким образом, изменение расстояний между этими частицами обусловлено только деформациями самой системы, т. е. зависимостью $h_{\alpha\beta}$ только от времени.

Учитывая соотношение $h_{22} = -h_{33}$, получим для расстояния между двумя близкими частицами

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (1 + h_{22})(dx^2)^2 + (1 - h_{22})(dx^3)^2 + 2h_{23}dx^2dx^3. \quad (1.12.4)$$

Из этого уравнения следует, что расстояние между двумя частицами вдоль направления распространения волны ($dx^1 \neq 0$, $dx^2 = dx^3 = 0$) остается неизменным во времени. Частицы, расположенные в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, испытывают наибольшее относительное ускорение. Для таких частиц, используя полярные координаты с началом в одной из частиц, можно записать ($x^2 = r \cos \theta$, $x^1 = r \sin \theta$)

$$l = r \left(1 + \frac{1}{2} h_{22} \cos 2\theta + \frac{1}{2} h_{23} \sin 2\theta \right). \quad (1.12.5)$$

Таким образом, гравитационные волны действительно поперечные и определяются, с учетом (1.12.3), двумя величинами: h_{23} и $h_{22} = h_{33}$.

Подчеркнем, что в волне (как и в любом гравитационном поле) можно измерять только относительные ускорения, т. е. разности гравитационных полей.

Две компоненты в волне, h_{23} и $h_{22} = -h_{33}$, определяют два состояния поляризации. Однако, в отличие от электромагнитной волны, где независимое состояние поляризации определяется вектором колебания электрического поля, здесь поляризация носит *тензорный* характер. На рис. 3 изображено движение в полностью поляризованных электромагнитной и гравитационных волнах пробных зарядов и масс соответственно.

В электромагнитной волне показаны смещения относительно нейтральных частиц, остающихся в покое на пунктирной окружности. Для гравитационной волны «нейтральных» частиц нет! Здесь измеримы только относительные смещения — превращения круга в эллипс. Рис. 3а и 3б соответствуют плоско-поляризованной электромагнитной волне и аналогичному состоянию поляризации тензорной волны. В линейной теории можно складывать решения с произвольными коэффициентами. Сложим решение рис. 3а, начиная с третьей строчки, с решением рис. 3б, начиная с четвертой строчки. Получим для электромагнитной волны смещения: $t = 0$ — вверх; $t = T/4$ — вправо; $t = T/2$ — вниз; $t = 3T/4$ — влево (T — период), т. е. вектор электрического поля вращается по часовой стрелке, такая суперпозиция плоско-поляризованных волн описывает поле волны с круговой поляризацией. Точно так же, складывая (3а) и (3б) для тензорного случая, можно получить картину, в которой характерный эллипс вращается (см. рис. 3в). Таким образом конструируется гравитационная волна с круговой поляризацией без выделенных осей, но с выделенным направлением вращения. В ряде случаев например, при гравитационном излучении двойной звезды (см. ниже) гравитационные волны уносят не только энергию, но и вращательный

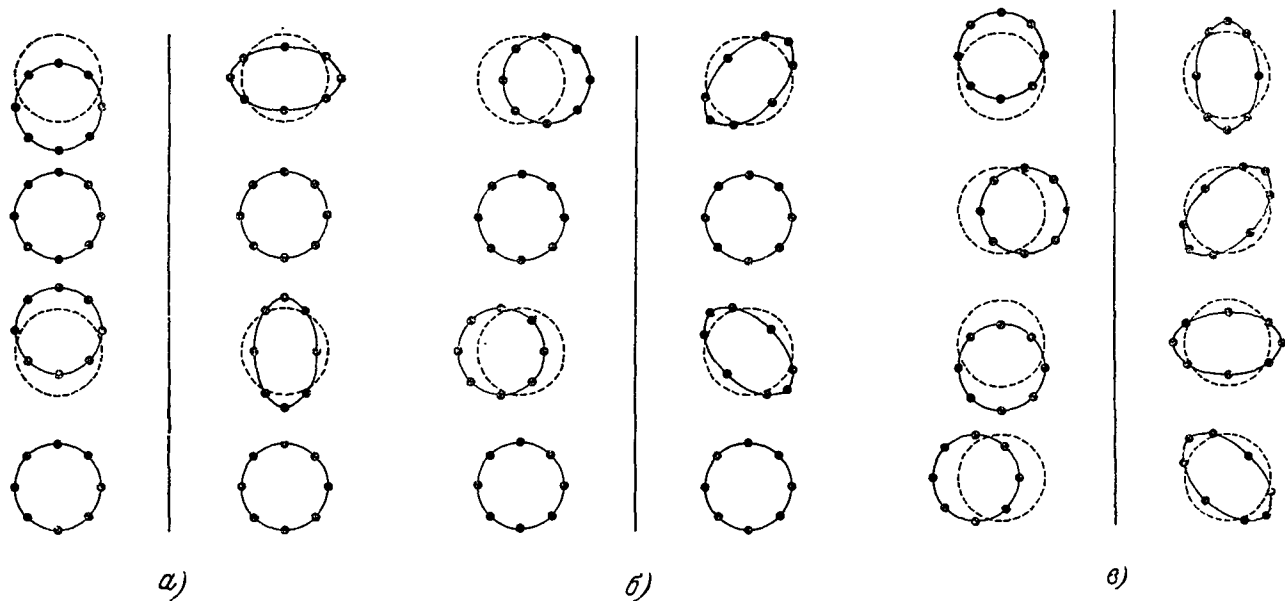


Рис. 3. Смещение пробных зарядов одинакового знака в поляризованной электромагнитной волне (на всех рисунках слева от вертикальной черты) и пробных частиц в поляризованной гравитационной волне (справа от вертикальной черты). До начала прохождения волны заряды и частицы расположены на окружности. Каждый рисунок показывает последовательные положения зарядов и частиц, разделенные по фазе на 90° .

а) Линейно поляризованная волна одного состояния поляризации. б) Линейно поляризованная волна второго независимого состояния поляризации. в) Волна, поляризованная по кругу.

момент. В этих случаях излучение имеет (хотя бы частично) круговую поляризацию.

Картина смещений пробных тел в гравитационной волне (рис. 3) определяет принципиально возможные способы приема таких волн.

Первый вариант — два свободных тела и измерение периодической компоненты в законе изменения расстояния между ними.

Второй вариант — два тела, соединенных упругим элементом. Если этот упругий элемент мешает телам изменять свое расстояние так, как это делали бы свободные тела, то в упругом элементе возникают напряжения, которые и измеряются; система в целом может иметь собственную частоту, равную частоте волн — при этом возникает резонанс (см. § 15 этой главы).

Наконец, возможен прием с помощью вращающейся пары тел или одного тела, вращающегося вокруг закрепленной оси. [Брагинский, Зельдович, Руденко (1969)]. Легко проследить с помощью рис. 3, что при скорости вращения, соответствующей половине оборота за один период гравитационной волны, пара тел будет систематически набирать или отдавать энергию и момент (знак эффекта зависит от соотношения фаз).

Не следует удивляться тому, что плоско-поляризованная волна (не несущая момента) может изменить момент пары тел. Плоско-поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух волн с противоположной круговой поляризацией. Одна из них и закручивает пару тел, соответственно ослабляясь при этом. Вторая не взаимодействует с вращающимся телом, так как она не в резонансе. После взаимодействия с парой тел плоская волна, не имевшая момента, выходит с моментом, противоположным тому, который был отдан приемнику — паре тел.

Для механического приема гравитационных волн вследствие малости сил и смещений, решающее значение имеют проблемы шумов, выделения сигнала и т. п. Обсуждение этих вопросов см. в конце § 15.

Выдвигались также предположения об обнаружении гравитационных волн по их воздействию на распространение света и радиоволн. Применительно к гравитационным волнам от двойных звезд, нужно учитывать, что они имеют строго периодический характер, не хаотичны. Зоны с различными знаками данной компоненты, например, h_{22} или h_{23} , расположены регулярно и компенсируют друг друга более точно, чем в случайном ансамбле. Заметим здесь же, что при анализе космологических вопросов нельзя применять геометрическую оптику для рассмотрения взаимодействия «теплового» гравитационного излучения с эффективной температурой около 1°K и света в оптическом диапазоне.

Для того чтобы вычислить интенсивность гравитационного излучения системы движущихся тел, необходимо написать

уравнения тяготения с точностью до малых величин более высокого порядка, чем это сделано в § 10. Мы не будем здесь останавливаться на вычислениях [Ландау и Лифшиц (1967); см. также § 14 этой главы], а приведем сразу результат. Интенсивность излучения энергии системой dL в направлении единичного вектора n в телесном угле $d\Omega$ есть *)

$$dL = \frac{G}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} (\ddot{K}_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)^2 + \frac{1}{2} \ddot{K}_{\alpha\beta}^2 - \ddot{K}_{\alpha\beta} \ddot{K}_{\alpha\gamma} n^\beta n^\gamma \right] d\Omega. \quad (1.12.6)$$

Здесь точка означает дифференцирование по t , $K_{\alpha\beta}$ — квадрупольный тензор масс:

$$K_{\alpha\beta} = \int \rho (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma x_\gamma) dV. \quad (1.12.7)$$

Полная потеря энергии по всем направлениям дается выражением

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{K}_{\alpha\beta}^2. \quad (1.12.8)$$

Из выражений (1.12.6) — (1.12.8) наглядно видно, что излучение гравитационных волн является квадрупольным. Это низший возможный мультипольный порядок излучения. Дипольное излучение в теории тяготения возникнуть не может, очевидно, из-за того, что для всех тел отношение «гравитационного заряда» к «инертной массе» одно и то же (см. § 1 гл. 1) и дипольный момент равен нулю.

Формулы мощности гравитационного излучения, записанные в виде, удобном для вычислений в астрофизических задачах, приводятся далее в § 13.

§ 13. Гравитационное излучение двойных звезд

Рассмотрим гравитационное излучение двойной звезды для случая, когда поле можно считать слабым, $\varphi \ll c^2$. Эта задача для движения по эллиптической орбите детально проанализирована в работе Петерса и Мэтьюса (1963).

Пусть компоненты двойной звезды имеют массы m_1 и m_2 соответственно, и относительная эллиптическая орбита (т. е. движение одного тела относительно другого) определяется уравнением

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \psi}. \quad (1.13.1)$$

Здесь a — большая полуось орбиты, e — эксцентриситет, ψ — истинная аномалия (полярный угол), r — радиус-вектор.

*) Обозначение для телесного угла Ω не следует путать с вектором угловой скорости поворота Ω , используемого в предыдущих параграфах.

С помощью (1.12.8) после усреднения по полному периоду обращения получается следующее выражение для полной потери энергии L на излучение гравитационных волн в единицу времени:

$$L = -\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} f(e). \quad (1.13.2)$$

Зависимость от эксцентриситета определяется функцией $f(e)$:

$$f(e) = \frac{1 + \left(\frac{73}{24}\right) e^2 + \left(\frac{37}{96}\right) e^4}{(1 - e^2)^{7/2}}. \quad (1.13.3)$$

График этой функции изображен на рис. 4. С ростом эксцентриситета при фиксированном a излучение увеличивается. Причина этого состоит в том, что мощность излучения, как видно из (1.12.8),¹ сильно зависит от изменения скорости, и происходит поэтому главным образом в периастре*, а чем больше эксцентриситет, тем ближе в периастре звезды, следовательно, сильнее ускорение и гравитационное излучение.

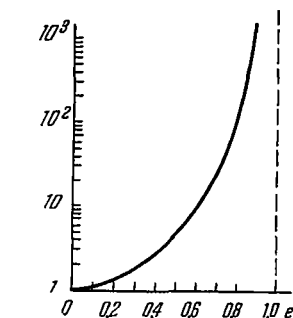


Рис. 4. Зависимость $f(e)$ излучения (в единицу времени, усредненного по периоду) от эксцентриситета орбиты e при постоянной большой полуоси орбиты a .

При движении по эллиптической орбите в излучении присутствует не только вторая гармоника частоты орбитального движения, как в квадрупольном излучении при круговом движении, но и другие гармоники.

Фурье-анализ дает следующее выражение для полного излучения на различных гармониках n :

$$L(n) = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} g(n, e), \quad (1.13.4)$$

где

$$g(n, e) = \frac{n^4}{32} \left\{ \left[J_{n-2}(ne) - 2eJ_{n-1}(ne) + \frac{2}{n} J_n(ne) + 2eJ_{n+1}(ne) - J_{n+2}(ne) \right]^2 + (1 - e^2) \left[J_{n-2}(ne) - 2J_n(ne) + J_{n+2}(ne) \right]^2 + \frac{4}{3n^2} \left[J_n(ne) \right]^2 \right\}. \quad (1.13.5)$$

Здесь J_n — функция Бесселя. Значения функции g в зависимости от n для $e = 0,2$; $0,5$ и $0,7$ изображены на рис. 5.

*) Периастром относительной орбиты называется точка орбиты, ближайшая к другой звезде.

При больших эксцентриситетах излучение происходит главным образом на высших гармониках. Это объясняется тем, что излучение происходит, как отмечалось выше, в основном в периастре, т. е. в течение малой доли полного периода обращения.

Излучение волн тяготения двойными звездами $g(n, e)$ приводит к изменению орбиты. Подсчитаем изменение большой полуоси a . Полная энергия системы

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}.$$

Следовательно,

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{Gm_1m_2} \frac{dE}{dt}, \quad (1.13.6)$$

где $\frac{dE}{dt}$ определяется формулой (1.13.2).

Для круговой орбиты, используя (1.13.2) и (1.13.6), получаем следующую формулу для уменьшения радиуса орбиты [Ландау и Лифшиц, 1967]:

$$\dot{a} = -\frac{64G^3m_1m_2(m_1+m_2)}{5c^5a^8}. \quad (1.13.7)$$

Для изменения периода формула имеет вид

$$\dot{T} = -\frac{192(2\pi)^{5/3} G^{5/3} m_1 \cdot m_2}{10 c^5 (m_1 + m_2)^{1/3} T^{5/3}}. \quad (1.13.8)$$

Рассмотрим теперь поляризацию излучения и распределение его по различным направлениям. Приведем здесь данные для движения по круговой орбите ($e = 0$). Формулы для общего случая даны у Петерса и Мэтьюса (1963).

Распределения излучения по направлениям для двух независимых состояний поляризации, о которых сказано в предыдущем параграфе, определяются формулами

$$\frac{dL_1}{d\Omega} = \frac{1}{\pi} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} (1 + \cos^2 \theta)^2 \sin^2 2\varphi, \quad (1.13.9)$$

$$\frac{dL_2}{d\Omega} = \frac{4}{\pi} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} \cos^2 \theta \cos^2 2\varphi. \quad (1.13.10)$$

Здесь θ — полярный угол, φ — разность долгот мгновенного положения радиуса-вектора и точки наблюдения. Множители $\sin^2 2\varphi$ и $\cos^2 2\varphi$ характеризуют зависимость от времени (см. § 14).

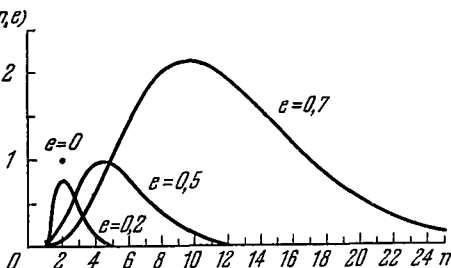


Рис. 5. Функция $g(n, e)$ относительной мощности излучения на разных гармониках для $e = 0; 0,2; 0,5; 0,7$. Номер гармоники n может иметь только целые значения. При $e = 0$ все излучение происходит на $n = 2$.

На полюсах ($\theta = 0, \pi$) формулы (1.13.9) и (1.13.10) описывают круговую поляризацию гравитационной волны. Тензор относительного ускорения вращается с удвоенной частотой обращения звезд. Круговая поляризация гравитационных волн связана с тем, что в процессе излучения двойная звезда теряет не только энергию, но и момент вращения.

Угловое распределение полного излучения без распределения на компоненты поляризации, усредненное по периоду обращения, определяется формулой

$$\frac{dL}{d\Omega} = \frac{G^4}{2\pi c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} (1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta). \quad (1.13.11)$$

Директриса распределения полного излучения по направлениям изображена на рис. 6. Излучение направлено главным образом к полюсам $\theta = 0, \pi$.

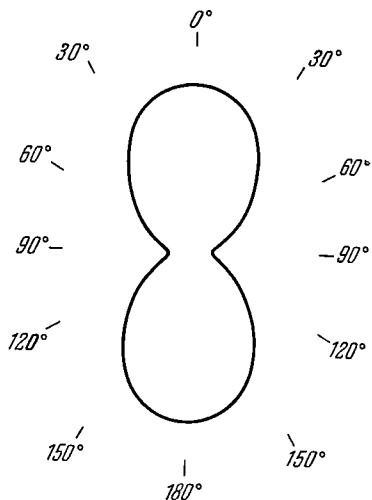


Рис. 6. Индикатриса гравитационного излучения в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты для двойной звезды с круговой орбитой

Оценим мощность гравитационного излучения реальных астрономических систем. Для Солнечной системы, представляя в (1.13.2) данные для крупнейшей планеты — Юпитера, получаем $L = 5 \cdot 10^{-10}$ эрг/сек. Это примерно в 10^{23} раз меньше светового излучения Солнца ($L_{\odot} \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг/сек).

Астрономам известны двойные звезды, мощность гравитационного излучения которых несравненно больше.

Приводим таблицу, заимствованную из работы Брагинского (1965) для нескольких относительно близких двойных звезд.

Общий поток гравитационного излучения, падающий на Землю со всех направлений, определяется в основном не отдельными близкими системами, а всей совокупностью тесных двойных звезд [типа W UMa нашей Галактики, Мироновский (1965b)]. Действительно, предположим для простоты, что пространственная плотность n_* двойных звезд постоянна вплоть до расстояния R от нас, и мощность гравитационного излучения каждой звезды порядка L . Тогда поток излучения на Земле будет

$$F_G = \int_0^R \frac{L n_*}{4\pi r^2} 4\pi r^2 dr = L n_* R,$$

Т а б л и ц а 1

Характеристики гравитационного излучения некоторых двойных звезд

Звезда	Период (сутки)	$\frac{m_1}{M_\odot}$	$\frac{m_2}{M_\odot}$	Расстояние от Солнечной системы (см)	$\frac{dE}{dt}$, эрг/сек	Ожидаемый поток на Зем- ле, эрг/сек·см ²
UV Leo	0,6	1,36	1,25	$2,1 \cdot 10^{20}$	$1,8 \cdot 10^{31}$	$3,5 \cdot 10^{-12}$
V Pup	1,45	1,66	9,8	$1,2 \cdot 10^{21}$	$4 \cdot 10^{31}$	$2,3 \cdot 10^{-12}$
i Boo	0,268	1,35	0,68	$3,8 \cdot 10^{19}$	$1,9 \cdot 10^{30}$	$1,1 \cdot 10^{-10}$
YY Eri	0,321	0,76	0,50	$1,3 \cdot 10^{20}$	$2,6 \cdot 10^{29}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$
SW Lac	0,321	0,97	0,83	$2,3 \cdot 10^{20}$	$1,1 \cdot 10^{30}$	$1,7 \cdot 10^{-12}$
WZ Sge	81 мин.	0,6	0,03	$3 \cdot 10^{20}$	$3,5 \cdot 10^{29}$	$3 \cdot 10^{-13}$

т. е. поток определяется в основном далекими двойными системами. Ситуация здесь та же самая, что и с общей оптической освещенностью поверхности Земли звездами *). Подробные подсчеты, проведенные Мироновским (1965b), дают для F_G значение порядка 10^{-9} эрг/см²·сек. Мощное гравитационное излучение должно возникать при некоторых катастрофических космических процессах (см. об этом далее §§ 15, 16 гл. I, § 11, гл. 3 и гл. 13). Кроме того, в пространстве, по-видимому, должно существовать равновесное тепловое космологическое гравитационное излучение с температурой $T \approx 1$ °K (см. об этом гл. 18 нашей книги «Релятивистская астрофизика»).

Наконец, в заключение этого параграфа отметим, что излучение гравитационных волн небесными телами может быть разделено на четыре типа:

1. Излучение при движении тел в двойных и кратных системах. Об этом типе излучения подробно говорилось выше.
2. Излучение при пульсациях звезд с отклонением от сферической симметрии. Подробный анализ этих вопросов можно найти в работе Торна и его сотрудников [см. Тörn (1968)].
3. Излучение от звезд, катастрофически коллапсирующих несферическим образом (см. далее раздел III).
4. Высокочастотное гравитационное излучение (в форме гравитонов), которое имеет место на уровне атомов и частиц, скажем, при кулоновском рассеянии электронов в веществе звезды. Вероятность испускания гравитонов весьма мала не только по сравнению с испусканием электромагнитных квантов, но и по сравнению с испусканием пар $\nu\bar{\nu}$ [Гандельман и Пинаев (1959)]. Для Солнца

*) Заметим, что освещенность Земли звездами далеких галактик мала из-за эффекта красного космологического смещения. Поток излучения от звезд нашей Галактики на полтора порядка больше потока излучения звезд других галактик. По той же самой причине вклад в F_G двойных звезд далеких галактик несуществен. Ситуация может измениться, если велико гравитационное излучение квазаров.

мощность теплового гравитационного излучения составляет около 10^{15} эрг/сек [Мироновский (1965а)], что в 10^{18} раз меньше светового излучения. О гравитонах см. § 6 гл. 2.

Далее в §§ 15 и 16 дается краткий анализ проблемы детектирования гравитационного излучения, и краткий разбор недавней работы Вебера. Интересующихся подробностями отсылаем к книге Вебера (1962), обзорам Брагинского (1965), Брагинского, Руденко (1970), статье Вестервельта (1966), серии докладов Вебера (1967; 1968; 1969) и работе Брагинского, Менского (1971 *).

Приведем здесь только для пояснения трудности задачи оценку величины ускорения A , вызываемого гравитационной волной для двух пробных частиц, разнесенных на расстояние l . Если двойная звезда находится от нас на расстоянии $10 \text{ пс} = 3 \cdot 10^{19} \text{ см}$, компоненты имеют массу порядка солнечной и обращаются за период 8 часов, то из оценок параграфа получаем

$$\frac{A}{l} \approx 10^{-33} \text{ сек}^{-2}.$$

§ 14. Торможение гравитационным излучением **)

Еще недавно единственным способом расчета энергии, уносимой из системы гравитационными волнами, было вычисление потока энергии в волновой зоне с помощью псевдотензора энергии-импульса гравитационных волн (Ландау и Лифшиц, 1967, § 105) и последующее интегрирование этого потока по сфере, окружающей источник, и по времени. Аналогичный метод использовался для вычисления углового момента, уносимого гравитационными волнами. Обратная реакция излучения на источник выводилась из требования, что источник теряет энергию и угловой момент с той же скоростью, с которой их уносят волны. Таким методом были получены результаты для двойных звезд, приведенные в предыдущем параграфе.

Сомневающиеся в реальности гравитационных волн скептики (число которых значительно уменьшилось за последнее десятилетие) утверждают, что псевдотензор, используемый для вычисления энергии и импульса гравитационных волн, не имеет физического смысла, так как он в каждой точке может быть сделан нулем за счет подходящего выбора системы координат. На такую критику обычно (удовлетворительно) отвечают, указывая, что полная излучаемая энергия и полный угловой момент не зависят от

*) Отметим также очень интересные работы Герценштейна, Пустовойта (1962) и Копвилема, Нагибарова (1965) о возможности когерентного испускания и детектирования гравитационных волн, хотя эти работы и не связаны прямо с нашим обсуждением.

**) Этот и следующий (§ 15) параграфы написаны для нашей книги проф. К. С. Торном (США).

координат и от выбора псевдотензора. Однако в последние два года были найдены лучшие ответы, которые делают абсолютно надежными стандартные заключения об энергии в гравитационной волне и о демпфирующем влиянии волны на источник.

Первым из них является сконструированный Айзаксоном (1968a,b) тензор (не псевдотензор!) энергии-импульса гравитационных волн. Айзаксон ограничился рассмотрением волн со средним значением длины волны λ , распространяющихся в «гладком» фоновом пространстве — времени, среднее значение радиуса кривизны которого $R \gg \lambda$. Такую систему можно проанализировать с двух точек зрения: исследовать ее «мелкозернистую» структуру или «крупнозернистую» структуру.

В «мелкозернистом» подходе рассматриваются области с размером, не слишком превышающим λ ; в таких областях кривизна пространства — времени определяется «рябью» гравитационных волн, а кривизна фонового пространства едва заметна. Так изучается распространение гравитационных волн.

При «крупнозернистом» рассмотрении исследуются крупномасштабные свойства пространства — времени; детальная локальная структура волн игнорируется путем усреднения всех величин по областям с размерами в несколько длин волн λ . Например, в инварианте кривизны $C = R_{iklm} R^{iklm}$ сглаживаются волновые пульсации, но остается неизменной кривизна фонового пространства; в результате радиус кривизны фонового пространства

$$R \approx \langle C \rangle^{-1/4}, \quad (1.14.1)$$

где скобки $\langle \quad \rangle$ означают «крупнозернистое» усреднение по масштабам в несколько длин волн *).

Айзаксон раскладывает метрику и тензор кривизны в ряды по малому безразмерному параметру

$$\lambda/R \ll 1. \quad (1.14.2)$$

Заметим, что этот параметр тесно связан с амплитудой волн, ибо как мы увидим ниже, сами волны дают фоновую кривизну. Плотность энергии волн порядка $(c^4/G) (h/\lambda)^2$, где h — безразмерная амплитуда волны, и, следовательно, согласно уравнениям Эйнштейна, они вызывают кривизну

$$R_{\text{вызв. волнами}}^{-2} \sim (G/c^4) \times (\text{энергия волн}) \sim (h/\lambda)^2; \quad (1.14.3)$$

$$h \sim \lambda/R_{\text{вызв. волнами}} \lesssim \lambda/R_{\text{полная}}.$$

Следовательно, в отсутствие материи и других полей разложение по степеням λ/R эквивалентно разложению по степеням амплитуды h .

*) Технически это усреднение по Бриллю и Хартли (1964), но во всех случаях, за исключением наиболее сложных, это может быть и любой другой мыслимый тип усреднения.

Айзаксон представил метрику g_{ik} и эйнштейновский тензор кривизны $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$ в форме

$$g_{ik} = g_{ik}^{(\Phi)} + h_{ik}, \quad (1.14.4)$$

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = G_{ik}^{(\Phi)} + G_{ik}^{(1)} + G_{ik}^{(2)} + O[(\lambda/R)^3].$$

Здесь $g_{ik}^{(\Phi)}$ и $G_{ik}^{(\Phi)}$ метрика и кривизна фона, $G_{ik}^{(1)}$ — осциллирующие поправки, линейные по λ/R , $G_{ik}^{(2)}$ — квадратичные поправки. Поправки $G_{ik}^{(1)}$ и $G_{ik}^{(2)}$ вычисляются с помощью метрики (1.14.4) и стандартных формул (1.7.1), (1.7.2) для тензора Риччи.

Вне источников, в вакуумной области, тензор Эйнштейна исчезает: $G_{ik} = 0$. Исследуем эти уравнения поля сначала с «мелкозернистой», а затем с «крупнозернистой» точек зрения. При «мелкозернистом» подходе, когда фоновая кривизна не заметна, часть тензора Эйнштейна, связанная с осцилляциями, должна быть равна нулю:

$$G_{ik}^{(1)} = 0. \quad (1.14.5)$$

Будучи выписанным в терминах возмущения метрики h_{ik} , это уравнение становится обобщением волнового уравнения на случай искривленного пространства:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{ik} &\equiv h_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}^{(\Phi)} h^j_j, \\ \psi_{ik|a}^a + 2R_{aikb}^{(\Phi)} \psi^{ab} + R_{ia}^{(\Phi)} \psi_k^a + R_{ka}^{(\Phi)} \psi_i^a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.14.6)^*$$

Здесь поднимание и опускание индексов производится с помощью фоновой метрики $g_{ab}^{(\Phi)}$; черточка означает ковариантное дифференцирование по отношению к этой метрике.

При «крупнозернистом» подходе вакуумные уравнения поля $G_{ik} = 0$ следует усреднить по масштабам в несколько длин волн. Среднее от фоновой кривизны $\langle G_{ik}^{(\Phi)} \rangle$ будет тогда собственной кривизной фона (без осцилляций), а среднее от линейных возмущений $\langle G_{ik}^{(1)} \rangle$ тождественно обратится в нуль. Следовательно, уравнения поля будут иметь вид $G_{ik}^{(\Phi)} + \langle G_{ik}^{(2)} \rangle = 0$ или, эквивалентный,

$$G_{ik}^{(\Phi)} = (8\pi G/c^4) T_{ik}^{(b)}, \quad (1.14.7)$$

где $T_{ik}^{(b)}$ определяется как

$$T_{ik}^{(b)} = -(c^4/8\pi G) \langle G_{ik}^{(2)} \rangle = (c^4/32\pi G) \langle h_{lm|i} h_{|k}^{lm} \rangle. \quad (1.14.8)$$

*) Члены, связывающие h_{ik} с кривизной фона, влияют на поляризацию волн, но не изменяют того факта, что волновой фронт движется со скоростью света.

Правая часть этого равенства получена усреднением квадратичной части стандартной формулы для тензора Эйнштейна [см. (1.14.4), (1.7.1), (1.7.2)].

В формуле (1.14.7) мы можем интерпретировать $T_{ik}^{(b)}$ как тензор энергии — импульса мелкозернистых волн h_{ik} в крупнозернистом фоновом пространстве. Уравнения поля обеспечивают выполнение обычных законов сохранения для этого тензора:

$$T_{i|k}^{(b)} = 0, \quad (1.14.9)$$

где $|$ обозначает ковариантную производную в фоновом пространстве. Следует подчеркнуть, однако, что тензор энергии — импульса Айзаксона $T_{ik}^{(b)}$ является тензором только в фоновом пространстве, но не в возмущенном пространстве, и что он локализует энергию, переносимую гравитационными волнами, только с крупнозернистой точки зрения, т. е. нельзя сказать, переносится ли энергия «гребнем» волны, «впадиной» или чем-то еще. С этой точки зрения формулы (1.13.9), (1.13.10) чисто формальны.

Можно убедиться из формулы (1.14.8), что тензор Айзаксона равен пространственно — временно́му среднему от псевдотензора Ландау и Лифшица (заметим, что это равенство обнаруживается только в конце анализа: оно не накладывается при выводе!). Следовательно, все результаты, полученные из псевдотензора Ландау и Лифшица (за исключением мелкозернистой локализации энергии, которая, как ими отмечено, не однозначна), формально оправданы анализом Айзаксона.

Вторым методом изучения энергии, переносимой гравитационными волнами, является исследование затухания источника, вызванного обратным влиянием волн. При таком исследовании не нужно вычислять энергию в волнах с помощью тензора Айзаксона или какого-либо псевдотензора. Следует рассмотреть влияние гравитационного поля на источник в трех различных случаях: 1) когда все гравитационные волны вдали от источника являются расходящимися (запаздывающие потенциалы); 2) когда все далекие волны являются сходящимися («опережающие потенциалы»); 3) когда все далекие волны — стоячие, т. е. половина из них расходящиеся и половина сходящиеся («половина опережающих плюс половина запаздывающих»). Сравнивая эти три случая, можно четко описать влияние волн на источник. Находим, что в случае стоячей волны движения источника не затухают; в случае расходящейся волны есть торможение движения (потеря энергии), а в случае сходящейся волны (с соответствующей фазой и амплитудой) будет наблюдаться ускорение движения, равное и противоположное торможению, вызываемому расходящейся волной.

Такой анализ хорошо известен в электромагнитной теории [особенно ясное изложение см. Барк (1969; 1970)]. Однако

в общей теории относительности он был доведен до окончательного завершения лишь недавно.

В оставшейся части этого раздела мы опишем два таких общерелятивистских расчета.

Первым из них является анализ почти ньютоновских, медленно движущихся систем, проведенный Барком (1969; 1970), Чандрасекаром и Эспозито (1970) и Торном (1968) [обзор см. Барк и Торн (1969)]. В этом анализе уравнения общей теории относительности раскладываются по степеням квадрата скорости материи в источнике $(v/c)^2$, который одного порядка величины с безразмерным ньютоновским потенциалом φ/c^2 и с отношением давления к плотности энергии в равновесной звезде. Например, для Солнца (v — параболическая скорость):

$$(v/c)^2 \sim \varphi/c^2 \sim P / \rho c^2 \sim 10^{-6}.$$

Низший порядок $(v/c)^2$ соответствует ньютоновской теории. В следующем порядке $(v/c)^4$ получаются пост-ньютоновские поправки к ньютоновской теории (смещение перигелия Меркурия; увлечение инерциальной системы отсчета; релятивистская неустойчивость в сверхмассивных звездах). В следующем порядке $(v/c)^6$ получаются еще меньшие пост-ньютоновские поправки. И, наконец, в порядке $(v/c)^7$ появляется обратная реакция излучения.

Один из принципиальных результатов Барка и Торна состоит в том, что эффекты реакции излучения могут быть поняты и легко вычислены без обращения к пост-ньютоновским поправкам промежуточных порядков $(v/c)^4$ и $(v/c)^6$. Результат в равной мере применим к общей теории относительности, электромагнитной теории или к скалярно-волновой теории (см. § 7 гл. 2). Проиллюстрируем его в случае скалярно-волновой теории.

Пространство разделяется на «ближнюю зону» ($r \ll \lambda$, где λ — характерная длина волны) и «волновую зону» ($r \gg \lambda$). Считается, что источник расположен полностью в ближней зоне. В волновой зоне скалярные волны (предполагаемые для определенности монохроматическими и квадрупольными) для реальных задач будут чисто расходящимися:

$$\psi_{\text{расх}} \sim r^{-1} P_2(\cos \theta) e^{i\omega(t-r)}, \quad r \gg \lambda = 2\pi c/\omega. \quad (1.14.10a)$$

Однако поучительно рассмотреть также стоячие волны

$$\psi_{\text{стояч}} \sim r^{-1} P_2(\cos \theta) \cos(\omega r) e^{i\omega t}, \quad r \gg \lambda \quad (1.14.10b)$$

и сходящиеся волны

$$\psi_{\text{сход}} \sim r^{-1} P_2(\cos \theta) e^{i\omega(t+r)}, \quad r \gg \lambda. \quad (1.14.10c)$$

Если скалярное волновое уравнение имеет обычную форму $\square \psi = 0$, то точная форма этих волн содержит в различных комбинациях сферические функции Бесселя:

$$\psi_{\text{расх}} \sim [n_2(\omega r) + i j_2(\omega r)] P_2(\cos \theta) e^{i\omega t}, \quad (1.14.11a)$$

$$\psi_{\text{стояч}} \sim n_2(\omega r) P_2(\cos \theta) e^{i\omega t}, \quad (1.14.11b)$$

$$\psi_{\text{сход}} \sim [n_2(\omega r) - i j_2(\omega r)] P_2(\cos \theta) e^{i\omega t}. \quad (1.14.11c)$$

Любое из этих полей определяется источником в ближней зоне. Будучи проэкстраполированы назад в ближнюю зону, поля (1.14.11) примут такой вид:

$$\psi_{\text{расх}} \sim \left\{ [r^{-3} + \dots] + \frac{1}{3} i \omega^5 [r^2 + \dots] \right\} P_2(\cos \theta) e^{i\omega t}, \quad (1.14.11a')$$

$$\psi_{\text{стояч}} \sim [r^{-3} + \dots] P_2(\cos \theta) e^{i\omega t}, \quad (1.14.11b')$$

$$\psi_{\text{сход}} \sim \left\{ [r^{-3} + \dots] - \frac{1}{3} i \omega^5 [r^2 + \dots] \right\} P_2(\cos \theta) e^{i\omega t}. \quad (1.14.11c')$$

В каждом случае доминирующая («ньютоновская») часть этих полей $\psi_{\text{ньют}} \sim r^{-3} P_2(\cos \theta) e^{i\omega t}$ одинакова — и это точный вид асимптотического вблизи нуля поля, которое должно генерироваться осциллирующим квадрупольным источником. В случае стоячих волн остается только этот член. Однако для бегущих волн имеется вдобавок еще малый член $\psi \sim i r^2 P_2(\cos \theta) e^{i\omega t}$, который появляется из функции Бесселя j_2 и не совпадает по фазе с главной частью (коэффициент i). Именно этот член приводит к силам реакции излучения и мы будем обозначать его $\psi_{\text{реакц}}$:

$$\psi_{\text{реакц}} \sim i \omega^5 r^2 P_2(\cos \theta) e^{i\omega t}. \quad (1.14.12)$$

Заметим, что внутри источника $\psi_{\text{реакц}}$ меньше, чем ньютоновская часть поля $\psi_{\text{ньют}}$ в $(\omega R)^5 \approx (v/c)^5$ раз, где R — размер источника и v — его характерная внутренняя скорость. Относительные фазы $\psi_{\text{реакц}}$ и $\psi_{\text{ньют}}$ таковы, что в случае расходящейся волны $\psi_{\text{реакц}}$ вызывает в источнике внутренние силы, которые извлекают энергию из него. Это — «силы реакции излучения». В случае сходящейся волны относительные фазы сдвинуты на π и $\psi_{\text{реакц}}$ нагнетает энергию в источник.

Ситуация в электромагнитной теории и в общей теории относительности совершенно аналогична *). В электродинамике

*) Нелинейность ОТО отличает гравитационный случай от электромагнитного и скалярного; но эти различия не важны для нашего обсуждения. Среди наиболее интересных отличий следующее: в схеме пост-ньютоновских

аналогичный аргумент был использован Лоренцем (1915) для вычисления реакции излучения на ускоренный классический электрон (см. также Джексон, 1962, § 17.3).

В общерелятивистском случае ньютоновская метрика в ближней зоне непосредственно сшивается с метрикой для стоячей волны в волновой зоне. Если волна является расходящейся, то в ближней зоне метрика должна содержать также члены, обязанные реакции излучения, которые не совпадают по фазе с ньютоновскими членами и меньше их в $(v/c)^5$ раз. Эти члены в комбинации с ньютоновскими, будучи продолженными в волновую зону, дают метрику расходящейся волны. Форма тормозящих членов в близкой зоне полностью определяется условием расходящейся волны.

Барк (1969; 1970), Торн (1969b) и Чандрасекар и Эспозито (1970) показали из первых принципов ОТО, что влияние тормозящих членов на источник, предсказываемое ОТО, можно описать на языке ньютоновской теории тяготения. Говоря точнее, можно ввести основные общерелятивистские эффекты торможения излучением в ньютоновскую теорию тяготения, просто приписывая малый добавок $\Phi_{\text{реакц}}$ к обычному ньютоновскому потенциалу. В результате получается следующий модифицированный вариант ньютоновской теории.

Тяготение описывается обычным ньютоновским потенциалом $\Phi(x, t)$, который вызывает обычную силу, действующую на тела:

$$F = m\nabla\Phi. \quad (1.14.13)$$

Гравитационный потенциал также удовлетворяет обычному уравнению с источником

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho, \quad (1.14.14)$$

и, как всегда, должен быть повсюду несингулярным. Однако, в противоположность привычной ньютоновской теории, $\Phi(\infty) \neq 0$ при $r = \infty$. В данный момент времени t для источника с квадрупольным моментом (в декартовых координатах)

$$K_{\alpha\beta} = \int \rho (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma x_\gamma) dV \quad (1.14.15)$$

потенциал Φ должен иметь при больших r вид

$$\Phi \approx \Phi_{\text{реакц}} \equiv -\frac{1}{15} \frac{G}{c^5} \left(\frac{d^5 K_{\alpha\beta}}{dt^5} \right) x^\alpha x^\beta. \quad (1.14.16)$$

приближений имеется тензор натяжений

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi G} \left[4 \frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\beta} - 2\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \right)^2 \right],$$

связанный с ньютоновским потенциалом Φ . В большинстве калибровок (например, у Барка и Чандрасекара, но не у Торна) этот тензор генерирует примерно столько же излучения, сколько генерирует сама движущаяся материя. В противоположность этому, в электромагнитной теории все излучение генерируется непосредственно движущимися зарядами.

Заметим, что $\Phi_{\text{реакц}}$ удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \Phi_{\text{реакц}} = 0$. Вследствие этого в каждой точке пространства (в ближней зоне!) потенциал модифицированной теории связан с обычным потенциалом посредством соотношения

$$\Phi = \Phi_{\text{обыч}} + \Phi_{\text{реакц}}.$$

Член $m \nabla \Phi_{\text{реакц}}$ в выражении для силы представляет собой силу торможения излучением частицы с массой m . Заметим, что эта сила вызвана поведением системы как целого, а не поведением одной только частицы! Средняя по времени скорость, с которой эта сила извлекает энергию из системы, легко находится из приведенных выше уравнений:

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle -\int (\rho \nabla \Phi_{\text{реакц}}) \cdot \mathbf{v} dV \right\rangle = \frac{1}{45} \frac{G}{c^5} \sum_{\alpha, \beta} \left\langle \left(\frac{d^3 K_{\alpha\beta}}{dt^3} \right)^2 \right\rangle. \quad (1.14.17)$$

Отметим, что точно с такой же скоростью энергия уносится гравитационными волнами [см. 1.12.8]. Это равенство имеет большое значение, поскольку анализ Барка, Чандрасекара, Эспозито и Торна не имеет дело с энергией в волнах.

Хотя модифицированная теория Ньютона правильно с точностью $\frac{GM}{c^2 R}$ описывает торможение излучением, требуемое общей теорией относительности, она не дает смещения перигелия, отклонения света и другие безизлучательные поправки к ньютоновской теории. Так как в каждый момент безизлучательные поправки намного больше силы реакции $m \nabla \Phi_{\text{реакц}}$, то мгновенная сила торможения модифицированной теории Ньютона физически бессмысленна. Однако при интегрировании по большому интервалу времени ее эффекты будут преобладать над другими релятивистскими поправками, сохраняющими энергию. Именно эти долгосрочные («вековые», как говорят в небесной механике) эффекты имеют смысл и могут быть решающими в некоторых астрофизических приложениях.

Проведенный анализ несправедлив для существенно релятивистских тел типа нейтронных звезд. Однако в этом случае возможен иной подход, наглядно описывающий торможение излучением [Торн и Камполаттаро (1967), Прайс и Торн (1969), Торн (1969a)].

Торн, Камполаттаро и Прайс (ТКП) применили хорошо известную теорию резонансов (развитую, например, в квантовой механике и оптике) к взаимодействию между гравитационными волнами и релятивистской звездой. Можно различать три типа взаимодействий: 1) рассеяние звездой сходящегося пакета волн (случай мало интересный с астрофизической точки зрения); 2) испускание гравитационных волн изолированной пульсирующей звездой (случай, представляющий значительный астрофизический интерес) и

3) незатухающие синусоидальные колебания звезды, связанные со стоячими волнами, когда система как целое (звезда плюс волны) заключена в большую идеально отражающую полость (абсолютно не интересный для астрофизики случай). Эти три проблемы тесно связаны. Для случая рассеяния и стоячих волн в полости существуют определенные резонансные частоты $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$, при которых взаимодействие звезды и волн особенно сильно. Для частот, близких к одной из них, взаимодействие подчиняется хорошо известному брейт-вигнеровскому соотношению:

$$\left(\begin{array}{l} \text{сечение рассеяния для задачи} \\ \text{рассеяния} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{l} \text{энергия звездных пульса-} \\ \text{ций, деленная на энергию} \\ \text{стоячих волн, приходя-} \\ \text{щая на одну длину} \\ \text{волны для случая полости} \end{array} \right) \sim \frac{1}{(\omega - \omega_n)^2 + (1/\tau_n)^2} \cdot \quad (1.14.18)$$

Торн, Камполаттаро и Прайс, используя хорошо известные методы квантовой механики и оптики, показали, что резонансные частоты ω_n являются характеристическими осцилляционными частотами изолированной звезды, испускающей волны, и что полуширина $1/\tau_n$ каждого резонанса дает скорость, с которой уменьшается амплитуда колебаний изолированной звезды в силу торможения излучением. С помощью этой связи между тремя типами задач они аналитически вывели формулу торможения излучением:

$$\text{амплитуда колебаний} \sim e^{i\omega_n t - t/\tau_n}. \quad (1.14.19)$$

Этот результат выведен без какого-либо рассмотрения того, как уносится энергия испускаемыми гравитационными волнами! Вместо этого при выводе рассматривается прямо взаимодействие волн и звезды. Только после этого, когда уже проделаны численные оценки для отдельных звезд, проверяется, что скорость, с которой затухает пульсационная энергия звезды, совпадает со скоростью уноса энергии гравитационными волнами.

Торн (1969а, б, с) применил эти методы к численному расчету характеристических пульсационных периодов $T_n = 2\pi/\omega_n$ и времен затухания τ_n для реалистических моделей нейтронных звезд. Для наинизшей квадрупольной моды массивной нейтронной звезды ($0,8 M_\odot \leq M \leq 2M_\odot$) он получил $T_0 \sim 3 \cdot 10^{-4}$ сек и $\tau_0 \sim 0,3$ сек. Обратим внимание на малость времени затухания по астрофизическим стандартам! Эти численные результаты с точностью до коэффициента ~ 3 согласуются с оценками Уилера (1966) и Чiu (1967), основанными на линейной теории.

При радиальных пульсациях нейтронной звезды гравитационное излучение должно отсутствовать, так как ОТО не допускает

монопольных гравитационных волн. Однако любая реальная звезда вращается и деформируется центробежными силами. Эти деформации связывают сферические моды пульсаций с квадрупольными модами, заставляя их излучать. Предсказываемое время торможения излучением равно

$$\tau_{\text{сфер}} \sim e^{-4} \tau_{\text{квадруп}} \sim (\Omega^2 R^3 / GM)^2 \tau_{\text{квадруп}} \quad (1.14.20)$$

в согласии с оценками Уилера (1966). Здесь e обозначает эксцентриситет звезды и Ω — ее угловую скорость. Для нейтронных звезд, связанных с наблюдаемыми пульсарами, $e \sim 1/30 \div 10^{-3}$ и, следовательно, $\tau_{\text{сфер}}$ заключено в пределах от одной недели до 10^5 лет. Поэтому, вероятно, другие механизмы затухания существуют. (См. также Чао (1967). *З.* и *Н.*)

§ 15. Детектирование гравитационных волн *)

Недавно Вебер (1969) сообщил об обнаружении всплесков гравитационного излучения от космических источников. Если такая интерпретация наблюдений правильна, она окажет громадное воздействие на релятивистскую астрофизику.

Чтобы разобраться в результатах Вебера, необходимо описать его эксперименты. Каждый детектор представляет собой большой алюминиевый цилиндр длиной около двух метров и весом около тонны. Цилиндр подвешен на проволоке в вакууме и механически изолирован от всего окружающего. Посредине цилиндра прикреплены пьезоэлектрические датчики, присоединенные к электронной цепи, чувствительной к основной (собственной) моде колебаний цилиндра. Частота этой моды равна

$$\nu_0 = 1660 \text{ гц}, \quad (1.15.1)$$

а ее добротность Q (число колебаний, необходимых для уменьшения энергии колебаний в e раз) есть

$$Q \approx 10^5, \quad (1.15.2)$$

т. е. если по цилиндру быстро стукнуть молотком (или воздействовать всплеском гравитационных волн), он начнет «звенеть» с периодом $T_0 = 1/\nu_0 \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ сек}$ и звон затухнет за время $\tau_0 = QT_0/2\pi \approx 10 \text{ сек}$.

Именно такого типа резкие возбуждения, необъяснимые пока ничем, кроме гипотетических всплесков гравитационных волн, наблюдал Вебер. Более того, он наблюдал этот неожиданный «звон» не на одном цилиндре, а одновременно на двух, разнесенных на 1000 км (один вблизи Чикаго, а другой неподалеку от Вашингтона)! Точность определения момента времени, с которой Вебер

*) См. примечание на стр. 64.

фиксирует появление «звона», составляет $0,44 \text{ сек}$, с этой же точностью звон был одновременным.

Каковы характеристики гравитационных волн, которые могли вызвать этот «звон»? Ясно, что они должны нести ощутимую энергию на частотах, близких к $\nu_0 = 1660 \text{ гц}$. Более того, всплеск должен продолжаться менее чем $\tau_0 = 10 \text{ сек}$, так как «звон» затухал в соответствии с естественным временем затухания колебаний в цилиндре.

Сколько энергии должны сообщать волны каждому цилиндру? Величина этой энергии менялась от всплеска к всплеску. Для «типичных» событий, зарегистрированных Вебером — они случались в среднем дважды в месяц — полная энергия, приобретаемая основной модой каждого цилиндра, составляет

$$E_{\text{приобр}} \approx 3kT \approx 6 \cdot 10^{-14} \text{ эрг.} \quad (1.15.3)$$

Здесь T — комнатная температура (300° K), а величина $3kT$ означает, что энергия в двух цилиндрах одновременно и быстро вырастает до величины, в три раза превышающей тепловой шум. Вероятность случайной корреляции такой величины меньше одного раза в год. Заметим, что это возбуждение соответствует амплитуде собственного колебания цилиндра δL порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(10^8 \text{ г})(2\pi \cdot 1,7 \cdot 10^3 \text{ 1/сек})^2 (\delta L)^2 &\approx E_{\text{приобр}}, \\ \delta L &\approx 6 \cdot 10^{-14} \text{ см.} \end{aligned} \right\} \quad (1.15.4)$$

Разумеется, Вебер не мог прямо измерить такую амплитуду, но он мог и действительно измерил напряжения, которые эти амплитуды вызывают в цилиндрах.

Сколько энергии должны нести волны, чтобы передать $6 \cdot 10^{-14} \text{ эрг}$ цилиндрам Вебера? Для расчета этой энергии необходимо знать эффективное поперечное сечение механического осциллятора, поглощающего гравитационные волны в полосе $\Delta \nu_0 \approx \nu_0/Q$. Это сечение есть [см., например, Вебер (1962)]

$$\sigma \approx 20 (r_g/\lambda_0) QL^2, \quad (1.15.5)$$

где $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ — гравитационный радиус осциллятора, λ_0 — резонансная длина волны осциллятора, L — длина осциллятора, Q — его добротность. Для цилиндров Вебера эффективное поперечное сечение равно

$$\sigma \approx 3 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2. \quad (1.15.6)$$

Оно, конечно, очень мало в силу малости гравитационного радиуса детектора ($r_g \approx 10^{-22} \text{ см}$, $\lambda_0 \approx 10^7 \text{ см}$, $r_g/\lambda_0 \approx 10^{-29}$). В действительности выписанное сечение относится к ситуации, в которой детектор, находящийся при нулевой температуре, испытывает

статическое воздействие строго резонансного длинного пуга волн (время прохождения луча много больше времени затухания детектора). Веберовские события несколько отличаются от этого: температура и связанный с нею шум высоки, а волновой пуг — короткий. В результате для отдельных событий, которые наблюдались Вебером, поперечное сечение может быть в десять раз выше, чем (1.15.6).

Деля передаваемую энергию на поперечное сечение, мы видим, что приходящая на Землю в каждом всплеске полная энергия на единицу площади в полосе частот детектора есть

$$\left(\frac{dE}{dA}\right)_{\text{на } \nu_0 \text{ в } \Delta\nu_0} \approx 10^5 \text{ эрг/см}^2. \quad (1.15.7)$$

Следовательно, если источник расположен на расстоянии l_{nc} (в парсеках) от Земли, то полная энергия, испускаемая источником в полосе от ν_0 до $\nu_0 + \Delta\nu_0$, равна

$$E_{\text{(испуск. на } \nu_0 \text{ в } \Delta\nu_0=\nu_0/Q=10^{-5} \nu_0)} \approx 10^{43} l_{nc}^2 \text{ эрг.} \quad (1.15.8)$$

Если ширина полосы излучения порядка ν_0 и источник находится в ядре нашей Галактики ($l_{nc} \approx 8,6 \cdot 10^3$), то

$$E_{\text{полн. испуск}} \approx 7 \cdot 10^{55} \text{ эрг} \approx 40 M_{\odot} c^2. \quad (1.15.9)$$

Хотя эти цифры могут оказаться некорректными даже по порядку величины (большая неопределенность заложена в предположении относительно ширины спектра излучения), ясно, что теоретикам будет очень трудно объяснить эти наблюдения! См. обзоры, цитированные в конце § 13.

«События», регистрируемые Вебером, представляют собой выделение огромных порций энергии (конечно, если правильна их интерпретация как всплесков гравитационного излучения из центра Галактики). Поэтому естественно предполагать, что в этих событиях выделяется энергия и в других видах. В работе Чармана и др. (1970) сообщается о попытках наблюдения всплесков радиоизлучения на частоте 151 Мгц от центра Галактики, аналогичных всплескам гравитационного излучения. Результат отрицателен. Поток энергии в радиодиапазоне по крайней мере на 19 порядков меньше, чем в опытах Вебера. Баккал и Дэвис (1971) определили верхний предел потока нейтрино из центра Галактики. Чувствительность детектора к нейтрино зависит от их энергии; поток энергии меньше $20 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек}$, если $E_\nu = 10 \text{ Мэв}$, и меньше $0,1 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек}$, если $E_\nu = 100 \text{ Мэв}$. Средний поток энергии гравитационных волн, по Веберу, больше $10^4 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек}$.

При столкновении нейтронных звезд значительная доля энергии выделилась бы в виде ν и $\bar{\nu}$. По-видимому, только столкновение коллапсаров могло бы давать энергию в единственной форме гравитационного излучения.

§ 16. Гравитационные волны: численные оценки и взаимодействие с веществом

Физическая картина распространения гравитационных волн, нарисованная выше, нуждается в дополнении численными оценками.

Пусть волна характеризуется метрикой

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - [1 + h \sin(kx - \omega t)] dy^2 - [1 - h \sin(kx - \omega t)] dz^2, \quad (1.16.1)$$

так что h — амплитуда, $\omega = ck$ — частота, длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Поток энергии, переносимый такой волной,

$$F \frac{эрг}{см^2 \cdot сек} = \frac{c^3 h^2 \omega^2}{32\pi G} = 4 \cdot 10^{36} h^2 \omega^2 \quad (1.16.2)$$

(при этом уже произведено усреднение по периоду волны $\overline{h_{22}^2} = \frac{h^2}{2}$).

Отсюда, например, для пульсара в Крабовидной туманности (см. гл. 13) в предположении полной мощности гравитационного

излучения $L_g = 10^{38} \frac{эрг}{сек}$, при расстоянии $R = 4 \cdot 10^{21}$ см (1,5 килопарсека), $\omega = 2\omega_0 = 400 \frac{1}{сек}$ получим поток энергии в гравита-

ционной волне $F = \frac{L_g}{4\pi R^2} = 5 \cdot 10^{-7} \frac{эрг}{см^2 \cdot сек}$ и $h = 10^{-24}$. Значит, в этой волне две свободные частицы, расположенные перпендикулярно к направлению распространения волны, периодически меняют расстояние от одной до другой на 10^{-24} величины расстояния.

Найдем поток энергии гравитационного излучения через площадку поперечником, равным длине волны

$$W = F\lambda^2.$$

Используя (1.16.2), получаем

$$W = \frac{c^3 h^2 \omega^2}{32\pi G} \left(\frac{2\pi c}{\omega} \right)^2 = \frac{\pi c^5}{8G} h^2 = 10^{59} h^2 \frac{эрг}{сек} = 10^{12} h^2 \frac{M_{\odot} \cdot c^2}{год}. \quad (1.16.3)$$

Заметим, что выражение W не зависит от частоты, а составляется из мировых постоянных. Если под величиной h в выражении (1.16.3) понимать возмущение метрики на границе волновой зоны (т. е. на расстоянии порядка λ от источника), то выражение (1.16.3) дает полную мощность гравитационного излучения источника.

Очевидно, что $h \sim 1$ может быть достигнуто лишь при столкновении двух коллапсировавших звезд на расстоянии порядка их гравитационного радиуса и в течение времени порядка $\frac{rg}{c}$.

Величина $W = 10^{59} \frac{эрг}{сек}$ является максимальной возможной мощностью источника гравитационных волн независимо от его массы.

Для описания взаимодействия гравитационной волны (1.16.1) с детектором удобно перейти от системы отсчета x, y, z, t к другой системе:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x, \quad x^2 = (1 + h_0/2) y, \quad x^3 = (1 - h_0/2) z, \\ \tau &= t + (y^2 - z^2) \dot{h}_0/4, \quad \text{где } h_0 = h \sin(kx - ct). \end{aligned} \right\} \quad (1.16.4)$$

Мы рассматриваем области пространства, малые по сравнению с длиной волны, и медленные движения частиц. Квадрат интервала теперь запишется в виде (с точностью до малых величин высшего порядка)

$$ds^2 = [1 - (x^{2^2} - x^{3^2}) \dot{h}_0/2] d\tau^2 - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}. \quad (1.16.5)$$

Уравнения движения медленных частиц (1.6.1b) для метрики (1.16.5) записываются в виде

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [\ddot{h}_0/2 (x^{2^2} - x^{3^2})]. \quad (1.16.6)$$

Величина

$$\varphi = -\frac{\ddot{h}_0}{4} (x^{2^2} - x^{3^2}) \quad (1.16.7)$$

для локального наблюдателя играет роль ньютоновского потенциала. Для масштабов много меньше длины волны производная $\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{1^2}} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{2^2}} \right|, \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{3^2}} \right|$ и φ удовлетворяют ньютоновскому уравнению для пустого пространства:

$$\Delta \varphi \approx 0 + \frac{\ddot{h}_0}{2} - \frac{\ddot{h}_0}{2} = 0. \quad (1.16.8)$$

Таким образом, это гравитационный потенциал «приливного» типа.

Другая поляризация гравитационной волны дает соответственно вклад $\ddot{h}_{23} x^2 x^3$ в величину φ .

Эффективный ньютоновский потенциал позволяет точно, количественно и в то же время наглядно описать воздействие гравитационной волны на приемник типа веберовского или вращающийся резонансный приемник, предложенный Брагинским, Зельдовичем и Руденко (1969) (далее цитируемый как Б.З.Р.).

Отметим, что из формулы для φ (1.16.7) следует также зависимость амплитуды колебаний детектора от его ориентации относительно направления на источник. В статье Вебера (1970) отмечено,

что наблюдаемая зависимость частоты событий от звездного времени согласуется с предположением о галактическом центре как источнике гравитационных волн. Воздействие строго периодического, монохроматического излучения на осциллятор характеризуется величиной сечений поглощения σ_c и сечения рассеяния σ_{sc} . В реальной ситуации опытов Вебера внутреннее трение металла гораздо больше гравитационного излучения, поэтому справедливо выражение сечения поглощения в максимуме, приведенное выше, что дает $3 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$ для его опытов. При отходе от резонанса амплитуда колебаний убывает как $\frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 + (\nu - \nu_0)^2}}$, где $\Gamma = \frac{\nu_0}{Q}$ —

время затухания свободных колебаний детектора. В идеальном случае при отсутствии какого-либо трения имеет место только рассеяние. В этом случае сечение рассеяния в точном резонансе, в соответствии с общей теорией, достигло бы громадной величины $\pi \lambda^2$, т. е. $3 \cdot 10^{13} \text{ см}^2$ (!). При этом поток энергии $10^{-30} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}$ соответствовал бы амплитуде колебаний цилиндра порядка 10 см .

Однако малость взаимодействия гравитационных волн с веществом тем не менее проявилась бы: ширина такого резонанса соответствует времени затухания колебаний цилиндра за счет одного только гравитационного излучения.

Это время — порядка $\tau = \frac{c^5}{GMR^2\omega^4}$, что составит ($M \approx 10^6 \text{ г}$, $R \approx 10^2 \text{ см}$, $\omega \approx 10^4 \text{ гц}$) $\tau \approx 10^{33} \text{ сек} \approx 10^{26} \text{ лет}$. Такое же время потребовалось бы для возбуждения резонансной амплитуды. В опытах Вебера (если они не найдут другого объяснения) наблюдаются сравнительно короткие, а следовательно, спектрально широкие импульсы. Как показано в работе Б.З.Р., при воздействии на детектор таких импульсов приобретаемая детектором энергия зависит только от спектральной плотности падающего излучения при резонансной частоте H ($\omega = \omega_r$):

$$E = A_* H, \quad A_* \sim 10^{-20} \text{ см}^2 \text{сек}^{-1}. \quad (1.16.9)$$

С полной энергией импульса спектральная плотность связана формулой

$$\varepsilon = \int F(t) dt = \int H(\omega) d\omega.$$

Мы не останавливаемся здесь на вопросе о воздействии излучения на детектор при отличной от нуля начальной энергии детектора (см. Б.З.Р.). Вопрос этот важен, так как наблюдаемые «события» соответствуют энергии, не намного превышающей среднюю тепловую энергию в детекторе. Общая оценка потока энергии из центра Галактики, следующего согласно Б.З.Р. из данных Вебера, составляет около 10^{50} эрг/сек , в переводе на массу $10^3 \frac{M_\odot}{\text{год}}$. Такой

поток по крайней мере в 10^6 раз больше потока электромагнитной энергии из центра Галактики. В работе Риса и Шамы (1970) анализировалось влияние такой потери массы на динамику Галактики. По мнению авторов, потери массы не превышают $70 M_{\odot}/\text{год}$; таким образом, интерпретация опытов Вебера наталкивается на астрономические трудности и окончательный вывод до сих пор остается неясным.

Вернемся к мысленным опытам, поясняющим взаимодействие волн с другими формами материи.

Принципиальный интерес представляет воздействие волны на две массы, не связанные между собой (или связанные так, что собственная частота системы во много раз меньше частоты волны). В этом случае амплитуда рассеянной волны *)

$$h' = \frac{GMl^2 h \omega^2}{rc^4} = \frac{GK_* \omega^2 h}{rc^4}, \quad (1.16.10)$$

где K_* — квадрупольный момент. Соответственно сечение рассеяния

$$\sigma_{sc} = A^2 = \frac{r_g^2 l^4}{\lambda^4}. \quad (1.16.11)$$

Нетрудно найти также сечение поглощения, если трение таково, что кинетическая энергия убывает в e раз за время τ :

$$\sigma_c = \frac{GMl^2}{\tau c^3} \approx \frac{GK_*}{\tau c^3} \approx \frac{r_g l^2}{c\tau}. \quad (1.16.12)$$

При этом предполагается, что трение за период невелико, $\tau\omega \gg 1$.

Сечение поглощения не зависит от частоты; в реальной ситуации оно во много раз превышает сечение рассеяния, однако меньше, чем произведение амплитуды рассеяния на длину волны

$$\sigma_{sc} < \sigma_c < A \frac{c}{\omega},$$

как и должно быть согласно общей теории.

Именно такое рассеяние на паре связанных частиц с сечением рассеяния, не зависящим от трения, более всего похоже на томсоновскую теорию рассеяния электромагнитных волн свободными электронами. Характерно, что вероятность рассеяния в зависимости от угла в обоих случаях симметрична в передней и задней (по отношению к направлению волны) полусфере. Рассеяние

*) Принято относить амплитуду рассеянной расходящейся волны к единичной амплитуде падающей волны ($h = 1$) и единице расстояния ($r = 1$):

$$A = \frac{GK_* \omega^2}{c^4} = \frac{GK_*}{\lambda^2 c^2} = \frac{r_g l^2}{\lambda^2}.$$

гравитационной волны на единичной точечной массе носит совершенно другой характер: в этом случае имеет место лишь отклонение луча — такое же для гравитационных волн, как отклонение света на $1,75''$ вблизи Солнца.

Рассмотрим теперь взаимодействие гравитационной волны с веществом, непрерывно распределенным в пространстве, в объеме размером много больше длины волны.

Здесь необходим иной подход, соответствующий однородности распределения вещества, взаимодействующего с волной. Гравитационная волна создает в среднем однородные (по пространству), но анизотропные по направлению деформации вещества. Поглощение гравитационной волны легко найти, подсчитывая работу сил вязкости при заданной деформации (Хоукинг (1966), Мизнер (1967)). При вязкости μ энергия, диссипируемая в единице объема в единицу времени, равна с точностью до множителя порядка единицы

$$q = \mu h^2 \omega^2. \quad (1.16.13)$$

Сравнивая это выражение с потоком энергии $F = \frac{c^3 h^2 \omega^2}{G}$, найдем длину, на которой энергия волны упадет в e раз:

$$L_* = \frac{F}{q} = \frac{c^3}{\mu G}. \quad (1.16.14)$$

Подставим вязкость воздуха $2 \cdot 10^{-4}$ (не зависящую от плотности!). Получим $L_* = 10^{42}$ см — величину, бессмысленно большую даже по космологическим масштабам.

Для того чтобы получить полную картину распространения гравитационной волны в среде, надо еще найти показатель преломления. Преломление (изменение фазовой скорости волны) есть результат интерференции проходящей волны и волн, испущенных средой, по которой идет исходная волна *).

Здесь необходимо вернуться к «первым принципам», к исходному уравнению для излучения гравитационных волн. Как известно [см. Ландау, Лифшиц (1967)], уравнения тяготения для этого случая могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{2} \square h_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right); \quad (1.16.15)$$

здесь T_{ik} — тензор энергии — импульса источника поля. Если в движении источника существенно гравитационное поле, то оно должно быть включено в T_{ik} ; см. далее.

Согласно этому уравнению источником гравитационной волны, несущей h_{22} и h_{33} (возмущение метрических коэффициентов при

*) Очевидно, что интерференция происходит только с той частью испущенной волны, которая распространяется вперед.

dy^2 и dz^2), являются переменные во времени компоненты тензора энергии — импульса — натяжений по этим осям.

Выше (см. § 11 гл. 1) для излучения волн применялись формулы, в которые входит K_* — производная квадрупольного момента системы. Формулы действительно удобны для рассмотрения обособленной системы, размер которой меньше длины волны. Но и в этом случае не надо забывать, что формулы с K_* вторичны! Первичными являются T_{22} и T_{33} как источники волнового поля. Говоря схематично, произведение $T_{22} S_{xz}$ (S_{xz} — площадь элемента сечения) или интеграл $\int T_{22} dx dz$ есть полная сила F_y , действующая вдоль оси y . Соответственно скорость изменения импульса каждой половины системы равна F_y ; интеграл $\int F_y dy = \int T_{22} dx dz dy = \int T_{22} dV$ удастся свести к производной от $\int \rho y^2 dy$, т. е. связать с квадрупольным моментом системы.

Однако исходная формулировка заключается в том, что для колеблющегося тела источником гравитационных волн являются упругие натяжения, т. е., в последнем счете, — анизотропные электромагнитные поля и анизотропное движение электронов внутри металла. Для двойной звезды источником является «натяжение» гравитационного поля, связывающего между собой эти две звезды. В ходе вращения это натяжение меняется с двукратным периодом. Не следует удивляться тому, что гравитационное поле (соответствующие компоненты псевдотензора этого поля) играет роль источников для другого гравитационного поля — для волн. Эта возможность заранее заложена в нелинейности уравнений ОТО.

Вернемся к нашей задаче и подставим в уравнение распространения в правую часть T_{ik} , создаваемые в веществе самой волной. Если эти T_{ik} соответствуют вязкости и пропорциональны скорости деформации, получится уравнение вида

$$\frac{1}{2} \square h_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \mu \dot{h}_{ik} = \frac{1}{2} \alpha \dot{h}_{ik}, \quad (1.16.16)$$

решение которого описывает только затухание: при заданной амплитуде в начале координат убывание с расстоянием

$$h_{ik} = h_{ik}(x=0) e^{-i\omega t + i\omega c^{-1}x - 0,5\alpha c x} \quad (x > 0), \quad (1.16.17)$$

а в безграничном пространстве убывание с течением времени

$$h_{ik} = h_{ik}(t=0) e^{ikx - i\omega t - 0,5\alpha c^2 t} \quad (t > 0). \quad (1.16.18)$$

Скорость убывания правильно дается элементарным расчетом, приведенным выше, и она ничтожна. Взаимодействие между волной и непрерывно распределенным веществом полностью отсутствует в важных случаях: 1) для вещества, состоящего из покоящихся

пылинок. Очевидно, что T_{ik} такого вещества имеет одну лишь компоненту T_{00} и эта компонента не изменяется при прохождении волны, так как $h_{22} = -h_{33}$ и след тензора деформации равен нулю; 2) для вещества с $P = \frac{\varepsilon}{3}$ или вообще с паскалевским тензором $T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}P$. Отметим, что этот результат содержится в знаменитой работе Лифшица (1946): в случае $P = \frac{\varepsilon}{3}$ решение для гравитационных волн соответствует скорости распространения равной скорости света и отсутствию затухания (сверх адиабатического ослабления). Сохранение паскалевского тензора при анизотропной деформации формально означает равенство нулю вязкости; физически это значит, что мгновенно восстанавливается термодинамическое равновесие. В астрофизике и, в частности в космологии, представляет интерес противоположный, бесстолкновительный случай. В этом случае по порядку величины можно предполагать, что $T_{22} - P = -(T_{33} - P) \approx h_{22}P$. Действительно, при однородном сжатии всего пространства по одной оси и расширении по другой можно ожидать подобного изменения компонент импульсов всех частиц, что и приведет к написанному выше результату.

Подставляя

$$\frac{1}{2} \square h_{22} = \frac{8\pi GP}{c^4} h_{22}, \quad (1.16.19)$$

получим коэффициент преломления, зависящий от частоты, $c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_0^2$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{16\pi GP}{c^2}}$.

Картина напряжений как источника гравитационных волн позволяет понять превращение электромагнитной волны в гравитационную при прохождении первой через постоянное магнитное поле [Герценштейн, Пустовойт (1962)]. В плоской электромагнитной волне, распространяющейся по оси x , очевидно, $T_{22} \equiv T_{33}$ в силу симметрии свойств электрического E и магнитного H поля в вакууме. Однако если волна поляризована так, что H направлено по z в области, где имеется постоянное поле H_0 , также направленное по z , то возникают дополнительно компоненты тензора энергии — импульса

$$T_{33} = -\frac{H_0 H}{4\pi} \sin(kx - \omega t), \quad T_{22} = \frac{H_0 H}{4\pi} \sin(kx - \omega t).$$

Эти поля являются источником (притом строго когерентным) для гравитационной волны той же частоты и того же направления. Уравнение (1.16.15) с такой правой частью дает решение, в котором амплитуда гравитационной волны будет расти линейно, пропор-

ционально пути X , пройденному электромагнитной волной от того места, где она вступила в область, занятую магнитным полем. Энергия гравитационной волны пропорциональна X^2 . Однако надо учесть, что излучение происходит не точно в направлении электромагнитной волны, а в дифракционном конусе с углом $\alpha \sim \sqrt{\frac{\lambda}{X}}$,

так что телесный угол — порядка $\frac{\lambda}{X}$. Окончательно перекачка энергии из электромагнитных волн в гравитационные оказывается пропорциональна X (поскольку не учитывается ослабление электромагнитной волны). Дадим выражение для длины, на которой электромагнитная волна половину энергии перекачает в гравитационную:

$$L_* = \frac{c^4}{\lambda G H_0^2}$$

(см. Герценштейн и Пустовойт (1962)). Длина эта гигантски велика, значительно больше той (также большой!) длины, на которой в тех же условиях происходит дробление фотонов за счет нелинейности квантовой электродинамики [Адлер и др. (1970)]. Наконец, остановимся на физическом смысле удивительного на первый взгляд факта, что инварианты тензора кривизны R_{iklm} плоской гравитационной волны тождественно равны нулю. В этом отношении гравитационная волна подобна электромагнитной, в которой есть электрическое поле E и магнитное H , но оба инварианта равны нулю: $H^2 - E^2 \equiv 0$ и $(E \cdot H) \equiv 0$

Рассмотрим сначала электромагнитную волну. Представим себе наблюдателя, движущегося со скоростью v в направлении волны. Чем ближе скорость v к скорости света c , тем меньше (в системе наблюдателя) частота волны ω , больше длина волны и меньше E и H . В пределе при $v \rightarrow c$ имеем $E \rightarrow 0$, $H \rightarrow 0$.

В свете сказанного возникают следующие вопросы. Можно ли инвариантно характеризовать плоскую электромагнитную волну, можно ли указать различие между двумя волнами, которое было бы признано любым наблюдателем?

При переходе от одной системы координат к другой поля меняются пропорционально частоте, поэтому отношение напряженности поля к частоте или произведение напряженности поля на длину волны является инвариантным. Вместе с тем этот инвариант нелокален: чтобы определить его, недостаточно измерения E и H в одной точке пространства — времени, нужна серия измерений в разных точках, чтобы наряду с $\overline{E^2}$, $\overline{H^2}$ найти также длину волны. Между тем $H^2 - E^2$ и (EH) — это *локальные* инварианты.

Таким образом, только наличие нелокального инварианта делает возможным инвариантно отличать одни волны от других.

Рассмотрим волновой пакет: плотность энергии ϵ пропорциональна $(E^2 + H^2) \sim \lambda^{-2}$, объем пакета преобразуется так же, как длина волны, поэтому полная энергия пакета $\sim \lambda^{-2} \cdot \lambda \sim \lambda^{-1} \sim \omega$, т. е. пропорциональна частоте. Но это значит, что инвариантом является отношение энергии пакета к частоте, т. е. величина, пропорциональная числу фотонов в пакете. Очевидно, что квантовые свойства света и постоянная Планка не играют здесь роли, отношение энергии к частоте выступает здесь как «классическая» величина — нелокальный инвариант классической теории. Конкретно [Зельдович (1965)] инвариант имеет вид

$$\iint \frac{\mathbf{H}(r) \mathbf{H}(r') + E(r) E(r')}{|r - r'|^2} d^3r d^3r'.$$

«Классичность» инварианта не исключает того, что классическая теория в начале века была «беременна» квантовой теорией, размерность инвариантов классической теории подсказывала размерность той константы, которой суждено было изменить и ограничить классическую теорию.

Ситуация с нелокальным инвариантом для гравитационных волн полностью аналогична. Локально наблюдаемой величиной является \ddot{h}_{22} , и этой величине пропорциональны компоненты R_{0202} тензора кривизны. Однако эта величина не лоренц-инвариантна; выбирая систему координат с $v \rightarrow c$, можно добиться, чтобы $\ddot{h}_{22} \rightarrow 0$ и все $R_{iklm} \rightarrow 0$ в полном соответствии с тем, что локальные инварианты (в частности, $C = R_{iklm} R^{iklm}$) равны нулю. Однако можно построить *нелокальный* инвариант, имеющий смысл величины, пропорциональной числу гравитонов (в явном виде в литературе он не выписан).

Такая величина позволяет сравнивать волновые пакеты, устраняет трудности, связанные с тем, что локальные инварианты равны нулю.

ГЛАВА 2

НЕИЗБЕЖНОСТЬ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (ОТО) И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Введение

Прежде чем перейти к процессам в сильных гравитационных полях, мы остановимся на некоторых принципиальных вопросах. Для связности изложения здесь иногда кратко повторяются выводы предыдущих параграфов.

ОТО является теорией тяготения; она описывает тяготение как воздействие масс на свойства пространства и времени; в свою очередь эти свойства пространства и времени влияют на движение тел и другие физические процессы. Таким образом, теория тяготения резко отличается от теории других видов взаимодействия вещества: электромагнитного, ядерных сил и других.

Электромагнитное взаимодействие является наиболее изученным. Сходство между законом Кулона и законом тяготения Ньютона производит сильнейшее впечатление, как и сходство между планетной системой и системой электронов в атоме, которое является следствием сходства законов взаимодействия.

ОТО обладает огромной внутренней красотой и стройностью; построение ОТО потребовало введения только одной константы — константы тяготения. Не раз отмечалась даже известная непропорциональность между мощью теории и малым числом наблюдаемых выводов. Не следует забывать, однако, что следствиями ОТО являются: 1) сам закон Ньютона; 2) обоснование возможности применения этого закона к взаимодействию тел, окруженных безгранично простирающейся материей; 3) нестационарное космологическое решение Фридмана, т. е. хаббловское красное смещение спектров далеких объектов.

Только во вторую очередь следует назвать три известных экспериментальных факта, подтверждающих ОТО, — смещение перигелия Меркурия, отклонение луча света, проходящего вблизи Солнца, и изменение частоты света в гравитационном поле.

§ 2. Единая теория поля, геометродинамика, фундаментальная масса и длина

За созданием ОТО последовали попытки аналогичным образом изложить теорию электромагнетизма, попытки геометризации электромагнитного поля и создания единой теории поля, объединяющей гравитацию и электромагнетизм. Все эти попытки не удались. Гравитационное поле обладает универсальностью действия и сообщает одинаковое ускорение любым объектам. Эта универсальность делает возможным его описание изменением того пространства — времени, в котором все эти объекты движутся. Электромагнитное поле такой универсальностью не обладает, различные тела и частицы имеют разное отношение e/m и испытывают различные ускорения. Электромагнитное поле само создает гравитационные поля, пропорциональные квадратичным величинам, составленным из напряженностей электромагнитных полей. Грубо говоря, электромагнитное поле имеет энергию, и эта энергия имеет вес, как и всякая энергия.

Оказывается, что уравнения ОТО для пространства — времени, в котором есть электромагнитные поля, с необходимостью приводят к тому, что эти поля должны подчиняться уравнениям Максвелла. Этот результат можно сопоставить с тем известным фактом, что для «обычных» материальных тел (точечных масс или твердых тел) уравнения ОТО дают не только описание гравитационного поля, но и уравнения движения этих тел, т. е. включают в себя уравнения механики Ньютона. Уравнения Максвелла являются такими же уравнениями движения электромагнитных полей.

Отметим еще один важный пример вмешательства ОТО в теорию других, негравитационных, полей: из лагранжиана поля в кривом пространстве — времени путем варьирования метрики пространства — времени можно получить выражение тензора энергии — импульса рассматриваемого поля, притом сразу в явно симметричном виде ($T_{ik} = T_{ki}$).

Идея описания всех полей по создаваемым ими искривлениям пространства — времени получила название *геометродинамики*. Наиболее последовательным ее выразителем является американский ученый Уилер.

В последнее время привлекательность этой идеи поблекла, прежде всего в результате открытия и осознания разнообразия полей. В квантовой теории каждый сорт частиц описывается соответствующим полем: «световые» кванты — электромагнитное поле, π -, K -мезоны поля ядерных сил; то же относится и к двум сортам нейтрино и антинейтрино и т. д.

Ясно, что при таком разнообразии полей и частиц задание искривления пространства — времени недостаточно, чтобы описать все поля и частицы, заполняющие пространство. Образно выража-

ясь, картина мира многоцветна, а гравитационное поле дает только черно-белую фотографию, по которой нельзя воспроизвести буйные цвета природы.

Принципиальные вопросы науки не решаются большинством голосов. Все же читатель должен знать, что подавляющее число физиков в настоящее время считают невыполнимой программу единой теории поля в смысле Эйнштейна, т. е. считают, что невозможно из одних уравнений ОТО получить все законы природы.

Однако, как заметил Уилер, происхождение свойств элементарных частиц и их разнообразие, возможно, связаны с разнообразием топологических свойств пространства — времени в малых масштабах. Если к величинам, входящим в ОТО (скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см·сек⁻¹, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см³·сек⁻²·г⁻¹) добавить квантовую постоянную Планка $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ см²·сек⁻¹·г, то получается набор, из которого можно построить величину размерности длины $l_g = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} = 1,6 \cdot 10^{-33}$ см, времени $t_g = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{1/2} = 5 \cdot 10^{-44}$ сек и массы $m_g = \hbar^{1/2} c^{1/2} G^{-1/2} = 2 \cdot 10^{-5}$ г. Эта характерная масса гигантски превышает массы элементарных частиц, например, $m_e = 0,9 \cdot 10^{-27}$ г, $m_p = 1,6 \cdot 10^{-24}$ г. Отсюда большинство физиков делает вывод, что теория элементарных частиц (и, в частности, теория массы элементарных частиц) не связана с теорией гравитации и имеет совсем другой (пока не известный) фундамент *). Заметим, что составленная из \hbar , G и c единица заряда $\varepsilon_g = (\hbar c)^{1/2}$ не зависит от G и в $\sqrt{137} = 11,6$ раз больше элементарного заряда.

§ 3. Теория тяготения в плоском пространстве — времени **)

Разочарование в единой теории поля породило новое направление в подходе к теории тяготения. Это направление можно изложить следующим образом. Бесспорно, ОТО является удовлетворительной теорией тяготения. Однако является ли ОТО единственно возможной, «неизбежной» теорией тяготения? (Наконец,

*) Марков (1966), (1969) и некоторые другие физики защищают точку зрения, согласно которой в глубокой основе теории элементарных частиц лежит все же гравитация и массы частиц в будущей теории получаются как величина $\hbar^{1/2} c^{1/2} G^{-1/2}$, умноженная на безразмерный множитель ($\sim 10^{-20}$), который будет следовать из теории. Они предполагают также, что могут существовать частицы с фундаментальной массой $m_g = \hbar^{1/2} c^{1/2} G^{-1/2}$. См. об этом также книгу К. П. Станюковича (1965).

**) Здесь и ниже, конечно, имеется в виду пространство — время Минковского; специальная теория относительности не подвергается ни сомнению, ни модификации.

мы подходим к тому вопросу, который вынесен в заголовок гл. 2.) Другие полевые теории могут быть развиты в рамках плоского пространства — времени. Нельзя ли и гравитацию рассматривать как особое поле, действие которого разыгрывается в плоском пространстве — времени? Каковы должны быть свойства этого поля? Обязательно ли представление об искривлении пространства — времени?

Рассмотрим свойства гравитационного поля в плоском пространстве — времени и попытаемся сконструировать теорию, не обращаясь к ОТО.

Сходство между законом Кулона и законом Ньютона вселяет надежду на успех программы построения поля тяготения в плоском пространстве. Очень поучительно, что основные свойства искомой теории можно получить из простого мысленного эксперимента. Рассмотрим покоящуюся частицу, которая создает в окружающем пространстве потенциал $\varphi = -a/r$. Потенциал частицы, движущейся с постоянной скоростью, можно получить из потенциала покоящейся частицы с помощью преобразований Лоренца, т. е. рассматривая тот же потенциал $\varphi = -a/r$ с точки зрения движущегося наблюдателя. Теперь рассмотрим не одну частицу, а совокупность заключенных в сферический сосуд частиц, движущихся по всем возможным направлениям. Предполагается, что все направления равновероятны, так что эта совокупность частиц образует стационарную сферически-симметричную систему, ограниченную стенками сосуда. Вычислим суммарный потенциал частиц. Ответ, который мы при этом получим, зависит от природы φ , т. е. от того, как ведет себя φ при лоренц-преобразовании.

Если φ есть скаляр, то оказывается (вычисления проведены в приложении к этому параграфу), что для совокупности движущихся частиц

$$\varphi = n\varphi_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

т. е. φ меньше, чем для покоящихся частиц. Если φ есть нулевая компонента 4-вектора, то $\varphi = n\varphi_1$, так что движение частиц не влияет на их потенциал и на создаваемое ими поле.

Наконец, если φ есть 0,0-компонента *) тензора второго ранга φ_{ik} , то получается, что

$$\varphi = \frac{n\varphi_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

(Наиболее просто этот результат можно получить, рассматривая нестационарную, сферически-симметричную систему частиц, ко-

*) По отношению к чисто пространственным поворотам потенциал φ во всех случаях ведет себя как 3-скаляр, а поле $\text{grad } \varphi$ как 3-вектор (вектор поля, силы).

торые одновременно вылетают из начала координат по всем направлениям с одинаковыми скоростями). Второй случай как раз соответствует электромагнитной теории. Электроны в атоме движутся с большими скоростями (в тяжелых атомах порядка скорости света), однако это не меняет их наблюдаемого заряда, не нарушает точной компенсации заряда ядра зарядом электронов. Хорошо известно, что электростатический потенциал ϕ есть нулевая компонента 4-вектора $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$, соответственно электрическое и магнитное поля вместе образуют тензор второго ранга $F_{ik} = -F_{ki}$.

Для гравитационного поля, очевидно, нужно выбрать третий вариант, т. е. ϕ рассматривать как 0,0-компоненту тензора второго ранга. В этом (и только в этом) случае гравитационное воздействие n движущихся частиц на покоящуюся пробную частицу вдали от масс оказывается пропорциональным сумме их масс. При этом автоматически учитывается, что масса движущейся частицы возрастает с увеличением скорости, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, в соответствии со специальной теорией относительности.

Можно еще иначе сформулировать результат. Принцип эквивалентности требует, чтобы различные тела испытывали одинаковое ускорение в поле тяготения, т. е. чтобы действующая на них сила была пропорциональна их массе. Третий закон Ньютона — равенство действия и противодействия — требует чтобы гравитационное поле тела было пропорционально его массе. Движение частиц, составляющих тело, увеличивает его массу. Следовательно, движение частиц должно увеличивать и создаваемое ими гравитационное поле, в отличие от электрического поля частиц, не зависящего от скорости заряда. Поэтому теория гравитационного поля должна отличаться от теории электромагнитного поля (несмотря на сходный вид в статическом случае; ср. замечания выше о сходстве закона Кулона и закона Ньютона).

Сделаем два принципиальных замечания.

Скалярная теория тяготения дает результаты, существенно отличающиеся от тензорной теории, а значит, и от эксперимента — для быстро движущихся тел. Мы вернемся к вопросу о скалярной теории ниже, стр. 104, в связи с идеями Дикке и Бранса. Мы увидим, что движение частиц, сдерживаемое силами взаимодействия, не вызывает различия между скалярной и тензорной теорией. С другой стороны, при распространении света создаваемое светом гравитационное поле существенно различно в этих двух теориях; естественно, что оказывается различным и действие «чужого» гравитационного поля на свет, т. е. различны предсказания, касающиеся отклонения световых лучей, проходящих мимо Солнца. Опыт в последние годы систематически улучшает совпадение с ОТО, оставляет все меньше места для возможной примеси скалярного взаимодействия.

Второе замечание касается векторной теории тяготения. Эта теория в чистом виде не может быть правильной уже по той причине, что она предсказывает притяжение частиц и античастиц, но отталкивание частиц между собой.

Вместо доказательства, основанного на квантовой теории поля (так как необходимо понятие античастицы!) ограничимся напоминанием ситуации с хорошо известным векторным, электромагнитным полем. Одинаковые электрические заряды отталкиваются.

Но в природе наблюдается гравитационное притяжение. Следовательно, векторная теория может давать только поправку к теории тяготения.

Вопрос о такой поправке, пропорциональной барионному заряду, поставили Ли и Янг (1957). Вследствие дефекта массы, зависящего от энергии связи ядра, добавка, пропорциональная числу барионов данного тела, не в точности пропорциональна инертной массе тела. Таким образом, предсказываются отклонения от строгого равенства инертной и гравитационной массы. Опыт показывает, что таких отклонений нет с точностью до 10^{-12} . Отсюда следует, что гипотетического векторного поля Ли — Янга либо вовсе не существует либо взаимодействие этого поля с барионом по крайней мере в 10^{22} раз слабее, чем взаимодействие электромагнитного поля с элементарным зарядом.

Гравитационный потенциал в теории с плоским пространством — временем описывается тензором второго ранга. Гравитационное поле имеет соответственно три индекса Γ_{ke}^i . (В пределе почти покоящейся пробной частицы только компоненты Γ_{00}^{α} дают вклад в силу. Именно их обычно отождествляют с градиентом ньютоновского скалярного потенциала.)

Основываясь на понятиях гравитационного потенциала и поля, можно сформулировать релятивистскую теорию тяготения в плоском пространстве — времени (РТТПП). РТТПП правильно предсказывает такие критические с точки зрения проверки теории наблюдаемые явления, как отклонение светового луча в гравитационном поле и красное смещение фотона, излученного осциллятором (атомом) вблизи тяжелого тела.

Таким образом, релятивистская теория тяготения в плоском пространстве — времени (РТТПП) позволяет сделать весьма важные предсказания, выходящие за рамки ньютоновской теории тяготения. Еще раз подчеркнем, что перечисленные выводы РТТПП полностью согласуются с выводами ОТО, так как слабое поле в ОТО можно рассматривать как тензор в плоском пространстве — времени. Исследование гравитационных эффектов или гравитационных волн не даст возможности выбрать между РТТПП и ОТО.

Следовательно, к РТТПП нужно относиться вполне серьезно. Есть область, в которой РТТПП методически гораздо удобнее ОТО: это вопрос о квантовании гравитационного поля, который мы ниже вкратце рассмотрим (см. § 6).

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 3

Покажем, как вычисляется потенциал совокупности движущихся частиц, заключенных в сферический сосуд. Рассмотрим сначала случай скалярного потенциала Φ , который удовлетворяет уравнению

$$\square \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = a\rho.$$

Предположим, что все частицы покоятся. Тогда $\rho = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, где \mathbf{r}_i — положение i -й частицы. Когда имеется много близко расположенных друг к другу частиц, можно заменить сумму δ -функций гладкой функцией координат $\rho(\mathbf{r})$, которая отлична от нуля только в области, где сконцентрированы частицы (т. е. внутри сосуда).

В стационарном случае $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0\right)$ из условия

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -a\rho$$

находим, что вне сосуда

$$\Phi = \frac{a}{r} \int \rho dV = aN/r, \quad (2.3.1\pi)$$

где N — полное число частиц.

Пусть теперь частицы движутся. Рассмотрим сначала частицы, обладающие одной определенной скоростью и движущиеся в одном определенном направлении. Тогда в системе покоя этих частиц Φ описывается формулой (2.3.1а). При переходе к «лабораторной» системе отсчета, относительно которой частицы движутся, значения Φ и ρ в каждой точке пространства — времени остаются неизменными, так как Φ и ρ скаляры: $\Phi = \Phi'$, $\rho = \rho'$. Однако решение для Φ , стационарное в системе покоя частиц, будет нестационарным в лабораторной системе отсчета (оно зависит в ней не только от пространственных координат, но и от времени).

Вместо того, чтобы складывать нестационарные решения для потенциалов Φ , вызванных частицами, движущимися с различными скоростями в сосуде, мы будем складывать источники с разными скоростями. Поле, обусловленное суммарным источником, очевидно, будет стационарно, так как задача стационарна.

Для данной группы частиц (с идентичными скоростями) значение ρ инвариантно, но объем, в котором содержатся частицы, в лабораторной системе отсчета меньше, чем в системе покоя. Обозначая штрихом величины, относящиеся к лабораторной системе отсчета, имеем

$$\int \rho' dV' = \int \rho dV' = (1 - \beta^2)^{1/2} \int \rho dV = N (1 - \beta^2)^{1/2}.$$

Пусть несколько групп частиц (ρ_1, ρ_2, \dots) внутри сосуда движутся с одинаковой скоростью $v = \beta c$ в различных направлениях. В результате столкновений со стенками сосуда направление скорости каждой частицы время от времени изменяется, т. е. частицы переходят из одной группы в другую, так что

среднее число частиц в каждой группе сохраняется. Для совокупности всех частиц

$$\int \rho' dV' = \int \rho'_1 dV' + \int \rho'_2 dV' + \dots = N_1 (1 - \beta^2)^{1/2} + N_2 (1 - \beta^2)^{1/2} + \dots = N (1 - \beta^2)^{1/2}.$$

Заметим, что хотя частицы движутся, их распределение в среднем остается постоянным. Поэтому, зная источник $\left(\int \rho dV\right)$ в лабораторной системе отсчета, мы можем теперь написать стационарное решение для нашего источника:

$$\Phi'(r) = \frac{a}{r} \int \rho dV = \frac{aN}{r} (1 - \beta^2)^{1/2}$$

в лабораторной системе отсчета. Этот результат отличается от результата для покоящихся частиц коэффициентом $(1 - \beta^2)^{1/2}$, как и утверждалось в основном тексте.

Поучительно рассмотреть альтернативный источник скалярного поля Φ : систему не заключенных в сосуд частиц, которые движутся радиально с одинаковой скоростью $v = \beta c$ и все проходят через начало координат в момент $t = 0$. Эта задача нестационарна. Обозначим через $r_0(t)$ расстояние частиц от начала координат в момент времени t . Тогда $r_0 = -c\beta t$ для $t < 0$ и $r_0 = +c\beta t$ для $t > 0$.

Во все времена $t \neq 0$ решение для Φ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= b/r \text{ для } r > r_0, \\ \Phi &= (b/r_0) r/r_0 \text{ для } r < r_0. \end{aligned}$$

Поскольку r_0 зависит от времени, потенциал внутри оболочки частиц также зависит от времени.

Если мы перепишем уравнение $\square\Phi = a\rho$ в форме $\nabla^2\Phi = -a\rho + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$, то станет ясным, что член $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$ в нестационарном решении играет роль, аналогичную источнику в стационарном решении. Внутри нашей оболочки из частиц $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \neq 0$; следовательно, внешнее поле имеет источник не только на самой оболочке, но и внутри ее. В результате постоянная b , которая характеризует силу внешнего поля ($\Phi = b/r$), не равна $N a (1 - \beta^2)^{1/2}$. Тот факт, что при $r > r_0$ решение $\Phi = b/r$ не зависит от времени, не должен обманывать нас; решение в целом нестационарно.

Внешний потенциал $\Phi(r)$ для стационарной системы частиц, которые всегда находятся внутри сосуда, $\Phi = \frac{aN}{r} (1 - \beta^2)^{1/2}$ отличен от потенциала, создаваемого нестационарной системой частиц, которые в данный момент находятся внутри сосуда (r_0 малó), но первоначально были произвольно далеки от него. Это не должно удивлять, так как в уравнении для Φ есть запаздывание — решение зависит не от мгновенного распределения источника, а от запаздывающего $t' = t - r/c$ распределения. Именно это обстоятельство дает возможность нестационарным сферическим источникам испускать сферические скалярные волны. Мы пользуемся возможностью поблагодарить К. С. Торна, который заметил, что нестационарное сферическое решение не может дать ответа на поставленный в основном тексте вопрос о зависимости потенциала Φ от скорости.

Интересующий нас случай: источник, состоящий из движущихся частиц, но которые составляют в целом стационарный, создающий стационарное поле, т. е. частицы в сосуде, см. в § 7.

Когда поле есть временная компонента вектора, решение также известно; это как раз электромагнитный случай. Мы не будем его детально анализировать, а сделаем лишь следующие замечания. Преобразуя систему зарядов из покоящейся в движущуюся систему отсчета, мы в общем случае получаем, что векторное поле приобретает ненулевые пространственные компоненты A_1, A_2, A_3 , которые отвечают магнитному полю. Однако в сферически-симметричном случае нет магнитного поля, даже если отдельные заряды движутся. Более того, внешнее электрическое поле одинаково для системы движущихся зарядов, заключенных в сферический сосуд (стационарная задача) и для оболочки из зарядов, движущихся радиально (нестационарная задача). Однако векторный потенциал, являющийся суммой потенциалов отдельных частиц, различен в этих двух случаях. Для нестационарной задачи полный векторный потенциал имеет ненулевую радиальную компоненту A_r , которая вносит вклад в радиальное электрическое поле: $E = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t}$. Хотя A_r зависит от скоростей зарядов, E не зависит от скорости. Следовательно, изменяя калибровку

$$\varphi \rightarrow \varphi + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad A \rightarrow A - \nabla f,$$

мы можем аннулировать A_r , получая в результате $\varphi = \frac{eN}{r}$ вне источника.

Эти калибровочно преобразованные потенциалы $A = 0$ и $\varphi = \frac{eN}{r}$ для нестационарной задачи идентичны потенциалам стационарной задачи, что и было отмечено в тексте.

Независимость внешнего поля от стационарности или нестационарности источника для электромагнитного случая обусловлена тем фактом, что векторный потенциал (в противоположность скалярному потенциалу) не может иметь сферических волн.

Аналогичные замечания могут быть сделаны и в тензорном случае. Выражение для $\varphi = h_{00}$ приведено в тексте для системы координат, в которой h_{α} исчезают.

§ 4. Неизбежность идеи кривизны пространства — времени

РТТПП может быть полезной заменой ОТО в некоторых задачах. Но каково принципиальное соотношение между двумя теориями? Чрезвычайно ясный и поучительный анализ проблемы дал Тирринг (1961). Как упомянуто выше, РТТПП количественно правильно описывает такие важнейшие эффекты, как отклонение луча света в поле тяготения и красное смещение кванта, испущенного осциллятором (атомом), находящимся вблизи тяжелого тела.

Первый эффект получается за счет того, что в этой теории уравнения Максвелла в пустом пространстве изменяются. Это изменение соответствует появлению показателя преломления, зависящего от гравитационного потенциала: это и необходимо, чтобы получить искривление светового луча. Но какой ценой получено согласие с опытом: скорость распространения электромагнитных волн, скорость света, уже не равна фундаментальной константе c !

Обратимся ко второму эффекту — красному смещению линий. В РТТПП в поле тяжелого тела есть система координат, где

это тело покоится, и в этой системе есть определенное время, которое везде течет одинаково. Временной интервал между двумя событиями, происшедшими на поверхности тела, в точности равен временному интервалу между приемом двух соответствующих сигналов в удаленной точке *). Красное смещение объясняется тем, что гравитационный потенциал реально влияет на колебания осциллятора, замедляя их.

Время течет вблизи тела так же, как и на бесконечности, осциллятор колеблется медленнее, чем на бесконечности. Но также замедляются и любые другие процессы. Никакое локальное измерение частоты колебаний осциллятора не обнаружит ее (частоты) изменения, так как в том же отношении замедляются часы, находящиеся рядом в том же гравитационном потенциале.

Особенно неприятно, что влияет на процессы не поле, а именно потенциал, величина непосредственно локально не измеряемая.

Изменим потенциал на постоянную величину: все наблюдаемые соотношения между числом колебаний осциллятора и числом качания маятника часов и т. п. останутся без изменений, хотя сами частоты, измеренные по «абсолютному» времени **), будут другими.

Наглядно можно представить себе такой опыт: окружим земной шар тяжелой поллой оболочкой. Потенциал на Земле изменится, хотя все поля останутся без изменений. Все результаты земных опытов останутся без изменений, но с точки зрения РТТПП по абсолютному времени (хранитель абсолютного времени по определению находится на бесконечности) процессы текут медленнее.

Итак, абсолютное время в теории в плоском пространстве существует, но никакими опытами, проделанными вблизи поверхности тела, его определить нельзя. Ясно, что такая ситуация очень похожа на ситуацию с эфиром в начале нашего века и подводит к выводу о том, что это абсолютное время является фикцией. В космологической проблеме, где нас окружает безграничное пространство с постоянной (в среднем) плотностью вещества, его даже нельзя определить.

Тирринг рассматривает вопрос более формально; он показывает, что существует преобразование потенциала ***), оставляющее

*) Как бы ни влияло поле тяготения на прохождение сигналов, время прохождения первого и второго сигналов в постоянном поле одинаково, и оно сокращается при вычислении временного интервала.

**) Понятие «абсолютного» времени здесь употребляется в смысле независимого от поля тяготения. Это время меняется при переходе к движущейся системе отсчета, в соответствии с преобразованиями Лоренца, и этим отличается от ньютоновского абсолютного времени.

***) По типу градиентного преобразования в электродинамике, когда к скалярному потенциалу ϕ добавляют $\frac{df}{dt}$, а к векторному A соответственно $\text{grad } f$, где f — произвольная функция; напомним, что в РТТПП потенциал — тензорный, т. е. имеет не одну компоненту, а 10.

без изменения наблюдаемые величины; однако при этом преобразовании течение времени и ход часов по «абсолютному» времени изменяются. Другими словами, абсолютное время не инвариантно относительно преобразования. При этом изменение может быть разным в разных точках.

Теория РТТПП сама подводит к идее искривления пространства — времени, сама (при ее последовательном развитии) приводит к основным идеям ОТО.

Итак, последовательная РТТПП, совпадающая с ОТО в первых поправках к ньютоновскому закону, для объяснения универсальности действия поля тяготения вынуждена прибегать к нефизическим гипотезам о ненаблюдаемом «абсолютном» времени, о влиянии на все процессы ненаблюдаемой величины — потенциала тяготения и т. п.

Идея кривизны пространства — времени, лежащая в основе ОТО, сразу же разрешает все трудности РТТПП, и с гениальной простотой объясняет универсальность действия поля тяготения.

Из сказанного следует, что, несмотря на скудность экспериментов, проверяющих ОТО, только эта теория, обладающая необыкновенной стройностью, внутренней красотой и убедительностью, может являться современной теорией тяготения.

Конкретные уравнения ОТО, связывающие кривизну пространства — времени с материей, конечно, не единственные из мыслимо возможных уравнений такого рода. Возможны, например, уравнения выше второго порядка. Вопрос о единственности уравнений ОТО в этом смысле неоднократно обсуждался, начиная с работ самого Эйнштейна. Поучительный анализ проблемы можно найти в книге Эддингтона (1934). Более поздние обсуждения предположений, лежащих в основе ОТО, можно найти у Траутмана, Пирани и Бонди (1965), Элерса (1965), Траутмана (1966). Уравнения ОТО в известном смысле являются простейшими из возможных. Какое-либо изменение уравнений ОТО может быть произведено только по новым глубоким теоретическим и экспериментальным соображениям (о так называемом Λ -члене в уравнениях тяготения см. § 8а гл. 1).

Практическое удобство РТТПП как приближения к ОТО, отмеченное выше, ограничивается случаем изолированных тел и слабых полей в бесконечном пустом пространстве. О неприменимости РТТПП в космологической проблеме сказано выше. Но РТТПП не годится и для описания гравитационного поля коллапсирующей звезды вблизи ее шварцшильдовского радиуса (см. гл. 3).

Дело в том, что последовательная РТТПП должна быть нелинейной теорией. Это видно уже из того, что поле двух тел на большом расстоянии меньше суммы полей каждого тела в отдельности из-за гравитационного дефекта массы; взаимодействие тел

уменьшает энергию, а значит, и массу системы. Нелинейность можно проследить и в случае гравитационных волн, но на этом мы не останавливаемся.

В области, где нелинейность существенна, РТТПП теряет все свое практическое удобство и становится невероятно громоздкой. Задачу о поле тела вблизи гравитационного (шварцшильдовского) радиуса (см. § 2 гл. 3) никто и не пытался решить в РТТПП.

По этим причинам в дальнейшем пользоваться РТТПП мы почти не будем. Принципиальные же преимущества, необходимость и неизбежность ОТО и искривления пространства — времени были показаны выше.

§ 5. О возможности вычисления гравитационной постоянной на основе теории элементарных частиц

В ОТО, так же как и в теории тяготения Ньютона, гравитационная постоянная G рассматривается как определяемая из опыта мировая постоянная. Ни в ОТО, ни в ньютоновской теории не делается попытка выразить G через какие-то другие, более элементарные величины.

Ниже излагается такая попытка, принадлежащая Сахарову (1967). В настоящее время попытка не привела к определенным конкретным достижениям, в формулу для G входит другая неизвестная величина. Тем не менее, новизна принципиального подхода и новый взгляд на саму сущность явления в указанной работе заслуживают внимания.

В ньютоновской теории G характеризует силу взаимодействия частиц между собой; характерной величиной является энергия двух частиц — Gm_p^2/r , которая (для двух протонов) в 10^{37} раз меньше электростатической энергии e^2/r на равном расстоянии. Безразмерной величиной является $Gm_p^2/e^2 = 10^{-36}$ или $Gm_p^2/\hbar c = 10^{-38}$, и теория должна дать ответ на вопрос о том, откуда появляются безразмерные числа, так сильно отличающиеся от единицы. Некоторые теоретики связывают это обстоятельство с идеей о влиянии всей Вселенной на локальные явления, грубо говоря, с тем, что Вселенная велика. Убедительных соображений о таком влиянии нет и мы к такому подходу относимся отрицательно.

Для Сахарова исходным пунктом является другой подход к теории тяготения, характерный для ОТО и связывающий гравитацию с представлениями о кривизне пространства — времени.

Вся ОТО содержится в выражении действия. Для частиц и гравитационного поля действие может быть записано в виде

$$S = - \sum mc \int ds - \frac{c^3}{16\pi G} \int R dV, \quad (2.5.1)$$

где V — 4-мерный объем. В этом уравнении первый член представляет собой сумму, взятую по траекториям всех частиц.

Варьируя в первом члене траекторию частицы в пространстве, метрика которого известна, мы получим из условия экстремума S закон движения частицы в этом пространстве. В кривом пространстве траектория зависит от кривизны, так что первый член включает в себя воздействие гравитационного поля на движение частиц.

Варьируя метрику пространства в выписанном выше выражении S , мы получаем уравнение самого гравитационного поля. Символически

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ik}} = \frac{1}{2c} T_{ik} - \frac{c^3}{16\pi G} \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = 0. \quad (2.5.2)$$

Здесь первый член получен при вариации первого интеграла в формуле (2.5.1), а второй член соответственно происходит от интеграла кривизны, т. е. от второго члена в (2.5.1).

Грубо говоря, первый член правой части (2.5.2) дает выражение силы, с которой частицы стремятся искривить пространство. Такая формулировка соответствует принципу равенства действия и противодействия: есть тождественная связь между действием кривизны на движение частицы и действием частицы на кривизну. Эта связь выражается как раз в том, что оба эти фактора получаются из одного выражения — $mc \int ds$, в котором ds вычисляется в римановом пространстве.

Члены, содержащие R и R_{ik} в (2.5.1) и (2.5.2), можно наглядно представить себе как описание *упругости* пространства, «стремления» пространства оставаться плоским, описание того, как пространство сопротивляется искривлению.

Константа $c^3/16\pi G$, характеризующая упругость вакуума, является величиной, которую мы хотим вычислить. Таким образом, ОТО содержит характерную большую величину (напомним, что в ньютоновской теории пришлось бы говорить об обратной ей малой величине). Для того чтобы прийти к безразмерной величине, сформулируем ситуацию так: масса элементарной частицы m , размазанная на характерной квантовой длине \hbar/mc , создает весьма малое искривление пространства, потому что велика упругость вакуума, сопротивляющаяся этому искривлению.

Напомним, что здесь и ниже сама кривизна пространства и ОТО рассматриваются в неквантовом, классическом, детерминированном аспекте, между тем как элементарные частицы движутся по квантовым законам в детерминированном кривом пространстве.

До сих пор мы не вышли за рамки общепринятой ОТО — в лучшем случае, дополнили ее чисто словесными украшениями.

Теперь обратимся к тому новому, что содержится в цитированной работе Сахарова — к попытке вычисления «упругости» вакуума $c^3/16\pi G$.

В связи с теорией космологической постоянной (см. § 9 гл. 1) был поставлен вопрос, не могут ли квантовые флуктуации в вакууме привести к тому, что вакуум окажется носителем определенной плотности энергии и давления. Сахаров ставит вопрос, как изменятся свойства вакуума при изменении кривизны пространства. Это изменение плотности энергии в зависимости от кривизны характеризовало бы упругость вакуума так же, как зависимость энергии твердого тела от его деформации характеризует упругость материала.

Нужно подчеркнуть, что идейная связь между космологической постоянной и упругостью отнюдь не предопределяет какую-либо численную связь или пропорциональность. Вполне возможно, что происходит точная компенсация вклада различных полей в энергию вакуума и поэтому $\Lambda = 0$, а тем не менее, упругость велика: функция равна нулю, но ее производная отлична от нуля.

Упругость вакуума зависит от поправок в уравнении движения квантовых частиц, когда эти частицы находятся в кривом пространстве. В этом смысле можно сказать, что целью является получение второго члена в (2.5.1) из законов движения в кривом пространстве, т. е., в сущности, из первого члена (2.5.1), написанного для квантованных частиц. Напомним лишь, что речь идет о частицах, способных рождаться по одиночке (как кванты) или парами (e^-e^+) и о вакууме, т. е. о пространстве, где реальных частиц нет.

Из общих соображений релятивистской инвариантности и размерности следует, что поправка в действии должна зависеть от инварианта R . Эта поправка может быть записана как интеграл по импульсу частиц, и интеграл этот расходуется. Это значит, что конечная величина получается только в предположении, что квантовая теория справедлива лишь при импульсе, меньшем определенного предела p_0 . Поправка к действию равна

$$\frac{k p_0^2}{\hbar} \int R dV,$$

где k — безразмерный численный множитель порядка единицы *). Предполагается, что упругость пространства целиком обусловлена именно этими квантовыми эффектами. Другими словами, Сахаров считает, что константа гравитации, которую вводят из опыта, в действительности, по крайней мере в принципе, могла бы быть

*) О его точном значении в настоящее время спрашивать нельзя, поскольку нет конкретной картины при импульсах порядка и больше p_0 . Неясен даже знак k .

вычислена из условия

$$\frac{c^3}{16\pi G} \int R dV \equiv \frac{k p_0^2}{\hbar} \int R dV, \quad G = k' \frac{c^3 L^2}{\hbar},$$

$$L = \frac{\hbar}{p_0}, \quad k' = \frac{1}{16\pi k}. \quad (2.5.3)$$

Конкретные вычисления приведены в статье Сахарова. Для того чтобы получить наблюдаемое значение упругости, нужно принять, что импульс весьма велик, соответствует как раз массе 10^{-5} г. Поскольку элементарные частицы такой массы не известны, теория для вычисления одной величины $c^3/16\pi G$, содержащей неизвестную G , вынуждена вводить другую неизвестную величину, p_0 .

Величина p_0 и соответствующая масса 10^{-5} г или длина 10^{-33} см вводились и раньше, но сейчас изменилась логика. Раньше предполагалось, что гравитация (заданная как нечто первичное) приводит к особым свойствам пространства на длинах 10^{-33} см, к особым свойствам «точечной» массы, равной 10^{-5} г. Новая точка зрения заключается в том, что масса 10^{-5} г или длина 10^{-33} см, заданные как нечто первичное, приводят к определенной величине упругости вакуума, к определенному значению постоянной тяготения. Таким образом, формула остается одной и той же,

$$m_g^2 c^2 / \hbar = c^3 / G, \quad (2.5.4)$$

и прогресс заключается в том, что эту формулу предлагается читать справа налево, как определение G .

Выходя за рамки теории гравитации, заметим, что идея Сахарова, по-видимому, может быть перенесена и на электродинамику и на теорию слабого взаимодействия (Зельдович, 1967а). В электродинамике обычно вводят действие

$$S = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_i dx^i - \frac{1}{8\pi} \int (H^2 - E^2) dV, \quad (2.5.5)$$

где первый член представляет собой действие свободных заряженных частиц, второй — взаимодействие заряженных частиц и электромагнитного поля, третий — действие свободного электромагнитного поля. Предлагается в качестве исходных взять первые два члена и получить третий член — действие поля — как результат квантовых вакуумных поправок, как это было сделано с членом $-\int R dV$ в теории тяготения. В замечательной работе Ландау и Померанчука (1955) можно найти соображения, благоприятные для такого подхода.

Аналогично можно подойти и к теории промежуточного заряженного бозона W , осуществляющего слабое взаимодействие по реакциям

$$n = p + W^-, \quad W^- = e^- + \bar{\nu}.$$

При этом теория приводит к тому, что масса электромагнитных квантов должна равняться нулю, в отличие от массы W , — бозона. Одно и то же значение p_0 (при определенных предположениях о спектре масс фермионов) дает разумные значения для постоянной гравитации, заряда элементарной частицы и константы слабого взаимодействия.

Возвращаясь к теории тяготения, отметим возможное значение изложенных идей для проблем экстремальных состояний: коллапса, сингулярности и т. п.

Для астрофизики особенно интересно, что развитие этих идей должно, в принципе, дать и следующие поправки, зависящие от квадратичных инвариантов кривизны, с коэффициентами порядка $\hbar \ln [p_0/mc]$, где m — масса частиц. Таким образом, намечается путь получения поправок к уравнениям Эйнштейна. Эти поправки будут заметны при кривизне порядка 10^{64} см^{-2} и, возможно, дадут условия перехода от сжатия к расширению в окрестности сингулярности. Заметим, что речь идет при этом о нелинейных (по кривизне) поправках к самим уравнениям ОТО, а не о той нелинейности (по отклонениям метрики от плоской), которая уже содержится в классических уравнениях ОТО. См. работу Гинзбурга и др. (1971).

Но здесь с идеями Сахарова, в которых пространство описывается детерминистически, не квантово, конкурируют (или присоединяются к ним) другие идеи. В принципе, квантованию подлежит и само пространство. Этот круг вопросов подробно изложен в ряде работ Уилера и в несколько ином аспекте — в работах супругов Де Витт (1964).

§ 6. Квантование тяготения

Наиболее общие рассуждения указывают, что гравитационное поле должно подчиняться квантовым законам. Если не предполагать, что существует квантовый предел на точность измерения гравитационного поля (т. е. измерения пространственно-временной метрики), то неизбежно возникает противоречие с принципом неопределенности для электронов, фотонов и т. д. Квантование тяготения вовсе не исключает классическую (неквантовую) теорию гравитационного поля; она остается справедливой как предельный случай квантовой теории. Связь между этими теориями аналогична хорошо известному случаю квантовой нерелятивистской теории и классической механики. Еще лучшей аналогией является классическая электромагнитная теория поля и квантовая электродинамика.

В обоих случаях (электромагнетизм и тяготение) классическая теория исторически была разработана задолго до создания квантовой теории. Очевидно, что эффекты, вызванные квантованием тяготения, количественно ничтожны как в лабораторных, так и в

современных космологических условиях. В докладе на Варшавской конференции по гравитации Фейнман (1963) писал: «Существует определенная иррациональность любой работы в гравитации, поэтому трудно объяснить, почему мы ее делаем» *). Вот почему мы ограничиваемся в этой книге лишь несколькими качественными замечаниями и перечислением ссылок, по которым можно детально изучить квантование тяготения.

Общая теория относительности, использующая искривленное пространство — время, не похожа на электродинамику, в которой полевые переменные (A , E , H) квантуются в плоском пространстве — времени Минковского. Для того чтобы проквантовать общую теорию относительности, обычно обращаются к релятивистской теории тяготения в плоском пространстве, рассматривая малые поправки к метрике h_{ik} как полевые переменные. Наиболее важным результатом квантования этих переменных является тот факт, что гравитационные волны состоят из квантов — «гравитонов», которые также реальны, как и кванты (фотоны) электромагнитного поля. Гравитоны представляют собой нейтральные частицы с массой покоя, равной нулю, со спином, равным 2 (в единицах постоянной Планка \hbar), причем проекция спина на направление распространения может принимать только два значения, $+2$ или -2 ; суперпозиция волн с этими двумя значениями описывает все возможные состояния поляризации гравитационной волны. Гравитоны подчиняются статистике Бозе: возможны состояния, в которых многие гравитоны имеют одинаковый импульс, т. е. одинаковые частоту и длину волны. Как известно, такие состояния описываются классической (не квантовой) теорией поля; классическое описание тем точнее, чем больше число таких гравитонов. Гравитационное излучение двойной звезды нет надобности описывать как поток гравитонов именно по той причине, что велик поток и применима классическая теория: точно так же излучения радиостанции мы описываем уравнениями Максвелла и не думаем о квантах.

Первые указания на свойства гравитонов и связь с классической теорией поля можно найти у Розенфельда (1930), а более подробное исследование см. Бронштейн (1936). Общую теорию полей с высокими спинами см. Паули и Фирц (1939). Проблема деления квантованного поля на статическую, кулоновскую часть плюс квантовое поле гравитонов исследована в работах Гупты (1950, 1952) и в обзоре Киббла (1968). О гравитационных взаимодействиях фермионов см. Кобзарев и Окунь (1962). Рассматривался и вопрос о поправках более высокого порядка в квантовой теории тяготения. В высших порядках проявляется нелинейность теории. Гравитационные волны и другие гравитационные поля имеют

*) Этот доклад интересен не только с научной точки зрения, но и как автобиографический документ, иллюстрирующий фейнмановскую манеру мыслить и методы научного исследования.

энергию и импульс, т. е. сами становятся источниками гравитационного поля. Правда, эти нелинейности практически очень малы. Однако их необходимо принимать во внимание, чтобы сделать теорию полной и самосогласованной [подробнее см. Утияма (1956), Фейнман (1963), Киббл (1965)]. О других трудностях см. работу Фадеева (1967) и его доклад на 5 Международной конференции по общей теории относительности. Отметим также интересные работы Иваненко и Соколова (1947), Владимирова (1963) и Уилера (1964), касающиеся взаимопревращений гравитонов и других частиц; см. также Кобзарев, Захаров (1968; 1970).

Высокочастотные гравитоны подобны гамма-квантам, но отличаются весьма слабым взаимодействием с веществом из-за малости $Gm^2/\hbar c$, где m — масса элементарной частицы. Поэтому рождение и поглощение гравитонов во всех процессах на молекулярно-атомно-ядерном уровне представляет собой возможное в принципе, но крайне редкое экзотическое явление, не играющее никакой заметной роли в природе. Например, в звездах испускание пар нейтрино (процесс, похожий на испускание гравитонов по своим последствиям) в 10^{10} раз сильнее испускания гравитонов.

В качестве примера рассмотрим «комптоновское рассеяние» гравитона на частице со спином нуль. Этот процесс можно понимать как поглощение и переизлучение гравитона; в этом смысле это процесс второго порядка. Эффективное сечение как функция угла рассеяния имеет вид

$$\sigma(\theta) = \text{const} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \left(\frac{Gm^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta}{1 - \cos^2 \theta}.$$

Размерный коэффициент $\left(\frac{Gm}{c^2} \right)^2 \approx 10^{-104} \text{ см}^2$ для частицы с массой протона. Сечение не зависит от постоянной Планка. Отклонение гравитона гравитационным полем частицы (аналогичное $1'',75$ — отклонению света в поле Солнца) является полной и правильной основой этого эффекта [Гросс и Якиф (1968), Мицкевич (1958, 1969)]. Областью, где поглощение и рождение гравитонов существенны, может быть ситуация вблизи сингулярного состояния в горячей модели Вселенной (см. гл. 18 нашей книги «Релятивистская астрофизика»), при сверхвысоких плотностях и температурах: в этой ситуации гравитационного взаимодействия может оказаться достаточно для того, чтобы установилось термодинамическое равновесие между гравитонами и другими видами материи. В равновесии общая плотность энергии гравитонов равна плотности энергии электромагнитного излучения. Это равенство приближенно сохраняется и позже в ходе расширения. Наличие сегодня в пространстве теплового электромагнитного излучения с температурой $2,7^\circ \text{ К}$, являющееся результатом расширения горячей в прошлом среды, позволяет предположить, что во Вселенной есть

и фоновое тепловое (с планковским спектром для однородной изотропной космологической модели*)) гравитационное излучение. Его средняя длина волны около $0,15$ см, частота $2,10^{11}$ гц, плотность энергии $10^{-14} \div 10^{-15}$ эрг/см². Детектирование такого излучения необычайно трудно. Впрочем, в последнее время проявляются новые идеи в области молекулярной генерации и детектирования гравитационных волн (Копвилем и Нагибаров, 1965).

В связи с квантованием тяготения Фейнман (1963) сделал следующее интересное замечание: «Ясно, что задача, над которой мы работаем, некорректна; корректная задача заключается в нахождении того, что определяет величину тяготения». Напомним, что в предыдущем разделе мы отмечали попытку Сахарова объяснить малость гравитационной постоянной.

Существует несколько других методов квантования тяготения: исследование топологии пространства — времени и его флуктуаций (Уилер, 1968), изучение эволюции Вселенной как целого на основе квантовых идей [(Де Витт, доклад на 5 Международной конференции по общей теории относительности и гравитации (1968)].

Отметим одно распространенное неверное утверждение о том, что гравитационное взаимодействие представляет собой «обмен гравитонами». При этом иногда утверждают даже, что все частицы испускают гравитоны и при этом теряют энергию [(см. Станюкович (1965); рецензия Зельдовича и Смородинского (1966)]. В действительности, например, электромагнитное поле можно подразделить на продольные и поперечные компоненты**). Поперечные компоненты описывают распространяющиеся волны; их квантование приводит к понятию световых квантов как частиц с определенным импульсом и энергией и нулевой массой покоя. Продольные компоненты описывают кулоновское взаимодействие; их квантование не вносит ничего нового. Кулоновское поле стационарно, оно не зависит от времени: не существует квантов продольного поля, которые могли бы удаляться от источника поля.

Таким образом, электростатическое взаимодействие и испускание квантов — это два разных следствия одной теории; электростатическое взаимодействие не является результатом обмена свободными (поперечными) квантами.

Различный характер полей в смысле продольности и поперечности наглядно иллюстрирует нелепость буквального понимания термина «взаимодействие есть обмен квантами». Однако еще важнее помнить, что испускание волн, уносящих энергию, обязательно связано с ускоренным движением заряда в классической

*) О возможности существенно иной ситуации с фоновым гравитационным излучением см. гл. 18 и § 8 гл. 21 «Релятивистской астрофизики».

**) Подразумевается, что поле разложено в интеграл Фурье, т. е. по волнам $a_k e^{ikx}$. Для каждого k есть два сорта a_k : параллельные k (продольные компоненты) и перпендикулярные k (поперечные компоненты).

теории. В квантовой теории испускать кванты может лишь система, находящаяся в возбужденном состоянии. При этом система переходит, прямо или каскадно, в основное, нижнее состояние, и теряет способность испускать волны. Между тем кулоновское поле существует у покоящегося заряда и у заряженной системы, находящейся в нижнем квантовом состоянии.

Это нужно иметь в виду и в случае ядерных сил. Теория скалярных мезонов (теория Юкавы; здесь не существенно, что мезоны псевдоскалярны, а не скалярны) предусматривает два факта:

1) существование свободных мезонов с определенной массой, со спином 0, подчиняющихся статистике Бозе;

2) взаимодействие нуклонов.

Когда мезонов много, можно говорить о классической теории мезонного поля; это поле скалярное, т. е. подобно полю температуры $T(r)$, а не векторному полю скорости $v(r)$; понятия продольных и поперечных волн здесь нет.

Однако и в мезонной теории остается в силе утверждение: испускать свободные мезоны может только ускоренно движущийся или возбужденный нуклон. Покоящийся нормальный нуклон создает вокруг себя мезонное поле, воздействующее на другие нуклоны, но это поле статическое, мезоны не испускаются, и нуклон, естественно, не теряет массы и энергии. Это видно также и из того, что статическое мезонное поле убывает экспоненциально с расстоянием, как $e^{-mcr/\hbar}$.

Гравитационное взаимодействие тел (ньютоновское притяжение) нельзя представлять как результат излучения гравитонов, сопровождающегося потерей энергии (массы) по обоим причинам: как из-за поперечности гравитонов, так и по энергетическим причинам. Идеи гравитационной потери энергии легко привести к абсурду простым сопоставлением: почему не предположить, в таком случае, потерю энергии электростатическую или связанную с ядерными силами, в 10^{40} раз более сильную? Время изменения массы порядка 10^{10} лет (гравитационное) превратилось бы в 10^{-23} сек!

§ 7. Скалярная теория тяготения

В заключение этой главы вернемся к рассмотрению скалярной теории тяготения (Бранс, Дикке). Результат для скалярного поля можно сформулировать в очень общем виде: его источник *) должен

*) Полное решение всегда есть сумма поля источника плюс свободно распространяющаяся волна. Как указано ранее, свободные волны исключаются в векторном и тензорном случаях, если наложить условие сферической симметрии, поскольку свободные волны векторного и тензорного поля поперечны. В скалярном случае существуют сферические свободные волны, которые следует исключить при получении статического решения для статического источника.

быть скаляром, сконструированным из тензора энергии — импульса. Очевидно, таким скаляром является след тензора

$$T = T^i_i = g_{ik} T^{ik}.$$

Для материи без анизотропных натяжений, покоящейся в локально псевдоевклидовом пространстве,

$$T = T^0_0 + T^x_x + T^y_y + T^z_z = \varepsilon - 3P.$$

Например, для нерелятивистского газа

$$\varepsilon = nm_0 c^2 + n \frac{3}{2} RT, \quad P = nRT, \quad T = nm_0 c^2 - n \frac{3}{2} RT.$$

На первый взгляд, рецепт для нахождения различия между тензорной и скалярной теориями прост: возьми холодное тело, взвесь его, затем нагревай его при постоянном объеме. В тензорной теории сила источника (вес) увеличивается пропорционально ε , в скалярной теории вес растет как $\varepsilon - 3P$.

Но это не вся история! В теории тяготения все тела следует считать источниками поля. Поэтому необходимо принимать во внимание и сосуд, в котором находится нагреваемое тело. В статическом случае, когда тело находится под давлением, в стенках сосуда должны быть соответствующие отрицательные напряжения. Общая сумма (точнее, интеграл по объему) давления и напряжения тождественно равна нулю, иначе наблюдалось бы ускоренное движение. Поэтому в статическом случае для тел, у которых самогравитация несущественна (об этом см. ниже),

$$T \neq \varepsilon, \text{ но } \int T dV \equiv \int \varepsilon dV,$$

где интеграл распространяется на весь объем, занимаемый материей. Таким образом, статические гравитационные эксперименты не позволяют отличить тензорную теорию тяготения от скалярной. Лишь эксперименты с быстро движущимися телами могут быть решающими. Вот почему проверка скалярно-тензорной теории Бранса — Дикке должна основываться на таких эффектах, как отклонение лучей света и смещение перигелия Меркурия.

Однако, как подчеркивает Торн, приведенные выше аргументы не справедливы для тел, у которых самогравитация существенна. В этом случае $\int T dV$ и $\int \varepsilon dV$ отличаются на величину порядка гравитационной энергии связи. Важное следствие этого факта состоит в том, что в скалярной теории тяготения отношение гравитационной массы к инертной массе звезды и планеты отличается

от единицы на величину порядка отношения

$$\frac{\text{гравитационная энергия связи}}{\text{масса покоя}}.$$

Это означает, что будучи помещенными во внешнее гравитационное поле, различные звезды и планеты будут падать с разными ускорениями. Например, в теории Бранса — Дикке Солнце должно падать с ускорением в 10^{-6} раз меньшим, чем ускорение малого пробного тела; ускорение Юпитера должно быть меньше в 10^{-8} раз и Земли в $\sim 10^{-9}$. Эти факты и их следствие для проверок гравитационных теорий в Солнечной системе указаны и обсуждались в ряде статей Нордведта [(1968a, b; 1970); см. также Дикке (1969)]. Впрочем, неясно, нельзя ли построить такую нелинейную модификацию теории, где этих эффектов не было бы.

Вернемся к проверке с помощью световых лучей. В настоящее время можно утверждать, что вклад скалярной теории меньше 10% вклада ОТО в гравитацию [Шапиро (1971)].

Г Л А В А 3

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Введение

Многие небесные тела, а также некоторые системы небесных тел имеют с хорошей точностью сферически-симметричное распределение масс. Таковы медленно вращающиеся звезды, планеты, шаровые звездные скопления, эллиптические галактики типа Е0, сферические скопления галактик. Гравитационное поле таких тел, очевидно, также сферически-симметрично. Небесные тела и системы, если они достаточно слабо вращаются, на релятивистских стадиях эволюции также будут сферически-симметричными.

Мы подробно рассмотрим сферическое поле тяготения, имея в виду, с одной стороны, непосредственное приложение теории к изучению небесных тел, а также к космологической проблеме, и, с другой стороны, то, что в этом случае многие принципиальные вопросы могут быть выяснены до конца, так как симметрия упрощает уравнения Эйнштейна. Отклонения от сферической симметрии будут рассмотрены далее в гл. 4.

Выражение для интервала в сферически-симметричном поле может быть записано в следующем виде:

$$ds^2 = e^{\nu}(x^0, x^1) dx^{0^2} - e^{\lambda}(x^0, x^1) (dx^1)^2 - e^{\mu}(x^0, x^1) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (3.1.1)$$

здесь x^0 — временная координата, x^1 — радиальная пространственная координата, θ и φ — угловые координаты на сфере; для удобства вычислений записано $g_{00} = e^{\nu}$, $g_{11} = -e^{\lambda}$, $g_{22} = -e^{\mu}$. Смешанные компоненты $g_{0\alpha}$ всегда могут быть положены равными нулю, ибо вращение в силу сферической симметрии отсутствует (см. § 6 гл. 1.). Функции ν , λ , μ могут зависеть от временной и радиальной координаты.

Уравнения Эйнштейна записываются для метрики (3.1.1) в таком виде:

$$-\frac{8\pi G}{c^4} T_1^1 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \nu' \right) - e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \mu \dot{\nu} + \frac{3}{4} \mu^2 \right) - e^{-\mu}, \quad (3.1.2)$$

$$-\frac{8\pi G}{c^4} T_2^2 = \frac{1}{4} e^{-\lambda} (2v'' + v'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - v'\lambda' + \mu'v') + \frac{1}{4} e^{-\nu} (\dot{\lambda}\dot{v} + \dot{\mu}\dot{v} - \dot{\lambda}\dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2), \quad (3.1.3)$$

$$-\frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 = e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\dot{\lambda}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) - e^{-\mu}, \quad (3.1.4)$$

$$-\frac{8\pi G}{c^4} T_0^1 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (-2\dot{\mu}' - \dot{\mu}\mu' + \dot{\lambda}\mu' + v'\dot{\mu}). \quad (3.1.5)$$

Очевидно, $T_2^2 \equiv T_3^3$. Остальные уравнения обращаются в тождества. Здесь и ниже точка означает дифференцирование по x^0 , штрих — по x^1 .

В сопутствующей системе отсчета $T_0^1 = 0$. Законы сохранения (1.8.5) для тензора T_{ik} (1.8.2) в этом случае принимают следующий вид:

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\mu} = -\frac{2\dot{e}}{e + P}, \quad (3.1.6)$$

$$v' = -\frac{2P'}{e + P}. \quad (3.1.7)$$

Вернемся теперь к общей несопутствующей системе отсчета. Вдали от сферической массы в пустоте метрика евклидова и выражение для интервала имеет в сферических координатах вид

$$ds^2|_{\infty} = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (x^1)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.1.8)$$

Преобразования координат x^0 и x^1

$$x_{\pm}^0 = x^0 (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1), \quad x^1 = x^1 (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1) \quad (3.1.9)$$

сохраняют сферическую симметрию. Воспользовавшись преобразованием типа (3.1.9), положим (старые координаты с тильдой наверху)

$$x^1 = e^{\mu} (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1)^{1/2}, \quad (3.1.10)$$

а затем $x^0 = x^0 (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1)$ выберем так (это всегда возможно), чтобы в метрике не появились члены g_{10} . Тогда коэффициент при угловой части будет $(x^1)^2$, т. е. такой же, как в (3.1.8) для метрики на бесконечности, и интервал запишется в виде

$$ds^2 = e^{\nu} (dx^0)^2 - e^{\lambda} (dx^1)^2 - (x^1)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.1.11)$$

Разумеется, преобразование (3.1.10), приводящее интервал к виду (3.1.11), можно сделать не всегда. Действительно, после преобразования (3.1.10) и вычисления коэффициентов $g_{\mu\nu}$ по формулам (3.1.9) может оказаться, что в выражении для интервала (3.1.11) коэффициент перед $(dx^0)^2$ окажется со знаком минус, а перед $(dx^1)^2$

со знаком плюс *). Если так случится, то это значит, что x^1 не имеет больше характера пространственной координаты, а имеет характер временной координаты; это означает, что при постоянстве всех других координат (x^0, θ, φ) теперь величина $\sqrt{g_{11}} dx^1$ измеряет собственное время частиц, неподвижных в данной системе отсчета. Иначе говоря, характер времени имеет та из координат в выражении

$$ds^2 = g_{AA} (dx^A)^2 + g_{BB} (dx^B)^2 - (x^A)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.1.11a)$$

коэффициент перед квадратом дифференциала которой входит со знаком (+). Доказательством этого служит, очевидно, переход к локально лоренцевой системе отсчета.

Если x^1 окажется имеющим характер времени, то логично переобозначить координаты: x^1 назвать x^0 , а x^0 назвать x^1 с тем, чтобы временная координата всегда обозначалась x^0 . Тогда при временном характере квадрата перед угловой частью в выражении для интервала мы будем иметь

$$ds^2 = e^\nu (dx^0)^2 - e^\lambda (dx^1)^2 - (x^0)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.1.12)$$

Итак, преобразованием типа (3.1.10) всегда можно привести интервал для сферического поля тяготения либо к (3.1.11) [(Биркгоф (1923)], либо к (3.1.12) [(Новиков (1961; 1962 б)]. Мировые (4-мерные) области, в которых интервал приводится к виду (3.1.11), будем называть R -областями, а где интервал приводится к виду (3.1.12), T -областями. Очевидно, определения R - и T -областей инвариантны относительно выбора системы координат.

Из определения R - и T -областей и формул преобразования $g_{\mu\nu}$ легко получить условия того, к какой мировой области относится та или иная мировая точка. Если в данной точке в общем выражении (3.1.1)

$$e^{\nu-\lambda} > \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu'} \right)^2, \quad (3.1.13)$$

то точка лежит в R -области. При выполнении противоположного неравенства точка лежит в T -области. Более элегантная форма критерия для R - и T -областей, не использующая форму записи метрики, была указана К. С. Торном: через данную точку пространства—времени проводим сферу с площадью поверхности A (радиус кривизны $(A/4\pi)^{1/2}$). Вычисляем градиент $A, \nabla A$ в пространстве — времени. Если ∇A оказывается пространственноподобным, то точка лежит в R -области, если ∇A времениподобный, то точка лежит в R -области. Если ∇A светоподобный, то точка не лежит ни в R -, ни в T -области, а на их границе. Вдали от масс, в слабом поле

*) С одинаковым знаком коэффициенты получиться не могут в силу инвариантности сигнатуры метрики (+ — — —).

тяготения, где метрика приближается к своему асимптотическому виду при $x^1 \rightarrow \infty$ (3.1.8), условие (3.1.13), разумеется, всегда выполнено и мы находимся в обычных R -областях. Однако при чрезвычайно сильной концентрации масс до размеров меньше критических *) оказывается, что в сильном поле тяготения x^1 уже не имеет смысла пространственной координаты, мы попадаем в T -область, и метрику нельзя записать в виде (3.1.11) **). Об этом подробнее говорится в § 13 гл. 3. Сейчас будем предполагать, что метрика приводится к виду (3.1.11) ***), и мы находимся в R -области. Сначала мы рассмотрим поле тяготения в вакууме.

§ 2. Поле тяготения Шварцшильда

Уже в самой простой задаче — в рассмотрении движения пробных частиц и света в сильном поле тяготения в вакууме, создаваемом сферическим телом, содержатся те основные особенности, которые определяют строение плотных звезд (белые карлики, нейтронные звезды), массивных звезд, а также свойства катастрофического сжатия звезды — релятивистского коллапса.

Решение уравнений Эйнштейна (3.1.2) — (3.1.5) с метрикой (3.1.11) для такого поля в вакууме [решение Шварцшильда (1916)] определяет геометрические свойства пространства и темп течения времени вблизи тела, создающего поле. Оказывается, что это поле всегда постоянно (даже если вещество центрального тела совершает радиальные движения, оставаясь сферически-симметричным) и зависит только от полной энергии тела E (включая массу покоя составляющих тело частиц).

Выражение для 4-мерного интервала, приведенного к виду (3.1.11), в поле Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2, \quad (3.2.1)$$

где мы обозначили $x^1 = r$, $x^0 = ct$, а $M = \text{const}$. Постоянная M определяет силу гравитационного поля. Вдали от тела поле слабо и описывается ньютоновской теорией, причем M — масса, определяющая это ньютоновское поле $\varphi \rightarrow -GM/r$. В выражении для ds^2 содержатся все сведения о гравитационном поле. Напомним

*) Этот критический размер носит название гравитационного радиуса и зависит от массы: $r_g = 2GM/c^2$; см. далее § 2 гл. 3.

**) Мы хотим уже здесь подчеркнуть, во избежание недоразумений, что речь не идет о каком-то «превращении» пространства во время и наоборот, при переходе из R -области в T -область. В каждой мировой точке временные и пространственные направления инвариантны. Речь идет о важном различии свойств систем отсчета вблизи сильно сконцентрированных масс и вдали, где поле слабо. Об этом подробно говорится далее в §§ 12, 13, 14 этой главы.

***). Преобразование (3.1.10) предполагает, кроме того, что μ монотонна по \tilde{x}^1 . Оказывается, что если x^1 имеет смысл пространственной координаты, то μ всегда монотонна по \sim^1 .

(см. § 4 гл. 1), как пользоваться этим выражением для физических выводов. Первые три слагаемые в сумме дают взятый с обратным знаком квадрат расстояния между бесконечно близкими точками dl^2 , записанный в сферической системе координат. Неподвижный наблюдатель, находящийся вблизи массивного тела, может измерять расстояния в малой окрестности обычным способом, вводя декартовы координаты. В этих координатах $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Если мы выберем $dz = r d\theta$, а $dy = r \sin \theta d\varphi$, то вне поля тяготения в евклидовом пространстве $dx = dr$. Вблизи массивного тела, в поле Шварцшильда, как видно из (3.2.1),

$$dx = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} dr. \quad (3.2.2a)$$

Перед dr стоит множитель, отличный от единицы, что отражает факт неевклидовости геометрии пространства. Из этого следует, например, что расстояние между двумя близкими окружностями, описанными в одной плоскости вокруг центрального тела и имеющими длины l_1 и l_2 , равно не $\frac{l_2 - l_1}{2\pi}$, а

$$\frac{l_2 - l_1}{2\pi} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2}.$$

Последнее слагаемое в (3.2.1) есть (умноженный на c^2) квадрат промежутка времени τ , текущего в данной точке:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \Delta t. \quad (3.2.2b)$$

Вдали от тела при $r \rightarrow \infty$ $\Delta\tau = \Delta t$. Чем ближе точка наблюдения к телу, создающему поле, тем медленнее течет время, т. е. данному промежутку времени на бесконечности Δt соответствует все меньший промежуток $\Delta\tau$. При $r \rightarrow 2GM/c^2$ $\Delta\tau \rightarrow 0$.

Найдем в поле Шварцшильда ускорение свободного падения тела, скорость которого невелика ($v \ll c$). С помощью выражения (1.6.1 b) ускорение свободного падения F для пробной частицы записывается в следующем виде:

$$F = \sqrt{F_a F^a} = \frac{GM}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2}}. \quad (3.2.3)$$

Мы видим, что при $r = 2GM/c^2$ сила тяготения становится бесконечной. Это свидетельствует о том, что центральное тело, если оно статическое, заведомо не может иметь радиус меньше $2GM/c^2$. Используемая выше неподвижная недеформирующаяся сферическая система координат применима также только при $r > 2GM/c^2$. При меньших r интервал (3.1.1) уже не может быть приведен к виду (3.2.1). Этот критический радиус $r_g = 2GM/c^2$ носит название

гравитационного, а сферу радиуса r_g называют сферой Шварцшильда. Заметим, что нестатическое тело может иметь размеры меньше гравитационного радиуса (см. § 12 гл. 1), однако мы не будем здесь останавливаться на этом.

На расстоянии, большом по сравнению с r_g , поле Шварцшильда есть обычное поле тяготения ньютоновской теории с гравитационным потенциалом $\varphi = -GM/r$, а выражение для ускорения соответственно $F = -GM/r^2$. Гравитационный радиус Солнца 2,96 км, Земли 0,443 см. Радиусы Земли и Солнца много больше их гравитационных радиусов. Следовательно, вне Солнца, Земли и других обычных звезд и планет гравитационное поле с огромной точностью есть поле Ньютона. Внутри вещества решение Шварцшильда (3.2.1) неприменимо.

§ 3. Поле тяготения внутри звезды

Рассмотрим теперь свойства сильного поля тяготения внутри покоящегося вещества. Здесь 4-мерный интервал записывается в виде (3.1.11)

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^{\nu(r)} c^2 dt^2. \quad (3.3.1)$$

Коэффициенты $e^{\lambda(r)}$, описывающий отклонение геометрии от евклидовой, и $e^{\nu(r)}$, описывающий изменение темпа течения времени, определяются распределением вещества (подробнее см. § 3 гл. 10 об уравнении равновесия звезды):

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2} \int_0^r \rho r^2 dr, \quad (3.3.2)$$

$$e^{\nu} = \exp \int_r^\infty \left[\frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 + P) r e^{\lambda} - \frac{d\lambda}{dr} \right] dr, \quad (3.3.3)$$

где r — радиус звезды, на котором $\rho = 0$. Напомним, что ρ — плотность вещества, включающая не только сумму масс частиц единицы объема, но и их энергию (движения внутри тела и взаимодействия *), кроме гравитационного).

Вне звезды, в вакууме, выражения (3.3.2) и (3.3.3) дают соответственно

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2} \int_0^R \rho r^2 dr, \quad e^{\nu} = e^{-\lambda}.$$

*) Конечно, здесь имеются в виду только близкодействующие силы; крупномасштабные электрические и магнитные поля здесь не рассматриваются (см. об этом § 6 гл. 12).

Эти выражения совпадают с приведенными в предыдущем параграфе, если масса записывается следующим образом:

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr. \quad (3.3.4)$$

Напомним, что вследствие неевклидовости пространства элемент объема $dV = 4\pi e^{\lambda/2} r^2 dr \neq 4\pi r^2 dr$. В интеграле (3.3.4) стоит $4\pi r^2 dr$, а не dV . Как будет показано ниже (§ 6 гл. 10), замена dV на $4\pi r^2 dr$ связана с влиянием тяготения на массу тела.

Приведем другое выражение для массы покоящегося вещества, полученное Толменом (1930):

$$M = 4\pi \int_0^R \left(\rho + 3 \frac{P}{c^2} \right) e^{\nu/2 + \lambda/2} r^2 dr. \quad (3.3.5)$$

Естественно, для статического распределения (3.3.4) и (3.3.5) дают одинаковые результаты.

Из формул (3.3.2) видно, что коэффициент $e^\lambda \geq 1$, а $e^\nu < 1$ (так же, как и вне тяготеющей массы), поэтому внутри тела отклонение геометрии от евклидовой носит тот же характер, что и вне его и $dV > 4\pi r^2 dr$, а время течет медленнее, чем на бесконечности.

Из формулы (3.3.2) следует, что $e^\lambda \rightarrow 1$, когда $r \rightarrow 0$; метрика при этом приобретает галилеев вид. Это, конечно, не означает, что пространство здесь меньше искривлено, чем в других точках. Дело в том, что мы пользуемся сферическими координатами и условие $r \rightarrow 0$ означает, что берется малая окрестность около центра, а в малой окрестности любой точки метрика галилеева. Кривизна пространства зависит от λ'' и имеет размерность см^{-2} ; следовательно, эффекты, вызываемые кривизной, уменьшаются пропорционально квадрату линейного размера. Поэтому при $r \rightarrow 0$ кривизна пространства не проявляется и $e^\lambda \rightarrow 1$ *).

В действительности гауссова кривизна (см. § 4 гл. 1) пространства C_G в центре звезды больше, чем в других местах. Величина C_G дается формулой [(см. формулу (13) § 8 гл. 1)]:

$$C_G = \frac{8}{3} \frac{\pi G \rho}{c^2}. \quad (3.3.6)$$

Так как в центре звезды плотность максимальна, то и C_G максимальна. Конечно, не надо думать, что из (3.3.6) следует евклидовость пространства вне звезды (где $\rho = 0$) и даже в сильном поле вблизи звезды. Формула (3.3.6) дает только среднюю кривизну

*) Заметим, что существуют решения с конечной массой и $\rho_c = \infty$. В этих решениях кривизна в центре бесконечна, и $e^\lambda \neq 1$. Мы здесь не касаемся этих сингулярных решений.

пространства по всем двумерным направлениям, и эта средняя кривизна действительно равна нулю. Однако вне звезды риманова кривизна пространства (см. § 4 гл. 1) не равна нулю и может иметь в зависимости от двумерного направления и положительное, и отрицательное значение. В центре звезды все направления равноценны; там кривизна для любой ориентации дается формулой (3.3.6) и всегда положительна.

Гравитационное поле, полученное «сшиванием» решений внутри звезды и снаружи, нигде не имеет каких-либо особенностей типа сферы Шварцшильда, и везде

$$1 \leq e^\lambda < \infty \text{ и } 0 < e^\nu < 1.$$

§ 4. Движение по радиусу лучей света и ультрарелятивистских частиц

Посмотрим теперь, как будут двигаться по радиусу в сферическом поле тяготения частицы, имеющие фундаментальную скорость c (например, фотоны и нейтрино). Поскольку локально наблюдатель может ввести координаты,

в которых $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, то, используя принцип постоянства скорости света, измеренной локальным наблюдателем ($v_{\text{света}} = c$), получаем условие движения частицы с нулевой массой покоя: $ds = 0$. В силу симметрии частица, пущенная по радиусу, будет все время двигаться в радиальном направлении. Следовательно, при $\varphi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$

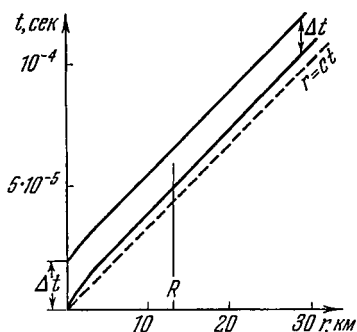


Рис. 7. Графики изменения r от t по часам далекого внешнего наблюдателя для двух нейтрино, вылетевших при $t = 0$ и $t = \Delta t$ из центра звезды с массой $0,64 M_\odot$; R — граница звезды ($R = 6,9 r_g$).

$$\frac{dr}{dt} = ce^{\frac{\nu-\lambda}{2}}. \quad (3.4.1)$$

Везде внутри звезды $e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} < 1$. За поверхностью звезды в ваку-

уме $e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} < 1$, и эта величина стремится к 1 при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, например, для нейтрино, вылетающего из центра, изменение координаты r со временем t далекого внешнего наблюдателя должно иметь вид, изображенный на рис. 7. Пунктиром на этом рисунке показано движение нейтрино в отсутствии поля тяготения. В дальнейшем мы будем часто рассматривать движение тел в непосредственной близости к гравитационному радиусу центрального тела (где поле особенно сильно) и даже в пре-

деле $r \rightarrow r_g$. Как отмечено в § 2, статическое тело не может иметь размеры $r \leq r_g$, а Бонди (1964) продемонстрировал, что размеры тела в равновесии не могут быть даже меньше $1,6 r_g$. Однако, как мы увидим далее в гл. 11, массивные и сверхмассивные звезды (с массой больше двух масс Солнца) в конце эволюции, потеряв устойчивость и сжимаясь, экспоненциально быстро для далекого наблюдателя достигают размеров гравитационного радиуса. Внешнее поле Шварцшильда в вакууме для таких неравновесных звезд, называемых застывшими (см. гл. 11), простирается вплоть до r_g . Именно к таким неравновесным сжимающимся объектам относятся все рассуждения о движении частиц в вакууме вблизи r_g : частицы в своем движении не наталкиваются на поверхность тела.

Вернемся к рассматриваемой задаче. Заметим, что в вакууме при $r \rightarrow r_g$

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \rightarrow 0.$$

Это, очевидно, вовсе не означает, что скорость света стремится к нулю. Скорость, измеряемая находящимся в данной точке наблюдателем, есть не $\frac{dr}{dt}$, а $\frac{dx}{d\tau}$, где dx и $d\tau$ — соответственно бесконечно малое физическое расстояние и время (см. § 2 гл. 3).

Для света всегда $\frac{dx}{d\tau} = c$.

Для далекого наблюдателя скорость луча света по его часам есть $\frac{dx}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$, т. е. с его точки зрения луч вблизи массы движется медленнее. На этом основан недавно предложенный новый способ проверки ОТО (Шапиро, 1965).

Предлагается производить радиолокационные наблюдения прохождения Меркурия за Солнцем (рис. 8). В ньютоновской теории изменение времени распространения радиосигналов туда и обратно определяется только изменением расстояния между Землей и Меркурием и графически изображается сплошной линией на рис. 8. Согласно ОТО уменьшение скорости сигналов вблизи Солнца приведет к добавочному изменению времени прохождения радиолуча *) для далекого наблюдателя; поэтому возникает добавочный подъем на графике рис. 8 (пунктир). Величина добавочного изменения в оптимальном случае порядка $2 \cdot 10^{-4}$ сек. Наблюдавшееся запаздывание, измеренное Шапиро (1968), находится в согласии с предсказанием общей теории относительности: (измеренное запаздывание) =

*) Изменяется также и траектория луча [знаменитое отклонение на $1,75''$ вблизи края солнечного диска (см. § 10 гл. 3)]; однако увеличение времени прохождения радиосигнала благодаря изменению длины траектории — величина более высокого порядка малости, чем эффект, указанный в тексте.

$= (\text{предсказанное запаздывание}) \times (0,9 \pm 0,2)$. При проведении измерений Шапиро не учитывал поправки на изменение скорости радиосигналов в плазме солнечной короны, так как на использованных ими частотах ($7,84 \cdot 10^9$ гц) добавочная задержка, вызванная короной, меньше чем 10^{-6} сек.

Заметим, что искривление луча и изменение времени прохождения сигнала тесно связаны между собой. В самом деле, представим себе, что из бесконечности приходит плоская волна. Фаза величины, которую несет волна (электрического или магнитного поля), постоянна на плоскости. Эта волна взаимодействует с Солнцем; после прохождения области взаимодействия волна становится

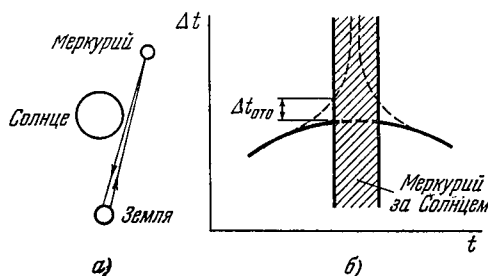


Рис. 8. Радиолокация планеты Меркурий для проверки ОТО. а — общая схема; б — изменение времени прохождения радиолокационного сигнала. По вертикальной оси отложено время прохождения сигнала туда и обратно, по горизонтальной оси — момент послышки сигнала. Пунктиром показано изменение, соответствующее эффектам ОТО. Заптрихована ненаблюдаемая область прохождения Меркурия за Солнцем.

искривленной. Одна функция, задающая форму поверхности волны после взаимодействия, несет информацию, полностью определяющую результаты двух упомянутых выше проверок ОТО.

Нормаль к поверхности представляет собой направление, в котором мы видим звезду. Искривление поверхности сопровождается поворотом нормали и воспринимается как искривление светового луча. Изменяя поворот луча для звезд, расположенных на разном

угловом расстоянии луча от Солнца, можно прощупать всю поверхность волны после взаимодействия. С другой стороны, искривление поверхности приводит к изменению момента прихода волны в данную точку пространства. Таким образом, между двумя эффектами существует связь, не зависящая от предположений о характере воздействия на волновую поверхность.

Метод Шапиро не требует солнечного затмения и позволяет применить всю мощь современной радиотехники. Весьма вероятно, что этот метод даст большую точность, чем оптический.

Как отмечает К. С. Торн, в следующий один или два года описанные выше стандартные методы для измерения времени задержки радиолуча и отклонения света будут полностью изменены. Временная задержка будет измеряться не путем отражения радиоволн от удаленных планет, а с помощью ретрансляции радиосигналов космическим кораблем. Говоря подробнее, радиосигналы будут посылаться с Земли на космический корабль, который расположен на противоположной стороне Солнечной системы; космический ко-

рабль будет принимать эти сигналы и передавать их обратно на Землю, где они будут регистрироваться радиотелескопами. Будет измеряться разность времен между посланным и принятым сигналом на Земле. При этом мы уже не имеем дела с отражением от обширной и неровной поверхности планеты. Такой метод использовался для слежения за американским космическим кораблем в 1965 г.; он может дать точность в измерении временной задержки, соответствующую неопределенности в расстоянии порядка 10 метров.

Другой новый метод для измерения отклонения света использует радиоволны от квазаров, а не оптическое излучение звезд. Для измерения изменения углового расстояния между квазарами ЗС 273 и ЗС 279 при прохождении последнего из упомянутых квазаров за Солнцем (его «затмения» Солнцем) используется трансконтинентальная интерферометрия. Угловое расстояние между этими квазарами составляет около восьми градусов дуги, а покрытие ЗС 279 Солнцем происходит в октябре каждого года. Использование трансконтинентальной интерферометрии позволит измерять таким способом отклонение света с точностью 10^{-3} сек дуги. Первый такой эксперимент, проведенный в октябре 1968 г., окончился неудачно, однако второй, в октябре 1969 г., был успешным. Пока (начало 1970 г.) точные результаты эксперимента 1969 г. не опубликованы.

Как меняется энергия нейтрино и световых квантов, а следовательно; и частота соответствующих волн, при движении в поле тяготения? Рассмотрим изменение частоты. Пусть излучатель на поверхности звезды произвел две вспышки с интервалом Δt . Так как e^λ и e^ν не зависят от t , то эти вспышки придут к далекому наблюдателю так же с интервалом Δt по его часам, как это изображено на рис. 7. Но интервалу Δt в сильном поле тяготения соответствует промежуток времени

$$\Delta \tau = e^{\nu/2} \Delta t. \quad (3.4.2)$$

Следовательно, частота ω принятого наблюдателем сигнала, пропорциональная $1/\Delta t$, отличается от частоты испущенного сигнала $\omega_0 = 1/\Delta \tau$:

$$\omega = \omega_0 \cdot e^{\nu/2}. \quad (3.4.3)$$

Частота сигнала уменьшается при выходе его из поля тяготения (и увеличивается при движении в обратном направлении). Соответственно этому уменьшается и энергия кванта $E = \hbar \omega$. Описанное явление называется *гравитационным красным смещением*. Для наблюдателя, находящегося на поверхности звезды, спектр

испускания атомов выглядит точно так же, как и в лаборатории на Земле. Однако спектр тех же атомов звезды, наблюдаемый с Земли, сдвинут, из-за описанного явления, в красную сторону*).

§ 5. Радиальное движение нерелятивистских частиц

Теперь обратимся к радиальному движению нерелятивистских частиц в вакууме. Запишем сначала «координатную» скорость свободного падения в поле Шварцшильда, т. е. скорость изменения координаты r со временем t . Из уравнений для геодезических, используя выражение для интервала в поле Шварцшильда, получаем

$$\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - \frac{r_g}{r_0}} \right]^{1/2} c. \quad (3.5.1)$$

Здесь r_g — гравитационный радиус центральной массы, r_0 — расстояние, с которого начинается падение и на котором $\frac{dr}{dt} = 0$. На большом расстоянии (r_0 и $r \gg r_g$) формула (3.5.1) переходит в обычное выражение ньютоновской теории:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{rr_0}(r_0 - r)}.$$

Выражение (3.5.1) показывает скорость изменения координаты r по часам далекого наблюдателя. Местный неподвижный наблюдатель, находящийся рядом с падающим телом, определит его скорость так:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} = \left[\frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - \frac{r_g}{r_0}} \right]^{1/2} c. \quad (3.5.2)$$

С приближением тела к гравитационному радиусу $\frac{dx}{d\tau} \rightarrow c$. Совсем иначе меняется скорость $\frac{dx}{dt}$ по часам t далекого наблюдателя. Используя формулу (3.5.1), находим $\frac{dx}{dt} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \frac{dr}{dt} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow r_g$. Разумеется, стремление скорости $\frac{dx}{dt}$ к нулю выз-

*) «Фиолетовое» смещение, вызванное у лучей, приходящих из космоса на Землю, ее гравитационным полем, составляет всего $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-9}$, и мы им пренебрегаем.

вано замедлением течения времени вблизи r_g (ср. § 4 гл. 3). Скорость $v = \frac{dx}{d\tau}$ есть величина, имеющая непосредственный физический смысл. Ее измеряет покоящийся в той же точке наблюдатель. Именно она входит в выражение локальной энергии частицы (т. е. кинетической энергии, измеренной местным наблюдателем) по формуле $E_{\text{лок}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ и т. д. Естественно, при падении

частицы эта скорость все время возрастает под действием тяготения. Скорость $\frac{dx}{dt}$, которая определяется через время далекого наблюдателя, такого непосредственного смысла не имеет. Вдали от тяготеющей массы $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dr}{dt}$ и для падающей частицы $\frac{dx}{dt}$ возрастает, но вблизи массы $\frac{dx}{dt}$ уменьшается и, как мы видели выше, стремится к нулю при $r \rightarrow r_g$. Однако это уменьшение вызвано не «отталкиванием со стороны центрального тела», как неудачно пишет Мак-Витти (1961, стр. 136), а указанной выше связью между временами τ и t .

Из формулы (3.5.2) следует, что при движении частицы сохраняется величина

$$mc^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} = E,$$

которая является полной энергией частицы в поле тяготения.

Интеграл

$$\Delta t = \int_{r_0}^r \left(\frac{dr}{dt} \right)^{-1} dr \quad (3.5.3)$$

расходится на верхнем пределе, если $r = r_g$. Таким образом, время t -падения частицы до r_g всегда бесконечно. Даже для света, время распространения которого от r_0 до r определяется интегрированием (3.4.1) и равно

$$\Delta t = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_g}{c} \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}, \quad (3.5.4)$$

промежуток времени Δt , соответствующий достижению r_g , обращается в бесконечность, а быстрее света ничто двигаться не может.

Итак, по часам далекого неподвижного наблюдателя время достижения r_g всегда равно бесконечности. Любое тело, под действием

каких бы сил оно ни находилось, может только асимптотически приближаться к r_g . Каково время падения по часам, установленным на самой падающей частице? Свяжем систему отсчета с частицей. В этой системе часы не меняют положения, поэтому для них $ds = c dT$, где T — показание часов. Отсюда $\Delta T = \frac{1}{c} \int ds$. Но ds есть инвариантная величина, не меняющаяся при переходе к другой системе; ее можно вычислить в любой системе. Вычислим ds в системе Шварцшильда:

$$\Delta T = \frac{1}{c} \int_{r_1}^r \sqrt{\frac{1 - \frac{r_g}{r}}{\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}} dr. \quad (3.5.5)$$

Используя для $\frac{dr}{dt}$ выражение (3.5.1), видим, что (3.5.5) сходится при любом верхнем пределе, в том числе и при $r = r_g$. В частности, если частица падает с параболической скоростью (т. е. $\frac{dr}{dt} = 0$ на бесконечности), то время падения от r_1 до r

$$\Delta T = \frac{2}{3} \frac{r_g}{c} \left[\left(\frac{r_1}{r_g} \right)^{3/2} - \left(\frac{r}{r_g} \right)^{3/2} \right] \quad (3.5.6)$$

— формула, совпадающая с формулой ньютоновской теории, если вместо r_g подставить его выражение. Здесь r_1 — положение частицы в момент начала отсчета ΔT . Итак, время падения до r_g по часам частицы конечно. То, что бесконечно во времени внешнего наблюдателя, конечно по часам падающего. Можно ли привести более наглядную иллюстрацию относительности понятия временной бесконечности?

Нам остается сделать только одно пояснение. С помощью выражения (3.5.3) можно найти $r = r(t)$, т. е. положение пробной частицы в момент t по часам далекого наблюдателя. Но это, конечно, не то место, где этот наблюдатель видит частицы в момент t ; свету нужно некоторое время Δt , чтобы пройти путь от частицы до наблюдателя. Это время легко рассчитать по формуле (3.5.4). Обозначим время прихода света к наблюдателю через t_* :

$$t_* = t + \Delta t. \quad (3.5.7)$$

Когда частица приближается к гравитационному радиусу, $t \rightarrow \infty$ и $\Delta t \rightarrow \infty$, поэтому t_* и подавно стремится к бесконечности. Таким образом, наблюдатель видит, что частица только асимптотически за бесконечное время приближается к гравитационному радиусу. С помощью приведенных выше выражений нетрудно получить формулу $r = r(t_*)$ для падающей частицы, т. е. тот закон, по которому наблюдатель видит приближение частицы к гра-

витацонному радиусу. Для $r \rightarrow r_g$ асимптотический вид этой формулы таков:

$$r = r_g + (r_1 - r_g) \cdot e^{-\frac{c(t_* - t_*^1)}{2r_g}} \quad (3.5.8)$$

Здесь r_1 — положение частицы в момент t_*^1 ; формула применима при $(r_1 - r_g) \ll r_g$.

Посмотрим теперь, как будет меняться яркость излучателя, падающего в поле Шварцшильда, для внешнего наблюдателя. Пусть в некоторый момент падающий источник находится вблизи r_g и движется с локальной скоростью $\frac{dx}{d\tau} = v$ по радиусу, соединяющему центральное тело с далеким наблюдателем A ; для сопровождающего наблюдателя, падающего вместе с источником, источник излучает изотропно с постоянной интенсивностью. Тогда плотность потока на бесконечности I_∞ будет для наблюдателя A :

$$I_\infty = \text{const} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left[\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2} \right]^2. \quad (3.5.9)$$

Здесь один множитель $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ описывает гравитационное красное смещение, второй множитель $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ связан с искривлением

траектории лучей в поле тяготения, множитель $\left[\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2} \right]^2$

связан с доплер-эффектом, а второй такой же множитель с абберацией. Из (3.5.2) следует, что $1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{r_g}{r} \cdot \frac{r_0 - r}{r_0 - r_g}$ и при $r \rightarrow r_g$

$$I_\infty = \text{const} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^4. \quad (3.5.10)$$

Закон изменения r с t_* уже найден (3.5.8). Таким образом, мы получаем асимптотическое выражение, показывающее, как далекий наблюдатель видит изменение яркости падающего источника при $r \rightarrow r_g$:

$$I_\infty = \text{const} e^{-\frac{2c}{r_g}(t_* - t_*^1)}. \quad (3.5.11)$$

Частота принимаемой далеким наблюдателем световой волны стремится к нулю, по аналогичному закону, только показатель экспоненты вчетверо меньше по модулю.

Как мы увидим далее в § 10 гл. 3, при $r \rightarrow r_g$ лучи света, вышедшие из источника по определенному направлению, искривляясь

в гравитационном поле, могут длительно кружить вблизи центра тяготения, прежде чем уйти к далекому наблюдателю. Эти лучи создают «ореол» вокруг тела (если его размеры меньше $1,5 r_g$). Несмотря на то, что лучи от ореола кружат вблизи r_g , яркость ореола экспоненциально быстро затухает. В выражении (3.5.11) «ореол» не учитывается. К этому вопросу мы вернемся в § 6 гл. 11.

§ 6. Потенциальные кривые движения

После выяснения основных особенностей радиального движения перейдем к общему случаю нерадиальных траекторий. Впервые нерадиальные траектории в шварцшильдовском поле исследовал Хаджихара (1931). Полная классификация типов движений имеется, например в книге Богородского (1962): см. также работы Галкина (1961) и Метцнера (1963). Анализ принципиальных вопросов устойчивости при движении по круговым орбитам дан в работе Каплана (1949a).

Траектория частицы всегда лежит в плоскости. Если выбрать плоскость $\theta = \pi/2$, то уравнения движения в этой плоскости, записанные в полярных координатах, имеют вид

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2 - 1 + \frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^3}}{E^2}, \quad (3.6.1a)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{a^2}{E^2 r^4} \left(1 - \frac{1}{r}\right). \quad (3.6.1b)$$

Для удобства уравнения записаны в безразмерных величинах. Здесь r — шварцшильдовская радиальная координата, измеренная в единицах гравитационного радиуса $r_g = 2GM/c^2$; $dx = dr/\sqrt{1-1/r}$ — элемент радиального расстояния; τ — время, измеряемое локальным наблюдателем в единицах r_g/c ; a — момент импульса, измеренный в единицах $mc r_g$, E — энергия, измеренная в единицах mc^2 , m — масса пробной частицы. В энергию включена масса покоя, поэтому для частицы, покоящейся на бесконечности, $E^2 = 1^*$). На расстояниях, больших по сравнению с гравитационным радиусом, т. е. при $r \gg 1$ и при малой по сравнению с единицей энергии движения: $E - 1 \ll 1$, мы получаем из (3.6.1a,b) уравнения кеплеровой задачи в ньютоновской теории тяготения. Действи-

*) Полная энергия частицы E , сохраняющаяся при движении, выражается через скорость v и g_{00} точно так же, как и при радиальном движении. Действительно, из (3.6.1a) и (3.6.1b) находим $E/mc^2 = \sqrt{g_{00}/(1-v^2/c^2)}$. Эта формула справедлива для любого статического поля (см. Ландау и Лифшиц, 1967). В сферическом поле сохраняется момент вращения $a = p_\varphi/mc r_g =$

$$= \frac{E}{mc^2} \frac{v_\varphi}{c} \frac{r}{r_g} g_{00}^{-1/2}; \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

тельно, при этих условиях слагаемым a^2/r^3 в (3.6.1а) можно пренебречь, $dx \approx dr$, $E^2 - 1 \approx 2(E - 1)$. В этом случае $1/r$ — потенциал тяготения, a^2/r^2 — потенциал центробежных сил. Равенство нулю числителя в (3.6.1а) дает, очевидно, потенциальную кривую радиального движения при данном a .

Для ньютоновской теории такая кривая $E = E(r, a_1)$ для фиксированного (a_1) изображена на рис. 9. При любом a_1 кривая имеет минимум. Качественные особенности движения пробной частицы видны на рис. 9. Движение происходит при постоянной энергии E_1 и изображается горизонталью $E = E_1$. Частица с момента a_1 перемещается вдоль горизонтали до соответствующей кривой поворота $E = E(r, a_1)$, затем движется в обратном направлении снова до пересечения с той же кривой и т. д., совершая финитное движение в «потенциальной яме». В соответствии с тем, что в этом примере выбрана $E_1 < 1$, а энергия, как и в ОТО, отсчитывается от mc^2 (от 1 в наших единицах), частица не уходит в бесконечность.

Если энергия частицы $E_2 > 1$ (см. рис. 9), то она приходит по гиперболе из бесконечности, достигает минимального r , соответствующего пересечению E с кривой $E = E(r, a_1)$ и снова уходит в бесконечность. Так как потенциальные кривые при $r \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности, $E \rightarrow \infty$ (см. рис. 9), то при любой большой энергии частицы, обогнув притягивающий центр, уйдет снова в бесконечность, разумеется, если она не натолкнется на поверхность притягивающего тела. Гравитационный захват в ньютоновской теории двух точечных тел невозможен.

Обратимся теперь к релятивистской теории, к точному уравнению (3.6.1а). Здесь вид потенциальных кривых иной (рис. 10). Благодаря слагаемому a^2/r^3 потенциальная кривая не поднимается неограниченно вверх, как в ньютоновской теории, а загибается вниз, стремясь к нулю на гравитационном радиусе $r = 1$. Одна из таких кривых изображена на рис. 10. Кривая имеет и минимум и максимум.

Движение пробной частицы с $E_1 < 1$ в потенциальной яме (см. рис. 10) аналогично ньютоновскому движению, разобранному выше. Только, в отличие от ньютоновской теории, орбита частиц не есть замкнутая кривая (подробности см. в книге Богородского, (1962)). В ньютоновской задаче период радиальных колебаний

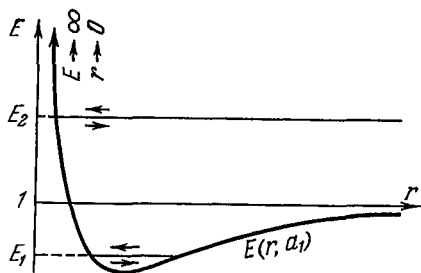


Рис. 9. Потенциальная кривая радиальной составляющей движения в ньютоновской теории при фиксированном моменте a_1 . По вертикали отложена полная энергия, включающая массу покоя частицы, в единицах mc^2 . $E_1 < 1$ — горизонталь финитного (эллиптического) движения; $E_2 > 1$ — горизонталь гиперболического движения.

«случайно» равен времени изменения φ на 2π , что и означает замкнутость кривой; в ОТО это не так. Знаменитое вековое смещение перигелия Меркурия на $43''$ в столетие есть проявление этой особенности.

При $1 < E_2 < E_{\max, a_1}$ (см. рис. 10) горизонталь $E_2 = \text{const}$ справа уходит в бесконечность, а слева упирается в кривую поворота. В этом случае частица приходит из бесконечности и уходит в бесконечность, аналогично гиперболическому движению в ньютоновской теории.

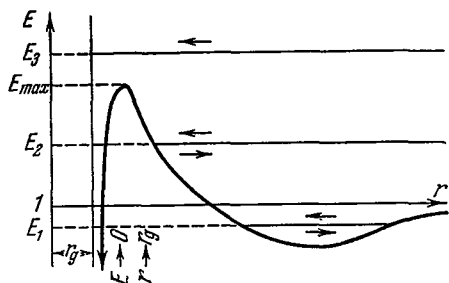


Рис. 10. Потенциальная кривая радиальной составляющей движения в ОТО при фиксированном моменте a_1 . $E_1 < 1$ — горизонталь финитного движения; $1 < E_2 < E_{\max}$ — горизонталь гиперболического движения; $E_3 > E_{\max}$ — частица приближается к гравитационному радиусу и не уходит в бесконечность.

Важной особенностью потенциальной кривой в поле Шварцшильда является наличие максимума. Для частицы с $E_3 > E_{\max, a_1}$ горизонталь $E = E_3$ не встречает потенциальной кривой. Такая частица достигает сферы гравитационного радиуса ($r = 1$ в наших единицах) и не уходит больше в бесконечность. Происходит гравитационный захват частицы. Об этой важ-

ной особенности релятивистской теории подробнее сказано дальше.

Отметим еще следующее любопытное обстоятельство. Если частица имеет энергию лишь немного меньше E_{\max} , то вблизи точки поворота график правой части в (3.6.1а) подходит к нулю со сколь угодно малым наклоном, т. е. при изменении r на малую величину dr частица успевает описать сколь угодно большой угол φ , а значит, вблизи r_{\min} она может сделать много оборотов, прежде чем снова уйдет на бесконечность. В этом случае вблизи r_{\min} орбита совсем не похожа на ньютоновскую гиперболу. При $E = E_{\max}$ траектория будет навиваться на окружность $r = r_{E_{\max}}$.

§ 7. Круговые орбиты

Если точка находится в экстремуме кривой $E(r, a_1)$, то это означает, что тождественно $dr \equiv 0$ и частица движется по кругу с $r = \text{const}$. Очевидно, что круговое движение в минимуме E устойчиво: при малом возмущении частица, получив малые изменения E и a_1 , будет совершать финитное движение (рис. 11), соответствующее $E = E_{\min} + \delta E_1$ и новой кривой поворота $E = E(r, a_1 + \delta a_1)$. Новая траектория мало отличается от прежней окружности.

Движение по окружности $r_{E_{\max}}$ в максимуме кривой E неустойчиво; теперь малое возмущение заставит частицу уйти в бесконеч-

ность либо упасть к гравитационному радиусу. Мы видели, что в ньютоновской теории потенциальная кривая при любом a имеет минимум. Следовательно, в ньютоновской теории для любого a существует устойчивая круговая орбита. Чем меньше a , тем ближе орбита расположена к центру. Когда $a \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$. В эйнштейновской теории это не так: существует минимальный радиус круговой орбиты, на которой движение уже перестает быть устойчивым, и соответственно минимальная энергия кругового движения. На это обстоятельство впервые обратил внимание Хаджихара (1931) и позже Каплан (1949а). Чтобы убедиться в сказанном, достаточно построить графики $E = E(r, a)$ для разных a (рис. 12).

Мы видим, что при $a < \sqrt{3}$ графики не имеют экстремумов. При $a > \sqrt{3}$ каждая кривая имеет два экстремума — минимум и максимум (на рис. 12 отмечены вертикальными черточками).

Минимумы соответствуют устойчивым орбитам и имеют $r > 3$, и соответственно $\sqrt{8/9} < E_{\min} < 1$. Координаты максимумов при a , возрастающем от $\sqrt{3}$ до ∞ , монотонно уменьшаются от $r = 3$ до $r = 3/2$, а энергия E_{\max} увеличивается от $E_{\max} = \sqrt{8/9} = 0,943$ до $E_{\max} = \infty$.

Таким образом, критическая круговая орбита, на которой движение перестает быть устойчивым, имеет $r = 3$. Скорость движений на ней $v_{\text{круг}} = c/2$, соответствующая минимальная энергия $E_{\text{крит}} = 0,943 mc^2$.

Напомним, что для далекого наблюдателя все процессы в гравитационном поле протекают с замедлением в $\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}$

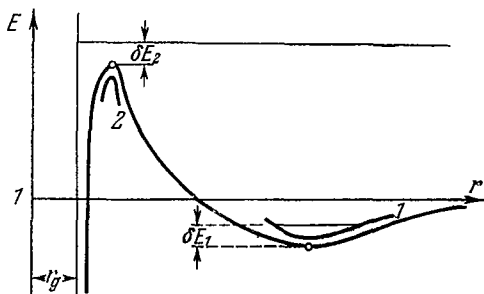


Рис. 11. Движение по круговой орбите в минимуме потенциальной кривой устойчиво, в максимуме — неустойчиво. 1 — потенциальная кривая $E = E(r, a_1 + \delta a_1)$; 2 — потенциальная кривая $E = E(r, a_2 + \delta a_2)$. На рисунке изображен случай, когда $\delta a_1 > 0$, $\delta a_2 < 0$.

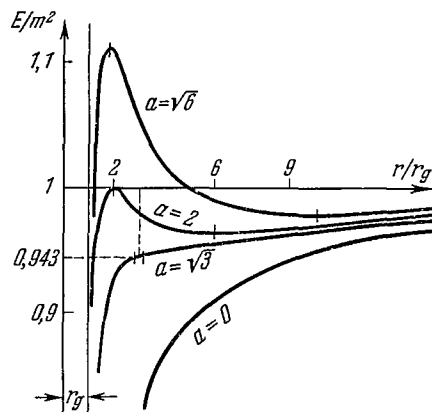


Рис. 12. Потенциальные кривые для разных моментов a . Цифры около кривых обозначают момент a , выраженный в единицах mc^2/g .

раз (см. § 2 и 3). Этот наблюдатель будет видеть движение частицы на критической круговой орбите с периодом

$$T = \frac{12\pi}{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}} \frac{r_g}{c}.$$

Если на частице находится монохроматический излучатель с частотой ω_0 , то воспринимаемая наблюдателем частота света (вышедшего вдоль или против v) определяется по формуле (см. § 5 гл. 3)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Первый множитель после ω_0 описывает замедление времени в гравитационном поле, второй — эффект Доплера. Для частицы, движущейся на $r_{\text{крит}}$, плоскость орбиты которой проходит через луч зрения наблюдателя, имеем: в момент движения к наблюдателю $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ — фиолетовое смещение; в момент движения от наблюдателя: $\omega = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega_0$ — красное смещение; для покоящегося источника с тем же $r_{\text{крит}} = 3r_g$: $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0$ — красное гравитационное смещение.

Ближе к тяготеющему центру в интервале $3/2 \leq r \leq 3$ расположены неустойчивые круговые орбиты. Скорость движения по последней из них (неустойчивой) с $r = 3/2$ равна световой $v = c$. Это соответствует бесконечной энергии $E = \infty$. Ближе к гравитационному радиусу (напомним, что он соответствует в принятых единицах $r = 1$) вообще нет круговых орбит; это было отмечено еще Эйнштейном.

§ 8. Движение релятивистской частицы в кулоновском поле

Отвлекаясь несколько в сторону, рассмотрим следующую задачу: проанализируем круговое движение заряженной частицы в сильном кулоновском поле. Выводы этой задачи окажутся полезными как аналогия для понимания особенностей строения плотных звезд.

Заряженная частица в сильном поле будет двигаться с релятивистской скоростью. Уравнение движения заряда e в постоянном поле E^* записывается в виде

$$\frac{dp}{dt} = e E^*.$$

Подставляя для нашей задачи $E^* = \frac{Q}{r^2} \mathbf{n}$, Q — заряд центрального тела, \mathbf{n} — единичный вектор в направлении радиуса и $\mathbf{p} = \frac{mv}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$, получаем для кругового движения заряда в кулоновском поле

$$\frac{mv^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} = \frac{eQ}{r}. \quad (3.8.1)$$

Когда $r \rightarrow 0$, то $v \rightarrow c$. Перепишем (3.8.1) через момент импульса

$$a = \frac{mvr}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} :$$

$$a = \frac{eQ}{v}.$$

Из этого выражения видно, что при стремлении радиуса орбиты к нулю ($r \rightarrow 0$) и, следовательно, $v \rightarrow c$, момент стремится не к нулю, как в нерелятивистской теории, а к конечной величине $a_{\min} = \frac{eQ}{c}$.

Разумеется, сказанное останется справедливым, если мы будем рассматривать движение релятивистской частицы на круговой орбите в ньютоновском поле тяготения. Такое рассмотрение, очевидно, непоследовательно, ибо там, где скорость частицы на круговой орбите становится сравнимой с c , там сказываются и изменения в законе тяготения Ньютона. Однако полезно запомнить (это пригодится для дальнейшего), что учет только эффектов специальной теории относительности (СТО) приводит к конечному моменту при нулевом радиусе орбиты.

Итак, в нерелятивистской теории есть устойчивые круговые орбиты с любым r . При $r \rightarrow 0$ момент a также стремится к нулю (рис. 13). В непоследовательной теории, учитывающей только эффекты СТО, круговые орбиты могут иметь любой радиус r . При $r \rightarrow 0$ момент $a \rightarrow \text{const}$ (см. рис. 13). В ОТО имеется минимальный радиус круговой орбиты r_{\min} , на которой запас устойчивости обращается в нуль, и соответствующий ему момент a_{\min} (см. рис. 13)

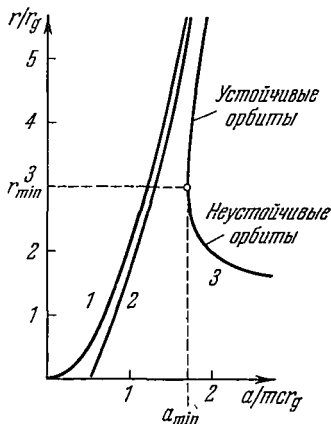


Рис. 13. Зависимость радиуса круговой орбиты r от момента a : 1 — в ньютоновской теории; 2 — в специальной теории относительности; 3 — в общей теории относительности.

§ 9. Гравитационный захват нерелятивистской частицы

Разберем важный для физических приложений случай движения тела, имеющего на бесконечности скорость v_∞ , пренебрежимо малую по сравнению с c и соответственно $E = 1$. Проследим качественные особенности движения такого тела при разных a . Это движение на графике E, r изображается горизонталью $E = 1$ (см. рис. 12). Если момент импульса на бесконечности меньше $a_{\text{кр}} = 2$, то горизонталь $E = 1$ не встречает кривой поворота $E = E(r, a)$ и, значит, траектория частицы заканчивается на сфере Шварцшильда.

При $a_{\text{кр}} = 2$ траектория навивается на окружность. Если же $a > 2$, то тело снова уходит на бесконечность.

Когда a мало отличается от $a_{\text{кр}} = 2$, частица, прежде чем уйти на бесконечность или «провалиться» к r_g , совершает много оборотов вблизи $r = 2$. Асимптотическая формула для числа оборотов имеет вид (Зельдович, Новиков, 1964b)

$$N = - \frac{\ln(a - 2)}{2^{3/2}\pi}.$$

Вернемся теперь к вопросу о гравитационном захвате. В ньютоновской теории частица, прилетающая из бесконечности, если она не ударяется о поверхность центрального тела, снова улетает в бесконечность — гравитационный захват невозможен. В эйнштейновской теории, как мы видели, частица с $a \leq 2$ гравитационно захватывается, и она уже не уходит в бесконечность. Сечение захвата определяется соотношением

$$\sigma_g = 4\pi \left(\frac{c}{v}\right)^2 r_g^2, \quad v_\infty \ll c. \quad (3.9.1)$$

Сравним этот захват с «геометрическим захватом» частицы тяготеющим шаром радиуса R в ньютоновской теории, т. е. со случаем, когда частица вблизи периастра наталкивается на поверхность шара. В этом случае сечение захвата будет

$$\sigma_n = \pi R^2 (1 + 2Gm/v_\infty^2 R). \quad (3.9.2)$$

Сравнивая (3.9.1) и (3.9.2), видим, что в релятивистском случае захват происходит эффективно так же, как в ньютоновской теории с центральным телом радиуса $R = 4 r_g$.

Подчеркнем еще следующее. В ньютоновской теории захват на шар происходит с ударом о его поверхность. В поле Шварцшильда захваченное тело подходит к сфере Шварцшильда по спиральной траектории, совершив конечное число оборотов, асимптотически замедляя для далекого наблюдателя свою скорость. Такой подход растягивается на бесконечное время для внешнего наблюда-

теля, как это подробно описано в § 4 гл. 3 для случая движения по радиусу. Никакого удара здесь нет. Заметим еще, что траектория подходит к сфере Шварцшильда всегда перпендикулярно, по радиусу (см. (3.6.1a, b)). Поэтому все формулы, приведенные в § 4 гл. 3 для частицы, падающей по радиусу, будут вблизи сферы Шварцшильда асимптотически справедливы и в общем случае ненулевого момента a падающей частицы *).

§ 10. Движение ультрарелятивистских частиц и лучей света

Рассмотрим теперь прямо противоположный случай движения частицы, всюду (и даже на бесконечности) являющейся ультрарелятивистской. Такими частицами всегда являются фотоны и нейтрино.

Уравнение для частицы, движущейся в поле Шварцшильда с фундаментальной скоростью c , получается из (3.4.1a, b) предельным переходом $v_\infty \rightarrow c$, что соответствует $E \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \infty$. Эти бесконечности, очевидно, следствия нормировки энергии на mc^2 , а момента на $mr_g c$. Замечая, что при $E \rightarrow \infty$, $a/E \rightarrow l$, где l — прицельное расстояние траектории на бесконечности, получаем в пределе $E \rightarrow \infty$:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^2}{r^3}, \quad (3.10.1a)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{l^2}{r^4} \left(1 - \frac{1}{r}\right). \quad (3.10.1b)$$

В плоском пространстве отсутствуют слагаемое l^2/r^3 в (3.10.1a) и член $1/r$ в (3.10.1b); при этом $x = r$. В этом случае мы имеем равномерное движение по прямой.

Наличие члена l/r^3 и различие между r и x приводит к тому, что луч света, проходя вблизи тяготеющей массы, отклоняется от прямолинейного движения. При больших l (а значит, и больших r_{\min}) это отклонение невелико. Для луча, касающегося поверхности Солнца, оно составляет $1'',75$. Именно это предсказание Эйнштейна, блестяще подтвержденное во время полного

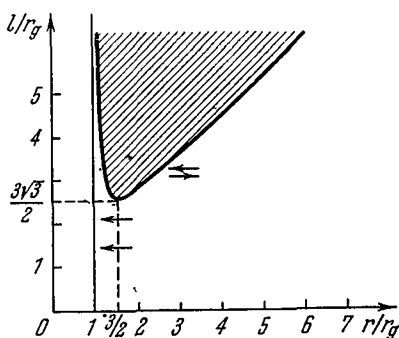


Рис. 14. Кривая зависимости r_{\min} ультрарелятивистской частицы от прицельного расстояния: l — прицельное расстояние на бесконечности. Частицы с $\frac{l}{r} < \frac{3\sqrt{3}}{2} g$ гравитационно захватываются. Заштрихована область, где движение невозможно.

*) Разумеется, мы все время подразумеваем, что в релятивистском случае движения центральная масса уже сколлапсировала, и частица не наталивается на ее поверхность.

солнечного затмения 1918 г., было одним из первых экспериментальных доказательств справедливости общей теории относительности *).

При малых r траектория луча может сильно отличаться от прямой. «Кривая поворота» — зависимость r_{\min} от l — изображена на рис. 14. Из этого рисунка видно, что луч (или ультрарелятивистская частица), идущий из бесконечности с прицельным параметром $l \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2,6$ (напомним, что все расстояния измеряются в единицах r_g), не встречает кривой поворота и, следовательно,

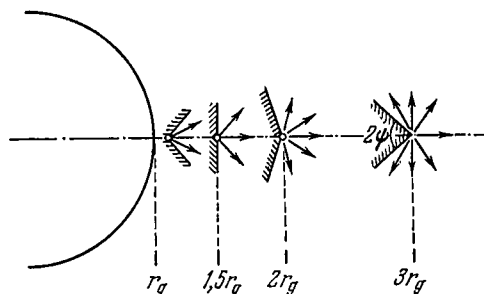


Рис. 15. Гравитационный захват излучения: лучи, вышедшие из каждой точки внутри конической полости, сечение которой заштриховано на рисунке, гравитационно захватываются.

но, гравитационно захватывается. В этом случае, как и в случае нерелятивистской частицы, траектория подходит к сфере Шварцшильда перпендикулярно. Здесь так же вблизи предельной сферы справедливы асимптотические формулы, приведенные в § 4 гл. 3 для случая радиального движения. В частности, время приближения луча к сфере Шварцшильда для внешне-

го наблюдателя растягивается в бесконечность.

Итак, сечение гравитационного захвата ультрарелятивистской частицы $\sigma = 27 \pi r_g^2/4$. Заметим еще, что луч света, испущенный источником, находящимся на радиусе r , может уйти на бесконечность не при всех углах выхода (в системе Шварцшильда). На рис. 15 лучи, выходящие внутри заштрихованного конуса, не уходят в бесконечность, а лучи, изображенные стрелками, уходят в бесконечность. Формула для угла ψ (рис. 15)

$$|\operatorname{tg} \psi| = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{r}}}{\sqrt{\frac{1}{r} - 1 + \frac{4}{27} r^2}}. \quad (3.10.2)$$

§ 11. Движение тел в поле тяготения Шварцшильда с учетом гравитационного излучения

Учет гравитационного излучения даже в слабом поле тяготения качественно меняет картину движения, если энергия движения тела на бесконечности мала. Так, например, тело, имеющее на бесконечности очень малую энергию, после полета вблизи притяги-

*) Современное состояние вопроса см. в докладе Торна (1971b).

вающего центра и высвечивания энергии в виде гравитационных волн уже будет обладать отрицательной энергией, т. е. окажется гравитационно захваченным. Однако такой захват чисто формален, ибо потеря энергии при излучении в слабом поле крайне мала. Из формулы (3.11.1), выведенной ниже, следует, что, например, для двух обычных звезд одинаковой массы, сближающихся из бесконечности на расстояние порядка их размеров, захват произойдет только в том случае, если их относительная скорость на бесконечности меньше ~ 1 см/сек *). При этом их максимальное удаление после «захвата» (если скорость $v_\infty \ll 1$ см/сек) будет $\sim 3 \cdot 10^{26}$ см = 10^8 нс (1). Напомним, что размер нашей Галактики на четыре порядка меньше. (Подчеркнем также, что мы рассматриваем материальные точки. Для протяженных тел велики приливные силы).

Обратимся теперь к вопросу об излучении гравитационных волн телами, движущимися в поле Шварцшильда на расстояниях, сравнимых с r_g , когда излучение велико. Существующая теория гравитационного излучения, подробно описанная в §§ 12—14, 16 гл. 1, применима, когда амплитуда волны мала. Из соображений размерности ясно, что уже оценки теории изучения для движения в слабом поле тяготения (§§ 12, 13 гл. 1) по порядку величины должны быть верны и при движении на расстояниях, сравнимых с гравитационным радиусом центрального тела. Сделаем по этому поводу еще следующее замечание. Аналогично тому как заряд, движущийся равномерно по окружности со скоростью $v \approx c$, излучает главным образом высшие гармоники, излучение гравитационных волн телом в сильном поле тяготения, когда его скорость $v \approx c$, должно иметь такие же особенности [см. об этом работу Герценштейна и Пустовойта (1962)]. Однако в рассматриваемой задаче $v \approx c$ достигается лишь вблизи самого гравитационного радиуса, где излучение обрезается эффектами ОТО (гравитационное красное смещение, гравитационный захват излучения). При r , сколько-нибудь существенно превышающем r_g , указанные эффекты не меняют порядковых оценок.

Важной особенностью гравитационного излучения является следующее. При сближении тел под действием взаимного тяготения на расстояние порядка их гравитационных радиусов общее количество излученной энергии должно быть функцией только их масс, G и c . Из соображений размерности сразу следует, что константа G в формулы войти не может и общее количество высвеченной энергии должно равняться по порядку величины mc^2 , умноженной на функцию отношения масс тел m/M . Если m одного порядка с M , то можно сразу сделать вывод, что общее излучение

*) В действительности дисперсия скоростей звезд Галактики в окрестности Солнца порядка десятков км/сек,

гравитационной энергии не мало по сравнению с mc^2 , где m — масса меньшего тела [Дайсон (1963); Зельдович, Новиков, 1964b; Фаулер (1965)]. Формулы приведены ниже. Общее излучение меньше величины mc^2 только за счет безразмерного численного коэффициента. Посмотрим, как влияет излучение гравитационных волн на движение массы m [Зельдович, Новиков, 1964b; см. также Смит, Хавац (1965)]. Это излучение вызывает появление силы, действующей на тело, что приводит к своеобразному лучистому гравитационному трению. Сила трения вызвана взаимодействием массы m с собственным гравитационным полем и поэтому пропорциональна m^2 , в отличие от силы взаимодействия с внешним гравитационным полем, пропорциональной m . Таким образом, изменение движения тела вследствие излучения гравитационных волн можно рассматривать в случае $m/M \ll 1$ как малую поправку к движению под действием силы внешнего поля. Подробнее об этом уже говорилось в гл. 1 §§ 12—14.

При движении нерелятивистской частицы m , прилетающей из бесконечности, основная доля высвечиваемой энергии излучается при полете в вершине траектории, в периастре.

Используя общее выражение (1.11.8) для мощности гравитационного излучения, можно получить оценки для общего количества высвеченной энергии ΔE и времени высвечивания Δt :

$$\Delta E = \frac{c^2 m^2}{M} \left(\frac{r_g}{r} \right)^{3.5}, \quad \Delta t = \frac{r^{3/2}}{(2GM)^{1/2}},$$

где r — координата периастра. Потеря энергии за счет излучения приводит к тому, что тело гравитационно захватывается массой M при значениях момента a , значительно превышающих $a = 2$, когда происходит захват пробной частицы в чисто механической задаче, описанной в § 9.

С учетом излучения, критические значения захвата a_3 и σ_3 зависят от параметра $x = \frac{c^2 m}{v_\infty^2 M}$ и определяются следующим образом:

$$\text{для } x \gg 10 \quad a_3 = (2x)^{1/7}, \quad \sigma_3 = \pi (c/v_\infty)^2 (2x)^{2/7} r_g^2,$$

$$\text{для } x \ll 10 \quad a_3 = 2 + e^{-20/x}, \quad \sigma_3 = 4\pi (c/v_\infty)^2 (1 + e^{-20/x}) r_g^2.$$

Например, для $v \approx 10^6$ см/сек, $m/M \approx 0,1$ находим $x \approx 10^8$ и отсюда $a_3 \approx 10$, сечение σ в 25 раз больше, чем без учета излучения. Конечно, эти результаты — лишь грубое приближение, так как расчет основан на теории слабого поля.

В результате захвата тело после пролета через периастр удаляется от M уже не на бесконечность, а на расстояние порядка

$$L \approx \frac{r_g}{2 \left[\frac{m}{M} \left(\frac{r_g}{r} \right)^{3/2} - \frac{v_\infty^2}{2c^2} \right]}. \quad (3.11.1)$$

При малом v_∞ и $r = 3r_g$ получаем $L \approx 600 r_g$. При следующем подходе через периастр тело еще раз высветит энергию и т. д. Вытянутость орбиты будет быстро уменьшаться.

Как влияние гравитационное излучение на круговое движение частицы? Это движение изображается минимумами кривых на рис. 12. В результате высвечивания точка, изображающая движение, перемещается по диаграмме по минимумам кривых. Вначале, при больших r , эта эволюция очень медленна (см. § 13 гл. 1). Мощность излучения на круговой орбите определяется формулой (1.13.2). Преобразуем эту формулу к следующему виду:

$$\frac{dE}{dt} = 0,2 \frac{c^5}{G} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \left(\frac{r_g}{r} \right)^5.$$

Для обычных двойных звезд потеря энергии в год составляет 10^{-12} их полной энергии. При небольших r темп эволюции значительно выше. Для некоторых реальных звезд, составляющих тесные двойные системы, период обращения уменьшается за год уже на 10^{-9} долю. Круговое движение продолжается вплоть до последней устойчивой орбиты с $r_{кр} = 3r_g$ (см. § 7 гл. 3). Дальше начинается падение к сфере Шварцшильда. Энергия при движении по критической окружности составляет 0,94 от энергии при обращении на большем расстоянии. Следовательно, общее количество энергии, высвеченной до достижения критической орбиты, есть $\Delta E = 0,06 mc^2$ и не зависит от массы центрального тела. Чем меньше отношение m/M , тем больше оборотов совершает тело, прежде чем высветит энергии ΔE и достигнет $r_{кр}$.

За один оборот на критической окружности высвечивается энергия $\sim 0,1 m^2 c^2 / M$. Тело переходит на спиральную орбиту, падая к сфере Шварцшильда. На этой орбите совершается еще $\sim (M/m)^{1/2}$ оборотов. Энергия, высвечиваемая за один оборот, всегда того же порядка, что и при $r = 3r_g$. Таким образом, после достижения критической орбиты тело сваливается к сфере гравитационного радиуса, практически ничего не добавляя к уже высвеченной до этого энергии, если $m/M \ll 1$.

Если $m/M \sim 1$, то число оборотов после достижения критической орбиты порядка единицы, а излученная энергия того же порядка, что и до достижения этой орбиты. Хотя здесь сила лучистого трения уже не является малой поправкой к действию внешнего поля, но из соображений размерности, симметрии и соответствия с

формулой для $M \gg m$ можно сразу написать приближенно формулу для высвеченной энергии, справедливую и при $m/M \sim 1$:

$$\Delta E_{\text{круг}} = \alpha \frac{c^2 m M}{m + M}, \quad (3.11.2)$$

где α — порядка 0,06.

Приведем еще аналогичную формулу для общего количества высвеченной энергии при падении масс друг на друга по прямой линии, справедливую при любом m/M :

$$\Delta E_{\text{пад}} = \beta \frac{c^2 m^2 M^2}{(m + M)^3}. \quad (3.11.3)$$

Мы полагаем $\beta = 0,02$. Подчеркнем, что точного расчета излучения при $m/M \sim 1$ нет. При наличии заметных собственных моментов у сталкивающихся тел формулы иные (см. § 3 гл. 4). Точный расчет — дело будущего. Количество высвеченной энергии может составлять заметную долю mc^2 .

§ 12. *R*- и *T*-области в пространстве — времени Шварцшильда

В § 2 гл. 3 мы видели, что радиус $r = r_g = 2 Gm/c^2$ имеет критическое значение. Сила тяготения F при $r = r_g$ обращается в бесконечность. Очевидно, что никакое статическое тело не может иметь размер меньше r_g . Но что будет с нестатически сжимающимся телом, например, со сферическим облаком пылинок, которое сжимается под действием собственного тяготения и достигает r_g ?

В процессе сжатия масса тела M не меняется. Поэтому пылинки на поверхности шара просто падают в поле Шварцшильда с массой M . Как мы видели в § 5 гл. 3, время падения до r_g конечно. Шар за конечное собственное время сожмется до r_g и будет сжиматься дальше. Только выбор недеформирующейся системы отсчета с $g_{22} = -e^u = -(x^1)^2$ не позволяет с ее помощью исследовать область внутри сферы Шварцшильда, ибо в этой области недеформирующихся систем отсчета не существует [Финкельштейн (1958); см. также Новиков (1961; 1962b, c)]. На сфере Шварцшильда никаких особенностей в 4-мерном пространстве — времени (так называемых истинных особенностей) не существует. В частности, простейший отличный здесь от нуля инвариант, характеризующий искривленность 4-мерного континуума

$$C = R_{iklm} R^{iklm} = \frac{12r_g^2}{r^6},$$

не имеет особенностей.

Проследим за сжимающимся шаром, когда его поверхность уходит внутрь сферы Шварцшильда. Для изучения поля вне шара в вакууме удобнее всего ввести систему отсчета из свободно падаю-

щих пробных частиц, имеющих на пространственной бесконечности нулевую скорость [система отсчета Леметра (1933); см. также Ю. А. Рылов (1961)]. Движение таких частиц рассмотрено в § 5 гл. 3. В отличие от системы отсчета Шварцшильда, эта система охватывает и область пространства — времени как снаружи сферы Шварцшильда, так и внутри нее.

Уравнение (3.5.6) связывает собственное время падающей частицы и шварцшильдову координату r . Аддитивная постоянная в (3.5.6) есть функция только лагранжевой координаты частицы R . Выбор R произволен. Выберем R так, чтобы (3.5.6) записывалось в виде

$$\tau = (2/3) (r_g/c) [(3/2) (R/r_g) - (r/r_g)^{3/2}].$$

Тогда квадрат интервала в этой системе записывается в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2} \frac{R - c\tau}{r_g} \right]^{1/2}} - \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{1/2} r_g^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.12.1a)$$

Момент пересечения падающей частицей сферы Шварцшильда определяется выражением

$$\frac{3}{2} (R - c\tau) = r_g. \quad (3.12.2)$$

Внутри сжимающегося шара в веществе решение (3.12.1) уже неприменимо и должно быть «сшито» с внутренним решением [Оппенгеймер, Снайдер (1939); Толмен, 1934а, б). Для однородного сжимающегося пылевого шара это решение записывается в виде (подробности см. далее в § 13 гл. 3)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \left[\frac{3}{2} (R_0 - c\tau) \right]^{1/2} \frac{r_g^{2/3}}{R_0^2} [dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (3.12.1b)$$

где R_0 — лагранжев радиус границы шара. Заметим, что g_{22} непрерывен на поверхности шара; он описывает непрерывное увеличение с увеличением R радиусов сфер с центром в центре шара. Однако g_{11} разрывен на поверхности шара, где испытывает разрыв плотность материи. Эта разрывность связана с различной зависимостью масштаба от времени внутри и вне шара.

Вернемся к свойствам пространства — времени в вакууме внутри сферы Шварцшильда.

С помощью условия для определения R - и T -областей (см. § 1 гл. 3), находим, что вне сферы Шварцшильда, т. е. при

$$\frac{3}{2} (R - c\tau) > r_g, \quad (3.12.3)$$

лежит R -область. Внутри сферы Шварцшильда, при неравенстве, противоположном (3.12.3), лежит T -область.

Пространство — время в координатах R, τ Леметра изображено на рис. 16; угловые координаты не интересны в силу симметрии. Граница шара $R_0 = \text{const}$ лежит далеко слева и не изображена на рисунке. Каждая частица пересекает $r = r_g$ и за конечное время достигает истинной особенности пространства —

времени, где $g_{22} = 0$ и где инвариант кривизны C , записывающийся в координатах Леметра как

$$C = \frac{12r_g^2}{\left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^6}, \quad (3.12.4)$$

обращается в бесконечность. Линии $C = \text{const}$ совпадают с линиями $-g_{22} = r^2 = \text{const}$, т. е. с мировыми линиями точек фиксированной пространственноподобной координатной сферы. Эти линии $r = \text{const}$ изображены на рис. 16 пунктиром.

В T -области r , определяемая как $r^2 = -g_{22}$, уже не является пространственной координатой, а

Рис. 16. Пространство — время Шварцшильда в координатах Леметра со сжимающейся T -областью. Пунктиры — линии $C = \text{const}$, совпадающие с $r = \text{const}$. Для радиальных лучей, вышедших в R -области (события a), один идет на бесконечность (1), второй к центру (2); для события b луч 4 все время идет вдоль мировой линии гравитационного радиуса, для события c оба луча (5, 6) идут к центру.

имеет характер времени (см. § 1 гл. 3). Поэтому мы намеренно не называем в T -области величину r -радиусом. На том же рис. 16 нанесены «световые конусы» радиальных лучей. Они определяются уравнением

$$c \frac{d\tau}{dR} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r}}, \quad r = \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{2/3} r_g^{1/3}. \quad (3.12.5)$$

Если вне сферы Шварцшильда (R -область) линии $r = \text{const}$ лежат внутри светового конуса и один из радиальных лучей идет к центру, к меньшим r , а другой на бесконечность, к большим r , то в T -области линии $r = \text{const}$ лежат вне светового конуса, и оба луча идут с увеличением кривизны и оба достигают особенности $r = 0, C = \infty$. Мировая линия любой частицы лежит внутри светового конуса. Следовательно, любая частица в T -области движется только к истинной особенности $r = 0, C = \infty$ и достигает ее за конечное собственное время. Движение от особенности наружу

к сфере Шварцшильда здесь невозможно (Финкельштейн, 1958). Это было бы движение в прошлое со скоростью, большей чем c .

Движение поверхности любого сферического тела можно рассматривать как движение пробной частицы (вообще говоря, не свободное, а под действием сил) в сферическом поле тяготения. Следовательно, поверхность сферической массы с любым уравнением состояния вещества (а не только пыль с $P = 0$) после сжатия до размеров, меньших r_g , будет неограниченно сжиматься дальше и за конечное собственное время сожмется в точку $r = 0$, достигнув $C = \infty$. Никакое внутреннее давление в сжимающемся шаре не в состоянии остановить сжатие в T -области. Мы здесь не останавливаемся на вопросах об устойчивости процесса сжатия (см. об этом § 3 гл. 4), о пределах применимости ОТО при больших плотностях и кривизнах C (см. § 6 гл. 4) и о том, что будет дальше со сжимающимся веществом (см. § 6 гл. 4).

Подчеркнем, что лучи света, вышедшие с поверхности тела после пересечения $r = r_g$, не идут к внешнему наблюдателю в R -области, и он о процессах в T -области ничего не узнает. Области разделены границей, называемой «горизонтом событий». Это явление носит название *гравитационного самозамыкания*. Возникающее при этом образование получило в литературе название «черной дыры».

В T -области есть очевидная несимметрия по отношению к направлению течения времени. В рассмотренном нами случае все движения в T -области направлены к $r = 0$, $C = \infty$; обратных движений нет. Такую T -область удобно называть *сжимающейся* и обозначить T_- .

Уравнения ОТО инвариантны относительно выбора знака времени. Если в формулах (3.12.1) — (3.12.5) заменить τ на $-\tau$, то получим второй тип T -области — расширяющуюся T_+ -область с прямо противоположными свойствами (рис. 17). Здесь все тела движутся только от особенности $r = 0$, $C = \infty$ наружу. Лучи света выходят из-под сферы Шварцшильда и не могут в нее войти из R -области. Этот тип T_+ -области в вакууме может быть «сшит» с внутренним решением расширяющегося шара, а не сжимающегося,

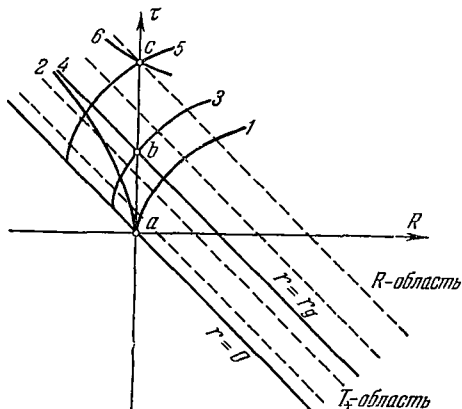


Рис. 17. Пространство — время Шварцшильда в координатах Леметра с расширяющейся T_+ -областью; изображены радиальные лучи, выходящие из событий a , b , c .

как в случае T_- -области. Одновременное сосуществование в одном и том же месте T_- - и T_+ -областей, очевидно, невозможно.

Таким образом, физическое продолжение пространства — времени «внутри» сферы Шварцшильда (T -область) обладает двузначностью. При одном продолжении движение любых пробных частиц и лучей света направлено внутрь от сферы Шварцшильда (T_- -область). При другом продолжении все движения направлены наружу (T_+ -область).

Такая неоднозначность отмечалась неоднократно, но важно подчеркнуть, что выбор между указанными продолжениями решения Шварцшильда в T -область не произволен, а физически определен условиями возникновения этой области (Новиков, 1964с, d). Если она возникает при сжатии шара до размеров, меньших гравитационного радиуса, т. е. поверхность после пересечения сферы Шварцшильда движется внутрь, то по непрерывности и пробные частицы вблизи поверхности должны двигаться внутрь, т. е. возникает T_- -область. Если с самого начала задавать скорости вещества шара с размерами меньше r_g направленными наружу, то решение внутри вещества может быть «спито» только с T_+ -областью в вакууме *).

Рассмотрим теперь, как расширение шара из-под сферы Шварцшильда выглядит для внешнего наблюдателя. При коллапсе наблюдатель на поверхности сжимающейся звезды за конечное собственное время пересекает сферу Шварцшильда и достигает центральной особенности $C = \infty$. Будем рассматривать это явление в обратном порядке по времени. Тогда поверхность звезды, начиная расширяться от точки, за конечное собственное время пересечет сферу Шварцшильда и будет продолжать расширяться дальше. Так как при коллапсе время достижения сферы Шварцшильда для внешнего наблюдателя бесконечно, то, казалось бы, он будет видеть обратный процесс расширения от сферы Шварцшильда тоже бесконечно долгим, и уже не сможет увидеть то, что было до выхода из-под критической сферы.

В действительности это не так. Как уже отмечалось выше, лучи света свободно выходят из T_+ -области, и картина расширения для внешнего наблюдателя не есть обращение во времени картины сжатия, а протекает принципиально иначе [Новиков, Озерной (1963); Фолькнер, Хойл, Нарликар (1964)]. Причина этого состоит в следующем. С математической точки зрения расширение и сжатие являются точным временным обращением друг друга. Однако в любом из этих случаев наблюдатель видит звезду с помощью выходящих лучей света, а обращение времени превращает сходящиеся лучи в расходящиеся, и обратно. Симметрия нарушена.

*) Заметим, что здесь не движение шара определяет T_+ -область, а начальные условия, например, на сингулярности $r = 0$ определяют и расширение всей T_+ -области и расширение шара.

Явление затухания процессов при коллапсе объясняется совместным действием двух эффектов: замедления течения времени в сильном поле и (обобщенным) эффектом Доплера при удалении от наблюдателя поверхности сжимающейся звезды. При расширении поверхности эффект Доплера действует в сторону ускорения для внешнего наблюдателя процессов на звезде. Этот эффект оказывается сильнее, чем замедление процессов в гравитационном поле. Внешний наблюдатель увидит эволюцию начиная не от застывшей картины при $R = r_g$, а увидит весь процесс расширения, начиная с точечных размеров *).

Для случая расширения поверхности шара с параболической скоростью (т. е. со скоростью, обращающейся в нуль на пространственной бесконечности), на рис. 18 приведен график изменения со временем частоты света для луча, приходящего к далекому наблюдателю из центра видимого диска. Через время $t \approx 0,28 r_g/c$ по часам наблюдателя после прихода к нему первых лучей, вышедших в момент начала расширения поверхности от точки, наблюдатель увидит в центре видимого диска лучи, покинувшие поверхность в момент пересечения ею сферу Шварцшильда. Видимая частота этих лучей вдвое больше испущенной. В этот момент наблюдатель видит диск, имеющий угловые размеры $\varphi = 0,43 r_g/r$. Объект, расширяющийся из-под гравитационного радиуса, называют «белой дырой». Как «черные дыры», так и «белые» пока не открыты в природе. Относительно «черных дыр» мы почти уверены, что они должны существовать как конечная стадия эволюции массивных звезд (см. раздел III). Существование «белых дыр» более проблематично (см. гл. 14).

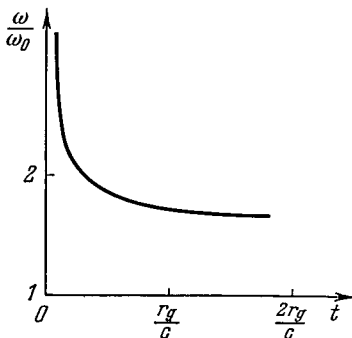


Рис. 18. Изменение частоты света, приходящей к далекому наблюдателю от центра видимого диска шара, который расширяется с параболической скоростью. Момент прихода к наблюдателю первого луча от расширяющегося шара обозначен $t = 0$.

§ 13. Внутреннее решение для нестатического шара

Уравнения Эйнштейна (3.1.2) — (3.1.5) для сферического случая не могут быть решены в аналитическом виде в общем случае, для области внутри вещества с давлением, не говоря уже об учете переноса энергии и т. п. Решать их можно численными методами.

*) А еще раньше наблюдатель (в принципе) видит сингулярность $r = 0$, $C = \infty$.

Впервые такой расчет для сжимающейся звезды был проделан на электронной машине Подурцом (1964) и, независимо, Мейем и Уайтом (1964, а, б; 1966). Однако, как мы видели в предыдущем параграфе, качественные особенности движения поверхности шара в T -области не зависят от уравнения состояния вещества.

Оказывается, что и некоторые важные свойства решения внутри вещества качественно также не зависят от уравнения состояния и могут быть получены при рассмотрении простейшего случая $P = 0$ (пыль). В этом случае уравнения Эйнштейна полностью интегрируются аналитически (Толмен, 1934а, б). Мы приводим здесь это решение [в виде, данном Ландау и Лифшицем (1967)] и некоторые выводы из него, откладывая разбор других следствий до следующего параграфа.

Решение записывается в сопутствующих (лагранжевых) координатах. При отсутствии давления пылинки движутся свободно и, следовательно, $g_{00} \equiv 1$ (см. § 6 гл. 1). Решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 - r^2(R, \tau) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\lambda dR^2, \\ e^\lambda &= \frac{r'^2}{1 + f(R)}, \quad \dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}, \\ \frac{8\pi G\rho}{c^2} &= \frac{F'(R)}{r'r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13.1)$$

Штрих означает дифференцирование по R , точка — по τ ; уравнение для \dot{r} очевидно интегрируется. Решение зависит от двух (после выбора координат) произвольных функций от R *): $f = f(R)$ и $F = F(R)$; из уравнения для e^λ следует: $1 + f > 0$. Эти функции определяют в начальный момент распределение и скорость движения вещества **).

Из (3.13.1) и условия $1 + f > 0$ видно, что при любом выборе F и f величина \dot{r} может обращаться в нуль только при $F/r < 1$, т. е. только в R -области. Легко видеть также, что положительному ρ соответствуют положительные F .

Важным свойством решения Толмена (3.13.1) является следующее. Произвольные функции f и F , определяющие решение, можно задавать начиная от центра шара, где $r \equiv 0$, и дальше по радиусу R . При этом задание функций вблизи центра, скажем, до радиуса R_0 , никак не зависит от того, как будут задаваться функции вне сферы R_0 .

*) В действительности после интегрирования уравнения с \dot{r} появляется еще одна функция от R . Однако если выбран масштаб по оси R (для фиксированного τ), то эта функция уже не произвольна.

**) Если в ходе эволюции r' обращается в нуль, то это означает, что возникает пересечение сферических слоев пылевого вещества.

Иными словами, свойства решения внутри лагранжевой сферы R_0 никак не зависят от распределения и движения (сферически-симметричного!) вещества вне этой сферы. Внешнего вещества может совсем не быть или оно может простирается до бесконечности, это никак не влияет на вещество вблизи центра.

Сделанный вывод и дает основание не рассматривать влияние поля тяготения неограниченно простирающейся материи Вселенной *) на поле вблизи изолированного тела.

Если рассматривать не пыль, а вещество с отличным от нуля давлением, то вывод изменится лишь в том отношении, что при изменении решения вне сферы R_0 внутрь будет распространяться возмущение со скоростью звука. До тех мест, до которых это возмущение еще не успело дойти, решение по-прежнему не зависит от внешнего вещества. Итак, внешнее вещество в сферически-симметричном случае в ОТО (и только в этом случае!) гравитационно не влияет на внутреннее.

Точно так же, как и в теории Ньютона, сферически-симметричное распределение вещества (движущегося только радиально!) не создает гравитационного поля внутри сферической полости. В последнем легко убедиться, так как в вакууме в полости сферическое поле может быть только полем Шварцшильда [Биркгоф (1923); см. § 2 гл. 3], а это поле имеет особенности в центре, чего в пустой полости быть не может.

Сделаем в заключение следующее замечание. В ньютоновской теории внутри полой сферы нет поля, но потенциал ϕ , принимаемый равным нулю на бесконечности, конечно, не нуль. Он равен работе, которую нужно затратить, чтобы удалить частицу из полости на бесконечность. В полости $\phi = \text{const} \neq 0$ и потенциал равен

$$\phi = - \int_{R_1}^{\infty} \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{r}, \quad (3.13.2)$$

где R_1 — внутренняя граница вещества. Добавление сферического слоя вещества к уже имеющейся сфере, конечно, ничего не изменит внутри, не создаст никакого поля, но изменит нормировку потенциала. Если по-прежнему считать, что $\phi_{\infty} = 0$, то внутри добавленной сферы потенциал увеличится на постоянную величину, даваемую интегралом (3.13.2), где R_1 и ρ теперь относятся к добавленной сфере.

То же относится и к величине g_{00} в системе координат Шварцшильда. Эта величина играет роль потенциала. Внутри полости эта величина постоянна, но не равна своему значению на бесконечности: $g_{00} = \text{const} \neq g_{00}|_{\infty}$. Мы вернемся к этому в § 7 гл. 10.

*) Если, конечно, движение этой материи однородно и изотропно. См., например, Я. Б. З е л ь д о в и ч, И. Д. Н о в и к о в, Релятивистская астрофизика, раздел IV книги, «Наука», 1967.

§ 14. Метрика Крускала

Вернемся к решению Шварцшильда в вакууме. Мы видели, что система координат Шварцшильда (3.2.1) применима только в R -области и не охватывает всего пространства — времени. Система Леметра (3.12.1) применима и в R - и в T -области. Однако, как показал Крускал (1960), и эта система в некотором смысле не полна.

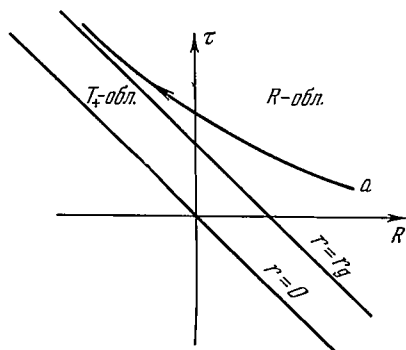


Рис. 19а. Мировая линия свободно падающей частицы (а) в расширяющейся системе Леметра.

Для пояснения сказанного оставим пока в стороне вопрос о «сшивке» решения в вакууме с решением для вещества, создающего поле тяготения и будем продолжать решение в вакууме на максимально возможную мировую область. Такой областью в координатах Леметра R, τ [с T_+ -областью для конкретности, т. е. с заменой $\tau \rightarrow -\tau$ в формулах (3.12.4) — (3.12.5)] является на рис. 19а

полуплоскость правее линии особенности $r = 0$. Охватывает ли эта область все пространство — время, т. е. историю всех движущихся частиц?

Рассмотрим в такой системе частицу, свободно падающую к гравитационному радиусу $r = r_g$. Закон ее движения в расширяющейся системе Леметра записывается в виде ($r_g = 1, c = 1$)

$$\text{const} = R + 2\tau + 4 \left[\frac{3}{2} (R + \tau) \right]^{1/3} + 2 \ln \left| \frac{\left[\frac{3}{2} (R + \tau) \right]^{1/3} - 1}{\left[\frac{3}{2} (R + \tau) \right]^{1/3} + 1} \right|. \quad (3.14.1)$$

Мировая линия этой частицы изображена на рис. 19а. Эта линия асимптотически подходит к $r = r_g$. Но ведь мы знаем (см. § 5 гл. 3), что частица за конечное собственное время достигает $r = r_g$ и движется дальше. Однако расширяющаяся система Леметра не охватывает тех событий в жизни частицы, которые происходят после достижения ею r_g . Следовательно, эта система не полна. Она описывает полностью историю только вылетающих из-под сферы Шварцшильда частиц, но не описывает всей истории падающих частиц. Для сжимающейся системы Леметра (с T_- -областью) сказанное можно повторить для прошлого частицы, летящей от гравитационного радиуса (рис. 19б). Таким образом, система Леметра не охватывает всех событий в сферическом поле тяготения в вакууме и в этом смысле не полна.

Если рассматривать не везде пустое пространство, а шить решение Леметра для вакуума с решением внутри вещества (формула (3.13.1)), то полученное решение будет, разумеется, полным и будет описывать историю всех частиц до ухода в бесконечность или до сингулярности (см. § 6 гл. 4). Рассмотрим, например, однородный пылевой сжимающийся шар, частицы которого на бесконечности имели скорость нуль. Геометрия пространства — времени описывается формулой (3.12.1a) внутри шара и формулой (3.12.1b) вне его.

Принимая во внимание материю, создающую сферическое поле, следует заменить рис. 19б на рис. 19в (область, содержащая материю, заштрихована). В момент $\tau = 0$ материя коллапси-

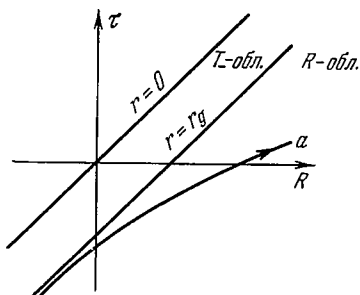


Рис. 19б. Мировая линия улетающей с параболической скоростью частицы (a) в сжимающейся системе Леметра.

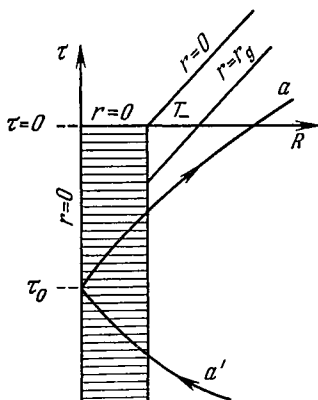


Рис. 19в. Мировая линия aa' падающей и улетающей частицы в сферическом поле тяготения с учетом сжимающейся материи, создающей поле. Область, занятая материей, заштрихована.

рует в точку. Сосредоточим свое внимание на мировой линии $a - a'$ частицы, которая падает внутрь шара из бесконечности, проходит через центр и пересекает противоположную сторону шара прежде, чем шар сожмется до шварцшильдовского радиуса. Мировая линия (рис. 19в) описывает полную историю этой частицы — падение, проход через $r = 0$ в момент $\tau = \tau_0$ и вновь уход в бесконечность. Рис. 19в описывает полную историю всех частиц в пространстве — времени. Таким образом, пространство—время звезды полно.

Решение для взрывающегося шара можно получить из уравнений (3.12.1a) и (3.12.1b), изменяя знак τ . Общая картина, соответствующая рис. 19а, заменится тогда на рис. 19г. Пространство — время в этом случае также полно.

Значительный интерес представляет случай шара, который сжимается не из бесконечности или расширяется не на бесконеч-

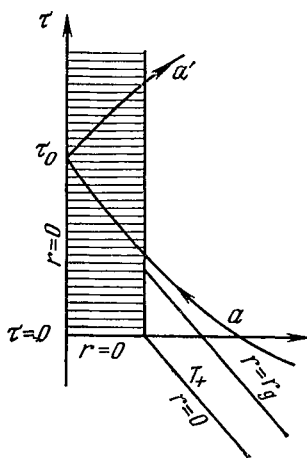


Рис. 19г. Мировая линия aa' падающей и улетающей частицы в сферическом поле тяготения с расширяющейся материей, создающей поле

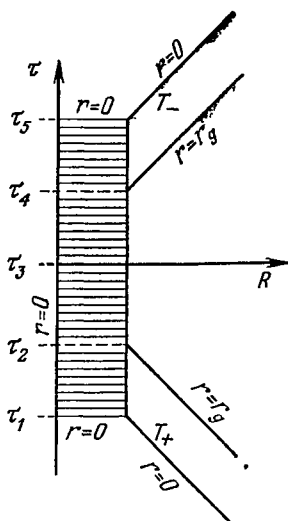


Рис. 19д. Пространство — время для шара, расширяющегося из-под своего гравитационного радиуса. Шар достигает максимальных размеров и снова сжимается под гравитационный радиус

ность, обладая скоростью, меньшей параболической. Такой шар расширяется от нулевого радиуса до максимального радиуса и затем начинает сжиматься. Полное пространство — время для такого шара изображено (качественно; детали см. ниже) на рис. 19д; шар начинает расширяться из точки в момент τ_1 , в момент τ_2 его граница проходит через сферу Шварцшильда, шар достигает максимального радиуса в момент τ_3 , затем, сжимаясь, проходит через сферу Шварцшильда в момент τ_4 и коллапсирует в точку $r = 0$ в момент τ_5 . Это пространство — время, подобно предыдущим, полное. Пространственная бесконечность на рис. 19д расположена справа. Решение в этом случае имеет T_- и T_+ -области, которые, разумеется, расположены в различных частях пространства — времени.

Вернемся к первой задаче параграфа и будем рассматривать пустое везде пространство.

Крускал (1960) первым нашел систему отсчета, полную в том смысле, что она охватывает все события, имеющие место в сферически-симметричном пустом пространстве — времени. Мы приведем здесь (имея в виду дальнейшие приложения) другую систему отсчета [Новиков (1963; 1964d)], обладающую той же полнотой, что и крускаловская, но осуществляющуюся системой свободных пробных частиц (в отличие от системы Крускала, где пробные частицы, ее осуществляющие, движутся не свободно).

Эта система может быть получена из общего решения Толмена (3.13.1). Из последнего уравнения (3.13.1) следует, что в вакууме $F = F_0 = \text{const.}$ Далее, систему отсчета выберем так, чтобы в момент $\tau = 0$, $\dot{r} = 0$ во всем пространстве. Наконец, масштаб радиальной координаты выберем так, чтобы при

$\tilde{\tau} = 0$ $r = r_g (\tilde{R}^2 + 1)^*$, \tilde{R} — безразмерна. Эти условия полностью определяют решение. Функции F и f имеют следующий вид:

$$F = r_g, \quad f = -\frac{1}{\tilde{R}^2 + 1},$$

и решение может быть записано в таком виде:

$$ds^2 = c^2 d\tilde{\tau}^2 - e^\lambda r_g d\tilde{R}^2 - r^2(\tilde{R}, \tilde{\tau}) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.14.2)$$

$$e^\lambda r_g = r'^2 (\tilde{R}^2 + 1) / \tilde{R}^2, \quad (3.14.3)$$

$$\pm \frac{\tilde{\tau} c}{r_g} = -(\tilde{R}^2 + 1) \sqrt{-\frac{r^2/r_g^2}{\tilde{R}^2 + 1} + \frac{r}{r_g}} +$$

$$+ (\tilde{R}^2 + 1)^{1/2} \left[\arcsin \sqrt{\frac{r/r_g}{\tilde{R}^2 + 1}} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.14.4)$$

Последнее уравнение определяет функцию $r = r(\tilde{R}, \tilde{\tau})$. Напишем уравнение истинной особенности $r = 0$ и гравитационного радиуса $r = r_g$ в нашей системе координат. Эти условия запишутся, соответственно, в виде

$$r = 0, \quad \frac{\tilde{\tau} c}{r_g} = \pm \frac{\pi}{2} (\tilde{R}^2 + 1)^{1/2}, \quad (3.14.5)$$

$$r = r_g, \quad \pm \frac{\tilde{\tau} c}{r_g} = -(\tilde{R}^2 + 1) \sqrt{1 - \frac{1}{\tilde{R}^2 + 1}} +$$

$$+ (\tilde{R}^2 + 1)^{1/2} \left[\arcsin \sqrt{\frac{1}{\tilde{R}^2 + 1}} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.14.6)$$

Исследуем полученное решение.

Каждая частица, имеющая фиксированное $\tilde{R} = \text{const} = \tilde{R}_0$, начинает свою историю с истинной особенности $r = 0$ в момент, определяемый уравнением (3.14.5) со знаком (—). Она движется в T_+ -области от $r = 0$ к $r = r_g$, выходит из-под сферы Шварцшильда $r = r_g$ в момент $\tilde{\tau}$, определяемый (3.14.6), достигает в момент $\tilde{\tau} = 0$ наибольшего удаления r , определяемого соотношением

$$r = r_g (\tilde{R}^2 + 1),$$

*) Если $\dot{r} = 0$, то r не может быть меньше r_g , ибо в T -области невозможно $\dot{r} = 0$, так как тогда из (1.13.1) следует, что $g_{11} > 0$, что нарушает сигнатуру метрики (см. § 12 и 13 гл. 3 и подробнее работу Новикова, 1964d). Определяющая масштаб функция от R , стоящая в скобках в выражении в тексте, может выбираться в высокой степени произвольно. Однако она должна иметь лишь один минимум (равный единице) и быть монотонной по обе стороны минимума, при $|\tilde{R}| \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$. Мы выбрали простейшую функцию $\tilde{R}^2 + 1$, удовлетворяющую этим требованиям.

затем снова начинает падать к сфере Шварцшильда, достигает ее в момент \tilde{t} , определяемый в (3.14.6) знаком минус, и вновь достигает $r = 0$ в момент

$$c\tilde{t} = \frac{\pi}{2} (\tilde{R}^2 + 1)^{1/2} r_g.$$

Картина расположения R - и T -областей в координатах \tilde{R} и \tilde{t} изображена на рис. 20. Во-первых, легко видеть, что система обла-

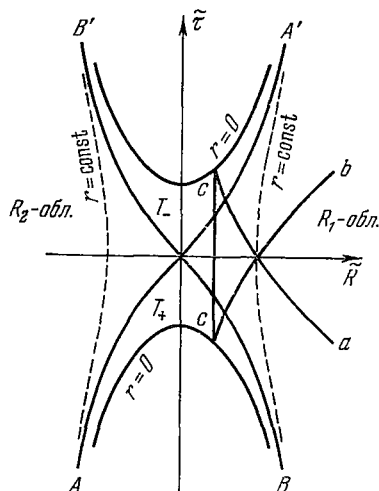


Рис. 20. Пространство — время Крускала. AA' и BB' — линии $r = r_g$; они являются границами R - и T -областей; a , b , c — мировые линии свободных частиц, a — падающей, b — улетающей, c — движущейся с эллиптической скоростью. Пунктирные кривые — линии $r = \text{const}$.

дает свойством полноты: любая мировая линия свободной частицы либо начинается и (или) заканчивается на истинной особенности $r = 0$ либо неограниченно идет в бесконечность. Система охватывает всю историю частиц.

Далее, расширяющаяся система Леметра охватывает только часть изображенного на рисунке пространства — времени, а именно, правее линии AA' (либо левее BB'). Соответственно сжимающаяся система охватывает область правее BB' (либо левее AA').

Наиболее поразительным в нарисованной картине является наличие двух R -областей, R_1 и R_2 . Они соответствуют двум пространствам, евклидовым на бесконечности, соединенным через узкую «горловину» ($\tilde{R} = 0$) — сферу минимального (в данный момент $\tilde{t} = \text{const}$) радиуса *). Радиус «горловины» меняется, увеличиваясь

от нуля до r_g и снова уменьшаясь до нуля.

Мировые линии покоящегося в системе Шварцшильда наблюдателя $r = \text{const}$ в R_1 - и R_2 -областях изображены на рис. 20. Эти линии охватывают время наблюдателя от минус бесконечности до плюс бесконечности.

Никакой сигнал не может попасть из области R_1 в R_2 и наоборот **). Наблюдатели не могут получить никакой информации из «другой» R -области.

*) Такого рода топология пространства рассматривалась Фламмом (1916), Вейлем (1917), Эйнштейном и Розеном (1937), но в проведенном ими анализе два шварцшильдовских пространства сшивались на сфере Шварцшильда, а нестационарная внутренняя область не исследовалась.

**) Из T_+ можно попасть во все три области T_- , R_1 и R_2 . Из R_1 и R_2 только в T_- , но ни в какую другую. Из T_- вообще нельзя выйти, все другие области лежат для нее в абсолютном прошлом,

На рис. 21а изображено значение $\tilde{r} = r(\tilde{R})$ как функции лагранжева радиуса в разные моменты времени $\tilde{\tau}$. Величина $4\pi r^2$ является площадью сферы, охватывающей центр симметрии. Момент $\tilde{\tau}_0 = 0$, $\dot{r} = 0$ есть момент максимального расширения системы отсчета. В этот момент нигде в пространстве нет сферы с $r < r_g$.

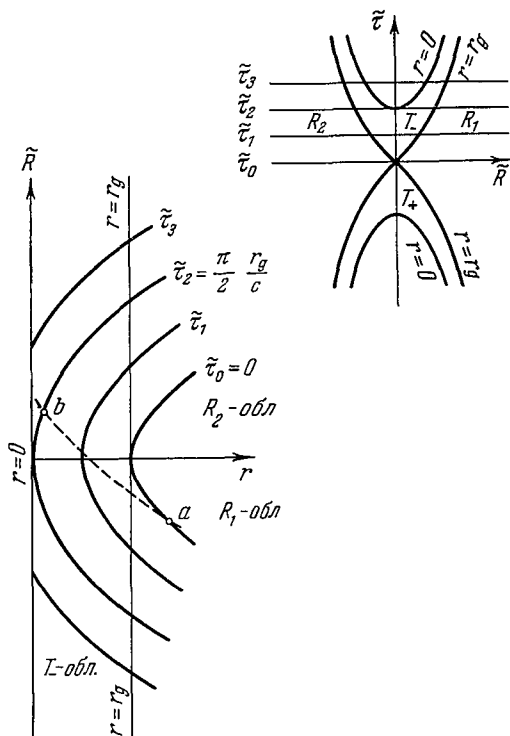


Рис. 21а. Радиус сферы r как функция лагранжева радиуса \tilde{R} в разные моменты времени $\tilde{\tau}$. Вверху справа — пространственные сечения, для которых изображены на левом рисунке зависимости $r = r(\tilde{R})$. Пунктир ab — движение пробной частицы.

В следующий момент $\tilde{\tau}_1$ система сжимается, и минимальный радиус горловины меньше r_g . При $\tilde{\tau}_3 > \frac{\pi}{2} \frac{r_g}{c}$ пространственное сечение $\tau = \text{const}$ уже двусвязно *). В области T_- -частицы и фотоны движутся только справа налево на рис. 21а. Очевидно, что из R_1 нельзя попасть в R_2 (и наоборот).

Полученные выводы о двух евклидовых пространствах, соединенных узкой горловиной, кажутся весьма странными, и на первый

*) Для $\tilde{\tau} < 0$ картина протекает в обратном порядке.

взгляд пространство с такой топологией представляется математическим курьезом, не имеющим физического смысла.

Сразу же оговоримся, что метрика Крускала имеет ясный физический смысл [Новиков (1963); Уилер, Гаррисон, Вакано, Торн (1967)]. Два евклидовых на бесконечности пространства получились вследствие того, что мы использовали решение для поля тяготения, созданного веществом, а сшивки с веществом не произвели. В действительности как можно показать, при сшивке решения для метрики Крускала для вакуума с решением для вещества наличие горловины, зависящей от времени, не приводит ко второму евклидову пространству. Здесь мы лишь кратко поясним это.

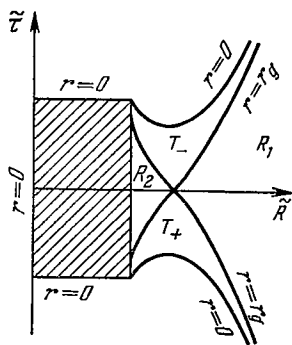


Рис. 216. Пространство — время Крускала с веществом, создающим поле. Энергии вещества недостаточно для выхода в область внешнего наблюдателя. Область, занятая материей, заштрихована.

Возникает, если энергии движения расширяющегося шара не хватает для расширения до пересечения его поверхностью $r=r_g$ внешнего наблюдателя и выходу в R -область этого наблюдателя. Но мы знаем, что смена расширения сжатием невозможна в T -области. Граница шара выходит за пределы T_+ -области (см. рис. 216) в некоторый момент и попадает во «внутреннюю» R_2 -область (но не выходит из-под r_g к внешнему наблюдателю!), достигает максимального размера в момент $\tilde{t} = 0$ и затем снова сжимается. Образование, изображенное на рис. 216, называют полужамкнутым миром. Его можно было бы так же назвать «серой дырой», так как он сочетает в себе особенности «белых» и «черных» дыр.

В литературе появляются работы [см., например, Уилер (1955); Андерсон, Гаутроу (1966); Белинфанте (1966); Израэль (1967)], в которых авторы пытаются «избавиться» от второй области без рассмотрения сшивки вакуумного решения с веществом. Одним из таких направлений является попытка Уилера (1955) дать следующую топологическую интерпретацию метрике Эйн-

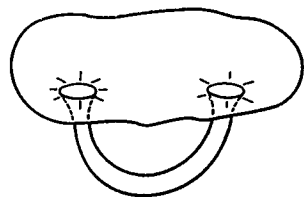


Рис. 22. Топологическая ручка Уилера.

штейна и Розена (1937), топологически подобной метрике Крускала. Горловина (или «ручка», как называет ее Уилер, следуя топологической терминологии) связывает две области одного и того же физического пространства, чрезвычайно удаленные друг от друга (см. рис. 22, где изображена двумерная аналогия трехмерного пространства в некоторый момент). Такая топология требует наличия «исконно геометродинамических объектов», неизвестных физике. Уилер полагает, что такие объекты имеют отношение к природе элементарных частиц и античастиц и связи между ними. Однако эта идея — еще «не созревший плод», в известной нам природе нет макроскопических «геометродинамических объектов». Поэтому мы на такой возможности останавливаться не будем.

Другие авторы [Андерсон, Гаутроу (1966); Белинфанте (1966); Израэль (1967)] «избавляются» от второй R -области более радикальным путем — ценой отказа от принципа причинности (!) в T - и R -области вблизи r_g . Суть этих работ состоит в следующем.

Отождествим на рис. 23 точки с координатами \bar{R} , $\bar{\tau}$ и $-\bar{R}$, $-\bar{\tau}$ и посмотрим, к каким физическим выводам это приведет. Будем из R_1 -области (R_2 теперь отображено на R_1 !) посылать лучи к r_g (см. рис. 23). После достижения $r = 0$ в точках A, B, C фотоны «отражаются» от $r = 0$ и из $A' \equiv A, B' \equiv B, C' \equiv C$ идут к r_g выходят в R -области и снова встречаются сами с собою в прошлом в точках D, E, F .

Можно показать, что такие встречи фотонов всегда происходят при $r = r_0 \approx 1,28 r_g$ *). Таким образом, нарушается принцип причинности. Однако эти нарушения происходят только при $r < r_0$. Если $r > r_0$, то фотон или частица с массой покоя, не равной нулю, «отразившись» от $r = 0$, вернется к тому же r уже в момент более поздний, чем момент испускания, и тогда нарушения причинности нет.

В T -области ситуация в этой гипотезе еще более «тяжелая»: там не только нет причинности, но и нельзя однозначно определить направление течения времени. Так, фотон из точки B' движется влево до G' . Это означает то же, что он от B движется к G , т. е.

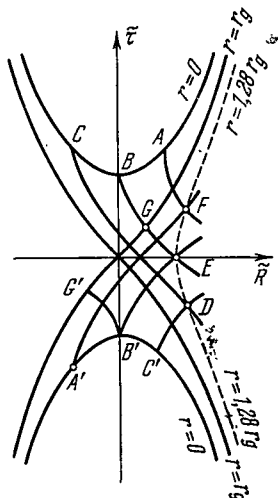


Рис. 23. Мировые линии световых лучей в пространстве — времени Крускала с отождествлением $\bar{R}, \bar{\tau} \rightarrow -\bar{R}, -\bar{\tau}$. Обозначения см. в тексте.]

*) r_0 есть корень уравнения $\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{-r/r_g} = 1$.

«вспять» по времени, по отношению к фотону EGB . Достигнув $G' \equiv G$, он не может выйти в R -область (где направление времени определено!) и падает снова к $B \equiv B'$, повторяя «вспять» свою же историю. Аналогичная ситуация имеет место и для частиц с $m_0 \neq 0$. Итак, причинность нарушается, хотя и только в области с $r < r_0$.

С такой интерпретацией метрики Крускала нельзя согласиться по многим причинам. Во-первых, если луч света проходит через T -область более одного раза, причинность может нарушаться на радиусах $r > r_0 \approx 1,28 r_g$, так же как и на $r < r_0$. В частности, если луч, выходящий из T -области, отражен назад к центру при $r < r_0$ (но $r > r_g$), то после вторичного пересечения лучом T -области он может встретить наблюдателя, испустившего этот луч в $r > r_0$ до момента испускания. Во-вторых, гипотеза противоречит основе ОТО — принципу эквивалентности (см. § 1 гл. 1). Согласно этому принципу, пространство — время локально лоренцево. В свободно падающей системе тяготение локально никак не проявляется, и в T -области, точно так же как и везде в малой окрестности любого события, можно ввести локально лоренцеву систему, в которой соблюдается причинность и световым конусом определено направление от прошлого к будущему. В-третьих, симметрия картинки на рис. 23 и возможность отождествления $\tilde{R}, \tilde{t} \rightarrow -\tilde{R}, -\tilde{t}$ имеют место только при полном отсутствии вещества. Если же мы рассмотрим реальную задачу возникновения T -области при сжатии разреженного первоначального вещества, то вся область рис. 20, лежащая левее линии a -границы сжимающегося шара, находится в веществе. Там решение для вакуума неприменимо, надо рассматривать решение в веществе и манипуляции с отождествлением невозможны.

Мы не будем задерживаться дальше на упомянутой гипотезе. В заключение еще раз напомним, что правильная с нашей точки зрения физическая интерпретация метрики Крускала была дана выше.

ГЛАВА 4

НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Введение

В предыдущей главе исследованы важнейшие свойства сферического поля. Ясно, что в реальных задачах условие сферической симметрии выполнено лишь с определенной точностью. Поэтому возникает вопрос, насколько полученные выводы являются общими, не связанными специально с симметрией задачи.

Для этого надо рассмотреть несферические поля тяготения. В общем случае эта задача необычайно сложна. Движение несимметричных масс сопровождается изменением поля, излучением гравитационных волн и т. п. Однако некоторые важные аспекты этой проблемы можно изучить, исследуя малые отклонения от сферической симметрии; это позволяет применить метод малых возмущений и сильно упрощает исследование.

В приложениях к астрофизическим задачам наибольший интерес представляют отклонения от сферической симметрии, связанные с вращением звезды, т. е. отклонения с сохранением осевой симметрии. Разумеется, сохранение осевой симметрии также значительно упрощает математические вычисления и позволяет в ряде случаев получить точные частные решения без предположения о малости отклонений от сферической симметрии.

Следующие три проблемы, связанные с отклонениями от сферической симметрии, имеют большое значение для астрофизики:

1. Как будут изменяться с течением времени малые флуктуации материи и гравитационного поля в однородном и изотропном расширяющемся или сжимающемся веществе *)?

2. Как повлияет вращение сверхплотной звезды на ее гравитационное поле?

3. Как будет проходить гравитационное сжатие вращающейся сплюснутой звезды при уменьшении ее размеров до $R \sim r_g = \frac{2GM}{c^2}$?

*) Движение при условии однородности и изотропии, очевидно, можно считать сферически-симметричным.

Сохраняются ли в этом случае качественные выводы, полученные для сферического случая в §§ 4, 5, 9, 10, 12 предыдущей главы?

Первая проблема имеет важнейшее значение для космологии. Интересующихся отсылаем к нашей книге «Строение и эволюция Вселенной». Две другие проблемы связаны с релятивистскими стадиями эволюции звезд и звездных систем. В этой главе будут рассмотрены свойства сильного поля тяготения вращающейся звезды и свойства поля тяготения сжимающегося тела с отклонениями от сферической симметрии и вращающегося. Применение выводов к физике звезд будет дано во втором разделе книги.

Мы начнем с исследования стационарных решений. Поле вращающейся статической звезды является стационарным. Кроме того, оказывается, что многие выводы об изменении поля при сжатии несферического тела также следуют из рассмотрения стационарных решений. Метод малых возмущений рассмотрен Редже и Уилером (1957), внешнее поле вращающегося тела найдено Керром (1963). В изложении мы следуем в основной работе Дорошкевича, Зельдовича, Новикова (1965) (в которой развиваются результаты Редже и Уилера) и, как правило, не ссылаемся в дальнейшем на нее, приводя полученные там результаты.

§ 2. Статическое поле с аксиальной симметрией

Статическая задача для аксиально-симметричного поля в вакууме была решена Эрецом и Розеном (1959) с помощью метода Вейля (1917; 1919). Выражение интервала для поля квадрупольа с исправленной ошибкой, вкравшейся в работу Эреца и Розена, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = e^{2\psi} dt^2 - m^2 e^{2\gamma - 2\psi} (\lambda^2 - \mu^2) & \left(\frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - 1} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2} \right) - \\
 & - m^2 e^{-2\psi} (\lambda^2 - 1) (1 - \mu^2) d\varphi^2, \\
 \psi = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{4} q (3\lambda^2 - 1) (3\mu^2 - 1) \right] \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{3}{2} q \lambda (3\mu^2 - 1) \right\}, \\
 \gamma = \frac{1}{2} (1 + q + q^2) \ln \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} - \frac{3}{2} q (1 - \mu^2) & \left[\lambda \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + 2 \right] + \\
 + \frac{9}{4} q^2 (1 - \mu^2) \left[(\lambda^2 + \mu^2 - 1 - 9\lambda^2 \mu^2) \frac{\lambda^2 - 1}{16} \ln^2 \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \right. \\
 \left. + (\lambda^2 + 7\mu^2 - \frac{5}{3} - 9\mu^2 \lambda^2) \frac{\lambda}{4} \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{1}{4} \lambda^2 (1 - 9\mu^2) + \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.2.1}$$

Здесь m — масса тела, создающего поле, q — параметр, характеризующий квадрупольный момент. Единицы измерения выбраны

так, что $c = 1$, $G = 1$. Поле Шварцшильда — частный случай приведенного решения и соответствует $q = 0$, когда функции ψ и γ принимают значения

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Преобразование к координатам, которые на бесконечности являются сферическими и при $q = 0$ переходят в обычные шварцшильдовские, осуществляется заменой *):

$$\lambda = \frac{r}{m} - 1, \quad \mu = \cos \theta.$$

Рассмотрим физические свойства решения (4.2.1).

Назовем *поверхностью Шварцшильда* S_m в стационарном поле (т. е. при $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \equiv 0$) такую поверхность, на которой $g_{00} = 0$. На этой поверхности: 1) красное гравитационное смещение квантов, уходящих от неподвижного излучателя на бесконечность, становится бесконечно большим, а энергия квантов стремится к нулю; 2) с приближением к S_m ход покоящихся часов, синхронизованных по любому пути с часами на бесконечности, стремится к нулю; 3) обращается в бесконечность гравитационно-инерциальная сила F (см. § 6 гл. 1). Свойства 1), 2) и 3) тесно связаны друг с другом. В поле Шварцшильда, как известно (см. § 2 гл. 3), S_m — это сфера с радиусом кривизны (в единицах, где $G = 1$, $c = 1$) $r_g = 2m$. Длины окружностей на S_m в аксиально-симметричном поле при условии $\mu = \text{const}$ или, что то же, $\theta = \text{const}$, равны $2\pi \sqrt{g_{33}}$. В случае сферы эти линии являются параллелями и их длина $l \sim \sqrt{g_{33}} \sim \sqrt{1 - \mu^2}$. В решении (4.2.1) поверхности $g_{00} = 0$ соответствует $\lambda = 1$. При $g_{00} \rightarrow 0$ компонента g_{33} имеет асимптотический вид

$$g_{33} = A(1 - \mu^2) g_{00}^{-\frac{q(3\mu^2 - 1)}{2 + q(3\mu^2 - 1)}},$$

где A — ограниченная функция μ ($0 < A < \text{const}$); эту функцию мы ради краткости не выписываем. Если $q \neq 0$, то при $g_{00} \rightarrow 0$ и $q > 0$

$$g_{33} \rightarrow \infty \quad \text{для} \quad 1 \geq \mu^2 > \frac{1}{3},$$

$$g_{33} \rightarrow 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq \mu^2 < \frac{1}{3}.$$

*) При отсутствии сферической симметрии выбор удобной координаты r в значительной степени произволен; ее можно было бы определить не так, как в тексте, а, например, как произвольную функцию g_{00} .

Для случая $\mu^2 = 1/3$ при стремлении $g_{00} \rightarrow 0$, g_{33} остается константой.

Каждая поверхность $g_{00} = \text{const}$ замкнута. Вдали от источника поля — это сферы (рис. 24а). При уменьшении g_{00} форма поверхности искажается. При $q > 0$ поверхность превращается в две вытянутые по полярной оси «груши», соединенные перемычкой (см. рис. 24а). Каждая поверхность с меньшим $g_{00} = \text{const}$ лежит внутри предыдущей с большим g_{00} . Благодаря кривизне пространства при уменьшении g_{00} площади последовательности вложенных поверхностей, пройдя через минимум, начинают воз-

растать и при $g_{00} \rightarrow 0$ площади стремятся к бесконечности, а сами поверхности стремятся к предельной двухполостной поверхности $\mu^2 = 1/3$. Каждая из полостей замыкается на бесконечности. Еще раз подчеркнем, что эта предельная бесконечная поверхность g_{00} лежит внутри любой поверхности $g_{00} = \text{const} \neq 0$, имеющей конечную площадь.

Аналогичные выводы следуют для случая $q < 0$. Только здесь в пределе $g_{33} \rightarrow \infty$ при $0 < \mu^2 < 1/3$ и $g_{33} \rightarrow 0$ при $\mu^2 > 1/3$.

Следовательно, в данном поле при сколь угодно малом $|q|$ поверхность S_m очень сильно отличается по своим геометрическим свойствам от сферы Шварцшильда.

Как подчеркивалось, в поле Шварцшильда на S_m не было особенности пространства — времени и $C = R_{klm}^i R_i^{klm} = 12/r_g^4 \neq \infty$. В решении (4.2.1) скаляр C имеет при $\mu = 0$ следующий асимптотический вид: при $g_{00} \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$

$$C = Aq^2 g_{00}^{-1} + \frac{12}{r_g^4}, \quad A = \text{const.}$$

Здесь написан главный расходящийся член и член, остающийся при $q = 0$. Следовательно, при сколь угодно малом, но отличном от нуля q на поверхности S_m появляются истинные особенности пространства — времени.

Рассмотрим свойства световых лучей в поле (4.2.1). В силу симметрии лучи света при $\mu = 0$ и $\mu^2 = 1$, имеющие начальное направление по радиусу, будут все время двигаться в этом направлении. Вблизи S_m время распространения света от некоторой

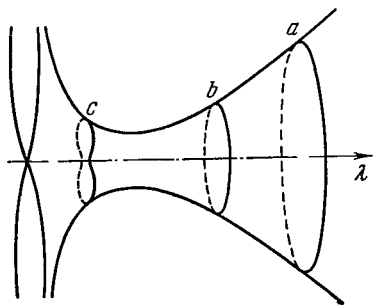


Рис. 24а. Двумерная поверхность, вертикальные сечения которой $\lambda = \text{const}$ дают меридиональные сечения поверхности $g_{00} = \text{const}$ в решении Эрен и Розена (1959). Точки a, b, c — полюсы вложенных друг в друга поверхностей $g_{00} = \text{const}$; меньшие λ соответствуют внутренней поверхности. Точки a, b, c лежат в пространстве на одной прямой.

точки с $\lambda = \lambda_0$ до S_m

при $\mu = 0$ (экватор), $t_0 = \text{const } (\lambda_0 - 1)^{q/8}$,

при $\mu^2 = 1$ (полюс), $t_0 = \text{const } (\lambda_0 - 1)^{-q}$, $q < 0$.

Таким образом, в отличие от поля Шварцшильда, время распространения света до S_m для внешнего наблюдателя конечно *).

Рассмотренные выводы, и, в частности, конечное время распространения света до S_m не являются свойством специально квадрупольного отклонения от сферической симметрии. Покажем, что они являются общими для любого статического аксиально-симметричного решения.

Уравнения тяготения для аксиально-симметричного статического поля в вакууме могут быть записаны в виде [(Вейль (1917; 1919)]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = \rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (4.2.4)$$

Координаты ρ, z связаны с координатами λ, μ , используемыми выше выражениями $\rho = m \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}$, $z = m\lambda\mu$. Уравнение для ψ совпадает с уравнением для потенциала в плоском пространстве в цилиндрических координатах.

Для источника вида **) $\sigma = \sigma(z) \delta(\rho)$, где $\delta(\rho)$ — дельта-функция, решение (4.2.2), очевидно, есть потенциал нити с линейной плотностью $\sigma = \sigma(z)$ в плоском пространстве. Вблизи $g_{00} = 0$ функции ψ и γ записываются следующим образом ***):

$$\psi = \sigma(z) \ln \rho, \quad \gamma = \sigma^2(z) \ln \rho,$$

где $\sigma(z)$ произвольна. Асимптотическое выражение для метрики:

$$ds^2 = \rho^{2\sigma} dt^2 - \rho^{2\sigma(\sigma-1)} (d\rho^2 + dz^2) - \rho^{2(1-\sigma)} d\varphi^2.$$

Свойства этой метрики аналогичны разобранным выше. В частности, от точки с координатами ρ_0, z_0, φ_0 , двигаясь вдоль линии $z = z_0, \varphi = \varphi_0$ со скоростью, достаточно близкой к световой,

*) Исключением является случай $\mu^2 = 1, q > 0$, когда это время будет степенной бесконечностью.

**) Источник только такого вида на конечных расстояниях от особой поверхности дает малые отклонения от сферического решения.

***) Исключение представляет вырожденный случай «точечной особенности» (см. Дж. Л. Синг, 1960, стр. 69, формула (1)),

можно за время $t = \rho_0^{(\sigma(z_0)-1)^2} \frac{1}{(\sigma(z_0)-1)^2}$ по часам внешнего наблюдателя добраться до $g_{00} = 0$.

Несферическую задачу в вакууме Редже и Уилер (1957) рассматривали методом малых возмущений, наложенных на шварцшильдовское решение. Из решения уравнений для малых возмущений, данного Редже и Уилером, видно, что в статическом случае любое возмущение, убывающее на бесконечности, неограниченно растет при приближении к сфере Шварцшильда невозмущенной задачи, т. е. обладает теми же особенностями, что и рассмотренные выше точные решения.

Резюмируем выводы: при бесконечно малом отклонении от сферической симметрии вдали от S_m сама S_m очень сильно отличается от сферы Шварцшильда, становясь к тому же истинной особенностью пространства — времени; время распространения света до S_m для внешнего наблюдателя конечно (см. Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1965) и более подробно Израэль (1967)).

Однако может ли быть реализовано решение с $q \neq 0$ во всей области, вплоть до $g_{00} = 0$? В части этой области, где $g_{00} > 0$, это решение реализуется как внешнее поле статического тела с квадрупольным распределением масс. Но статическое тело заведомо не может иметь на поверхности $g_{00} = 0$ уже потому, что тогда обращается в бесконечность гравитационная сила. Следовательно, статическое тело не может реализовать решение для вакуума во всем пространстве, вплоть до $g_{00} = 0$. Не может быть реализовано это решение и не статическим телом, с малыми в начале сжатия отклонениями от сферической симметрии, ибо, как мы увидим в § 5, при коллапсе в сопутствующей системе отсчета момент перехода границей тела S_m ничем не выделен: в этот момент на поверхности тела нет истинных особенностей пространства — времени ($C \neq \infty$), а в рассматриваемом решении они есть. Следовательно, исследованные решения не являются предельными для коллапса несферической массы. Итак, реализовать решение с $q \neq 0$ во всей области, вплоть до $g_{00} = 0$, невозможно, и продолжать поле в вакууме внутрь поверхности $g_{00} = 0$ нельзя. Появление истинных особенностей здесь вполне аналогично появлению их при попытке рассчитать поле двух покоящихся масс (Паули, 1958). Это связано в том, что уравнения поля одновременно есть уравнения движения. Появление истинной особенности здесь означает, что такое распределение масс реализовано быть не может. Этот факт будет ключевым в дальнейшем при обсуждении коллапса несферических тел.

Вырожденный случай сферической симметрии ($q = 0$) отличается тем, что здесь при $g_{00} = 0$ никаких истинных особенностей нет. Радиальные деформации шара не меняют внешнее поле. Поэтому решение для вакуума по всей области, включая $g_{00} = 0$,

в статической системе отсчета может быть осуществлено нестационарным (сжимающимся или расширяющимся) шаром с размером меньше критической сферы S_m . Поле в вакууме в этом случае может быть продолжено внутрь сферы S_m (в T -область).

§ 3. Внешнее поле вращающегося тела; метрика Керра

Рассмотрим теперь отклонения от сферической симметрии, связанные не с изменением распределения масс в источнике поля, а с вращением. Влияние вращения в случае слабого поля подробно рассмотрено в § 9 гл. 1. Здесь мы рассмотрим роль вращения, когда не выполняется условие слабости поля $\varphi \ll c^2$.

Начнем с рассмотрения точного частного решения, полученного Керром (1963). У тела, частицы которого обладают только вращательными движениями вокруг оси симметрии, во внешнем поле в подходящей системе координат из недиагональных компонент метрики отлична от нуля только g_{03} (поле медленно вращающегося шара см. далее). Это сразу следует из соображений симметрии и эквивалентности прошлого и будущего. Решение Керра может быть приведено к такому виду заменой первоначальной системы координат Керра новой [см. Бойер и Линдквист (1967)]. В этой новой системе отсчета выражение для ds^2 имеет такой вид:

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{2mr (dt + a \sin^2 \theta d\varphi)^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{dr^2}{r^2 - 2mr + a^2} + d\theta^2 \right). \quad (4.3.1)$$

Единицы выбраны так, что $G = 1$, $c = 1$; m — масса тела, $K = -am$ — полный момент. Решение Керра записано так, что при $a = 0$ оно переходит в решение Шварцшильда.

Анализ решения Керра [Керр (1965); Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1965); Бойер, Прайс (1965); Картер (1965; 1966; 1968); Бойер и Линдквист (1967); Де Фелис (1968); Вишневскара (1968); Пенроуз (1969); Годфрей (1970); Кристодуло (1970); Руфини, Уилер (1970); Кристодуло, Руфини (1971)] приводит к следующим выводам.

Поверхность $g_{00} = 0$ в этом случае не представляет собой «клапан», пропускающий только в одном направлении свет и частицы — «горизонт событий», как это было в сферическом случае: световые лучи могут выходить из нее к внешнему наблюдателю [(см. Картер (1966) и Вишневскара (1968)]. Однако «односторонний клапан» здесь есть, эта поверхность локализована внутри поверхности $g_{00} = 0$. Имея дело с метрикой Керра, мы будем сохранять обозначения S_m для поверхности $g_{00} = 0$. Поверхность одностороннего «клапана» мы будем называть «горизонтом событий» и обозначать ее $S_{\text{гор}}$.

Уравнения для этих поверхностей таковы:

$$r_{S_m} = m + (m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \text{ для } S_m,$$

$$r_{S_{\text{гор}}} = m + (m^2 - a^2)^{1/2} \text{ для } S_{\text{гор}}.$$

Обсудим свойства S_m .

1) При сколь угодно малом, но отличном от нуля a , длины «параллелей» L на поверхности $g_{00} = \text{const}$ (эти длины пропорциональны $\sqrt{-g_{33} + (g_{03}^2/g_{00})}$ при $\theta = \text{const}$) стремятся к бесконечности при $g_{00} \rightarrow 0$. Асимптотическая формула:

$$L = 2\pi \frac{a \sin^2 \theta}{\sqrt{g_{00}}}.$$

2) Прецессия гироскопа вдали от тела определяется известным выражением (см. § 10 гл. 1): $\Omega^2 = \frac{c^2 a^2 r^2}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}$ в локальном времени. Вблизи S_m прецессия в локальном времени стремится к бесконечности. Точная формула такова:

$$|\Omega| = \frac{|a| mc}{\rho^5 g_{00}} \{4r^2 \Delta \cos^2 \theta + (r^2 - a^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta\}^{1/2},$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2mr.$$

Асимптотики: 1) $|\Omega| \sim |a|/\sqrt{g_{00}}$, $\theta = 0, \pi$; 2) $|\Omega| = |a|/\sqrt{g_{00}}$, $\theta \neq 0, \pi$.

Последняя формула, дающая выражение прецессии вблизи $g_{00} = 0$ при всех полярных углах, кроме $0, \pi$, не переходит непосредственно в выражение прецессии на полюсе, так как при этом обращается в нуль весь член данного порядка по g_{00} из-за угловой зависимости.

3) Скаляр кривизны $C = R_{iklm} R^{iklm}$, в отличие от предыдущего типа отклонений от сферической симметрии (см. § 2 гл. 4), не имеет особенностей на S_m и $S_{\text{гор}}$ и, в частности, на экваторе, как и в решении Шварцшильда на S_m , имеем

$$C = 12/r_{S_m}^4; \quad r_{S_m} = 2Gm/c^2.$$

В этом решении поле в вакууме можно продолжать внутрь S_m и внутрь $S_{\text{гор}}$. Особенность пространства — времени в решении Керра имеется на экваторе при $r = 0$, где $C = \infty$.

4) Луч света, идущий к S_m в направлении полюса, достигает S_m (и $S_{\text{гор}}$) за логарифмически бесконечное время внешнего наблюдателя. Луч, идущий в плоскости экватора, достигает S_m за конечное время за исключением вырожденных случаев, (Синхронизация часов ведется вдоль лучей.)

5) При синхронизации часов вдоль экватора на поверхности $g_{00} = \text{const}$ разность в показании часов $\left(\Delta\tau = \frac{g_{03}}{\sqrt{g_{00}}} 2\pi\right)$ при возвращении в исходную точку стремится к бесконечности пропорционально $g_{00}^{-1/2}$, когда $g_{00} \rightarrow 0$.

Вернемся к рассмотрению движения частиц и лучей света в метрике Керра (обзор см. Руффини, Уилер (1970)1. Прежде всего подчеркнем, что на поверхности S_m (т. е. $g_{00} = 0$) и внутри нее никакая частица не может оставаться в покое по отношению к жесткой системе отсчета, связанной с покоящимся удаленным наблюдателем. Таким образом, жесткая система отсчета из пробных частиц не может простирается от бесконечности внутрь S_m . В системе координат (4.3.1) линия $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ при $r < r_{S_m}$ не времениподобна, как и в системе Шварцшильда. Однако имеется существенное отличие от метрики Шварцшильда. В метрике Шварцшильда частица внутри S_m не могла иметь $r = \text{const}$. В метрике Керра при $r < r_{S_m}$ (но $r > r_{S_{\text{гор}}}$) для

реальной частицы невозможно $\varphi = \text{const}$, но $r = \text{const}$ для реальной частицы возможно. Таким образом, частица обязана совершать вращательное движение по отношению к далекому наблюдателю, но возможно движение как с постоянным r , так и с увеличением r или уменьшением r в области между поверхностями S_m и $S_{\text{гор}}$. В частности, из-под S_m может выходить свет. Область $r_{S_{\text{гор}}} < r < r_{S_m}$ носит название эргосферы. Лишь при $r < r_{S_{\text{гор}}}$ невозможно $r = \text{const}$ и движение вдоль r «одностороннее».

Рассмотрим теперь движение частиц в экваториальной плоскости метрики Керра. Особенности движения легко анализируются тем же методом, что и для поля Шварцшильда (см. §§ 6—10). В метрике Керра уравнение потенциальной кривой, аналогичной кривой, изображенной на рис. 10 для метрики Шварцшильда, имеет вид

$$E^2 (r^3 + a^2 (r + 1)) - 2Eaa_* + (1 - r) a_*^2 - r^2 (r - 1) - a^2 r = 0.$$

Здесь $r_{S_m} = 1$, a_* — момент импульса пробной частицы, измеренный

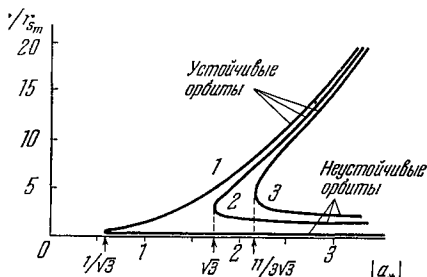


Рис. 246. Зависимость радиуса круговой орбиты от момента a_* . 1 — при движении с положительным моментом a_* в экваториальной плоскости метрики Керра с $-a = m$. Кривая для неустойчивых круговых орбит вырождается в горизонталь $r = r_{S_{\text{гор}}}$. 2 — при движении в метрике Шварцшильда, $a = 0$; 3 — при движении с отрицательным моментом a_* в экваториальной плоскости метрики Керра.

в единицах m_* с r_{S_m} , m_* — масса пробной частицы. Рассмотрим движение по кругу. На рис. 246 построена зависимость радиуса круговой орбиты от момента (аналог рис. 13 для поля Шварцшильда) для метрики Керра с максимально возможным моментом $|a| = m$ (см. сноску далее). Выбрано $k = -am > 0$.

Из рис. 246 видно, что при движении с положительным a_* все орбиты расположены гораздо глубже, чем в шварцшильдовском случае для того же a_* ; при отрицательных a_* орбиты лежат дальше от S_m , чем в случае метрики Шварцшильда. Последняя устойчивая орбита лежит *) при $a_* = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (вместо $a_* = \sqrt{3}$ для Шварцшильда). Эта орбита соответствует $r = \frac{1}{2} = r_{S_{\text{гор}}}$ (вместо $r = 3$ для Шварцшильда) и энергия частицы на ней

$$E_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,58; \quad (E_{\text{кр}}; \text{шв} = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,94).$$

Приведем также прицельные параметры гравитационного захвата частицы и луча света, движущихся в экваториальной плоскости в метрике с произвольным параметром a :

а) при $v_\infty \ll c$ [см. Дорошкевич (1965b), Руффини, Уилер (1970)]:

$$l_{\text{захв}} = \pm \frac{c}{v_\infty} [1 + (1 \mp |a|)^{1/2}] r_{S_m};$$

б) при $v_\infty = c$ (Годфрей, 1970):

для движения с положительным моментом

$$l_{+, \text{захв}} = 4 \cos^3 \left[\frac{1}{3} (\pi - \arccos |a|) \right] r_{S_m};$$

для движения с отрицательным моментом:

$$l_{-, \text{захв}} = 4 \cos^3 \left[\frac{1}{3} \arccos |a| \right] r_{S_m}.$$

Прежде чем говорить о принципиальном значении решения Керра, перейдем к приближенному общему решению, полученному методом малых возмущений, которое описывает поле медленно вращающегося шара (без предположения слабости сферически-симметричной части поля). Условие медленного вращения (малого момента) есть $K \ll mr_g c$, $|a| \ll 1$.

Выпишем сначала уравнения для малых возмущений (к полю Шварцшильда в вакууме) в случае вращающегося шара без предположения статичности (это потребуется в дальнейшем).

*) Точнее, следует говорить о стремлении всех величин к указанным ниже пределам, когда $|a| \rightarrow m$, ибо точное равенство $a=m$ соответствует в некотором смысле вращению источника со скоростью света и, вероятно, невозможно.

Шар может радиально расширяться или сжиматься. Из соображений симметрии ясно, что при слабом вращении из возмущений $h_{\mu\nu}$ компонент шварцшильдовского решения в первом порядке будет только h_{03} , h_{13} и h_{23} (возмущения в диагональных компонентах второго порядка малости). С помощью малого преобразования координат всегда можно обратить одну из этих величин в нуль: при преобразовании $\tilde{\varphi} = \varphi + \xi$ компоненты h_0^3 , h_1^3 и h_2^3 получают приращения $\Delta h_0^3 = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\Delta h_1^3 = \frac{\partial \xi}{\partial r}$, $\Delta h_2^3 = \frac{\partial \xi}{\partial \theta}$. Обратим в нуль h_{23} .

Выпишем нетривиальные компоненты $\delta R_{\alpha\beta}$:

$$\left. \begin{aligned} \delta R_{23} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{g_{11} h_{03}}{\sin^2 \theta} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{g_{00} h_{13}}{\sin^2 \theta} \right) = 0, \\ \delta R_{13} &= -\frac{1}{r^2} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^{-1} \theta \frac{\partial h_{13}}{\partial \theta} + 2 h_{13} \right) - g_{11} \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial t^2} + \\ &\quad + r^2 g_{11} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \frac{h_{03}}{r^2} = 0, \\ \delta R_{03} &= g_{00} \frac{\partial^2 h_{03}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} h_{03} - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^{-1} \theta \frac{\partial h_{03}}{\partial \theta} - \\ &\quad - g_{00} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h_{13}}{\partial r} + \frac{2}{r} h_{13} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2)$$

Для нахождения стационарного решения положим $\frac{\partial h_{13}}{\partial t} = \frac{\partial h_{03}}{\partial t} = 0$. Тогда решение (4.3.2) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} h_{13} &= \psi(r) r^2 \sin^2 \theta, \\ h_{03} &= \frac{r_g}{r} \sum_n a_n f_n \left(\frac{r}{r_g} \right) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.3)$$

Здесь $c = 1$, $G = 1$, $\psi(r)$ — произвольная, $r_g = 2m$, $a_n = \text{const}$, $f_n(x) = x^3 u_n(x) \int \frac{dx}{x^4 u_n^2(x)}$, $u_n(x) = F(2+n; 1-n; 4; x)$, F —

гипергеометрическая функция Гаусса, P_n^1 — первый присоединенный полином Лежандра [см. Градштейн, Рыжик (1962)].

Асимптотически $f_n(x) \sim x^{1-n}$, $x \gg 1$. Сделав теперь малое преобразование $\tilde{\varphi} = \varphi - \psi(r)$, получаем $h_{13} = 0$, и единственной отличной от нуля компонентой остается h_{03} , для которой справедливо (4.3.3).

Конкретный вид поля в вакууме определяется условиями сшивки на поверхности тела с внутренним решением. Условия сшивки, следующие из требований выполнимости уравнений поля на границе, требуют, чтобы h_{03} была везде непрерывна. Для шара с твердотельным законом вращения (но не обязательно стационарного — он может радиально деформироваться) это условие, как

можно показать, приводит к тому, что в вакууме $h_{03} \sim \sin^2 \theta$ и $h_{13} \sim \sin^2 \theta$. Первое уравнение (4.3.2) тогда выполнено тождественно, а решение двух других совместно с граничным условием при помощи малого преобразования координат приводится к виду

$$h_{03} = \sin^2 \theta \frac{2K}{r}, \quad (4.3.4)$$

где $K = -at$ — полный момент.

Таким образом, внешнее поле такого сжимающегося шара постоянно (в линейных по a членах). Выражение (4.3.4) совпадает по форме с приведенным в учебнике Ландау и Лифшица (1967) для слабого поля. В действительности оно справедливо и в сильном поле, но при $a \ll r_g$ (с точностью до первого порядка по a). Выражение (4.3.4) для стационарного шара было независимо получено Гуровичем (1965).

В этом решении уравнений малых возмущений, наложенных на поле Шварцшильда, в поправках к компонентам g_{ik} сохранены только члены, линейные по a , и отброшены члены с a^2 и более высокого порядка. Заметим, что поверхности S_m и $S_{\text{гор}}$ в этом случае совпадают; они отличаются на величину порядка $O(a^2)$. Те из эффектов на $g_{00} = 0$ решения Керра, которые зависят от линейных по a поправок к $g_{\mu\nu}$, сохраняются и в этом решении. В частности, здесь $C(g_{00}=0) = 12/r_g^4 < \infty$ (в линейных членах). Хартли и Торн (1968) получили общее решение для внешнего гравитационного поля медленно вращающейся деформированной центробежными силами звезды во втором порядке по угловому моменту $(a/r_g)^2$ и в первом порядке по квадрупольному моменту. Это решение обладает любопытным свойством: оно не имеет сингулярности на S_m или $S_{\text{гор}}$, если квадрупольный момент Q , угловой момент K и масса звезды удовлетворяют алгебраическому равенству

$$Q = K^2/M.$$

Торн предположил, что для того, чтобы решение не имело сингулярности на $S_{\text{гор}}$, каждый высший мультипольный момент должен быть связан с моментом и массой соотношением, аналогичным приведенному выше; он также привел аргументы в пользу того, что единственным точным решением с отсутствием сингулярности на $S_{\text{гор}}$ является решение Керра. Последующие исследования подтвердили это предположение. Обзор см. Торн (1971a).

Может ли быть реализовано решение с «вращательным» отклонением от сферической симметрии во всей области вплоть до $g_{00} = 0$ или до $S_{\text{гор}}$?

Реализация решения стационарным телом здесь отпадает по тем же причинам, что и в случае тела с квадрупольным моментом. Однако для нестационарного источника поля те же рассуждения,

что и в § 2 гл. 4, не проходят, так как здесь во «вращающемся» решении Керра на $g_{00} = 0$ и на горизонте событий $S_{\text{гор}}$ инвариант C конечен. Мы увидим ниже, что метрика Керра действительно возникает как предельная при $t \rightarrow \infty$ для всей области вне $S_{\text{гор}}$ при коллапсе под $S_{\text{гор}}$ любого вращающегося тела.

§ 4. Сфера Шварцшильда во внешнем квадрупольном поле

Закончим рассмотрение несферических статических полей следующим небольшим замечанием.

Существуют решения уравнений Эйнштейна, в которых имеет поверхность S_m , ничем качественно не отличающаяся от поверхности Шварцшильда для сферического случая. Однако в этом случае отклонения от сферической симметрии должны вызываться внешним полем. Например, если рассматривать сферическую массу во внешнем квадрупольном поле (нарастающем с удалением от массы m), то точное решение уравнений Эйнштейна в вакууме имеет вид (обозначения те же, что в § 2 гл. 4):

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{1}{4} q (3\lambda^2 - 1) (3\mu^2 - 1), \\ \gamma &= \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} - 3q\lambda (1 - \mu^2) - \\ &\quad - \frac{9}{16} q^2 (\lambda^2 - 1) (1 - \mu^2) [9\mu^2\lambda^2 - \lambda^2 - \mu^2 + 1].\end{aligned}$$

Поверхность $g_{00} = 0$ определяется условием $\lambda = 1$. Эта поверхность S_m является деформированной внешними полями сферой Шварцшильда. Гауссова кривизна двумерной поверхности S_m (не гауссова кривизна 3-мерного пространства, вызванная полем тяготения!)

$$C_G = \frac{1}{4m^2} e^q [1 + 3q - 12q\mu^2 - 9q^2\mu^2 + 9q^2\mu^4]$$

различна при разных μ и везде конечна. Физические свойства этой S_m такие же, как и у сферы Шварцшильда.

Постоянное внешнее квадрупольное поле может быть создано удаленными массами, закрепленными на подпорках, которые удерживают их от перемещений. Приблизительно на ограниченном интервале времени это же поле может быть создано и не закрепленными удаленными массами, скорости движения которых под влиянием взаимного тяготения будут вначале малы и поле почти статично.

§ 5. Коллапс вращающегося тела с малыми отклонениями от сферической симметрии *)

Напомним сначала кратко, как протекает сжатие однородного пылевого сферического облака радиуса r (см. § 12 гл. 3). Для далекого наблюдателя картина стремится к «застыванию» при $r \rightarrow r_g$ благодаря замедлению течения времени. Для него тело никогда не будет иметь размеры меньше, чем r_g . Наблюдатель, находящийся на поверхности сжимающегося облака, за конечное собственное время достигает $R = r_g$. Для него сжатие вовсе не «застывает» и продолжается дальше, уже внутри сферы Шварцшильда в T -области. Плотность вещества шара при $R = r_g$ и большой массе ничем не примечательна. Ее легко оценить:

$$\rho \approx \frac{\bar{M}}{\frac{4}{3} \pi r_g^3} \approx 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 \text{ г/см}^3,$$

где $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$ — масса Солнца.

Для $M = 10^8 M_{\odot}$, например, $\rho_g \approx 2 \text{ г/см}^3$. После пересечения поверхностью шара гравитационного радиуса лучи света от нее, как видно из рис. 25, уходят внутрь от поверхности Шварцшильда и никогда ее не пересекают, никогда не возвращаются к внешнему наблюдателю.

Если в шаре вначале были небольшие возмущения плотности и скорости вещества, то они при сжатии будут усиливаться, что подробно исследовано в работе Лифшица (1946) (см. Приложение). Поверхность сжимающегося тела в некоторой точке пересечет поверхность (горизонт событий), через которую лучи света не могут уйти на бесконечность. Хотя этот горизонт будет отличаться от поверхности Шварцшильда, но в силу малости возмущений это отличие будет так мало, что можно считать горизонт совпадающим с поверхностью Шварцшильда $r = r_g$.

Момент, когда поверхность звезды пересекает поверхность Шварцшильда $r = r_g$, для динамики вещества шара ничем не примечателен и плотность вещества еще далека от бесконечности.

Следовательно, если в начале сжатия шара возмущения достаточно малы, то к моменту, когда $R = r_g$, они еще не успевают достаточно вырасти. Итак, поверхность шара в системе сопутствующего наблюдателя пересекает сферу r_g , когда возмущения в веществе и возмущения самого поля вокруг шара еще малы.

Затем возмущения в шаре нарастают, но, как было показано в § 12 гл. 3, из-под сферы Шварцшильда к внешнему наблюдателю не поступает никакая информация. Следовательно, рост возмущений внутри $S_{\text{гор}}$ уже никак не сказывается на области пространст-

*) Мы не рассматриваем здесь крупномасштабных магнитных и электрических полей вокруг сжимающегося тела. Такие поля рассмотрены в гл. 14.

ва — времени вблизи поверхности Шварцшильда и во внешней области далекого наблюдателя (R -области). Читатель, склонный поверить в это без пояснений, может пропустить следующий абзац. Формальное математическое доказательство дано в приложении.

Дело в том, что возмущения гравитационного поля от шара распространяются со световой скоростью. Но из рис. 25 видно, что траектории лучей, вышедших из шара в T -области, не приближаются к поверхности Шварцшильда. Большие возмущения по характеристикам-лучам не приходят в эту область. Это значит, что возмущения в вакууме вблизи поверхности Шварцшильда всегда малы и свойства этой поверхности остаются неизменными. В частности, через нее к внешнему наблюдателю никогда не проходит никакое излучение, никакая информация *). Следовательно, и при наличии возмущений в шаре для внешнего наблюдателя доступен только конечный интервал эволюции шара. Он может следить за развитием возмущений в шаре и в окружающем поле, но только до момента, когда $R = r_g$.

Теперь ясно, что внешнее поле пыли для далекого наблюдателя должно при $t \rightarrow \infty$ стремиться к стационарности, все $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$. В самом деле, в его системе отсчета возмущения, зависящие от времени, возникшие до достижения поверхностью шара r_g , должны, как гравитационные волны, рассеяться в пространстве, а новых возмущений из-под сферы Шварцшильда поступать не может. Разумеется, все выводы сохраняются в силе и при рассмотрении сжатия вещества с отличным от нуля давлением.

Итак, предельное поле сжимающегося тела с малыми отклонениями от сферичности при $t \rightarrow \infty$ стационарно.

Вращение тела приводит к его сплюснутости, т. е. к нарушению сферичности. Возмущения внешнего поля, связанные с этими отклонениями от сферичности, есть величины второго порядка малости по сравнению с возмущениями от самого вращения. Влияние же вращения на внешнее поле подробно рассмотрено выше в § 3 гл. 4.

При сжатии вращающегося шара во внешнем пространстве поле не меняется (в линейных по K/cm членах), и предельное поле будет полем Шварцшильда с поправкой, вызванной вращением:

$$g_{03} = \sin^2 \theta \frac{2K}{r}. \quad (4.5.1)$$

*) Подчеркнем еще раз, что в силу наличия вращательных возмущений горизонт событий в действительности лежит глубже, чем $g_{00} = 0$ (см. § 3), поэтому свойства поверхности Шварцшильда теперь «размазаны» по узкой области (между горизонтом и $g_{00} = 0$), называемой *эргосферой*. Однако в силу малости возмущений эта область так узка, что мы можем просто называть ее «поверхностью Шварцшильда».

Такой вывод неудивителен. В ходе сжатия шара сохраняются масса M и момент K . Поэтому и предельное поле зависит от обеих этих величин.

Каково предельное поле сжимающегося тела, несферичность которого вызвана не вращением, а например, несимметричным распределением масс? Это поле должно быть стационарным. В § 2 гл. 4 было показано, что если поправки к полю Шварцшильда на квадрупольные и высшие мультипольные моменты (вызванные изменением в источнике поля) не зависят от времени, то сколь бы малыми они ни были на конечных расстояниях от S_m , — они неограниченно нарастают к S_m и приводят к появлению истинных особенностей $\dot{C} = \infty$. С другой стороны, как мы видели в начале этого параграфа, в сопутствующей системе сжимающегося тела с малыми начальными отклонениями от сферической симметрии в распределении плотности, момент пересечения поверхностью тела поверхности Шварцшильда ничем не выделен и не сопровождается возникновением истинных особенностей ни в метрике, ни в плотности. Сопоставление этих результатов приводит к выводу о затухании квадрупольного и высших мультипольных моментов внешнего поля тяготения на релятивистских стадиях сжатия несимметричного тела.

Сделаем оценки скорости этого затухания. Будем рассматривать подход к асимптотическому полю (в первом приближении и вблизи поверхности Шварцшильда) как прохождение через последовательность статических конфигураций (о справедливости такого предположения см. ниже). Мы будем называть эту последовательность состояний «квазистатической» и обозначать ее квадрупольный момент через $q(t)$. Рассмотрение уравнений для статических аксиально-симметричных квадрупольных возмущений метрики Шварцшильда показывает, что отличные от нуля компоненты возмущений могут быть записаны при $g_{00} \rightarrow 0$ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} h_{00} &\sim q \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \ln \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \\ h_{11} &\sim q \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \ln \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \\ h_{22} &\sim h_{33} \sim q \ln \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4.5.2)$$

где q — квадрупольный параметр возмущения. В написанных выражениях опущены множители, не зависящие от $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$.

При сжатии тела с $q \neq 0$ в сопутствующей системе все величины $h_{\mu\nu}$ конечны. Поскольку h_{22} и h_{33} не преобразуются при пе-

реходе от сопутствующей системы к шварцшильдовской, то очевидно, что при $r \rightarrow r_g$

$$q \lesssim \ln^{-1} \frac{r}{r - r_g} \sim \frac{1}{t}. \quad (4.5.3)$$

Последнее соотношение в (4.5.3) получено из уравнения (3.5.1) для закона свободного падения в поле Шварцшильда. Таким образом, квадрупольный момент должен убывать со временем не медленнее, чем t^{-1} *).

Более точный анализ показывает [см. Р. Прайс (1971); см. также Паташинский, Харьков (1969); обзор см. Торн (1971а)], что затухание происходит по степенному закону, но с показателем степени, ббльшим единицы.

Прайс (1971) показал, что амплитуда мультипольных возмущений на поздних стадиях коллапса определяется «хвостами» гравитационных волн, рассеиваемых на искривлении пространства — времени. Амплитуда возмущений затухает по формуле

$$h_{ij} \sim t^{-(2l+2)},$$

где l — порядок мультиполя ($l = 2$ для квадрупольных возмущений).

Итак, предельное поле сжимающегося несимметричного слабо вращающегося тела есть (в первом порядке) поле Шварцшильда с «вращательными отклонениями» в недиагональных членах.

В § 3 были приведены аргументы в пользу того, что именно метрика Керра является единственной стационарной метрикой без особенностей на $S_{\text{гор}}$. Отсюда следует, что при коллапсе любого вращающегося тела при $t \rightarrow \infty$ возникает гравитационное поле, описываемое в области вне и на $S_{\text{гор}}$ метрикой Керра.

Рассмотрение движения пробных частиц и лучей света в таком поле (см. § 3 гл. 4) приводит к выводу, что некоторые важные свойства движения качественно те же, как и в случае поля Шварцшильда. Для внешнего наблюдателя частица с прицельным параметром, меньшим критического, гравитационно захватывается и по спирали, совершив конечное число оборотов, подходит асимптотически при $t \rightarrow \infty$ к особой поверхности $S_{\text{гор}} = 0$.

То же имеет место и для лучей света. Никакое излучение, никакая информация из-под сферы $S_{\text{гор}}$ к внешнему наблюдателю не поступает, происходит гравитационное замыкание. Подробнее об этих свойствах см. § 3 гл. 4 и обзор Торна (1971а).

Эти выводы особенно важны для анализа катастрофического сжатия звезд, о чем будет говориться в следующем разделе книги.

*) То же относится и к высшим мультипольным моментам.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 5

Рассмотрим коллапс сферической пылевой массы. Введем в пыли сопутствующую систему. Продолжим эту свободно падающую систему за границу пыли, воспользовавшись решением Толмена (см. §§ 12 и 13 гл. 3). Для конкретности будем считать, что точка на границе пыли падает с параболической скоростью, а плотность вещества внутри пыли однородна *). Метрика внутри пыли дается выражением, приведенным в § 12 гл. 3, а метрика вне пыли есть метрика Леметра (см. там же) с ds^2 в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2} (R - \tau + \tau_0) \right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2} (R - \tau + \tau_0) \right]^{4/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (4.5.1n)$$

здесь τ — собственное время, $\tau_0 = \text{const}$, и τ_0 зависит от начала отсчета времени, R — сопутствующая координата, $c = 1$, $r_g = 1$. Пространство — время этой модели изображено на рис. 25. Пунктиры — линии

$r = \text{const}$, где $r = \left[\frac{3}{2} (R - \tau + \tau_0) \right]^{2/3}$ — шварцшильдовская координата.

Пусть в момент $\tau = 0$ (близкий к моменту τ_1 , когда граница пыли пересекает поверхность Шварцшильда $r = r_g$) возмущения плотности, скорости вещества и метрики h^β_α при всех $0 \leq r < \infty$ малы.

Далее, пусть на сколь угодно большом $r = \text{const}$ возмущения всегда бу-

дут малы (последнее очевидно). Тогда: 1) h^β_α будут в рассматриваемой системе

все всегда малы при $r = \left[\frac{3}{2} (R - \tau - \tau_0) \right]^{2/3} > A$, т. е. правее и ниже пунктира $r = A$ на рис. 25; 2) луч света, покинувший пыль после момента τ_1 , никогда не выйдет за пределы поверхности Шварцшильда $r = r_g$ (см. рис. 25). (Предельный момент в действительности несколько больше τ_1 из-за возмущения горизонта.).

Докажем первое утверждение. Из (4.5.1n) видно, что в вакууме компоненты $g_{\alpha\beta}$ зависят только от $r = \left[\frac{3}{2} (R - \tau + \tau_0) \right]^{2/3}$. Поэтому если мы теперь в качестве независимых переменных будем рассматривать не R и τ , а r и τ , то малые возмущения метрики в вакууме могут быть записаны в виде (индек-

*) Если коллапс начался вдали от r_g , то вблизи r_g скорость границы всегда почти параболическая. Не представляет никакого труда обобщить доказательство на случай движения границы пыли с эллиптической или гиперболической скоростью и с градиентом плотности пыли по радиусу.

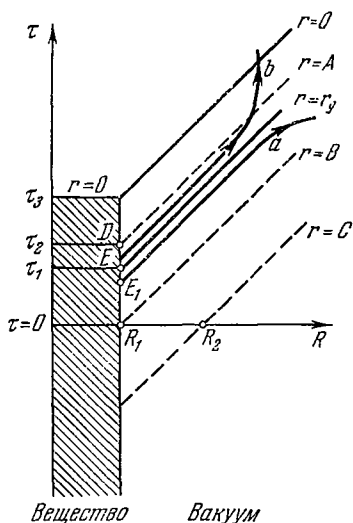


Рис. 25. Коллапс пылевого шара в свободно падающей системе отсчета (обозначения см. в приложении к § 5 гл. 4), a и b — мировые линии лучей света. Луч a , вышедший из E_1 вблизи τ_1 , долго идет вблизи $r = r_g$ (по времени любой снимающей системы отсчета).

сы α, β в дальнейшем опускаем) $h = e^{i\omega\tau} f(r)$. Функция $f(r)$ зависит от θ и ϕ , но эта зависимость сейчас несущественна и мы ее не рассматриваем. Идея доказательства состоит в том, что из малости возмущений на линиях (см. рис. 25) $D - R_1 - R_2$, далее по $r = C$, и из вида $h = e^{i\omega\tau} f(r)$ следует, что h мало везде внутри полосы, ограниченной $r = A, r = C$ и $D - R_1 - R_2$. Приводим формальное доказательство. Граница пыли пересекает r_g при конечной плотности $\bar{\rho}_c \approx \frac{2 \cdot 10^{16}}{(M/M_\odot)^2}$. Решения уравнений малых возмущений внутри пыли *) показывают, что h неограниченно возрастает только при $\rho \rightarrow \infty$, а при $\rho = \bar{\rho}_c$ оно конечно. Таким образом, вплоть до момента τ_2 (еще далекого от τ_3 , когда $\rho = \infty$) в пыли при $R < R_1$ имеем $h < \varepsilon_1$.

В свободно падающей системе в вакууме есть решения, неограниченно нарастающие на $r = r_g$. Однако корректная постановка задачи Коши исключает эти решения и вблизи поверхности шара в вакууме h мало вплоть до $\tau = \tau_2$. Таким образом, мы имеем в вакууме:

1) из начальных условий: при $\tau = 0, R > R_1, h = f(r) < \varepsilon_2$;

2) из малости возмущений на границе пыли: при $0 \leq \tau \leq \tau_2$ и $R = R_1$, $h = e^{i\omega\tau} f(r) < \varepsilon_3$.

Из 1) следует, что $f(r) < \varepsilon_2$ при $r \geq B = \left[\frac{3}{2} (R_1 + \tau_0) \right]^{2/3}$ (см. рис. 25).

Из 2) следует, что $f(r) < \varepsilon_4$, где $\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_3}{|e^{i\omega\tau}|_{\max}}$ при $0 \leq \tau \leq \tau_2$ и $A < r \leq B$ (см. рис. 25).

Итак, всегда

$$f(r) < \varepsilon_5 \text{ при } r > A, \quad \varepsilon_5 = \max(\varepsilon_2, \varepsilon_4). \quad (4.5.2п)$$

Теперь, по условию, $h < \varepsilon_6$ при достаточно большом $r = \text{const} = C$ и любом $\tau > 0$:

$$h_{r=C} = e^{i\omega\tau} f(C) < \varepsilon_6, \quad \tau > 0.$$

Таким образом,

$$e^{i\omega\tau} < \frac{\varepsilon_6}{f(C)} = \varepsilon_7, \quad \tau > 0 \quad (4.5.3п)$$

(имеется в виду абсолютное значение $e^{i\omega\tau}$).

Из (4.5.2п) и (4.5.3п) следует

$$h = e^{i\omega\tau} f(r) < \varepsilon_5 \varepsilon_7 = \varepsilon_8, \quad r > A, \quad \tau > 0.$$

Первое утверждение доказано. Докажем теперь второе утверждение.

В невозмущенной метрике (4.5.1п) для любого луча света (не обязательно идущего по радиусу) в T -области, при $r < r_g - F$ (где F произвольная константа, меньшая r_g) справедливы неравенства **)

$$\frac{d\tau}{dR} \geq \sqrt{1 - g_{11}/g_{00}} > 1 + N,$$

*) Случай, когда пыль безгранична, анализируется Лифшицем (1946). Для рассматриваемого случая модифицированный анализ проведен Новиковым (1969). Он показал, что с границей, как и без нее, возмущения метрики внутри пылевой сферы и на ее границе при прохождении ею гравитационного радиуса r_g остаются конечными.

**) Мы рассматриваем луч, для которого $\frac{dR}{d\tau} > 0$.

где $N = \text{const.}$ Эти неравенства означают, что наклон луча на конечную величину больше наклона линии $r = r_g$ (см. рис. 25).

Выше доказано, что всегда при $r > A$ возмущения метрики остаются малыми. Ясно, что эти возмущения мало меняют величину луча и неравенство

$$\frac{d\tau}{dR} > 1 + N$$

сохраняется. Таким образом, луч в области $A < r < r_g$ никогда не приближается к $r = r_g$ и тем более не может ее пересечь. Следовательно, мы доказали, что при коллапсе с малыми вначале отклонениями от сферической симметрии луч никогда не выходит из T -области.

§ 6. Сингулярность при коллапсе; что происходит с веществом после ухода под $S_{\text{гор}}$?

Вопрос, поставленный в заголовке параграфа, возникает неизбежно. Действительно, в случае строгой сферической симметрии, как показано в § 12 гл. 3, сжимающееся тело для сопутствующего наблюдателя после пересечения $r_g = 2Gm/c^2$ неизбежно сжимается в точку, и бесконечная плотность достигается всем веществом шара. Что будет дальше? Правда, внешний наблюдатель об этом ничего не узнает, для него лишь при $t \rightarrow \infty$ $r \rightarrow r_g$; все, что будет потом, лежит для него всегда в абсолютном будущем (см. § 12 гл. 3). Но какова конечная судьба сжимающегося шара не для внешнего наблюдателя, а для сопутствующего наблюдателя, находящегося на поверхности шара?

Релятивистское сжатие сферического тела, как уже отмечалось, неустойчиво. В ходе сжатия возмущение нарастает неограниченно при $\rho \rightarrow \infty$ (см. об этом Приложение к § 5). Может ли развитие несимметрии привести к исчезновению особенности в решении и перевести сжатие в расширение после достижения некоторой максимальной плотности? Частично на этот вопрос ответили Пенроуз (1965), Хоукинг и Пенроуз (1970). Они показали, что если тело сжимается до размеров, меньших r_g , и при этом удовлетворяются некоторые приемлемые условия, то достижение истинной сингулярности в решении неизбежно. Достигает ли вся материя бесконечной плотности, методом Пенроуза и Хоукинга установить нельзя. Подробнее см. книгу Пенроуза (1971).

Применительно к проблеме коллапса ограниченного тела теорема Хоукинга — Пенроуза гласит:

В пространстве — времени имеется истинная сингулярность, если при выполнении уравнений тяготения ($\Lambda \leq 0$)

1) нет замкнутых времениподобных кривых, т. е. не нарушается причинность;

2) уравнение состояния вещества удовлетворяет условию

$$\varepsilon \geq -\sum P_\alpha, \quad \varepsilon \geq -P_\alpha,$$

где P_α — три главных значения тензора давления. Эти неравенства всегда выполнены для всех известных видов вещества и полей;

3) в пространстве — времени есть «ловушечная» поверхность. Под «ловушечной» поверхностью подразумевается замкнутая двумерная пространственноподобная поверхность, обладающая следующим свойством. В каждой точке поверхности проведем нулевую геодезическую линию, ортогональную к ней. Таких линий в каждой точке можно провести две. Все линии образуют два семейства. Условие «ловушечности» требует, чтобы в обеих этих системах нулевые геодезические линии сближались в окрестности поверхности. Примером «ловушечной» поверхности служит при сферическом коллапсе любая поверхность $R = \text{const}$, $\tau = \text{const}$, лежащая внутри сферы Шварцшильда. Лучи света, выходящие из точек такой поверхности ортогонально к ней, всегда движутся к меньшим r , т. е. сходятся (см. рис. 16).

Как показано в предыдущем параграфе, при малом отклонении от сферической симметрии свойство «ловушечности» у поверхностей $R = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ внутри поверхности Шварцшильда сохраняется.

4) Решение общее. Это математическое ограничение, вероятно, не существенно.

Большую информацию о характере сингулярностей в широком классе уравнений Эйнштейна можно получить также методами, развитыми Лифшицем и Халатниковым (1960а, б; 1963), Лифшицем, Судаковым и Халатниковым (1961), Белинским и Халатниковым (1969) и Лифшицем и Халатниковым (1970).

Вся трудность вопроса о судьбе сжимающегося вещества состоит не в выяснении того, достигается ли в ходе сжатия какая-то максимальная, но конечная плотность или же максимальная плотность бесконечная (хотя эта проблема чрезвычайно важна), а в том, что будет после этого? Ведь тело не может вновь расширяться так, чтобы выйти из-под сферы Шварцшильда в R -область к тому внешнему наблюдателю, который видел ее сжатие. Для этого наблюдателя недоступно все, что случается после достижения r_g . Вопрос об исходе сжатия для сопутствующего наблюдателя до конца не решен.

Решение проблемы можно искать в двух направлениях. Во-первых, согласно теоремам Пенроуза и Хоукинга неизбежно возникновение в ходе сжатия бесконечных кривизн пространства — времени (а может быть, и бесконечных плотностей хотя бы частью вещества), или даже нарушение причинности. В гл. 2 было показано, что при кривизнах, больших критического значения $C \approx \approx 1/(10^{-33} \text{ см})^4$, ОТО уже несправедлива, так как вступают в игру квантовые эффекты. Квантовой теории сильного гравитационного поля пока нет, и что будет после достижения такой кривизны, сказать пока нельзя. Некоторые соображения об этом см. в книге

Уилера, Гаррисона, Вакано, Торна (1967). Можно, конечно, высказать предположение, что вещество после достижения плотности $\rho \approx 10^{93} \text{ г/см}^3$ больше не расширяется и кривизна пространства — времени, меньшая $C = 1/(10^{-33} \text{ см})^4$, в будущем не достигается, а пространственно-временные соотношения в столь экзотических условиях нам не известны. Это один из возможных ответов на вопрос о конечном исходе сжатия тела.

Однако рассмотрение релятивистского сжатия заряженного тяготеющего шара (что является, разумеется, искусственной модельной задачей) показывает, что может осуществляться другая возможность: топологические свойства пространства — времени могут быть очень сложными, сжатие вещества все же может смениться расширением, но расширением не в то же внешнее пространство, из которого внешний наблюдатель видел коллапс, а в некотором смысле в другое внешнее пространство (Новиков, 1966а, б; Бардин, 1968а, б), или даже иметь место еще более сложная ситуация (Новиков, 1970).

Рассмотрим здесь качественно один частный и искусственный пример коллапса заряженного шара, отсылая за подробностями к цитированным работам.

Исследуем сжатие однородного шара из слабо заряженной пыли $e^* < mG^{1/2}$, e^* — заряд, m — масса. Выписанное условие означает, что гравитационное притяжение в шаре больше электростатического отталкивания (на ньютоновской стадии сжатия отношение этих сил постоянно). Будем считать, что вещество шара имеет первоначально малую плотность. Шар имеет однородное распределение заряда, причем заряд не перераспределяется по веществу в ходе сжатия.

Рассмотрим сначала движение точки поверхности шара. Движение этой точки может рассматриваться как движение заряженной пробной частицы во внешнем гравитационном и электрическом полях заряженного шара. Возможно, что в ходе эволюции будет происходить пересечение оболочек и на поверхности шара будут оказываться другие частицы. Впоследствии мы должны будем рассматривать их как поверхностные частицы, а частицы, которые были на поверхности первоначально, считать внутренними. Однако это не влияет на качественное рассмотрение и заключения о движении поверхности.

Внешнее гравитационное поле заряженного шара описывается метрикой Рейсснера — Нордстрема

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{Ge^{*2}}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{Ge^{*2}}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где скорость света положена равной единице, $c = 1$, ε^* — заряд шара. Внешнее электрическое поле постоянно при $r = \text{const}$, $E^* = \varepsilon^* / 4\pi r^2$. Для сопутствующего наблюдателя за конечное время сжимающееся тело достигает сферы Шварцшильда ($g_{00} = 0$;

$$r = r_g = Gm \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{\varepsilon^*}{Gm^2} \right)^{1/2} \right] \right\}, \text{ являющейся также горизонтом.}$$

Если заряженный шар сжимается до размеров $r < r_1 = Gm \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon^*}{Gm^2} \right)^{1/2} \right] \right\}$, то гравитационное притяжение должно смениться отталкиванием. В ньютоновской теории такая ситуация невозможна; с точки зрения ОТО это качественно объясняется тем, что энергия электрического поля, остающегося постоянным вне шара, возрастает при сжатии шара и увеличении размера внешней области. Энергия поля возрастает настолько, что превышает полную энергию шара. Так как полная энергия в ходе сжатия не меняется, то вблизи сильно сжатого шара гравитационное поле должно соответствовать отрицательной массе и вызывать гравитационное отталкивание.

Действие этого гравитационного отталкивания при сильном сжатии, а также действие электростатического отталкивания приводят к тому, что поверхность не достигает $r = 0$, а достигнув минимального размера порядка $r = r_1$, снова расширяется. Если соседние слои материи не проходят друг через друга, плотность вещества нигде не достигает бесконечности, кроме центра. Смена сжатия расширением неодновременна для разных слоев. Максимальное сжатие каждого слоя $\rho \approx c^6 m^4 / (\varepsilon^*)^6$, где ε^* и m — заряд и масса внутри слоя соответственно*). Поскольку m пропорциональна ε^* в начальном состоянии низкой плотности, максимальная плотность, достижимая слоем с внутренней массой m , изменяется как $\rho_{\text{max}} \sim 1/m^2$.

На рис. 26а изображено пространство — время рассматриваемого решения, аналогичное пространству — времени Крускала, и мировая линия частицы на границе шара. Область, занятая веществом, заштрихована. В ходе сжатия шара его граница пересекает шварцшильдовскую сферу $r = r_g^{**}$ и из внешней $R'_{\text{внешн}}$ -области попадает в сжимающуюся T_- -область. При размерах $r < r_1$ сжатие сменяется расширением (это происходит во внутренней R -области), и после прохождения расширяющейся T_+ -области граница шара вновь пересекает сферу Шварцшильда, выходя во внешнюю $R'_{\text{внешн}}$ -область. Но эта область, как видно на рис. 26, уже другая, а не та, из которой происходит сжатие. Она лежит по отношению

*) Масса m внутри данного слоя определяется как масса, измеренная внешним наблюдателем при устранении всех внешних слоев.

**) Значение r_g для слабо заряженного шара практически совпадает со значением $r_g = 2Gm/c^2$ для нейтрального шара.

к первой $R'_{\text{внешн}}$ -области в абсолютном будущем. Пространство на бесконечности этой R -области евклидово и является «другим» евклидовым пространством, отличным от того, в котором наблюдатель видел коллапс. Реальная сингулярность, $r = 0$, в этом решении имеет место в вакууме вне сферы, вблизи точки ее максимального сжатия. В противоположность сингулярности в метрике Крускала, эта сингулярность времениподобна (см. рис. 26,а).

Если заряд устремить к нулю, то вся внутренняя R -область сливается с истинной особенностью $r = 0$.

Введение заряда, «расслаивающего» истинную особенность пространства Шварцшильда и позволяющее исследовать смену сжатия расширением без прохождения всего вещества через бесконечную плотность, является, конечно, искусственным приемом. Результат может указывать на общий характер ответа на вопрос о смене релятивистского сжатия шара расширением, т. е. на вопрос в заголовке параграфа. Можно предполагать, что рост возмущений при сжатии или же процессы при $\rho \approx 10^{23} \text{ г/см}^3$ переводят сжатие вещества в расширение, но в расширении в другое внешнее пространство!

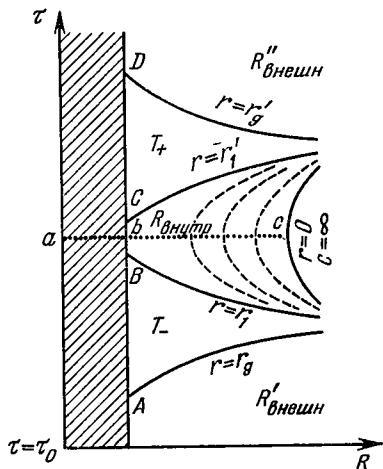


Рис. 26а. Пространство — время решения для сжимающегося и вновь расширяющегося заряженного шара (τ — временная координата, R — радиальная пространственная координата).

Таким образом, формальная сшивка решений для коллапса и антиколлапса нейтрального шара должна проводиться на линии истинной особенности $r = 0$ с учетом того, что вблизи $r = 0$ решение не описывает истинного характера движений вещества и поля, ибо ОТО неприменима, но вне этой узкой области решение отражает истинное движение. В таком полном решении (при однократном сжатии и расширении) есть две пространственные области с евклидовой метрикой на бесконечности, лежащие одна по отношению к другой в абсолютном будущем (в отличие от пространств R_1 и R_2 , в решении Крускала сшиваемых через «ручку»; см. § 14 гл. 3, рис. 20). Однако ситуация на самом деле гораздо более сложна, и ответ на вопрос об эволюции шара даже в модельной задаче о тяготеющем заряженном шаре далеко не однозначен (Новиков (1970)). Выше было построено решение задачи о релятивистском коллапсе заряженного шара. После сжатия под сферу Шварцшильда шар вновь расширяется, но уже в другое внешнее

Заметим, что сам факт возможности отсутствия начальной ко-ши-гиперповерхности в релятивистских задачах неоднократно отмечался в литературе (см., например, Торн (1968); Бардин (1968а, б)).

Укажем также на литературу о коллапсе заряженной сферы: Боннор (1960), Папапетру (1947), Кучер (1968), Марков (1969), Хамуи (1969), Дас (1962), Березин, Марков (1969).

Мы не останавливаемся подробнее на этих вопросах, так как они еще далеки от окончательного выяснения, и хотели только обратить внимание на имеющиеся возможности.

В частности, здесь безусловно могут играть важную роль квантовые эффекты в сильных электрических и гравитационных полях [Марков (1969); Зельдович (1970); Зельдович, Старобинский (1971)]. Возможно, что учет всего этого изменит сам характер ответа. Целью изложения было показать, насколько многообразны и необычны здесь могут быть ответы даже в простейших моделях.

Еще раз подчеркнем, что для наблюдателя на евклидовой бесконечности рассмотренные вопросы и не возникают. Чтобы ни происходило внутри $S_{\text{гор}}$, он об этом не узнает *).

Также подчеркнем, что после уменьшения размеров шара в собственном времени до $r < r_g$, невозможно расширение его в то же внешнее пространство, откуда происходило сжатие, даже предполагая прохождение вещества через бесконечную плотность. Работы Герценштейна (1966а, б), в которых рассматривается такая смена сжатия расширением, как ясно из изложенного выше, не могут быть верными.

*) Иная ситуация в сжимающейся, а затем расширяющейся космологической модели, где нет евклидовой бесконечности [см. об этом Новиков (1964б)]. В этой модели любой «наблюдатель» в ходе сжатия модели попадает в T -область, проходит через состояние бесконечной кривизны пространства — времени $C = \infty$ и затем выходит из T -области. При этом «наблюдатель» может видеть и сжатие шара, и его расширение из-под $S_{\text{гор}}$.

РАЗДЕЛ II

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

ГЛАВА 5

ВВЕДЕНИЕ, ПОНЯТИЕ ДАВЛЕНИЯ

§ 1. Разные виды давления

Для анализа космологической проблемы и теории звезд необходимы сведения о всех видах взаимодействия частиц, из которых состоят рассматриваемые тела. Естественно, что при этом гравитационное взаимодействие должно быть выделено и рассматриваться отдельно. В главах 1—4 изложено современное состояние теории тяготения.

В данной главе будут рассмотрены короткодействующие силы между частицами и те следствия, к которым они приводят. Безотносительно к конкретной природе этих сил, общим их свойством является аддитивность энергии взаимодействия для макроскопической системы: если систему разделить на макроскопические части, то энергия взаимодействия этих частей между собой окажется пренебрежимо малой по сравнению с энергией каждой части. Поэтому для короткодействующих сил и только для них можно ввести понятия плотности энергии ε или удельной энергии $E_{уд} = \varepsilon/n$, где n — плотность тех частиц (барионов), к которым мы относим энергию. Индекс «уд» (удельная) мы везде далее в этом разделе опускаем. Точно так же можно говорить и об удельной энтропии S (на один барион).

Наконец, главным свойством близкодействия в макроскопической системе является возможность ввести давление P . Давление есть величина, позволяющая описать силу взаимодействия двух частей системы как интеграл по разделяющей их поверхности

$$F = \int P ds, \quad (5.1.1)$$

где P зависит только от состояния вещества на этой поверхности, $P = P(n, S)$, т. е. от плотности n и энтропии S . Основное термодинамическое соотношение имеет вид

$$dE = -P(n, S) d(n^{-1}) + T(n, S) dS, \quad (5.1.2)$$

где P — давление, а T — температура. Величина n^{-1} есть объем, приходящийся на один барион, т. е. удельный объем. Если обозначить его V , то уравнение (5.1.2) принимает знакомую форму $dE = -PdV + TdS$. Как следствие (5.1.2), имеем

$$P = n^2 \left(\frac{\partial E}{\partial n} \right)_S. \quad (5.1.3)$$

В нерелятивистском приближении плотность массы ρ г/см³ совпадает с плотностью массы покоя барионов $\rho_0 = nm_0$. В этом приближении можно говорить об удельной энергии E_1 на грамм вещества и писать так:

$$E_1 = E_1(\rho, S), \quad P = \rho^2 \left(\frac{\partial E_1}{\partial \rho} \right)_S. \quad (5.1.4)$$

Однако мы будем иметь дело и с такой ситуацией, когда $P \sim \rho c^2$, $\rho = nm_0 \sim \rho$. Тогда уже нельзя считать плотность массы пропорциональной плотности частиц, нерелятивистская формула (5.1.4) теряет силу, и связь между E , ρ , n дается выражениями

$$\varepsilon = En, \quad \rho = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{En}{c^2} \quad (5.1.5)$$

вместе с (5.1.3).

В нерелятивистской теории энергия E определена с точностью до постоянного слагаемого, в релятивистской теории это не так.

При высоких температурах начинается образование нуклон-антинуклонных пар. В этой ситуации сохраняется разность $N - \bar{N}$ (барионный заряд). К этой разности следует относить все термодинамические величины (энергию, энтропию, объем). Например, удельная энергия есть энергия на единицу барионного заряда. Только в этом смысле справедливы уравнения (5.1.2)–(5.1.5). Более полно это будет обсуждаться ниже. Можно также обобщить теорию на случай нескольких типов заряда (например, лептонного). Когда мы говорим только о барионном заряде, мы молчаливо подразумеваем, что все другие заряды равны нулю. Случай электрического заряда особый (см. далее). Разумеется, мы предполагаем, что рассматриваемая материя находится в равновесии (или вблизи равновесия). В равновесии состояние материи полностью определяется сохраняющимися величинами. Очевидно, без этого предположения можно получать различные значения P и E для данных S и n , задавая искусственные распределения скоростей частиц.

§ 2. Случай далекодействующих сил

Вернемся к основным принципам рассмотрения локальных и далекодействующих сил.

Мы останавливаемся подробнее, чем обычно, на этих общеизвестных определениях также и в связи с тем, что иногда вводят

понятия гравитационного давления и гравитационной плотности энергии. Ясно, что в случае гравитации силу нельзя свести к интегралу по поверхности, энергия системы не аддитивна. Строго можно сделать лишь следующее: рассмотрим систему, в которой вещество распределено неоднородно (например, в виде отдельных звезд), причем масштаб неоднородностей (расстояние между соседними звездами) мал по сравнению с размером всей системы. Тогда можно найти фактическую гравитационную энергию системы W (с учетом неоднородности) и гравитационную энергию W_0 строго однородной — в малом масштабе (т. е. без разделения на звезды, а в виде сплошной среды) системы с тем же распределением средней плотности.

Разность $W - W_0$ уже является локальной величиной; ее можно записать как

$$W - W_0 = \int w_1 \bar{\rho} dV, \quad (5.2.1)$$

где w_1 зависит только от локальной плотности и неоднородности, но не зависит от общих размеров и формы системы, в отличие от W и W_0 в отдельности. Из величины w_1 можно построить величину P_1 :

$$P_1 = (\bar{\rho}^2) \frac{\partial w_1}{\partial \bar{\rho}}, \quad (5.2.2)$$

которая играет роль гравитационного вклада в давление. Лучше сказать, однако, что P_1 есть гравитационное давление неоднородностей, чтобы подчеркнуть их (неоднородностей) вклад в выражение силы; гравитационные силы, вычисленные по средней плотности $\bar{\rho}$, не входят в P_1 и описываются отдельно гравитационным потенциалом ϕ и объемными силами $\rho \text{ grad } \phi$, соответствующими ему.

По всей вероятности, четкое разделение объемной гравитационной силы и гравитационного вклада в давление, зависящего от неоднородностей, связано с определенными предположениями о флуктуации. Этот вопрос в настоящее время еще не разработан *).

Формально, особый случай представляют собой электрические и магнитные поля. Закон Кулона подобен закону Ньютона. Поэтому на первый взгляд все сказанное о гравитации переносится на электростатическое взаимодействие. В действительности главное отличие состоит в том, что в электростатике есть заряды обоих знаков, а в гравитации все массы имеют один знак. В астрономии мы всегда имеем дело с электронейтральными системами. Если даже система в целом не нейтральна, то при наличии проводимости свободные заряды оказываются на поверхности системы, и в объеме вещество электронейтрально. Дальнодействующие кулоновские силы в электронейтральном веществе можно рассматривать по

*) Постановку вопроса см. у Широкова, Фишера (1962).

той же схеме, по которой рассматриваются короткодействующие силы; это естественно, так как именно электронейтральность обеспечивает фактическую малость взаимодействия каждого отдельного заряда с далекими областями, где соблюдается равенство положительных и отрицательных зарядов. Однако электронейтральность имеет место лишь в среднем. В масштабе атома распределение заряда отнюдь не однородно, и это существенно. Вклад электростатических сил в давление и в энергию — это, по существу, величина, зависящая от микронеоднородности (в атомном масштабе) распределения заряда в среде, которая в среднем нейтральна.

С другой стороны, следует помнить, что именно электростатические силы обуславливают электронейтральность: хорошо известно, какие гигантские поля возникают при минимальных отклонениях средней плотности электронов от плотности протонов в объеме вещества. Поэтому можно сказать, что электростатика связывает между собой электроны и нуклоны и позволяет говорить об одном общем давлении. Все же, в принципе, если бы нам понадобилось рассматривать строго систему с неравной нулю средней плотностью заряда, то нельзя было бы обойтись понятием давления. Пришлось бы найти распределение потенциала и электрическое поле во всей макроскопической системе и наряду с локальным давлением рассматривать объемную силу, действующую на заряженное вещество.

Магнитное поле создает объемную силу, действующую на среду, в которой течет электрический ток,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}] \quad (5.2.3)$$

(система единиц CGSE). С помощью уравнения Максвелла, связывающего ток с полем

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (5.2.4)$$

(квазистационарное поле; пренебрегаем $\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t}$), можно преобразовать выражение объемной силы к виду

$$F_\alpha = -\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}, \quad T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \left(H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} H^2 \right), \quad (5.2.5)$$

т. е. к виду, подобному действию давления:

$$\mathbf{F} = -\nabla P. \quad (5.2.6)$$

Различие заключается в том, что вместо скалярной величины, давления, в случае магнитного поля мы имеем дело с тензором натяжений. В направлении магнитного поля («линий поля») происходит

стягивание, эквивалентное натяжению с силой $H^2/8\pi$ дин/см², в двух перпендикулярных направлениях — расталкивание (давление) той же величины. Аналогичный анализ можно провести в случае электростатических сил (а также для гравитационных сил в теории тяготения в плоском пространстве). Вводя соответствующий тензор натяжений, с его помощью записывают выражение объемной силы в виде интеграла от натяжения по граничной поверхности.

С этой точки зрения различие между короткодействующими и длиннодействующими силами, упомянутое выше, уменьшается в теории поля. Натяжение есть функция локальных полей, так же как давление — функция локальной плотности частиц. Но в силу уравнений поля локальное поле определяется полным распределением зарядов. Вследствие этого тензор натяжений поля не изотропен, в противоположность изотропному давлению материи, находящейся в равновесии.

Описывать влияние магнитного поля понятием давления можно лишь в том случае, если мы имеем дело с мелкомасштабным хаотическим полем. Тогда усреднение сил по большой поверхности, пересекающей линии поля под различными углами на разных участках поверхности, даст результат

$$\bar{F} = \bar{P}s, \quad \bar{P} = \frac{\bar{H}^2}{24\pi} = \frac{\bar{\varepsilon}}{3}, \quad (5.2.7)$$

где $\bar{\varepsilon}$ — средняя плотность энергии, s — площадь поверхности.

Итак, в мелкомасштабном случае хаотического и в среднем изотропного магнитного поля можно говорить о средней энергии поля и его среднем давлении. Отметим возможную интерпретацию магнитной энергии и магнитного давления: эти величины физически являются результатом движения заряженных частиц, а еще точнее, — результатом взаимодействия движущихся заряженных частиц. Поясним это.

Если бы мы имели дело с зарядами одного знака, то магнитное взаимодействие, связанное с движением, было бы в v^2/c^2 раз меньше электростатического. Однако в электронейтральной системе в среднем электростатическое взаимодействие равно нулю, между тем движение зарядов одного знака относительно другого (ток) остается возможным.

Движение заряженных частиц — электронов, как и движение всяких частиц, дает вклад в энергию и давление просто за счет кинетической энергии частиц. Выпишем эти величины:

$$E = \frac{m_e \bar{v}^2}{2}, \quad \varepsilon = nm_e \frac{\bar{v}^2}{2}, \quad P_c = \frac{2}{3} \varepsilon = n \frac{m_e v^2}{3}. \quad (5.2.8)$$

Здесь E — кинетическая энергия одной частицы, ε и P_c — соответствующие плотность энергии (эрг/см³) и давление.

В каком соотношении находятся магнитная и кинетическая энергия и соответствующие давления? Результат решающим образом зависит от масштаба l тех областей, в которых электроны движутся коррелированно, в одном направлении.

В самом деле, $j \sim nve$, $H \sim lj/c$ (так как $|\operatorname{rot} H| \sim H/l$), так что

$$P_m \sim H^2 \sim \frac{l^2 j^2}{c^2} \sim \frac{l^2 n^2 v^2 e^2}{c^2}. \quad (5.2.9)$$

Сравним это выражение с кинетическим давлением:

$$\frac{P_m}{P_c} \sim \frac{l^2 n e^2}{m_e c^2}. \quad (5.2.10)$$

Итак, интересующее нас отношение есть

$$\frac{P_m}{P_c} \sim l^2 r_0 n,$$

где

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (5.2.11)$$

Если взять для примера $n = 6 \cdot 10^{23} \text{ см}^3$, $l = 1 \text{ см}$, получим $P_m/P_c \approx 10^{10}$. При упорядоченном (хотя бы в масштабе 1 см) движении электронов магнитное давление может играть решающую роль.

Здесь же, после затянувшегося введения, пора перейти к «обычному» давлению. Мы начнем с рассмотрения давления холодного вещества, где единственной переменной является плотность. Затем мы обратимся к состоянию вещества при высокой температуре; особенно подробно рассмотрим понятие энтропии, до сих пор недостаточно популярное среди астрономов, и, наконец, займемся адиабатами горячего вещества. В этой связи необходимо будет более строго рассмотреть вопрос о термодинамическом равновесии и о применении термодинамики к не вполне равновесным системам.

ГЛАВА 6

ХОЛОДНОЕ ВЕЩЕСТВО

§ 1. Подразделение на области

Состояние холодного вещества полностью характеризуется его плотностью и составом. Более того, с учетом взаимодействия между элементарными частицами, при большой плотности вещества, состав вещества в термодинамическом равновесии оказывается зависящим от плотности.

Весь диапазон изменения плотности грубо подразделяется на следующие участки [см. также обзор Киржниша (1971)] *):

1. $\rho < 50 \text{ г/см}^3$ (или, лучше сказать, $P < (1 \div 5) \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \approx (1 \div 5) \cdot 10^{12} \text{ г/см} \cdot \text{сек}^2$). В этой области сильно проявляются индивидуальные физико-химические свойства веществ, меняющиеся от элемента к элементу в соответствии с периодическим законом Менделеева. Для давлений до $(10 \div 20) \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$ практически для всех веществ имеются экспериментальные данные, полученные статическими методами. Для ряда веществ измерения проведены до рекордных давлений около 10 млн кг/см^2 взрывными методами. В этой области приоритет принадлежит Альтшулеру (1965) и созданной им советской школе. Методы численного теоретического расчета давления разработаны Гандельманом (1962) и Дмитриевым (1962); см. также Гандельман, Воропинов и Подвальный (1970).

2. $50 \text{ г/см}^2 < \rho < 500 \text{ г/см}^3$. В этой области индивидуальные различия между различными химическими элементами и соединениями уже стерты. Вместе с тем теория, в которой электроны рассматриваются как свободные (см. ниже п. 3), здесь еще не справедлива. Электростатическое поле атомных ядер и взаимодействие электронов между собой существенно влияют на давление, которое зависит, следовательно, не только от плотности, но и от заряда (порядкового номера) ядра. Отличие от первой области заключает-

*) Границы в какой-то мере условны, так как переходы между областями плавные. К тому же границы зависят от состава; ниже приведены типичные величины.

ся в том, что зависимость от Z в рассматриваемой второй области является плавной и монотонной.

Уравнения состояния в этой области рассмотрены в известной работе Калиткина (1960), откуда мы заимствуем ниже график и формулы.

Первая и вторая области представляют малый интерес для астрофизики (для физики Земли и других планет они важны!), ибо чем ниже давление, тем при более низкой температуре надо учитывать влияние температуры на уравнение состояния, и даже при сравнительно низкой температуре понятие холодного вещества уже неприменимо. Следует заметить, что уравнение состояния горячей материи при таких плотностях представляет существенный астрономический интерес: все обычные звезды имеют центральные плотности точно в этой области.

3. $500 \text{ г/см}^3 < \rho < 10^{11} \text{ г/см}^3$. В этой весьма широкой и важной области электроны можно рассматривать как свободные. К ним применяется теория вырожденного электронного газа. Вместе с тем, расстояние между ядрами еще больше радиуса ядерных сил, так что недостаточно известное взаимодействие нуклонов и ядер не влияет на состояние вещества.

Рассматриваемая область подразделяется на область, где электроны нерелятивистские ($\rho < 2 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$), и область, где большинство электронов имеют энергию порядка и больше $m_e c^2$ — так называемую область релятивистского вырождения ($\rho > 2 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$).

Далее, при плотности, превосходящей $10^7 \div 10^{10} \text{ г/см}^3$ (в зависимости от состава ядер), электроны большой энергии способны вызвать перестройку ядер: при приближении к краю области $\rho \sim 10^{11} \text{ г/см}^3$ большая часть нуклонов превращается в свободные нейтроны.

4. $10^{11} \text{ г/см}^3 < \rho < 10^{14} \text{ г/см}^3$. Вещество состоит преимущественно из нейтронов: взаимодействие их между собой существенно в верхней части этой области, вблизи 10^{14} г/см^3 . Иначе говоря, нейтроны нельзя рассматривать как отдельные частицы, они образуют как бы гигантское ядро. См. Киржниц (1971) и Бете и др. (1970).

5. $10^{14} \text{ г/см}^3 < \rho < 10^{16} \text{ г/см}^3$. Согласно Амбарцумяну и Саакяну (1963) в этой области, наряду с нейтронами и небольшим количеством протонов и электронов, в равновесии появляются и многие другие типы элементарных частиц — мюоны, пионы, гипероны.

6. $10^{16} \text{ г/см}^3 < \rho < 10^{93} \text{ г/см}^3$. Область, практически неизведанная ни теоретически, ни экспериментально. Здесь можно высказать только самые общие суждения об ограничениях, накладываемых на уравнение состояния теорией относительности.

7. Область $\rho > 10^{93} \text{ г/см}^3$. На первый взгляд, всякое подразделение после $\rho \sim 10^{16} \text{ г/см}^3$ напоминает пародию Аверченко: «История мидян темна и неизвестна, ученые делают ее тем не менее на

три периода: первый, о котором ничего не известно; второй, о котором известно почти столько же, сколько о первом, и третий, который последовал за двумя предыдущими». В действительности смысл такого подразделения связан с квантовыми эффектами. Плотность 10^{93} г/см^3 получается, если поставить задачу (см. гл. 2): найти величину размерности плотности, построенную из мировых постоянных: \hbar — постоянной Планка, c — скорости света и G — гравитационной постоянной. Такая величина имеет вид

$$\rho_g = \frac{c^5}{\hbar G^2} = 5 \cdot 10^{93} \text{ г/см}^3. \quad (6.1.1)$$

При $\rho < \rho_g$ квантовые эффекты в самой гравитации не играют существенной роли (хотя они существенны для частиц). Мы не знаем конкретно давления и плотности энергии как функции плотности частиц и энтропии. Мы знаем, однако, что эти функции существуют, знаем термодинамические соотношения между ними, знаем те уравнения Эйнштейна, в которых эти функции входят.

Мы можем при $\rho < \rho_g$ пользоваться понятиями непрерывного пространства и времени.

При $\rho > \rho_g$ положение существенно меняется. Становятся важными квантовые эффекты, связанные с гравитацией. Но гравитация в теории Эйнштейна связана с метрикой пространства — времени. Следовательно, сама метрика пространства — времени не может быть рассмотрена классически. Никакой конкретной теории, в которой квантовым образом рассматривалось бы пространство и время, в настоящее время не существует.

В духе всего развития физики разумно сделать только одно предположение: если плотность достигает квантовой величины в ограниченной со всех сторон области пространства и времени, то не нарушаются интегральные законы сохранения, написанные для состояний до и после периода $\rho \geq \rho_g$.

Однако в духе нашего обсуждения геометродинамики (гл. 2) мы можем сказать о поведении материи при плотностях, приближающихся к ρ_g , следующее. Рассмотрим в качестве примера идеальный ферми-газ с «планковской» плотностью $n = 1/l^3$, где l — планковская длина. Ферми-импульс будет $p_F = \hbar/l$ и соответствующая масса (конечно, не масса покоя, которая пренебрежима для обычных частиц при таких плотностях!) равна планковской массе $\sim 10^{-5} \text{ г}$. По порядку величины плотность энергии материи есть $\rho_{\text{планк}} \equiv \rho_g$. Энергия гравитационного взаимодействия двух таких частиц, разнесенных на расстояние l , равна их ферми-энергии. Следовательно, гравитацию нельзя больше рассматривать как дальнедействующую силу, она является необходимой частью уравнения состояния при приближении плотности к ρ_g . Некоторые идеи о том, как изменяется уравнение состояния под влиянием этого эффекта (для «горячей модели», конечно, так как эти ус-

ловия представляют интерес при обсуждении начала расширения Вселенной, при котором температуры велики), можно найти у Сахарова (1966).

Такова общая классификация тех областей давления и плотности, очень различных по свойствам и по теоретическим методам трактовки, с которыми приходится иметь дело в релятивистской астрофизике. По областям 1 и 7 мы ограничимся приведенными замечаниями; другие же области будут более подробно рассмотрены ниже.

Начнем рассмотрение с наиболее важной и в то же время наиболее ясной третьей области.

§ 2. Вырожденный электронный газ

Для связности изложения напомним общеизвестные формулы, приводя попутно численные значения коэффициентов. Ясное и последовательное изложение вопроса содержится в «Статистической физике» Ландау и Лифшица (1964).

Согласно принципу Паули каждый квантовый уровень занят одним электроном или свободен. При равной нулю температуре заняты все уровни с энергией $E \leq E_F$ и свободны все уровни с энергией $E > E_F$. Величина E_F , граничная энергия, называется кратко «энергия Ферми», или «е-ферми». Соответственно говорят об «импульсе Ферми» p_F . При данном движении электрона (данной орбитальной волновой функции) есть два уровня в соответствии с тем, что спин электрона $1/2 \hbar$ может иметь две проекции на произвольную ось, $1/2 \hbar$ и $-1/2 \hbar$.

Число орбитальных состояний в квазиклассическом движении равно объему в шестимерном фазовом пространстве (пространстве координат и импульсов), деленному на $(2\pi\hbar)^3$ — «объем одной ячейки» *). С учетом спина,

$$dn = 2 \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (6.2.1)$$

Отсюда получаем число уровней в 1 см^3 с импульсом меньше p_F (импульса Ферми), имея в виду, что $\int d^3x = 1 \text{ см}^3$, $\int d^3p = \frac{4\pi}{3} p_F^3$,

$$n = 2 \frac{4\pi}{3} \frac{p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \quad (6.2.2)$$

*) Чтобы самим получить объем ячейки, сосчитайте число решений уравнения Шредингера в «ящике», т. е. в объеме параллелепипеда с данными длинами ребер l_x, l_y, l_z и с условием $\psi = 0$ на сторонах параллелепипеда. Проверьте, что такое же число уровней получится, если заменить условие $\psi = 0$ (соответствующее бесконечному потенциалу) условием периодичности $\psi(x, y, z) = \psi(x + n_x l_x, y + n_y l_y, z + n_z l_z)$, где все числа n — целые. В этом случае уровни соответствуют плоским волнам с квантованными компонентами импульса.

Удобно выразить p_F в единицах $m_e c$, вводя безразмерный параметр $x = p_F/m_e c$ (не путать с координатами, стоящими в формуле (6.2.1)). Получим

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 x^3 = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{x}{l_c} \right)^3. \quad (6.2.3)$$

Здесь $\hbar/m_e c = l_c = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см есть так называемая комптоновская длина волны электрона. Естественно, что n , имея размерность см^{-3} , пропорционально l_c^{-3} . Подставляя числа, получим

$$n = 6 \cdot 10^{29} x^3. \quad (6.2.4)$$

Обозначим через μ_e молекулярный вес на один электрон, т. е. среднее число нуклонов на один электрон ($\mu_e = 1$ для водорода, $\mu_e = 4/2 = 2$ для ${}^4\text{He}$, $\mu_e = 56/26 = 2,17$ для ${}^{56}\text{Fe}$). Тогда

$$\rho = \mu_e m_0 n = \mu_e \frac{6 \cdot 10^{29}}{6 \cdot 10^{23}} x^3 = \mu_e \cdot 10^6 x^3, \quad (6.2.5)$$

поскольку масса нуклона $m_0 = 1/\beta$, где $\beta = 6 \cdot 10^{23} \text{ г}^{-1}$ — число Авогадро. Соответственно

$$x = \left(\frac{\rho}{\mu_e} \cdot 10^{-6} \right)^{1/3}. \quad (6.2.6)$$

Отсюда и следует, что при $\rho < \mu_e \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$ имеем $x < 1$, т. е. $p_F < m_e c$ и электроны нерелятивистские. При

$$\rho > \mu_e \cdot 10^6 \text{ г/см}^3, \quad p_F > m_e c.$$

Точное выражение полной энергии электрона E'_F при заданном импульсе p_F , справедливое при любых (нерелятивистских и релятивистских) значениях импульса, таково:

$$E'_F = \sqrt{(m_e c^2)^2 + c^2 p_F^2} = m_e c^2 \sqrt{1 + x^2}. \quad (6.2.7)$$

Выпишем предельные случаи этой формулы:

$$\left. \begin{aligned} E'_F &= m_e c^2 (1 + x^2/2), & x &\ll 1, \\ E'_F &= m_e c^2 \left(x + \frac{1}{2x} \right), & x &\gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

Выражение для E'_F включает энергию покоя, т. е. для покоящегося электрона принято $E_0 = m_e c^2$. Для расчетов, связанных с ядерными реакциями, где принято выражать энергию в миллионах электронвольт, напомним, что $1 \text{ Мэв} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}$, $m_e c^2 = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ эрг} = 0,51 \text{ Мэв}$.

Возникает вопрос, сколько энергии выделится при превращении одного электрона с энергией E'_F в покоящийся электрон $E_0 = m_e c^2$. Из формулы (6.2.8) находим выделяющуюся энергию:

$$E'_F - E_0 = \begin{cases} m_e c^2 (\sqrt{1+x^2} - 1) = \frac{x^2}{2} m_e c^2, & x \ll 1, \\ m_e c^2 \left(x - 1 + \frac{1}{2x} \right), & x \gg 1. \end{cases} \quad (6.2.9)$$

Поставим теперь более реалистический вопрос, сколько энергии выделится при превращении сжатого вещества с энергией электронов E_F в обычный газ. При этом электроны переходят в состояние, где их энергия практически *) равна $E_0 = m_e c^2$. Первоначальное состояние характеризуется средней энергией электрона:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= m_e c^2 \int_0^\infty \sqrt{1+x^2} x^2 dx \Big/ \int_0^\infty x^2 dx = \\ &= \frac{3m_e c^2}{8x^3} [x(1+2x^2)\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})]. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Наряду с этим точным выражением полезны асимптотические формулы (выписываем сразу для $\bar{E} - E_0$):

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} - E_0 &= \frac{3x^2}{10} m_e c^2, & x \ll 1, \\ \bar{E} - E_0 &= m_e c^2 \left(\frac{3}{4}x - 1 + \frac{3}{4}\frac{1}{x} \right), & x \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.11)$$

Давление вырожденного электронного газа можно выразить через энергию, приходящуюся на один электрон, по термодинамической формуле:

$$P = n^2 \frac{d\bar{E}}{dn}. \quad (6.2.12)$$

В этой формуле \bar{E} находится под знаком дифференцирования и поэтому безразлично, пользуемся ли мы \bar{E} или $\bar{E} - E_0$:

$$\frac{d\bar{E}}{dn} = \frac{d\bar{E}}{dx} \left(\frac{dn}{dx} \right)^{-1} = \frac{d\bar{E}}{dx} \left(\frac{d \ln n}{dx} \right)^{-1} n^{-1} = \frac{1}{3} x \frac{d\bar{E}}{dx} n^{-1}, \quad (6.2.13)$$

так как $n = ax^3$, $\ln n = 3 \ln x + \ln a$, $\frac{d \ln n}{dx} = 3 \frac{1}{x}$.

Для газа из невзаимодействующих частиц давление можно также найти, рассматривая перенос импульса через единичную

*) Энергия связи электронов в атоме мала; она составляет в среднем на один электрон $13,5 \text{ эв} = 2,7 \cdot 10^{-5} m_e c^2$ для водорода, $7,7 \cdot 10^{-5} m_e c^2$ для гелия, $10^{-3} m_e c^2$ для железа. Далее мы пренебрегаем этой величиной.

площадку частицами с заданной скоростью и импульсом,

$$P = \int u_z p_z dn.$$

Мы выбрали площадку в плоскости x, y , т. е. \perp оси z . Угол между импульсом и осью z обозначим θ :

$$\left. \begin{aligned} u_z &= u \cdot \cos \theta, & p_z &= p \cdot \cos \theta, \\ u &= \frac{c^2 p}{E} = c \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & p &= m_e c x; \end{aligned} \right\} \quad (6.2.14)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{2(m_e c)^4 c}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{x_F} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} x x^2 dx = \\ &= \frac{8\pi(m_e c)^4 c}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= \frac{(m_e c)^4 c}{8\pi^2 \hbar^3} \left[x \sqrt{1+x^2} \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \end{aligned}$$

Оба способа, естественно, дают одинаковый ответ:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{m_e c^2}{l_c^3} f(x), \quad \text{где } x = \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{1/3}, \\ f(x) &= \frac{1}{8\pi^2} \left[x \sqrt{1+x^2} \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.15)$$

Снова выпишем формулы для двух предельных случаев: нерелятивистского —

$$P = \frac{m_e c^2}{l_c^3} \frac{x^5}{15\pi^2} = \frac{2}{3} (\bar{E} - E_0) n = \frac{1}{15\pi^2} \frac{m_e c^2}{l_c^3} \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{5/3} = 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}, \quad (6.2.16)$$

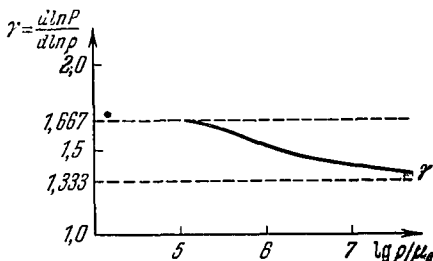
и ультрарелятивистского —

$$\begin{aligned} P &= \frac{m_e c^2}{l_c^3} \frac{1}{12\pi^2} x^4 \cong \frac{1}{3} (\bar{E} - E_0) n \cong \\ &\cong \frac{1}{12\pi^2} \frac{m_e c^2}{l_c^3} \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{4/3} = 1,2 \cdot 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}. \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

В последних двух формулах оставлен только старший член в давлении (x^4) и в выражении энергии $\left(\frac{3}{4} x \right)$, а следующие члены опущены.

Итак, для вырожденного электронного газа показатель адиабаты $\frac{d \ln p}{d \ln \rho}$ равен $5/3$ при малой плотности и $4/3$ при большой плотности.

На рис. 27 показан график зависимости показателя адиабаты от плотности; заметьте, что на оси ординат показан только отрезок от $4/3$ до $5/3$, а по оси абсцисс плотность *) отложена в логарифмическом масштабе. Как видно из графика, показатель адиабаты плавно и монотонно меняется в указанных пределах. [Таблицы показателя адиабаты см. у Шацмана (1958).]



§ 3. Поправки в области высоких давлений

В предыдущем параграфе электронный газ рассматривался как идеальный, не учитывалось электростатическое

взаимодействие электронов между собой, взаимодействие электронов с ядрами, а также взаимодействие ядер между собой. Уже из этого перечисления, в котором упоминаются взаимодействия разного знака (притяжение и отталкивание), естественно следует вывод, что в первом приближении эти взаимодействия взаимно уничтожаются и благодаря этому оправдывается приближение свободного электронного газа. Эта взаимная компенсация очевидным образом обусловлена тем, что вещество в среднем электронейтрально. Главная поправка связана с тем, что положительный заряд не распределен равномерно в пространстве, а сосредоточен в отдельных ядрах. Эта поправка уменьшает энергию и уменьшает давление: отталкивающие друг друга ядра находятся в среднем на большем расстоянии друг от друга по сравнению со средним расстоянием между притягивающимися ядрами и электронами; отталкивание слабее притяжения.

Очевидно, что при абсолютном нуле температуры (и без учета квантовых эффектов для ядер, которые намного тяжелее электрона) ядра располагаются в решетке с плотнейшей упаковкой **).

Рис. 27. Показатель адиабаты $\gamma = \frac{d \ln p}{d \ln \rho}$ для вещества, давление которого определяется вырожденными элементами, а плотность — барионами.

*) Точнее, величина ρ/μ_0 , благодаря чему график становится универсальным для любого вещества.

**) Так называется решетка, в которой при данном минимальном расстоянии между ядрами достигается наибольшая объемная плотность ядер. Очевидно, что эта же решетка решает и обратную задачу — расположения ядер с наибольшим расстоянием между соседями при данной объемной плотности.

Найдем приближенное выражение поправки к энергии. Заменим ячейку решетки шаром того же объема, $V = \frac{1}{N} = \frac{4\pi r_1^3}{3}$, где N — число ядер в 1 см^3 , r_1 — радиус шара. Потенциал заряда Ze , помещенного в центре, есть Ze/r ; энергия взаимодействия Z электронов, равномерно распределенных в объеме шара, с ядром равна

$$E_{n, e} = - \int_0^{r_1} \frac{Ze}{r} \rho_e \cdot 4\pi r^2 dr = - \frac{3 (Ze)^2}{2r_1} \quad (6.3.1)$$

(мы учли, что $\rho_e V = -Ze$); здесь ρ_e — плотность заряда электронов в шаре.

Теперь найдем взаимодействие электронов между собой. Потенциал внутри равномерно заряженного шара (т. е. та часть потенциала, которая создается только электронами, без учета ядра):

$$\Phi_e = \frac{Ze}{r_1} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_1^2} \right).$$

Энергия взаимодействия:

$$E_{ee} = \frac{1}{2} \int \rho_e \Phi_e dV = \frac{(Ze)^2}{r_1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \right) = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{r_1}. \quad (6.3.2)$$

Вся электростатическая энергия одной ячейки:

$$E = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{5} \right) \frac{(Ze)^2}{r_1} = -\frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{r_1}. \quad (6.3.3)$$

Взаимодействием с электронами и ядрами, находящимися в других ячейках, можно пренебречь, поскольку эти ячейки электронейтральны: внешнее поле заряда одного знака, окруженного сферически-симметричным облаком нейтрализующего заряда другого знака, равно нулю. Значит, ошибка связана лишь с отклонением элементарной ячейки решетки от сферической формы. Точный расчет показывает, что ошибка приведенного выше приближенного выражения составляет меньше 0,3% от поправки на кулоновское взаимодействие.

Другой способ расчета, принципиально более прозрачный, состоит в следующем: найдем электрическое поле E^* внутри ячейки, состоящей из центрального ядра и распределенного отрицательного заряда электронов:

$$E^* = \frac{Ze}{r^2} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^3 \right].$$

Теперь найдем энергию поля, т. е. $\int \frac{(E^*)^2}{8\pi} dV$. Однако здесь нельзя забывать, что за нуль принята энергия вещества при

нулевой плотности, т. е. энергия ядра и электронов, находящихся далеко от ядра. У нулевой системы тоже есть поле:

$$E_0^* = \frac{Ze}{r^2}.$$

Искомая электростатическая энергия сжатого вещества, отсчитанная от энергии при нулевой плотности, равна разности двух интегралов:

$$E = \frac{(Ze)^2}{8\pi} \int_0^{r_1} \frac{1}{r^4} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^3 \right]^2 4\pi r^2 dr - \frac{(Ze)^2}{8\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr.$$

Перепишав выражение следующим образом, получим в согласии с предыдущим расчетом конечную величину:

$$\begin{aligned} E &= \frac{(Ze)^2}{2} \int_0^{r_1} \frac{1}{r^4} \left[-2 \left(\frac{r}{r_1} \right)^3 + \left(\frac{r}{r_1} \right)^6 \right] r^2 dr - \frac{1}{2} (Ze)^2 \int_{r_1}^\infty \frac{1}{r^4} r^2 dr = \\ &= -\frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{r_1}. \end{aligned} \quad (6.3.3')$$

Сравним электростатическую энергию со средней энергией вырожденных релятивистских электронов. Элементарная ячейка содержит одно ядро, а следовательно, Z электронов. Найдем радиус ячейки r_1 , выраженный через плотность электронов n :

$$\frac{4\pi}{3} r_1^3 = \frac{1}{N} = \frac{Z}{n}, \quad r_1 = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{Z}{n} \right)^{1/3}. \quad (6.3.4)$$

Электростатическая энергия, отнесенная к одному электрону и выраженная через плотность электронов, равна

$$\varepsilon_{el} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{1/3} e^2 n^{1/3}. \quad (6.3.5)$$

Закон зависимости от n такой же, как и для ферми-энергии релятивистского вырожденного электронного газа. Напомним, что в расчете на один электрон в ультрарелятивистском пределе

$$E_F = cp_F = \hbar c (3\pi^2 n)^{1/3}.$$

Средняя энергия электрона:

$$\bar{E} = \frac{3}{4} E_F = \hbar c \cdot \frac{3}{4} (3\pi^2)^{1/3} n^{1/3}. \quad (6.3.6)$$

Отношение электростатической энергии к средней энергии ферми-газа:

$$\frac{\varepsilon_{el}}{E} = -\frac{e^2 Z^{2/3}}{\hbar c} \left(\frac{4\pi}{3 \cdot 3\pi^2} \right)^{1/3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{10} = -0,62 \frac{e^2}{\hbar c} Z^{2/3} = -4,56 \cdot 10^{-3} Z^{2/3}. \quad (6.3.7)$$

Эта поправка для ультрарелятивистского газа является главной. В силу одинаковой зависимости от n в равном отношении находятся и поправка к давлению и само давление идеального газа. Есть еще второстепенные поправки, связанные с тем, что взаимодействующие электроны распределены неравномерно; при этом в ультрарелятивистском случае наряду с электростатическим взаимодействием надо учитывать и магнитное взаимодействие электронов. Наличие ядер несколько нарушает распределение плотности электронов в пространстве. Заимствуем у Сальпетера (1961) окончательное выражение давления с учетом и других поправок в ультрарелятивистском случае:

$$\frac{P}{P_0} = 1,00116 - 4,56 \cdot 10^{-3} Z^{2/3} - 1,78 \cdot 10^{-5} Z^{4/3}. \quad (6.3.8)$$

Здесь P_0 — давление, вычисленное без учета поправок. Это выражение дает соответственно при $Z = 1, 6, 12, 26$:

$$\frac{P}{P_0} = 0,9976; 0,9859; 0,9768; 0,9598.$$

§ 4. Область средних плотностей

Выше было выяснено, что основная поправка к уравнению состояния связана с электростатическим взаимодействием ядер и электронов и снижает давление по сравнению с давлением свободного невзаимодействующего вырожденного газа.

При этом было получено выражение энергии (на один электрон):

$$\varepsilon_{el} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n^{1/3}. \quad (6.4.1)$$

В нерелятивистской области средняя энергия свободного электрона

$$\overline{E} - \overline{E}_0 = \frac{3}{5} m_e c^2 \frac{x^2}{2} = \frac{3}{10} m_e c^2 \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3 n}{m_e^3 c^3} \right)^{2/3}. \quad (6.4.2)$$

Найдем плотность, при которой в этом приближении давление равно нулю. В таком случае должно выполняться равенство

$$\overline{E} - \overline{E}_0 = -\frac{1}{2} \varepsilon_{el}. \quad (6.4.3)$$

Это соотношение получается из условия

$$\frac{\partial (\overline{E - E_0} + \varepsilon_{el})}{\partial n} = 0 \quad (6.4.4)$$

и выражает теорему вириала. И использованное приближение дает «нормальную плотность» ρ_0 , т. е. плотность, которую вещество имеет при $P = 0$, соответствующую

$$n_0^{1/3} = \frac{2^{1/3}}{\pi} Z^{2/3} \frac{e^2 m_e}{\hbar^2} = \frac{2^{1/3}}{\pi} Z^{2/3} \frac{1}{a_0}, \quad (6.4.5)$$

где $a_0 = \left(\frac{e^2 m_e}{\hbar^2} \right)^{-1} = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см — это «боровский» радиус, радиус первой орбиты атома водорода в старой квантовой механике Нильса Бора.

Соответствующая плотность (A — атомный вес) равна

$$\rho_0 = \frac{A}{Z} \frac{n}{6 \cdot 10^{23}} = \frac{2}{\pi^3} \frac{AZ}{6 \cdot 10^{23} a_0^3} \cong AZ, \quad (6.4.6)$$

т. е. около 1 для водорода, 300 для магния, 1300 для железа, 16 000 для свинца. Согласие с опытом очень плохое. Причина заключается в том, что расчет был проведен по невозмущенному равномерному распределению электронов. На самом же деле взаимодействие с ядром весьма сильно меняет распределение электронов в пространстве даже при плотностях, намного выше приведенных. Поэтому формула (6.2.15) дает только первые два члена разложения точной зависимости давления от плотности. Разложение проводится по падающим степеням плотности: $\rho^{1/3}$ — первый член, $\rho^{2/3}$ — второй, мы и взяли то ρ , при котором эти первые два члена равны. Но когда становится существенным второй член, необходим третий, четвертый и т. д., так что необходим иной подход. В 30-х годах была развита приближенная теория, в которой электронный газ с давлением $P = an^{5/3}$ рассматривался в электрическом поле ядра и самих электронов. Эта теория получила название теории самосогласованного поля.

Рассматривается распределение электронов внутри элементарной ячейки, которую заменяют шаром радиуса r_1 того же объема (см. § 3). Плотность электронов $n(r)$ зависит от радиуса r . Кроме того, рассматривается электростатический потенциал $\phi(r)$.

Запишем, во-первых, уравнение Пуассона, дающее зависимость ϕ от $n(r)$:

$$\Delta \phi = -4\pi \xi(r) = -4\pi [Ze \delta(r) - en(r)], \quad (6.4.7)$$

где $e = 4,77 \cdot 10^{-10}$ — положительное число, заряд электрона (по модулю), $\xi(r)$ есть плотность заряда. Величина $Ze \delta(r)$, где

δ , дельта-функция Дирака, описывает точечный заряд ядра в центре ячейки; $-en(r)$ — заряд электронов, размазанных по ячейке.

Второе уравнение можно записать как условие механического равновесия занятого электронами-элемента объема, на который действуют электростатические силы и силы давления:

$$\xi(r) E - \nabla P(n) = (-ne)(-\nabla\varphi) - \frac{\partial P(n)}{\partial r} = 0. \quad (6.4.8)$$

Когда объемная сила является потенциальной и давление зависит только от плотности (в данном случае эти условия выполнены), уравнение равновесия можно проинтегрировать, поэтому

$$\frac{e d\varphi}{dr} - \frac{d}{dr} \int \frac{1}{n} dP = 0, \quad H(n) - e\varphi = K, \quad (6.4.9)$$

где K — константа, H — удельная (на один электрон) энтальпия электронного газа, $H = \int \frac{1}{n} dP = E + \frac{1}{n} P$ (энергию E не следует путать с электрическим полем E).

Примечательно, что $H(n) = E_F(n)$. В самом деле, для нерелятивистского газа

$$\bar{E} - E_0 = \frac{3}{5} (E_F - E_0), \quad P = n \frac{2}{3} (\bar{E} - E_0) = n \frac{2}{5} (E_F - E_0),$$

откуда легко получится с точностью до несущественного слагаемого указанное соотношение между H и E_F . Это соотношение является общим, оно справедливо и в релятивистской области. Окончательно получается уравнение

$$E_F - e\varphi = K'. \quad (6.4.10)$$

Смысл этого уравнения ясен: в равновесии полная энергия минимальна, равновесие должно быть в первом приближении безразличным по отношению к любым перемещениям небольшого числа электронов с одного места на другое. Эти перемещения можно производить, взяв электрон в одном месте (r') и поместив его в другое место (r''), что даст условие

$$E_F(r') - e\varphi(r') = E_F(r'') - e\varphi(r''). \quad (6.4.11)$$

При этом r' и r'' любые, $r' - r''$ не должно быть малым.

Другой способ связан с перемещением всех электронов, находящихся в данной точке, на малое расстояние δr . Его рассмотрение приводит к уравнению равновесия в гидродинамической форме, с градиентом давления. Ясно, что обе формы условия равновесия должны быть эквивалентны.

Мы так подробно остановились на этом вопросе в связи с тем, что совершенно аналогичная ситуация имеет место для звезды как

целого; как мы увидим ниже, условие механического равновесия звезды эквивалентно условию постоянства суммы химического потенциала и гравитационного потенциала по всей звезде.

Вернемся к микромиру. Так как энергия Ферми просто выражается через плотность электронов, то получим (A , B — константы)

$$An^{2/3} - e\varphi = K', \quad n = B(K' + e\varphi)^{3/2}$$

и окончательное уравнение самосогласованного поля:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = c(K'' + \varphi)^{1/2} \quad (6.4.12)$$

выписано для нерелятивистского случая и $0 < r < r_1$; здесь c — известная константа, элементарно выражающаяся через \hbar , m , e , а $K'' = K'/e$ — константа, значение которой заранее не задано.

Граничные условия получаются из следующих соображений: в центре элементарной ячейки находится ядро с зарядом Ze , значит, при $r \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \text{const} + Ze/r$. Внутри шара должны на-

ходиться Z электронов, так что $4\pi \int_0^R n(r) r^2 dr = Z$. Это условие приводит к тому, что ячейка в целом электронейтральна. Отсюда следует (в этом легко убедиться и формально из уравнения), что при $r = R \frac{d\varphi}{dr} = 0$. Второе граничное условие выполняется лишь при вполне определенном значении K' *).

Давление вещества равно давлению электронного газа на границе ячейки, т. е. оно известно, если мы знаем $n(R)$, которая выражается через $K' + e\varphi(R)$. На границе при $r = R$ электрическое поле равно нулю, ячейки взаимодействуют друг с другом только через давление. Можно показать, что такое наглядное определение совпадает с выражением давления через производную энергии по плотности.

Из анализа размерности следует, что результат можно представить в виде

$$P = B\bar{n}^{1/2} f \left[\frac{Ze^2}{R} / E_F(\bar{n}) \right]. \quad (6.4.13)$$

Здесь \bar{n} — средняя плотность электронов:

$$\bar{n} = 6 \cdot 10^{23} \frac{\rho Z}{A} = \beta \frac{\rho Z}{A}, \quad \beta = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{s};$$

*) К величине φ можно добавить произвольную постоянную; тогда K' уменьшается на соответствующую величину; сумма $K' + e\varphi$ определена однозначно.

A — атомный вес; $B\bar{n}^{1/3}$ — давление свободного вырожденного электронного газа (без учета изменения плотности за счет взаимодействия с ядром; выражение для $B\bar{n}^{1/3}$ приведено выше (6.2.16)); $f[y]$ — безразмерная функция, характеризующая влияние перераспределения заряда на давление. При этом ясно, что значение этой функции может быть только меньше единицы, так как плотность электронов на границе ячейки обязательно меньше средней.

Безразмерная f является функцией безразмерного отношения потенциальной энергии к кинетической:

$$y = \frac{Ze^2}{R} / E_F. \quad (6.4.14)$$

Вновь вместо точных значений энергии мы берем характерные значения на расстоянии R при средней плотности $\langle n \rangle$.

Выразим y через плотность, опуская все безразмерные множители:

$$\left. \begin{aligned} R &= (A/\beta\rho)^{1/3}, \\ E_F &= \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} = \hbar^2 \left(\frac{\beta Z \rho}{A} \right)^{2/3} / m, \\ y &= \frac{Ze^2 \left(\frac{\beta \rho}{A} \right)^{1/3} m}{\hbar^2 \left(\frac{\beta Z \rho}{A} \right)^{2/3}} = \frac{me^2 Z^{1/3} A^{1/3}}{\hbar^2 \beta^{1/3} \rho^{1/3}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.15)$$

Поведение функции f в двух предельных случаях $y \ll 1$ и $y \gg 1$ можно предвидеть. В первом случае в пределе $f(0) = 1$, а следующий член разложения

$$f(y) = 1 - By$$

даст поправку, пропорциональную $\rho^{1/3}$ (ср. выше формулы § 3). Не столь очевиден другой предельный случай. Следует ожидать, что при данном размере ячейки при неограниченном увеличении заряда ядра Z давление стремится к вполне определенному пределу. Наглядная картина такова: мы увеличиваем заряд ядра и одновременно увеличиваем число электронов. При этом новые электроны садятся вблизи ядра и экранируют добавленный заряд, распределение зарядов вдали от ядра не меняется, стремится к определенному пределу при $Z \rightarrow \infty$. Этот принцип, подтверждаемый интегрированием уравнения*), приводит к следующему выводу: чтобы выражение для давления

$$P = \text{const} \cdot Z^{1/3} \rho^{4/3} f \left(\frac{Z^{1/3}}{\rho^{1/3}} \right)$$

*) При $Z \rightarrow \infty$ решение имеет асимптотический вид: $\Phi \sim r^{-4}$, $n(r) \sim r^{-6}$.

не зависело от Z в пределе $Z \rightarrow \infty$, надо, чтобы $f(y) = y^{-5}$ при $y \gg 1$. Но в таком случае

$$P = \text{const} \cdot \rho^{10/3}. \quad (6.4.16)$$

Любопытно, что такие качественные соображения дают асимптотический закон при не слишком высоком давлении, близкий к $P \sim \rho^3$. Закон $P \sim \rho^3$ был получен Ландау и Станюковичем (1945) для продуктов взрыва взрывчатых веществ. Тогда же Станюкович (см. [1971]) показал, что этот закон очень удобен для газодинамических расчетов. Эксперименты по сжатию железа и ряда других элементов в довольно широкой области давления (до ~ 10 млн. атм) приблизительно описываются близким уравнением

$$P = a(\rho^3 - \rho_0^3). \quad (6.4.17)$$

Расчеты уравнения состояния с помощью уравнения (6.4.13) все же грубы *). Оставаясь в рамках усредненного, коллективного описания электронов, можно учесть ряд поправок и значительно уточнить результат. Эта работа была проделана Калиткиным (1960) с использованием соображений Киржница, Компанейца, Павловского и др. Дальнейшее уточнение возможно лишь при рассмотрении индивидуальных орбит электронов и специфических химических свойств элементов.

Результат Калиткина (1960) сводится к выражению для давления в виде разности двух членов:

$$P = B \left(\frac{\rho Z}{A} \right)^{5/3} f \left(\frac{Z^{1/3} A^{1/3}}{\rho^{1/3}} \right) - c \left(\frac{\rho Z}{A} \right)^{4/3} \Phi \left(\frac{Z^{1/3} A^{1/3}}{\rho^{1/3}} \right), \quad (6.4.18)$$

где первый член совпадает с найденным раньше, а второй содержит поправки. Функции f и Φ см. в работе Калиткина (1960). Эта простая формула в среднем довольно хорошо описывает даже такую «деликатную» величину, как ρ_0 — плотность элементов при нормальных условиях.

На рис. 28 приводим заимствованный из работы Калиткина график, на котором сопоставлены вычисленная и измеренная

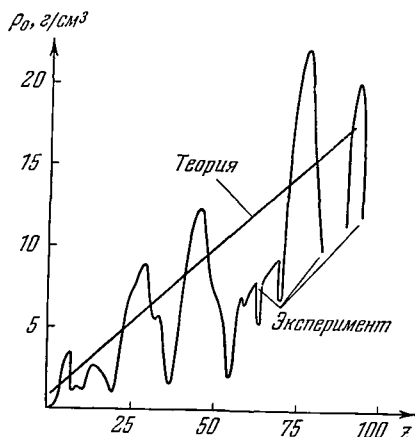


Рис. 28. Экспериментальная и теоретическая (статистическая) зависимость плотности несжатого вещества от заряда ядер.

*) Подробно теория самосогласованного поля изложена у Гомбаша (1950).

ρ_0 в зависимости от атомного номера Z . За пределами теории лежат только колебания, связанные с химической спецификой, периодические отклонения вверх и вниз. При давлении 5 ÷ 10 млн. атм они уже сильно сглажены.

Приводим также табл. II для нескольких элементов, заимствованную из работы Сальпетера (1961). В таблице дано отношение полного давления к давлению вырожденного газа (6.2.15), как функция параметра релятивизации x для фиксированных Z .

Таблица II

Отношение полного давления к давлению вырожденного газа

x	$\left(\frac{2}{\mu_e}\right) \rho \frac{z}{\text{см}^3}$	Z			
		2	6	12	26
0,05	$2,44 \times 10^2$	0,760	0,564	~0,3	—
0,1	$1,95 \times 10^3$	0,8802	0,7819	0,6705	~0,5
0,2	$1,56 \times 10^4$	0,9404	0,8906	0,8341	0,7308
0,3	$5,26 \times 10^4$	0,9604	0,9266	0,8882	0,8178
0,4	$1,25 \times 10^5$	0,9705	0,9445	0,9150	0,8607
0,5	$2,44 \times 10^5$	0,9765	0,9551	0,9303	0,8860
0,6	$4,21 \times 10^5$	0,9805	0,9620	0,9410	0,9024
0,7	$6,68 \times 10^5$	0,9833	0,9669	0,9482	0,9138
0,8	$1,00 \times 10^6$	0,9853	0,9705	0,9535	0,9221
1,0	$1,95 \times 10^6$	0,9881	0,9752	0,9605	0,9332
1,2	$3,37 \times 10^6$	0,9898	0,9782	0,9684	0,9401
1,4	$5,36 \times 10^6$	0,9909	0,9801	0,9677	0,9447
1,6	$8,00 \times 10^6$	0,9917	0,9814	0,9697	0,9479
1,8	$1,14 \times 10^7$	0,9922	0,9824	0,9711	0,9511
2,0	$1,56 \times 10^7$	0,9926	0,9831	0,9721	0,9519
2,5	$3,04 \times 10^7$	0,9932	0,9842	0,9738	0,9546
3,0	$5,26 \times 10^7$	0,9935	0,9848	0,9748	0,9562
4,0	$1,25 \times 10^8$	0,9938	0,9853	0,9757	0,9577
5,0	$2,44 \times 10^8$	0,9939	0,9856	0,9761	0,9585
7,5	$8,22 \times 10^8$	0,9939	0,9858	0,9765	0,9592
∞	∞	0,9939	0,9859	0,9768	0,9598

При больших Z и малых x , когда значение отношения меньше 0,5, данные расчетов ненадежны (правый верхний угол таблицы).

§ 5. Ядерные процессы и ядерное взаимодействие; влияние на уравнение состояния

В области плотности выше 10^3 г/см^3 уравнение состояния существенно зависит от ядерных процессов и взаимодействий. Можно поставить точную задачу о нахождении состояния с наименьшей энергией при каждой данной плотности барионов и нуле температуры. Энергия есть сумма энергии ядер и энергии

электронов: последняя зависит от $Z/A = 1/\mu_e$. В релятивистском ферми-газе средняя энергия одного электрона

$$\bar{E} = \frac{3}{4} E_F = \frac{3}{4} c p_F = \frac{3}{4} m_e c^2 \left(\frac{\rho}{10^6 \mu_e} \right)^{1/3}. \quad (6.5.1)$$

Соответственно энергия электронов на один грамм вещества:

$$E_e = \frac{3}{4} \frac{m_e c^2}{m_p} \left(\frac{\rho}{10^6} \right)^{1/3} \mu_e^{-1/3} = 3,75 \cdot 10^{15} \rho^{1/3} \mu_e^{-1/3} \text{ эрг/г}. \quad (6.5.2)$$

Таким образом, энергия сжатого состояния отличается от ядерной энергии отдельных атомов

$$E = E_n(A, Z) + E_e. \quad (6.5.3)$$

Минимум E_n , как известно, соответствует стабильному и наиболее распространенному изотопу железа Fe_{56}^{26} *). Добавочный член E_e , играющий тем большую роль, чем больше плотность, смещает минимум E в сторону ядер с большим μ_e .

Начнем с очень грубой картины, пренебрегая многими промежуточными шагами (см. ниже) и рассматривая только три специальных состояния: железо, сильно перегруженное нейтронами ядро и «газ» свободных нейтронов. По расчетам Сальпетера (1961), при $E_F = 20,6 \text{ Мэв}$, $\rho = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$, $P = 3,2 \cdot 10^{29} \text{ эрг/см}^3$ становится энергетически выгодным превращение Fe в Sr. Здесь и ниже (а также в табл. III и IV) E_F не включает mc^2 . Этот изотоп Sr является в обычных условиях радиоактивным, однако при рассматриваемых условиях наличие ферми-распределения электронов с граничной энергией $E_F > 20,6 \text{ Мэв}$ запрещает распад стронция. Подробнее процесс перехода от Fe к Sr с изменением плотности

Т а б л и ц а III

Критические точки перехода между различными ядрами

Z, A	(26,56)	(28,62)	(28,64)	(28,66)	(28,68)	(30,76)	(30,78)	(30,80)	(32,90)	(38,120)	n
E_F	0,6	2,5	3,9	6,1	7,0	8,5	9,5	14,8	20,6	24,0	
lgp	7,15	8,63	9,15	9,69	9,87	10,13	10,28	10,84	11,28	11,53	

*) Строго говоря, минимум E_n соответствует Ni_{82}^{28} (Кравцов, 1965), но разность $(E_n)_{\text{Fe}} - (E_n)_{\text{Ni}}$ крайне мала $[(E_n)_{\text{Fe}} - (E_n)_{\text{Ni}}] / [(E_n)_{\text{Fe}}] = 4,5 \cdot 10^{-4}$ и незначительна. При ненулевой температуре более важную роль в образовании элементов играют статистические множители и кинетика процессов.

показан в табл. III (Сальпетер, 1961), где приведены ферми-энергии ($Mэв$) и соответствующие плотности ($г/см^3$) для переходов при равновесных условиях между различными ядрами (Z, A).

При плотностях, больших $\rho = 10^{11,53} г/см^3$, равновесным уже является состояние из отдельных нейтронов (подробнее см. ниже).

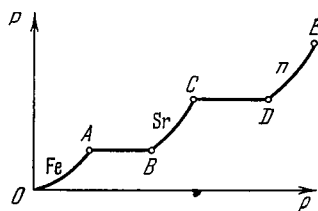


Рис. 29. Упрощенная схема (подробнее см. табл. II) зависимости давления от плотности холодного вещества.

Для давления, в принципе, получается кривая $P(\rho)$ такая же, как при фазовых превращениях 1-го рода (конденсация пара в жидкости и т. п.). На рис. 29 приводится схематическая упрощенная зависимость, где учтены только железо, стронций и свободные нейтроны. Равновесие между железом и стронцием требует ферми-энергии $20,6 Mэв$, соответствующей электронной концентрации $3,9 \cdot 10^{34} см^{-3}$. В силу электронейтральности такая электронная концентрация соответствует плотности материи $1,4 \cdot 10^{11} г/см^3$ для Fe и $2 \cdot 10^{11} г/см^3$ для Si.

Равновесие между стронцием и покоящимися свободными нейтронами требует $E_F = 24 Mэв$, что соответствует плотности Sr $3,2 \cdot 10^{11} г/см^3$.

Теперь мы готовы дать эскиз соотношения $P(\rho)$. Он состоит из сегмента $O - A$ с чистым железом и $P = a_1 \rho^{1/3}$, $a_1 = 4,4 \cdot 10^{14}$, который оканчивается при $\rho = 1,4 \cdot 10^{11} г/см^3$. Вдоль сегмента $A - B$ происходит превращение $Fe \rightarrow Sr$.

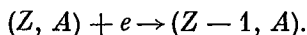
Точки A и B соответствуют равному давлению, а следовательно, и равной плотности электронов. При этом очевидно, что плотности двух веществ в точках A и B находятся в соотношении, обратном μ_e , так что конкретно плотность $\rho_B = 1,47 \rho_A$ возрастает при превращении в 1,47 раз. Поскольку взаимодействие ядер пренебрежимо мало, то ни на давление, ни на энергию не влияют расхождение ядер; в частности, несущественно, образуют ли железо и стронций две геометрические разделенные фазы или твердый раствор. Чистый Sr находится в равновесии на сегменте $B - C$ от $\rho = 2 \cdot 10^{11} г/см^3$ до $\rho = 3,2 \cdot 10^{11} г/см^3$, здесь $P = a$, $\rho^{1/3}$, $a_2 = 0,6 a_1$.

На следующем сегменте, $C - D$, мы встречаемся со смесью Sr и нейтронов. Вплоть до плотностей порядка $\rho_0 \sim 10^{12} г/см^3$ законно пренебрегать кинетической энергией нейтронов и энергией ядерного взаимодействия. В этом приближении электронная плотность, плотность Sr в смеси и давление (которое вызвано только электронами) остаются постоянными. Общая плотность растет от C к D благодаря росту вклада от нейтронов. В точке D нет резкого изменения. Где-то вблизи точки D величины начинают постепенно изменяться,

и нейтронное давление начинает плавно расти до тех пор, пока не достигнет по порядку величины электронного давления вблизи D . О дальнейшей истории (после $\rho > \rho_0$) мы будем говорить ниже.

Однако все проведенное выше рассмотрение, будучи принципиально правильным и строгим, представляет собой пример излишнего педантизма. Дело в том, что при низкой температуре нет никакого реального механизма, который мог бы превратить железо в стронций за разумное время. Сформулируем ту же мысль иначе: для того чтобы превратить $\text{Fe}_{56}^{26} \rightarrow \text{Sr}_{120}^{38}$ за разумное время, нужны высокие температуры, нужно сначала разбить ядро железа на составные части (α -частицы и нейтроны) и по-другому перетасовать их. То же самое относится к тем промежуточным ядрам с $A \neq A_{\text{железа}}$, которые приведены в табл. III. Но при соответствующей высокой температуре будет и равновесие. Процессы и равновесие при высокой температуре будут рассмотрены в следующей главе.

Реально при сжатии вещества при достижении определенной пороговой E_F становится возможным обратный β -процесс: электрон захватывается ядром и один из протонов ядра превращается в нейтрон:



Процесс называется нейтронизацией вещества. Он протекает со скоростью слабых взаимодействий.

При сжатии железа при достижении $E_F = 3,7 \text{ Мэв}$, $\rho = 1,15 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$ станет возможным превращение железа в Mn_{56}^{25} . Но порог превращения нечетно-нечетного Mn_{56}^{25} в четно-четный Cr_{56}^{24} меньше, он равен $1,6 \text{ Мэв}$. Поэтому каждое ядро Mn_{56}^{25} тут же будет превращаться в Cr_{56}^{24} *).

Таким образом, при сжатии до плотности хотя бы не намного превышающей критическую $\rho_c = 1,15 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$, начинается превращение железа в хром. При этом давление равно

$$1,2 \cdot 10^{23} \left(\frac{E}{m_e c^2} \right)^4 = 3,3 \cdot 10^{26} \text{ эрг/см}^3.$$

Плотность возрастает в отношении $26/24 = 1,08$ раза. Скорость этой реакции рассмотрим ниже. По порядку величины, при превышении P_c на 1% нужно время порядка 10^6 сек , чтобы реакция прошла.

Двухступенчатый ход реакции (медленно: $\text{Fe} \rightarrow \text{Mn}$; быстро, с избытком энергии $\text{Mn} \rightarrow \text{Cr}$) приводит к необратимости процесса. В самом деле, если вещество, которое в ходе сжатия превратилось

*) Теоретически уже при $E_F = 2,65 \text{ Мэв}$ возможен двойной процесс $\text{Fe} + 2e^- \rightarrow \text{Cr} + 2\nu$. Однако вероятность такого процесса ничтожна, поэтому мы его не рассматриваем.

в хром Cr_{56}^{24} , медленно расширяется, то распад хрома начнется лишь после того как E_F упадет ниже $1,6 \text{ Мэв}$, т. е. при плотности $\rho = 7,6 \cdot 10^7 \text{ г/см}^3$ и давлении $1,2 \cdot 10^{25} \text{ эрг/см}^3$. При этом за каждым распадом $\text{Cr} \rightarrow \text{Mn} + e^- + \bar{\nu}$ будет немедленно следовать $\text{Mn} \rightarrow \text{Fe} + e^- + \bar{\nu}$, поскольку этот второй процесс существенно надпороговый (E распада $3,7 \text{ Мэв}$, $E_F = 1,6 \text{ Мэв}$). В интервале давлений от

$$1,2 \cdot 10^{23} \left(\frac{1,6}{0,511} \right)^4 = 1,15 \cdot 10^{25} \text{ эрг/см}^3$$

до

$$1,2 \cdot 10^{23} \left(\frac{3,7}{0,511} \right)^4 = 3,3 \cdot 10^{26} \text{ эрг/см}^3$$

вещество может содержать любые количества железа и хрома, в зависимости от предшествующей истории рассматриваемого элемента массы. Аналогичные явления происходят в переходах $\text{Cr} - \text{Va} - \text{Ti}$ и т. д.

Выше предполагалось, что в ходе термоядерных реакций при высокой температуре и не слишком высокой плотности было достигнуто полное термодинамическое равновесие, затем произошло остывание; равновесное состояние вещества после остывания есть Fe^{56} . После этого происходит сжатие и превращения:



В принципе возможно сжатие вещества, которое не подвергалось действию высокой температуры или подвергалось действию недостаточно высокой температуры и состоит не из железа, а из других элементов. Приводим пороги нейтронизации для нескольких ядер (табл. IV).

Т а б л и ц а IV

Пороги нейтронизации

Ядро	$E_F, \text{ Мэв}$	$\rho_0, \text{ г/см}^3$	$P_0, \text{ эрг/см}^3$	Продукт реакции на пороге
H	0,78	10^7	$5,5 \cdot 10^{23}$	$\text{H} \rightarrow n, n + \text{H} = \text{D}$
${}^3_2\text{He}$	0,048	$2,8 \cdot 10^4$	$1,8 \cdot 10^{17}$	$\text{He}^3 \rightarrow \text{T}$
${}^4_2\text{He}$	20,6	$1,32 \cdot 10^{11}$	$3,2 \cdot 10^{20}$	$\text{He}^4 \rightarrow \text{T} + n, e^- + \text{T} = 3n$
${}^{12}_6\text{C}$	13,4	$4,45 \cdot 10^{10}$	$5,7 \cdot 10^{28}$	$\text{C}^{12} \rightarrow \text{B}^{12} \rightarrow \text{Be}^{12}$
${}^{28}_{14}\text{Si}$	4,6	$1,92 \cdot 10^9$	$7,8 \cdot 10^{26}$	${}^{28}_{14}\text{Si} \rightarrow {}^{27}_{13}\text{Al} \rightarrow \text{Mg}^{28}$
${}^{56}_{26}\text{Fe}$	3,7	$1,15 \cdot 10^9$	$3,3 \cdot 10^{26}$	$\text{Fe} \rightarrow \text{Mn}, \text{Mn} \rightarrow \text{Cr}$

Обращает на себя внимание особо низкий порог превращения He^3 и особая прочность He^4 . Порог реакции для водорода такой, что при этой плотности даже в холодном веществе довольно быстро

идет процесс $p + p = D + e^+ + \nu$ или $p + p + e^- = D + \nu$. Эти процессы, идущие в условиях низкой температуры, называются пикноядерными: расчет скорости первого процесса — см. Вильдхак (1940), Зельдович (1957). Эти процессы не имеют точного порога, но скорость их сильно зависит от плотности. При плотности критической по $H + e^- = n + \nu$ время обоих пикноядерных реакций одного и того же порядка 10^{10} сек.

При дальнейшем повышении давления, выше того, которое соответствует $E_F \sim 20$ Мэв, наступает качественно новое явление. При более низком давлении происходили превращения одних ядер в другие, но все эти ядра имели одинаковое массовое число A и были стабильны относительно ядерных сил. При более высоком давлении получаются ядра, распадающиеся с выбрасыванием свободных нейтронов. Конкретный пример такой ситуации содержится в табл. III; при реакции $e^- + He^4$ можно было бы ожидать образования H^4 . Но ядро H^4 не существует, оно распадается на нейтрон и тритий T . В данном случае порог нейтронизации T (9,5 Мэв) ниже порога He^4 , так что в результате первичной пороговой реакции $e^- + He^4$ в ходе последующих реакций остаются только свободные нейтроны. Нейтроны поодиночке не присоединяются к He^4 , поскольку ядро He^5 не существует *).

Аналогичное явление произойдет и в любой другой цепочке, например, при $A = 56$ после $Fe \rightarrow Mn \rightarrow Cr$ при повышении E_F процесс пойдет дальше и приблизительно при $Z = 12$ (т. е. для экзотического ядра Mg_{12}^{56}) при $E_F \cong 20 \div 22$ Мэв начнется испускание свободных нейтронов, пойдут реакции

$$e^- + Mg_{12}^{56} = Na_{11}^{53} + 3n + \nu, \quad e^- + Na_{11}^{53} = Ne_{10}^{50} + 3n + \nu.$$

Таким образом, в ходе сжатия можно наметить три области: а) область стабильных ядер, б) область бета-радиоактивных ядер, возникающих путем ядерной реакции с электронами, при которой протоны внутри ядра превращаются в нейтроны; эти ядра стабилизированы присутствием электронов и в) область нейтронного газа, смешанного с такими бета-радиоактивными ядрами, которые не способны присоединять свободные нейтроны **). Энергия связи таких ядер, отнесенная к одному протону, порядка 24 Мэв.

*) Не исключено, что в условиях высокой плотности образование He^6 и He^8 происходит путем попарного присоединения нейтронов $He^4 + 2n = He^6 + \gamma$. Порог $e^- + He^6 = T + 3n + \nu$ несколько выше, чем порог для He^4 (E_F больше на 3%, P_c — на 12%). Для He^8 E_F составляет 24 Мэв. Существование He^8 было предсказано одним из авторов этой книги (Зельдович, 1960) и сейчас подтверждено; измерена энергия связи He^8 , откуда вычислена E_F [см. Бязь и др. (1972)].

**) Примером ядра, не способного присоединять одиночные нейтроны, является He^4 ; примерами ядер, не способных присоединять никакое число нейтронов, — ядра T и He^8 .

Отсюда следует, что в равновесии с ними находится количество электронов, которое обеспечивает $E_F = 24 \text{ Мэв}$, т. е. $n_e = 6 \cdot 10^{29} \cdot (48^3) = 7 \cdot 10^{34} \text{ 1/см}^3$. При этом $P = 6,6 \cdot 10^{29} \text{ дин/см}^2$. Считая для этих ядер $Z/A = 1/4$ (как у He^8), найдем ту часть общей плотности вещества, которая зависит от ядер,

$$\rho = \pi \frac{A}{Z} \cdot \frac{1}{\alpha} = 4 \cdot 7 \cdot 10^{34} / 6 \cdot 10^{23} = 4 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3.$$

Следовательно, при общей плотности ρ , превышающей $4 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$, что соответствует давлению $6,6 \cdot 10^{29} \text{ дин/см}^2$, в равновесии находится нейтронный газ с $\rho_n = \rho - 4 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$, электроны с плотностью $n = 7 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$ и ядра, предельно перегруженные нейтронами: их плотность есть $\rho = 4 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$).

В литературе можно встретить предположение, что вещество в этих условиях ($4 \cdot 10^{11} < \rho < 3 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$) можно рассматривать как смесь или равномерный раствор, состоящий из нейтронов и протонов. В действительности, до тех пор, пока общая плотность вещества меньше ядерной, несомненно, что протоны не распределены равномерно, а соединены с соответствующим числом нейтронов в такие ядра, которые дают максимальную энергию связи Q_p на один протон при произвольном числе нейтронов. В ядре He^4 $Q_p = 14 \text{ Мэв}$, в стабильном C^{12} $Q_p = 15,3 \text{ Мэв}$, но в C^{16} $Q_p = 18,5 \text{ Мэв}$, в радиоактивном ядре S^{38} $Q_p = 20 \text{ Мэв}$, в Cu^{49} $Q_p = 21 \text{ Мэв}$. Эти величины еще не максимальны, поскольку на опыте не получены предельно перегруженные ядра. Теоретическая экстраполяция, принимающая во внимание ядерные силы, дает $Q_p = 30 \text{ Мэв}$ в Ti^{72} и $Q_p = 36,5 \text{ Мэв}$ в C^{22} . Графики, показывающие плотность атомных ядер, протонов, электронов и нейтронов показаны на рис. 30а (стр. 217) [по Камерону (1970)]**).

§ 6. Свойства нейтронного газа

В первом приближении будем рассматривать свободные нейтроны как идеальный газ, т. е. на время забудем о взаимодействии нейтронов с оставшимися ядрами и между собой. Учтем, однако, что нейтроны подчиняются статистике Ферми.

Для нейтронного газа ферми-импульс $p_F = m_e c (\rho_n/10^6)^{1/3}$, где $\rho_n = \rho - 4 \cdot 10^{11}$; при ядерной плотности $\rho_n = 2 \cdot 10^{14}$ получим $p_F = 450 m_e c = m_n c/4$, где m_n — масса нейтрона. Таким образом, хотя и приближенно, нейтроны еще можно считать нереляти-

*) Это справедливо до плотностей порядка $3 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$, при которых ферми-энергия и взаимодействие свободных нейтронов становятся существенными

**) В последнее время Бете и др. (1970) рассмотрели этот вопрос подробнее.

вистскими и $E_F = P_F^2 / 2M = 1/32 m_n c^2 = 30 \text{ Мэв}$ при $\rho_n \approx \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$. При $\rho < 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ получим выражение давления нерелятивистского идеального нейтронного ферми-газа

$$P_n = \frac{2}{3} E_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot E_F n = 5,5 \cdot 10^9 \rho_n^{2/3}. \quad (6.6.1)$$

Полное давление равно сумме давления электронного газа с $E_F = 24 \text{ Мэв}$ и нейтронного ферми-газа. Таким образом,

$$P = 6,6 \cdot 10^{29} + 5,5 \cdot 10^9 (\rho - 4 \cdot 10^{11})^{2/3}. \quad (6.6.2)$$

Поучительно определить ту плотность, при которой сравнивается давление нейтронов и электронов. Из (6.6.2) получаем

$$\rho_n = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ г/см}^3, \quad \rho = 1,5 \cdot 10^{12} \text{ г/см}^3.$$

При ядерной плотности $\rho = 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ давление нейтронов равно $3,5 \cdot 10^{33} \text{ дин/см}^2$, в 5000 раз больше давления электронов; концентрация нейтронов в ~ 2000 раз больше концентрации электронов и в пятьсот раз больше концентрации ядер, присутствующих в веществе при этой плотности.

Однако при ферми-энергии нейтронов 30 Мэв уже изменилось условие, определяющее граничную энергию электронов. В самом деле, при реакции $e^- + p = n + \nu$ теперь нужно не только затратить энергию связи, приходящуюся на один протон в ядрах *), равную 24 Мэв (см. выше § 5), но и поместить образовавшийся нейтрон на верх нейтронного ферми-распределения, израсходовав еще 30 Мэв (раньше, когда эта энергия была меньше 24 Мэв , мы ею пренебрегали; она меняется как $\rho_n^{2/3}$). Поэтому следует ожидать, что ферми-энергия электронов повысится до 54 Мэв ; соответственно получим плотность ядер не $4 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$, а $5 \cdot 10^{12} \text{ г/см}^3$ ($2,5\% \rho_n$), концентрация электронов $0,6\%$ концентрации нейтронов, давление электронов $1,6 \cdot 10^{31}$ ($0,7\% P$) — все при общей плотности

$$\rho \cong \rho_n = 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3.$$

Приведенные выше численные соотношения и формулы следует, однако, рассматривать только как оценки порядков величин по той причине, что выше не учтено взаимодействие нейтронов.

*) Следует помнить, что мы не говорим о свободных протонах! Более точно мы должны писать $e^- + (Z, A) \rightleftharpoons (Z-1, A) + \nu$ или $e^- + (Z, A) \rightleftharpoons (Z-1, A') + (A+A') n + \nu$. Нужно рассматривать превращение связанного в ядре протона, которое может сопровождаться испусканием одного или нескольких свободных нейтронов. Обратный процесс есть бета-распад «на лету»: нейтрон, который первоначально не связан в ядро, подвергается распаду в связанный протон, $n + (Z, A) = (Z+1, A+1) + e^- + \bar{\nu}$, причем освобождаемая энергия включает в себя энергию связи протона.

Непосредственное наблюдение рассеяния нейтрона на нейтроне в настоящее время неосуществимо. Косвенно о взаимодействии нейтронов можно судить по реакциям типа $\pi^- + D = n + p$ и $\pi^- + D = n + p + \pi^0$, $\gamma + D = n + p + \pi^+$, а также по взаимодействию нейтронов с ядрами, вычитая вклад протонов, присутствующих в ядрах. Но существует более мощный, хотя и не прямой, подход к проблеме.

Изучение ядер привело к формулировке принципа изотопической инвариантности (ниже кратко ПИИ). Для наших целей формулировка ПИИ такова: ядерное взаимодействие протонов и нейтронов в одинаковых состояниях в точности одинаково.

Понятие квантовомеханического состояния включает в себя энергию, орбитальный момент L и спиновый момент системы S . В частности, одинаково взаимодействие $p + p$ (двух протонов между собой), $p + n$ (протон — нейтрон) и $n + n$ (два нейтрона) — в одинаковом состоянии с $L = 0$ и $S = 0$ при одинаковой энергии. Здесь нужно сделать две оговорки: 1) одинаково ядерное взаимодействие, но электромагнитное взаимодействие не удовлетворяет принципу ПИИ и различно; это различие легко учесть; 2) протон и нейтрон в смысле принципа Паули представляют собой различные частицы, поэтому например, для системы $p + n$ разрешено состояние $L = 0$, $S = 1$ (с параллельными спинами p и n), а для $p + p$ и для $n + n$ это состояние запрещено. Поэтому не удивительно, что $p + n$ могут образовать связанную систему — дейтрон D (именно в состоянии с $L = 0$, $S = 1$), а $p + p$ и $n + n$ такой системы не образуют. Экспериментальные исследования показали, что в системах $p + p$ и $p + n$ не существует связанных состояний с $L = 0$, $S = 0$; в частности, хорошо известно, что не существует ядра $2p = He^2$, и возбужденного, связанного состояния дейтрона с нулевым спином. Отсюда можно заключить, что не существует также связанного состояния двух нейтронов.

При изучении процесса рассеяния нейтронов на протонах можно выделить две ситуации: спины нейтрона и протона параллельны (так что полный спин $S = 1$) и рассеяние с антипараллельными спинами ($S = 0$). Второй процесс подтверждает отсутствие какого-либо связанного состояния для $S = 0$ и дает информацию о потенциале взаимодействия. Его можно аппроксимировать ямой глубины ~ 20 Мэв и размером $r_0 \approx 10^{-13}$ см; при этих значениях как раз исчезает связанное состояние. Отсутствие связанных состояний в системе с притяжением является чисто квантовомеханическим эффектом. Это качественное следствие принципа неопределенности Гейзенберга. В рыхлой системе (с большим средним расстоянием между нейтронами) вероятность того, что нейтроны взаимодействуют, мала; в плотной же системе кинетическая энергия нейтронов слишком сильно возрастает, и нет состояния с отрицательной полной энергией.

Опыт показывает, хотя и с меньшей уверенностью, что не существует и связанного состояния n^4 (тетранейтрона); см., например, обзор Базя, Гольданского и Зельдовича (1965).

Однако притяжение нейтронов между собой должно существенно (в несколько раз) понизить давление нейтронного газа по сравнению с давлением идеального ферми-газа *). В области плотностей, меньших ядерной, до $\sim 5,2 \cdot 10^{13}$ г/см³ играет роль только взаимодействие пар нейтронов в состоянии с $L = 0$; условия задачи весьма просты и тем не менее задача о состоянии нейтронного газа даже в такой постановке до сих пор не решена точно.

Из размерности следует *), что в широкой области $10^{11} < \rho < 2 \cdot 10^{13}$ г/см³

$$P_n = \beta \cdot 5,5 \cdot 10^9 \rho_n^{3/2},$$

где β — постоянный численный коэффициент ($\beta < 1$), неизвестного знака (нет уверенности в том, что $\beta > 0$), но не зависящий от плотности.

При дальнейшем увеличении плотности начинает сказываться более сложный характер ядерных сил. Кроме столкновений пар нейтронов с $L = 0$, при большой плотности играют роль и столкновения с $L = 1, 2, \dots$ Малая плотность ($\rho < 2 \cdot 10^{13}$ г/см³) соответствует малой энергии сталкивающихся нейтронов, $E_F < 10$ Мэв, и можно было рассматривать взаимодействие только с $L = 0$, описывая его с помощью виртуального уровня с энергией $E = 60$ кэв, которая характеризует низкоэнергетическое рассеяние (пренебрегая E по сравнению с E_F можно прийти к выводу, что $P \sim \rho_n^{3/2}$). Но и при $L = 0$, $E_F > 10$ Мэв нельзя ограничиваться приближением виртуального уровня.

Должно сказаться то обстоятельство, что на весьма малых расстояниях (которые исследуются при рассеянии нейтронов и протонов большой энергии) притяжение сменяется отталкиванием. Наконец, при большой плотности взаимодействие может и не сводиться к совокупности парных взаимодействий. Неясно, достаточно ли данных по рассеянию нуклона на нуклоне для построения теории. Эксперимент со столкновением нескольких быстрых частиц или с прямым определением давления явно невозможен. Количественная теория уравнения состояния при ядерной и более высокой плотности не существует, и развитие ее до создания последовательной теории сильного взаимодействия невозможно. Выражения для давления, приводимые в ряде работ, ненадежны — авторы преувеличивают точность своих результатов.

Предупредив читателя о необходимости здорового скептицизма по отношению к точности формулы, приведем для справок

*) Более подробное рассмотрение нейтронного газа можно найти у Брукера и др. (1960), а также у Немес и Спрунг (1968).

формулу, используемую Камероном (1959а):

$$P = 5,3 \cdot 10^9 \rho_0^{3/2} + 1,6 \cdot 10^{-5} \rho_0^{3/2} - 1,4 \cdot 10^5 \rho_0^2, \quad \rho_0 = m_n n, \quad (6.6.3)$$

соответствующая скорость звука

$$a_{\text{зв}}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = c^2 \frac{8,8 \cdot 10^9 \rho_0^{3/2} + 4,3 \cdot 10^{-5} \rho_0^{3/2} - 2,8 \cdot 10^5 \rho_0}{c^2 + 1,3 \cdot 10^{10} \rho_0^{3/2} + 2,6 \cdot 10^{-5} \rho_0^{3/2} - 2,8 \cdot 10^5 \rho_0}. \quad (6.6.4)$$

Более сложное выражение приводится в работе Сальпетера (1961).

В формулах (6.6.3) и (6.6.4) под ρ_0 понимается плотность массы покоя, т. е. величина, пропорциональная плотности барионов (в данном случае при $\rho < 10^{15}$ г/см³ барионы являются нейтронами). Полная плотность массы включает в себя также и энергию:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{E_1}{c^2} \right) = \rho_0 \left(1 + \frac{1}{c^2} \int_0^{\rho_0} \frac{P}{\rho_0^2} d\rho_0 \right). \quad (6.6.5)$$

Подробнее о соотношении между ρ и ρ_0 см. § 7 гл. 6.

Заметим также, что выражение (6.6.4) при $\rho > 3,7 \cdot 10^{15}$ г/см³ приводит к скорости звука, большей скорости света. Следовательно, формула (6.6.3) заведомо неверна при $\rho > 3,7 \cdot 10^{15}$ г/см³.

В статье Цуруты и Камерона (1965) дана новая формула, учитывающая частичное преобразование нейтронов в другие частицы. См. также обзор Камерона (1970).

§ 7. Плотность, превышающая ядерную

Рассмотрим закон зависимости давления от плотности в области плотности $\rho > 10^{14}$ г/см³. Верхняя граница рассматриваемой области $\rho < 10^{23}$ г/см³. В этой области нет никаких экспериментальных данных, которые могли бы лечь в основу искомого закона. Поэтому, в сущности, содержание данного параграфа составляет выяснение пределов, в которых лежит давление, т. е. тех ограничений, которые накладывают общие физические законы. Прежде всего необходимо условиться о терминологии в рассматриваемой области.

Обозначим через n плотность (число в 1 см³) барионов. Если в системе имеются и барионы (n_1), и антибарионы (\bar{n}_1), то $n = n_1 - \bar{n}_1$, и в этом смысле точнее было бы говорить об n как о плотности барионного заряда *).

В нерелятивистской области плотность $\rho = n m_0$, где m_0 — масса одного бариона **). В силу зависимости массы от энергии,

*) Такая ситуация возникает при сверхвысокой температуре.

**) Точнее m_0 определим как массу, приходящуюся на один барион в наименьшем энергетическом состоянии при $\rho = T = 0$, т. е. как $1/56$ массы ядра Fe⁵⁶.

при работе сжатия (на один барион) ε_1 , сравнимой с $m_0 c^2$, плотность ρ оказывается больше, чем $n m_0$. Будем называть $n m_0 = \rho_0$ «плотностью массы покоя». Очевидно, что именно $\rho = n \left(m_0 + \frac{\varepsilon_1}{c^2} \right)$, а не ρ_0 входит в уравнения гидродинамики: величиной $dm = \rho dV$ определяется масса элемента объема.

Более точно в сопутствующей системе отсчета плотность энергии есть 0—0 компонента тензора натяжений T_{ik} , $\varepsilon = T_0^0 = \rho c^2$. Давление дается диагональными пространственными компонентами, $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P$. Все другие компоненты равны нулю в системе отсчета, в которой материя покоится. Уравнения гидродинамики и тяготения содержат ε и P , но не ρ_0 .

Однако в уравнениях гидродинамики играют существенную роль величины, отнесенные к единице массы покоя. Когда в мысленном опыте рассматривается процесс, совершаемый над данным количеством вещества, заключенного в непроницаемый сосуд, то сохраняется масса покоя в сосуде, $\rho_0 V$, тогда как масса, т. е. ρV , меняется в соответствии с производимой работой. Поэтому определим удельную энергию E , удельную энтропию S на единицу массы покоя *). Включим в E и энергию покоя: $E = E_{\text{нр}} + c^2$, где $E_{\text{нр}}$ — нерелятивистское определение энергии. При этом

$$\rho = \rho_0 \frac{E}{c^2}. \quad (6.7.1)$$

При постоянной энтропии, и, в частности, при $S = 0$, как известно,

$$P = - \frac{\partial E}{\partial V} = - \frac{\partial E}{\partial \left(\frac{1}{\rho_0} \right)} = \rho_0^2 \frac{\partial E}{\partial \rho_0} = \rho_0^2 c^2 \frac{\partial \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)}{\partial \rho_0}. \quad (6.7.2)$$

Соответственно можно найти и скорость звука. Оказывается, скорость звука $a_{\text{зв}}$ (см., например, учебник Ландау и Лифшица, 1954)

$$a_{\text{зв}}^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (6.7.3)$$

В соответствии с тем, что есть две разные плотности, ρ и ρ_0 , можно говорить о двух разных показателях адиабаты, в зависимости от того, рассматривается ли давление P как функция ρ или ρ_0 .

Проиллюстрируем соотношения на примере степенного (асимптотического при больших плотностях) закона: пусть

$$\rho = a \rho_0^b. \quad (6.7.4)$$

*) Иногда удобно будет относить все величины к одному бариону или, что то же, к единице барионного заряда.

Тогда по формулам (6.7.2) и (6.7.4) найдем

$$P = (b - 1) c^2 a \rho_0^b = (b - 1) c^2 \rho. \quad (6.7.5)$$

Итак, при асимптотическом законе любой показатель b адиабаты по плотности массы покоя ρ_0 приводит к показателю адиабаты, равному 1, для зависимости давления от плотности ρ .

Находим, далее,

$$a_{\text{эв}}^2 = (b - 1) c^2. \quad (6.7.6)$$

Уже отсюда видно, что релятивистское требование $a_{\text{эв}}^2 \leq c^2$ приводит к ограничению $b \leq 2$ (ср. ниже § 12).

§ 8. Идеальный нейтронный газ при сверхвысокой плотности

В качестве первого приближения в пионерской работе Оппенгеймера и Волкова (1938) был рассмотрен нейтронный газ в предположении, что нейтроны никак не взаимодействуют между собой. Нейтроны являются фермионами; таким образом, вся теория вырожденного нейтронного газа оказывается подобной теории вырожденного электронного газа. Подобие это имеет место постольку, поскольку мы в качестве независимой переменной пользуемся плотностью частиц n или, что то же, плотностью покоя ρ_0 . В частности, связь ферми-импульса и n в точности совпадает для электронов и нейтронов:

$$n = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{P_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{P_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \quad (6.8.1)$$

Найдем характерную плотность покоя, при которой происходит переход от нерелятивистского к релятивистскому нейтронному ферми-газу: условие *)

$$P_F = m_0 c$$

даст

$$(\rho_0)_c = \frac{m_0^4 c^3}{3\pi^2\hbar^3} = 5,25 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3,$$

что гораздо больше плотности атомных ядер ($\sim 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$). Введем безразмерную плотность покоя

$$\frac{\rho_0}{(\rho_0)_c} = \chi \quad (6.8.2)$$

*) Мы здесь не различаем m_0 (см. сноску на стр. 210) и массу нейтрона. Различие около 1% пренебрежимо мало по сравнению с влиянием других упрощающих предположений.

и безразмерный ферми-импульс

$$t = \frac{P_F}{m_0 c} = \chi^{1/2}. \quad (6.8.3)$$

Имея в виду релятивистское выражение энергии нейтрона

$$E_n = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2},$$

легко получим выражения для плотности ρ и давления:

$$\begin{aligned} \rho &= 3 (\rho_0)_c \int_0^t \sqrt{1 + q^2} q^2 dq = \\ &= \frac{3}{8} (\rho_0)_c [(2t^2 + 1) t \sqrt{t^2 + 1} - \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})], \end{aligned} \quad (6.8.4)$$

$$\begin{aligned} P &= (\rho_0)_c c^2 \int_0^t \frac{q^4 dq}{\sqrt{1 + q^2}} = \\ &= \frac{3}{8} (\rho_0)_c c^2 \left[t \sqrt{1 + t^2} \left(\frac{2}{3} t^2 - 1 \right) + \ln(1 + \sqrt{t^2 + 1}) \right], \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

$$a_{\text{зв}} = \frac{1}{\sqrt{3}} c \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}. \quad (6.8.6)$$

В частности, при $\chi = t = 1$, т. е. при критической плотности покоя $\rho_0 = (\rho_0)_c$, имеем $\rho = 1,26 (\rho_0)_c$, $P = 0,154 (\rho_0)_c c^2$.

Легко найти асимптотику при $\chi \rightarrow \infty$:

$$\rho = \frac{3}{4} (\rho_0)_c \chi^{1/2}, \quad P = \frac{1}{4} (\rho_0)_c c^2 \chi^{1/2} = \frac{1}{3} \rho c^2, \quad a_{\text{зв}} = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (6.8.7)$$

Итак, в пределе $\rho \gg \rho_0$ массой покоя можно пренебречь. Идеальный ультрарелятивистский ферми-газ имеет скорость звука, асимптотически приближающуюся к

$$\frac{c}{\sqrt{3}} = 0,58 c.$$

Этот результат можно считать естественным, практически все частицы движутся со скоростью света, но по всем направлениям. Забегая вперед (уравнение состояния при высокой температуре см. в гл. 8), отметим, что для любого ультрарелятивистского газа асимптотически (а при нулевой массе покоя частиц, т. е. для нейтрино и квантов точно) имеют место соотношения

$$P = \frac{1}{3} \rho c^2 = \frac{\varepsilon}{3}, \quad a_{\text{зв}} = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (6.8.8)$$

§ 9. Идеальный газ с учетом взаимного превращения частиц

Выше был рассмотрен газ, состоящий только из нейтронов. Основанием для этого были расчеты «нейтронизации», т. е. обратного бета-процесса:

$$e^- + p = n + \nu.$$

Напомним, что при ядерной плотности расчет приводил к выводу, что равновесная концентрация электронов и протонов составляет меньше 1% общей концентрации частиц. Этот результат есть следствие того факта, что при рассматриваемой плотности электроны являются релятивистскими, их энергия много больше энергии, соответствующей массе покоя, и в то же время нейтроны и протоны еще не являются релятивистскими, их энергия практически не отличается от энергии, соответствующей массе покоя. Однако когда и нейтроны становятся релятивистскими, их энергия и соответствующий химический потенциал растут, равновесие снова сдвигается в написанной формуле влево в сторону увеличения числа электронов и протонов. Взаимодействие между нейтронами, в частности, их отталкивание на малых расстояниях (т. е. при плотностях, превышающих ядерную), также влияет на химический потенциал нейтронов. Вообще полагают, что отталкивание на малых расстояниях есть общее свойство каждой пары барионов ($p-p$, $p-n$, $n-n$ и т. д.). В этом случае химические потенциалы, соответствующие каждому типу барионов, должны компенсировать друг друга в уравнении, описывающем трансформацию одного типа барионов в другой для каждой реакции (эти уравнения обсуждаются ниже).

Выше мы особенно подчеркивали существование ядер (не свободных протонов), «разбрызганных» по нейтронному газу, когда плотность газа меньше ядерной. В противоположном случае высокой нейтронной плотности протоны могут быть однородно растворены в плотной нейтронной жидкости. Для статического состояния звезды нейтрино и антинейтрино можно считать свободно выходящими. Следовательно, их концентрация и ферми-энергия равна нулю. Отсюда условие равновесия для написанной выше реакции является условием для химических потенциалов:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_n. \quad (6.9.1)$$

Но для холодного ферми-газа химический потенциал совпадает с ферми-энергией.

Плотность массы покоя и концентрация n определяются суммой концентраций протонов и нейтронов. Обозначим

$$n_p = \alpha n, \quad n_n = (1 - \alpha) n. \quad (6.9.2)$$

Далее необходимо удовлетворить условию электронейтральности. Это значит, что

$$n_{e^-} = n_p = \alpha n.$$

В ферми-энергию следует включить массу покоя, в ультрарелятивистском случае мы пренебрежем ею (при меньшей плотности разумно пренебречь массой покоя электрона и разностью масс покоя протона и нейтрона, но не самой массой покоя). Уравнение (6.9.1) для химических потенциалов (в ультрарелятивистском пределе) даст

$$m_0 c^2 (\alpha \chi)^{1/3} + m_0 c^2 (\alpha \chi)^{1/3} = m_0 c^2 [(1 - \alpha) \chi]^{1/3}, \quad (6.9.3)$$

откуда следует

$$8\alpha = 1 - \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{9}, \quad 1 - \alpha = \frac{8}{9}.$$

Таким образом, в равновесии оказывается 88,9% п, 11,1% р (среди барионов) и электроны, плотность которых равна плотности протонов. Значит, при монотонном изменении плотности доля протонов и электронов проходит через глубокий минимум. Действительно, при совсем низких давлениях в равновесии число нейтронов и протонов примерно одинаково и $\alpha \sim 50\%$ *), а при ядерной плотности, как мы видели в § 5,6 этой главы, $\alpha \sim 10^{-3}$. В соответствии с общими принципами термодинамики (Ле-Шателье — Браун), превращение части нейтронов обратно в протоны и электроны несколько снижает давление при данном χ . Обозначая посредством P_n давление чистых нейтронов, найдем

$$P = [\alpha^{4/3} + \alpha^{4/3} + (1 - \alpha)^{4/3}] P_n = 0,96 P_n.$$

Асимптотический закон зависимости давления от плотности покоя меняется только за счет множителя 0,96; показатель степени и выражение для скорости звука $a_{зв} = \frac{c}{\sqrt{3}}$ не меняется. В давление необходимо включать эффект взаимодействий (отталкивание); как уже было показано, это увеличивает скорость звука.

Амбарцумян и Саакян (1960) первые и притом весьма обстоятельно рассмотрели ситуацию, которая возникает в связи с тем, что современная физика значительно расширила ассортимент элементарных частиц. Наряду с нейтроном, протоном и электроном, в принципе, следует рассматривать мюоны (μ^+ , μ^-), пионы (π^+ , π^0 , π^-), каоны (K^0 , \bar{K}^0 , K^+ , K^-) и разнообразные барионы Λ , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^0 , Ξ^- Общие принципы написания условий равновесия те же, что и в рассмотренном выше элементарном примере.

*) Точнее, для железа Fe_{26}^{56} , $\alpha = \frac{26}{56} = 46,3\%$; $1 - \alpha = \frac{30}{56} = 53,7\%$.

Можно показать, однако, что нет надобности выписывать соотношения между химическими потенциалами (ферми-энергиями), соответствующие всем возможным реакциям превращения частиц. Превращения частиц удовлетворяют двум законам: закону сохранения барионного заряда *) и закону сохранения электрического заряда. Закон сохранения нейтринного заряда в рассматриваемой задаче не играет роли, поскольку ν и $\bar{\nu}$, по предположению, свободно покидают систему.

Положим для любой частицы r

$$\mu_r = a q_{er} + b q_{br}, \quad (6.9.4)$$

где q_{er} — электрический заряд, а q_{br} — барионный заряд частицы.

Коэффициенты a и b одинаковы для всех разнообразных видов частиц, находящихся в системе. Легко убедиться, что в таком случае для любой реакции, например,

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4,$$

для которой выполняются законы сохранения

$$\left. \begin{aligned} q_{e1} + q_{e2} &= q_{e3} + q_{e4}, \\ q_{b1} + q_{b2} &= q_{b3} + q_{b4}, \end{aligned} \right\} \quad (6.9.5)$$

при выполнении (6.9.4) тождественно выполняется и условие равновесия

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4. \quad (6.9.6)$$

Зная химический потенциал данного сорта частиц, элементарно находим их концентрацию. Таким образом, полный состав равновесной смеси, состоящей из большого числа компонент, выражается только через два параметра, a и b .

Условие электронейтральности фиксирует значение a : легко убедиться, что увеличивая a , мы увеличиваем концентрацию положительно заряженных частиц и уменьшаем концентрацию отрицательных.

При каждом b есть $a_0(b)$, дающее электронейтральный состав. Его барионная плотность зависит монотонно от одного параметра b и, таким образом, легко интерполяцией найти равновесный состав для любого ρ_0 .

Отметим только две особенности решения при нулевой температуре:

1) для фермионов в случае $\mu_r < m_r c^2$ соответствующие частицы (r) полностью отсутствуют в равновесии;

*) С учетом всех перечисленных типов частиц, сохранение барионного заряда означает, что постоянна сумма чисел $n, p, \Lambda, \dots, \Xi \dots$ (концентрация частиц обозначается той же буквой).

2) для бозонов (π -, K -мезонов) в предположении полного отсутствия взаимодействия концентрация также равна нулю при $\mu_r < m_r c^2$. При наличии концентрации этих частиц $r > 0$, $\mu_r \equiv m_r c^2$ и от количества r не зависит μ_r . Это следует из того, что бозоны (без взаимодействия!) все находятся в основном состоянии, т. е. покоятся.

Из первого свойства следует, что по мере роста ρ_0 отдельные типы частиц включаются при определенных пороговых плотностях. Из второго свойства следует, что в равновесной системе совершенно отсутствуют нейтральные мезоны: при $q_{er} = 0$, $q_{br} = 0$ видим $\mu_r = 0$, а значит, и $r = 0$.

Далее ясно, что существование π^- делает невозможным существование K^- и любых других более тяжелых отрицательных мезонов. Тем более запрещено существование положительных мезонов, а также позитронов и антибарионов.

Отметим, что закон сохранения странности (или так называемого гиперзаряда) не должен учитываться в расчетах; действительно, этот закон относится к сильным взаимодействиям, происходящим за время столкновения частиц 10^{-20} сек и меньшее. Однако за время $\sim 10^{-8}$ сек (малое даже по масштабу не-

стационарных явлений в звездах) процессы с изменением странности вполне успевают пройти. Равновесный состав в зависимости от ρ_0 , см., например, в работе Амбарцумяна и Саакяна (1963).

Были проделаны аналогичные расчеты с другими наборами частиц (Камерон, 1959а). Общие свойства решения мало отличаются от упрощенных систем (n ; pe^-), рассмотренных выше. Обзор см. Саакян (1974).

Недавно были выполнены вычисления, более точно учитывающие вклад ядерных сил [Немез, Шпрунг (1968)]. Основным результатом состоит в том, что вследствие нейтрон-протонного притяжения концентрация протонов при данной плотности выше, чем предполагалось до этого; например, протонная концентрация составляет

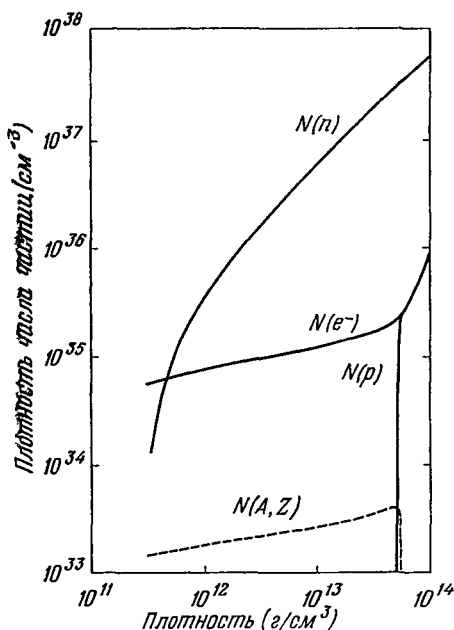


Рис. 30а. Концентрации нейтронов, электронов, протонов и ядер в равновесных условиях в зависимости от плотности (по Камерону, 1970).

приблизительно 4% от нейтронной концентрации при $\rho \sim 3 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$. Отрицательные мюоны начинают появляться раньше, при $\rho \sim 1,5 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$. При низких плотностях цитированные выше вычисления не корректны; очевидно, что при плотностях, много

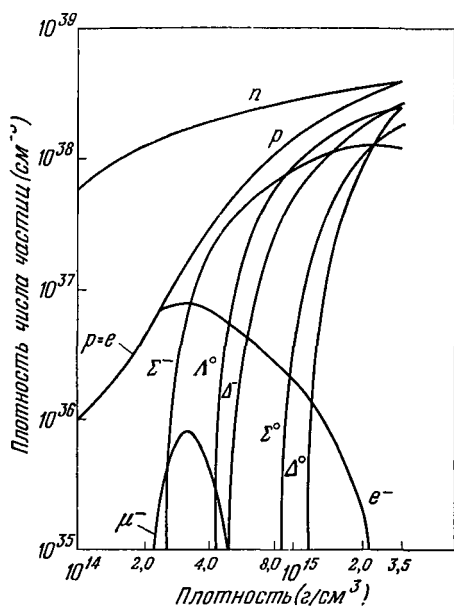


Рис. 306. Концентрации лептонов и барионов в зависимости от плотности (по Камерону, 1970).

зависит на малых расстояниях только от барионного заряда. В этом случае число частиц не изменяется, но общее давление увеличивается на величину, зависящую от взаимодействия. Упомянутые выше результаты ($P = \text{const } \rho_0^{4/3}$ и величина постоянной) справедливы в этом случае только для кинетической части давления. О свойствах вещества, важных для теории пульсаров, см. раздел III.

§ 10. Все ли «элементарные» частицы элементарны?

Рассмотрение 8, 18 или даже большего числа барионов и резонансов [см., например, обзоры Розенфельда и др. (1965); Зельдовича (1965)] как независимых сортов элементарных частиц представляется неестественным любому здравомыслящему физику. До недавнего времени резонансы рассматривались как возбужденные «состояния» обычных барионов. Более радикальная точка зрения заключается в том, что все барионы (как обычные, так и резонансы) представляют собой сложные системы, состоящие из трех более фундаментальных частиц — кварков.

меньших ядерной, материя не представляет собой однородный раствор протонов (или даже пар протонов) в нейтронной жидкости, скорее, это обогащенная нейтронами смесь сложных ядер и свободных нейтронов. Зависимость плотности частиц от ρ , взятая из обзора Камерона (1970) приведена на рис. 306.

При рассмотрении определенного конечного числа сортов невзаимодействующих частиц асимптотически $P =$

$$= \text{const } \rho_0^{4/3}, \text{ а } a_{\text{в}} \rightarrow \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Давление и плотность энергии только меньше, чем для нейтронного газа, в отношении $N^{-1/3}$, где N — число сортов барионов. Предположим, что взаимодействие, в частности, отталкивание за-

В обоих случаях при сверхвысокой плотности, когда объем, приходящийся на частицу, становится меньше собственного объема частицы (которая является составной и имеет свою пространственную структуру), заведомо нельзя рассматривать частицы как элементарные.

Можно предположить, например, что в пределе, когда полная кинетическая (ферми) энергия вырожденных барионов на один кварк станет много больше энергии связи кварков *), можно будет рассматривать сжатое вещество как кварковый газ.

В этом случае асимптотически получим равное число кварков всех трех типов, $n_1 = n_2 = n_3$ **). При этом каждое число равно n -барионной плотности, поскольку один барион состоит из трех кварков. Значит, асимптотически давление в этой модели при данной плотности массы покоя втрое больше давления идеального нейтронного газа (и, конечно, оно больше, чем давление, вычисленное для смеси различных резонансов).

На первый взгляд, этот результат противоречит общему принципу Ле-Шателье — Брауна; в предыдущем разделе подчеркивалось, что с учетом превращения частиц давление обязательно ниже давления идеального нейтронного газа P_n . Нет ли внутреннего противоречия или ошибки в кварковой модели с $P_q = 3P_n$? Вопрос об асимптотике давления составных частиц был рассмотрен в работе одного из авторов [Зельдович (1965)].

Оказалось, что если частицы (в данном случае нейтроны) являются составными (из кварков), то нельзя рассматривать их как невзаимодействующие, — они отталкиваются; это отталкивание является следствием принципа Паули для кварков.

Идеальный нейтронный газ большой плотности в этом случае не является физически допустимым состоянием, поэтому нет и нарушения принципа Ле-Шателье — Брауна.

С 1967 года идея физических кварков с дробными зарядами $(+\frac{2}{3}e, -\frac{1}{3}e, -\frac{1}{3}e)$ поблекла. Экспериментальные поиски не подтвердили существование кварков ни в космических лучах [Каша и Стефанский (1968); Бондарев и др. (1968); Гармайер и др. (1968), Ландсберг], ни в экспериментах на ускорителях [Беллами и др. (1968); Росс и др. (1967)], ни в небольших количествах в покое в обычной материи [Брагинский и др., (1967); Стоувер и др. (1967)], ни в солнечной фотосфере [Ликок и др. (1968)].

Между тем, космология предсказывает существование заметного количества первичных, реликтовых кварков, если, конечно, кварки вообще существуют (см. гл. 18 Релятивистской астрофизики).

*) Речь идет о связи между собой трех кварков, образующих барион.

**) (n_1) : заряд $+\frac{1}{3}$, странность 0 (p);
 (n_2) : заряд $-\frac{1}{3}$, странность 0 (n);
 (n_3) : заряд $-\frac{1}{3}$, странность -1 (λ).

Детальные теоретические исследования возможной структуры барионов, как состоящих из кварков, также привели к трудностям [Брагинский и др. (1967)]. Все это вместе является веским аргументом против существования дробно-заряженных кварков.

Имеются более сложные схемы с девятью различными типами кварков с целочисленными зарядами. Доказать их или опровергнуть еще труднее. Поэтому термодинамику кварков следует рассматривать как иллюстрацию принципов, а не как необходимое описание действительности.

§ 11. Электромагнитное взаимодействие частиц

Можно ли что-нибудь сказать об уравнении состояния при наличии взаимодействия между частицами? В одном очень важном случае оказывается, что можно, а именно, для электромагнитного поля. Плотность энергии поля равна $(E^{*2} + H^2)/8\pi$, где E^* — напряженность электрического поля, H — магнитного поля.

В общем случае силы определяются максвелловским тензором натяжений, и в упорядоченных полях силы резко анизотропны (натяжение вдоль поля $E^{*2}/8\pi$ и расталкивание в двух перпендикулярных направлениях поперек поля $E^{*2}/8\pi$; аналогично и для магнитного поля).

Однако сумма нормальных натяжений на три перпендикулярные площадки всегда тождественно равна $(E^{*2} + H^2)/8\pi$, т. е. равна плотности энергии. Этот результат не зависит от того, имеем ли мы дело со статическими или переменными полями, с полями в той области, где находятся заряды и токи или с полями (в частности, полем электромагнитной волны) в пустоте. Когда можно говорить о *давлении* электромагнитного поля? Для этого нужно, чтобы при усреднении по времени или по макроскопическим площадкам все направления (в среднем) оказывались равноценными. Тогда сумма напряжений равна $3P$ и, следовательно, для электромагнитного поля всегда $\varepsilon = 3P$, где ε — объемная плотность энергии. Мы отмечали, что такое равенство имеет место для ультрарелятивистского газа, в частности, для совокупности световых квантов, т. е., говоря классически, для совокупности электромагнитных волн.

Однако полученный выше результат богаче: ведь электромагнитное поле не исчерпывается полем волн. Это видно уже из того, что электромагнитные волны поперечные. Кулоновское поле заряда, например, продольно и его нельзя свести к свободным электромагнитным волнам.

Давление и плотность энергии системы заряженных частиц не обязательно вычислять как производную от энергии. В принципе, можно непосредственно в веществе данной плотности мысленно провести поверхность и найти поток импульса, нормальный к по-

верхности, т. е. давление; эта операция может быть сделана и в классической механике и в квантовой теории. Здесь не предполагается производить вычисления: изложенный выше подход нужен для того, чтобы сказать, что давление взаимодействующих частиц можно представить как сумму «кинетического» давления движущихся невзаимодействующих частиц и давления электромагнитного поля, осуществляющего взаимодействие *):

$$P = P_p + P_f. \quad (6.11.1)$$

Точно так же энергию взаимодействия можно описать как энергию поля. Поэтому плотность энергии также запишем в виде суммы

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_f. \quad (6.11.2)$$

Для частиц

$$P_p \leq \frac{\varepsilon_p}{3} \quad (6.11.3)$$

знак равенства относится к частицам с нулевой массой покоя. Для поля

$$P_f = \frac{\varepsilon_f}{3}. \quad (6.11.4)$$

Отсюда

$$P = P_p + P_f \leq \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_f}{3}, \quad \varepsilon - 3P \geq 0. \quad (6.11.5)$$

Таков общий вывод для электромагнитно-взаимодействующих частиц и электромагнитного поля.

Отметим одну тонкость. Изолированная заряженная частица обладает собственным электромагнитным полем. Можно вычислить интегралы по объему от плотности энергии и натяжения этого поля. Для точечного заряда такое вычисление не проходит из-за расходимости поля в $r = 0$, оно возможно только для размазанного заряда. Но мы не будем подробно останавливаться на этой части проблемы. Мы хотим подчеркнуть, что энергия поля отдельной частицы всегда включена в экспериментально измеряемую энергию покоя (mc^2), а натяжения поля всегда скомпенсированы другими неэлектромагнитными силами внутри частицы.

Отсюда следует, что наивное вычисление вклада электромагнитного поля в энергию и натяжения во взаимодействующем газе привело бы нас к ошибке. Взяв полное поле E и возведя его в квадрат, мы еще раз учитываем энергию, уже учтенную в массах покоя частиц; в уравнениях

$$E = \sum E_i, \quad \frac{E^2}{8\pi} = \sum_i \frac{E_i^2}{8\pi} + \sum_{i \neq k} \frac{E_i E_k}{8\pi}$$

*) Индексы p (particles) — частицы, f (field) — поле.

сумма $\sum E_i^2$ есть вклад в энергию невзаимодействующих частиц. Лишь попарные, $i \neq k$ члены следует включить в ε_i и P_i .

Это замечание не нарушает фундаментального равенства $\varepsilon_i = 3P_i$, можно легко показать, что оно справедливо не только для $E_{\text{полн}}^2$, но и для $E_{\text{полн}}^2 - \sum E_i^2$ (а также для соответствующих магнитных вкладов). Но после вычитания мы не можем больше утверждать, что ε_i и P_i положительны; конечно, они заведомо отрицательны в электронейтральном газе, однако (6.11.5) остается в силе.

Вернемся к уравнениям (6.11.5) и, в частности, к неравенству $\varepsilon - 3P \geq 0$.

Область применимости этого неравенства чрезвычайно широка. Оно применимо к идеальному ферми-газу из нейтральных частиц. Оно остается применимым и при учете электромагнитного взаимодействия заряженных частиц холодного ферми-газа (впрочем, в этом случае взаимодействие дает лишь малую поправку порядка $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ или $\frac{Z^{2/3}}{137}$ в присутствии тяжелых ядер; см. выше, стр. 194. Но неравенство применимо к горячему газу, в котором плотность энергии квантов больше плотности энергии обычных частиц (обладающих массой покоя). Оно остается в силе и при таких температурах, когда рождаются пары частица — античастица (электроны и позитроны).

Наконец, неравенство (6.11.5) применимо и к магнитотурбулентной среде, в которой более или менее хаотические электрические токи создают хаотические магнитные поля и взаимодействуют с этими полями. В соответствии со способом вывода нам не пришлось применять условие вмороженности магнитного поля или какие-либо соображения о проводимости среды: от проводимости и вмороженности зависит время жизни, т. е. эволюция и будущее данного состояния, но не само давление и энергия состояния в данный момент.

При этом надо выбрать такой масштаб токов и полей, при котором упорядоченно движутся огромные числа заряженных частиц: только в этом случае магнитное давление будет больше кинетического. С другой стороны, масштаб токов и полей должен быть мал по сравнению с размерами всей системы для того, чтобы, усредняя по площади, можно было говорить о среднем давлении. В системе типа магнитного диполя нет «давления», подчиняющегося закону Паскаля, есть только анизотропные давления (натяжения).

По той же причине можно говорить о давлении и плотности энергии только для электронейтральной системы. В равновесии весь нескомпенсированный заряд движется наружу к поверхности системы или к бесконечности в случае однородной неограниченной материи. Общий вопрос о различной трактовке близкого дей-

вующих и дальнедействующих сил был освещен в начале раздела (гл. 5, § 1).

В общерелятивистской теории тензора энергии — импульса неравенство $\varepsilon - 3P \geq 0$ записывается особенно сжато и красиво.

В локально евклидовой сопутствующей системе отсчета и при выполнении закона Паскаля

$$\varepsilon = T^0_0, \quad -P = T^1_1 = T^2_2 = T^3_3, \quad \text{т. е. } T^\beta_\alpha = -P\delta^\beta_\alpha, \quad (6.11.6)$$

где δ^β_α — символ Кронекера. Запишем в виде свертки

$$T = T^\alpha_\alpha = T^0_0 + T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 = \varepsilon - 3P \geq 0. \quad (6.11.7)$$

Фактическая правильность неравенства для широкого круга систем и сжатая общеквариантная формулировка неравенства наталкивали на предположение, что неравенство $T = \varepsilon - 3P \geq 0$ представляет собой общий закон природы. Предполагалось, что в будущем можно будет найти общее доказательство, относящееся не только к электромагнитному, но и к любому взаимодействию.

В работе Зельдовича (1961), изложению которой посвящен следующий параграф, эти предрассудки были опровергнуты.

Заметим, что асимптотика $\varepsilon = 3P$ изящно записывается в виде $T = T^\alpha_\alpha = 0$, но дает для скорости звука мало изящное выражение $a_{зв} = c/\sqrt{3}$. Трудно представить себе, чтобы релятивистские соображения приводили бы к чему-нибудь, отличному от условия $a_{зв} \leq c$.

§ 12. Предельно жесткое уравнение состояния

Рассмотрим систему частиц, взаимодействующих с векторным полем. Векторное поле аналогично электромагнитному с одним лишь отличием: в плотность лагранжиана добавлен член, пропорциональный $A_k A^k$, где A_k — вектор-потенциал (4-вектор ϕ , A_β):

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik} - \frac{1}{8\pi} \mu_*^2 A_k A^k. \quad (6.12.1)$$

Остальные уравнения — обычные. Такое изменение лагранжиана приводит к изменению характера решений уравнений поля. С одной стороны, меняются решения типа волн, распространяющихся в пустоте. Для этих решений получается другая связь между длиной волны и частотой.

В выражении

$$A_k = a_k e^{i\omega t + ikr} \quad (6.12.2)$$

уравнения дают

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \mu_*^2 c^2. \quad (6.12.3)$$

Такая связь (6.12.3) соответствует в квантовой теории квантам поля — «вектонам», обладающим массой покоя, равной

$$m = \frac{\hbar\mu_*}{c}. \quad (6.12.4)$$

В частности, вектоны могут быть и покоящимися; электромагнитные кванты с массой покоя, равной нулю, в отличие от вектонов, всегда движутся со скоростью света.

При данном k у волны есть три независимых решения, соответствующих трем типам поляризации (в отличие от двух для электромагнитного поля). Эти три решения соответствуют квантовой картине вектона как частицы со спином 1 (момент \hbar). Проекция этого спина на произвольную ось может принимать три значения: 1, 0, -1.

Для системы свободных волн такого поля получается

$$\epsilon > 3P,$$

как и следует ожидать из квантовой картины движения частиц (вектонов) с отличной от нуля массой покоя.

Однако эти решения не исчерпывают содержания теории: это видно уже из того, что компонент потенциала 4, а свободные волны имеют только три независимых решения. Нужно рассмотреть еще статическое поле заряда и взаимодействие зарядов. В электромагнитной задаче

$$\varphi = \frac{e}{r}, \text{ энергия взаимодействия } \epsilon_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}. \quad (6.12.5)$$

В рассматриваемом случае получается «потенциал Юкавы»

$$\varphi = \frac{g e^{-\mu r}}{r}, \quad \epsilon_{12} = \frac{g_1 g_2 e^{-\mu r_{12}}}{r_{12}}, \quad (6.12.6)$$

где g играет роль заряда, характеризуя взаимодействие частицы с вектонным полем. В этом изменении закона взаимодействия и заключается суть дела.

Благодаря экспоненте можно взять макроскопическую систему, заряженную с постоянной плотностью заряда. Пусть размеры системы $R \gg \frac{1}{\mu}$ больше характерной длины затухания. Тогда, несмотря на заряд, внешнее поле системы пренебрежимо мало и можно говорить о плотности энергии и о давлении в заряженной системе, в зависимости от плотности заряда.

Подсчитаем энергию, элементарно суммируя попарное взаимодействие равномерно распределенных частиц. Мы предположим, что среднее расстояние между частицами $n^{-1/3}$ меньше юкавского радиуса взаимодействия μ^{-1} , и заменим суммирование

интегрированием. Энергия взаимодействия частиц в объеме V —

$$E_V = \frac{1}{2} n^2 g^2 \int_V \int_V \frac{e^{-\mu r_{12}}}{r_{12}} dV_1 dV_2 = \frac{2\pi g^2 n^2 V}{\mu^2}. \quad (6.12.7)$$

Если частицы (заряды) имеют массу m_0 и покоятся, то мы получим плотность энергии и плотность ρ ,

$$\rho = nm_0 + \frac{2\pi g^2 n^2}{\mu^2 c^2} = \rho_0 + b\rho_0^2, \quad (6.12.8)$$

где

$$b = \frac{2\pi g^2}{m_0^2 \mu^2 c^2}.$$

Отсюда найдем давление

$$P = c^2 b \rho_0^2, \quad (6.12.9)$$

так что асимптотически

$$P \rightarrow c^2 \rho = \varepsilon. \quad (6.12.10)$$

Соответственно для скорости звука получим

$$a_{зв}^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{2b\rho_0}{1 + 2b\rho_0} c^2 \quad (6.12.11)$$

и асимптотически $a_{зв} \rightarrow c$ при $\rho \rightarrow \infty$. Для простоты выше рассматривались покоящиеся заряды. Если заряженные частицы суть фермионы, то при большой плотности они станут релятивистскими, их собственный вклад в плотность и давление будет пропорционален $n^{4/3}$. Однако движение частиц при данной их плотности не меняет создаваемого ими потенциала — факт, хорошо известный в электромагнитной теории *) и не меняющийся в теории вектонов. Поэтому движение частиц не изменит пропорционального n^2 члена в плотности энергии и в давлении. При достаточно большом n этот член всегда станет главным. В упомянутой статье Зельдовича (1961) дано более подробное и формальное доказательство результата. Доказано, что те же результаты следуют из релятивистски инвариантной теории поля, начинающейся с лагранжиана. Следует указать, что только векторное поле дает отталкивание между частицами и притяжение между частицей и античастицей. Скалярное и тензорное поля дают притяжение между частицами.

Результат имеет принципиальное значение. Удалось построить последовательную релятивистскую теорию взаимодействия, в которой $\varepsilon \rightarrow P$ и нарушается неравенство (6.11.7), возможно, $\varepsilon - 3P < 0$. Следовательно, опровергнуто предположение, что

*) Пример: 82 электрона свинца, часть из которых движется со скоростью порядка $c/2$, абсолютно точно компенсируют заряд 82 протонов, содержащихся в ядре (см. гл. 2).

неравенство $\varepsilon - 3P \geq 0$ является следствием теории относительно-сти; это неравенство следует рассматривать как свойство определенного, но не самого общего класса систем. Остается другой вопрос, гораздо более трудный: что происходит на самом деле со сверхплотным веществом, с барионами большой плотности, каково неравенство для них? На этот вопрос в настоящее время нельзя дать определенный ответ. В природе осуществляется далеко не все, что не противоречит теории относительности.

Опыт показывает, что существуют нейтральные векторные мезоны ω^0 и ϕ^0 с массой около массы нуклона *). Взаимодействие их с нуклонами приблизительно соответствует предположениям, сделанным выше; оно исследовано при не слишком большом импульсе.

Нужная нам асимптотика взаимодействия зависит от того, можно ли ω и ϕ рассматривать как кванты поля или же сами ω и ϕ являются в свою очередь составными частицами и слеплены из кварков и антикварков, или из другой материи. Тогда при больших энергиях взаимодействие ω и ϕ с барионами изменится. Возникнет, однако, новый вопрос и новые возможности: какое взаимодействие слепляет кварки и антикварки в мезонах и барионах? Не является ли это совсем еще не известное взаимодействие подходящим кандидатом на роль векторного поля? Этот перечень вопросов без ответов можно было бы продолжить. Вывод, который можно сделать из всего предыдущего один: в области, где мы не знаем ничего конкретного, единственное ограничение, налагаемое общими принципами, есть $a_{\text{вв}} \leq c$.

Никаких других ограничений (и, в частности, $\varepsilon > 3P$) в общем случае нет. Итогом исследования оказалось не уточнение результата, а устранение предрассудка...

Цурута и Камерон (1965) приводят плавную кривую, связывающую результаты расчетов, принимающих во внимание взаимодействия барионов, с асимптотическим законом $P = \varepsilon$. Их кривую можно аппроксимировать уравнениями

$$\frac{P}{c^2} = \frac{\rho_0^2}{r}, \quad \rho = \rho_0 + \frac{\rho_0^2}{r}, \quad \frac{P}{c^2} = r \left[\frac{\rho}{r} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4\rho}{r} \right)^{1/2} \right].$$

Здесь $\rho_0 = nm_p$ — плотность массы покоя и n — плотность барионов. Постоянная r равна

$$r \equiv 5 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3.$$

Эти уравнения справедливы для $\rho > 10^{13} \text{ г/см}^3$ (верхний предел неизвестен) с ошибкой того же порядка, что и неопределенность в уравнении состояния.

*) Векторный мезон, который одинаково взаимодействует с любым барионом, независимо от его странности, нужно строить как линейную комбинацию ω и ϕ .

ГЛАВА 7

СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА ПРИ ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

§ 1. Физические условия в обычных звездах

Почти вся астрофизика имеет дело с веществом, находящимся при высокой температуре. Даже в том случае, когда рассматривалось холодное вещество, то лишь предполагалось, что температура недостаточно высока, чтобы существенно изменить свойства вещества. При плотности порядка 10^6 г/см^3 это означает $T < 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$, а при плотности 10^{14} г/см^3 соответственно $T < 10^{11} \text{ }^\circ\text{K}$; по житейским стандартам эти температуры достаточно высоки. Неудивительно, что белые карлики при плотности $\sim 10^6 \text{ г/см}^3$ имеют высокую температуру поверхности, $T \approx 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$, а пульсары — нейтронные звезды (плотность которых $\sim 10^{14} \text{ г/см}^3$) при образовании имеют на поверхности $T \approx 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$. Вместе с тем механическое равновесие этих плотных объектов практически определяется свойствами холодного вещества и не зависит от их температуры, поскольку температура их недр ниже указанных пределов.

Звезды, лежащие на главной последовательности (т. е. звезды, в центре которых идут ядерные реакции превращения водорода в гелий), составляющие основную долю звездного населения, имеют температуру в центре порядка 10^7 — $10^8 \text{ }^\circ\text{K}$ при плотности $0,1 \div 100 \text{ г/см}^3$. В этом случае мы говорим о горячих звездах; равновесие их полностью определяется именно тепловым давлением. Это связано с тем, что плотность вещества в таких звездах мала. При массе звезды $M < 100 M_\odot$ главный вклад в давление и в плотность энергии вносит плазма — совокупность ядер и электронов, образующих одноатомный нерелятивистский газ с показателем адиабаты $5/3$.

В периферических слоях температура ниже и на поверхности звезд температура опускается до $50\,000$ — $3000 \text{ }^\circ\text{K}$; в последнее время открыты объекты неизвестной природы с температурой поверхности порядка 700 — $1000 \text{ }^\circ\text{K}$. Поэтому во внешней оболочке звезд ионизация уже отнюдь не является полной; наряду со свободными электронами в газе находятся и ионы, частично сохранившие электронную оболочку. У самой поверхности в атмосфере

холодных звезд есть и нейтральные атомы, и молекулы химических соединений, и даже расплавленные или затвердевшие частицы из огнеупорного вещества (возможно, металлические окислы).

Равновесное тепловое излучение играет решающую роль в выражении потока энергии в звезде, даже когда его плотность энергии мала по сравнению с плотностью энергии плазмы. Теплопроводность горячего вещества определяет перенос лучистой энергии *).

При высокой температуре пробег квантов зависит от их рассеяния на свободных электронах (комpton-эффект), при более низкой температуре главную роль в определении теплопроводности вещества играет поглощение и испускание квантов электронами в поле ядра, притом во всех вариантах: электрон свободный ($E > 0$) и до и после взаимодействия с квантом, переход электрона из связанного ($E < 0$) в свободное ($E > 0$) состояние при поглощении и из свободного в связанное при испускании кванта, и, наконец, переход электрона из одного связанного состояния ($E < 0$) в другое ($E < 0$).

Совокупность вопросов, относящихся к обычным звездам, подробно разработана. Расчеты ядерных реакций в звездах, потоков тепла и даже тонкости наблюдаемого спектра, — в настоящее время проводятся с большой точностью. Достаточно известны и все исходные величины, относящиеся к этой области (сечения ядерных реакций, непрозрачность вещества и т. д.). По существу, ее не следует относить к релятивистской астрофизике. Поэтому мы отсылаем читателя к хорошо известным книгам по астрофизике (см. литературу в гл. 9).

Ряд вопросов, связанных с ионизацией, теплопроводностью и гидродинамикой горячего газа, изложен также в книге Зельдовича и Райзера (1966). Отметим здесь только один момент, который выявился за последнее десятилетие и не нашел еще должного отражения в литературе. Речь идет о влиянии переходов электронов 3-го типа (связанный — связанный). При этом изолированный атом или ион дает спектр испускания или поглощения, состоящий из отдельных линий. Долгое время предполагалось, что роль отдельных линий в непрозрачности вещества мала. В действительности тяжелые элементы дают очень большое число линий, а взаимодействие с электронами и другими ионами расширяет линии. В целом оказывается, что в важной для звезд области плотностей и температур для обычного состава звездного вещества вклад линий в непрозрачность может уменьшить теплопроводность в два раза. Основная

*) В отдельных областях звезд (зависящих от массы звезды и стадии ее эволюции) перенос энергии осуществляется конвекцией, а при высокой плотности — электронной теплопроводностью.

работа по расчету теплопроводности принадлежит Коксу, Стюарту и Айлерсу (1965). Расчеты изменения структуры звезд главной последовательности за счет увеличения непрозрачности из-за поглощения в линиях проделали Имшенник, Надежин и Пинаев (1966).

§ 2. Высокие температуры

Для релятивистской астрофизики представляют интерес более высокие температуры, которые, с одной стороны, приводят к неустойчивости звезды и, с другой стороны, сами появляются в катастрофических периодах эволюции звезд. Ранний дозвездный период эволюции Вселенной также предположительно характеризуется весьма высокими температурами.

В области высокой температуры наиболее характерным является рождение частиц. Прежде всего речь идет о рождении квантов электромагнитного излучения. При температуре, приближающейся к $m_e c^2/k \approx 6 \cdot 10^9$, становится существенным рождение электронно-позитронных пар. При еще более высоких температурах возможно и рождение других, более тяжелых нейтральных (π^0 , k^0 , \bar{k}^0) и заряженных (μ^\pm , π^\pm , k^\pm) элементарных частиц, вплоть до нуклон-антинуклонных пар (\bar{p} , p , n , \bar{n}), а также частиц, которые можно рассматривать как возбужденные состояния нуклонов («странные» частицы Λ , Σ , ..., резонансы Δ , Σ^* , ...). Ясно, что в этой области очень больших плотностей сильно взаимодействующих частиц количественные предсказания весьма неопределенны; неизвестен даже полный список частиц или состояний, которые нужно рассматривать.

Особо стоит вопрос о равновесном содержании нейтрино и антинейтрино. Как показали эксперименты последних лет, есть два сорта нейтрино и два сорта антинейтрино — так называемые электронные ν_e , $\bar{\nu}_e$ и мюонные ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$. Так как масса покоя этих частиц равна нулю, то равновесное их содержание и соответствующая плотность энергии и давление весьма близки к тем же величинам для квантов (электромагнитного излучения). Система, состоящая из определенного числа различных частиц, может превратиться в систему того же состава плюс любое число квантов. Однако нельзя таким же способом без изменения состава остальной системы создать только нейтрино или антинейтрино. Беспрепятственно с точки зрения законов сохранения могут возникать или исчезать только пары $\nu_e + \bar{\nu}_e$ или $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$. Наконец, по современным взглядам нейтрино являются спиральными частицами: это значит, что при данном направлении импульса момент нейтрино может быть только антипараллелен импульсу (момент антинейтрино соответственно только параллелен импульсу). Поэтому энергия, давление и число нейтрино антинейтринных пар вдвое меньше, чем те же

величины для ультрарелятивистских электронно-позитронных пар в полном термодинамическом равновесии, при $kT > m_e c^2$.

Подчеркнем еще раз различия между квантами и нейтрино: кванты полностью нейтральны, нейтрино же являются нейтральными лишь в смысле электрического и барионного зарядов. Однако существуют понятия лептонных зарядов (электронного и мюонного), которым соответствуют два закона сохранения:

$$L_e n(e^-) + n(\nu_e) - n(e^+) - n(\bar{\nu}_e) = \text{const},$$

$$L_\mu n(\mu^-) + n(\nu_\mu) - n(\mu^+) - n(\bar{\nu}_\mu) = \text{const}.$$

Однако главная особенность нейтрино заключается в их малом взаимодействии со всеми другими частицами (а' также и между собой). Поэтому нужны очень специальные условия, чтобы поддерживалось термодинамическое равновесие между нейтрино и другими частицами. Эти условия реализуются только в неограниченно протяженном однородном веществе, в горячей модели Вселенной. В этом случае большая длина пробега нейтрино в пространстве не играет роли, на смену нейтрино, ушедшим из данного объема, приходит равное число нейтрино из соседних объемов. На ранних стадиях космологического расширения, когда температура выше $2 \div 3 \cdot 10^{10}$ °K для ν_e , $\bar{\nu}_e$ (или $\sim 10^{11}$ °K для ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$), скорость установления равновесия достаточно велика по сравнению со скоростью изменения плотности и других величин. В этой ситуации мы действительно имеем дело с полным термодинамическим равновесием всех частиц, включая и нейтрино.

В ходе эволюции звезды и даже в начале катастрофических процессов сжатия или взрыва звезды, характерное время вылета нейтрино из звезды весьма мало по сравнению со всеми другими временами. Поэтому мгновенная концентрация нейтрино в каждый момент пренебрежимо мала по сравнению с равновесной концентрацией или по сравнению с концентрацией квантов.

Следовательно, применительно к состоянию вещества в звезде в действительности, как правило, следует рассматривать состояние неполного равновесия, без нейтрино *). Такие процессы, как рождение и аннигиляция пар $e^+ + e^- \rightleftharpoons 2\gamma$, рождение и поглощение квантов $e + Z \rightleftharpoons e + Z + \gamma$ (Z — ядро) идут быстро, поэтому в звезде всегда имеется полное локальное равновесие между тепловым движением ядер и электронов, между квантами и позитронами.

Рождение ν и $\bar{\nu}$, которые тут же вылетают из звезды, надо рассматривать как фактор, вызывающий эволюцию звезды, отдачу тепла и уменьшение энергии. Есть принципиальное различие между рождением пар e^+ , e^- и рождением пар ν , $\bar{\nu}$.

*) См. по этому поводу работу Цуруты и Камерона (1965) и Имшенника, Надежина, Пинаева (1966). Более подробна работа Имшенника и Чететкина (1970), которую мы обсудим в § 3.

И тот, и другой процессы сопровождаются затратой энергии и понижением давления (по сравнению с тем, которое было бы без рождения этих пар). Однако e^+ , e^- не выходят из системы. В равновесии при данной T и ρ они рождаются и аннигилируют с одинаковой скоростью. Поэтому они не расходуют энергию. Пары e^- , e^+ — это однократный вклад, а не постоянный расход вроде ежедневной покупки пищи. Если в ходе сжатия рождаются e^+ , e^- , то при расширении они снова исчезают, отдавая свою энергию в общий запас.

С учетом пар e^+ , e^- меняется конкретный вид функции $E(T, \rho)$, $S(T, \rho)$ или $P(\rho, S)$, но сохраняется уравнение $\frac{dS}{dt} = 0$.

Рождение $\nu\bar{\nu}$, безвозвратно уходящих из системы, приводит к тому, что $\frac{dS}{dt} = -\omega(T, \rho) \neq 0$ (расчету ω посвящен ряд работ; см. ниже).

В заключение следует указать, что в некоторых катастрофических событиях типа взрывов сверхновых, ν и $\bar{\nu}$ не могут покинуть систему; это было показано Арнеттом (1968). Уходу нейтрино препятствует не только короткая временная шкала взрыва, но и, что более важно, очень высокие значения плотности материи, электронной температуры и энергии нейтрино *).

Как показали расчеты Арнетта, во время образования нейтронной звезды, когда масса порядка солнечной достигает плотности $\sim 10^{14}$ г/см³ и температуры $T \sim 10^{11}$ °К (так что радиус звезды $R \sim 10^6$ см) скорости ухода ν_e и $\bar{\nu}_e$ малы, внутри звезды достигается равновесие, которое включает равновесные ν и $\bar{\nu}$. В равновесии числа ν_e и $\bar{\nu}_e$ связаны значением лептонного заряда, $L_e = = \nu_e - \bar{\nu}_e + e^- - e^+ = (e^- - e^+)_0$.

При $T \gtrsim 10^{11}$ °К ≈ 10 Мэв существенны мюонные нейтрино. Скорость их рождения мала: в первом порядке процесс рождения ν_μ необходимо связан с рождением μ^+ или исчезновением μ^- . Поэтому в скоростях всех процессов, включающих ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$ есть коэффициент $e^{-m_\mu c^2/kT}$. Но мюонные нейтрино могут легко уходить из нейтронной звезды, так что они являются наиболее важным фактором охлаждения.

Вслед за электронными и мюонными нейтрино следует рассмотреть рождение и уход гравитонов. Скорость рождения гравитонов еще меньше, чем пар мюонных нейтрино, соответственно их рассеяние и поглощение в веществе также мало, и они легко уходят. На сегодня нам не известен какой-либо астрономический объект или процесс, наблюдаемый или теоретически предсказанный, в котором было бы важно излучение высокочастотных гравитонов.

) Сечение рассеяния нейтрино пропорционально E_^2 , где E_* — энергия в системе центра масс. Если энергия нейтрино в лабораторной системе E и температура электронов T велики, $E > mc^2$, $kT > mc^2$, то $\sigma \sim \langle E_*^2 \rangle \sim EkT$.

§ 3. Различные типы равновесия

Наиболее ясным и простым является случай, когда все процессы взаимного превращения, рождения и аннигиляции частиц происходят быстро по сравнению с уходом частиц и по сравнению со скоростью изменения внешних заданных параметров (плотности или давления, энтропии или температуры). Именно в этом случае осуществляется полное термодинамическое равновесие.

Состояние системы, находящейся в полном термодинамическом равновесии, определяется заданием параметров, соответствующих законам сохранения, которые выполняются в превращениях частиц. Нужно задать барионный заряд и лептонные заряды системы. Электрический заряд, как правило, равен нулю: из-за дальнего действия электростатических сил даже малый избыток частиц одного знака заряда приводит к огромным электрическим полям и этот избыток заряда быстро уходит на поверхность тела и исчезает.

Однако такое полное термодинамическое равновесие осуществляется не всегда. Есть еще один важный случай, в котором также можно говорить о равновесии и применять формулы статистики и термодинамики. Это случай, когда одна часть процессов идет очень быстро, а другая — очень медленно. Примером является газ при температуре 10^6 — 10^7 °К, плотности между 10^{-3} и 10^7 г/см³ и с размерами $l > 10^{-12}$ Т'/ $\rho^{-3/2}$ см, т. е. $l > 10^5$ см для $\rho = 10^{-3}$ и $T = 10^7$ или для $\rho = 10^7$ и $T = 10^6$.

В таком газе быстро устанавливается максвелловское распределение по энергиям электронов и ионов. Быстро устанавливается равновесие ионизации и равновесие с электромагнитным излучением (размеры предполагаются достаточно большими, чтобы выход излучения был мал). С другой стороны, весьма мала скорость рождения пар $\nu_e \bar{\nu}_e$ (и особенно мала скорость рождения $\nu_\mu \bar{\nu}_\mu$). Весьма мала и скорость ядерных реакций. Поэтому в данном случае можно пользоваться понятием равновесия, но равновесия ограниченного. Во-первых, это равновесие без нейтрино, во-вторых, это равновесие соответствует максимуму энтропии при данной энергии и данном количестве ядер различных сортов. Характерно, что для задания ограниченного равновесия нужно задание большего числа параметров по сравнению с полным равновесием: мы должны задать отдельно концентрацию водорода, гелия и т. д., а не одну только общую концентрацию барионов. Это, очевидно, следует из того, что при температуре, когда практически исключаются ядерные реакции, сохраняется не только общее число барионов, но и число отдельных типов ядер.

Счастливым обстоятельством является резкая (экспоненциальная) зависимость от температуры скорости ядерных реакций, протекающих по сильному взаимодействию, т. е. сводящихся к пере-

группировке протонов и нейтронов; примером такого процесса является распад $\text{Fe}_{26}^{56} = 13\text{He}^4 + 4n$. Благодаря резкой зависимости можно всю исследуемую область разделить на область, в которой процесс не идет совсем (ограниченное равновесие), и область, в которой данный процесс идет быстро, и по отношению к нему имеет место равновесие (более полное, менее ограниченное равновесие). Считая быстрыми все «сильные» процессы перегруппировки, мы должны задать суммарные концентрации протонов и нейтронов (притом как свободных, так и связанных с ядрами) в качестве независимых переменных.

Концентрация всех различных типов ядер (заряд Z , атомный вес A) при этом получится из условий равновесия, которые можно записать с помощью химических потенциалов:

$$\mu(Z, A) = Z\mu(p) + (A - Z)\mu(n). \quad (7.3.1)$$

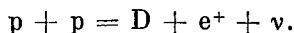
Химические потенциалы $\mu(p)$ и $\mu(n)$ здесь относятся к протонам и нейтронам, оставшимся свободными. В условиях, когда ядра не вырождены, условие равновесия имеет вид обычного закона действующих масс, известного в физической химии:

$$[Z, A] = \text{const } [p]^Z [n]^{A-Z}, \quad (7.3.2)$$

где квадратными скобками обозначены соответствующие концентрации.

Однако такая картина часто оказывается слишком идеализированной. Сложность истинной картины кинетики и равновесия ядерных реакций в горячей плазме в звездах связана с тем, что деление процессов на быстрые и медленные не совпадает с классификацией их как процессов, зависящих от сильного взаимодействия (связанных только с перегруппировкой протонов и нейтронов) и процессов, зависящих от слабого взаимодействия, в которых происходят превращения протонов в нейтроны и обратно.

Процессы сильного взаимодействия идут медленно в тех случаях, когда они требуют столкновения заряженных частиц, а температура не очень высока. Скорость процессов слабого взаимодействия может быть очень различной. Скорость особенно мала, когда необходимо, чтобы взаимодействие прошло во время столкновения частиц, например, как в $p - p$ — реакции:



Спонтанный бета-распад характеризуется временами, колеблющимися весьма сильно, и прежде всего в зависимости от энергии, выделяющейся при распаде. Приведем три примера: распад трития $T \rightarrow \text{He}^3 + e^- + \bar{\nu}$, энергия 18 кэв, время полураспада 12 лет. Нейтрон $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$; энергия (за вычетом массы покоя

электрона) $0,8 \text{ Мэв}$, время 11 мин. Для гелия $\text{He}^8 \rightarrow \text{Li}^8 + e^- + \bar{\nu}$ время распада $0,01 \text{ сек.}$

При весьма высоких температурах, когда в равновесии содержится много электронно-позитронных пар, время установления равновесия по слабому взаимодействию сокращается, становится меньше времени спонтанного распада нейтрона за счет того, что включаются новые процессы:

$$e^+ + n = p + \bar{\nu}, \quad e^- + p = n + \nu$$

и аналогичные процессы со сложными ядрами. (Такие процессы называют УРКА-реакциями; так же как УРКА, казино в Рио де Жанейро, служит превосходным стоком для денег, так и ν и $\bar{\nu}$ в этих реакциях являются прекрасным стоком для энергии горячей звезды).

Здесь возникает существенное различие между ситуацией в космологии и в звездах.

В космологии, как уже отмечалось, нейтрино никуда не уходят. Значит, наряду с выписанными процессами идут и обратные:

$$\bar{\nu} + p = n + e^+, \quad \nu + n = p + e^-$$

и достигается истинное термодинамическое равновесие.

В звездах ν и $\bar{\nu}$ беспрепятственно улетают, поэтому полное, детальное равновесие невозможно *). В работе Имшенника, Надежина, Пинаева (1966) ищется стационарное состояние, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d[p]}{dt} &= -\alpha [p] [e^-] + \beta [n] [e^+] + \gamma [n] = 0, \\ \frac{d[n]}{dt} &= \alpha [p] [e^-] - \beta [n] [e^+] - \gamma [n] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.3)$$

где α и β — константы скоростей соответствующих процессов, γ — вероятность распада свободного нейтрона.

Соотношение между концентрациями $[p]$ и $[n]$ в стационарном состоянии оказывается близким к тому, которое получается в равновесии при равном количестве ν и $\bar{\nu}$, т. е. при условии равенства нулю химического потенциала нейтрино.

Цель этих и последующих расчетов [Имшенник, Надежин, Пинаев (1967)] заключалась в вычислении скорости потери энергии посредством нейтрино в УРКА-процессе. В статье Надежина и Чечеткина (1969) вычислена скорость потери энергии нейтрино в УРКА-процессах с участием сложных ядер. [Первые расчеты потери энергии УРКА-процессом проведены Цурутой и Камероном (1965).]

В другой статье [Чечеткин (1969)] были рассмотрены не только нейтроны и протоны, но также более 50 ядер с целью нахождения состава в стационарном состоянии с испусканием нейтрино. Эту

работу следует сравнить с работой Клиффорда и Тейлера (1965), в которой рассматривается равновесие сильно взаимодействующих процессов с данным отношением протон/нейтрон. Чететкин находит для каждой температуры и плотности p/ρ отношение, даваемое процессами со слабым взаимодействием.

Таким образом, получен новый тип уравнения состояния: найдены энергия, давление, состав, энтропия и т. д. для данных ρ и T в случае испускания нейтрино. Это открытая система (благодаря уходу ν и $\bar{\nu}$); поэтому мы не имеем дело с термодинамическими соотношениями. Для нахождения эффективного показателя адиабаты (важного при рассмотрении устойчивости звезд) необходимо рассматривать сжатие или расширение с замороженным слабым взаимодействием. Эта процедура не совсем точна, так как скорость потери энергии зависит от того же процесса, который устанавливает стационарное состояние. Приближение хорошо при сравнительно низких температурах и несправедливо, когда начинается катастрофический коллапс.

Важно, что расчеты Чететкина дают более узкую область неустойчивости для звезды ($\gamma < 4/3$; см. следующий раздел и § 6 этой главы), чем термодинамические расчеты, сделанные ранее в предположении $\mu_\nu \equiv 0$ (см. § 6). См. Имшенник, Чететкин (1970).

Обратимся теперь к другому вопросу, связанному не с нейтрино, а со свойствами сильно взаимодействующих частиц: существует ли верхний предел температур?

Список сильно взаимодействующих частиц за последние несколько лет чрезвычайно быстро увеличился. Наряду со «странными» барионами (Λ , Σ , Ξ , Ω) и мезонами (K , \bar{K}) с временем жизни порядка $10^{-8} \div 10^{-10}$ сек в этот список на равных правах входят так называемые «резонансы» с временем жизни $10^{-18} \div 10^{-22}$ сек. Число этих резонансов уже приближается к 200 и продолжает расти. С другой стороны, выдвинута теория, что все это многообразие частиц можно рассматривать как соединения трех сортов кварков и трех сортов антикварков, гипотетических субэлементарных частиц *). Гипотезы о структуре и взаимодействии элементарных частиц самым решительным образом влияют на связь между температурой и плотностью энергии при сверхвысоких температурах ($kT \sim Mc^2$, где M — масса бариона).

Однако крайнее предположение заключается в том, что все частицы и резонансы рассматриваются как статистически независимые. Более того, предполагается, что при сверхвысокой температуре взаимодействием частиц можно пренебречь. Если число сортов различных частиц велико, мы можем рассматривать число

*) Популярное изложение гипотезы кварков см. Зельдович (1965). См. также замечания о современном состоянии теории кварков в конце § 10 предыдущей главы.

частиц в данном интервале массы от m до $m + \Delta m$ как гладкую функцию $\Delta N = f(m) \Delta m$. То же можно сказать о статистическом весе $(2s + 1)$, где s — спин частиц $g(m)$.

Плотность энергии нейтрального газа равна тогда (см. § 7 гл. 6).

$$\varepsilon = \int F(m, T) f(m) g(m) dm,$$

$$F(m, T) = 4\pi c \int_0^\infty \frac{p^3}{p^2 \sqrt{p^2 + m^2 c^2}} \{ \exp [c(m^2 c^2 + p^2)^{1/2} / kT] \pm 1 \}^{-1} dp.$$
(7.3.4)

Как показал Зельдович (1969), если $f(m)g(m) = am^n$, то

$$\varepsilon = \text{const} \cdot T^{4+n+1}.$$
(7.3.5)

Но если $f(m)g(m)$ экспоненциально растет,

$$f(m)g(m) = b \exp \left(\frac{mc^2}{\theta} \right),$$

то температура имеет абсолютный максимум: $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \theta$ по закону

$$\varepsilon = \text{const} \ln \left(\frac{\text{const}}{\theta - T} \right).$$
(7.3.6)

Идея о существовании верхнего предела температуры была первоначально предложена Хагедорном (1965). Из опытов по рассеянию при высоких энергиях он вычислил $T_{\max} = 1,5 \cdot 10^{12} \text{ }^\circ\text{K} = 150 \text{ Мэв}$, которая, конечно, очень мала.

С другой стороны, в гипотезе о кварках естественно считать, что асимптотически при $kT \geq M_q c^2$ (M_q — масса кварка) в равновесии будут только кварки, антикварки и лептоны; обычных сильно взаимодействующих частиц не будет, так же как в обычных условиях при высокой температуре нет атомов и молекул, есть только ядра и электроны. Предположительно, M_q в пять или 10 раз больше массы протона.

В этой гипотезе асимптотически

$$\varepsilon = \alpha_1 \cdot \alpha T^4,$$
(7.3.7)

где вклад в α_1 кварков равен $3 \cdot 2,75 \cong 8$; всего, с учетом μ^\pm , ν_e , ν_μ , e^\pm и ν , получим $\alpha \sim 18$.

Последняя формула (7.3.7) кажется более правдоподобной для больших температур, чем странная зависимость (7.3.5). Но в чем же тогда заключается ошибка в рассуждениях, приводящих к формуле (7.3.5)? Ведь многочисленные сорта частиц действительно существуют.

Начнем с простого примера. Атом водорода, безусловно, существует как связанное состояние. Его масса мало отличается от массы протона. Будем рассматривать атом водорода как частицу. Рассуждая формально, мы приходим к выводу (явно неверному), что при температуре $kT \sim m_p c^2$, когда много протонов и антипротонов, должно быть также много атомов водорода (p, e^-) и антиводорода (\bar{p}, e^+).

Но в чем формальная причина ошибки? Дело в том, что мы не учитывали взаимодействия атома водорода с гигантским количеством электронов, позитронов, протонов и антипротонов, составляющих высокотемпературную плазму. Мы не учли также собственного объема атома водорода. Об индивидуальном атоме можно говорить лишь в том случае, если в объеме $4a_0^3$ (a_0 — боровский радиус) нет других частиц. Между тем мы рассматривали атомы как частицы и при плотности гораздо большей $1/4a_0^3$. Отсюда становится ясно, что ошибочным в рассуждениях, приведших к формуле (7.3.6), было предположение, что при [большой] плотности можно рассматривать газ как идеальный.

В действительности следует ожидать, что учет взаимодействия разнообразных частиц как раз и даст те результаты, к которым приводит кварковая модель. Отталкивание частиц ограничит их рождение и уменьшит теплоемкость системы.

Для аналогичного вопроса о веществе сверхвысокой плотности (но холодном) эта идея была развита в работе Зельдовича (1959) (универсальное отталкивание барионов). Итак, существование огромного числа элементарных частиц не приводит, по-видимому, к верхнему пределу температуры. Попытку установить верхний предел температуры для области, где квантовые эффекты перепутаны с эффектами ОТО, сделал Сахаров (1966). Мы отсылаем интересующихся к этой работе.

ГЛАВА 8

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

§ 1. Нейтральный газ; плазма; равновесие ионизации

Приведем без вывода основные формулы, имеющиеся в учебниках. Энергию выражаем в эргах, температуру в градусах; за единицу массы принят один грамм. Точнее (это будет существенно далее), термодинамические величины относятся к одному грамму массы покоя.

В нерелятивистском одноатомном газе

$$P = \frac{RT\rho}{\mu}, \quad E = \frac{3}{2} \frac{RT}{\mu} + \text{const}, \quad (8.1.1)$$

где ρ — плотность массы покоя, μ — молекулярный вес, $\mu = 1$ (а не 1,008) для водорода, $\mu = 4$ для He^4 . Газовая постоянная $R = 8,31 \cdot 10^7$ эрг/г·град.

Общее выражение для удельной энтропии (на грамм)

$$S = - \frac{R}{\mu} \ln \frac{\rho}{\mu m} + \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} \ln kT + \frac{(c + 5/2) R}{\mu}, \quad (8.1.2)$$

где c — так называемая химическая постоянная $c = \ln \left[g \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]$, g — статистический вес основного состояния.

Приводим численные значения c для атомарного водорода: $c = 102,9$ и для атомарного гелия $c = 103,6$.

Для водорода в значении c учтено, что основное состояние 4-кратно вырождено за счет спина протона и спина электрона. Предполагается, что $kT \gg \Delta E$, где ΔE — разность энергии состояний с параллельными спинами $\mathcal{F} = 1$ и антипараллельными спинами $\mathcal{F} = 0$; это ΔE соответствует радиолинии $\lambda = 21$ см.

Для полностью ионизованного газа имеют место те же формулы, с той разницей, что эффективный вес, отнесенный ко всем

частицам (ядрам и электронам),

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \frac{Z}{A}}, \quad (8.1.3)$$

где μ_0 относится к нейтральному газу: $\mu = 0,5$ для водорода и $\mu = 4/3$ для He^4 при полной ионизации.

Уравнение для равновесия ионизации (уравнение Саха) выпишем через концентрации частиц:

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{g_1 g_e}{g_0} e^{-\frac{I}{kT}}. \quad (8.1.4)$$

Аналогично пишется и уравнение для второй ионизации ($n_2 n_e / n_1$) и т. д. Здесь g_1 — статистический вес иона, $g_e = 2$ то же для электрона, g_0 — для нейтрального атома. Получим численно для водорода

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{13,6 \text{ эв}}{kT}} = 2,4 \cdot 10^{15} e^{-\frac{1,58 \cdot 10^5}{T}} T^{3/2},$$

для гелия (первая ионизация! $n_1 = [\text{He II}]$)

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = 4 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{24,6 \text{ эв}}{kT}} = 9,6 \cdot 10^{15} e^{-\frac{2,85 \cdot 10^5}{T}} T^{3/2}.$$

Приводим соответствующую таблицу V для водорода.

Т а б л и ц а V

Температура, при которой водород ионизован наполовину

ρ	10^{-24}	10^{-16}	10^{-8}	10^{-4}	10^{-2}
$n_e = n_1 = n_0$	0,3	$3 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{15}$	$3 \cdot 10^{19}$	$3 \cdot 10^{21}$
$\frac{T}{kT/I}$	$3,2 \cdot 10^3$ $2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^3$ $3,2 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^3$ $7 \cdot 10^{-2}$	$27 \cdot 10^3$ $1,7 \cdot 10^{-1}$	$61 \cdot 10^3$ $3,9 \cdot 10^{-1}$

Отметим, что хотя в принципе для ионизации нужно, чтобы тепловая энергия (kT) была порядка энергии ионизации I , в действительности из-за статистического фактора величина kT/I оказывается существенно меньше единицы,

Как в одноатомном нейтральном газе, так и в полностью ионизованном газе показатель адиабаты γ равен $5/3$, т. е.

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S = \frac{5}{3}.$$

Однако в области, где ионизация не 0 и не 100%, а следовательно, процент ионизации зависит от плотности и давления, показатель адиабаты меньше $5/3$ (однако же $1 \leq \gamma \leq 5/3$).

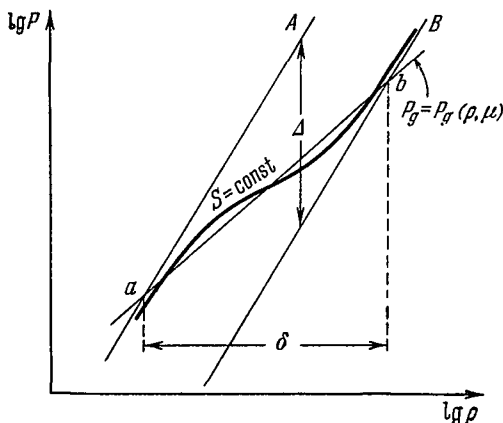


Рис. 31. Изэнтропы в плоскости $\lg \rho - \lg P$ для водорода (схема). Линия A — асимптота $S = \text{const}$ до ионизации, линия B — асимптота $S = \text{const}$ после ионизации.

В плоскости $\lg P - \lg \rho$ линии $S = \text{const}$ имеют вид, показанный на рис. 31 с двумя асимптотами. Асимптоты имеют уравнение $\lg P = \frac{5}{3} \lg \rho + \text{const}$; асимптота A относится к нейтральному газу, асимптота B — к полностью ионизованному газу.

Расстояние по вертикали Δ между двумя параллельными асимптотами различно для различных значений S . Для теории равновесия массы под действием силы тяжести играет роль пересечение линии $P(\rho)$ при $S = \text{const}$ с линией *) $P_g = 0,36GM^{1/2}\rho^{1/2}$. В логарифмических координатах эта последняя линия изображается прямой с наклоном меньшим, чем наклон асимптот (наклон

*) Выражение P_g дает силу притяжения двух половин звезды на расстоянии порядка радиуса звезды R , поделенную на R^2 : $(GM^2/R^2)/R^2 = GM^2/R^4$. Взяв $R \sim M^{1/2}\rho^{-1/2}$, мы получаем выражение типа, приведенного в тексте, численный коэффициент получается из расчетов звездных моделей. Равенства $P(\rho)$ и P_g означают равновесие сил, расширяющих звезду (давление плазмы $P(\rho)$), и сил, сжимающих звезду (тяготение P_g) (см. об этом далее, гл. 10).

$\gamma = \frac{d \lg P}{d \lg \rho}$ равен $4/3$ и $5/3$ соответственно). При данном M эта линия пересекает асимптоты в точках a и b ; в определенном интервале M линия трижды пересекает адиабату, что соответствует существованию двух решений для данной массы, описываемых крайними точками (средняя точка соответствует неустойчивому решению *). Различие плотности в этих двух решениях приближенно соответствует расстоянию по горизонтали между b и a (см. рис. 34). Легко показать, что $\delta = 3\Delta$. Напомним, что отношение плотности в двух решениях равно $\rho_b/\rho_a = 10^8$, отношение давлений $P_b/P_a = 10^{1,338}$, поскольку δ относится к графику в логарифмическом масштабе.

§ 2. Термодинамика излучения

Выражение для плотности энергии излучения имеет вид

$$\varepsilon = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{cp \cdot 4\pi p^2 \cdot dp}{e^{cp/kT} - 1}, \quad (8.2.1)$$

где p — импульс кванта. Производя интегрирование, получаем

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} T^4 = \sigma T^4. \quad (8.2.2)$$

Приводим численное выражение, ε эрг/см³, в зависимости от T в различных единицах,

$$\varepsilon = 7,57 \cdot 10^{-15} T^4 (^\circ\text{K}) = 7,57 \cdot 10^{21} T_9^4 = 1,37 \cdot T^4 \text{ (эв)},$$

где $T_9 = T/10^9$ °K. При этом давление

$$P = \varepsilon/3.$$

Энтропия единицы объема

$$S_V = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{T} = \frac{4}{3} \sigma T^3 \quad (8.2.3)$$

(заметим, что размерность энтропии эрг/см³·град, так что S_V зависит от того, в каких единицах выражена температура).

В технической литературе принято было обозначать через σ коэффициент в выражении потока энергии (а не ее плотности) в поле равновесного излучения; мы этот коэффициент обозначим через a . Итак,

$$q \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} = a T^4 = \frac{c}{4} \varepsilon = \frac{c}{4} \sigma T^4, a = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^4. \quad (8.2.4)$$

*) Эти рассуждения указывают на принципиальную возможность существования двух решений. Подробно ситуация разбирается в следующем разделе,

Ниже мы рассмотрим плазму, находящуюся в равновесии с излучением. В широкой области температур и плотностей, энергией и энтропией атомов, ионов и электронов, составляющих плазму, можно пренебречь, однако плотность массы среды целиком определяется именно плотностью плазмы.

Выведем сначала термодинамические соотношения, справедливые в этой области T и ρ , а затем найдем точные условия, которым должны удовлетворять T и ρ для справедливости этих соотношений. Таким образом, получим удельные (на один грамм) величины

$$E = \frac{\sigma T^4}{\rho}, \quad S = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^3}{\rho}. \quad (8.2.5)$$

При адиабатическом сжатии $S = \text{const}$ находим

$$T = \left(\frac{3S\rho}{4\sigma} \right)^{1/3}, \quad P = \frac{3^{1/3} S^{4/3}}{4^{1/3} \sigma^{1/3}} \rho^{4/3}. \quad (8.2.6)$$

Таким образом, показатель адиабаты $\gamma = 4/3$ для вещества, главный вклад в энергию которого вносит излучение.

Отметим, что число квантов в единице объема дается выражением

$$n_\gamma = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{cp/kT} - 1} = 0,244 \left(\frac{kT^0}{\hbar c} \right)^3 = 20T^3 (^\circ \text{K}), \quad (8.2.7)$$

откуда средняя энергия, приходящаяся на один квант, будет

$$\overline{\hbar\omega} = \frac{\varepsilon}{N} = 2,7kT.$$

Число квантов на один грамм плазмы пропорционально T^3/ρ , т. е. пропорционально удельной энтропии. Это обстоятельство подробно анализируется в § 5 этой главы.

Сравним энергию и давление излучения с энергией и давлением плазмы. Принято обозначать через β отношение давления плазмы к полному давлению

$$\beta = \frac{\frac{RT\rho}{\mu}}{\frac{1}{3} \sigma T^4 + \frac{RT\rho}{\mu}}. \quad (8.2.8)$$

Для полностью ионизованного водорода найдем, что

$$\beta = 0,5 \quad \text{при} \quad \frac{T^3}{\rho} = \frac{3R}{\mu\sigma} = 6,6 \cdot 10^{22}.$$

Таким образом, связь между плотностью и температурой $T_{1/2}$, при которой $\beta = 1/2$, дается выражением

$$T_{1/2} = 4 \cdot 10^7 \rho^{1/3}.$$

Удобно преобразовать выражение для β к виду

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{T^3 \mu \sigma}{3R\rho}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{T}{T_{1/2}}\right)^3}. \quad (8.2.9)$$

Заметим, что при $\beta = 0,5$ давление плазмы и излучения равны, но при этом энергия излучения вдвое больше энергии плазмы. Однако дополнительная плотность массы, связанная по принципу эквивалентности с энергией $\Delta\rho = \varepsilon/c^2$, составляет долю плотности массы покоя плазмы, даваемую выражением

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\varepsilon}{\rho_0 c^2} = \frac{1,5\sigma T^4}{\rho_0 c^2} = 10^{-35} \frac{T^4}{\rho_0} = \left(\frac{2T}{4 \cdot 10^9 \rho_0^{1/3}}\right)^4. \quad (8.2.10)$$

Таким образом, существует широкая область, в которой энергия излучения сравнима или даже больше энергии плазмы, но плотность массы излучения весьма мала по сравнению с плотностью массы покоя плазмы. При больших температурах следует принимать во внимание увеличение полной плотности $\rho_t = \rho_0 + \Delta\rho$ по сравнению с ρ_0 . Однако в типичных случаях релятивистских звездных моделей разность $\Delta\rho$ — лишь одна из нескольких релятивистских поправок, которые имеют одинаковый порядок величины.

Отметим особо, что каждому определенному значению β отвечает определенное отношение T^3/ρ , а следовательно, и определенное

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho^{4/3}} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma T^4}{\rho^{4/3}} + \frac{RT}{\mu \rho^{1/3}} = \frac{R}{\mu} \sqrt[3]{\frac{3R}{\mu \sigma}} \left[\left(\frac{T}{T_{1/2}}\right)^4 + \frac{T}{T_{1/2}} \right] = \\ &= \frac{R}{\mu} \sqrt[3]{\frac{3R}{\mu \sigma}} \left[\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{4/3} + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/3} \right]. \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

Как уже отмечалось (см. стр. 240), отношение $P/\rho^{4/3}$ непосредственно зависит от массы звезды. Подробно об этом см. § 2 гл. 10, однако уже здесь полезно дать представление о роли давления излучения и давления плазмы в звездах различной массы.

В последней строке табл. VI даны значения показателя адиабаты γ , определенного по изэнтропической зависимости давления от плотности. Очевидно, что γ зависит только от β . Нетрудно получить формулу для полностью ионизованной плазмы,

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S \equiv \gamma = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \beta \frac{4-3\beta}{8-7\beta}, \quad (8.2.12)$$

Т а б л и ц а VI

Зависимость β и γ от массы однородной звезды из водорода ($\mu = 0,5$) и железа ($\mu = 56/27$)

β	1	0,9	0,8	0,5	0,3	0,2	0,1	0
$M (\mu = 0,5)$	0	$5,7 \cdot 10^{34}$	$1,0 \cdot 10^{35}$	$4,1 \cdot 10^{35}$	$1,4 \cdot 10^{36}$	$3,2 \cdot 10^{36}$	$1,4 \cdot 10^{37}$	∞
$M (\mu = 56/27)$	0	$3,3 \cdot 10^{33}$	$5,9 \cdot 10^{33}$	$2,4 \cdot 10^{34}$	$7,9 \cdot 10^{34}$	$1,9 \cdot 10^{35}$	$7,80 \cdot 10^{35}$	∞
γ	$\frac{5}{3}$	$\frac{4,687}{3}$	$\frac{4,533}{3}$	$\frac{4,278}{3}$	$\frac{4,158}{3}$	$\frac{4,103}{3}$	$\frac{4,05}{3}$	$\frac{4}{3}$

по которой и вычислены приведенные в таблице значения γ . Существуют в литературе и другие определения эффективного показателя как величины, характеризующей, например зависимость температура от плотности и т. д., но мы ими пользоваться не будем.

§ 3. Пары и нейтрино

Приводим выражения для равновесной плотности электронов n_- и позитронов n_+ в виде интегралов

$$n_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(E_e - \mu)/kT} + 1}, \quad (8.3.1)$$

$$n_+ = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(E_e + \mu)/kT} - 1}; \quad (8.3.2)$$

здесь $E_e = \sqrt{(m_e c^2)^2 + c^2 p^2}$, μ — химический потенциал электронов; в выражении (8.3.2) для позитронов уже учтено, что сумма химических потенциалов позитронов и электронов в равновесии равна нулю, поскольку все заряды пары e^+ , e^- тождественно равны нулю. Само значение μ определяется из условий электронейтральности газа $n_- - n_+ = \sum Z_i n_i$, где n_i — концентрация ядер, Z_i — их заряды, выраженные в единицах заряда электрона.

Энергия единицы объема определяется аналогичными интегралами:

$$E_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{E_e 4\pi p^2 dp}{e^{(E_e - \mu)/kT} + 1}, \quad E_+ = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{E_e 4\pi p^2 dp}{e^{(E_e + \mu)/kT} - 1}. \quad (8.3.3)$$

Здесь, однако, следует сделать оговорку: обычно за нуль энергии принимается энергия холодного вещества включающая в себя

энергию массы покоя тех электронов, которые имелись в холодном веществе. Число их равно $\sum Z_i n_i = n_- - n_+$. Поэтому полная энергия единицы объема в этой системе

$$E = E_- + E_+ - m_e c^2 (n_- - n_+); \quad (8.3.4)$$

(Здесь E — превышение энергии горячей плазмы над энергией холодной плазмы, вызванное парами; энергия фотонов исключена.) Наконец, выражение энтропии частиц, находящихся в единице объема, будет таково:

$$S_- = k \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \ln(e^{(E_e - \mu)/kT} + 1) \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(E_e - \mu)/kT} + 1} \quad (8.3.5)$$

и аналогично (с изменением знака μ) для S_+ .

Эти общие выражения резко упрощаются в предельных случаях, к рассмотрению которых мы и переходим.

Первый предельный случай — невырожденный нерелятивистский газ электронов и позитронов. Для этого нужно, чтобы $\mu < m_e c^2$, что достигается при

$$m_e c^2 \left(\frac{\rho}{10^6} \right)^{1/3} < kT < m_e c^2. \quad (8.3.6)$$

Возникают два упрощения: в знаменателе уравнений (8.3.1) и (8.3.2) пренебрегаем единицей по сравнению с $e^{(E_e - \mu)/kT}$, энергию записываем в нерелятивистском виде:

$$E_e = m_e c^2 + \frac{p^2}{2m_e}. \quad (8.3.7)$$

Введем еще обозначение $\mu' = \mu - m_e c^2$, $\mu' < 0$. Получим тогда

$$\left. \begin{aligned} n_- &= e^{\frac{\mu'}{kT}} \frac{2 (2\pi m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}, \\ n_+ &= e^{-\frac{\mu' + 2m_e c^2}{kT}} \frac{2 \cdot (2\pi m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.8)$$

и условие равновесия в виде закона действующих масс:

$$n_- n_+ = e^{-\frac{2m_e c^2}{kT}} \frac{(m_e kT)^3}{2\pi^3 \hbar^6}. \quad (8.3.9)$$

Вместе с условием, дающим $n_- - n_+$, имеем два уравнения для двух величин n_- и n_+ . В том же приближении, оставляя первые не исчезающие члены в разложении по $(kT/m_e c^2)$, имеем добавки,

связанные с рождением пар:

$$\Delta E = 2n_+ m_e c^2, \quad \Delta S = \frac{\Delta E}{T}.$$

Второй предельный случай соответствует зарядовой симметрии, что выражается условием $\mu \cong 0$, $n_+ \cong n_-$. Этот случай при малой плотности плазмы реализуется при низкой температуре, так что есть область перекрытия двух предельных случаев. Чем больше плотность плазмы, тем выше должна быть температура для того, чтобы реализовать второй предельный случай. При $\mu = 0$ все величины, отнесенные к единице объема, зависят от одного параметра $x = kT/m_e c^2$, например,

$$n_+ = n_- = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{e^{\frac{z^2}{x}} + 1}. \quad (8.3.10)$$

Аналогичные выражения получаются и для других величин. Удобные асимптотические формулы имеют место для больших и для малых x :

$$\left. \begin{aligned} n_+ = n_- &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 e^{-\frac{1}{x}} x^{3/2}, \\ E_+ &= 2n_+ m_e c^2, \quad S_+ = \frac{E_+}{T}, \quad P_+ = \frac{kT}{m_e c^2} E_+, \end{aligned} \right\} x \ll 1, \quad (8.3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} n_+ = n_- &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 2x^3 \left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots \right), \\ E_+ &= \frac{7}{4} \sigma T^4, \quad P_+ = \frac{1}{3} E_+, \quad S_+ = \frac{7}{3} \sigma T^3, \end{aligned} \right\} x \gg 1, \quad (8.3.12)$$

где σ — константа, относящаяся к квантам (см. предыдущий параграф *).

Рассмотрим теперь газ, состоящий из плазмы и излучения, к которому при высокой температуре добавляются пары. Так же, как это было сделано в предыдущем параграфе, пренебрежем энергией и давлением плазмы, но все величины будем относить к единице массы плазмы. Плотностью электронов плазмы также пренебрегаем, при этом реализуется зарядово-симметричный случай.

В двух предельных случаях получим простые ситуации: при $x \ll 1$ только излучение:

$$E = \frac{\sigma T^4}{\rho}, \quad P = \frac{1}{3} \sigma T^4, \quad S = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^3}{\rho}, \quad (8.3.13)$$

*) Здесь E_+ , S_+ , P_+ — величины, относящиеся к парам, т. е. включающие вклад как позитронов, так и электронов.

при $x \gg 1$, кроме излучения, равновесный релятивистский позитронно-электронный газ:

$$E = (\sigma T^4 + \frac{7}{4} \sigma T^4) = \frac{11}{4} \sigma T^4, \quad P = \frac{11}{12} \sigma T^4, \quad S = \frac{11}{9} \frac{\sigma T^3}{\rho}. \quad (8.3.14)$$

Из этих формул легко найти выражения $P(\rho, S)$ для обоих случаев. Кривая $P(\rho, S = \text{const})$ в логарифмических координатах имеет вид, показанный на рис. 32, а (не в масштабе).

Наклон левой и правой асимптот (показаны пунктиром) одинаков; он соответствует $\gamma = 4/3$.

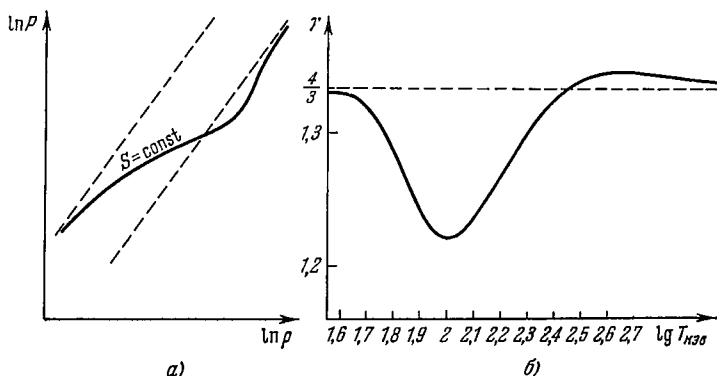


Рис. 32. а) Схематическое изображение зависимости давления P от плотности ρ , когда можно пренебречь давлением плазмы, в области температур, при которых в равновесии появляются пары e^+ , e^- .

б) Зависимость $\gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ от T для тех же условий, что и рис. 32, а.

Однако легко убедиться, что правая асимптота лежит ниже левой на величину $\frac{1}{3} \ln(11/4)$. Значит, в промежутке в среднем γ должно быть меньше $4/3$ и можно показать, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) d \ln \rho = -\frac{1}{3} \ln \frac{11}{4}.$$

Пинаева (1964) подробно рассмотрела задачу о показателе адиабаты в зависимости от температуры. Заимствуем из ее работы табл.

VII значений $\gamma = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S$ и график рис. 32, б.

Показатель адиабаты γ много меньше $4/3$ в области, где с увеличением T происходит переход от чистого излучения к излучению с парами e^+ , e^- . При $T \gtrsim 300$ кэв γ становится больше $4/3$. Это происходит потому, что число пар e^+ , e^- при изэнтропическом сжатии растет уже медленно, а ферми-газ пар e^+ , e^- имеет всегда $\gamma > 4/3$.

Т а б л и ц а VII

Зависимость γ от температуры

$T, \text{кэВ}$	50	70	100	125	150	200	300	500	700	∞
γ	1,320	1,267	1,221	1,234	1,259	1,301	1,336	1,345	1,342	$\frac{4}{3}$

Значение рассматриваемого вопроса связано с тем, что уменьшение γ ниже критической величины $\gamma = 4/3$ связано с потерей устойчивости звезды (см. § 1 гл. 10). Кроме того, в космологии горячей модели Вселенной возникает задача об адиабатическом расширении газа, первоначально состоящего из пар и излучения, до низкой температуры, при которой пар уже нет.

Выражения для числа и термодинамических функций нейтрино совпадают с выражениями для ультрарелятивистских электронов (при $m_e c^2/kT \rightarrow 0$) с одной только поправкой: вместо статистического веса 2 для электрона, соответствующего спину $1/2$, для нейтрино нужно взять статистический вес 1, как для спиральной частицы. Поэтому в равновесии имеем

$$\varepsilon_{\nu_e} = \varepsilon_{\bar{\nu}_e} = \varepsilon_{\nu_\mu} = \varepsilon_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{7}{16} \sigma T^4, \quad (8.3.15)$$

$$\varepsilon_{\nu_e} + \varepsilon_{\bar{\nu}_e} = \varepsilon_{\nu_\mu} + \varepsilon_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{7}{8} \sigma T^4. \quad (8.3.16)$$

§ 4. Диссоциация ядер

В предыдущем параграфе рассмотрена термодинамика излучения в пренебрежении ролью плазмы. Это приближение справедливо при малой плотности вещества.

При большой плотности ($10^2 - 10^9 \text{ г/см}^3$) плазмы и высокой температуре (до нескольких единиц на 10^{10}) решающую роль в термодинамическом поведении вещества играют ядерные процессы.

При низкой температуре, очевидно, равновесие ядерных процессов соответствует образованию ядра с наименьшей энергией, т. е. с наибольшим дефектом массы *). Таким ядром является наиболее распространенный (это не случайно) изотоп Fe_{26}^{56} **). Одна-

*) Чтобы быть точным, следует заметить, что наименьшей должна быть сумма массы ядра и нейтрализующих его электронов; именно эта сумма, практически не отличающаяся от массы нейтрального атома, приводится в масс-спектрометрических таблицах.

**) Сравни примечание на стр. 201,

ко, как впервые отметили Хойл и Фаулер, при высокой температуре следует ожидать диссоциации $\text{Fe}^{56} \rightarrow 13\alpha + 4n$. Энергия, необходимая для этого процесса, равна $124,4 \text{ Мэв}$. В термодинамические формулы входит отношение этой энергии к увеличению числа частиц $\Delta N = 13 + 4 - 1 = 16$; на одну новую частицу приходится $Q_1 = 124,4/16 \cong 7,7 \text{ Мэв}$. Так же как и при ионизации атома, диссоциация происходит при температурах значительно меньше Q_1/k , $T = \alpha Q_1/k$, где безразмерный множитель α значительно меньше единицы.

В таблице VIII во 2-й и 3-й строках приведены температуры 50% диссоциации железа ($T_{1/2}$), вычисленные для нескольких значений плотности. Вычисления ведутся по очевидной формуле типа формулы Саха — все рассматриваемые ядра Fe, He⁴ и n невырожденные и нерелятивистские; учитываются первые возбужденные уровни и основное состояние ядра Fe⁵⁶; ядра He⁴ и n не имеют возбужденных уровней.

Т а б л и ц а VIII

Температуры (в миллиардах градусов) 50% диссоциации железа и гелия

ρ	1	10^3	10^6	10^9
Fe $\left\{ \begin{array}{l} (T_0)_{1/2} \\ \alpha = kT/Q_1 \end{array} \right.$	3,43 $3,83 \cdot 10^{-2}$	4,1 $4,59 \cdot 10^{-2}$	5,79 $6,48 \cdot 10^{-2}$	9,57 $10,7 \cdot 10^{-2}$
He $\left\{ \begin{array}{l} (T_0)_{1/2} \\ \alpha = kT/Q_1 \end{array} \right.$	4,2 $3,85 \cdot 10^{-2}$	5,49 $4,98 \cdot 10^{-2}$	8 $7,26 \cdot 10^{-2}$	15,2 $1,37 \cdot 10^{-1}$

Далее следует диссоциация $\text{He}^4 \rightleftharpoons 2p + 2n$. Энергия процесса $28,4 \text{ Мэв}$, что дает на одну рожденную частицу $Q_1 = 28,4/3 = 9,5 \text{ Мэв}$. Таким образом, Q_1 диссоциации гелия больше той же величины для диссоциации железа. Оба процесса в какой-то мере разделены по температуре: существует, хотя и не широкая, область, в которой железо диссоциирует, образуя гелий, но гелий еще не диссоциирует.

В таблице в 3-й и 4-й строках приведены $T_{1/2}$ и α для He⁴.

Все эти расчеты очень схематичны. С одной стороны, следовало бы попытаться рассмотреть весь набор ядер, стабильных и нестабильных, которые появляются в равновесии при высокой температуре. С другой стороны, нужно проверить все звенья кинетики процессов, приводящих к установлению равновесия. Основным процессом является фотодиссоциация ядер квантами равновесного электромагнитного излучения. При температуре, при которой заметна диссоциация $T \sim T_{1/2}$, плотность квантов с энергией большей Q_1 достаточно велика. Поэтому, например,

отрыв нейтронов от железа (так же как и обратный процесс присоединения нейтронов) идет достаточно быстро.

Барьер для ядер He^4 (α -частиц) в ядрах среднего атомного веса также не велик. Косвенный аргумент в пользу быстрого установления равновесия заключается в том, что рассматриваются температуры более высокие, чем те, при которых произошел синтез железа.

В случае диссоциации гелия есть своеобразный барьер: при средней энергии на частицу $Q_1 = 9,5 \text{ Мэв}$ первый акт процесса $\text{He}^4 \rightarrow \text{He}^3 + n$ или $\text{He}^4 \rightarrow T + p$ требует энергии $20 \div 21 \text{ Мэв}$. В целом, вопрос о скорости установления равновесия нуждается в дополнительном исследовании.

Имшенник и Надежин (1965) провели подробное исследование термодинамики плазмы с учетом возможного превращения $p \rightleftharpoons n$, т. е. с учетом процессов слабого взаимодействия, а также с учетом рождения пар. Поскольку эти расчеты проводились применительно к теории звезд, химический потенциал нейтрино полагался равным нулю. Имшенником, Надежиным и Пинаевым (1966) показано, что расчеты при таком предположении достаточно точны.

Основным результатом расчетов является определение показателя адиабаты γ в широкой области плотности и температуры. Мы заимствуем из упомянутой работы рис. 33а, на котором изображено поле температур и плотности (плотность дана в логарифмическом масштабе). Наиболее интересны границы области, в которой показатель адиабаты меньше критического значения $\gamma = 4/3$, которое, как уже упоминалось в § 3 этой главы, определяет границу устойчивости звезды (подробнее см. § 1 гл. 10). Как видно из рис. 33, эта область ограничена и слева и справа (заштрихованные кривые).

Диссоциация железа, а затем и гелия, и рождение пар снижают γ до величины меньше $\gamma = 4/3$ при $T \sim (2 \div 6) \cdot 10^9$ (в зависимости от плотности), на левой границе *). Однако после того как закончилась диссоциация и релятивистские пары дали газ с $\gamma = 4/3$, большое число нерелятивистских частиц — нуклонов p и n — снова повышает γ до величины выше $4/3$ при $T > (10 \div 20) \cdot 10^9$.

На рис. 33а проведены кривые: 1) $x_{\text{Fe}} = x_{\text{He}}$ — линия, на которой наполовину диссоциировано железо; 2) $x_{\text{He}} = x_p + x_n$ — линия половинной диссоциации гелия; 3) $x_+ = 1/2 x_-$ — линия,

*) Отсюда следует вывод, что в принципе потеря устойчивости звездой (когда γ становится меньше $4/3$ в ходе медленного сжатия и увеличения T) может затем в ходе уже быстрого сжатия привести к новому устойчивому состоянию с $\gamma > 4/3$. Эти равновесные состояния, лежащие при $\rho > 2 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$ с центральной температурой, достигающей $10^{11} \text{ }^\circ\text{K}$ (не показано на рис. 33а), рассчитаны Бисноватом-Коганом (1968а, б). Подробнее см. следующий раздел.

на которой число пар e^+ , e^- равно числу первоначальных электронов, так что $e^- = e_0^- + e_n^- = 2e_n^- = 2e_n^+$. На рисунке отчетливо видно, что нижний левый уступ заштрихованной кривой близок к третьей линии: это значит, что при $\rho \leq 10^6$ г/см³ и $T \sim 4 \cdot 10^9$ переход γ через $4/3$ обусловлен именно рождением пар.

При более высокой плотности основным эффектом является диссоциация железа. Однако возвращение к $\gamma > 4/3$ в ходе роста температуры достигается лишь после того, как закончилась и диссоциация гелия.

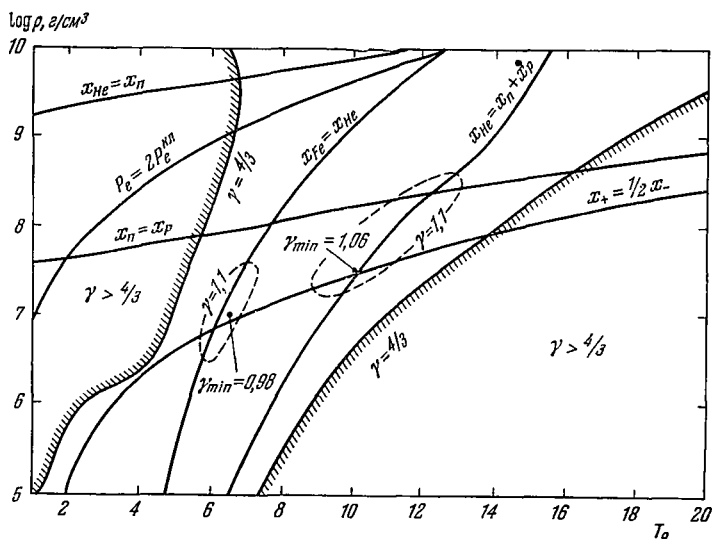


Рис. 33а. $\rho - T$ — диаграмма для горячего плотного вещества (обозначения см. в тексте).

Весьма наглядно появление двух минимумов γ , $\gamma_{\min_1} = 0,98$ и $\gamma_{\min_2} = 1,06$, при совместном действии пар и диссоциации железа в первом случае, пар и диссоциации гелия — во втором.

В левом верхнем углу при большой плотности заметную роль начинает играть вырождение электронов: кривая $P_e = 2P_e^{\text{кл}}$ показывает условия, при которых удваивается за счет вырождения давление электронов; пары в этой области роли не играют.

Вырождение электронов существенно и для равновесия между нейтронами и протонами, как видно из рис. 33а (см. линию $x_n = x_p$, $n/p = 1$), это равновесие зависит в основном от плотности, а не от температуры.

На рис. 33б, заимствованном из работы Бисноватого-Когана и Каждана (1966), показано значение γ вдоль изэнтроп с разным значением S . Сравнение этого рисунка с рис. 32б показывает,

как влияет наличие вещества на показатель адиабаты γ . В изображенной здесь области параметров (важных для теории равновесия больших звезд) еще не проявляются эффекты диссоциации

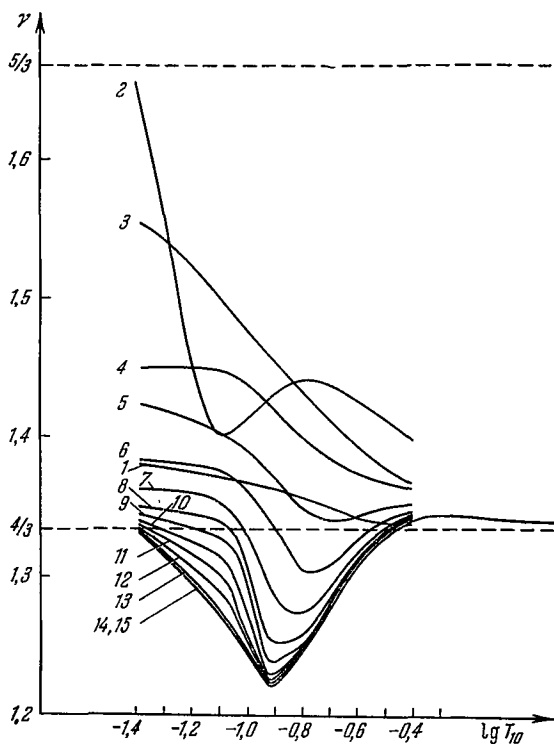


Рис. 336. Зависимость γ от T для чистого железа вдоль изэнтроп $S = \text{const}$. Изэнтропы построены для следующих значений $S_{10} = (S \cdot \text{эрг/г} \cdot \text{град})/10^{10}$:

1 — $S_{10} = 0,003981$	9 — $S_{10} = 0,2512$
2 — $S_{10} = 0,01$	10 — $S_{10} = 0,3981$
3 — $S_{10} = 0,01585$	11 — $S_{10} = 0,631$
4 — $S_{10} = 0,02512$	12 — $S_{10} = 1,0$
5 — $S_{10} = 0,03981$	13 — $S_{10} = 2,512$
6 — $S_{10} = 0,0631$	14 — $S_{10} = 10$
7 — $S_{10} = 0,1$	15 — $S_{10} = 15,85$
8 — $S_{10} = 0,1585$	

Температура дана в $T_{10} = T \text{ } ^\circ\text{K}/10^{10}$.

железа и гелия, существенные при больших значениях температур. Термодинамические величины для таких температур приведены в работе Имшенника и Надежина (1965).

Расчеты такого рода (вместе с данными о скорости потери энергии нейтрино, скорости ядерных реакций, непрозрачностью ве-

щества и др.) представляют собой настоящий фундамент теории эволюции звезд в ее современной форме. Однако, как уже указано в § 2 гл. 7, более точное описание горячей материи в звездах получается при использовании кинетических уравнений для уходящих нейтрино, а не термодинамического равновесия с нулевым химическим потенциалом нейтрино.

Новые расчеты Чечеткина и Имшенника (см. § 3 гл. 7) приводят к уменьшению области неустойчивости ($\gamma < 4/3$).

§ 5. Плотное вещество при низких температурах

Свойства вещества при нулевой температуре описаны в гл. 6. Каковы изменения в давлении и плотности энергии при низких температурах, когда только начинают включаться тепловые эффекты? Плотность энергии излучения $\varepsilon = \sigma T^4$, плотность тепловой энергии невзаимодействующих ферми-частиц $\varepsilon_T = \text{const } T^2 \cong \cong nkT (kT/E_F)$. Тепловое давление равно $P_T = \frac{2}{3} \varepsilon_T$ в нерелятивистском случае и $P_T = \frac{1}{3} \varepsilon_T$ в релятивистском случае. Точные значения этих вкладов важны при расчете охлаждения нейтронных звезд.

Как показали Гинзбург и его сотрудники (см. обзоры 1968; 1969), при низких температурах сильное влияние оказывает сверхтекучесть и сверхпроводимость, которая может реализоваться в плотной материи при температурах, намного выше обычных для сверхтекучести и сверхпроводимости температур от 4 до 20° К. Теплоемкость сверхтекучей материи экспоненциально мала; поэтому время охлаждения ее резко уменьшается.

Реальное значение этих замечаний для астрофизики см. далее в главе о пульсарах.

§ 6. Безразмерная энтропия

В заключение раздела об уравнении состояния получим удобные формулы, дающие выражение энтропии в безразмерных единицах.

Энтропия в классической теории определяется дифференциально: $dS = dQ/T$ с точностью до постоянной величины; она имеет размерность *кал/г·градус*. Квантовая теория определяет абсолютное значение энтропии. При этом $S = k \ln W$, где k — постоянная Больцмана, W — вероятность состояния. Пользование тепловыми единицами представляет удобную условность, в рациональной системе T измеряется в единицах энергии, $k \equiv 1$. В этой системе найдем энтропию, приходящуюся на один нуклон $S_1 = \ln W_1$. Если система состоит только из нуклонов (полное число нуклонов

равно N , их плотность n), то W_1 есть среднее число клеток фазового объема, приходящихся на нуклон, т. е. отношение числа квантовых уровней Γ , на которых находятся нуклоны, к числу нуклонов. В нерелятивистском газе:

$$\Gamma = \frac{\bar{p}^3 V}{(2\pi\hbar)^3}, \quad \text{где } \bar{p} = (3Tm)^{1/2}, \quad V - \text{объем,}$$

$$W_1 = \frac{\Gamma}{N} = 3^{3/2} \cdot m^{3/2} T^{3/2} n^{-1} \hbar^{-3} = 1,8 \cdot 10^{79} m^{3/2} T^{3/2} n^{-1}.$$

Для ионизованного водорода с плотностью $\rho = 10^{-29} \text{ г/см}^3$ ($n = 6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-3}$) при $T = 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ с учетом вклада электронов (и с численными множителями опущенными выше) получим $W_1 = 10^{34}$, $S_1 = \ln W = 78$. В звезде:

$$\rho = 1 \text{ г/см}^3 \quad (n = 6 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}), \quad T = 10^8 \text{ }^\circ\text{K}, \quad W_1 = 10^8, \quad S_1 = 18,4.$$

Рассмотрим плазму, в которой преобладает излучение. Энергия в единице объема и соответствующая энтропия:

$$\varepsilon = \sigma T^4, \quad S = \frac{4}{3} \sigma T^3, \quad \sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 \hbar^3} = 7,57 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{град}^4}.$$

Безразмерная энтропия на нуклон:

$$S_1 = \frac{S}{kn} = 72,5 \frac{T^3}{n} \quad (T^\circ\text{K}).$$

Для сравнения приведем число квантов в единице объема

$$n_\gamma = \frac{\varepsilon}{\hbar\nu} \approx \frac{\varepsilon}{2,7kT}, \quad n_\gamma = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{pc/kT} - 1}$$

(вторая формула для n_γ — точная), p — импульс кванта и число квантов на один нуклон

$$N_\gamma = \frac{n_\gamma}{n} = 20,4 \frac{T^3}{n} = \frac{S_1}{3,7}. \quad (8.6.1)$$

Аналогичный расчет для равновесного спектра нейтрино и антинейтрино (с химическим потенциалом $\mu = 0$ с учетом спиральности нейтрино) даст

$$\varepsilon = (7/8) \sigma T^4, \quad S = (7/6) \sigma T^4,$$

безразмерная энтропия:

$$S_2 = \frac{S}{kn} = 64 \frac{T^3}{n}, \quad n_{\nu, \bar{\nu}} \approx \frac{\varepsilon}{6,22 kT}; \quad n_\nu = n_{\bar{\nu}} = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{cp/kT} - 1},$$

число нейтрино на один нуклон:

$$N_{\nu, \bar{\nu}} = \frac{n_{\nu} + n_{\bar{\nu}}}{n} = \frac{15,2 T^3}{n} = \frac{S_2}{4,2}. \quad (8.6.2)$$

Суммарная энтропия в безразмерных единицах дается формулой

$$S \approx 4 (N_{\gamma} + N_{\nu} + N_{\bar{\nu}} + \dots). \quad (8.6.3)$$

Эта формула выводится следующим образом *). Мы хотим вычислить энтропию $N(N \gg 1)$ неразличимых частиц с массой нуль, занимающих R состояний. Если бы частицы были различимы, число их расстановок было бы равно R^N , но поскольку это не так, то число различных расстановок частиц равно $W = R^N/N!$. Поэтому энтропия на нуклон (напомним, что имеется N частиц на нуклон)

$$S_1 = \ln \left(\frac{R^N}{N!} \right) \approx \ln \frac{R^N}{(N/e)^N} \approx \left[1 + \ln \frac{R}{N} \right] N.$$

Основной вклад вносят состояния, для которых число заполнения N/R малó (это уже молчаливо предполагалось при вычислении W); поэтому для $\mu = 0$ имеем

$$\frac{N}{R} = n = e^{-E/kT}, \quad S_1 = \left(1 + \frac{E}{kT} \right) N.$$

В этом приближении ($n \ll 1$) статистики Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака дают одинаковый результат. Теперь выражение $1 + E/kT$ для энтропии релятивистских частиц (фотонов и нейтрино) на нуклон мы должны усреднить по всему распределению. Сделав это, мы получаем $S_1 = 1 + \frac{\langle E \rangle}{kT} \cong 4$, так как $\frac{\langle E \rangle}{kT} = 3$ в данном приближении, т. е.

$$\frac{\int \frac{E}{kT} \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) E^2 dE}{\int \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) E^2 dE} = \frac{3!}{2!} = 3,$$

при пренебрежении единицей в выражении $(e^{E/kT} \pm 1)^{-1}$. Складывая энтропии на один барион различных сортов релятивистских частиц, мы получаем формулу (8.6.3), приведенную выше.

*) В нашей книге «Релятивистская астрофизика» вывод формулы содержал ошибку на 30%, на которую указали К. Торн и В. Шварцман.

§ 7. Общие термодинамические соотношения для истинно нейтральной материи

Рассмотрим истинно нейтральное вещество, т. е. вещество с равными нулю барионным, лептонным и электрическим зарядами.

Основным состоянием такой материи, очевидно, будет вакуум без каких-либо частиц; это состояние достигается при нулевой температуре. При $T \neq 0$ первыми в равновесии будут представлены безмассовые частицы (фотоны, нейтрино и т. д.), с ростом температуры появляются частицы с $mc^2 \sim kT$. Очевидно, что в равновесном состоянии число частиц равно числу античастиц.

В этом разделе мы хотим указать общее соотношение, справедливое для такой материи, даже если рассматриваются взаимодействия всех частиц (и, конечно, античастиц).

В стандартной термодинамике состояние вещества определяется $z + 1$ независимой переменной, где z — число представленных в нем независимых видов материи. При высоких температурах z равно числу сохраняющихся величин. Из-за дальнего действия характера электростатических взаимодействий мы исключаем из числа сохраняющихся величин электрический заряд *). Следовательно, мы имеем $z = 3$, соответствующее одному барионному и двум лептонным зарядам. Поэтому термодинамические свойства вещества при высоких температурах зависят от трех плотностей зарядов и одной тепловой величины, например, плотности энтропии или от температуры. Однако в истинно нейтральном веществе остается только одна независимая переменная, для конкретности в качестве этой величины мы возьмем плотность энтропии S .

В известном выражении

$$dE = -P dV + T dS \quad (8.7.1)$$

каждая величина отнесена к единице «материи», т. е. к единице барионного заряда. Каково следствие этого фундаментального уравнения для истинно нейтрального вещества? Мы получим его, предполагая малой плотность барионного заряда (в пределе $n \rightarrow 0$), что не влияет на свойства вещества, а означает просто выбор системы отсчета, т. е. выделяет определенный объем $V = 1/n$.

Плотность энергии есть $\varepsilon = nE$, плотность энтропии равна $s = nS$ и, говоря, что плотность барионного заряда не оказывает влияния, мы подразумеваем, что

$$\varepsilon = \varepsilon(s), \quad E = \frac{1}{n} \cdot \varepsilon(nS). \quad (8.7.2)$$

*) Он всегда равен нулю в объеме.

Это ограничение более общего соотношения $E = \psi(S, n)$. Подставляя выражение для E в уравнение (8.7.1), получаем

$$dE = -\frac{1}{n^2} \varepsilon dn + \frac{S}{n^2} \varepsilon' dn + \varepsilon' ds = \frac{P}{n^2} dn + T dS,$$

где штрих означает дифференцирование по $s = nS$. Из этого соотношения мы видим, что

$$\varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{ds} = T; \quad -\varepsilon + s \frac{d\varepsilon}{ds} = P. \quad (8.7.3)$$

Эти основные уравнения не содержат n , поэтому они справедливы и в предельном случае $n = 0$. Для невзаимодействующих частиц с массой покоя, равной нулю, $\varepsilon \sim T^4$, $s \sim T^3$, $\varepsilon \sim s^{4/3}$, $\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{s}$, и уравнение (8.7.3) дает хорошо известный результат $P = -\varepsilon + \frac{4}{3} \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon$.

Когда взаимодействия и ненулевые массы покоя частиц существенны, зависимость термодинамических величин может быть более сложной. Однако формула (8.7.3) остается справедливой и дает полезную информацию.

Например, если $\varepsilon = as^n$, то $T = n \frac{\varepsilon}{s} = nas^{n-1}$, так что $\varepsilon \sim T^{n/(n-1)} = T^k$, $P = (n-1)\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k-1}$. Некоторые из этих формул правильны даже тогда, когда степенная зависимость между ε и s справедлива лишь в малом интервале. Более точно, мы определим n как $n = \frac{d \ln \varepsilon}{d \ln s}$ при $s = s_0$ и $\varepsilon = \varepsilon(s_0) = \varepsilon_0$, и пусть $\frac{d^2 \ln \varepsilon}{d (\ln s)^2} \neq 0$. В этом случае в окрестности $s = s_0$ разность между точной зависимостью $\varepsilon(s)$ и приближенной формулой $\varepsilon = as^n$ с $a = \varepsilon(s_0)s_0^{-n}$ порядка $(s - s_0)^2$. Различие между точной зависимостью $T(s)$ и формулой $T = nas^{n-1}$ порядка $(s - s_0)$. При $s = s_0$ соотношение $P = (n-1)\varepsilon$ справедливо, но если ввести $k = \frac{d \ln \varepsilon}{d \ln T}$, то соотношения $\frac{n}{n-1} = k$ и $P = \frac{\varepsilon}{k-1}$ не выполняются [обратное утверждение, содержащееся в статье Зельдовича (1969), ошибочно].

Зельдович (1969) обсуждал влияние взаимодействий и различных предположений о спектре масс покоя на термодинамику. (См. формулы на стр. 236, там же ссылки на другие работы.)

Омнесом (1969) была высказана интересная гипотеза о возможности самопроизвольного распада горячего нейтрального вещества на две фазы.

Предполагается, что между нуклонами и антинуклонами при энергиях столкновения порядка 100 Мэв и выше имеют место силы отталкивания *).

В определенном интервале температур, от 200 до 1000 Мэв , термодинамически выгодно разделение на фазу с избытком антибарионов и фазу с избытком барионов.

Для большого объема нейтрального (в среднем) вещества распад на множество капель двух фаз вызовет разрыв второй производной в зависимости давления от средней плотности или в зависимости средней энтропии единицы объема от температуры. В настоящее время еще не ясно, правильна ли гипотеза Омнеса, но поучительно, какое богатство и разнообразие явлений в принципе возможно в рамках термодинамики.

*) Аннигиляция $n + \bar{n} = \pi, K, \bar{K}, \dots$ в данном случае не рассматривается, потому что при высокой температуре в равновесии ее компенсирует рождение пар $\pi, K, \bar{K} = n + \bar{n}$.

ГЛАВА 9

ВВЕДЕНИЕ

Переходим теперь непосредственно к рассмотрению небесных тел, для которых существенны эффекты общей теории относительности, т. е. для которых эти эффекты качественно меняют ситуацию по сравнению с ньютоновской теорией.

До 1967 г. астрономы не обнаруживали объектов, для которых эффекты ОТО велики, хотя теория предсказывала существование нейтронных и сколлапсировавших звезд. Открытие пульсаров и интерпретация их как нейтронных звезд решили лишь половину проблемы. Еще не открыты сколлапсировавшие звезды, свойства которых, непохожие на свойства нейтронных звезд, полностью зависят от общей теории относительности. Рассмотрим последовательно сложившуюся ситуацию.

Теория строения звезд, находящихся в состоянии медленной эволюции, разработана в деталях и отлично согласуется с наблюдениями. Полностью рассчитано распределение температуры и плотности в Солнце и других звездах, содержащих достаточный запас водорода (звезды главной последовательности диаграммы Герцшпрунга — Рессела). Рассчитана светимость (общее выделение энергии), радиус, спектр, эволюция звезд. Оказалось, что полученные соотношения подтверждаются наблюдениями *). Это выдающееся достижение последних 20 лет убеждает нас в правильности основных положений теории, касающихся свойств вещества при температуре звездных недр и скорости ядерных реакций в этих условиях.

Но если теория правильна применительно к стационарному состоянию звезды, то необходимо серьезно отнестись и к выводам теории, касающимся конечной судьбы звезд. Общее направление

*) В последние два-три года исследования Дэвиса [см. Дэвис и др. (1968)] показали, что поток нейтрино из недр Солнца по крайней мере в 10 раз меньше предсказанного. Однако не очень существенное изменение «модели» Солнца (непрозрачности, условий конвекции и др.) без изменений основных предположений позволяет согласовать теорию с нейтринными экспериментами. Обзор см. Бакал и Ульрих, 1970.

эволюции заключается в расходовании ядерного горючего, в постепенном повышении температуры и плотности в центре звезды.

Рассчитать в деталях поздние стадии эволюции звезды трудно по чисто техническим причинам (даже с помощью счетных машин), и это до сих пор еще не сделано. Поэтому конечное состояние ищут, не прослеживая в деталях всю эволюцию, а пользуясь другим подходом. Зададимся тем, что израсходовано все ядерное горючее (иначе продолжались бы реакции), температура упала до нуля (иначе продолжалось бы излучение энергии наружу) и ищем распределение вещества, удовлетворяющее условию механического равновесия.

Для звезд с массой, меньшей $1,2M_{\odot}$ *), ответ хорошо известен: получается равновесное состояние, в котором электронные оболочки раздавлены, но ядра еще находятся на достаточных расстояниях друг от друга; давление вырожденного электронного газа противостоит тяготению; такие звезды называются белыми карликами **). Наблюдения подтверждают это предсказание теории.

При массе звезды, большей $1,2M_{\odot}$, но меньшей критической $M_{\text{кр}} \approx 2M_{\odot}$, равновесное состояние представляет собой нейтронную звезду. Вещество сжато до плотности того же порядка, что и плотность атомного ядра (10^{14} г/см^3 ***). Радиус звезды порядка 10 км, потенциал силы тяжести на поверхности порядка $0,1 c^2$. Магнитное поле и вращение нейтронной звезды не очень существенны для ее внутренней структуры, которая определяет такие свойства звезды как плотность, гравитационный потенциал и состав. Для этих свойств не важны также сверхпроводимость, сверхтекучесть и отвердевание вещества в различных частях нейтронной звезды.

Однако магнитное поле и вращение приводят к очень специальному пульсирующему радиоизлучению нейтронных звезд, по

*) С учетом различных поправок эта величина может снизиться до $1M_{\odot}$ (см. далее).

**) Это название исторично. Как было отмечено в § 1 и 7, физики могут называть вещество «холодным», когда его температура не влияет на уравнение состояния. Белые карлики имеют на поверхности температуру $\sim 10^4$ °К, но в указанном смысле могут считаться «холодными». При температуре 10^4 °К эти звезды имеют белый цвет, с чем и связано их название. См. об истории открытия белых карликов в книге Шацмана (1958). Недавно было показано, что при высоких плотностях теплоемкость белых карликов падает, и поэтому уменьшается время охлаждения. Вероятно, старые карлики с массой вблизи чандрасекаровского предела ($1,2 M_{\odot}$; см. далее) теперь красные или даже черные. Обзор см. Гринстейн (1969).

***) Нейтронная звезда может иметь массу меньше чем $1,2 M_{\odot}$ (но она должна быть больше чем $\sim 0,1 M_{\odot}$). Однако в интервале $1,2M_{\odot} < M < 2M_{\odot}$ нейтронная звезда представляет собой единственное равновесное состояние холодной материи (см. ниже).

которому они были открыты и за которое названы пульсарами. В молодых пульсарах пульсирующее радиоизлучение сопровождается пульсирующим оптическим и рентгеновским излучением, ускорением релятивистских частиц и инжекцией их в окружающую туманность. Сверхпроводимость, сверхтекучесть и отвердевание также могут быть существенными для некоторых наблюдательных особенностей пульсаров. Никакое тело, кроме нейтронной звезды, не может противостоять такому быстрому вращению, которое соответствует интервалу между импульсами пульсара. Заметим здесь же, что примеры пульсаров в Крабе и Веле подтверждают идею о том, что нейтронные звезды рождаются во взрывах сверхновых. Пульсары, вероятно, являются сильными источниками гравитационных волн [см., например, Острикер и Ган (1969а, b; Шкловский (1969а, b)]. Обо всем этом подробно будет сказано далее. Очевидно, для нейтронных звезд с гравитационным потенциалом, сравнимым с c^2 , становится необходимым учитывать те изменения законов тяготения, которые вытекают из ОТО.

Что же вносит теория относительности в вопрос о судьбе звезды? При массе, меньшей $M_{кр}$, возникают только количественные изменения. Но само существование максимальной критической массы $M_{кр}$ есть результат теории относительности. При этом оказывается, что критическая масса имеется при любом мыслимом уравнении состояния, совместимом с теорией относительности. При массе, большей критической, не существует равновесного решения! Конечной стадией эволюции должно быть неограниченное сжатие.

В этой стадии учет общей теории относительности приводит к парадоксальному, на первый взгляд, выводу: далекий наблюдатель регистрирует лишь асимптотическое приближение звезды к определенному состоянию. Это состояние не является равновесным его можно назвать «застывшим». Никакого парадокса в действительности нет, просто вывод теории неожидан и непривычен. Интервал времени между двумя данными событиями не одинаков для разных наблюдателей, здесь нет ньютоновского универсального времени. Для наблюдателя, находящегося на звезде, сжатие никогда не остановится. Однако закон преобразования временных интервалов в сильном поле тяготения приводит к тому, что удаленный наблюдатель увидит своеобразную остановку сжатия. Это явление можно назвать «релятивистским замедлением хода времени»: данный интервал времени на сжимающейся звезде требует большего интервала времени по часам удаленного наблюдателя; с точки зрения удаленного наблюдателя часы на звезде отстают. Об этом подробно говорилось в гл. 3. Релятивистское замедление течения времени одновременно обозначает стремление к нулю частоты квантов, принимаемых наблюдателем. Происходит

гравитационное самозамыкание звезды, для внешнего наблюдателя она перестает излучать энергию, прекращается поток информации. Итак, теория предсказывает три типа небесных тел в конечном состоянии: 1) белые карлики, 2) нейтронные звезды, 3) «застывшие» звезды; каждый тип может иметь место лишь в определенном интервале масс. Интервалы эти частично перекрываются.

Конфликт между теорией и наблюдениями заключается в том, что застывшие звезды до сих пор не обнаружены. Не наблюдаются именно те тела, для теории которых играет решающую роль ОТО. Вопрос о существовании таких тел имеет большое значение и для космологии; общая кривизна пространства в больших масштабах и замкнутость или бесконечность однородной Метагалактики зависят от плотности всех видов материи, в том числе и от нейтронных и застывших звезд. Первые грубые оценки Хойла, Фаулера, Дж. и Е. Бербиджей (1964) и др. привели к предположению, что общая масса застывших звезд может быть сравнима с массой видимых звезд. Однако эта оценка сильно зависит от сделанных упрощающих предположений.

Каковы возможные пути решения конфликта между теорией и наблюдениями?

С одной стороны, следует учесть трудность наблюдения застывших звезд. Какими свойствами они обладают? Как они должны проявлять себя, находясь в соседстве с другими звездами и межзвездной средой, содержащей пыль, газ, магнитное поле? Может быть, на самом деле в галактиках (и в нашей Галактике) много застывших звезд, но они трудно наблюдаемы? Следует напомнить, что теоретические предсказания свойств нейтронных звезд не сыграли прямой роли в открытии пульсаров, хотя, безусловно, привели к быстрой интерпретации открытого явления.

Следует особо отметить здесь несколько работ [Гинзбург и Озерной (1964); Кардашев (1964); Волчер (1966); Уилер (1966); Пачини (1967, 1968, 1969); и др.], в которых отмечалось, что при сжатии звезды должны усиливаться магнитное поле и вращение.

Более того, было предсказано, что энергия вращения сверхплотной звезды будет проявляться вовне именно благодаря магнитной связи между звездой и окружающей средой. Таким образом, теоретики-астрофизики предугадали важнейшие характеристики пульсаров, кроме (к сожалению!) того свойства, которое оказалось решающим для наблюдений — пульсирующего, периодического характера излучения.

С другой стороны, нужно проанализировать допущения, которые привели к выводу о неизбежности указанного конечного состояния звезды, в частности, возможные способы потери массы, роль вращения звезды и ее магнитного поля. В ходе эволюции массивной звезды рост плотности сопровождается повышением темпе-

ратуры. В определенный момент звезда подходит к границе устойчивости, за которой наступает катастрофическое сжатие. Однако к этому моменту вещество звезды еще содержит запас ядерной энергии *). Освобождение этой энергии может привести к тому, что сжатие сменится расширением и взрывом звезды. Следует, однако, иметь в виду, что наблюдаемая частота взрывов звезд дает величину, во много раз меньшую ожидаемого числа звезд, заканчивающих эволюцию; другими словами, наблюдательные данные говорят скорее против предположения, что все звезды путем взрыва избегают превращения в нейтронное или застывшее состояние**). Существование белых карликов с $M < M_{\odot}$ подтверждает эту идею: эволюция звезд с $M < M_{\odot}$ к состоянию белого карлика требует времени, превышающего не только возраст галактики, но и возраст Метагалактики. Такие белые карлики должны быть остатками звезд большой массы, которые эволюционируют более быстро и постепенно теряют часть своей массы. Неизвестно, какую долю массы может потерять звезда при квазистационарном гидродинамическом истечении вещества с поверхности.

Во второй половине 1969 г., кажется, появился новый метод исследования заключительных стадий эволюции звезд — экспериментальное изучение космического гравитационного излучения. Вебер (1969а) объявил о вероятном открытии высокочастотных импульсов гравитационного излучения. Полный поток энергии в этих импульсах огромен — больше или порядка 10^5 эрг/см² (см. § 15 гл. 1). По-видимому, только застывшие звезды (в процессе образования или столкновения в центре нашей Галактики) могут дать такой поток гравитационного излучения. Столкновения обычных или нейтронных звезд сопровождаются электромагнитным излучением, которое увидели бы наблюдатели. Информация об экспериментах Вебера еще не достаточно полна, чтобы делать окончательные выводы; однако перед нами открывается яркая перспектива нового типа исследований.

Итак, несоответствие между выводами теории и наблюдениями объективно существует уже давно. Вместе с тем, нельзя отрицать, что открытие квазаров («quasars» в литературе на английском языке) резко обострило ситуацию. Выяснилось, что для теории квазаров существенную роль должны играть, с одной стороны, даже малые поправки на ОТО, с другой стороны, макроскопические движения и магнитное поле, т. е. факторы, не играющие определяющей роли для строения обычных звезд.

*) Этот запас существенно зависит от того, происходило ли перемешивание различных слоев звезды путем конвекции или иным путем

**) Неясно, означает ли это возможность «беззвучного» коллапса без взрыва или плавную потерю массы до наступления коллапса.

В связи с открытием квазаров десятки теоретиков вернулись к теории равновесия и сжатия звезд с учетом общей теории относительности; астрономы вспомнили классические работы Оппенгеймера, Волкова и Снайдера периода 1938—1939 гг. Вместе с тем, по естественному психологическому закону, возникло предположение, что две загадки, связанные между собой, — судьба обычных звезд и сущность квазаров, — может быть, имеют общий ответ.

Сейчас мы думаем, что это не совсем так, хотя, безусловно, обе проблемы имеют перекрывающиеся аспекты, в том числе и связанные с ОТО. Мы не рассматриваем в этой книге проблему квазаров, относящуюся скорее к области космологии.

В этом разделе рассматривается описанный выше круг вопросов, связанных с эволюцией звезд.

Изложение начинается с того, что очень кратко напоминаются сведения о равновесии звезды и ее устойчивости. Затем излагается теория равновесного состояния звезд. После этого рассматривается эволюция звезды, ее переход в конечное состояние. Разумеется, в нашу задачу не входит сколько-нибудь подробное рассмотрение медленной эволюции звезды, что делается в соответствующих монографиях (см. конец параграфа). Мы рассматриваем только общий характер эволюции, ее темп и устойчивость. Это важно для того, чтобы выяснить условия, приводящие в состояние, когда существенны эффекты ОТО, или, наоборот, выяснить причины, из-за которых звезды могут избежать релятивистской стадии.

Затем рассматривается катастрофическое сжатие (коллапс) звезды, потерявшей устойчивость в ходе медленной эволюции, изучаются процессы взрыва сверхновой и др., сопровождающие коллапс, и, наконец, рассматривается финальная стадия коллапса звезды, с $M \geq 2M_{\odot}$ в конце сжатия — релятивистский коллапс, приводящий к состоянию застывшей звезды.

В следующих трех главах рассматриваются вопросы обнаружения наблюдательных проявлений релятивистских стадий эволюции звезд. В порядке той последовательности, в которой развивалась теория, в гл. 12 рассматривается аккреция вещества на звезды. В период 1963—1968 гг. многие астрофизики, в том числе и авторы, полагали, что именно аккреция окажется ключом к обнаружению нейтронных и застывших звезд. Выделение энергии при аккреции на поверхность нейтронной звезды достигает $10\text{--}25\%$ mc^2 , т. е. во много раз больше ядерной энергии этого вещества. Амнуэль и Гусейнов (1968) рассматривали возможность пульсации радиосигнала при аккреции на вращающуюся нейтронную звезду с магнитным полем.

Сферически-симметричное падение холодного вещества в гравитационном поле коллапсировавшей звезды, не приводит к заметному выделению энергии. Однако при наличии асим-

метрии, столкновений, вращения, магнитного поля можно и в случае застывшей звезды ожидать выделения энергии того же порядка, что и у нейтронной звезды.

В разреженном межзвездном веществе падающее на звезду количество вещества в единицу времени малб. Предполагалось, что релятивистская звезда, находясь в составе тесной пары с обычной звездой даст большие наблюдаемые эффекты и прежде всего — поток рентгеновского излучения. Сказанное объясняет интерес к аккреции и довольно подробную разработку теории этого явления.

Действительность оказалась и сложнее и интереснее. В 1968 г. были открыты пульсары; феномену пульсаров посвящается гл. 13.

В соответствии с установками предлагаемой монографии, наблюдательный материал дается кратко и обобщенно.

Новые данные поступают часто и не представляется возможным дать детальный обзор, который не устарел бы к моменту выхода книги в свет.

Излагаются свойства нейтронных звезд, в особенности те, которые имеют значение для их функционирования в качестве пульсаров. Рассматривается баланс энергии и электродинамика вращающейся звезды, обладающей магнитным моментом. Обсуждаются различные предложенные механизмы направленного излучения, что необходимо для объяснения наблюдаемой периодичности. Вкратце рассматривается поведение плазмы в поле мощного радиоизлучения, характерного для пульсаров.

Наконец, в последней, 14-й главе, обсуждаются наблюдательные свойства и возможность обнаружения застывших звезд.

Эта глава оказывается краткой в соответствии с тем, что такие звезды до сих пор не открыты. Обсуждаются некоторые астрономические объекты, в состав которых, возможно, входят сколлапсировавшие звезды, и трудности, лежащие на пути уверенного ответа. Отмечается принципиальная возможность существования первичных застывших объектов космологического происхождения, наряду с коллапсарами, возникающими при эволюции массивных звезд.

Изложенные вопросы рассмотрены ранее в обзорах авторов [см. Зельдович, Новиков (1964а; 1965; 1966) и Новиков, Зельдович (1966)]. Ситуация до 1967 г. изложена в книге авторов «Релятивистская астрофизика» (1967).

Приведем здесь также краткий список некоторых монографий и обзоров, в которых затрагиваются обсуждаемые ниже вопросы.

Классическая теория строения звезд и нерелятивистских этапов их эволюции имеется в монографиях Чандрасекара (1939), Е. и Дж. Бербиджей (1958); Шварцшильда (1958); Франк-Каменецкого (1959); в сборнике «Строение звезд» под редакцией Аллера и Мак-Лафлина (1965, русский перевод (1970)); Hand. d. Phys.,

51, 1958; Бааде (1963); Ибена (1967), а также в учебнике Мартынова (1965), в учебнике Клэйтона (1968) и в научно-популярной книге Каплана (1963). С точки зрения теории подобия вопрос рассмотрен Седовым (1967).

Основные выводы работ Оппенгеймера и Волкова и Оппенгеймера и Снайдера изложены в учебниках Ландау и Лифшица (1967; 1964). Вопросы теории сверхплотных конфигураций из холодного вещества рассматриваются Амбарцумяном и Саакяном (1963); в наших обзорах; Уилером, Гаррисоном, Вакано, Торном (1967); в обзоре Камерона (1970).

Принципиальные вопросы влияния малых эффектов ОТО на устойчивость звезды вблизи критического состояния рассмотрены Капланом (1949b); В. Фаулером (1964a, b); Чандрасекаром (1964a, b; 1965) и в наших обзорах.

Вопросы излучения нейтрино изложены в обзорах Пинаева (1963a) и Чиу (1964). В последнем обзоре рассмотрены и другие вопросы релятивистской астрофизики.

Теория взрыва сверхновой изложена в работе Фаулера и Хойла (1964), астрономические аспекты — в монографии Шкловского (1966). В последнее время появился ряд новых работ по теории взрыва сверхновых (см. § 4, гл. 11).

Обзор вопросов, связанных с пульсарами (ветви релятивистской астрофизики, развивающейся особенно быстро), дан в обзоре Гинзбурга (1971).

Разумеется, приведенный список не претендует на полноту.

ГЛАВА 10

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД

§ 1. Общие задачи теории равновесия звезд

Звезда в обычном состоянии представляет собой газовый шар, находящийся в гидродинамическом и тепловом равновесии. Гидродинамическое равновесие обеспечивается равенством силы тяготения и силы давления, действующих на каждый элемент массы звезды. Тепловое равновесие означает равенство энергии, выделяемой в недрах звезды, и энергии, излучаемой с поверхности звезды. Если бы условие гидродинамического равновесия не выполнялось, то вещество звезды моментально пришло бы в движение и звезда перестала бы существовать как стационарный объект.

Действительно, пусть давление не точно компенсирует тяготение, так что под действием нескомпенсированной силы вещество получит ускорение, сравнимое с ускорением свободного падения $g = GM/R^2$. Тогда элементы вещества сместятся на расстояние порядка радиуса звезды R за следующее время (называемое гидродинамическим):

$$t_H \approx \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{-1/2} \quad (10.1.1)$$

(индекс H — Hydrodynamic).

Подставляя сюда данные для Солнца $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г и $R = R_\odot = 7 \cdot 10^{10}$ см, получаем $t_H \approx 10^3$ сек. Итак, для существования звезды в стационарном состоянии необходимо выполнение устойчивого гидростатического равновесия. Условие равновесия записывается в виде

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{Gm(r)\rho}{r^2}. \quad (10.1.2)$$

Слева стоит сила давления, действующая на единицу объема, справа — сила притяжения его массой $m(r)$, заключенной внутри сферы радиуса r . Для анализа вопросов равновесия и устойчивости будем в этом параграфе все вещество звезды характеризовать средними плотностью $\bar{\rho}$ и давлением \bar{P} , давая порядковые оценки величинам. Такой способ является грубым, но зато очень

наглядно выявляет физическую сущность вопроса. О точной теории устойчивости равновесной модели звезды см. далее § 3 и последующие. Эта теория подтверждает грубые оценки. Используя средние характеристики и условие гидростатического равновесия, можно написать для всей звезды:

$$M \approx \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{\rho}, \quad \frac{\bar{P}}{R} = \bar{\rho} \frac{GM}{R^2}. \quad (10.1.3)$$

Используя эту формулу, легко оценить давление в звезде, а затем, используя для оценки уравнение состояния идеального газа, также и температуру недр *). Подставляя в (10.1.3) данные для Солнца, находим $\bar{P}_{\odot} \approx 10^{16}$ дин/см², $\bar{T}_{\odot} \approx 10^7$ °К.

Используя полученные оценки, мы приходим к весьма важному выводу:

Характерное время гидродинамических процессов в звезде гораздо меньше времени тепловых процессов и процессов переработки ядерного горючего. В самом деле, для Солнца, например, характерное время теплового процесса определяется условием

$$t_{T\odot} \approx \frac{E_{T\odot}}{L_{\odot}} \approx \frac{3kT_{\odot}}{m_p} \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ лет},$$

где $E_{T\odot}$ — тепловая энергия Солнца, m_p — масса протона, L_{\odot} — светимость Солнца ($L_{\odot} = 4 \cdot 10^{33}$ эрг/сек). Таким образом, Солнце без всяких ядерных источников энергии могло бы существовать тридцать миллионов лет. С другой стороны, время переработки ядерного топлива

$$t_{N\odot} \approx \frac{E_{N\odot}}{L_{\odot}} \approx \frac{0,01 \cdot c^2 \cdot 0,1 M_{\odot}}{L_{\odot}} = 10^{10} \text{ лет}.$$

Здесь $E_{N\odot}$ — запас ядерной энергии вещества Солнца, $0,01 c^2$ — максимальная энергия ядерных реакций на единицу массы, $0,1 M_{\odot}$ — масса ядра, где температура достаточно велика для ядерных реакций.

*) Формула (10.1.3) позволяет дать еще один подход к нахождению t_H . Этот подход заключается в оценке времени прохождения звуком расстояния порядка радиуса звезды. Скорость звука есть $a_{зв} = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2}$. Используя для оценки усредненное уравнение равновесия (10.1.3), находим, что

$$a_{зв} = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2},$$

откуда следует (10.1.1).

Мы видим, что $t_H \ll t_T$ и $t_H \ll t_N$. Полученные оценки приводят к выводу, что отыскание конфигураций (распределения плотности и давления), удовлетворяющих уравнениям гидростатического равновесия, является первой задачей в теории звезд.

Эволюция, зависящая от тепловых и ядерных процессов, от потери и аккреции вещества, представляет собой последовательную смену равновесных конфигураций. Достижение предела существования таких конфигураций приводит к нарушению равновесия и катастрофическим явлениям.

Для анализа гидростатического равновесия мы воспользуемся энергетическим методом. Подробное обоснование метода и вычисления см. в приложении к этому параграфу. См. также книгу Уилера, Гаррисона, Вакано и Торна (1967) и работы Чандрасекара (1964а, б; 1965). В тексте мы сформулируем общие выводы.

Условие гидростатического равновесия совпадает с условием экстремума полной энергии звезды при заданном числе сохраняющихся элементарных частиц — барионов и заданной энтропии. Уравнение для градиента давления есть уравнение Эйлера вариационной задачи нахождения экстремума энергии, зависящей от распределения вещества. Это утверждение справедливо как в классической ньютоновской теории, так и в общей теории относительности. Поэтому естественно строить теорию равновесных конфигураций, рассматривая их энергию в зависимости от параметров. Минимум энергии соответствует устойчивому равновесию, а максимум энергии — неустойчивому; в энергетическом подходе выяснение устойчивости не требует дополнительных расчетов. Между тем непосредственное рассмотрение решения дифференциального уравнения равновесия не позволяет еще судить об устойчивости, поскольку необходимо дополнительно исследовать линеаризованное уравнение малых возмущений.

Следует особо подчеркнуть роль энтропии: ее роль обусловлена термодинамическим соотношением $P = - \left(\frac{\partial E_1}{\partial \frac{1}{\rho}} \right)_S$, где E_1 —

удельная энергия, S — удельная энтропия (все величины на единицу массы покоя). Это соотношение позволяет установить связь между энергией звезды, в которую входит E_1 , и уравнением равновесия, в которое входит давление P . Поэтому в теорию входит E_1 , как функция именно ρ и S , а не ρ и температуры T .

Для иллюстрации общей ситуации будем сначала грубо характеризовать все вещество средней плотностью $\bar{\rho}$ и средней энергией на грамм вещества \bar{E}_1 . Полная энергия звезды массы M записывается в виде

$$E = \int_V E_1 \rho dV - G \int_V \frac{m \rho}{r} dV. \quad (10.1.4)$$

Первое слагаемое — внутренняя энергия, второе — гравитационная энергия, m — масса внутри сферы радиуса r .

Воспользовавшись средними величинами, перепишем (10.1.4):

$$E = \bar{E}_1 M - \alpha_1 G \frac{M^2}{R}, \quad \alpha_1 = \text{const},$$

или, выражая R через $\bar{\rho}$, $\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, находим

$$E = \bar{E}_1 M - \alpha_2 G M^{5/3} \bar{\rho}^{1/3}, \quad \alpha_2 = \text{const}. \quad (10.1.5)$$

Уравнение состояния идеального газа можно записать в виде

$$E_1 = K(S) \rho^{\gamma-1} + L(X),$$

где $K(S)$ — зависит от энтропии газа и его химического состава; $L(X)$ — от химического состава, а γ — показатель адиабаты: $\gamma = \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_{S=\text{const}}$, P — давление. Напомним, что для идеального одноатомного нерелятивистского газа $\gamma = 5/3$. В теории звезд часто вместо γ используют так называемый индекс политропы n : $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$.

Окончательно (10.1.5) можно записать в виде

$$E = C_1 M \bar{\rho}^{\gamma-1} + C_2 M - C_3 M^{5/3} \bar{\rho}^{1/3}; \quad (10.1.6)$$

C_1 , C_2 и C_3 — постоянные при фиксированной энтропии. Аддитивная постоянная в энергии при решении вариационной задачи, очевидно, несущественна.

Если $\gamma > 4/3$, то на кривой E , как функции $\bar{\rho}$, имеется минимум. Он отвечает положению устойчивого равновесия звезды.

Если $\gamma < 4/3$, то кривая $E(\bar{\rho})$ не может иметь минимума и, соответственно, звезда не имеет устойчивого равновесного состояния. В этом случае на кривой есть максимум, отвечающий неустойчивому равновесию.

Наконец, в случае $\gamma = 4/3$ и $C_1 = C_3 M^{2/3}$ энергия звезды вовсе не зависит от средней плотности, т. е. имеет место безразличное равновесие звезды при любой плотности. Заметим, что безразличное равновесие имеет место только по отношению к сжатию и расширению звезды в целом, т. е. по отношению к подобному изменению всей звезды; можно показать, что звезда устойчива по отношению к деформации распределения плотности в ней.

Найдем зависимость плотности равновесной звезды от массы. Для этого приравниваем нулю производную от E по $\bar{\rho}$:

$$\left. \frac{dE}{d\bar{\rho}} \right|_{\substack{M=\text{const}, \\ S=\text{const}}} = 0.$$

Отсюда найдем:

$$M = \text{const } \bar{\rho}^{-(\gamma - \frac{4}{3}) \cdot \frac{3}{2}}. \quad (10.1.7)$$

Из полученной формулы видно, что знак $\frac{\partial \rho}{\partial M} \Big|_{S=\text{const}}$ для равновесных конфигураций совпадает со знаком разности $(\gamma - 4/3)$.

Сформулируем результат: когда звезда устойчива, то $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial M} > 0$, а когда неустойчива, то $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial M} < 0$. При вычислении $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial M}$ подразумевается сравнение двух моделей звезды из вещества с одним и тем же уравнением состояния и одинаковой энтропией, но с различными массами, отличающимися на δM .

Этот критерий естествен: в устойчивом состоянии добавление массы вызывает сжатие и увеличение давления, компенсирующего возросшую силу тяготения. Заметим, что анализ точного, не усредненного уравнения равновесия приводит к критерию устойчивости $\frac{\partial \rho_c}{\partial M} > 0$, где ρ_c — центральная плотность звезды [см. Зельдович (1963а)].

Процесс теплоотвода и излучения энергии звездой в окружающее пространство определяется условиями диффузии излучения из недр наружу *). Поток энергии наружу L зависит от распределения T и непрозрачности вещества звезды

$$L = 4\pi r^2 D \frac{dE_{\text{свет}}}{dr}, \quad (10.1.8)$$

где D — коэффициент диффузии, $E_{\text{свет}}$ — плотность световой энергии, $E_{\text{свет}} = \sigma T^4$.

Не может ли звезда потерять устойчивость благодаря сильной зависимости процессов энерговыделения при ядерных реакциях от температуры? Эта зависимость для небольших интервалов T выражается соотношением

$$A_{\text{яд}} = A_0 \rho T^\nu, \quad (10.1.9)$$

A_0 и ν — постоянные. Для протон-протонной реакции, например, $\nu = 4,5$ в интервале температур $(0,9 - 1,3) \cdot 10^7$ °К, для углеродного цикла $\nu = 20$ при $T = (1,2 - 1,6) \cdot 10^7$ °К.

Плотность световой энергии, входящая в выражение (10.1.8), пропорциональна $E \sim T^4$. Обычно в (10.1.9) величина $\nu > 4$ и, следовательно (здесь для простоты полагаем $D = \text{const}$), энерговыделение сильнее зависит от T , чем теплоотвод. Казалось бы,

*) При некоторых условиях поток энергии переносится не излучением, а путем конвекции, но это не меняет существа дела.

случайное малое превышение энерговыделения над процессом излучения энергии звездой в окружающее пространство приведет к повышению T , а значит, и к резкому увеличению $A_{\text{яд}}$: возмущение будет развиваться. Произойдет явление, аналогичное тепловому взрыву в химических системах. В действительности дело обстоит иначе. Мы уже неоднократно подчеркивали, что гидродинамические процессы в звезде идут гораздо быстрее тепловых. Поэтому увеличение энерговыделения приведет к отклонению от равновесия: внутреннее давление превзойдет силы тяготения. Это заставит звезду расширяться; уменьшится ρ . Подставим в (10.1.3) уравнение состояния $P = \frac{R}{\mu} T \cdot \rho$ и найдем T (здесь R — газовая постоянная):

$$\bar{T} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} \frac{\bar{\mu}}{R} GM^{1/3} \bar{\rho}^{1/3}. \quad (10.1.10)$$

Мы видим, что уменьшение ρ приведет к уменьшению T^* , а значит, и $A_{\text{яд}}$; следовательно, возмущение развиваться не будет.

Уменьшение энерговыделения от равновесного приведет к обратному процессу, и равновесие вновь восстановится. Таким образом, звезда регулирует мощность источников ядерной энергии, приводя их в соответствие с излучением энергии с поверхности.

Превышение энерговыделения над теплоотводом приводит, как мы видим, к уменьшению температуры звезды. В этом смысле можно говорить об отрицательной теплоемкости звезды. Эта теплоемкость отличается от теплоемкости при постоянном давлении или постоянном объеме, которые обычно используются в физике. В данном случае теплоемкость определяется при условии равновесия звезды под действием гравитации **).

Можно и иначе сформулировать это утверждение. Помножим уравнение равновесия (10.1.2) на $4\pi r^3 dr$, возьмем интеграл по dr по всему радиусу звезды, и в левой части равенства произведем интегрирование по частям. В результате получим

$$\int_0^R 3P4\pi r^2 dr = \int_0^R \rho \frac{Gm(r)}{r} 4\pi r^2 dr, \quad (10.1.11)$$

*) В массивных звездах давление определяется главным образом давлением излучения и $P = \frac{\sigma}{3} T^4$. Очевидно, и в этом случае уменьшение ρ сопровождается уменьшением T .

**) Оговоримся здесь же, что все сказанное относится лишь к обычным звездам. В конце звездной эволюции в состоянии так называемого белого карлика звезда может иметь и положительную теплоемкость (см. § 1 гл. 14). В этом случае в давлении газа существенную роль играют вырожденные электроны.

где R — радиус звезды. Если воспользоваться теперь уравнением состояния идеального газа, то в левом интеграле (10.1.11) можно заменить $3P$ на $2E_p$. Теперь интеграл в правой части — гравитационная энергия, взятая с обратным знаком:

$$2E_T = -U. \quad (10.1.12)$$

Это соотношение является теоремой вириала для обычных звезд. Теперь общая энергия запишется в виде

$$E = E_T + U = -E_T. \quad (10.1.13)$$

Последнее выражение означает, что сообщение звезде энергии уменьшает ее тепловую энергию и, наоборот, излучение энергии приводит к увеличению тепловой энергии и температуры.

В стационарном состоянии в звезде выделение ядерной энергии в точности компенсирует потери энергии излучением. Однако уменьшение концентрации ядерного горючего приводит к нарушению баланса; потери энергии, хотя и не намного, начинают превышать выделение энергии. Это ведет к повышению температуры, которая устанавливается такой, чтобы обеспечить скорость выделения ядерной энергии при уменьшенной концентрации ядерного горючего или при переходе на сжигание другого топлива (например, с H на He), требующего для горения более высокой температуры. В этом заключается медленная эволюция звезды с постепенным истощением запасов ядерной энергии.

Заметим, что в соответствии с отрицательной теплоемкостью звезды как целого постепенное увеличение температуры сопровождается уменьшением энтропии. В самом деле, запишем уравнение состояния один раз через температуру, другой — через энтропию (для $\gamma = 5/3$) и, наконец, в третий раз выразим P через M и ρ , учитывая гравитацию (10.1.3); заменив R через M и $\bar{\rho}$, будем иметь соответственно:

$$P = \text{const } T\rho, \quad (10.1.14)$$

$$P = \text{const } e^{C_1 S} \rho^{5/3}, \quad (10.1.15)$$

$$P = \text{const } \rho^{4/3}. \quad (10.1.16)$$

Из (10.1.14) и (10.1.16) имеем

$$T = \text{const } \rho^{1/3}, \quad (10.1.17)$$

а из (10.1.15) и (10.1.16)

$$e^{C_1 S} = \text{const } \rho^{-1/3}. \quad (10.1.18)$$

Таким образом, из (10.1.17) и (10.1.18) видно, что увеличение плотности приводит к увеличению T и к уменьшению S .

Сделаем еще следующее замечание. Гидродинамическое время t_H меньше теплового t_T примерно на двенадцать порядков,

Однако тепловое время t_T всего в ~ 300 раз меньше ядерного t_N . Последнее время определяет медленную эволюцию. Ввиду относительно малого различия этих времен в некоторые периоды жизни звезды условия тепловой стационарности могут нарушаться. Это действительно имеет место, например, при переходе с горения водорода на горение гелия, когда резко меняется структура звезды. В этом параграфе мы обрисовали только общую картину и основные закономерности. Ряд исключений, могущих привести к неустойчивости звезды, будет разобран далее.

Перейдем теперь к более общему вопросу.

Будем по-прежнему характеризовать вещество звезды средней плотностью и средней температурой $\bar{\rho}$, \bar{T} . Химический состав вещества считаем заданным — установившимся в ходе ядерных реакций на предыдущих этапах эволюции. Если реакции (в определенных условиях) идут быстро, считаем состав равновесным (с соотношением количества протонов, нейтронов и различных ядер, соответствующим термодинамическому равновесию при заданной плотности и температуре).

Таким образом, мы имеем дело с тремя величинами, например, M , ρ , T (знаки средних далее в этом параграфе опускаем), между которыми условием механического равновесия звезды (10.1.3) устанавливается одно соотношение. Так, например, при данных M и ρ можно найти такую температуру T (при этом $T = T(M, \rho)$), которая обеспечивает равновесие. Одна связь между тремя величинами означает, что в плоскости ρ , M (рис. 34) каждая точка описывает определенное решение, каждой точке соответствует своя температура. Очевидно, однако, что в плоскости ρ , M есть и определенные ограничения. Наименьшей температуре $T = 0$ соответствует определенное холодное давление $P = P(\rho, 0)$, и чтобы создать такое давление, нужна конечная масса $M(\rho, 0)$. Ниже этой линии решений не существует. Своеобразный ход линии $T = 0$ объясняется различным равновесным составом вещества в разных областях плотности; см. гл. 6 и § 4, 5 гл. 10.

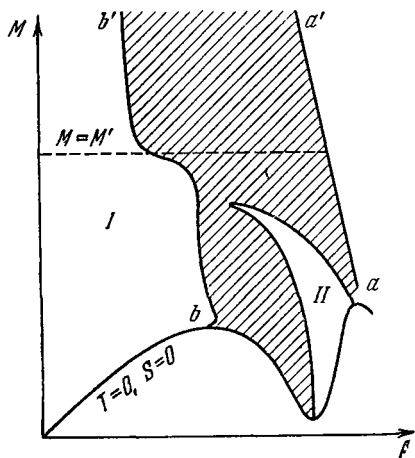


Рис. 34. Диаграмма ρ , M для звездных конфигураций (не в масштабе); $T = 0$, $S = 0$ — линия холодных звезд. Ниже этой линии равновесных решений не существует; aa' — граница равновесных конфигураций, определяемая ОТО. Правее этой линии равновесных решений не существует. Заштрихована область неустойчивых равновесных конфигураций. I и II — области устойчивых равновесных конфигураций. Горизонталь $M = M'$ отделяет нижнюю область, где преобладает давление плазмы, от верхней, где преобладает давление излучения.

Далее мы знаем (см. гл. 3), что из-за эффектов ОТО статические решения заведомо не существуют при радиусе тела, близком к шварцшильдовскому $r_g = 2GM/c^2$. Отсюда получаем ограничение $\rho < \frac{M}{4\pi/3 r_g^3}$, $\rho < 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}$, $M < 10^8 M_\odot \rho^{-1/2}$. Эта линия также показана на рис. 34 (линия aa').

Итак, решения существуют только внутри области, ограниченной осью ординат и двумя линиями, которые пересекаются *) в районе $\rho \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ г/см}^3$, $M \approx M_\odot$. Внутри этой области, на некотором расстоянии от ограничивающих линий можно: а) пользоваться ньютоновской теорией тяготения, поскольку точка лежит левее линии, определяемой ОТО, и б) не учитывать давление вырожденного газа, поскольку точка лежит выше линии $T = 0$. Из а) следует, что по порядку величины давление можно вычислить по формуле (10.1.3). Запишем это выражение в виде

$$P = k_1 GM^{2/3} \rho^{1/3}. \quad (10.1.19)$$

Безразмерный коэффициент k_1 зависит от способа усреднения и приближенно может быть принят равным $k_1 = 0,4$ (подробнее см. § 4 гл. 10).

В соответствии с п. б) рассматриваем идеальный газ, учитывая также давление равновесного излучения:

$$P = \frac{RT\rho}{\mu} + \frac{\sigma T^4}{3}. \quad (10.1.20)$$

Условие равновесия дает

$$\frac{RT\rho}{\mu} + \frac{\sigma T^4}{3} = k_1 GM^{2/3} \rho^{1/3}, \quad (10.1.21)$$

$$\frac{R}{\mu} \left(\frac{T}{\rho^{1/3}}\right) + \frac{\sigma}{3} \left(\frac{T}{\rho^{1/3}}\right)^4 = k_1 GM^{2/3}. \quad (10.1.22)$$

Получается замечательный результат, принадлежащий Эддингтону: масса M [связана однозначно с параметром $T/\rho^{1/3}$. Но от этого же параметра зависит отношение давления излучения к давлению плазмы (при постоянных μ — молекулярном весе и σ — коэффициенте в выражении $E = \sigma T^4$). Приравняем эти два давления,

$$\frac{RT\rho}{\mu} = \frac{\sigma T^4}{3},$$

и найдем соответствующую массу звезды:

$$M' = \left[\frac{2}{k_1 G} \frac{R}{\mu} \frac{T}{\rho^{1/3}} \right]^{3/2} \approx \frac{50 M_\odot}{\mu^2}, \quad (10.1.23)$$

*) В точной теории, конечно, линия статического решения с $T = 0$ и линия границы статических решений не могут иметь общих точек, но эта точность сейчас не существенна.

где μ — доля массы протона, приходящаяся на одну свободную частицу. Для водорода $\mu = 1/2$, $M' = 200M_{\odot}$; для железа $\mu = 2$, $M' = 12M_{\odot}$ *).

В плоскости ρ , M можно провести горизонтальную линию $M = M'$, отделяющую нижнюю часть, где преобладает давление плазмы — идеального газа из электронов и ядер, от верхней области $M > M'$, где преобладает давление излучения. В этих областях закономерности различны, например, по-разному идут изотермы (линии $T = \text{const}$) и адиабаты (линии постоянной энтропии $S = \text{const}$).

Следующий важнейший момент связан с устойчивостью механического равновесия. Отнюдь не всякое решение, соответствующее точке в допустимой области плоскости ρ , M , является устойчивым. Как было показано выше, на кривой $M = M(\rho, S = \text{const})$ устойчивы отрезки с положительной производной, $\left. \frac{\partial M}{\partial \rho} \right|_S > 0$, и

неустойчивы те части кривой, где $\left. \frac{\partial M}{\partial \rho} \right|_S < 0$. Поскольку при $T = 0$ также и $S = 0$, легко определим, что на нижней кривой чередуются две устойчивые и две неустойчивые области. При повышении температуры (а следовательно, и M при фиксированном ρ) вторая устойчивая область II на рис. 34 вскоре исчезает.

В области, где вырождение не играет роли, но $M < M'$, равновесие идеального одноатомного газа устойчиво вплоть до такой температуры, при которой наступают ядерные реакции, поглощающие энергию. Наоборот, при $M > M'$ газ, давление которого в основном определяется излучением, имеет малый запас устойчивости. Даже малые поправки на ОТО, а также рождение пар e^+ , e^- нарушает устойчивость равновесия. Этим объясняется резкий изгиб границы области устойчивости вблизи горизонтали $M = M'$. В целом (не в масштабе) расположение областей показано на рис. 34.

Область неустойчивых решений заштрихована. Обоснованию всей этой картины и расчету границ областей посвящены следующие ниже параграфы.

Ясно, что неустойчивые решения не реализуются в природе. В устойчивом решении малое возмущение вызывает колебания вокруг этого устойчивого решения (затухающие вследствие диссипации энергии, если нет процессов, возбуждающих колебания). Неустойчивое решение отличается тем, что малые возмущения экспоненциально (поскольку теория линейна) нарастают с течением времени. При этом малое сжатие вызывает увеличение силы тяжести, превышающее увеличение давления, и сжатие нарастает. Но точно так же малое расширение вызывает уменьшение силы тяжести и дальнейшее экспоненциальное нарастание расширения.

*) Подробную таблицу см. на стр. 244.

Однако в ходе эволюции звезда не попадает сразу вглубь области неустойчивости. Очевидно, что звезда возникает как устойчивый объект, ее эволюция также начинается в области устойчивости. Прежде чем попасть в область неустойчивости, звезда должна пересечь границу этих областей. Можно показать (см. об этом далее), что на границе устойчивости линейной теории недостаточно, и всегда возникает именно катастрофическое сжатие, а не расширение, которое вернуло бы звезду в устойчивое состояние.

Сделаем еще одно существенное замечание. Вдали от границы потери устойчивости, как мы видели выше, скорость изменения энтропии звезды много меньше, чем скорость установления гидродинамического равновесия. На границе потери устойчивости эти скорости становятся одинаковыми, поэтому в области устойчивости при подходе к ее границам надо, строго говоря, применять уравнения гидродинамики для расчета эволюции (конечно, лишь в непосредственной близости к границе).

Уже одного взгляда на рис. 34 достаточно, чтобы почувствовать, какое значение имеет для теории эволюции звезды понятие механической неустойчивости. Перейдем теперь к более детальному описанию нарисованной выше картины.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 1

Покажем, что в ньютоновской теории условие экстремума полной энергии звезды (при неизменном химическом составе и сохранении энтропии в каждом элементе) есть условие гидростатического равновесия. Полная энергия звезды при условии отсутствия макроскопических движений записывается в виде

$$E = \int_0^r E_1(S, \rho) dm - \int_0^M \frac{Gm dm}{r}, \quad (10.1.1п)$$

где $m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr$ — масса внутри сферы радиуса r .

Воспользуемся термодинамическим тождеством

$$P = - \left(\frac{\partial E_1}{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)} \right)_{S=\text{const}}, \quad (10.1.2п)$$

где P — давление, и вычислим первую вариацию полной энергии:

$$\delta E = \int_0^M \frac{P}{\rho^2} \delta \rho dm + G \int_0^M \frac{m dm}{r^2} \delta r. \quad (10.1.3п)$$

Преобразуем первый интеграл в (10.1.3п):

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{P}{\rho^2} \delta \rho dm &= - \int_0^M P \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) dm = - \int_0^M P \delta \left(4\pi r^2 \frac{dr}{dm} \right) dm = \\ &= - \int_0^M 8\pi P \frac{dr}{dm} r \delta r dm - \int_0^M 4\pi P r^2 \delta \left(\frac{dr}{dm} \right) dm = \\ &= - \int_0^M 8\pi P \frac{dr}{dm} r \delta r dm + \int_0^M 4\pi \frac{d}{dm} (P r^2) \delta r dm = \\ &= \int_0^M 4\pi r^2 \frac{dP}{dm} \delta r dm = \int_0^M \frac{dP}{\rho dr} \delta r dm. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (10.1.3п) и приравнявая $\delta E = 0$, находим

$$\frac{dP}{dr} + \frac{\rho Gm}{r^2} = C,$$

т. е. уравнение гидростатического равновесия. Таким образом, действительно, условие экстремума энергии есть просто условие гидростатического равновесия.

Запишем теперь выражение для полной энергии звезды, не предполагая равенства нулю скоростей движения вещества звезды:

$$E = \int_0^M \left[E_1(S, \rho) - \frac{Gm}{r} + \frac{u^2}{2} \right] dm,$$

где u — скорость элемента массы. Очевидно, что найденное выше состояние при котором имеется экстремум энергии, будет устойчивым, если экстремум — минимум. Действительно, из него не может возникнуть никакое другое состояние, ни с $u = 0$, ни тем более с $u^2 > 0$.

Следовательно, исследование устойчивости сводится к нахождению условий, при которых $\delta^2 E > 0$. Ограничимся состоянием покоя, $u = 0$.

В выражении для второй вариации коэффициент при $(\delta r')^2$, где $r' = \frac{dr}{dm}$, пропорционален $\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial E_1}{\partial \rho} = \frac{\partial P}{\partial \rho}$. Поэтому необходимым условием устойчивости является $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$, иначе, взяв малое, но высокочастотное (т. е. часто колеблющееся, как функция r) δr так, что $(\delta r)^2$ мало, а $(\delta r')^2$ велико, можно было бы получить $\delta^2 E < 0$.

Физический смысл этого условия очевиден: вещество с $\frac{\partial P}{\partial \rho} < 0$ неустойчиво при данном давлении, безотносительно к гравитации.

В учебниках вариационного исчисления [например, Гельфанд; Фомин, (1961)] доказывается, что при выполнении $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$ необходимым и достаточным условием определенного знака второй вариации $\delta^2 E$ является пересечение соседних экстремалей, т. е. решений уравнений, получающихся из условия $\delta E = 0$.

Переводя эту теорему на язык рассматриваемой задачи, получаем следующее условие устойчивости звезды. Пусть $r_0(m)$ есть равновесное решение, отвечающее полной массе M_0 ; при этом на краю звезды, т. е. при $m = M_0$, должно быть выполнено естественное условие $P = 0$. Пусть $r_1(m)$ есть решение, отвечающее другой массе M_1 , близкой к M_0 . Тогда решение устойчиво, если при всех m

$$\frac{r_1(m) - r_0(m)}{M_1 - M_0} < 0. \quad (10.1.4\text{п})$$

Следовательно, для устойчивости нужно, чтобы при увеличении массы ($M_1 - M_0 = \Delta > 0$), т. е. при добавлении массы Δ снаружи, каждый внутренний элемент массы приблизился к центру ($\Delta r = r_1 - r_0 < 0$).

Такое условие является весьма естественным и его можно рассматривать как некое обобщение условия $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$. Объем звезды и каждой ее части должен уменьшаться при наложении внешнего давления. Вместе с тем важно отметить, что это условие получено не интуитивно, а является точным математическим утверждением, полное формальное доказательство которого дано, например, в указанном выше учебнике Гельфанда и Фомина.

При интегрировании уравнения равновесия удобно задаться плотностью в центре. Тогда в результате интегрирования получается зависимость $M(\rho_c)$. Так как при малых m

$$r(m) = \left(\frac{3m}{4\pi\rho_c} \right)^{1/3}, \quad (10.1.5\text{п})$$

то легко убедиться, что условие (10.1.4п) будет удовлетворено лишь при $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$.

Таким образом, дано строгое доказательство того, что решения, расположенные на спадающей ветви кривой $M(\rho_c)$ там, где $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$, являются неустойчивыми относительно малых возмущений. Этот результат был получен выше в основном тексте параграфа весьма грубым способом, и его точное подтверждение является аргументом в пользу качественной правильности грубого рассмотрения. Вместе с тем надо отметить, что выполнение $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$ является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным для устойчивости.

В части звезды вещество может иметь $\gamma < 4/3$, и звезда останется устойчивой, должно быть лишь $\gamma > 0$. Как найти эффективное среднее γ , которое позволило бы судить об устойчивости решения? Построение пары кривых $r_0(m)$ и $r_1(m)$ для близких ρ_{c0} и ρ_{c1} , которым соответствуют близкие M_0 и M_1 , позволяет всегда вполне однозначно проверить устойчивость по выполнению (10.1.4п) при всех m и, таким образом, дает точное, исчерпывающее и практически удобное решение вопроса. Другой способ доказательства того, что максимум кривой $M(\rho_c)$ играет роль границы устойчивости, дан в конце § 7 гл. 10. Обзор других точных методов определения устойчивости, справедливых как в ОТО, так и в ньютоновской теории, дан Торном (1967).

§ 2. Аналитическая теория политропных газовых сфер (теория Лейна — Эмдена)

а. Общие соотношения. Ньютоновская теория гидростатического равновесия в частном случае

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}, \quad (10.2.1)$$

где $n \equiv 1/(\gamma - 1)$, очень проста и представляет значительный интерес для астрофизики (Эмден; 1907), основные выводы этой теории изложены, например, в книге Крата (1950). Существует далеко идущее математическое сходство между телами с данным значением n , но разными массами, и константами K . Гидростатическая структура зависит, как мы увидим, от безразмерной функции одной безразмерной переменной, например,

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \psi\left(\frac{m}{M}\right), \quad (10.2.2)$$

где M — полная масса звезды, ρ_c — центральная плотность, ρ — плотность оболочки, внутри которой содержится масса m . Вид функции ψ зависит только от индекса n .

На первых авторов производил впечатление тот факт, что двухатомный газ имеет $\gamma = 7/5$, $n = 5/2$, а одноатомный идеальный газ имеет $\gamma = 5/3$, $n = 3/2$ при заданной, не зависящей от радиуса энтропии $S = \text{const}$. С современной точки зрения политропный закон, как называется соотношение вида (10.2.1), никогда не реализуется точно, но политропная теория дает хорошие приближения в отсутствие точных численных расчетов. Политропная теория позволяет также понять некоторые качественные особенности теории звезд. Даже закоренелый релятивист должен знать основные элементы этой теории.

Чтобы выявить соотношение между политропными моделями с различными M и K , мы введем безразмерные переменные θ и ξ . (Будем пользоваться традиционными обозначениями.) Переменная θ связана с плотностью и давлением посредством соотношений

$$\rho = \lambda \theta^n, \quad P = K \rho^{1+1/n} = K \lambda^{1+1/n} \theta^{n+1}, \quad (10.2.3)$$

где λ — центральная плотность, $\rho_c = \lambda$, так что $\theta = 1$ соответствует центру звезды. Переменная ξ связана с радиальной координатой r :

$$r = \alpha \xi; \quad \alpha = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \lambda^{1/n-1} \right]^{1/2}. \quad (10.2.4)$$

В обычных переменных уравнения гидростатического равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) &= -4\pi G \rho. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.5)$$

В новых переменных (10.2.3) — (10.2.5) эти уравнения принимают форму

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \equiv \Delta_\xi \theta = -\theta^n; \quad (10.2.6)$$

это так называемое уравнение Лейна — Эмдена. Как отмечено выше, постоянные α и λ выбраны так, что в центре звезды выполнено граничное условие

$$\theta = 1 \text{ при } \xi = 0, \quad (10.2.7)$$

а в (10.2.6) коэффициент при θ^n равен -1 .

Уравнений (10.2.6) и (10.2.7) достаточно, чтобы выполнить интегрирование для данного n от центра звезды к поверхности. Получающееся решение $\theta_n(\xi)$ является уменьшающейся функцией от радиуса ξ . При определенном значении ξ функция θ обращается в нуль: $\theta_n(\xi_1) = 0$, $\xi_1 = \xi_1(n)$. Это значение ξ соответствует, очевидно, поверхности звезды.

Важной величиной является интеграл $\int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi$. Из уравнения (10.2.6) мы видим, что

$$\mu_1 \equiv -\xi_1^2 \left(\frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1} = \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi. \quad (10.2.8)$$

Значения ξ_1 , интеграла (10.2.8) и некоторых других величин для различных значений n приведены ниже в таблице. Обратное преобразование к физическим переменным имеет вид

$$\frac{r}{R} = \frac{\xi}{\xi_1}; \quad \frac{\rho}{\rho_c} = \theta^n; \quad \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_c} = \frac{3\mu_1}{\xi_1^3}. \quad (10.2.9)$$

Из этих формул можно сделать важные выводы, даже не зная численных значений μ_1 , ξ_1 и т. п.

Пусть задана масса M модели и свойства газа (n , K). Каковы будут равновесные радиус и плотность звезды в центре? Комбинируя выражение (10.2.9) для μ с уравнением (10.2.4), находим

$$\rho_c = \lambda = \left\{ \frac{M}{\mu_1(n)} \left[\frac{4\pi G^3}{K^3(n+1)^3} \right]^{1/2} \right\}^{2n/(3-n)}. \quad (10.2.10)$$

Непосредственно из этого уравнения можно видеть, что значение $n = 3$, $\gamma = 1 + 1/n = 4/3$ является критическим: для $n < 3$ ($\gamma > 4/3$) величина ρ_c растет с увеличением M , что является нормальным поведением для стабильной звезды в равновесии. Если к поверхности звезды добавить дополнительную массу, звезда сожмется, ее плотность и давление увеличатся так, что возникнет восстанавливающая сила, поддерживающая эту массу. Читатель может применить аналогичный аргумент для $n > 3$ ($\gamma < 4/3$) и убедиться в неустойчивости для этого случая.

Комбинируя приведенные выше уравнения, мы получаем следующее выражение для радиуса звезды как функции от M , K , n :

$$R = M^{-\frac{n-1}{3-n}} K^{\frac{3-7n}{2(3-n)}} G^{\frac{7n-3}{2(3-n)}} (4\pi)^{\frac{3(n+1)}{2(3-n)}} (n+1)^{\frac{3-7n}{2(3-n)}} \times \\ \times \xi_1(n) [\mu_1(n)]^{-2n/(3-n)}. \quad (10.2.11)$$

Можно привести также выражения для внутренней энергии, гравитационной энергии и полной энергии политропной звезды. Вывод их содержит теорему вириала; мы опускаем этот вывод и приводим только определения и результаты (подробный вывод см. в приложении к § 2):

$$E_{\text{внутр}} = \int \frac{1}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} dm = nMK\rho_c^{n-1}\mu_1^{-1} \int \theta^{n+1} \xi^2 d\xi = \frac{GM^2}{R} \cdot \frac{n}{5-n}, \\ E_{\text{грав}} = -G \int \frac{mdm}{r} = \frac{GM^2}{R} \cdot \frac{3}{5-n}, \\ E_{\text{полн}} = E_{\text{внутр}} + E_{\text{грав}} = -\frac{GM^2}{R} \cdot \frac{3-n}{5-n}. \quad (10.2.12)$$

Приведенные формулы подтверждают и делают более точными рассуждения, представленные в последней части § 1 этой главы, рассуждения, выведенные с помощью упрощающих предположений о связи плотности и давления.

Приведем полезное выражение для давления в центре политропной звезды,

$$P_c = H_1 GM^2 \rho_c'^{1/2}, \quad (10.2.13)$$

где H_1 — функция индекса n , данная в таблице.

Параметры политропы
(Чандрасекар, 1939)

n	ξ_1	μ_1	$\rho_c/\bar{\rho}$	H_1
0	2,45	4,90	1,00	0,817
0,5	2,75	3,79	1,84	0,643
1,0	3,14	3,14	3,29	0,554
1,5	3,65	2,71	5,99	0,488
2,0	4,35	2,41	11,4	0,439
2,5	5,36	2,19	23,4	0,396
3	6,90	2,02	54,2	0,364
4	14,98	1,80	622	0,315
5	∞	1,73	∞	0,270

Упомянем три случая, когда уравнения Лейна — Эмдена интегрируются в элементарных функциях:

1) $n = 0$, соответствующий несжимаемой жидкости

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_c = \text{const}, \quad P \neq \text{const}, \\ \theta_0 &= \left(1 - \frac{1}{6} \xi^2\right); \end{aligned} \right\} \quad (10.2.14)$$

2) $n = 1$, т. е. $P = K\rho^2$ превращает уравнение Лейна — Эмдена в линейное, решение которого

$$\theta_1 = \frac{\xi_1}{\xi} \sin \frac{\xi}{\xi_1}; \quad \xi_1 = \pi. \quad (10.2.15)$$

В этом случае, как можно видеть из уравнения (10.2.11), радиус R не зависит от массы M .

3) $n = 5$, решением будет функция

$$\theta_5 = \left(1 + \frac{1}{3} \xi^2\right)^{-1/2}, \quad (10.2.16)$$

не обращающаяся в нуль ни при каком конечном ξ . Следовательно, для $n = 5$ радиус R бесконечен. На выделенность случая $n = 5$ указывает также знаменатель $(5 - n)$ в уравнении (10.2.12).

Случай $n = 3$ не имеет аналитического решения в терминах известных функций, но он особенный для формул, дающих ρ_c и R как функции массы M . В этом случае с данным K решение существует только для одного частного значения массы $M = M_3$. Для этого M , ρ_c и R принимают любые значения, связанные соотношением

$$\rho_c \frac{4\pi}{3} R^3 \left(\frac{\langle \rho \rangle}{\rho_c} \right)_3 = M_3. \quad (10.2.17)$$

Функция $\psi(m/M)$ (см. 10.2.2) для важных случаев $\gamma = 4/3$ и $\gamma = 5/3$ представлена на рис. 35.

6. Показатели адиабаты и политропы. В предыдущем параграфе мы предполагали, что уравнение состояния имеет вид $P = K(s) \rho^{1+1/n}$, для которого энергия $E = nK(s)\rho^{1/n}$ и энтропия на барион постоянна вдоль звезды. Вместо этого можно представить себе звезду с переменной энтропией, со степенным законом для адиабатического соотношения между давлением и плотностью, $P = K(s)\rho^\gamma$, и распределением s таким, что $K(s) = K_1 \rho^{\gamma' - \gamma}$ по всей звезде.

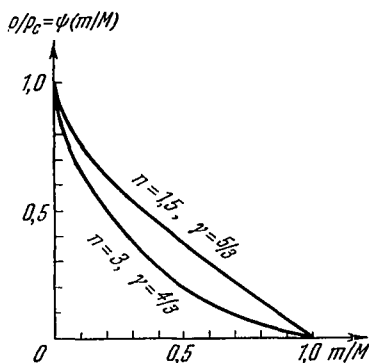


Рис. 35. Функция Эмдена $\frac{\rho}{\rho_c} = \psi\left(\frac{m}{M}\right)$ для индекса политропы $n = 3$ ($\gamma = \frac{4}{3}$); для сравнения нанесена кривая $n = 1,5$ ($\gamma = \frac{5}{3}$). Асимптотика кривых: $\frac{d\rho}{dm} \rightarrow \infty$ при $\frac{m}{M} \rightarrow 1$.

В этом случае давление и плотность в различных местах связаны политропным степенным законом

$$P = K_1 \rho^{\gamma''}. \quad (10.2.18)$$

Показатели γ' и γ'' следует отличать друг от друга. Показатель γ' дает зависимость P от ρ , когда сжатый кусок вещества расширяется без отвода или притока тепла. Другой показатель γ'' характеризует распределение давления и плотности по радиусу звезды. Ясно, что зависимость ρ от r определяется γ'' .

Первый показатель вошел при рассмотрении устойчивости. Значение $\gamma' = 4/3$ является критическим для устойчивости относительно радиальных возмущений. Эмденовские решения для политроп с $\gamma'' < 4/3$ (т. е. $n > 3$) имеют смысл до тех пор, пока $\gamma' > 4/3$. Очевидно, всякий раз, когда γ'' отлична от γ' , энтропия переменна. В случае $\gamma' \neq \gamma''$, $s \neq \text{const}$ формулы (10.2.12) должны быть изменены на

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{грав}} &= -\frac{GM^2}{R} \frac{3}{5-n''}, \\ E_{\text{внутр}} &= -E_{\text{грав}} \frac{n'}{3} = \frac{GM^2}{R} \frac{n'}{5-n''}, \\ E_{\text{полн}} &= -\frac{GM^2}{R} \frac{3-n'}{5-n''}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.19)$$

Показатель адиабаты зависит от свойств газа, как было показано в главе, посвященной уравнениям состояния: мы имеем $\gamma' = 5/3$ для нерелятивистского вырожденного ($s = 0$) или невырожденного ($s \neq 0$) газа, $\gamma' = 4/3$ для релятивистского газа, включая случай релятивистского вырожденного электронного газа и газа, в котором преобладает давление излучения.

Показатель политропы γ'' зависит от распределения энтропии по радиусу звезды. Это распределение определяется теплопроводностью и генерацией ядерной энергии. Распределения давления и плотности могут удовлетворять точному степенному политропному закону только случайно. Однако во многих случаях истинный закон близок к политропному.

Существуют важные ограничения на возможные значения γ' и γ'' . Как мы уже отмечали, звезда будет устойчива относительно расширения или сжатия при $\gamma' > 4/3$. То же ограничение следует из требования, чтобы полная энергия звезды была отрицательна, т. е. что звезда гравитационно связана.

Можно показать, что устойчивость звезд относительно конвективных движений требует $\gamma' > \gamma''$. Очевидно, в этом случае $K(s)$ и s растут с ростом радиуса. K и s минимальны в центре звезды. Грубо говоря, это соответствует ситуации, когда легкий газ в звездной атмосфере лежит поверх тяжелого газа в ядре

звезды. В противоположном случае $\gamma' < \gamma''$ энтропия максимальна в центре.

Чтобы оценить конвективную устойчивость, нельзя просто сравнить действительную плотность в двух различных слоях звезды — такое сравнение достаточно только для несжимаемой жидкости. Для газа мы должны сравнить плотность на определенном радиусе r_1 с плотностью, которой обладал бы газ, перемещенный из начального равновесного положения r_2 в r_1 и расширенный адиабатически до давления P_1 . Такое сравнение плотностей дает хорошо известный критерий Шварцшильда для конвективной неустойчивости $\frac{ds}{dr} < 0$.

В формальной теории малых возмущений $\frac{ds}{dr} < 0$ вызывает неустойчивость равновесной конфигурации относительно нерадиальных возмущений, в которых материал погружается внутрь в одной части звезды и всплывает к поверхности в другой части. Для данного распределения энтропии этот процесс перемешивания закончится, когда материя с минимальным s окажется в центре и $\gamma' > \gamma''$. Рассуждение легко обобщить на случай, когда неоднородна не только энтропия, но и химический состав.

в. *Энергетический подход к теории равновесия звезды, состоящей из вещества с γ , близким к $4/3$.* Исследование зависимости энергии звезды от одного параметра (средней или центральной плотности, или же от радиуса), проведенное выше, является грубо приближенным, иллюстративным приемом, ибо в действительности надо рассматривать энергию не как функцию одного параметра, а как функционал, $F[\rho(m)]$. Однако есть весьма важный случай, когда энергетический подход с однопараметрической зависимостью энергии становится асимптотически точным. Это случай веществ, показатель адиабаты которого близок к $\gamma = 4/3$ (индекс политропы $n \cong 3^*$). Случай этот важен потому, что, как мы видели выше, именно значение $\gamma = 4/3$ является критическим при переходе от устойчивости к неустойчивости. Имеются конкретные примеры, когда уравнение состояния вещества в звездах имеет показатель адиабаты, близкий к $4/3$. Одним из таких примеров являются белые карлики. Нас в дальнейшем будут интересовать именно параметры критических состояний. Поэтому случай $(\gamma - 4/3) \ll 1$ будет исследован особенно подробно, а решение ньютоновского уравнения равновесия для состояния с $\gamma = 4/3$ будет рассматриваться в качестве нулевого приближения.

Для каждого $\gamma = \text{const}$, как мы видели в пункте «а», имеется вполне определенная форма распределения плотности в звезде, т. е. определенная зависимость безразмерной плотности

*) Для простоты возвращаемся к случаю $s = \text{const}$, $\gamma' = \gamma''$, хотя многие выводы можно перенести и на $\gamma' \neq \gamma''$.

(отнесенной к центральной плотности) от безразмерной массы m/M

$$\rho = \rho_c \psi \left(\frac{m}{M} \right).$$

Интересующая нас функция ψ для $\gamma = 4/3$ ($n = 3$) изображена на рис. 35. Отклонения термодинамического уравнения состояния от соответствующего $n = 3$ (т. е. от $P = K(s)\rho^{4/3}$) можно рассматривать как малые поправки.

Сделаем еще одно важное замечание. Эффекты общей теории относительности становятся определяющими, когда гравитационный потенциал Φ становится порядка c^2 . Иными словами, для этого необходимо, чтобы размер тела R был сравним с r_g . Казалось бы, во всех случаях, когда $R \gg r_g$, эффекты ОТО не могут качественно повлиять на строение небесного тела и его эволюцию. Однако для звезды с $(\gamma - 4/3) \ll 1$, находящейся на границе устойчивого равновесия, это не так. В этом случае достаточно даже малой поправки на ОТО, чтобы нарушить устойчивость равновесия.

По замечанию Каплана (1949b) [см. также Каплан, Лупанов (1965); Фаулер, 1964а, б; Чандрасекар (1964а, б, 1965); Зельдович, Новиков (1965)], в этом случае уже малые эффекты ОТО приводят к качественным изменениям картины; поэтому эффекты ОТО также можно рассматривать как поправки к ньютоновской теории с $n = 3$, взятой в качестве нулевого приближения. Все поправки как на отклонение уравнения состояния, так и на ОТО, вычисляются по этому распределению и поэтому оказываются функциями одного параметра — центральной плотности ρ_c .

Поправки в уравнении состояния и поправки, связанные с ОТО порядка $\alpha = \Delta E_1/E_1 \ll 1$, в принципе вызывают изменение того же порядка α самой функции ψ ; однако вследствие экстремальных свойств ψ как решения нулевого приближения изменение ψ порядка α вызывает изменение энергии порядка α^2 , так как первая вариационная производная полной энергии по функции ψ равна нулю.

Поэтому вычисление поправок с помощью невозмущенной эмденовской функции распределения ψ дает в точности первый (порядка α) член разложения энергии по степеням α .

В этом смысле и можно говорить об асимптотически точной (с ошибкой $\sim \alpha^2$) теории равновесия звезд с $(\gamma - 4/3) \sim \alpha$.

Чем дальше отходить от критического состояния $\gamma = 4/3$, тем количественно менее точными становятся найденные выражения. Однако качественно все выводы однопараметрической теории (с нулевым приближением $\gamma = 4/3$) остаются справедливыми, да и количественные оценки меняются не очень сильно. В качестве иллюстрации на рис. 35 дана функция Эмдена ψ для $\gamma = 5/3$ (уравнение состояния идеального невырожденного одноатомного газа), которая не слишком отличается от ψ для $\gamma = 4/3$.

Как уже подчеркивалось, для наших целей особенно важны критические состояния, а для состояний, далеких от критического, вполне достаточно приближенных оценок. По этой причине в дальнейшем используется однопараметрический метод.

ПРИЛОЖЕНИЕ к § 2

Вывод теоремы вириала и выражения для гравитационной энергии с помощью вариационного принципа

Ниже с помощью вариационного принципа будут получены два полезных соотношения:

1) между полной энергией звезды и ее гравитационной энергией (теорема вириала) и

2) между радиусом звезды и ее гравитационной энергией.

Эти соотношения относятся к звезде, состоящей из вещества с политропическим уравнением состояния $P = A\rho^{1+1/n}$; из этого уравнения состояния следует, что энергия единицы массы $E_1 = nA\rho^{1/n} = nP/\rho$ (за нуль принята энергия вещества, охлажденного путем адиабатического расширения до нулевой плотности). Для первого соотношения несущественно, является ли $A = A(S)$ постоянной по звезде, для второго соотношения постоянство A необходимо. Оба соотношения хорошо известны в классической теории равновесия звезд (см. формулы (10.1.11) — (10.1.13)), где они выводятся из дифференциального уравнения равновесия. Вывод этих соотношений из вариационного принципа (ВП) полезен как упражнение на применение ВП, а также и потому, что смысл соотношений предстает в новом свете.

Итак, записываем полную энергию звезды в виде

$$E = \int E_1(m) dm - G \int \frac{mdm}{r} = W + U,$$

где m — масса, расположенная внутри данного слоя, а интегрирование ведется от $m = 0$ (центр звезды) до $m = M$ (наружная поверхность, M — полная масса звезды). Смысл обозначений: W — внутренняя энергия всего вещества, U — гравитационная энергия. При этом

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr.$$

Распределение плотности полностью определено, если задана функция $r(m)$, т. е. задано расстояние от центра сферы, заключающей массу вещества m . В терминах гидродинамики r есть эйлерова координата, m — разновидность лагранжевой координаты частицы. Зная $r(m)$, найдем

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \left(\frac{dr}{dm} \right)^{-1}.$$

Удельная энергия вещества зависит от плотности.

Согласно вариационному принципу в состоянии равновесия E имеет минимум *) при данной массе M . Следовательно, при любом изменении $r(m)$ первая производная E равна нулю.

*) Минимум соответствует устойчивому равновесию. Для дальнейшего достаточно, чтобы E было экстремально.

Рассмотрим гомологическое преобразование, т. е. подобное $r(m) = ar_0(m)$ расширение ($a > 1$) или сжатие ($a < 1$) звезды, и найдем

$$\frac{dE}{da} \Big|_{a=1} = \int \frac{dE_1}{d\rho} (-3\rho) dm + G \int \frac{mdm}{r_0} = 0.$$

При $E_1 = A_1 \rho^{1/n}$ получим

$$\frac{dE}{da} \Big|_{a=1} = -\frac{3}{n} W - U = 0; \quad W = -\frac{n}{3} U, \quad E = W + U = \frac{3-n}{3} U.$$

При произвольном уравнении состояния

$$\frac{dE_1}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{dE_1}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{P}{\rho^2},$$

$$\int \frac{dE}{d\rho} (-3\rho) dm = -3 \int P \frac{dm}{\rho} = -3 \int dV$$

и мы получаем

$$U = -3 \int P dV.$$

Теперь рассмотрим звезды, в которых $E_1 = nA\rho^{1/n}$ и A постоянно; см. § 2, раздел а. Из размерности очевидно, что распределение плотности в таких звездах при различной массе подобно (распределение может зависеть только от безразмерной величины n ; из A и G нельзя построить безразмерной комбинации). Поэтому

$$E = ManA\rho_c^{1/n} - Gb \frac{M^2}{\left(\frac{M}{\rho_c}\right)^{1/3}} = \alpha M \rho_c^{1/n} - \beta M^{5/3} \rho_c^{1/3}.$$

Из условия равновесия находим

$$\frac{dE}{d\rho_c} = \frac{1}{n} \alpha M \rho_c^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{3} \beta M^{\frac{5}{3}} \rho_c^{\frac{1}{3}-1} = 0,$$

$$\rho_c = \left(\frac{n}{3} \frac{\beta}{\alpha} M^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3n}{3-n}} = \gamma M^{\frac{2n}{3-n}}.$$

Заметим, что при $n < 3$, т. е. для устойчивого равновесия, с ростом M всегда

увеличивается плотность в центре ρ_c . Для радиуса звезды имеем $R \sim \left(\frac{M}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \sim$

$\sim M^{\frac{3(1-n)}{3-n}}$. Следовательно, при $1 < n < 3$ радиус уменьшается с увеличением массы, для $n = 1$ и $P = A\rho^3$ радиус не зависит от массы, только для $n < 1$ радиус растет.

Подставляем выражение ρ_c в формулу для E :

$$E = \delta \cdot M^{\frac{5-n}{3-n}}.$$

Из предыдущей теоремы вириала мы знаем, что

$$W = -\frac{n}{3-n} E, \quad U = \frac{3}{3-n} E;$$

при этом очевидно, что $E < 0$ и $\delta < 0$.

Теперь рассмотрим два способа увеличения массы звезды: 1) от равновесной конфигурации с массой M перейдем также к равновесной конфигурации с массой $M + dM$. Очевидно, что

$$E(M + dM) - E(M) = dE = \frac{dE}{dM} dM = \frac{5-n}{3-n} \frac{E}{M} dM;$$

2) к равновесной конфигурации с массой M прибавим массу dM , поместив ее на поверхности звезды, где давление равно нулю. Внутренняя энергия прибавленной массы равна нулю (так как $P = 0$), а гравитационная энергия, очевидно, будет $-\frac{GM}{R} dM$. Следовательно,

$$dE = -\frac{GM}{R} dM.$$

Теперь в силу вариационного принципа утверждаем, что оба выражения dE совпадают: во втором способе мы получили распределение плотности, отличающееся от равновесного при массе $M + dM$, так как прибавка лежит на поверхности. Однако в силу того, что равновесное распределение экстремально, отклонение от равновесного распределения может вызвать изменение в E лишь второго порядка малости, т. е. в данном случае, когда добавка массы dM мала, пропорциональное $(dM)^2$.

Итак (используя также выражение для U), получим

$$\frac{5-n}{3-n} \frac{E}{M} = -\frac{GM}{R}, \quad U = \frac{3}{3-n} E = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}.$$

Заметим, что последнее соотношение остается справедливым и при $n = 3$, тогда как в предыдущем появляется неопределенность. Из приведенного выражения немедленно следует, что решение уравнения равновесия при $n = 5$ является вырожденным, $R \rightarrow \infty$.

Наконец, ясно, что в случае изэнтропического решения с произвольным уравнением состояния, а также и при замене ньютоновской теории на ОТО остается в силе связь между производной энергии по числу частиц N и гравитационным потенциалом на поверхности звезды (см. § 8 гл. 10). Однако в силу того, что $E(M)$ или $E(N)$ не имеет теперь простого аналитического выражения, такие простые изящные формулы из этой связи не получаются.

§ 3. Релятивистские уравнения равновесия звезды

а. *Равновесие в отсутствие вращения.* Прежде чем идти дальше, мы должны сформулировать уравнения равновесия звезды в ОТО. Рассмотрим сферически-симметричное распределение масс в состоянии механического равновесия. Это значит, что рассматривается звезда, у которой можно пренебречь вращением и упорядоченным магнитным полем. Звезда рассматривается в полном гидродинамическом равновесии; если звезда находится в состоянии медленной эволюции, то необходимо, чтобы при

этом скорость и ускорение слоев вещества были малы, а также мал и поток тепловой энергии (более точные оценки малости будут даны позже). Считая, что вблизи звезды нет других тел, ищем сферически-симметричное и статическое решение для поля тяготения и для метрики.

Ищем метрику в виде

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (10.3.1)$$

В статическом, равновесном случае

$$\dot{\lambda} = \dot{\nu} = \dot{v} = T_0^1 = 0. \quad (10.3.2)$$

Для вещества (жидкости или газа), покоящегося в рассматриваемой координатной системе, имеет место закон Паскаля

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P, \quad T_0^0 = \varepsilon = \rho c^2. \quad (10.3.3)$$

Подставляя выражения (10.3.1) — (10.3.3) в уравнения Эйнштейна, получаем

$$\frac{\kappa P}{c^2} = e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \quad (10.3.4)$$

$$\frac{\kappa P}{c^2} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right), \quad (10.3.5)$$

$$\frac{\kappa \varepsilon}{c^2} = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}. \quad (10.3.6)$$

Уравнение (10.3.6) интегрируется независимо от остальных. Вводя равенства

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr, \quad m' = 4\pi \varepsilon c^{-2} r, \quad \rho = \varepsilon c^{-2} \quad (10.3.7)$$

и используя граничное условие $\lambda(0) = 0$, получим*)

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\kappa m(r)}{4\pi r} = 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}. \quad (10.3.8)$$

Это уравнение справедливо как внутри звезды $r < R$, где $\rho > 0$, так и вне звезды. Очевидно, что в любой точке r_1 вне звезды

$$m(r_1) = 4\pi \int_0^{r_1} \rho r^2 dr = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr = m(R), \quad (10.3.9)$$

где R — радиус звезды. Из вида метрики при больших r следует, что M есть полная масса звезды — та величина, которую внешний наблюдатель определяет как массу звезды по ее полю

*) О сингулярных решениях с $\lambda(0) \neq 0$ см. ниже.

тяготения.

$$m(R) = M. \quad (10.3.10)$$

Используя (10.3.4), можно выразить ν' через P , ν и r ; затем, взяв производную, получим выражение для ν'' , куда войдет P' наряду с P , λ , λ' , r . Комбинируя это уравнение с уравнениями (10.3.4) — (10.3.6) и (10.3.8), исключаем ν'' , ν' , λ и λ' и получаем уравнение, в котором $\frac{dP}{dr}$ выражено через P , ε , m , r *):

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \left(m + 4\pi P \frac{r^3}{c^2} \right)}{r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)}. \quad (10.3.11)$$

Это уравнение является обобщением на случай ОТО уравнения гидростатического равновесия нерелятивистской теории

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm}{r^2} \rho. \quad (10.3.12)$$

Получение условия равновесия (10.3.11) из уравнений, определяющих метрику, есть частный случай того факта, что в ОТО уравнения поля содержат в себе уравнения движения. Мы задались условием, что метрика не меняется со временем и отсюда получили такое распределение давления и плотности, которое обеспечивает равновесие вещества.

Практически построение модели звезды при заданном уравнении состояния $P(\rho)$ может быть произведено путем численного интегрирования (10.3.11) с учетом определения $m(r)$ по формуле (10.3.7). При этом удобно начать из центра звезды, задав ρ_c, P_c ; при малых r решение всегда регулярно,

$$m = 4\pi \rho_c \frac{r^3}{3}, P = P_c \frac{2\pi G r^2}{3} \left(\rho_c + \frac{P_c}{c^2} \right) \left(\rho_c + \frac{3P_c}{c^2} \right)$$

Численное интегрирование приводит к $r = 0, P = 0$ при определенном $r = R$. При этом, как и в нерелятивистском случае, меняя начальные условия, P_c от 0 до ∞ , получим весь набор решений. Однако заранее не известно, для каких масс будут получены решения при данном ρ_c .

Как подробно объяснено в разделе II, следует различать плотность вещества ρ , включающую все формы внутренней энергии (в том числе и массу покоя), и величину $\rho_0 = n/A$, где n — плотность числа барионов и A — число Авогадро. Величину ρ_0 мы называем плотностью массы покоя.

*) Это уравнение можно также непосредственно получить из соотношения (1.8.8а).

В метрике (10.3.1) элемент объема dV_1 и объем шарового слоя dV звезды равны соответственно

$$dV_1 = e^{\lambda/2} r^2 dr d\cos\theta d\varphi, \quad dV = 4\pi e^{\lambda/2} r^2 dr. \quad (10.3.13)$$

Полное число барионов в звезде дается выражением

$$N = \int n dV = 4\pi \int_0^R n(r) e^{\lambda/2} r^2 dr. \quad (10.3.14)$$

Удобно рассматривать выражение, пропорциональное N , имеющее размерность массы:

$$M_0 \equiv \frac{N}{A} = \int \rho_0 dV = 4\pi \int_0^R \rho_0(r) e^{\lambda/2} r^2 dr. \quad (10.3.15)$$

Между P , ρ и ρ_0 имеется термодинамическое соотношение (справедливое при постоянной энтропии, в частности, для холодного вещества, т. е. при $S = 0$):

$$\left. \begin{aligned} d \frac{\rho}{\rho_0} &= \frac{1}{c^2} P d \frac{1}{\rho_0}; \quad \frac{\rho}{\rho_0} \rightarrow 1 \quad \text{для} \quad \rho_0 \rightarrow 0, \\ \rho &= \rho_0 \left(1 + \frac{E_1}{c^2} \right), \quad E_1 = \int \left(\frac{P}{\rho_0^2} \right) d\rho_0 \end{aligned} \right\} \quad (10.3.16)$$

Из этого уравнения мы видим, что величина M_0 для звезды равна массе, которую имели бы все барионы звезды, если бы они были распределены с малой плотностью в виде наиболее стабильных ядер с электронами (Fe^{56}) в таком большом объеме, чтобы можно было полностью пренебречь взаимодействием между атомами, как близкодействующим, так и гравитационным. Величина

$$E = (M - M_0)c^2 \quad (10.3.17)$$

есть энергия звезды, отсчитанная от массы покоя. Очевидно, E отрицательна для устойчивых звезд. Энергия, излучаемая при сжатии вещества малой плотности в звезду, равна $-E$.

Величина ν играет роль гравитационного потенциала. От разности $\nu(r) - \nu(\infty)$ зависит красное смещение кванта, испущенного в точке r и наблюдаемого на бесконечности. В уравнения равновесия (10.3.4 — 10.3.6) входят только производные ν' , ν'' , но не само ν , которое можно выбрать произвольным. Принято нормировать ν так же, как гравитационный потенциал ньютоновской теории, условием $\nu(\infty) \equiv 0$. Это соответствует выбору координатного времени на $r = \infty$ таким, что оно совпадает с физическим временем.

В общем случае, когда энтропия не постоянна, уравнение равновесия (10.3.11) эквивалентно вариационному принципу, согласно которому энергия (масса) всей системы минимальна при данном общем числе барионов и данном распределении энтропии по бари-

онам. Математически утверждается, что экстремален интеграл (10.3.9) при дополнительном условии постоянства интеграла (10.3.14). При этом $\rho = \rho(n, S)$ есть уравнение состояния и S задано как функция F числа барионов внутри данной сферы:

$$F \equiv \int n dV = 4\pi \int_0^r n e^{\lambda/2} r^2 dr; \quad S = S(F). \quad (10.3.18)$$

Величина $\lambda(r)$ не входит в интеграл (10.3.9). Однако, варьируя распределение плотности в пространстве, необходимо учитывать вариацию λ , поскольку эта величина входит в дополнительное условие постоянства интеграла (10.3.14).

Наиболее естественно взять в качестве переменной интегрирования именно F , т. е. число барионов внутри данного слоя. Величина F может быть названа лагранжевой координатой слоя. В качестве искомой функции возьмем $r(F)$. В таком случае

$$n(F) = \frac{e^{-\lambda/2}}{4\pi r^2} \left(\frac{dr}{dF} \right)^{-1}, \quad (10.3.19a)$$

$$m(F) = \int_0^F \rho e^{-\lambda/2} dV = \int_0^F \rho e^{-\lambda/2} \frac{dF}{n}, \quad M = m(N), \quad (10.3.19b)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm(F)}{c^2 r(F)}. \quad (10.3.19c)$$

Здесь $\rho = \rho(n, S)$, величина $n(F)$ дается выражением (10.3.19a), а $S(F)$ определяется начальным условием задачи. Из (10.3.19b) непосредственно видно, что при вариации $r(F) \rightarrow r(F) + \delta r(F)$ в вариацию массы вносит вклад и возникающая вариация $\lambda(F)$. Находя экстремум M (уравнение 10.3.19b), мы получаем в качестве уравнений Эйлера — Лагранжа уравнение гидростатического равновесия (10.3.11).

Строго говоря, условие равновесия требует лишь того, чтобы M как функционал от $r(F)$ был стационарен (экстремум, равенство нулю первой производной). Если M имеет минимум, т. е. вторая производная положительна, то равновесие к тому же устойчивое *).

В важном случае постоянной энтропии имеются физически наглядные общие свойства решения уравнений равновесия. В этом случае (опуская $S = \text{const}$) имеем $P = P(\rho_0)$, $\rho = \rho(\rho_0)$ и можно ввести химический потенциал вещества как однозначную функцию плотности массы покоя

$$\mu = c^2 \left(\frac{d\rho}{d\rho_0} \right)_S = c^2 \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{P}{\rho_0} = c^2 + E_1 + PV. \quad (10.3.20)$$

*) Математическую трактовку критерия устойчивости см. в приложении к книге Уилера, Гаррисона, Вакано, Торна (1967).

Химический потенциал определяется как приращение энергии системы при добавлении единицы массы покоя. Термодинамическое соотношение между удельной энергией E_1 и удельным объемом V на единицу массы покоя $dE_1 = -P dV$ дает выражение для μ , соответствующее классической термодинамике. Член c^2 связан с тем, что в μ включена масса покоя, а E_1 определено за вычетом массы покоя.

Из уравнения гидростатического равновесия для звезды с постоянной энтропией следует

$$\mu e^{v/2} = \text{const} = c^2 e^{v(R)/2} = c^2 e^{-\lambda(R)/2} = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{1/2}. \quad (10.3.21)$$

Правая часть получается подстановкой значений на границе звезды $r = R$:

$$v(R) = -\lambda(R), \quad P = 0, \quad E_1 = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad \mu = c^2. \quad (10.3.22)$$

Применим вариационный принцип к системе, состоящей из равновесной звезды (масса M , масса покоя M_0), к которой добавлена еще малая масса δM_0 вещества. Получилась новая звезда с $M'_0 = M_0 + \delta M_0$. Поскольку добавленное количество мало, то и новая звезда находится в состоянии, близком к равновесию. Вариационный принцип означает, что масса новой звезды не меняется при малых изменениях распределения вещества, т. е. она одна и та же, независимо от того, где находится добавленное вещество. Если вещество добавлено на поверхности, то

$$\delta M_0 = \rho_0 \delta V,$$

$$\delta M = \rho \delta V e^{\lambda(R)/2} = \rho_0 \delta V e^{-\lambda(R)/2} = \delta M_0 e^{-\lambda(R)/2} = \delta M_0 \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{1/2}. \quad (10.3.23)$$

Если вещество добавляется не на поверхности, а в слое на радиусе r , то нужно учесть не только изменение $\rho(r)$, но и изменение $\lambda(r)$ при $r < r' < R$. С учетом уравнений (10.3.19а, б, с) и (10.3.21), следующего из них, получим, что изменение δM действительно не зависит от r и всегда дается выражением (10.3.23).

Теперь покажем, как релятивистские формулы переходят в формулы нерелятивистской теории. Уравнение гидростатического равновесия (10.3.11) принимает нерелятивистскую форму (10.3.12), если опускать член $r^3 P/c^2$ по сравнению с $m(r)$ и пренебречь членом GM/c^2 по сравнению с r . В этом случае $m(r)$ имеет тот же смысл, что и в нерелятивистской теории. Ограничиваясь первыми членами разложения в ряд по малым λ , v , получим

из (10.3.4) — (10.3.6)

$$\frac{v'}{r} - \frac{\lambda}{r^2} = \frac{\kappa}{c^2} P, \quad (10.3.24)$$

$$\frac{1}{2} v'' + \frac{1}{2} \frac{v'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\lambda'}{r} = \frac{\kappa}{c^2} P, \quad (10.3.25)$$

$$\frac{\lambda'}{r} + \frac{\lambda}{r} = -\frac{\kappa}{c^2} \varepsilon. \quad (10.3.26)$$

Сложив уравнения (10.3.24), (10.3.26) с удвоенным (10.3.25), получим

$$v'' + 2 \frac{v'}{r} = \frac{\kappa}{c^2} (\varepsilon + 3P). \quad (10.3.27)$$

Левая часть этого уравнения есть лапласиан Δv для $\Delta = v(r)$, так что при $P \ll \rho c^2$

$$\Delta v = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) = \frac{2}{c^2} 4\pi G \rho. \quad (10.3.28)$$

Отсюда видно, что ньютоновский гравитационный потенциал и v связаны (при $v \ll 1$) формулой

$$\varphi(r) = \frac{c^2}{2} v(r). \quad (10.3.29)$$

Наконец, также в первом порядке покажем, как из формул ОТО получается ньютоновское выражение энергии звезды. Мы должны вычислить величину E , определенную согласно (10.3.17)

$$E = (M - M_0) c^2 = c^2 \int (\rho e^{-\lambda/2} - \rho_0) dV, \quad (10.3.30)$$

где вместо $4\pi r^2 dr$ подставлено $e^{-\lambda/2} dV$ и использовано выражение (10.3.9). Записывая

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{E_1}{c^2} \right), \quad e^{-\lambda/2} = \sqrt{1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}} = 1 - \frac{Gm(r)}{rc^2}$$

и пренебрегая (в первом порядке) произведениями малых величин, получим

$$E = c^2 \int \left(\rho_0 + \rho_0 \frac{E_1}{c^2} - \rho_0 \frac{Gm}{rc^2} - \rho_0 \right) dV = \int E_1 dm - G \int \frac{m dm}{r}, \quad (10.3.31)$$

где

$$dm = \rho_0 dV.$$

Различие между ОТО и ньютоновской теорией возникает во втором порядке, соответствующие члены содержат c^2 в знаменателе, их расчет сложнее и будет проведен позже в приложении II к § 4.

В заключение этого пункта рассмотрим условия термодинамического равновесия в ОТО при температуре, не равной нулю.

Удобнее рассматривать условия равновесия в гравитационном поле, созданном какими-то другими массами. Условия равновесия формулируются как минимум энергии при данной энтропии и числе частиц. Во всех случаях проверка того, что равновесие имеет место, заключается в мысленном проведении вариации: переноса какого-то (малого) числа частиц или малого количества энергии из одного места в другое и вычисления соответствующего изменения энергии или энтропии.

При рассмотрении термодинамического равновесия во внешнем поле не нужно учитывать изменение того гравитационного поля, в котором рассматривается равновесие. Рассмотрение в поле других масс и в собственном поле для уравнений равновесия эквивалентны, так как рассматривается только первая вариация. Однако такой эквивалентности уже нет для второй вариации (вторая производная, члены пропорциональны квадратам вариаций), от знака которой зависит устойчивость равновесия. Поэтому при рассмотрении устойчивости необходимо учитывать, что в случае звезды мы имеем дело с веществом в собственном поле тяготения, а не во внешнем поле, и необходимо учитывать изменение этого поля при возмущениях распределения массы и энергии.

Однако мы имеем дело с более простой задачей равновесия и поэтому можем рассматривать вещество в постоянном внешнем поле тяготения.

Энергия частицы E_0 , измеренная далеким наблюдателем, выражается через локально измеренную энергию E_1 посредством

$$E_0 = (E_1 + c^2) \sqrt{-g_{00}} = (E_1 + c^2)e^{v/2}. \quad (10.3.32)$$

Сохраняющейся величиной является именно E_0 , и мы ищем минимум суммы (интеграла) E_0 по всем частицам (по всему телу). При изменении числа частиц в какой-либо области пространства формула $\left(\frac{\partial [(E_1 + c^2)n]}{\partial n}\right)_S = \mu$ дает определение химического потенциала на одну частицу.

Следовательно, условие минимума

$$\delta \varepsilon_0 = \delta \int E_0 n dV = \int \frac{\partial [(E_1 + c^2)n]}{\partial n} e^{v/2} \delta n dV = \int \mu e^{v/2} \delta n dV$$

при дополнительном условии связи

$$N = \int n dV = \text{const}, \quad \delta N = \int \delta n dV = 0$$

дает по методу Лагранжа

$$\delta \varepsilon_0 - \Lambda \delta N = \int (\mu e^{v/2} - \Lambda) \delta n dV = 0, \quad \mu e^{v/2} = \Lambda = \text{const},$$

где Λ — лагранжев множитель. Это соотношение было получено выше более сложным способом.

Рассмотрим теперь перенос энергии из одной области в другую без изменения плотности частиц. Для локального наблюдателя имеет место формула $dE_1 = T dS$, где dS — изменение энтропии, T — температура, опять-таки измеренная локальным наблюдателем. Существенно, что при обмене энергии сохраняется полная энергия. Условие равновесия дает

$$\begin{aligned} \delta \int E_0 n dV &= \delta \int (E_1 + c^2) e^{v/2} n dV = 0, \quad \delta \int S n dV = 0, \\ \int (e^{v/2} \delta E_1 - \Lambda \delta S) n dV &= \int \left(e^{v/2} \frac{\partial E_1}{\partial S} - \Lambda \right) \delta S n dV = \\ &= \int (e^{v/2} T - \Lambda) \delta S n dV = 0; \end{aligned}$$

отсюда следует, что условие теплового равновесия есть

$$e^{v/2} T = T \sqrt{g_{00}} = \text{const}, \quad (10.3.33)$$

в отличие от нерелятивистского условия $T = \text{const}$. Ясно, что оба условия совпадают в пределе, если g_{00} везде мало отличается от единицы. В релятивистское выражение для теплового потока, переносимого теплопроводностью, также вместо ∇T войдет $\nabla (T \sqrt{g_{00}})$. Дальнейшее обсуждение см., например, Торн (1967), гл. 3.

Как наглядно понять причину того, почему простое $T = \text{const}$ не является условием термодинамического равновесия в ОТО? Понять это можно, вспомнив, что условием теплового равновесия является равенство нулю теплового потока, переносимого теплопроводностью. Теплопроводность пропорциональна длине свободного пробега атомов (в нейтральном газе), электронов (в плазме) или квантов (в высокотемпературной плазме). Надо рассмотреть, что происходит с распределением частиц, переносящих тепло во время их свободного движения в поле тяготения. Гравитационное изменение частоты квантов как раз соответствует изменению температуры пропорционально $g_{00}^{-1/2}$. Рассматривая бесстолкновительные частицы с определенной массой покоя, мы убеждаемся, что то же относится к любым частицам.

б. *Релятивистские уравнения для вращающихся звезд* *). В предыдущем параграфе рассматривалось равновесие точно сферичес-

*) Этот раздел параграфа написан для нашей книги К. С. Торном. В основу параграфа легли работы Торна (1970), Хартли (1970), неоконченная рукопись Бардина (1968).

кой невращающейся релятивистской звезды. Если принять во внимание вращение, теория становится значительно сложнее, и мы должны использовать множество приближенных схем, чтобы понять физические эффекты вращения. Но приближенные схемы не всегда необходимы. Многое можно сказать о точных свойствах полностью релятивистских быстро вращающихся звезд. Основой такого обсуждения служат, как и в предыдущем параграфе, энергетические соображения и вариационный принцип.

Прежде всего нам нужно выписать выражение для метрики, адекватное рассматриваемой задаче.

Мы будем предполагать, что вращение звезды стационарно и аксиально-симметрично, т. е. метрические коэффициенты и термодинамические переменные не зависят от времени t и угла φ поворота относительно оси вращения. Если мы обратим направление течения времени, то мы обратим также направление вращения звезды, в результате чего метрика изменится. Но если мы обратим направление течения времени ($t \rightarrow -t$) и затем обратим направление вращения ($\varphi \rightarrow -\varphi$), то звезда вернется в первоначальное состояние. Поэтому (при соответствующем выборе координат) метрика должна быть инвариантна при замене $t \rightarrow -t$, $\varphi \rightarrow -\varphi$, т. е. $g_{t1} = g_{t2} = g_{\varphi 1} = g_{\varphi 2} = 0$, так что

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dt d\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + \sum_{A,B} g_{AB}dx^A dx^B. \quad (10.3.34)$$

Здесь заглавные буквы нумеруют координаты x^1 и x^2 ; метрические коэффициенты зависят только от x^1 и x^2 . При соответствующем выборе x^1 и x^2 наши координаты вдали от звезды будут обычными сферическими координатами

$$\begin{aligned} x^1 &\rightarrow r, \quad x^2 \rightarrow \theta, \\ ds^2 &\rightarrow c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (10.3.35)$$

Напомним, что исчезающая функция $g_{t\varphi}$ есть проявление «увлечения» вращением звезды инерциальной системы отсчета. Это «увлечение» (функция $g_{t\varphi}$) заставляет гироскоп на или вблизи вращающейся звезды прецессировать по отношению к удаленной инерциальной системе отсчета, т. е. по отношению к «удаленным звездам» (§ 9 гл. 1, § 3 гл. 4). Функция $g_{t\varphi}$ вызывает также гравитационный эффект Зеемана (§ 10 гл. 4). Другой недиагональный член в метрике, g_{12} , не имеет физического смысла и его можно исключить подходящим выбором x^1 и x^2 .

Можно легко определить полную массу — энергию M и угловой момент K вращающейся звезды, наблюдая искривление пространства вдали от звезды, т. е. исследуя следующие после

(10.3.2) поправки к асимптотической форме метрики

$$ds^2 \rightarrow \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \frac{4GK}{c^3 r^2} dt d\varphi - \\ - \left[1 + O\left(\frac{GM}{rc^2}\right)\right] [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (10.3.36)$$

Здесь $O\left(\frac{GM}{rc^2}\right)$ — поправочный член, который зависит от точного выбора координат. Как и в случае невращающейся звезды, ньютоновская поправка $-2GM/rc^2$ к g_{tt} дает полную массу и так же, как в слабом поле (§ 9 гл. 1), недиагональный член $g_{t\varphi}$ дает полный угловой момент.

Предполагается, что «жидкость» внутри звезды вращается в φ -м направлении. Поэтому 4-скорость жидкости имеет вид

$$u^t = u^t(x^1, x^2); u^\varphi = u^\varphi(x^1, x^2); u^1 = u^2 = 0. \quad (10.3.37)$$

Если удаленный наблюдатель с «рентгеновским зрением» следит за жидким элементом, расположенным в точке (x^1, x^2) , он фиксирует вращение с угловой скоростью

$$\Omega(x^1, x^2) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^\varphi}{u^t}. \quad (10.3.38)$$

(Напомним, что собственное время, измеряемое его часами, совпадает с координатным временем t .) Используя тождество $u^i u_i = 1$, мы можем переписать 4-скорость в виде

$$u^t = [g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + g_{\varphi\varphi} \Omega^2]^{-1/2}; u^\varphi = \Omega u^t. \quad (10.3.39)$$

Заметим, что твердотельное вращение соответствует $\Omega(x^1, x^2) = \text{const}$. В этом случае удаленный наблюдатель видит, что звездная жидкость вращается как твердое тело, и расстояние между соседними частицами всегда остается постоянным.

Обратимся теперь к энергетическим соображениям и вариационному принципу.

Вычислим сначала изменение полной массы-энергии звезды M при добавлении к ней единицы массы покоя. Ответ должен переходить в (10.3.23), т. е. $\delta M / \delta M_0 = \sqrt{g_{tt}}$, если исключить вращение звезды.

Мы добавим массу покоя δM_0 , используя следующую идеализированную процедуру. Астрофизик, находящийся вдали от звезды, бросает кусок с массой покоя δM_0 в идеализированную трубу, вставленную в звезду, своему коллеге, сопутствующему жидкому кольцу в точке (x^1, x^2) . Коллега ловит массу, вставляет ее в жидкое кольцо и выбрасывает оставшуюся энергию назад в трубу к удаленному астрофизику. Затем астрофизик, используя

закон сохранения массы-энергии определяет изменение массы звезды.

Энергетический баланс этого процесса инъекции таков:

1) астрофизик бросает кусок массы покоя δM_0 так, что кусок обладает нулевым начальным моментом и нулевой начальной кинетической энергией. Поэтому начальный 4-импульс равен

$$p_i^{(\text{нач})} = \delta M_0 c^2; \quad p_\phi^{(\text{нач})} = p_1^{(\text{нач})} = p_2^{(\text{нач})} = 0. \quad (10.3.40)$$

2) Падающая масса (форма трубы такова, что масса не касается ее стенок) движется вдоль геодезической метрики (10.3.34). Из уравнения геодезической следует, что поскольку метрические коэффициенты не зависят от t и ϕ , компоненты 4-импульса p_t и p_ϕ , «сопряженные» этим координатам, сохраняются. Поэтому когда падающая масса достигает коллеги астрофизика, находящегося на кольце в точке (x^1, x^2) и тот ловит ее, 4-импульс массы равен

$$\left. \begin{aligned} p_i^{(\text{пойм})} &= p_i^{(\text{нач})} = \delta M_0 c^2, \quad p_\phi^{(\text{пойм})} = p_\phi^{(\text{нач})} = 0, \\ p_1^{(\text{пойм})} &\neq p_1^{(\text{нач})}, \quad p_2^{(\text{пойм})} \neq p_2^{(\text{нач})}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.41)$$

3) Измеряемая коллегой астрофизика полная энергия, включая массу покоя $\delta M_0 c^2$ и кинетическую энергию падения, пропорциональна проекции 4-импульса куска массы на 4-скорость коллеги:

$$\begin{aligned} \delta W^{(\text{пойм})} &= p_j^{(\text{пойм})} u^j = p_i^{(\text{пойм})} u^t + p_\phi^{(\text{пойм})} u^\phi = p_i^{(\text{нач})} u^t = \\ &= u^t (x^1, x^2) \delta M_0 c^2. \end{aligned} \quad (10.3.42)$$

4) Из полной принятой энергии наш коллега использует величину (включающую массу покоя)

$$\begin{aligned} \delta W^{(\text{инъект})} &= \mu(x^1, x^2) \delta M_0 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \right)_S \delta M_0 c^2 = \\ &= \delta M_0 (c^2 + E + PV), \end{aligned} \quad (10.3.43)$$

которую он вставляет в звезду. Здесь $\mu(x^1, x^2)$ — химический потенциал (10.3.20). Используя эту формулу, мы предполагаем, что инжектированная масса покоя находится в термодинамическом равновесии с окружающим ее веществом, т. е. имеет такую же энтропию на единицу массы, что и окружающее вещество. Заметим, что $\delta M_0 c^2$ есть добавленная масса покоя, $\delta M_0 E$ — добавленная внутренняя энергия и $\delta M_0 PV$ — работа, которую необходимо совершить против давления P окружающей жидкости, чтобы занять объем $\delta M_0 V$.

5) После инъекции у нашего коллеги остается энергия

$$\delta W^{(\text{ост})} = \delta W^{(\text{пойм})} - \delta W^{(\text{инъект})}, \quad (10.3.44)$$

которую он отправляет назад по трубе с нулевым моментом и кинетической энергией, взятой из самой $\delta W^{(\text{ост})}$,

6) По аналогии с уравнением (10.3.9) энергия, которую на последнем этапе принимает и измеряет удаленный астрофизик, равна

$$\delta W^{(\text{конеч})} = \frac{\delta W^{(\text{ост})}}{u^t(x^1, x^2)} \quad (10.3.45)$$

(u^t учитывает «красное смещение», в полной аналогии с коэффициентом $(1 - \frac{2GM}{rc^2})^{-1/2}$ для невращающегося случая. Этот множитель появляется всякий раз, когда энергия переносится с нулевым угловым моментом между точкой (x^1, x^2) и бесконечностью).

7) Полная масса-энергия, добавленная к звезде, равна первоначально брошенной в трубу $\delta M_0 c^2$, за вычетом избытка энергии $\delta W^{(\text{конеч})}$, возвращенного обратно:

$$\begin{aligned} \delta M c^2 &= \delta M_0 c^2 - \delta W^{(\text{конеч})} = \delta M_0 c^2 - [u^t \delta M_0 c^2 - \mu \delta M_0] / u^t = \\ &= \left(\frac{\mu}{u^t} \right) \delta M. \end{aligned}$$

Посмотрим теперь, что оставалось фиксированным в течение этого процесса. Мы сохранили неизменными энтропию на единицу массы покоя (т. е. на барион) жидкости в точке (x^1, x^2) и полный угловой момент (но не момент на единицу массы покоя!). Чтобы сделать это яснее, представим себе, что x^1 и x^2 внутри звезды являются лагранжевыми координатами, которые прикреплены к кольцам вращающейся жидкости, и обозначим через

$$\Delta K = k(x^1, x^2) \Delta x^1 \Delta x^2$$

полный угловой момент кольца с поперечным сечением $\Delta x^1 \Delta x^2$. Тогда энтропия на единицу массы покоя, $S(x^1, x^2)$ и угловой момент кольца $\Delta K(x^1, x^2)$ поддерживаются фиксированными в описанном выше инжекционном процессе:

$$(\delta M c^2)_{S, \Delta K} = \frac{\mu(x^1, x^2)}{u^t(x^1, x^2)} \delta M_0. \quad (10.3.46)$$

Заметим, что если звезда не вращается и к ней добавляется на ее поверхность масса, причем

$$\left[\mu(x^1, x^2) = c^2, u^t = (g_{tt})^{-1/2} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2} \right)^{-1/2} \right],$$

то эта формула сводится к (10.3.23).

Предположим, что вместо добавления массы к жидкому кольцу в точке (x^1, x^2) мы добавляем только энтропию, т. е. только

тепло. Если масса покоя кольца есть ΔM_0 и добавлена энтропия на единицу массы δS , то полная добавленная энтропия равна

$$\delta S_{\text{полн}} = \Delta M_0 \delta S. \quad (10.3.47)$$

(Напомним, что энтропия, температура и другие термодинамические переменные всегда измеряются в системе покоя жидкости!) Добавление этой энтропии означает добавление тепла

$$\delta W_{(\text{инъект})} = T(x^1, x^2) \delta S_{\text{полн}}, \quad (10.3.48)$$

измеряемого нашим коллегой, сопутствующим жидкому элементу (здесь T — температура). И если в процессе добавления поддерживается неизменный угловой момент, то это соответствует изменению массы-энергии

$$\delta M c^2 = \delta W_{(\text{инъект})} / u^i(x^1, x^2), \quad (10.3.49)$$

измеренной удаленным астрофизиком.

Поэтому мы можем написать

$$(\delta M c^2)_{\Delta M_0, \Delta K} = \frac{T(x^1, x^2)}{u^i(x^1, x^2)} \delta S_{\text{полн}} \quad (10.3.50)$$

для изменения полной массы-энергии при добавлении энтропии $\delta S_{\text{полн}}$ к кольцу в точке (x^1, x^2) , в то время как масса покоя ΔM_0 и угловой момент ΔK поддерживаются фиксированными.

Предположим теперь, что мы добавляем к кольцу момент, не изменяя массу покоя или энтропию кольца. Это можно сделать с помощью инъекционного процесса, аналогичного использованному выше. Пусть наш астрофизик бросает кусок массы с начальной энергией и моментом

$$\delta W^{(\text{нач})} = p_t^{(\text{нач})}, \quad \delta K = -p_\phi^{(\text{нач})} \quad (10.3.51)$$

своему коллеге, находящемуся на кольце в точке (x^1, x^2) . Коллега ловит этот кусок и измеряет его полную энергию:

$$\begin{aligned} \delta W^{(\text{пойм})} &= p_j^{(\text{пойм})} u^j = p_t^{(\text{пойм})} u^t + p_\phi^{(\text{пойм})} u^\phi = \\ &= p_t^{(\text{нач})} u^t + p_\phi^{(\text{нач})} u^\phi = \delta W^{(\text{нач})} u^t - \delta K u^\phi. \end{aligned} \quad (10.3.52)$$

Он не хочет оставлять сколько-нибудь энергии $\delta W^{(\text{пойм})}$, так как это будет изменять массу покоя и/или энтропию кольца. Но он хочет удержать момент $\delta K = -p_\phi^{(\text{нач})} = -p_\phi^{(\text{пойм})}$. Поэтому он бросает кусок обратно астрофизiku с нулевым моментом, так что имеет место хорошо известный закон красного смещения:

$$\delta W^{(\text{кон})} = \frac{\delta W^{(\text{пойм})}}{u^t}. \quad (10.3.53)$$

Полная масса-энергия, попавшая на звезду и измеряемая удаленным астрофизиком, равна

$$\delta M c^2 = \delta W^{(\text{нач})} - \delta W^{(\text{кон})} = \delta W^{(\text{нач})} - \frac{\delta W^{(\text{нач})} u^t - \delta K u^\varphi}{u^t} = \Omega \delta K, \quad (10.3.54)$$

т. е.

$$(\delta M c^2)_{\Delta M_0, S} = \Omega(x^1, x^2) \delta K. \quad (10.3.55)$$

Этот результат точно согласуется с соответствующим ньютоновским результатом.

Мы можем теперь скомбинировать уравнения (10.3.46), (10.3.50) и (10.3.55) в одно большое уравнение, которое описывает изменение полной массы-энергии звезды при малом изменении массы покоя δM_0 , энтропии на единицу массы покоя S и момента ΔK кольца $(x^1 x^2)$:

$$\delta M c^2 = \frac{\mu(x^1, x^2)}{u^t(x^1, x^2)} \delta M_0 + \frac{T(x^1, x^2)}{u^t(x^1, x^2)} (\Delta M_0 \delta S) + \Omega(x^1, x^2) \delta K. \quad (10.3.56)$$

Полное изменение массы звезды будет равно сумме (или интегралу от (10.3.56) по всем кольцам. (Очевидно, наше деление звезды на множество колец искусственно и необходимо лишь для ясности изложения. С равным правом можно рассматривать вещество звезды как непрерывное.)

В действительности, уравнение (10.3.56) дает лишь первый порядок $\frac{\delta M}{M}$ доли добавленной массы. Так как после добавления к кольцу массы покоя, энтропии и момента звезда слегка отклонится от состояния гидростатического равновесия, она начнет колебаться с амплитудой $\frac{\delta R}{R} \sim \frac{\delta M}{M}$ и энергией $\delta W^{(\text{кол})} \sim \left(\frac{\delta R}{R}\right)^2 \sim \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2$. В конечном счете колебания затухнут, и звезда перейдет в новое равновесное состояние, для которого δM , δM_0 , δS и δK удовлетворяют (10.3.56) только в первом порядке.

Конечно, изменения первого порядка ответственны за равновесие, а изменения второго порядка являются решающими для устойчивости.

Вариационный принцип для равновесия вращающейся релятивистской звезды был развит Бардиным (1968b). Он рассмотрел звезду, сконструированную из большого числа жидких колец, пронумерованных лагранжевыми координатами x^1 и x^2 . Каждое кольцо содержит фиксированную массу покоя $\Delta M_0(x^1, x^2)$, фиксированную энтропию $S(x^1, x^2)$ и фиксированный момент $\Delta K(x^1, x^2)$. Кольца занимают все мыслимые объемы (т. е. имеют всевозможные

плотности $\rho_0(x^1, x^2)$, обладают всеми мыслимыми угловыми скоростями $\Omega(x^1, x^2)$, расположены во всех мыслимых направлениях по отношению друг к другу; их пространство—время описывается всеми мыслимыми метриками. Из всех таких конфигураций (т. е. наборов $\rho_0(x^1, x^2)$, $\Omega(x^1, x^2)$, положений колец и $g_{ik}(x^1, x^2)$) в гидростатическом равновесии находятся те и только те конфигурации, которые экстремизируют полную массу-энергию M . Иначе говоря, конфигурации с экстремальной M являются решениями аксиально-симметричных, статических уравнений поля Эйнштейна. Этот вариационный принцип и его специализация для случая постоянной энтропии и однородной угловой скорости (Хартли и Шарп, 1967) могут оказаться полезными в будущем для численного анализа вращающихся, релятивистских звезд.

При изучении гидростатического равновесия можно совершенно произвольно выбирать массу покоя, энтропию и момент каждого кольца. Однако существуют другие условия равновесия, связанные с ΔM_0 , S и ΔK , которые должны удовлетворяться, если в звезде всегда поддерживается одна и та же структура.

Рассмотрим произвольную конфигурацию, находящуюся в гидростатическом равновесии. Перераспределим ее угловой момент, перенося малую долю δK с одного кольца на другое, в то время как массу и энтропию сохраняем неизменными. Уравнение (10.3.56) говорит нам, что если Ω в точке, куда добавлен δK , меньше, чем Ω в точке, из которой взят δK , то мы извлекаем энергию

$$-\delta M c^2 = (\Omega_{\text{взят}} - \Omega_{\text{доб}}) \delta K \quad (10.3.57)$$

из звезды в процессе движения. Альтернативно звезда сама может совершить перенос момента посредством вязких сил, превращая освобождаемую при этом энергию в тепло. И, конечно, перенос будет осуществлен на практике, так как он энергетически выгоден и всегда есть ненулевые силы, а жидкие элементы мало связаны.

Направление переноса момента всегда совпадает с направлением, в котором освобождается энергия, и в соответствии с (10.3.57) перенос момента всегда выравнивает угловые скорости. Поэтому перенос будет продолжаться до тех пор, пока $\Omega(x^1, x^2)$ не окажется постоянной по всей звезде и энергия перестанет освобождаться. Конечное состояние

$$\Omega(x^1, x^2) = \text{const} \quad (10.3.58)$$

является равновесным относительно переноса момента с фиксированными ΔM и S .

Мы можем аналогично рассмотреть перераспределение энтропии (т. е. тепла), при котором момент и масса покоя каждого коль-

ца остаются постоянными. В этом случае мы получаем высвобождение энергии, если не выполнено

$$\frac{T(x^1, x^2)}{u^t(x^1, x^2)} \equiv T[g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2]^{1/2} = \text{const.} \quad (10.3.59)$$

Поэтому условие (10.3.59) является критерием **теплого равновесия** при фиксированных ΔK и ΔM_0 .

Наконец, возможно перераспределять массу покоя при фиксированной энтропии на единицу массы и фиксированном моменте на кольцо. Условием отсутствия выделения энергии, т. е. условием **конвективного равновесия** при фиксированных ΔK и S , будет

$$\frac{\mu(x^1, x^2)}{u^t(x^1, x^2)} \equiv \mu[g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2]^{1/2} = \text{const.} \quad (10.3.60)$$

Конечно, любой реальный физический процесс внутри звезды приводит к переносу всех трех величин: момента, энтропии и массы покоя, так что наше деление условия равновесия на три отдельных случая искусственно. Однако мы можем совершенно точно сказать, что полное равновесие требует: 1) экстремальной M с фиксированными в каждой оболочке ΔM , S и ΔK (гидростатическое равновесие); 2) $\Omega = \text{const}$ (равновесие по моменту); 3) $\frac{T}{u^t} = \text{const}$ (тепловое равновесие); и 4) $\frac{\mu}{u^t} = \text{const}$ (конвективное равновесие). Если вещество звезды не будет химически однородным, то могут потребоваться другие связи.

Мы закончим этот параграф выводами полезной формулы для вращательной энергии медленно и твердотельно вращающейся звезды. Для такой звезды мы определим

$$\mathcal{E}_{\text{вращ}} \equiv \left(\begin{array}{c} \text{полная масса — энергия} \\ \text{вращающейся звезды} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{полная масса — энергия} \\ \text{невращающейся звезды с} \\ \text{той же массой покоя и} \\ \text{энтропией в каждом} \\ \text{кольце.} \end{array} \right) \quad (10.3.61)$$

Таким образом, $\mathcal{E}_{\text{вращ}}$ есть полная энергия, которую можно извлечь, остановив вращение звезды без перераспределения или удаления тепла или массы покоя.

Мы можем вычислить $\mathcal{E}_{\text{вращ}}$ из уравнения (10.3.56). Предположим, что мы удаляем момент, а следовательно, и энергию, одновременно со всех колец с такой скоростью, что Ω остается постоянной по всей звезде. Тогда удаление полного момента

$$\delta_{\text{полн}} K = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{кольцам}}} \delta K$$

из звезды освобождает полную энергию

$$\delta \mathcal{E} = \Omega \delta_{\text{полн}} K. \quad (10.3.62)$$

Для медленно вращающейся звезды момент пропорционален угловой скорости:

$$K = J \Omega + O(\Omega^3). \quad (10.3.63)$$

Здесь J — момент инерции (полностью релятивистской) невращающейся звезды и $O(\Omega^3)$ — пренебрегаемые члены, связанные с центробежным сплющиванием. Интегрируя

$$\delta \mathcal{E} = \Omega \delta_{\text{полн}} K = J \Omega \delta \Omega$$

по угловой скорости, находим полное количество удаленной энергии

$$\mathcal{E}_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J \Omega^2 + O(\Omega^4). \quad (10.3.64)$$

Заметим, что моменты инерции, которые входят в соотношение для момента (10.3.63) и в соотношение для энергии (10.3.64), идентичны. Это справедливо как для полностью релятивистских, так и для ньютоновских звезд.

§ 4. Теория холодных белых карликов

а. Ньютоновская теория. Рассмотрим теперь состояние звезды в самом конце эволюции, когда ядерные реакции уже полностью прошли и звезда остыла ($S = 0$). Рассчитаем массу холодной звезды как функцию центральной плотности. Перепишем формулу равновесия (10.1.3) в виде

$$M = \frac{b \bar{P}^{3/2}}{G^{3/2} \bar{\rho}^2}, \quad (10.4.1)$$

где численное значение безразмерной константы b зависит от способа усреднения плотности (и связанного с ней давления) по звезде. Удобнее переписать (10.4.1) через центральные значения плотности и температуры:

$$M = \frac{b_1 P_c^{3/2}}{G^{3/2} \rho_c^2}. \quad (10.4.2)$$

Если уравнение состояния вещества по всей звезде определяется выражением $P = A \rho^\gamma$ ($A = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$), то b_1 можно вычислить, воспользовавшись функцией Эмдена (см. § 2 гл. 10). Для $\gamma = 5/3$ имеем $b_1 = 3,0$; для $\gamma = 4/3$ получим $b_1 = 4,55$.

При $\rho \ll 10^6 \text{ г/см}^3$ справедливо уравнение состояния для вещества с давлением, определяемым нерелятивистским вырожденным электронным газом (см. § 2 гл. 6) и $\gamma = 5/3$. Подставляя это уравнение состояния в (10.4.2) и используя $b_1 = 3,0$, находим

$$M = 2,8 \cdot 10^{-3} \mu_e^{-5/2} \rho_c^{1/2} M_\odot.$$

Напомним, что μ_e — доля массы нуклона, приходящаяся на один электрон.

С увеличением ρ газ электронов постепенно становится релятивистским. Не будем пока учитывать нейтронизации вещества (см. гл. 6) и эффекты ОТО. Тогда при $\rho_c \gg 10^6 \text{ г/см}^3$ вместо уравнения состояния нерелятивистского электронного газа надо использовать уравнение состояния для вещества, давление которого определяется ультрарелятивистскими вырожденными электронами, а плотность — атомными ядрами (см. гл. 6):

$$P = 1,23 \cdot 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}. \quad (10.4.3)$$

При этом атомные ядра еще не вырождены и в целом $P \ll \rho c^2$, так что применима ньютоновская теория. Подставляя это выражение в (10.4.1) и используя $b_1 = 4,55$, получим *)

$$M_{\text{кр}} = \frac{5,75 M_\odot}{\mu_e^2}. \quad (10.4.4)$$

Таким образом, для холодного вещества, находящегося в равновесии, в ньютоновской теории существует верхний предел массе (чандрасекаровский предел), равный $\frac{5,75}{\mu_e^2} M_\odot$ и достигаемый в пределе при $\rho = \infty$ (когда γ точно равно $4/3$ по всей звезде). Общая картина в энергетическом подходе изображена на рис. 36. Удобно на оси абсцисс откладывать $\rho_c^{1/3}$; тогда при больших ρ_c линии

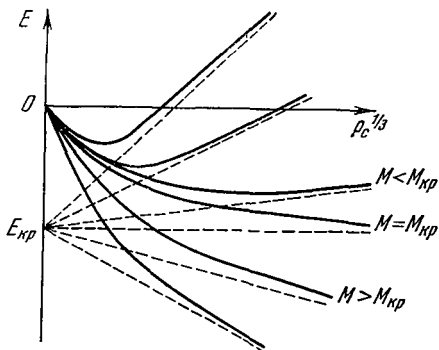


Рис. 36. Энергетические кривые для звезды из холодного идеального газа с давлением вырожденных электронов без учета ОТО и нейтронизации вещества.

*) Если записать выражение (10.4.3) через мировые постоянные и подставить в (10.4.1), то получим (опуская численные коэффициенты порядка единицы): $M = \left(\frac{G m_p^3}{\hbar c} \right)^{-3/2} m_p \mu_e^{-2}$. Величина $\frac{G m_p^3}{\hbar c}$ характеризует малость гравитационного взаимодействия в масштабах элементарных частиц.

становятся прямыми. При $M > M_{\text{кр}}$ нет равновесных решений, удовлетворяющих условию $\frac{\partial E}{\partial \rho_c} = 0$. При $M < M_{\text{кр}}$ есть одно решение. При $M \rightarrow M_{\text{кр}}$ соответствующее равновесное значение $\rho_c \rightarrow \infty$, так как кривая $E(\rho_c)$ при $M = M_{\text{кр}}$ имеет асимптотой горизонталь. Энергия звезды при этом стремится к значению $E_{\text{кр}}$, равному $-m_e c^2$ в расчете на один электрон (вывод см. в приложении I *). Это составляет $-\frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e} \text{ эрг/г.}$

Приводим таблицу (Шацман, 1958) характеристик звездных моделей, сконструированных из идеального вырожденного газа.

$\rho/\mu_e, \text{ г/см}^3$	$\mu_e R, \text{ см}$	$M\mu_e^2/M_\odot$
$1,23 \cdot 10^5$	$2,79 \cdot 10^9$	0,88
$9,82 \cdot 10^5$	$1,93 \cdot 10^9$	2,02
$3,50 \cdot 10^6$	$1,51 \cdot 10^9$	2,95
$2,65 \cdot 10^7$	$9,92 \cdot 10^8$	4,33
$3,37 \cdot 10^8$	$5,44 \cdot 10^8$	5,32
$2,76 \cdot 10^9$	$3,40 \cdot 10^8$	5,61
$3,10 \cdot 10^{10}$	$1,53 \cdot 10^8$	5,72
$2,48 \cdot 10^{11}$	$7,99 \cdot 10^7$	5,75

Есть две причины, которые при плотностях $\rho \approx 10^9 \div 10^{10} \text{ г/см}^3$ изменяют нарисованную выше картину. Это — процессы нейтронизации вещества и влияние эффектов ОТО. Мы начнем с рассмотрения эффектов ОТО.

6. *Влияние эффектов ОТО.* Белый карлик при большой плотности имеет очень малый запас устойчивости ($\gamma - \frac{4}{3} \ll 1$). Поэтому, как уже отмечалось в § 2, достаточно даже небольших поправок на ОТО, чтобы нарушить устойчивость, когда радиус звезды много больше шварцшильдовского. Найдем то критическое значение центральной плотности, при котором происходит потеря устойчивости за счет ОТО. Введение поправки на ОТО требует внимательного рассмотрения самого определения «поправки при данном распределении плотности», поскольку нужно учитывать и неевклидовость пространства, и различие между плотностью массы покоя и плотностью, включающей энергию, деленную на c^2 .

Довольно длинные вычисления (см. приложение II) приводят к следующему виду поправки в энергию звезды, связанной

*) Существование конечной энергии звезды $E_{\text{кр}}$ при $\rho_c \rightarrow \infty$ было отмечено Эмин-Заде (1959) и Саведовым (1963).

с эффектами ОТО:

$$\Delta E_{\text{ОТО}} = -0,93 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3}. \quad (10.4.5)$$

По порядку величины $\Delta E_{\text{ОТО}}$ равна произведению гравитационной энергии звезды $\sim (-GM^2/R)$ на отношение ее гравитационного радиуса к фактическому радиусу:

$$\Delta E_{\text{ОТО}} \approx \left(-\frac{GM^2}{R} \right) \left(\frac{r_g}{R} \right). \quad (10.4.6)$$

С учетом этой поправки кривые приобретают вид, показанный на рис. 37. Точка экстремумов E , т. е. статические решения, удовлетворяющие уравнениям равновесия, отмечены вертикальными черточками. На кривой, соответствующей $M''_{\text{кр}}$, максимум и минимум сливаются и дают перегиб при $\rho_c = \rho_c''$ (двойная черточка). Для ρ_c получается следующее выражение:

$$\rho_c'' = 3,75 \frac{m_p \mu_e}{m_e} (\rho_0 \mu_e), \quad (10.4.7)$$

где m_p — масса протона, $\mu_e = A/Z$ — атомный вес на один электрон, m_e — масса электрона, так что $m_p \mu_e / m_e$ есть отношение полной массы вещества к массе покоя электронов. Величина $\rho_0 \mu_e$ есть плотность, при которой импульс электронов на границе Ферми достигает значения $m_e c$, т. е. происходит переход от нерелятивистского к релятивистскому электронному газу; численно $\rho_0 = 0,985 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$. Таким образом, при $\mu_e = 56/26 = 2,2$ (для железа) $\rho_c'' = 3,3 \cdot 10^{10}$, $E_F = 25 m_e c^2 = 12,5 \text{ Мэв}$, соответствующий радиус звезды $R \approx 1000 \text{ км}$ (тогда как шварцшильдовский гравитационный радиус звезды $3,6 \text{ км}$), т. е. потеря устойчивости происходит при $R \gg r_g$.

На рис. 38 изображено геометрическое место экстремумов, т. е. энергия равновесных конфигураций в зависимости от плотности. На этом рисунке различные точки кривой соответствуют различным массам звезды с различным числом нуклонов. Минимум E_e (e — equilibrium) совпадает с горизонтальным перегибом $E(\rho_c, M)$.

На том же рис. 38 в верхней его части построена кривая массы звезды; по оси ординат отложена масса, для которой равновесие

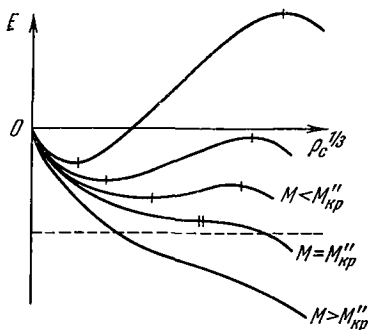


Рис. 37. Изменение энергетических кривых рис. 36 за счет эффектов ОТО или за счет нейтронизации вещества. Пунктиром показана линия $E = E_{\text{кр}}$, отмеченная на рис. 36.

достигается при значении центральной плотности, отложенной на абсциссе. В соответствии с тем, что на рис. 37 при одном значении M кривая может иметь два экстремума, кривая $M(\rho_c)$ проходит через максимум, благодаря чему горизонталь $M = \text{const}$ пересекает ее дважды. Максимум $M(\rho_c)$ достигается при том же $\rho_c = \rho_c$, при котором имеет место перегиб $M(\rho_c) = M''_{\text{кр}}$. Максимум разделяет области устойчивости и неустойчивости.

Чандрасекар (1964а, б; 1965) придает принципиальное значение существованию максимальной ρ_c и соответствующего минимального $R'' \sim 1000$ км белого карлика; он считает этот вывод единственным и однозначным подтверждением ОТО вне области слабых полей. Надо отметить, однако, что паллиативная теория с ньютоновским тяготением в плоском пространстве, но с учетом веса энергии, привела бы качественно к тому же результату, отличающемуся незначительно и количественно. С другой стороны, что бо-

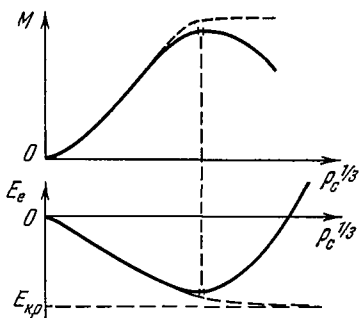
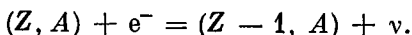


Рис. 38. Зависимость энергии холодной равновесной звезды и ее массы от центральной плотности.

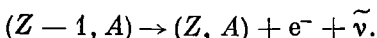
Пунктиром в верхней части рисунка показан ход кривой $M = M(\rho_c)$ при учете только давления вырожденного электронного газа без учета нейтронизации вещества и эффектов ОТО (кривая Чандрасекара). При $\rho_c \rightarrow \infty$ для этой кривой масса стремится к чандрасекаровскому пределу. Этому пределу соответствует энергия, показанная пунктиром на нижнем рисунке.

лее важно, еще до достижения ρ_c возникает процесс нейтронизации — превращения ядер под действием быстрых электронов, находящихся в импульсном пространстве на краю ферми-распределения (см. § 5 гл. 6). Поэтому и без учета ОТО есть другая причина, ограничивающая увеличение ρ_c и уменьшение R при подходе к критической массе.

в. *Влияние нейтронизации вещества.* Помимо эффектов ОТО, причиной, ограничивающей максимальную плотность холодных белых карликов, является начинающийся при некоторой плотности обратный β -процесс между стабильными ядрами и электронами, находящимися на краю ферми-распределения (см. § 5 гл. 6):



Нейтрино свободно уходят из звезды. Изолированное ядро $(Z - 1, A)$ неустойчиво, оно испытывает β -распад:



Однако, как подробно рассмотрено в § 5 гл. 6, в звезде при рассматриваемой плотности последний процесс идти не может, так как ядра

погружены в вырожденный электронный газ и все ячейки фазового пространства, соответствующие импульсу рождающегося электрона, уже заняты; электрон породиться не может.

Обратный β -процесс ведет к уменьшению общего числа электронов на грамм вещества и увеличению числа нейтронов в ядрах. Возможность образования нейтронных конфигураций была указана в работах Бааде и Цвикки (1934), Хунда (1936), Стерна (1933) и рассчитана Ландау (1938).

Как повлияет на строение звезды фазовый переход, связанный с нейтронизацией? При рассмотрении моделей холодных звезд со все большей центральной плотностью ρ_c , после достижения ρ_c критического значения начала нейтронизации в центре образуется ядрышко — сфера с веществом из ядер (Z_2, A_2) , в то время как вся остальная звезда состоит из ядер (Z_1, A_1) . Давление в ядре меньше, чем было бы, если бы не произошел фазовый переход. Таким образом, эффективная γ для звезды уменьшается из-за фазового перехода. Достаточно ли это уменьшение, чтобы сделать звезду неустойчивой? В работе Рамзая (1950) (в связи с теорией планет) показано, что на энергетических кривых при $\rho_c = \rho_{кр}$ сразу же появится излом, такой, что нарушается устойчивость звезды при $\rho_{кр}$, если при фазовом переходе скачок плотности достаточно велик:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{A_2 Z_1}{A_1 Z_2} > 1,5.$$

Если же скачок меньше (что имеет место, например, для реакции $Fe - Cr$), то с повышением плотности звезда еще обладает устойчивостью. Однако с повышением плотности ρ_c растет размер ядра с другой фазой, кроме того, должна произойти дальнейшая цепочка обратных β -процессов между электронами и ядрами, что неизбежно приведет к загибу энергетических кривых вниз, т. е. к потере устойчивости [см. Сеидов (1967)].

В таблице IX дается критическая плотность начала нейтронизации $\rho_{нейтр}$ для ряда элементов и критические значения, определяемые эффектами ОТО и максимальной центральной плотностью звезды, состоящей целиком из данного химического элемента (формула (10.4.7)). Как правило, $\rho_{нейтр} < \rho_{OTO}$.

Начало нейтронизации в центре звезды, как мы видели, еще не означает потери устойчивости, которая наступает при несколько больших плотностях. Тем не менее устойчивость из-за нейтронизации теряется, по-видимому, при плотностях, лишь немногим превышающих начальное значение, данное в табл. IX. Точно рассчитать это довольно сложно из-за того, что нужно сразу рассматривать несколько реакций. По-видимому, предел устойчивости белых карликов сильнее зависит от нейтронизации, а не от эффектов ОТО. Именно нейтронизация вызывает загиб кривых $E(\rho_c)$

Таблица IX

**Сравнение критических плотностей, определяемых эффектами
нейтронизации и эффектами ОТО для звезд из разных
химических элементов**

Элемент	Потенциал нейтронизации, $M_{\text{эв}}$	Критическая плотность нейтронизации, $\rho/10^9 \text{ г/см}^3$	Максимальная центральная плотность за счет ОТО, $\rho/10^9 \text{ г/см}^2$
${}^{26}\text{Fe}^{56} \rightarrow {}^{25}\text{Mn}^{56}$	3,7	1,15	31,3
${}^{16}\text{S}^{32} \rightarrow {}^{15}\text{P}^{32}$	1,7	0,145	27
${}^{14}\text{Si}^{28} \rightarrow {}^{13}\text{Al}^{28}$	4,6	1,92	27
${}^{12}\text{Mg}^{24} \rightarrow {}^{11}\text{Na}^{24}$	5,5	3,15	27
${}^{10}\text{Ne}^{20} \rightarrow {}^9\text{Fe}^{20}$	7,03	6,2	27
${}^8\text{O}^{16} \rightarrow {}^7\text{N}^{16}$	10,4	19	27
${}^6\text{C}^{12} \rightarrow {}^5\text{B}^{12}$	13,37	39	27
${}^2\text{He}^4 \rightarrow {}^1\text{H}^3 + {}^0n^1$	20,6	132	27
${}^2\text{He}^3 \rightarrow {}^1\text{H}^3$	0,018	$2,8 \cdot 10^{-5}$	15,2

вниз, и она же является причиной перехода от рис. 36 к рис. 37. Исключение представляют легкие ядра и особенно He^4 . Однако легкие ядра в звездах при большой плотности существовать не будут. Это связано с тем, что подобные плотности достигаются только на конечных стадиях эволюции, когда легкие ядра в процессе термоядерной реакции, идущей на более ранних этапах эволюции, уже превратились в тяжелые. По расчетам Эпика (1957) [см. Хаяши (1966)] белые карлики с $M < 0,5 M_{\odot}$ должны состоять главным образом из элементов среднего атомного веса ($A \approx 24$).

Неопределенность точного значения $\rho_{\text{кр}}$, а также химического состава мало влияет на максимальное значение $M_{\text{мах}}$, соответствующее $\rho_{\text{кр}}$, ибо кривая $M = M(\rho_{\text{с}})$ ньютоновской теории, построенная без всяких поправок, при значениях $\rho \approx 10^9 \div 10^{10} \text{ г/см}^3$ уже выходит на свое асимптотическое значение, равное чандрасекаровскому пределу.

Максимальная масса, согласно работам Уилера (1964), Хамады и Сальпетера (1961), Саакяна и Вартаняна (1964) равна примерно $1,2 M_{\odot}$ (рис. 39). Этот результат получен путем численного интегрирования уравнения равновесия (10.1.2) с учетом изменения уравнения состояния при переходе от плотных недр звезды к менее плотной ее поверхности. Если рассматривать звезду, состоящую из вещества, химический состав которого определяется ядрами, существование которых энергетически наиболее выгодно (см. § 5 гл. 6), то $M_{\text{мах}}$ может понизиться до $1 M_{\odot}$. Но, как подчеркивалось в § 5 гл. 6, полный катализ холодного вещества не может пройти за разумное астрономическое время.

Поэтому, например, если звезда состоит из Mg^{24} и дальнейшие ядерные реакции не идут за приемлемое время), то $M_{\max} \approx 1,3 M_{\odot}$.

До сих пор мы не учитывали вращение звезды. Твердотельное вращение несущественно меняет критическую массу и плотность

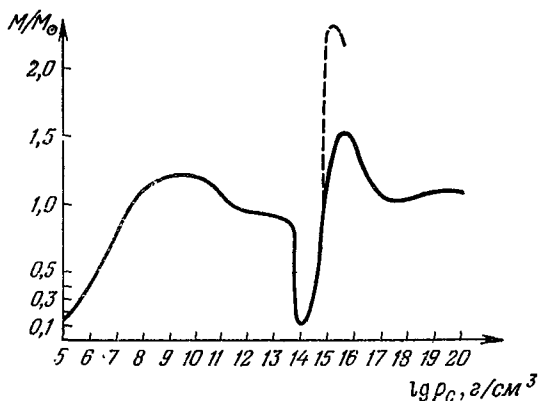


Рис. 39. Зависимость массы холодной звезды от плотности в центре. Сплошная линия — данные Саакяна и Вартаняна (1964), пунктир — данные Камерона (1970) для нейтронных звезд.

белого карлика [см. Крат (1950)]. Однако дифференциальное вращение может внести существенные изменения (см. Острикер и др., 1968).

На ниспадающей ветви $M = M(\rho_c)$ равновесные решения, соответствующие максимумам энергетических кривых, неустойчивы.

ПРИЛОЖЕНИЕ I К § 4

Выведем значение энергии звезды, давление в которой определяется релятивистски вырожденным электронным газом при $\rho \rightarrow \infty$.

Выпишем формулу (6.2.11) средней энергии электрона

$$E_e = \bar{E} - E_0 = m_e c^2 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/3} - 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \right], \quad \rho_0 = \mu_e \cdot 10^6.$$

Переходя к энергии на грамм вещества, получаем выражение

$$E_1 = \frac{E_e}{m_p \mu_e} = \frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/3} - 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \right].$$

После подстановки этого выражения в уравнение равновесия, переходя к пределу при $\rho \rightarrow \infty$, $\gamma = 4/3$, получаем, что последнее слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю, первое сокращается со слагаемым гравитационной энергии звезды, и остаток дает для энергии звезды на единицу массы

$$E_2 = - \frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e} \text{ эрг/г.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II К § 4

Поправки на ОТО. Дадим вначале выражения поправки в энергии данной произвольной конфигурации вещества, не соответствующей, вообще говоря, равновесию. Вещество считаем в данный момент покоящимся, т. е. мгновенная скорость равна нулю, однако мгновенное ускорение, вообще говоря, не равно нулю, поскольку нет равновесия.

Следует учитывать зависимость плотности массы от энергии. Плотность массы покоя обозначим ρ_0 , плотность, включающую энергию, ρ , $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{E_1}{c^2}\right)$, где E_1 — удельная энергия (сверх массы покоя) на единицу массы покоя.

Следует учитывать неевклидовость пространства (см. § 3 гл. 3):

$$dV = e^{\lambda/2} 4\pi r^2 dr, \quad V = 4\pi \int_0^r e^{\lambda/2} r^2 dr > \frac{4}{3} \pi r^3,$$

где под r понимается такой «координатный» радиус, что длина большого круга есть $2\pi r$, поверхность сферы $4\pi r^2$. Инвариантной характеристикой конфигурации, занятой данным общим числом барионов, является функция $\rho_0(V)$, где V — текущий объем. Равновесие соответствует экстремуму наблюдаемой массы звезды

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr$$

при данной массе покоя (т. е. при данном числе барионов)

$$M_0 = \int_0^R \rho_0(V) dV$$

и при данной энтропии, которой определяется зависимость

$$E_1 = E_1(S, \rho_0).$$

Отсчитывая энергию от массы покоя звезды, получаем

$$E = c^2 (M - M_0) = c^2 \int_0^R (\rho e^{-\lambda/2} - \rho_0) dV.$$

Это выражение необходимо сравнить с ньютоновским

$$E_H = \int E_1 \rho_0 dV - G \int \frac{m' dm'}{r'},$$

где m' — текущая «ньютоновская» масса (вычисленная без поправок на зависимость массы от энергии), r' — «ньютоновский» или евклидов радиус

$$dm' = \rho_0 dV; \quad m' = \int_0^V \rho_0 dV; \quad r' = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V}.$$

Рассматриваем такую постановку задачи: пусть функция $\rho_0(V)$ одинакова в ньютоновской теории и в теории относительности. Поправкой на ОТО называем разность $\Delta E = E - E_N$ и вычисляем первый исчезающий член в разложении по степеням G . Очевидно, что безразмерным параметром является

$$\frac{r_g}{R} \sim \frac{GM}{Rc^2} \sim GM^{2/3} \rho_c^{1/3} c^{-2}.$$

Отношение $\frac{E_1}{c^2} \sim \frac{P}{\rho c^2}$ того же порядка, что и r_g/R ; члены первого порядка по G уже учтены в ньютоновском приближении.

Используем единственное соотношение, не требующее равновесия:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm}{rc^2}, \quad e^{-\lambda/2} = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{Gm}{rc^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Gm}{rc^2}\right)^2.$$

с нужной точностью получим *)

$$\Delta E = \int dV \left[-E_1 \rho_0 \frac{Gm}{c^2 r} - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{G^2 m^2}{c^2 r^2} + \rho_0 G \left(\frac{m'}{r'} - \frac{m}{r} \right) \right], \quad (10.4.1п)$$

$$\frac{m'}{r'} - \frac{m}{r} = \frac{m' - m}{r'} - \frac{m(r' - r)}{rr'}, \quad (10.4.2п)$$

$$m' - m = -\frac{1}{c^2} \int E_1 \rho_0 dV + \frac{G}{c^2} \int \frac{\rho_0 m}{r} dV, \quad (10.4.3п)$$

$$r' - r = \frac{G}{r^2 c^2} \int m r dr. \quad (10.4.4п)$$

Используя эти соотношения, окончательно получим поправку в виде суммы пяти интегралов, в которых можно везде отождествлять плотность, объем, радиус с соответствующими ньютоново-евклидовыми величинами, а ошибка от этого будет высшего порядка малости:

$$\Delta E = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

$$I_1 = -\frac{G}{c^2} \int E_1 \frac{m}{r} dm, \quad I_2 = -\frac{1}{2} \frac{G^2}{c^2} \int \frac{m^2 dm}{r^2},$$

$$I_3 = -\frac{G}{c^2} \int \left(\int E_1 dm \right) \frac{1}{r} dm, \quad I_4 = +\frac{G^2}{c^2} \int \left(\int \frac{m}{r} dm \right) \frac{dm}{r},$$

$$I_5 = -\frac{G^2}{c^2} \int \left(\int m r dr \right) \frac{m}{r^4} dm.$$

Интегралы берутся по всей массе звезды, а внутренние интегралы в I_3 , I_4 и I_5 от центра до текущего m или r . Они расположены в том порядке, который естественно следует из формул (10.4.1п) — (10.4.4п). Это выражение для ΔE существенно упрощается, применительно к равновесному распределению газа с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$, т. е. при учете

$$E_1 = \frac{3P}{\rho}, \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}.$$

В этом случае, после нескольких интегрирований по частям, получим $I_3 + I_4 = -\frac{2}{3} I_1 + 2 I_2$, $I_5 = \frac{1}{3} I_1$ и окончательно $\Delta E = \frac{2}{3} I_1 + 3 I_2$. Это выражение в точности совпадает со взятой с обратным знаком поправкой Фаулера (1964), полученной им в теории сверхмассивных звезд (заметим, что Фаулер

*) В (10.4.2п) — (10.4.4п) сравниваем r' и r , m' и m при равном V .

рассматривал равновесную конфигурацию):

$$\Delta E = -\Delta E_e.$$

Используя теперь функцию Эмдена с $n = 3$ для вычисления интегралов, получаем окончательно

$$\Delta E_{\text{ото}} = -0,93 \frac{G^2 M^{7/2} \rho_e^{2/3}}{c^2}.$$

§ 5. Нейтронные звезды

Проследим за дальнейшим изменением M с повышением ρ_c .

В главе 6 показано, что с повышением плотности в веществе появляются свободные нейтроны. При $\rho > 10^{12} \text{ г/см}^3$ давление (так же как и плотность) в основном определяется вырожденным нейтронным газом. Если бы нейтроны не взаимодействовали между собой, то этот газ был бы идеальным и, пока газ еще нерелятивистский, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$ (и всегда $\gamma > 4/3$). Однако известно, что между нейтронами существуют ядерные силы притяжения, и хотя эти силы недостаточны для образования ядер, состоящих из нейтронов, все же они вносят отрицательный вклад в энергию и γ по-прежнему меньше $4/3$. Равновесные состояния неустойчивы, и кривая $M = M(\rho)$ продолжает идти вниз (см. рис. 39).

На малых расстояниях между барионами силы притяжения должны смениться силами отталкивания, которые вносят положительный вклад в давление и поэтому при $\rho \sim 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ эффективная для всей звезды γ вновь становится более $4/3$.

Таким образом, минимального значения масса M достигает при $\rho_c \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$. Можно оценить это M_{\min} , найдя давление при $\rho_c = 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ по формуле (6.6.1) и подставив это значение в (10.4.1) с $b \approx 3$:

$$M_{\min} \approx 0,05 M_{\odot}.$$

Напоминаем, что это только порядковая оценка, ибо в действительности звезда не может целиком состоять из нейтронов. В центральных областях звезда имеет состав, описанный в гл. 6. При $M > 0,3 M_{\odot}$, согласно Камерону (1970), в центральных областях в составе вещества имеются уже и гипероны. В областях, лежащих ближе к поверхности звезды, давление недостаточно для существования стабильных нейтронов и внешняя оболочка состоит из ядер и электронов. За деталями расчетов отсылаем к одной из первых работ Саакяна и Вартапяна (1964), более современные данные можно найти в обзоре Камерона (1970). Самая внешняя корка, возможно, даже кристаллическая (см. Камерон, 1970).

Сделаем замечание о равновесных решениях с положительной энергией звезды. На рис. 37 они соответствуют максимумам в области $E > 0$. Их появление связано с тем, что учет нейтрониза-

ции привел к появлению экстремума (максимума) там, где его раньше не было, но энергия, конечно, и без поправки была положительной. Такие решения, очевидно, неустойчивы и энергетически возможно полное рассеяние на бесконечность вещества, находившегося в состоянии звезды с положительной энергией.

Посмотрим теперь, как изображаются звездные конфигурации, отвечающие нейтронным звездам на диаграмме $\rho_c \div E$. При высоких плотностях порядка ядерных между барионами возникают мощные силы отталкивания, которые ведут к тому, что кривые $E(\rho_c, M)$ загибаются вверх (рис. 40). На кривых $E(\rho_c)$ с $M > M_{\min} = 0,05 M_\odot$ появляются вторичные минимумы, которые отвечают устойчивым звездным конфигурациям. Это — нейтронные звезды. Соответствующая кривая $M = M(\rho_c)$ равновесных звезд показана на рис. 39. Кривые $E(\rho_c, M)$, имеющие вторичные минимумы, ограничены сверху кривой с минимальной массой $M_{\min} = 0,05 M_\odot$. Для меньших масс равновесных конфигураций при большой плотности не существует.

Расчеты с приближенным уравнением состояния показывают (см. далее § 8 гл. 10), что для малых масс вторичные минимумы лежат в области положительной энергии [см. работу Бисноватого-Когана и Зельдовича (1966)]. Они соответствуют устойчивым состояниям.

Выше уже обращалось внимание на то, что равновесные состояния (неустойчивые) с положительной энергией возникают для звезд из неидеального газа практически без эффектов общей теории относительности; в этом нет ничего странного и необычного. Здесь мы видим, что также практически без всякого вмешательства ОТО могут возникнуть и устойчивые относительно малых возмущений метастабильные состояния с положительной энергией.

С дальнейшим ростом плотности определяющими уже становятся эффекты ОТО, которые снова загибают кривые $E(\rho_c, M)$ вниз (рис. 41), что ведет, как уже показано в § 4 гл. 10, для меньших плотностей к появлению перегиба, а затем максимума на кривых $E(\rho_c, M)$ и соответственно к появлению вторичного максимума на кривой $M = M(\rho_c)$. Остановимся несколько подробнее на причинах появления вторичного максимума на кривой $M = M(\rho_c)$. Первичная причина вскользь упомянута в конце п. «б» § 4 гл. 10 и кратко выражается словами «энергия весит». В случае статиче-
ских законов сохранения в ОТО являются уравнениями равновесия.

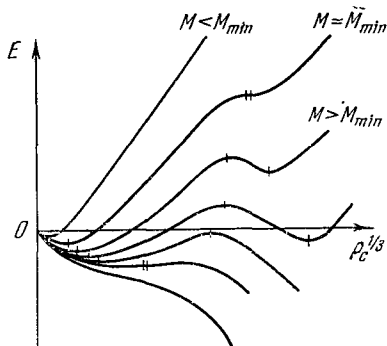


Рис. 40. Энергетические кривые для холодной звезды, построенные с учетом упругости ядерной жидкости.

Уравнение равновесия для сферического поля имеет вид

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{dv}{dr} (P + \rho c^2), \quad (10.5.1)$$

где метрика записывается в виде, указанном в § 3 гл. 3, ρ — плотность массы, P — давление. Альтернативную форму уравнения гидростатического равновесия дает уравнение (10.3.11).

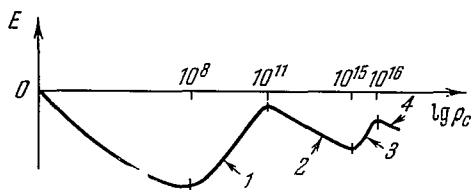


Рис. 41. Типичная энергетическая кривая для шара фиксированной массы. Изменение хода кривой при разных плотностях определяется упругостью вырожденных электронов (1), нейтронизацией вещества (2), упругостью ядерной жидкости (3), эффектами ОТО (4).

Из выражения (10.5.1) видно, что в уравнение равновесия входит плотность массы ρ и давление P .

При больших плотностях главный вклад в плотность энергии (а следовательно, и в плотность массы) вносит уже не энергия покоя частиц, а энергия их движения и взаимодействия. Обозначим плотность барионов через n ;

показателем адиабаты γ_1 назовем $\frac{d \ln P}{d \ln n}$. Определенная таким образом γ_1 для вырожденного газа всегда больше $4/3$ и, в принципе, для отталкивающихся частиц может достигнуть значения $\gamma_1 = 2$ (Зельдович, 1961), как это подробно показано в § 12, гл. 6.

Однако в уравнение равновесия входит не n , а плотность массы ρ и давление P . В силу отмеченного выше обстоятельства асимптотический вид уравнения состояния имеет вид $P \sim \rho$, поэтому эффективная $\gamma_2 = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ становится меньше $4/3$ и в пределе $\gamma_2 \rightarrow 1$.

На рис. 42 представлены графики γ_1 и γ_2 для идеального газа нейтронов. Смена $\gamma_2 > 4/3$ на $\gamma_2 < 4/3$, как показано в предыдущих параграфах, ведет к появлению максимума $M(\rho_c)$. Таким образом, учет «веса энергии» уже в теории с ньютоновским законом тяготения в плоском евклидовом пространстве приводит к появлению максимума $M(\rho_c)$ [(см. работы Саакяна (1962) и Гусейнова (1965))].

Другая причина состоит в том, что в эйнштейновской теории при больших Φ меняется закон тяготения и пространство перестает быть евклидовым, о чем подробно говорилось в § 2 и 3 гл. 3.

Оба рассмотренных эффекта одного порядка и действуют в одну сторону. Численно, как малые поправки, они рассмотрены в предыдущем параграфе (приложение II).

Первые численные расчеты строения сверхплотных звезд были проделаны в классической работе Оппенгеймера и Волкова (1938) с использованием уравнения состояния идеального ферми-

газа (вырожденный нейтронный газ). Данные их расчетов приведены на рис. 43 (кривая для M ; о кривых M_0 и M_1 см. § 6). $M_{\max} = 0,72 M_{\odot}$.

Однако уравнение состояния идеального газа при подобных плотностях является только грубым приближением (см. гл. 6). Работы Камерона (1959а, б), Саакяна и Вартаняна (1964), Камерона (1970) с уравнением состояния реального газа дают значения

$$M_{\max} = (1,6 \div 2,4) M_{\odot}.$$

На рис. 39 приведена кривая $M = M(\rho)$ по данным Саакяна и Вартаняна (1964); она охватывает область плотностей, отвечающих белым карликам, и область нейтронных звезд [см. также работу Инмана (1965)]. Таблицу Коэна, Камерона (1971) см. § 7 гл. 13.

Конечно, в расчетах учтено изменение уравнения состояния при переходе от плотных недр звезды к ее оболочке.

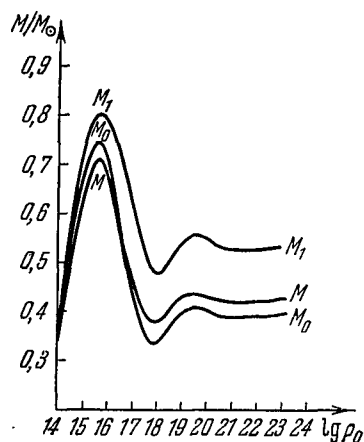


Рис. 43. M , M_0 , M_1 как функции ρ_c для холодного идеального ферми-газа нейтронов.

Будем называть максимум массы для звезд при $\rho \approx 10^{15} \text{ г/см}^3$ ОВ-максимумом (Оппенгеймер, Волков) $M_{\max}^{\text{ОВ}}$, в отличие от

*) Леунг и Ванг (1971) указывают, что возможно для нейтронных звезд $M_{\max} \approx 0,5 M_{\odot}$.

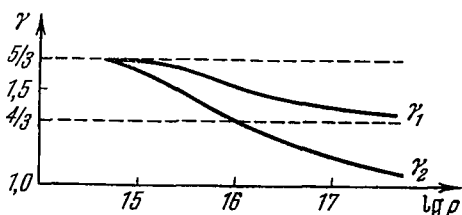


Рис. 42. Зависимость $\gamma_1 = \frac{d \ln P}{d \ln n}$ и $\gamma_2 = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ от плотности ρ для идеального холодного газа нейтронов.

Для демонстрации неопределенности кривой для нейтронных звезд, являющейся следствием неопределенности наших знаний об уравнении состояния вещества при плотностях порядка ядерной, на рис. 39 пунктиром нанесена кривая из работы Камерона (1970)*. Любопытно, что в области больших плотностей за максимумом, где уже не могут находиться реальные равновесные холодные звезды, полная масса равновесной звезды, как впервые показали Дмитриев и Холин (1963), испытывает периодическую зависимость от ρ_c , когда $\rho_c \rightarrow \infty$ (см. рис. 43). Позже (и независимо) эту работу повторили другие. Подробнее см. оригинальную работу и книгу Уилера, Гаррисона, Вакано, Торна (1967).

чандрасекаровского максимума, имеющего место при ρ порядка 10^9 г/см^3 . На поверхности звезды с $M = M_{\text{max}}^{\text{ОВ}}$, e^ν принимает минимальное возможное для поверхности звезд значение. Минимальное значение $e_{\text{min}}^{\nu/2} \approx 0,7$. Следовательно, максимальное, гравитационное красное смещение, которое можно в принципе наблюдать в спектре звезды, есть

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_\gamma = e_{\text{min}}^{\nu/2} \approx 1,4. \quad (10.5.2)$$

Источники нейтрино расположены в центре звезды. Гравитационное красное смещение для нейтрино определяется значением e^ν в центре. Это значение у рассматриваемой звезды $e_{\text{min}}^{\nu/2} \approx 0,4$. Следовательно, для нейтрино максимальное гравитационное изменение частоты

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_\nu = e_{\text{min},0}^{\nu/2} \approx 2,5. \quad (10.5.3)$$

На рис. 44 для двух звезд с $\rho_c = 5,5 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$

и $3,6 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$ и с массами соответственно $0,64 M_\odot$ и $M_{\text{max}}^{\text{ОВ}} = 1,55 M_\odot$ изображены графики $e^{\nu/2}$ и $e^{\lambda/2}$. График $e^{\lambda/2}$ характеризует отклонение геометрии пространства от евклидовой вблизи звезды и внутри ее. Координатный радиус для этих звезд $R = r_{\text{пов}} = \sqrt{s/4\pi}$ (где s — площадь поверхности звезды) равен соответственно 13 км и 9,3 см. Расстояние от центра

$$\tilde{R} = \int_0^{r_{\text{пов}}} e^{\lambda/2} dr$$

равно соответственно 13,8 и 11,5 км [(данные Саакяна и Вартаняна (1964)].

В связи с этими рисунками еще раз напомним, что величина $e^{\nu/2}$ аналогична ньютоновскому потенциалу. Она непосредственно показывает замедление темпа течения времени по сравнению со временем на бесконечности. В отличие от $e^{\lambda/2}$, значение $e^{\nu/2}$ не стремится к единице в центре звезды.

Разумеется, это связано с условием нормировки: мы выбирали временную координату t так, чтобы она на бесконечности все вре-

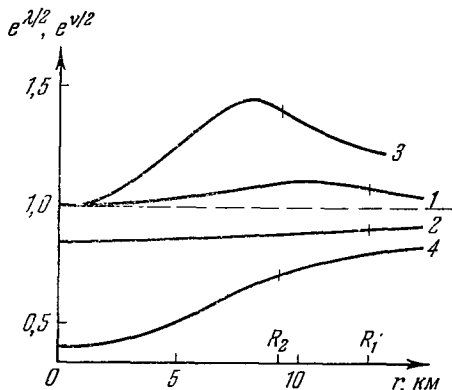


Рис. 44. Зависимость $e^{\lambda/2}$ и $e^{\nu/2}$ от r для звезд с $M_1 = 0,64 M_\odot$ и $M_2 = 1,55 M_\odot$; 1 — $e_{M_1}^{\lambda/2}$, 2 — $e_{M_1}^{\nu/2}$; 3 — $e_{M_2}^{\lambda/2}$; 4 — $e_{M_2}^{\nu/2}$. Радиусы R_1 и R_2 соответствуют поверхности звезд. [По Саакяну, Вартаняну (1964)].

мя совпадала с показаниями часов наблюдателя; поэтому $(e^{v/2})_{\infty} = 1$, а $e^{v/2}$ в центре звезды во столько раз меньше $(e^{v/2})_{\infty}$, во сколько раз темп течения времени в центре звезды меньше, чем на бесконечности.

§ 6. Дефект массы

Запишем выражение полной энергии звезды E для того случая, когда плотности малы и применима теория Ньютона

$$E = E_0 + W + U.$$

Мы включили в это выражение $E_0 = N \cdot mc^2$ энергию покоя нуклонов, составляющих звезду; W — энергия движения и взаимодействия нуклонов, U — потенциальная энергия взаимного тяготения. Последнее слагаемое отрицательно. Обозначим $E_0 + W = \mathcal{E}_1$; в релятивистской области имеем соответственно:

$$E = Mc^2 = 4\pi c^2 \int_0^R \rho r^2 dr, \quad (10.6.1)$$

$$E_0 = M_0 c^2 = c^2 \int_V m ndV = Nmc^2, \quad (10.6.2)$$

$$\mathcal{E}_1 = M_1 c^2 = c^2 \int_V \rho dV, \quad (10.6.3)$$

где элемент объема $dV = 4\pi e^{\lambda/2} r^2 dr$.

На рис. 43 приведены графики M , M_0 и M_1 как функции от ρ_c . Вычисления сделаны для случая идеального вырожденного нейтрального газа.

Напомним, что плотность массы ρ , измеренная локально, включает не только массу покоя, но и внутреннюю энергию движения нуклонов и энергию взаимодействия (кроме гравитационного!) частиц в 1 см^3 . Полная масса звезды M не равна сумме масс элементов ее объема M_1 и так как $e^{\lambda/2} \geq 1$, то

$$M < M_1.$$

Разность $\Delta_1 M = M_1 - M$ назовем *полным гравитационным дефектом массы*. Происхождение $\Delta_1 M$ очевидно: объединяя элементы массы $dm = \rho dV$ (уже имеющие заданную плотность ρ) в звезду, мы должны учесть энергию гравитационного взаимодействия между этими элементами. Эта энергия связи, не учитываемая в (10.6.3), в отличие от (10.6.1), и соответствующая ей масса — отрицательны, поэтому $\Delta_1 M > 0$. В ньютоновском приближении $c^2 \Delta_1 M = -U$. Отношение (в общем случае, а не только в ньютоновском приближении)

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1 M}{M}$$

называют коэффициентом гравитационной упаковки. Он характеризует отношение гравитационной энергии к полной. На рис. 45

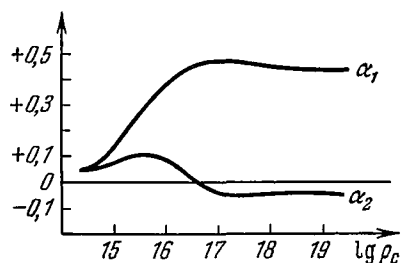


Рис. 45. Зависимость $\alpha_1 = \frac{\Delta_1 M}{M}$ и $\alpha_2 = \frac{\Delta_2 M}{M_0}$ от плотности ρ_c в центре звезды.

фузного вещества плотной звезды. Из физики этого процесса ясно, что для устойчивой стационарной звезды, возникшей из диффузного вещества*), $\Delta_2 M > 0$.

В ньютоновском приближении $c^2 \Delta_2 M = -(W + U)$. Отношение

$$\alpha_2 = \frac{\Delta_2 M}{M_0}$$

показывает (в общем случае, а не только в ньютоновском приближении) полную долю энергии, выделившейся при образовании звезды. График $\alpha_2(\rho_c)$, вычисленный для звезд из реального газа по данным Саакяна и Вартаняна (1964), приведен на рис. 45. Для больших плотностей α_2 становится отрицательным. Об этом см. § 7 гл. 10. См. табл. § 7 гл. 13.

Гравитационный дефект массы иногда неправильно называют экранировкой тяготения. Такое название не отражает суть дела, потому что рассматриваемое явление совсем не похоже на действие экрана. Действительно, соединяя, например, две частицы, мы

приведена зависимость α_1 от ρ_c для звезд, состоящих из реального газа, согласно работе Саакяна и Вартаняна (1964). Для малых ρ_c значение α_1 мало и стремится к нулю при $\rho_c \rightarrow 0$. Для наиболее плотных конфигураций $\alpha_1 \approx 0,5$.

Разность $\Delta_2 M = M_0 - M = N m - M$ носит название *неполного* или просто *дефекта массы*. Энергия, соответствующая $\Delta_2 M$, есть как раз та энергия, которая выделяется при образовании из первоначально разреженного диф-

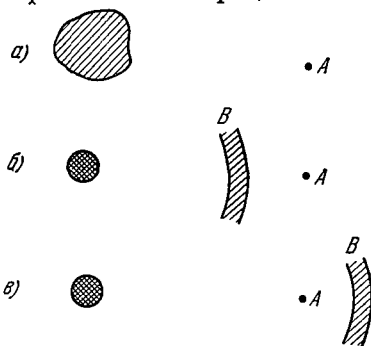


Рис. 46. Изменение массы вещества, измеряемой наблюдателем в А при образовании плотной звезды: а) диффузное вещество до сжатия в звезду; б) вещество сжалось; высвеченная энергия (область В) еще не прошла наблюдателя; последний не обнаруживает уменьшения массы тела; в) волна высвеченной энергии прошла наблюдателя. Он отмечает уменьшение массы тела на ΔM .

*) Здесь мы рассматриваем дефект массы только для статических конфигураций. Если отказаться от требования статичности, то полная масса M заданного числа нуклонов в принципе может быть сколько угодно мала (см. § 9 гл. 10). В частности, M для замкнутой космологической модели равна нулю [см. Ландау, Лифшиц (1967)].

получаем массу системы меньше суммы масс частиц; но, во-первых, это ослабление тяготения не имеет какой-либо направленности (что должно бы быть, если вторая частица являлась бы действительно экраном), во-вторых, любые силы связи обладают тем же свойством уменьшать суммарную массу частиц и гравитация в этом отношении не исключение. Действительно, масса дейтона меньше суммы масс протона и нейтрона, но мы, конечно, не станем на этом основании говорить, что, скажем, нейтрон гравитационно экранирует протон.

При соединении частиц в связанную систему энергия, равная дефекту массы, высвечивается в виде квантов либо нейтрино либо гравитационных волн и т. п. Далекий наблюдатель обнаружит дефект массы — уменьшение массы — не в момент соединения частиц, а после того как высвеченная энергия пройдет мимо него (рис. 46). До этого момента любые трансформации энергии никак не сказываются на измеряемой наблюдателем массе звезды (разумеется, это прямое следствие закона сохранения энергии).

§ 7. Устойчивость нейтронных звезд

Устойчивое равновесие означает минимум энергии звезды при данной энтропии в числе частиц. Изложенная в § 3 гл. 10 теория устойчивости, в которой энергия рассматривалась как функция одного параметра ρ_c , является асимптотически точной только в области применимости ньютоновской теории, когда $\gamma \rightarrow 4/3$ и поправки на ОТО малы. Вариационный принцип в ОТО подробно рассмотрен в работах Чандрасекара (1964а, b; 1965) и Уилера, Гаррисона, Вакано и Торна (1967); обзор см. в гл. 4 работы Торна (1967с). Мы здесь приведем другое доказательство (Зельдович, 1963а), справедливое и в релятивистской области, и в ньютоновской, но которое приспособлено для холодных звезд. (Его можно легко обобщить на случай горячих изоэнтропических звезд.)

Прежде всего рассмотрим, как меняется масса равновесной звезды при добавлении к ней одной частицы, приносимой на радиус r из бесконечности, где ее энергия равнялась mc^2 . Иными словами, найдем $\frac{dM}{dN}$. Энергия такой частицы, свободно падающей в поле тяготения по радиусу r , достигает величины *)

$$E = mc^2 e^{-\frac{v(r)}{2}}. \quad (10.7.1)$$

*) Энергия измеряется локальным наблюдателем и не включает потенциальную энергию частицы в поле тяготения. Полная энергия частицы, разумеется, не меняется при падении (излучение гравитационных волн не учитывается, так как оно стремится к нулю как $(m/M)^2$ при $m/M \rightarrow 0$, т. е. при рассмотрении пробной частицы малой массы).

Разность $E(r) - \mu(r)$ (где $\mu(r)$ — химический потенциал частиц холодной звезды) высвечивается, например, γ -квантами. Вследствие потери энергии γ -квантов из-за гравитационного красного смещения (см. § 4 гл. 3) на бесконечность уходит энергия

$$\Delta E = (E - \mu) e^{\nu/2}. \quad (10.7.2)$$

С другой стороны, из уравнения равновесия следует для холодной звезды

$$\mu(r) e^{\frac{\nu(r)}{2}} = \text{const} = mc^2 e^{\frac{\nu(R)}{2}}. \quad (10.7.3)$$

Из (10.7.2) — (10.7.3) следует

$$\frac{dM}{dN} = m e^{\frac{\nu(R)}{2}} = \text{const}.$$

Изменение M не зависит от того, в какое место равновесной звезды добавлена частица. Заметим, что в силу (10.7.2) и (10.7.3) всегда

$$\frac{dM}{dN} < m. \quad (10.7.4)$$

Независимость $\frac{dM}{dN}$ от места, в которое добавлена частица, означает, что если мы зададим возмущение распределения частиц $\delta n(r)$, не меняя их полного числа, т. е. так, что $\delta N = 0$, то в первом порядке и $\delta M = 0$, т. е. $\left. \frac{\delta M}{\delta n} \right|_{N=\text{const}} = 0$. Это как раз означает, что состояние равновесия соответствует экстремуму массы, т. е. экстремуму полной энергии системы. Если этот экстремум является минимумом, то это означает устойчивость состояния. Рассмотрим участок кривой $M = M(\rho_c)$, близкий к экстремуму $M_{\text{вкс}}$ (см. рис. 43). Из выражения (10.7.4) следует, что при том же значении $\rho_c = \rho_{\text{кр}}$, при котором имеет место экстремум $M(\rho_c)$, достигается экстремум $N(\rho_c)$ (экстремум кривой $M_0(\rho_c)$ на рис. 43).

Следовательно, слева и справа от $\rho_{\text{кр}}$ можно выбрать две различные стационарные звездные модели с разными ρ_{c1} и ρ_{c2} , но с одинаковым N . Тогда решение для одной из этих моделей можно представить как возмущенное решение другой модели:

$$\rho_2(r) = \rho_1(r) + \delta\rho. \quad (10.7.5)$$

В самом общем случае решение для малых возмущений можно разложить в ряд по собственным функциям линеаризованной задачи. В этом ряду зависимость i -й гармоники от времени дается выражением

$$\delta\rho_i = \varphi_i(r) e^{\omega_i t}. \quad (10.7.6)$$

Для нашего частного возмущения $\delta\rho$, переводящего стационарное решение ρ_1 в стационарное же решение ρ_2 , естественно, $\delta\rho$ не зависит от времени, следовательно, $\omega_1 = 0$ *).

Таким образом, в экстремуме кривой $M(\rho_c)$

$$\omega_1 = \omega_1^2 = 0.$$

Очевидно, случай с $\omega_1^2 = 0$ лежит на границе между $\omega_1^2 < 0$, где ω_1 — мнимое, и $\omega_1^2 > 0$, где ω_1 вещественно. Если все $\omega_i^2 < 0$, то решение устойчиво, появление положительного ω_1^2 означает возникновение неустойчивости. Эти соображения одинаково применимы как для модели звезды, построенной с учетом ОТО, так и для нерелятивистского случая. Подчеркнем, что мы пока везде рассматривали только малые возмущения.

Рассмотрим теперь устойчивость холодных звезд. В работе Зельдовича (1963а), исходя из принципа максимума энтропии для устойчивой звезды, показано, что в нерелятивистской области точным критерием устойчивости является непересечение функций распределения плотности по звезде для двух звезд близкой массы (см. приложение к § 1 этой главы). Отсюда следует, что на участке кривой $M(\rho_c)$, где $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$, все равновесные модели заведомо

неустойчивы. В области «белых карликов» ($\rho_c < 10^{10}$ г/см³) $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$, и, как хорошо известно, звезды устойчивы (см. § 4 гл. 10). Здесь все $\omega_i^2 < 0$. Переход через чандрасекаровский максимум означает потерю устойчивости звезды по отношению к сжатию в целом (см. § 1 гл. 10), т. е. в первой гармонике; здесь ω_1^2 становится положительным. Заметим, что все остальные $\omega_i^2 < 0$ и звезда обладает конечной упругостью по отношению к изменению формы и распределения плотности вещества. В минимуме $M(\rho_c)$ при $\rho_c \approx 10^{14}$ г/см³ устойчивость звезды восстанавливается; здесь ω_1^2 опять меняет знак, и интуитивно ясно, что по-прежнему все $\omega_i^2 < 0$. В ОВ-максимуме ω_1^2 снова становится положительной. Как показал анализ Дмитриева и Холина (1963), а затем Гаррисона, Торна, Вакано, Уилера (1965), вскоре за ОВ-максимумом при переходе к моделям звезд со все ббльшим ρ_c функции распределения плотности по массе звезды для звезд близкой массы начинают много раз пересекаться. Аналогично ньютоновской теории, это должно означать неустойчивость. При этом не только ω_1^2 , но и более высокие гармоники становятся положительными. Поэтому, хотя при $\rho_c \rightarrow \infty$ мы проходим через неограниченное число максимумов

*) Метод, которым мы здесь воспользовались, систематически развивался в работе Зельдовича и Баренблата (1958).

и минимумов, где знаки некоторых гармоник должны меняться, все равно всегда в решении имеются $\omega_i^2 > 0$ и решения неустойчивы. Таким образом, за ОВ-максимумом все решения неустойчивы. Более строгое доказательство изложенных выше утверждений можно найти в книге Гаррисона, Торна, Вакано, Уилера (1965).

§ 8. О решениях с положительной энергией

В этом параграфе мы снова возвращаемся к вопросу о положительной энергии равновесной звезды. В релятивистской теории, где масса и энергия звезды есть только разное выражение одного и того же свойства, положительность энергии означает, что $\Delta_2 M < 0$.

Для устойчивых звезд, возникших из диффузного вещества, гравитационный дефект массы $\Delta_2 M > 0$. Однако в общем случае нельзя заранее высказать определенное утверждение о знаке

$$\Delta_2 M = 4\pi \int_0^R (mne^{\lambda/2} - \rho) r^2 dr$$

в равновесной конфигурации, ибо,

с одной стороны, $nm < \rho$ благодаря энергии движения и взаимодействия нуклонов, с другой стороны, $e^{\lambda/2} \geq 1$. Вопрос о знаке $\Delta_2 M$ должен решаться конкретным расчетом моделей звезд.

Модели с отрицательным $\Delta_2 M$ заведомо не могут возникнуть путем конденсации диффузного вещества. В принципе это не исключает возможность осуществления такого состояния за счет выделения ядерной энергии: энергетически возможно осуществление состояния, энергия которого меньше энергии разреженного водорода, но больше энергии разреженных, разлетевшихся на бесконечность паров железа. В таком состоянии тело, очевидно, неустойчиво в том смысле, что оно может взорваться и целиком разлететься. Однако чтобы судить о возможности существования такого тела, необходимо исследовать его устойчивость относительно малых возмущений.

Образование тела с положительной энергией в ходе эволюции звезды представляется мало вероятным (хотя это не выходит за рамки физических законов), но тело в неустойчивом состоянии относительно малых возмущений следует считать вообще неспособным к существованию.

Интерес к состоянию с положительной энергией, притом в существенно релятивистской области, при плотности во много раз больше ядерной, Саакян (1965) связал с концепцией Амбарцумяна (1960), согласно которой эволюция идет от сверхплотного состояния к диффузному; состояния с положительной энергией способны взрываться и переходить из плотного состояния в диффузное. Необходимо подчеркнуть, однако, что равновесные состояния с положительной энергией существуют лишь с массой не более $2-3 M_\odot$ и не имеют

отношения к грандиозным взрывам ядер галактик и сверхзвезд. Мы подробно останавливаемся на этом вопросе только потому, что он часто обсуждается в литературе.

Рассмотрим зависимость массы звезды M от числа нуклонов в ней. Во-первых, ясно, что эта кривая выходит из нуля: $N = 0$, $M = 0$. Кроме того, в § 7 гл. 10 показано, что $\frac{dM}{dN} < m$. Отсюда на первый взгляд следует, что всегда $M < N \cdot m$ и $\Delta_2 M > 0$. Однако это не так.

Кривые $M(\rho_c)$ и $N(\rho_c)$ проходят через максимум при одном и том же $\rho_{кр}$, а $\frac{dM}{dN}$ везде конечна и не имеет особенностей (см. § 7 гл. 10). Отсюда следует, что зависимость M от N будет иметь точку возврата, соответствующую общему максимуму M и N . Эта зависимость изображена на рис. 47 по данным Саакяна и Вартаняна (1964) для сверхплотных конфигураций*). Везде на кривой $\frac{dM}{dN} < m$, но имеется участок, где $Nm > M$ и $\Delta_2 M < 0$. Разумеется, эти конфигурации неустойчивы и малые возмущения заставляют звезду сжиматься или расширяться. При разлете массы звезды вещество будет иметь на бесконечности отличную от нуля кинетическую энергию.

Физическая причина того, что $\Delta_2 M < 0$, состоит в следующем. При очень большой плотности энергия движения и отталкивания барионов существенно больше их энергии покоя $\rho > mn$. Поэтому, несмотря на то, что учет отрицательной энергии гравитационного поля несколько снижает это различие, все же

$$\Delta_2 M = \int_V (mn - \rho e^{-\lambda/2}) dV < 0.$$

Учет отрицательной энергии поля описывается $e^{-\lambda/2}$. На рис. 47 видно существование решений с $\Delta_2 M < 0$ для уравнений

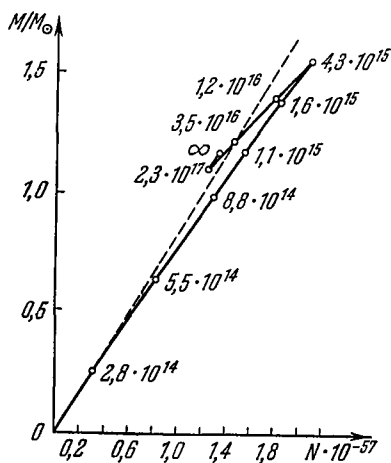


Рис. 47. Зависимость массы холодной звезды от полного числа барионов N . Рядом с кружочками указана плотность звезды в центре. Пунктирная линия — $M = N m_H$.

*) В соответствии с замечанием, сделанным в § 5 этой главы, кривые $M(\rho_c)$ и $N(\rho_c)$ имеют неограниченное число максимумов; при $\rho_c \rightarrow \infty$ амплитуда M и N затухает; соответствующее число точек возврата имеется на кривой $M = M(N)$. На рис. 47 видна еще точка возврата $2,3 \cdot 10^{17}$; следующие не показаны из-за мелкости масштаба.

состояния реального газа. Это видно также на кривой α_2 рис. 45. На рис. 43 кривые M_\odot и M для идеального газа, пересекаются, т. е. и в этом случае $\Delta_2 M < 0$ при $\rho_c \gtrsim 5 \cdot 10^{16}$.

Ясно, что равновесные решения с отрицательной энергией связи должны быть неустойчивы. Более того, устойчивость относительно малых возмущений теряется в точке наибольшей (положительной) энергии связи, поэтому конфигурации с отрицательной энергией связи должны лежать глубоко в области неустойчивости.

В какой степени на эту ситуацию влияют законы ОТО? В простейшем случае нерелятивистской теории для степенного уравнения состояния $P = A\rho^\gamma$ (теория Лейна — Эмдена, ср. § 2) энергия связи пропорциональна $\gamma - 4/3$, т. е. величине, которая определяет устойчивость относительно малых возмущений. В этом случае также существуют решения с отрицательной энергией связи, и они неустойчивы. Отрицательная энергия связи служит критерием неустойчивости относительно определенного типа возмущения — разброса материи звезды на бесконечность. Всегда ли это подразумевает неустойчивость относительно малых возмущений, как предполагалось в нескольких приведенных выше примерах (случаи Оппенгеймера — Волкова, Лейна — Эмдена)? Оказывается, нет, как это показывает следующий контрпример нерелятивистского равновесного решения с отрицательной энергией связи, которое устойчиво относительно малых возмущений. Возьмем «испорченное» уравнение состояния

$$P = A\rho^\gamma, \quad \rho > \rho_*; \quad P = A\rho_*^\gamma \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{1+\xi}, \quad \rho < \rho_*,$$

$$E = \frac{1}{\gamma-1} A\rho^{\gamma-1} + A\rho_*^{\gamma-1} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\gamma-1}\right) = \frac{1}{\gamma-1} A\rho^{\gamma-1} + E_*, \quad \rho > \rho_*,$$

$$E_1 = \frac{1}{\xi} A\rho_*^{\gamma-1} \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^\xi, \quad \rho < \rho_*.$$

Пусть A и γ имеют «нормальные» значения с $\gamma > 4/3$. Возьмем теперь предельный случай этого уравнения состояния, который получается, когда ξ и ρ_* стремятся к нулю, но так, что $E_* = A\rho_*^{\gamma-1} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\gamma-1}\right]$ остается конечной. Тогда весь объем звезды описывается решением Эмдена, соответствующем «нормальному» значению γ , а энергия содержит аддитивную постоянную ME_* .

Используя формулы § 2 и приложение II, можно получить следующую формулу для энергии связи звезды, состоящей из вещества с приведенным выше уравнением состояния

$$E_{\text{полн}} = -\frac{3-n}{5-n} \frac{GM^2}{R} + ME_* = -\frac{3\gamma-4}{5\gamma-6} \frac{GM^2}{R} + ME_*.$$

Здесь R — радиус, который имела бы звезда, если бы уравнение состояния в простейшей форме $P = A\rho^\gamma$ было справедливо везде.

В нашем случае очень малых ρ_* и ξ мы имеем $\rho \approx \rho_*$ при $r = R$. Вне этого радиуса при $\rho < \rho_*$ простирается атмосфера; условие существования конечного внешнего радиуса R_1 атмосферы кладет предел на E_* . Пренебрегая массой атмосферы, мы можем использовать гравитационный потенциал в виде $\Phi = -\frac{GM}{r}$ и получить

$$H + \Phi = (1 + \xi) E - \frac{GM}{r} = (1 + \xi) E_* - \frac{GM}{R} = -\frac{GM}{R_1} < 0,$$

так что $E_* < \frac{GM}{R_1}$, что означает

$$E_{\text{полн}} < \frac{2(\gamma - 1)}{5\gamma - 6} \frac{GM^2}{6}.$$

Поскольку $\gamma > 4/3$, то этого достаточно для конструирования решений, которые устойчивы относительно малых возмущений, но имеют отрицательную энергию связи.

Рассмотрим мысленный эксперимент, в котором такая конфигурация гомологично расширяется. Сначала ее энергия растет, но затем начинает падать, когда плотность массы достигает значений $\langle \bar{\rho} \rangle \sim \rho_*$; это и есть тот энергетический барьер, который обеспечивает устойчивость относительно малых возмущений *). Если по расчетам модель атмосферы звезды не имеет конечного внешнего радиуса R_1 (и не взрывается), то звезды теряют вещество посредством звездного ветра (Бисноватый-Коган и Зельдович, 1966). Это простейший пример непрерывной адиабатической потери массы.

§ 9. Нестабильность любого равновесного состояния

В заключение обсуждения вопросов устойчивости сделаем два замечания принципиального характера.

Для звезд, состоящих из холодного ферми-газа, имеющих число нуклонов $N < N_{\text{max}}$, отвечающего ОВ-максимуму, всегда существует одно или несколько статических решений. Среди них есть решение с наименьшей полной энергией. Оно устойчиво к малым возмущениям. Значит ли это, что нельзя так перегруппировать нуклоны (не изменяя их числа!), чтобы получившаяся конфигурация (заведомо нестатическая) имела полную энергию (а значит, и массу M) меньше исходной? Ниже мы покажем, что такой вывод был бы неверен, что минимум энергии, отвечающий стационарному состоянию, есть только локальный минимум (Зельдович, 1962).

*) Ситуация, аналогичная этой, действительно имеет место в некоторых моделях нейтронных звезд: см., например, модели нейтронных звезд малой массы в табл. 3 работы Хартли и Торна (1968), которые имеют отрицательную энергию связи, но устойчивы относительно малых возмущений.

Сжимая массу внешним давлением, можно в принципе подвесить ее размеры так близко к гравитационному радиусу*), что силы тяготения (стремящиеся при этом к бесконечности) превысят силы давления (возрастающие не быстрее ρ) и заставят ее дальше сжиматься без действия внешних сил — коллапсировать. Из сказанного, казалось бы, следует вывод, что коллапс малой массы хотя и возможен, но отделен от состояния равновесия гигантским энергетическим барьером. Мы покажем, что и этот вывод неверен, что энергетический барьер в данном случае может быть сделан как угодно малым по абсолютной величине.

Начнем с доказательства последнего утверждения. Чем меньше исходная масса, тем, естественно, меньше надо затратить энергии, чтобы, сжав ее до $R \sim r_g$, заставить коллапсировать. Заметим, что плотность, до которой предварительно надо сжать вещество, с уменьшением массы возрастает:

$$\rho \approx 2 \cdot 10^{16} (M_{\odot}/M)^2 \text{ г/см}^3.$$

На сжатие тратится работа, и это увеличивает массу. В пределе малых масс при сжатии до больших плотностей практически вся масса создается работой, и высота барьера $E = Mc^2 \sim r_g$.

Пусть имеется холодная конфигурация в равновесии. Сожмем ее малую центральную часть, заставляя эту часть коллапсировать. Тогда слои, лежащие на границе с коллапсирующим ядром, потеряют опору изнутри и начнут проваливаться к центру, вовлекая в это падение все более наружные слои. Внутренние слои согласно свойству релятивистского коллапса будут вечно падать по часам внешнего наблюдателя, никогда не обретая опоры снизу. Следовательно, не остановятся и внешние слои. Таким образом, вся звезда будет вовлечена в сжатие, т. е. будет коллапсировать. Чем меньше область первоначально сжатого ядра, тем меньше нужно затратить энергии, чтобы заставить всю звезду сжиматься из устойчивого состояния.

Итак, мы доказали, что энергетический барьер, отделяющий коллапс от равновесия, бесконечно мал **); но возмущения, пере-

*) Так как при сжатии мы сообщаем энергию, масса вещества возрастает.

**) Теория тяготения Эйнштейна — не квантовая теория. Поэтому можно, исходя из соображений размерности, указать границу ее применимости (Уилер, 1962) (см. гл. 2 нашей книги). Из постоянных \hbar , G и c можно получить величину размерности длины $L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}$.

В меньших масштабах существенными должны стать квантовые флуктуации метрики. Следовательно, масса, имеющая гравитационный радиус $r_g = L^*$ — это наименьшая масса, которую мы еще можем сжать до размеров r_g , не обращаясь к квантовой теории. Она равна $m = 10^{-5} \text{ г}$, что соответствует энергии 10^{16} эрг . Эта величина определяет нижнюю границу рассматриваемого барьера, если эта граница зависит от квантовых эффектов. В книге Уилера, Гаррисона, Вакано, Торна (1967) возможный нижний предел массы определяется из соображений, что r_g должно быть больше комптоновской длины вол-

водящие звезду в коллапс, отнюдь не малы, сжатие ядра до начала его коллапса тем больше, чем меньше необходимая энергия. Например, можно заставить звезду, масса которой равна массе Солнца, коллапсировать, сжав в ее центре ядро с массой, равной массе Земли. Но чтобы заставить такое ядро коллапсировать, его надо сжать до плотности

$$\rho \approx 2 \cdot 10^{16} (M_{\odot}/M_{\oplus})^2 \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}!$$

Естественно, что подобные «флуктуации» ни термодинамически, ни квантово возникнуть не могут. Очевидно также, что в линеаризованной теории малых возмущений, рассмотренной выше в этой главе мы подобной возможности перехода в коллапс обнаружить не могли. Заметим, что хотя возмущения плотности здесь велики, возмущения полной энергии звезды малы.

Покажем теперь, что всегда можно так сложить заданное число нуклонов N , что полная их энергия будет как угодно мала, т. е. масса M , измеренная внешним наблюдателем, будет сколь угодно малой. Для краткости будем считать, что холодная звезда состоит из идеального ферми-газа. Пусть задано число барионов N . Будем укладывать их достаточно плотно, так что справедливо выражение для ультрарелятивистского газа:

$$\rho = \frac{3}{4} \hbar (3\pi^2)^{1/3} \frac{1}{2} n^{1/2}. \quad (10.9.1)$$

Для M и N имеем формулы для покоящейся материи (см. § 3 гл. 3):

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr, \quad (10.9.2)$$

$$N = 4\pi \int_0^R n(r) e^{N/2 r^2} dr. \quad (10.9.3)$$

Зададим распределение

$$\rho = \frac{a}{r^2}, \quad r < R \quad \text{и} \quad \rho = 0, \quad r > R, \quad (10.9.4)$$

где a — произвольная константа. Используя формулы (10.9.1) — (10.9.4), получаем $\lambda = \text{const}$ при $r < R$ и после определения R из (10.9.3) находим

$$M = \text{const } N^{1/2} a^{1/2} \left(1 - \frac{8\pi G}{c^2} a\right)^{1/2}. \quad (10.9.5)$$

ны (электрона или нуклона). По-видимому, такое ограничение не необходимо. Предлагаемое здесь ограничение соответствует комптоновской длине волны частицы с $m = 10^{-5}$ г.

Распределение (10.9.4) имеет особенности: $\rho \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$; ρ разрывно при $r = R$. Легко убедиться, что всегда можно так сгладить особенности, что соотношение (10.9.5) изменится сколь угодно мало. В таком распределении нигде нет особенностей ни в метрике, ни в плотности.

Из выражения (10.9.5) следует, что при любом заданном N масса $M \rightarrow 0$, если $a \rightarrow c^2/8\pi G^2$, что и требовалось доказать. Разумеется, полученная конфигурация нестатическая, ведь ее масса близка к нулю и заведомо меньше статической при данном N . Сложенные таким образом нуклоны в начальный момент покоятся, но ускорение отлично от нуля, и они будут коллапсировать.

Мы видим, что в принципе можно было бы создать машину, которая приводит к конфигурации с дефектом массы, сколь угодно близким к M_0 . Таким образом, в этой машине из вещества выделяется энергия, почти равная $M_0 c^2$, что несравненно больше ядерной энергии $0,01 M_0 c^2$.

Можно ли создать такую машину? Сколлапсировавшая масса, помещенная в центре звезды, есть, очевидно, катализатор для коллапса окружающей материи. Она является бездонной ямой, в которую падает вся материя. Скорость этого падения зависит от плотности, давления и движения окружающей материи. Соответствующие формулы будут даны в гл. 12.

Конечно, создание такой машины для работы с массами, много меньшими $M_{\text{max}}^{\text{ОВ}}$, невозможная задача, так как пришлось бы сжимать вещество до фантастических плотностей.

Для массы, близкой к пределу ОВ, соответствующие плотности отнюдь не фантастичны, и переход в коллапс возможен, например, при переходе по инерции через устойчивое состояние в ходе гидродинамического сжатия звезды с $M \approx 1,5 M_{\odot}$, «сорвавшейся» в районе чандрасекаровского максимума.

§ 10. Критические состояния массивных звезд

Рассмотрим теперь звезды, имеющие массу, промежуточную между $1,2 M_{\odot}$ и $10^3 M_{\odot}$ и найдем критические состояния для таких звезд *). Мы переходим, таким образом, к расчету линии bb' на рис. 34. Соображения о факторах, приводящих к неустойчивости, высказывались, например, в работах Хойла и Фаулера (1960, 1965); Фаулера и Хойла (1964); Зельдовича (1963а). Конкретные численные значения при упрощающих предположениях о химическом составе найдены в работах Г. С. Бисноватого-Когана (1966) и Г. С. Бисноватого-Когана и Я. М. Каждана (1966); ниже излагаются результаты этих работ.

*) Теория сверхмассивных звезд с $M > 10^3 M_{\odot}$ относится к проблеме квазаров и ядер галактик и в этой книге не рассматривается. См. нашу книгу «Релятивистская астрофизика».

Звезда с массой больше предела белых карликов может находиться в равновесии только при температуре, отличной от нуля *) и потеря устойчивости достигается при $T \neq 0$.

Начнем с исследования звезд, масса которых немного превышает предел массы холодных белых карликов. Для таких звезд температуры вблизи критического состояния еще настолько малы, что основной вклад в энергию и давление дают вырожденные электроны, причем вырождение это вследствие большой плотности — релятивистское. Рассмотрим, как малые поправки, вклад в энергию за счет ненулевой температуры электронов и за счет отличия вырождения от чисто релятивистского вырождения, а также за счет невырожденных ядер и эффектов ОТО.

Теплопроводность вырожденных электронов чрезвычайно велика, поэтому будем считать звезду изотермической **). Так как давление в основном определяется вырожденными электронами и мало зависит от T , $\gamma \approx 4/3$, то распределение вещества в звезде принимаем эмпирическим с $n = 3$. Как уже не раз подчеркивалось, благодаря экстремальным свойствам функции распределения результат слабо чувствителен к виду этой функции. Используем теперь общие соотношения энергетического подхода к теории равновесия звезды (см. § 2).

Запишем полную энергию звезды:

$$E = M \int_0^1 E_1(\rho, T) dz - 0,639 G M^{5/3} \rho_c^{1/3} - 0,93 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3}; \quad (10.10.1)$$

здесь $z = m/M$; первое слагаемое — энергия плазмы, второе — ньютоновская гравитационная энергия для политропы с $n = 3$, третье — поправка за счет ОТО. Изменение энергии звезды за счет нейтронизации пока не учитываем.

С помощью общих термодинамических выражений для энергии и энтропии (см. раздел II) можно получить следующие выражения вблизи ультрарелятивистского вырождения электронов:

$$E_1 = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \frac{\hbar c \rho^{1/3}}{(\mu_e m_p)^{4/3}} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{m_e^2 c^3}{\hbar (\mu_e m_p)^{2/3} \rho^{1/3}} - \frac{m_e c^2}{\mu_e m_p} + \\ + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{(kT)^2}{\hbar c (\mu_e m_p)^{2/3} \rho^{1/3}} + \frac{3}{2} \frac{kT}{A m_p}, \quad (10.10.2)$$

*) Для нахождения критического состояния звезд с $M > M_{\text{чандр}}$, разумеется, мы рассматриваем звезды с ρ_c того же порядка, что у белых карликов, и считаем, что плотность меньше ядерной. Как мы видели (см. § 5 этой главы), при ядерной плотности в равновесии могут быть холодные звезды с $M \lesssim 2M_{\odot}$.

**) Разумеется, исключая узкий поверхностный слой, который в энергетическом балансе неуществен.

$$S = \pi \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{kT}{\hbar c (\mu_e m_p)^{2/3} \rho^{1/3}} + \frac{k}{Am_p} \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[\left(\frac{kT Am_p}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \frac{g Am_p}{\rho} \right] \right\}. \quad (10.10.3)$$

Здесь ρ — плотность массы барионов, A — атомный вес ядра, g — статистический вес ядра. Массой электронов пренебрегаем.

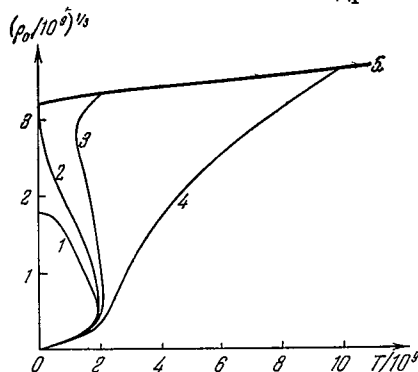


Рис. 48. Последовательности устойчивых равновесных состояний $M = \text{const}$ и кривая критических состояний звезд средней массы. 1 — $M = 1,19 M_{\odot} < M_{\text{Чандр}}$; 2 — $M = 1,2 M_{\odot} = M_{\text{Чандр}}$; 3 — $M = 1,23 M_{\odot} > M_{\text{Чандр}}$; 4 — $M = 1,36 M_{\odot} > M_{\text{Чандр}}$; 5 — критические состояния потери устойчивости.

Отличие полной массы от массы покоя учитывается в (10.10.1) в поправке на ОТО (см. приложение к § 4) и не входит в (10.10.2) и (10.10.3).

Написанные выражения справедливы при температурах, меньших температуры вырождения электронов, и плотностях, больших плотности релятивистского вырождения (см. раздел II). Для железной звезды эти условия дают:

$$T < 5 \cdot 10^7 \rho^{1/3} \text{ } ^\circ\text{K}, \quad (10.10.4)$$

$$\rho > 2,2 \cdot 10^8 \text{ г/см}^3. \quad (10.10.5)$$

Условия равновесия звезды получим, приравнявая нулю производную полной энергии (10.10.1) по $\rho_c^{1/3}$ при постоянной

в каждом элементе вещества энтропии:

$$\frac{\partial E}{\partial \rho_c^{1/3}} = 3\rho_c^{-1/3} \int_0^1 P(\rho, T) \frac{dz}{\varphi(z)} - 0,639 G M^{1/3} - 1,86 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{1/3} = 0. \quad (10.10.6)$$

Здесь учтено, что $-\left(\frac{\partial E_1}{\partial \rho}\right)_S = P$, $\varphi(z)$ — функция Эмдена для $\gamma = 4/3$. Используя теперь выражения (10.10.2) и (10.10.3) для термодинамических функций, получаем серию равновесных состояний звезды данной массы, в которой ρ_c является параметром (рис. 48).

В последовательности равновесных состояний есть критическая точка, отделяющая устойчивые состояния от неустойчивых. Для нахождения этого критического состояния нужно к условию (10.10.6) добавить условие равенства нулю второй производной E по $\rho_c^{1/3}$:

$$\frac{\partial^2 E}{(\partial \rho_c^{1/3})^2} = 9\rho_c^{-2/3} \int_0^1 \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) P(\rho, T) \frac{dz}{\varphi(z)} - 1,86 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} = 0. \quad (10.10.7)$$

Еще раз подчеркнем, что мы не учитываем пока нейтронизацию, под интегралом (10.10.7) всегда $\gamma > 4/3$, и потеря устойчивости происходит за счет малых эффектов ОТО [последнее слагаемое в (10.10.7)].

Кривая критических состояний изображена на диаграмме $\rho_c - T_c$ (см. рис. 48). Выше этой кривой нет устойчивых состояний. На рис. 49 изображены кривые $M = (M(\rho_c))_{T=\text{const}}$ [такие кривые без учета ОТО были рассчитаны Баглин (1965); об устойчивости см. ее работу (1966)] и нанесена кривая потери устойчивости. Линии $M = \text{const}$ есть линии эволюции звезды без потери массы. При $M < M_{\text{чандр}}$ линия эволюции заканчивается при $T = 0$ и не доходит до кривой потери устойчивости. При $M > M_{\text{чандр}}$ медленная эволюция заканчивается потерей устойчивости.

Следует обратить внимание на то, что максимумы кривых постоянной температуры не являются критическими точками. Действительно, уже неоднократно подчеркивалось, что критерием устойчивости является $\left. \frac{\partial M}{\partial \rho_c} \right|_{S=\text{const}}$, а не $\left. \frac{\partial M}{\partial \rho_c} \right|_{T=\text{const}}$.

Оказывается, что потеря устойчивости наступает правее максимума кривых $T = \text{const}$.

При температурах $T < 10^9$ °К основной вклад в поправку для энергии дают невырожденные ядра. Для ядер $\gamma = 5/3$, и они оказывают стабилизирующее действие, хотя и мало влияют на критическую массу.

В результате критическая плотность увеличивается, и кривая потери устойчивости на рис. 49 идет вправо почти горизонтально. При $T > 10^9$ °К основную роль в температурной добавке играют уже электроны, критическая масса быстро увеличивается, а кривая потери устойчивости идет вверх и влево.

До сих пор мы не учитывали нейтронизацию. Между тем для звезды из железа *) при небольшом превышении массы над

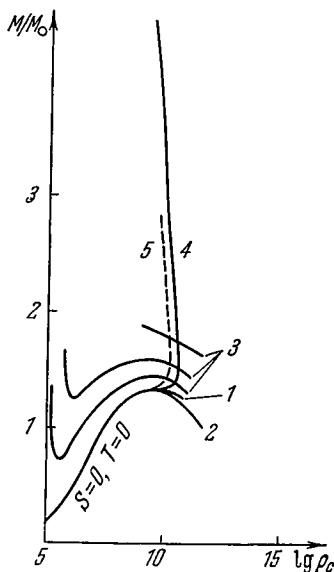


Рис. 49. Изотермы и линия критических состояний на диаграмме $\rho_c - M$. 1 — $S = 0$, $T = 0$ без учета нейтронизации, но с учетом ОТО; 2 — $S = 0$, $T = 0$ с учетом нейтронизации и ОТО; 3 — изотермы (схематично); 4 — линия критических состояний без учета нейтронизации, но с учетом ОТО; 5 — линия критических состояний с учетом нейтронизации и ОТО.

*) Ядерный синтез при $T \approx 3 \cdot 10^9$ °К и $\rho \approx 10^9$ г/см³ моментально приводит к выгоранию всего ядерного горючего.

критической именно нейтронизация должна вызывать неустойчивость, ибо, как показано в § 4, при $T=0$, $S=0$ нейтронизация железа начинается при плотностях, на полтора порядка меньших критической за счет ОТО. Расчеты потери устойчивости горячих белых карликов за счет нейтронизации пока не сделаны. Они требуют учета ядерных процессов, идущих при отличной от нуля температуре.

Качественно кривая потери устойчивости должна сохранить свой вид, но сместиться влево примерно так, как это изображено на рис. 49 пунктиром.

Обратимся теперь к интервалу масс $5M_{\odot} < M < 10^3 M_{\odot}$. Для таких звезд центральные температуры вблизи критического состояния настолько велики, что эффекты температуры уже не могут рассматриваться как малые поправки в энергию. На всем протяжении эволюции соотношение между ρ и T таково, что вырождение электронного газа не наступает. Однако вступает в игру новый фактор — диссоциация железа на α -частицы, p и n (см. гл. 8), а для больших масс $M \approx 10^3 M_{\odot}$ и рождение пар e^+ и e^- . Эффекты ОТО по-прежнему считаются малыми.

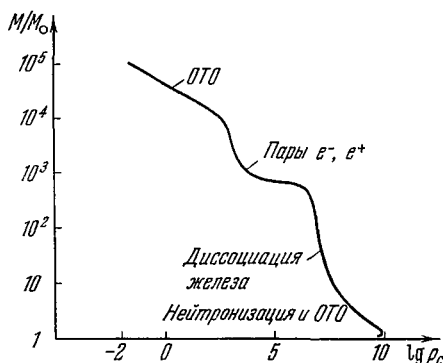


Рис. 50. Кривая потери устойчивости железных звезд; на отдельных участках указана причина потери устойчивости.

рассматриваться как малые поправки в энергию. На всем протяжении эволюции соотношение между ρ и T таково, что вырождение электронного газа не наступает. Однако вступает в игру новый фактор — диссоциация железа на α -частицы, p и n (см. гл. 8), а для больших масс $M \approx 10^3 M_{\odot}$ и рождение пар e^+ и e^- . Эффекты ОТО по-прежнему считаются малыми.

В работе Бисноватого-Кагана и Каждана (1966) решение уравнений (10.10.6)

и (10.10.7) проведено путем численного интегрирования с использованием уравнения состояния Имшенника и Надежина (см. гл. 7 и § 4 гл. 8). В этих расчетах звезды считались изэнтропическими, так как электроны уже невырождены и их теплопроводность невелика.

Таблица X

Значения ρ_c , T_c и S в точке потери устойчивости звездами разных масс

M/M_{\odot}	$\rho_c/10^7 \text{ г/см}^3$	$T_c/10^8$	$S/10^8 \text{ эрг/г-град}$	M/M_{\odot}	$\rho_c/10^7 \text{ г/см}^3$	$T_c/10^8$	$S/10^8 \text{ эрг/г-град}$
5	10,2	6,72	0,205	100	0,94	6,38	0,99
10	4,2	6,40	0,316	500	0,31	5,99	2,13
50	1,0	5,96	0,682	1000	0,00063	1,12	2,76

Таблица XI

Полная энергия звезды в критическом состоянии и энергия на единицу массы

M/M_{\odot}	1,1	5	10	10^5
$E_{\text{кр}}/10^{50} \text{ эрг}$	-4,74	-13,4	-18,8	-37
$(E_{\text{кр}}/M)/10^{17} \text{ эрг/г}$	-2,0	-1,3	-0,94	-0,018

Результаты расчетов приведены в табл. X и XI и на рис. 50.

В таблице XI дана полная энергия звезды $E_{\text{кр}}$ в критическом состоянии и энергия на единицу массы $E_{\text{кр}}/M$.

На рис. 50 приведена зависимость центральной плотности звезды из железа в критическом состоянии от массы для всего интервала $1,2 M_{\odot} < M < 10^5 M_{\odot}$.

Для масс, близких к $1,2 M_{\odot}$, потеря устойчивости происходит за счет нейтронизации вещества; некоторую роль играют эффекты ОТО. При $5 M_{\odot} < M < 500 M_{\odot}$ критическое состояние обусловлено распадом железа на He^4 , p и n и эффектами ОТО. С ростом массы роль ОТО уменьшается. При массе несколько меньшей, чем $10^3 M_{\odot}$, потеря устойчивости происходит уже за счет пар e^+ , e^- , так как давление в этих звездах обусловлено в основном давлением света. При меньших массах роль света в давлении мала, поэтому и рождение пар не приводит к критическому состоянию. Когда для критического состояния существенным становится рождение пар e^+ , e^- резко уменьшается $\rho_{\text{кр}}$. Наконец, при $M \geq 10^4 M_{\odot}$ критическое состояние вновь определяется эффектами ОТО.

Для больших масс, как показали расчеты, невозможны устойчивые равновесные состояния при большой плотности $\rho > \rho_{\text{кр}}$, как это имело место для холодной звезды в нейтронном состоянии. Эффекты ОТО приводят к неустойчивости, несмотря на то, что в горячей плазме при больших T_c возможны $\gamma > 4/3$.

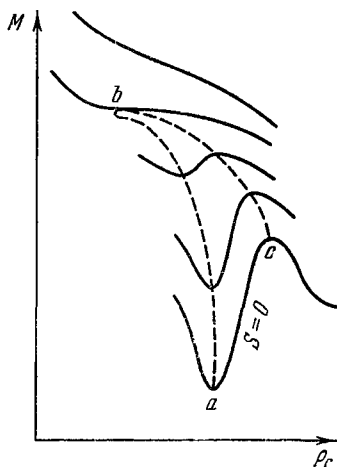


Рис. 51. Область устойчивости нейтронных звезд. Сплошные линии — изэнтропы. ab — геометрическое место минимумов, bc — геометрическое место максимумов.

Следовательно, кривая $M(\rho_c)_{S=\text{const}}$ для больших горячих масс имеет один максимум, а не два, как для холодных звезд *). Исчезновение второго максимума с ростом энтропии происходит путем слияния его с минимумом. При некоторой энтропии S_0 второй максимум и минимум исчезают, схематически это показано на рис. 51. Точка слияния второго максимума с минимумом найдена Бисноватым-Коганом (1968а). Она лежит при значениях $M = 70 M_\odot$, $\rho \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$.

Итак, мы выполнили задачу, поставленную в § 1, — определили границы возможных устойчивых в целом равновесных состояний звезд на диаграмме масса — плотность **).

*) Осцилляции кривой $M(\rho_c) |_{S=0}$ за вторым максимумом несущественны (см. § 7).

**) Конечно, это лишь грубая картина. О специфических видах неустойчивости, дающих добавочные ограничения, см. в последующих параграфах.

ГЛАВА 11

ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД

§ 1. Эволюция звезды вплоть до потери устойчивости или стадии белого карлика

Теперь можно приступить к анализу эволюции звезды. Мы сосредоточим наше внимание на конечных стадиях эволюции и не будем здесь подробно останавливаться на всех этапах эволюции, отсылая читателя к монографиям, указанным во введении к данному разделу. Напомним общую ситуацию и сделаем несколько замечаний, необходимых для дальнейшего изложения.

Согласно современным представлениям звезды образуются из первоначально разреженной среды путем гравитационной конденсации диффузной материи, состоящей главным образом из водорода. Звезда эволюционирует (сжимается) по мере высвечивания энергии. Можно сказать, что в фазе сжатия звезда светит за счет гравитационной энергии. На этот источник энергии звезд указывал еще Кельвин. Температуры еще низки, и выделение ядерной энергии пренебрежимо мало. Звезда находится в гидростатическом равновесии (см. § 1 гл. 10) без внутренних источников энергии. Продолжительность этой фазы относительно невелика и составляет

$$\tau \approx 5 \cdot 10^7 \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 \text{ лет.}$$

При изучении звездной энергии и сжатии звезды, в соответствии с отрицательной теплоемкостью, увеличивается температура, которая, наконец, повышается в недрах звезды настолько, что начинают идти ядерные реакции превращения водорода в гелий. Звезда при этом находится на главной последовательности диаграммы Герцшпрунга—Рессела (температура—светимость). Амбарцумян (1960) с сотрудниками рассматривают другой эволюционный путь звезды до начала ядерных реакций (до прихода на главную последовательность), а именно, возникновение протозвезд не из диффузного вещества, а из сверхплотных тел, природа которых пока не известна. Это не меняет дальнейшего эволюционного пути

звезды, который определяется массой, энтропией и начальным (на главной последовательности) химическим составом, а также моментом вращения и магнитным полем звезды. С началом ядерных реакций звезда находится в состоянии гидродинамического и теплового равновесия. Это самый длительный период активной жизни звезды. Его продолжительность определяется запасами водорода в центральной части (только там температура достаточно высока для ядерных реакций) и скоростью переработки водорода в гелий. Очевидно, что этот период τ пропорционален M/L , где L — светимость звезды. Расчеты показывают, что масса ядра, где выгорает водород, порядка $0,1 M$, откуда следует

$$\tau \approx 10^{10} \frac{L_{\odot}}{L} \frac{M}{M_{\odot}} \text{ лет.} \quad (11.1.1)$$

Неоднородность химического состава по окончании выгорания водорода в центре ведет к перестройке структуры звезды; ее внешняя оболочка распухает, а ядро сжимается.

В достаточно массивных звездах ($M \gtrsim M_{\odot}$) температура в ядре поднимается настолько, что начинают идти реакции тройного столкновения α -частиц с образованием C^{12} :



Детальный расчет дальнейшей эволюции крайне труден. С одной стороны, внутреннее строение звезды становится очень сложным: появляются источники энергии в сферических слоях, окружающих ядро, сложная структура зон лучистого и конвективного переноса энергии; с другой стороны, и это особенно важно, становится возможным проявление различного рода неустойчивостей. Об этих неустойчивостях и об их значении подробно говорится в § 3 этой главы.

Возможно, звезда на этом этапе эффективно теряет свою массу как медленным стационарным истечением с поверхности (см. об этом § 8 гл. 10 и § 4 гл. 14), так и путем взрывов (см. § 4 этой главы). Взрыв может привести к разрушению всей звезды. Сейчас мы не будем рассматривать эти процессы и вернемся к ним позже.

Предположим, что после всех изменений на последних стадиях звезда имеет массу M . Как уже отмечалось, истощение запасов ядерного горючего, если таковое еще имеется, и излучение энергии приводят, в соответствии с отрицательной теплоемкостью, к сжатию звезды и увеличению ее температуры.

Звезда будет перемещаться по равновесным состояниям (минимумам энергетических кривых) на диаграмме $M - \rho$ (рис. 52) слева направо по горизонтальной линии ($M = \text{const}$). Рассмотрим сначала эволюцию звезд с $M < 1,2 M_{\odot}$ (M_1 на рис. 52). Сжатие

будет продолжаться до тех пор, пока в основной массе газа не наступит вырождение электронов. После этого сжатие резко замедлится, так как давление слабо зависит от температуры, и за всю последующую эволюцию давление P уменьшится примерно в два раза, а звезда достигнет точки D_1 .

До начала вырождения газа электронов при сжатии звезды ее температура увеличивается; теплоемкость звезды при этом отрицательна. После наступления вырождения электронов при продолжающемся, хотя и замедленном, сжатии звезда, излучая, остывает; ее температура, пройдя через максимум, падает. Теплоемкость звезды теперь уже положительна. Последовательность равновесных состояний звезды с $M = 1,19 M_\odot$ на диаграмме $\rho_c \rightarrow T_c$ при подходе к точке D_1 дана на рис. 48 (кривая 1).

В соответствии с положительной теплоемкостью звезды в этой стадии, с увеличением ρ_c в ходе остывания и сжатия ее температура T_c уменьшается. Максимум температуры по порядку величины соответствует энергии вырождения электронов в конечном состоянии D_1 . Для звезд с $M \approx M_\odot$ максимум T_c составляет $\approx 10^9$ °K. В дальнейшем при остывании всякие термоядерные реакции с эффективным выделением энергии прекращаются, вырождение электронов становится все более сильным. Эта последняя стадия жизни звезд носит название *стадии белых карликов*. Белые карлики медленно остывают, излучая главным образом за счет тепловой энергии атомных ядер, находящихся еще в невырожденном состоянии. Время, требуемое для охлаждения белого карлика, зависит от конечной температуры и химического состава; для $T \sim 5 \cdot 10^8$ °K и $A = 20$ оно составляет около 10^9 лет [см., например, Шварцшильд (1958); Шапман (1958); Местель (1965)]. Несколько авторов [Салпетер (1961); Местель и Рудерман, (1967); Ван Хорн (1968); Острикер и Аксель (1969); Гринстейн (1969)] рассмотрели возможность кристаллизации вещества в белых карликах при достаточно низких температурах. При температурах $T \ll T_D \approx 4 \cdot 10^8$ ($\rho/10^9$) $^{1/2}$ °K происходит дебаевское вырождение кристаллической решетки (Местель и Рудерман (1967)), теплоемкость резко уменьшается, и имеет место более быстрое охлаждение, чем это следует по классическим

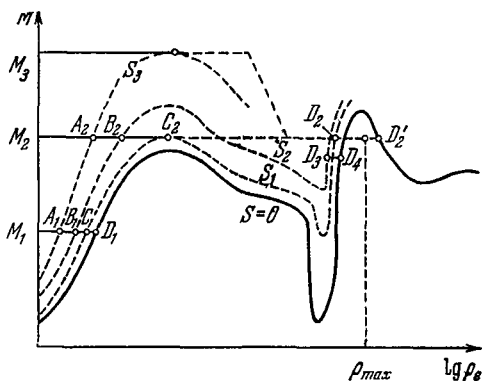


Рис. 52. Схема эволюции звезд M_1 и M_2 с массой меньше, чем предел «О В». Пунктиры — изэнтропы

формулам. Однако Бисноватый-Коган и Сеидов (1969b) указали, что для белых карликов с массой вблизи критической в области $\Delta M/M \sim 2 \cdot 10^{-4}$ существенную роль играет постепенное выделение тепла посредством неравновесной β -реакции в центре. В результате уменьшение теплоемкости, вызванное дебаевской вырожденностью, становится несущественным, в этой узкой области время охлаждения велико.

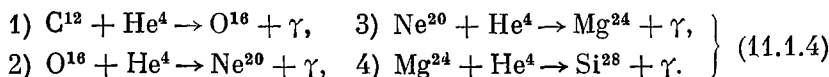
Недавно Гринстейн (1969) указал, что существенную роль в охлаждении белых карликов играет конвекция в их поверхностных слоях. Время охлаждения очень чувствительно к этой конвекции.

Как мы видим, в течение всей эволюции звезда на диаграмме M, ρ медленно перемещается слева направо, стремясь к кривой, соответствующей $T = 0$ ($S = 0$).

Окончательный химический состав белых карликов зависит от тех ядерных реакций, которые протекали на стадии их сжатия и разогрева, а возможность протекания тех или иных реакций, в свою очередь, зависит от температуры. Во всех звездах с $M \geq 0,3 M_{\odot}$ в процессе эволюции заведомо достигались температуры гораздо выше $T = 10^7$ °K, при которой уже начинается реакция превращения H в He⁴. Рассчитаем максимальную температуру, которая достигается в звезде массы M . Мы уже говорили, что эта температура по порядку величины равна температуре вырождения газа электронов в конечном состоянии звезды ($T_{\max} \approx T$ вырождения) и пропорциональна $\rho^{2/3}$. Используя уравнения состояния и усредненное уравнение равновесия звезды, легко получить, что $T_{\max} \propto (\mu^2 M)^{1/3}$. Численные расчеты Эпика (1957) дают для T_{\max} в центре звезды

$$\lg T_c = 8,9 + \frac{8}{3} \lg \mu + \frac{4}{3} \lg \frac{M}{M_{\odot}}. \quad (11.1.3)$$

По оценке Эпика, температура, близкая к максимальной, сохраняется в течение $\sim 10^{14}$ сек. Отсюда можно оценить, как ядерные реакции гелия с C¹² и другими элементами изменяют химический состав звезды. Если $T > 3 \cdot 10^8$ °K, то процесс тройного столкновения α -частиц (11.1.2) приводит к образованию C¹². Одновременно с этой реакцией идут следующие:



По расчетам Эпика, белые карлики с $M > 0,5 M_{\odot}$ должны состоять главным образом из Mg²⁴; более тяжелые ядра не образуются благодаря тому, что исчерпывается весь гелий. В звездах с массой около $(0,4 \div 0,45) M_{\odot}$ в центральных частях значительная доля гелия еще испытывает подобное превращение, но при $M < 0,4 M_{\odot}$

белый карлик в основном должен состоять из гелия *). Новые расчеты см. Такарада, Сато, Хаяши (1966).

Проследим теперь последние этапы эволюции звезды с массой $M \gtrsim 1, 2M_{\odot}$. В ходе падения энтропии такая звезда также медленно продвигается слева направо по квазиравновесным состояниям от A_2 к C_2 вдоль линии $M_2 = \text{const}$ или $M_3 = \text{const}$ на рис. 52. В § 10 отмечалось, что при $M > 1,2 M_{\odot}$ потеря устойчивости звезды наступает правее максимума кривых $M(\rho_c)|_{T=\text{const}}$ (см. рис. 49). Значит, в ходе эволюции на последних стадиях достигается минимум температуры, после чего звезда вновь имеет отрицательную теплоемкость, и температура при сжатии перед потерей устойчивости вновь увеличивается. Последовательность равновесных состояний такой звезды дана на диаграмме $\rho_c - T_c$ на рис. 48 (кривые 3, 4). После достижения критической точки C_2 (см. рис. 52) наступает потеря устойчивости и происходит катастрофическое сжатие со скоростью порядка скорости свободного падения $\frac{dR}{dT} \sim \sqrt{\frac{GM}{R^2} (R_c - R)}$.

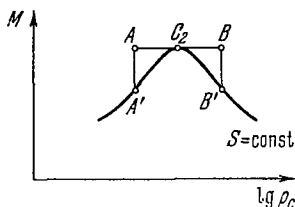


Рис. 53. Звезда в точке «срыва» C_2 . Отклонение от равновесия влево (точка А) вызывает появление силы, возвращающей звезду в C_2 . Отклонение вправо (В) вызывает «срыв» — гидродинамическое сжатие звезды.

В самом деле, пусть звезда находится в точке «срыва» в максимуме изэнтропии на диаграмме $M - \rho_c$ (рис. 53). Возмущения, сдвигающие звезду вправо или влево (точки А и В на рис. 53), выводят ее из равновесия. В обоих случаях равновесные конфигурации, соответствующие возмущенной плотности, лежат ниже и имеют меньшую массу (точка А' и В'). Это значит, что сила тяготения в А и В превышает силу давления и заставляет звезду сжиматься, увеличивать плотность. Но если из состояния А сжатие

*) Время эволюции звезд с M заметно меньше M_{\odot} больше возраста Метагалактики. Чем меньше M , тем меньше максимальная возможная температура. Поэтому в звездах с достаточно малой M температура в будущем (когда их эволюция пойдет достаточно далеко) может обеспечить протекание ядерных реакций, останавливающихся уже на He^3 . Казалось бы, эти звезды в конце эволюции (при $s = 0$) должны состоять из He^3 . Но, как отмечено в § 4 гл. 10, энергия электронов, необходимая для нейтронизации He^3 , очень мала и составляет всего 18 кэв. Поэтому в ходе эволюции звезды He^3 будет превращаться в тритий Т, а последний уже путем обычной термической реакции превратится в He^4 . Таким образом, эти звезды в конце эволюции будут состоять из He^4 . Но при массе $M < 0,1 M_{\odot}$ и при начальном химическом составе Н и He вырождение электронов наступит раньше, чем температура в ходе медленного сжатия поднимется достаточно высоко для протекания каких бы то ни было ядерных реакций. Такие звезды светят за счет гравитационной энергии и в конце эволюции будут иметь тот же химический состав, что и в начале эволюции, т. е. в основном Н. Только пикно-ядерные реакции могут изменить этот состав (см. § 5 гл. 6).

возвращает звезду к равновесию C_2 , то из B оно уводит звезду все дальше от равновесия, начинается коллапс. Скорость, с которой начинается коллапс в самой точке срыва, определяется скоростью медленной эволюции звезды, т. е. скоростью, с которой она подходит к критической точке C_2 , и продолжая свое движение, выходит из этой точки вправо *). Однако после сколько-нибудь заметного отхода от состояния равновесия силы тяготения уже на конечную величину превышают силы давления, и ускорение сжатия составляет конечную долю ускорения свободного падения. Таким образом, очень быстро после «срыва» звезда сжимается практически с ускорением свободного падения. Это, конечно, является первым, самым грубым приближением.

Необходимо особо подчеркнуть, что после достижения точки C_2 скорость дальнейшего сжатия никак не зависит от скорости тех процессов, которые в ходе медленной эволюции подвели звезду к критическому состоянию.

Здесь надо отметить следующее существенное обстоятельство. Рассматривая возникновение неустойчивости звезды и ее гидродинамическое сжатие, мы предполагаем, что процессы, вызывающие неустойчивость, т. е. приводящие к $\gamma < 4/3$, идут за время, много меньшее гидродинамического t_H (времени свободного падения, см. § 1). По отношению к таким процессам вещество должно находиться в состоянии равновесия. Эти процессы протекают почти адиабатически, а следовательно, с постоянной энтропией. Примером подобного процесса является рождение пар при высокой температуре. Недавно Имшенник и Чететкин (1970) детально исследовали равновесие и устойчивость горячего вещества.

Если быть точным, то истинное термодинамическое равновесие в звезде невозможно, так как нейтрино и антинейтрино постоянно уходят. Имшенник и Чететкин нашли стационарное состояние, в котором рождение частиц и ядер каждого вида точно балансируется соответствующими процессами аннигиляции и распада. Обратные реакции, индуцированные ν и $\bar{\nu}$, не учитывались, так как ν и $\bar{\nu}$ свободно покидают систему. Например, $p + e^- \rightarrow n + \nu$ компенсируется $n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}$, а также сложным циклом, включающим p -захват, β -распад и ядерный фотоэффект, но не обратной реакцией $\nu + n \rightarrow p + e^-$. Для последовательности стационарных состояний с одинаковой энтропией соотношение $P(\rho)$ определяет показатель адиабаты γ . Результат не намного отличается от предшествующих равновесных расчетов.

Авторы вычислили также показатель γ_r (r — «rapid») для столь быстрых изменений плотности, что не успевают пройти

*) Как отмечалось в § 2 гл. 10, уже при подходе к C_2 вблизи этого состояния, строго говоря, надо рассматривать динамику процесса, так как скорость потери энергии не мала по сравнению с гидродинамической скоростью.

слабые процессы; в этих изменениях отношение p/ρ (включая p и ρ , связанные в ядра) остается постоянным.

Величина $\gamma_r > \gamma$. Критическое значение $\gamma = 4/3$ достигается, когда $\gamma_r > 4/3$. В этой ситуации эволюция идет со скоростью, определяемой скоростью слабых взаимодействий. Поэтому наступает важная промежуточная фаза эволюции. В более ранней, спокойной фазе скорость эволюции определяется энергетическими потерями. На раннем этапе спокойная эволюция сопровождается экзотермическими ядерными реакциями, которые компенсируют тепловые потери, так что эволюция не может перейти к новой стадии до тех пор, пока не выгорело ядерное горючее. (Эта ранняя часть охватывает «главную последовательность» на диаграмме светимость — поверхностная температура). В течение следующей части фазы спокойной эволюции энергетические потери ведут к сжатию звезды и увеличению гравитационной энергии. Однако вещество находится еще в равновесном или стационарном состоянии.

При достижении предела $\gamma = 4/3$ (но со стороны $\gamma_r > 4/3$) начинается упомянутая выше промежуточная стадия. При входе в эту фазу звезда все больше и больше начинает отклоняться от стационарного состояния *). С увеличением отклонения Δ от стационарного состояния скорость слабых процессов быстро возрастает (как Δ^4 или Δ^5). Конец промежуточной стадии наступает тогда, когда слабые взаимодействия оказываются не способными затормозить гидродинамическое сжатие (коллапс), т. е. когда $\gamma_r = 4/3$.

Нейтронизация и испускание ν , $\bar{\nu}$ во время коллапса рассматриваются в § 8 гл. 11. На промежуточном периоде нет нужды в точных расчетах с одновременным учетом ядерных взаимодействий, слабых взаимодействий и гидродинамических процессов.

В предшествующем обсуждении устойчивость и эволюция анализировались в терминах звездной (средней) плотности, (среднего) давления и (среднего) химического состава. Не рассматривались эффекты изменения величин с радиусом, звездное вращение и магнитные поля. Естественно, в этом приближении невозможно учесть появление в ходе быстрого сжатия ударных волн, вызывающих увеличение энтропии с «гидродинамической» скоростью, т. е. за время порядка t_H . Невозможно также учесть ядерную детонацию**), поглощение нейтрино в оболочке и сброс части массы. Возможно разрушение всей звезды ядерным взрывом. Учет этих явлений требует конкретного расчета нестационарных процессов в звезде. Более подробно мы остановимся на этом в § 3 и 4. Здесь же предположим, что в ходе гидродинамического сжатия ядерный взрыв если и происходит, то разрушает не всю

*) Вначале влияние слабых взаимодействий можно учесть, вводя эффективную «вторую» вязкость вещества.

**) Хотя в центре звезды ядерное горючее сгорело, оно могло сохраниться в оболочке.

звезду; а только выбрасывает часть оболочки. Если после сброса оболочки $M < 1,6 M_{\odot}$, то эволюция схематически изображена пунктирной линией с изломом за горизонталью M_3 на рис. 52. Случай $M > 1,6 M_{\odot}$ рассмотрен в §§ 6, 7. Вернемся к точке C_2 .

После «срыва» звезды в точке C_2 плотность растет (горизонтальный пунктир на рис. 52) с гидродинамической скоростью (т. е. с характерным временем t_H) и звезда достигает нового устойчивого состояния в точке D_2 , если ее масса в этот момент меньше «ОВ» предела $\approx 1,6 M_{\odot}$. Так как «срыв» произошел при конечных значениях энтропии и, кроме того, энтропия росла в ходе сжатия, то точка D_2 лежит не на предельной линии $S = 0$, а левее ее. По инерции сжатие будет продолжаться дальше. Если кинетическая энергия сжатия достаточно велика, то звезда может «пробить» энергетический барьер, выйти к точке D'_2 , после которой будет продолжаться неограниченное сжатие. Если же энергия сжатия недостаточна для прохождения через барьер, то после достижения некоторой максимальной плотности ρ_{\max} ($\rho_2 < \rho_{\max} < \rho_3$) звезда в первом приближении будет совершать затухающие колебания вокруг D_2 .

Затухание вызывается описанными выше процессами роста энтропии и излучением энергии (в виде света с поверхности и нейтрино изнутри); кроме того, звезда сбрасывает часть массы. В результате с изэнтропы, отвечающей моменту срыва, звезда переходит на более высокую изэнтропу (с S_1 на S_2). Если потери массы заметны, то, кроме того, понижается положение звезды на диаграмме $M - \rho_c$ и звезда приходит в точке D_3 в состояние равновесия. Далее, с потерей энергии на излучение (см. § 2) звезда медленно приходит к $S = 0$ (D_4) по серии равновесных состояний.

Состояние звезды на интервале $D_3 - D_4$ является *нейтронным* или *барионным* состоянием. Здесь невольно возникает следующий вопрос. Эволюция звезды начинается с водорода, с протонов; в результате термоядерных реакций протоны объединялись в сложные ядра, при этом излучалась огромная энергия порядка $0,01 M c^2$. В конце эволюции в стадии барионной звезды мы снова приходим к веществу, состоящему из отдельных барионов (причем масса покоя нейтрона даже больше массы H). Откуда же взялась энергия, потерянная на излучение в процессе эволюции? Ответ очевиден: тяготение создало большую плотность; это привело к нейтронизации вещества и заставило сложные ядра рассыпаться на отдельные барионы; следовательно, именно энергия тяготения в конечном состоянии компенсирует ту энергию, которая частично излучилась в пространство, частично увеличила ядерную энергию.

Идеи Кельвина и Гельмгольца о том, что звезды светят за счет энергии тяготения, оказались неприменимы для продолжительной стадии ядерных реакций в звезде. За счет этих реакций светит звезда. Однако в заключительной фазе эволюции звезды энергия

тяготения ломает ядерные связи, и в конце концов тяготение оказывается ответственным за всю излученную энергию. В этом смысле идеи великих физиков прошлого оказываются правильными.

Вероятно, коллапс приводит к ядерному взрыву (см. § 4). Если взрывом разрушается не вся звезда, и масса остатка меньше $M_{\text{max}}^{\text{ОВ}}$, то возникает [пульсар (см. гл. 13). Случай $M_{\text{остатка}} > M_{\text{max}}^{\text{ОВ}}$ см. §§ 6, 7 гл. 11 и гл. 14.

§ 2. Нестабильность массивных звезд с ядерными источниками энергии

В этом параграфе мы рассмотрим специфический вид неустойчивости звезды, приводящий, по-видимому, к существованию верхнего предела массы обычных звезд.

Еще в 1941 г. Леду показал, что достаточно массивные звезды с ядерными источниками энергии будут неустойчивы относительно раскачки колебаний. В работе Шварцшильда и Харма (1959) вычисления проделаны на основе новых моделей внутреннего строения массивных звезд, полученных численным расчетом. Более поздние расчеты можно найти у Стозерса и Симона (1968). Механизм пульсационной неустойчивости заключается в следующем. Звезда, находясь в устойчивом равновесии, обладает собственной частотой колебаний $\omega^2 \approx GM/R^3$. Допустим, что такие колебания возбуждены. Наряду с раскачкой колебаний имеются механизмы их затухания. Раскачивающим механизмом является изменение выделения ядерной энергии в центре звезды. Вследствие сильной зависимости выделения энергии от температуры основное выделение энергии происходит при максимальном сжатии. Звезда получает как бы импульс, который увеличивает амплитуду колебаний.

Затухание колебаний происходит вследствие нарушения стационарности теплового потока в звезде. Как можно показать, это нарушение вызывает появление силы, тормозящей колебания *).

Скорость изменения энергии колебаний L_1 можно записать в виде

$$L_1 = L_2 - L_3,$$

где L_2 — скорость увеличения энергии колебаний за счет ядерных реакций, L_3 — скорость потери энергии колебаний. Если $L_1 > 0$, то колебания возрастают, и звезда неустойчива. Если $L_1 < 0$, то звезда устойчива относительно пульсаций.

Шварцшильд и Харм провели расчеты для звезд в интервале масс от $M = 218 M_{\odot}$ до $M = 28 M_{\odot}$, состоящих из 75% H и 22% He. Результаты их расчетов для звезд главной последовательности приведены в табл. XII.

*) О другом механизме пульсации, вызывающем переменность цефеид, см. конец параграфа.

Таблица XII

Пульсационная неустойчивость массивных звезд

M/M_{\odot}	218,3	121,1	62,7	28,2
$\lg (L/L_{\odot})$	6,64	6,24	5,76	5,04
$(\delta R/R)_c$	0,632	0,583	0,312	0,392
$t_{\text{лет}}$	930	1800	44 000	—1 400

Первая строка — масса звезды, вторая — общая светимость, третья — амплитуда колебания в центре, если на поверхности принять $\delta R/R = 1$, четвертая — время увеличения колебаний в e раз, знак (—) означает, что колебания затухают.

Для звезд небольшой массы на главной последовательности амплитуда колебаний в центре по отношению к амплитуде колебаний на поверхности мала; соответственно слагаемое L_2 мало по сравнению с L_3 , а L_1 отрицательно — звезда устойчива. Для больших масс $(\delta R/R)_c$ вдвое больше, чем для малых, и L_1 положительно — звезда неустойчива.

Критическое значение массы, больше которой звезды неустойчивы, около $60 M_{\odot}$. Это значение зависит от химического состава $M_{\text{кр}} \sim \mu^{-2}$. Приведенные значения носят, конечно, приближенный характер и значение $M_{\text{кр}} = 60 M_{\odot}$ неточно. Но, по-видимому, можно утверждать, что звезды с $M > 100 M_{\odot}$ и с ядерными источниками энергии пульсационно неустойчивы. Заметим, что верхний предел масс известных звезд близок к $M_{\text{кр}} \approx 60 M_{\odot}$.

Однако подчеркнем, что линейная теория дает определенный закон нарастания или затухания лишь малой амплитуды колебаний, т. е. число (и знак) ω_0 в множителе $e^{\omega_0 t}$.

Если $\omega_0 > 0$ и колебания нарастают, то при определенной амплитуде включаются нелинейные эффекты, и от этих эффектов зависит окончательная судьба рассматриваемого тела. В одном случае рост колебаний останавливается при определенной амплитуде, в другом случае происходит взрыв и разрушение тела. В первом случае расчет предельной амплитуды труден, но период колебаний и сам факт колебательной неустойчивости хорошо описывается линейной теорией. В последнее время появились работы [см. Зиберт (1970), Аппенцеллер (1970)], в которых утверждается, что в звездах, даже $100 M_{\odot}$ и более, нелинейные эффекты ограничивают амплитуду пульсаций и не приводят к разрушению звезды.

Отметим, наконец, что генерация колебаний за счет ядерных реакций в центральной части звезды и затухание колебаний в обо-

лочке, характерные для звезд большой массы, получены в расчете и до сих пор не имеют прямого наблюдательного подтверждения. Хорошо известные пульсирующие переменные звезды, так называемые цефеиды, по современным взглядам представляют собой звезды не слишком большой массы (несколько M_{\odot}) на определенной стадии эволюции между главной последовательностью и гигантами.

Как показал Жевакин (1963) [см. также Кристи (1968)], в этом случае возбуждение колебаний зависит как раз от тепловых процессов в оболочке. При неполной ионизации гелия (или водорода) в достаточно толстом слое, зависимость теплопроводности от плотности и температуры такова, что колебания усиливаются.

§ 3. Устойчивость эволюции звезды

Астрономические наблюдения показывают наличие большого качественного разнообразия в мире звезд. Это разнообразие касается, например, химического и изотопного состава звезд: наблюдаются звезды, в которых содержание редких земель в 1000 раз больше среднего, звезды с отношением $C^{13} : C^{12} \approx 1$ (вместо 0,01 на Земле); известна, наконец, одна звезда с $He^3 : He^4 = 4$ (вместо обычного отношения 10^{-7}). Есть и другие аномалии. Некоторые звезды имеют аномально большие магнитные поля. Есть звезды, периодически меняющие свой блеск (цефеиды), звезды, регулярно вспыхивающие, наконец, звезды, испытывающие катастрофические взрывы (сверхновые). Известный пример вспышки сверхновой — это взрыв, давший начало Крабовидной туманности.

Очень грубо можно считать, что все недавно образовавшиеся молодые звезды, состоящие примерно из 70% водорода, 29% гелия и 1% более тяжелых элементов, похожи друг на друга. Все свойства таких звездностью определяются массой; эти звезды образуют однопараметрическое семейство. На диаграмме спектр — светимость они образуют «главную последовательность» Герцшпрунга — Рассела. Понятие молодости звезды в свою очередь зависит от скорости расходования горючего: звезда с $M \sim M_{\odot}$ достигает среднего возраста через $5 \cdot 10^9$ лет, звезда с массой $30 M_{\odot}$ исчерпывает водород и старится за $6 \cdot 10^6$ лет. Следует заметить, что звезда, почти полностью исчерпавшая водород в центре, еще не сильно отличается по внешним параметрам от совсем молодой и лишь затем начинает сравнительно быстро меняться.

Именно для периода эволюции после исчерпания водорода характерно разнообразие наблюдаемых свойств и поведения звезды. Вопросы, возникающие в связи с этой стадией эволюции, не полностью разъяснены и, по-видимому, не связаны специально с релятивистскими эффектами. Поэтому мы остановимся на них только очень кратко. Подробнее см. обзор Ибен (1967).

Какие параметры могут создавать разнообразие свойств звезд, если полагать, что все звезды первоначально конденсируются из газа примерно одинакового состава? Ведь все звезды проходят на главной последовательности летическую стадию *): звезда «забывает» об асимметрии, турбулентности и температуре облака исходного газа, из которого она конденсировалась.

Что же «запоминает» звезда, от чего может зависеть дальнейшее ее развитие? Выше упоминается основная характеристика звезды — масса. В период горения водорода, при положении звезды на главной последовательности, потеря массы пренебрежимо мала, масса сохраняется. Второй величиной, сохраняющейся во время образования звезды, является начальный химический состав. Третья сохраняющаяся величина — момент вращения звезды. По-видимому, магнитные свойства тоже следует рассматривать как врожденное свойство звезды, как инвариант. Впрочем, здесь положение отнюдь не очевидно, до сих пор не выяснено, в какой мере магнитное поле звезды является результатом усиления магнитного поля межзвездной среды при конденсации звезды. Другая возможность — появление магнитных полей как результат конвективных движений (динамоэффект) [С. И. Брагинский (1964)] (ср. теорему Бэтчелора о магнитном поле в турбулентной проводящей жидкости). Существенный прогресс в теории генерации магнитного поля достигнут в последние годы. См. работы Штеенбека (1963) и последующие работы Штеенбека, Краузе и Редлера (1966), Вайнштейна (1970). Наконец, на судьбу звезды может существенно влиять наличие близкой соседней звезды, с которой она образует тесную двойную систему [Мартынов (1965); Киппенхан, Вейгерт (1967); Пачинский (1966)]. Об этом часто забывают теоретики, между тем среди определенных классов звезд двойные весьма распространены; есть предположение, что все «новые» являются двойными. Напомним в этой связи соображения о возрасте двух компонент Сириуса (см. далее § 7 гл. 12), напомним также ограничения, налагаемые на параметры двойных звезд излучением гравитационных волн (Брагинский, 1965).

Перейдем теперь к перечислению параметров, характеризующих звезду и определяющих условия ее эволюции, к выяснению тех глубоких внутренних причин, которые могут вызвать ту или иную неустойчивость звезды. По-видимому, в целом все перечисленные факторы — вращение, магнитное поле, наличие соседней звезды — являются малым возмущением по сравнению с силой тяготения, зависящей от полной массы. Поэтому эти факторы существенно влияют на устойчивость звезды лишь в периоды, когда запас устойчивости мал. Часто (но не точно) говорят, что быстрое погло-

*) Это новообразованное слово (Бирд, 1964) происходит от названия мифологической реки Леты, отделяющей царство живых от царства мертвых. Лета — река забвения.

щение тепла может быть причиной катастрофического сжатия *), и рассматривают испускание нейтрино наравне с такими процессами, поглощающими энергию, как диссоциация железа $\text{Fe}_{26}^{56} = 14 \text{He}^4 + 4n$ или рождение пар $e^+ + e^-$. В действительности испускание нейтрино есть фактор, вызывающий изменение энтропии. Скорость испускания нейтрино входит в $\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\rho T} \frac{du_\nu}{dt}$.

При наличии стабильных решений, зависящих от S как параметра, скорость изменения энтропии определяет скорость эволюции. Скорость сжатия всегда меньше скорости света. Пока не наступило гравитационное самозамыкание, нейтрино успевают покинуть звезду (если вещество звезды прозрачно для нейтрино). Испускание нейтрино есть существенно неравновесный процесс, и в этом его резкое отличие от рождения пар e^+ , e^- или диссоциации железа.

В горячем веществе время установления равновесия e^+ , e^- пар ничтожно по всем масштабам; например, при $T_9 = 6$ это время порядка 10^{-18} сек. Следовательно, в каждый момент и в каждой точке пары находятся в полном равновесии, их количество не определяется скоростью процесса. Тепло, затраченное на образование пар, не исчезло: стоит веществу расшириться, а температуре понизиться, как число пар уменьшится; следуя равновесию, затраченное тепло выделится обратно. Равновесное рождение пар не является фактором, меняющим энтропию. Рождение пар меняет вид $P = P(\rho, S)$, т. е. меняет зависимость давления от плотности при данной энтропии. То же относится и к диссоциации железа и гелия.

В результате в определенной области температуры и плотности $\gamma = \left. \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right|_S \leq \frac{4}{3}$ и теряется устойчивость. Суть дела, конечно, заключается в том, что с учетом затраты энергии покоя e^+ и e^- или затраты энергии на преодоление ядерных сил отношение дополнительного давления новых частиц к плотности энергии оказывается малым, меньше $1/3$. Однако описание этого обстоятельства введением специальных величин $\frac{dQ}{dT}$ (Q — плотность тепловой энергии) представляется печальным следствием недооценки термодинамических методов, недооценки той ясности и простоты, которые достигаются при пользовании энтропией.

В плоскости ρ, T можно провести линию, на которой $\gamma = 4/3$ (см. рис. 33а). Эта линия отделяет область устойчивости от области неустойчивости. В самых грубых предположениях о структуре звезды можно провести линии $P(\rho, T) = aM^{2/3}\rho^{4/3} = \text{const } \rho^{4/3}$, соответствующие эволюции звезды при среднем гидростатическом

*) Для этого сжатия есть особый термин — *имплозия* (implosion — «взрыв внутрь»), в отличие от *эксплозии* («взрыв вовне» с выбросом вещества).

равновесии. Пересечение такой линии с линией $\gamma = 4/3$ означает потерю устойчивости звездой данной массы.

Например, по расчетам Имшенника и Надежина (1965) для звезды с $M = 20 M_{\odot}$ $\gamma = 4/3$ достигает при $\rho \approx 6 \cdot 10^8 \text{ г/см}^3$, $T_9 \approx 4,8$. Однако в ходе дальнейшего адиабатического сжатия после области $\gamma < 4/3$ линия $S = \text{const}$ пересекает вторую линию $\gamma = 4/3$ и снова попадает в область устойчивости. Причиной является образование большого числа нерелятивистских частиц при диссоциации железа $\text{Fe} \rightarrow \alpha + \text{n} \rightarrow \text{p} + \text{n}$ (см. сноску на стр. 250).

Таким образом, после быстрого нестационарного сжатия могла бы наступить остановка в новом состоянии равновесия, если бы большая часть массы звезды оказалась в области $\gamma > 4/3$, а эффекты ОТО были бы недостаточно сильны. В процессе остановки возникают ударные волны, которые, распространяясь к поверхности атмосферы звезды, передают энергию все меньшей массе и срывают самый наружный слой. Таков схематический механизм вспышки сверхновой, рассмотренный в работах Надежина и Франк-Каменецкого (1962; 1964а, б; 1965), Имшенника и Надежина (1964; 1965). Эти авторы подробно изучили гидродинамику процесса установления нового равновесия и сброса оболочки волной, не останавливаясь на причинах, вызвавших исходный срыв со старого равновесия. Внешние свойства рассчитанной ими картины, в общем, согласуются с наблюдениями.

Выход ударной волны на поверхность, сброс оболочки или даже разлет всей звезды могут быть обусловлены вторым важнейшим фактором, меняющим ход эволюции и много лет пропагандируемым Хойлом и Фаулером (1960; 1965) [см. также Фаулер и Хойл (1964)]; этот фактор связан с неравномерностью химического состава звезды. При отсутствии конвективного перемешивания в момент, когда в центре звезды достигнуто полное термодинамическое равновесие, вещество вблизи центра полностью превратилось в железо, в прилегающем слое содержится кислород и углерод, дальше — гелий и, наконец, во внешнем слое остается несоревешанный водород.

Превращение водорода в гелий связано со слабым взаимодействием (ввиду того, что половина протонов должна превратиться в нейтроны) и никогда не может стать быстрым; поэтому не будем учитывать энергию водорода. Но и без водорода энергия превращения более тяжелых ядер больше отрицательной энергии звезды как целого. Это значит, что запас ядерной энергии, например, реакции $20^{16} \rightarrow \text{S}^{32}$, вместе с тепловой энергией звезды достаточен для преодоления тяготения и разбрасывания всей звезды на бесконечность. Процессы $3\text{He}^4 \rightarrow \text{C}^{12}$, $2\text{C}^{12} \rightarrow \text{Mg}^{24}$, $20^{16} \rightarrow \text{S}^{32}$ не требуют превращения протонов в нейтроны, они идут за счет сильного взаимодействия (ядерных сил).

При достаточно высокой температуре, которая ослабит действие кулоновского отталкивания ядер, эти процессы могут идти за время, меньшее времени свободного падения, т. е. идти как взрывные. Фаулер и Хойл (1964) развили схему взрыва, вызванного имплозией: ударная волна, проходя через соответствующие слои, вызывает в них ядерные реакции с выделением тепла. Другими словами, ударная волна превращается в детонационную волну. Все лежащие выше слои сбрасываются с гигантскими скоростями. Но не нужно думать, что при выделении достаточного количества ядерной энергии железное ядро уцелеет. Если даже первоначально оно сожмется вследствие повышения давления при начале ядерной реакции в оболочке, то затем, лишенное наружного давления улетевшей оболочки, ядро также расширится и разлетится.

Нужно помнить, что энтропия материала ядра соответствовала равновесию ядра при данном ρ_c только при условии, что оно находится под давлением лежащих выше слоев звезды. Однако эта энтропия значительно больше равновесной S для меньшей массы, остающейся после сброса оболочки. Разумеется, если коллапс зашел далеко, то внешняя оболочка может быть сброшена, а ядро будет продолжать коллапсировать [см. работу Колгейта и Уайта (1966)]. Итак, звезда в каждый момент своей эволюции почти до полного исчерпания горючего «сидит на пороховой бочке», поскольку содержит запас горючего, достаточный для самоубийства.

В последнее время появились конкретные машинные расчеты взрыва сверхновой. По-видимому, существенную роль во вспышке сверхновой играет излучение нейтрино из центральных областей и поглощение их в оболочке. Подробнее см. § 4.

Является ли имплозия единственным механизмом, способным взорвать звезду? Насколько устойчиво в отношении теплового взрыва состояние, вполне устойчивое в гидродинамическом отношении?

При рассмотрении общего хода эволюции тепловая устойчивость связывалась с отрицательной теплоемкостью звезды как целого. Есть две причины, которые в определенных условиях создают тепловую неустойчивость.

1. Отрицательная теплоемкость характерна для невырожденной плазмы в собственном поле тяготения. При высокой плотности и не слишком высокой температуре, когда имеет место существенное вырождение электронов, теплоемкость звезды становится положительной, о чем говорилось в § 10 гл. 10 и § 1 гл. 11 (см. рис. 48). В ходе уменьшения энтропии у звезды с $M = M_\odot$ температура сначала растет, а потом убывает. При низкой температуре (по сравнению с температурой вырождения электронов при данной плотности) получается белый карлик. Убывание температуры с убыванием энтропии означает положительную теплоемкость. Это обстоятельство приводило к резкой остановке ядерной реакции,

к застыванию состава белого карлика. Падение температуры уменьшает скорость реакции; отставание реакции от теплопотерь создает условия падения энтропии, при положительной теплоемкости это ведет к снижению температуры. Следовательно, это не ведет к взрыву.

2. Рассмотрим другое обстоятельство. Отрицательная теплоемкость есть понятие, относящееся к звезде как целому, результат перестройки плотности *всей* звезды при повсеместном изменении ее энтропии. Каждый отдельный малый слой вещества в звезде имеет положительную теплоемкость, равную c_p : каждый слой находится при постоянном давлении окружающего вещества. Поэтому в принципе возможен тепловой взрыв отдельного слоя. Этот процесс затруднен вследствие того, что данный слой находится в тепловом контакте с выше и ниже лежащим веществом. С другой стороны, если взять слой слишком толстый, то увеличение энтропии в нем уже будет сопровождаться заметным уменьшением давления — теплоемкость увеличивается и в пределе, переходя через $c = \pm \infty$, теплоемкость становится отрицательной.

При достаточно сильной температурной зависимости реакции, идущей в тонком слое между выгоревшим ядром и оболочкой, возможно существование таких тепловых возмущений, относительно которых стационарный режим неустойчив. Такой тип неустойчивости был рассмотрен в работе Гуревича и Лебединского (1965); независимо этот тип неустойчивости был открыт при численном расчете эволюции звезды с $M = 10M_{\odot}$ Шварцшильдом и Хармом (1959) и проанализирован ими. Процесс взрыва с нарастанием энтропии в слое затруднен при наличии конвекции. Само возрастание энтропии в слое создает условия для конвективного перемешивания. Возможно, что тепловые взрывы, развитие которых обрывается усилением конвекции, играют роль при многократных вспышках некоторых звезд.

Аномальный состав атмосферы звезд указывает на смешение вещества, никогда не горевшего в звездах (водород, частично, вероятно, гелий), с веществом, побывавшим в недрах звезды и содержащим тяжелые ядра (Хойл, Фаулер, 1965). Эти ядра могут возникнуть лишь путем присоединения нейтронов к ядрам середины таблицы Менделеева, т. е. требуют столь высокой температуры, при которой водород не может выжить. Наконец, есть особенности состава ($\text{He}^3 : \text{He}^4 > 1$), которые, по мнению ряда авторов [Сарджент, Юдаку (1961); Фаулер, Бербиджи, Хойл (1965); Ривс (1965); Валерштейн (1962); Новиков, Сюняев (1967)], указывают на сильнейшее облучение вещества частицами с энергией, равной многим $M_{\text{эв}}$, т. е. частицами типа космических лучей, не находящимися в термическом равновесии.

Изложенное никак не претендует на исчерпывающее описание нестационарных явлений. Однако мы надеемся, что даже такой

краткий обзор дает читателю представление о характере возможной будущей теории, которая сейчас интенсивно развивается в разных научных центрах, и, может быть, привлечет новых математиков и физиков к ее разработке.

Обратимся теперь к современным теориям катастрофических вспышек сверхновых.

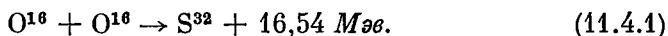
§ 4. Вспышки сверхновых *)

В течение последних нескольких лет опубликован ряд работ, которые представляют собой весьма крупный шаг в теории поздних стадий эволюции и гравитационного коллапса массивных звезд ($M > M_{\odot}$). Очень интересно установление связи этих работ с наблюдаемыми вспышками сверхновых. Классическая теория эволюции звезд, учитывающая все тонкости ядерного горения, конвекции, лучистой теплопроводности, столкнулась со специфическими трудностями еще на стадии гелиевого горения [см. Хоффмейстер и др. (1964a; 1964b), Ибен (1964)]. Поэтому поздние стадии эволюции с горением углерода, кислорода и т. п., вплоть до образования железа, приходится пока рассматривать приближенно, например, с использованием политропных моделей. Этому вопросу посвящена содержательная работа Фаулера и Хойла (1964). Одним из важных результатов этой работы является построение приближенной модели предсверхновой, т. е. звезды в момент, непосредственно предшествующий потере механической устойчивости и гравитационному коллапсу. В политропном газовом шаре с показателем политропы $n = 3$ все газовые частицы звезды проходят один и тот же эволюционный трек на фазовой плоскости плотность — температура. Это обстоятельство позволяет ограничиться в основном рассмотрением локальной эволюции в центральной точке звезды с учетом важнейших физических процессов, происходящих при высоких плотностях и температурах, таких, как вклад релятивистских электронно-позитронных пар, радиации, излучения нейтрино, различных ядерных реакций и β -взаимодействий. Количественные выводы Фаулера и Хойла относятся только к звездам очень большой массы ($M > 10M_{\odot}$), где можно пренебречь вырождением электронов. По модели Фаулера и Хойла предсверхновая для типичной звезды, с массой $30M_{\odot}$, состоит из центрального железного ядра ($3M_{\odot}$), кислородной мантии ($17M_{\odot}$), причем мантия и ядро имеют вместе структуру политропы, и разреженной водородно-гелиевой оболочки ($10M_{\odot}$). В работе показано, что непосредственной причиной потери механической устойчивости звезды и последующей имплозии является фоторасщепление ядер железа на гелий и нуклоны. У типичной звезды с массой

*) Этот параграф написан В. С. Имшенником и Д. К. Надёжиным.

ядра и мантии $20M_{\odot}$ имплозия начинается при температуре центра $T_c \approx 5 \cdot 10^9$ °K и плотности центра $\rho_c \approx 10^7$ г/см³. Перед этим в процессе эволюции центральные области звезды догорают до железа, сохраняя гидростатическое равновесие, хотя уже при $T_c \gtrsim 0,5 \cdot 10^9$ °K основным механизмом энергетических потерь, определяющим ускоренный темп эволюции, становится объемное нейтринное излучение, а не фотонные потери с поверхности звезды.

Таким образом, звезда подходит к упомянутому выше критическому состоянию. Важнейший вопрос состоит в следующем: каким образом при этом возникает взрыв, в котором выбрасывается массивная оболочка? Ведь достижение критического состояния знаменует собой начало быстрого сжатия звезды или, по крайней мере, ее центральной области. Лишенные поддержки внешние слои должны в свою очередь падать внутрь. Фаулер и Хойл пришли к выводу, что наблюдаемый эффект вспышки сверхновой может возникнуть в ходе имплозии из-за детонации кислорода мантии звезды. Следует отметить, что существование кислородной мантии одновременно с железным ядром связано с предположением об отсутствии перемешивания вещества звезды в процессе эволюции. Итак, предлагается рассматривать ядерную реакцию:



Характерную энергию $10^{50} \div 10^{52}$ эрг вспышки сверхновых II типа, которые связываются как раз с массивными звездами, может дать тогда сгорание $0,1 \div 10 M_{\odot}$ кислорода. Таким образом, Фаулером и Хойлом указано конкретное решение проблемы о связи имплозии с эксплозией и разлетом внешней части звезды в пространство. Динамика самой имплозии в описываемой работе практически не могла быть проанализирована, так как все оценки делались в грубом предположении свободного падения и адиабатического характера процесса.

В большой работе Колгейта и Уайта (1966) впервые были сделаны расчеты динамики имплозии для целого ряда масс звезд ($10M_{\odot}$, $2M_{\odot}$, $1,5M_{\odot}$, $2M_{\odot}$ + оболочка красного гиганта в $\sim 8M_{\odot}$). В расчетах были приняты во внимание эффекты релятивистского вырождения электронов и нерелятивистского вырождения нуклонов. Характер принятого в работе нейтринного излучения (оно имело смысл модифицированного УРКА-процесса, хотя не учитывало его должным образом) был таков, что центральная область звезды в ходе имплозии охлаждалась до низких температур и за счет вклада в давление нерелятивистских вырожденных нейтронов останавливалась вблизи ядерной плотности вещества ($\rho_c \sim 10^{15}$ г/см³). Однако сама по себе остановка ядра звезды, похожего на холодную нейтронную звезду, еще не вызывала существенного выброса массы внешней оболочки. Кроме того, остановка происходила уже в той области, где эффекты ОТО могли стать

существенными (динамика имплозии рассматривалась в рамках обычной нерелятивистской гидродинамики с гравитацией в ньютоновском приближении).

Важным новым достижением в работе Колгейта и Уайта является установление непрозрачности звезды для излученных в ее центре электронных нейтрино на поздних стадиях имплозии. Сечение поглощения и рассеяния нейтрино веществом зависит от энергии нейтрино как E^2 ; следовательно, чтобы средний свободный пробег нейтрино оказался меньшим размеров звезды, энергия нейтрино должна быть велика. Колгейт и Уайт предположили, что энергичные нейтрино ($E \sim 50 \text{ Мэв} \sim 5 \cdot 10^{11} \text{ }^\circ\text{К}$) рождаются на фронте мощной волны, которая отделяет холодное статическое нейтронное ядро звезды от свободно падающей на нее снаружи материи. Нейтрино с такой энергией поглощаются оболочкой звезды, следовательно, они переносят энергию, освобождаемую на границе ядра к внешним слоям звезды. Такую форму переноса энергии Колгейт и Уайт назвали *депозицией*. Депозиция приводит к нагреву оболочки и, следовательно, к возникновению в ней ударных волн, движущихся наружу. Это и есть новое решение основной проблемы теории сверхновых — переход от сжатия к взрыву. Следует, тем не менее, подчеркнуть, что численные расчеты депозиции, проведенные Колгейтом и Уайтом, служат лишь иллюстрацией существенной роли депозиции; они не являются твердыми доказательствами природы взрыва сверхновой, поскольку используемая математическая модель основана скорее на интуитивных предположениях, а не на строгом исследовании. Поэтому количественные заключения о массе сброшенной оболочки звезды (а она составляет значительную часть всей массы модели), характере расходящейся ударной волны, доле космических лучей, излучении в оптическом диапазоне — требуют существенного уточнения и могут серьезно измениться при уточнении физической стороны процессов. Колгейт и Уайт оценили также кислородную детонацию на фоне имплозии звезды и заключили, что детонация не играет важной роли в энергетическом балансе модели сверхновой. Однако последующие исследования показали, что гипотеза о важной роли детонации кислорода, выдвинутая Фаулером и Хойлом, все же имеет право на существование (см. ниже).

В работе Колгейта и Уайта имплозия звезд малой массы ($2M_\odot$ и $1,5M_\odot$) приводит к тем же самым результатам, что и имплозия звезд большой массы ($10M_\odot$), хотя непосредственной причиной имплозии является не распад железа, а поглощение вырожденных электронов ядрами (при плотности $\rho \geq 10^{11} \text{ г/см}^3$ фермиевская энергия электронов становится $\geq 20 \text{ Мэв}$, что вполне достаточно для нейтронизации любых ядер, даже He^4). Эти расчеты вызывают еще большую критику, поскольку здесь не принята во внимание конечность времен обратных β -процессов.

Вскоре вслед за работой Колгейта и Уайта появились две интересные статьи Арнетта (1966; 1967), в которых основное внимание сконцентрировано на нейтринных процессах. В противоположность Колгейту и Уайту, Арнетт нашел, что ядро звезды не охлаждается, а нагревается во время взрыва до температуры порядка $3 \cdot 10^{11} \text{ }^\circ\text{K}$ ($kT = 24 \text{ Мэв}$). Согласно Арнетту ударная волна, отделяющая сжимающееся ядро от спадающей оболочки, не играет существенной роли в рождении энергичных нейтрино. Нейтрино рождаются и поглощаются во всем ядре. Арнетт критикует приближение депозиции нейтрино Колгейта и Уайта и использует другой метод описания переноса энергии нейтрино.

После возникновения нейтринной непрозрачности для описания переноса энергии Арнеттом было принято приближение нейтринной теплопроводности, построенное по аналогии с лучистой теплопроводностью. Следует подчеркнуть, что идеологически эти работы являются развитием концепции Колгейта и Уайта, но представляются физически более последовательными. Однако недостаточность данных в области нейтринной физики и сложность нейтринных взаимодействий не позволили Арнетту полностью реализовать все преимущества приближения нейтринной теплопроводности. При определении росселандовой средней нейтринной непрозрачности Арнетт учел только эффект рассеяния нейтрино на электронах, полагая, что таким путем оценена минимальная величина непрозрачности. Вероятно, в этих оценках содержится большой произвол, даже в утверждении об их минимальности. В частности, сомнителен способ определения концентрации электронов. К тому же в этой работе показано, что конечный результат сброса оболочки весьма чувствителен к величине нейтринной теплопроводности. Арнетт (1966) учел более полно источники нейтринного излучения, чем это было сделано раньше. С этим в основном связано получение горячего нейтринного ядра звезды после остановки имплозии, а не холодного нейтронного ядра Колгейта и Уайта. В согласии с данными Колгейта и Уайта показано, что без учета нейтринной непрозрачности сброс оболочки практически не осуществляется. В своей первой работе Арнетт приходит к выводу о хорошем согласии своих результатов с результатами Колгейта и Уайта. Для испытания структурной чувствительности им же был проведен дополнительный расчет имплозии с совершенно другой моделью предсверхновой, полученной ранее в работе Чиу (1966b). В модели Чиу, полученной по классической схеме эволюции без использования приближения политропы и с включением нейтринных потерь, имеется очень плотное, почти изотермическое ядро с плотностью в центре $\rho_c \sim 10^9 \text{ г/см}^3$. Имплозия в этом случае обусловлена, аналогично малым массам Колгейта и Уайта, электронным захватом. Окончательные результаты, несмотря на большую разницу в структуре предсверхновых (кон-

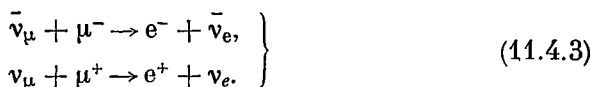
денсированная модель и модель политропы с $n = 3$), в общем, похожи друг на друга. В работе Арнетта (1966) отмечена еще возможная большая роль мюонных нейтрино, для которых оболочка звезды прозрачна при любой плотности и возникновение которых обусловлено спонтанным распадом μ -мезонов, рождающихся парами в горячем нейтронном ядре звезды *):

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (11.4.2)$$

Следующая работа Арнетта (1967) уточняет уравнение состояния вещества, которое в предыдущей работе было очень грубым, включает излучение мюонных нейтрино, дополнительно учитывает модифицированный УРКА-процесс, а также содержит некоторые другие физические уточнения задачи. В результате расчетов серии масс ($32M_\odot$, $8M_\odot$, $4M_\odot$, $2M_\odot$) автор приходит к принципиально иным выводам, чем раньше. Для двух больших масс имплозия центральных областей звезды не останавливается, и не происходит сброса массы. Здесь на результат, вероятно, наиболее существенно повлияли мюонные нейтрино, которые унесли огромную энергию $\sim 10^{54}$ эрг (в то время как электронные нейтрино уносят $\sim 10^{52}$ эрг) и не дали остановиться имплозии. Меньшее влияние мюонные потери энергии оказали на массы $4M_\odot$ и $2M_\odot$, где результаты похожи на предыдущие. Например, при массе модели $2M_\odot$ произошел сброс оболочки, и осталось горячее нейтронное ядро с массой $0,57M_\odot$, которое после остывания может стать устойчивой нейтронной звездой. Таким образом, по Арнетту (1967), звезды с массой, несколько большей $4M_\odot$, испытывают в конце концов релятивистский коллапс и не дают эффекта вспышки сверхновой. Только для звезд достаточно малой массы имплозия может сопровождаться вспышкой сверхновой. При оценке окончательных выводов Арнетта, вероятно, нужно напомнить о большой чувствительности результатов расчета к заданной величине нейтринной непрозрачности. Поэтому, например, указанная критическая масса ($4M_\odot$) может серьезно измениться. В связи с этим, следует отметить важные результаты полученные Домогацким (1969). Мюонные нейтрино, испускаемые в реакции (11.4.2), имеют среднюю энергию ~ 35 Мэв. Эти нейтрино не могут взаимодействовать с нуклонами, так как пороговая энергия такого взаимодействия, соответствующая массе μ -мезона, равна ~ 100 Мэв. Однако, как показал Домогацкий, концентрация μ -мезонов при температурах $T_9 > 200$ (в соответствии с расчетами Арнетта температура может

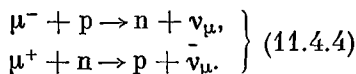
*) Этот процесс, вообще говоря, становится существенным лишь при очень высоких температурах. Для сравнения можно указать $m_\mu c^2/k = 1,2 \cdot 10^{12}$ °К. Эффективная степень температурной зависимости энергетических потерь мюонными нейтрино, как легко показать, равна $1,2 \cdot 10^{12}/T$, и соответственно она может быть очень велика в той области, где этот процесс становится существенным.

достигать $T_9 \sim 300$) так высока, что рождаемые в реакциях (11.4.2) нейтрино будут поглощаться самими же μ -мезонами:



Эти реакции, в отличие от реакций (11.4.2), не имеют порога. Средняя длина свободного пробега нейтрино при температуре $T_9 = 300$ оказывается порядка 10^5 см, что намного меньше размера сжимающегося ядра звезды. Следовательно, ядро становится непрозрачным для мюонных нейтрино!

Более того, для плотностей $\geq 10^{11}$ г/см³ (такие плотности быстро достигаются во время имплозии) основными реакциями, производящими нейтрино, будут не (11.4.2), а следующие:



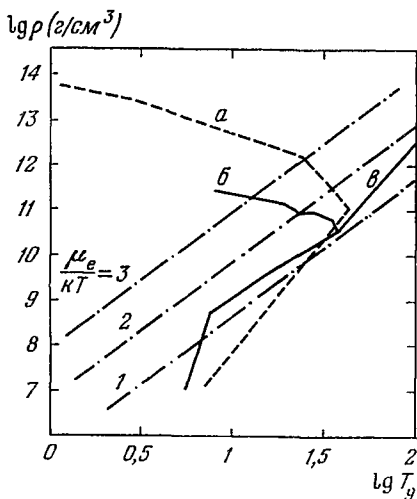
Нейтрино, рождаемые в этих реакциях, имеют энергии порядка массы покоя мюона. Принимая во внимание движение нуклонов, Домогацкий нашел, что для реакций, обратных (11.4.4), что средняя длина пробега нейтрино меньше, чем 10^5 см даже при $T_9 \geq 100$.

В свете приведенных выше результатов Домогацкого за-

Рис. 54. Физические условия в центре сжимающегося ядра звезды при различных законах нейтринного излучения, принятых в расчетах. Кривая «а» (пунктир) взята из работы Колгейта и Уайта (1966), кривые «б» и «в» получены Ивановой и др. (1967). Кривая «а» соответствует закону нейтринного излучения по Колгейту и Уайту, кривая «в» — правильному закону нейтринного излучения в модифицированном урка-процессе. Штрих-пунктиром показаны линии постоянного химического потенциала электронов в единицах kT (значения даны на рисунке).

ключение Арнетта о решающем влиянии мюонных нейтрино на динамику сжатия нуждается в пересмотре. Кроме того, для звезд малой массы, для которых устанавливается эффект сверхновой, слабым местом рассмотрения является пренебрежение конечностью времен β -процессов.

Независимым образом рассмотрение динамики имплозии массивной звезды ($10M_\odot$, $30M_\odot$) было предпринято Ивановой, Имшенником и Надежиным (1967). Они нашли, в согласии с Арнеттом, что ядро массивной звезды нагревается во время имплозии. Связь температуры с плотностью в сжимающемся ядре сильно зависит от



характера излучения нейтрино. При сжатии массивной звезды ($10M_{\odot}$, $30M_{\odot}$) нейтрино испускаются в основном в УРКА-процессе на свободных нуклонах. Иванова и др. показали, что характерное время захвата позитронов и электронов свободными нуклонами в имплозирующем ядре составляет менее одной десятой гидродинамического времени. Следовательно, во время имплозии поддерживается кипетическое равновесие между прямыми и обратными β -процессами. Большая часть электронов исчезает благодаря нейтронизации, и электронный газ оказывается не полностью, а лишь частично вырожденным ($\mu_e/kT = 1 \div 2$).

В этих условиях β -процессы не являются «замороженными», как это предположили Колгейт и Уайт; следовательно, принятая ими формула для испускания нейтрино и вывод о том, что ядро сжимающейся звезды остается холодным, некорректны. Кривая зависимости плотности от температуры для центра имплозирующей звезды, вычисленная Ивановой и др., показана на рис. 54. Кривая б на этом рисунке получена в специальном контрольном расчете с использованием некорректной формулы Колгейта и Уайта для нейтринных потерь; правильная формула для закона нейтринного излучения приводит к нагреванию центральных областей звезды (кривая в). Скорость потери энергии УРКА-процессом в случае полной прозрачности для нейтрино и антинейтрино для достаточно высоких температур ($kT \gg m_e c^2$) можно записать в виде [Иванова и др. (1967)]:

$$\varepsilon_{\nu\beta} = 1,3 \cdot 10^9 T_9^6 \alpha(T_9) \Phi \left(\frac{\rho}{T^3} \right) \text{ эрг/г} \cdot \text{сек}; \quad (11.4.5)$$

множитель $\alpha(T_9)$ учитывает зависящий от температуры химический состав (при низких температурах это железо; при высоких температурах железо распадается на свободные нуклоны). Для Fe $\alpha \approx 1$, для свободных нуклонов $\alpha = 56 \frac{(ft)_{\text{Fe}}}{(ft)_n} = 612$. При этом использована сделанная Фаулером и Хойлом (1964) минимальная оценка $(ft)_{\text{Fe}} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ сек}$. Медленно меняющаяся функция Φ учитывает вырождение электронов. В отсутствие вырождения $\Phi = 1$, с увеличением вырождения Φ уменьшается.

Иванова и др. (1967), в отличие от Арнетта (1966; 1967), учитывали поглощение нейтрино и антинейтрино в центральных областях звезды с помощью некоторого эффективного коэффициента. На каждом шаге интегрирования этот коэффициент вычислялся из известного решения уравнения переноса в центре звезды с использованием расчетных распределений температуры и плотности внутри звезды. Предварительное исследование показало, что основным процессом является учтенное в расчетах поглощение антинейтрино при взаимодействии с протонами и поглощение

нейтрино при взаимодействии с нейтронами:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu} + p &\rightarrow e^+ + n, \\ \nu + n &\rightarrow p + e^-. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.6)$$

(Рассеяние нейтрино и антинейтрино не имеет столь большого значения, как предполагалось в работах Колгейта и Уайта и Арнетта). Иванова и др. предположили, что значение эффективного коэффициента поглощения, вычисленное для центра звезды, справедливо также во всей звезде. В этом приближении, конечно, игнорируются эффекты депозиции нейтрино. Кроме того, в отличие от Арнетта, в соответствии с результатами Домогацкого (1969) не учитывались мюонные нейтрино.

Иванова и др. первыми рассмотрели детонацию кислорода (11.4.1), в расчетах динамики гравитационного коллапса. Расчет горения кислорода производился по формуле:

$$\frac{dx_{16}}{dt} = -\rho x_{16}^2 \left(\frac{T_9}{5,3} \right)^{26}. \quad (11.4.7)$$

Здесь x_{16} — весовая концентрация кислорода. В интервале температур $T_9 \approx 3 \div 5$ формула (11.4.7) с точностью до множителя порядка 1,5 аппроксимирует точное выражение, данное Фаулером и Хойлом (1964). Детонация кислорода энергетически способна вызвать разлет всей звезды. С учетом ядерной энергии полная энергия звезды в момент потери устойчивости положительна. В этом состоит принципиальное отличие детонания ядерного горючего от передачи энергии нейтринным механизмом, когда полная энергия звезды отрицательна. Нейтринная депозиция может привести лишь к выбросу части массы; при этом остаток должен попасть в новое равновесное состояние или сколлапсировать.

Энерговыделение при горении кислорода равно

$$\epsilon_{\text{дет}} = \frac{\Delta q}{2Am_p} \left| \frac{dx_{16}}{dt} \right|, \quad \Delta q = 16,54 \text{ Мэв}, \quad A = 16. \quad (11.4.8)$$

Для обоснования преимущественного синтеза кислорода было оценено время конкурирующего процесса — фоторасщепления кислорода. Оценка показала, что оно при характерных температурах и плотностях сгорания кислорода значительно превышает время горения. Горение кислорода в расчете приобретает черты детонации и приводит к существенному выделению энергии. Уравнение (11.4.7) решалось численно совместно с уравнениями газовой динамики, описывающими сжатие звезды. В начальной модели было принято, что внешняя часть звезды $10M_{\odot}$ содержит $3,6M_{\odot}$ чистого кислорода. При этом в детонационной волне сгорает почти весь кислород ($80 \div 90\%$) и выделяется энергия $\sim 3 \cdot 10^{51}$ эрг.

Опишем теперь, основываясь на упомянутых выше работах, последовательность событий, приводящих к взрыву массивной ($\geq 10M_{\odot}$) сверхновой. Понижение показателя адиабаты $\gamma = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S$ в результате фоторасщепления элементов группы железа является причиной потери звездой устойчивости. Неустойчивость по отношению к сжатию возникает, когда в центре звезды плотность и температура становятся равными $1,2 \cdot 10^7 \text{ г/см}^3$ и $5,5 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$, а радиус звезды, точнее, мантии звезды составляет $4 \cdot 10^{-2} R_{\odot}$ *). Отметим, что граница устойчивости звезд в широком диапазоне масс была ранее определена с помощью приближенного энергетического метода Бисноватым-Коганом и Кажданом (1966); см. § 10 гл. 10.

Начальная стадия сжатия слабо чувствительна к форме уравнения состояния, так как сжимающееся вещество движется в основном под действием силы тяжести, которая в несколько раз превышает силу давления. Различные аппроксимации уравнения состояния, использованные в цитированных работах, приводят на этой стадии приблизительно к одинаковому изменению плотности и температуры внутри звезды.

Когда температура достигает $\sim 20 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$ (плотность в центре при этом $\sim 10^{10} \text{ г/см}^3$), появляется много свободных нуклонов, и резко возрастает скорость нейтринного излучения. Ведущим оказывается УРКА-процесс на свободных нуклонах. Несмотря на то, что показатель адиабаты γ после окончания фоторасщепления вновь возрастает и становится больше критического значения $4/3$, ядро звезды продолжает быстро сжиматься. Скорость потерь энергии нейтринным излучением настолько велика, что ядро звезды сжимается практически с гидродинамической скоростью; сжатие обеспечивает этот расход энергии за счет гравитационной энергии. Если закон нейтринного излучения и уравнение состояния имеют степенной вид, что [согласно общей теории, Седов (1967)] сжатие под действием нейтринного излучения выходит на автомоделный режим (Надежин, 1968). Существование автомоделного решения (помимо преимуществ его использования) означает, что стадия имплозии под действием нейтринного излучения слабо чувствительна к начальному состоянию ядра звезды (начальные условия «забываются»). При температуре $40 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$ (плотность $3 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$) «оптическая» толща ядра звезды по отношению к антинейтрину становится порядка 1. Оптическая толща по отношению к нейтрину составляет в данный момент уже несколько единиц, так как нейтрину поглощается нейтронами, concentra-

*) Все приводимые далее численные данные относятся к звезде $10M_{\odot}$ и взяты из работы Ивановой и др. (1967). Случаи расхождения с данными Колгейта и Уайта (1966) и Арнетта (1966; 1967) будут рассматриваться особо.

ция которых значительно больше концентрации протонов — поглотителей антинейтрино. Спектр излучаемых звездой нейтрино и антинейтрино в момент, предшествующий наступлению непрозрачности, показан на рис. 55. Максимум приходится на энергию 8 Мэв .

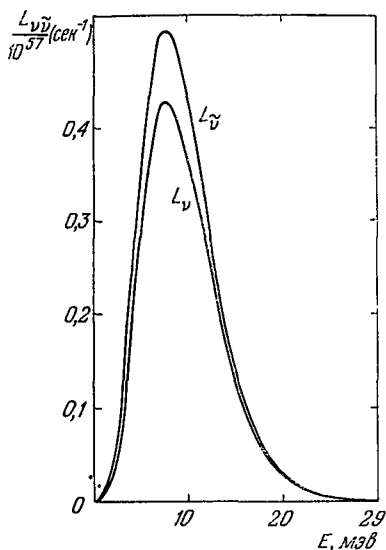


Рис. 55. Расчетная спектральная нейтринная и антинейтринная светимости сверхновой в момент, непосредственно предшествующий наступлению непрозрачности (оптические толщты по отношению к нейтрино и антинейтрино в этот момент составляют соответственно 0,6 и 0,08).

Так, например, такая же величина излученной энергии получается при рассмотрении коллапса к ядерным плотностям в приближении свободного падения, без учета поглощения нейтрино (Гусейнов, 1968).

Вместе с уменьшением нейтринных потерь резко замедляется сжатие ядра звезды, так как показатель адиабаты $\gamma \approx 5/3$ (горячий невырожденный нейтронный газ)*). Масса непрозрачного для нейтрино ядра звезды в момент максимума нейтринного блеска (рис. 56) равна $\sim 0,1 M_{\odot}$, т. е. всего 1% от массы звезды, плотность в центре $5 \cdot 10^{12} \text{ г/см}^3$. Радиус нейтринной «фотосферы», определяемый условием $\tau_{\nu} = 1$, составляет $3 \cdot 10^8 \text{ см}$, а ее температура равна $80 \cdot 10^9 \text{ }^{\circ}\text{К}$. При этом фермиевское распределение дает среднюю энергию излучаемых нейтрино и антинейтрино порядка 20 Мэв . Ядро полностью останавливается, когда центральные

*) Равновесные давление и энергия нейтринного газа на два порядка меньше, чем у нейтронного газа; это же относится и к фотонному газу.

По мере роста непрозрачности по отношению к нейтрино и антинейтрино уменьшаются потери энергии нейтринным излучением. Суммарная нейтринная и антинейтринная светимость звезды достигает максимального значения $3 \cdot 10^{53} \text{ эрг/сек}$. Нейтринная кривая блеска имеет вид острого пика с характерным временем $0,03 \text{ сек}$ и общей излученной энергией $8 \cdot 10^{51} \text{ эрг}$ (Арнетт получил в три раза большую величину). Отметим, что в более ранних работах получена оценка энергии электронных нейтрино для масс $2 M_{\odot}$ того же порядка, что и у Арнетта, а для $10 M_{\odot}$ примерно в 100 раз бóльшая, хотя полная энергия, найденная Арнеттом с учетом мюонных нейтрино, оказалась такой же. Вообще эта цифра слабо чувствительна к конкретным предположениям.

плотность и температура становятся равными $3 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$ и $140 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$. Учет мюонных нейтрино Арнеттом (1967) в приближении полной прозрачности привел к остановке ядра при значительно более высокой температуре ($\sim 300 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$) и плотности порядка ядерной. Тем не менее, даже в этом случае эффекты ОТО оказываются несущественными. Они должны сказаться на поздней

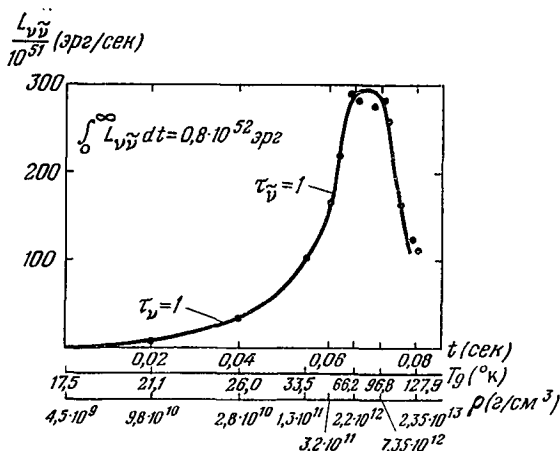


Рис. 56. Суммарная нейтринная и антинейтринная кривая блеска сверхновой, аппроксимирующая расчетные данные (точки). Приведены шкалы температуры и плотности в центре звезды, указаны моменты наступления непрозрачности по отношению к нейтрино и антинейтрино ($\tau_{\nu} = 1$, $\tau_{\bar{\nu}} = 1$) и полная излученная энергия в виде нейтрино и антинейтрино, равная $8 \cdot 10^{51} \text{ эрг}$.

стадии, когда массивное остановившееся ядро охладится и испытает общерелятивистский коллапс.

В момент остановки ядра звезды начинает формироваться расходящаяся ударная волна, усиливающаяся за счет эффектов депозиции нейтрино и (или) детонации кислорода. Ударная волна возникает также и в случае отсутствия депозиции и детонации за счет простого газодинамического отражения и эффекта кумуляции энергии вблизи фронта волны в атмосфере со спадающей плотностью, но сила ударной волны при этом настолько мала, что этот процесс вряд ли имеет отношение к вспышкам сверхновых.

Пока основным параметром, по которому теория сверхновых связывается с наблюдением, является энергия, вынесенная в космическое пространство в виде света и кинетической энергии выброшенной оболочки. Согласно Шкловскому (1966) энергия взрыва сверхновых II типа достигает $10^{51} \div 10^{52} \text{ эрг}$, а I типа — 10^{50} эрг . В расчетах Колгейта и Уайта (1966) и Арнетта (1967) депозиция

нейтрино в массивной сверхновой вполне обеспечивает большую энергию взрыва порядка 10^{52} эрг. В расчетах Ивановой и др. (1967) без учета депозиции нейтрино, но с детонацией кислорода, получается кинетическая энергия оболочки $3 \cdot 10^{50}$ эрг (чисто газодинамический эффект без детонации и депозиции дает около 10^{49} эрг). Напомним, что энергия, выделившаяся при сгорании кислорода, составила $3 \cdot 10^{51}$ эрг, т. е. лишь небольшая ее доля ($\sim 10\%$) переходит в кинетическую энергию выброшенной оболочки. Основная часть выделившейся энергии расходуется на подъем вещества в собственном поле тяжести. Найденная энергия лежит вблизи нижней границы указанного Шкловским разброса энергий взрыва сверхновых. В последнее время появилась работа (Поведа и Волчер, 1968), авторы которой, интерпретируя наблюдательные данные, сделали вывод, что средняя энергия взрыва сверхновых II типа составляет $4 \cdot 10^{49}$ эрг. К уменьшенной оценке энергии взрыва можно также прийти на основе результатов работы Гордона (1967).

Отметим, однако, что не исключена модель сверхновой, в которой кислород смог бы прдетонировать, находясь в области с малым гравитационным потенциалом, и сообщить необходимую энергию выброшенной оболочке. В этом случае причиной детонации не может быть сжатие звезды в результате фоторасщепления элементов группы железа или нейтронизации вещества, так как такое сжатие непременно затягивает кислород или какое-либо другое термоядерное топливо в область с большим гравитационным потенциалом. Фрейли (1968), например, показал, что у звезд с очень большой ($\geq 40 M_{\odot}$) массой эволюционная стадия горения кислорода в центральном конвективном ядре носит взрывной характер, как только рождение электронно-позитронных пар ослабляет устойчивость звезды относительно сжатия, причем энергия взрыва достаточна для сброса значительной доли массы звезды.

На динамику имплозии может оказать влияние до сих пор не учтенное в расчетах вращение звезды. Согласно грубым оценкам [Колгейт и Уайт (1966); Иванова, Имшенник, Надежин (1969)], вращение может само остановить коллапс к моменту наступления непрозрачности по отношению к нейтрино, а в случае нетвердотельного закона вращения с возрастанием угловой скорости к центру — даже на стадии полной прозрачности для нейтрино. В таком случае единственным механизмом взрыва остается детонация ядерного горючего. Первая попытка рассчитать сжатие вращающейся звезды на основе двумерных уравнений гидродинамики сделана Дьяченко, Зельдовичем, Имшенником и Палейчик (1968).

В связи с перечисленными соображениями гипотеза Фаулера и Хойла о детонации ядерного горючего как основном источнике

энергии взрыва сверхновых по-прежнему остается в силе и не уступает в этом отношении гипотезе Колгейта и Уайта о ведущей роли депозиции нейтрино.

Наименее развитой является теория взрывов звезд малой массы ($1,5 \div 2M_{\odot}$), связываемых со вспышками сверхновых I типа. Исследование взрывов звезд такой массы приобретает особый интерес, так как именно в этом случае должны в основном рождаться устойчивые нейтронные звезды, отождествляемые в настоящее время с пульсарами.

Здесь возникает много новых вопросов, связанных с уравнением состояния, нейтринным излучением и соотношением между временем нейтронизации и гидродинамическим временем. Чететкин (1969) рассмотрел горячую нейтронизацию элементов группы железа и роль переобогащенных нейтронами ядер. Имшенник и Чететкин (1970) исследовали термодинамику вещества в условиях свободного выхода из системы нейтрино и антинейтрино, основываясь на кинетическом равновесии β -процессов (при температурах $5 \leq T_9 \leq 20$ и плотностях $10^8 \text{ г/см}^3 \leq \rho \leq 10^{12} \text{ г/см}^3$). Вследствие чрезвычайной медленности β -процессов нейтронизация не может привести к быстрому развитию гидродинамического сжатия звезды. Нейтринное излучение в области горячей нейтронизации с оценкой вклада переобогащенных нейтронами ядер обсуждается в работах Цуруты и Камерона (1965) и Надежина и Чететкина (1969). Роль парных столкновений нуклонов, сопровождаемых β -процессами, рассмотрена Копысовым и Кузьминым (1968).

В отличие от Колгейта и Уайта и Арнетта, рассчитавших динамику взрыва звезды малой массы на основе равновесной нейтронизации и депозиции нейтрино, Хансен и Уилер (1969) исследовали динамику взрыва, в ходе которого происходит детонация углерода. В качестве начальной модели был взят изотермический белый карлик с массой $1,42M_{\odot}$, температурой 10^8 K и центральной плотностью $7 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$, состоящий на 90% из C^{12} и на 10% из Mg^{24} . Предполагалось, что в ядре звезды с массой $0,5M_{\odot}$ весь Mg^{24} после мгновенного электронного захвата переходит в Na^{24} . В результате скачкообразного увеличения молекулярного веса (на $\sim 1,6\%$) начинается гидродинамическое сжатие с повышением температуры, в процессе которого возникает мощная углеродная вспышка. Звезда разлетается полностью со средней скоростью 7000 км/сек и энергией $8 \cdot 10^{50} \text{ эрг}$. Излучение нейтрино в такого рода моделях, очевидно, несущественно. Физические условия внутри белых карликов в связи со вспышками сверхновых рассматривались в ряде работ [Хойл и Фаулер (1960); Шацман (1963); Бисноватый-Коган и Сеидов (1969)]. Термоядерным взрывам звезд достаточно малой массы посвящена также работа Арнетта (1969). Вместо того, чтобы сразу рассматривать звезду вблизи границы гидродинамической устойчивости, Арнетт рассчитал гидростатическую

эволюцию (правда, с использованием некоторых приближений) звезды умеренной массы ($4M_{\odot} < M < 9M_{\odot}$), в которой эффекты вырождения электронного газа играют определяющую роль в уравнении состояния. Углеродное ядро такой звезды, окруженное гелиевым слоевым источником энергии, постепенно растет по массе с одновременным увеличением плотности и температуры. Когда масса ядра оказывается вблизи чандрасекаровского предела $1,37M_{\odot}$ с центральной плотностью $3 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$, развивается вначале тепловой взрыв горения C^{12} , а потом (при центральной температуре выше $2 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$) гидродинамический взрыв с распространением расходящейся от центра детонационной волны. В этом взрывном процессе сгорает все углеродное ядро звезды с выделением достаточной энергии $2 \cdot 10^{51} \text{ эрг}$ для обеспечения эффекта сверхновой. Гравитационная энергия очень мала, в отличие от предыдущих случаев. Важно, что эта модель сверхновой не связана с потерей механической устойчивости звезды и гравитационным коллапсом, свойственным, в числе других, и модели Хансена и Уилера. Она названа автором термоядерной моделью сверхновой. Особенностью моделей Хансена и Уилера и Арнетта можно назвать отсутствие остатка в виде нейтронной звезды, так как имеет место полный разлет всей массы.

Интересным является вопрос о роли магнитного поля при взрывах сверхновых. На основе косвенных соображений о существовании магнитных полей в пульсарах (Голд, 1968), а также исходя из измерений поляризации радиоизлучения остатка сверхновой Кассиопеи А (Майер, 1968), можно прийти к выводу о возникновении очень сильных магнитных полей (порядка $10^9 \div 10^{10} \text{ гс}$) в процессе имплозии. Бисноватый-Коган (1970) предположил, что магнитное поле может быть причиной переноса момента во вращающейся коллапсирующей звезде от центральных областей наружу, т. е. магнитное поле может оказаться эффективным переносчиком гравитационной энергии, выделяющейся при сжатии ядра, в промежуточные слои и тем самым играть ту же роль в динамике сверхновой, что и депозиция нейтрино. Магнитное поле во вращающейся звезде может быть ответственным за асимметрию выброса вещества (Иванова и др., 1969).

Таким образом, в современном состоянии теория сверхновых имеет довольно много степеней свободы, но все же центральное место в ней занимает проблема потери устойчивости звездой на поздних стадиях эволюции после истощения в ядре запасов ядерной энергии. Последующий процесс имплозии звезды непременно должен сопровождаться мощным нейтринным излучением. Детектирование этого излучения (Домогацкий и Зацепин, 1969а, б) позволит сделать огромный шаг в теории сверхновых, в частности, и в теории поздних стадий эволюции звезд вообще. Согласно Арнетту (1966; 1967) и Ивановой и др. (1967), электронные нейтрино

излучаются с полной энергией $\sim 10^{52}$ эрг в течение $\sim 3 \cdot 10^{-3}$ сек со средней энергией частиц ~ 20 Мэв. Тогда, аналогично Арнетту (1966), можно получить, что число отсчетов на измерительной установке Дэвиса (1968) будет превышать 10, если сверхновая будет находиться не дальше 5 кпс, т. е. в пределах нашей Галактики.

Очень важным является вопрос о кривой блеска сверхновой. Сопоставление с наблюдениями кривых блеска, полученных из теоретических расчетов, должно дать ценную информацию о параметрах, характеризующих звезду непосредственно перед вспышкой, таких, как масса, радиус, скорость спадания плотности вблизи поверхности звезды. Распространение сильной ударной волны в среде с понижающейся плотностью обладает тем свойством, что значения газодинамических величин (давления, скорости и т. д.) очень слабо зависят от предыстории возникновения ударной волны. Основными характеристиками, определяющими процесс, являются полная энергия, заключенная в движущемся газе, и закон спадания плотности. Для степенного закона спадания плотности, который приближенно выполняется во внешних слоях звезды, распространение сильной ударной волны является автомодельным [Гандельман, Франк-Каменецкий (1956)], и результат совсем не зависит от конкретного вида начальных условий. Это обстоятельство позволяет при теоретическом изучении взрыва сверхновой рассматривать выход ударной волны отдельно от механизма генерации ударной волны вблизи центра звезды. Связующим параметром является полная энергия газа, движущегося за ударным фронтом. Выброс оболочки ударной волной исследован в работах Надежина и Франк-Каменецкого (1962; 1964б). В работе Имшенника и Надежина (1964) была сделана попытка объяснить кривую блеска сверхновой II типа путем расчета выхода ударной волны с учетом лучистой теплопроводности и рекомбинации водорода в расширяющейся оболочке. Основная идея этой работы состоит в том, что кривая блеска сверхновой есть результат высвечивания тепловой энергии внешних слоев звезды, нагретых сильной ударной волной. В качестве предсверхновых были взяты политропы индекса 3 с массами $15 M_{\odot}$ и $50 M_{\odot}$, радиусами соответственно $9 R_{\odot}$ и $20 R_{\odot}$. Выход ударной волны на поверхность сопровождается резким пиком светимости. Хотя светимость у сверхновых II типа в максимуме и достигает наблюдаемой величины ($M_{\text{bol}} \sim -21^m$), но продолжительность свечения ничтожно мала (~ 20 мин вместо ~ 20 дней). Светимость падает из-за быстрого расширения и адиабатического охлаждения внешних слоев, поскольку плотность еще довольно высока, и лучистой теплопроводностью можно пренебречь. В результате дальнейшего понижения температуры начинается рекомбинация водорода, основным механизмом охлаждения становится перенос энергии излучением, и возникает так называемая волна охлаждения, впервые описанная

Зельдовичем, Компанейцем и Райзером (1958) на примере взрыва в воздухе. Расчетная кривая блеска выходит на плато со значением светимости $M_{\text{bol}} = -13^m \div -15^m$. Такая светимость сохраняется приблизительно в течение $50 \div 100$ дней. Излучение поддерживается в основном за счет энергии, освобождающейся при рекомбинации водорода. Этот участок теоретической кривой блеска хорошо совпадает (как по величине, так и по продолжительности) с платообразным участком после известного излома на наблюдаемых кривых блеска сверхновых II типа *). Основная энергия излучается сверхновой за ~ 20 дней вблизи максимума блеска ($M_{\text{bol max}} = -21^m$), но последующий платообразный участок, тем не менее, отчетливо заметен на наблюдаемых кривых блеска. Совершенно ясно, что увеличение радиуса начальной модели звезды, которое приводит к возрастанию времени адиабатического охлаждения внешних слоев звезды, должно дать увеличение продолжительности свечения вблизи максимума. С этой целью был выполнен расчет для начальной модели $M = 30M_{\odot}$, $R = 500 R_{\odot}$, $L = 2 \cdot 10^5 L_{\odot}$ (желтый сверхгигант) (Грасберги Надежин (1969b)). Увеличение радиуса в ~ 50 раз, по сравнению с начальными моделями Имшенника и Надёжина (1964), привело к тому, что продолжительность пика светимости возросла до ~ 1 дня, а максимум блеска остался приблизительно тем же ($\sim -21^m$). При этом энергия движущегося газа за ударной волной, которая является свободным параметром задачи, была принята такой, чтобы скорость разлетающейся оболочки была порядка наблюдаемой у сверхновых II типа (~ 5000 км/сек). Как следует из расчетов, максимум блеска сверхновой достигается, когда радиус увеличивается по сравнению с начальным всего лишь в $\sim 1,5$ раза. Таким образом, восходящая ветвь кривой блеска сверхновой вызвана в основном прогревом поверхностных слоев, а не увеличением размеров светящейся поверхности. Это соображение дает возможность по наблюдаемым светимости ($\sim -21^m$) и температуре ($\sim 4 \cdot 10^4$ °K) сверхновой вблизи максимума блеска оценить радиус предсверхновой, который получается равным $\sim 10^4 R_{\odot}$. Такие большие радиусы могут иметь красные сверхгиганты спектрального класса M2, а также открытые недавно инфракрасные звезды. Расчет прохождения ударной волны через атмосферу такой звезды осложняется тем, что до сих пор не существует удовлетворительных моделей красных сверхгигантов. Однако этот пробел в теории строения звезд не является столь серьезным препятствием, чтобы отказаться от исследования распространения

*) В работе Имшенника и Надёжина (1964) при обсуждении результатов были использованы устаревшие данные о сверхновых II типа, и поэтому обсуждаемый участок кривой блеска был ошибочно отнесен к максимуму блеска сверхновой. На это обстоятельство было обращено внимание Шкловским (1966).

мощных ударных волн в протяженных атмосферах. Дело в том, что для ударной волны, распространяющейся со скоростью $(5 \div 10) \cdot 10^3$ км/сек и нагревающей газ за фронтом до температуры порядка $(50 \div 100) \cdot 10^3$ °К, практически не имеет значения, находится ли вещество атмосферы в гидростатическом равновесии или движется со скоростью $10 \div 100$ км/сек, является ли оно абсолютно холодным или имеет температуру $(5 \div 10) \cdot 10^3$ °К. В связи с этим отметим, что протяженная атмосфера может образоваться путем медленного истечения вещества из звезды на эволюционной стадии предсверхновой (Бисноватый-Коган и Зельдович, 1968). Некоторые свидетельства в пользу существования протяженной атмосферы у сверхновых (к сожалению, только косвенные) приведены в работе Поведы и Волчера (1968). Укажем также на работу Барбаро и др. (1969), в которой предсверхновая связывается с красным сверхгигантом.

Распространение ударной волны в очень разреженной атмосфере существенно отличается от ее движения в плотной атмосфере. Впереди ударной волны распространяется тепловая волна, которая имеет значительно большую протяженность, чем толщина ударного фронта. Этот вопрос подробно рассмотрен в монографии Зельдовича и Райзера (1966). Возникновение тепловой волны в упомянутом выше расчете для желтого сверхгиганта с радиусом $R = 500 R_{\odot}$ также способствовало резкому увеличению продолжительности свечения вблизи максимума: от 20 минут до одного дня. Отметим, что у желтого сверхгиганта после максимума блеска также получился платообразный участок кривой блеска приблизительно с теми же параметрами, что и раньше. Таким образом, в отличие от области вблизи максимума, плато кривой блеска, вызванное волной охлаждения, слабо чувствительно к радиусу предсверхновой. Как показано Имшенником и Надёжиным (1964), основным определяющим параметром волны охлаждения является потенциал ионизации вещества.

В последнее время на основе уравнений газовой динамики с лучистой теплопроводностью был рассчитан выход ударной волны в протяженную атмосферу с радиусом $5000 \div 10\,000 R_{\odot}$ (Грасберг и Надёжин (1969a, b)). На рис. 57 показана теоретическая кривая блеска и характеристики фотосферы сверхновой. Первоначальный подъем светимости (участок *AB*) является результатом прогрева газа тепловой волной, распространяющейся впереди вязкого скачка. Участок *BC* соответствует распространению ионизационной волны. В момент, отвечающий точке *C*, водород оказывается полностью ионизованным. Дальнейший подъем светимости вплоть до максимума связан с интенсивным прогревом оболочки лучистой теплопроводностью, переносящей энергию от вязкого скачка к поверхности звезды. Максимум блеска (*D*) достигается в момент, когда начинает преобладать конкурирующее с нагревом

высвечивание оболочки. К моменту (E) в расширяющейся оболочке развивается волна охлаждения. В основных чертах полученные характеристики сверхновой удовлетворительно согласуются с наблюдениями. Отметим также, что кривые блеска, соответствующие взрыву компактных моделей Имшенника и Надёжина (1964), хорошо совпадают с наблюдениями аномальных сверхновых NGC 5457, NGC 6946 (1948) и NGC 5236 (Минковский, 1964). У этих звезд, по-видимому, перед взрывом по каким-либо причинам отсутствовали протяженные атмосферы. Не исключено, что частота

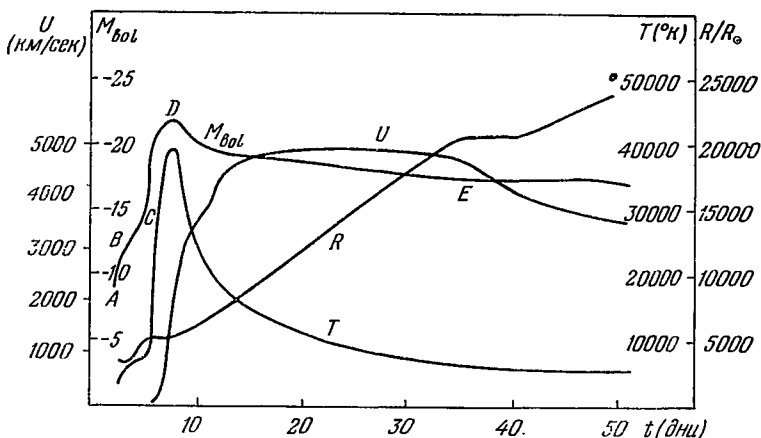


Рис. 57. Расчетная фотонная болометрическая кривая блеска сверхновой. Показано также изменение со временем радиуса, температуры и скорости вещества, проходящего через фотосферу.

вспышек таких аномальных сверхновых может оказаться довольно высокой, так как наблюдательные данные, возможно, сильно искажены селективным эффектом (эти сверхновые на $5^m \div 6^m$ слабее типичных сверхновых II типа).

Потеря энергии с фронта ударной волны, распространяющейся в протяженной атмосфере, и перекачка этой энергии в нестационарную тепловую волну, движущуюся впереди вязкого скачка, приводит к «сгребанию» вещества атмосферы и выбросу его в виде тонкой плотной оболочки (Грасберг, Надёжин, 1969б). При этом, правда, требуется дальнейшее исследование возможной в данной ситуации рэлей-тейлоровской неустойчивости. При выходе ударной волны в обычную компактную атмосферу не возникает минимум плотности между улетающей оболочкой и остатком [Надёжин и Франк-Каменецкий (1964б); Имшенник и Надёжин (1964)]. Во всех расчетах выхода мощной ударной волны в протяженную оболочку звезды для описания переноса энергии излучением использовалось приближение лучистой теплопроводности, которое

предполагает локальное термодинамическое равновесие между излучением и веществом.

При очень высоких температурах и малых плотностях вещества в оболочке сверхновой доминирующая роль среди процессов взаимодействия квантов с частицами вещества принадлежит комптоновскому рассеянию. При этом оказывается, что эффект изменения энергии фотонов при рассеянии излучения обеспечивает обмен энергии между квантами и электронами в степени, достаточной для поддержания термодинамического равновесия в большей части оболочки сверхновой. Во всяком случае, структура мощной стационарной ударной волны, идущей по слою постоянной плотности, вычисленная Морозовым (1971a) с учетом комптоновского эффекта, оказалась такой же, как и в приближении лучистой теплопроводности. Однако при приближении ударной волны к поверхности звезды следует ожидать существенного возрастания роли нестационарных эффектов, ведущих к значительной неравновесности излучения и вещества. На основе релятивистски ковариантных уравнений переноса излучения в движущемся веществе, полученных Имшенником и Морозовым (1969), дополнительный учет эффекта Комптона был произведен Морозовым (1971b). Эти уравнения должны быть положены в основу количественных расчетов, которые помогут выявить роль нестационарных эффектов в нарушении равновесия между излучением и веществом.

Вполне возможно, что ряд особенностей, наблюдаемых у сверхновых звезд, объясняется важными физическими процессами, не учтенными в расчете и обеспечивающими длительную передачу энергии оболочке от нейтронной звезды, образовавшейся в центре.

В пионерской работе Кардашева (1964) была указана возможность передачи вращательного момента и энергии с помощью магнитных силовых линий от быстро вращающейся нейтронной звезды медленно вращающемуся веществу оболочки. Различия скоростей вращения приводит к растяжению силовых линий и усилению магнитного поля. При этом существенную роль может играть синхротронное излучение.

В настоящее время после открытия пульсаров становится совершенно очевидным, что нейтронная звезда (образовавшаяся в результате взрыва сверхновой в недрах последней) является могучим источником энергии и способна поддерживать свечение оболочки сверхновой и ее расширение. Наряду с магнитным механизмом возможен также нагрев рентгеновским излучением пульсара.

Напомним, что старые пульсары излучают лишь в радиодиапазоне, однако пульсар в Крабовидной туманности (возраст ~ 1000 лет) излучает также в оптическом и рентгеновском диапазоне, причем в последнем отдается более 50% всей энергии. Недавно получено сообщение о пульсаре с периодом 0,07 сек, обнаруживающем себя только в рентгеновском диапазоне.

Гипотеза Кардашева об обмене энергией между нейтронной звездой и оболочкой в настоящее время становится общепризнанной, хотя механизм передачи, возможно, иной. Значительно труднее вопрос о взаимодействии оболочки с релятивистски коллапсирующей звездой. В этом случае только акреция может служить источником энергии. Этот вопрос будет обсуждаться ниже.

В целом вырисовывается весьма важная, не решенная до настоящего времени задача: нельзя ли по кривым блеска отличить взрыв сверхновой с образованием коллапсирующей звезды от взрыва с образованием нейтронной звезды.

Отметим также ряд работ: Борст (1950), Бааде, Кристи, Бербидж, Фаулер, Хойл (1956), Андерс (1959), в которых кривые блеска сверхновых (преимущественно I типа) предполагается объяснить с помощью распада неустойчивых изотопов калифорния и элементов группы железа. Такие изотопы могут появиться в наружных слоях звезды благодаря ядерным реакциям, протекающим при высоких температурах в мощной ударной волне. После выхода ударной волны неустойчивые изотопы распадаются и служат источником излучаемой энергии.

Вопрос о максимуме кривой блеска также затрагивается Колгейтом и Уайтом (1966). Путем грубых оценок они пришли к выводу, что высвечивания тепловой энергии внешних слоев, нагретых ударной волной, недостаточно для объяснения наблюдаемых максимумов блеска. Напомним, что радиус принятой ими модели звезды перед взрывом составлял $10^{-2} \div 10^{-1} R_{\odot}$, и поэтому их результат, грубо говоря, совпадает с данными Имшенника и Надёжина (1964) для компактных моделей. Энергетическим источником свечения сверхновых, по мнению Колгейта и Уайта, может быть β -распад нестабильных ядер, выброшенных вместе с оболочкой из недр звезды. В последней работе Колгейт и Мак Ки (1969) в результате весьма тщательного анализа пришли к выводу, что в основных чертах кривые блеска сверхновых могут быть объяснены выбросом оболочки, обогащенной радиоактивным элементом Ni^{56} в количестве $0,35 M_{\odot}$. Полная энергия β -распада, равная $\sim 10^{49}$ эрг, выделяется путем двухступенчатого перехода $\text{Ni}^{56} \rightarrow \text{Co}^{56} \rightarrow \text{Fe}^{56}$ со средним временем жизни первой ступени 6,1 дней и второй ступени 77 дней. Наилучшее совпадение с кривыми блеска сверхновых (в основном I типа) дают варианты расчета с очень высокой средней плотностью кинетической энергии оболочки, $1,6 \cdot 10^{18}$ эрг/г, что существенно превышает энергию за счет термоядерного взрыва [в три раза больше плотности энергии по Арнетту (1969)]. Зато температура планковского излучения вблизи максимума блеска составляет всего 6500 °K, что требует довольно произвольного предположения о флуоресценции гелия для объяснения наблюдаемой цветовой температуры около 40 000 °K. Пря-

мые измерения излучения сверхновой в ультрафиолетовой области могли бы показать, какова эффективная температура.

Моррисон и Сартори (1969) предложили объяснять кривые блеска сверхновых флуоресценцией межзвездной среды. Эта гипотеза, однако, встречает серьезные энергетические трудности [Колгейт и Мак Ки (1969); Грасберг и др. (1971)].

Интересен вопрос о происхождении космических лучей при взрывах сверхновых. Колгейт и Уайт (1966) приходят на основе расчетов к выводу, что доля массы звезды, равная 10^{-4} , расположенная на периферии, выбрасывается с релятивистскими энергиями свыше $2m_{\text{пр}}c^2$. Для поддержания энергетической плотности космических лучей $5 \cdot 10^{-14}$ эрг/см³ в объеме Галактики, равном $5 \cdot 10^{68}$ см³, при их времени жизни $2 \cdot 10^8$ лет требуется одна вспышка сверхновой в $10 M_{\odot}$ за $1,5 \cdot 10^4$ лет. Ускорение частиц до релятивистских энергий ударной волной в атмосфере звезды рассматривалось также Надёжиным и Франк-Каменецким (1964а), которые показали, что выход релятивистских частиц сильно зависит от величины параболической скорости. Если предсверхновая близка по размерам к звездам главной последовательности, то выход релятивистских частиц за счет прямого газодинамического ускорения окажется ничтожным. Таким образом, роль сверхновых в происхождении космических лучей зависит от выяснения деталей строения предсверхновой. С определенностью можно только сказать, что механизм прямого газодинамического ускорения оказывается эффективным только для компактных моделей предсверхновой (с радиусом $< 0,1 R_{\odot}$). Такие звезды могут возникнуть на поздних стадиях эволюции или благодаря непрерывному полному перемешиванию продуктов ядерного горения по всей звезде или за счет потери, водородно-гелиевой оболочки путем истечения вещества.

В заключение кратко сформулируем основные результаты теории сверхновых.

Механизм взрыва. Современная теория допускает два способа выброса оболочки: 1) за счет выделения энергии в термоядерных реакциях углерода $\text{C}^{12} + \text{C}^{12}$ или кислорода $\text{O}^{16} + \text{O}^{16}$; 2) благодаря эффективной перекачке гравитационной энергии быстро сжимающегося ядра звезды к ее оболочке (роль переносчика энергии играет нейтрино и (или) магнитное поле). Дальнейшие исследования должны выяснить относительную роль этих механизмов.

Нейтринное излучение. Коллапс ядра звезды сопровождается мощным излучением электронных и мюонных нейтрино. Энергия, теряемая в виде электронных нейтрино, достигает 10^{52} эрг (излучается $\sim 3 \cdot 10^{56}$ нейтрино со средней энергией ~ 20 Мэв). Энергия, теряемая в виде мюонных нейтрино, может оказаться на один-два порядка больше. Если по каким-либо причинам ядро

сверхновой звезды не коллапсирует (противодействующая роль вращения или термоядерный взрыв вследствие тепловой неустойчивости вырожденного вещества), то нейтринное излучение должно оказаться значительно более слабым. Поэтому для теории решающую роль будет иметь детектирование нейтринного излучения от сверхновой.

Фотонное излучение. Для объяснения кривых блеска потерями тепловой энергии, вынесенной в оболочку ударной волной, необходимо предположить существование у сверхновых звезд очень протяженных атмосфер с размерами $10^3 \div 10^4 R_{\odot}$. Альтернативным механизмом может быть также выделение энергии в распадах радиоактивных элементов, выброшенных из сверхновой звезды ударной волной, а также подпитка излучения за счет нейтронной звезды. Здесь, однако, могут возникнуть трудности, связанные с требованием большого количества радиоактивного вещества. Прямое измерение ультрафиолетового излучения сверхновых вблизи максимума блеска поможет решить вопрос о радиусе предсверхновой.

Рентгеновское излучение и γ -излучение могут быть следствием радиоактивного распада или возникать благодаря нарушению теплового равновесия между излучением и веществом в протяженной разреженной оболочке сверхновой. В этом направлении необходимы дальнейшие исследования, в том числе поиски характерных линий γ -излучения.

Космические лучи. Роль прямого газодинамического ускорения частиц до релятивистских энергий зависит от модели предсверхновой. Значение других механизмов ускорения при вспышках сверхновых пока остается не ясным.

Ядерный синтез. Образование тяжелых элементов при высоких температурах и плотностях в центральной части сверхновой является надежно установленным фактом. Однако необходимо выполнить дополнительные тонкие расчеты для выяснения количества и изотопного состава вещества, прошедшего через стадию быстрого охлаждения в процессе выброса оболочки сверхновой.

Важный вопрос о массе выбрасываемого при взрыве сверхновой вещества рассматривается в Приложении (стр. 465).

§ 5. Физика нейтронных звезд

Нейтронная звезда в положении D_3 на рис. 52 находится в квазиравновесном состоянии. Теории таких звезд посвящено большое количество работ последнего времени. Состояние вопроса до открытия нейтронных звезд как пульсаров дано в обзоре Уилера (1966); там же имеется подробная библиография. Современное состояние вопроса дано в обзоре Камерона (1970). О нейтронных звездах как пульсарах см, гл. 13,

Как уже отмечалось, нейтронное ядро звезды окружено оболочкой, состоящей из ядер и вырожденных электронов; самые поверхностные слои состоят из обычной плазмы. В действительности картина может быть сложнее: возможно, что поверхностная корка имеет кристаллическую структуру; см., например, Камерон (1970). Сразу после образования (после коллапса) нейтронная звезда будет сильно нагрета. Однако, какие бы процессы ни привели звезду в положение D_2 (см. рис. 52), звезда, как указал Чиу (1964), не может длительно иметь температуру, большую нескольких миллиардов градусов, ибо в противном случае интенсивное рождение пар ($\nu, \bar{\nu}$), моментально покидающих звезду, быстро охладило бы ее. Как самую простейшую картину можно принять следующую. Во всех внутренних частях звезды, где имеется газ вырожденных частиц, теплопроводность чрезвычайно высока, так как определяется вырожденными электронами. Поэтому ядро нейтронной звезды изотермично (или, более точно, в соответствии с релятивистской термодинамикой $T \sim (g_{00})^{-1/2}$) и только в самой внешней оболочке имеется градиент температуры. Строение внешней оболочки можно рассчитать, так как радиус и масса нейтронной конфигурации уже известны, а определенной температурой недр можно задаться. В результате можно определить поверхностную температуру звезды и ее светимость. В первых расчетах поверхностная эффективная температура составляет примерно 10^{-2} от центральной температуры [см., например, Бакал и Вольф (1965a, b); Цурута и Камерон (1965)]. Если $T_c \approx 10^8$ °K, то $T_e \approx 10^6$ °K (см. табл. XIII). Время остывания нейтронной звезды после ее образования зависит от запаса тепловой энергии и процессов ее потери. Согласно Бакалу и Вольфу (1965) запас тепловой энергии определяется выражением

$$E_T = 5 \cdot 10^{47} \left(\frac{T_c}{10^8} \right)^2 \left(\frac{\rho}{3.7 \cdot 10^{14}} \right)^{-2/3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \varepsilon p g. \quad (11.5.1)$$

Эта величина подсчитана без учета возможной сверхтекучести нейтронного вещества звезды. На такую возможность указали Гинзбург и Киржниц (1964). Если вещество звезды в существенной доле массы действительно окажется сверхтекучим, то приведенная оценка E_T сильно уменьшится, как и оценка времени остывания, приводимая ниже. Подробнее о роли сверхтекучести и сверхпроводимости в звездах см. главу о пульсарах.

Охлаждение нейтронной звезды происходит путем излучения нейтрино из центральных частей, где велика температура, и фотонного охлаждения с поверхности (Цурута и Камерон, 1965). При очень больших внутренних температурах наиболее важным процессом, приводящим к рождению нейтрино, является, как уже

Таблица XIII

Сравнение излучения Солнца и нейтронной звезды
с $R=10$ км и $T_e = 10^6$ °K (по Уилеру, 1966)

	I нейтронная звезда	II Солнце	Отношение I/II
Радиус	10^6 см	$7 \cdot 10^{10}$ см	$1,4 \cdot 10^{-5}$
Площадь поверхности	$1,33 \cdot 10^{13}$ см ²	$6,4 \cdot 10^{22}$ см ²	$2 \cdot 10^{-10}$
Температура поверхности	10^6 °K	5790 °K	$1,7 \cdot 10^2$
Положение максимума распределения энергии в спектре (в шкале частот)	40 Å	4600 Å	$8,7 \cdot 10^{-3}$
Светимость	$7 \cdot 10^{32}$ эрг/сек	$4 \cdot 10^{33}$ эрг/сек	0,175
Абсолютная болометрическая величина	6 ^m ,5	4 ^m ,6	$\Delta m = 1^m,9$
Доля энергии, излучаемая в интервале 3000—10 000 Å	$5,4 \cdot 10^{-6}$	0,68	$8 \cdot 10^{-6}$
Светимость в интервале 3 000—10 000 Å	$3,8 \cdot 10^{27}$ эрг/сек	$2,7 \cdot 10^{33}$ эрг/сек	$1,4 \cdot 10^{-6}$

отмечалось, аннигиляция пар e^+ , e^- :

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e.$$

Однако в условиях нейтронной звезды этот процесс как раз подавлен в силу высокой ферми-энергии электронов — порядка 20 Мэв. При более умеренной температуре нейтрино рождаются в основном в реакциях *)

$$n + n \rightarrow n + p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad n + p + e^- \rightarrow n + n + \nu_e.$$

Изменение температуры звезды T_e с течением времени за счет испускания нейтрино и фотонного охлаждения показано на рис. 58, по данным Цуруты и Камерона. При высоких температурах $T_e > 2 \cdot 10^6$ °K звезда остывает в основном за счет нейтринного излучения; ниже $T_e \approx 2 \cdot 10^6$ °K преобладает фотонное охлаждение с поверхности. Из рис. 58 видно, что поверхностная температура $T_e \approx 2 \cdot 10^6$ °K сохраняется у звезды в течение 10^4 лет. Время существования температуры большей, чем $2 \cdot 10^6$ °K, значительно меньше.

*) Могут играть также роль плазменные процессы рождения ν , $\bar{\nu}$ и процессы тормозного рождения ν , $\bar{\nu}$ электроном в поле заряженных нуклонов.

Бакал и Вольф (1965а, б) указали на возможность охлаждения звезды за счет рождения нейтрино при взаимодействии пионов с нейтронами (π - n -процесс). Если бы такой процесс действительно протекал в нейтронной звезде, то она охладилась бы за сутки. Однако, по-видимому, в устойчивых нейтронных звездах плотность еще не столь велика, чтобы в веществе в равновесии находились π -мезоны, и указанный процесс охлаждения не имеет места.

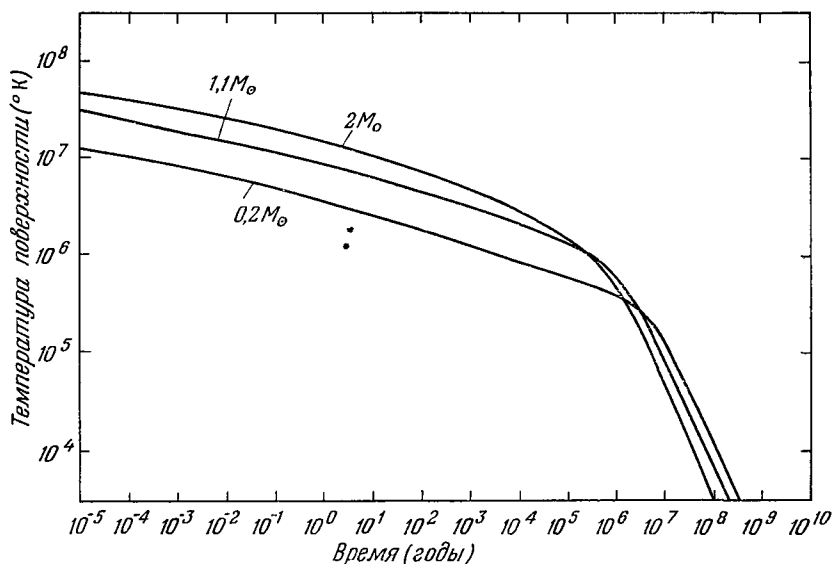


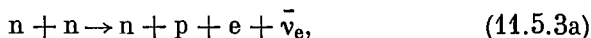
Рис. 58. Кривая охлаждения нейтронной звезды. Приведены данные [по Цуруте и Камерону 1965]] для звезд разной массы.

Большой интерес представляет исследование радиальных пульсаций нейтронных звезд вокруг положения D_3 на рис. 52 [Хойл, Нарликар и Уилер (1964); Камерон (1965b); Финци (1965); Мельтцер и Торн (1966); Хансен и Цурута (1967); Финци и Вольф (1968); Ланге и Камерон (1969); Торн (1969а)]. Приведем простую оценку. Собственная частота колебаний однородной звезды из соображений размерности равна $\omega^2 \approx GM/R^3$. Частота ω составляет для нейтронных звезд около 10^4 сек^{-1} . Отсюда находим энергию колебаний:

$$E_{\text{кол}} = \frac{1}{2} (R\omega)^2 \cdot M \left(\frac{\delta R}{R} \right)^2 \approx 10^{53} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{\delta R}{R} \right)^2 \text{ эрг}, \quad (11.5.2)$$

где $\delta R/R$ — относительная амплитуда колебаний. Диссипация этой энергии связана со следующими процессами: 1) с эффективной

вязкостью, которая обусловлена тем, что связанные со слабыми взаимодействиями ядерные процессы идут со скоростью одинаковой или более медленной, по сравнению со скоростью пульсаций звезды; 2) с рассеянием энергии в ударных волнах, выходящих на поверхность звезды. Рассмотрим первый процесс: при большой плотности вещества в равновесии должно быть больше протонов и электронов, чем при малой плотности. При сжатии звезды идут реакции



причем антинейтрино уходят из звезды. При расширении идут реакции



а нейтрино уходят. Обусловленное медленностью слабых взаимодействий отставание выравнивания состава вещества, по сравнению с равновесным, приводит к необратимым потерям энергии *). Эти потери вычислены Финци (1965), Мельтцером и Торном (1966) и Хансеном и Цурута (1967). Финци (с ошибкой, исправленной Мельтцером и Торном) дает следующую оценку потери энергии:

$$\frac{dE_{\text{кол}}}{dt} \approx -10^{55} \left(\frac{\rho_c}{3,7 \cdot 10^{14}} \right)^5 \frac{M}{M_{\odot}} \left(\frac{\delta R}{R} \right)^8 \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}. \quad (11.5.4)$$

Например, при амплитуде $(\delta R/R) \approx 0,01$ и центральной плотности $3,7 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ в колебаниях будет запасено $E_{\text{кол}} \approx 10^{49} \text{ эрг}$ и скорость потерь будет $dE_{\text{кол}}/dt \approx 10^{39} \text{ эрг/сек}$. Если бы не было других источников затухания колебаний, то $t_{\text{зат}} \approx 300$ лет.

Затухание посредством реакций (11.5.3) превращает, грубо говоря, половину колебательной энергии в энергию уходящих нейтрино, а половину — в тепло. Из уравнений (11.5.1) и (11.5.2) ясно, что нейтронная звезда может застать в вибрациях (до их затухания) намного больше энергии, чем в виде тепла. Следовательно, пока звезда вибрирует, постоянным превращением энергии колебаний в тепло в ней будет поддерживаться высокая температура. Численные расчеты этого эффекта, а также скорости затухания колебаний посредством реакций (11.5.3) были выполнены Хансеном и Цурутой (1967) и Финци и Вольфом (1968). Для простой модели нейтронной звезды Финци и Вольф нашли, что при непрерывном превращении энергии колебаний в тепло отношение тепловой энергии к энергии колебаний поддерживается постоянным:

$$\frac{E_{\text{т}}}{E_{\text{кол}}} = \text{const} \approx \frac{1}{7}.$$

*) Следующая далее часть параграфа написана К. С. Торном.

Ланге и Камерон (1969) показали, что в очень плотных нейтронных звездах при затухающих колебаниях процесс

$$n + n \rightarrow p + \Sigma^-, \quad p + \Sigma^- \rightarrow n + n \quad (11.5.5)$$

значительно эффективнее УРКА-процесса (11.5.3). Процесс (11.5.5) может идти только при достаточно высоких плотностях ($\rho > 10^{15} \text{ г/см}^3$), при которых ферми-энергия нейтронов стабилизирует Σ^- -частицы. При более низких плотностях нет Σ^- -частиц, поэтому преобладают УРКА-реакции (11.5.3). Σ^- -процесс (11.5.5) вызывает затухание колебаний таким же способом, как и УРКА-процесс, т. е. поддержанием равновесного состава при росте или падении плотности. Когда в ходе пульсаций плотность увеличивается, Σ^- -частиц слишком мало и идет реакция $n + n \rightarrow p + \Sigma^-$, рождающая p и Σ^- с энергиями выше фермиевской, которая затем превращается в тепло. Когда же плотность падает, количество Σ^- велико, и реакция $p + \Sigma^- \rightarrow n + n$ рождает «горячие» нейтроны.

Ланге и Камерон указали, что их процесс дает более эффективный механизм торможения, чем УРКА-процесс, так как он идет значительно быстрее. В УРКА-процессе участвуют шесть частиц, в Σ^- -процессе — только четыре; скорость УРКА-процесса есть произведение вероятностей двух взаимодействий (сильного и слабого), Σ^- -процесс идет только по слабому взаимодействию. Численные расчеты Лангера и Камерона для модели нейтронной звезды с $M \approx 1,8 M_\odot^*$, которая содержит Σ^- -частицы в $1/8$ объема, показали, что для затухания колебаний с $\delta R/R \approx 10^{-3}$, $E_{\text{кол}} \approx 10^{48} \text{ эрг}$ требуется лишь 1 секунда, колебания с $\delta R/R < 10^{-8}$, $E_{\text{кол}} < 10^{38} \text{ эрг}$ затухают за ~ 1000 лет. Поэтому все нейтронные звезды с $\rho_c > 10^{15} \text{ г/см}^3$, исключая вновь образующиеся, должны быть пульсационно «мертвыми».

Второй процесс диссипации — выход ударных волн на поверхность, который может привести к выбросу массы и разогреванию поверхностных слоев — пока не изучен. Неизвестно, как быстро он приведет к затуханию колебаний, переводя их энергию в энергию излучения и в энергию выброшенного вещества. Об излучении электромагнитных волн вследствие изменения магнитного поля при пульсациях см. § 6 гл. 12.

Третий процесс диссипации — испускание гравитационных волн — является, вероятно, преобладающим механизмом торможения при нерадиальных колебаниях. Торн (1969а) см. (§ 14 гл. 1) рассчитал радиационное затухание квадрупольных мод для ряда моделей нейтронных звезд. Он нашел, что амплитуда

*) Напомним, что по расчетам Камерона [«ОВ»-предел для нейтронных звезд $\sim 2,3 M_\odot$.

затухает экспоненциально с характерным временем, изменяющимся от 10 сек для $M \approx 0,4 M_{\odot}$ до 0,2 сек для $M \approx 2M_{\odot}$.

Для вращающейся нейтронной звезды ротационное сплющивание превращает радиальные моды колебаний в слегка отличные от радиальных, поэтому создаются условия для испускания гравитационного излучения. Возникающие силы реакции вызывают затухание колебаний с характерным временем [см. Уилер (1966), а также Чау (1969)]

$$\tau_{\text{рад}} \sim \left(\frac{\Omega^2 R^3}{GM} \right)^2 \tau_{\text{квадруп}} \sim \left(\frac{\Omega^2 R^3}{GM} \right)^2 \text{сек}. \quad (11.5.6)$$

Здесь Ω — угловая скорость звезды, R — ее радиус, M — масса звезды. Для звезд с большими массами, если не выполнено условие $\Omega^2 R^3 / GM \approx 1$, этот эффект будет мал по сравнению с затуханием, вызванным Σ^- -процессом (11.5.5). Но для звезд с малыми массами, которые не содержат Σ^- -частиц, он будет конкурировать с затуханием, обязанным УРКА-процессу (11.5.3).

В главе 12 мы обсудим свойства нейтронных звезд, которые привели к их открытию, а также аккрецию вещества и другие процессы в окрестностях нейтронных звезд.

§ 6. Эволюция звезд с массой, большей ОВ-предела

Рассмотрим теперь последние стадии эволюции звезды с массой, большей предела Оппенгеймера — Волкова для сверхплотных конфигураций ($M \gtrsim (1,6 \div 2,3) M_{\odot}$). Качественное отличие этого случая от предыдущего заключается в том, что для столь больших масс нет равновесной конфигурации с $S = 0$ (и $T = 0$). Это означает, что остывшая массивная звезда не может прийти в равновесное состояние без потери существенной части массы. С другой стороны, неизвестно, существуют ли процессы, которые с необходимостью приводят к потере в ходе эволюции существенной доли массы, достаточной для того, чтобы прийти, в конце концов, в состояние равновесия с $S = 0$. О возможности таких процессов см. предыдущие параграфы. Если на последней стадии остается сжимающееся ядро с $M > (2 \div 3) M_{\odot}$, то заключительная часть эволюции таких звезд будет существенно нестационарной.

Проследим последние этапы этой эволюции. К границе устойчивости звезда медленно подходит по квазиравновесным состояниям. На границе звезда теряет устойчивость и затем сжимается с гидродинамической скоростью. В дальнейшем, если после ядерного взрыва остается $M > (2 \div 3) M_{\odot}$, или взрыва не происходит, но масса звезды с начала коллапса больше $(2 \div 3) M_{\odot}$, то сжатие никогда не может

закончиться равновесным состоянием. Таких состояний нет. Через время порядка $t_n = 1/\sqrt{6\pi G\rho}$ звезда сожмется настолько, что гравитационный потенциал у ее поверхности станет порядка c^2 , и начнут проявляться эффекты общей теории относительности. Начиная с этого момента, звезда вступает в фазу релятивистского сжатия — коллапса. Можно предвидеть возможность двухступенчатого сжатия. Как показано выше, максимум Оппенгеймера — Волкова для холодных нейтронных звезд ($M \sim 2M_\odot$) расположен в области устойчивости горячих нейтронных звезд. Поэтому потеря устойчивости и результирующее сжатие горячей звезды с $M > 2M_\odot$ и начальной плотностью $\sim 10^7$ г/см³ (сравни обсуждение γ и γ_r в § 1 гл. 11)) может привести к состоянию горячей нейтронной звезды, и только позже, после достаточной потери энергии, наступает релятивистское сжатие.

Важно проанализировать наблюдаемые свойства такого двухступенчатого коллапса. Конечно, такой анализ потребует детальных гидродинамических расчетов с учетом общей теории относительности и физики элементарных частиц.

Следует напомнить, что рассуждение, которое привело нас к релятивистскому коллапсу как конечной судьбе звезды с массой больше ОВ-предела, основано на упрощенной картине гомогенного сжатия с однородным составом и без потери массы. Возможно, эта картина будет справедлива для звезды, перемешанной конвекцией, или с самого начала состоящей из железа. В действительности, однако, во внешних слоях любой звезды имеется много несгоревшего ядерного горючего даже после того, как в центре звезды ядерные реакции закончились.

Камерон (1969) в обзоре, озаглавленном «Как рождаются нейтронные звезды», предположил, что массивные звезды не «умирают» в результате релятивистского коллапса, а разрушаются ядерными взрывами. Он доказывает, что, возможно, только звезды с массами, лишь слегка превышающими чандрасекаровский предел для белого карлика ($\sim 1,2 M_\odot$), имеют достаточно времени, чтобы полностью израсходовать свое ядерное горючее и перейти в состояние нейтронной звезды. В этой гипотезе нет звезд в состоянии релятивистского коллапса, хотя не отрицается возможность образования нейтронных звезд, что необходимо, так как, в конце концов, существуют пульсары!

§ 7. Релятивистский коллапс и «застывшие» звезды («черные дыры»)

Коллапс протекает практически со скоростью свободного падения, так как силы тяготения на конечную (не малую) величину превышают силы давления. Вблизи сферы Шварцшильда, как показано в § 2 гл. 3, сила тяготения стремится к бесконечности

в то время как давление остается конечным. Таким образом, при анализе сближения поверхности звезды с поверхностью Шварцшильда в первом приближении давлением можно пренебречь. Эти соображения подтверждаются конкретным численным расчетом релятивистского сжатия звезды, выполненным Подурцом (1964а).

Будем рассматривать поверхность коллапсирующей звезды. В процессе сжатия масса M не меняется, и поэтому (считая $P = 0$) частица на поверхности просто падает под действием тяготения массы M . Следовательно, чтобы выяснить характер коллапса, достаточно рассмотреть свободное падение пробной частицы в поле массы M . Как было показано в § 4 гл. 3, внешний наблюдатель видит, что падающая частица приближается к гравитационному радиусу по закону:

$$r = r_g + (r_1 - r_g) e^{-\frac{c(t_* - t_*^1)}{2r_g}}, \quad (11.7.1)$$

а яркость падающего источника ослабевает по закону

$$I = \text{const } e^{-\frac{2c}{r_g}(t_* - t_*^1)}. \quad (11.7.2)$$

Следовательно, поверхность коллапсирующей звезды приближается к r_g по закону (11.7.1) в течение бесконечно долгого времени для внешнего наблюдателя, поэтому мы будем пользоваться выражением «застывшая» вместо «коллапсировавшая» *).

Формула (11.7.2) изменения яркости непосредственно применима только к центральной точке видимого диска сжимающейся звезды. Для всего диска выводы сделать гораздо сложнее, так как необходимо рассматривать лучи, движущиеся под большим углом к радиусу, а пути таких лучей вблизи звезды весьма сложны. Анализ этого вопроса показывает [Подурец (1964b), Аймс и Торн (1967)], что для светимости всей звезды L имеет место формула, аналогичная (11.7.2), но с несколько иным показателем экспоненты

$$L = \text{const } e^{-\frac{2c}{3\sqrt{3}r_g}(t_* - t_*^1)}, \quad (11.7.3)$$

где r_g — гравитационный радиус звезды. Любое излучение может покинуть звезду и уйти на бесконечность только в случае, если оно пересекает поверхность звезды до момента достижения ею сферы Шварцшильда (гравитационное самозамыкание).

Для каждой точки с лагранжевой координатой r_* существует момент собственного времени $\tau(r_*)$, в который из этой точки выходит излучение, покидающее звезду последним. Кривую

*) В последнее время в употребление входит термин «черная дыра».

$\tau(r_*)$ можно назвать линией «последнего вдоха». Очевидно, это есть нулевая мировая геодезическая, пересекающая поверхность звезды в тот момент, когда последняя пересекает сферу Шварцшильда.

Рассмотрим простейший случай сжатия однородного пылевого шара массы M с параболической скоростью. Этот случай замечателен тем, что однородное вещество в ходе сжатия остается однородным, а сама плотность зависит от времени по закону $\rho = 1/6\pi G (\tau_0 - \tau)^2$, где τ_0 — момент, когда весь шар сжимается в точку. Выражение $\rho(\tau)$ не зависит от массы и начального радиуса шара. В этом случае уравнение линии «последнего вдоха» есть

$$\tau = \frac{1}{12} r_g (R_* - 3)^3,$$

где $r_0 = 0$, $c = 1$; R_* — безразмерная лагранжева координата, выбранная так, что в момент пересечения r_g поверхностью шара площади сфер с радиальной координатой R_* есть $4\pi(R_* r_g)^2$; для поверхности шара $R_* = 1$.

Выше, при анализе изменения яркости сжимающейся звезды рассматривались источники, расположенные на поверхности. Ясно, что источники нейтрино будут в центре сжимающейся звезды. Мощность источников нейтрино нетрудно рассчитать, зная закон сжатия; затем можно определить закон затухания нейтринного излучения [он оказывается аналогичным (11.7.3)], и общую потерю массы звезды в ходе сжатия за счет нейтринного излучения [Зельдович (1963d); Зельдович и Подурец (1964); Фаулер (1964b)]. В этих расчетах, очевидно, существенно понятие линии «последнего вдоха». Подробно эти вопросы разбираются в § 8. Здесь отметим, что эти потери оказываются малыми.

Самозамыкание приводит к тому, что масса коллапсирующей звезды не может сильно уменьшаться за счет излучения энергии, и большая часть гравитационной энергии не излучается в виде света или нейтрино, а превращается в кинетическую энергию сжимающегося тела. Итак, мы можем сделать следующие выводы. Далекий наблюдатель видит, что катастрофически коллапсирующая звезда, когда ее размеры еще много больше r_g , сжимается с гидродинамической скоростью, т. е. очень быстро. При $(R - r_g) \sim r_g$ звезда продолжает стремительно сжиматься, за конечное собственное время достигает r_g и продолжает сжиматься дальше; но для внешнего наблюдателя благодаря указанным эффектам, ее видимое сжатие резко замедляется, причем радиус стремится к r_g по закону (11.7.1). Средняя плотность звезды стремится при этом к

$$\rho_{\max} = 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \quad (11.7.4)$$

Светимость звезды резко падает, несмотря на то, что фотоны продолжают рождаться в звезде почти в одном и том же темпе (в действительности даже в возрастающем темпе). Благодаря гравитационному красному смещению и другим указанным в § 5 гл. 3 эффектам светимость падает по закону (11.7.3). Характерное время затухания порядка r_g/c и равно $2 \cdot 10^{-5}$ сек для $M = 2M_\odot$. Звезда превращается в «застывшую» для внешнего наблюдателя звезду. Как показано в § 5 гл. 4, коллапс вращающегося шара для далекого наблюдателя качественно протекает так же, как и невращающегося. Учет давления вещества не меняет вывода. Здесь также характерно гравитационное самозамыкание и стремление к предельной картине «застывшей» звезды, как это описано выше. Подчеркнем, что в пределе, при $t \rightarrow \infty$, наблюдатель видит застывшую звезду невращающейся, но во внешнем поле гравитации члены, обязанные моменту K , сохраняются и неизменно проявляются.

Итак, несмотря на то, что гравитационное поле вращающейся звезды отличается от поля Шварцшильда, ее коллапс качественно протекает так же, как и у невращающейся. Звезда асимптотически подходит к «застывшему» состоянию и до «застывания» успевает совершить конечное число оборотов. Внешний наблюдатель никогда не узнает, что случилось со звездой, когда ее радиус стал меньше размеров поверхности «горизонта событий».

Хотя после гравитационного самозамыкания никакое излучение от звезды уже не уходит, однако звезда, конечно, не «исчезает» бесследно из нашего мира. При коллапсе не меняется ее масса M и ее стационарное гравитационное поле. Такая «потухшая» звезда взаимодействует с окружающими телами своим полем тяготения (чрезвычайно сильным вблизи ее гравитационного радиуса).

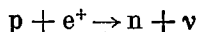
Мы нашли конечное состояние звезды с массой больше критической $M > M_{\text{max}}^{\text{OB}}$. Это состояние, катастрофически нестационарное для самой звезды, является «стационарным» в указанном выше смысле для внешнего наблюдателя. Так разрешается «парадокс больших масс», возникший благодаря работам Оппенгеймера и его сотрудников (1938; 1939) и обсуждающийся в литературе [см. работы Уилера и сотрудников (1962; 1965) и обзор Чиу (1964)]. На первый взгляд этот парадокс кажется весьма неприятным. Действительно, остывающая звезда с $M > M_{\text{max}}^{\text{OB}}$ после потери устойчивости неограниченно сжимается (никакого предела сжатия нет!). А что дальше? Уилеру эти трудности кажутся настолько существенными, что он предполагает (Уилер, 1962), что в большой массе «лишняя» часть нуклонов аннигилирует при сжатии, превращаясь в излучение, покидающее звезду, так что масса всегда оказывается меньше критической. Это предположение является отказом от фундаментального закона

физики — закона сохранения барионного заряда, причем для больших масс критическая плотность, при которой должна происходить аннигиляция, весьма умеренна. Например, при $M = 10^8 M_\odot$ по формуле (11.7.4) имеем $\rho_{кр} = 2 \text{ г/см}^3$. Невелики также и температуры, достигаемые при сжатии до критических размеров. При этих ничем не примечательных условиях заведомо не может происходить ничего такого, что не наблюдается в земных лабораториях, ничего фантастического. Необычно большими являются потенциал и поле тяготения, но согласно принципу эквивалентности само поле тяготения локально не меняет законов, управляющих физическими процессами.

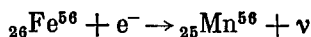
С нашей точки зрения, никакого парадокса для внешнего наблюдателя нет. Для такого наблюдателя коллапс «останавливается» при $R \rightarrow r_g$, и нет необходимости в изобретении фантастических нарушений надежно установленных законов физики. Конечно, есть вопрос о том, что будет с веществом, ушедшим под r_g , но не с точки зрения внешнего, а с точки зрения сопутствующего наблюдателя. Этот вопрос и трудность ответа на него мы подробно обсудили в § 6 гл. 4.

§ 8. Испускание нейтрино при коллапсе остывшей звезды

Вернемся к рассмотрению катастрофического сжатия, которое следует за потерей устойчивости. Звезда с массой, лишь немногим превышающей чандрасекаровский предел, теряет устойчивость и начинает коллапсировать, когда она практически остыла. В ходе гидродинамического сжатия такой звезды вырожденные электроны с ферми-энергией выше определенного порога вступают в обратный β -процесс с ядрами атомов. Происходит нейтронизация вещества. Если сжимать вещество достаточно медленно, то для каждого сорта ядер существует своя критическая плотность вещества, при которой происходит нейтронизация. Эта плотность соответствует ферми-энергии электронов, равной порогу реакции нейтронизации. Напомним (см. § 5 гл. 6), что нейтронизация протонов



происходит при плотности $1,6 \cdot 10^7 \text{ г/см}^3$ (порог реакции $E - m_e c^2 = 0,78 \text{ Мэв}$); нейтронизация железа



происходит при $6 \cdot 10^8 \text{ г/см}^3$ (порог реакции $3,7 \text{ Мэв}$); см. Кameron (1959с), Сальпетер (1961).

При медленном сжатии близость ферми-энергии электронов к порогу реакции означает, что образующиеся нейтрино уносят мало энергии (впрочем, энергия нейтрино вторичных реакций — см. табл. IV — может и не быть малой).

Реакция нейтронизации связана со слабым взаимодействием и относительно медленная. При быстром сжатии нейтронизация отстает от равновесия при данной плотности. Это значит, что процесс будет происходить в основном при плотности, значительно выше пороговой, при большей ферми-энергии электронов. Избыток энергии электронов будет уноситься нейтрино. Следовательно, это и есть механизм образования нейтрино большой энергии.

В работах Зельдовича и Гусейнова (1965a,b) сделаны грубые оценки энергии нейтрино. Предполагалось, что плотность меняется по тому же закону, что и при свободном падении однородного вещества:

$$\rho = \frac{1}{6\pi G (t_0 - t)^2},$$

$$\left| \frac{d\rho}{dt} \right| = \frac{1}{3\pi G (t_0 - t)^3} = \rho^{3/2} \cdot 2 \cdot \sqrt{6\pi G} = \frac{\rho^{3/2}}{450}. \quad (11.8.1)$$

Ферми-импульс и энергия электронов выражаются через плотность ρ и число нуклонов μ_e на один электрон:

$$P_F = m_e c \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{1/3},$$

$$E_F = m_e c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{P_F}{m_e c} \right)^2} \approx m_e c^2 \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{1/3}. \quad (11.8.2)$$

Обозначим через x долю ядер, уцелевших к данному моменту.

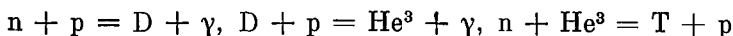
Вероятность нейтронизации зависит от свойств исходного и конечного ядра Z_1 и Z_2 (от матричного элемента M_{12}). В обычных лабораторных условиях (без вырожденных электронов) Z_1 стабильно, Z_2 — бета-радиоактивно. Вероятность распада и позволяет найти M_{21} , а по квантовой механике $|M_{12}| \equiv |M_{21}|$. Удобно выразить вероятность процесса нейтронизации Z_1 вырожденными электронами прямо через τ — время полураспада радиоактивного Z_2 и через известную функцию f энергии распада Q .

При $E_F \gg Q$ получим

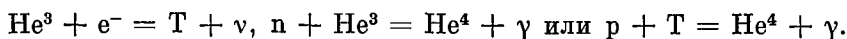
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{5} x \frac{\left(\frac{E_F}{m_e c^2} \right)^5 \ln 2}{f\tau}. \quad (11.8.3)$$

Для разрешенных переходов, например, $n \rightarrow p + e^- + \nu$, произведение $f\tau = 800$ сек. Выписанных выше уравнений достаточно для полного решения задачи. Простейший пример нейтронизации

холодного водорода *) приводит к выводу, что $x = 0,5$ будет достигнуто при $E_F \approx 7 \div 8 \text{ Мэв}$, что значительно превышает порог ($1,25 \text{ Мэв}$, включая энергию покоя). Значит, в этом процессе нейтрино уносят энергию $5\text{—}7 \text{ Мэв}$. Превращение протона в нейтрон в среде, состоящей из протонов, вызовет цепочку ядерных реакций, заканчивающейся образованием He^4 :



и ли



Образование одного ядра He^4 из четырех протонов и двух электронов сопровождается выделением 26 Мэв , однако почти половина этой энергии уносится двумя энергичными нейтрино. Нейтронизация водорода в ходе свободного падения происходит в основном при плотности $5 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$, хотя пороговая плотность составляет всего $1,6 \cdot 10^7 \text{ г/см}^3$.

Более трудную проблему представляет нейтронизация гелия при катастрофическом сжатии (свободном падении). У гелия весьма высок порог реакции $e^- + \text{He}^4 = T + n + \nu - Q$ ($Q = 21 \text{ Мэв}$). К тому же, поскольку не существует связанного состояния H^4 (т. е. $p + 3n$) [см. обзор: Базь, Гольданский, Зельдович (1965)], то в правой части уравнения реакции стоят три частицы. Вероятность реакции зависит также от энергии, которую уносит нейтрон. Понятно, что экспериментальных данных об обратном процессе $n + T = \text{He}^4 + e^- + \bar{\nu}$ нет, так как вероятность слабого взаимодействия налету (со свободным нейтроном) ничтожна. Поэтому для оценки матричного элемента в работе Зельдовича и Гусейнова (1965b) использован изученный на опыте захват отрицательного мю-мезона $\mu^-: \mu^- + \text{He}^4 = T + n + \nu_\mu$. Для μ^- в $1s$ состоянии вероятность захвата 370 сек^{-1} .

Предполагая, что матричный элемент не зависит от энергии нейтрона, найдем

$$\frac{dx}{dt} = -x \cdot 660 \cdot y^2 (y - 1)^{1/2},$$

где

$$y = \frac{E_F}{Q} = \frac{1}{45} \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{1/3}. \quad (11.8.4)$$

Интегрирование уравнения для x совместно с законом свободного падения приводит к выводу, что реакция проходит при $E_F \sim 45 \text{ Мэв}$ и при плотности $\sim 10^{12} \text{ г/см}^3$.

*) Конечно, коллапсирующая звезда не может состоять из водорода (он выгорел). Расчет носит методический характер и показывает только общую картину процесса.

За трудной реакцией нейтронизации гелия следует гораздо более легкая, с меньшим порогом (~ 10 Мэв) реакция



Таким образом, за счет нейтронизации при коллапсе образуются нейтрино с энергией до 30—40 Мэв. Грубые оценки показывают, что средний космический поток таких нейтрино может достигать 0,01 потока энергичных солнечных нейтрино от распада $B^8 \rightarrow Be^8 + e^- + \nu$ с граничной энергией 14 Мэв. Так как вероятность регистрации нейтрино возрастает с увеличением их энергии, то не исключена возможность экспериментального обнаружения космических энергичных нейтрино, происхождение которых связано с коллапсом и нейтронизацией вещества. В этой связи особенно интересны проекты опытов, в которых можно будет определить энергию и направление нейтрино (см. Рейнес и Вуд, 1965).

Остается сделать два замечания. Расчеты сделаны для плотности однородно сжимающегося вещества. Градиент давления замедляет сжатие центрального ядра. С другой стороны, при падении вещества, находящегося в периферической части, плотность нарастает вначале медленно, а затем быстрее, чем по формуле для свободного падения. (При этом мы сравниваем производную $\frac{d\rho}{dt}$ при данном ρ . Сравнение в одинаковый момент времени не имеет смысла.) Таким образом, закон изменения плотности, лежащий в основе расчетов, нельзя считать завышенным; отклонения возможны в обе стороны.

Не повлияет ли гравитационное самозамыкание звезды на возможность регистрации нейтрино? Мы видели, что самозамыкание происходит при средней плотности $2 \cdot 10^{16} (M/M_\odot)^{-2} \text{ г/см}^3$. В действительности плотность должна определяться вблизи линии «последнего вздоха» (см. § 7 гл. 11). Максимальная плотность в центре звезды на этой линии несколько меньше этой величины. В простом примере сжатия однородной звезды без давления $\rho_c = [2 \cdot 10^{16} (M/M_\odot)^{-2}] / 2,55$. Нейтронизация гелия происходит при $\rho \approx 10^{12} \text{ г/см}^3$. Следовательно, для подавляющего большинства звезд нейтрино будут выходить, испытывая лишь небольшое красное смещение. К тому же у звезд большой массы мы имеем дело с горячей плазмой.

Испускание нейтрино при коллапсе и всплесках сверхновых обсуждалось выше, в § 4.

§ 9. Помешает ли быстрое вращение коллапсу звезды?

В предыдущих параграфах рассматривались звезды с малым угловым моментом. Критерий малости момента звезды дается условием

$$K \ll K_{\text{крит}} = kcMr_g,$$

где k — множитель порядка 0,1, зависящий от распределения вещества в звезде. Численно

$$K_{\text{крит}} \approx 10^{48} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \frac{g \cdot \text{см}^2}{\text{сек}}. \quad (11.9.1)$$

Для звезд, обладающих таким или бóльшим моментом, изложенные выше соображения о коллапсе неприменимы. Благодаря ротационной неустойчивости начнется истечение вещества с экватора, и звезда не может непосредственно сжаться до r_g как целое (см. ниже). Момент вращения Солнца $\approx 3 \cdot 10^{48} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек} \approx K_{\text{крит}}$. Яркие звезды главной последовательности имеют обычно моменты, существенно большие солнечного. В работе Новикова и Озерного (1964) для этих звезд выведено следующее полуэмпирическое соотношение:

$$K \approx 10^{51} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1,75} \frac{g \cdot \text{см}^2}{\text{сек}}. \quad (11.9.2)$$

Для обычных звезд с $10 < M/M_{\odot} < 100$ имеем $K \gg K_{\text{крит}}$.

Неизвестно, сохраняется ли момент неизменным в процессе эволюции звезды. В литературе обсуждались разные мыслимые механизмы потери углового момента. Например, при истечении с экватора материи вращающейся звезды начальный и конечный моменты звезды отличаются в $K_1/K_2 = (M_1/M_2)^{1/k}$ раз, где $k \approx 0,1$. Потеря половины массы уменьшает угловой момент на три порядка. Эта оценка справедлива в предположении, что звезда все время вращается как твердое тело. Огромная протяженность атмосфер красных гигантов способствует истечению вещества.

Другим возможным механизмом существенной потери момента является магнитное торможение, предложенное Хойлом (1960). Если звезда обладает достаточно сильным магнитным полем, а ее магнитные силовые линии вморожены в окружающую плазму межзвездного вещества в зоне H II, закручивание силовых линий приведет к торможению вращения. Скорость торможения определяется соотношением

$$\frac{dK}{dt} = -\beta H^2 R^3, \quad (11.9.3)$$

где R — радиус звезды, H — напряженность поля, β — к.п.д. механизма. Бэбкок обнаружил у некоторых звезд поля напряженностью до 10^3 — 10^4 э. Тем не менее, наблюдения, по-видимому, свидетельствуют об отсутствии зависимости между возрастом звезды вблизи стадии главной последовательности и ее моментом. Следовательно, магнитное торможение для обычных звезд, скорее всего, несущественно.

Во всяком случае, весьма вероятно, что массивные звезды могут заканчивать эволюцию, сохраняя большой момент. Конечно,

благодаря дисперсии значений моментов вокруг среднего значения, даваемого, например, формулой (11.9.2), безусловно, существуют звезды с малым моментом [оценку их числа см. Новиков, Озерной (1964)], коллапс которых должен протекать, как описано выше, если ему не препятствуют другие причины. Кроме того, если момент сосредоточен, главным образом в обширной, но содержащей малую долю массы атмосфере звезды, то ядро с малым моментом будет коллапсировать независимо от оболочки. Но если момент ядра звезды велик, что тогда произойдет с ядром? Детальный анализ этой проблемы сложен, и окончательного ответа до сих пор нет. Однако оказывается, что ответ в самой грубой форме может быть получен без детального анализа динамики процессов, а просто перечислением всех мыслимых возможностей.

Существенным для всей проблемы является тот факт, что полная энергия звезды, т. е. алгебраическая сумма тепловой, гравитационной и кинетической энергий отрицательна; поэтому, если источники ядерной энергии полностью исчерпаны или не работают (будем вначале это предполагать), то в результате любых процессов все вещество звезды не может рассеяться в бесконечность. По мере сжатия вещество может истекать с экватора, образуя диск вокруг звезды, как это описано, например, у Струве (1950). Если при этом сохраняется достаточная эффективная вязкость, благодаря которой истекающее вещество связано со звездой (например, посредством магнитного поля), то испускающее вещество заберет на себя основную долю момента и позволит сколлапсировать центральному сгущению.

Другая альтернативная возможность состоит в том, что по мере охлаждения основная масса, не отдавая момент и сжимаясь, будет приобретать все более сплюснутую форму. Вследствие неустойчивости такой формы звезда распадается на две или больше частей. Если таких частей много, то система эволюционирует как звездная система на поздних стадиях эволюции. Эволюция сопровождается столкновением сгустков, выбросами (испарением) отдельных тел из системы и приводит в конце концов (возможность выделения ядерной энергии пока не рассматриваем) либо к коллапсу всей системы, либо к образованию двух оставшихся тел, обращающихся около общего центра масс.

При наличии двух тел движение устойчиво. Оно может сопровождаться истечением вещества из оболочек, но мы подчеркивали, что все вещество рассеяться не может. На этом этапе обращения двух близких или даже почти слившихся масс существенным становится излучение гравитационных волн. За счет этого излучения теряется энергия и момент, звезды сближаются (см. гл. 1). Поделив запас гравитационной энергии $\mathcal{E}_{\text{грав}} = -Gm_1m_2/2r$ на мощность гравитационного излучения $d\mathcal{E}/dt$

получаем характерное время эволюции системы:

$$\tau = \frac{\mathcal{E}_{\text{грав}}}{-d\mathcal{E}/dt} = \frac{5}{8} \frac{r_{g1}}{c} \left(\frac{r}{r_{g1}} \right)^4 \left[\frac{r_{g1}}{r_{g2} (1 + r_{g2}/r_{g1})} \right]. \quad (11.9.4)$$

Здесь r_{g1} и r_{g2} — гравитационные радиусы масс. Множитель в прямых скобках для одинаковых масс равен $1/2$; для $r_{g1} \gg r_{g2}$ этот множитель $\approx r_{g1}/r_{g2}$. Из формулы (11.9.4) следует, что для $m_1 = m_2 \approx M_{\odot}$ при первоначальном расстоянии $r \approx 10^5 r_g$ время эволюции составляет величину порядка 10^7 лет.

Потеряв момент при гравитационном излучении, массы должны слиться и (если не помешают ядерные реакции, индуцируемые в этом процессе) сколлапсировать; см. Чиу (1964).

Итак, вывод из сказанного следующий. Если вещество вращающейся звезды, заканчивающей эволюцию, в основной массе инертно по отношению к ядерным реакциям, т. е. если на предшествующих стадиях нуклеосинтез привел к превращению всех элементов в элементы группы железа, то конечным этапом эволюции и при наличии быстрого вращения будет застывшая звезда.

К тому же финалу придет процесс, если ядерные реакции в веществе хотя и возможны, но протекают с гораздо меньшей скоростью, чем скорость гидродинамических явлений, скажем, при столкновении отдельных сгустков распавшейся массивной звезды. О возможном характере коллапса см. обзор Руффини и Уилера (1970).

В ходе эволюции вращающегося тела возможно образование сильно сплюснутого объекта — релятивистского вращающегося диска (Бардин, Вагонер, 1970, 1971) с энергией связи до $\sim 40\%$ от mc^2 . Эта огромная энергия связи соответствует большой энергии связи ($\Delta E = 42\% mc^2$) частицы, движущейся по ближайшей круговой орбите в поле метрики Керра с максимальным возможным моментом сколлапсировавшего тела (см. § 3 гл. 4).

Образование релятивистских дисков и их эволюция только начинают исследоваться. Сальпетер (1971) подробно анализирует вопрос применительно к массам порядка $10^8 M_{\odot}$ (квазары, ядра галактик). См. об этом нашу книгу «Строение и эволюция Вселенной».

ГЛАВА 12

АККРЕЦИЯ ГАЗА НА РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ОБЪЕКТЫ *)

§ 1. Газ, подвергающийся аккреции

Звезды в галактиках всегда окружены межзвездным газом и пылью. На определенных стадиях эволюции, либо при катастрофических взрывах звезды выбрасывают вещество.

Наряду с этим в состав Галактики может входить и вещество, никогда не входившее в состав какой-либо звезды. Это вещество пришло в современное газообразное состояние в ходе космологического расширения первоначального почти однородного вещества, имевшего в прошлом большую плотность, согласно космологическому решению Фридмана.

Таковы источники межзвездного вещества в Галактике. Наблюдения показывают, что в спиральных рукавах нашей Галактики средняя плотность межзвездного газа порядка 10^{-21} г/см³; в ядре Галактики она может быть значительно больше.

При количественных оценках надо иметь в виду, что нейтронные и застывшие звезды могут быть окружены газом значительно большей плотности, чем средняя межзвездная плотность: само образование этих звезд связано с катастрофическими явлениями, при которых часть массы могла быть сорвана с поверхности и образовала облако газа вокруг звезды. Выделение энергии при аккреции в свою очередь влияет на сам процесс за счет взаимодействия встречного светового потока с падающим веществом, т. е., по существу, за счет светового давления, и за счет потоков быстрых частиц, выбрасываемых звездой. Роль последних особенно велика.

Методически задачи аккреции можно рассматривать в двух предельных случаях: как движение отдельных частиц (атомов, молекул, пылинок) либо как движение сплошной среды **). Оче-

*) Глава 12 написана совместно с В. Ф. Шварцманом.

**) Любопытное новое явление рассчитано А. Г. Дорошкевичем (1965): в релятивистском случае гравитационное поле вращающегося тела, как мы видели (см. § 3 гл. 4), отличается в ОТО от поля покоящегося тела равной

видно, выбор приближения зависит от длины свободного пробега частиц. Очень существенными могут быть также магнитные поля. Влияние общего магнитного поля звезды на аккрецию будет рассмотрено в следующих параграфах, посвященных электромагнитным явлениям.

В нерелятивистском приближении основные задачи аккреции были рассмотрены в тридцатых-сороковых годах. Некоторые задачи см. Станюкович (1971). Это рассмотрение достаточно хорошо применимо не только к белым карликам, но и к нейтронным звездам: при гравитационном потенциале $\sim 0,2 c^2$, когда радиус звезды в 3—4 раза больше шварцшильдовского радиуса r_g , поправки на ОТО могут достигать 20—30%. При наличии других неопределенностей (прежде всего в отношении плотности падающего газа) такие поправки несут существенны. Однако, в связи с вопросом о застывших звездах, учет эффектов ОТО совершенно необходим для получения качественно правильных выводов.

Наконец, отметим, что для всей картины аккреции весьма существенны такие свойства газа, как его состав, температура, магнитное поле, замороженное в газ, и состояние движения газа — средняя скорость и турбулентность.

Принято считать, что межзвездный газ состоит из двух компонент: сравнительно холодных (около 100°K), плотных ($n \sim 10 \text{ см}^{-3}$), слабо ионизованных облаков и более горячего разреженного газа, ионизованного более чем на половину ($T \sim 5000^\circ \text{K}$, $n \sim 1 \div 0,3 \text{ см}^{-3}$).

При этом предполагается, что состав газа мало отличается от состава атмосферы молодых звезд, которые образуются из этого газа, например 70% H, 28% He, 2% C, N, O.

Характерные размеры облаков порядка десятка парсек. По-видимому, этот размер в сотню парсек характерен для турбулентности. Скорость газа относительно тела, на которое происходит аккреция, определяется, как правило, скоростью самого этого тела, для ориентировки примем интервал от 10 км/сек до 500 км/сек (имея в виду, что мы имеем дело не с обычными звездами). Магнитное поле в Галактике порядка 10^{-5} гс. Совершенно иные характеристики имеет поток газа в системе двойной звезды, свойства его сильнее всего зависят от нормальной звезды, являющейся источником газа. Важнейшей особенностью задачи является вращение двойной системы, вследствие чего газ должен отдать момент, чтобы подвергнуться аккреции.

массы. Вращающееся тело захватывает преимущественно те частицы, вращательный момент которых имеет знак, противоположный моменту самого тела. При аккреции частиц, изотропно распределенных в пространстве, за счет такой избирательности тело уменьшает свой момент вращения. Разумеется, этот эффект крайне мал пока скорости $v_\infty \ll c$.

§ 2. Падение невзаимодействующих частиц

Представим себе частицы с массой m , скорость которых вдали от звезды одинакова и равна v_∞ , а концентрация n_∞ . Сначала рассмотрим задачу в ньютоновском приближении. Пусть скорость v_∞ мала по сравнению с параболической:

$$v_\infty \ll v_p = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

здесь R — радиус звезды. Тогда скорость у поверхности звезды не отличается от параболической, а следовательно, максимальный угловой момент, при котором происходит захват, $l_{\max} = mv_p R$. Выражая момент на бесконечности через прицельный параметр l : $l = mv_\infty l$, найдем l_{\max} , соответствующий падению на край звезды:

$$l_{\max} = R \frac{v_p}{v_\infty}.$$

Поток частиц с $l < l_{\max}$, есть, очевидно, $j = nv_\infty \pi l_{\max}^2$. Следовательно,

$$\frac{dM}{dt} = mnv_\infty \pi R^2 v_\infty^{-2} \frac{2GM}{R} = \pi r_g^2 c \rho_\infty \frac{c}{v_\infty} \frac{R}{r_g}, \quad (12.2.1)$$

где $\rho_\infty = mn_\infty$. В связи с формулой (12.2.1) отметим, что в ньютоновскую теорию скорость света и гравитационный радиус никак не входят. Лишь в целях сравнения с последующими формулами для коллапсаров в последнем выражении путем деления и умножения на c выделены множители r_g и c . В ОТО критическое значение момента *) равно 2 (см. § 8 гл. 3), чему соответствует

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r_g^2 c \rho_\infty \frac{c}{v_\infty}. \quad (12.2.2)$$

Итак, при $R/r_g < 4$ пользоваться нерелятивистской формулой уже нельзя; выражение (12.2.2) дает нижнюю границу dM/dt и описывает аккрецию на застывшие и достаточно плотные нейтронные звезды (у последних $R/r_g \geq 1,7$, см. Цурута, Камерон (1965)). Запись (12.2.2) в более удобных единицах имеет вид

$$\frac{d(M/M_\odot)}{d(t/10^{10} \text{ лет})} = 10^{-13} \left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right) \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{v_\infty}{10 \text{ км/сек}} \right)^{-1}. \quad (12.2.3)$$

Для частиц, строго покоящихся на бесконечности, нет разумного (стационарного) ответа, формулы дают ∞ . Действительно, если

*) Влияние гравитационного излучения на эффективность захвата пропорционально m/M (§ 11 гл. 3), а потому пренебрежимо.

в область, занятую покоящимися частицами, внезапно поместить притягивающую их массу, то частицы начнут ускоренно двигаться по радиусам и легко убедиться, что поток на поверхность будет расти с течением времени по закону

$$\frac{dM}{dt} = \frac{64}{3\pi} \rho_{\infty} G M t. \quad (12.2.4)$$

Вернемся, однако, к стационарной картине с $v_{\infty} > 0$. Как должна меняться плотность невзаимодействующих частиц в зависимости от расстояния до звезды? Рассмотрим случай $r \gg R$, пренебрегая отличием рассматриваемой задачи от задачи о равновесном распределении частиц в заданном потенциальном поле. Отличие, которым мы пренебрегаем, связано, очевидно, с тем, что частицы, попавшие на поверхность звезды, не покидают ее, имеется необратимый поток. В угловом распределении скоростей в данной точке отсутствуют частицы в том телесном угле, в который приходили бы частицы, пересекшие прозрачную звезду (потенциальную яму, заменяющую звезду) в строго равновесной задаче. При $r \gg R$ этот угол мал.

В рассматриваемом приближении частицы, которые на бесконечности изотропно распределены по направлениям скорости и имеют энергию, заключенную между E_{∞} и $E_{\infty} + \Delta E$, образуют микроканонический ансамбль. По теореме Лиувилля объем, приходящийся на одну частицу в фазовом пространстве, постоянен: $\Delta\Gamma = 4\pi n^{-1} p^2 \Delta p$. Учитывая, что $E = p^2(r)/2m + m\phi(r) = \text{const}$, $\Delta E = p \Delta p / m = \text{const}$, найдем, что $\Delta\Gamma = 4\pi m n^{-1} p \Delta E = \text{const}$ и

$$n = n_{\infty} \frac{p}{p_{\infty}} = n_{\infty} \sqrt{1 + \frac{GMm}{rE_{\infty}}}. \quad (12.2.5)$$

Таким образом, до некоторого радиуса $r = r_c$, на котором кинетическая энергия частиц становится порядка их гравитационной энергии, плотность частиц практически не меняется, при $r < r_c$ имеем $n \propto r^{-1/2}$. Всюду далее радиус r_c мы будем называть «критическим радиусом».

Следует обратить внимание на то, что полученная нами формула не дает полного ответа на поставленный вопрос. Действительно, она относится лишь к частицам, пришедшим из бесконечности, т. е. обладающим $E > 0$. Однако в ситуации, когда столкновения полностью выключены, вокруг притягивающего центра может находиться неограниченное число частиц с $E < 0$. Речь идет о частицах, движущихся по эллиптическим орбитам: их плотность есть произвольная функция, никак не связанная с (12.2.5) и определяемая начальными условиями.

Задачу можно конкретизировать следующим образом. Введем достаточно малое сечение взаимодействия частиц между собой

$\sigma \neq 0$; тогда распределение частиц с $E < 0$ по эллиптическим орбитам станет однозначно определяться распределением частиц с $E > 0$ на бесконечности. Совершая предельный переход $\sigma \rightarrow 0$, получим вполне определенную функцию:

$$n(r, E < 0) = n_{\infty} f(E_{\infty}, E).$$

Когда $\sigma \rightarrow 0$, плотность частиц стремится к фиксированному пределу.

Отметим, что в пределе $\sigma \rightarrow 0$ для потока частиц мы найдем, разумеется, прежние выражение (12.2.2). При $\sigma \neq 0$ поток dM/dt есть растущая функция сечения, ибо столкновения гасят тангенциальные скорости частиц. Мы не будем, однако, искать эту зависимость для произвольного σ , а обратимся сразу к противоположному предельному случаю очень больших сечений, когда газ можно рассматривать как сплошную среду (соответствующие критерии приведены в § 4). Уравнения газодинамики должны описывать при этом как аккрецию вещества на звезду, так и истечение со звезды.

§ 3. Четыре режима газодинамического течения в случае сферической симметрии

Будем характеризовать газ показателем адиабаты $\gamma = \text{const}$ плотностью ρ , давлением P и скоростью звука $a = \sqrt{\gamma P/\rho}$. Выделим узкий конус с телесным углом $d\Omega$ и запишем закон сохранения вещества ($d\tilde{S}$ — поток в конусе $d\Omega$, A — поток на единицу телесного угла, он конечен и не зависит от радиуса в стационарной задаче)

$$d\tilde{S} = \rho u r^2 d\Omega = \text{const}, \quad u = \frac{A}{\rho r^2}, \quad A = \frac{d\tilde{S}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{dM}{dt}, \quad (12.3.1)$$

а также закон Бернулли, выражающий сохранение энергии:

$$-\frac{GM}{r} + \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \text{const} \equiv B. \quad (12.3.2)$$

Уравнение (12.3.2) предполагает отсутствие теплообмена, однако приближенно последний может быть учтен заданием подходящего γ . Константа B определяется граничными условиями. В случае аккреции их удобно задать на бесконечности, где газ покоится:

$$B = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_{\infty}}{\rho_{\infty}}; \quad (12.3.3)$$

в случае истечения мы определим их у поверхности звезды при $r = R$:

$$B = -\frac{GM}{R} + \frac{u_R^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_R}{\rho_R}, \quad (12.3.4)$$

а еще лучше, на некоторой глубине, там, где известно, что $u^2(r)$ мало. В плоскости a, u уравнение Бернулли дает семейство эллипсов:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} a^2 = B + \frac{GM}{r}, \quad (12.3.5)$$

а уравнение неразрывности — семейство гипербол дробной степени (ρ_i и a_i произвольны):

$$u = \frac{A}{\rho_i r^2} \left(\frac{a_i}{a} \right)^{2/(\gamma-1)}. \quad (12.3.6)$$

Здесь использована адиабатическая связь плотности и скорости звука $\rho = \text{const } a^{2/(\gamma-1)}$. Для определения константы в случае аккреции используем условия на бесконечности $i = \infty$; в случае истечения — в атмосфере звезды $i = R$.

Гиперболы зависят еще от параметра A , который определяется условиями, существующими вблизи поверхности звезды или «на бесконечности». Именно определение A является главной задачей теории. Из рис. 59 легко понять*), что при наличии двух точек пересечения сплошной и пунктирной кривых нижняя точка пересечения соответствует дозвуковому режиму течения, а верхняя — сверхзвуковому. Касание пары кривых происходит обязательно на биссектрисе, где $u = a$. Наконец, если при данном выборе A и каких-то значениях r кривые вообще не пересекаются, значит A выбрано слишком большим и такой поток не реализуется. Исключая этот случай, имеем, в зависимости от A , картины двух видов:

1) Кривые пересекаются дважды, выше биссектрисы и ниже биссектрисы, при всех значениях r , за исключением одного, $r = r_s$, где происходит касание кривых.

2) Кривые пересекаются дважды при всех без исключения r .

Каждой из этих картин соответствуют два режима течения. Перечислим их, учитывая, что на бесконечности поток при аккреции обязательно дозвуковой (так как $u \rightarrow 0$), а при истечении — обязательно сверхзвуковой (так как $a \rightarrow 0$).

Общая схема такова: задаемся константами A и B . В таком случае при каждом данном значении r имеем два уравнения

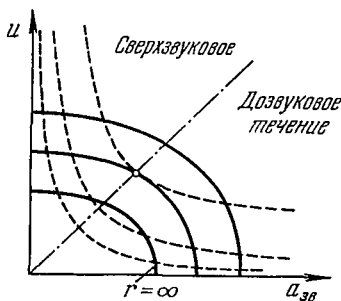


Рис. 59. Гидродинамическая аккреция. азв — скорость звука, u — скорость вещества. Сплошные линии — семейство эллипсов, получаемых из уравнения Бернулли (параметром является расстояние r); пунктир — семейство гипербол дробной степени, следующих из уравнений неразрывности.

*) Дальнейшее изложение ведется в предположении, что $1 < \gamma < 5/3$; анализ этого условия см. ниже.

с двумя неизвестными, u , a . Решая их (что соответствует нахождению пересечений эллипса и гиперболы), получим $u(r)$, $a(r)$.

Другими словами, в плоскости u , a (см. рис. 59) параметрически задана кривая $u(a)$, причем роль параметра играет r — расстояние точки, в которой реализуются данные u и a , от центра. Каждой точке кривой $u(r)$, $a(r)$ отвечает определенное значение r . Рассмотрим различные случаи.

1. Режим истечения.

Параметрическая кривая $u(a)$ пересекает биссектрису при значении $r = r_s$; при $r < r_s$ имеем $u < a$, при $r > r_s$ имеем $u > a$. Глубокие слои звезды покоятся, наружные движутся с дозвуковой скоростью, в точке $r = r_s$ скорость становится больше скорости звука, на бесконечности течение сверхзвуковое. Такой режим может возникать при достаточно большой энтропии звезды [Бисноватый-Коган, Зельдович (1966); см. также гл. 10, § 12] или при существовании у звезды короны типа солнечной [см. Паркер (1965а); Нобль и Скафт (1965)]. Аналогичная картина может развиваться также вследствие вращения (см. § 18 гл. 11).

2. Режим аккреции.

Параметрическая кривая $u(a)$ пересекает биссектрису при некотором значении $r = r_s$; при $r > r_s$ имеем $|u| < a$, при $r < r_s$ имеем $|u| > a$. На бесконечности газ покоится, вдали от звезды течение дозвуковое, в точке r_s — переход через скорость звука, ближе к звезде поток сверхзвуковой. При этом $u < 0$, что не меняет формул. Этот режим мы подробно рассмотрим ниже.

3. Режим эжекции (всюду сверхзвукового истечения).

Параметрическая кривая $u(a)$ целиком лежит в области $u > a$. Такой режим, очевидно, может возникнуть, лишь если на поверхности звезды действуют существенно не гидродинамические механизмы ускорения частиц, которые не содержатся в уравнениях и связаны, например, с колебаниями звезды (Камерон, 1965), со специфически пульсарными механизмами (Голд, 1968) и т. п.

4. Дозвуковой режим.

Кривая $u(a)$ целиком лежит в области $|u| < a$. Атмосфера звезды непрерывно смыкается с межзвездным газом конечной плотности и температуры; в первом приближении везде выполняется условие гидростатического равновесия. Медленное дозвуковое движение возможно в обоих направлениях: медленное истечение или дозвуковая аккреция.

В сильном гравитационном поле релятивистских объектов для поддержания гидростатического равновесия необходима чрезвычайно высокая температура, поэтому данный режим дальше не обсуждается.

§ 4. Сверхзвуковая аккреция

Итак, характерным для взаимодействия холодного релятивистского объекта с окружающим газом является режим сверхзвуковой аккреции.

Пользуясь уравнениями (12.3.3), (12.3.5), (12.3.6), легко показать, что плотность газа остается примерно постоянной вплоть до критического *) радиуса r_c , где гравитационный потенциал становится порядка a_∞^2 :

$$r_c = \delta(\gamma) \frac{GM}{a_\infty^2}; \quad (12.4.1)$$

$$\delta(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5-3\gamma} \right)^{\frac{5-3\gamma}{3(\gamma-1)}}, \quad \delta\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \delta\left(\frac{4}{3}\right) \approx 1. \quad (12.4.2)$$

Напомним, что такая же ситуация имела место и в случае невязимодействующих частиц; см. (12.2.5). Однако при $r < r_c$ плотность меняется теперь по другому закону: $\rho \sim r^{-3/2}$. Это вытекает из уравнения непрерывности $\rho u r^2 = \text{const}$ и зависимости для скорости $u \sim r^{-1/2}$. Скорость при $r < r_c$ практически параболическая, ибо внизу, на $r = r_s$, расположена поверхность «проваливания»: выключается давление.

Радиус r_s перехода через скорость звука равен

$$r_s = \frac{5-3\gamma}{4} \frac{GM}{a_\infty^2}, \quad (12.4.3)$$

причем в этой точке

$$u_s = a_s = a_\infty \sqrt{\frac{2}{5-3\gamma}}. \quad (12.4.4)$$

Шварцманом (1970a) было показано, что выделение энергии при аккреции газа на достаточно плотную звезду (нейтронную звезду, белый карлик) должно приводить к ионизации вокруг нее области с размерами порядка $0,01 \div 1$ пс. В качестве «значений на бесконечности» в (12.4.2) надо брать, разумеется, значения вблизи радиуса r_c . Учитывая сказанное выше, полагаем $T_\infty = 20\,000 \div 100\,000$ °K и находим **)

$$r_c \simeq 10^{14} \div 10^{13} \text{ см}, \quad r_s \simeq 10^{13} \div 10^{12} \text{ см}; \quad (12.4.5)$$

здесь принято $M = M_\odot$, $\gamma = 1,5$.

*) При $\gamma < 5/3$ радиус r_c и радиус r_s , где $u(r) = a(r)$, отличаются только численным множителем порядка единицы. Усложнение изложения происходит потому, что интересен также случай $\gamma = 5/3$, для которого r_c конечно, тогда как $r_s = 0$.

**) В некоторых работах иногда полагали $T_\infty = 100$ °K, однако на самом деле роль ионизации всегда значительна.

Напомним, что одним из необходимых условий аккреции является условие $r_s \gg R$. Согласно (12.4.3) для этого в случае белого карлика должно быть $5/3 - \gamma \gg 10^{-5}$, а в случае нейтронной звезды $5/3 - \gamma \gg 10^{-8}$; разумеется, подобные неравенства всегда выполняются.

Пользуясь (12.4.3), (12.4.4), легко найти поток вещества на звезду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= 4\pi r_s^2 u_s \rho_s = \alpha(\gamma) r_{gc}^2 \rho_c^* \left(\frac{m_p c^2}{kT_c} \right)^{3/2}, \\ \alpha &= \frac{\pi}{4\gamma^{3/2}} \left(\frac{2}{5-3\gamma} \right)^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.4.6)$$

Значения ρ , T и γ следует брать вблизи критического радиуса r_c . Отметим, что величина dM/dt сравнительно слабо зависит от γ : $\alpha(\gamma \rightarrow 1) \approx 1,5$; $\alpha(\gamma \rightarrow 5/3) \approx 0,3$; $\alpha(4/3) \approx 1,4$. Особенность при $\gamma = 1$ вообще не физическая, неравенство $5/3 - \gamma > 0$ всегда выполняется. Структура выражения потока (12.4.6) резко отличается от случая независимых частиц, рассмотренного в § 2: теперь в формулу не входит радиус звезды. Это вполне естественно, так как из-за наличия сверхзвуковой скорости условия при $r < r_s$ (все происходящее внутри r_s) не может гидродинамически повлиять на область $r > r_s$ и, в частности, на величину потока A . Фактически даже раньше, при $r < r_c$ скорость потока мало отличается от параболической.

Для сравнения мощностей аккреции в обоих случаях перепишем (12.4.6) в виде

$$\frac{d(M/M_\odot)}{d(t/10^{10} \text{ лет})} \simeq 10^{-4} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \frac{\rho_\infty}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \left(\frac{a_\infty}{10 \text{ км/сек}} \right)^{-3}. \quad (12.4.7)$$

Поток газа на релятивистский объект больше потока независимых частиц (см. (12.2.3)) в отношении $(c/v_\infty)^2 \sim 10^9$! Физическая причина этой разницы ясна: газ отличается от независимых частиц тем, что в нем происходят частые столкновения атомов между собой; столкновения ограничивают возрастание тангенциальных скоростей атомов, зато увеличивается радиальная компонента, направленная к звезде.

Разница в девять порядков — достаточно веская причина для того, чтобы последующие несколько страниц посвятить исследованию справедливости газодинамического приближения. Этот вопрос был рассмотрен Шварцманом (1970f).

Как известно [см., например, Пикельнер (1961)], длина свободного пробега в плазме относительно кулоновских

столкновений равна

$$l = \frac{(kT)^2}{ne^4 L_{\text{кул}}} \simeq 10^{12} \left(\frac{T}{10000^\circ} \right)^2 \left(\frac{n}{\text{см}^{-3}} \right)^{-1} \text{ см.} \quad (12.4.8)$$

Здесь e — заряд электрона, $L_{\text{кул}}$ — кулоновский логарифм. Из формулы видно, что при $r > r_c$ отношение пробега частицы к характерному размеру области рассмотрения всегда меньше или порядка единицы; следовательно, вплоть до критического радиуса газодинамика заведомо применима.

При $r < r_c$, как легко показать, $l/r \sim r^{-3(\gamma-1/2)}$. Величина γ однозначно связана с изменением температуры в ходе свободного падения. Чтобы найти его, перепишем второй закон термодинамики $dE = -PdV + dQ$ в виде

$$\frac{3}{2} R^* \frac{dT}{dt} = R^* \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - 5 \cdot 10^{20} \kappa T^{1/2} \rho + \frac{dQ'}{dt}. \quad (12.4.9a)$$

Здесь $R^* = 8,3 \cdot 10^7 \text{ эрг/моль} \cdot \text{град}$ — газовая постоянная; второй член справа описывает потери энергии 1 г плазмы на излучение ($\kappa = 1$ соответствует тормозному излучению полностью ионизованной плазмы), третий член — изменение энергии, обусловленное другими неадиабатическими процессами. Учитывая, что $\rho \sim r^{-3/2}$, имеем

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{T}{r} + [2 \cdot 10^{-4} M v_{c(6)}^{-3/2} n_c] \frac{\sqrt{T}}{r} \kappa + \frac{dQ'/dt}{\frac{3}{2} R^*}; \quad (12.4.9б)$$

здесь v_c и n_c — скорость молекул и их число в 1 см³ на критическом радиусе r_c ; $v_{c(6)} \equiv v_c/10^6 \text{ см/сек}$; масса звезды выражена в единицах массы Солнца. В ходе падения на массивный объект газ будет эффективно охлаждаться за счет собственного излучения ($T = [A \ln(r/r_c) + T_c^{1/2}]^2$), по достижении $T \sim 5000^\circ$ начнутся рекомбинации и установится $T \approx \text{const}$. При падении на объект малой массы роль излучения газа невелика; в пренебрежении последним членом изменения температуры стремятся к $T \sim r^{-1}$, а показатель адиабаты газа $\gamma \rightarrow 5/3$. Физическая причина этой разницы ясна: чем меньше объект, тем меньше характерный масштаб и время падения, и процессы излучения оказываются медленными по сравнению со сжатием. Полагая $dQ'/dt = 0$ (см. ниже), найдем из (12.4.9) для критической массы

$$M_{\text{кр}} \sim 10^4 M_\odot [T'_{(4)}]^{1/2} v_{c(6)}^3 n_c^{-1} \kappa_{(2)}^{-1}. \quad (12.4.10)$$

Здесь $T'_{(4)}$ — температура на интересующем нас расстоянии в единицах $10^4 \text{ }^\circ\text{K}$, $\kappa_{(2)} \equiv \kappa/100$.

Любопытно рассмотреть идеализированный случай полного отсутствия потерь и термодинамического равновесия между протонами и электронами.

При $T < m_e c^2$, $\gamma = 5/3$ тепловая энергия и гравитационная энергия одного порядка. Отсюда получим

$$kT \sim m_e c^2 \quad \text{при} \quad \frac{r}{r_g} \sim \frac{m_p}{2m_e} \sim 10^3.$$

Ближе к звезде электроны становятся релятивистскими, среднее значение $\gamma = 13/9$ и отсюда следует, что

$$kT \sim r^{-1/2}, \quad k\dot{T} \sim m_p^{2/3} m_e^{1/3} c^2 \quad \text{при} \quad r \sim r_g. \quad (12.4.11)$$

В указанных выше крайних предположениях следует, что пробег электронов относительно кулоновских столкновений растет пропорционально $r^{-1/2}$ и быстро превосходит характерные размеры области r . Отметим, что для масс $M \sim M_\odot$ пробег $l \sim r$ уже на критическом радиусе. Значит ли это, что поток массы на звезду описывается приближением независимых частиц (12.2.3), т. е. в 10^9 раз меньше газодинамического потока (12.4.7)? — Нет. Натягиваемое вещество содержит магнитные поля. Ларморовский радиус протонов, движущихся с тепловыми скоростями, меньше размеров области движения уже при напряженностях $H > 1,3 T^{1/2} r^{-1} \text{ эс}$. В ходе реальной аккреции $H \geq H_c (r_c/r)^{5/4}$ (см. § 3 гл. 14), поэтому даже начальное поле $\sim 10^{-6} \text{ эс}$ обеспечивает выполнение условия $l_{\text{ларм}} \ll r$.

§ 5. Выделение энергии при симметричной аккреции на нейтронные звезды и белые карлики

Пусть ϕ — гравитационный потенциал у поверхности звезды. Используя (12.4.6), имеем для светимости

$$L = \phi \frac{dM}{dt} \approx 2 \cdot 10^{31} \left(\frac{\phi}{0,1 c^2} \right) \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{10000^\circ}{T_c} \right)^{3/2} n_c \text{ эрг/сек.} \quad (12.5.1)$$

Здесь n_c — число атомов межзвездного газа в см^{-3} ; T_c — температура газа (оба значения берутся вблизи $r = r_c$); γ принято равным $4/3$.

Согласно (12.5.1) интенсивность аккреции резко зависит от температуры межзвездной плазмы вблизи радиуса r_c , с которого начинается падение вещества. Температура плазмы, однако, в свою очередь зависит от светимости звезды, т. е. от мощности аккреции. Возникает своеобразная «отрицательная обратная связь», которая смягчает зависимость от граничных условий (Шварцман 1970а). Для ее выяснения введем параметр $\alpha \equiv T_c/T_b$ (T_b — болометрическая температура звезды, $T_b = [L/\sigma 4\pi R^2]^{1/4}$) и

перепишем (12.5.1) в виде

$$L = 4 \cdot 10^{29} \alpha^{-12/11} n_{\infty}^{8/11} \text{ эрг/сек}; \quad (12.5.2)$$

здесь положено $M = M_{\odot}$, $\varphi = 0,1c^2$ (рассматриваем случай нейтронной звезды).

Как показано в работе Зельдовича и Шакуры (1969), атмосфера звезды при аккреции должна делиться на тонкий горячий слой с $T = T_l$, где происходит торможение падающих частиц, и относительно холодную внутреннюю область с температурой, близкой к болометрической: $T \approx T_b$. В упомянутой работе рассчитана для случая аккреции на нейтронную звезду, обеспечивающей $T_b = 10^7$ °K, температура тонкого слоя T_l , которая определяется балансом энергии и оказывается порядка $10^8 - 10^9$ °K; а priori можно было лишь утверждать, что $T_b < T_l < T_a$ ($T_a \approx 10^{12}$ °K — величина, найденная по адиабате). В соответствии с этим спектр излучения при аккреции должен представлять собой суперпозицию двух: примерно равновесного с $T = T_b$ и тормозного с $T = T_l$ *). Отношение соответствующих светимостей резко зависит от указанных выше параметров. Согласно Зельдовичу и Шакуре, если сферически-симметричная аккреция на нейтронную звезду характеризуется интегральной светимостью $L = 10^{36} - 10^{37}$ эрг/сек и пробегом ядер $y_0 = 2 - 20$ г/см², то L_l/L_b — порядка нескольких сотых.

Роль излучения тонкого слоя в нагреве окружающего газа не мала из-за наличия тяжелых элементов в падающем газе. Определенное влияние на температуру плазмы вблизи критического радиуса должно оказывать также собственное движение звезды относительно диффузного фона: из-за этого движения в глубине зоны ионизации не успевает установиться ионизационное равновесие. С другой стороны, именно близость пекулярной скорости звезды к скорости звука в газе ($T = 10\,000^\circ$ соответствует $a_{\text{зв}} \approx 10$ км/сек) позволяет считать, что внутри зоны ионизации не успевает возникнуть градиент плотностей, соответствующий температурному градиенту, иными словами, что $n_c \sim n_{\infty}$. Собственное движение влияет также на поток массы на звезду (см. § 7), однако из-за того, что $v_{\text{пек}} \sim a_{\text{зв}}$, это влияние незначительно. В зависимости от плотности межзвездного газа ($n \sim 0,1 - 3$ см⁻³), роли тонкого слоя, скорости движения звезды и т. п. входящая в формулу (12.5.2) величина $\alpha \sim 0,1 - 1$, а соответствующие светимости $L \sim 10^{28} - 10^{31}$ эрг/сек (Шварцман, 1970а). Расчет дает: одиночная нейтронная звезда, находящаяся в состоянии аккреции, должна излучать большую часть энергии в труднодоступном ультрафиолетовом диапазоне, $\lambda_{\text{max}} \sim 150 - 900$ Å. Если, однако, звезда погружена в плотное облако ($n \sim 3 - 10$ см⁻³), заметная

*) Это было отмечено в работе Камерона и Мока (1967). Определенную роль может играть также комптоновское рассеяние квантов, выходящих из глубины [(Зельдович, Шакура (1969)], в слое с T_l .

доля ее интегральной светимости будет перерабатываться внутри зоны ионизации в кванты видимого света. Эмиссия в балмеровских линиях (особенно в H_α) способна выдать местоположение старой нейтронной звезды. За подробностями отсылаем к цитируемой работе.

Напомним, что молодые нейтронные звезды не могут испытывать аккрецию: они обладают мощными магнитными полями, быстро вращаются, выбрасывают вещество наружу и проявляют себя как пульсары (см. гл. 13). Однако с течением времени мощность истечения быстро падает; когда она оказывается меньше величины 10^{27} эрг/сек, эжекция должна сменяться аккрецией [Шварцман (1970с)].

На важность учета магнитных полей при аккреции обращал внимание Кардашев (1964). Аккреция на звезду с магнитным полем рассматривалась Амнуэлем и Гусейновым (1968), а также Бисноватым-Коганом и Фридманом (1969) в связи с проблемой рентгеновских источников. Шварцманом (1970е) было показано, что при аккреции межзвездного газа на магнитосферу одиночной нейтронной звезды может генерироваться радиоизлучение с узкой диаграммой направленности.

Рассмотрим теперь натягивание вещества вырожденным карликом ($M = M_\odot$, $R = 10^9$ см, $\rho = 10^{-4}$ г/см³). Если карлик остывший (т. е. уже не белый), то температуру газа на критическом радиусе при аккреции будет определять лишь излучение тонкого слоя ($T_l \sim 10^7 - 10^8$ °К). Величине $\eta \equiv L_l/L_{\text{пол}} = 1 - 10^{-2}$ соответствует $L_{\text{пол}} \sim (10^{28} - 10^{27}) n_\infty$ эрг/сек, а $\eta \lesssim 10^{-3}$ соответствует $L_{\text{пол}} \sim 10^{28} n_\infty$ эрг/сек. Болетрические температуры чрезвычайно низки, $T_b \sim 500 - 2000$ °К. Разумеется, выделить подобную компоненту в спектре еще не остывших белых карликов представляется весьма трудной задачей; однако от них, в принципе, можно было бы зарегистрировать рентгеновское излучение тонкого слоя.

При аккреции газа на нейтронную звезду рентгеновское (ультрафиолетовое) излучение горячих электронов должно сопровождаться гамма-излучением вследствие прямых ядерных соударений. Такие соударения приводят к возбуждениям ядер (с последующей эмиссией γ -квантов), к выбиванию нейтронов (с последующим $n - \gamma$ -захватом) и к генерации π^0 - и π^\pm -мезонов, которые тут же распадаются: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$; $\pi^\pm \rightarrow \pi^\pm \rightarrow e^\pm, e^\pm + e^\mp \rightarrow 2\gamma$ *). Кроме того, температуры в тонком слое столь высоки, что эффективно идут термоядерные реакции, и возникающие гамма-кванты свободно покидают звезду.

Согласно вычислениям Шварцмана (1970b) в зависимости от гравитационного потенциала на поверхности нейтронной звезды

*) Большая часть позитронов избегает аннигиляции и ускоряется в электростатическом поле; см. § 10.

гамма-светимость составляет (10^{-3} — 10^{-5}) ее интегральной светимости. По-видимому, в ближайшем будущем можно будет мерить соответствующие потоки и даже определить спектр γ -квантов. Привлекательным обстоятельством является тот факт, что из красного смещения γ -линий (возникающих, например, в ходе $p + p \rightarrow D + \gamma$) можно непосредственно определять гравитационный потенциал на поверхности нейтронных звезд.

Регистрация спектра γ -квантов помогла бы отличить электромагнитное ускорение частиц (того типа, которое имеет место у пульсаров) от гравитационного ускорения, обусловленного аккрецией. С другой стороны, она помогла бы отличить аккрецию на нейтронные звезды от аккреции на белые карлики.

В заключение параграфа мы хотим подчеркнуть, что исследование физических процессов при аккреции на нейтронные звезды пока далеко от завершения и изложенное выше является лишь предварительным рассмотрением.

§ 6. Симметричная аккреция в гравитационном поле застывших звезд

Картина аккреции газа застывшей звездой в корне отличается от рассмотренной выше. Движение газа отражает связанные с ОТО известные особенности движения частицы в шварцшильдовском поле тяготения. В системе координат, сопутствующей падающему веществу, частицы доходят до r_g за конечное время, момент перехода через r_g никак не выделен. Если за рассматриваемой частицей следует другая, и расстояние между ними где-то вдали от r_g было конечно, то оно останется конечным и в момент пересечения r_g . Для потока частиц, т. е. для газа, отсюда следует вывод: плотность в системе, движущейся с газом, остается конечной.

По порядку величины плотность равна $\rho_m = \rho_\infty \frac{r_c^2}{r_g^2} \frac{a_\infty}{c}$. Выражая ρ_m через a_∞ , получим

$$\rho_m \cong \rho_\infty \left(\frac{c}{a_\infty} \right)^3.$$

При $a_\infty = 10$ км/сек, $\rho_\infty = 10^{-24}$ г/см³ найдем $\rho_m \sim 3 \cdot 10^{-11}$ г/см³. С точки зрения покоящегося наблюдателя, находящегося вблизи r_g , скорость газа тем ближе к скорости света, чем ближе точка наблюдения к r_g . Плотность числа частиц и поток частиц образуют четыре-вектор. При лоренц-преобразовании от системы, движущейся с газом, к покоящейся системе, плотность газа, измеренная в покоящейся системе, неограниченно растет при приближении к r_g : $\rho = \rho_\infty (1 - r_g/r)^{-1/2}$ (точнее, так растет плотность массы покоя или плотность как число частиц в единице объема). Наконец, с точки зрения далекого наблюдателя частица только асимптотически приближается к r_g за бесконечное время.

Далекий наблюдатель, как бы долго он ни наблюдал за стационарным потоком аккреции на застывшую звезду, считает, что ни одна из частиц, прошедших когда-то давно мимо него, не пересекла r_g . Следовательно, все они накапливаются в пространстве, прилегающем к r_g . В точном стационарном решении для потока газа общее число частиц, заключенных между двумя сферами, $r = R_1$ и $r = R_2$, расходится, когда нижний предел стремится к гравитационному радиусу $R_1 \rightarrow r_g$:

$$V = 4\pi \int r^2 \sqrt{g_{11}} dr, \quad N = \text{const} \int \sqrt{\frac{r}{r-r_g}} r^2 \frac{1}{\sqrt{1-r_g/r}} dr.$$

В знаменателе под интегралом стоит $r - r_g$, и интеграл расходится логарифмически. С точки зрения далекого наблюдателя, к стационарному потоку можно только асимптотически приближаться *). Емкость слоя, прилегающего к r_g , в стационарном решении бесконечна, и нужно бесконечное время, чтобы его заполнить.

Красное смещение излучения газа, находящегося вблизи r_g и движущегося по направлению к звезде, стремится к бесконечности.

При сферически-симметричной аккреции газа в гравитационном поле застывшей звезды далекий наблюдатель не обнаружит заметного выделения энергии. В случае застывшей звезды нет ударной волны, останавливающей падение, в отличие от нейтронной звезды!

Однако, как мы увидим ниже, результат существенно зависит от предположения о точной сферической симметрии и об отсутствии магнитных полей в натягиваемой плазме.

§ 7. Случай несимметричного течения газа

Начнем с рассмотрения невзаимодействующих частиц, обладающих на бесконечности направленной скоростью и движущихся в ньютоновском поле тяготения. Частицы попадают на поверхность радиуса R под разными углами, так что чем ближе момент

к максимальному $l_{\max} = R \frac{v_p}{v_\infty}$ (см. § 2), тем больше угол между

траекторией и нормалью к поверхности **). При этом для потока $\frac{dM}{dt}$ сохраняется, разумеется, прежнее выражение (12.2.1). Введение конечного сечения $\sigma \neq 0$ меняет ситуацию. Столкновения

*) Время, необходимое для приближения к стационарному потоку с заданной точностью в данной точке пространства, тем больше, чем ближе эта точка к r_g .

**) Любопытно, что тем не менее в поле $u = \frac{\text{const}}{r}$ число частиц, пересекающих единицу поверхности, одинаково по всей поверхности (при $v_\infty \ll v_p$).

частиц, движущихся по гиперболическим орбитам, приводят к потере тангенциальной скорости, высвечиванию лишней энергии и падению на звезду (рис. 60). Отношение энергии, выделяющейся при столкновениях, к энергии удара о звезду пропорционально σ и мало при малом σ . Однако в случае застывшей звезды удара о поверхность нет. Вся наблюдаемая энергия зависит от столкновения частиц между собой.

Итак, представим себе, что застывшая звезда погружена в газ, рассматриваемый как сплошная среда. Предположим, в отличие от предыдущего параграфа, что на бесконечности газ движется относительно звезды со скоростью u_0 . Рассмотрим предельный случай $u_0 \gg a_0$: при наличии упорядоченного движения (скорость u_0) учет собственного движения молекул газа уже несуществен. Пренебрегая скоростью звука по сравнению со скоростью u_0 , мы одновременно пренебрегаем и давлением. Но при отсутствии давления движение сплошной среды, по существу, не

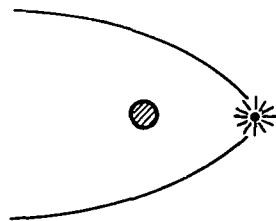


Рис. 60. Столкновение частиц с противоположными моментами в поле притягивающего центра.

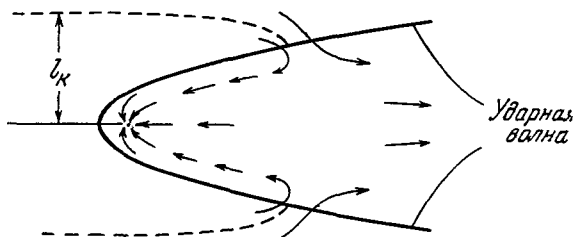


Рис. 61. Гидродинамическая картина аккреции. В ударной волне частицы теряют составляющую скорости, перпендикулярную к фронту. При прицельном расстоянии меньше l_k радиальная составляющая скорости меньше параболической и частица в конце концов падает к притягивающему центру.

отличается от движения отдельных частиц: уравнения гидродинамики представляют собой просто иную запись уравнений механики частицы. В стационарной задаче линии тока представляют собой просто траектории частиц. Хойл и Литлтон (1939), Бонди и Хойл (1944), Бонди (1952), Сальпетер (1964) дают следующую общую картину движения (рис. 61): газ течет слева направо, в поле тяготения линии тока искривляются, а скорость увеличивается по закону сохранения энергии.

В хвосте потока расположена вытянутая поверхность ударной волны. Ударная волна заменяет столкновения пар частиц,

описанные выше. Пересекая фронт ударной волны, газ теряет компоненту скорости, перпендикулярную к фронту. Компонента скорости, параллельная фронту, т. е. направленная по радиусу, остается без изменения.

Пользуясь законами Кеплера, можно найти критическую траекторию (пунктир) и критический прицельный параметр l_k . При $l > l_k$ скорость после сжатия ударной волной остается больше параболической, и вещество вытекает на бесконечность; при $l < l_k$ вещество после сжатия падает на звезду. Оказывается, что l_k и, соответственно, скорость аккреции зависит от скорости газа u_0 примерно так же, как в сферической задаче зависела от скорости звука a_0 (см. выше). Согласно расчетам упомянутых выше авторов, в случае $u_0 \gtrsim a_0$ выражение для потока массы на звезду имеет вид

$$\frac{dM}{dt} = \varepsilon \frac{M^2 n}{u_0^3 \cdot 10^{11}}, \quad (12.7.1)$$

где u_0 — скорость в км/сек, M — масса в единицах M_\odot , n — плотность межзвездного газа (см^{-3}), t — в годах, ε — безразмерная функция показателя адиабаты γ и отношения (u/a) ; если γ не слишком близко к $5/3$, то ε порядка единицы. Из уравнений (12.7.1) и (12.4.7) ясно, что интенсивность аккреции в симметричном и несимметричном случае можно описывать (с точностью до коэффициента порядка единицы) одной и той же формулой, если под скоростью понимать $\sqrt{u_0^2 + a_0^2}$ [Бонди (1952)].

Ударная волна возникает даже в том случае, когда длина свободного пробега электронов и ионов больше характерных размеров задачи. Как мы видели в конце § 4, коллективное взаимодействие заряженных частиц (с магнитным полем или электростатическое) приводит к тому, что плазма ведет себя как сплошная среда.

Так называемые «бесстолкновительные» ударные волны хорошо изучены в области столкновения солнечного ветра с магнитосферой Земли.

Дальнейшее движение вещества, подвергнувшегося сжатию ударной волной и падающего на звезду, мало изучено. В идеальном осесимметричном движении, по-видимому, этот газ обтекает звезду со всех сторон и вблизи звезды его движение становится радиальным и сверхзвуковым, качественно похожим на движение при сферической аккреции (Шварцман, 1970f). Детальное исследование картины движения и устойчивости весьма желательно!

Существует, однако, случай, когда учет несимметрии кардинально меняет всю картину. Речь идет об аккреции в двойных системах. Важность ее рассмотрения очевидна: при этом можно обеспечить огромную плотность газа «на бесконечности». Действительно, переменные типа β Лиря теряют до $10^{-5} M_\odot/\text{год}$; около

половины этой массы может, при благоприятных условиях, упасть на вторую компоненту. Аккреция газа в тесных двойных как вероятный источник излучения рентгеновских звезд была отмечена впервые в работе Хайякавы и Мацуоки (1964). В работах Новикова и Зельдовича (1966) отмечалось, что рентгеновское излучение может происходить из двойных звезд, в которых одна из компонент нейтронная или застывшая звезда. Шкловский (1967) считает, что непосредственно из наблюдательных данных, относящихся к рентгеновской звезде Sco XR — 1, следует вывод о том, что источником рентгеновского излучения является нейтронная звезда, входящая в тесную пару.

Более подробно обсуждаемая возможность рассмотрена Прендергастом и Бербиджем (1968) *). Специфика заключается в том, что газовые потоки образуют вокруг плотной компоненты диск с примерно кеплеровским распределением скоростей. Чтобы упасть на звезду, частицы должны потерять практически весь свой момент. Механизм потери момента связан с вязкостью. Вязкость стремится сделать угловую скорость вращения диска постоянной, при этом его внутренние области будут замедляться, а внешние — ускоряться. Часть газа покинет двойную систему, остальная оседает на плотную компоненту.

В процессе медленного оседания частицы должны высветить энергию, равную половине своей потенциальной энергии. Поэтому в принципе возможно отличить аккрецию в тесной паре на застывшую звезду от аккреции на «обычные» звезды (нейтронные, белые карлики). В первом случае все излучение будет исходить из тонкого горячего диска, во втором — половина излучения будет обусловлена диском, а половина — эмиссией с поверхности звезды. Свечение диска может быть весьма важно как способ обнаружения застывшей звезды в паре (Шварцман, 1970f; Шакура, 1972).

Конкретные численные значения величин сильно зависят от принятого механизма вязкости, внешних и внутренних граничных условий и др. Пока расчеты были проведены [Прендергаст, Бербидж (1968)] лишь для аккреции на белый карлик с фиксированными параметрами: $M = 10^{33}$ г, $R = 1,5 \cdot 10^{10}$ см, $dM/dt = 2 \cdot 10^{19}$ г/сек, $\rho_\infty = 10^{-14}$ г/см³, $T_\infty = 30000$ °К. Предполагалось, что вязкость обусловлена турбулентностью с длиной перемешивания, равной $1/2$ толщины диска. Приведем их результаты ($\kappa \equiv \equiv r/R$):

$$\left. \begin{aligned} T &= 1,4 \cdot 10^6 \kappa^{-1,05}, \quad \sigma_* = 10^3 \kappa^{-0,9} \text{ г/см}^2, \\ L(\kappa_1, \kappa_2) &= 3,5 \cdot 10^{36} (\kappa_1^{-1,45} - \kappa_2^{-1,45}) \text{ эрг/сек.} \end{aligned} \right\} (12.7.2)$$

Таким образом, в ходе оседания достигаются весьма высокие тем-

*) Линден-Белл (1969) рассматривает аналогичную ситуацию применительно к квазарам и ядрам галактик.

пературы, внутренняя часть диска излучает рентген, внешняя — оптику. В последнее время детальные расчеты аккреции газа в двойной системе и структуры диска были проведены Н. И. Шакурой (1972).

В случае одиночной нейтронной или коллапсировавшей звезды также можно представить себе газовый диск, окружающий звезду, остающийся при сжатии вращающейся звезды. До сих пор нет детальных расчетов такого процесса.

Наконец, кроме общей направленной скорости или вращения, на аккрецию должны влиять хаотические магнитные поля в падающем газе (см. § 3 гл. 14).

§ 8. Силы, препятствующие аккреции

В сферически-симметричном случае аккрецию лимитирует давление излучения, которое возникает при падении вещества.

В простейшем идеализированном случае горячей, полностью ионизованной, но нерелятивистской плазмы и соответствующего излучения $I < \hbar\nu < m_e c^2$, где I — потенциал ионизации, получаются особенно простые закономерности.

Взаимодействие излучения с плазмой описывается томсоновским рассеянием с сечением $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2$, $r_0 = \frac{m_e c^2}{e^2}$, $\sigma = 0,657 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, не зависящим от частоты.

В этом приближении сила, действующая на единицу массы, равна удельному сечению $\sigma N = \frac{\sigma}{m_p} = 6 \cdot 10^{23} \frac{\sigma}{\mu_e} = \frac{0,4}{\mu_e} \text{ см}^2/\text{г}$, умноженному на поток импульса излучения, т. е. на q/c , где q — поток энергии, $\text{эрг/сек} \cdot \text{см}^2$.

Замечательно, что при данном q на силу не влияют ни спектральный состав, ни угловое распределение излучения. Выражение силы справедливо как в случае малой оптической толщи газа, когда излучение почти не рассеивается и $\varepsilon = \frac{|q|}{c}$, так и в случае большой оптической толщи, когда излучение почти изотропно и $\varepsilon \gg \frac{|q|}{c}$ (ε — плотность энергии излучения). В стационарном симметричном случае, очевидно, $4\pi r^2 |q| = L$, где L — полная светимость. С другой стороны, гравитационная сила, действующая на единицу массы вещества, равна $\frac{GM}{r^2}$. Условие равновесия силы тяготения и светового давления приводит к определенному (не зависящему от r !) соотношению между L и M (для водорода):

$$L_c = \frac{4\pi GM m_p c}{\sigma} = 6 \cdot 10^4 M = 3 \cdot 10^4 \frac{L_\odot M}{M_\odot}. \quad (12.8.1)$$

Это значение светимости называется «эддингтоновский предел». Эддингтон (1926) рассмотрел звезду большой массы ($M > 100 M_{\odot}$; см. выше § 2 гл. 10,), в которой главную часть давления составляет давление излучения. Условие равновесия приводит к градиенту давления, а следовательно, и к градиенту температуры. Задаваясь томсоновским рассеянием излучения в горячей плазме, Эддингтон получил приведенное выше значение светимости звезды.

В случае аккреции легко найти из баланса энергии величину потока массы, обеспечивающую критическую светимость

$$-\varphi(R) \frac{dM}{dt} = \frac{GM}{R} \frac{dM}{dt} = L_c.$$

Если $-\varphi(R) = \alpha c^2$, то получим максимально возможную скорость увеличения массы:

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dc} \Big|_c = \frac{4\pi G m_p}{\alpha c^5} = 7 \cdot 10^{-17} \alpha^{-1} \text{сек}^{-1} = (\alpha \cdot 5 \cdot 10^8 \text{лет})^{-1}. \quad (12.8.2)$$

На первый взгляд кажется, что аккреция при $L = L_c$ должна носить характер медленного, дозвукового оседания плазмы в таком поле излучения, что в каждой точке плазма находится почти в равновесии. Легко убедиться, однако, что такая картина внутренне противоречива! При медленном оседании плазма постепенно отдает свою гравитационную энергию излучению. Следовательно, если при $r \rightarrow \infty$ $L \rightarrow L_c$, то половина этой энергии выделилась в слое $\infty > r > 2R$, а другая половина — в слое $2R > r \geq R$, включая ударную волну на поверхности звезды, $r = R$. Но в таком случае на половине пути, при $r = 2R$, поток излучения составлял бы только половину критического, а следовательно, он не может уравнивать силу тяжести! Последовательное самосогласованное решение задачи о движении газа и изменении потока излучения нашел Шакура (1970, 1972). Оказывается, что скорость падений газа конечна и не сильно отличается от параболической. У поверхности звезды, например, скорость падения равна $\frac{1}{\sqrt{e}} u_{\text{параб}}$, светимость ударной волны составляет $e^{-1} \approx 0,37$ критической светимости; далее $L(r)$ нарастает, достигая L_c при $r \rightarrow \infty$. В этой картине плотность падающего газа вблизи $r = R$, перед фронтом ударной волны, имеет в критическом режиме определенное значение; для нейтронной звезды с $R = 10^6$ см, $M = M_{\odot}$ находим $n = 5 \cdot 10^{18}$ см $^{-3}$.

В картине аккреции, которая автоматически установилась на уровне, соответствующем критической светимости, далекие ($r \gg R$) слои плазмы действительно находятся в состоянии, близком к гидростатическому равновесию.

Понятно, что при меньшей светимости $L < L_c$ влияние излучения на движение газа только уменьшается.

Было бы интересно исследовать устойчивость критического и подкритического режима относительно симметричных и несимметричных возмущений.

Итак, чтобы замедлить аккрецию, нужен огромный поток фотонной энергии, на несколько порядков превышающий светимость Солнца (при массе звезды порядка M_{\odot}). Парадоксальным кажется тот факт, что для предотвращения аккреции посредством потоков быстрых частиц достаточно ничтожной мощности, на много порядков меньшей L_c и L_{\odot} (Шварцман, 1970с).

Рассмотрим звезду, выбрасывающую плазму со скоростью v , большей параболической. Этот процесс подробно изучен в Солнечной системе; мощность солнечного ветра не превышает $10^{-6}L_{\odot}$.

Рассмотрим звезду, окруженную газом с заданным давлением *) на бесконечности P ; звездный ветер сможет предотвратить аккрецию, если на расстоянии r_c или больше давление остановки ветра равно давлению окружающего газа.

Поток энергии ветра равен $q = \frac{Q}{4\pi r^2}$, поток импульса (и давление остановки) равен $\frac{q}{v}$. Запишем $r_c = r_{\text{ост}} = \sqrt{\frac{Q}{4\pi v P}}$ и значение r_c из условия $a_{\infty}^2 \equiv \frac{P_{\infty}}{\rho_{\infty}} = \frac{GM}{r_c}$. После несложных вычислений получим критическую мощность ветра:

$$Q_c \approx 10^{27} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right) \left(\frac{T}{10^4 \text{ } ^\circ\text{K}} \right)^2 \left(\frac{H^2/8\pi + nkT}{10^{-12} \text{ дин/см}^2} \right) \text{ эрг/сек.} \quad (12.8.3)$$

Предел (12.8.3) по крайней мере на 11 порядков ниже предела (12.8.1), поэтому практически во всех случаях роль ветра оказывается более существенной. Физическая причина столь впечатляющей разницы ясна: сечение взаимодействия квантов с электронами мало **), мала и эффективная оптическая толщина $\tau = \sigma n r_c \approx \approx 10^{-24} \cdot 10^{13} \approx 10^{-11}$; в то же время сечение взаимодействия и «эффективная толщина» для ветра равны бесконечности.

Аналогичная ситуация, вероятно, имеет место и в случае пульсаров, являющихся, по-видимому, источником быстрых частиц и сверхдлинных радиоволн, отражающихся от окружающей плазмы (кроме того излучения, которое проходит насквозь и

*) В это давление нужно включить вклад магнитного поля

$$P = nkT + \frac{H^2}{8\pi}.$$

**) Предел (12.8.1) записан для случая комптоновского рассеяния; индуцированный комптон-эффект, поглощение в линиях или рассеяние на пыли могут несколько понизить его,

воспринимается нами); в этом случае в формулу надо подставлять $v = c$.

Излучение пульсара не только предотвращает падение окружающего вещества, но и производит эффективное выметание окружающей плазмы.

Вопрос о возможности смены эжекции аккрецией на пульсары в ходе их старения рассмотрен Шварцманом; см. в главе о пульсарах.

Подчеркнем, что если аккреция установилась, то появление в ударной волне на поверхности звезды быстрых частиц с мощностью Q_c не прекратит аккрецию. Действительно, теперь необходимо сравнивать давления встречных потоков не на радиусе r_c , а у поверхности звезды (r_0); соответствующая критическая величина эжекции больше (12.8.3) в $(r_c/r_0)^{1/2} \sim 10^3$ раз.]

Необходимо, наконец, предостеречь от неограниченного пользования подкупающе простой и изящной формулой для эддингтоновского предела L_c .

При неполной ионизации вещества сила, действующая на вещество со стороны излучения, возрастает за счет фотоэффекта и поглощения в линиях. С другой стороны, в поле низкочастотного излучения с высокой яркостной температурой, сила, действующая на полностью ионизованную плазму, возрастает по сравнению с расчетом по томсоновскому сечению (Левич, 1974).

§ 9. Аккреция как эволюционный фактор

Уже давно отмечалось, что аккреция на звезды, которые находятся вблизи границы устойчивого равновесия, способна переводить их в следующий эволюционный класс: белые карлики — в нейтронные звезды, нейтронные звезды — в застывшие.

У одиночных объектов с $M \sim M_\odot$ увеличение массы $dM/dt \sim 10^{-14} - 10^{-16} M_\odot/\text{год}$, и эффект несуществен. В двойных системах поток может быть весьма велик. Отметим, что для обеспечения светимости $L \sim 10^{37} \text{ эрг/сек}$ (по-видимому, типичная светимость рентгеновских источников) на нейтронную звезду должно падать $\sim 10^{-9} M_\odot/\text{год}$, а на белый карлик $\sim 10^{-6} M_\odot/\text{год}$. Соответствующие времена жизни $\sim 10^9$ лет и $\sim 10^6$ лет. Не исключено, однако, что вспышки ядерной реакции в водородной подушке и сброс газа удлиняют указанный срок [Камерон, Мок (1967); Саслау (1968); Редкобродый (1971)]. Это предположение, кстати, естественно объясняет тот факт, что большинство (или даже все) новые звезды входят в состав тесных пар.

Масса застывшей звезды, в принципе, ничем не ограничена. Решение уравнения (12.4.7) дает для роста M выражение: $M(t) = M_0/(1 - AM_0 t)$ ($A = \text{const}$), которое расходится при

некотором t . За время 10^{10} лет режим «катастрофической» аккреции успевает наступить, если начальная масса

$$M_0 > M_1 \sim 10^6 M_\odot \left(\frac{v}{20 \text{ км/сек}} \right)^3 \left(\frac{0,1 \text{ см}^{-3}}{n_\infty} \right) \quad (12.9.1)$$

(Сальпетер, 1964). В действительности, конечно, никакой катастрофы произойти не может: начиная с некоторого момента уравнение (12.4.7) перестает быть применимым. Сальпетер предположил, что по достижении очень больших масс интенсивность аккреции будет ограничена возросшей светимостью звезды и впредь станет увеличиваться «всего лишь» пропорционально $\exp(t/t_0)$, где $t_0 = 10^8$ лет; см. выше § 7 (напомним, что эддингтоновский предел $L_{\max} = 10^{38} M/M_\odot \text{ эрг/сек}$; $L \sim dM/dt$). На самом деле, однако, уже для

$$M = M_2 \approx 10^8 M_\odot \left(\frac{v}{20 \text{ км/сек}} \right)^3 \left(\frac{0,1 \text{ см}^{-3}}{n} \right) \quad (12.9.2)$$

время падения газа на объект $t_g \approx r_c/v$ сравнивается со временем удвоения массы $t_2 \approx 10^{10} (M_1/M)$ лет, и приближение стационарной аккреции (12.4.7) неприменимо. Физический смысл критерия (12.9.2) прост: время

$$t_g(M = M_2) \approx 2GM_2 v^{-3} \approx 10^{-8} (n/0,1 \text{ см}^{-3})^{-1} \text{ лет}$$

равно по порядку величины времени собственного сжатия газа плотности n в точку $t' = \frac{1}{\sqrt{6\pi G\rho}}$. Рассмотрение аккреции на тела с $M > M_2$ без учета факторов, стабилизирующих газ (вращение, магнитные поля), бессмысленно. С другой стороны, любопытно, что в сферически-симметричном приближении сколлапсировавшие тела с $M > M_1$ «неустойчивы»: их масса быстро растет до $M \sim M_2$, когда режим принимает новый характер, а светимость оказывается так велика, что объекты нельзя не заметить.

Итак, согласно уравнению (12.9.2), застывшие звезды с обычными массами $M < 100 M_\odot$ всегда далеки от возможности катастрофической аккреции.

§ 10. Об электрическом заряде звезд

Движение заряженных частиц (ядер, ионов, электронов) в окрестности звезды приводит к изменению заряда звезды. Возникающее при этом электрическое поле в свою очередь влияет на движение заряженных частиц и, как правило, заряд звезды соответствует условию стационарности.

Грандиозные эффекты возникают при вращении компактных звезд с магнитным полем, т. е. в случае пульсаров; на огромные поля и разности потенциалов указывают Голдрейх и Юлиан (1969).

Любопытно, однако, что звезды должны нести на себе электрические заряды даже при отсутствии у них магнитных полей. Качественно причина заключается в различии взаимодействия с излучением легких электронов и тяжелых ядер.

Перейдем к вычислениям. Из условия стационарности следует, что в ходе обмена потоки ионов и электронов строго одинаковы: $n_i v_i = n_e v_e$. Можно показать [см. Шварцман (1971a)], что в потоках с большой точностью одинаковы и концентрации: $n_i = n_e$. Это связано со слабостью гравитационного взаимодействия по сравнению с электромагнитным:

$$\frac{Gm_p^2}{e^2} \approx 10^{-36}.$$

Ничтожный избыток частиц одного знака в потоке привел бы к появлению электрической силы, существенно превосходящей гравитационное притяжение всей звезды!

Так как граничные условия для частиц обоих сортов совпадают, то равенство скоростей обуславливает равенство ускорений w . Поэтому из уравнений

$$\left. \begin{aligned} w_i &= w_{\text{гп}} - \frac{ZF_{\text{эл}}}{m_i} - \frac{\Delta P_i}{nm_i} - \frac{F_{r(i)}}{m_i}, \\ w_e &= w_{\text{гп}} + \frac{F_{\text{эл}}}{m_e} - \frac{\Delta P_e}{nm_e} - \frac{F_{r(e)}}{m_e} \end{aligned} \right\} w_i = w_e \quad (12.10.1)$$

сразу найдем

$$F_{\text{эл}} = \frac{m_i}{m_i + Zm_e} \left[F_{r(e)} + \frac{\Delta P_e}{n} - \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\Delta P_i}{n} + F_{r(i)} \right) \right]. \quad (12.10.2)$$

Здесь $F_{\text{эл}}$ и F_r — электростатическая и лучистая силы, Z — заряд иона, ΔP — градиенты парциальных давлений (включая давление на ионы и электроны в замороженных магнитных полях); скорость движения плазмы положена нерелятивистской.

Если велико поглощение излучения в линиях положительных ионов, так что $F_{r(i)} > \left(\frac{m_i}{m_e} \right) F_{r(e)}$, то звезда может оказаться заряженной отрицательно. Ниже мы подробно остановимся на обратном случае, практически более интересном, когда ионизация газа значительна и $F_{r(i)} \ll \left(\frac{m_i}{m_e} \right) F_{r(e)}$. При этом звезда несет на себе положительный электрический заряд. Соответствующий

потенциал

$$\Phi_{эл} \approx \frac{m_i c^2}{e} \left(\frac{\Phi_{грав}}{c^2} \right) \frac{F_{r(e)} + \frac{\Delta P_e}{n}}{F_{грав(i)}} =$$

$$= 9,4 \cdot 10^8 \left(\frac{m_i}{m_p} \right) \left(\frac{\Phi_{грав}}{c^2} \right) \left(\frac{L}{ZL_0} + \alpha \right) \text{ вольт}, \quad (12.10.3)$$

где e — заряд электрона, $\Phi_{грав}$ — гравитационный потенциал у поверхности звезды, L — светимость звезды, L_0 — критическая эддингтоновская светимость. Величина α определяется процессами обмена. При аккреции, сопровождающейся переходом через скорость звука, $\alpha \ll 1$; при оседании $\alpha \lesssim 1/2$; при истечении $\alpha \gtrsim 1/2$. В недрах звезды $\alpha = 1/2$ и $\Phi_{эл} \approx m \Phi_{грав}/2e$ — это хорошо известный «термодинамический» электропотенциал (см. например, Пикельнер (1961)).

Если говорить об электронах, то электростатическая сила, притягивающая их к звезде, практически компенсируется лучистой силой и градиентом давлений. Однако вблизи компактных объектов должны существовать также позитроны. Для позитронов все три силы направлены от звезды, что будет приводить к их ускорению [Шварцман (1970d)].

Позитроны должны рождаться вблизи компактных объектов: при аккреции на сколлапсировавшие тела из-за высоких температур в падающем газе (см. § 4), при аккреции на нейтронные звезды из-за прямых ядерных столкновений (см. § 5), при эжекции с нейтронных звезд — из-за нагрева плазмы когерентным излучением [Левич, Сюняев (1970)]. Эффективный гравитационный потенциал компактных объектов может достигать $0,5 c^2$. Их светимости в ряде случаев должны быть чрезвычайно велики. Наконец, с поверхности нейтронных звезд и при вспышках сверхновых мыслим выброс не только протонов, но и более тяжелых ядер с массами вплоть до $200-300 m_p$. Следовательно, вблизи компактных объектов позитроны могут, в принципе, ускоряться до сотен миллионов (а в случае $m_i \gg m_p$ — и до десятков миллиардов) вольт. Механизм ускорения — чисто электростатический, давление радиации и газа на ультрарелятивистские частицы, движущиеся от звезды, мало из-за доплер-эффекта.

Если плотность плазмы, реализующей обмен, значительна, то давление радиации на эти частицы направлено в сторону звезды и тормозит частицы. Действительно, при этом изотропная (рассеянная) компонента излучения велика и скорость позитрона оказывается больше «групповой» скорости света $v = q/\varepsilon$ (q — поток лучистой энергии, ε — ее плотность). Устанавливается стационарный режим, в котором радиационное торможение позитрона равно электростатической силе, действующей на него. При мощной сфе-

рически-симметричной аккреции на нейтронную звезду ($L \sim L_0$) энергия позитронов «на бесконечности» оказывается по этой причине порядка 5—15 $M\varepsilon$. Эффекты торможения должны, однако, быть незначительны при аккреции в двойных системах, когда падающий газ сконцентрирован в тонком диске, а также при достаточно слабой эжекции; напомним, что электрический потенциал (12.10.3) не зависит от мощности аккреции и эжекции. Кулоновские потери и аннигиляция позитронов всегда пренебрежимы.

Быть может, позитроны, инжектируемые компактными объектами, в дальнейшем ускоряются межзвездными магнитными полями и входят в состав космических лучей. Любопытно отметить, что для поддержания наблюдаемой плотности позитронной компоненты в объеме галб Галактики необходимо одновременное функционирование всего лишь 1—10 источников с мощностью $L_{e^+} = 10^{35}$ эрг/сек (при $E_{e^+}^{inj} = 10 M\varepsilon$).

ГЛАВА 13

ПУЛЬСАРЫ

§ 1. Общий обзор; излучение пульсаров

Открытие Хьюишем, Белл, Пилкингтоном, Скоттом и Коллинзом (1968) пульсирующих радиоисточников широко известно как астрономам, так и неспециалистам. Период повторения радиовсплесков лежит у известных на начало 1971 г. пульсаров в пределах от $T = 3,7$ сек для самого «медленного» до $T = 0,033$ сек для самого «быстрого». Приведенные значения периодов округлены; фактически они известны с точностью вплоть до $10^{-8} - 10^{-9}$.

В первые месяцы после открытия пульсаров для «часового механизма», обеспечивающего постоянство их периодов, обсуждались теории двух типов: радиальные колебания белых карликов и вращение нейтронных звезд. Тогда были известны лишь пульсары с периодами ~ 1 сек. Расчетам периодов осцилляций белых карликов посвящено огромное число работ. Идеализированная теория приводит к $T_{\text{осц}} \geq 2$ сек; для объяснения более коротких периодов рассматривалось влияние вращения, предполагались высшие гармоники колебаний (вплоть до 5 й) и т.п. Открытие пульсара с $T = 0,033$ сек в Крабовидной туманности явилось той «последней каплей, переполнившей чашу», которая положила конец этому направлению мысли. Выжила лишь теория вращающейся нейтронной звезды. Нейтронная звезда — единственный известный теоретикам тип небесного тела, для которого экваториальная скорость вращения, соответствующая $T = 0,033$ сек, достаточно мала (2000 км/сек при $R = 10$ км; для белого карлика с $R = 6000$ км, $v = 120\,000$ км/сек), а гравитационный потенциал достаточно велик, чтобы центробежные силы не разрушили звезду.

Предполагают, что каждый пульсар является источником электромагнитного излучения, характеризующегося резкой угловой зависимостью. Направление луча жестко связано со звездой и вращается вместе с ней. Каждый раз, когда луч пересекает Землю, наблюдатель видит всплеск излучения. В момент, когда писался этот раздел, еще не было выяснено, подобен ли луч ка-

рандашу или же он напоминает нож [см. Гинзбург, Железняков, Зайцев (1969)]. Обычно полагают, что сильная угловая зависимость излучения связана с магнитным полем пульсара.

Предположим, что это поле подобно полю диполя, магнитная ось которого не совпадает с осью вращения. Излучение, генерируемое вблизи полюсов вдоль магнитных силовых линий, будет иметь карандашную диаграмму (возможно, два карандаша, из которых в большинстве случаев только один задевает Землю). Генерация излучения частицами, удерживаемыми (в плоскости) вблизи магнитного экватора, даст пример ножевой диаграммы. Суммарный телесный угол, захватываемый ножевым лучом, в 10—20 раз больше чем угол, описываемый карандашом. Значит, указанным предположениям о характере диаграммы соответствуют разные вероятности наблюдения пульсара и разные оценки числа пульсаров в нашей Галактике.

Таким образом, одно возможное объяснение направленности излучения непосредственно связывает ее с наличием магнитного поля. Электроны, движущиеся с релятивистскими энергиями и со скоростью, весьма близкой к скорости света, по вытянутым спиральям, под очень малым углом к магнитному полю, излучают преимущественно в направлении магнитного поля.

При наличии лазерного механизма усиления излучения анизотропным распределением электронов в магнитном поле также можно ожидать преимущественного направления излучения, связанного с направлением магнитного поля. Однако есть и другая точка зрения, которая направленность излучения только косвенно связывает с магнитным полем. Особенно подробно ее разработал Железняков (1971).

Предполагается, что определенная область, заполненная плазмой, является источником изотропного излучения.

Магнитное поле увлекает эту плазму так, что она вращается вместе со звездой; излучающая плазма находится на таком расстоянии от звезды (точнее, от оси вращения), что ее скорость вращения равна $0,8 \div 0,9$ скорости света. Это расстояние равно ~ 1300 км для пульсара в Крабовидной туманности (кратко «Кр») и $\sim 65\,000$ км для пульсара с периодом $1,3$ сек.

За счет эффекта Доплера наблюдаемая частота максимальна, когда источник движется к наблюдателю. Резко меняется (пропорционально 4-й степени частоты) и общая интенсивность излучения. В результате получается карандашная диаграмма излучения пульсара как целого.

Такое кинематическое объяснение направленности особенно привлекательно в свете того, что пульсар «Кр» испускает не только радиоизлучение, но и оптическое и рентгеновское излучение. Во всех этих диапазонах длительность излучающей фазы приблизительно одинакова и составляет около 6% длительности всего

цикла, что соответствует одинаковому углу раскрытия диаграммы направленности порядка $0,3$ радиана.

В первой точке зрения приблизительное совпадение диаграмм направленности в разных спектральных участках требует специ-

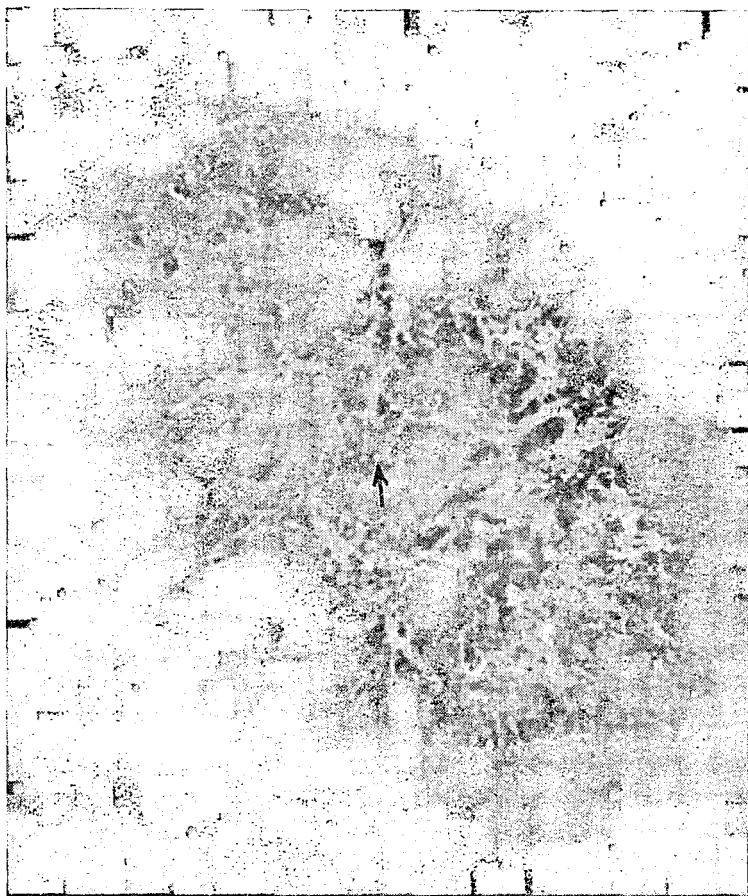


Рис. 62. Пульсар в Крабовидной туманности.

ального доказательства. Вместе с тем поляризация радиоизлучения пульсара доказывает, что вторую точку зрения нельзя понимать буквально: если бы мы имели дело с движущимся источником хаотического излучения, доплер-эффект мог бы сделать излучение направленным, но не поляризованным. Между тем закономерно изменяющаяся поляризация наблюдается как в радиодиапазоне,

так и в оптическом. Таким образом, наиболее вероятно, что все эффекты (влияние магнитного поля на движение и излучение отдельных электронов, влияние поля на коллективное излучение и общее движение излучающей области, связанное с вращением пульсара) принимают участие в формировании диаграммы направленности. Измерение поляризации рентгеновского излучения весьма желательно!

Абсолютная интенсивность излучения, принимаемого на поверхности Земли, характеризуется для пульсара «Кр» следующими величинами: на радиочастоте $\nu = 10^8$ гц $F = 10$ единиц потока, в оптической области (10^{15} гц) 10^{-2} единицы и в рентгеновской области (10^{18} гц) 10^{-4} единицы. Единица потока равна 10^{-26} ватт/м²·гц. Пересчет на полную мощность $L = 4\pi r^2 \int F d\nu$ дает для трех диапазонов, приведенных выше, $L_{\text{радио}} = 10^{31}$ эрг/сек, $L_{\text{опт}} = 10^{34}$ эрг/сек, $L_{\text{рентг}} = 10^{36}$ эрг/сек. Наконец, задаваясь размером излучающей области, можно найти эффективную яркостную температуру излучения. Пока $h\nu < kT_b$, имеет место формула $kT_b = \frac{c^2 F(\nu)}{2\pi\nu^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2$. По этой формуле Гинзбург (1971) (оттуда же заимствованы и предыдущие оценки) получает $T_{b, \text{радио}} = 10^{26}$ °К, $T_{b, \text{опт}} = 10^9$ °К, $T_{b, \text{рентг}} = 10$ °К, принимая размер излучающей области $5 \cdot 10^7$ см. Для рентгеновского излучения условие $h\nu < kT_b$ нарушено, и следовало бы истинную (а не условную «рэлей-джинсовскую») температуру искать по формуле Планка, $T_{\text{Пл}} = \frac{h\nu}{k} \left[\ln \left(1 + \frac{h\nu}{kT_{\text{рэл.-дж.}}} \right) \right]^{-1} = 6 \cdot 10^5$ °К. Впрочем, так как рентгеновское излучение явно не тепловое, спектр его степенной, а не экспоненциальный, $T_{b, \text{Пл}} = 6 \cdot 10^5$ °К имеет не больше физического смысла, чем $T_{b, \text{рэл.-дж.}}$.

Отметим, что потоки излучения, принимаемые на Земле, усреднены по циклу, таким образом, максимальные (пиковые) значения по крайней мере в 30 раз больше. С другой стороны, при подсчете L не принималась во внимание направленность излучения, что приблизительно компенсирует неравномерность во времени. Для всех других известных пульсаров радиоизлучение того же порядка, что и для пульсара «Кр», однако оптическое и рентгеновское излучение у них не обнаружено. В частности, не обнаружено оптическое излучение пульсара «Вела» с периодом 0,089 сек. В последнее время сообщается об открытии пульсации рентгеновского источника Суг XI с периодом 0,072 сек; тщательные поиски не обнаружили ни пульсирующего, ни постоянного оптического или радиоизлучения в соответствующем направлении.

Необычайно высокие температуры радиоизлучения с несомненностью указывают на коллективный механизм возбуждения радиоволн. Температура излучения не может быть выше эффективной

температуры излучающих единиц, иначе поглощение излучения («самопоглощение в источнике») превышает излучение. Очевидно однако, что энергия отдельных частиц — электронов, протонов — не достигает 10^{22} эв. Здесь возможны два решения. В первом варианте по-прежнему излучают отдельные частицы; средняя энергия их порядка 10^8 или 10^{11} эв и гораздо скромнее указанной выше, но распределение по энергии не максвелловское, $\frac{\partial \ln f}{\partial E} > -\frac{1}{kT_b}$;

в частности, может быть $\frac{\partial \ln f}{\partial E} > 0$ (инверсия) в какой-то области спектра. Здесь f — плотность электронов в фазовом пространстве. Выписанное условие соответствует «активной» среде, усиливающей излучение, как в лазере. Другой вариант заключается в том, что плазменные неустойчивости вызывают возбуждение мощных колебаний (например, при прохождении тока, т.е. при встречном движении электронов и протонов), в которых в одной фазе колеблются и излучают большие группы электронов, и T_b характеризует энергию целых групп. Тем не менее, для рентгена число заполнения фотонами состояний электромагнитного поля $n = (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}$ мало по сравнению с единицей. Число заполнения является инвариантом, оно одинаково в любой системе координат и, в частности, не меняется при доплеровском изменении частоты.

Малое число заполнения исключает участие лазерного механизма усиления рентгеновского излучения (E — энергия электрона).

Вопрос о механизме радиоизлучения обсуждается в обзорах Гинзбург, Железняков, Зайцев (1969), Каплан и Цытович (1970).

Обратимся к рентгеновскому излучению. Из приведенных чисел видно, что у пульсара «Кр» это излучение превосходит по выходу энергии как радио-, так и оптическое излучение. Господствующая точка зрения заключается в том, что излучают отдельные электроны в магнитном поле («синхротронное излучение»). Эффективная частота, на которой происходит излучение и его интенсивность (на один электрон) даются формулами (E — энергия электрона)

$$\nu_m = 10^8 H_{\perp} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \text{ эц}, \quad P(\nu_m) = 10^{-22} H_{\perp} \text{ эрг/сек} \cdot \text{эц}.$$

Электрон теряет половину энергии за время $t_1 = 5 \cdot 10^8 \frac{mc^2}{EH_{\perp}^2}$.

Для объяснения рентгеновского излучения нужно выбрать значения поля, размеров области l , энергии электронов и их концентрации n .

Гинзбург (1974) полагает, что $H \sim H_{\perp}$ (отмечая, что это не обязательно) и что поле удерживает электроны, так что $\frac{H^2}{8\pi} = \delta \cdot nE$, $\delta > 1$. При этом, в зависимости от выбора δ , получается набор

параметров (единицы CGSE):

$$H = 10^8 \delta^{1/17}, \quad l = 5 \cdot 10^8 \delta^{1/17}, \quad E = mc^2 \cdot 10^{28} \delta^{-2/17}, \\ n = 5 \cdot 10^{14} \cdot \delta^{-7/17}, \quad ct_1 = 1,5 \cdot 10^4 \delta^{-9/17}.$$

Шкловский (1969а, б) считает, что электроны движутся под весьма малым углом к полю, так что $H \sim 10^8$ гс, но $H_{\perp} \sim 3 \cdot 10^3$ гс в области излучения. При этом необходима более высокая энергия электронов $\sim 3 \cdot 10^4 mc^2$, плотность $n \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$. При этом $ct_1 \sim 5 \cdot 10^7 \text{ см}$. Шкловский полагает, что электроны обильно выходят из магнитосферы пульсара в окружающую область с полем $H \approx 10^{-3}$ гс и в сходстве формы спектра пульсара и окружающей туманности видит подтверждение своих оценок. С этой точки зрения допустимо нарушение условия удержания, соотношение между l и ct не противоречит модели. Наконец, так как l порядка радиуса, на котором вращение пульсара дает световую скорость, то работает и доплер-эффект, т. е. механизм Железнякова.

§ 2. Энергетика пульсаров; их гравитационное излучение

В качестве источника энергии излучения (а также для подпитки туманности в случае Краба) обычно рассматривают энергию вращения нейтронной звезды. Измерения замедления пульсаров (увеличение T со временем) согласуются с этой гипотезой. В качественной форме мысль о том, что Крабовидной туманности необходимую энергию поставляет центральное вращающееся тело, была высказана Уилером (1966), а в другой связи Кардашевым (1964).

Согласно грубым оценкам в ньютоновском приближении у звезды с $M = 1,2 M_{\odot}$ и $R = 1,2 \cdot 10^6 \text{ см}$ момент инерции $I = 1,4 \cdot 10^{45} \text{ г/см}^2$. Период $T = 0,033 \text{ сек}$ соответствует угловой скорости $\omega \sim 200 \text{ сек}^{-1}$, так что сегодня в энергии вращения пульсара запасено $3 \cdot 10^{49} \text{ эрг}$. Наблюдаемое замедление $\left(\frac{1}{\omega}\right) \left(\frac{d\omega}{dt}\right) = -\frac{1}{\tau_0} = -\frac{1}{2340} \text{ лет}$, следовательно, $\frac{dE}{dt} = -\frac{2E}{\tau_0} = 10^{39} \text{ эрг/сек}$.

Еще перед открытием пульсаров отмечалось, что Крабовидной туманности требуется $\sim 10^{38} \text{ эрг/сек}$ в форме инъекции релятивистских электронов [Шкловский (1966, 1969а), Хеймс и др. (1968)]. Таким образом, проблема энергетического баланса в Крабовидной туманности нашла свое решение.

Для других пульсаров энергетические потребности существенно меньше. Для них также измерено замедление; во всех случаях уменьшение вращательной энергии во много раз больше светимости.

Предполагается, что скорость отдачи энергии пропорциональна четвертой степени угловой скорости вращения. Такой закон получается, в частности, при вращении тела с постоянным магнитным дипольным моментом. Об этом см. ниже, в § 3, где рассматривается электродинамика пульсара. Пока зададимся этим законом, как эмпирическим. Сравнение различных пульсаров с сильно различающимися периодами в первом приближении подтверждает это предположение.

Итак, пусть

$$\frac{dE}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt} = -B\omega^4; \quad (13.2.1)$$

полагая I и B постоянными, получим

$$\frac{d\omega}{dt} = -a\omega^3, \quad \left(\frac{2}{\omega^2}\right) - \left(\frac{2}{\omega_0^2}\right) = at, \quad \omega = \left(2at + \frac{1}{\omega_0^2}\right)^{-1/2}. \quad (13.2.2)$$

Здесь t — время, отсчитанное от момента возникновения пульсара, ω_0 — его начальная угловая скорость. Когда $\omega_0^2 \gg \omega^2$, то

$$\omega = \frac{1}{(2at)^{1/2}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\omega}{2t}. \quad (13.2.3)$$

Этот закон довольно хорошо подтверждается наблюдениями; первоначальная скорость вращения, которая может быть разной у разных пульсаров, в формулы не входит. Константа a меняется не более, чем в десять раз, $\frac{dT}{dt} = \frac{3 \cdot 10^{-15}}{T}$, что означает $\frac{d\omega}{dt} = -10^{-13}\omega^3$.

Для пульсара в Крабе известна точная дата рождения, поэтому есть возможность проверить закон торможения. Имеем $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\omega}{2370}$ лет $= -\frac{\omega}{2t}$. В действительности взрыв произошел в 1054 г., $t = 916$ лет. Согласие неплохое. Существует и другая причина замедления: гравитационные волны, испускаемые вращающейся звездой. Излучения не будет, конечно, если звезда симметрична относительно оси вращения.

Предположим, что звезда обладает квадрупольным моментом K_* , который постоянен во вращающейся системе координат. Тогда

$$\frac{dE_r}{dt} = I\omega\omega = -\text{const} \left(\frac{d^2K_*}{dt^3}\right)^2 = -\text{const} K_*^2 \omega^6. \quad (13.2.4)$$

Соответствующий закон замедления таков:

$$\omega = \left(at + \frac{1}{\omega_0^4}\right)^{-1/4} \rightarrow bt^{-1/4}, \quad (13.2.5)$$

т. е.

$$\frac{d\omega}{dt} = - \frac{\omega}{4t}, \quad (13.2.6)$$

что хуже согласуется с наблюдениями, причем отклонение имеет обратный предыдущему случаю знак. Очевидно, можно подобрать такую комбинацию гравитационного и магнитно-дипольного излучения, которая бы точно давала возраст и наблюдаемую скорость замедления пульсара. Полагая первоначальную угловую скорость $\omega_0 = 10^4 \text{ сек}^{-1}$, легко получить $L_{0 \text{ грав}} = 3 \cdot 10^{48} \text{ эрг/сек}$, $L_{0 \text{ маг}} = 5 \cdot 10^{45} \text{ эрг/сек}$; для настоящего момента: $L_{\text{грав}} = 2 \cdot 10^{38} \text{ эрг/сек}$, $L_{\text{маг}} = 10^{39} \text{ эрг/сек}$.

Что могло бы быть причиной квадрупольного момента? Определенную деформацию должно вызывать магнитное поле, направленное под углом к оси вращения. Однако, как показали Острикер и Ганн, величина магнитного поля, выведенная из магнитного замедления, слишком мала, чтобы обеспечить необходимую деформацию. Для этого надо предполагать внутренние поля порядка 10^{15} гс с силовыми линиями, спрятанными внутри звезды *). Хотя приведенные числа правдоподобны, очевидно, необходима осторожность в их применении. Возможны однако и многие другие причины отклонения от схематизированного предположения формулы (13.2.1), так что гравитационное излучение пульсара указанной выше мощности отнюдь не доказано.

Гравитационное излучение свободно покидает пульсар и его окрестности. В связи с экспериментами Вебера (1969) (см. гл. 1) любопытно отметить, что существует верхний предел для величины A_ω — спектральной плотности гравитационных волн от возникшего вращающегося пульсара. От этой величины A_ω зависит возбуждение резонансного детектора.

Особо отметим, что A_ω не зависит от квадрупольного момента нейтронной звезды K_* , т. е. от величины, о которой ничего не известно. В самом деле, при увеличении K_* увеличивается скорость излучения, но в той же пропорции уменьшается время, в течение которого пульсар проходит единичный интервал частоты, так что $A_\omega = F \frac{dt}{d\omega}$ не зависит от K_* . В отсутствие других механизмов замедления вращения пульсара общее количество энергии, испускаемое в виде гравитационных волн на единичный интервал частот, есть, очевидно,

$$\frac{\Delta E_\omega}{\Delta \omega} = \frac{\Delta \left(\frac{1}{2} I \omega_r^2 \right)}{\Delta \omega} = \frac{I \omega_r \Delta \omega_r}{\Delta \omega} = \frac{1}{4} I \omega. \quad (13.2.7)$$

*) К мысли о том, что сильное магнитное поле, намного превосходящее внешнее дипольное поле, может существовать внутри обычных звезд, давно привыкли.

Здесь учтено, что частота испускаемых волн в два раза больше угловой частоты вращения ω_r . Максимально возможный момент инерции нейтронной звезды $I = 3,5 \cdot 10^{45} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, поэтому для собственной частоты прибора Вебера $\omega = 10^4 \text{ сек}^{-1}$ найдем

$$\frac{\Delta E_\omega}{\Delta \omega} = \frac{1}{4} \cdot 3,5 \cdot 10^{45} \cdot 10^4 = 10^{49} \text{ эрг/гц.} \quad (13.2.8)$$

Усредненный поток, соответствующий этой величине, при расстоянии $r = 10\,000 \text{ пс}$ (ядро Галактики), есть

$$A_\omega = \frac{\Delta E_\omega}{\Delta \omega 4\pi r^2} = 10^3 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{гц.} \quad (13.2.9)$$

Рассмотрим образование пульсара, начальная скорость вращения которого больше, чем это соответствует частоте детектора. Предполагаем, что соответствующий взрыв сверхновой звезды произошел в ядре нашей Галактики и поэтому не наблюдается оптически. В ходе замедления вращения частота гравитационных волн проходит через резонансную, и в это время происходит возбуждение детектора. Однако для регистрации волн веберовским детектором необходимо, чтобы $A_\omega = 10^6 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{гц}$ (Брагинский, 1970).

§ 3. Электродинамика пульсара

Исследования в области электродинамики пульсаров в основном ограничиваются решением модельных задач о вращении в вакууме тел с заданным замороженным магнитным полем [Дойч (1955), Пачини (1968), Ганн и Острикер (1969), Голдрейх и Юлиан (1969)].

Кроме того, даются ориентировочные оценки для плазмы, увлекаемой магнитным полем и вращающейся вместе с пульсаром вплоть до радиуса, где линейная скорость вращения начинает превосходить скорость света [Голд (1968; 1969); Голдрейх (1969)]. Два этих разных подхода дают величины одного порядка для скорости потери энергии и углового момента.

Объяснение этого важного совпадения будет дано ниже. Начнем с рассмотрения диполя с магнитным моментом \mathfrak{M} с осью, перпендикулярной к оси вращения.

Излучение энергии дается формулой

$$W = \frac{2}{3c^2} \mathfrak{M}^2 \omega^4; \quad (13.3.1)$$

момент силы, тормозящей вращение, равен

$$m = \frac{1}{\omega} \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^2} \mathfrak{M}^2 \omega^3. \quad (13.3.2)$$

Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме. В ближней зоне, т. е. на расстояниях, меньших приведенной длины волны $r < \lambda = \frac{c}{\omega}$ (здесь $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$), существует статическое дипольное поле $|H| \sim \frac{\mathfrak{M}}{r^3}$. На больших расстояниях мы имеем поле расходящихся волн с потоком энергии порядка $q = \frac{H^2 c}{4\pi}$. Формулу для излучения можно получить, сшив поля на $r = \lambda$:

$$q = \left(\frac{\mathfrak{M}}{\lambda^3}\right)^2 \left(\frac{c}{4\pi}\right),$$

откуда получим $W \sim 4\pi r^2 q$. В волновой зоне $r > \lambda$ электрическое и магнитное поля равны и перпендикулярны, благодаря чему и получается вектор потока энергии с $\frac{[EH]}{4\pi} = \frac{cH^2}{4\pi}$. Вблизи при $r < \lambda$ наряду с магнитным полем есть также и электрическое поле, однако это поле существенно меньше магнитного и не перпендикулярно к нему. По порядку величины $|E| \sim |H| \frac{r}{\lambda}$, но $|[EH]| \sim H^2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)^4$, что и обеспечивает постоянный по радиусу поток энергии. Точно так же можно проследить и компоненты тензора натяжений, обуславливающие передачу момента вращения от пульсара электромагнитной волне.

Если вращающееся тело теряет энергию, оно всегда теряет (как раз с нужной скоростью) и угловой момент. Строгое ньютоновское доказательство дано Острикером и Ганном (1969), аналогичное доказательство в общей теории относительности получено Хартли (1970). См. § 14, гл. I. В работе Голдрейха и Юлиана (1969) рассматривается магнитный диполь, ось которого совпадает с осью вращения. Вначале принимается, что материал звезды проводит электричество, но заряды не могут стекать с поверхности.

В такой ситуации, очевидно, наружное магнитное поле постоянно, а следовательно, нет ни излучения энергии, ни торможения вращающегося тела.

В стационарном состоянии должен обращаться в нуль ток вдоль меридианов. Но ток в теле, движущемся в магнитном поле, пропорционален электрическому полю в движущейся системе, т. е. комбинации $E - \frac{[vH]}{c}$, где E , H и v измерены неподвижным наблюдателем.

Условие отсутствия тока требует, чтобы вблизи поверхности вращающегося пульсара было тангенциальное (меридиональное) электрическое поле, притом противоположного знака в северном и южном полушарии. Решая задачу электростатики в вакууме с заданным распределением меридиональных полей на поверхности,

авторы приходят к выводу, что вокруг звезды имеется постоянное электрическое квадрупольное поле; электрический квадрупольный момент — порядка

$$Q \sim \mathfrak{M} \frac{\omega R^2}{c} \sim \mathfrak{M} \frac{R^2}{\lambda},$$

где R — радиус звезды.

Но квадрупольное поле в вакууме обязательно имеет также нормальный компонент на поверхности звезды; по порядку величины

$$E_r \sim E_\theta \sim \frac{Q}{R^4} \sim H(R) \frac{R}{\lambda}.$$

При $H(R) = 10^{12}$ гс, $\omega = 200 \text{ сек}^{-1}$, $R = 10^6$ см получим

$$E_r \sim 10^{10} \text{ ед. CGSE} \sim 3 \cdot 10^{12} \text{ в/см.}$$

Разность потенциалов при этом порядка $3 \cdot 10^{18}$ в.

Очевидно, что в такой ситуации нельзя надеяться на отсутствие тока. Заряды будут вырываться с поверхности и двигаться под совместным влиянием электрического и магнитного полей. Однако дальнейшее рассмотрение становится сложным и не проведено.

Отметим заключения, вытекающие из симметрии задач:

1) при точном совпадении осей плазменные эффекты приведут к выделению энергии, но пульсар не возникнет, так как явление не зависит от времени;

2) при не слишком большом наклоне магнитной оси к оси вращения (угол $< 90^\circ$) физически различны ситуации с противоположным направлением магнитного диполя при данном направлении вращения. Скалярное произведение $(\omega \mathfrak{M})$ или (ωH) не зависит от выбора правой или левой системы координат (два псевдовектора!) и выделяет определенный знак заряда. Наглядно при одном знаке электроны стекают с полюсов, а протоны стекают с экватора; при другом знаке с полюса стекают протоны, а с экватора электроны. Эти два случая должны различаться по характеру излучения и было бы интересно попытаться распределить пульсары на две группы в соответствии со знаком $(\omega \mathfrak{M})$.

Заряженные частицы движутся вдоль магнитного поля. Обычно предполагается, что совместное влияние электрического магнитного поля приводит к вращению заряженных частиц вместе с пульсаром, с его угловой скоростью вплоть до «светового радиуса» $\lambda = \frac{c}{\omega}$, где скорость вращения равна c . Это вращение накладывается на радиальное движение со скоростью порядка c . Таким образом, пульсар генерирует релятивистские частицы.

Добавим условия удержания, т. е. потребуем, чтобы плотность энергии частиц (плазмы) была порядка энергии поля $\frac{H^2}{8\pi}$ на световом радиусе.

Тогда для потока энергии, уносимого плазмой, получится оценка, совпадающая с излучением диполя, — поток энергии плазмы порядка потока энергии электромагнитного поля. Этим объясняется отмеченное выше совпадение.

Итак, наряду с высокочастотным излучением пульсар отдает энергию окружающей среде в виде быстрых частиц и в виде излучения с частотой вращения.

В случае Крабовидной туманности энергия, получаемая ею от пульсара (10^{38} эрг/сек), по-видимому, существенно больше, чем излучение (10^{36} эрг/сек). Как эта энергия разделяется на энергию частиц и энергию низкочастотного излучения, неизвестно.

Очевидно, что излучение с частотой 30 гц (и тем более $1 \div 0,3$ гц для других пульсаров) не может пройти через галактическую плазму.

В последнее время появляются интересные расчеты взаимодействия такого излучения с плазмой вблизи источника. См. об этом следующий параграф.

§ 4. Плазма в поле излучения вблизи пульсара

Вблизи пульсара плазма подвергается действию излучения огромной мощности. В этих условиях обычные формулы взаимодействия излучения с электронами, выведенные в линейном приближении, оказываются совершенно не применимыми.

В последние годы в этом вопросе достигнуты существенные результаты. Ниже мы ограничимся самым кратким изложением постановки вопроса и качественных особенностей и ссылками на литературу.

Начнем с рассмотрения магнито-дипольного излучения с частотой, равной частоте вращения пульсара; при оценках возьмем параметры пульсара «Кр».

Томсоновская теория рассеяния излучения справедлива лишь до тех пор, пока колебания электрона в поле волны — нерелятивистские. Из уравнения

$$m \frac{dv}{dt} = eE \sin \omega t$$

получим критерий

$$v = \frac{eE}{m\omega} \cos \omega t < c, \quad g = \frac{eE}{mc\omega} < 1.$$

Подставляя $\omega = 200 \text{ сек}^{-1}$ (угловая частота Кр), получим $E < 10^{-5}$. Задаваясь мощностью излучения 10^{38} эрг/сек, найдем соответствующее расстояние (при распространении волны в вакууме) — 2 пс. Неясно, насколько поглощение или рассеяние и отражение, связанное с наличием плазмы, уменьшит это расстояние. Ближе, при $r < 2 \text{ пс}$ движение электрона релятивистское.

При этом происходят следующие изменения:

электрон переизлучает на высших гармониках, т. е. при рассеянии возникает излучение с частотами 2ω , 3ω , ... В области $g \gg 1$ частоты велики. Любопытно, однако, что это переизлучение происходит лишь под углом, отличным от нуля, с направлением возбуждающего излучения, так что синусоидальная форма и частота первичной волны не изменяется.

Общее сечение рассеяния возрастает как g^2 ; соответственно возрастает мнимая часть показателя преломления плазмы, ответственная за ослабление волны.

Вещественная часть показателя преломления, наоборот убывает. Поэтому сильная ($g > 1$) электромагнитная волна проникает в плазму такой плотности, $n_e > \left(\frac{\omega}{5,4 \cdot 10^4}\right)^2$, в которой слабая волна испытала бы полное отражение.

Увеличивается по сравнению с линейной теорией сила, действующая на электрон. Заметим, что при движении электрона вдоль волны электрическое поле и частота подвергаются доплеровскому преобразованию в системе электрона, однако g остается инвариантным.

Приведем несколько работ, в которых рассмотрены эти эффекты: Никишов, Ритус (1964), Сарачик, Шапперт (1970). В частности, применительно к пульсарам они рассмотрены в работе Острикера и Ганна (1969).

Простой вывод формул для частного случая см. Зельдович (1971) и с учетом продольного магнитного поля — Зельдович, Илларионов (1971).

Не рассмотрены до настоящего времени коллективные эффекты в плазме, раскачиваемой низкочастотным полем. В возникающем движении электронов относительно протонов может развиваться пучковая неустойчивость, турбулентность и аномальное электрическое сопротивление.

Обратимся теперь к воздействию на электроны плазмы радиоизлучения высокой частоты, регистрируемого на Земле.

Преимущество этого рассмотрения заключается в том, что наличие такого излучения во всей области, окружающей пульсар, не подлежит сомнению. В работах группы, к которой принадлежат авторы, были рассмотрены эффекты, связанные с учетом индуцированного комптон-эффекта. Как известно, для фотонов вероятность перехода из состояния 1 в состояние 2, например, при рассеянии на электро-не имеет вид

$$\frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_1}{dt} = W_{12}n_1(n_2 + 1).$$

Обратим внимание на множитель $(n_2 + 1)$: вероятность появления фотона в состоянии 2 растет с увеличением числа фотонов уже

имеющихся в этом состоянии (n_2). С учетом обратного процесса, для которого также надо учитывать свойства фотонов, получаем

$$\frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_1}{dt} = W_{12}n_1(n_2 + 1) - W_{21}n_2(n_1 + 1).$$

Обычно считают $W_{12} = W_{21}$ и в таком случае нелинейные члены сокращаются:

$$\frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_1}{dt} = W_{12}(n_1 - n_2).$$

Однако надо учесть, что при рассеянии на покоящемся электроне происходит отдача электрону части энергии фотона, $\Delta E \sim \frac{(\hbar\nu)^2}{mc^2}$, процессы $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 1$ относятся к энергиям электрона, не в точности одинаковым.

Точный расчет показывает, что компенсация квадратичного члена не точна, остается эффект, который становится существенным даже при $\hbar\nu \ll mc^2$, если яркостная температура на данной частоте $kT_b > mc^2$.

Именно с такой ситуацией мы сталкиваемся в излучении пульсаров. Следует отметить, что на квантовом языке здесь дано описание эффекта, имеющего чисто классическую природу: электрон приобретает энергию, когда одна волна раскачивает его электрическим полем, а другая волна создает поступательное движение своим магнитным полем. Подтверждением классической природы эффекта является тот факт, что постоянная Планка выпадает из формул.

Основные результаты сводятся к тому, что в поле радиоизлучения высокой яркостной температуры электроны нагреваются до высокой температуры — порядка $(kT_b)^{1/2} (mc^2)^{3/2}$. Сила, действующая на электроны в направленном потоке излучения, оказывается больше, чем сила, подсчитанная по тривиальным формулам. Забирая энергию от излучения, электроны вызывают изменение спектра излучения — смещение в сторону меньших частот. Наконец, в релятивистской плазме возможно рождение электронно-позитронных пар. Здесь мы ограничимся этим перечнем результатов, отсылая к оригинальным работам за формулами, их выводами и разнообразными применениями.

Кинетическое уравнение для фотонов написано в работах Компанец (1956), Вейманн (1965), Драйцер (1964). За этими работами последовали Пейри (1968), Зельдович, Левич (1968, 1970), Левич (1971). Астрофизические аспекты см. в работах Сюняев (1970), Левич, Сюняев (1970, 1971), Бисноватый-Коган, Зельдович, Сюняев (1971).

§ 5. Сверхтекучесть и сверхпроводимость сверхплотного вещества; их влияние на свойства нейтронной звезды

Взаимодействие нейтронов при сверхвысоких плотностях в недрах нейтронных звезд, вероятно, приводит к появлению сверхтекучести. Экспериментальное изучение атомных ядер свидетельствует о том, что ядерные силы между двумя одинаковыми частицами недостаточны для образования динейтрона или дипротона, однако в поле других частиц (например, в ядре) они образуют пары. Аналогичный эффект, вероятно, имеет место в однородной вырожденной нейтронной жидкости.

Пары нейтронов являются бозе-частицами и, следовательно, их поведение должно быть аналогично поведению атомов гелия в жидком гелии. Но еще Капицей было экспериментально обнаружено, что жидкость гелий-4 при температурах ниже 2°K сверхтекуча. В нейтронной звезде сверхтекучесть может существовать при температурах ниже $\sim 1 \text{ Мэв} = 10^{10}^\circ\text{K}$. Те же соображения приводят к предсказанию, что протоны в ядерном веществе (число протонов порядка нескольких процентов от числа всех барионов) будут, возможно, образовывать пары, тем самым давая начало явлению сверхпроводимости. Обсуждение этих эффектов и оценки порядка критических температур, а также подробный перечень литературы можно найти в обзорной статье Гинзбурга (1969). Более поздние исследования описаны Беймом, Петиком, Пайнсом и Рудерманом (1969). Говоря о сверхтекучести и сверхпроводимости, необходимо соблюдать осторожность: при субъядерных плотностях вещество не однородно, а состоит из отдельных ядер. Возможно, оно кристаллизуется, а не образует жидкость. Возможно, при более высоких плотностях (например, околоядерных) силы отталкивания превосходят притяжение. На эти вопросы предстоит ответить дальнейшим исследованиям.

Как будут сказываться перечисленные явления на астрофизическом поведении нейтронных звезд? Они могут влиять на (1) термические, (2) магнитные, (3) гидродинамические свойства звезды.

Начнем с (1). Теплоемкость сверхтекучего или сверхпроводящего вещества меньше теплоемкости материи в состоянии нормального ферми-газа или ферми-жидкости. Причина очевидна: чтобы возбудить барионы, необходимо сначала разбить пару; но существует энергетическая щель Δ , поэтому теплоемкость при низких температурах будет пропорциональна $e^{-\Delta/kT}$. Однако имеются и такие источники теплоемкости, которые не связаны со щелью (электронные и звуковые волны в сверхтекучей жидкости); они будут уменьшать влияние сверхтекучести на теплоемкость.

С другой стороны, если протоны и нейтроны объединяются в пары, скорость тепловых потерь, связанная с излучением нейт-

рино при УРКА-процессе (т. е. при взаимодействии $p + e^- \rightarrow n + \nu$, $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$) также замедляется. Предполагают, однако, что в целом сверхтекучесть будет ускорять охлаждение нейтронной звезды.

(2) В лабораторных условиях переход в сверхпроводящее состояние сопровождается выталкиванием магнитного поля из образца (эффект Мейснера). На нейтронных звездах выталкивание будет иметь место в случае малых магнитных полей; если поля велики, выталкивания, по-видимому, не произойдет. Возникновение сверхпроводимости будет сопровождаться изменением только микроструктуры поля; можно ожидать, что вместо однородного магнитного поля мы получим гетерогенное распределение: будут как домены, где сверхпроводимость разрушена магнитным полем, так и сверхпроводящие домены, где будет течь электрический ток. Подобная ситуация наблюдалась в лабораториях — это так называемые твердые сверхпроводники второго рода (например, Nb_3Sn), способные благодаря описанному явлению содержать в себе большие магнитные поля. Время затухания магнитного поля бесконечно, если силовые линии пронизывают сверхпроводящую область, но даже без сверхпроводимости оно велико. В оболочке ($\rho \lesssim 10^{12} \text{ г/см}^2$) звезды $\tau_d \sim 10^6 \text{ лет}$ [Острикер и Ганн (1969b); Пачини (1969); Кануто, (1970)]. В недрах звезды ($\rho \approx 10^{14} \text{ г/см}^2$) $\tau_d \approx 10^{24} \text{ лет}$ [Бейм и др. (1969)]. Вопрос о том, где текут токи, ответственные за внешнее магнитное поле звезды, разумеется, открыт.

(3) При равновесии влияние сверхтекучести на гидродинамические явления, по-видимому, мало из-за огромных размеров звезды (по сравнению с ядерными масштабами). Сверхтекучая жидкость подобна идеальной жидкости ($\nabla \times v = 0$, т. е. безвихревой), только в микроскопической шкале. Известно, что отдельные квантованные вихри, распределенные по жидкости, делают ее поведение похожим на поведение обычной вязкой жидкости. Тем не менее, разница есть: передача скорости от сверхпроводящей нейтронной жидкости к протонной компоненте (связанной с магнитным полем) происходит медленно. Следовательно, установление равновесного твердотельного вращения звездной жидкости после изменения скорости вращения может потребовать много времени.

(4) В области, где имеются отдельные ядра, электростатическое отталкивание их приводит к образованию кристаллической решетки. Заряды ядер довольно велики ($z \sim 40$), поэтому температура плавления высока; в результате быстрого охлаждения вещества (в частности, за счет излучения нейтрино) оболочка станет твердой. Масса и толщина твердой оболочки приводятся ниже в зависимости от массы звезды. Твердая оболочка обладает определенной прочностью.

Это обсуждение гидродинамических эффектов может показаться преждевременным, однако на самом деле у пульсаров уже сегодня измерены даже ничтожные вариации периода. Существуют очень интересные гипотезы, которые объясняют изменение в периодах некоторых пульсаров сверхтекучестью недр нейтронной звезды и твердостью ее внешних слоев. Даже если эти эффекты малы, они представляют большой самостоятельный интерес, потому что несут информацию о свойствах материи в экстремальных условиях, далеко выходящих за рамки возможностей лабораторной физики.

Объяснение этих особенностей сводится к следующему: представим себе пульсар в равновесном состоянии, центробежная сила уравновешена тяготением и давлением при определенной сплюснутости пульсара, весь пульсар вращается как целое. В полном равновесии нет скалывающих напряжений в веществе пульсара и нет дифференциального вращения. Вращение пульсара постепенно замедляется за счет отдачи энергии и момента. При этом прочность твердой, кристаллической оболочки препятствует плавному изменению форм в соответствии с уменьшением центробежной силы. В оболочке накапливаются упругие напряжения сдвига. В некоторый момент, по достижении критического напряжения — предела прочности, происходят сдвиги, т. е. то, что образно называется «звездотрясение». При этом момент инерции звезды внезапно уменьшается, а скорость вращения также внезапно увеличивается. Именно такое явление наблюдается, изменение периода пульсара составляет порядка 10^{-8} самого периода, что соответствует изменению среднего радиуса на 0,01 см (впрочем, вероятно, правильнее было бы относить изменение периода к изменению сплюснутости).

Однако после звездотрясения скорость вращения твердой оболочки увеличивается больше, чем скорость вращения жидкого ядра, т. е. возникает дифференциальное вращение; в течение последующего периода (около недели) происходит дополнительное замедление оболочки за счет обмена моментом с внутренним жидким ядром. Именно в этом периоде играет роль сверхтекучесть ядра (детальная картина явления зависит также от распределения магнитного поля и от магнитной связи ядра и оболочки). Наблюдаемый период пульсара соответствует вращению оболочки; усиленное торможение после звездотрясения действительно было обнаружено. После выравнивания вращения оболочки и ядра наступает новый цикл.

Детальное исследование изменений периода является настоящим триумфом мастерства наблюдателей и остроумия теоретиков. Тщательные исследования малых уклонений периода позволяют судить о свойствах вещества — его прочности, сверхтекучести при плотности порядка ядерной, позволяют определить массу жидкого ядра в нейтронной звезде.

§ 6. Пульсары в Галактике

Вывод о том, что пульсары находятся в нашей Галактике, следует из их концентрации к галактической плоскости (см. рис. 63) и из измерений величины $\int n_e dl$, где n_e — число электронов в см^3 , а l — длина пути между пульсаром и Землей. Интеграл $\int n_e dl$ можно измерить благодаря эффектам, связанным с распространением радиоволн от пульсара через межзвездную среду. Открытие пульсаров в Крабовидной туманности и в «Веле» окончательно решило вопрос о галактической природе пульсаров и указало на то, что пульсары являются остатками вспышек сверхновых.

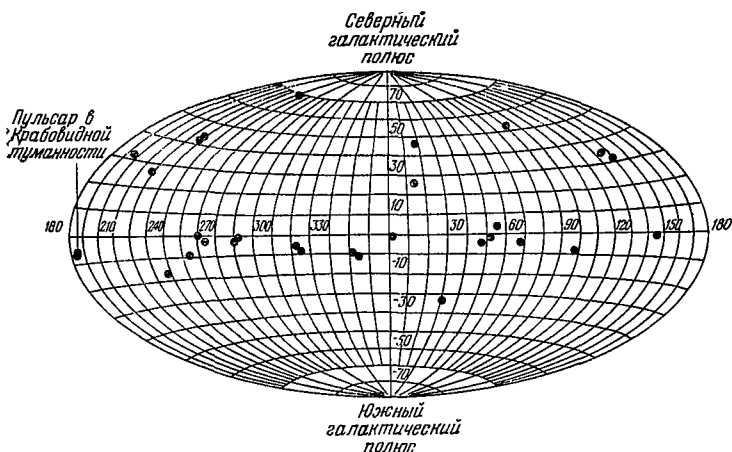


Рис. 63. Распределение пульсаров по небу (галактические координаты).

Наблюдаемые 50 пульсаров находятся на расстояниях, меньших нескольких тысяч парсек, и их возраст, согласно имеющимся оценкам (см. ниже), в большинстве случаев должен быть порядка 10^7 лет. Из этой картины следует, что наша Галактика содержит 10^4 пульсаров с такими же характеристиками, как у тех, которые мы сумели зарегистрировать. Если пульсары обладают карандашной диаграммой, их число $\sim 10^5$. Предполагая, что пульсары рождаются с одной и той же частотой в течение всего космологического времени ($\sim 10^{10}$ лет), но активны только в течение первых 10^7 лет после рождения, мы найдем, что общее число пульсаров, активных и неактивных, порядка $10^7 - 10^8$ в нашей Галактике. Соответствующее число вспышек сверхновых в течение 10^{10} лет в нашей Галактике согласно оценкам порядка 10^8 . Конечно, подобные рассуждения слишком грубы для того, чтобы на их основании отдать предпочтение одному из двух мыслимых типов диаграммы.

Весьма интересен вопрос о судьбе пульсаров «старшего возраста». Почему не наблюдаются пульсары с периодом 10 или 30 секунд? По формуле, связывающей период T и возраст t , $t = 5 \cdot 10^6 T^2$ (t в годах, T в секундах), такой период соответствует возрасту $5 \cdot 10^8 \div 5 \cdot 10^9$ лет. Возможно, что при T больше $4 \div 5$ секунд радиоизлучение резко падает и потому наблюдение затруднено. Причиной может быть уменьшение магнитного поля либо ослабление плазменных механизмов излучения.

Интересная гипотеза выдвинута Шварцманом (1970е): он предполагает, что после того как интенсивность излучения упала ниже определенной величины, происходит смена эжекции плазмы аккрецией. При аккреции на вращающуюся магнитосферу пульсара возможно прекращение радиоизлучения, что объяснило бы отсутствие долгопериодических пульсаров.

Шварцман, однако, дает более смелое решение: он предполагает, что аккреция также сопровождается периодическими импульсами радиоизлучения и разделяет пульсары на два класса — эжекционные и аккреционные. При аккреции энергия черпается не из энергии вращения и период увеличивается медленнее, чем на предыдущей стадии. Разделение известных пульсаров на две группы, произведенное в цитированной работе, нельзя считать статистически достоверным; окончательное подтверждение или опровержение гипотезы — дело будущего.

Любопытно, что среди известных радиопульсаров нет ни одного который входил бы в состав двойной системы. Благодаря стабильности истинного периода этот факт мог бы быть обнаружен по доплеровским вариациям наблюдаемого периода пульсара. Среди обычных звезд в состав двойных входит более 30%.

Весьма вероятно, что при взрыве сверхновой, являющейся тяжелой компонентой двойной, вторая, легкая компонента оказывается гравитационно несвязанной в результате выброса массы сверхновой. Одновременно в противоположную сторону улетает и новорожденный пульсар (Блау; (1961); эффект пращи).

Согласно Шварцману (1971 b) нейтронная звезда в составе двойной должна проявляться как рентгеновский пульсар.

Заметим, наконец, что в последнее время выдвигались гипотезы, согласно которым пульсары входят в состав квазаров и ядер сейфертовских галактик и дают главный вклад в их энерговыделение (Кардашев (1970), Рис (1971)). К этому вопросу мы вернемся в книге «Строение и эволюция Вселенной».

§ 7. Таблица свойств нейтронных звезд как пульсаров

Ниже приводится сводка наиболее точных расчетов свойств нейтронных звезд, важных для теории пульсаров. Таблица составлена по данным работы Козна и Камерона (1971).

Приводятся только данные, относящиеся к стабильным конфигурациям.

Перечисляем величины по столбцам:

1-й — плотность в центре, в единицах 10^{14} г/см^3 , $\rho_c \cdot 10^{-14}$,

2-й — масса звезды в единицах 10^{33} г , $M \cdot 10^{-33}$,

3-й — масса покоя звезды, т. е. сумма масс протонов и электронов, разведенных на бесконечность, в единицах 10^{33} г , $M_0 \cdot 10^{-33}$,

4-й — дефект массы $\Delta M = M_0 - M$, в тех же единицах; $\Delta M c^2$ дает выделение энергии при образовании звезды из водорода,

5-й — относительный дефект массы, $\Delta M/M_0$ в процентах. Отметим, что при образовании звезды из железа $\Delta M/M_0$ было бы меньше на 1%.; первые две строки относятся к звездам, неустойчивым относительно разлета в виде паров железа,

6-й — радиус R в километрах определен так, что длина экватора $2\pi R$, поверхность $4\pi R^2$,

7-й — отношение радиуса к гравитационному радиусу, R/R_g ,

8-й — красное смещение фотона, испущенного на поверхности звезды при уходе на бесконечность, $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_S = g_{00}^{-1/2} - 1 = e^{-\nu(R)/2} - 1$,

9-й — та же величина для фотона или нейтрино, испущенного в центре звезды $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_c$,

10-й — период колебаний звезды T миллисекунд вычислен для основного тона радиальных колебаний; характеризует также устойчивость звезды, так как для неустойчивой звезды $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} < 0$; данные для них не приводятся. Уже на краях таблицы наблюдается рост T , указывающий на приближение к границе устойчивости,

11-й — момент инерции I в единицах $10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$. Определен для медленно вращающейся звезды условиями $E_{\text{вращ}} = I \frac{\omega^2}{2}$, $\mathfrak{M}_* = I\omega$,

12-й — гравитационное увлечение инерционной системы координат в центре звезды вращением звезды как целого; отношение Ω/ω скорости вращения гироскопа Ω к вращению звезды ω ,

13-й — масса внешней оболочки звезды, состоящей из ядер и вырожденных электронов (плотность меньше $2,8 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$) в единицах 10^{28} г ,

14-й — масса M промежуточной оболочки, содержащей ядра, вырожденные электроны и нейтронный газ, в единицах 10^{30} г . Рассматривается область, в которой плотность лежит между $2,8 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3 < \rho < 4,3 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$,

15-й — суммарная толщина ΔR км внешней и промежуточной областей, в которых имеются ядра и можно ожидать кристаллизации вещества.

Авторы работы полагают, что исчезновение ядер, сопровождающееся появлением протонов, растворенных в нейтронной

Таблица XIV

Свойства нейтронных звезд

1	2	3	4	5	6	7	8
1,26	0,126	0,127	$8 \cdot 10^{-4}$	0,63	99,6	538	10^{-3}
1,58	0,227	0,229	$27 \cdot 10^{-4}$	1,19	19,6	58,7	0,009
2,00	0,410	0,418	$82 \cdot 10^{-4}$	1,96	14,54	24,2	0,022
2,50	0,710	0,733	0,023	3,08	13,49	12,9	0,042
3,16	1,10	1,15	0,051	4,47	13,42	8,34	0,067
4,00	1,65	1,76	0,115	6,55	13,50	5,59	0,11
5,00	2,25	2,47	0,222	9,99	13,64	4,13	0,15
6,30	2,82	3,18	0,365	11,5	13,64	3,30	0,20
8,00	3,38	3,95	0,565	14,3	13,47	2,71	0,26
10,0	3,92	4,74	0,825	17,4	13,10	2,27	0,34
12,6	4,33	5,44	1,11	20,4	12,62	1,99	0,43
16,0	4,59	5,97	1,38	23,1	12,08	1,79	0,55
20,0	4,72	6,32	1,61	25,4	11,48	1,65	0,62

Таблица XIV (продолжение)

9	10	11	12	13	14	15
0,022	115	0,33	0,028			
0,035	0,90	0,55	0,046			
0,059	0,74	1,27	0,073		10	5
0,096	0,42	2,78	0,110	25	9	3,1
0,14	0,40	5,16	0,160	15,5	7,5	2,1
0,22	0,40	8,95	0,23	11,5	6	1,3
0,32	0,40	13,7	0,31	8,5	5	1,0
0,45	0,42	18,4	0,39	6,4	4	0,7
0,64	0,46	23,0	0,47	5	3	0,55
0,90	0,46	26,9	0,56	3,6	2,2	0,4
1,30	0,52	29,4	0,72	3	1,6	0,3
1,80	0,66	30,2	0,79	2	1,2	0,2
2,5	1,06	29,4	0,84	1	0,5	

жидкости, происходит постепенно, в интервале $4 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3 < \rho < 6 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$. При составлении таблицы мы учли результаты Бете, Бернера и Сато (1970), согласно которым исчезновение ядер происходит резко по типу фазового перехода первого рода, при $\rho = 4,3 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$. Поэтому приведены только данные Камерона, относящиеся к границе $\rho = 4 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$, и опущены данные о границе $6 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$. Напомним, что при $\rho = 2,3 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ появляются μ^- мезоны и при $2,7 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ появляются Σ -гипероны.

Таблица приводится для удобства справок; теория нейтронных звезд изложена выше, в гл. 10 и 11.

ГЛАВА 14

КОЛЛАПСИРОВАВШИЕ ЗВЕЗДЫ И «БЕЛЫЕ ДЫРЫ» (ОТОНЫ)

§ 1. Коллапсировавшие звезды в двойных системах

Начнем с задач и терминологии. В данной, последней, главе рассматриваются астрофизические аспекты релятивистского коллапса. Основная направленность изложения связана с практической возможностью обнаружения коллапса и тел, возникающих в результате такого коллапса. Эти тела называются по-разному: застывшие звезды, коллапсары, черные дыры. Наряду с телами, образующимися в конце эволюции звезд, можно представить себе тела космологического происхождения, оставшиеся в наследство от сингулярной стадии эволюции Вселенной. Их свойства могут быть такими же, как и свойства коллапсаров (черные дыры), но в принципе возможны и такие тела, которые с самого начала находятся под своим гравитационным радиусом и с течением времени взорвутся — «белые дыры» [Новиков (1964 b), Нееман (1965)].

Предлагается термин «отоны», произведенный от сокращения «ОТО», общая теория относительности, — в качестве видового наименования, объединяющего все разновидности тел с релятивистским полем тяготения, находящихся внутри так называемого «горизонта» или асимптотически приближающихся к нему. Фундаментальная теория таких тел изложена выше, впрочем, некоторые необходимые дополнения даются в § 2 и 5 данной главы.

В самой краткой формулировке все внешние проявления отона сводятся к его гравитационному полю. Гравитационное поле, т. е. изменение метрики, включает также и вклад вращательного момента отона, однако на большом расстоянии поле, зависящее от массы, убывает медленнее *). Таким образом, задача сужилась до задачи обнаружения статического поля тяготения невидимой массы, за которым должно следовать доказательство того, что эта масса является отоном.

*) В принципе есть еще и электростатическое поле, зависящее от общего заряда отона (см. § 10 гл. 12).

Гусейнов и Зельдович (1965е, 1966) предложили искать отоны в составе двойных звезд*). При этом масса отона, очевидно, обнаруживается по его возмущающему действию на движение второй светящейся видимой звезды.

В самом простом, идеализированном случае отон никак больше себя не проявляет; он не светится; его размеры и радиус, на котором происходит сильное гравитационное отклонение лучей, слишком малы, чтобы быть замеченными. Напомним элементарные сведения из теории двойных звезд. Двойные звезды делятся на визуально-двойные, затменно-двойные и спектрально-двойные. В последнем случае факт двойственности устанавливается по периодическому доплеровскому смещению спектральных линий. Часто в спектре видны линии только одной звезды — наиболее яркой, линии второй невидимы потому, что они «тонут» в свете более яркой компоненты. Таким образом, известна лишь проекция скорости яркой звезды на луч, направленный к наблюдателю. В этом случае оказывается, что из наблюдений можно найти одну только величину, характеризующую массы звезд, а именно, так называемую «функцию масс»

$$FM = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2},$$

где i есть угол между нормалью к плоскости орбиты и лучом зрения. Предположим, что масса видимой звезды известна; простейший случай представляется, когда спектр звезды позволяет идентифицировать ее принадлежность к главной последовательности. В этом случае спектральный класс однозначно связан с массой. Если известен параллакс звезды, а значит, и ее расстояние от Солнечной системы, то можно найти абсолютную светимость, что позволяет проверить и уточнить массу.

Зная массу первой звезды M_1 и FM , можно найти массу второй компоненты M_2 ; в расчет входит $\sin i$. Задаваясь $\sin i = 1$, получаем минимальное значение M_2 . При среднем $\sin^2 i = \frac{2}{3}$ получаем M_2 , в среднем в 1,5 раза больше минимального.

Если оказывается, что M_2 превышает $2M_\odot$, а излучение от M_2 не видно, и при этом причиной невидимости не является присутствие более яркой соседней звезды, рядом с которой трудно различить слабосветящуюся, то предполагается заподозрить, что невидимым телом может быть отон.

Привлечение «невидимости» в качестве аргумента звучит комически, подобно диссертации «Отсутствие телеграфных столбов и проволоки в археологических раскопках как доказательство

*) Раньше вопрос об отонах в двойных звездах был поставлен 1963 г. Фаулером и Хойлом,

древней радиосвязи». Однако в действительности телу с данной большой массой не так легко остаться невидимым. Светимость такого тела на главной последовательности известна, в ходе дальнейшей эволюции светимость только увеличивается (гиганты). Для массы $M < 1,2 M_{\odot}$ превращение в белый карлик и для $M < 2M_{\odot}$ — в нейтронную звезду уменьшает светимость, но условие $M > 2M_{\odot}$ как раз и выбрано, чтобы исключить тривиальное решение.

Вслед за работой Гусейнова и Зельдовича (1965, 1966) Тримбл и Торн (1969) предложили также другие кандидаты.

Недавно Камерон (1971) выдвинул предположение о том, что затменная двойная звезда ε Aur содержит в своем составе отон, окруженный диском из твердых частиц, размером порядка нескольких миллиметров. Наконец, в работе Гусейнова и Новрузовой (1971) предложен еще один кандидат среди двойных звезд, отличающийся близостью к Солнечной системе (расстояние 20 пс).

В таблице XV приведены авторы, рассматривающие данную пару; название звезды; период обращения в днях; амплитуда

Таблица XV

Невидимые компоненты в составе спектрально-двойных звезд

Авторы	Название	Период (дни)	Скорость (км/с)	FM	M_1	M_2	m_1	Спектральный класс
Гусейнов	KS Pers	360,5	51,4	4,4	$\begin{Bmatrix} 12 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 15 \\ 10 \\ 6 \end{Bmatrix}$	7,7	$\begin{Bmatrix} A0 \text{ II} \\ A5 \text{ Ia} \\ Ape \end{Bmatrix}$
Зельдович (1965)	ξ Pav	2214	17,9	1,19	4,0	4,4	4,4	K2 III
Тримбл, Торн (1969)	HD 187399	27,97	104,5	2,72	4,0	6,8	7,7	A0 III, (Bge, B9e β)
	HD 193928	21,64	130	4,94	10	14,2	9,4	WN6+
	HD 33232	3710	31,5	10	$\begin{Bmatrix} 9,5 \\ 11 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 21,4 \\ 23 \end{Bmatrix}$	8,1	$\begin{Bmatrix} B3eV \\ B3eIII \end{Bmatrix}$
Тримбл, Торн (1969)	ω Eri	3057	18,1	1,32	1,9	3,3	4,39	A9 IV
	49 Ori	445,7	28,6	0,635	2,2	2,4	4,81	A4 IV
	71 Tau	5200	15,1	1,70	1,8	3,7	4,57	F0 V
	ξ Aqr	8016	11,31	0,711	2,0	2,4	4,69	A7 V
Камерон (1971)	ε Aur	9900		3,1	35	23		F2
Тримбл, Торн (1969); Гусейнов, Новрузова (1971)	δ Gem	2239	27,1	3,8	1,8	6,3	3,52	F0 IV

скорости в км/сек; функция масс FM ; масса видимой звезды M_1 , определенная по спектральному классу и светимости; масса невидимой звезды M_2 , вычисленная по FM , M_1 ; звездная величина m_1 видимой звезды и ее спектральный класс.

Заслуживает особого внимания система в последней строке, приведенная в недавней заметке Гусейнова и Новрузовой (1971). В случае δ Gem известен параллакс, равный 0,"056 или 0,"059, что соответствует расстоянию $17 \div 18$ пс. Благодаря известному расстоянию отпадает целый ряд неопределенностей, которые имеют место в других случаях. Звезда с массой $6,8 M_\odot$ должна на данном расстоянии иметь видимую величину не более $m_2 = 0,25$, две звезды по $3,4 M_\odot$ дадут $m_2 = 1,75$.

Наблюдения несовместимы с предположением о нормальной второй звезде безотносительно к правильности интерпретации класса и эволюционной стадии видимой первой звезды. Однако не очень уверенно определены лучевая скорость и FM . Следует присоединиться к выводу Гусейнова и Новрузовой о крайней важности дальнейшего и углубленного исследования этой системы.

Близость звезды делает возможным изучение ее собственного движения в картинной плоскости и поиски инфракрасного излучения (на тот случай, что невидимая звезда окружена темной материей, перерабатывающей видимый свет в инфракрасный).

Рассмотрим альтернативные объяснения систем, приведенных в таблице, без привлечения отонов.

1. Ошибка в определении элементов орбиты, завышающая FM . Очевидно, что системы, перечисленные в таблице, заслуживают специального более тщательного исследования.

В частности, последний кандидат, предложенный Гусейновым и Новрузовой, находится так близко, что собственное движение звезды в картинной плоскости может достичь нескольких десятых долей угловой секунды. Его измерение дало бы возможность уточнить элементы орбиты.

2. Ошибка в определении M_1 . Полагая, что видимая компонента принадлежит главной последовательности и зная расстояние (параллакс), получаем верхнюю оценку M_1 . Если M_1 меньше, то меньше M_2 , но всегда $M_2 > FM$. В этом отношении выделяются те случаи, когда $FM > M_1$.

3. Наиболее уязвимым является объяснение «невидимости» второй компоненты. В спектрально-двойных звездах есть две системы линий. Если вторая компонента не имеет линий в спектре, то она числится невидимой. Вторая компонента невидима и в том случае, если ее светимость в несколько раз меньше светимости первого.

Для звезд на главной последовательности светимости растут с увеличением массы; если $M_2 > M_1$, невидимость необъяснима.

Однако если вторая звезда принадлежит главной последовательности, а первая сошла с нее и ярче (при данной массе M_1), то вторая может быть невидима. Наконец, вторая компонента может быть тесной парой («2» = «3» + «4»). Тогда при

$$M_2 = M_3 + M_4, \quad L_{3,4} = L_3 + L_4 \sim \frac{1}{4} L_2,$$

ождается светимость в несколько раз меньше.

Наряду с вопросами, требующими конкретного исследования перечисленных систем, есть общий эволюционный вопрос о вероятности того, что отон окажется в составе двойной звезды.

В предыдущей главе отмечалось, что все исследованные до сих пор пульсары являются одиночными. Этот факт связывался с тем, что при взрыве сверхновой с внезапным разлетом значительной части ее массы двойная система может диссоциировать. В этой связи интересно замечание Камерона (1971), основанное на неопубликованной работе Вилсона и на расчетах Арнетта (1969).

Коллапсировавшая звезда имеет массу больше массы нейтронной звезды. Соответственно нужна и большая масса предсверхновой порядка (согласно расчетам Арнетта) $M > 15$ или $M > 30 M_\odot$. Но при большей массе релятивистские эффекты возникают при меньшей плотности, $\rho_c \sim M^{-2}$. В этих условиях нейтрино легко выходят и потеря устойчивости заканчивается релятивистским коллапсом без промежуточной остановки. Весьма вероятно, что потеря массы при этом относительно меньше, чем при образовании пульсаров, а следовательно двойная система останется связанной.

Исследование двойных систем и, в частности, поиски рентгеновского излучения (см. § 3) являются вполне реальным подходом к поискам небесных тел новой, необычной природы.

§ 2. Магнитные явления при релятивистском коллапсе

Выше уже отмечалось усиление магнитного поля при сжатии звезды в силу вмороженности силовых линий.

Однако в крайнем своем выражении сжатие, приводящее к гравитационному самозамыканию, качественно меняет ситуацию, как показано в работах Гинзбурга (1964) и Гинзбурга и Озерного (1964).

Магнитный дипольный момент, измеренный на конечном расстоянии от отона (например, при $r = 2r_g$ или $r = 3r_g$), где хотя бы приближенно справедлива электродинамика плоского пространства, стремится к нулю с течением времени, по мере того как приближается к r_g поверхность звезды, на которой задан поток силовых линий.

Этот результат важен сам по себе, так как отсутствие собственного магнитного поля*) означает, что отон уже поэтому не может быть пульсаром; отсутствие магнитного поля существенно и для аккреции газа на застывшую звезду. Важно подчеркнуть, что для других полей имеет место ряд сходных теорем. Дорошкевич, Зельдович и Новиков (1965) показали, что квадрупольный, октупольный и т. д. гравитационные моменты коллапсирующей звезды излучаются в виде гравитационных волн и поле отона их не содержит [см. гл. 4; см. также Прайс (1971)]. Хартли (1970) с большим математическим остроумием доказал, что слабое взаимодействие (связанное с обменом парами нейтрино и антинейтрино) отона с внешними телами стремится к нулю при $R \rightarrow r_g$.

В этом же контексте напомним главное свойство релятивистского коллапса — обращение в нуль передачи информации из внутренней области на бесконечность.

В целом же эти конкретные результаты объединяются в одном утверждении: внешнее поле, создаваемое отоном, полностью определяется набором сохраняющихся величин, а именно: общей массой (энергией), моментом вращения и полным электрическим зарядом. Первые две величины определяют параметры метрики Керра (см. § 3 гл. 4) в пространстве, окружающем отон, третья величина — заряд — определяет электростатическое кулоновское поле (наряду с вкладом в гравитационное поле).

Джон Арчибальд Уилер, сохранивший к 60-летнему юбилею завидную шевелюру, сформулировал кратко: «черные дыры не имеют волос». Формулировка, выделяющая сохраняющиеся величины, нуждается в дополнении. Часть сохраняющихся величин взаимодействует с безмассовыми дальнодействующими полями (примеры этому: электрический заряд — электромагнитное поле; полная энергия и момент — гравитационное поле. Есть, однако, законы сохранения, не связанные с такими полями, т. е. законы, установленные прямым опытом на уровне элементарных частиц **).

Однако не известно и, по-видимому, не существует такое дальнодействующее поле, измерив которое вне тела можно было бы определить число барионов. Тем не менее, нет оснований сомневаться в сохранении барионов при коллапсе: физические условия — температура, плотность — к моменту самозамыкания таковы, что столкновения частиц не сильнее, чем на ускорителях. Гравитационный потенциал по общим принципам никак не может действовать на локальные физические явления. Исчезновение сигналов от частиц, погребенных при коллапсе, не есть гибель

*) Слабое магнитное поле имеется у вращающегося отона при наличии заряда (Валд, 1971).

**) Сохранение заряда установлено и в опытах с частицами, и косвенно, через уравнения Максвелла, основанные на макроскопическом опыте.

частиц: ведь мы не предполагаем гибели человека, когда он скрылся за углом здания!

Выше подчеркивалось, что поле «вморожено» в вещество звезды и при сжатии до размеров $\sim r_g$ должно достигать колоссальной величины $\sim 10^{10} \div 10^{14}$ гс для сопутствующего веществу наблюдателя. Иное поле будет при $R \rightarrow r_g$ для неподвижного наблюдателя. Чтобы найти это поле, Гинзбург и Озерной рассматривают сначала статическую задачу.

Будем мысленно уменьшать размеры гравитирующего намагниченного шара и исследовать его внешнее (дипольное) магнитное поле. Дипольный момент шара d в классической теории пропорционален R : $d = \frac{d_0 R}{R_0}$, где d_0 и R_0 — начальный дипольный момент и радиус соответственно. Момент d стремится к нулю, если $R \rightarrow 0$. Гинзбург (1964) показал [см. также Гинзбург и Озерной (1964)], что в релятивистской теории при $R \rightarrow r_g$ закон изменения d следующий:

$$d = \frac{d_0 r_g}{R_0 \cdot 3 \ln \frac{r_g}{R - r_g}}. \quad (14.2.1)$$

Таким образом, $d \rightarrow 0$, когда $R \rightarrow r_g$. Предельное поле коллапсирующей звезды должно быть стационарным. Отсюда и из (14.2.1) следует, что и в динамической задаче предельное внешнее магнитное поле будет равно нулю. Конкретно процесс излучения внешнего поля при релятивистском коллапсе рассмотрен в работе Прайса (1971).

Изменение магнитного поля при сжатии вызывает появление вихревого электрического поля. В ближней (неволновой) зоне это может привести к возникновению в окружающей звезду плазме токнесущей оболочки или (и) к возникновению магнитогидродинамических волн [Гинзбург, Озерной (1964)]. Эти процессы еще совершенно не исследованы, и мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями относительно дальней волновой зоны [Новиков (1964а). См. также § 4 гл. 13]. Характерное время и масштабы явления соответственно r_g/c и r_g . Поэтому волновая зона начинается с $l > 2r_g$. Пусть внешнее магнитное поле звезды содержит дипольный член и магнитный момент $d = \Phi R$, где $\Phi = \text{const}$. Оценим излучение внешнего магнитного поля. Можно сразу сказать, что излученная энергия будет порядка энергии магнитного поля, так как при $R \sim r_g$ скорость сжатия порядка c и нет параметра малости для количества излученной энергии. Сделаем более точный расчет в предположении, что в процессе коллапса вещество падает почти свободно. Тогда

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}, \quad \dot{R} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (14.2.2)$$

Полный поток излученной энергии равен

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{a}^2. \quad (14.2.3)$$

Подставляя (14.2.2) в (14.2.3), получаем

$$I = \frac{\Phi^2 c}{6r_g^2} \left(\frac{r_g}{R} \right)^4, \quad (14.2.4)$$

а полное количество излученной энергии при сжатии до размеров R

$$E = \frac{\Phi^2}{15r_g} \left(\frac{r_g}{R} \right)^{2,5}. \quad (14.2.5)$$

Если $\Phi \approx 3 \cdot 10^{21}$ (эрг·см) $^{1/2}$ и $r_g \approx 3 \cdot 10^5$ см, как это имеет место у Солнца, то

$$I = 5 \cdot 10^{41} \left(\frac{r_g}{R} \right)^4 \text{ эрг/сек}, \quad (14.2.6)$$

$$E \approx 3 \cdot 10^{36} \left(\frac{r_g}{R} \right)^{2,5} \text{ эрг}. \quad (14.2.7)$$

Излучение имеет вид однократного импульса продолжительностью $\sim r_g/c$ *). Расчет проводился для нерелятивистской теории, и формулы перестают быть справедливыми вблизи сферы Шварцшильда, но они дают правильный порядок оцениваемых величин. Полная излученная энергия в этом случае не велика. До сих пор молчаливо предполагалось, что плазма, окружающая звезду, не мешает возникновению излучения. Частоты излучения $\omega \sim \frac{c}{r_g}$ низки, особенно для больших масс. Даже при ничтожной плотности плазмы собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} \approx 2 \cdot 10^4 \sqrt{n_e} \text{ сек}^{-1} \quad (14.2.8)$$

много больше ω . Это, казалось бы, должно приводить к тому, что излучение не будет возникать вовсе. Однако для того, чтобы излучение не возникало, кроме указанного условия, нужно еще, чтобы максимально возможный ток $I_{\max} = n_e e c$ (где n_e — концентрация электронов, e — заряд электрона), возникающий в плазме при изменении магнитного поля в неволновой зоне, был в состоянии компенсировать это изменение. Найдем критическое значение плотности окружающей плазмы, при котором излучение уже

*) Спад всплеска обусловлен релятивистским эффектом застывания всех процессов при $R \rightarrow r_g$; см. выше.

не возникает [Новиков (1964а)]. Из уравнений Максвелла получаем

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi I_{\max}}{c} = 4\pi n_e e. \quad (14.2.9)$$

Сделаем оценки по порядку величины. Рассмотрим характерный момент сжатия, когда $(R - r_g) \sim r_g$. Учитывая, что $\operatorname{rot} H \sim \frac{H}{r_g}$ и $H \sim \frac{\Phi}{r_g^2}$, получаем из (14.2.9)

$$\Phi_{\text{кр}} \approx 4\pi n_e e r_g^3.$$

Следовательно, если выполняется неравенство

$$n_e < \frac{\Phi}{4\pi r_g^3 e}, \quad (14.2.10)$$

то возникает волновая зона (начиная с расстояний $l \sim 2r_g$), даже при $\frac{c}{r_g} \ll \omega_0$. Подставляя в (14.2.10) $\Phi_0 \approx 3 \cdot 10^{21} \text{ (эрг} \cdot \text{см)}^{1/2}$ и $r_{g\odot} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ см}$, находим

$$n_e < \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}. \quad (14.2.11)$$

Для сравнения укажем, что концентрация электронов в солнечной короне вблизи поверхности Солнца $\sim 10^8 \text{ см}^{-3}$.

Итак, при выполнении (14.2.11) излучение уходило бы от звезды в виде однократного импульса, поглощаясь плазмой, находящейся уже вдали от звезды в волновой зоне. Еще раз напомним, что полная энергия излучения в случае обычных звезд относительно невелика. Однако надо полагать, что в реальном коллапсе условие (14.2.11) не выполняется и дипольного излучения не возникает.

§ 3. Аккреция на отоны

Аккреция на релятивистские объекты имеет важнейшее значение как источник излучения, указывающего на наличие большого гравитационного поля.

После подробной главы 12, где рассмотрен целый ряд идеализированных и реалистических задач, относящихся к аккреции, остается добавить немного. В идеализированном сферически-симметричном случае безмагнитного поля различие между коллапсаром и нейтронной звездой было бы весьма велико. Однако при наличии вращательного момента падающего вещества или при несимметричном падении или наличии магнитного поля разница становится весьма малой, не более чем в 2—3 раза по энергетическому выходу. В случае коллапса вращающейся звезды возникает отон, окруженный пространством с метрикой Керра

(см. гл. 4 § 3). В такой метрике (при максимальном моменте) существуют круговые орбиты с энергией частицы до $0,6 mc^2$; следовательно, максимальная отдача энергии в ходе медленной аккреции из диска достигает 40% энергии покоя падающего вещества — вместо 6% в поле Шварцшильда.

Следовательно, по абсолютному выходу энергии отличить аккрецию на отон и на нейтронную звезду нельзя. Различие в спектральном составе могло бы зависеть от того, что в случае ото́на отсутствует удар вещества о поверхность, характерный для нейтронной звезды. При аккреции вещества, находящегося в состоянии турбулентного движения, следует ожидать существенных колебаний светимости в зависимости от мгновенного значения момента падающего газа [Шварцман (1970f)]. Можно ожидать вспышек при быстром переходе через нуль момента. Автор предлагает название «флуктуары» для светящихся ото́нов. Возможными кандидатами являются некоторые оптические, X- и γ -источники [Новиков, Зельдович (1966), Шварцман (1970f)]. Возможными кандидатами являются так называемые, DC-карлики, отличающиеся сплошным спектром без линий. В цитированной работе рассматриваются также хаотические магнитные поля или замороженные в падающий газ. По-видимому, в ходе падения кинетическая, гравитационная тепловая и магнитная энергии все становятся одного порядка.

Если обратное влияние магнитного поля не учитывалось, то при симметричном падении оно нарастало бы как r^{-2} , вытягиваясь вдоль радиуса, а магнитная энергия нарастала бы как r^{-4} , превосходя гравитационную, $\rho r^{-1} \sim r^{-1/2}$. Отсюда делается вывод о существенном влиянии поля на процессы вблизи ото́на.

Можно ожидать возникновения характерных плазменных неустойчивостей, аннигиляции противоположно направленных соседних магнитных полей с появлением быстрых частиц (Сыроватский).

Существенную роль магнитное поле может иметь также и при дисковой аккреции.

Отметим также работы Амнуэля, Гусейнова (1968, 1969).

Наконец, в ряде работ отмечается, что в ударных волнах при несимметричной аккреции возможна раскачка плазменных колебаний [Бисноватый-Коган и Фридман (1969)] с переработкой в уходящее электромагнитное излучение с узким спектром — с частотой порядка ленгмюровской частоты [Бисноватый-Коган и Сюняев (1970)].

Резюмируя, можно сказать, что попытки найти ото́ны по их свечению из-за аккреции весьма перспективны. Важны для исследования X- и γ -источники [Новиков, Зельдович (1966), Шварцман (1970f)]. Задача состоит в том, чтобы по свечению установить наличие сильного гравитационного поля с $\varphi \sim c^2$, и если будет доказано, что $M > 2M_\odot$, то это не нейтронная звезда, а отон.

§ 4. Статистика звезд в конечной точке звездной эволюции

Дают ли астрономические наблюдения какие-либо указания о конечной судьбе массивных звезд, об условиях рождения нейтронных и застывших звезд?

Если коллапс звезды приводит к ядерному взрыву, разрушающему всю или почти всю звезду, то такой взрыв, конечно, должен быть виден с огромного расстояния. Естественно отождествить подобную ядерную катастрофу со вспышками сверхновых звезд, наблюдаемых астрономами. При такой вспышке выделяется энергия порядка 10^{52} эрг или даже больше.

Правда, до сих пор не ясно, какая доля массы звезды выбрасывается при вспышках сверхновых I и II типов [подробнее см. обзор Бербиджей (1968) и монографию Шкловского (1966)]. Если предположить, что каждая звезда с массой, большей $\sim 1,5 M_{\odot}$, кончает свою эволюцию вспышкой сверхновой, то количество вспышек сверхновых за интервал времени Δt должно равняться числу массивных звезд, заканчивающих свою эволюцию за тот же интервал Δt . Оценим это последнее число [Хойл и Фаулер (1963 а); Цвикки (1958); Шварцшильд (1958); Новиков и Озерной (1964); Хойл, Фаулер и Бербиджи (1964)] и сравним с наблюдениями.

Будем считать, что звезда в процессе эволюции не теряет существенно свою массу или, во всяком случае, потери эти не столь велики, чтобы сделать массу тяжелой звезды меньше критической. Самым продолжительным периодом жизни звезды является стадия «главной последовательности», когда выгорает водород в центре звезды (см. § 1 гл. 11). Напомним, что время эволюции звезды в этой стадии (практически полное время равновесной эволюции):

$$t \approx 10^{10} \frac{L_{\odot} M}{LM_{\odot}} \text{ лет.}$$

Для ярких звезд главной последовательности выполняется приблизительное соотношение $L \sim M^3$, поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде

$$t \approx 10^{10} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 \text{ лет.} \quad (14.4.1)$$

Из наблюдений можно определить число dN звезд главной последовательности в единице объема пространства с массами в интервале $M, M + dM$. Если время жизни звезды t меньше времени существования Галактики ($\sim 10^{10}$ лет)*, то, поделив dN на t ,

*) Выводы мало меняются, если принять $t_{\text{гал}} \approx 5 \cdot 10^9$ лет.

получим усредненную за последние t лет частоту звездообразования, совпадающую, в предположении стационарности процесса, с частотой «умирания» звезд данной массы. Подобный расчет, проведенный Сальпетером (1955), дает

$$\frac{dN}{t} = 2 \cdot 10^{-12} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2,4} d \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \frac{\text{звезд}}{\text{нс}^3 \text{ год}}. \quad (14.4.2)$$

Звезды с массой, большей критической *), $M > 2M_{\odot}$, имеют время эволюции меньше возраста Галактики. Умножим (14.4.2) на объем диска Галактики $\sim 3 \cdot 10^{11} \text{ нс}^3$ и проинтегрировав по массе $M > 2M_{\odot}$, получаем число звезд в Галактике с массой больше критической, ежегодно заканчивающих свою равновесную эволюцию:

$$\frac{dN}{dt} = \int_2^{\infty} 0,6 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2,4} d \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \approx 0,2 \frac{\text{звезд}}{\text{год}}. \quad (14.4.3)$$

В зависимости от нижнего предела $\frac{dN}{dt} = 0,2 \left(\frac{M}{2M_{\odot}} \right)^{-1,4}$. Отсюда следует, что если бы каждая массивная звезда вспыхивала в конце концов как сверхновая, то каждые десять лет в Галактике должно было бы вспыхивать несколько таких звезд. Это на два порядка больше наблюдаемого числа вспышек, даваемого Цвикки (1958) (одна сверхновая в 300 лет) из наблюдений сверхновых в других галактиках. Кукаркин (1965) указал, что в спиральных галактиках типа нашей частота вспышек сверхновых, по-видимому, 0,01 вспышки в год, но противоречие, тем не менее, остается. Если все звезды с массой, большей некоторой, в конце эволюции вспыхивают как сверхновые, то для того, чтобы дать частоту вспышек $\sim 0,01$ в год, эта критическая масса M_0 должна быть порядка $15 M_{\odot}$ [см. об этом Стотерс (1963)]. Следует подчеркнуть, что оценки числа пульсаров находятся в грубом согласии с наблюдаемым числом вспышек сверхновых (см. § 6 гл. 13).

Итак, наблюдения говорят скорее против предположения о том, что в конце эволюции взрыв или какая-либо другая разрушающая звезду катастрофа, дающая мощные наблюдаемые эффекты, препятствует превращению массивной звезды в застывшую. Другой аргумент для этого вывода дают белые карлики в составе двойных (см. об этом ниже). Нет ли других процессов, которые помешают превращению звезды в нейтронную или застывшую?

Может быть, звезда все же избавляется от излишка массы, но не всегда путем катастрофического взрыва, а в большинстве слу-

*) О величине $M_{\text{крит}}$ см. конец параграфа.

чаев стационарным истечением вещества с поверхности или небольшими дискретными выбросами массы на протяжении равновесной эволюции [гипотеза Фесенкова об эволюции звезды на главной последовательности (1949); Масевич (1956)]. Наблюдательные данные здесь весьма скудные [их обзор дан у Бербиджей (1962)] и не позволяют дать окончательный ответ.

Заведомо есть звезды, у которых наблюдается интенсивное истечение массы с поверхности. К числу таких звезд принадлежат так называемые звезды типа Вольфа — Райе. Однако это, как правило, очень массивные звезды ($M \sim 10M_{\odot}$); с уменьшением масс сброс поверхностных слоев, как показывают наблюдения, ослабевает [Бербиджи (1962); Рублев (1964)]. Поэтому не ясно, уменьшается ли с течением времени их масса ниже критического предела.

Другой тип звезд, интенсивно теряющих массу — это звезды типа Ве, с яркими линиями в спектре. Они быстро вращаются. Потеря их массы оценивается в $10^{-6} - 10^{-10} M_{\odot}$ в год. Эти оценки весьма неуверенны *).

Сильное истечение вещества наблюдается у звезд типа Р Лебедя. Сам сверхгигант **) Р Лебедя теряет $10^{-5} M_{\odot}$ в год на истечение вещества из оболочки [данные Пэйфиела, приведенные в обзоре Бербиджей (1962)].

Следует отметить, что перечисленные звезды являются характерными членами звездных ассоциаций и, несомненно, молоды [см. монографию под ред. Михайлова (1962)]. Совершенно не известно, какую долю массы теряют они за счет истечения вещества в течение дальнейшей эволюции. Кроме того, астрономы наблюдают уже немолодые звезды с массой, большей критической, которые в дальнейшей эволюции, по-видимому, не проходят перечисленные выше стадии Ве, Р Лебедя, Вольфа — Райе и не могут потерять массу указанным способом. Следовательно, данные о молодых звездах не имеют определяющего значения в решении вопроса, быть или не быть «застывшей» звезде.

Как отмечал еще Шайн (1943), условия выброса вещества из звезд наиболее благоприятны в эволюционной стадии красных гигантов, когда размеры оболочки велики, и ускорение силы тяжести на поверхности звезды мало. Наблюдения показывают, что истечение вещества в этой стадии все же на 1,5 порядка ниже того, которое необходимо для существенного уменьшения массы звезды [Рублев (1964)]. Наконец, для так называемых вспыхивающих звезд типа UV Ceti, которые выбрасывают вещество дискретно (вспышка

*) Заметим, что потеря массы вследствие излучения света не имеет никакого отношения к вопросу. По существу, нас интересует потеря барионов, а не массы.

**) Напомним, что термины «гигант» и «сверхгигант» в астрономии употребляются для характеристики большой светимости звезды.

происходит в среднем раз в 1,5 суток), наблюдения дают совершенно ничтожную величину [Гершберг (1964)]

$$\frac{dM}{dt} \approx 2 \cdot 10^{-12} M_{\odot}/\text{год.}$$

Однако на хорошо изученном примере трех белых карликов (см. табл. XVI; первые три звезды), входящих в состав двойных систем, можно показать, что при некоторых условиях звезда все же, по-видимому, освобождалась от излишка массы и превращалась в белого карлика.

Т а б л и ц а XVI

Двойные звезды, одна компонента которых является белым карликом

Звезда	Абсолютная визуальная величина	Спектр	Масса, M/M_{\odot}	Период обращения, годы
{ Сириус А	1,4	AIV	2,28	} 49,9
{ Сириус В	11,4	A5	0,98	
{ Прокцион А	2,6	F5IV—V	1,76	} 40,6
{ Прокцион В	13,1	—	0,65	
{ O ² Эридана В	10,9	B9	0,45	} 247,9
{ O ² Эридана С	12,5	M4	0,21	
L745—46	18,7	M	0,02	10 ³
W485	13,9	M6	0,07	7 · 10 ⁵
—37° 6571	5,5	G6V	1,0	3 · 10 ³
LDS 678	12,5	DM5	0,10	3 · 10 ³
LDS 235	6,8	dK3	0,60	10 ⁵
L 1405—40	12,4	dM2e	0,10	6 · 10 ⁴
LDS 455	10,2	K — M	0,20	2 · 10 ⁴
W 672	11,9	sdM6	0,15	5 · 10 ³
LDS 683	8,8	sdM1	0,35	10 ⁵
LDS 749	7,2	sdK4	0,50	2 · 10 ⁵
L4512—34	11,2	dM5	0,20	10 ⁵

Как уже давно отмечалось в литературе, в двух случаях из трех, когда такие двойные системы изучены детально (см. табл. XVI; первые три звезды), масса компоненты, не являющейся белым карликом, больше, и эта компонента является звездой главной последовательности, т. е. не проэволюционировала далеко. Но звезда эволюционирует тем быстрее, чем больше ее масса [см. формулу (14.4.1)].

Так как обе звезды образовались одновременно *) (вероятность захвата ничтожно мала) и менее массивная уже превратилась

*) Правда, есть основание думать, что процесс образования звезд в скоплениях растягивается на промежутки порядка времени эволюции массивных звезд [см., например, Коток, Масевич (1963)].

в белого карлика, то главная компонента должна была бы закончить эволюцию. Однако этого нет. Следовательно, вторая компонента имела раньше большую массу, эволюционировала быстрее, а затем эту массу потеряла.

Возможно, здесь некоторую роль играет двойственность системы, хотя взаимная удаленность компонент сейчас очень велика. Другим объяснением (кроме потери массы) может быть разновременное образование компонент в скоплении, где они возникли (см. сноску на стр. 454).

Если в двойной системе происходит потеря массы за время, много меньшее периода обращения, то при выполнении неравенства [Хуанг (1963)]

$$\frac{\Delta M}{M} > \frac{r}{2a}$$

(где r — расстояние, на котором происходит потеря массы, a — большая полуось орбиты, M — суммарная масса) двойная система перестает существовать, так как скорости компонент превышают параболическую *). Для круговой орбиты это отношение равно $1/2$. Массивная звезда должна потерять большую часть своей массы, чтобы превратиться в белый карлик. Ауэр и Вольф (1965) отмечают, что если предполагать первоначальную массу звезды, ставшей белым карликом, больше $1,5 M_{\odot}$, конечную массу белого карлика $0,5 M_{\odot}$ и если звезда второй компоненты из табл. XVI имеет массу, меньшую $0,5 M_{\odot}$, то потеря массы системой будет больше половины первоначальной массы. Следовательно, потеря массы должна протекать за время, не меньшее чем период обращения, т. е. за $\tau > 10^4$ лет для систем, приведенных в табл. XVI. Разумеется, эти рассуждения не столь убедительны, как в случае первых трех звезд, так как массы компонент, не являющихся белыми карликами, меньше чандрасекаровского предела.

Ауэр и Вольф (1965) показали, что наблюдения белых карликов в звездном скоплении Гиады свидетельствуют о том, что превращение массивной ($M > 2,5 M_{\odot}$) звезды главной последовательности в белый карлик за счет потери массы происходит в основном не за счет истечения с экватора при вращении сжимающейся звезды.

В работах Бисноватого-Когана и Зельдовича (1966) предложен механизм медленного гидродинамического истечения массы из звезды на поздних стадиях эволюции. Бисноватый-Коган (1967) показал, что этот механизм может привести к существенной потере массы в ходе эволюции звезд с $M \gtrsim 15 M_{\odot}$.

§ Обеспечивает ли подобное истечение всегда превращение массивной звезды в белый карлик? Ответ на этот вопрос может дать

*) Таким механизмом Блау (1961) объясняет происхождение некоторых быстро летящих звезд; ср. выше § 6 гл. 13.

только подробный расчет и, конечно, наблюдения. Ауэр и Вольф указывают на возможную причину реальности такой ситуации.

Если потеря массы продолжается до тех пор, пока в звезде идет горение гелия или углерода, то прекращение потерь произойдет, когда масса уменьшится до $M < 0,5 M_{\odot}$ и перестанут протекать указанные ядерные реакции (см. § 1 гл. 11). В таком случае истечение массы автоматически будет уменьшать массу звезды ниже критического предела и концом эволюции явится белый карлик.

Еще одним свидетельством возможности превращения массивной звезды в белого карлика является присутствие белых карликов в звездных скоплениях. Так, в Гиадах открыто 12 белых карликов [см. Эгген и Гринстейн (1965)], причем возраст скопления таков, что закончить эволюцию могли лишь звезды с $M > 2 M_{\odot}$.

Правда, как отмечает Лейтен (1952), если бы все звезды Гиад с $M > 2 M_{\odot}$ превратились в белые карлики, то их полное число в Гиадах должно было бы быть ~ 23 . Хотя список открытых белых карликов в Гиадах, безусловно, не полон, все же их число в скоплении, вероятно, меньше предсказанного. Полной ясности в данном вопросе нет.

По данным внегалактической астрономии, отношение массы галактик к их светимости M/L различно у галактик разного типа [см., например, обзор Вокулера (1962)]. Оно меняется от 100 (в солнечных единицах $M_{\odot}/L_{\odot} = 0,5 \text{ г-сек/эрг}$) для эллиптических галактик до 10 у спиральных, к которым относится и наша Галактика, и до единицы для неправильных. Большое значение отношения M/L для эллиптических галактик, а также данные об их спектре, возможно, свидетельствуют об отсутствии в них заметного числа молодых ярких звезд и о большом количестве не светящейся или слабо светящейся материи.

В этих галактиках обычно мало межзвездного диффузного вещества. Кроме того, если в них, так же как в скоплениях нашей Галактики, относительно мало белых карликов (см. выше), то все это вместе взятое говорит в пользу наличия в далеко проэволюционировавших эллиптических галактиках трудно наблюдаемых звезд — нейтронных и застывших *).

Нейтронные звезды после затухания пульсирующего излучения (после того как они перестанут быть пульсарами **) и застывшие звезды являются двумя типами звезд, которые наиболее труд-

*) Современный анализ этой проблемы для шаровых скоплений проведен в работе Виллера (1970), а для эллиптических галактик — в работе Вольфа и Бербиджа (1970).

**) Как уже отмечалось, возраст наблюдаемых пульсаров не превышает 10^7 — 10^8 лет, откуда следует с большой вероятностью существование ненаблюдаемых старых пульсаров.

ны для наблюдений, т. е. которые «невидимы». Как их можно обнаружить?

Вдали от застывшей или нейтронной звезды при $r \gg r_g$ поле тяготения точно такое же, как и до коллапса во время нормальной эволюции. Следовательно, в динамике звездных систем невидимые звезды проявляются точно так же, как и обычные. Поэтому в принципе невидимые звезды можно обнаружить следующим образом. По движению видимых звезд вычисляется масса системы, например, шарового звездного скопления. Затем определяется масса всех видимых звезд, газа и пыли. Разность первой и второй величин дает массу невидимой компоненты скопления. Заметим, что сюда войдет не только масса невидимых звезд, но и масса других трудно наблюдаемых форм материи Вселенной: нейтрино, гравитационные волны. Эти виды материи не сконцентрированы специально в галактиках и равномерно заполняют Метагалактику. Разумеется, для относительно небольших систем (звездных скоплений, галактик) масса нейтрино и гравитонов, даже при наибольшей возможной их плотности во Вселенной [см. Зельдович и Смородинский (1961)], пренебрежимо мала по сравнению с вероятной массой невидимых звезд, следовательно, эта поправка не существенна.

Оценим, какую долю от массы видимых звезд Галактики могут составлять невидимые звезды, если бы их образованию не мешали катастрофы и если не учитывать возможность потери массы. Для оценки, очевидно, надо поделить суммарную массу звезд с $M > 1,2 M_\odot$, возникших за все время существования Галактики, на массу звезд с $M < 1,2 M_\odot$. При этой оценке, поступая аналогично расчету (14.4.3), приходится предполагать, что темп звездообразования оставался неизменным за все время существования Галактики. Кроме того, следует учесть, что минимальная масса звезды, которая успевает за время существования Галактики образоваться из диффузной среды путем гравитационного сжатия, около $0,1 M_\odot$. Впрочем, результат изменится (уменьшится) всего в три раза, если взять минимальную массу $0,01 M_\odot$. Таким образом, искомое отношение с учетом (14.4.2) будет

$$\frac{M_{\text{невидим}}}{M_{\text{видим}}} = \frac{\int_{1,2}^{\infty} M^{-1,2} dM}{\int_{0,1}^{1,2} M^{-1,4} dM} = 0,6.$$

Итак, невидимая масса может составлять существенную долю видимой. К сожалению, точность определения масс звездных систем и их видимых компонент пока недостаточна для обнаружения невидимых звезд подобным способом. Вращение звезд и

другие источники потери массы могут существенно уменьшить отношение $M_{\text{невидим}}/M_{\text{видим}}$ [см. Новиков, Озерной (1964)].

При рассмотрении числа коллапсировавших звезд формально минимальная масса исходной звезды равна $3,2 M_{\odot}$: это есть масса покоя критической нейтронной звезды (см. табл. XIV в главе о пульсарах). Именно эта величина, а не масса нейтронной звезды после потери энергии (около $2 M_{\odot}$) должна войти в теорию. Однако ввиду неточности вычисления $M_{\text{крит}}$ (см. стр. 319) мы приняли $M_{0, \text{крит}} \approx 2M_{\odot}$.

Фактически (см. § 4 гл. 11 и Приложение 2) потери массы при образовании нейтронных звезд весьма велики. До настоящего времени нет последовательных расчетов, охватывающих весь период спокойной эволюции до релятивистского коллапса. Можно, например, лишь очень грубо предположить, что коллапсары возникают лишь из звезд с $M_0 > 30M_{\odot}$. Согласно замечанию Камерона (1971), приведенному в § 1 данной главы, не исключено, что этот процесс сопровождается выделением энергии меньшим, чем при рождении нейтронной звезды (пульсара).

Наконец, напомним, что опыты Вебера, если правильна его интерпретация, требуют присутствия большого числа отонов в ядре нашей Галактики. Только столкновения отонов между собой способны рождают мощные импульсы гравитационного излучения без сопровождения их выделением энергии в обычных формах и в виде нейтрино.

Астрономия в настоящее время стоит на пороге двух тесно связанных между собой событий грандиозной важности: приближается обнаружение и идентификация отдельных релятивистских объектов; назревает понимание роли таких объектов в эволюции звезд, галактик, ядер галактик и квазаров.

§ 5. Отоны космологического происхождения

До сих пор мы говорили главным образом о черных дырах, являющихся конечным этапом релятивистского коллапса звезд достаточно большой массы.

Образование отдельных звезд во Вселенной из разреженного первоначально вещества возможно лишь на сравнительно поздней стадии космологического расширения, в «наше время». В горячей модели Вселенной на ранней стадии давление излучения препятствует проявлению гравитационной неустойчивости расширяющегося вещества, и обособление отдельных тел, как результат роста малых возмущений, невозможно.

Однако в принципе возможно, что с самого начала космологического расширения в отдельных местах были большие неоднородности и отклонения метрики от однородной и изотропной. В этом случае возможно обособление отдельных масс. В горячей модели Вселенной на ранней стадии плотность излучения (а так-

же пар — частиц и античастиц всех сортов) гигантски превосходит плотность барионов. Рано обособившиеся тела должны состоять в основном из квантов и пар. Но, как мы показали выше, устойчивое равновесие ультрарелятивистского газа в собственном поле тяготения невозможно и обособившаяся масса будет коллапсировать. Поэтому массы, обособившиеся на ранней стадии, представляли бы собой нечто вроде так называемых геонов Уилера (1960), состоящих в основном из квантов и пар, однако не статических, а коллапсирующих и образующих черные дыры.

Мыслим и другой тип сильной неоднородности на раннем этапе расширения [Новиков (1964b), Нееман (1965)]. Предположим, что в начальный момент космологического расширения начало расширяться не все вещество Вселенной. Некоторые области (ядра) задержались и по общему «мировому» времени некоторый период не расширяются. Эта задержка по времени внешнего наблюдателя может быть произвольной длительности и для разных ядер разная. Затем происходит расширение ядра и его вещество выходит из под гравитационного радиуса. Расширение ядра внешний наблюдатель видит как взрыв, выделение огромной энергии.

Математическая модель подобного задержавшегося в расширении, а затем взрывающегося ядра построена в § 14 гл. 2 как модель «белой дыры» *). Такая модель конкретизирует, в некотором смысле, идею сверхплотных D -тел, давно развиваемую В. А. Амбарцумяном (1961, 1964).

Наконец, если энергии задерживавшегося ядра не хватает для выхода из-под гравитационного радиуса к внешнему наблюдателю, то имеет место «серая дыра», метрика которой (при отсутствии вращения) является метрикой Крускала. «Серая дыра» отличается от белой тем, что основная масса материи, создающая гравитационное поле, никогда не выходит в R -область (см. § 13 гл. 2) внешнего наблюдателя.

Могут ли все эти космологические отоны реально существовать в природе? Каковы их свойства, и не противоречит ли гипотеза об их существовании наблюдениям? К сожалению, в этом отношении теоретиками сделано очень мало и неизвестны ответы даже на многие принципиальные вопросы.

Мы остановимся лишь на двух моментах.

Прежде всего, в горячей модели неизбежна на раннем этапе аккреция излучения отонами [Зельдович, Новиков (1966)]. Для оценок воспользуемся полученными в гл. 12 формулами для стационарной аккреции: по порядку величины для роста массы

*) В § 14 гл. 2 рассмотрен сферически-симметричный случай. При наличии вращения необходимо рассматривать метрику Керра; см. § 3 гл. 3.

отона имеем

$$\frac{dM}{dt} = r_g^2 c \rho_r, \quad (14.5.1)$$

где r_g — гравитационный радиус отона, ρ_r — плотность окружающей материи. Зная из космологии, что плотность меняется как $\rho_r \approx \frac{1}{Gt^2}$, легко проинтегрировать (14.5.1). Интеграл слабо зависит от верхнего предела (положим его равным бесконечности):

$$M = \frac{M_0}{1 - \frac{GM_0}{c^3 t_0}}. \quad (14.5.2)$$

Здесь M_0 — масса отона в момент его образования t_0 . M конечно, когда $t_0 > \frac{GM_0}{c^3}$. Интеграл расходится, когда $t_0 \rightarrow \frac{GM_0}{c^3}$. Од-

нако именно при $t_0 \sim \frac{GM_0}{c^3}$ несправедливо предположение о стационарной аккреции, так как характерные времена процесса сравниваются со временем изменения ρ_r . Поэтому ответ на вопрос, не является ли аккреция на космологический отон катастрофически большой на раннем этапе, требует решения нестационарной задачи. Возможно, ответ зависит от выбора начальных условий. К сожалению, эта проблема до сих пор не решена.

Однако мы можем уже сейчас сказать, что если отоны и были в начале космологического расширения, то их не могло быть слишком много. Действительно, предположим, что на некоторый ранний момент t_* доля α всего вещества находится в форме отонов *). Основная масса материи находилась в форме квантов и пар. Известно, что плотность массы покоя барионов составляет малую долю β полной плотности в момент t_* . Плотность массы квантов и релятивистских пар уменьшается с расширением быстрее, чем плотность массы покоя барионов из-за адиабатического охлаждения фотонного газа, и к настоящему моменту плотность излучения много меньше плотности обычного вещества. Плотность усредненной массы всех отонов меняется с расширением так же, как и плотность массы покоя барионов $\frac{\rho_{от}}{\rho_{бар}} = \text{const}$. Поэтому

$\frac{\rho_{от}}{\rho_{бар}}$ в настоящий момент такие же, как и в момент t_* .

В момент t_* , по определению,

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_{бар}} = \frac{\alpha}{\beta(1-\alpha)}. \quad (14.5.3)$$

*) Не будем учитывать аккрецию на отоны; учет ее только усилит результат.

Для левой части (14.5.3) можно дать оценку из сегодняшних наблюдений. Известно, что отношение трудно наблюдаемых форм материи (в том числе, возможно, и отонов) к наблюдаемой материи в форме звезд и излучающего или поглощающего диффузного вещества есть

$$\frac{\rho_{\text{невид}}}{\rho_{\text{вид}}} < 160.$$

Отсюда и из (14.5.3) следует:

$$\frac{\alpha}{\beta(1-\alpha)} < 160.$$

Таким образом, отсюда при малых β , величина α должна быть тоже малой. Для $\alpha \ll 1$ имеем

$$\alpha < 160\beta.$$

Следует подчеркнуть, что количество белых дыр, взорвавшихся за последние $\sim 9 \cdot 10^{10}$ лет и рассеявшихся в виде света и нейтрино, должно быть гораздо меньше, чем дается последним неравенством. Дело в том, что общее количество выделившегося света должно быть меньше реликтового излучения горячей Вселенной. Это дает для таких белых дыр $\alpha_1 < 0,03 \beta$.

В заключение еще раз напомним, что все содержание этой главы относилось к гипотетическим объектам, еще не открытым. «Черные дыры», как результат коллапса массивных звезд, почти наверняка существуют в природе. Авторы были бы очень удивлены, если бы оказалось, что какие-то процессы с необходимостью приводят звезду как раз к потере такой доли массы, чтобы предотвратить релятивистский коллапс.

Открытие «черных дыр», как мы надеемся, дело ближайшего будущего.

Что касается космологических отонов, то здесь предстоит еще большая работа, чтобы превратить гипотезу в уверенные представления.

Имеют ли белые дыры какое-либо отношение к взрывам квазаров или ядер галактик? Мнения по этому вопросу различны и часто менялись. Пока можно сказать лишь, что мы слишком мало знаем об этом.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ОКРЕСТНОСТИ «ЧЕРНОЙ ДЫРЫ» С ВРАЩЕНИЕМ

За последние два года достигнут существенный прогресс в физической интерпретации «черных дыр» с вращением, метрика которых описывается решением Керра (см. § 3 гл. 4).

Напомним, что в этом случае надо различать поверхности (1) S_m , где $g_{00} = 0$, и (2) $S_{\text{гор}}$ — «горизонт событий».

Очевидно, что гравитационный захват «черной дырой» падающих тел с моментом относительно «дыры» (см. § 3 гл. 4) приводит к увеличению массы «дыры» и изменению ее момента. Абсолютная величина модуля момента может как увеличиваться так и уменьшаться в зависимости от направления момента падающего тела. Если захватываемая частица двигалась не в плоскости экватора, то меняется направление момента «черной дыры». Пенроуз (1969) указал процесс, который позволяет отбирать энергию от вращающейся «черной дыры», т. е. уменьшать ее массу. Пробная частица A влетает в эргосферу (т. е. в область между поверхностями (1) и (2)), там распадается: $A \rightarrow B + C$, после чего B вылетает обратно через 1 на бесконечность, C падает к поверхности (2) и гравитационно захватывается. Локально при распаде сохраняется энергия и импульс, однако можно выбрать направление разлета B и C так, что энергия C в системе отсчета бесконечно удаленного наблюдателя в определенном смысле отрицательна, и поэтому энергия B (включая массу покоя) больше энергии A (включая массу покоя). При этом разность $E_B - E_A$ отнята от «черной дыры». Процесс Пенроуза обязан сопровождаться уменьшением момента «дыры», если $E_B > E_A$. Очевидно, что в этом процессе энергия $\Delta E = E_B - E_A$ приобретена B за счет энергии вращения «дыры».

Возникает вопрос: какая доля энергии «дыры» связана с ее вращением. Оказывается, разделение энергии «дыры» (или, что то же, ее массы m) на две части — вращательную E_r и так

называемую затворочную E_{ir} (где $E_{ir} = mc^2 - E_r$) может быть произведено инвариантным образом (Кристодуло, 1970). Воспользуемся результатами более поздних работ Кристодуло, Руффини (1971) и Хоукинга (1971).

Площадь поверхности «горизонта событий» S_2 ни в каких процессах не может уменьшаться («теорема Хоукинга»). При нулевом моменте «дыры», когда справедлива метрика Шварцшильда, площадь S_2 [здесь (2) и (1) совпадают] выражается через массу:

$$S_2 = 16\pi m^2.$$

(Мы положили $G = 1$ и $c = 1$.) Назовем «неуменьшаемой» массой m_{ir} вращающейся «черной дыры» величину, связанную с ее S_2 тем же соотношением

$$S_2 = 16\pi m_{ir}^2.$$

Итак, m_{ir} в любых процессах может только увеличиваться или в крайнем случае оставаться постоянной. Выразим площадь S_2 , а следовательно, и m_{ir} через массу m и момент $K = -am$ вращающейся «дыры»:

$$16\pi m_{ir}^2 = S_2 = \int \sqrt{g_{22}g_{33}} \Big|_{\substack{r=r_{\text{гор}} \\ t=\text{const}}} d\theta d\varphi = 4\pi (r_{\text{гор}}^2 + a^2).$$

Подставляя $r_{\text{гор}} = m + (m^2 - a^2)^{1/2}$ и решая уравнение относительно m , находим

$$m = \sqrt{m_{ir}^2 + K^2/4m_{ir}^2}. \quad (1)$$

Второе слагаемое под корнем в (1) описывает энергию вращения. Очевидно, любой процесс, который увеличивает m_{ir} , переводит «черную дыру» в состояние, из которого нельзя вернуться к состоянию с исходными m и K . Назовем, вслед за Кристодуло, обратимыми процессы, которые не изменяют m_{ir} . Кристодуло (1971) показал, что процесс Пенроуза можно проводить так, что он со сколь угодно большой точностью будет обратимым.

Обратимым процессом можно отнять от «черной дыры» всю ее вращательную энергию, превратив «дыру» в невращающуюся с $m = m_{ir}$. Извлеченная энергия будет максимальной, которую в принципе можно извлечь из «черной дыры». Если исходная «дыра» обладала максимальным моментом: $|a| = m$, то $m_{ir} = m/\sqrt{2}$ и из такой «дыры» можно извлечь энергию

$$\Delta E = m - m_{ir} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) m \approx 29\% m. \quad (2)$$

Следуя общим принципам, определим угловую скорость вращения «черной дыры» как производную от энергии по моменту при $m_{ir} = \text{const}$:

$$\Omega = \frac{\partial m}{\partial K} = \frac{K/4m_{ir}^2}{(m_{ir}^2 + K^2/4m_{ir}^2)^{1/2}}. \quad (3)$$

Любопытно отметить, что Ω совпадает с пределом при $r \rightarrow r_{\text{гор}}$ угловой скорости «увеличения локально-лоренцевой системы», определенной как

$$\Omega^* = -g_{03}/g_{33}.$$

Таким образом,

$$\Omega = \lim_{r \rightarrow r_{\text{гор}}} \Omega^* = \frac{-a}{r_{\text{гор}}^2 + a^2}.$$

Понятие обратимых процессов распространяется и на заряженную «черную дыру» с вращением (Кристодуло, Руффини, 1971). Здесь мы упомянем только, что из такой «черной дыры» с максимальными моментом и зарядом можно извлечь $\Delta E = 50\% m$.

Отбор энергии от «черной дыры» с вращением, в принципе, можно осуществить и с помощью классических мультипольных волн, например электромагнитных. В работе Зельдовича (1971) показано, что волна с орбитальным моментом n и частотой ω отражается от вращавшегося с угловой скоростью Ω тела с амплитудой, превышающей амплитуду падающей волны, если $\omega < n\Omega$. При таком отражении волна отнимает момент и отнимает энергию от вращающегося тела.

В цитированной заметке указано, что эти соображения применимы и к взаимодействию мультипольной волны с вращающейся «черной дырой».

По общим принципам квантовой теории, если в классическом рассмотрении имеет место процесс, в котором N_1 падающих фотонов после взаимодействия с телом превращаются в N_2 уходящих фотонов, причем $N_2 > N_1$, как указано выше, то возможен и процесс спонтанного рождения одиночных фотонов, уносящих энергию и момент. Более подробно этот процесс следует описывать как рождение пар фотонов внутри эргосферы, после чего один член пары уходит через поверхность (1) на бесконечность, а второй падает на поверхность (2). Однако при этом внутри эргосферы и в области около (1) фотоны распространяются подбарьерно. Поэтому эффективно рождаются лишь фотоны (или нейтрино) с длиной волны порядка гравитационного радиуса; мощность порядка $\hbar c^2/r_g^2$ ничтожна для астрономических r_g .

Основными результатами теории взрывов сверхновых являются: 1) масса вещества, выброшенного в межзвездное пространство (или масса остатка), 2) энергия, вынесенная в виде кинетической энергии вещества и энергии нейтринного излучения. В таблице собраны эти данные по рассчитанным к настоящему времени моделям взрывов сверхновых. $M_{\text{ядра}}$ — масса ядра звезды, $M_{\text{остатка}}$ — масса остатка, E_k — кинетическая энергия сброшенной оболочки, E_{ν_e} и $E_{\nu_{\mu}}$ — энергии, потерянные в виде электронных и мюонных нейтрино. Следует здесь подчеркнуть, что $M_{\text{ядра}}$ есть формально масса всей звезды, принятая в расчете процесса взрыва,

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТАБЛИЦА РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ ВЗРЫВОВ СВЕРХНОВЫХ *)

$M_{\text{ядра}}/M_{\odot}$	$M_{\text{остатка}}/M_{\odot}$	$E_k/10^{51}$, эрг	$E_{\nu_e}/10^{51}$, эрг	$E_{\nu_{\mu}}/10^{51}$, эрг	Примечания	Авторы
2 4 8 32	0,564 2,46 8 32	2,3 0,66 0 0	1,7 2,2 2,8 3,0	0,28 8,4 58 420	Сброс оболочки за счет депозиции электронных нейтрино. Звезда сильно непрозрачна к электронным нейтрино, депозиция поэтому неэффективна, мюонные нейтрино способствуют коллапсу.	Арнет, 1967
10 10	9,75 9,987	0,025 0,013	0,8 0	0 0	Сброс за счет детонации кислорода во внешней части ядра. Чисто газодинамический эффект.	
1,43	0	0,07	0	0	Полный разлет звезды за счет детонации углерода в вырожденном веществе.	Хансен, Уилер, 1969; Арнет, 1969
1,5 2 10	0,87 0,98 1,8	~0,08 ~0,1 ~1,6	??*) ? ?	0 0 0	Сброс оболочки за счет депозиции электронных нейтрино.	Колгейт и Уайт, 1966
≥40	0	3	0	0	Термоядерный взрыв на эволюционной стадии горения кислорода.	

*) Таблица составлена В.С. Имшенником и Д. К. Надёжиным.

**) Цифры не указаны в цитируемой работе.

однако во всех расчетах используются однородные начальные модели, т. е. или политропа индекса $n = (1,5 \div 3)$, или изэнтропическая или изотермическая модель. Современная теория ядерной эволюции звезд приводит к выводу, что вокруг таких ядер могут существовать очень протяженные (с массой, даже превышающей массу ядра) водородо-гелиевые оболочки, которые почти не влияют на развитие гидродинамической неустойчивости в центральном ядре [что и было продемонстрировано в работе Колгейта и Уайта (1966)]. Поэтому коэффициент перехода от $M_{\text{ядра}}$ к полной массе звезды, начавшей эволюцию от главной последовательности, пока является неопределенным. Ясно только, что он может быть значительно больше 1, если учесть к тому же, что звезда может потерять значительную часть массы путем медленного истечения на более ранних стадиях эволюции (Бисноватый-Коган, Зельдович, 1968). По этой же причине основным параметром модели является не выброшенная масса из ядра звезды, а ее кинетическая энергия, которая является вполне достаточной для сброса протяженной массивной оболочки. Данные таблицы показывают, что эта энергия по порядку величины соответствует наблюдаемой энергии разлетающихся оболочек сверхновых, равной $10^{49} \div 10^{52}$ эрг (Шкловский, 1964, Поведа и Волчер, 1968).

Итак, таблица показывает, что современное состояние теории взрывов сверхновых еще далеко от совершенства. Основное неблагоприятное заключается в известном разном выводов разных авторов и в неопределенности ответа на вопрос — какая масса оболочки окружала ядро, для которого проводится расчет, до взрыва, т. е. на вопрос о массе исходной звезды. Тем не менее, как можно полагать, из расчетов следует, что для звезды с исходной полной массой меньше $(12 \div 30) M_{\odot}$ (огромная неопределенность!) взрыв ведет к образованию нейтронной звезды. Для больших масс результатом является релятивистский коллапс ядра и образование «черной дыры».

ЛИТЕРАТУРА

- Абрикосов А. А., АЖ 31, 112 (1954).
 Альвен Х., АЖ 42, 873 (1965).
 Альтшулер Л. В., УФН 85, 197 (1965).
 Амбарцумян В. А., Научные труды; Собрание работ, том 2 (Ереван, АН Арм. ССР), 1960.
 Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., АЖ 37, 193 (1960).
 Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., Вопросы космогонии 9, 91 (1963).
 Амнуэль П. Р., Гусейнов О. Х., Изв. АН Азерб. ССР, серия Ф.Т.М. № 3, 70 (1968); АЦ № 524 (1969).
 Антонов В. А., АЖ 4, 859 (1961).
 Базь А. И., Гольданский В. И., Гольдберг В. З., Зельдович Я. Б., Легкие и промежуточные ядра вблизи границы стабильности, «Атомиздат», 1972.
 Базь А. И., Гольданский В. И., Зельдович Я. Б., УФН 87, 445 (1965).
 Баутин А. В., Пустовойт А. П., ЖЭТФ 46, 1326 (1964).
 Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М., УФН 102, 463 (1970).
 Белинский В. А., Халатников И. М., ЖЭТФ 56, 1700 (1969).
 Березин В. А., Марков М. А., Препринт ОИЯИ (1969).
 Березин В. А., Марков М. А., Теор. и матем. физ. 3, 161 (1970).
 Берестецкий Б. В., Лифшиц Е. М., Пятаевский Л. Р., Кваптовая механика, ч. 2, Релятивистская теория, «Наука», 1968.
 Бисноватый-Коган Г. С., АЖ 44, 89 (1966).
 Бисноватый-Коган Г. С., Докл. на XIII конгрессе МАС (1967).
 Бисноватый-Коган Г. С., Астрофизика 4, 221 (1968a).
 Бисноватый-Коган Г. С., АЖ 45, 74 (1968 b).
 Бисноватый-Коган Г. С., АЖ 47, 813 (1970).
 Бисноватый-Коган Г. С., Каждан Я. М., АЖ 43, 761 (1966).
 Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., АЖ 43, 1200 (1966).
 Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., АЖ 45, 241 (1968).
 Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., Астрофизика 5, 223 (1969a).
 Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., Астрофизика 5, 425 (1969b).
 Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А., Письма ЖЭТФ 12, 64 (1970); АЖ 48, 24 (1971).
 Бисноватый-Коган Г. С., Сеидов З. Ф., Астрофизика 5, 243 (1969).
 Бисноватый-Коган Г. С., Сеидов З. Ф., АЖ 47, 139 (1970).
 Бисноватый-Коган Г. С., Сюняев Р. А., препринт ИПМ № 31, 1970, АЖ 48, № 5 (1971).
 Бисноватый-Коган Г. С., Фридман А. М., АЖ 46, 721 (1969).

- Богородский А. Ф., Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии (Изд-во Киевского ун-та, 1962).
- Бондарев В. В., Воеводский А. В., Дадькин В. Л., Маслов С. П., Михеев С. П., Сборщиков В. Г., Степанов В. И., Изв. АН СССР, Физ. сер. 32, 531 (1968).
- Брагинский В. Б., УФН, 86 433 (1965).
- Брагинский В. Б., Письма ЖЭТФ 3, 69 (1966).
- Брагинский В. Б., ЖЭТФ 54, 91 (1968).
- Брагинский В. Б., Физические эксперименты с пробными телами, «Наука», 1970.
- Брагинский В. Б., Зельдович Я. Б., Мартынов В. К., Мигулин В. В., ЖЭТФ 52, 29 (1967).
- Брагинский В. Б., Зельдович Я. Б., Руденко В. Н., Письма ЖЭТФ 10, 437 (1969).
- Брагинский В. Б., Корниенко Л. С., Полосков С. С., Phys. Lett. 33B, № 8, 613 (1970).
- Брагинский В. Б., Менский М. Б., Письма ЖЭТФ 13, 585 (1971).
- Брагинский В. Б., Панов В. И., ЖЭТФ 61, 867 (1971).
- Брагинский В. Б., Руденко В. Н., УФН 100, 395 (1970).
- Брагинский С. И., ЖЭТФ 47, 2178 (1964).
- Бронштейн М. П., ЖЭТФ 6, 125 (1936).
- Вайнштейн С. И., ЖЭТФ 58, 153 (1970).
- Вайнштейн Л. А., Пикельнер С. Б., Письма ЖЭТФ 4, 307 (1966).
- Вебер Дж., Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, 1962.
- Вестервельт П., Письма ЖЭТФ 4, 333 (1966).
- Владимиров Ю. С., ЖЭТФ 45, 251 (1963).
- Вокулер Ж., Строение звездных систем, ИЛ, 1962, стр. 376.
- Галкин Л. С., Тезисы 1-й сов. грав. конференции (Москва, 1961).
- Гандельман Г. М., ЖЭТФ 47, 131 (1962).
- Гандельман Г. М., Воропинов А. И., Подвальный В. Г., УФН 100, 193 (1970).
- Гандельман Г. М., Пинаев В. С., ЖЭТФ 37, 1072 (1959).
- Гандельман Г. М., Франк-Каменецкий Д. А., ДАН СССР 107, 811 (1956).
- Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, «Наука», 1961.
- Герценштейн М. Е., ЖЭТФ 51, 129 (1966a).
- Герценштейн М. Е., ЖЭТФ 51, 1127 (1966b).
- Герценштейн М. Е., Пустовойт А. П., ЖЭТФ 42, 163 (1962).
- Гершберг Р. Е., Тезисы симпозиума «Переменные звезды и звездная эволюция» (Москва, ноябрь, 1964).
- Герштейн С. С., ДАН СССР 156, 43 (1964).
- Герштейн С. С., УФН 95, 91 (1968).
- Герштейн С. С., УФН 97, 601 (1969).
- Гинзбург В. Л., ДАН СССР 156, 43 (1964).
- Гинзбург В. Л., АЖ 42, 943 (1965).
- Гинзбург В. Л., УФН 97, 601 (1969).
- Гинзбург В. Л., УФН 103, 393 (1971).
- Гинзбург В. Л., Железняков В. В., Зайцев В., УФН 98, 201 (1969).
- Гинзбург В. Л., Киржниц Д. А., ЖЭТФ 47, 397 (1964).
- Гинзбург В. Л., Озерной Л. М., ЖЭТФ 47, 1030 (1964).
- Гордон И. М., АЖ 44, 1146 (1967).
- Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
- Грасберг Э. К., Надежин Д. К., АЖ 46, 745 (1969a).

- Грасберг Э. К., Надежин Д. К., Научн. инф. Астрон. совета АН СССР 13, 96 (1969b).
- Гуревич Л. Э., Лебединский А. И., Труды 4-го сов. по вопросам космогонии, 147, Москва, 1965.
- Гурович В. Ц., АЖ 42, 974 (1965).
- Гусейнов О. Х., Тезисы II Всесоюзной конференции по гравитации, Тбилиси, 1965.
- Гусейнов О. Х., АЖ 45, 985 (1968).
- Гусейнов О. Х., Зельдович Я. Б., АЖ 43, 313 (1966).
- Дмитриев Н. А., ЖЭТФ 42, 772 (1962).
- Дмитриев Н. А., Холин С. А., Вопросы космогонии 9, 254. Изд-во АН СССР, 1963.
- Домогацкий Г. В., Научн. инф. астрон. совета АН СССР 13, 1969.
- Домогацкий Г. В., Зацепин Г. Т., Материалы интернацион. семинара по нейтронной физике и нейтронной астрофизике, 198, М. (1969a).
- Домогацкий Г. В., Зацепин Г. Т., Труды 2-й междунар. конф. по космическим лучам, Будапешт, 1969b.
- Дорошkevич А. Г., АЖ 43, 105 (1965).
- Дорошkevич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., ЖЭТФ 49, 170 (1965).
- Дьяченко В. Ф., Зельдович Я. Б., Имшенник В. С., Палейчик В. В., Астрофизика 4, 159 (1968).
- Жевакин С. А., Ann. Rev. Astr. and Ap. 1, 367 (1966).
- Железняков А. А. Доклад на астрофизическом семинаре, ГАИШ, Москва, 1971.
- Зельдович Я. Б. ЖЭТФ 33, 991 (1957).
- Зельдович Я. Б., ЖЭТФ 37, 569 (1959).
- Зельдович Я. Б., ЖЭТФ 38, 1123 (1960).
- Зельдович Я. Б., ЖЭТФ 41, 1609 (1961).
- Зельдович Я. Б., ЖЭТФ 42, 641 (1962).
- Зельдович Я. Б., Вопросы космогонии 9, 36, Изд-во АН СССР (1963a).
- Зельдович Я. Б., Вопросы космогонии 9, 157, Изд-во АН СССР (1963b).
- Зельдович Я. Б., УФН 80, 357 (1963c).
- Зельдович Я. Б., АЦ № 250 (1963d).
- Зельдович Я. Б., ДАН 155 67 (1964).
- Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ 1, 40 (1965a).
- Зельдович Я. Б., УФН 86, 303 (1965b).
- Зельдович Я. Б., АЖ 89, 647 (1966).
- Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ 6, 922 (1967a).
- Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ 6, 1050 (1967b).
- Зельдович Я. Б., УФН 95, 209 (1968).
- Зельдович Я. Б., ЖЭТФ 56, 1968 (1969).
- Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ 12, 443 (1970).
- Зельдович Я. Б., Сборник, посвященный 75-летию со дня рождения И. Е. Тамма, 1971a.
- Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ 14, 270 (1971b).
- Зельдович Я. Б., Баренблат Г. И., ДАН СССР 118, 671 (1958).
- Зельдович Я. Б., Гусейнов О. Х., ДАН СССР 162, 791 (1965a).
- Зельдович Я. Б., Гусейнов О. Х., Письма ЖЭТФ 1, 11 (1965b).
- Зельдович Я. Б., Гусейнов О. Х., ApJ 144, 841 (1965c).
- Зельдович Я. Б., Илларионов А. Ф., ЖЭТФ, 61, 880 (1971).
- Зельдович Я. Б., Компанеев А. С., Райзер Ю. П., ЖЭТФ 34, 1278, 1447 (1958).
- Зельдович Я. Б., Левич Е. В., ЖЭТФ 55, 2433 (1968).
- Зельдович Я. Б., Левич Е. В., Письма ЖЭТФ 11, 57, 497 (1970).
- Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., УФН 84, 377 (1964a).
- Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., ДАН СССР 155, 1033 (1964b).

- Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., УФН 86, 477 (1965).
 Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., АЖ 43, 758 (1966a).
 Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Эйнштейновский сборник 1, 238 (1966b).
 Зельдович Я. Б., Окунь Л. Б., Пикельнер С. Б., УФН, 87, 113 (1965).
 Зельдович Я. Б., Питаевский Л. П., Comm. math. phys. 23, 185 (1971).
 Зельдович Я. Б., Подурец М. А., ДАН СССР 156, 57 (1964).
 Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн, «Наука», 1966.
 Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А., ЖЭТФ 41, 907 (1961).
 Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А., УФН 89, 734 (1966).
 Зельдович Я. Б., Старобинский А. А., ЖЭТФ 61, № 6 (1971).
 Зельдович Я. Б., Шакура Н. И., АЖ 225, 16 (1969).
 Зельманов А. Л., Кандидатская диссертация МГУ, 1944.
 Зельманов А. Л., ДАН СССР 61, 993 (1948).
 Зельманов А. Л., ДАН СССР 107, 815 (1956).
 Зельманов А. Л., Труды 6-го сов. по вопросам космогонии, Изд-во АН СССР (1959a).
 Зельманов А. Л., ДАН СССР 124, 1030 (1959b).
 Имшенник В. С., Морозов Ю. И., АЖ 46, 800 (1969).
 Имшенник В. С., Надежин Д. К., АЖ 41, 829 (1964).
 Имшенник В. С., Надежин Д. К., АЖ 42, 1154 (1965).
 Имшенник В. С., Надежин Д. К., АЖ 44, 377 (1967).
 Имшенник В. С., Надежин Д. К., Пинаев В. С., АЖ 43, 1215 (1966).
 Имшенник В. С., Надежин Д. К., Пинаев В. С., АЖ 44, 768 (1967).
 Имшенник В. С., Чечеткин В. М., АЖ 47, 929 (1970).
 Иващенко Д. Д., Соколов А. А., Вестн. Моск. гос. ун-та 8, 103 (1947).
 Иванова Л. Н., Имшенник В. С., Надежин Д. К., препринт ИПМ (1967); Научн. информ. Астрон. совета, № 13 (1969).
 Иванова Л. Н., Имшенник В. С., Надежин Д. К., Чечеткин В. М., Докл. семинара по нейтринной астрофиз. (М), стр. 180 (1969).
 Калиткин М. Н., ЖЭТФ 38, 1534 (1960).
 Каплан С. А., ЖЭТФ 19, 951 (1949a).
 Каплан С. А., Уч. зап. Львовск. ун-та 15, 101 (1949b).
 Каплан С. А., Физика звезд, Физматгиз, 1963.
 Каплан С. А., Лупанов Г. А., АЖ 42, 299 (1965).
 Каплан С. А., Пикельнер С. Б., Межзвездная среда, Физматгиз, 1963.
 Каплан С. А., Цытович В. Н., УФН 97, 77 (1969).
 Караченцев И. Д., Астрофизика 1, 303 (1965).
 Кардашев Н. С., АЖ 41, 807 (1964).
 Кардашев Н. С., АЖ 47, 465 (1970).
 Киббл Т., УФН 96, 497 (1968).
 Киржниц Д. А., УФН 104, 489 (1971).
 Киржниц Д. А., Поляченко В. Л., ЖЭТФ 46, 255 (1964a).
 Киржниц Д. А., Поляченко В. Л., ЖЭТФ 46, 755 (1964b).
 Климов Ю. Г., АЖ 40, 874, (1963).
 Кобзарев И. Ю., Захаров В. И., Phys. Lett. 30B, 488 (1969); Annals of Phys. 60, 448 (1970).
 Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б., ЖЭТФ 43, 1904 (1962).
 Компанеев А. С., ЖЭТФ 31, 876 (1956).
 Копвилем У. Х., Нагибаров В. Н., Письма ЖЭТФ 2, 529 (1965).

- Копысов Я. С., Кузьмин В. А., Известия АН СССР, сер. физ. 32, 1790, (1968).
- Коток Э. В., Масевич А. Г., АЖ 40, 659 (1963).
- Кравцов В. А., Массы атомов и энергии связи ядер, Атомиздат, 1965.
- Крат В. А., Фигуры равновесия небесных тел, Гостехиздат, 1950.
- Кукаркин Б. В., Астрофизика 1, 465 (1965).
- Ландау Л. Д. ДАН СССР 17, 301 (1937).
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, «Наука», 1967.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статическая физика, Физматгиз, 1964.
- Ландау Л. Д., Померанчук И. Я., ДАН СССР 102, 489 (1955).
- Ландау Л. Д., Станюкович К. П., ДАН СССР 46, 399 (1945).
- Лебединский А. И., Вопросы космогонии 2, 5 (1954).
- Левич Е. В., ЖЭТФ 61, 112 (1971).
- Левич Е. В., Сюняев Р. А., Радиофизика 13, вып. 12 (1970).
- Левич Е. В., Сюняев Р. А., АЖ 48, 461 (1971).
- Лифшиц Е. М., ЖЭТФ 16, 587 (1946).
- Лифшиц Е. М., Судаков В. В., Халатников И. М., ЖЭТФ 40, 1847 (1961).
- Лифшиц Е. М., Халатников И. М., ЖЭТФ 39, 149 (1960a).
- Лифшиц Е. М., Халатников И. М., ЖЭТФ 39, 800 (1960b).
- Лифшиц Е. М., Халатников И. М., УФН 30, 391 (1963).
- Марков М. А., ЖЭТФ 51, 878 (1966).
- Марков М. А., Препринт, Д-2-4534, ОИЯИ (1969).
- Мартынов Д. Я., Курс общей астрофизики, Физматгиз, 1965.
- Масевич А. Г., АЖ 33, 216 (1956).
- Мироновский В. Н., ЖЭТФ 58, 358 (1965a).
- Мироновский В. Н., АЖ 42, 977 (1965b).
- Мироновский В. Н., Вязкость нейтрино, препринт, 1967.
- Михайлов А. А. (редактор) Курс астрофизики и звездной астрономии, т. 2, Физматгиз, 1962.
- Мицкевич Н. В., ЖЭТФ 34, 1656 (1958).
- Мицкевич Н. В., Физические поля в общей теории относительности, «Наука», 1969.
- Морозов Ю. И., Препринт ИПМ № 66 (1971a).
- Морозов Ю. И., Препринт ИПМ № 20 (1971b).
- Надежин Д. К., АЖ 45, 1166 (1968).
- Надежин Д. К., Франк-Каменецкий Д. А., АЖ 39, 1003 (1962).
- Надежин Д. К., Франк-Каменецкий Д. А., АЖ 41, 842 (1964a).
- Надежин Д. К., Франк-Каменецкий Д. А., Вопросы космогонии 10, 154, «Наука», (1964b).
- Надежин Д. К., Франк-Каменецкий Д. А., АЖ 42, 290 (1965).
- Надежин Д. К., Чечеткин В. М., АЖ 46, 270 (1969).
- Никишев А. И., Ритус В. Н., ЖЭТФ 47, 1130 (1964).
- Новиков И. Д., АЖ 38, 564 (1961).
- Новиков И. Д., Вестник МГУ, сер. III, № 5, 90 (1962a).
- Новиков И. Д., Вестник МГУ, сер. III, № 6, 61 (1962b).
- Новиков И. Д., Сообщения ГАИШ № 120, 342 (1962c).
- Новиков И. Д., АЖ 40, 772 (1963).
- Новиков И. Д., АЖ 41, 290 (1964a).
- Новиков И. Д., АЖ 41, 1075 (1964b).
- Новиков И. Д., Сообщения ГАИШ № 132, 3 и 43 (1964d).
- Новиков И. Д., Письма ЖЭТФ 3, 223 (1966a).
- Новиков И. Д., АЖ 911 (1966b).
- Новиков И. Д., ЖЭТФ 57, 949 (1969).
- Новиков И. Д., ЖЭТФ 59, 262 (1970).

- Новиков И. Д., Зельдович Я. Б., *Supplemento al Nuovo Cimento*, Serie I, 4, 810 (1966).
- Новиков И. Д., Озерной Л. М., ДАН СССР 150, 1019 (1963).
- Новиков И. Д., Озерной Л. М., препринт ФИАН, А-17 (1964).
- Новиков И. Д., Сюняев Р. А., АЖ 44, 320 (1967).
- Паташинский А. Э., Харьков А. А., препринт № 317, Инст. ядер. физ., Новосибирск, 1969; ЖЭТФ 59, 574 (1970).
- Петроуз Р., Структура пространства — времени, «Мир», 1971.
- Петров А. З., Пространства Эйнштейна, Физматгиз, 1961.
- Петров А. З. (редактор), Гравитация и относительность, «Мир», 1965.
- Петров А. З., Новые методы в ОТО, «Наука», 1966.
- Пикельнер С. Б., Основы космической электродинамики, Физматгиз, 1961.
- Пикельнер С. Б., Вайнштейн Л. А., Письма ЖЭТФ 4, 307 (1966).
- Пинаев В. С., Вопросы космогонии 9, 176, Изд-во АН СССР (1963a).
- Пинаев В. С., ЖЭТФ 45, 548 (1963b).
- Пинаева Г. В., АЖ 41, 25 (1964).
- Подурец М. А., ДАН СССР 154, 300 (1964a).
- Подурец М. А., АЖ 41, 1091 (1964b).
- Понтекорво Б. М., Вопросы космогонии 9, 132, Изд-во АН СССР (1963).
- Ращевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, изд. 8-е, «Наука», 1964.
- Редкобородый Ю. Н., Канд. дисс., ГАО АН УССР, Киев, 1971.
- Рублев С. В., Труды Симпозиума «Переменные звезды и звездная эволюция», «Наука», стр. 8, 1964.
- Рылов Ю. А., ЖЭТФ 40, 1955 (1961).
- Саакян Г. С., Изв. АН Арм. ССР 14, 117 (1961).
- Саакян Г. С., АЖ 39, 1014 (1962).
- Саакян Г. С., Тезисы 2-й Всесоюзной гравитационной конференции в Тбилиси, 1965.
- Саакян Г. С., Вартамян Ю. Л., Сообщ. Бюраканск. обс. 33, 55 (1963).
- Саакян Г. С., Вартамян Ю. Л., АЖ 41, 193 (1964).
- Сахаров А. Д., Письма ЖЭТФ 3, 439 (1966).
- Сахаров А. Д., ДАН СССР 177, 70 (1967).
- Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, «Наука», 1967.
- Сеидов З. П., Астрофизика 3, 189 (1967).
- Синг Дж. Л., Общая теория относительности, ИЛ, 1963.
- Скроцкий Г. В., ДАН СССР 114, 73 (1957).
- Станюкович К. П., Неустановившееся движение сплошной среды, «Наука», 1971.
- Станюкович К. П., Гравитационное поле и элементарные частицы, «Наука», 1965.
- Сюняев Р. А., АЖ 48, 244 (1971).
- Уилер Дж., Гравитация, нейтрино и Вселенная, ИЛ, 1962.
- Уилер Дж., Гаррисон Б., Вакано М., Торн К., Теория гравитации и гравитационный коллапс, «Мир», 1967.
- Фаддеев Л. Д., *Phys. Letts* 25B, 29 (1967).
- Фаддеев Л. Д., Тезисы доклада 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968, стр. 229.
- Фесенков В. Г., АЖ 26, 67 (1949).
- Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.
- Франк-Каменецкий Д. А., Физические процессы внутри звезд, «Физматгиз», 1959.
- Чечеткин В. М., АЖ, 46, 202 (1969).
- Шайн Г. А., Бюллетень Абастуманской астрофиз. обсерватории 83 (1943).
- Шакура Н. И., Дипломная работа, Физ. фак. МГУ, 1970.

- Шакура Н. И., АЖ 49 (1972),
 Шварцман В. Ф., АЖ 47, 824 (1970a).
 Шварцман В. Ф., *Астрофизика* 6, 123 (1970b).
 Шварцман В. Ф., АЖ, 47, 660 (1970c).
 Шварцман В. Ф., *Астрофизика* 6, 309 (1970d).
 Шварцман В. Ф., *Радиофизика* 13, 1852 (1970e).
 Шварцман В. Ф., препринт ИПМ № 42 (1970f). АЖ 48, 479 (1971).
 Шварцман В. Ф., ЖЭТФ 60, 881 (1971a).
 Шварцман В. Ф., АЖ 48, 438 (1971b).
 Широков М. Ф., АЦ № 401 (1967a).
 Широков М. Ф., АЦ № 429 (1967b).
 Широков М. Ф., АЖ 44, 930 (1967c).
 Широков М. Ф., Фишер И. З., АЖ 39, 899 (1962).
 Шкловский И. С., АЦ № 250 (1963a).
 Шкловский И. С., АЦ № 256 (1963b).
 Шкловский И. С., ДАН СССР 160 (1), 54 (1965).
 Шкловский И. С., *Сверхновые звезды*, «Наука», 1966.
 Шкловский И. С., АЖ 44, 930 (1967).
 Шкловский И. С., АЖ 46, 715 (1969a).
 Шкловский И. С., АЦ № 495 (1969b).
 Эддингтон А. С., *Теория относительности*, Ленинград, Москва, 1934.
 Эйштейн А., *Собрание сочинений*, т. II, «Наука», 1966, стр. 424.
 Эмин-Заде Т. А., ДАН Азерб. ССР 15, 1005 (1959).
 Эпик Е. И., Сб. «Ядерные процессы в звездах», ИЛ, 1957, стр. 108.
 Adler S. L., Bahcall J. N., Gallan C. G., Rosenbluth M. N.,
Phys. Rev. Letts. 25, 1061 (1970).
 Aller L. H., McLaughlin D. B. (ed.) *Stellar structure* [Chicago, London (1965)].
 Ames W. L., Thorne K. S., Preprint, orange series (Colifornia), 1967.
 Anders E., Ap. J. 129, 327 (1959).
 Anderson J. L., Gautreau R., *Phys. Letts.* 20, 24 (1966).
 Appenzeller L., *Astr. and Ap.* 5, 355 (1970).
 Arnett W. D., *Canad. J. of Phys.* 44, 2553 (1966).
 Arnett W. D., *Ap. Spa. Sci.* 45, 1621 (1967).
 Arnett W. D., *Ap. J.* 53, 341 (1968).
 Arnett W. D., *Ap. Spa. Sci.* 5, 180 (1969).
 Auer L. H., Woolf N. J., *Ap. J.* 142, 182 (1965).
 Baade W., *Evolution of Stars and Galaxies* (Cambridge), 1963.
 Baade W., Christy R., Burbidge G., Fowler W. A., Hoyle F.,
Publ. Astr. Soc. Pacific. 68, 296 (1956).
 Baade W., Zwicky F., *Proc. Nat. Acad. Sci.* 20, 255 (1934).
 Baglin A., *Compte Rendues* 260, 2424 (1965).
 Baglin A., *Ann. d' Astrophys.* 29, 315 (1966).
 Bahcall J. N., Davis R., *Phys. Rev. Letts.* 26, 662 (1971).
 Bahcall J. N., Ulrich R. H., *Ap. J.* 160, 157 (1970).
 Bahcall J. N., Wolf R. A., *Phys. Rev.* 140, B 1445 (1965a).
 Bahcall J. N., Wolf R. A., *Ap. J.* 142, 1254 (1965b).
 Barbaro G., Dallaponte N., Summa C., IV-th Colloquium IAU
 on Variable stars, Budapest, 1968, Budapest, 1969, page 41.
 Bardeen J. M., *Bull. Amer. Phys. Soc.* 13, 41 (1968a).
 Bardeen J. M., Unfinished manuscript (see Hartle, 1970) (1968b).
 Baym G., Pethick C., Pines D., *Nature* 224, 674 (1969).
 Baym G., Pethick C., Pines D., Rudermann M., *Nature* 229,
 872 (1969).
 Belinfante F. A., *Phys. Letts.* 20, 25 (1966).
 Bellamy E. H., Hofstadter R., Lakin M., *Phys. Rev.* 156, 1391
 (1968).

- Bethe H. A., Börner G., Sate K., Astr. and Ap. 7, 279 (1970).
 Bird G. F., Rev. Mod. Phys. 36, 717 (1964).
 Birkhoff G., Relativity and Modern Phys. (Cambridge), 1923.
 Bondi H., M. N. R. A. S. 112, 195 (1952).
 Blaauw A., B. A. N. 15, 265 (1961).
 Bondi H., Proc. Roy. Soc. A282, 303 (1964).
 Bondi H., Hoyle F., M. N. R. A. S. 104, 273 (1944).
 Bonnor W. B., Zeit fur Phys. 160, 59 (1960).
 Borst L., Phys. Rev. 78, 807 (1950).
 Boyer R. H., Lindquist R. W., J. Math. Phys. 8, 265 (1967).
 Boyer R. H., Price T. A., Proc. Cambr. Phil. Soc. 61, 531 (1965).
 Brill D. R., Hartle J. B., Phys. Rev. 135, B271 (1964).
 Brueckner K. A., Gammel J. L., Kubis J. T., Phys. Rev. 118, 1095 (1960).
 Burbidge E. M., Burbidge G. R., Handbuch der Phys. (S. Flugge, ed.) vol. 51 (Berlin: Springer), 1958. Русск. перев. в сб. «Происхождение и эволюция звезд» ИЛ, 1962.
 Burke W. L., Thesis California Instit. of Technology, 1969.
 Burke W. L., Phys. Rev. A2, 1501 (1970).
 Burke W. L., Thorne K. S., in Proceedings of relativity conference in the midwest, 1969.
 Cameron A. G. W., Ap. J. 130, 884 (1959a).
 Cameron A. G. W., Ap. J. 130, 895 (1959b).
 Cameron A. G. W., Ap. J. 130, 916 (1959c).
 Cameron A. G. W., Nature 205, 787 (1965a).
 Cameron A. G. W., Nature 206, 1342 (1965b).
 Cameron A. G. W., Mock M., Nature 215, 464 (1967).
 Cameron A. G. W., Comments Ap. and Spa. Sci. 1, 172 (1969).
 Cameron A. G. W., Preprint (1970), Ann. Rev. Astr. and Ap. in press, 1971.
 Canuto V., Ap. J. 159, 641 (1970).
 Carter B., Preprint, Depart. of Applied Math. and Theor. Phys. Univ. of Cambridge, 1965.
 Carter B., Preprint, Depart. of Applied Math. and Theor. Phys. Univ. of Cambridge, 1966a.
 Carter B., Phys. Rev. 141, 1242 (1966b).
 Chandrasekhar S., Stellar struct. (Chicago) (1939).
 Chandrasekhar S., Phys. Rev. Letts. 12, 144, 437 (1964a).
 Chandrasekhar S., Ap. J. 140, 417 (1964b).
 Chandrasekhar S., Phys. Rev. Letts. 14, 241 (1965).
 Chandrasekhar S., Esposito F. P., Ap. J. 160, 153 (1970).
 Chandrasekhar S., Tooper R. F., Ap. J. 139, 1396 (1964).
 Charman W. N., Jeelley J. V., Hodgson E. R., Scott P. F., Shakeshaft J. R., Baird G. A., Delaney T., Lawless B. G., Drever R. W. P., Meikle W. P. S., Porter R. A., Spencer R. E., Nature 228, 346 (1970).
 Chau W. Y., Ap. J. 158, 85 (1969).
 Chiu H. Y., Ann. Phys. 26, 364 (1964).
 Chiu H. Y., Phys. Rev. Letts. 17, 712 (1966a).
 Chiu H. Y., Stellar Evolution (New York: Plenum Press) (1966b).
 Christodoulou D., Phys. Rev. Lett. 25, 1596 (1970).
 Christodoulou D., Ruffini R., Preprint, 1971.
 Christy R. F., The Dynamic of Variable Stars «SIAM Rev», 10, 291 (1968).
 Clayton D. D., Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis (New York: McGraw-Hill Book Co.) (1968).
 Clifford F. E., Talyer P. J., Mem. R. A. S. 69, 21 (1965).
 Cohen J. M., Cameron A. G. W., Ap. Spa. Sci. 10, 230 (1971).
 Colgate S. A., M Klee C., Ap. J. 157, 623 (1969).

- Colgate S. A., White R. H., *Ap. J.* **143**, 626 (1966).
 Cox A. N., Stewart J. N., Eilers D. D., *Ap. J. Suppl.* **11**, 1 (1965).
 Das A., *Proc. Roy. Soc. A* **267**, 1 (1962).
 Davis R., *Phys. Rev. Letts* **12**, 303 (1964).
 Davis R., Harmer D. S., Hoffman K. S., *Phys. Rev. Letts.* **20**, 1205 (1968).
 De Filice F., *Nuovo Cim.* **57B**, 351 (1968).
 Deutsch A., *Ann. d'Astr.* **12**, 1 (1955).
 De Witt, Report to the Fifth Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation, Tbilisy, 1968.
 De Witt C., De Witt B. (ed.), *Relativity, Groups and Topology* (New York Gordon and Breach), 1964.
 Dicke R. H., *Scientific American*. **205**, 84 (1961).
 Dicke R. H., *Phys. Rev. Letts*, **126**, 1580 (1962).
 Dicke R. H., *Gravitation and the Universe. Jayne Lectures for Amer. Phil. Soc. Philadelphia*, 1969.
 Dreicer H., *Phys. Fluids* **7**, 735 (1964).
 Dyson F. G., *Interstellar Communication* (New York) (1963).
 Eddington A. S., *Relat. Theor. in Mathemat. Behandlung* (Berlin) (1925).
 Eddington A. S., *The Internal Constitution of the Star* (Cambridge), (1926).
 Eggen O. J., Greenstein J. L., *Ap. J.* **141**, 83 (1965).
 Ehlers J., *Akad. Wiss. Mainz. Abh. Math. Nat. Kl.*, № 11, 1965.
 Ehlers J., Rosen N. J., *Journ. Frankl. Inst.* **223**, 43 (1937).
 Emden R., *Gaskugeln* (Leipzig), 1907.
 Erez G., Rosen N., *Bull. Res. Council. Israel*, **F8**, 47 (1959).
 Faulkner J., Hoyle F., Narlikar J. V., *Ap. J.* **140**, 1100 (1964).
 Feynman R. P., *Acta Phys. Polon.* **24**, 697 (1963).
 Finkelstein D., *Phys. Rev.* **110**, 965 (1958).
 Finzi A., *Phys. Rev. Letts.* **15**, 599 (1965).
 Finzi A., Wolf R. A., *Ap. J.* **153**, 835 (1968).
 Flamm L., *Zs. f. Phys.* **17**, 448 (1916).
 Fowler W. A., *Rev. Mod. Phys.*, **36**, 545, 1104 (1964a).
 Fowler W. A., Preprint (California Institute of Technology), November (1964b).
 Fowler W. A., Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse (ed. by Robinson J., Schild A., Stchüking E. E.) The Dallas Conference, Dec., 1963; University of Chicago Press, 1965.
 Fowler W. A., Hoyle F., *Ap. J. Suppl.* **9**, 201 (1964).
 Fowler W. A., Burbidge E. M., Burbidge G. R., Hoyle F., *Ap. J.* **142**, 2, 423 (1965).
 Fraley G. C. *Ap. and Spa. Sci.* **2**, 96 (1968).
 Friedman H., *Science* **147**, 3656 (1965).
 Garmire G., Leong C., Sreekantan B. V., *Phys. Rev.* **166**, 1280 (1968).
 Gafrey B. B., *Phys. Rev. D* **1**, 2721 (1970).
 Gold T., *Nature* **218**, 731 (1968).
 Gold T., *Nature* **221**, 25 (1969).
 Goldreich P., *Proc. Austral. Acad. Sci.* **1**, 227 (1969).
 Goldreich P., Julian W. H., *Ap. J.* **157**, 869 (1969).
 Gombas P., *Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik*, Basel, 1950.
 Gordon J. M., *A. J.* **44**, 1146 (1967).
 Greenstein J. L., *Comments Ap. and Spa. Sci.* **1**, 82 (1969).
 Gross D. J., Jackiw R., *Phys. Rev.*, **166**, 1287 (1968).
 Gunn J. E., Ostriker J. P., *Nature* **221**, 454 (1969).
 Gupta S. N., *Proc. Phys. Soc. A* **63**, 681 (1950).

- G u p t a S. N., Proc. Phys. Soc. A-65, 608 (1952).
 H a g e d o r n R., Nuovo Cimento, Suppl. 3, 147 (1965).
 H a g i h a r a Y., Jap. J. Astr. Geoph. 86, 67 (1931).
 H a m a d a T., S a l p e t e r E. E., Ap. J. 134, 683 (1961).
 H a m o u i A., Ann. Inst. Henri Poincaré A10, 195 (1969).
 H a n s e n C. J., T s u r u t a S., Can. J. Phys. 45, 2823 (1967).
 H a n s e n C. J., W h e e l e r J. C., Ap. Spa. Sci. 3, 464 (1969).
 H a r t l e J. B., Ap. J. 161, 111 (1970).
 H a r t l e J. B., Preprint, 1971.
 H a r t l e J. B., S h a r p D., Ap. J. 147, 317 (1967).
 H a r t l e J. B., T h o r n e K. S., Ap. J. 153, 807 (1968).
 H a w k i n g S. W., Ap. J. 145, 544 (1966).
 H a w k i n g S. W., Comm. math. phys. 18, 301 (1970).
 H a w k i n g S. W., Phys. Rev. Lett. 26, 1344 (1971).
 H a w k i n g S. W., P e n r o s e R., Proc. Roy. Soc. London A314, 529 (1970).
 H a y a k a w a S., M a t s u o k a M., Prog. Theor. Phys. Suppl. 30, 204 (1964).
 H a y a s h i C., in Stellar Evolution, ed. Stein R., C a m e r o n A. G. W. (New York: Plenum Press), p. 193, 1966.
 H a y m e s R. S., E l l i s V., F i s h m a n G. J., R u r f o s s J. D., T u c h e r W. H., Ap. J. 151, 49 (1968).
 H e w i s h A., B e l l S. J., P i l k i n g t o n J. D., S c o t t P. F., C o l l i n s R. A., Nature 217, 709 (1968).
 H i l b e r t D., Gött. Nachr. Math. Ann. 92 (1917).
 H o f f m e i s t e r E., K i p p e n h a h n R., W e i g e r t A., Z. Astrophys. 59, 242 (1964a).
 H o f f m e i s t e r E., K i p p e n h a h n R., W e i g e r t A., Z. Astrophys. 60, 57 (1964b).
 H o y l e F., M. N. R. A. S. 120, 256 (1960).
 H o y l e F., F o w l e r W., Ap. J. 132, 565 (1960).
 H o y l e F., F o w l e r W., Nature 197, 533 (1963a).
 H o y l e F., F o w l e r W., M. N. R. A. S. 125, 169 (1963b).
 H o y l e F., F o w l e r W., Preprint (1965).
 H o y l e F., L i t t l e t o n R. A., Proc. Can. Phil. Soc. 35, 405 (1939).
 H o y l e F., F o w l e r W., B u r b i d g e G., B u r b i d g e E. M., Ap. J. 139, 90, (1964).
 H o y l e F., N a r l i k a r J. V., W h e e l e r J. A., Nature 203, 914 (1964).
 H u a n g S. S., Ap. J. 138, 471 (1963).
 H u n d V., Ergebn. Exact. Naturwiss. 15, 189 (1936).
 I b e n I., Ap. J. 140, 1331 (1964).
 I b e n I., Ann. Rev. Astr. and Ap. 5, 571 (1967).
 I n m a n C. L., Ap. J. 141, 187 (1965).
 I s a a c s o n R. A., Phys. Rev. 166, 1263 (1968a).
 I s a a c s o n R. A., Phys. Rev. 166, 1272 (1968b).
 I s r a e l W., Phys. Rev. 164, 1776 (1967).
 I s r a e l W., Commun. Math. Phys. 8, 245 (1968).
 J a c k s o n J. O. Classical Electrodynamics (New York: John Wiley and Sons), 1962.
 K a s h a V., S t e f a n s k i R., Phys. Rev. 172, 1297 (1968).
 K e r r R. P. Phys. Rev. Letts. 11, 237 (1963).
 K e r r R. P., in Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse (ed. by Robinson J., Schild A., Schücking E. E.), Chicago University of Chicago Press 99, 1965.
 K i b b l e T. W., High Energy physics and Elementary Particles (Trieste Summer Seminar), 1965. Печер. переп.
 K i p p e n h a h n R., W e i g e r t A., Zs. f. Ap. 65, 253 (1967).
 K r u s k a l M., Phys. Rev. 119, 1743 (1960).
 K u c h a r K., Czechosl. J. Phys. B18, 435 (1968).

- Langer W. D., Cameron A. J. W., *Ap. and Spa. Sci.* 5, 213 (1969).
 Langer W. D., *Ap. J.* 141, 837 (1965).
 Leacock R. A., Beavers W. J., Daub C. T., *Ap. J.* 151, 1179 (1968).
 Lee T. D., Yang C. N., *Phys. Rev.* 98, 1501 (1955).
 Lemaitre J., *Ann. Soc. Sci. Bruxells* A53, 51 (1933).
 Leung Y. C., Wang C. G., *Nature* 233, № 40, 99 (1971).
 Lorentz H. A., *Theory of electrons*, 2d ed. 1915, (reprinted by Dover Publications, New York, 1952).
 Luyten W. J., *Ap. J.* 116, 283 (1952).
 Lynden-Bell O., *Nature* 223, 690 (1969).
 Lynden-Bell O., Sannit N., *M. N. R. A. S.* 143, 167 (1969).
 May M. M., White R. H., *Phys. Rev.* 141, 1232 (1966).
 Mayer C. V., *N. R. L. Space Research Seminar* (Washington), p. 73 (1968).
 Meltzer D. W., Thorne K. S., *Ap. J.* 145, 514 (1966).
 Mestel L., *M. N. R. A. S.* 119, 223 (1959).
 Mestel L., in *Stellar Structure*, 297 (Chicago, London) (1965).
 Mestel L., Ruderman M., *M. N. R. A. S.* 136, 27 (1967).
 Metzner A. W., *J. Math. Phys.* 4, 1194 (1963).
 Milne E., *Relativity, Gravitation and World-Structure*, Oxford University Press, 1935.
 Minkowski R., *Ann. Rev. Astr. and Ap.* 2, 247 (1964).
 Misner C. Z., *Nature* 214, 40 (1967).
 Morrison R., *ApJ (Letters)* 157, L73 (1969).
 Narlikar J. V., *M. N. R. A. S.* 126, 203 (1963).
 Ne'eman Y., *ApJ* 141, 1303 (1965).
 Nemeth I., Sprung D. W. L., *Phys. Rev.* 176, 1496 (1968).
 Noble L., Scarf F., *Ap. J.* 141, 1479 (1965).
 Nordtvedt K., *Phys. Rev.* 169, 1014 (1968a).
 Nordtvedt K., *Phys. Rev.* 169, 1017 (1968b).
 Omnes A., *Phys. Rev. Letts* 23, 38 (1969).
 Oppenheimer J. K., Snyder H., *Phys. Rev.* 56, 455 (1939).
 Oppenheimer J. R., Volkoff G. M., *Phys. Rev.* 55, 374 (1938).
 Ostriker J. P., Axel L., *Ap. J.* 161, 305 (1970).
 Ostriker J. P., Bodenheimer P., *Ap. J.* 151, 1089 (1968).
 Ostriker J. P., Gunn J. E., *Ap. J.* 157, 1395 (1969a).
 Ostriker J. P., Gunn J. E., *Nature* 223, 813 (1969b).
 Pacini F., *Nature* 216, 567 (1967).
 Pacini F., *Nature* 219, 145 (1968).
 Pacini F., *Nature* 224, 160 (1969).
 Paczinski B., *Acta Astr. Polon.* 16, 231 (1966).
 Papapetrou A., *Proc. Roy. Irish. Acad.* 51, 191 (1947).
 Parker E. N., *Phys. Rev. Letts.* 14, 55 (1965a).
 Parker E. N., *Ap. J.* 141, 1463 (1965b).
 Parker L., *Phys. Rev.* 183, 1057 (1969).
 Pauli W., *Theory of Relativity* [New York, Macmillan (Pergamon)], 1958.
 Русск. перев: Паули В., *Теория относительности*, Гостехиздат, 1947.
 Pauli W., Fierz M., *Proc. Roy. Soc.* 173, 212 (1939).
 Penrose R., *Phys. Rev. Letts.* 14, 57 (1965).
 Penrose R., *Rev. Nuovo Cimento* 1, 252 (1969).
 Peters P. C., Mathews J., *Phys. Rev.* 131, 435 (1963).
 Peyraud P., *J. de Phys.* 29, 88, 306, 872 (1968).
 Piddington J. H., *M. N. R. A. S.* 128, 345 (1964).
 Piddington J. H., Burbidge G. R., *Ap. J.* 151, 483 (1968).
 Prendergast K. H., Burbidge G. R., *Ap. J. (Letts)* 151 L83 (1968).
 Price R., «Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse», preprint, Caltec., Orange Series, 1971.
 Price R., Thorne K. S. *Ap. J.* 155, 163 (1969).

- Poveda A., Woltjer L., A. J. 73, 65 (1968).
 Ramsey W. H., M. N. R. A. S. 110, 325 (1950).
 Rees M. J., Nature, phys. ser., march (1971).
 Rees M. J., Sciamanda W., Ap. J. 147, 353 (1967).
 Reeves H., preprint, 1965.
 Røegge T., Wheeler J. A., Phys. Rev. 108, 1063 (1957).
 Reines R., Woods R. M., Phys. Rev. Letts. 14, 20 (1965).
 Roll P. G., Krotkoy R., Dickerson H., Ann. Phys. 26, 442 (1964).
 Rosenfeld L., Zs. f. Phys. 64, 589 (1930).
 Ruffini R., Wheeler J. A., «Relativistic Cosmology and Space Platforms», in Proceedings of Conference on Space Physics (Paris, ESPO) 1970.
 Salpeter E. E., Ap. J. 121, 161 (1955).
 Salpeter E. E., Ap. J. 134, 669 (1961).
 Salpeter E. E., Ap. J. 140, 796 (1964).
 Sarachik E. S., Schappert G. T., Phys. Rev. D1, 2738 (1970).
 Sargent M. L. W., Judaku J., Ap. J. 134, 777 (1961).
 Savedoff M. P., Ap. J. 138, 291 (1963).
 Saslaw W. C., M.N.R.A.S. 138, 337 (1968).
 Schatzman E., White Dwarfs (Amsterdam), 1958.
 Schatzman E., «Star Evolution» (Academic Press New York), p. 389, 1963.
 Schwarzschild M., «Structure and Evolution of the Stars» (Princeton), 1958. Русск. перев.: Шварцшильд М., Строение и эволюция звезд, ИЛ, 1961.
 Schwarzschild K., Harm R., Ap. J. 129, 637 (1959).
 Shapiro I., Phys. Rev. Letts. 13, 789 (1965).
 Shapiro I., Phys. Rev. Letts. 20, 1265 (1968).
 Shapiro I., Report GR6, Copenhagen, 1971.
 Smith S. F., Havas P., Phys. Rev. 138, 495 (1965).
 Steenbeck M., Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. 5, 625 (1963).
 Steenbeck M., Krause F., Radler R., Ztschr. für Naturforsch. 21a, 369 (1966).
 Stern T. E., M. N. R. A. S. 93, 736, 770 (1933).
 Stothers R., Ap. J. 138, 1085 (1963).
 Stothers R., Simon N., Ap. J. 152, 233 (1968).
 Stothers R., Nature 229, 180 (1971).
 Stover R. W., Moran J. J., Trishka J. W., Phys. Rev. 164, 1599 (1967).
 Struve O., Stellar Evolution (New Jersey: Princeton), 1950. Русск. перев.: Струве О., Эволюция звезд, ИЛ, 1954.
 Sygne J. L., Relativity — The General Theory (Amsterdam), 1960. Русск. перев.: Синг Дж., Общая теория относительности, ИЛ, 1963.
 Takarada K., Sato H., Hayashi C., Progr. Theor. Phys. 36, 504 (1966).
 Thirring W., Ann. Phys. 16, 96 (1961).
 Thorne K. S., in «High Energy Astrophysics», vol. 3. De Witt C., Schatzman E., Veron P., editors (New York, Gordon and Breach), 1967.
 Thorne K. S., Ap. J. 148, 51 (1968).
 Thorne K. S., Ap. J. 158, 1 (1969a).
 Thorne K. S., Ap. J. 158, 997 (1969b).
 Thorne K. S., in «Proceeding of Course 47 of Intern. School of Physics» Enrico Fermi (New York: Academic Press), 1970.
 Thorne K. S., «Nonspherical Gravitational Collapse», preprint (1971a).
 Thorne K. S., Report GR6, Copenhagen, 1971b.
 Thorne K. S., Campolattaro A., Ap. J. 149, 591 (1967).
 Thorne K. S., Campolattaro A., Ap. J. 152, 673 (1968).
 Tolman R. C., Phys. Rev. 35, 875 (1930).
 Tolman R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. 20, 169 (1934a).

- Tolman R. C., «Relativity, Thermodynamics and Cosmology» (Oxford) (1934b).
- Trautman A., in «Perspectives in Geometry and Relativity». (Hoffman B., ed., Indiana Univ. Press. Bloomington, Indiana), 1966.
- Troutman A., Bondi H., Pirani F. A. E., Lectures on General Relativity (N. J. Prentice-Hall), 1965.
- Treder H. J., Int. J. Theor. Phys. 1, 167 (1968).
- Trimble V. L., Thorne K. S., Ap. J. 156, 1013 (1969).
- Tsuruta S., Wright J., Cameron A. G. W., Can. J. Phys. 41, 1895 (1966).
- Tsuruta S., Cameron A. G. W., Can. J. Phys. 43, 2056 (1965).
- Utiyama R., Phys. Rev. 101, 1597 (1956).
- Van Horn H. M., Ap. J. 151, 227 (1968).
- Vishveshvara C. V., J. Math. Phys. 9, 1319 (1968).
- Wald R., Nature 233, 52 (1971).
- Wallerstein G., Phys. Letts. 9, 143 (1962).
- Weber J., Phys. Rev. Letts. 18, 498 (1967).
- Weber J., Phys. Rev. Letts. 20, 1307 (1968).
- Weber J., Phys. Rev. Letts. 22, 1320 (1969).
- Weber J., Phys. Rev. Letts, 25, 180 (1970).
- Weyl H., Ann. Phys. 54, 117 (1917).
- Weyl H., Ann. Phys. 59, 185 (1919).
- Weymann R., Phys. Fluids 8, 2412 (1965).
- Wheeler J. A., Phys. Rev. 97, 511 (1955).
- Wheeler J. A., in «Gravitation and Relativity» (New York), p. 195, 1964.
- Wheeler J. A., Ann. Rev. Astr. and Ap. 4, 393 (1966).
- Wheeler J. A., in «Proceeding of 1967 Battelle Math.- Physics Rencontres», New York: Benjamin W. A., 1968.
- Wildhack W. A., Phys. Rev. 57, 81 (1940).
- Wolf A. M., Burbidge G. R., Ap. J. 161, 419 (1970).
- Woltjer X. L., Blueshifts in Quasi — Stellar Objects, preprint (1966).
- Wyller A. A., Ap. J. 160, 443 (1970).
- Zeibarth K., preprint, Univ. Colorado, 1970.
- Zwicky F., in «Handbuch der Physik», Berlin 51, 766 (1958).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ*)

- Акреция не взаимодействующих частиц 396—398
 — газа при сферической симметрии 398—400
 — — как эволюционный фактор 415—416
 — —, сверхзвуковая 401—404
 — — — и светимость 405—407
- Барионный заряд 179, 210
 «Белые дыры» 139, 441, 458—461
 Белые карлики
 — —, ньютоновская теория 306—308
 — —, образование 341—342, 453—456
 — —, релятивистские эффекты 308—310
 — —, химический состав 342
 — —, эффекты нейтронизации 310—313
- Вектоны 224
 Верхний предел температуры 236—237
- Геодезическая линия 28
 Геометродинамика 86—87
 Геоны 459
 Гравитационное самозамыкание 137, 385
 Гравитационные волны 53
 — —, взаимодействие с материей 79—84
 — —, излучение 52, 59, 130—134
 — —, — при коллапсе несимметричных тел 167
 — —, — пульсаров 426—428
 — —, источники 63—64
 — —, поляризация 56, 61
 — —, способы регистрации 58, 73—75
- Гравитационные волны, торможение при излучении 64—73
 Гравитационный радиус 111
 Гравитоны 101—103
- Давление 178
 — вырожденного электронного газа 189—194
 — гравитационное 180
 — идеального нейтронного газа 213, 215
 — кинетическое 183, 221
 — магнитного поля 181—182
 — магнитотурбулентное 222
 — нейтронного ферми-газа 207
 — электромагнитного поля 220—223
- Депозиция 357
 Дефект массы 321
 — — неполный 322
 — — полный гравитационный 321
- «Застывшие» звезды 261, 383—387
 — —, методы детектирования 457—458
- Извлечение энергии из «черных дыр» с вращением 462—464
 Импульсия 351, 353
 Индекс политропы 270
- Кварки 218—220
 Ковариантные и контрвариантные компоненты вектора 26
 Коллапс гравитационный 137, 183—187
 Красное смещение гравитационное 117, 126
 Кривизна гауссова 24, 38, 113
 — риманова 25
 Кристаллизация при высоких плотностях 341, 434

*) Предметный указатель дополняет оглавление, не повторяя его.

Межзвездный газ 395
 Метрика аксиально-симметричного поля 152
 — Керра 157
 — Крускала 142—150
 — Рейсснера — Нордстрема 172
 — Шварцшильда внешняя 110
 — — внутренняя 112
 Молекулярный вес на один электрон 188

Нейтронизация вещества 203
 — —, влияние на устойчивость белых карликов 310—313, 335—338
 — — при коллапсе 387—390
 Нейтронные звезды
 — —, внутренняя структура 377
 — —, излучение гравитационных волн 381—382
 — —, — нейтрино 378, 379
 — —, — фотонов 378
 — —, максимальная масса 319, 440
 — —, минимальная масса 316, 440
 — —, образование 367
 — —, основные свойства 438—440
 — —, остывание 377—380
 — —, пульсации 379
 — —, радиус 320, 440
 — —, сверхпроводимость 434—435
 — —, сверхтекучесть 377, 434—436
 — —, температура поверхности 378
 — —, устойчивость 323—326
 — —, энергия связи 440

Отрицательная теплоемкость звезды 272, 339, 343, 353—354

Плотность массы покоя 291
 — числа барионов 291
 Поверхность Шварцшильда 153—157
 Показатель адиабаты
 — — вырожденного электронного газа 191
 — — идеального нейтронного газа 318—319
 — — излучения 242
 — — нейтрального газа и плазмы 240
 — — плазмы с излучением 243, 247, 283—285
 Полузамкнутый мир 148
 Постоянная тяготения Эйнштейна 34
 Принцип изотопической инвариантности 208
 — пропорциональности инертной и гравитационной массы 11, 105—106

Пульсары, источники гравитационного излучения 425—428
 —, образование 260—261, 373—374
 —, природа 420
 —, ускорение частиц 430—433
 —, электромагнитное излучение 420—425, 428—433
 Пульсационная неустойчивость звезды 347—349

Равновесие гидродинамическое (гидростатическое) 267, 291
 — — вращающейся звезды в ОТО 297—306
 — — невращающейся звезды в ОТО 289—297
 — звезды с положительной энергией 316—317, 326—329
 — ограниченное 232—233
 — полное термодинамическое 232
 — тепловое 267
 Резонансы 235

Свертывание тензора 27
 «Серая дыра» 148, 459
 Система отсчета 19, 20
 — — инерциальная 15
 — — Леметра 135
 — — локально-галилеева 32
 — — неинерциальная 17
 — — нестатическая 19
 — — Шварцшильда 110
 Скалярная теория тяготения 87
 След тензора 27
 Сфера Шварцшильда 112

Температуры верхний предел 236—237
 Тензор деформации 31
 — кривизны 33
 — Риччи 33
 —, свертывание 27
 —, след 27
 — угловой скорости вращения 29
 — фундаментальный метрический 27
 — Эйнштейна 66
 — электромагнитного поля 25
 — энергии-импульса электромагнитного поля 34
 — — вакуума 43
 Теорема вириала 273
 Тепловая неустойчивость звезды 353, 354

Уравнение Саха 239
 — состояния ионизованного газа 238—239

Уравнение состояния истинно нейтрального вещества 257
 — — нерелятивистского одноатомного газа 238
 — — предельно жесткое 223—226
 — — смеси плазмы и излучения 243
 — — холодного вещества 184—223
 — — частично ионизованного газа 240
 — — электронно-позитронного газа 247

Фундаментальные длина, время и масса 87

Химическая постоянная 238
 Химический потенциал вещества 293
 Хронометрические инварианты 31

«Черные дыры» 137, 139
 — —, вид коллапсирующей звезды 384—387
 — — и гравитационный захват частиц и излучения 128—137
 — — и коллапс 137, 164—177, 390—393
 — —, испускание нейтрино при образовании 387—390

«Черные дыры» как финал звездной эволюции 259—266
 — — с вращением 157—160, 162, 167
 — —, способы обнаружения 408—412, 441—450

Эддингтоновский предел светимости 413

Электростатический потенциал звезд 418

Элементарные частицы 218—220

Энергия вакуума 40

— вырожденных релятивистских электронов 193, 333

— Ферми 187

— электростатическая 193

Энтальпия электронного газа 196

Энтропия безразмерная 253—255

— вблизи ультрарелятивистского вырождения электронов 334

— излучения 241

— нейтрино 255

— нерелятивистского одноатомного газа 238, 254

— удельная 211, 238

— электронно-позитронных пар 245
 Эргосфера 159

АЛФАВИТНЫЙ СПИСОК АВТОРОВ ИНОСТРАННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

Адлер — Adler
 Айзаксон — Isaacson
 Аймс — Ames
 Аксель — Axel
 Аллер — Aller
 Андерс — Anders
 Андерсон — Anderson
 Аппенцеллер — Appenzeller
 Арнет — Arnett
 Ауэр — Auer

Блау — Blaauw
 Бойер — Boyer
 Бонди — Bondi
 Боннор — Bonnor
 Борст — Borst
 Бранс — Brans
 Брилл — Brill
 Брукнер — Bruekner
 Бурк — Burke
 Бэтчелор — Batchelor

Бааде — Baade
 Баглин — Baglin
 Бакал — Bahcall
 Барбаро — Barbaro
 Бардин — Bardeen
 Барк — Burke
 Бейм — Baym
 Беливанте — Belinfante
 Белл — Bell
 Беллами — Bellamy
 Бербидж — Burbidge
 Берд — Bird
 Бернер — Börner
 Бете — Bethe
 Биркгоф — Birkhoff

Валерштейн — Wallerstein
 Вакулер — de Vaucouleur
 Ван-Хорн — Van-Horn
 Ванг — Wang
 Вебер — Weber
 Вейгерт — Weigert
 Вейль — Weyl
 Веймани — Weymann
 Виллер — Wyller
 Вишневара — Vishveshvara
 Волков — Volkoff
 Волчер — Woltjer
 Вольф — Wolf
 Вольф — Wolfe
 Вуд — Wood

АЛФАВИТНЫЙ СПИСОК

Ганн — Gunn
 Гармайер — Garmire
 Гаутроу — Gautreau
 Гильберт — Hilbert
 Годфрей — Gadfrey
 Голд — Gold
 Голдрейх — Goldreich
 Гомбаш — Gombas
 Гордон — Gordon
 Гринстейн — Greenstein
 Гросс — Gross
 Гупта — Gupta

Дайсон — Dyson
 Дас — Das
 Де Витт — De Witt
 Де Филис — De Filice
 Джексон — Jackson
 Дикке — Dicke
 Дойч — Deutsch
 Драйцер — Dreicer
 Дэвис — Davis

Зеберс — Zeibarth

Ибен — Iben
 Израэль — Izrael
 Инман — Inman

Камерон — Cameron
 Камполаттаро — Campolattaro
 Кануто — Canuto
 Картер — Carter
 Каша — Kasha
 Керр — Kerr
 Киббл — Kibble
 Киппенхан — Kippenhahn
 Клиффорд — Clifford
 Клэйтон — Clayton
 Колгейт — Colgate
 Коллинз — Collins
 Кокс — Cox
 Коэн — Cohen
 Краузе — Krause
 Кристи — Christy
 Кристоуло — Christodoulou
 Кротков — Krotkov
 Крускал — Kruskal
 Кучер — Kuchar

Лангер — Langer
 Лейн — Lane
 Лейтен — Luyten
 Леметр — Lemaitre
 Леунг — Leung
 Ли — Lee
 Ликок — Leacock
 Линденбелл — Lynden-Bell

Линдквист — Lundquist
 Литлтон — Litlton
 Лоренц — Lorentz

Майер — Mayer
 Мак-Ки — Mc Kee
 Мак-Лафлин — McLaughlin
 Мацуоки — Matsuoka
 Мей — May
 Мельтцер — Meltzer
 Местель — Mestell
 Метцнер — Metzner
 Мизнер — Misner
 Милн — Milne
 Минковский — Minkowski
 Мок — Mock
 Моррисон — Morrison
 Мэтьюс — Mathews

Нарликар — Narlicar
 Нееман — Neeman
 Немез — Nemeth
 Нобль — Noble
 Нордтведт — Nordtvedt

Омнес — Omnes
 Оппенгеймер — Oppenheimer
 Острикер — Ostriker

Пайнс — Pains
 Папапетру — Papapetrou
 Паркер — Parker
 Паули — Pauli
 Пачини — Pacini
 Пачинский — Paczinski
 Пенроуз — Penrose
 Петерс — Peters
 Петик — Pethick
 Пиддингтон — Piddington
 Пирапи — Pirani
 Поведа — Poveda
 Прайс — Price
 Прендергаст — Prendergast

Рамзай — Ramsey
 Редже — Regge
 Редлер — Radler
 Рейнс — Reines
 Ривс — Reeves
 Рис — Rees
 Розен — Rosen
 Розенфельд — Rosenfeld
 Ролл — Roll
 Рудерман — Ruderman
 Руффини — Ruffini

Сальпетер — Salpeter
 Сарачик — Sarachik

Сарджент — Sargent
 Саслау — Saslaw
 Сато — Sato
 Симон — Simon
 Синг — Synge
 Скаф — Scarf
 Скотт — Scott
 Смит — Smith
 Снайдер — Shyder
 Стерн — Stern
 Стефанский — Stefanski
 Стозерс — Stothers
 Стоувер — Stover
 Струве — Struve
 Стюарт — Stewart

Такарада — Takarada
 Тейлер — Tayler
 Тирринг — Thirring
 Толмен — Tolman
 Торн — Thorne
 Траутман — Trautman
 Тредер — Treder
 Тримбл — Trimble

Уайт — White
 Уилдхак — Wildhack
 Уилер — Wheeler
 Ульрих — Ulrich
 Утияма — Utiyama

Фаулер — Fowler
 Фейнман — Feynman
 Финкельштейн — Finkelstein
 Финци — Finzi
 Фирц — Fierz
 Флам — Flamm
 Фолькнер — Faulkner
 Фридман — Freidman
 Фрэйли — Fraley

Хавац — Havas
 Хэгедорн — Hagedorn
 Хаджихара — Hagihara
 Хамада — Hamada

Хамуи — Hamoui
 Хансен — Hansen
 Харм — Harm
 Хартли — Hartle
 Хаякава — Hayakawa
 Хаяши — Hayashi
 Хеймс — Haymes
 Хойл — Hoyle
 Хокинг — Hawking
 Хоффмейстер — Hoffmeister
 Хуанг — Huang
 Хунд — Hund
 Хьюиш — Hewish

Цвикки — Zwicky
 Цурута — Tsuruta

Чандрасекар — Chandrasekhar
 Чاو — Chau
 Чарман — Charman
 Чиу — Chiu

Шайн — Shajn
 Шама — Sciamia
 Шапиро — Shapiro
 Шарп — Sharp
 Шацман — Schatzman
 Шварцшильд — Schwarzschild
 Шпрунг — Sprung
 Штеенбек — Steenbeck

Эгген — Eggen
 Эддингтон — Eddington
 Эйнштейн — Einstein
 Элерс — Ehlers
 Эмден — Emden
 Эрец — Erez
 Эспозито — Esposito

Юдаку — Judaku
 Юлиан — Julian

Якиф — Jackiw
 Янг — Yang