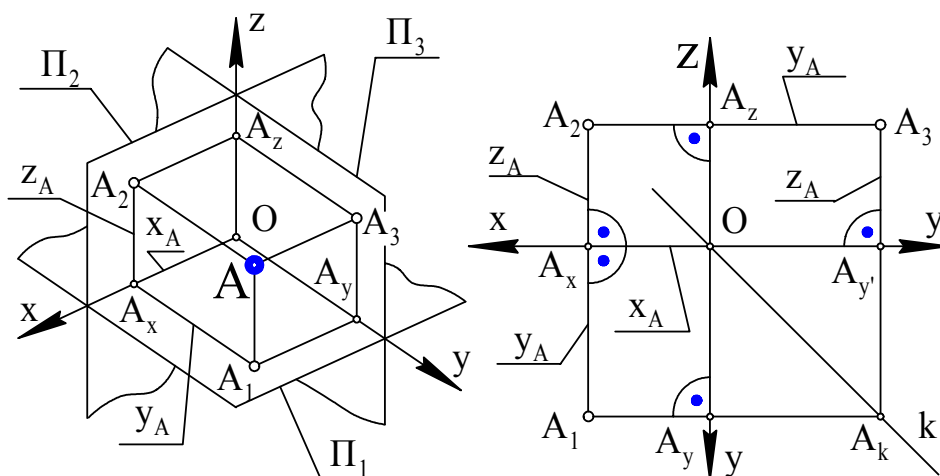


Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Омский государственный технический университет

Ляшков А.А., Куликов Л.К., Панчук К.Л.

Начертательная геометрия

Конспект лекций



УДК 514.18
ББК 22.151.
Л 99

Рецензенты:

В.Я. Волков, д-р техн. наук, проф. СибАДИ,
Ю. Ф. Савельев, канд. техн. наук, доцент ОмГУПС.

Л 99 Ляшков А.А.
Начертательная геометрия: Конспект лекций / А.А. Ляшков,
Л.К.Куликов, К.Л. Панчук. – Омск: Изд – во ОмГТУ, 2005. – 108 с.

В пособии рассмотрены следующие темы курса начертательной геометрии: комплексные чертежи фигур; позиционные задачи; метрические задачи; развертки поверхностей; ортогональная аксонометрия. Приведены примеры решения основных задач и даны условия задач для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей вечерней и заочной форм обучения технических вузов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ОмГТУ.

УДК 514.18
ББК 22.151.3

© Авторы, 2005

© Омский государственный технический
университет, 2005

ПРЕДИСЛОВИЕ

Начертательная геометрия входит в число дисциплин, составляющих основу инженерного образования. Методы начертательной геометрии находят широкое применение в науке и технике. Изучение данной дисциплины способствует развитию пространственного воображения и навыков логического мышления, необходимых инженеру любой специальности.

Начертательная геометрия – это раздел геометрии, в котором пространственные фигуры изучаются с помощью их изображений на плоскости (чертежей). Разработка методов построения и чтения чертежей, решения геометрических и технических задач является предметом изучения начертательной геометрии. В начертательной геометрии используются графические методы решения задач, поэтому к чертежам предъявляются особые требования – обратимость, точность, наглядность и другие.

Правила построения изображений фигур основано на методе проецирования. Наиболее распространенными в начертательной геометрии являются чертежи, полученные при проецировании фигур на две плоскости – комплексные чертежи в системе двух плоскостей проекций. Под фигурой будем понимать любое множество точек. Изображением точки, которая является элементом фигуры, является пара точек – две связанные между собой проекции точки. Каждой точке пространства соответствует единственная пара точек плоскости чертежа и каждой паре точек плоскости чертежа соответствует единственная точка пространства. Пара точек плоскости чертежа является геометрической моделью точки пространства. Изображения фигур пространства, получаемые методами начертательной геометрии, являются геометрическими моделями этих фигур на плоскости. Между фигурой и ее изображением устанавливается строгая геометрическая связь, что позволяет судить о форме и размерах фигуры по ее изображению.

Задачи в начертательной геометрии обычно делятся на позиционные (задачи на определение общих элементов заданных фигур), метрические (задачи на определение значений геометрических величин – длин отрезков, размеров углов и т.д.) и конструктивные (задачи на построение фигур, удовлетворяющих заданным условиям). Знание элементарной геометрии, методов решения позиционных и метрических задач дает возможность решать и конструктивные задачи.

В данном учебном пособии рассмотрены основные темы учебного курса начертательной геометрии: комплексные чертежи фигур; преобразования комплексного чертежа; позиционные и метрические задачи; развертки поверхностей; аксонометрические проекции.

При подготовке учебного пособия авторы распределили между собой работу следующим образом: А.А. Ляшковым написаны параграфы 5, 10, 11, 12; Л.К. Куликовым – предисловие и параграфы 1, 2, 3, 4, 14, 15; К.Л. Панчуком – параграфы 6, 7, 8, 9, 13.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

$A, B, C, D, E \dots$ или $1, 2, 3, 4, 5 \dots$ – точки в пространстве;

a, b, c, d, e, \dots – прямые и кривые линии в пространстве;

$\Delta, \Phi, \Gamma, P, \Sigma \dots$ – плоскости и поверхности в пространстве;

$Oxyz$ – система координат в пространстве;

Ox, Oy, Oz – оси координат;

$=$ – равенство, совпадение;

\cap – пересечение ($b \cap \Sigma = A$ – прямая b пересекает плоскость Σ в точке A , аналогичная запись будет для кривой и поверхности, однако по тексту понятно, о каких фигурах идет речь);

$//$ – параллельность ($b // d$ – прямая b параллельна прямой d);

$\cdot/$ – скрещиваемость ($m \cdot/ n$ – прямые m и n скрещиваются);

\perp – перпендикулярность ($e \perp \Sigma$ – прямая e перпендикулярна плоскости Σ);

\in – принадлежность элемента множества данному множеству ($A \in b$ – точка A принадлежит линии b);

\subset – принадлежность подмножества множеству ($n \subset \Sigma$ – линия принадлежит поверхности);

$\neq, \notin, \not\subset, \dots$ – знаки, обозначающие отрицание указанных выше отношений;

\rightarrow – отображение ($A \rightarrow A_1$ – точка A отображается в точку A_1);

\Rightarrow – знак логического следствия;

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций (Oxy);

Π_2 – фронтальная плоскость проекций (Oxz);

Π_3 – профильная плоскость проекций (Oyz);

h – горизонталь (прямая, параллельная плоскости Π_1)

f – фронталь (прямая, параллельная плоскости Π_2);

p – профильная прямая (прямая, параллельная профильной плоскости Π_3);

$A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \dots$ или $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1 \dots$ – проекции точек на Π_1 ;

$A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 \dots$ или $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2 \dots$ – проекции точек на Π_2 ;

$A_3, B_3, C_3, D_3, E_3 \dots$ или $1_3, 2_3, 3_3, 4_3, 5_3 \dots$ – проекции точек на Π_3 ;

$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \dots$ – проекции прямых или кривых линий на Π_1 ;

$a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, \dots$ – проекции прямых или кривых линий на Π_2 ;

$a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, \dots$ – проекции прямых или кривых линий на Π_3 ;

$\Delta_1, \Phi_1, \Gamma_1, P_1, \Sigma_1 \dots$ – проекции плоскостей и поверхностей на Π_1 ;

$\Delta_2, \Phi_2, \Gamma_2, P_2, \Sigma_2 \dots$ – проекции плоскостей и поверхностей на Π_2 ;

$\Delta_3, \Phi_3, \Gamma_3, P_3, \Sigma_3 \dots$ – проекции плоскостей и поверхностей на Π_3 ;

$\Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \dots$ – новые (дополнительные) плоскости проекций;

x_{14}, x_{25}, \dots – новые оси ($x_{14} = \Pi_1 \cap \Pi_4$, $x_{25} = \Pi_2 \cap \Pi_5$) или x_1, x_2, x_3, \dots , если принадлежность осей плоскостям проекций не вызывает сомнений;



– возможные варианты графического обозначения прямого угла на чертеже.

1. ОРТОГОНАЛЬНОЕ (ПРЯМОУГОЛЬНОЕ) ПРОЕКЦИРОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Для обозначения точек будем использовать прописные буквы латинского алфавита или арабские цифры, для обозначения линий – строчные буквы латинского алфавита, для обозначения поверхностей (плоскостей) – прописные буквы греческого алфавита. Возможны и другие обозначения, которые будут введены в дальнейшем.

Возьмем в пространстве произвольную плоскость Π_1 (плоскость проекций). Пусть точка A расположена вне этой плоскости (рис. 1.1). Через точку A проведем прямую s , перпендикулярно плоскости проекций Π_1 ($s \perp \Pi_1$). Прямая s называется проектирующей прямой. Найдем точку A_1 пересечения прямой s с плоскостью Π_1 . Точка A_1 называется ортогональной или прямоугольной проекцией точки A на плоскость Π_1 . Процесс получения точки A_1 называется ортогональным или прямоугольным проектированием точки A на плоскость Π_1 .

Если точки расположены на одной проектирующей прямой, то ортогональные проекции этих точек совпадают ($C_1 = D_1$ на рис. 1.1). Такие точки называются конкурирующими.

Ортогональной проекцией фигуры называется множество ортогональных проекций всех точек этой фигуры. На рис. 1.1 ортогональной проекцией кривой m является кривая m_1 . Для получения m_1 необходимо построить проекцию каждой точки линии m . Прямые, проектирующие точки кривой на плоскость, образуют проектирующую поверхность Δ . На рис. 1.1 показано только несколько таких проектирующих прямых, принадлежащих поверхности Δ .

Рассмотрим основные свойства ортогонального проектирования.

1. Точка проектируется в точку (проекцией точки является точка). Если точка принадлежит плоскости проекций, то точка и ее проекция совпадают (точка проектируется сама в себя). Это следует из определения проектирования.

2. Прямая, в общем случае, проектируется в прямую. Прямая, перпендикулярная плоскости проекций, проектируется в точку.

Линия m_1 (рис. 1.1) есть линия пересечения проектирующей поверхности Δ и плоскости проекций Π_1 . Если вме-

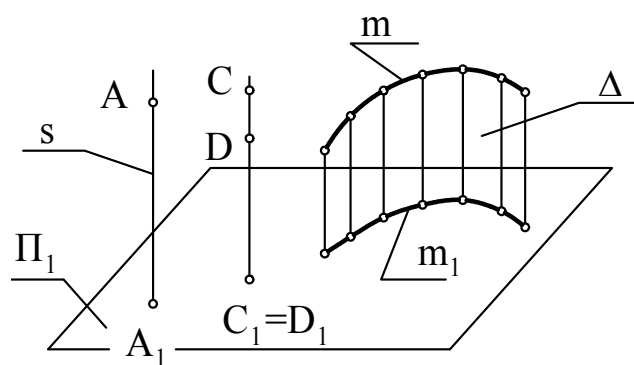


Рис. 1.1

сто кривой m взять прямую, то поверхность Δ будет плоскостью, а линия m_1 , как линия пересечения двух плоскостей, будет прямой линией.

Таким образом, прямая линия, не перпендикулярная плоскости проекций, проектируется в прямую линию.

Для любой точки прямой, перпендикулярной плоскости проекций, сама эта прямая и является проектирующей прямой, поэтому проекции всех точек совпадут, т.е. прямая в этом случае проектируется в точку.

3. Если точка принадлежит прямой, то ее проекция принадлежит проекции прямой.

Проекцией прямой является множество проекций всех ее точек, в том числе и упомянутой в этом свойстве точки.

4. Пересекающиеся прямые в общем случае проецируются в пересекающиеся прямые.

Это легко доказать, если для точки пересечения прямых применить свойство 3. В частном случае проекции пересекающихся прямых могут совпадать или одна из прямых может проецироваться в точку, принадлежащую проекции другой прямой.

5. Параллельные прямые в общем случае проецируются в параллельные прямые.

Проецирующая поверхность Δ (рис.1.1) для прямой будет плоскостью и называется проецирующей плоскостью. Проецирующие плоскости у параллельных прямых параллельны и пересекаются плоскостью проекций по параллельным прямым (проекциям). В частном случае проекцией параллельных прямых могут быть две точки или совпавшие прямые.

6. Отрезок проецируется в отрезок. Отрезок, перпендикулярный плоскости проекций, проецируется в точку. Длина проекции отрезка равна длине отрезка, умноженной на косинус угла наклона отрезка к плоскости проекций (при проецировании на Π_1 : $|A_1B_1| = |AB| \cos \alpha$).

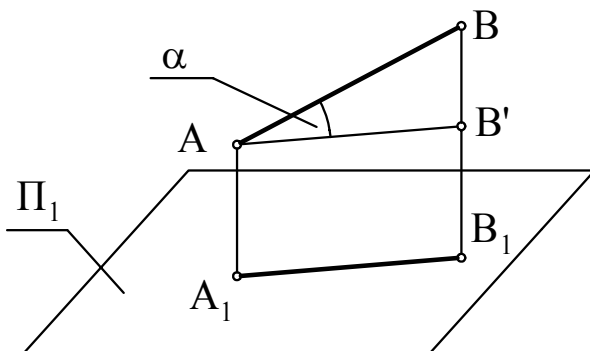


Рис. 1.2

Поскольку прямая проецируется в прямую, то и часть прямой (отрезок) проецируется в часть прямой (отрезок). На рис.1.2 отрезок AB проецируется в отрезок A_1B_1 . Отрезок AB' проведен параллельно отрезку A_1B_1 ($AB' \parallel A_1B_1$). Из прямоугольника $A_1AB'B_1$ и прямоугольного треугольника ABB' имеем $|A_1B_1| = |AB'| = |AB| \cos \alpha$. Длина проекции отрезка меньше длины отрезка ($\alpha \neq 0$) или равна длине отрезка ($\alpha = 0$). Из этого свойства

следует следующее свойство ортогонального проецирования.

7. Отрезок, параллельный плоскости проекций, проецируется на нее в параллельный и равный себе отрезок.

8. Отношение длин отрезков AB и CD , лежащих на параллельных прямых или на одной прямой, при проецировании не меняется.

Угол наклона отрезков, упомянутых в этом свойстве, к плоскости проекций одинаков, поэтому $|A_1B_1| : |C_1D_1| = |AB| \cos \alpha : |CD| \cos \alpha = |AB| : |CD|$.

9. Фигура, принадлежащая плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируется на плоскость проекций в равную ей фигуру (в натуральную величину).

Любой отрезок проецируемой фигуры параллелен плоскости проекций ($\alpha = 0$) и проецируется в равный ему отрезок (длина проекции отрезка равна дли-

не отрезка). Это значит, что и вся фигура проецируется в равную ей фигуру или натуральную величину.

10. Если две плоскости проекций параллельны, то проекции любой фигуры на эти плоскости равны.

Угол наклона любого отрезка фигуры к этим плоскостям проекций одинаков вследствие их параллельности. Поэтому отрезок, соединяющий две любые точки фигуры, будет проецироваться на эти плоскости в равные отрезки. Это значит, что любая фигура будет проецироваться на параллельные плоскости в равные фигуры.

11. Величина проекции угла определяется по формуле

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\varphi - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \quad (1.1)$$

Угол ВАС проецируется в угол $B_1A_1C_1$ (рис. 1.3). Точки В и С – это точки пересечения сторон угла с плоскостью проекций, поэтому они проецируются сами в себя. Вывод формулы основан на использовании теоремы косинусов для стороны ВС в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$.

При изучении свойств ортогонального проецирования рекомендуется выполнять рисунки типа рис.1.1 для каждого свойства и пытаться представить себе фигуры в пространстве. Для понимания всех вопросов начертательной геометрии необходимо мысленно представлять фигуры и плоскости проекций в пространстве.

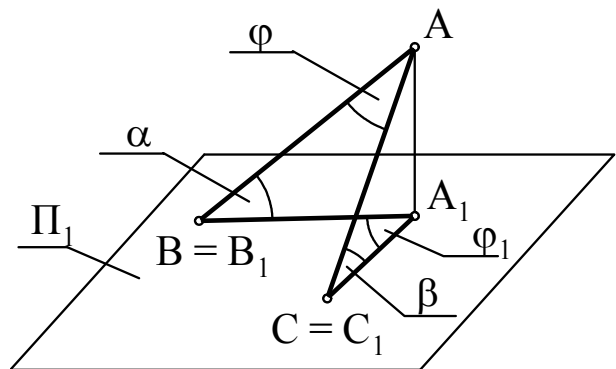


Рис. 1.3

Кроме ортогонального проецирования существуют центральное, косоугольное и другие виды проецирования. В данном пособии используется только ортогональное проецирование, поэтому в дальнейшем вид проецирования указывать не будет.

2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ

Изображение фигуры, полученное при проецировании фигуры на плоскость, дает информацию о фигуре. Однако эта информация является неполной. По изображению на плоскости нельзя восстановить фигуру и ее положение в пространстве, т.е. чертеж, содержащий одну проекцию фигуры, необратим. Действительно, по проекции A_1 (рис. 1.1) найти точку А в пространстве невозможно, так как по проекции нельзя найти расстояние точки А до плоскости Π_1 . По проекции отрезка CD (точка $C_1 = D_1$) найти длину этого отрезка невозможно. Одним из методов, позволяющих добиться обратимости чертежа, является увеличение числа плоскостей проекций.

2.1. Комплексный чертеж точки

Рассмотрим проецирование точки на три и две плоскости проекций. В пространстве зададим прямоугольный параллелепипед $AA_2A_zA_3A_1A_xOA_y$ (рис. 2.1). Свойства этой фигуры известны из курса геометрии средней школы: ребра, выходящие из одной вершины, перпендикулярны друг другу; каждая грань – прямо-

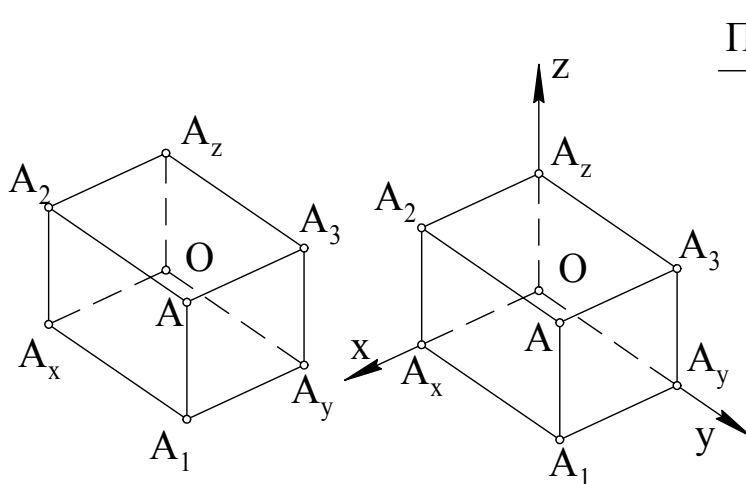


Рис. 2.1

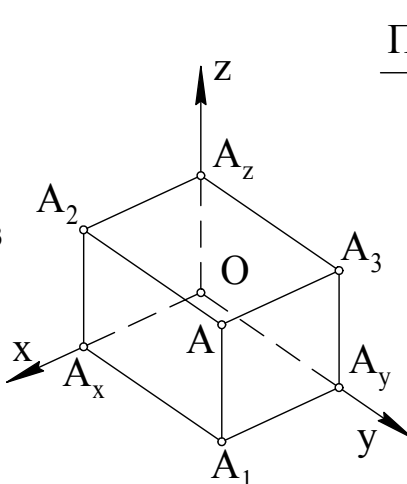


Рис. 2.2

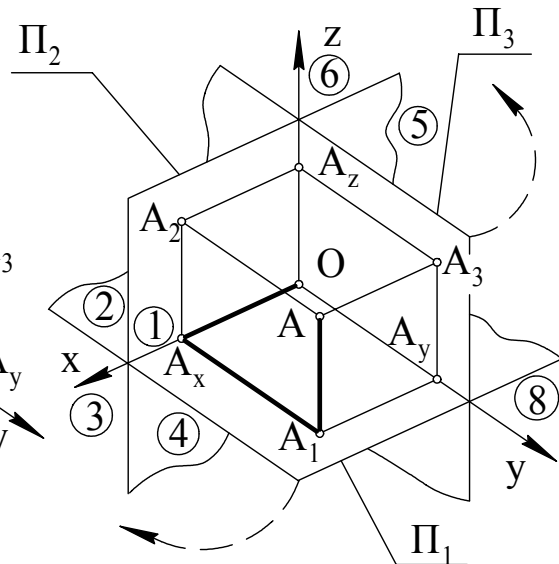


Рис. 2.3

угольник; любое ребро параллельно трем ребрам и перпендикулярно восьми ребрам; параллельные ребра имеют одинаковую длину.

Через ребра, выходящие из вершины O , проведем оси x, y, z (рис. 2.2). Система $Oxyz$ является декартовой системой координат (оси перпендикулярны, единица измерения одинакова по всем осям, точка O – начало координат).

Через грани, проходящие через точку O , проведем плоскости Π_1, Π_2, Π_3 (рис. 2.3). Тогда оси x и y принадлежат плоскости Π_1 (горизонтальная плоскость проекций), оси x и z принадлежат Π_2 (фронтальная плоскость проекций), оси y и z принадлежат Π_3 (профильная плоскость проекций). Пространство делится плоскостями проекций Π_1, Π_2 и Π_3 на восемь частей – октантов. Номера их показаны на рис. 2.3.

Пусть точка A является точкой пространства, для которой мы хотим построить комплексный чертеж. Тогда, ортогонально проецируя точку A на Π_1 , получим точку A_1 . Действительно, точка A_1 принадлежит Π_1 , ребро AA_1 перпендикулярно плоскости Π_1 , т. е. A_1 – ортогональная проекция точки A на плоскость Π_1 . Точка A_1 – горизонтальная проекция точки A . Ортогонально проецируя точку A на Π_2 , получим A_2 (фронтальная проекция точки A), ортогонально проецируя точку A на Π_3 , получим A_3 (профильная проекция точки A). Доказательство такое же, как и для проекции A_1 . Обратим внимание на то, что при проецировании точки на две плоскости проекций фигура $AA_1A_xA_2$ – прямоугольник, плоскость которого перпендикулярна оси Ox .

Безразмерное число, по абсолютной величине равное расстоянию от точки A до плоскости проекций и взятое со знаком, называется координатой точки. Так,

Будем рассматривать только те точки и линии, которые расположены в плоскостях проекций и выполним повороты плоскостей Π_1 и Π_3 вокруг осей x и y соответственно до совмещения с плоскостью Π_2 . Направления поворотов на рис. 2.3 показаны штриховыми линиями. Плоскость Π_2 является плоскостью чертежа. После поворота оси координат займут положение, показанное на рис. 2.4.



Ось y , двигаясь с плоскостью Π_1 попадает на ось z , а двигаясь с плоскостью Π_3 , попадает на ось x . Это второе положение оси y обозначим y' . Достраивая ребра параллелепипеда, расположенные в плоскостях проекций, получим рис. 2.5. Поскольку ребра параллелепипеда, проходящие через вершину A_x , взаимно перпендикулярны, то получим, что A_2A_x и A_xA_1 расположены на одной прямой, перпендикулярной оси x . Аналогично отрезки A_2A_z и A_zA_3 расположены на одной прямой, перпендикулярной оси z . Прямые (A_1A_2) и (A_2A_3) называются линиями проекционной связи (иногда под линиями проекционной связи понимают соответствующие отрезки этих прямых).

На рис. 2.5 обозначены координатные отрезки x_A , y_A , z_A . Для того чтобы обеспечить линейную связь между A_1 и A_3 , введем прямую k (постоянная прямая чертежа). Ломаную $A_1A_kA_3$ (или две пересекающиеся прямые A_1A_k и A_kA_3) будем считать линией проекционной связи для A_1 и A_3 .

Таким образом, точке A пространства соответствует изображение на плоскости, состоящее из трех проекций A_1 , A_2 , A_3 , связанных между собой линиями проекционной связи, которое называется комплексным чертежом точки A в системе $(\Pi_1\Pi_2\Pi_3)$. Этот чертеж обратим, так как на нем присутствуют все три координатных отрезка, что устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и их изображениями на плоскости.

В курсе черчения, при изображении предметов на чертеже, горизонтальная проекция называется видом сверху, фронтальная – видом спереди, профильная – видом слева.

Если известны A_1 и A_2 , то A_3 можно построить. Достаточно провести через A_2 линию проекционной связи перпендикулярно оси z и через A_1 – ломаную линию проекционной связи. Пересечение этих линий и будет точкой A_3 . Кроме того, на чертеже, содержащем только A_1 и A_2 , присутствуют все координатные отрезки, т. е. такой чертеж тоже обратим. Изображение точки A , состоящее из проекций A_1 и A_2 , связанных между собой линией проекционной связи, называется комплексным чертежом точки A в системе $(\Pi_1\Pi_2)$ или комплексным чертежом. При получении такого чертежа плоскость Π_3 не вводится. Пространство двумя плоскостями Π_1 и Π_2 делится на четыре части – четверти. Номера четвертей совпадают с номерами первых четырех октантов.

Для построения комплексного чертежа точки $A(x_A, y_A, z_A)$ необходимо построить по координатам $A_1(x_A, y_A)$ и $A_2(x_A, z_A)$. Если рассматривается комплексный чертеж в системе $(\Pi_1\Pi_2\Pi_3)$, то можно по координатам построить $A_3(y_A, z_A)$, при этом используется ось y' . Можно A_3 построить и по линиям проекционной связи. При откладывании координатных отрезков на отрицательных полуосях необходимо обратить внимание на то, что отрицательные полуоси одних осей совпадают с положительными полуосями других осей.

На рис. 2.6 приведены комплексные чертежи в системе $(\Pi_1\Pi_2\Pi_3)$ точек $A(3; 4; 2)$ и $B(2; 3; -2)$, $C(-1; 0; 3)$. Единица измерения помечена штрихами на координатных отрезках. Точка A находится в первом октанте, точка B – в четвертом октанте, точка C принадлежит плоскости Π_2 . О точке C можно сказать, что она принадлежит пятому и шестому октантам одновременно. На рис. 2.7 приведены комплексные чертежи в системе $(\Pi_1\Pi_2)$ точек $K(4; 2; 2)$ и $L(5; -3; 4)$, $M(6; -2; -3)$, $N(1; 3; -5)$, $F(-2; 3; 4)$. Точки K и F находятся в первой четверти, точка L – во второй, точка M – в третьей, точка N – в четвертой четверти.

Принадлежность точки определенной четверти или октанту можно выявить по знакам координат x , y , z этой точки. Для точек каждой четверти или октанта характерны определенные знаки координат. Можно представить координатные плоскости, оси координат (рис. 2.3) и мысленно построить координатную ломаную точки (OA_xA_1A на рис. 2.3) и увидеть в какой четверти или октанте находится точка.

Знаки координат x, y, z в октантах: 1(+; +; +); 2(+; -; +); 3(+; -; -); 4(+; +; -); 5(-; +; +); 6(-; -; +); 7(-; -; -); 8(-; +; -).

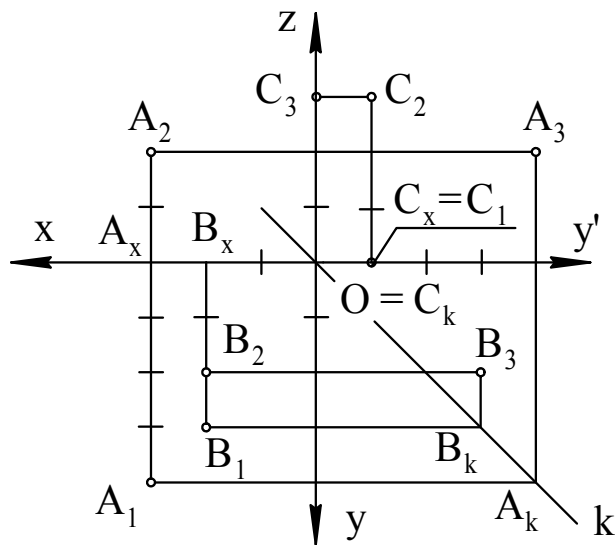


Рис. 2.6

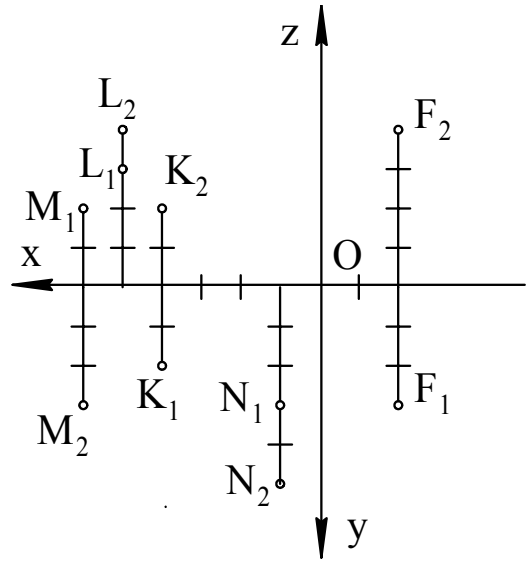


Рис. 2.7

Знаки координат в четвертях: 1(±; +; +); 2(±; -; +); 3(±; -; -); 4(±; +; -).

В дальнейшем рассматриваются комплексные чертежи фигур в системе $(\Pi_1 \Pi_2)$. Единица измерения по всем осям одинакова – один миллиметр и специально помечаться штрихами не будет.

2.2. Комплексный чертеж прямой

Прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения. Прямая, параллельная хотя бы одной из плоскостей проекций, называется прямой частного положения.

Провести прямую на чертеже невозможно, так как она неограниченна и не имеет определенной длины. Обычно прямая задается на чертеже отрезком и предполагается, что отрезок при необходимости можно продолжить.

При проецировании прямой e на горизонтальную плоскость проекций Π_1 получим прямую e_1 , при проецировании прямой e на фронтальную плоскость проекций Π_2 получим прямую e_2 . Прямая e_1 – это горизонтальная проекция прямой e , прямая e_2 – фронтальная проекция прямой e (рис. 2.8). Условимся, на комплексном чертеже в системе $(\Pi_1 \Pi_2)$, оси y и z не показывать. Запись $e(e_1, e_2)$ означает, что прямая e на чертеже задана проекциями e_1 и e_2 . Такая запись используется не только для прямой,

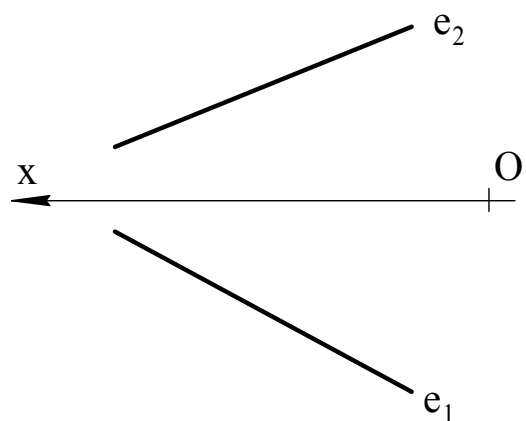


Рис. 2.8

но и для любой фигуры. Прямая e является прямой общего положения. Убедимся в этом, рассмотрев комплексные чертежи прямых частного положения (рис. 2.9).

Прямая h , параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1 , называется горизонталью. Расстояние от каждой точки горизонтали h до Π_1 одинаковы, так как $h \parallel \Pi_1$. Эти расстояния присутствуют на фронтальной плоскости проекций (координатные отрезки z для каждой точки прямой). Поэтому фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x , то есть $h_2 \parallel x$.

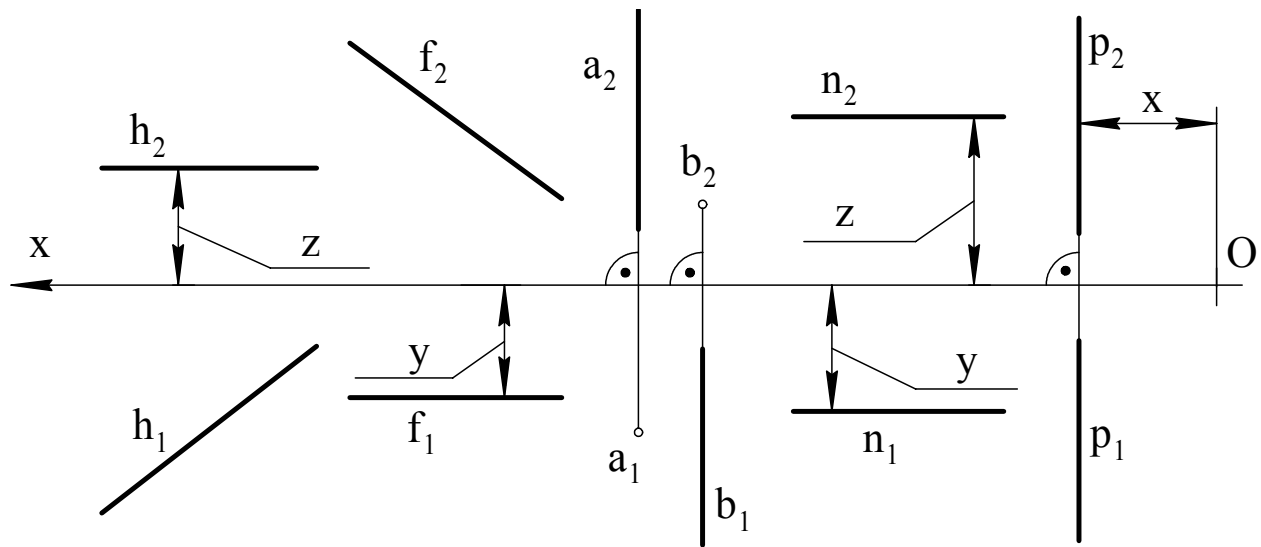


Рис. 2.9

Прямая f , параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 , называется фронталью. Расстояния от каждой точки f до Π_2 одинаковы. Эти расстояния присутствуют на горизонтальной плоскости проекций (координатные отрезки y для каждой точки прямой). Поэтому $f_1 \parallel x$.

Прямая a , перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1 , называется горизонтально проецирующей прямой. На Π_1 она проецируется в точку. Так как прямая a параллельна оси z , то a_2 параллельна оси z на Π_2 . Прямая a не только горизонтально проецирующая прямая, но также является фронталью, так как $a \parallel \Pi_2$.

Прямая b , перпендикулярная фронтальной плоскости проекций Π_2 , называется фронтально проецирующей прямой. На Π_2 она проецируется в точку. Прямая b также является горизонталью.

Прямые, параллельные плоскостям проекций, называются прямыми уровня, или линиями уровня. Прямая n , параллельная Π_1 и Π_2 , может быть названа прямой двойного уровня ($n_1 \parallel x$, $n_2 \parallel x$), кроме того n параллельна оси x .

На комплексном чертеже в системе $(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3)$ прямыми частного положения, кроме рассмотренных выше прямых, будут прямые параллельные плоскости Π_3 – профильные прямые. На рис. 2.9 показаны проекции p_1 и p_2 профильной прямой, у точек этой прямой одинаковы координатные отрезки x . При построении на комплексном чертеже профильной прямой необходимо задавать профильную проек-

цию этой прямой. Заметим, что прямая n на комплексном чертеже в системе $(\Pi_1\Pi_2\Pi_3)$ называется профильно проецирующей прямой, ее проекцией на Π_3 будет точка.

Комплексные чертежи прямых частного положения обладают ярко выраженными особенностями – у прямых уровня есть проекция, параллельная оси координат, у проецирующих прямых одна проекция – точка. Прямая e (рис. 2.8) не обладает этими особенностями, поэтому является прямой общего положения.

Поскольку через две точки проходит единственная прямая, то прямую можно задать двумя точками. От такого задания прямой легко перейти к заданию прямой отрезком. Действительно, соединив по линейке горизонтальные проекции точек, получим горизонтальную проекцию отрезка, соединив фронтальные проекции точек, получим фронтальную проекцию отрезка. Если даны горизонтальная и фронтальная проекции прямой, то для того, чтобы построить профильную проекцию прямой, необходимо построить профильные проекции двух любых точек этой прямой и провести через них профильную проекцию прямой (точнее, профильную проекцию отрезка, задающего прямую).

Обратим внимание на одно свойство линий уровня. Отрезок, расположенный на линии уровня, проецируется в равный ему отрезок на ту плоскость проекций, которой параллельна линия уровня. Например, отрезок на горизонтали проецируется на горизонтальную плоскость проекций в равный ему отрезок, т.е. в натуральную величину (рис. 1.2, $\alpha = 0$).

2.3. Комплексный чертеж плоскости

Плоскость, не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется плоскостью общего положения. Плоскость, перпендикулярная хотя бы одной из плоскостей проекций, называется плоскостью частного положения.

Построить комплексный чертеж всех точек плоскости невозможно, т.к. множество точек плоскости бесконечно и неограниченно (расстояние между двумя точками плоскости может принимать какие угодно большие значения). Для того чтобы построить комплексный чертеж плоскости, поступим так же, как поступили при построении комплексного чертежа прямой. Будем строить комплексный чертеж части плоскости. Конечно, любая часть (кусок) плоскости задаст плоскость на чертеже, но наиболее простой и удобной частью плоскости для этой цели является треугольник.

Пусть в плоскости Σ взят треугольник ABC . При проецировании $\triangle ABC$ на Π_1 получим $\triangle A_1B_1C_1$, при проецировании на Π_2 – $\triangle A_2B_2C_2$ (рис. 2.10). Можно сказать, что сначала построили комплексные чертежи вершин треугольника, а затем одноименные проекции вершин соединили отрезками, которые яв-

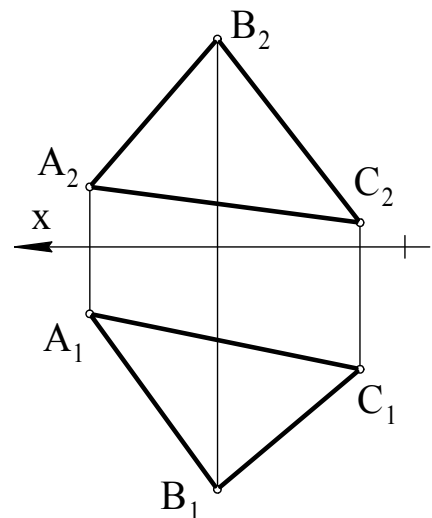


Рис. 2.10

ляются проекциями сторон треугольника. При этом линии проекционной связи (A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2) перпендикулярны оси x . Таким образом, на рис. 2.10 приведен комплексный чертеж плоскости Σ , заданной треугольником $\triangle ABC$. Для плоскости Σ , заданной треугольником $\triangle ABC$, будем использовать обозначения: Σ ; $\Sigma(\triangle ABC)$; ($\triangle ABC$).

Плоскость Σ (рис. 2.10) является плоскостью общего положения. Убедимся в этом, рассмотрев комплексные чертежи плоскостей частного положения (рис. 2.11).

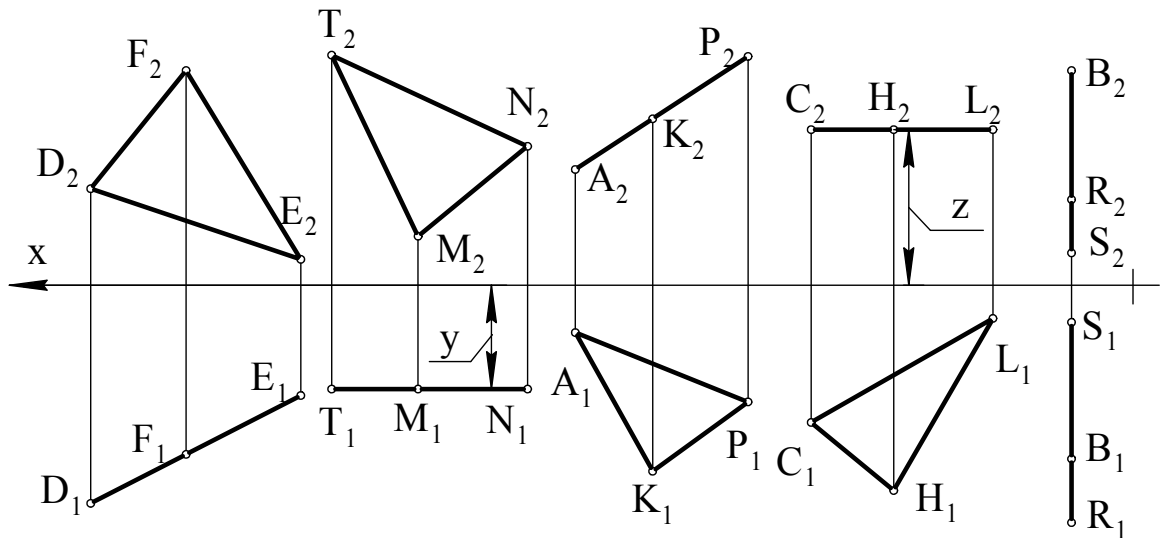


Рис. 2.11

Плоскость $\Gamma(\triangle DFE)$, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1 , называется горизонтально проецирующей плоскостью. На Π_1 плоскость Γ проецируется в прямую линию, которая является линией пересечения Γ и Π_1 . Для любой точки плоскости Γ прямая, проецирующая эту точку на Π_1 , находится в плоскости Γ . Все точки плоскости Γ проецируются на линию пересечения Γ и Π_1 . Треугольник DFE на Π_1 проецируется в отрезок, а на Π_2 – в треугольник. Отрезок на Π_1 задает прямую, в которую проецируется плоскость Γ .

Плоскость ($\triangle TNM$) тоже горизонтально проецирующая, так как ее горизонтальная проекция – прямая, заданная отрезком T_1M_1 . Отрезок T_1M_1 параллелен оси x . Это значит, что у всех точек плоскости ($\triangle TNM$) координата y одинакова, т.е. плоскость параллельна фронтальной плоскости проекций Π_1 . Такая плоскость называется фронтальной плоскостью уровня, или фронтальной плоскостью.

Плоскость ($\triangle AKF$) перпендикулярна Π_2 и называется фронтально проецирующей плоскостью. На фронтальную плоскость проекций эта плоскость проецируется в прямую, заданную отрезком A_2P_2 .

Фронтально проецирующая плоскость ($\triangle CHL$) параллельна горизонтальной плоскости проекций, так как координата z у всех точек этой плоскости одинакова ($C_2L_2 \parallel x$). Такая плоскость называется горизонтальной плоскостью уровня, или горизонтальной плоскостью.

Плоскость (ΔBRC) перпендикулярна Π_1 и Π_2 , эта плоскость перпендикулярна оси x . В системе ($\Pi_1\Pi_2\Pi_3$) она называется профильной плоскостью уровня, или профильной плоскостью, так как (ΔBRC) $\parallel \Pi_3$ (координата x всех точек плоскости одинакова).

В системе ($\Pi_1\Pi_2\Pi_3$), плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций Π_3 , называется профильно проецирующей плоскостью. Профильная проекция такой плоскости – прямая.

У плоскостей частного положения хотя бы одна проекция – прямая линия. Плоскость Σ (рис. 2.10) не обладает этой особенностью, поэтому является плоскостью общего положения.

Плоскость может быть задана не только треугольником. Для задания плоскости можно использовать три точки, две параллельные прямые, две пересекающиеся прямые, точку и прямую, так как через любую из этих фигур проходит единственная плоскость. Конечно, рассматривать такую фигуру как часть плоскости уже нельзя. От одного способа задания плоскости можно перейти к любому другому. Например, если плоскость задана параллельными прямыми, то, взяв на одной прямой две точки, а на другой прямой – одну точку и соединив эти точки отрезками, перейдем к заданию плоскости треугольником.

Для того чтобы от комплексного чертежа плоскости в системе ($\Pi_1\Pi_2$) перейти к комплексному чертежу плоскости в системе ($\Pi_1\Pi_2\Pi_3$), необходимо построить профильную проекцию фигуры, задающей плоскость.

3. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ, ИХ ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ПЛОСКОСТИ

3.1. Взаимное положение точки и прямой. Деление отрезка прямой в данном отношении

Точка может принадлежать прямой и может не принадлежать прямой. Пусть точка A принадлежит прямой e ($A \in e$). При проецировании прямой и точки на плоскость Π_1 получим, что горизонтальная проекция точки принадлежит горизонтальной проекции прямой $A_1 \in e_1$. Аналогично и при проецировании на Π_2 – $A_2 \in e_2$. Таким образом, если точка принадлежит прямой, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям прямой. Справедливо и обратное утверждение: если проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой, то точка принадлежит прямой. На рис. 3.1 точка A принадлежит прямой e , а остальные точки не принадлежат прямой e .

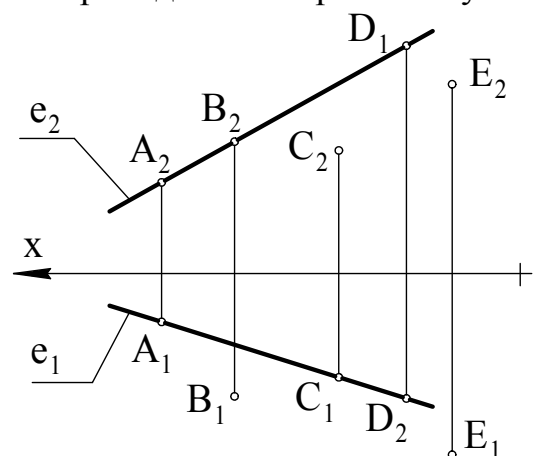


Рис. 3.1

Для определения принадлежности точки профильной прямой, необходимы профильные проекции точки и прямой.

При проецировании отрезка АВ на Π_1 получим отрезок A_1B_1 , при проецировании на Π_2 – A_2B_2 . На рис. 3.2 показан комплексный чертеж отрезка АВ.

Поскольку отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, при проецировании не меняется, то для деления отрезка в данном отношении достаточно

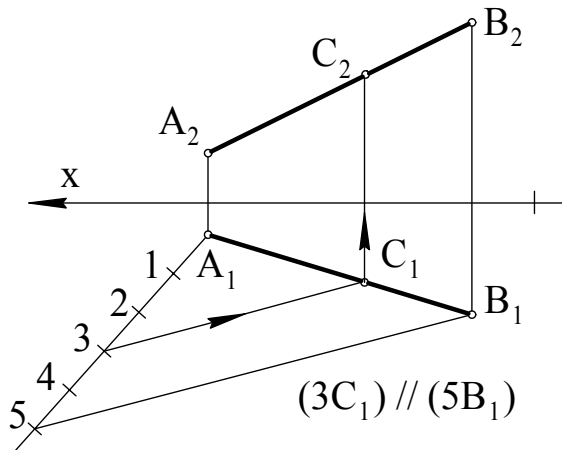


Рис. 3.2

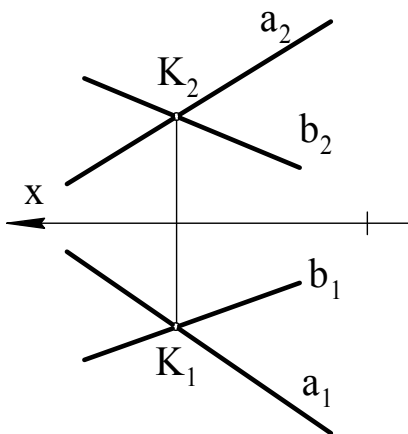
разделить в этом отношении одну проекцию отрезка, и это полностью определит точку деления. На рис. 3.2 показано построение точки C , делящей отрезок АВ в отношении $|AC| : |CB| = 3 : 2$. На основе теоремы Фалеса в отношении $3 : 2$ делим горизонтальную проекцию отрезка, т.е. $|A_1C_1| : |C_1B_1| = 3 : 2$. Так находим точку C_1 . Затем по линии проекционной связи находим C_2 . Точка C_2 делит фронтальную проекцию отрезка в том же отношении

$|A_2C_2| : |C_2B_2| = 3 : 2$ (по теореме Фалеса, так как линии проекционной связи всех точек параллельны). На рис. 3.2 последовательность построений показана стрелкой на линии проекционной связи – сначала строится C_1 , а затем C_2 .

3.2. Взаимное положение прямых

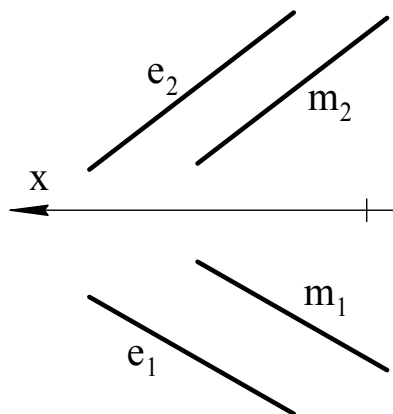
В пространстве две прямые могут совпадать, пересекаться, быть параллельными, скрещиваться.

У совпавших прямых все точки совпадают, поэтому эти прямые будут иметь совпавшие одноименные проекции. По сути, это одна прямая, обозначенная по-разному.



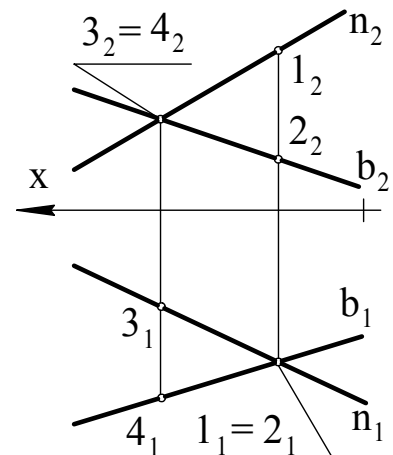
$$a \cap b = K$$

Рис. 3.3



$$e \parallel m$$

Рис. 3.4



$$n \cdot b$$

Рис. 3.5

Пересекающиеся прямые имеют одну общую точку. Пусть прямые общего положения a и b пересекаются в точке K ($a \cap b = K$). Пересекающиеся прямые в общем случае проецируются в пересекающиеся прямые. Точка K – реально существующая точка, и ее проекции находятся на линии проекционной связи (K_1K_2), перпендикулярной оси x (рис. 3.3).

Параллельные прямые расположены в одной плоскости и не имеют общих точек. Параллельные прямые в общем случае проецируются в параллельные прямые (пятое свойство ортогонального проецирования). На рис. 3.4 показан комплексный чертеж параллельных прямых e и m . При проецировании этих прямых на Π_1 получим $e_1 // m_1$, при проецировании на Π_2 – $e_2 // m_2$.

Прямые, не лежащие в одной плоскости, называются скрещивающимися. Эти прямые не параллельны и не пересекаются. Пример комплексного чертежа скрещивающихся прямых n и b показан на рис. 3.5 ($n \cdot / b$). Горизонтальные и фронтальные проекции этих прямых пересекаются. Но точки их пересечения не лежат на одной линии проекционной связи. В точке пересечения горизонтальных проекций совпали проекции двух точек $1 \in n$ и $2 \in b$. Это горизонтально конкурирующие точки. Координаты x и y этих точек равны, а координата z точки 1 больше, чем z точки 2. В точке пересечения фронтальных проекций этих прямых совпали проекции двух точек $3 \in n$ и $4 \in b$. Это фронтально конкурирующие точки. Координаты x и z этих точек равны, а координата y точки 4 больше, чем y точки 3. Скрещивающиеся прямые могут проецироваться на одну плоскость проекций в параллельные прямые, а на другую плоскость проекций – пересекающиеся прямые.

Если хотя бы одна из прямых является профильной прямой, то для определения взаимного положения прямых нужно построить профильные проекции этих прямых.

При рассмотрении комплексных чертежей любых фигур необходимо мысленно представлять эти фигуры в пространстве и их положение относительно плоскостей проекций.

3.3. Принадлежность точки и прямой плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой этой плоскости.

Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат плоскости.

Эти два вполне очевидных предложения часто называют условиями принадлежности точки и прямой плоскости.

На рис. 3.6 плоскость общего положения задана треугольником ABC . Точки A , B , C принадлежат этой плоскости, так как являются вершинами треугольника из этой плоскости. Прямые (AB) , (BC) , (AC) принадлежат плоскости, так как по две их точки принадлежат плоскости. Точка N принадлежит (AC) , D принадлежит (AB) , E принадлежит (CD) и, значит, точки N и E принадлежат плоскости $(\triangle ABC)$, тогда прямая (NE) принадлежит плоскости $(\triangle ABC)$.

Если задана одна проекция точки L , например L_2 , и известно, что точка L принадлежит плоскости ($\triangle ABC$), то для нахождения второй проекции L_1 последовательно находим (A_2L_2), K_2 , (A_1K_1), L_1 .

Если условие принадлежности точки плоскости нарушено, то точка не принадлежит плоскости. На рис. 3.6 точка R не принадлежит плоскости ($\triangle ABC$), так как R_2 принадлежит (F_2K_2), а R_1 не принадлежит (A_1K_1).

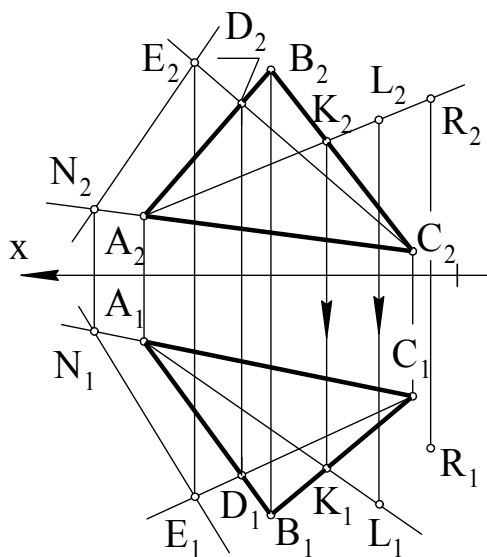


Рис. 3.6

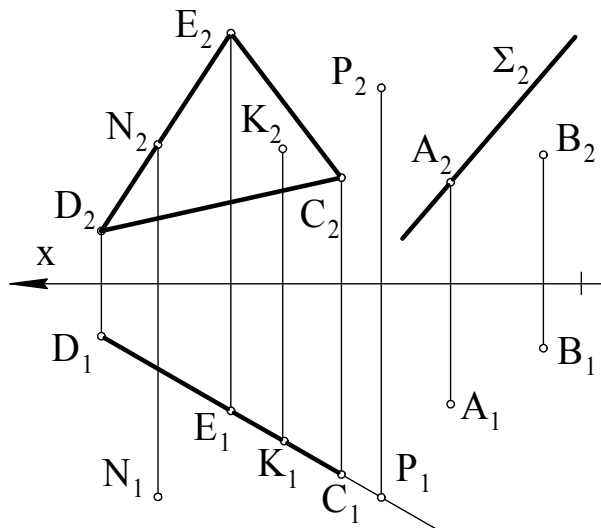


Рис. 3.7

На рис. 3.7 приведен комплексный чертеж горизонтально проецирующей плоскости ($\triangle CDE$). Точки K и P принадлежат этой плоскости, так как P_1 и K_1 принадлежат прямой (D_1C_1), являющейся горизонтальной проекцией плоскости ($\triangle CDE$). Точка N не принадлежит плоскости, так как N_1 не принадлежит (D_1C_1).

Все точки плоскости ($\triangle CDE$) проецируются на Π_1 в прямую (D_1C_1). Это следует из того, что плоскость ($\triangle CDE$) $\perp \Pi_1$. В этом же можно убедиться, если проделать для точки P (или любой другой точки) построения, которые были сделаны для точки L (рис. 3.6). Точка P_1 попадет на прямую (D_1C_1). Таким образом, для того, чтобы определить принадлежность точки горизонтально проецирующей плоскости, фронтальная проекция ($\triangle C_2D_2E_2$) не нужна. Поэтому в дальнейшем проецирующие плоскости будут задаваться только одной проекцией (прямой линией). На рис. 3.7 показана фронтально проецирующая плоскость Σ , заданная фронтальной проекцией Σ_2 , а также точки $A \in \Sigma$ и $B \notin \Sigma$.

Взаимное положение точки и плоскости сводится к принадлежности или не принадлежности точки плоскости.

При решении многих задач приходится строить линии уровня, принадлежащие плоскостям общего и частного положения. На рис. 3.8 показаны горизонталь h и фронталь f , принадлежащие плоскости общего положения ($\triangle ABC$). Фронтальная проекция h_2 параллельна оси x , поэтому прямая h – горизонталь. Точки 1 и 2 прямой h принадлежат плоскости, поэтому прямая h принадлежит плоскости. Таким образом, прямая h – это горизонталь плоскости ($\triangle ABC$). Обычно порядок по-

строения такой: $h_2; 1_2, 2_2; 1_1, 2_1; (1_1 2_1) = h_1$. Фронталь f проведена через точку A . Порядок построения: $f_1 \parallel x, A_1 \in f_1; 3_1, 3_2; (A_2 3_2) = f_2$.

На рис. 3.9 показаны проекции горизонтали и фронтали для фронтально проецирующей плоскости Σ и горизонтально проецирующей плоскости Γ . В плоско-

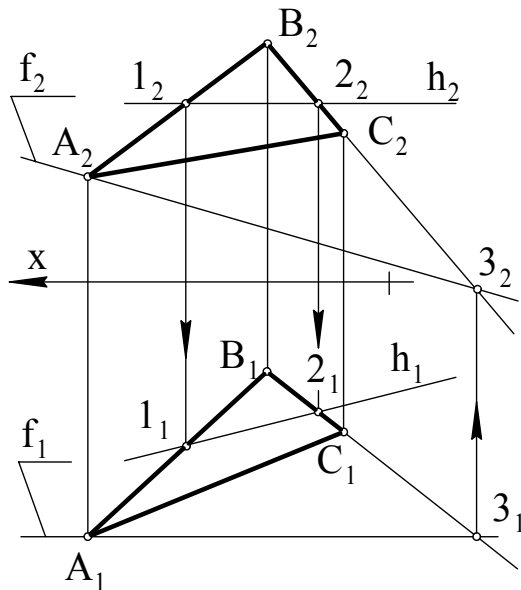


Рис. 3.8

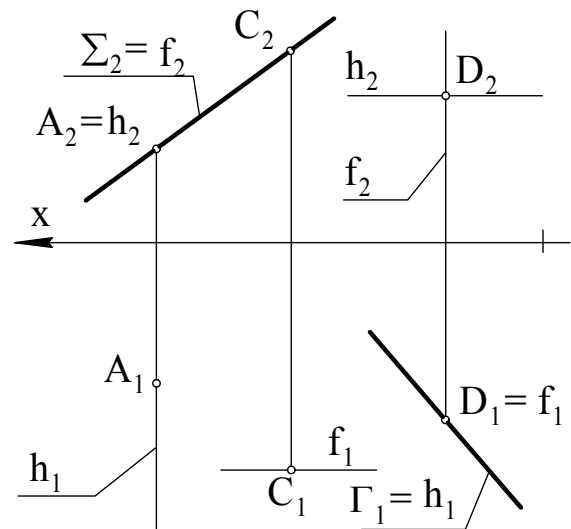


Рис. 3.9

сти Σ горизонталь является фронтально проецирующей прямой и проходит через точку A (попытайтесь представить горизонталь как линию пересечения Σ и плоскости, проходящей через точку A параллельно Π_1). Фронталь проходит через точку C . В плоскости Γ горизонталь и фронталь проведены через одну точку D . Фронталь является горизонтально проецирующей прямой.

Из рассмотренных выше построений следует, что линию уровня в плоскости можно провести через любую точку этой плоскости.

Совпадение плоскостей можно трактовать как принадлежность одной плоскости другой. Если три точки одной плоскости принадлежат другой плоскости, то эти плоскости совпадают. Упомянутые три точки не должны лежать на одной прямой. На рис. 3.10 плоскость (ΔDNE) совпадает с плоскостью $\Sigma(\Delta ABC)$, так как точки D, N, E принадлежат плоскости $\Sigma(\Delta ABC)$.

Обратим внимание на то, что плоскость Σ , заданная ΔABC , теперь может быть задана ΔDNE . Любая плоскость может быть задана линиями уровня. Для этого необходимо через точку плоскости $\Sigma(\Delta ABC)$ (например, через точку A) провести в плоскости горизонталь и фронталь, которые и будут задавать плоскость Σ (на рис. 3.10 построения не показаны). Последователь-

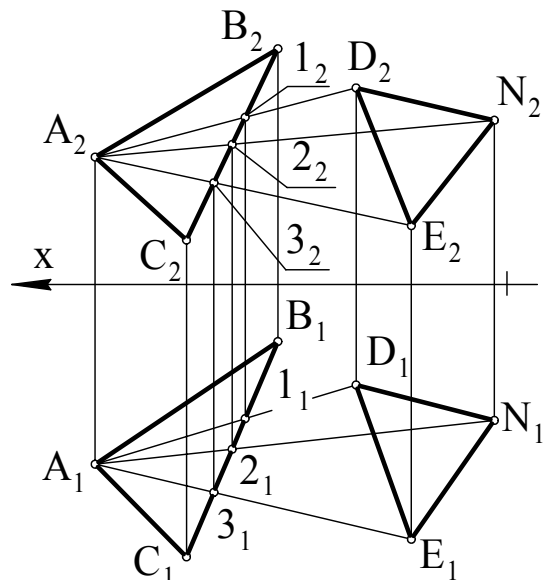


Рис. 3.10

ность построения горизонтали: $h_2 \parallel x$ ($A_2 \in h_2$); $K_2 = h_2 \cap B_2C_2$; $K_1 \in B_1C_1$ ($K_2K_1 \perp x$); $A_1K_1 = h_1$. Последовательность построения фронтали: $f_1 \parallel x$ ($A_1 \in f_1$); $L_1 = f_1 \cap B_1C_1$; $L_2 \in B_2C_2$ ($L_1L_2 \perp x$); $A_2L_2 = f_2$. Можно записать $\Sigma(\triangle ABC) = \Sigma(h, f)$.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

В курсе начертательной геометрии под преобразованием комплексного чертежа фигуры обычно понимается его изменение, вызванное перемещением фигуры в пространстве, или введением новых плоскостей проекций, или использованием других видов проецирования. Применение различных методов (способов) преобразования комплексного чертежа упрощает решение многих задач.

4.1. Метод замены плоскостей проекций

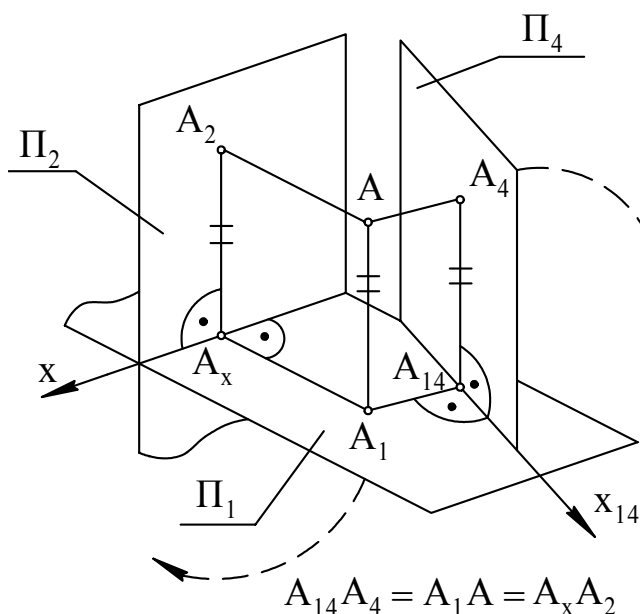


Рис. 4.1

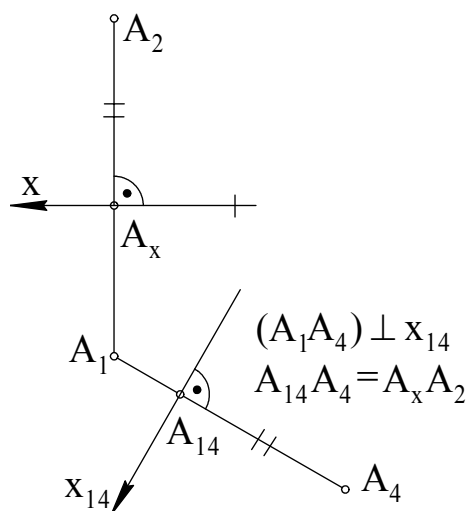


Рис. 4.2

Метод замены плоскостей проекций состоит в том, что вместо одной из плоскостей проекций вводится новая плоскость, перпендикулярная к другой плоскости проекций. На рис. 4.1 показана пространственная схема получения комплексного чертежа точки A в системе $(\Pi_1\Pi_2)$. Точки A_1 и A_2 – горизонтальная и фронтальная проекции точки A , $AA_1A_xA_2$ – прямоугольник, плоскость которого перпендикулярна оси x (рис. 2.3).

Новая плоскость Π_4 перпендикулярна Π_1 . При проецировании точки A на Π_4 получим новую проекцию A_4 , фигура $AA_1A_4A_x$ – прямоуголь-

ник, плоскость которого перпендикулярна новой оси $x_{14} = \Pi_4 \cap \Pi_1$. Для получения комплексного чертежа будем рассматривать фигуры, расположенные в плоскостях проекций. Поворотом вокруг оси x_{14} совместим Π_4 с Π_1 , затем поворотом вокруг оси x совместим Π_1 (и Π_4) с Π_2 (на рис. 4.1 направления движения плоскостей Π_4 и Π_1 показаны штриховыми линиями со стрелками). Полученный чертеж приведен на рис. 4.2. Прямые углы на рис. 4.1, 4.2 помечены дугой с точкой, равные отрезки помечены двумя штрихами (противоположные стороны прямоугольников на рис. 4.1). От комплексного чертежа точки A в системе $(\Pi_1\Pi_2)$ перешли к комплексному чертежу точки A в системе

($\Pi_1\Pi_4$), заменили плоскость Π_2 на плоскость Π_4 , заменили A_2 на A_4 .

На основе этих построений сформулируем правило замены плоскостей проекций (правило получения новой проекции). Через неизменяемую проекцию проводим новую линию проекционной связи перпендикулярно новой оси, затем от новой оси по линии проекционной связи откладываем отрезок, длина которого равна расстоянию от заменяемой проекции до старой оси, полученная при этом точка и есть новая проекция. Направление новой оси будем брать произвольно. Новое начало координат указывать не будем.

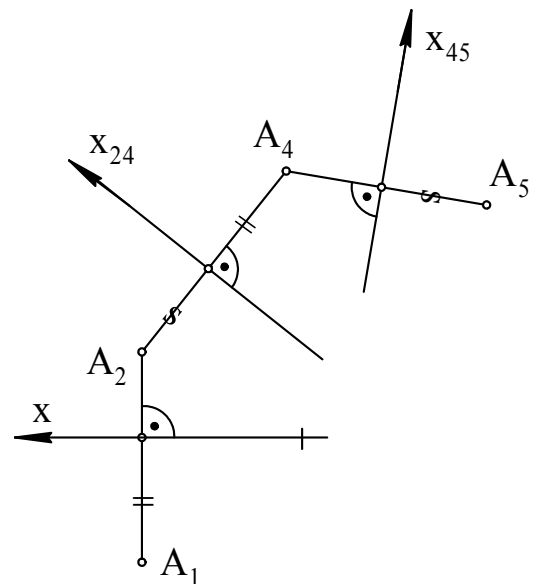


Рис. 4.3

На рис. 4.3 показан переход от комплексного чертежа в системе ($\Pi_1\Pi_2$) к комплексному чертежу в системе ($\Pi_2\Pi_4$), а затем еще один переход к комплексному чертежу в системе ($\Pi_4\Pi_5$). Вместо плоскости Π_1 введена плоскость Π_4 , перпендикулярная Π_2 , затем вместо Π_2 введена плоскость Π_5 , перпендикулярная Π_4 . Используя правило замены плоскостей проекций, можно выполнить любое количество замен плоскостей проекций.

4.2. Определение расстояния между двумя точками

Расстоянием между двумя точками называется длина отрезка, соединяющего эти точки. Для определения расстояния между двумя точками A и B необходимо соединить их отрезком AB (рис. 4.4), затем узнать длину этого отрезка. Отрезок общего положения не параллелен ни одной из плоскостей проекций. Длины проекций A_1B_1 и A_2B_2 меньше длины отрезка AB . Для того чтобы узнать длину отрезка AB , необходимо спроецировать его в натуральную величину и измерить эту проекцию, так как она равна отрезку AB .

Введем новую плоскость проекций Π_4 параллельно отрезку AB и перпендикулярно Π_1 . При этом новая ось x_{14} будет параллельна A_1B_1 (в противном случае прямая AB и плоскость Π_4 пересекутся). Угол наклона отрезка AB к плоскости Π_4 равен нулю, и AB на Π_4 проецируется в натуральную величину, т.е. $A_4B_4 = AB$. Измерив отрезок A_4B_4 , получим длину отрезка AB .

Каждая из точек A_4 и B_4 строилась с использованием правила замены плоскостей проекций.

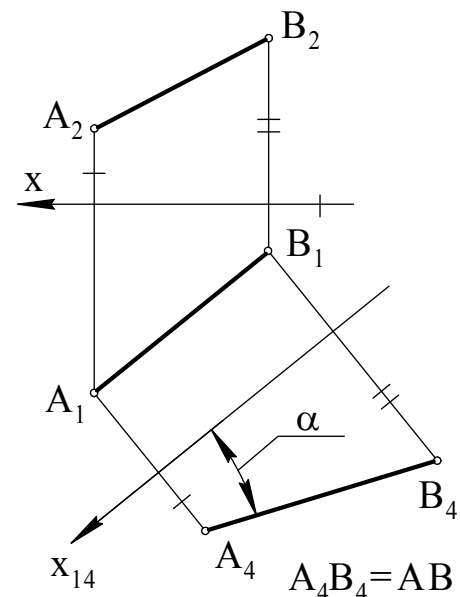


Рис. 4.4

Расстояние между A_1B_1 и x_{14} не влияет на величину A_4B_4 , и поэтому может быть взято произвольно. В результате введения Π_4 выполнен переход от системы $(\Pi_1\Pi_2)$ к системе $(\Pi_1\Pi_4)$, в которой прямая АВ, проходящая через отрезок АВ, является линией уровня.

На плоскости Π_4 (рис. 4.4) кроме $A_4B_4 = AB$ получили угол α , который равен углу между АВ и плоскостью Π_1 , так как плоскость этого угла параллельна плоскости Π_4 . Если ввести новую плоскость Π_5 параллельно АВ и перпендикулярно Π_2 , то новая ось x_{25} будет параллельна A_2B_2 . Получим $A_5B_5 = AB$ и угол β , который равен углу между АВ и плоскостью Π_2 , так как плоскость этого угла параллельна плоскости Π_5 .

4.3. Проецирование прямой общего положения в точку на новую плоскость проекций

Придание фигурам частного положения относительно плоскостей проекций значительно облегчает решение многих задач. Для того чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей прямой, необходимо, чтобы новая плоскость проекций была перпендикулярна прямой. Прямая на эту плоскость спроецируется в точку. Плоскость, перпендикулярная прямой общего положения, является плоскостью общего положения. Введение такой плоскости в качестве новой плоскости проекций невозможно, так как новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна одной из старых плоскостей проекций. Таким образом, решить задачу проецирования прямой общего положения в точку одной заменой плоскости проекций нельзя. Поэтому попытаемся решить задачу сначала для прямой частного положения, а именно – для прямой уровня.

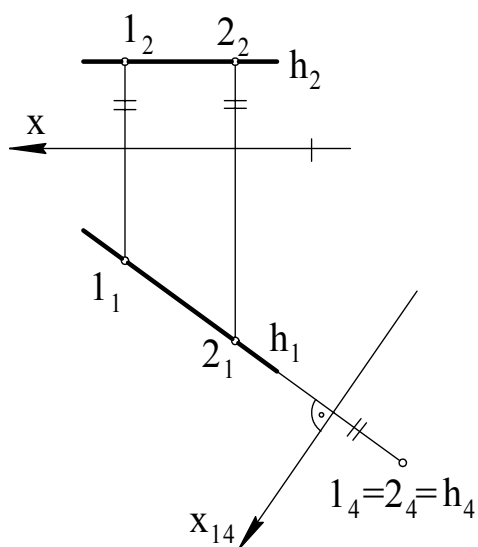


Рис. 4.5

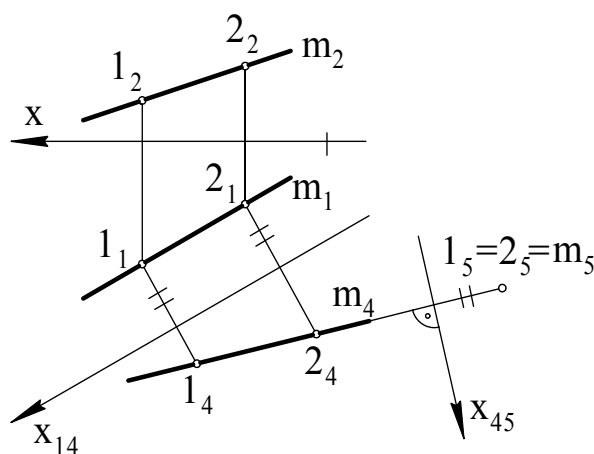


Рис. 4.6

Пусть $h(h_1, h_2)$ – горизонталь (рис. 4.5). Введем новую плоскость проекций Π_4 перпендикулярно h . Поскольку h параллельна Π_1 , то Π_4 будет перпендикулярна Π_1 . Плоскость Π_4 может быть взята в качестве новой плоскости проекций и на

нее h спроецируется в точку. Новая ось x_{14} перпендикулярна проекции h_1 , так как h_1 параллельна h и, значит, перпендикулярна Π_4 и x_{14} . Для построения новой проекции горизонтали построим новые проекции двух ее точек 1 и 2. Новые проекции этих точек, построенные по правилу замены плоскостей проекций, совпадают. Так как точки 1 и 2 взяты произвольно, то проекции остальных точек горизонтали тоже совпадут, т.е. горизонталь проецируется на Π_4 в точку.

Используя решение задачи проецирования линии уровня в точку, можно выполнить проецирование прямой общего положения m в точку (рис. 4.6). Введем новую плоскость проекций Π_4 параллельно прямой m и перпендикулярно Π_1 . Новая ось x_{14} параллельна горизонтальной проекции m_1 . По новым проекциям двух произвольных точек 1 и 2 прямой m находим m_4 . В новой системе плоскостей ($\Pi_1\Pi_4$) прямая m является линией уровня, она параллельна Π_4 (при этом m_1 параллельна x_{14}). Теперь, используя решение предыдущей задачи (рис. 4.5), проецируем прямую m в точку. Для этого вводим новую плоскость проекций Π_5 перпендикулярно прямой m и перпендикулярно Π_4 . Прямая m на Π_5 проецируется в точку. В новой системе плоскостей проекций ($\Pi_4\Pi_5$) прямая m является проецирующей прямой.

4.4. Проецирование плоскости общего положения в прямую на новую плоскость проекций. Нахождение натуральной величины плоской фигуры

Если спроецировать какую-либо прямую m , принадлежащую плоскости общего положения Σ , в точку, то плоскость Σ спроецируется на эту же плоскость проекций в прямую линию. Действительно, прямая m перпендикулярна плоскости проекций и, значит, плоскость Σ проходит через перпендикуляр к плоскости проекций и тоже ей перпендикулярна. Плоскость Σ является проецирующей плоскостью и на плоскость проекций проецируется в прямую. Если m – прямая общего положения, то для проецирования ее в точку потребуются две замены плоскостей проекций (рис. 4.6). Если m – прямая уровня, то для ее проецирования в точку потребуется одна замена плоскостей проекций (рис. 4.5).

Пусть Σ – плоскость общего положения, заданная треугольником ABC (рис. 4.7). В плоскости Σ проведем горизонталь h , спроецируем горизонталь h в точку h_4 на плоскость Π_4 ($x_{14} \perp h_1$, $\Pi_4 \perp h$), построим новые проекции точек A_4 , B_4 , C_4 . Плоскость Σ проецируется в

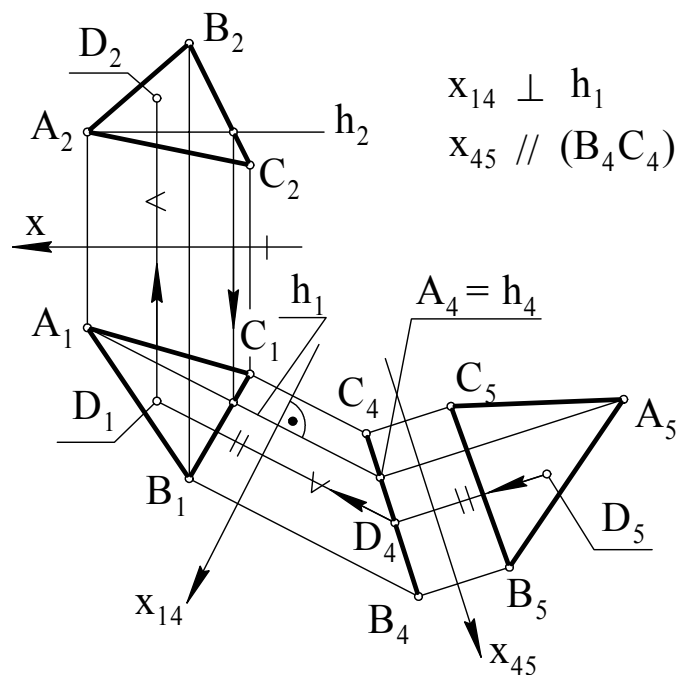


Рис. 4.7

прямую, проходящую через точки A_4, B_4, C_4 . Плоскость Σ в системе $(\Pi_1\Pi_4)$ является проецирующей плоскостью, она перпендикулярна Π_4 . Треугольник ABC проецируется на Π_4 в отрезок B_4C_4 .

Для нахождения натуральной величины треугольника ABC введем плоскость проекций Π_5 параллельно плоскости треугольника и перпендикулярно Π_4 . Новая ось x_{45} параллельна отрезку D_4C_4 (в противном случае Σ и Π_5 пересекутся). Треугольник ABC проецируется на плоскость Π_5 в натуральную величину $\Delta A_5B_5C_5 = \Delta ABC$. Аналогично находится натуральная величина любой плоской фигуры. Плоскость Σ в системе $(\Pi_4\Pi_5)$ является плоскостью уровня.

Если необходимо построить в плоскости Σ какую-либо фигуру, то выполнить это построение в плоскости общего положения трудно. В этом случае проводятся построения, показанные на рис. 4.7. На Π_5 строится натуральная величина фигуры. Затем находятся остальные проекции этой фигуры. На рис. 4.7 по проекции D_5 (одна точка натуральной величины фигуры) найдены остальные проекции этой точки. Проекция D_4 принадлежит прямой, в которую проецируется плоскость Σ . Последовательность построений показана стрелками. Правило замены плоскостей проекций справедливо и в этом случае. Равные отрезки помечены одинаково. Таким способом можно построить, например, окружность, вписанную в треугольник ABC . На плоскости Π_5 строится окружность, вписанная в треугольник $A_5B_5C_5$, а затем находятся остальные проекции ряда точек окружности так же, как для точки D_5 . Горизонтальная и фронтальная проекции этой окружности – эллипсы.

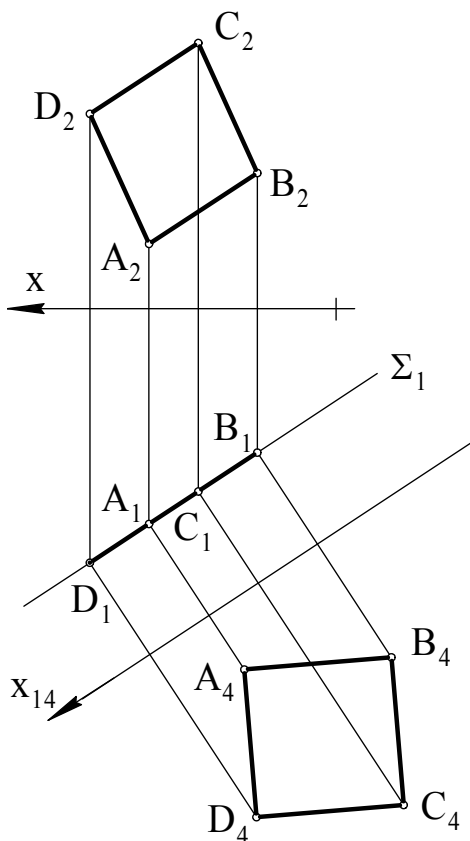


Рис. 4.8

В случае, когда дана проецирующая плоскость, построений, связанных с натуральной величиной фигуры, конечно, меньше, так как плоскость уже проецируется в прямую линию. На рис. 4.8 показано построение квадрата, принадлежащего горизонтально проецирующей плоскости. Пусть дана горизонтально проецирующая плоскость $\Sigma(\Sigma_1)$ и две точки этой плоскости $A(A_1, A_2)$ и $B(B_1, B_2)$. Необходимо построить квадрат $ABCD$ в плоскости Σ . Соединяем отрезками проекции A_2, B_2 и A_1, B_1 . Получили проекции стороны квадрата. Вводим плоскость $\Pi_4 \parallel \Sigma_1$ ($x_{14} \parallel \Sigma_1$). Строим новую проекцию A_4B_4 . Достаиваем к отрезку A_4B_4 квадрат $A_4B_4C_4D_4$. Проекция C_1 и D_1 принадлежат Σ_1 . Проекция C_2 и D_2 строятся по правилам замены плоскостей проекций. У этой задачи есть второе решение – квадрат, симметричный построенному относительно прямой (AB) . Это второе решение можно построить, не пользуясь проекцией на плоскость Π_4 сразу на плоскостях Π_2 и Π_1 .

5. ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Позиционные задачи – это задачи, в которых требуется определить положение фигуры относительно плоскостей проекций или взаимное положение фигур – их принадлежность, параллельность и пересечение.

5.1. Взаимное положение прямой и плоскости

Взаимное положение прямой и плоскости определяется количеством общих точек: а) если прямая имеет две общие точки с плоскостью, то она принадлежит этой плоскости; б) если прямая имеет одну общую точку с плоскостью, то прямая пересекает плоскость; в) если точка пересечения прямой с плоскостью удалена в бесконечность (несобственная), то прямая и плоскость параллельны.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости. Чтобы построить такую прямую, надо в плоскости задать прямую и параллельно ей провести нужную прямую.

Пусть плоскость задана треугольником $\Sigma(\triangle ABC)$. Через точку E (рис. 5.1) необходимо провести прямую EF , параллельную плоскости Σ . Для этого через горизонтальную проекцию точки $E(E_1)$ проведем горизонтальную проекцию E_1F_1 искомой прямой параллельно горизонтальной проекции любой прямой, лежащей в плоскости Σ , например, прямой AB ($E_1F_1 \parallel A_1B_1$).

Через фронтальную проекцию E_2 точки E параллельно AB проводим фронтальную проекцию E_2F_2 искомой прямой EF ($E_2F_2 \parallel A_2B_2$). Прямая EF параллельна плоскости Σ , заданной треугольником ABC .

Прямая будет также параллельна плоскости, если она лежит в плоскости, параллельной данной.

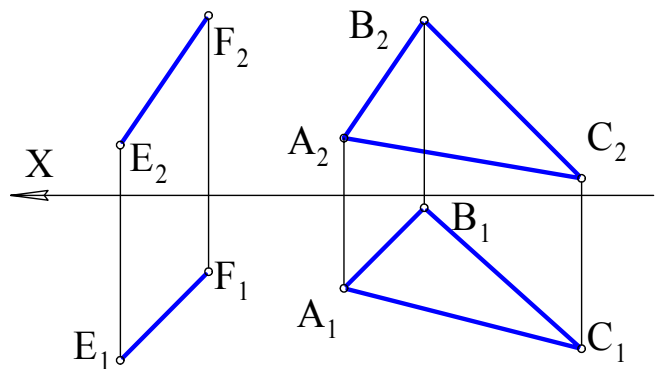


Рис. 5.1

5.2. Построение точки пересечения прямой с плоскостью

Задача на построение точки пересечения прямой с плоскостью, называемая первой позиционной задачей, широко применяется в начертательной геометрии. Она лежит в основе решения следующих задач:

- на пересечение двух плоскостей;
- пересечение поверхности с плоскостью;
- пересечение прямой с поверхностью;
- взаимное пересечение поверхностей.

Построить точку пересечения прямой с плоскостью – значит найти точку, принадлежащую одновременно заданной прямой и плоскости..

5.2.1. Плоскость занимает проецирующее положение

Если плоскость занимает проецирующее положение (например, она перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, рис. 5.2), то фронтальная проекция точки пересечения должна одновременно принадлежать фронтальному следу плоскости и фронтальной проекции прямой, то есть быть в точке их пересечения. Поэтому сначала определяется фронтальная проекция M_2 точки M (точка пересечения прямой EF с фронтально-проецирующей плоскостью $\Sigma(\triangle ABC)$), а затем ее горизонтальная проекция. Точка M_1 определена из условия принадлежности точки M прямой EF .

Полагая, что плоскость Σ представляет собой непрозрачный треугольник, установим видимость проекций прямой EF . На Π_2 вся проекция прямой EF видима, так как она не закрывается треугольником. На Π_1 участок прямой правее M_2 невидим, так как он находится ниже плоскости при взгляде на Π_1 .

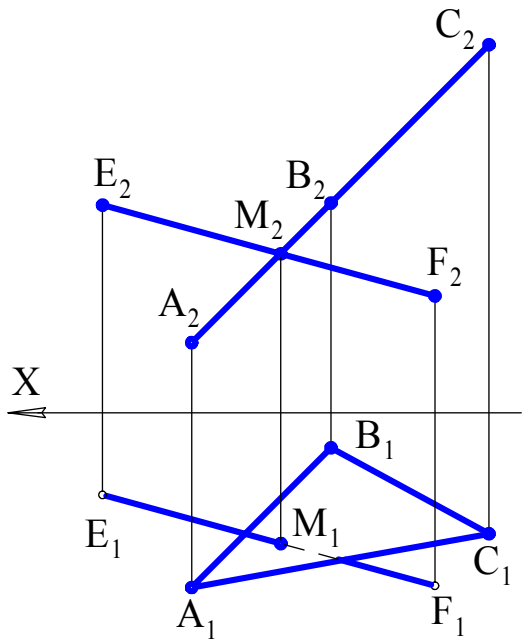


Рис. 5.2

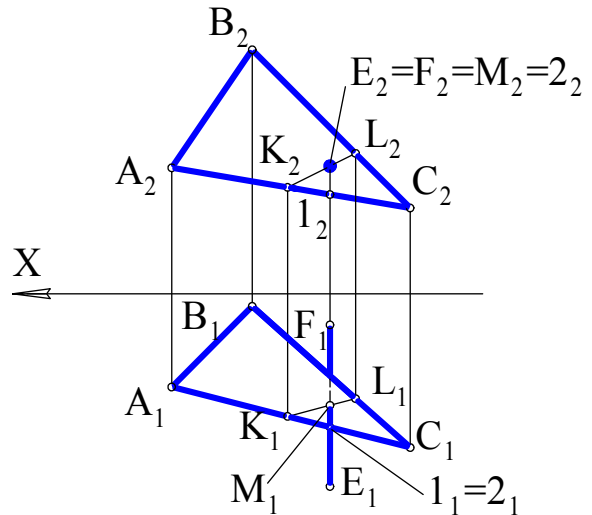


Рис. 5.3

5.2.2. Прямая занимает проецирующее положение

На рис. 5.3 изображена плоскость общего положения $P(\triangle ABC)$ и горизонтально-проецирующая прямая EF , пересекающая плоскость в точке M . Фронтальная проекция точки – точка M_2 – совпадает с точками E_2 и F_2 , так как M принадлежит прямой. Для построения горизонтальной проекции искомой точки пересечения проведем через точку M в плоскости P прямую (например, KL). Сначала построим ее фронтальную проекцию, а затем – горизонтальную. Точка M является точкой пересечения прямых EF и KL . Так как точка M одновременно лежит на прямой EF и в плоскости P ($KL \in P$), то она является точкой их пересечения.

Для установления видимости проекции прямой на Π_1 вводим конкурирующие точки 1 и 2. Так как точка 2 дальше удалена от плоскости Π_1 , то относительно Π_1 она будет видимой, а невидимой будет точка 1. Заметим, что точка 2 принадлежит прямой EF. Следовательно, в окрестности точек $1_1=2_1$ до M_1 проекция прямой будет видимой. Выше M_1 проекция прямой будет невидимой. Невидимый участок проекции прямой показан штриховой линией.

5.3. Прямая и плоскость занимают общее положение

Пусть даны плоскость Σ и прямая AB (рис. 5.4, а). В общем случае они имеют одну общую точку. Эта точка, принадлежащая прямой и плоскости, будет принадлежать и некоторой прямой n этой плоскости. Заметим, что в плоскости через точку можно провести однопараметрическое множество прямых – ∞^1 . Выделив хотя бы одну из них, легко определим искомую точку. Следовательно, поставленная задача сводится к отысканию некоторой прямой n , принадлежащей заданной плоскости и пересекающей исходную прямую AB.

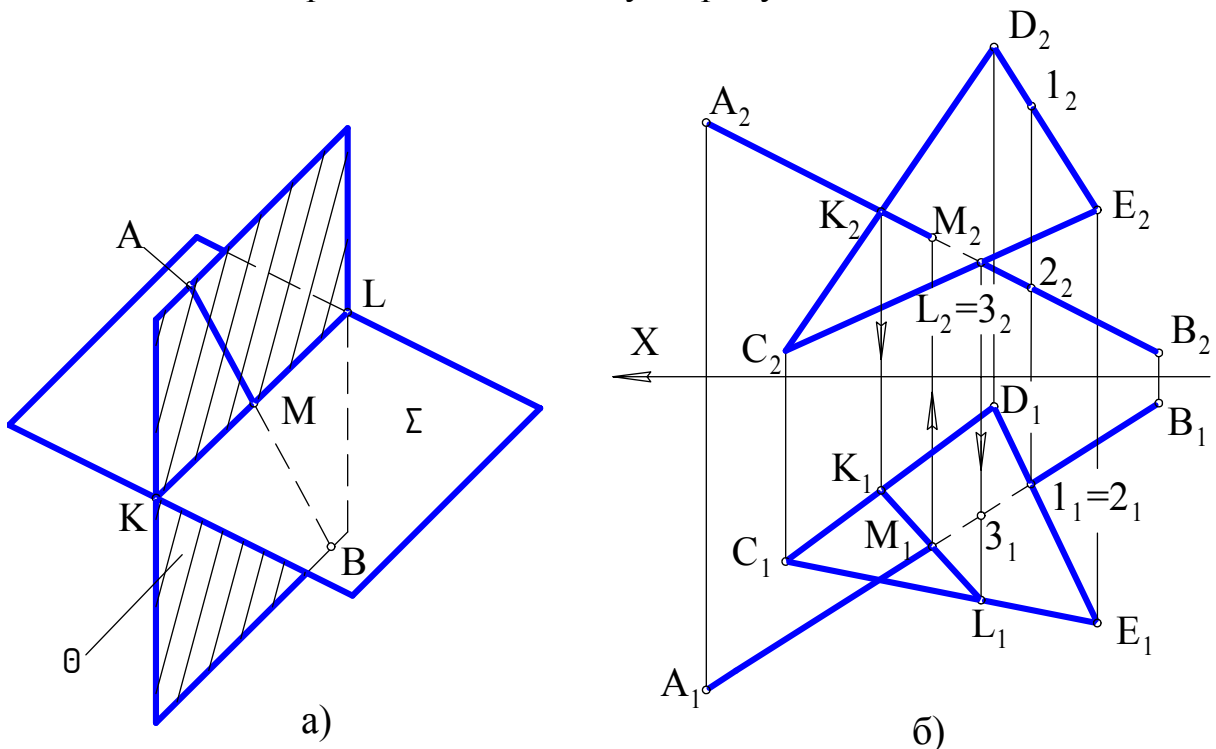


Рис. 5.4

Прямую n можно рассматривать как проекцию прямой AB на заданную плоскость Σ (в более широком смысле прямая n есть отображение прямой AB на плоскость Σ). Для случая линейного проецирования прямые n и AB принадлежат одной плоскости и являются конкурирующими относительно плоскости Σ . Последнее используем для определения точки пересечения прямой и плоскости. Тогда алгоритм решения поставленной задачи будет следующим:

1) на заданной плоскости $\Sigma(\triangle CDE)$ проведем проекции прямой KL (рис. 5.4, б), конкурирующей с заданной прямой AB относительно плоскостей Σ и Π_2 ; сна-

чала находим K_2L_2 , а затем K_1L_1 ; прямые KL и AB расположены во фронтально-проецирующей плоскости;

2) находим точки $M_1 = K_1L_1 \cap A_1B_1$ и $M_2 \in A_2B_2$ пересечения проекций прямых AB и KL ; точка $M(M_1, M_2)$ – искомая;

3) определяем видимость прямой и плоскости относительно плоскостей проекций.

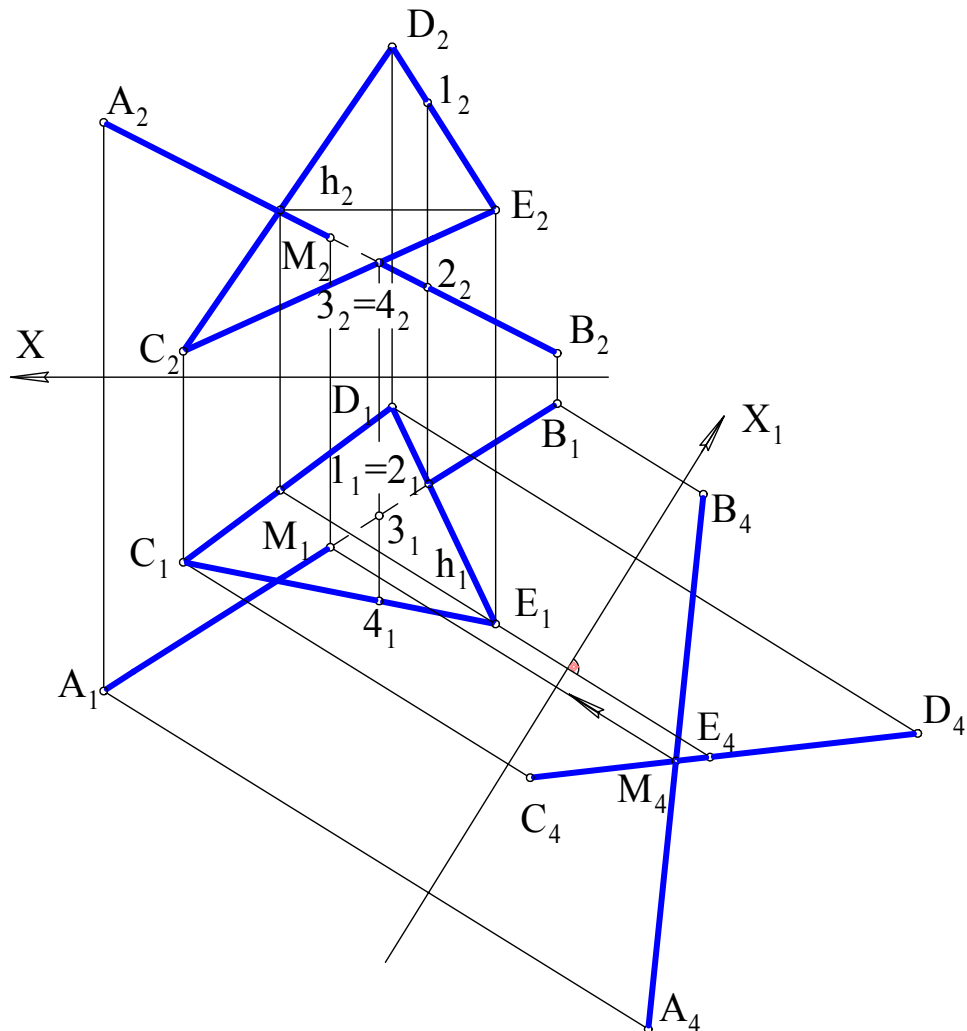


Рис. 5.5

Для определения видимых участков прямой AB анализируем положение конкурирующих точек скрещивающихся прямых. Так, точки 1 и 2 находятся на скрещивающихся прямых AB и DE : $1 \in DE$, $2 \in AB$. Их горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 совпадают. По фронтальным проекциям точек 1 и 2 при взгляде на плоскость Π_1 видно, что точка 1 (точка плоскости) находится над точкой 2 (точка прямой), то есть она закрывает точку 2 при проецировании на горизонтальную плоскость проекций. Следовательно, прямая AB на участке $M-2$ расположена под треугольником CDE . Тогда горизонтальная проекция отрезка $M2 - M_{121}$ будет невидимой. Она показана штриховой линией.

Невидимый участок на фронтальной проекции прямой AB установлен анализом положения точек 4 и 3 ($4 \in CE$, $3 \in AB$), принадлежащих скрещивающимся прямым AB и CE . По горизонтальной проекции видно, что если смотреть на плоскость Π_2 , то невидимой будет точка 3, принадлежащая, прямой. Она ближе

расположена к плоскости проекций Π_2 . На фронтальной плоскости проекций точка 4 закрывает точку 3. В этом месте прямая АВ закрыта треугольником CDE. На Π_2 невидимый участок M_2Z_2 показан штриховой линией.

Задача на пересечение прямой и плоскости общего положения может быть сведена к одному из частных случаев, рассмотренных выше. Для этого прямую или плоскость нужно перевести в проецирующее положение. Ниже приведено решение (рис. 5.5), в котором методом замены плоскостей проекций в проецирующее положение переведена плоскость. На Π_4 определена проекция M_4 искомой точки, а затем по линиям связи установлены проекции точки и на исходных плоскостях проекций. Исходные данные взяты такими же, что и в предыдущей задаче. Поэтому установление видимости проекций прямой не рассматривается.

5.4. Взаимное положение плоскостей

Общим случаем взаимного положения двух плоскостей является их пересечение. В частном случае, когда линия пересечения удалена в бесконечность, плоскости становятся параллельными. Параллельные плоскости совпадают при сокращении расстояния между ними до нуля.

5.4.1. Параллельные плоскости

Плоскости будут параллельными, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. На рис. 5.6, а плоскости Σ и Σ' параллельны, так как $m \parallel m'$ и $n \parallel n'$.

Пример решения задачи на комплексном чертеже представлен на рис. 5.6, б.

Пример. Через точку А (рис. 5.6, б) требуется провести плоскость Σ' , параллельную заданной плоскости Σ (ΔKLM). *Решение.* Проводим через точку А две прямые m и n , параллельные двум любым прямым, находящимся в заданной плоскости, например сторонам треугольника KM и KL , соответственно. Пересекающиеся прямые m и n задают искомую плоскость $\Sigma'(m \cap n)$.

5.4.2. Пересекающиеся плоскости

Линия пересечения двух плоскостей определяется

- двумя точками, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям;
- одной точкой, принадлежащей двум плоскостям, и известным направлением линии.

В обоих случаях задача заключается в нахождении точек, общих для двух плоскостей. Задача на пересечение двух плоскостей называется второй позиционной задачей. Она может быть сведена к решению первой позиционной задачи, рассмотренной ранее, по одному из следующих вариантов.

Вариант 1. 1) В одной из плоскостей, например Σ (рис. 5.7), выбирают две произвольные прямые 12 и 34; 2) определяют точки М и К пересечения этих прямых с другой плоскостью – Δ ; точки М и К задают искомую прямую.

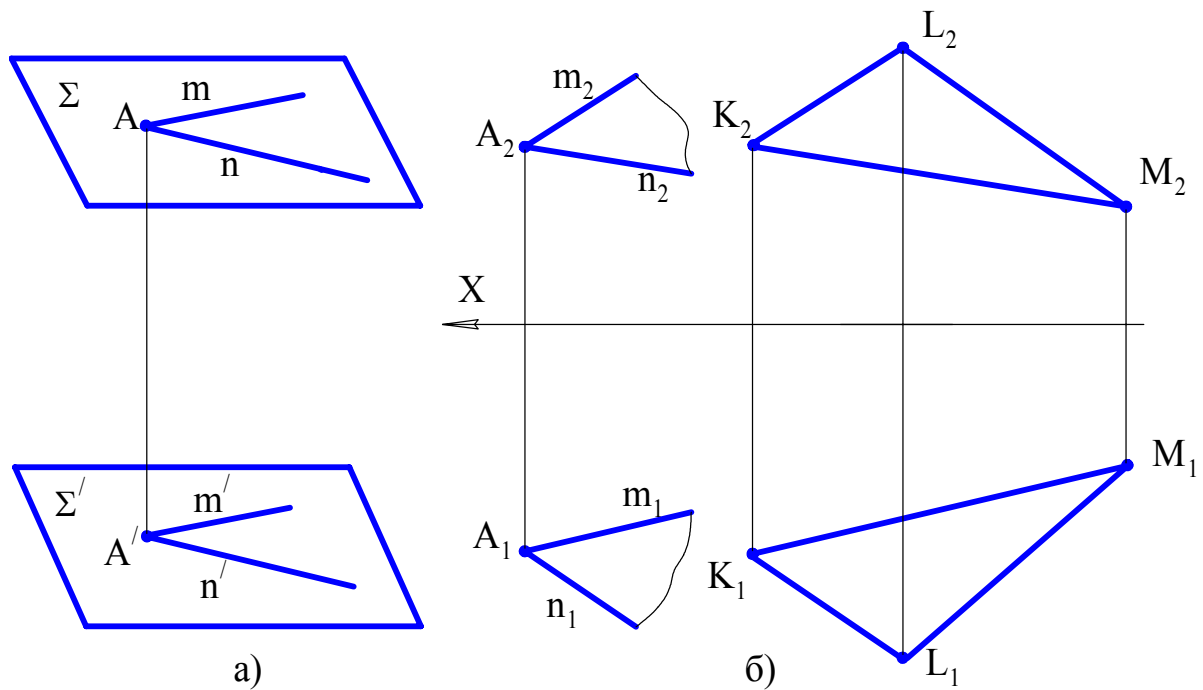


Рис. 5.6

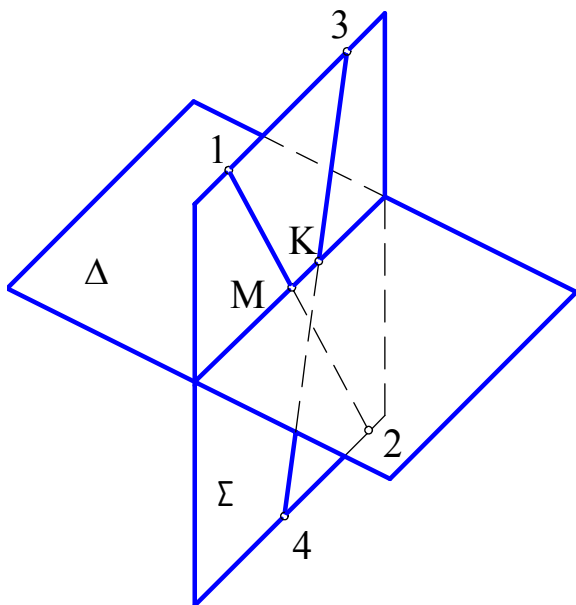


Рис. 5.7

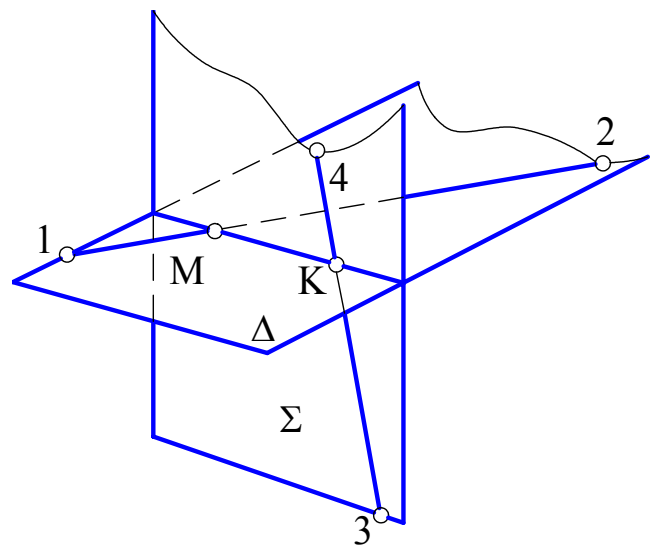


Рис. 5.8

Вариант 2. 1) Выбирают по одной прямой в каждой из заданных плоскостей, например $12 \in \Delta$, а $34 \in \Sigma$ (рис. 5.8); 2) определяют точки M и K пересечения этих прямых с соответствующими плоскостями – $M = 12 \cap \Sigma$, $K = 34 \cap \Delta$; точки M и K определяют искомую прямую.

Рассмотрим решение поставленной задачи на комплексном чертеже для плоскостей общего положения.

Пусть даны плоскости $\Sigma(m \cap n)$ и $\Delta(a \parallel b)$ положения (рис. 5.9). Проведем в плоскости Σ прямую 12 и построим точку пересечения ее с плоскостью Δ . Для

этого в плоскости Δ построим прямую 45, конкурирующую с 12 относительно Π_1 . Прямые 12 и 45 задают горизонтально проецирующую плоскость. В пересечении прямых 12 и 45 получаем точку К искомой линии пересечения. Для построения точки М линии пересечения вводим в плоскости Σ прямую с, параллельную 12 и проходящую через точку 3. Конкурирующей с ней и принадлежащей плоскости Δ является прямая t. В пересечении прямых t и d находим точку М. Точки К и М определяют искомую прямую.

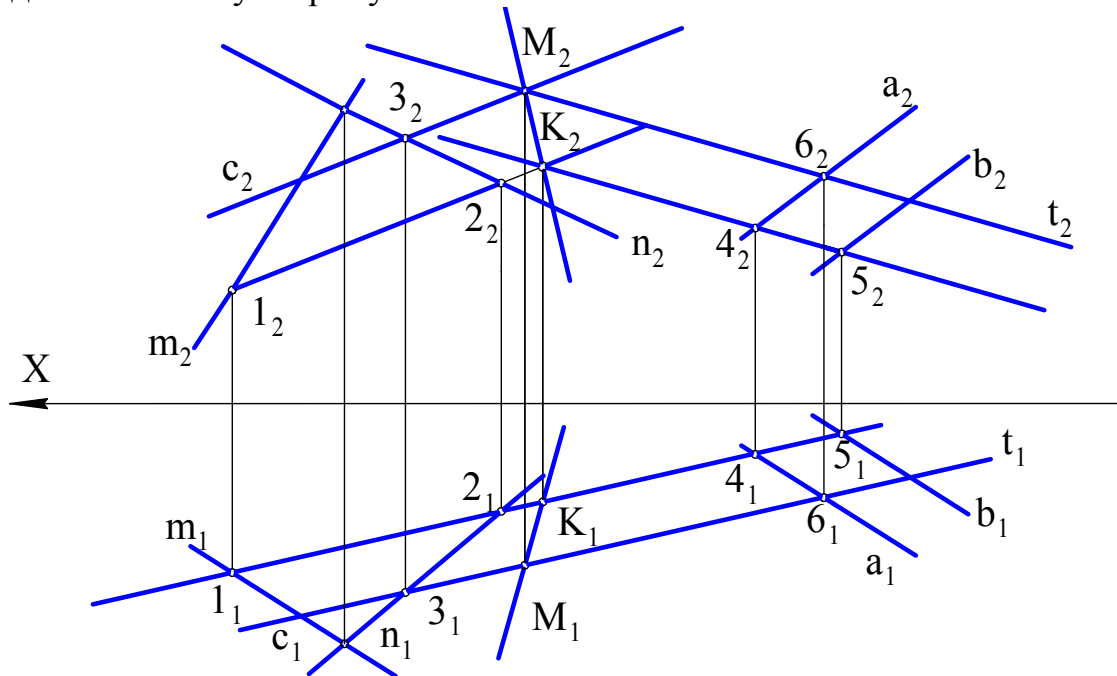


Рис. 5.9

Задача существенно упрощается, если одна из плоскостей занимает проецирующее положение. На рис. 5.10 плоскость $\Sigma(\triangle ABC)$ занимает общее положение, а плоскость $\Delta(\triangle EFG)$ – горизонтально проецирующее. Так как искомая прямая принадлежит обеим плоскостям, то на Π_1 ее проекция будет совпадать с горизонтальным следом плоскости Δ . Фронтальная проекция искомой линии определена из условия принадлежности ее плоскости Σ .

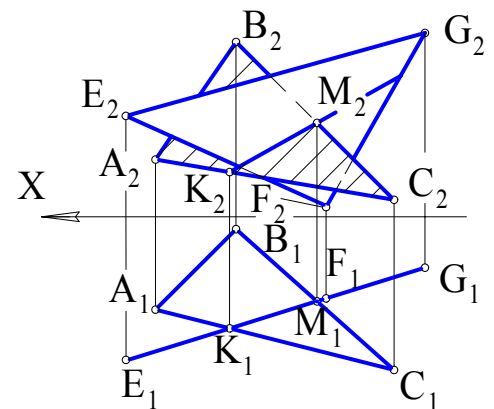


Рис. 5.10

При взгляде на плоскость Π_2 по горизонтальной проекции видно, что часть треугольника ABC находится перед плоскостью Δ . Следовательно, на Π_2 треугольник $K_2C_2M_2$ является видимым. Он выделен штриховкой. Видимыми на Π_2 а, соответственно выделены штриховкой, и треугольники плоскости Σ в окрестностях точек A_2 и B_2 . Это связано с тем, что они находятся вне треугольника EFG и им не перекрываются при взгляде на Π_2 .

6. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ПРЯМОГО УГЛА

К метрическим задачам, изучаемым в учебном курсе начертательной геометрии, относятся задачи, в которых требуется определить метрические характеристики заданной фигуры – длину, угол, площадь и другие, а также метрические свойства и характеристики, обусловленные расположением фигуры относительно плоскостей проекций или относительно другой (других) фигур – перпендикулярность, расстояние и угол. Проекционное решение таких задач основывается на метрических свойствах ортогонального проецирования на плоскость и обратимости чертежа Монжа. Метрическими свойствами ортогонального проецирования являются существующие зависимости между длинами отрезка прямой линии и его проекции, а также между величинами угла и его проекции (см. п. 1). Из этих зависимостей вытекает теорема о проецировании прямого угла: для того чтобы прямой угол проецировался в прямой угол, необходимо и достаточно, чтобы одна его сторона была параллельна плоскости проекций, а другая перпендикулярна этой плоскости. Рассмотрим геометрическое доказательство.

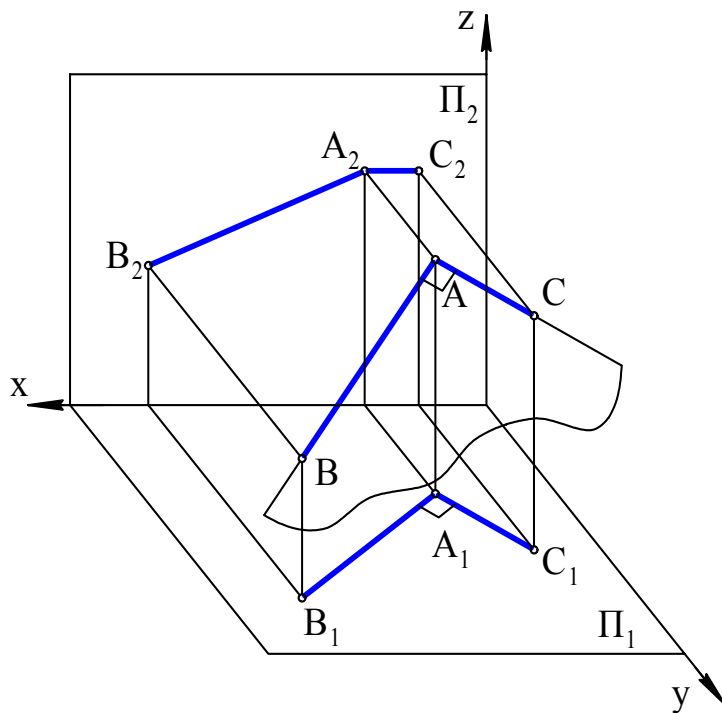


Рис. 6.1

Оно позволяет более наглядно увидеть числовую и проекционную взаимосвязь двух геометрических фигур – прямого угла и его проекции.

Необходимость. Пусть $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$ (рис. 6.1). Докажем, что $AC \parallel \Pi_1$. Предположим, что AB не параллельна Π_1 (если $AB \parallel \Pi_1$, то плоскость угла BAC параллельна Π_1 и по свойству 9 ортогонального проецирования имеем: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$). Поскольку $\angle B_1A_1C_1 \subset \Pi_1$, $\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$ и $AA_1 \perp \Pi_1$, как проецирующая линия, то плоскости $\Sigma(A_1B_1, AA_1)$ и $\Delta(A_1C_1, AA_1)$ взаимно перпендикулярны. В этом случае AB и AA_1

суть наклонная и ее ортогональная проекция на плоскости Δ . Так как $AC \subset \Delta$ и $AC \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах имеем $AC \perp AA_1$, т.е. $AC \parallel \Pi_1$.

Достаточность. Пусть $\angle BAC = 90^\circ$, $AC \parallel \Pi_1$. Докажем, что $\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$. При данных условиях имеем: AB – наклонная, A_1B_1 – ее проекция на Π_1 . По теореме о трех перпендикулярах имеем: $(AC \perp AB, AC \parallel \Pi_1) \Rightarrow AC \perp A_1B_1$. Из $AC \parallel \Pi_1$ следует $AC \parallel A_1C_1$. Следовательно, $A_1C_1 \perp A_1B_1$ и $\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$.

Из обратимости комплексного чертежа (КЧ) следует, что если A_2B_2 , A_1B_1 и C_2B_2 , C_1B_1 – проекции пересекающихся прямых AB и CB , то при выполнении одного из двух следующих проекционных условий:

1) $A_1B_1 \perp C_1B_1$ и $A_2B_2 // x$ либо $C_2B_2 // x$;

2) $A_2B_2 \perp C_2B_2$ и $A_1B_1 // x$ либо $C_1B_1 // x$

в пространстве имеет место перпендикулярность $AB \perp CB$ (рис. 6.2).

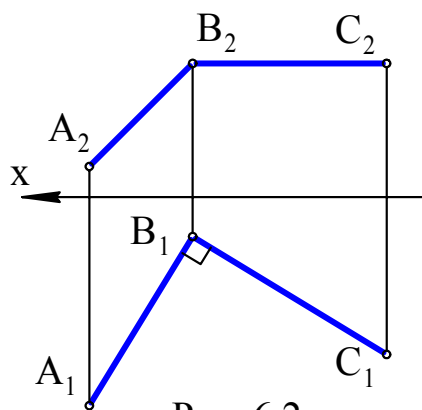


Рис. 6.2

Метрические задачи курса начертательной геометрии можно условно разделить на следующие группы:

1) построение взаимно перпендикулярных фигур: прямых, плоскостей, прямых и плоскостей;

2) определение длин отрезков (расстояний) и натуральной величины (НВ) плоской фигуры;

3) определение углов между фигурами.

Рассмотрим примеры решений на КЧ метрических задач в каждой группе.

7. ПОСТРОЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ФИГУР

В качестве взаимно перпендикулярных будем рассматривать пары фигур: две прямые, прямая и плоскость, две плоскости, прямая и поверхность.

7.1. Перпендикулярность двух прямых

Определение. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° . Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и скрещивающимися.

Задача. Даны прямая AB и точка C . Построить прямую, проходящую через точку C и пересекающую AB под прямым углом (рис. 7.1).

Решение задачи основывается на построениях, приводящих к проекционному изображению условий теоремы о проекции прямого угла (см. рис. 6.2).

Алгоритм решения в символической записи будет следующим:

1) $x_1 // A_1B_1$;

2) $(A_2B_2, A_1B_1) \Rightarrow A_4B_4; (C_2, C_1) \Rightarrow C_4$;

3) $C_4D_4 \perp A_4B_4$;

4) $D_4 \Rightarrow D_1 \in A_1B_1; D_1 \Rightarrow D_2 \in A_2B_2$.

C_1D_1, C_2D_2 – решение задачи.

Задача. Даны прямая AB и точка D (рис. 7.2).

Построить прямую, проходящую через точку D , перпендикулярную прямой AB и образующую с ней кратчайшее расстояние R , где $R < \rho(D, AB)$; ρ – расстояние между фигурами, указанными в скобках.

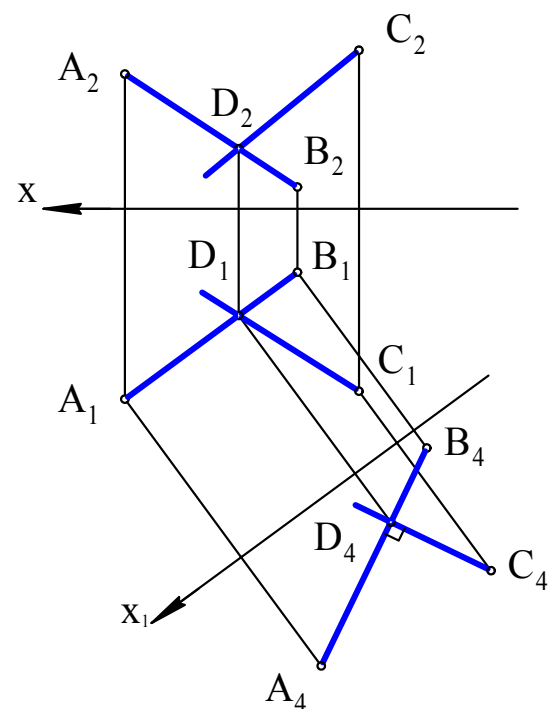


Рис. 7.1

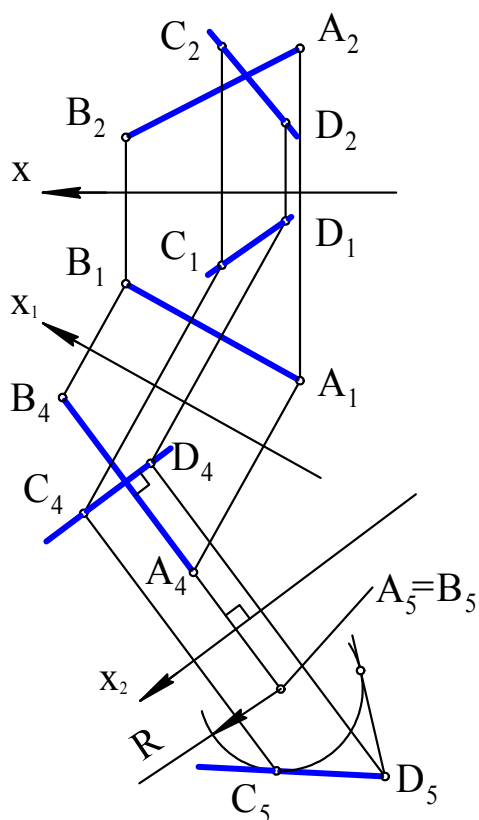


Рис. 7.2

Из условия задачи следует, что заданная и искомая прямая – скрещивающиеся. Концы отрезка кратчайшего расстояния R образуют два множества точек: прямую AB и цилиндрическую поверхность вращения с осью AB . Из точки D можно провести лишь две прямые, касательные к цилиндрической поверхности и образующие угол 90° с прямой AB . Алгоритм решения данной задачи в символической записи имеет вид:

- 1) $x_1 \parallel A_1B_1$;
 - 2) $(A_2B_2, A_1B_1) \Rightarrow A_4B_4; (D_1, D_2) \Rightarrow D_4$;
 - 3) $x_2 \perp A_4B_4$;
 - 4) $(A_1B_1, A_4B_4) \Rightarrow A_5 = B_5; (D_1, D_4) \Rightarrow D_5$;
 - 5) D_5C_5 – касательная к окружности радиуса R ; $D_4C_4 \perp A_4B_4$;
 - 6) $(C_5, C_4) \Rightarrow C_1; (C_4, C_1) \Rightarrow C_2$.
- C_2D_2, C_1D_1 – одно из двух решений задачи.

7.2. Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости.

Приведем без доказательства известные в школьном курсе стереометрии теоремы, необходимые для решения последующих метрических задач.

1. Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

3. Через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

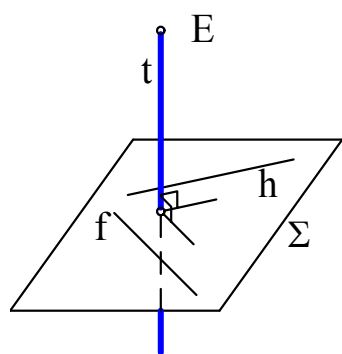


Рис. 7.3

Для построения прямой $t \in E$, перпендикулярной плоскости Σ , необходимо, на основании признака перпендикулярности, провести в плоскости две пересекающиеся прямые h и f , а затем построить прямую t по условиям: $t \perp h, t \perp f$ (рис. 7.3). В общем случае прямые t и h, t и f – пары скрещивающихся прямых.

Задача. Даны плоскость $\Sigma(\triangle ABC)$ и точка E .

Построить прямую t по условиям: $t \in E$, $t \perp \Sigma$ (рис. 7.4).

Решение задачи может быть следующим:

1) строятся линии уровня h и f в плоскости Σ , где $h_2 \parallel x$, $f_1 \parallel x$;

2) строятся проекции t_1 и t_2 искомой прямой t , где $t_2 \in E_2$, $t_2 \perp f_2$; $t_1 \in E_1$, $t_1 \perp h_1$. В итоге t_1 , t_2 – решение задачи. Прямая t скрещивается с f и h .

Выбор линий уровня h и f в качестве пересекающихся прямых в плоскости Σ продиктован приведенными выше условиями теоремы о проецировании прямого угла и простотой построений на КЧ. Если точка E находится в плоскости Σ , то последовательность построений остается прежней.

Задача. Даны прямая t и точка E . Построить плоскость, проходящую через точку E и перпендикулярную прямой t (рис. 7.5).

Решение задачи основывается на построении двух линий уровня $h(h_1, h_2)$ и $f(f_1, f_2)$, проходящих через точку E : $h_2 \in E_2$, $h_2 \parallel x$, $h_1 \in E_1$, $h_1 \perp t_1$; $f_1 \in E_1$, $f_1 \parallel x$, $f_2 \in E_2$, $f_2 \perp t_2$. Плоскость (h, f) – решение задачи.

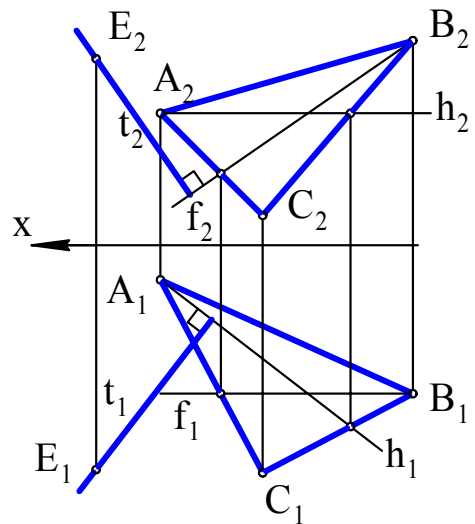


Рис. 7.4

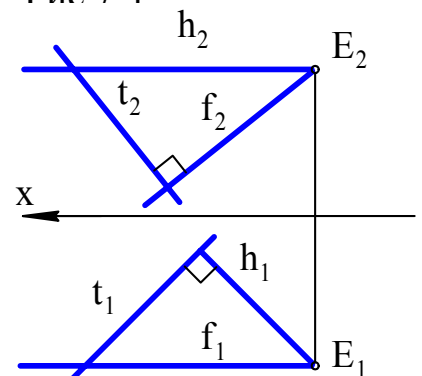


Рис. 7.5

7.3. Линии наибольшего наклона

Приведем известную в начертательной геометрии теорему: прямые в плоскости, перпендикулярные ее линиям уровня, являются линиями наибольшего наклона этой плоскости к плоскостям проекций. Эта теорема позволяет выполнять построения линий наибольшего наклона на КЧ.

Задача. Дана плоскость $\Sigma(\triangle ABC)$. Построить ее линии наибольшего наклона относительно плоскостей проекций Π_1 и Π_2 (рис. 7.6), проходящие через вершину B . Алгоритм проекционного решения задачи будет следующим:

1) строятся в плоскости Σ линии уровня $h(h_1, h_2)$ и $f(f_1, f_2)$, где $h_2 \parallel x$, $f_1 \parallel x$;

2) строится вначале $m_2 \in B_2$, $m_2 \perp f_2$, затем m_1 ;

3) строится вначале $n_1 \in B_1$, $n_1 \perp h_1$, затем n_2 .

Линия $m(m_1, m_2)$ определяет наибольший наклон плоскости Σ к плоскости проекций Π_2 , а линия $n(n_1, n_2)$ определяет наибольший наклон плоскости Σ к плоскости проекций Π_1 .

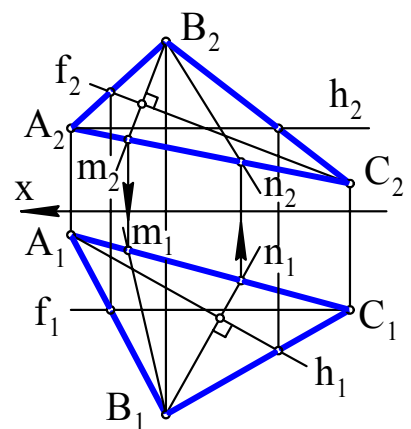


Рис. 7.6

7.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

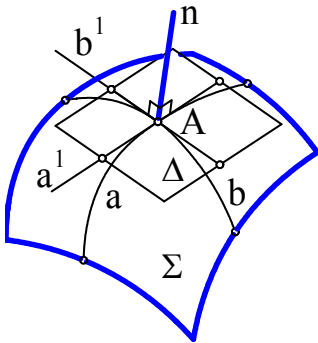


Рис. 7.7

В обыкновенной точке A поверхности Σ можно построить единственную касательную плоскость (рис. 7.7). Для этого на поверхности через точку A необходимо провести две кривые a и b , а затем построить две касательные a^1 и b^1 соответственно к a и b . Касательная плоскость Δ образована прямыми a_1 и b_1 . Прямая $n \perp \Delta$ называется нормалью поверхности Σ в точке A .

Задача. Даны сфера и точка A на ней. Построить касательную плоскость и нормаль к сфере в точке A (рис. 7.8).

Решение задачи может быть выполнено следующим образом:

- 1) построим две окружности $a(a_1, a_2)$ и $b(b_1, b_2)$ на сфере, пересекающиеся в точке $A(A_1, A_2)$;
- 2) проведем две касательные $a^1(a_1^1, a_2^1)$ и $b^1(b_1^1, b_2^1)$ к окружностям a и b соответственно; искомая касательная плоскость образуется касательными a^1 и b^1 ;
- 3) построим нормаль $n(n_1, n_2)$ к поверхности сферы по следующим условиям: $n_1 \perp b_1^1, n_2 \perp a_2^1$.

Заметим, что поверхность сферы состоит только из обыкновенных точек.

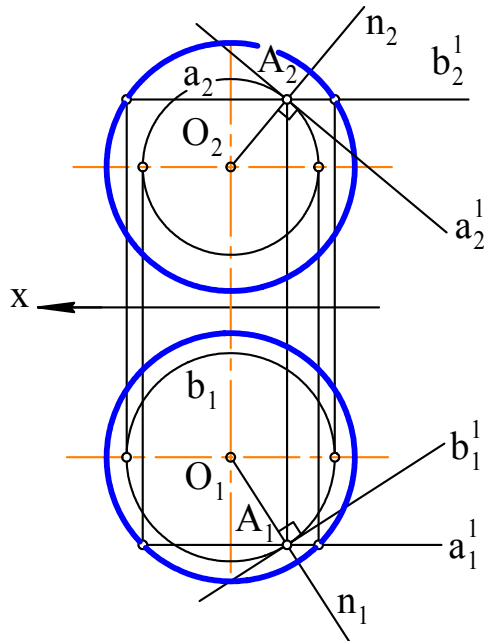


Рис. 7.8

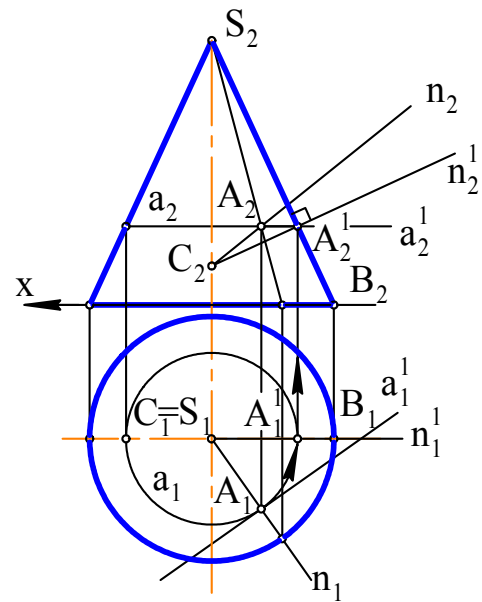


Рис. 7.9

Задача. Даны коническая поверхность вращения и точка A на ней. Построить касательную плоскость и нормаль к поверхности в точке A (рис. 7.9).

Решение задачи:

- 1) построим на конической поверхности две линии, пересекающиеся в точке A : окружность $a(a_1, a_2)$ и прямую $b = SA(S_1A_1, S_2A_2)$;
- 2) проведем касательную $a^1(a_1^1, a_2^1)$ к окружности a ; две пересекающиеся в точке A прямые a_1 и SA образуют касательную плоскость к поверхности конуса;

3) при помощи преобразования вращения (см. рис. 7.9) построим промежуточное положение $n^1(n_1^1, n_2^1)$ искомой нормали n , а затем ее искомое положение $n(n_1, n_2)$.

Вершина S – единственная особая точка на поверхности конуса.

7.5. Перпендикулярность двух плоскостей

Определение. Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° . Приведем без доказательства теоремы стереометрии, полезные для решения последующих метрических задач.

1. Признак перпендикулярности двух плоскостей: если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.

3. Для наклонной прямой, не являющейся перпендикуляром к плоскости, имеет место утверждение: через наклонную проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной плоскости.

Последнее утверждение позволяет предложить следующий алгоритм построения плоскости, проходящей через наклонную AB и перпендикулярную заданной плоскости Σ :

1) на AB выбирается произвольная точка E ;

2) строится прямая t таким образом, что $t \in E$, $t \perp h$, $t \perp f$, где $h \subset \Sigma$, $f \subset \Sigma$ (рис. 7.10), т.е. $t \perp \Sigma$.

Плоскость (AB, t) будет единственной плоскостью, перпендикулярной плоскости Σ . Заметим, что через прямую $t \perp \Sigma$ проходит не одна плоскость, перпендикулярная Σ .

Задача. Дана плоскость $\Sigma(CD, MN)$, где $CD \parallel MN$ и прямая AB (рис. 7.11).

Построить на КЧ плоскость, проходящую через AB и перпендикулярную плоскости Σ .

Алгоритм проекционного решения задачи:

1) строятся линии уровня $h(h_1, h_2)$ и $f(f_1, f_2)$ в плоскости Σ , при этом $h_2 \parallel x$, $f_1 \parallel x$;

2) строятся проекции t_1 и t_2 прямой t таким образом, что $t_2 \in E_2$, $t_2 \perp f_2$; $t_1 \in E_1$, $t_1 \perp h_1$, где $E \in AB$ – произвольная точка. Плоскость (AB, t) – решение задачи.

Задача. Даны плоскости $\Sigma(AB, DC)$ и $\Delta(KL, PT)$, где $AB \cap DC$, $KL \parallel PT$, а также точка E . Построить плоскость, проходящую через точку E и перпендикулярную обеим плоскостям Σ и Δ (рис. 9.9).

Одно из возможных решений данной задачи состоит в следующем. Вначале строится линия пересечения заданных плоскостей $t = \Sigma \cap \Delta$. Затем, на основании приведенных теорем стереометрии, строится плоскость, проходящая через точку E и перпендикулярная линии t . Будучи единственной, эта плоскость представляет собой решение задачи.

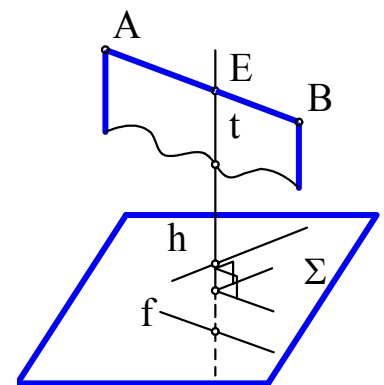


Рис. 7.10

Возможен другой алгоритм решения данной задачи (см. рис. 9.8):

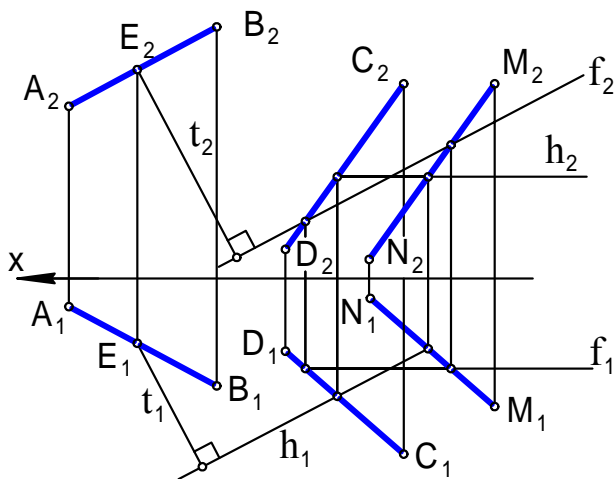


Рис. 7.11

1) из данной точки E опускается перпендикуляр a на плоскость Σ ;

2) из точки E опускает перпендикуляр b на плоскость Δ .

Плоскость (a, b) , где $a \cap b = E$, есть решение задачи. Рассмотрим реализацию этого алгоритма на КЧ (см. рис. 9.9).

1. В плоскости Σ построим линии уровня $h^1(h^1_1, h^1_2)$ и $f^1(f^1_1, f^1_2)$. При этом $h^1_2 \parallel x$; $f^1_1 \parallel x$.

2. В плоскости Δ построим линии уровня $h^2(h^2_1, h^2_2)$ и $f^2(f^2_1, f^2_2)$. При этом $h^2_2 \parallel x$; $f^2_1 \parallel x$.

3. Из точки E опускаются два перпендикуляра: $a \perp \Sigma$, $b \perp \Delta$. При этом $a_2 \perp f^2_2$, $a_1 \perp h^1_1$; $b_2 \perp f^2_2$, $b_1 \perp h^2_1$.

Две прямые a и b , пересекающиеся в точке E , определяют искомую плоскость, т.е. плоскость, перпендикулярную заданным плоскостям Σ и Δ .

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

Рассмотрим только определение расстояний, поскольку НВ плоской фигуры была рассмотрена в п. 4.

8.1. Расстояние от точки до фигуры (точки, прямой, плоскости)

Приведем сведения из планиметрии, необходимые для решения обозначенных задач.

1. Длина отрезка есть расстояние между его концами.
2. Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

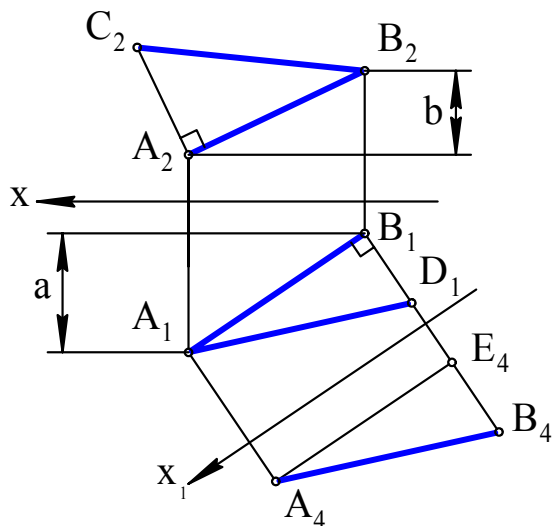


Рис. 8.1

Задача. Определить длину отрезка AB (рис. 8.1).

В п. 4 было приведено решение этой задачи методом замены плоскостей проекций. Рассмотрим другое решение – решение методом прямоугольного треугольника. Его обоснование выполним, опираясь на указанный метод замены. Выполняя решение данной задачи методом замены, получим A_4B_4 – искомую длину. Видим, что в соответствии с методом замены $E_4B_4 = b$. Поэтому, отложив на линии $B_1B_4 \perp x_1$ от точки B_1 отрезок $B_1D_1 = E_4B_4 = b$, получим прямоугольный

треугольник $A_1B_1D_1$, в котором $A_1D_1 = A_4B_4$, т.е. длина гипотенузы A_1D_1 есть искомая длина. Следовательно, длину отрезка AB можно определить на плоскости проекций Π_1 используя расстояние b , снятое на плоскости проекций Π_2 . При этом замена плоскостей проекций с осью x_1 не нужна. Аналогично можно определить искомую длину на плоскости Π_2 . Для этого выстраиваем прямоугольный треугольник $B_2A_2C_2$, у которого $C_2A_2 = a$, где a определено на Π_1 . В итоге получаем $B_2C_2 = B_1C_1$ – искомая длина отрезка AB . Понятно, что необходимо строить лишь один из двух приведенных прямоугольных треугольников.

Задача. Даны прямая AB и точка E вне прямой (рис. 8.2). Требуется определить расстояние $\rho(E, AB)$.

Проекционный алгоритм решения может быть следующим:

1) методом замены плоскостей проекций определяется длина отрезка AB . На Π_4 она равна A_4B_4 ;

2) строится дополнительная на Π_4 проекция E_4 точки E ;

3) вводится новая система плоскостей проекций Π_4, Π_5 такая, что ее ось проекций x_2 перпендикулярна A_4B_4 ;

4) на Π_5 строятся дополнительные проекции отрезка AB и точки E . Проекциями будут соответственно точки $A_5 = B_5$ и E_5 .

Расстояние $\rho(F_5, E_5)$ является искомым расстоянием между данными прямой и точкой. Возвращаем затем последовательно проекции отрезка EF на Π_4, Π_1, Π_2 . Для этого проводим вначале $E_4F_4 \parallel x_2$, а затем строим: $(F_5, F_4) \Rightarrow F_1$;

$(F_4, F_1) \Rightarrow F_2$.

В итоге получаем E_1F_1, E_2F_2 – основные проекции отрезка EF , длина которого есть искомое расстояние. Необходимо отметить, что если не учитывать полученные построения на Π_5 , то оставшиеся построения на Π_2, Π_1 и Π_4 соответствуют решению задачи о проведении прямой EF через данную точку E , пересекающей под 90° данную прямую AB .

Задача. Даны плоскость Σ ($\triangle ABC$) и точка E . Определить расстояние от точки E до плоскости Σ (рис. 8.3).

Решение задачи может быть выполнено методом замены плоскостей проекций. Проекционный алгоритм решения в этом случае следующий:

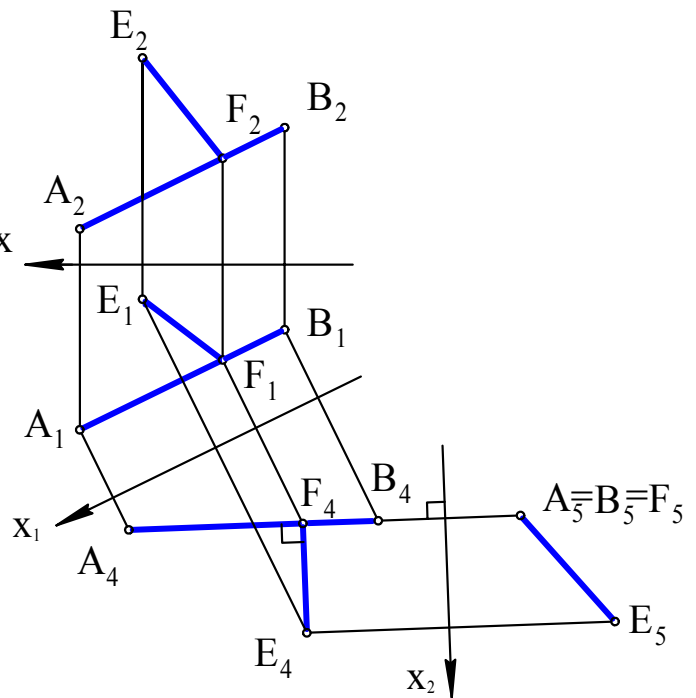


Рис. 8.2

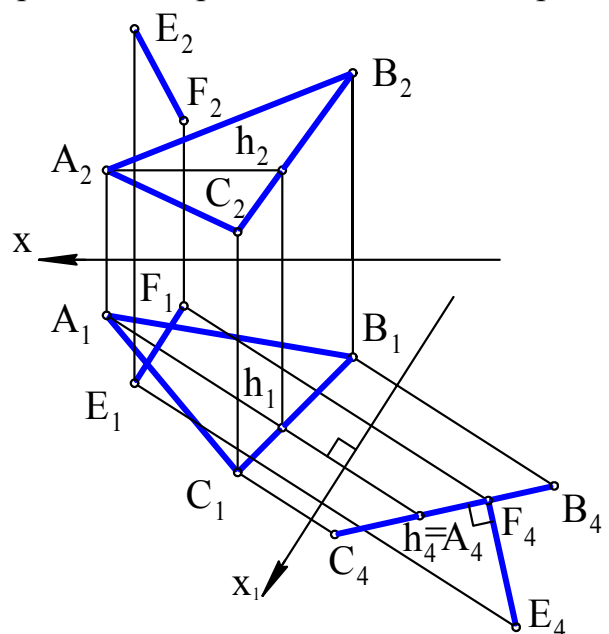


Рис. 8.3

- 1) в плоскости Σ строится линия уровня, например $h(h_1, h_2)$, так, что $h_2 \parallel x$;
- 2) вводится новая система плоскостей проекций Π_1, Π_4 с осью x_1 так, что $x_1 \perp h_1$;
- 3) на Π_4 строятся дополнительные проекции заданных фигур – B_4C_4 для $\triangle ABC$ и E_4 для точки E ;
- 4) длина перпендикуляра E_4F_4 есть искомое расстояние $\rho(E, \Sigma)$.

Для полноты решения строим проекции отрезка EF на основных плоскостях проекций. Для этого строим вначале $E_1F_1 \parallel x_1$, а затем $(F_4, F_1) \Rightarrow F_2$; E_2F_2 , E_1F_1 – основные проекции отрезка EF длины ρ .

8.2. Определение расстояния между параллельными фигурами

Задача. Даны параллельные прямые AB и CD . Определить расстояние между этими прямыми (рис. 8.4).

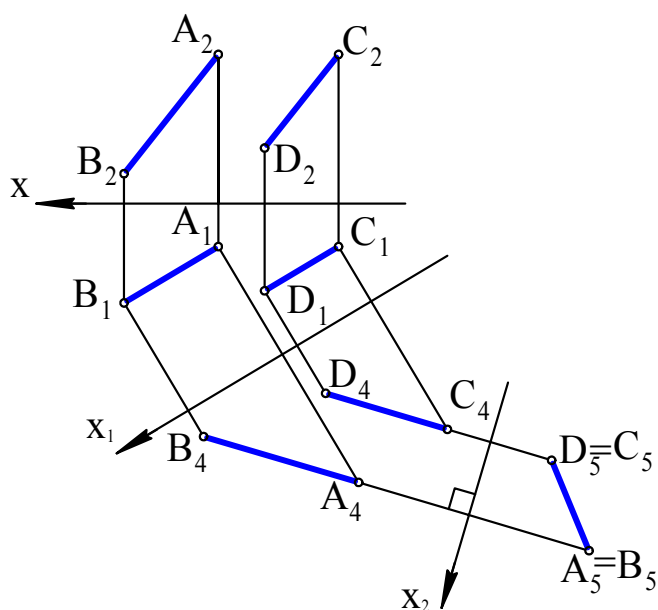


Рис. 8.4

Решение задачи выполним методом замены плоскостей проекций. Для этого вначале введем новую систему плоскостей проекций Π_1, Π_4 с осью проекций $x_1 \parallel A_1B_1$ и определим НВ отрезков AB и CD . Получим $A_4B_4 = \text{НВ}$ отрезка AB ; $D_4C_4 = \text{НВ}$ отрезка DC . Затем введем новую систему плоскостей проекций Π_4, Π_5 с осью $x_2 \perp A_4B_4$ и построим точки $D_5 = C_5$ и $A_5 = B_5$, которые будут вырожденными проекциями отрезков AB и CD . Искомым расстоянием $\rho(AB, CD)$ будет $\rho(A_5, D_5)$. Остается построить основные проекции отрезка длины ρ . Эту часть решения задачи предлагается выполнить самостоятельно.

Задача. Даны параллельные фигуры: прямая a и плоскость Σ . Определить расстояние между a и Σ (рис. 8.5).

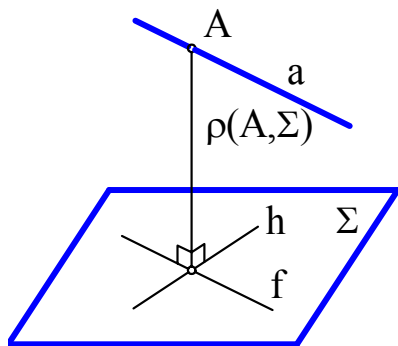


Рис. 8.5

Для решения задачи необходимо взять на прямой a произвольную точку A и определить расстояние $\rho(A, \Sigma)$.

Так как $\rho(a, \Sigma) = \rho(A, \Sigma)$, то расстояние $\rho(A, \Sigma)$ будет решением данной задачи. Определение расстояния $\rho(A, \Sigma)$ было показано ранее.

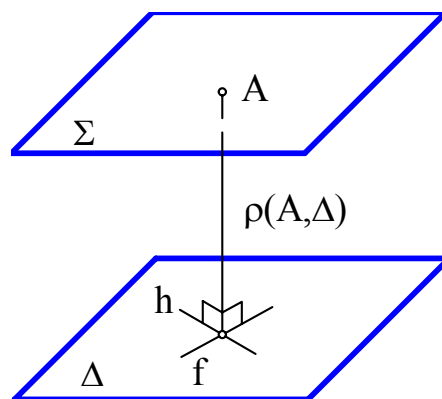


Рис. 8.6

Задача. Даны параллельные плоскости Σ и Δ . Определить расстояние между Σ и Δ (рис. 8.6).

Для решения задачи необходимо взять на одной из плоскостей, например Σ , точку A и определить расстояние $\rho(A, \Delta)$. Так как $\rho(\Sigma, \Delta) = \rho(A, \Delta)$, то найденное расстояние $\rho(A, \Delta)$ будет решением задачи.

8.3. Определение расстояния между скрещивающимися прямыми

Приведем без доказательств сведения из стереометрии, необходимые для решения названной задачи.

1. Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на данных прямых и который перпендикулярен к ним.

2. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых существует и единствен.

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Задача. Даны скрещивающиеся прямые AB и CD . Определить расстояние между прямыми (рис. 8.7).

Решение задачи выполним методом замены плоскостей проекций. Проекционный алгоритм решения в этом случае может быть следующим:

1) вводится новая система плоскостей проекций Π_1, Π_4 , таким образом, что $\Pi_4 \parallel AB$, т.е. на КЧ строится ось $x_1 \parallel A_1B_1$;

2) на Π_4 строятся новые проекции A_4B_4 (НВ отрезка AB) и C_4D_4 ;

3) вводится новая система плоскостей Π_4, Π_5 с осью $x_2 \perp A_4B_4$ такая, что $\Pi_5 \perp AB$;

4) на Π_5 строятся новые проекции – отрезок C_5D_5 и точка $A_5 = B_5$;

5) строится перпендикуляр $E_5F_5 \perp C_5D_5$ из точки $E_5 (= A_5 = B_5)$;

В итоге, по смыслу построений в методе замены плоскостей проекций и приведенному понятию расстояния между скрещивающимися прямыми, получаем, что $\rho(E_5, C_5D_5) = \rho(AB, CD)$. Для полноты решения задачи необходимо вернуть отрезок EF длиной $\rho(AB, CD)$ на исходные плоскости проекций:

1) строим $E_4F_4 \parallel x_2$;

2) строим E_1F_1 по проекциям E_5F_5, E_4F_4 ; E_2F_2 по проекциям E_4F_4, E_1F_1 .

Отрезки E_2F_2, E_1F_1 представляют собой основные проекции отрезка EF .

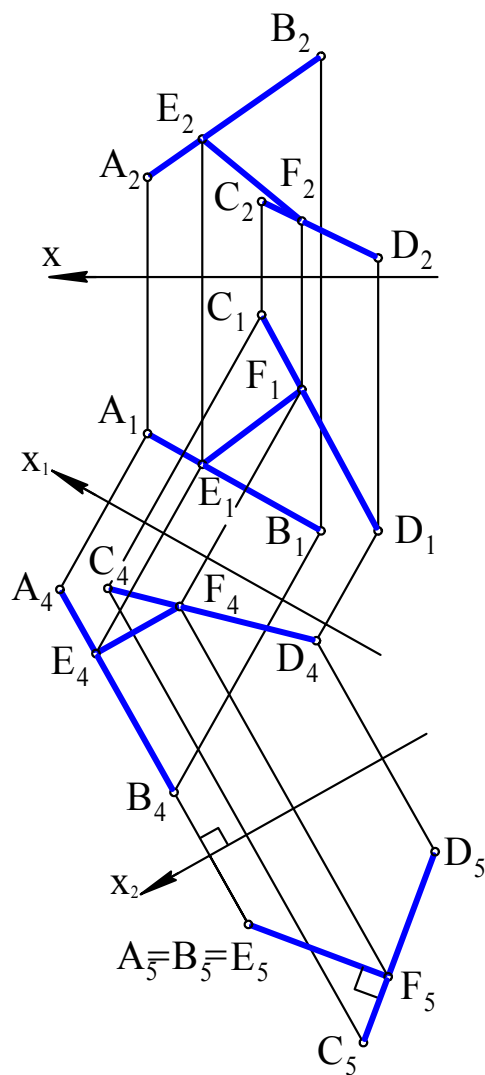


Рис. 8.7

В стереометрии известно еще одно определение рассматриваемого расстояния: расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проведенными через эти прямые.

Такое определение расстояния позволяет предложить более короткий путь решения рассматриваемой задачи. Пусть AB и CD – скрещивающиеся прямые (рис. 8.8). Переместим в пространстве прямую AB параллельно самой себе в положение A^1B^1 до пересечения с CD . Если взять теперь на прямой AB любую точку E и опустить из этой точки перпендикуляр EE^1 на образовавшуюся плоскость $\Sigma(CD, A^1B^1)$, то длина этого перпендикуляра будет искомым расстоянием $\rho(AB, CD)$. Рассмотрим проекционное решение задачи.

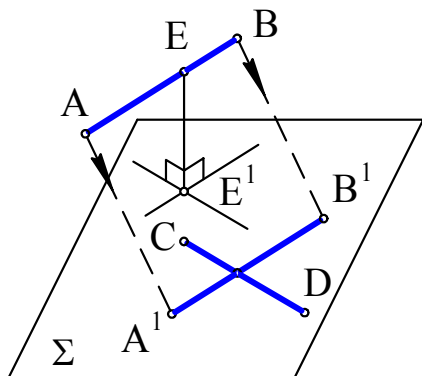


Рис. 8.8

Задача. Даны скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 8.9). Определить расстояние между ними.

Решение задачи может быть следующим.

1. Перенесем прямую AB параллельно самой себе до пересечения с CD . Таких переносов может быть бесконечное множество. Один из переносов, например $A_1B_1 \rightarrow A_1^1B_1^1$, $A_2B_2 = A_2^1B_2^1$ – наиболее простой для данного КЧ вариант.

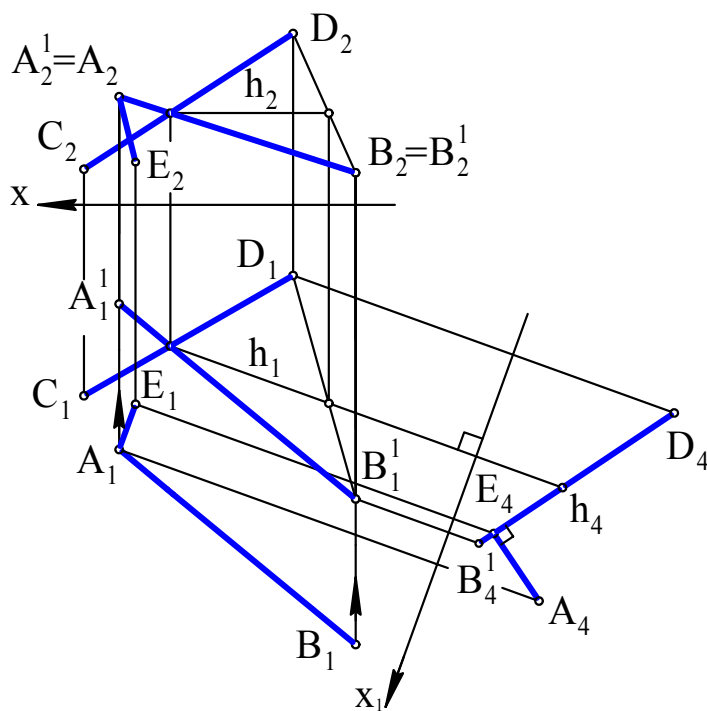


Рис. 8.9

2. Получаем новые условия задачи: задана плоскость $\Sigma(A^1B^1, CD)$, где $A^1B^1 \cap CD$ и точка A ; требуется определить расстояние $\rho(A, \Sigma)$. Решение задачи выполняется методом замены плоскостей проекций по ранее изложенной схеме проекционного решения.

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ МЕЖДУ ФИГУРАМИ

Фигуры пространства: прямые линии, плоскости, прямые и плоскости могут образовывать между собой углы – геометрические фигуры с соответствующими этим фигурам величинами. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в начертательной геометрии углы.

9.1. Углы между прямыми

Приведем известные из школьного курса стереометрии понятия и определения, необходимые для решения последующих метрических задач:

1) плоский угол – фигура, образованная двумя лучами с общим началом и одной

из плоских областей, ограниченной ими;

2) угол между пересекающимися прямыми – величина наименьшего из плоских углов, образованных этими прямыми;

3) угол между скрещивающимися прямыми – это угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

В последнем определении величина угла между двумя скрещивающимися прямыми не зависит от выбора пары пересекающихся прямых, параллельных им. Рассмотрим несколько задач на определение углов.

Задача. Даны пересекающиеся отрезки АВ и АС (рис. 9.1). Определить угол между ними.

Поскольку искомый угол является плоской фигурой, то решение задачи сводится к определению НВ плоской фигуры. Ее проекционное решение изложено в п. 1. Напомним алгоритм этого решения. Он основан на методе замены плоскостей проекций и применительно к условиям данной задачи может быть следующим:

1) строится линия уровня, например, $h(h_1, h_2)$, принадлежащая плоскости $\Sigma(AB, AC)$, при этом $h_2 \parallel x$;

2) строится ось проекции $x_1 \perp h_1$, что соответствует введению в пространстве новой системы плоскостей проекций Π_1, Π_4 , где $\Pi_4 \perp h$;

3) на Π_4 строится вырожденная проекция B_4C_4 плоскости Σ ;

4) строится ось проекции $x_2 \parallel B_4C_4$, что соответствует введению в пространстве новой системы плоскостей проекций Π_4, Π_5 , где $\Pi_5 \parallel \Sigma$;

5) на Π_5 строится угол $\angle(A_5C_5, A_5B_5) = \alpha$, который и является искомым.

Задача. Даны две скрещивающиеся прямые АВ и CD (рис. 9.2). Определить угол между ними.

Решение задачи выполним, опираясь на определение угла между скрещивающимися прямыми, приведенное выше, а также учитывая алгоритм проекционного решения предыдущей задачи. Для этих целей переместим одну из прямых, например DC, в положение, когда она, оставаясь параллельной самой себе, будет пересекать другую прямую АВ. Таких положений существует бесчисленное множество. Одно из них, например D^1C^1 ($D_1^1C_1^1, D_2^1C_2^1$), где $D_1^1C_1^1 \parallel D_1C_1$, $D_2^1C_2^1 = D_2C_2$, показано на КЧ (см. рис. 9.2). В итоге получаем пару пересекающихся прямых $AB \cap D^1C^1$, угол между которыми может быть определен на основании вышеприведенного алгоритма.

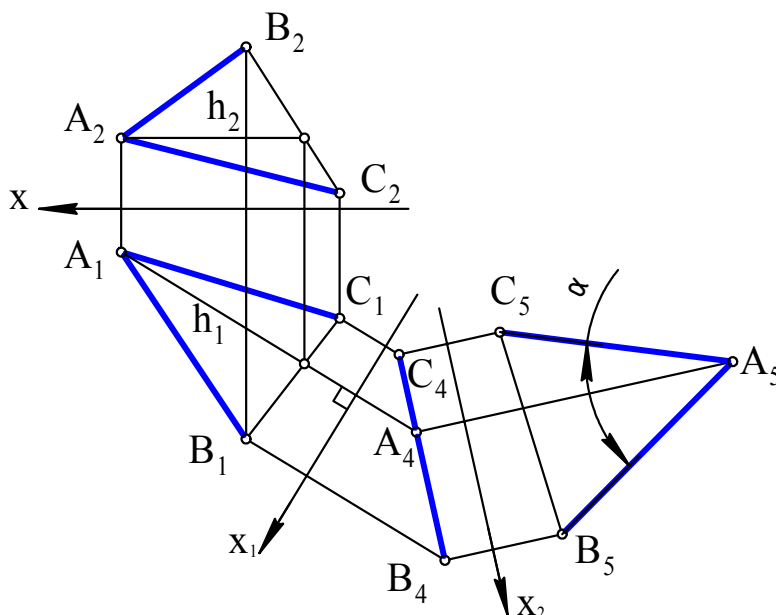


Рис. 9.1

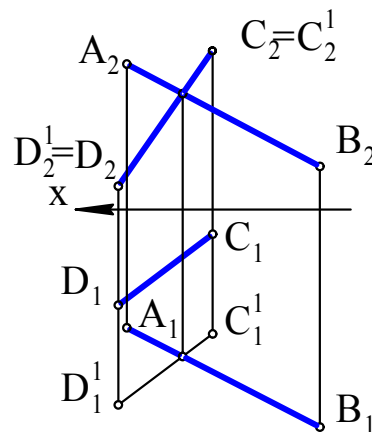


Рис. 9.2

Эту часть решения задачи рекомендуется выполнить самостоятельно.

Рассмотрим еще одно проекционное решение данной задачи. Смысл его заключается в построении такой дополнительной плоскости проекций, на которой ортогональные проекции заданных скрещивающихся прямых суть пересекающиеся прямые, соответственно параллельные этим скрещивающимся прямым. Угол между такими ортогональными проекциями является искомым. Указанная плоскость проекций перпендикулярна прямой кратчайшего расстояния между заданными скрещивающимися прямыми.

Задача. Даны скрещивающиеся прямые AB и CD . Определить угол между ними (рис. 9.3).

Проекционное решение этой задачи, в соответствии с предложенной выше схемой, будет следующим:

1) строится ось проекции $x_1 \parallel C_1D_1$ (x_1 можно строить параллельно любой из четырех ортогональных проекций прямых AB и CD), которая вместе с плоскостями Π_1 , Π_4 образует новую систему плоскостей проекций, такую, что $\Pi_4 \parallel CD$;

2) на Π_4 строятся дополнительные проекции A_4B_4 , C_4D_4 прямых AB и CD , при этом C_4D_4 есть HB отрезка CD ;

3) строится ось проекции $x_2 \perp C_4D_4$, которая вместе с Π_4 , Π_5 образует новую систему плоскостей проекций, такую, что $\Pi_5 \perp CD$;

4) на Π_5 строятся дополнительные проекции A_5B_5 и $C_5 = D_5$ прямых AB и CD ;

5) строится ось проекции $x_3 \parallel A_5B_5$, которая вместе с Π_5 , Π_6 образует новую систему плоскостей проекций, такую, что $\Pi_6 \parallel AB$;

6) на Π_6 строятся дополнительные проекции A_6B_6 и C_6D_6 , представляющих собой HB прямых AB и CD и образующих между собой угол α , являющийся решением задачи.

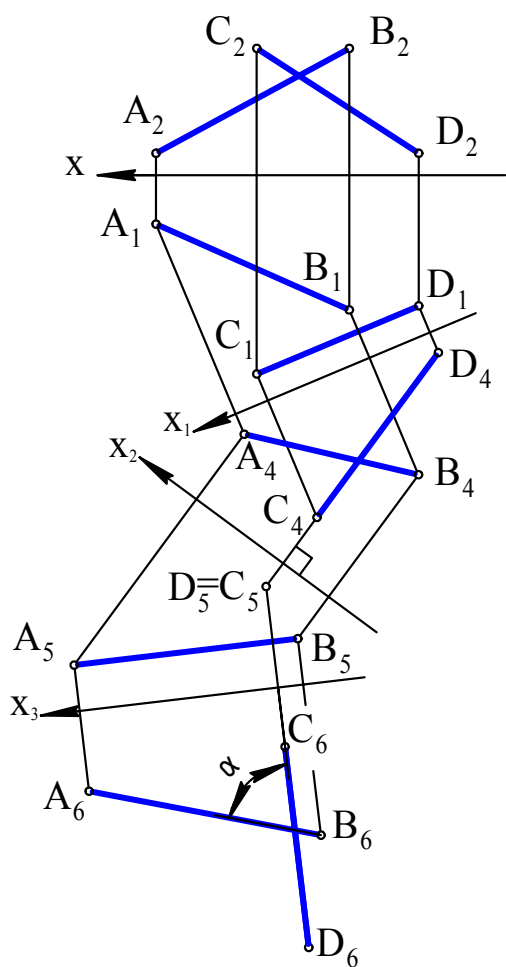


Рис. 9.3

9.2. Угол между прямой и плоскостью

Определение. Углом между наклонной прямой и плоскостью называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Если прямая параллельна плоскости или лежит в ней, то угол между прямой и плоскостью принимается равным нулю. В случае перпендикулярности прямой и плоскости угол между ними по определению равен 90° . Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью заключен в отрезке $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Задача. Даны прямая DE (рис. 9.4) и плоскость $\Sigma(\triangle ABC)$. Определить угол между ними.

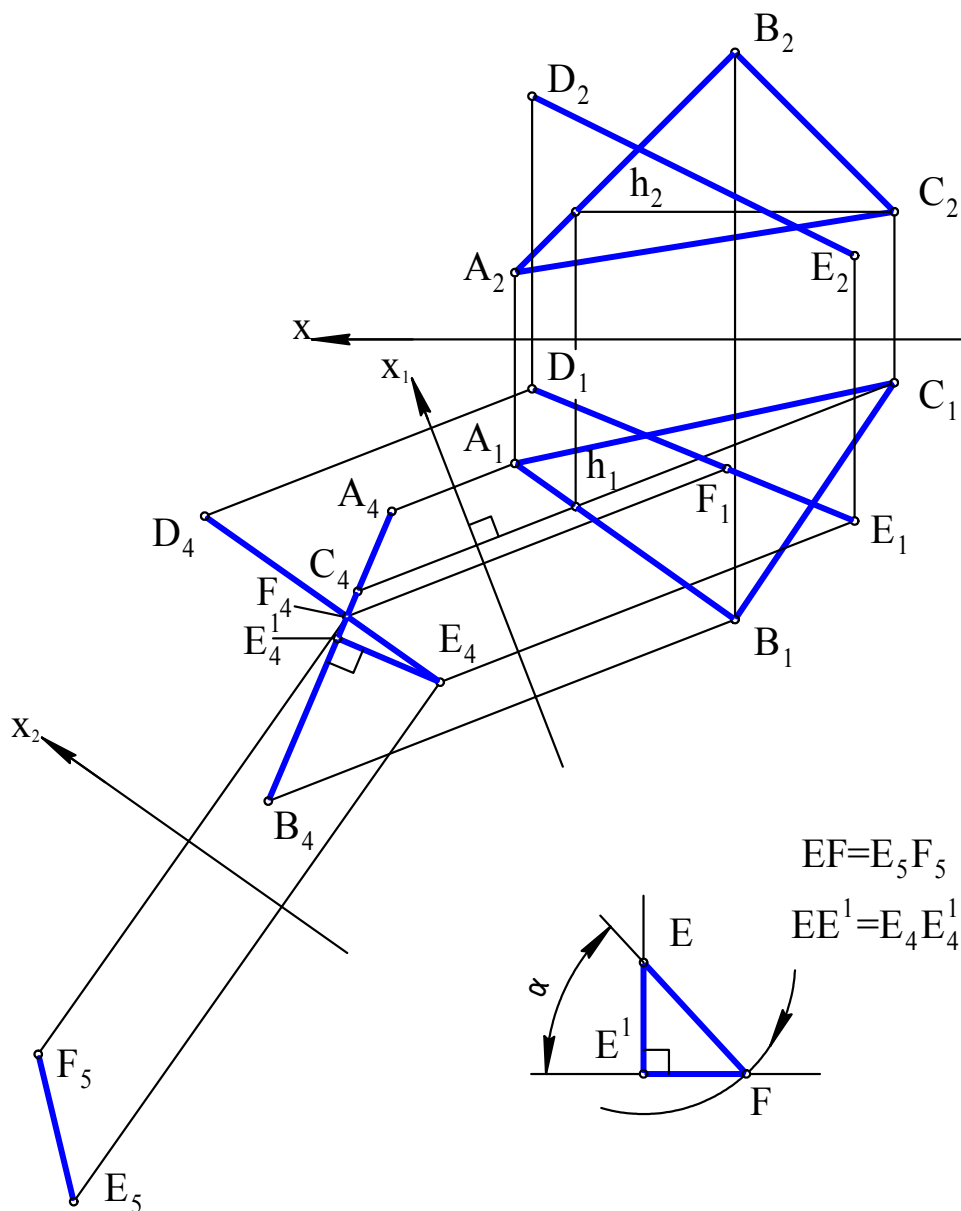


Рис. 9.4

Проекционное решение задачи основывается на построении прямоугольного треугольника EE^1F (рис. 9.5), в котором: EF – гипотенуза на заданной наклонной a , при этом E – произвольная точка, $F = a \cap \Sigma$, Σ – заданная плоскость; E^1F – катет на плоскости Σ , который представляет собой ортогональную проекцию отрезка EF ; $\alpha = \angle(EF, FE^1)$ есть искомый угол. Рассмотрим алгоритм проекционного решения, который представлен на рисунке 9.4.

1. В плоскости Σ выбирается линия уровня, например, горизонталь $h(h_1, h_2)$. При этом $h_2 \parallel x$.

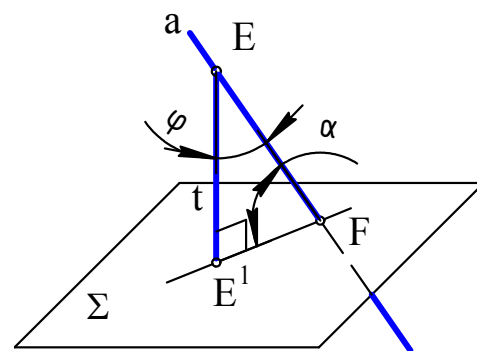


Рис. 9.5

2. Вводится новая система плоскостей проекций Π_1, Π_4 с осью $x_1 \perp h_1$, такая, что $\Pi_4 \perp h$.

3. На Π_4 строится вырожденная проекция A_4B_4 плоскости Σ и дополнительная проекция D_4E_4 прямой DE .

4. Определяются дополнительные проекции F_4 и F_1 точки пересечения $F = a \cap \Sigma$, при этом E_1F_1, E_4F_4 – проекции гипотенузы EF в прямоугольном треугольнике EE^1F .

5. Строится перпендикуляр $E_4E_4^1 \perp A_4B_4$, при этом $E_4E_4^1 = EE^1$ – катет прямоугольного треугольника EE^1F .

6. Введением системы плоскостей проекций Π_4, Π_5 с осью $x_2 \parallel E_4F_4$ и $\Pi_5 \parallel EF$ определяется НВ гипотенузы EF , равная E_5F_5 .

7. В стороне от проекционных построений на КЧ строится прямоугольный треугольник EE^1F по катету EE^1 и гипотенузе EF .

Угол $\alpha = \angle(E^1F, EF)$ является искомым.

Рассмотрим еще одно проекционное решение, основанное на треугольнике EE^1F .

Задача. Даны прямая a и плоскость $\Sigma(\triangle ABC)$. Определить угол между ними (рис. 9.6).

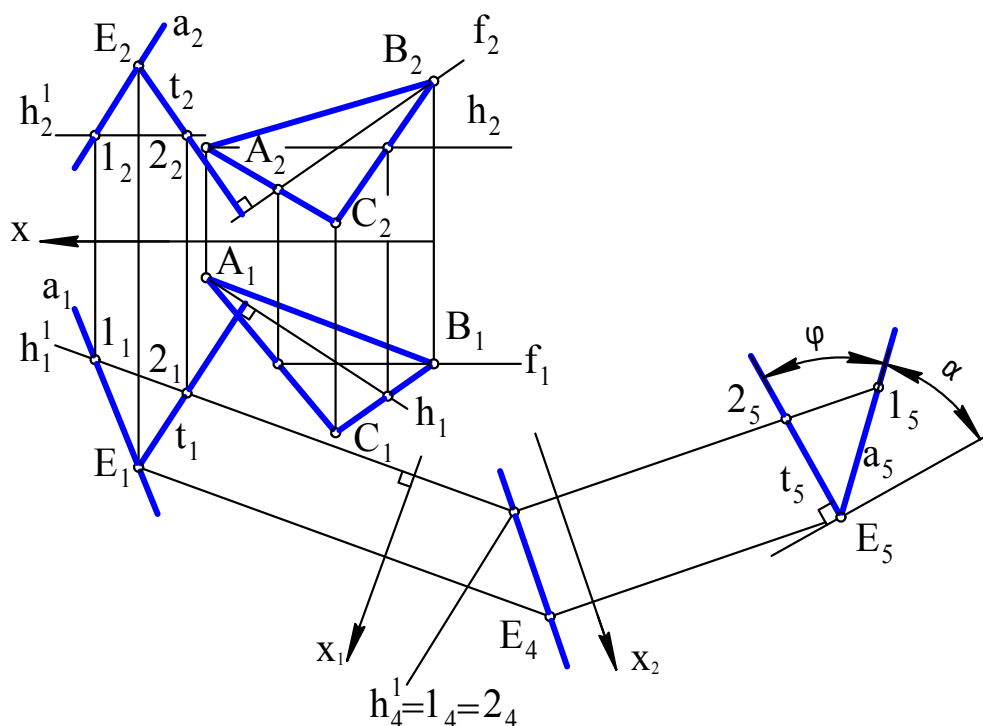


Рис. 9.6

В прямоугольном треугольнике EE^1F искомым угол α может быть определен как $\alpha = 90^\circ - \varphi$, где φ – угол между прямой a , на которой расположена гипотенуза EF (см. рис. 9.5), и перпендикуляром $t \perp \Sigma$, на котором расположен катет E_1E^1 .

Предлагаемое ниже проекционное решение данной задачи направлено на определение угла $\varphi = \angle(a, t)$.

1. Построим в плоскости Σ две линии уровня $h(h_1, h_2)$ и $f(f_1, f_2)$, где $h_2 \parallel x$, $f_1 \parallel x$.
2. Из произвольной точки $E \in a$ опустим перпендикуляр $t \perp \Sigma$, при этом t_2 проходит через E_2 , $t_2 \perp f_2$; t_1 проходит через E_1 , $t_1 \perp h_1$.
3. Определяем угол $\varphi = \angle(a, t)$ в следующей последовательности:
 - 1) в плоскости $\Delta(a, t)$ выбирается линия уровня, например, $h_1(h_1^1, h_2^1)$, где $h_2^1 \parallel x$;
 - 2) введением системы плоскостей проекций Π_1, Π_4 с осью $x_1 \perp h_1^1$ строится на Π_4 вырожденная проекция $E_4 h_4^1$ плоскости Δ ;
 - 3) введением системы плоскостей проекций Π_4, Π_5 с осью $x_2 \parallel E_4 h_4^1$ строится на Π_5 угол $\varphi = \angle(t_5, a_5)$;
 - 4) построением прямого угла определяется искомый угол $\alpha = \angle(a, \Sigma) = 90^\circ - \varphi$.

9.3. Угол между плоскостями

Для двух плоскостей существует понятие двугранного угла.

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой t и двумя полуплоскостями с общей границей t , не принадлежащими одной плоскости. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями, прямая t – ребром двугранного угла. Двугранный угол с гранями Σ и Δ и ребром t обозначается $\Sigma t \Delta$.

Отметим на ребре точку и в каждой грани из этой точки проведем луч перпендикулярно ребру. Образованный этими лучами угол называется линейным углом двугранного угла. Линейный угол служит мерой двугранного угла. Величина двугранного угла не зависит от выбора его линейного угла.

Задача. Даны две плоскости $\Sigma(\triangle ABC)$ и $\Delta(\triangle KML)$. Определить угол между плоскостями (рис. 9.7).

Проекционное решение задачи заключается в построении линии пересечения плоскостей Σ и Δ , являющейся по определению ребром двугранного угла, и последующим проецированием ее в точку на дополнительной плоскости проекций. Исходные плоскости Σ и Δ будут иметь на этой плоскости вырожденные проекции – прямые, пересекающиеся в указанной точке. Угол между этими прямыми есть решение задачи. Последовательность предлагаемого проекционного решения будет следующей:

- 1) в одной из двух данных плоскостей, например Σ , строится линия уровня, например $h(h_1, h_2)$, где $h_2 \parallel x$;
- 2) введением новой системы плоскостей проекций Π_1, Π_4 с осью $x_1 \perp h_1$ и $\Pi_4 \perp h$ строятся на Π_4 дополнительные проекции плоскостей – $B_4 C_4$ для Σ и $\Delta K_4 M_4 L_4$ для плоскости Δ ;
- 3) отмечаются отрезки $1_4 2_4$ и $1_1 2_1$ – дополнительные проекции линии $t(1_1 2_1, 1_4 2_4)$ пересечения заданных плоскостей;
- 4) в каждой из плоскостей Σ и Δ выбирается по одной точке, например $A \in \Sigma$ и $K \in \Sigma$;
- 5) введением новой системы плоскостей проекций Π_4, Π_5 с осью $x_2 \parallel 1_4 2_4$ и

$\Pi_5 // t(1,2)$ строятся на Π_5 дополнительные проекции $1_5 2_5$, A_5 , K_5 соответствующих фигур: линии пересечения $t(1, 2)$ и точек A , K ;

б) введением новой системы плоскостей проекций Π_5 , Π_6 с осью $x_3 \perp 1_5 2_5$ и $\Pi_6 \perp t(1,2)$ строится на Π_6 линейный угол α двугранного угла $\Sigma t \Delta$, который и является решением задачи.

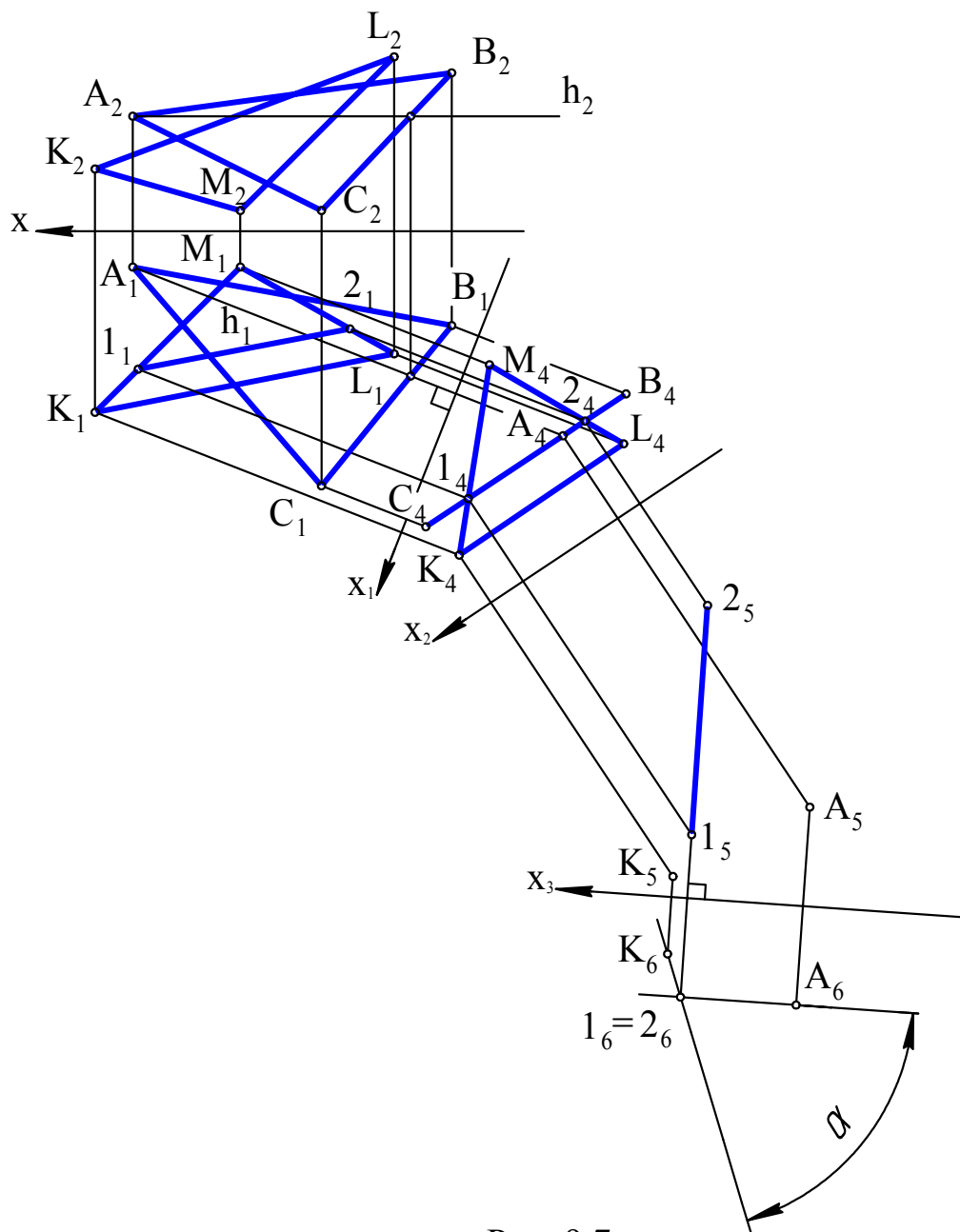


Рис. 9.7

Возможно другое проекционное решение рассматриваемой задачи, основанное на следующем алгоритме:

1) в пространстве выбирается произвольная точка E (рис. 9.8)

2) опускаются два перпендикуляра : $a \perp \Sigma$, где a проходит через точку E ; $b \perp \Delta$, где b проходит также через точку E ;

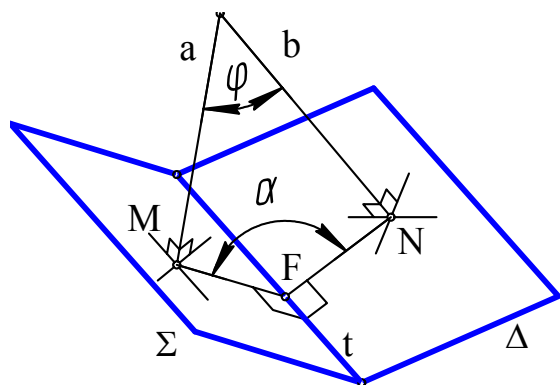


Рис. 9.8

3) из свойств плоского четырехугольника EMFN следует, что величина α искомого линейного угла двугранного угла $\Sigma\Delta$ равна $180^\circ - \varphi$, где $\varphi = \angle(a, b)$.

Задача. Даны плоскости $\Sigma(AB, DC)$, где $AB \cap DC$ и $\Delta(KL, PT)$, где $KL \parallel PT$ (рис. 9.9). Требуется построениями определить угол между плоскостями.

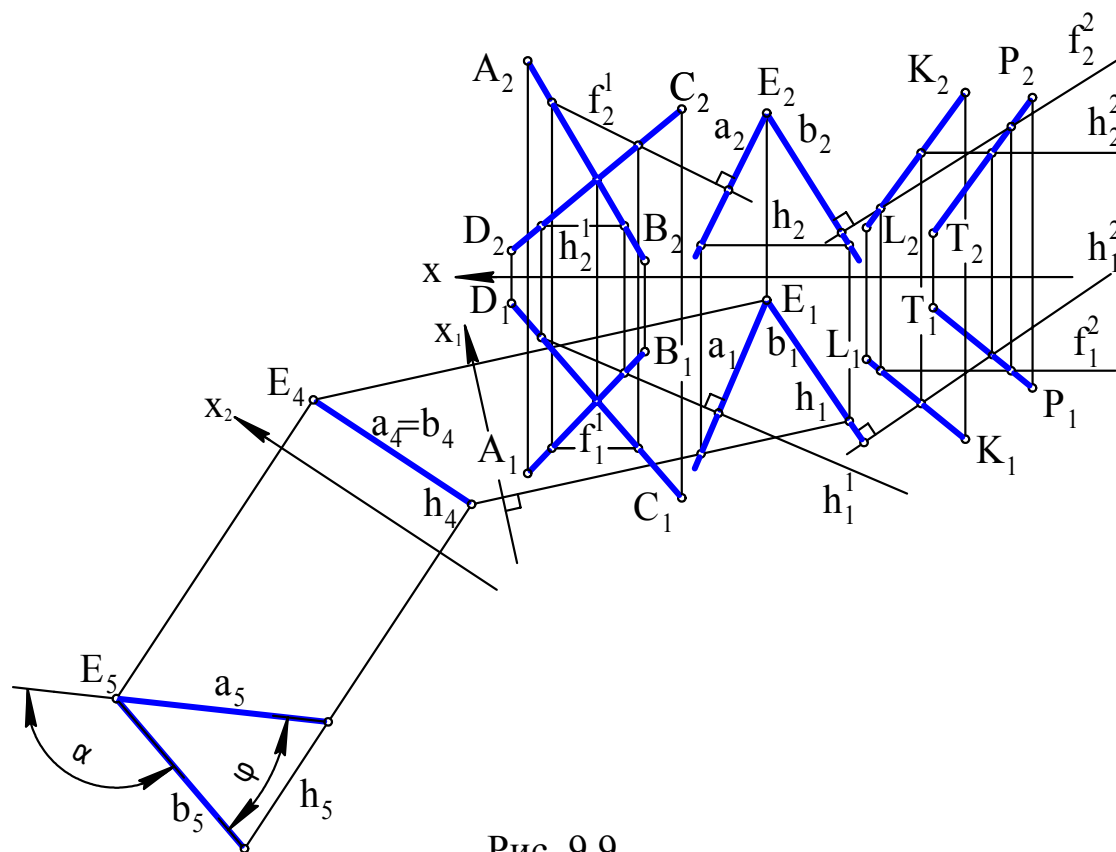


Рис. 9.9

Последовательность проекционного решения может быть следующей:

1) в плоскости Σ строятся линии уровня $f(f_1^1, f_2^1)$ и $h(h_1^1, h_2^1)$, где $f_1^1 \parallel x$, $h_2^1 \parallel x$, а в плоскости Δ – линии уровня $h^2(h_1^2, h_2^2)$ и $f^2(f_1^2, f_2^2)$, где $h_2^2 \parallel x$, $f_1^2 \parallel x$;

2) из точки E пространства опускаются два перпендикуляра – $a(a_1, a_2) \perp \Sigma$ и $b(b_1, b_2) \perp \Delta$, при этом $a_2 \perp f_2^1$, $b_2 \perp f_2^2$, $a_1 \perp h_1^1$, $b_1 \perp h_1^2$;

3) в плоскости построенных пересекающихся прямых a и b выбирается линия уровня, например $h(h_1, h_2)$, где $h_2 \parallel x$;

4) вводится новая система плоскостей проекций Π_1, Π_4 с осью $x_1 \perp h_1$ и $\Pi_4 \perp h$;

5) на Π_4 строится вырожденная проекция $a_4 = b_4$ плоскости прямых a и b ;

6) вводится новая система плоскостей проекций Π_4, Π_5 с осью $x_2 \parallel a_4$ и $\Pi_5 \parallel (a, b)$, где (a, b) – плоскость прямых a и b ;

7) на Π_5 строится угол $\varphi = \angle(a_5, b_5)$, который позволяет определить искомый угол α между плоскостями Σ и Δ , равный $180^\circ - \varphi$.

В соответствии с понятием угла в стереометрии, угол между плоскостями должен быть острым. Поэтому необходимо принять в приведенном проекционном решении значение угла между плоскостями Σ и Δ , равное φ .

10. КРИВЫЕ ЛИНИИ

Кривая линия – это множество последовательных положений точки, перемещающейся в пространстве. Такое определение дает наглядное представление о кривой линии как о траектории точки.

Для построения ортогональных проекций кривой (пространственной или плоской) необходимо построить проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой, и соединить между собой одноименные проекции в той же последовательности, в какой они располагались на ней в пространстве. При задании кривой ее проекциями необходимо указать проекции хотя бы одной точки, принадлежащей кривой. Так, если на проекциях кривой m (рис. 10.1) не указать проекции точки A (A_1, A_2), то только по проекциям m_1 и m_2 нельзя судить о форме кривой.

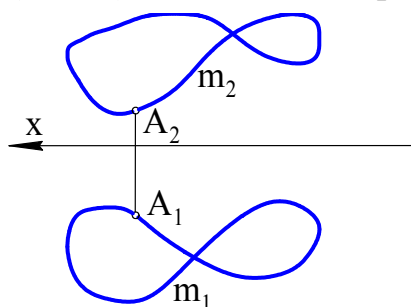


Рис. 10.1

Линии подразделяются на алгебраические, если в декартовой системе координат они определяются алгебраическими уравнениями, и трансцендентные, если они описываются трансцендентными уравнениями.

К алгебраическим линиям, в частности, относятся окружность, эллипс, парабола, гипербола, астроида и другие.

К трансцендентным линиям относятся синусоида, спираль Архимеда, циклоида и другие.

Линии могут быть пространственными и плоскими.

Линии, у которых все точки принадлежат одной плоскости, называют плоскими.

Кривая, точки которой не лежат в одной плоскости, называется пространственной кривой. Примером плоской кривой является окружность, примером пространственной кривой – цилиндрическая винтовая линия.

10.1. Свойства кривых, инвариантные относительно ортогонального проецирования

При построении ортогональных проекций кривых необходимо знать те их свойства, которые сохраняются (инвариантны) при проецировании. К таким свойствам относятся следующие:

1. Касательные к кривой проецируются в касательные к ее проекциям (за исключением, когда касательная проецируется в точку).
2. Несобственным (бесконечно удаленным) точкам кривой соответствуют несобственные точки ее проекции.

При проецировании плоских кривых в дополнение к отмеченным будут справедливы следующие свойства:

3. Порядок проекции алгебраической кривой равен порядку самой кривой. Порядок алгебраической кривой определяется степенью уравнения, описывающего эту кривую.

4. Число узловых точек (точек, в которых кривая пересекает саму себя) на проекции кривой равно числу узловых точек самой кривой.

10.2. Комплексный чертеж окружности

Если окружность расположена в плоскости уровня, то на одну плоскость проекций она проецируется в отрезок, а на другую – в окружность (в натуральную величину). На рис.10.2 показан комплексный чертеж окружности k , расположенной в горизонтальной плоскости уровня Σ . На Π_2 окружность проецируется в отрезок (часть прямой Σ_2), а на Π_1 – в окружность.

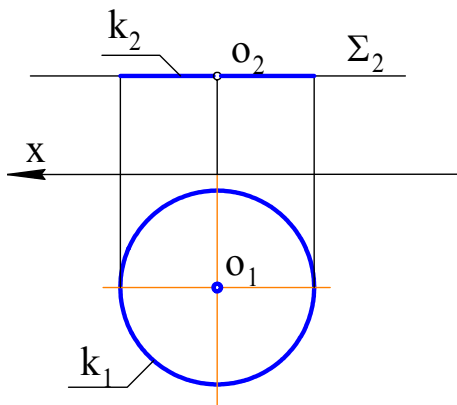


Рис. 10.2

Окружность, расположенная в плоскости, не параллельной и не перпендикулярной плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в кривую, которая называется эллипсом. Диаметры окружности будут проецироваться в отрезки, которые называются диаметрами эллипса. Длина диаметра эллипса равна длине диаметра окружности, умноженной на косинус угла наклона диаметра окружности к плоскости проекций. Диаметр окружности, расположенный на линии уровня, проецируется в натуральную величину, так

как угол наклона его к плоскости проекций равен нулю. Этот диаметр будет больше всех остальных диаметров, он и назван большим диаметром эллипса. Диаметр окружности, перпендикулярный большому, наклонен к той же плоскости проекций под наибольшим углом. Его называют малым диаметром эллипса.

Построение эллипса по большому и малому диаметрам, которые взаимно перпендикулярны, приведено ниже. На рис. 10.3 показано построение одной точки эллипса. Так, пусть даны: АВ – большой диаметр эллипса; CD – малый диаметр эллипса. После проведения большой окружности диаметром АВ и малой окружности диаметром CD, проводим произвольный луч m . Через точку 1 на большой окружности проводим отрезок, параллельный малой оси CD, а через точку 2 на малой окружности – отрезок, параллельный большой оси АВ. Точка пересечения построенных отрезков является точкой эллипса (точка М). Проводя множество лучей, проходящих через точку О (проекция центра окружности), и повторяя показанные построения, получим множество точек эллипса. Затем по лекалу, соединяя эти точки, получим эллипс.

На рис 10.4 показана последовательность построения эллипса по большому диаметру и точке эллипса. Даны: АВ – большой диаметр эллипса; М – точка эллипса. Последовательность построений показана стрелками. Эти построения следуют из рассмотренных на рис. 10.3. После определения точки 2, а значит, и малой оси CD, можем перейти к построению любого числа точек эллипса, как показано на рис. 10.3.

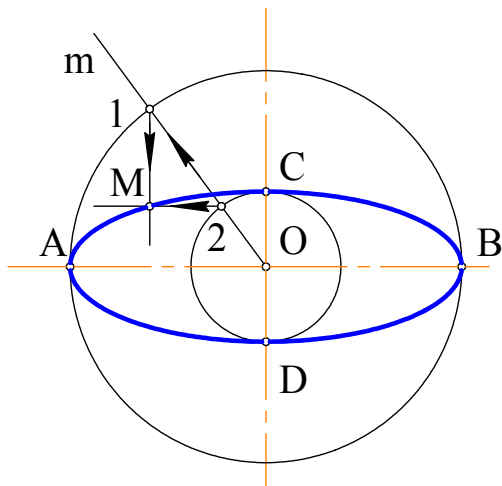


Рис. 10.3

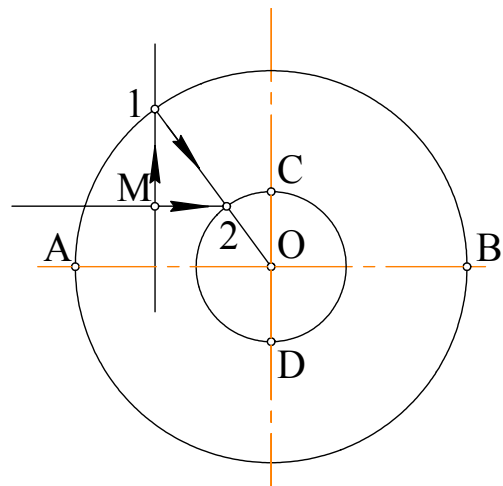


Рис. 10.4

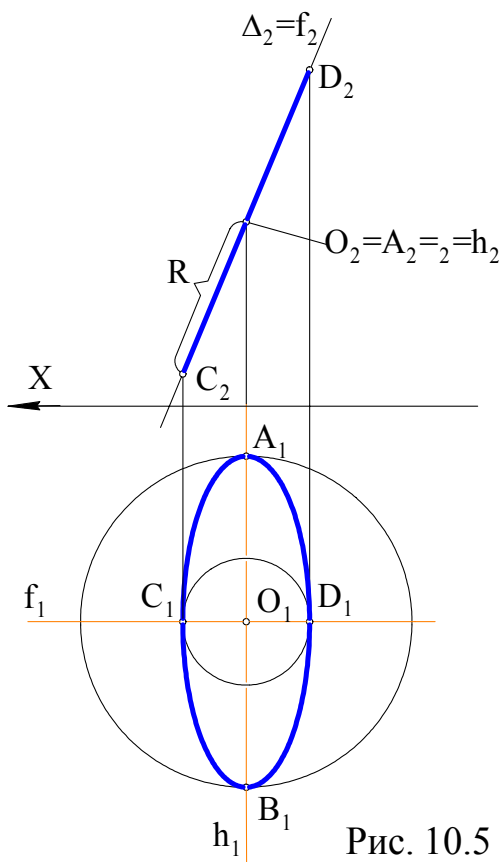


Рис. 10.5

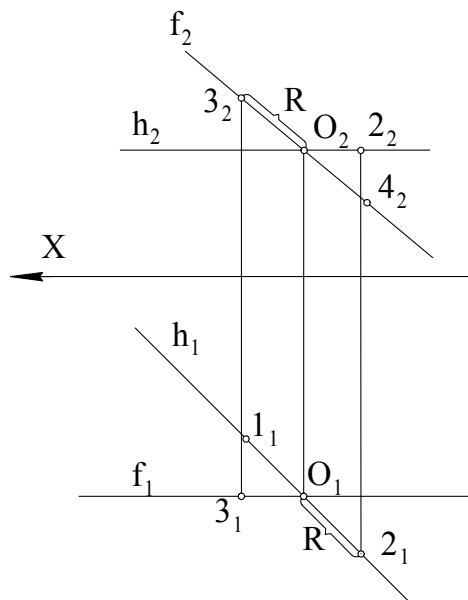


Рис. 10.6

Пусть окружность радиуса R расположена теперь во фронтально проецирующей плоскости Δ , центр окружности – точка O . Для нахождения большого диаметра эллипса необходима линия уровня. Через точку O проведем горизонталь h (h_1, h_2) в плоскости Δ . На h_1 отложим отрезки $O_1A_1=O_1B_1$, длины которых равны R . Отрезок A_1B_1 – это большой диаметр эллипса, в который проецируется окружность на Π_1 . Через точку O в плоскости Δ проведем фронталь f (f_1, f_2). На f_2 отложим отрезки $O_2C_2=O_2D_2$, длины которых равны R . Точки C и D являются точками окружности, которые расположены на фронтале f . Горизонтальные проекции этих точек принадлежат f_1 (точки C_1 и D_1). Так как отрезок C_1D_1 перпендикулярен большому диаметру A_1B_1 , то C_1D_1 – это малый диаметр эллипса на Π_1 .

Теперь по большому диаметру A_1B_1 и малому диаметру C_1D_1 строим эллипс (горизонтальная проекция окружности). Фронтальной проекцией окружности является отрезок C_2D_2 , так как Δ – фронтально проецирующая плоскость и все фронтальные проекции точек окружности расположены на прямой Δ_2 между точками C_2 и D_2 . То же самое получим, если будем строить эллипс на Π_2 по большому диаметру C_2D_2 и малому диаметру, величина которого равна нулю.

Если окружность расположена в плоскости общего положения, то она проецируется на Π_1 в эллипс (горизонтальная проекция окружности) и на Π_2 – тоже в эллипс (фронтальная проекция окружности). В этом случае эллипсы строятся по большому диаметру и точке. Пусть плоскость общего положения, в которой расположена окружность радиуса R , задана прямыми h (h_1, h_2) и f (f_1, f_2). Обратим внимание на то, что в качестве прямых, задающих плоскость, взяты ее главные линии – горизонталь и фронталь. Точка O – центр окружности. На h_1 строим большой диаметр 1_12_1 ($|O_11_1| = |O_12_1| = R$). Это большой диаметр горизонтальной проекции окружности. На f_2 строим большой диаметр 3_24_2 ($|O_23_2| = |O_24_2| = R$). Это большой диаметр фронтальной проекции окружности. Строим для точки 3 горизонтальную проекцию 3_1 . На Π_1 имеем 1_12_1 – большой диаметр эллипса, 3_1 – точка эллипса. Строим для точки 2 фронтальную проекцию 2_2 . На Π_2 имеем 3_24_2 – большой диаметр эллипса, 2_2 – точка эллипса. Теперь каждую из проекций окружности можно построить по большому диаметру и точке. Если при задании плоскости окружности горизонталь и фронталь не использовались, то их нужно провести, а затем выполнить описанные выше построения.

10.3. Комплексный чертеж цилиндрической винтовой линии

Из пространственных кривых наибольшее распространение находят винтовые линии. Цилиндрической винтовой линией называется множество последовательных положений точки, совершающей равномерное перемещение по прямой, которая равномерно вращается вокруг параллельной ей оси.

За один оборот прямой вокруг оси точка переместится по прямой на величину P , называемую шагом винтовой линии. Так как рассматриваемые движения точки равномерны и взаимосвязаны, то, например, повороту точки на угол 180° (половина оборота) будет соответствовать перемещение по прямой на половину шага. По аналогии, за $1/n$ часть оборота точка перемещается на $1/n$ шага. На этом основывается построение комплексного чертежа цилиндрической винтовой линии.

Пусть ось винтовой линии i перпендикулярна Π_1 , начальное положение прямой m , параллельной оси i , и точки задано

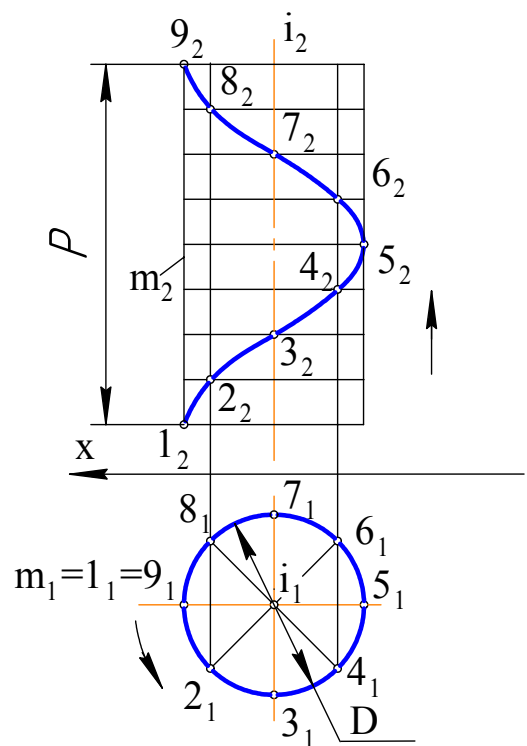


Рис. 10.7

проекциями m_1 , m_2 и 1_1 , 1_2 соответственно (рис. 10.7). Проекцией винтовой линии на Π_1 будет окружность, так как расстояние от точки до оси i не изменяется и равно $D/2$. Для построения фронтальной проекции винтовой линии разделим окружность на Π_1 и отрезок на Π_2 , соответствующий шагу P , на равное количество частей (на рис. 10.7 – 8 частей). Тогда повороту прямой m на $1/8$ часть оборота будет соответствовать линейное перемещение точки на $1/8$ шага. На рис. 10.7 точка занимает положение $2(2_1, 2_2)$. При повороте прямой еще на $1/8$ часть оборота, точка поднимется еще на $1/8$ часть шага – точка $3(3_1, 3_2)$ и т. д. Полученные фронтальные проекции точек винтовой линии соединяем по лекалу.

Если вращение прямой вокруг оси выполняется против часовой стрелки, и точка при этом поднимается вверх, то такая винтовая линия называется правой винтовой линией. Если вращение выполняется по часовой стрелке, и точка при этом поднимается вверх, то винтовая линия называется левой винтовой линией. Прямая m при вращении вокруг оси i описывает цилиндрическую поверхность вращения, поэтому винтовая линия называется цилиндрической винтовой линией. Все точки этой винтовой линии принадлежат цилиндрической поверхности вращений.

Обратим внимание на то, что горизонтальной проекцией цилиндрической винтовой линии является окружность, а фронтальной – кривая, которая называется синусоидой. Для получения более точного чертежа винтовой линии необходимо окружность делить на большее число частей ($n > 8$).

Если при тех же условиях образования винтовой линии прямая m пересекает ось i , то такая винтовая линия называется конической винтовой линией.

11. ПОВЕРХНОСТИ

11.1. Понятие поверхности

В начертательной геометрии поверхности рассматриваются как множество последовательных положений некоторой линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону. Такой способ образования поверхности называется кинематическим.

Линия (кривая или прямая) движется в пространстве по определенному закону и создает поверхность. Она называется образующей. В процессе образования поверхности она может оставаться неизменной или менять свою форму. Закон перемещения образующей задается в виде совокупности линий и указаний о характере перемещения образующей. Эти линии называются направляющими.

Кроме кинематического способа, поверхность может быть задана

- аналитически, т. е. описана математическим выражением;
- каркасным способом, который используется при задании сложных поверхностей; каркас поверхности представляет собой упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности.

Чтобы задать поверхность на комплексном чертеже, достаточно иметь на нем такие элементы поверхности, которые позволяют построить каждую ее точку. Совокупность этих элементов называется определителем поверхности.

Определитель поверхности состоит из двух частей:

- геометрической части, включающей постоянные геометрические элементы (точки, линии), которые участвуют в образовании поверхности;
- алгоритмической части, задающей закон движения образующей, характер изменения ее формы.

В символическом виде определитель поверхности Φ можно записать в виде: $\Phi(\Gamma)[A]$, где Γ – геометрическая часть определителя, A – алгоритмическая.

Чтобы у поверхности выделить определитель, следует исходить из кинематического способа ее образования. Но так как многие одинаковые поверхности могут быть получены различными путями, то они будут иметь различные определители. Ниже будут рассмотрены наиболее распространенные поверхности в соответствии с классификационными признаками, принятыми в курсе начертательной геометрии.

11.2. Контур и очерк поверхности

Чтобы задать поверхность на комплексном чертеже достаточно указать проекции не всего множества точек и линий, принадлежащих поверхности, а только геометрических фигур, входящих в состав ее определителя. Такой способ задания поверхности позволяет построить проекции любой ее точки. Задание поверхности проекциями ее определителя не обеспечивает наглядность, что затрудняет чтение чертежа. Для повышения наглядности, если это возможно, на чертеже указывают очерковые линии (очерки) поверхности.

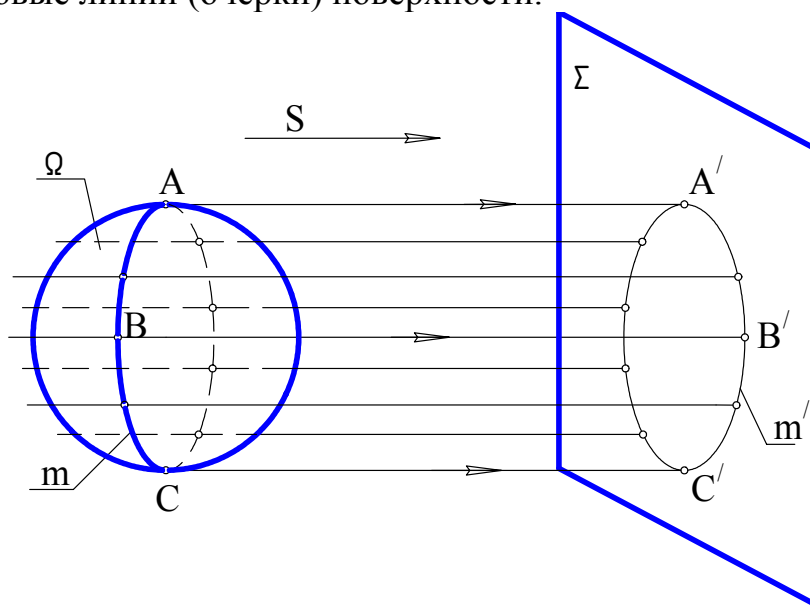


Рис. 11.1

Когда какая-нибудь поверхность Ω проецируется параллельно на плоскость проекций Σ , то проецирующие прямые, касающиеся поверхности Ω , образуют цилиндрическую поверхность (рис. 11.1). Эти проецирующиеся прямые касаются поверхности Ω в точках, образующих некоторую линию m , которая называется контурной линией.

Проекция контурной линии m на плоскость $\Sigma - m'$, называется очерком поверхности. Очерк поверхности отделяет проекцию поверхности от остальной части плоскости проекций.

Контурную линию поверхности используют при определении видимости точек относительно плоскости проекций. Так, на рис. 11.1 проекции точек поверхности Ω , расположенные левее контура m , на плоскости Σ будут видимыми. Проекции остальных точек поверхности будут невидимыми.

11.3. Точка и линия на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-нибудь линии, принадлежащей поверхности.

Линия принадлежит поверхности, если все ее точки принадлежат поверхности.

Следовательно, если точка принадлежит поверхности, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям некоторой линии этой поверхности.

Для построения точек, лежащих на поверхностях, пользуются графически простыми линиями (прямыми или окружностями) этой поверхности. В некоторых случаях применяют кривые, которые проецируются в графически простые линии.

Примеры построения недостающих проекций точек и линий, принадлежащих поверхностям, рассмотрены ниже для каждой классификационной группы поверхностей.

11.4. Поверхности (общие сведения)

Из множества различных поверхностей выделяется несколько классов в зависимости от формы образующей, а также от формы, числа и расположения направляющих:

1. Поверхности закономерные и незакономерные.
2. Линейчатые (образованные перемещением прямой линии) и нелinearчатые (криволинейные) поверхности.
3. Поверхности развертывающиеся (или торсы) и неразвертывающиеся.
4. Поверхности с образующей постоянной формы и поверхности с образующей переменной формы.
5. Поверхности с поступательным, вращательным или винтовым движением образующей.

В пособии из всего многообразия поверхностей рассмотрены линейчатые поверхности, гранные, поверхности вращения, циклические и винтовые.

11.5. Линейчатые поверхности

Линейчатая поверхность в общем случае однозначно определяется тремя направляющими линиями. Тогда определитель такой поверхности имеет вид: $\Phi(t; k, l, m)$, где t – прямолинейная образующая; k, l, m – в общем случае криволинейные направляющие. Алгоритмическую часть определителя можно записать

так: прямолинейная образующая в своем движении пересекает все три направляющие.

11.5.1. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма

В инженерной практике наибольшее распространение получили линейчатые поверхности, у которых одна из направляющих является несобственной прямой. На чертеже ее представителем является плоскость параллелизма. Образующая в своем движении пересекает две направляющие и параллельна некоторой плоскости Σ – плоскости параллелизма. Такие поверхности называют поверхностями Каталана. Определитель такой поверхности имеет вид $\Phi(\Sigma; k, l)$.

В зависимости от формы направляющих различают следующие поверхности Каталана: цилиндроид, коноид и гиперболический параболоид (косая плоскость). Цилиндроид – линейчатая поверхность с плоскостью параллелизма, у которой обе направляющие являются кривыми линиями. На рис. 11.2,а показан отсек (часть) цилиндроида, у которого плоскость параллелизма Σ – горизонтально проецирующая. На горизонтальной плоскости проекций образующие параллельны между собой и параллельны следу плоскости $\Sigma(\Sigma_1)$. Фронтальные проекции образующих построены исходя из условия пересечения направляющих k и l в соответствующих точках 1, 2, 3, ..., 10. У коноида, в отличие от цилиндроида, одна из направляющих прямая. Гиперболический параболоид получается в результате перемещения прямой по двум скрещивающимся прямолинейным направляющим.

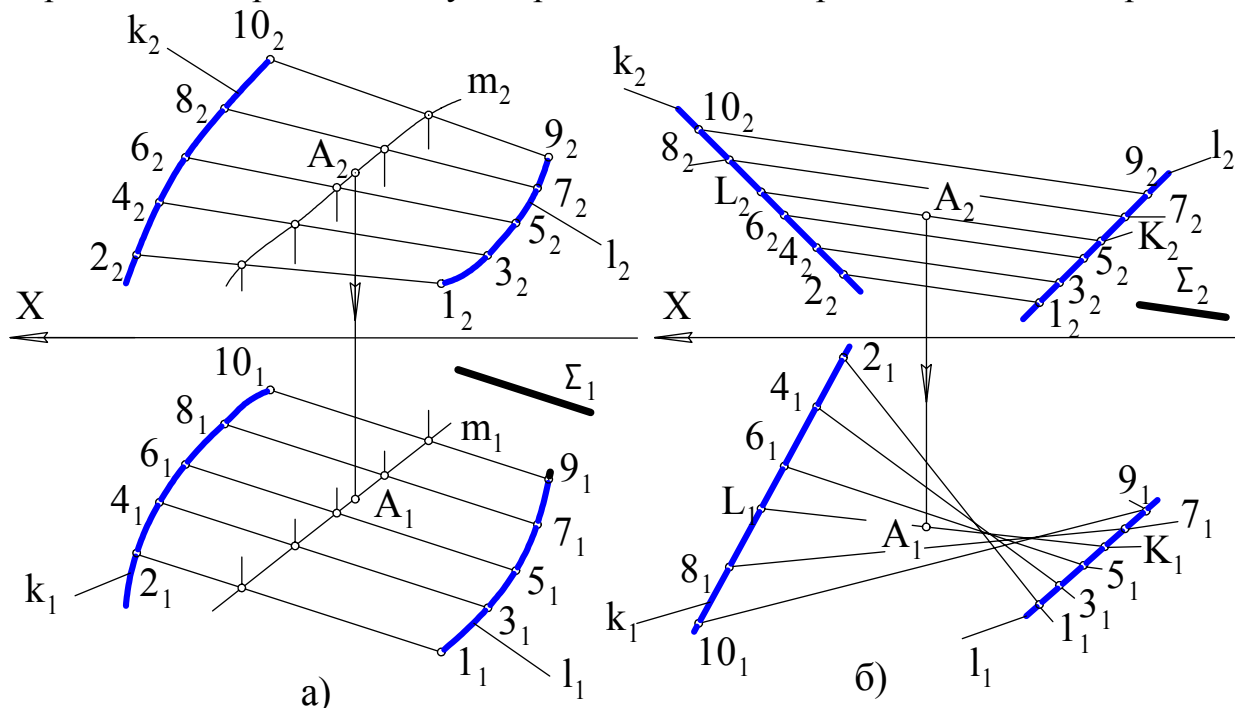


Рис. 11.2

Образующая все время остается параллельной плоскости параллелизма. На рис. 11.2, б плоскость Σ – фронтально проецирующая и проекции образующих параллельны фронтальному следу плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$.

Рассмотрим принадлежность точки поверхностям Каталана. Пусть задана фронтальная проекция точки $A(A_2)$, принадлежащей поверхности цилиндроида (рис. 11.2, а). Требуется построить горизонтальную проекцию точки A . В соответствии с условием принадлежности точки поверхности проведем через A_2 проекцию линии $m(m_2)$, принадлежащей цилиндроиду. Так как линия m принадлежит поверхности, строим горизонтальные проекции точек пересечения кривой m с образующими цилиндроида. Множество полученных точек задают горизонтальную проекцию линии $m(m_1)$. Искомая проекция точки $A(A_1)$ будет расположена на m_1 .

Пусть теперь фронтальная проекция точки $A(A_2)$ задана на поверхности гиперболического параболоида. И в этом случае через A_2 можно провести проекцию произвольной кривой m . Однако здесь известно, что проекции образующих параллельны следу плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$. Тогда через A_2 проводим проекцию образующей $KL(K_2L_2)$ параллельно Σ_2 . Горизонтальную проекцию KL проводим через точки K_1 и L_1 , принадлежащих направляющим k и l , соответственно. Искомая проекция точки $A(A_1)$ будет расположена на K_1L_1 .

11.5.2. Коническая и цилиндрическая поверхности

Коническая поверхность образуется движением прямолинейной образующей по криволинейной направляющей. При этом образующая проходит через

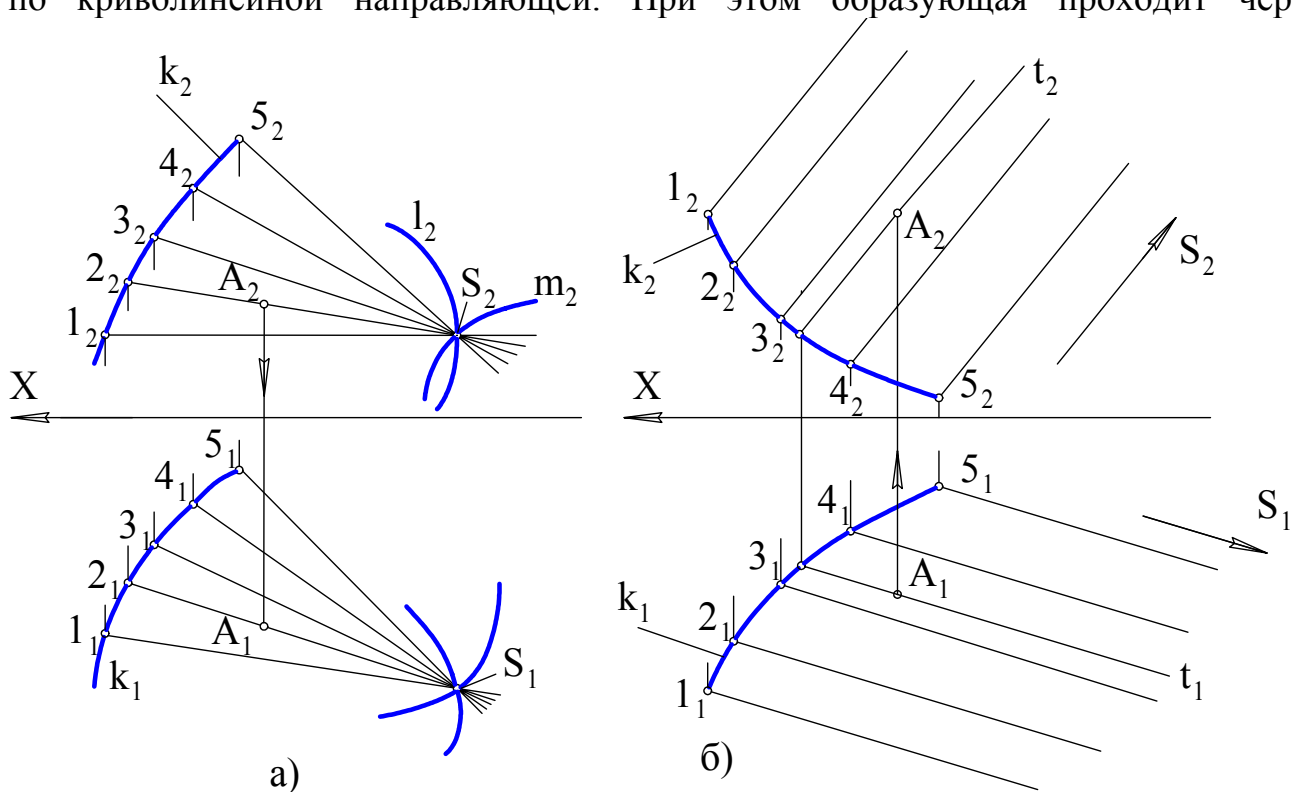


Рис. 11.3

некоторую неподвижную точку S , которая называется вершиной (рис. 11.3, а). Коническая поверхность является частным случаем линейчатых поверхностей общего вида, когда две направляющие, например l и m , пересекаются в точке S . Геометрическая часть определителя конической поверхности включает направ-

ляющую k и вершину S . В зависимости от вида направляющей коническая поверхность может быть замкнутой и незамкнутой.

Цилиндрическая поверхность получается в том случае, когда все прямолинейные образующие проходят через направляющую k и пересекаются в несобственной точке S (рис. 11.3, б). Геометрическая часть определителя конической поверхности включает направляющую k и несобственную вершину S (направляющий вектор). Цилиндрическая поверхность также может быть незамкнутой или замкнутой.

Точка A принадлежит данным поверхностям, так как она принадлежит образующим этих поверхностей. На конической поверхности она принадлежит образующей $2S$, а на цилиндрической – образующей t .

11.5.3. Торс

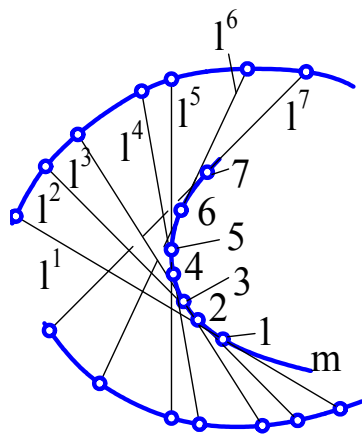


Рис. 11.4

Торс (поверхность с ребром возврата) образуется движением прямолинейной образующей, касающейся во всех своих положениях некоторой пространственной кривой, называемой ребром возврата (от франц. «tors») – витой, крученный).

Ребро возврата m является направляющей торса. Торс состоит из двух полостей, разделенных ребром возврата (рис. 11.4).

Если ребро возврата вырождается в точку, поверхность торса превращается в коническую поверхность. В случае, если ребро возврата является несобственной точкой, торсовая поверхность становится цилиндрической.

11.6. Гранные поверхности и многогранники

Гранной поверхностью называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. Гранные поверхности можно разделить на два вида: пирамидальные (рис. 11.5, а) и призматические (рис. 11.5, б).

Пирамидальной называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят через некоторую неподвижную точку S . Определитель поверхности – ломаная направляющая m и точка S .

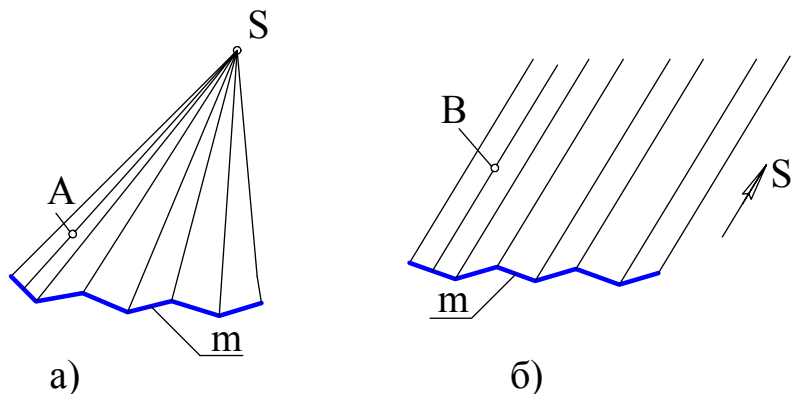


Рис. 11.5

Призматической называется поверхность, образованная перемещением прямой по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят параллельно некоторому заданному направлению S . Определитель поверхности – ломаная направляющая m и направление S .

Точки A и B принадлежат пирамидальной и призматической поверхностям соответственно, так как принадлежат прямым, расположенным на этих поверхностях.

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. Многоугольники поверхности называются гранями, стороны многоугольников – ребрами, а вершины многоугольников – вершинами многогранника. Рассмотрим два вида многогранников – пирамиду и призму.

Пирамида представляет собой многогранник (рис. 11.6 – это пример безосного чертежа), у которого одна грань – основание (произвольный многоугольник ABC). Остальные грани (боковые) – треугольники с общей вершиной S , называемой вершиной пирамиды. Точка D принадлежит поверхности пирамиды, так как лежит на прямой S_1 , принадлежащей боковой грани ASC .

Призмой называется многогранник, у которого основания – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами. Боковые грани призмы – параллелограммы. Если ребра боковых граней перпендикулярны основанию, то призму называют прямой.

На рис. 11.7 приведен комплексный чертеж (безосный, как многие приведенные ниже) трехгранной призмы. Видимость ребра AB определена по конкурирующим точкам 3 и 4. Точка 4 расположена выше точки 3, а значит, на Π_1 проекция точки 3 будет невидимой. Так как точка 3 принадлежит ребру 12, то оно также будет невидимым.

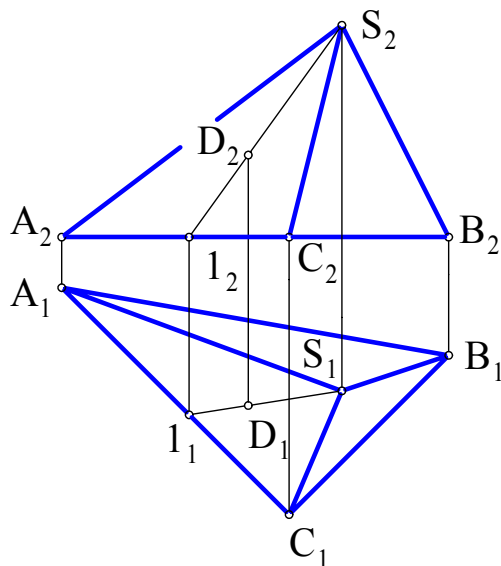


Рис. 11.6

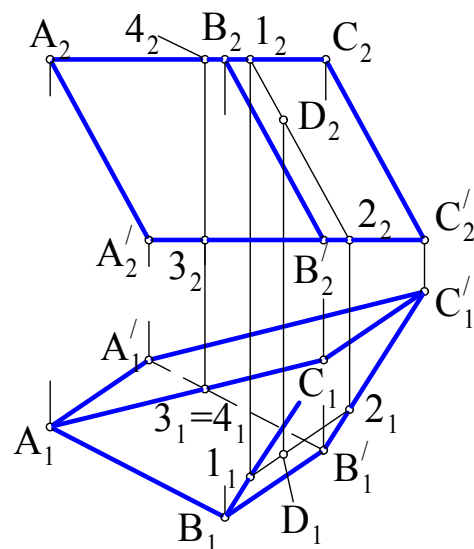


Рис. 11.7

Точка D (рис. 11.7) принадлежит поверхности призмы, так как лежит на прямой 12, принадлежащей поверхности призмы.

11.7. Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, полученная при вращательном движении образующей (прямой или кривой) вокруг неподвижной прямой, называемой осью вращения (рис. 11.8). Геометрической частью определителя поверхности вращения является образующая и ось вращения. Каждая точка образующей n при своем вращении описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна оси i , а центр расположен на оси. Эти окружности называются параллелями (на рис. 11.8 – например, окружность 1). Наименьшая из параллелей (окружность 2) называется горлом, а наибольшая (окружность 3) – экватором.

Плоскость, проходящая через ось вращения, называется меридианальной. Линия ее пересечения с поверхностью – меридианом. Если меридианальная плоскость параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость меридиан проецируется без искажения. Такой меридиан называется главным.

На чертеже поверхность вращения однозначно задается своим определителем. Однако для наглядности чертеж поверхности дополняют очерками. На рис. 11.9 показано построение очерков для поверхности, заданной осью i ($i \perp \Pi_1$) и образующей n . Возьмем на образующей $n(n_1, n_2)$ произвольную точку 1 ($1_1, 1_2$). При вращении образующей вокруг оси $i(i_1, i_2)$, точка 1 опишет окружность, плоскость которой перпендикулярна оси, а центр расположен на оси. Так как ось поверхности перпендикулярна Π_1 , то плоскость окружности параллельна Π_1 и окружность проецируется на Π_1 в окружность с центром i_1 , проходящую через точку 1_1 . На Π_2 окружность проецируется в отрезок A_2B_2 , перпендикулярный i_2 и равный A_1B_1 (диаметру окружности). Точки A_2 и B_2 принадлежат фронтальному очерку поверхности. Выполнив описанные выше построения для других точек образующей n и соединив их плавной линией, получим фронтальный очерк m_2 поверхности вращения. Горизонтальным очерком

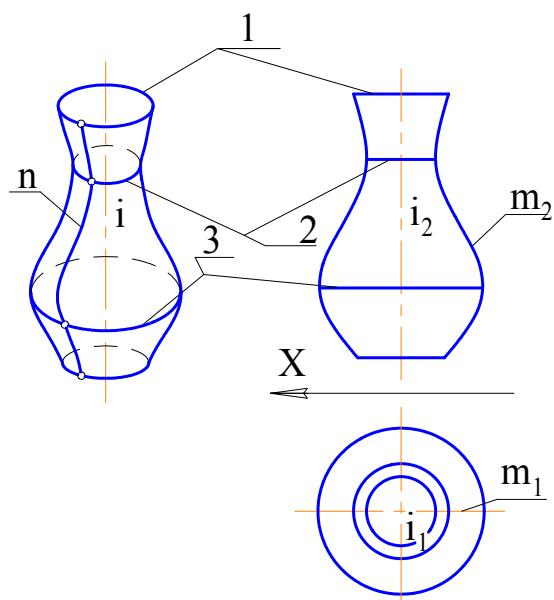


Рис. 11.8

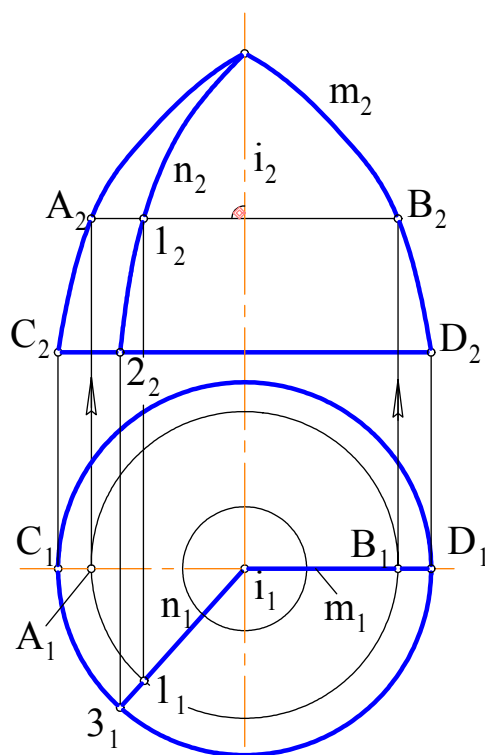


Рис. 11.9

поверхности является окружность, проходящая через точки C_1, D_1 .

Ниже приведены некоторые частные виды поверхностей вращения, для которых показана геометрическая часть определителя и построены их очерки.

Поверхности, образованные вращением прямой линии:

а) цилиндрическая поверхность вращения – получена вращением прямой n вокруг параллельной ей оси i (рис. 11.10);

б) коническая поверхность вращения – образована вращением прямой n вокруг пересекающейся с ней осью i (рис. 11.11);

в) однополостный гиперболоид вращения – это поверхность, полученная вращением прямой n вокруг скрещивающейся с ней осью i (рис. 11.12).

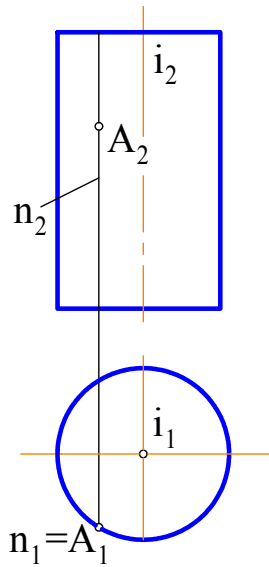


Рис. 11.10

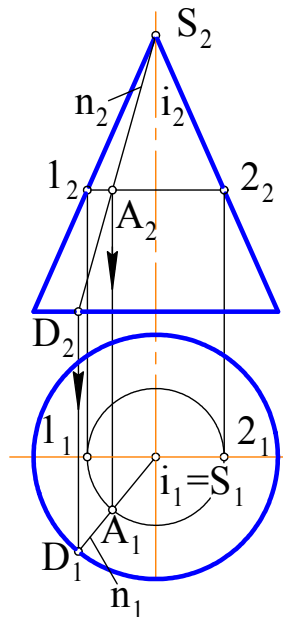


Рис. 11.11

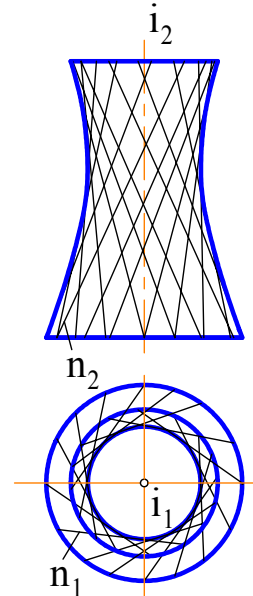


Рис. 11.12

Поверхности, образованные вращением кривых второго порядка (уравнение такой кривой на плоскости в декартовой системе координат – алгебраическое второй степени):

а) сфера – поверхность, образованная вращением окружности вокруг прямой, проходящей через ее центр (на рис. 11.13 взята ось, перпендикулярная Π_1);

б) тор – поверхность, полученная при вращении окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр; если ось не пересекает окружность, то такая поверхность называется открытым тором – $r > R$ (рис. 11.14), а если пересекает или касается – то закрытым тором – $r \leq R$ (рис. 11.15);

в) эллипсоид вращения – поверхность, полученная вращением эллипса вокруг его оси; если осью вращения является малая ось эллипса (рис. 11.16), то получается сжатый эллипсоид вращения, а если большая ось эллипса – то вытянутый эллипсоид вращения;

г) параболоид вращения – получается во вращательном движении параболы вокруг ее оси (рис. 11.17);

д) двухполостный гиперболоид вращения – поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг ее действительной оси (рис. 11.18);

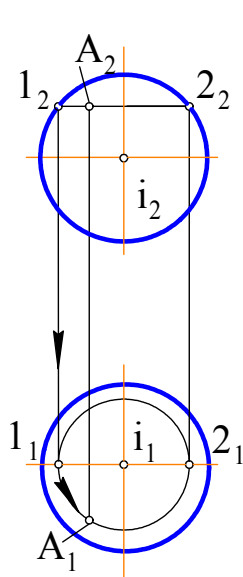


Рис. 11.13

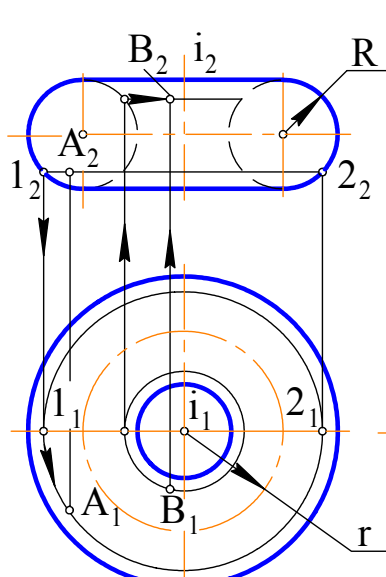


Рис. 11.14

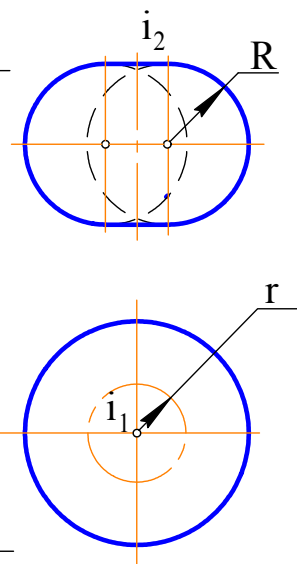


Рис. 11.15

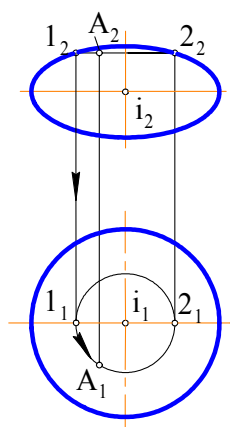


Рис. 11.16

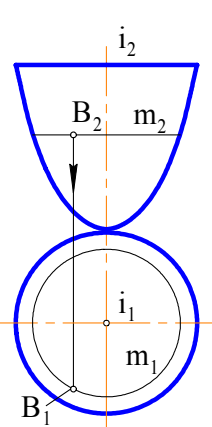


Рис. 11.17

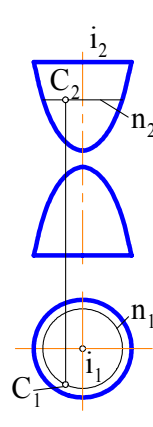


Рис. 11.18

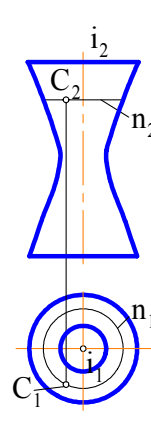


Рис. 11.19

е) однополостный гиперboloид вращения – поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси (рис. 11.19).

11.8. Принадлежность точки и линии поверхности вращения

При решении задач на принадлежность точки поверхности вращения в качестве графически простых линий наиболее часто используются окружности.

Известно, что точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-нибудь линии поверхности. Для цилиндрической поверхности вращения наиболее простыми линиями являются прямые (образующие) и окружности. Следовательно, если требуется найти горизонтальную проекцию точки $A(A_1)$ (по известной фронтальной проекции A_2), принадлежащую цилиндрической поверхности, то нужно через точки провести одну из этих линий. На рис. 11.10 через A_2 проведена прямолинейная образующая $n(n_2)$. Так как прямая n занимает горизонтально

проецирующее положение, то на Π_1 она проецируется в точку n_1 (полагаем, что проекция образующей на Π_2 видима). Тогда в эту же точку проецируется и точка $A(A_1)$. С другой стороны, все окружности цилиндрической поверхности проецируются на Π_1 в одну окружность, так как ось поверхности перпендикулярна Π_1 . Следовательно, искомая проекция точки $A(A_1)$ будет находиться на этой окружности.

Через точку на конической поверхности вращения также можно провести прямую и окружность. На рис. 11.11 через A_2 проведены проекции образующей $p(p_2)$ и окружности l_22_2 . Отрезок l_22_2 равен диаметру окружности. После построения горизонтальных проекций этих линий, определяем по линии проекционной связи горизонтальную проекцию точки $A(A_1)$. Полагаем, что на Π_2 проекция точки $A(A_2)$ – видима (находится перед контуром поверхности относительно Π_2). Если дана горизонтальная проекция A_1 , а требуется найти A_2 , то построения выполняются в обратной последовательности.

Построения горизонтальных проекций точек по их фронтальным проекциям, при условии, что точки принадлежат соответствующим поверхностям, показаны на рис. 11.13, 11.14, а также на рис. 11.16 – 11.18. В качестве линий поверхностей используются окружности (траектории точек образующих).

Линия принадлежит поверхности, если все ее точки принадлежат поверхности. Если известна одна проекция линии, принадлежащей поверхности, и требуется построить вторую ее проекцию, то следует на известной проекции выбрать несколько точек, построить недостающие проекции и полученные проекции соединить линией. Выбор количества точек зависит как от размеров изображения, так и от сложности кривой. В большинстве случаев, чем больше точек выбирается на исходной проекции, тем выше точность построений второй проекции.

На рис. 11.20 показан отсек конической поверхности вращения и линия p на этой поверхности. Если известна p_1 , то для построения p_2 можно использовать как прямолинейные образующие поверхности, так и окружности. На рис. 11.20 фронтальная проекция линии p (p_2) построена с помощью окружностей. Профильная проекция линии $p(p_3)$ построена по точкам линий p_1 и p_2 . Буквами обозначены характерные точки линии (крайние точки, а также принадлежащие очерковому образующим поверхности), а цифрами – промежуточные.

Для установления видимости проекций линии используем контуры t , m и k поверхности. Так, при проецировании на Π_1 линия p видима, так как расположена выше горизонтального контура $t(t_1, t_2)$. Это видно на фронтальной проекции. При проецировании на Π_2 видимым будет участок E_4CAB ($E_24_2C_2A_2B_2$), так как он расположен перед фронтальным контуром m . Это следует из горизонтальной проекции. Тогда оставшийся участок p_2 будет невидимым. Видимость профильной проекции линии p устанавливается при взгляде наблюдателя на плоскость Π_3 . Участок $E_4C(E_34_3C_3)$, расположенный за профильным контуром k , будет невидимым, а оставшийся – видимым. Это можно установить по горизонтальной или фронтальной проекциям.

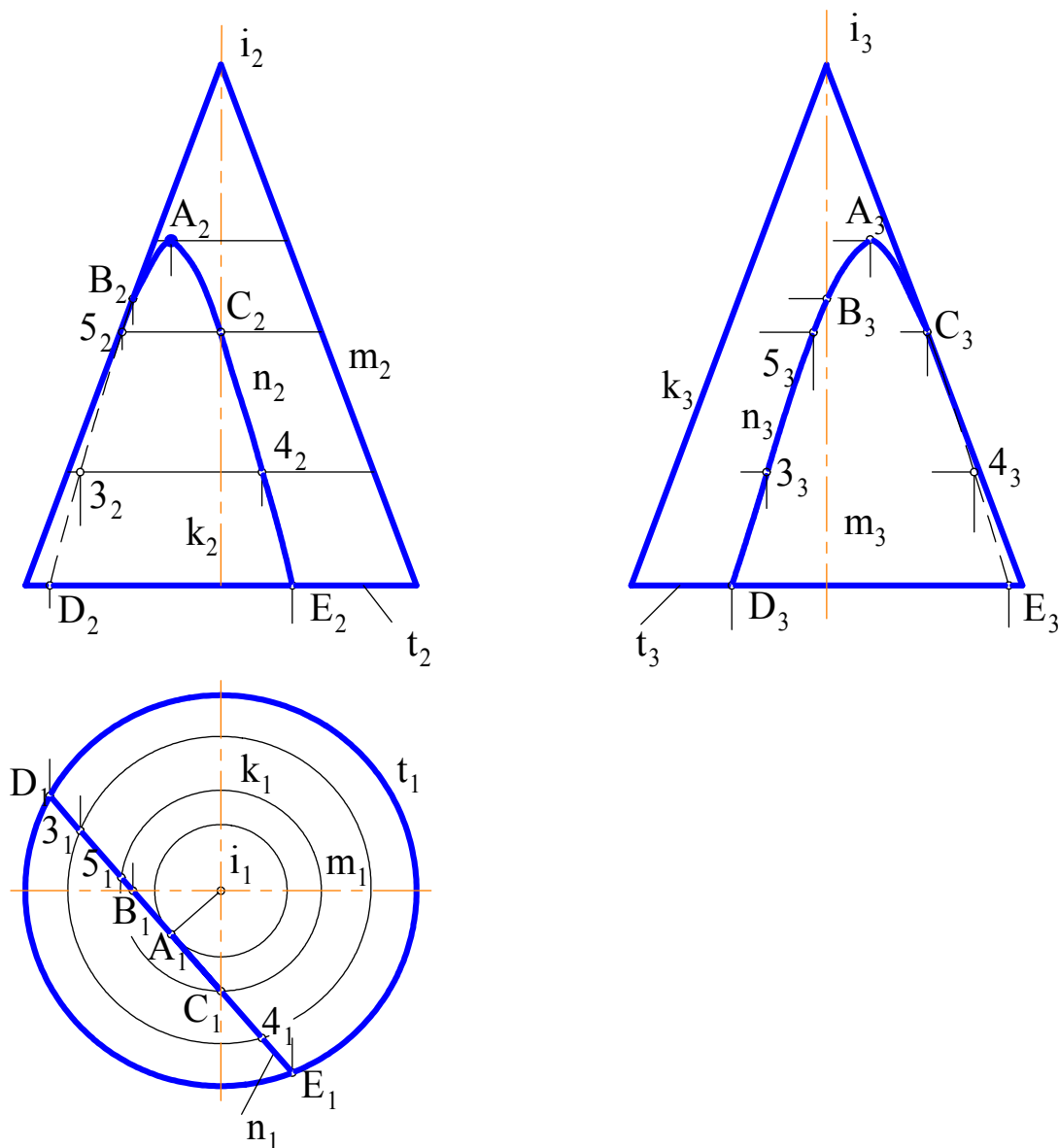


Рис. 11.20

11.9. Циклические поверхности

Циклическая поверхность – это множество последовательных положений окружности постоянного или переменного радиуса, перемещающейся в пространстве. Циклическая поверхность общего вида задается тремя направляющими m , n и k . Одна из них (n) задает положение центров окружностей, другая (m) – положение плоскостей окружностей, а третья (k) – радиусы окружностей. В частности, плоскости окружностей могут быть перпендикулярны направляющей m . Расстояние от центра окружности до точки пересечения плоскости окружности с направляющей k является радиусом этой окружности. Если одна из направляющих, задающая плоскости окружностей, прямая, то все окружности будут параллельны некоторой плоскости, а полученная при этом поверхность называется циклической поверхностью с плоскостью параллелизма. На рис. 11.21, а приведен определитель $\Phi(k, m, \Sigma)$ такой поверхности. Образующей является окружность $n(n_1, n_2)$. Та же поверхность с построенным горизонтальным очерком и достроен-

ным фронтальным показана на рис. 11.21, б. Построения очерков выполнены в такой последовательности. Через произвольную точку O_2^1 направляющей к проведено отрезок $O_2^1 l_2$. Точка O_2^1 – фронтальная проекция центра окружности, а отрезок $O_2^1 l_2$ – ее радиус. Для построения точки 2_2 от O_2^1 откладываем отрезок $O_2^1 l_2$, а на Π_1 по линии проекционной связи определяем точку O_1^1 . Строим окружность с центром O_1^1 и радиусом $O_2^1 l_2$. Для получения недостающего фронтального очерка строим ряд точек, аналогично точке 2_2 . Затем эти точки соединяем. Горизонтальный очерк поверхности представляет собой огибающую множества окружностей, построенных по аналогии с описанным выше.

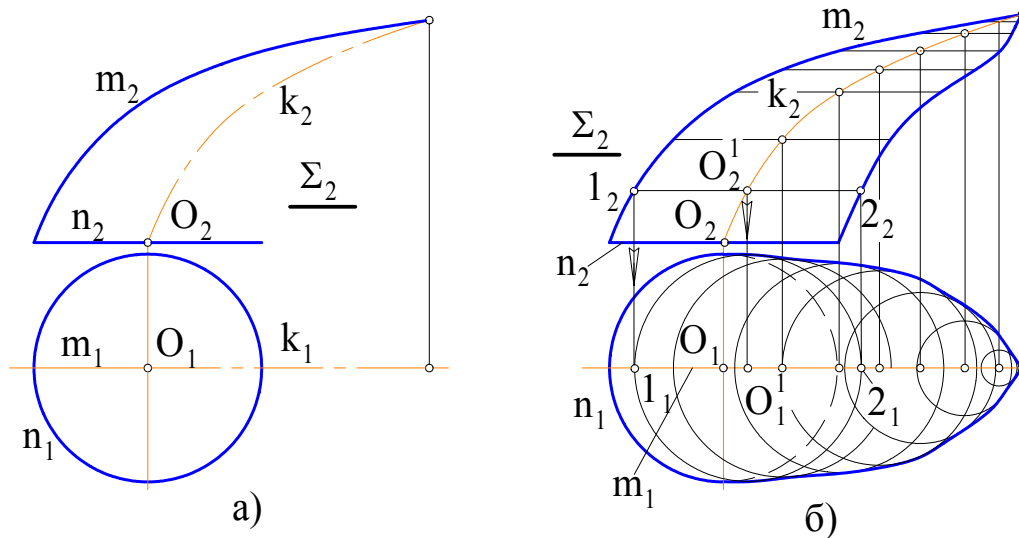


Рис. 11.21

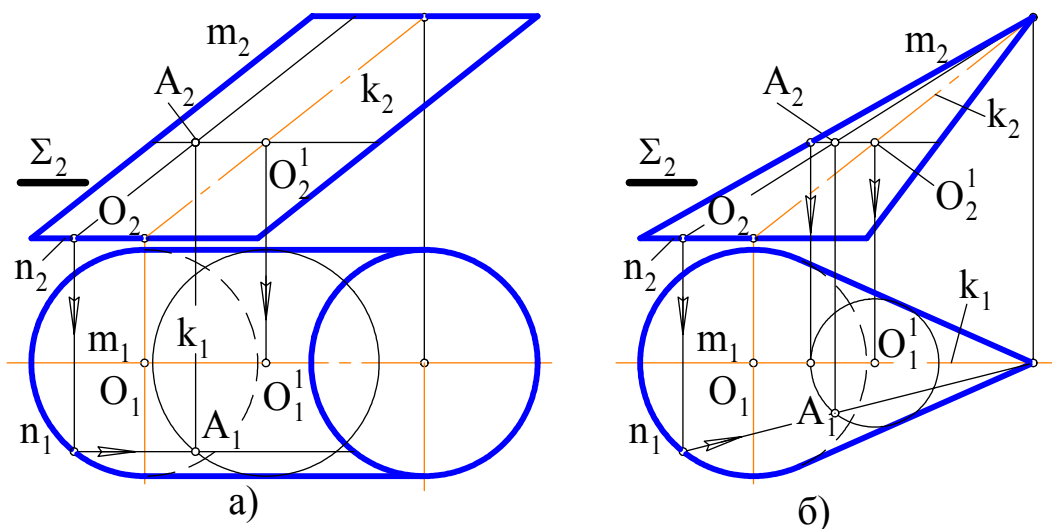


Рис. 11.22

Частными видами циклической поверхности с плоскостью параллелизма являются поверхности, у которых направляющие m и k прямые. На рис. 11.22, а показана поверхность, называемая эллиптическим цилиндром, а на рис. 11.22, б – поверхность эллиптического конуса. Там же показано построение горизонталь-

ной проекции точки А по известной фронтальной. В качестве линии поверхности использована прямолинейная образующая и окружность.

11.10. Винтовые поверхности

Винтовой поверхностью называется поверхность, которая описывается какой-либо линией (образующей) при ее винтовом движении. Винтовым движением называется сложное движение, состоящее из равномерного вращательного движения вокруг оси и равномерного прямолинейного движения, параллельного этой оси. При винтовом движении точки получается винтовая линия (см. 10.1).

Если образующей винтовой поверхности является прямая линия, то поверхность называется линейчатой винтовой поверхностью, или геликоидом. Геликоид называется прямым или наклонным в зависимости от того, перпендикулярна образующая оси геликоида или наклонна.

Рассмотрим некоторые виды линейчатых винтовых поверхностей.

1. Прямой геликоид образуется движением прямолинейной образующей m по двум направляющим. Одна из направляющих является цилиндрической винтовой линией t , а другая – ее осью i . Причем во всех своих положениях образующая m параллельна плоскости, которая называется плоскостью параллелизма. У прямого геликоида образующая m пересекает винтовую ось i под прямым углом. Прямой геликоид относится к числу коноидов и называется винтовым коноидом.

2. Наклонный геликоид отличается от прямого геликоида тем, что его образующая m пересекает ось геликоида под постоянным углом, не равным прямому углу. У наклонного геликоида одна из направляющих является цилиндрической винтовой линией t , а другая – ее осью i . Во всех своих положениях образующая m параллельна образующим некоторого конуса вращения. У этого конуса угол между образующей и осью, параллельной оси геликоида, равен φ . Он называется направляющим конусом наклонного геликоида.

3. Развертывающийся геликоид образуется движением прямолинейной образующей m , касающейся во всех своих положениях цилиндрической винтовой линии p . Она является ребром возврата геликоида. Развертывающийся геликоид как линейчатая поверхность с ребром возврата относится к числу торсов.

12. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ФИГУР

12.1. Пересечение поверхности и плоскости

Линия пересечения поверхности с плоскостью представляет собой линию, называемую сечением. Точки этой кривой можно рассматривать как точки пересечения линий поверхности с плоскостью или прямых плоскости с поверхностью. Отсюда следуют два варианта построения сечения:

1) выбираем конечное число линий на поверхности и определяем точки пересечения их с плоскостью;

2) выделяем конечное число прямых на плоскости и строим точки пересечения их с поверхностью.

Заметим, что возможно решение, представляющее собой комбинацию этих вариантов. В любом случае построение сечения сводится к многократному применению алгоритма решения задачи на пересечение линии и поверхности.

Определение проекций линий сечения рекомендуется начинать с построения его опорных (характерных) точек. К ним относятся точки, расположенные на очерковых образующих поверхности (они определяют границы видимости проекций кривой), точки, удаленные на экстремальные расстояния от плоскостей проекций и некоторые другие. После этого определяют промежуточные точки сечения.

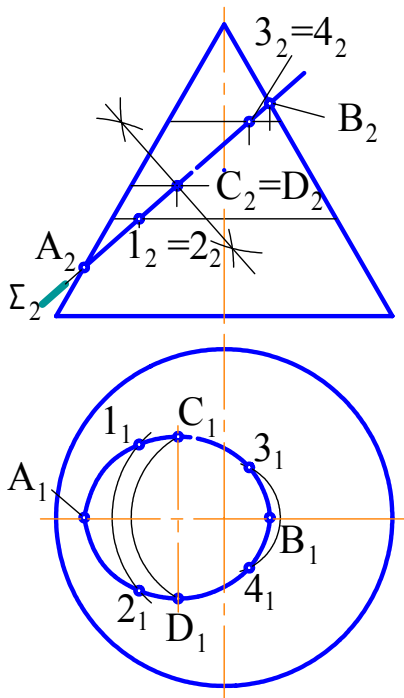


Рис. 12.1

Построение сечения существенно упрощается, если плоскость занимает проецирующее положение. Это связано с тем, что проецирующая плоскость характеризуется собирательным свойством. В этом случае одна из проекций сечения находится на следе плоскости, т.е. известна.

Пример 1. Построить проекции сечения конической поверхности вращения с фронтально-проецирующей плоскостью Σ (рис. 12.1).

Решение. Заданная плоскость Σ пересекает исходную поверхность по эллипсу, фронтальная проекция которого расположена на следе этой плоскости. Горизонтальную проекцию сечения строим по точкам в соответствии с задачей на принадлежность линии поверхности (см. рис. 12.1).

Проекцию эллипса на плоскости Π_1 можно построить также по его большой A_1B_1 и малой C_1D_1 осям. Фронтальная проекция малой оси эллипса (точки $C_2=D_2$) находится на середине отрезка A_2B_2 .

Пример 2. Построить пересечение многогранника плоскостью (рис. 12.2).

В пересечении гранных поверхностей плоскостями получают многоугольники. Их вершины определяются как точки пересечения ребер гранных поверхностей с секущей плоскостью.

Многоугольник сечения может быть построен двумя способами:

1. Вершины многоугольника находятся как точки пересечения прямых (ребер) с секущей плоскостью;
2. Стороны многоугольника находятся как линии пересечения граней (плоскостей) многогранника с секущей плоскостью.

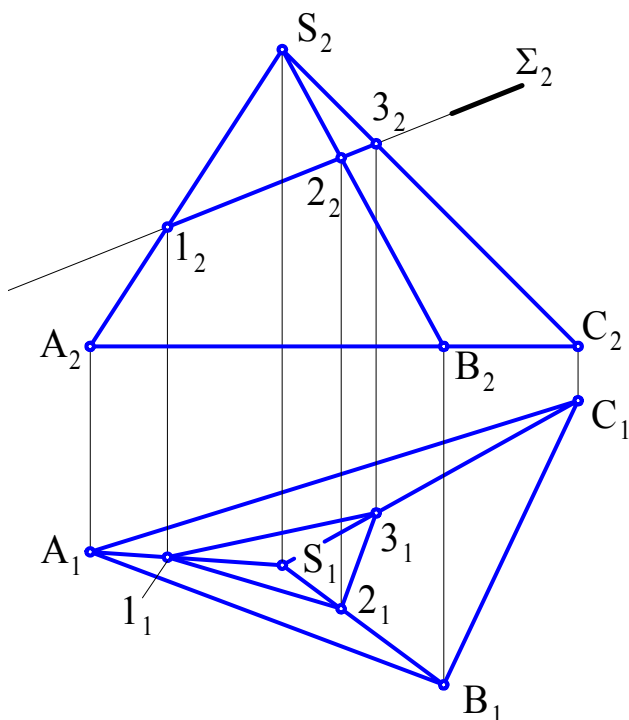


Рис. 12.2

На рис. 12.2 показано построение сечения пирамиды плоскостью Σ .

Секущая плоскость является фронтально-проецирующей, следовательно, все линии, лежащие в этой плоскости, совпадут с фронтальным следом Σ_2 плоскости Σ . Следовательно, фронтальная проекция $1_2 2_2 3_2$ сечения определится при пересечении фронтальных проекций ребер пирамиды со следом $\Sigma(\Sigma)_2$. Горизонтальные проекции точек $1(1_1)$, $2(2_1)$ и $3(3_1)$ находим из условия принадлежности точек ребрам пирамиды.

Пример 3. Построить линию пересечения цилиндрической поверхности вращения с плоскостью $\Sigma(\Sigma)_2$ (рис. 12.3).

Решение. Вначале находим опорные точки $A(A_1, A_2)$, $B(B_1, B_2)$, $C(C_1, C_2)$ и $D(D_1, D_2)$. Точки A и B находятся в пересечении образующих фронтального контура поверхности и плоскости Σ (вначале определяем A_2 и B_2 , а затем по линиям проекционной связи – A_1 и B_1). Точки C и D являются точками пересечения горизонтального контура поверхности и плоскости Σ . На Π_2 горизонтальный контур совпадает с проекцией оси поверхности вращения, а на Π_1 является очерком. Тогда вначале строим C_2 и D_2 , а затем C_1 и D_1 .

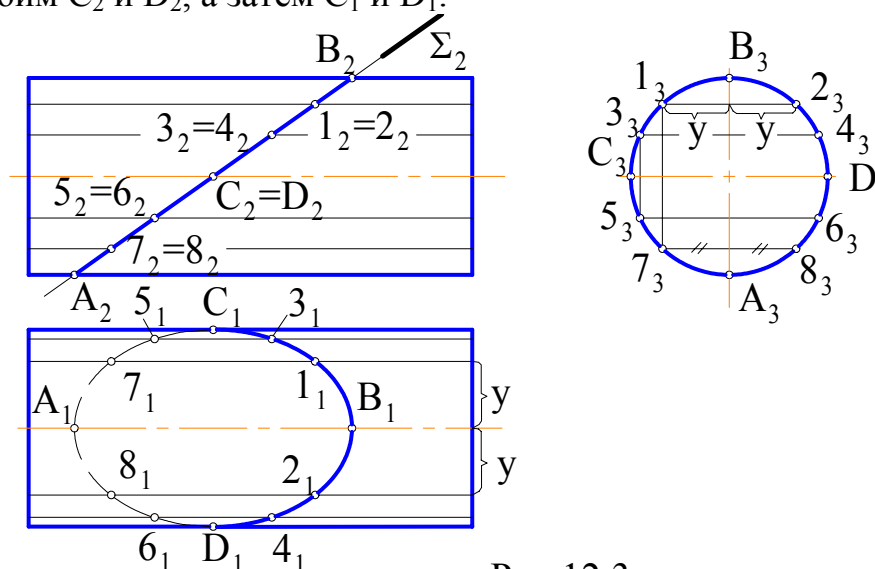


Рис.12.3

Точки $1(1_1, 1_2)$, $2(2_1, 2_2)$, ..., $8(8_1, 8_2)$ – это промежуточные точки сечения. Они построены введением промежуточных прямолинейных образующих поверхности. Вначале проводим проекции образующих на Π_2 , например через точки 1_2 , 2_2 (образующие – фронтально конкурирующие). На Π_3 эти образующие проецируются в точки 1_3 и 2_3 . Горизонтальные проекции образующих построены по двум заданным, как показано на рис. 12.3, отложив соответствующие значения координаты y .

12.2. Пересечение конической поверхности вращения плоскостью

В зависимости от направления секущей плоскости в сечении конической поверхности вращения могут получиться различные линии. Они называются коническими сечениями. На рис. 12.4 приведена фронтальная проекция конической поверхности вращения (ось i параллельна Π_2) и фронтально проецирующие плос-

кости $\Sigma_2^1, \Sigma_2^2, \dots, \Sigma_2^5$. На рис. 12.5 показаны наглядные изображения результатов пересечения плоскостями тел, ограниченных конической поверхностью вращения.

В результате пересечения конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, получается окружность (рис. 12.4, а).

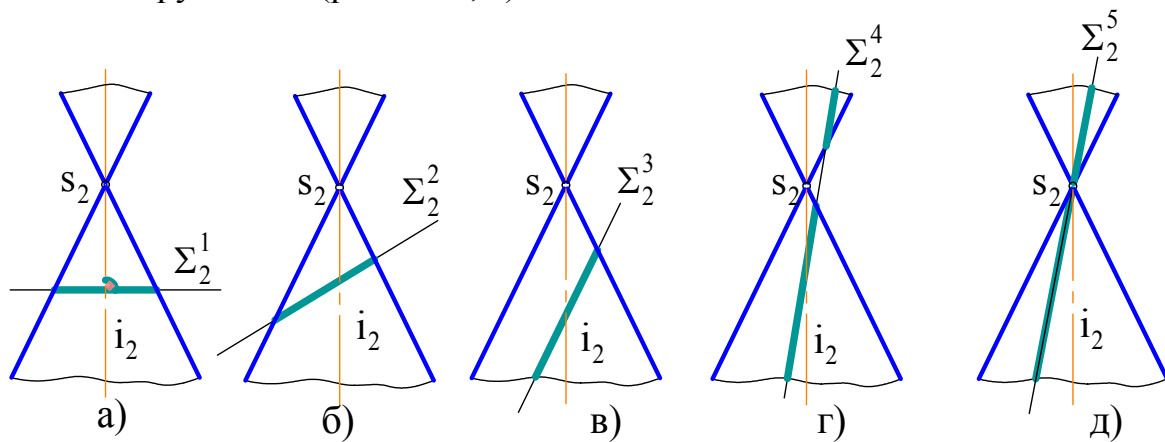


Рис. 12.4

Эллипс получается в том случае, если секущая плоскость пересекает все образующие поверхности и не перпендикулярна оси i (рис. 12.4, б).

Плоскость Σ_2^3 параллельна одной образующей поверхности и пересекает одну половину конической поверхности. Сечением является парабола (рис. 12.4, в).

Плоскость Σ_2^4 параллельна двум образующим и пересекает обе половины конической поверхности (сечение – гипербола) (рис. 12.4, г).

Плоскость Σ_2^5 проходит через вершину конической поверхности (сечение – две пересекающиеся прямые) (рис. 12.4, д).

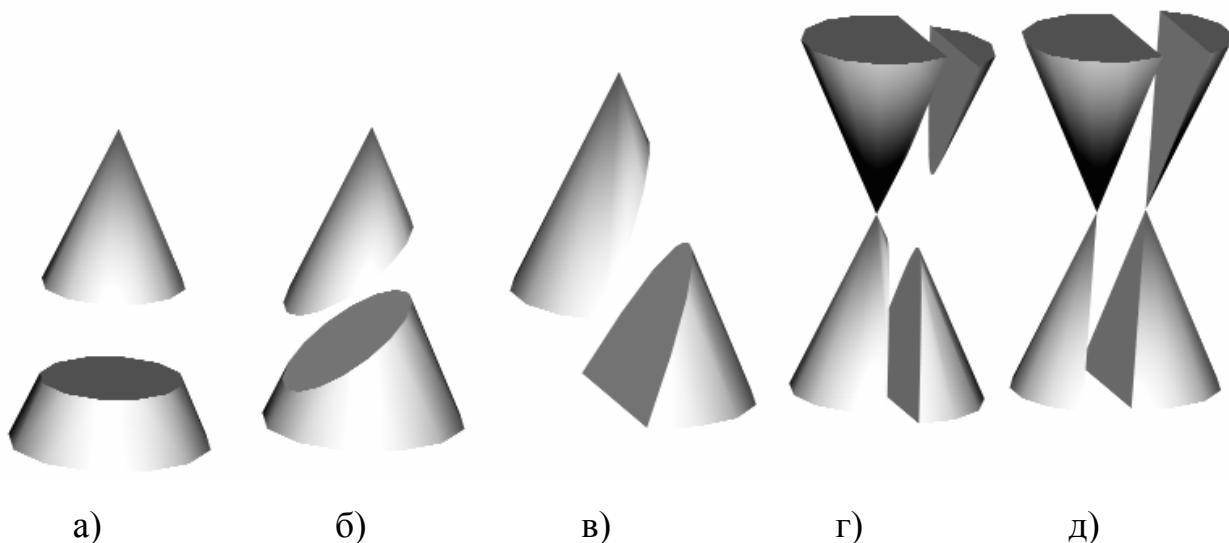


Рис. 12.5

12.3. Пересечение линии и поверхности.

Линия и поверхность пересекаются в общем случае в нескольких точках A, B, \dots . Алгоритм их определения может быть построен на тех же рассуждениях, что и при построении точки пересечения прямой и плоскости. Действительно, точки A, B, \dots пересечения линии m и поверхности Θ принадлежат также линиям, проходящим через эти точки и лежащим на заданной поверхности. Кривую n можно рассматривать как проекцию линии m на поверхность Θ . Тогда, в случае параллельного проецирования, линии n и m будут располагаться на одной цилиндрической поверхности, у которой направляющей является кривая m , а образующие параллельны направлению проецирования. В случае если линия прямая, то n и m находятся в одной плоскости Σ (рис. 12.6). Если направление проецирования будет перпендикулярно какой-либо плоскости проекций, линии n и m будут конкурирующими относительно соответствующей плоскости проекций.

Пример 1. Даны прямая m и тор. Построить точки пересечения прямой и поверхности. (рис. 12.7)

Решение.

1. Выбираем на заданной поверхности линию n , например, фронтально конкурирующую с заданной прямой m .

Линии n и m пересекаются, т.к. они находятся в одной фронтально-проецирующей плоскости.

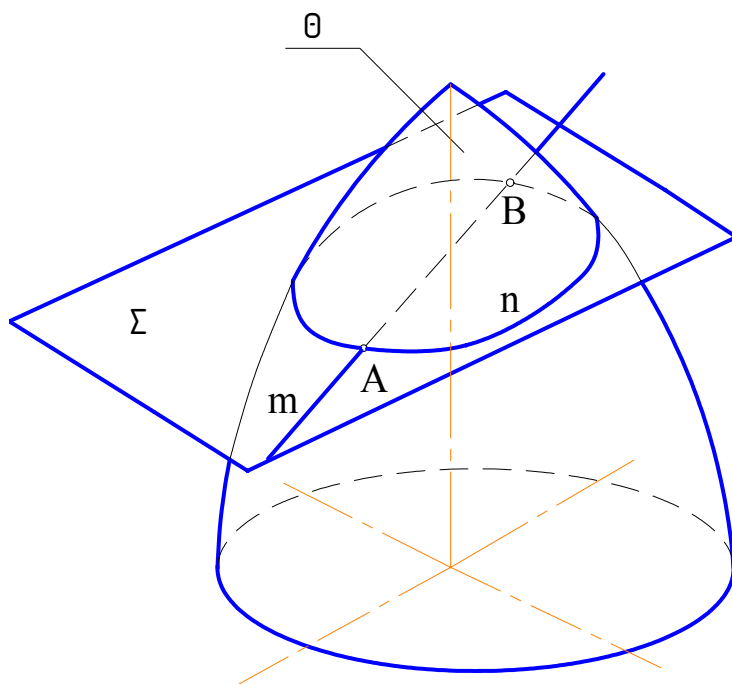


Рис. 12.6

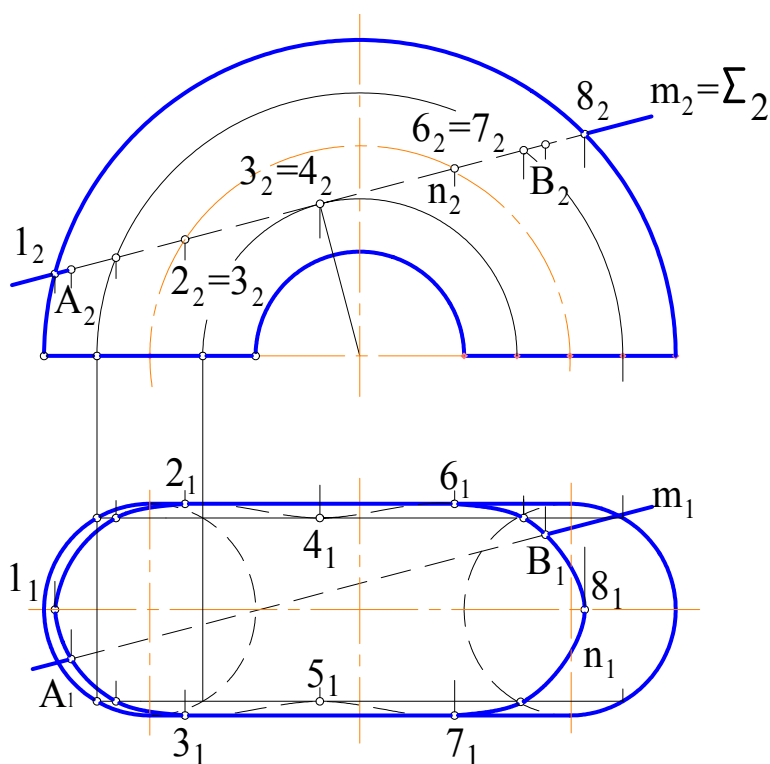


Рис. 12.7

2. Определяем горизонтальную проекцию линии n (n_1), исходя из условия принадлежности ее поверхности.

3. Находим точки A и B пересечения линий n и m , которые и являются искомыми.

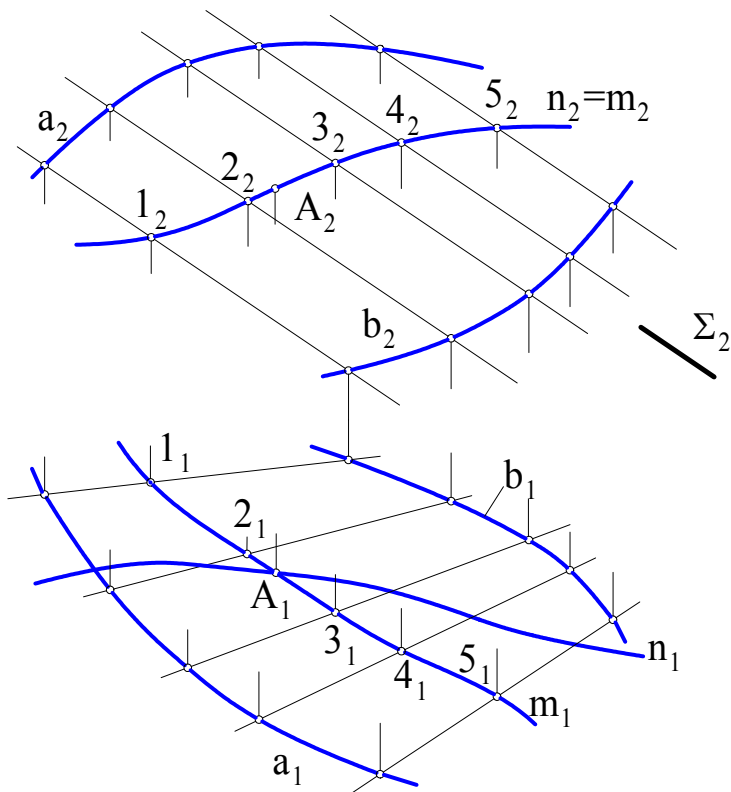


Рис. 12.8

4. Устанавливаем видимость проекций прямой. Так, как участок AB прямой m , расположен внутри поверхности, то он невидим на Π_1 и Π_2 . Кроме этого, на Π_2 невидим отрезок прямой m правее точки B_2 до точки на очерке поверхности, а на Π_1 – левее точки 5_1 , также до точки на очерке поверхности. Эти отрезки закрыты поверхностью – находятся за контурами поверхности.

Пример 2. Даны кривая n и цилиндрическая поверхность $\Gamma(a, b, \Sigma)$ (рис. 12.8). Построить точки пересечения линии и поверхности.

Решение.

1. На поверхности цилиндрической поверхности вводим кривую m , фронтально конкурирующую с линией n . Эти кривые пересекаются (в общем случае), т.к. расположены на одной фронтально проецирующей цилиндрической поверхности, у которой линия n – направляющая, а образующие перпендикулярны Π_2 .

2. Строим горизонтальную проекцию кривой m (m_1) ($m \subset \Gamma$).

3. Находим горизонтальную проекцию точки A (A_1) – $A_1 = n_1 \cap m_1$, а затем и A_2 ($A_2 \in n_2$).

Пример 3. Даны прямая n и коническая поверхность (рис. 12.9). Построить точки пересечения линии и поверхности.

Решение. Поставленную задачу также можно решить, задав на конической поверхности линию m ,

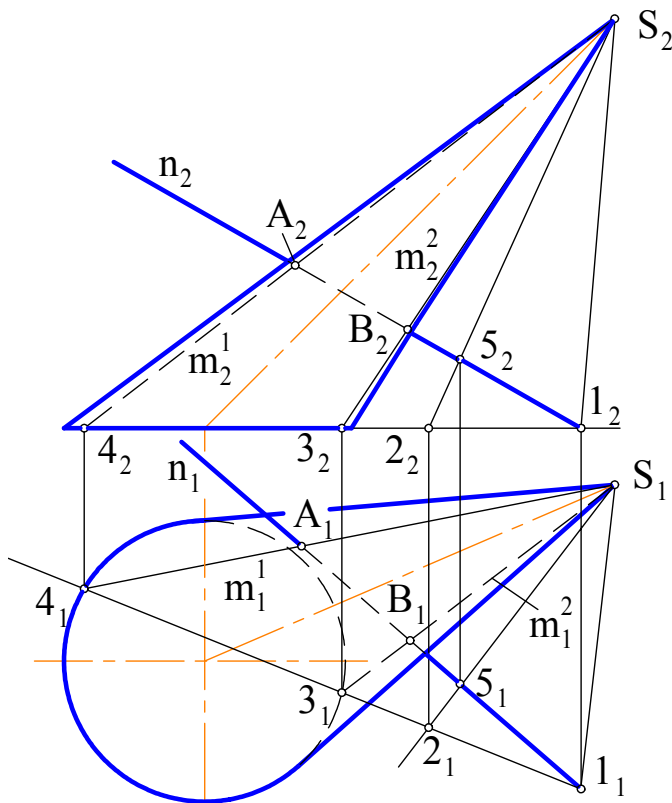


Рис. 12.9

конкурирующую с прямой n относительно плоскости проекций Π_1 или Π_2 . Полученные кривые будут лекальные, что требует значительных построений и снижает точность решения задачи. Так как заданная поверхность линейчатая, то в качестве линии m на поверхности целесообразно взять прямую (или прямые). Тогда алгоритм решения задачи будет следующим:

1. Спроецируем из точки S прямую n на плоскость Π_1 , т.е. определим центральную проекцию прямой n на плоскость Π_1 . Для этого проводим два проецирующих луча через точки 1 и 5 прямой до пересечения с плоскостью проекций Π_1 . Точки 1 и 2 задают центральную проекцию прямой n на Π_1 .

2. Строим образующие m^1 и m^2 на конической поверхности, конкурирующие с n относительно Π_1 при ее центральном проецировании.

3. Находим точки A и B пересечения прямой n с образующими m^1 и m^2 . Точки A и B – искомые.

4. Устанавливаем видимость проекций прямой n .

12.4. Пересечение поверхностей

Линия пересечения двух поверхностей представляет собой в общем случае пространственную кривую. Любая точка этой линии принадлежит как первой, так и второй поверхностям и может быть определена в пересечении линий, проведенных на этих поверхностях. Тогда имеем следующие варианты решения данной задачи:

1) выбирают на одной из поверхностей конечное число линий и строят точки пересечения их с другой поверхностью (см. 12.3);

2) выделяют на заданных поверхностях два семейства линий и находят их точки пересечения. Во втором варианте выделение пересекающихся пар кривых выполняют с помощью вспомогательных поверхностей посредников.

Рассмотрим подробнее алгоритм решения задачи с использованием поверхностей посредников. Этот способ заключается в следующем.

Пусть даны пересекающиеся поверхности Φ и Ψ (рис. 12.10). Введем вспомогательную секущую поверхность Θ^1 . Эта поверхность называется посредником. Она пересечет поверхности Φ и Ψ по линиям m^1 и k^1 , соответственно. Пересечение линий m^1 и k^1 даст точку M , принадлежащую искомой линии пересечения t , так как она принадлежит обеим поверхностям. Вводя ряд посредников, получаем семейство точек линии пересечения.

В качестве поверхностей посредников наиболее часто применяют плоскости или сферы. В зависимости от вида посредников выделяют следующие наиболее часто применяемые способы построения линии пересечения двух поверхностей:

а) способ секущих плоскостей;

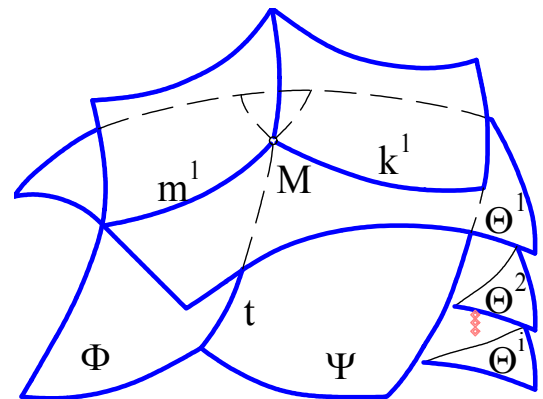


Рис. 12.10

б) способ сфер.

Посредники выбираются так, чтобы линии m^i и k^i можно было легко построить, т.е. чтобы они были графически простыми (прямые или окружности).

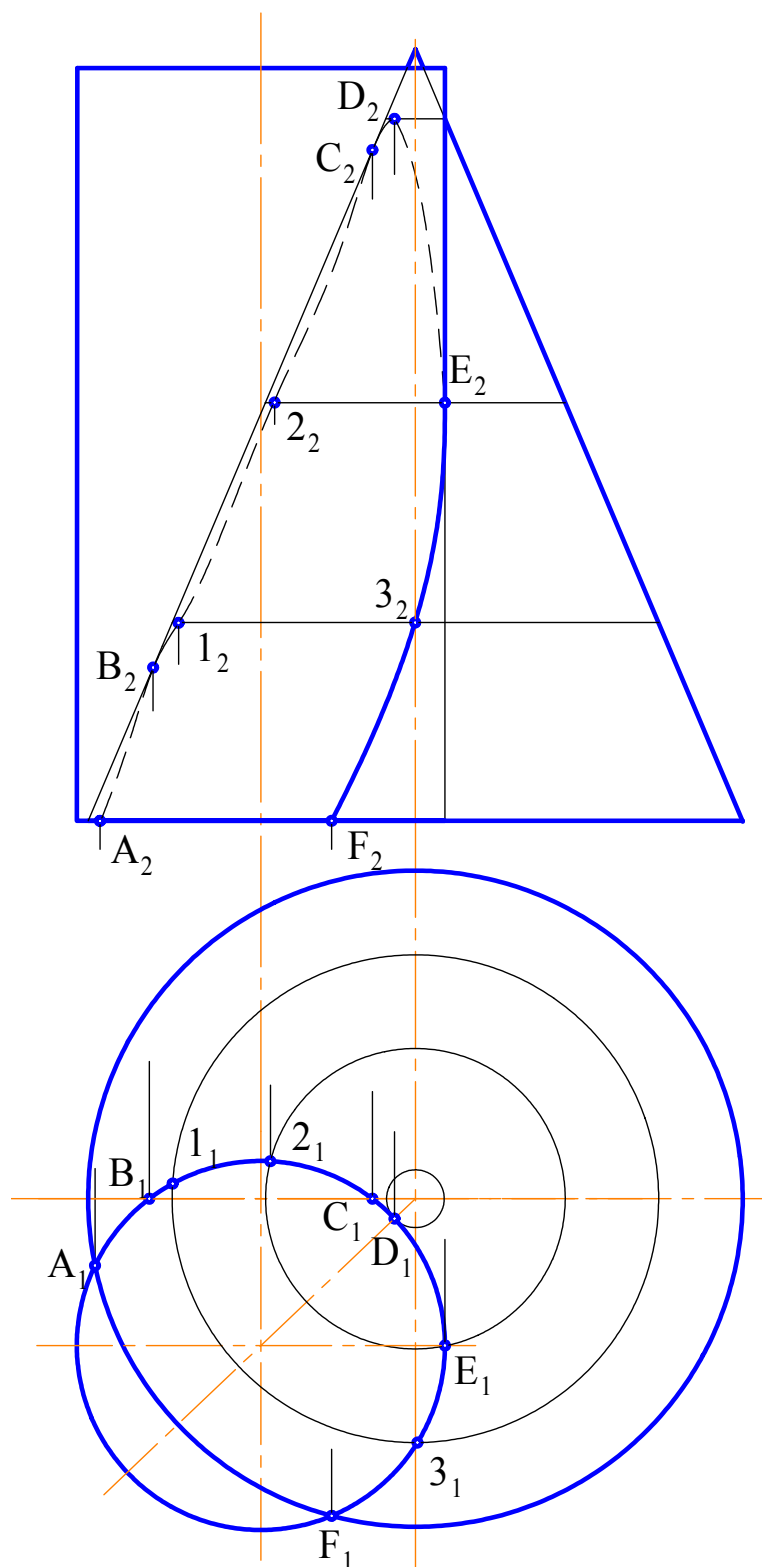


Рис. 12.11

Задача упрощается, если одна из поверхностей занимает проецирующее положение. Тогда эта поверхность вырождается в окружность (цилиндрическая) или многоугольник (призматическая). Одна из проекций искомой линии будет находиться на вырожденной проекции поверхности, а значит, известна. Вторая проекция линии находится из условия принадлежности ее поверхности. На рис. 12.11 показано построение линии пересечения цилиндрической и конической поверхностей вращения. Так как ось цилиндрической поверхности перпендикулярна Π_1 , то на Π_1 поверхность проецируется в окружность. На эту же окружность проецируется и искомая линия. Точки А, В, С, D, Е и F – опорные точки. Точки А и F принадлежат горизонтальному, а точка Е – фронтальному контуру цилиндрической поверхности. На фронтальном контуре конической поверхности расположены точки В и С. Точка D – экстремальная.

Другие точки линии пересечения, обозначенные цифрами, – промежуточные. Фронтальные проекции линии построены из условия принадлежности ее конической поверхности.

12.4.1. Способ вспомогательных секущих плоскостей

Рассмотрим применение вспомогательных секущих плоскостей на примере построения линии пересечения сферы с конусом вращения (рис. 12.12, 12.13).

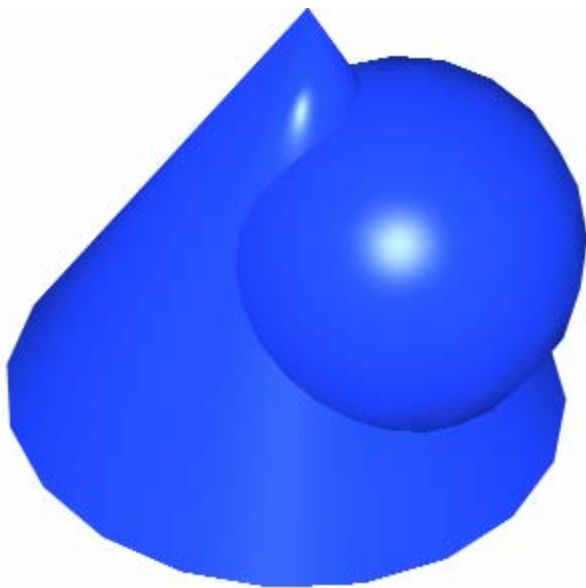


Рис. 12.12

Решение. Заданные поверхности – поверхности вращения. Оси заданных поверхностей параллельны Π_2 , (любой диаметр сферы может быть принят за ось вращения), а их общая плоскость симметрии параллельна фронтальной плоскости проекций. Следовательно, на заданных поверхностях можно выделить два семейства окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных горизонтальной плоскости проекций. Это значит, что для решения данной задачи можно использовать в качестве посредников горизонтальные плоскости уровня.

Характерными точками проекций линии пересечения поверхностей являются точки А, В и С, D. Точки А, В находятся в пересечении очерковых образующих поверхностей, т.к. эти образующие расположены в общей плоскости симметрии поверхностей.

Точки С и D являются точками видимости горизонтальной проекции линии пересечения. Их построения выполнены в такой последовательности:

- 1) через центр сферы О проведена горизонтальная плоскость уровня Θ ;

вращения пересекает эту поверхность по одной или нескольким окружностям. Если ось поверхностей вращения параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость линия пересечения проецируется в отрезок прямой линии. На рис. 12.14, а и рис. 12.14, б показано пересечение сферы цилиндрической и конической поверхностями вращения, соответственно. На рис. 12.14, в приведены пересекающиеся соосные цилиндрическая и коническая поверхности вращения.

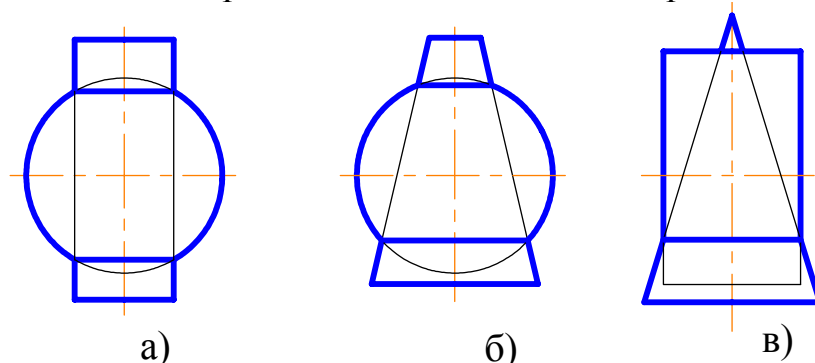


Рис. 12.14

Рассмотрим применение вспомогательных концентрических сфер – сфер с постоянным центром. Этот способ применяют при выполнении следующих условий:

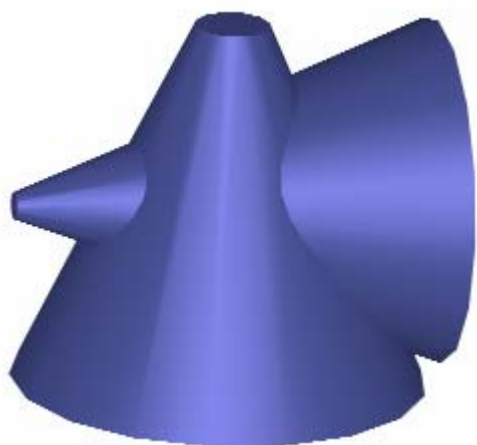


Рис. 12.15

а) пересекающиеся поверхности должны быть поверхностями вращения;

б) оси этих поверхностей должны пересекаться; точку их пересечения принимают за центр вспомогательных сфер;

в) плоскость симметрии поверхностей должна быть параллельна какой-либо плоскости проекций (в противном случае применяют преобразование чертежа).

Рассмотрим построение линии пересечения конических поверхностей вращения. На рис. 12.15 показано наглядное изображение, а на рис. 12.16 – комплексный чертеж этих поверхностей. Поверхности и их расположение удовлетворяют приведенным выше условиям.

Прежде чем строить промежуточные точки, необходимо найти опорные точки линии пересечения. Точки А, В, К и L, а также Е, F, С и D – это точки, принадлежащие контурам поверхностей. Их можно найти способом концентрических сфер или с помощью плоскостей посредников $\Sigma(\Sigma_2)$ и $\Delta(\Delta_1)$.

Рассмотрим теперь построение промежуточных точек на примере точек 5 и 6. Построения выполняем на фронтальной плоскости проекций. Сфера посредник $\Theta(\Theta_2)$ с центром в точке $O(O_2)$ пересекает конические поверхности по окружностям, которые на Π_2 проецируются в отрезки $m^i(m_2^i)$ и $n^i(n_2^i)$ (проекции двух других окружностей не показаны). Точки $5_2=6_2$ их пересечения являются фронт-

тальными проекциями точек 5 и 6, которые принадлежат линии пересечения поверхностей, так как принадлежат каждой из этих поверхностей.

Горизонтальные проекции точек 5 и 6 находим из условия принадлежности точки поверхности. В данном случае используется принадлежность точек окружности m^i на «вертикальной» конической поверхности. Точки 5_2 и 6_2 находятся по линии проекционной связи на $m^i(m_1^i)$.

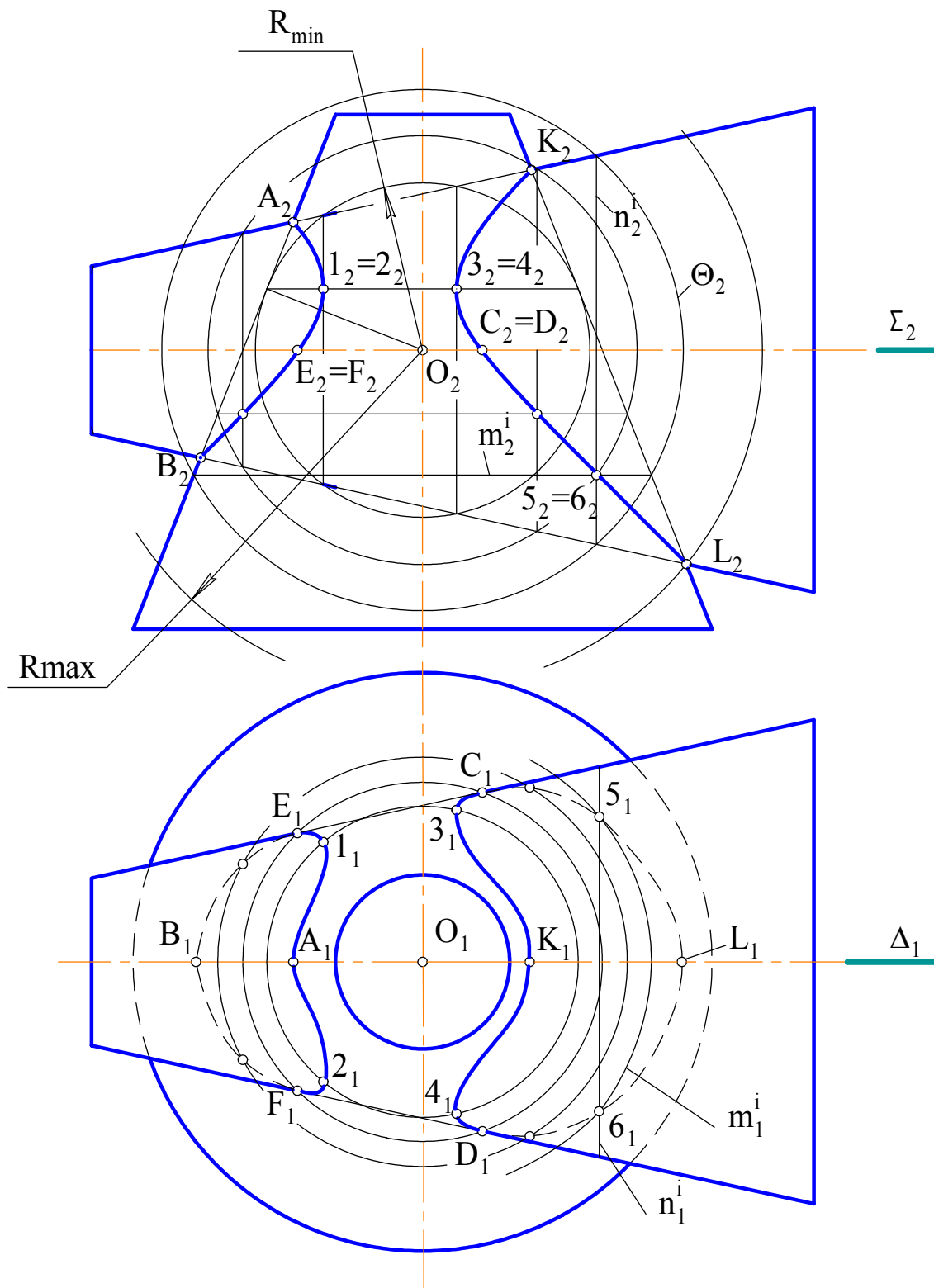


Рис. 12.16

Аналогично можно построить любое количество точек искомой линии пересечения. Однако нужно иметь в виду, что не все сферы могут быть использованы для решения задачи. Рассмотрим предельные границы вспомогательных сфер.

Радиус сфер посредников изменяется в диапазоне

$$R_{\max} \geq R \geq R_{\min},$$

где R_{\min} – минимальный радиус сферы, R_{\max} – максимальный радиус сферы.

Сфера минимального радиуса R_{\min} – это сфера, которая касается одной поверхности и пересекает другую (или тоже касается). На рис. 12.21 такая сфера касается «горизонтальной» конической поверхности. С помощью сферы минимального радиуса построены точки $1_2=2_2$ и $3_2=4_2$. Горизонтальные проекции точек 1, 2, 3 и 4 построены аналогично точкам 5 и 6.

Радиус максимальной сферы равен расстоянию от точки пересечения осей поверхностей до самой удаленной точки пересечения контурных образующих этих поверхностей. На рис 12.16 – $R_{\max} = |O_2L_2|$.

Для установления видимости проекций линии пересечения анализируем расположение точек относительно контуров поверхностей. Так, относительно Π_1 , видимым будет участок кривой, расположенный выше контура горизонтальной конической поверхности (вторая поверхность на видимость на Π_1 не влияет). Горизонтальная проекция невидимой части линии показана штриховой линией. Точки А, В и К, L принадлежат фронтальным контурам поверхностей и отделяют видимую часть линии пересечения от невидимой при проецировании на Π_2 . Фронтальные проекции видимой и невидимой частей линии пересечения на рис. 12.16 совпадают.

12.4.5. Способ эксцентрических сфер

Способ эксцентрических сфер применяют при условии, что

1) одна из поверхностей – поверхность вращения, а другая – циклическая (имеет семейство окружностей);

2) поверхности имеют общую плоскость симметрии;

3) общая плоскость симметрии параллельна плоскости проекций (в противном случае следует применить преобразование чертежа).

Пример 1. Построить фронтальную проекцию линии пересечения поверхностей Σ и Θ , общая плоскость симметрии которых параллельна Π_2 (рис. 12.17).

Решение. Заданные поверхности и их расположение удовлетворяют условиям при-

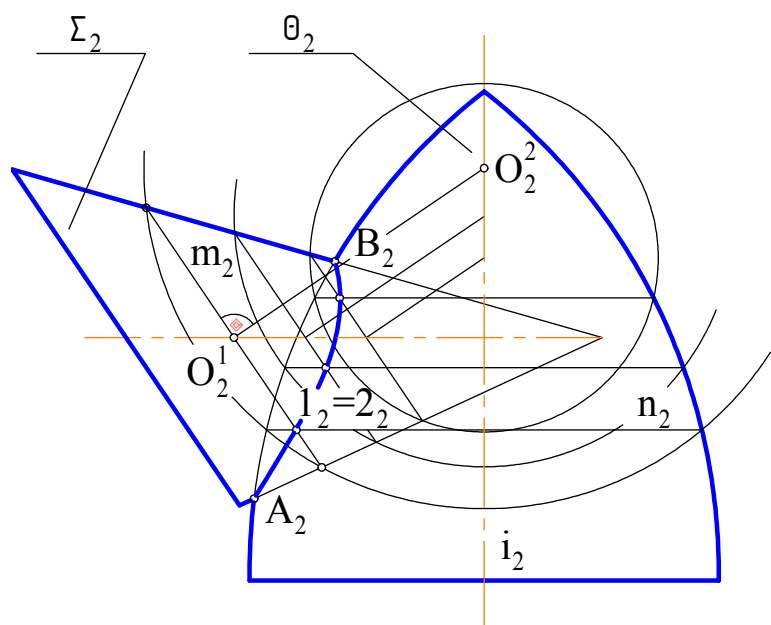


Рис. 12.17

менимости способа эксцентрических сфер, который и применяем для решения поставленной задачи.

Опорными точками являются точки $A(A_2)$ и $B(B_2)$, расположенные в пересечении очерковых образующих. Построение промежуточных точек выполняем в такой последовательности:

1) проводим на конической поверхности окружность, которая расположена в плоскости, параллельной ее основанию и на Π_2 проецируется в отрезок – $m(m_2)$;

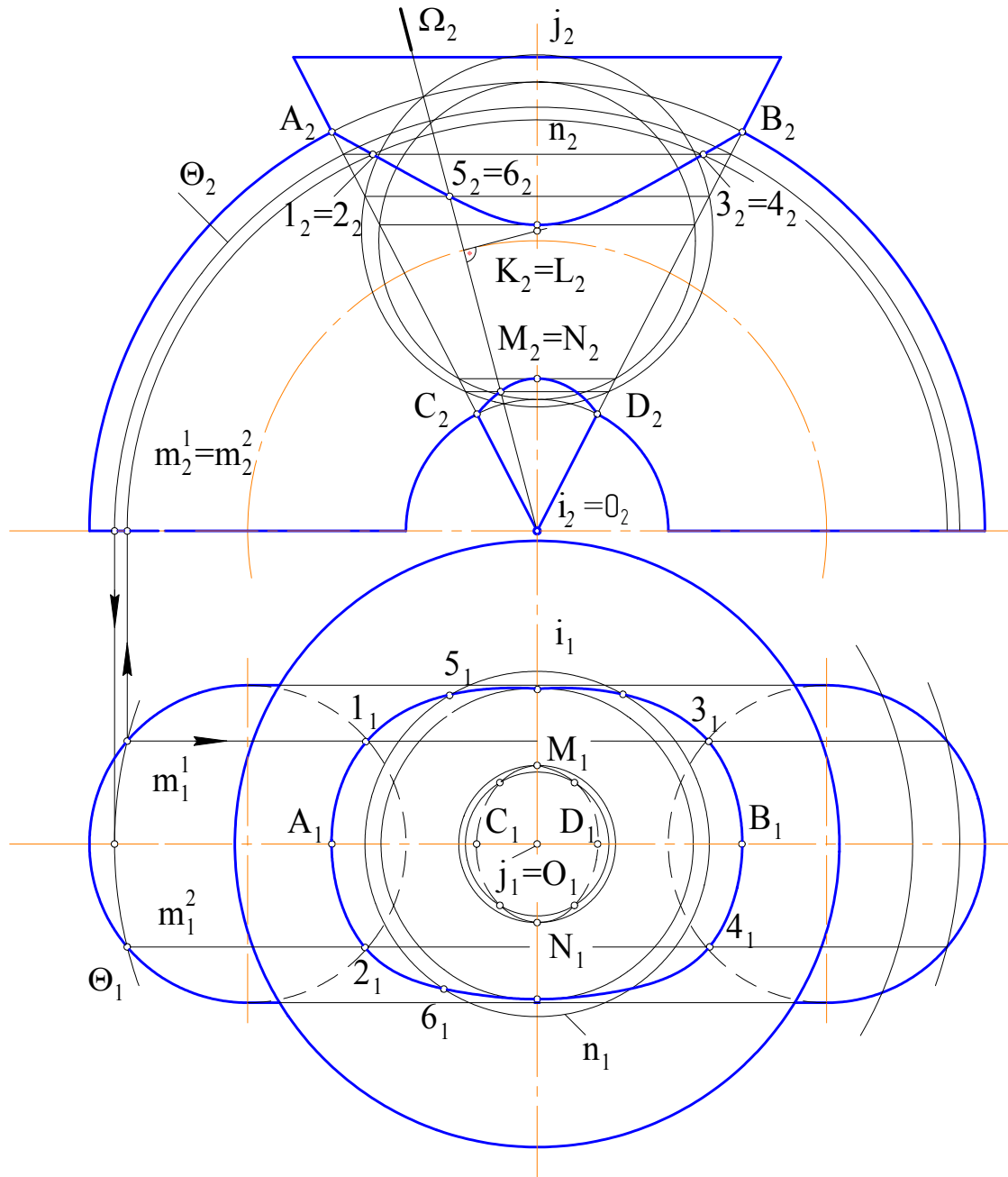


Рис. 12.18

2) проводим перпендикуляр к плоскости окружности m через ее центр O^1 и находим центр O^2 сферы-посредника;

3) проводим проекции сферы с центром в точке O^2 посредством крайних точек окружности $m(m_2)$;

4) строим окружность $n(n_2)$, по которой сфера пресекает поверхность вращения Θ ;

5) определяем точки $1_2=2_2$ пересечения построенных окружностей.

Проекции других точек линии пересечения определяют аналогично.

На Π_2 проекции видимого и невидимого участков линии пересечения совпадают.

Примечание. Предложите решение этой задачи, используя второе семейство окружностей на эллиптическом конусе (см. п. 12.5).

Пример 2. Построить проекции линии пересечения тора и конической поверхности вращения (рис. 12.18).

Решение. Исходные поверхности и их расположение удовлетворяют условиям применимости способа концентрических и эксцентрических сфер. Промежуточные точки 1, 2, 3 и 4 построены способом концентрических сфер, а точки 5 и 6 – способом эксцентрических сфер.

Точки 5 и 6 построены по алгоритму, приведенному в примере 1. Окружность на торе выделена введением фронтально-проецирующей плоскости $\Omega(\Omega_2)$.

Точки 1, 2, 3, 4 построены в следующей последовательности:

1) построены проекции сферы $\Theta(\Theta_1, \Theta_2)$ с центром в точке $O(O_1, O_2)$;

2) определены проекции окружности $n(n_1, n_2)$, по которой сфера пересекает коническую поверхность;

3) построены проекции окружностей m^1 и m^2 , по которым сфера пересекает тор; сначала построены m^1_1 и m^2_1 , а затем m^1_2 и m^2_2 (показано стрелками);

4) пересечение проекций окружностей m и n задает проекции точек 1, 2, 3, 4.

Точки A, B, C, D, а также K, L, M, N являются опорными. Первые расположены в пересечении очерковых образующих поверхностей, а вторые – на сфере минимального радиуса (экстремальные).

12.5. Пересечение поверхностей второго порядка

В общем случае две поверхности второго порядка пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка. Следует отметить, что при некоторых особых положениях относительно друг друга поверхности второго порядка могут пересекаться по плоским кривым второго порядка, то есть пространственная кривая пересечения распадается на две плоские кривые. Условия распада кривой четвертого порядка на две кривые второго порядка формулируются в виде следующих теорем.

Теорема 1. Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной плоской кривой. Иллюстрацией этой теоремы является рис. 12.19, на котором показаны фронтальные проекции сферы и эллиптического конуса, пересекающихся по двум ок-

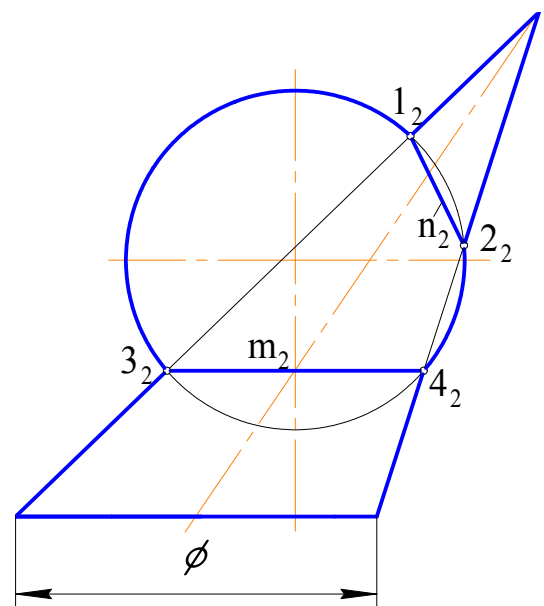


Рис. 12.19

ружностям – $m(m_2)$ и $n(n_2)$. Окружность m параллельна основанию (плоскости окружности) конической поверхности, а окружность n построена в соответствии с теоремой 1.

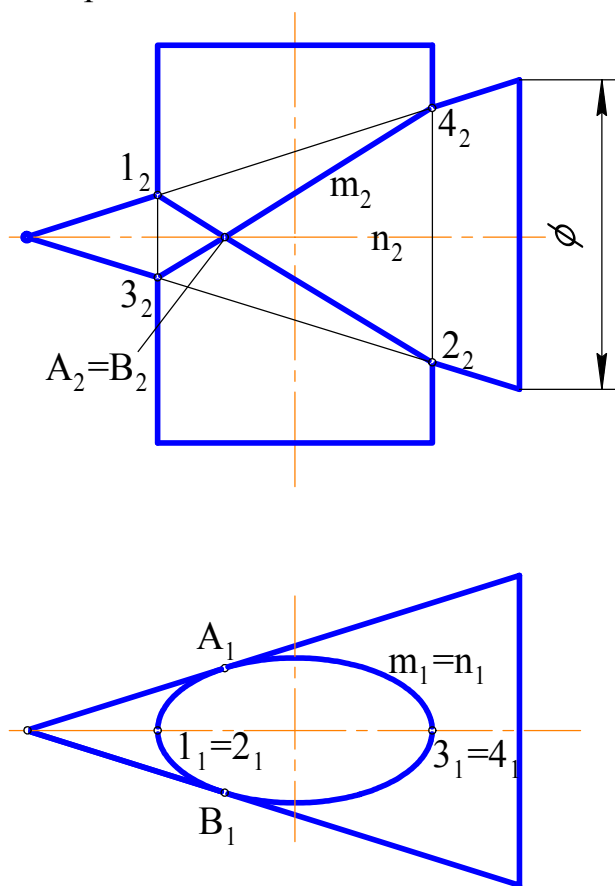


Рис.12.20

взаимного пересечения распадается на две плоские кривые. Плоскости этих кривых

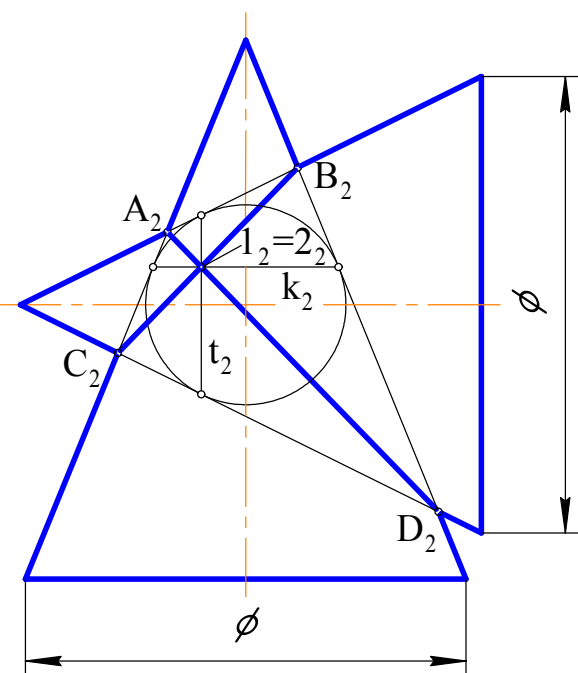


Рис.12.21

Теорема 2 (теорема о двойном соприкосновении). Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка.

Плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки касания. На рис. 12.20 показано построение линии пересечения конической поверхности вращения и эллиптического цилиндра (оси поверхностей пересекаются и параллельны Π_2). Линии пересечения – эллипсы – лежат во фронтально-проецирующих плоскостях, проходящих через прямую AB , соединяющую точки касания A и B , а также точки 1, 2 и 3, 4 (точки пересечения очерков поверхностей).

Теорема 3 (теорема Монжа). Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые. Плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания. Эта теорема является частным случаем теоремы 2. Если оси пересекающихся поверхностей вращения параллельны какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость кривые линии проецируются в отрезки прямых.

На рис. 12.21 приведен пример построения линии пересечения двух конических поверхностей вращения, оси которых пересекаются и параллельны Π_2 . Исходные поверхности описаны вокруг сферы и имеют с ними касание по окружностям $t(t_2)$ и $k(k_2)$. Эти окружности пересекаются в точках 1 и 2. Плоскости линий пересечения проходят через прямую 12 и точки пересечения очерков поверхностей A, D, B и C .

13. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Определение. Если поверхность, представляемую в виде тонкой, гибкой и не-растяжимой пленки, можно путем изгибания совместить с плоскостью без разрывов и складок, то поверхность, обладающая этим свойством, называется развертывающейся, а фигура, полученная в результате совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой. В математике доказано, что к развертывающимся относятся лишь три группы линейчатых поверхностей: конические, цилиндрические и торсовые (поверхности касательных к пространственной кривой). У этих поверхностей вдоль каждой прямолинейной образующей существует единственная касательная плоскость, у остальных линейчатых поверхностей вдоль образующей прямой существует бесконечное множество таких плоскостей. Изгибание поверхности на плоскость приводит к соответствию, устанавливаемому между множеством точек поверхности и множеством точек ее развертки. Это соответствие обладает следующими свойствами:

- 1) точке поверхности соответствует единственная точка развертки и наоборот;
- 2) длины соответственных линий поверхности и ее развертки равны;
- 3) углы, образованные линиями на поверхности, равны углам, образованным соответствующими линиями на развертке;
- 4) площади соответственных фигур на поверхности и на развертке равны.

Из приведенных свойств вытекают следствия:

- 1) прямая линия поверхности преобразуется в прямую линию развертки;
- 2) параллельные линии поверхности преобразуются в параллельные прямые ее развертки.

Для развертывающихся линейчатых поверхностей строятся графически приближенные развертки, поскольку в процессе построения развертки эти поверхности заменяются (аппроксимируются) вписанными или описанными многогранными поверхностями. Точные развертки аппроксимирующих многогранных поверхностей принимаются за приближенные развертки развертывающихся поверхностей. Для поверхностей, которые не являются развертывающимися, строятся условные развертки по следующей схеме:

$\text{НП} \Rightarrow \text{РП} \Rightarrow \text{ГП} \sim \text{ТР}$, где НП – неразвертывающаяся поверхность, РП – развертывающаяся поверхность, ГП – гранная поверхность, ТР – точная развертка, \Rightarrow – этап аппроксимации предыдущей поверхности последующей. Поскольку в результате последовательных аппроксимаций исходная поверхность заменяется гранной, то рассмотрим вначале построения точных разверток гранных поверхностей.

13.1. Развертки гранных поверхностей

Определение. Разверткой гранной поверхности называется множество соединенных в плоскости многоугольников, конгруэнтных (равных) соответственно ее граням. Под соединением понимается последовательное размещение многоугольников развертки, которое соответствует последовательному расположению граней поверхности.

Задача. Дана пирамида $SABC$ (рис. 13.1). Построить развертку ее поверхности.

Основание ABC пирамиды принадлежит плоскости проекций Π_1 , поэтому $\Delta A_1B_1C_1$ – его НВ. Для определения НВ боковых ребер пирамиды воспользуемся методом прямоугольного треугольника (см. п. 8.1). $SS_0 \perp x$ – общая разность высот концов ребер данной пирамиды. Откладывая от точки S по оси X отрезки $SB = S_1B_1$, $SC = S_1C_1$, $SA = S_1A_1$, получаем S_0B , S_0C , S_0A – НВ ребер пирамиды. Затем в стороне, используя известные правила построения треугольника по его сторонам, выполняем собственно построения развертки пирамиды.

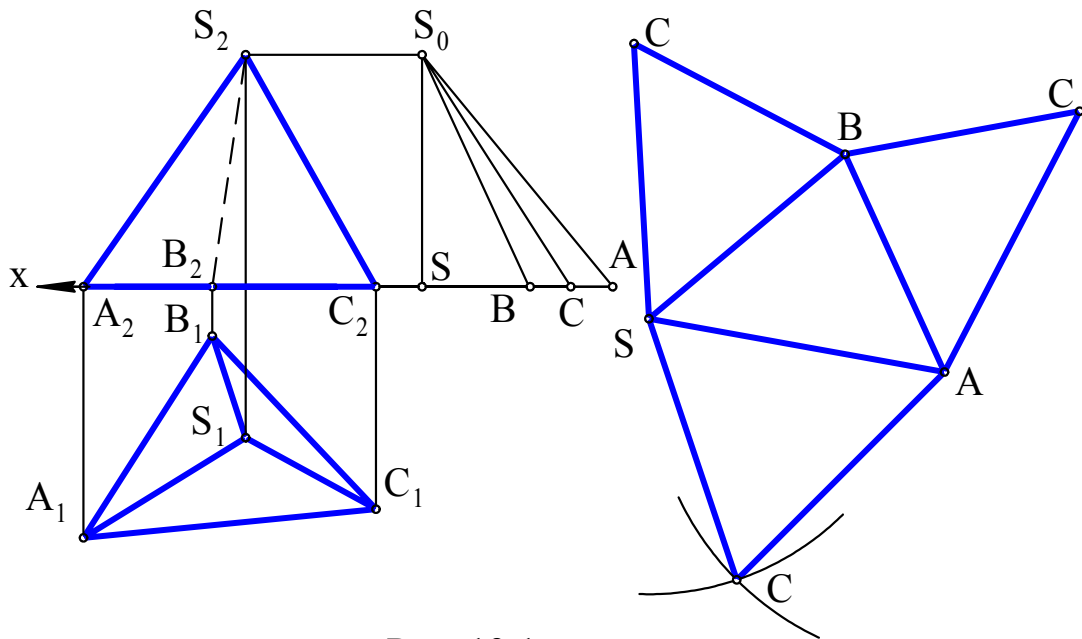


Рис. 13.1

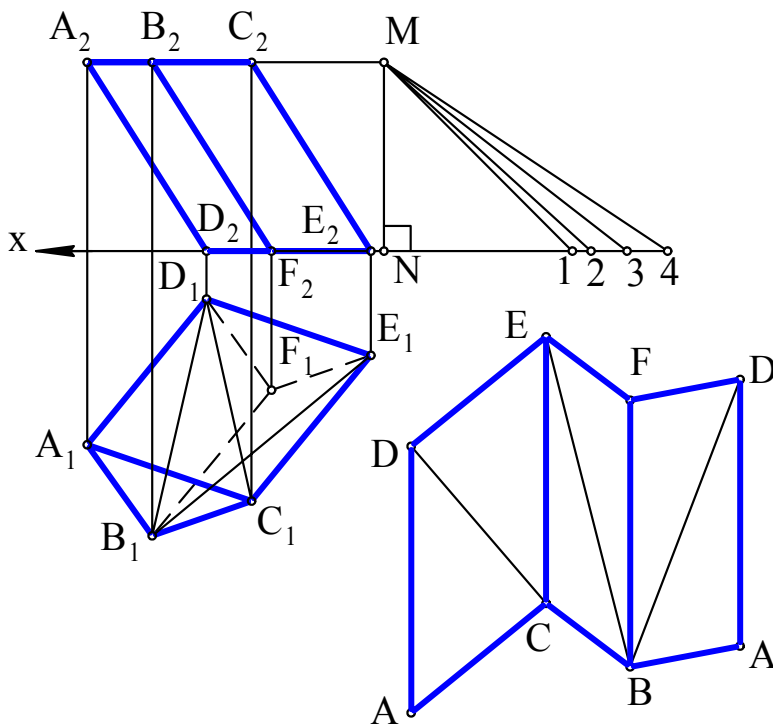


Рис. 13.2

Задача. Дана трехгранная призма $ABCD FE$ (рис. 13.2). Построить развертку ее боковой поверхности.

Основания ABC и DFE данной призмы параллельны плоскости проекций Π_1 и, следовательно, проецируются на эту плоскость в НВ. Каждую из боковых граней призмы представляем в виде двух треугольников, разделив грань диагональю. По методу прямоугольного треугольника определяем НВ трех диагоналей BD , BE и CD и одного ребра (ребра по условию задачи равны). В итоге на диаграмме натуральных величин отрезков получаем:

MN – общая разность высот ребер; $N1 = A_1D_1 = B_1F_1 = C_1E_1$; $N2 = D_1C_1$, $N3 = B_1D_1$, $N4 = B_1E_1$; $M1$ – НВ ребра, $M2$ – НВ диагонали DC , $M3$ – НВ диагонали BD и $M4$ – НВ диагонали BE . Имея НВ ребер призмы, трех ее диагоналей и сторон треугольников оснований, строим развертку боковой поверхности как совокупности треугольников, выстраиваемых по их сторонам.

Метод, которым были построены развертки в рассмотренных двух задачах, называется методом треугольников (метод триангуляции). Метод основан на возможности построения единственного (по форме) треугольника по его заданным сторонам. Заметим, что четыре, пять, отрезков определяют бесконечное множество четырех, пяти, угольников. Метод треугольников наиболее прост и универсален при построении точных разверток гранных поверхностей, а также приближенных и условных разверток линейчатых поверхностей.

Рассмотрим специальные методы построения разверток гранных поверхностей.

Задача. Дана трехгранная призма $ABCA^1B^1C^1$ (рис. 13.3). Построить развертку призмы.

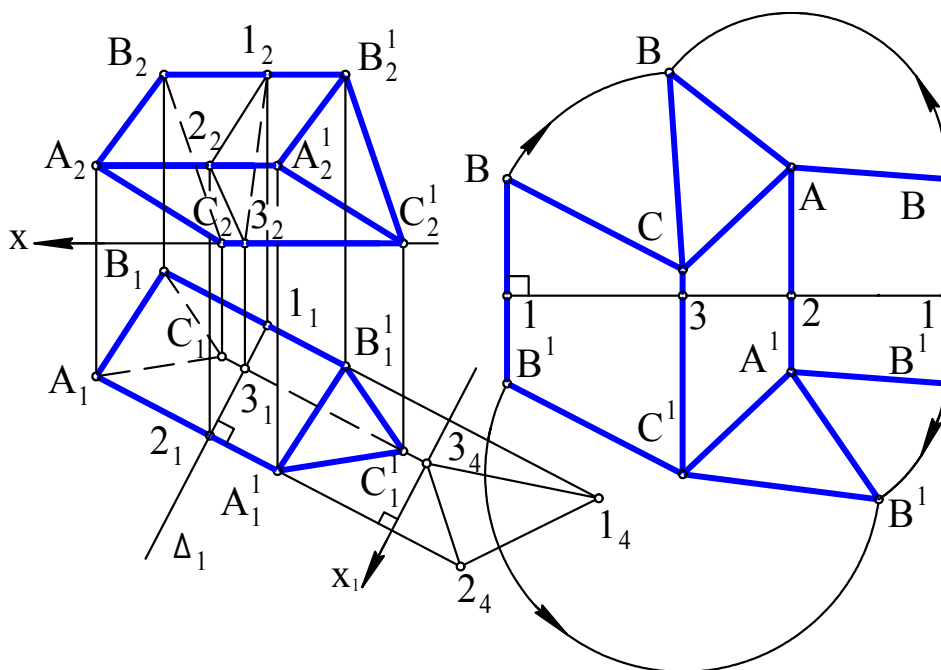


Рис. 13.3

Для построения развертки применим метод нормального сечения. Метод применим для призматических поверхностей, у которых боковые ребра представляют собой линии уровня. Последовательность построений в методе нормального сечения следующая:

- 1) призма пересекается плоскостью Δ перпендикулярно ее ребрам;
- 2) определяются НВ сторон многоугольника, по которым плоскость Δ пересекает поверхность призмы;
- 3) многоугольник как ломаная линия разворачивается в отрезок прямой, внутри которой отмечаются точки, соответствующие вершинам многоугольника;

- 4) через эти точки проводятся прямые, перпендикулярные отрезку – развертке многоугольника;
- 5) на перпендикулярных прямых от указанных точек откладываются отрезки, представляющие НВ соответствующих отрезков ребер пирамиды;
- 6) концы отрезков ребер последовательно соединяются отрезками прямых линий;
- 7) к построенной развертке боковой поверхности достраиваются НВ многоугольников – оснований призмы.

Применим изложенную последовательность к нашей задаче. Поскольку ребра призмы AA^1 , BB^1 , CC^1 по условию задачи являются горизонталями, то $A^1A_1^1$, $B^1B_1^1$, $C^1C_1^1$ есть НВ этих ребер. Рассечем боковую поверхность призмы плоскостью Δ , перпендикулярной ее ребрам. Поскольку ребра являются горизонталями, то $\Delta \perp \Pi_1$ и Δ_1 – горизонтальный след плоскости Δ . $1_12_13_1$ и $1_22_23_2$ – проекции нормального сечения призмы. Проекция Δ $1_42_43_4$ представляет собой НВ нормального сечения, построенную методом замены плоскостей проекций, где $x_1 \parallel \Delta_1$. В стороне от КЧ, на горизонтальной прямой, последовательно располагаем отрезки $13 = 1_43_4$, $32 = 3_42_4$, $21 = 2_41_4$ и проводим через их концы вертикальные прямые. На этих прямых откладываем отрезки:

$$1B = 1_1B_1, 1B^1 = 1_1B_1^1; 3C = 3_1C_1, 3C^1 = 3_1C_1^1; 2A = 2_1A_1, 2A^1 = 2_1A_1^1.$$

Многоугольник $BCABB^1A^1C^1B^1$ представляет собой развертку боковой поверхности заданной призмы. Достроив к ней ΔABC и $\Delta A^1C^1B^1$, получаем полную развертку призмы.

Задача. Дана призма $ABCA^1C^1B^1$ (рис. 13.4). Построить ее развертку.

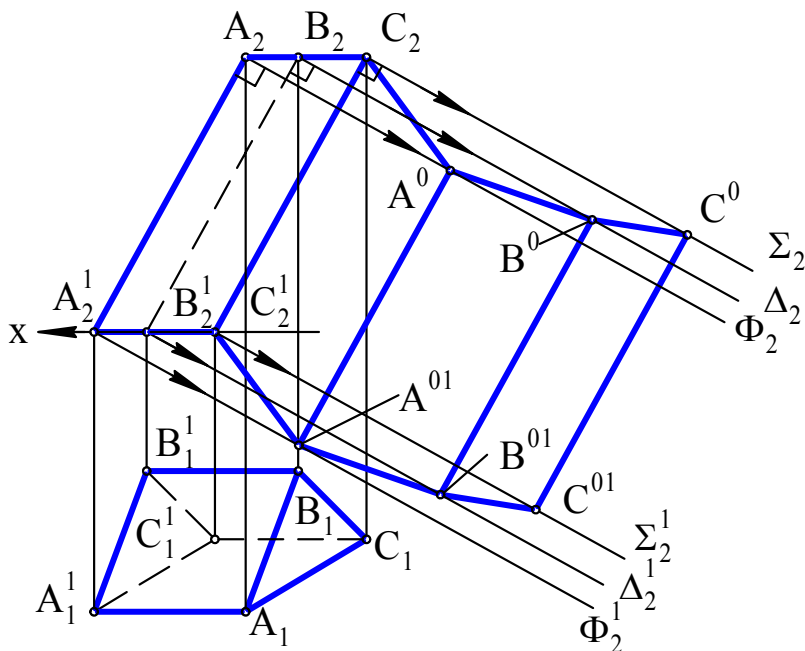


Рис. 13.4

Для построения развертки призмы можно использовать известный метод раскатки. Его применение возможно для таких призматических поверхностей, у которых боковые ребра и плоскости оснований являются прямыми и плоскостями уровня. Суть метода заключается в последовательном вращении граней призмы вокруг ее боковых ребер до положения совмещения с плоскостью, которая проходит через одно из ребер и параллельна плоскости проекций, т.е. каждая грань оставляет свой «отпечаток» в этой плоскости. Множество последовательно полученных и расположенных «отпечатков» в плоскости представляет собой развертку боковой поверхности призмы. Рассмотрим решение данной задачи. Боковые ребра призмы являются фронталями, а плоскости оснований – горизонтальными плоскостями уровня.

Множество последовательно полученных и расположенных «отпечатков» в плоскости представляет собой развертку боковой поверхности призмы. Рассмотрим решение данной задачи. Боковые ребра призмы являются фронталями, а плоскости оснований – горизонтальными плоскостями уровня.

Условия задачи соответствуют методу раскатки. Пусть первое вращение – вращение грани ACC^1A^1 , происходит вокруг оси CC^1 . Повернем эту грань до совмещения с плоскостью развертки, проходящей через ребро CC^1 и параллельной плоскости проекций Π_2 . В этом случае вершины A и A^1 будут вращаться в проецирующих плоскостях $\Phi \perp \Pi_2$ и $\Phi^1 \perp \Pi_2$ соответственно, которые перпендикулярны ребру AA^1 . Совмещенные положения A^0 и A^{01} вершин A и A^1 будут принадлежать фронтальным следам Φ_2 и Φ_2^1 плоскостей Φ и Φ^1 соответственно и отстоять от точек C_2 и C_2^1 на расстоянии $C_2A^0 = C_2^1A^{01} = A_1C_1 = A_1^1C_1^1$. Следующим вращением вокруг оси A^0A^{01} добиваемся совмещения грани ABV^1A^1 с плоскостью развертки. При этом совмещенные положения B^0 и B^{01} вершин B и B^1 соответственно будут принадлежать фронтальным следам Δ_2 и Δ_2^1 плоскостей $\Delta \perp \Pi_2$ и $\Delta^1 \perp \Pi_2$ и отстоять от точек A^0 и A^{01} на расстоянии $B^0A^0 = B^{01}A^{01} = B_1A_1 = B_1^1A_1^1$. Последнее, третье вращение, будет происходить вокруг оси B^0B^{01} и позволит получить совмещение грани BCC^1B^1 с плоскостью развертки, при этом совмещенные положения C^0 и C^{01} вершин C и C^1 будут принадлежать фронтальным следам Σ_2 и Σ_2^1 проецирующих плоскостей $\Sigma \perp \Pi_2$ и $\Sigma^1 \perp \Pi_2$ и отстоять от точек B^0 и B^{01} на расстоянии $C^0B^0 = C^{01}B^{01} = C_1B_1 = C_1^1B_1^1$. Полученный в итоге построений многоугольник $C_2A^0B^0C^0C^{01}B^{01}A^{01}C_2^1$ будет представлять собой развертку боковой поверхности заданной призмы.

13.2. Приближенные развертки развертывающихся поверхностей

Построение приближенных разверток выполняется в следующей последовательности:

- 1) заданную развертывающуюся линейчатую поверхность заменяют (аппроксимируют) гранной поверхностью;
- 2) строят точную развертку гранной поверхности;
- 3) точную развертку принимают за приближенную развертку заданной поверхности.

Для некоторых линейчатых развертывающихся поверхностей нет необходимости в их замене гранными поверхностями. Так, например, отсек цилиндрической поверхности вращения радиуса r и высотой h имеет разверткой прямоугольник со сторонами h и $2\pi r$ (рис. 13.5).

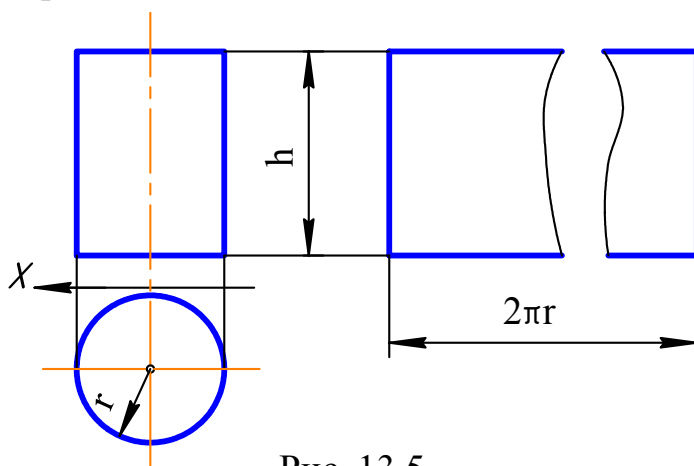


Рис. 13.5

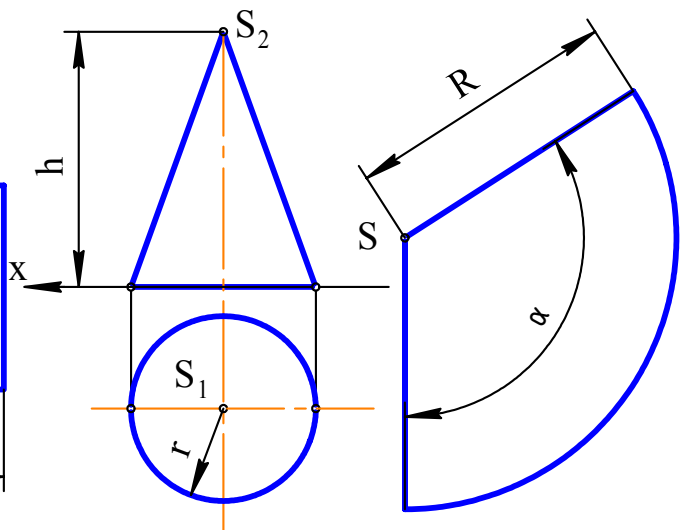


Рис. 13.6

Разверткой конической поверхности вращения высотой h и основанием радиуса r является сектор радиуса $R = \sqrt{r^2 + h^2}$ с углом $\alpha = \frac{2\pi r}{R}$ (рис. 13.6). Рассмотрим пример построения приближенных разверток.

Задача. Дан отсек конической поверхности (рис. 13.7). Построить его приближенную развертку.

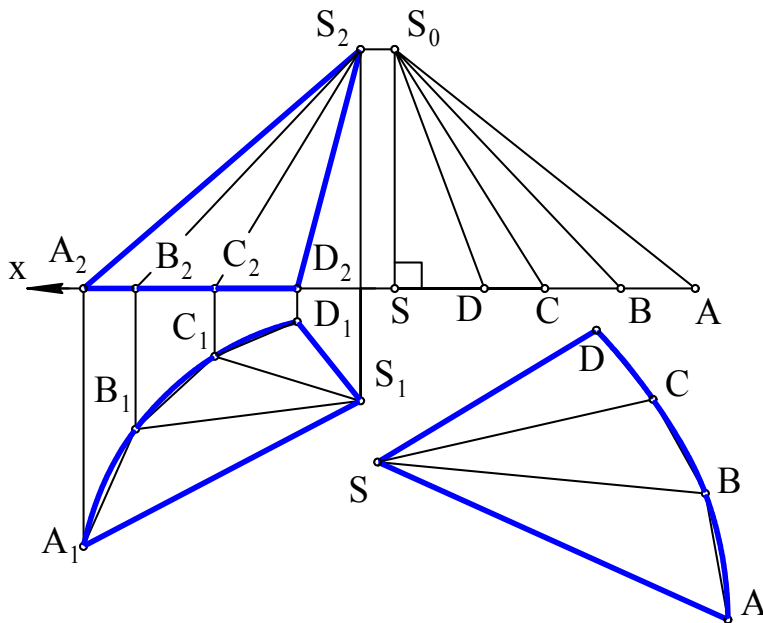


Рис. 13.7

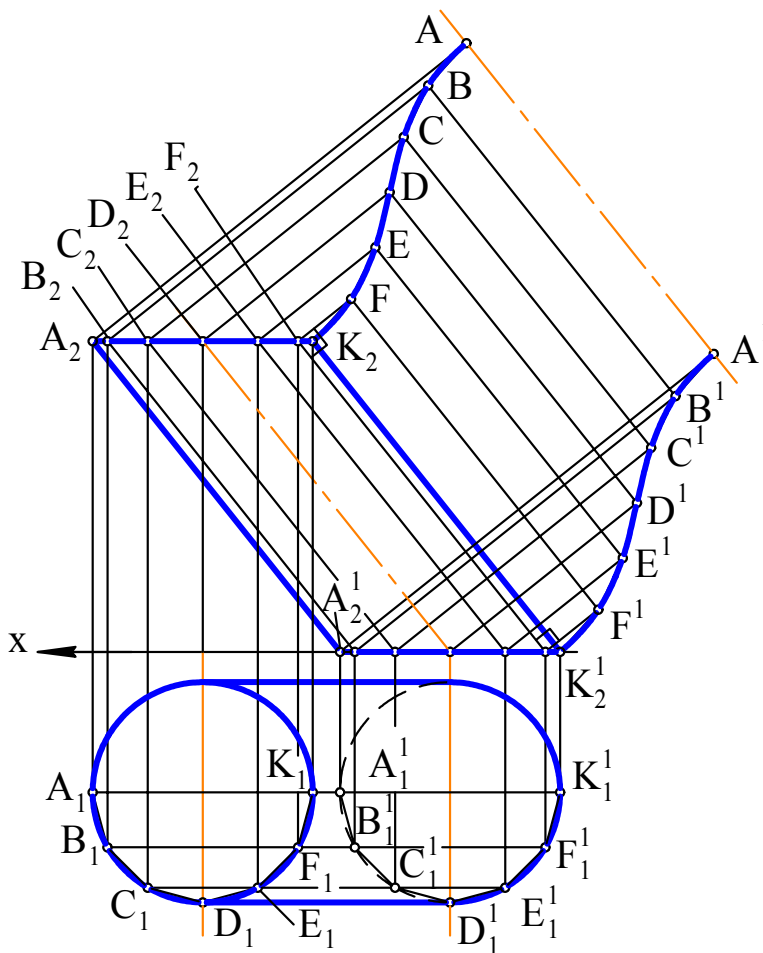


Рис. 13.8

Плоскую кривую линию – направляющую конической поверхности вначале заменяют вписанной ломаной линией $ABCD(A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2)$, которая по условию задачи принадлежит плоскости проекций Π_1 и поэтому $A_1B_1C_1D_1$ – ее НВ. Затем соединяют вершины ломаной с вершиной S конической поверхности и получают вписанную пирамидальную поверхность $SABCD$, которой заменяют данную коническую поверхность. Используя метод прямоугольного треугольника, строят диаграмму НВ ребер вписанной пирамидальной поверхности. При этом SS_0 – общая разность высот концов ребер пирамиды; $SD = S_1D_1$, $SC = S_1C_1$, $SB = S_1B_1$, $SA = S_1A_1$; S_0D , S_0C , S_0B , S_0A – представляют собой НВ ребер пирамиды. $SDCBA$ – развертка боковой поверхности заданного конического отсека.

Задача. Дан отсек поверхности эллиптического цилиндра (рис. 13.8). Построить развертку ее боковой поверхности.

Впишем в данную поверхность некоторую призматическую поверхность, разделив направляющую линию цилиндра – окружность, на равное число частей, например на 12

(на рисунке, в силу симметричности заданной поверхности, для простоты построений выполнено деление половины поверхности на 6 частей). Боковые ребра вписанной призмы являются фронталями, а ее основания – многоугольники принадлежат горизонтальным плоскостям уровня. По этой причине боковые ребра проецируются на Π_2 в НВ, а многоугольники оснований – в НВ на Π_1 .

Отмеченные условия задачи соответствуют методу раскатки для построения развертки вписанной призмы. Поскольку призма имеет плоскость симметрии, проходящую через линию центров образующих эллиптический цилиндр окружностей и являющуюся фронтальной плоскостью уровня, то для сокращения построений выполним построения развертки только половины призмы. Вращение призмы по методу раскатки следует начинать с ребра KK^1 ($K_1K_1^1$, $K_2K_2^1$). Поэтому плоскостью развертки призмы будет фронтальная плоскость уровня, проходящая через ребро KK^1 . Последовательным вращением вокруг ребер призмы добиваемся совмещения всех ее граней с плоскостью развертки. При этом $K_2F = K_2^1F^1 = K_1^1F_1^1 = K_1F_1$; $FE = F^1E^1 = F_1^1E_1^1 = F_1E_1$ и т. д. Полученный многоугольник $ABCD... D^1C^1B^1A^1$ представляет собой точную развертку половины боковой поверхности вписанной призмы, которая в свою очередь определяет приближенную развертку соответствующей половины поверхности эллиптического цилиндра.

Задача. Дан отсек торсовой поверхности (рис. 13.9). Построить его развертку.

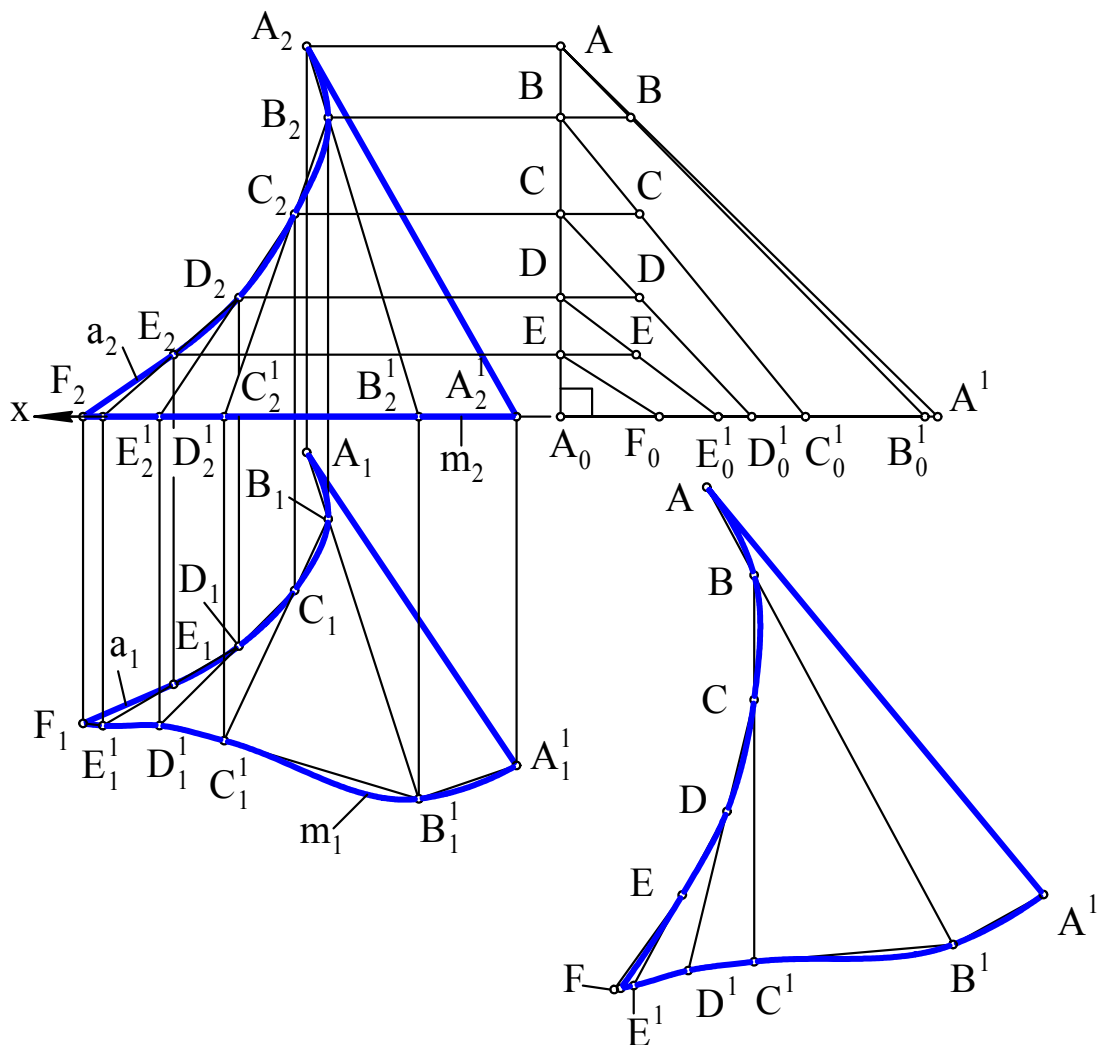


Рис. 13.9

Торсовая поверхность – это линейчатая развертывающаяся поверхность, образованная касательными прямыми к пространственной кривой, которая имеет название ребра возврата этой поверхности. В нашей задаче отсек заданной поверхности ограничен ребром возврата a (a_1, a_2), плоской кривой m (m_1, m_2) и отрезком AA^1 ее образующей. Заменяем кривую m вписанной ломаной линией $A^1B^1C^1D^1E^1F$ с проекциями $A_1^1B_1^1C_1^1D_1^1E_1^1F_1$ и $A_2^1B_2^1C_2^1D_2^1E_2^1F_2$. Затем поступим следующим образом:

- 1) соединим точки A и B^1 для получения отрезка $AB^1(A_1B_1^1, A_2B_2^1)$;
- 2) отметив точку пересечения $AB^1 \cap a = B(B_1, B_2)$, соединим точки B и C^1 для получения отрезка $BC^1(B_1C_1^1, B_2C_2^1)$;
- 3) отметив точку пересечения $BC^1 \cap a = C(C_1, C_2)$, соединим точки C и D^1 для получения отрезка $CD^1(C_1D_1^1, C_2D_2^1)$;
- 4) отметив точку пересечения $CD^1 \cap a = D(D_1, D_2)$, соединим точки D и E^1 для получения отрезка $DE^1(D_1E_1^1, D_2E_2^1)$;
- 5) отметив точку пересечения $DE^1 \cap a = E(E_1, E_2)$, соединим точки E и F_1 для получения отрезка $EF(E_1F_1, E_2F_2)$.

В итоге выполнения построений получим вписанный в ребро возврата a пространственный многоугольник $ABCDEF(A_1B_1C_1D_1E_1F_1, A_2B_2C_2D_2E_2F_2)$ и вписанную в торсовую поверхность гранную поверхность с ребрами $AA^1, AB^1, BC^1, CD^1, DE^1, EF$.

Очевидно, гранями вписанной в торсовую поверхность гранной поверхности являются треугольники, у которых две вершины являются вершинами плоской ломаной линии, вписанной в линию m , а третья вершина – это вершина пространственной ломаной, вписанной в ребро возврата a . Сторона одного из двух соседних треугольников принадлежит стороне другого и служит ребром гранной поверхности. Дальнейшие построения заключаются в определении НВ двух из трех сторон каждого треугольника методом прямоугольного треугольника, поскольку третья сторона спроецирована на Π_1 в НВ. Для этого строится диаграмма НВ сторон треугольников – граней. При этом на прямой AA_0 от точки A_0 откладываются разности высот концов отрезков – сторон треугольников, а по оси x от точки A_0 – длины горизонтальных проекций этих сторон. Причем $A_0F_0 = E_1F_1$, $A_0E_0^1 = D_1E_1^1$, $A_0D_0^1 = C_1D_1^1$, $A_0C_0^1 = B_1C_1^1$, $A_0B_0^1 = A_1B_1^1$, $A_0A^1 = A_1A_1^1$. Затем выполняются последовательные построения треугольников – граней по трем их сторонам, приводящие к плоской области, ограниченной линией $ABCD...D^1C^1B^1A^1$. Эта плоская область будет приближенной разверткой заданной торсовой поверхности.

13.3. Условные развертки неразвертывающихся поверхностей

Рассмотрим несколько примеров, следуя указанной ранее схеме построения условной развертки поверхности.

Задача. Дана поверхность вращения (рис. 13.10). Построить ее развертку. Очевидно, данная поверхность не является развертывающейся и для нее можно построить лишь условную развертку. Разделим поверхность вращения осевыми плоскостями Δ^i , где $i = 1, 2, 3, \dots$, на равное число частей (отсеков) и выберем

одну из них (например, шестую часть), ограниченную проецирующими плоскостями Δ^1 и Δ^2 , имеющими горизонтальные следы Δ_1^1 и Δ_2^1 . Примем очерковую линию $t(t_1, t_2)$ за направляющую линию цилиндрической поверхности с отрезками ее фронтально - проецирующих образующих между плоскостями Δ^1 и Δ^2 .

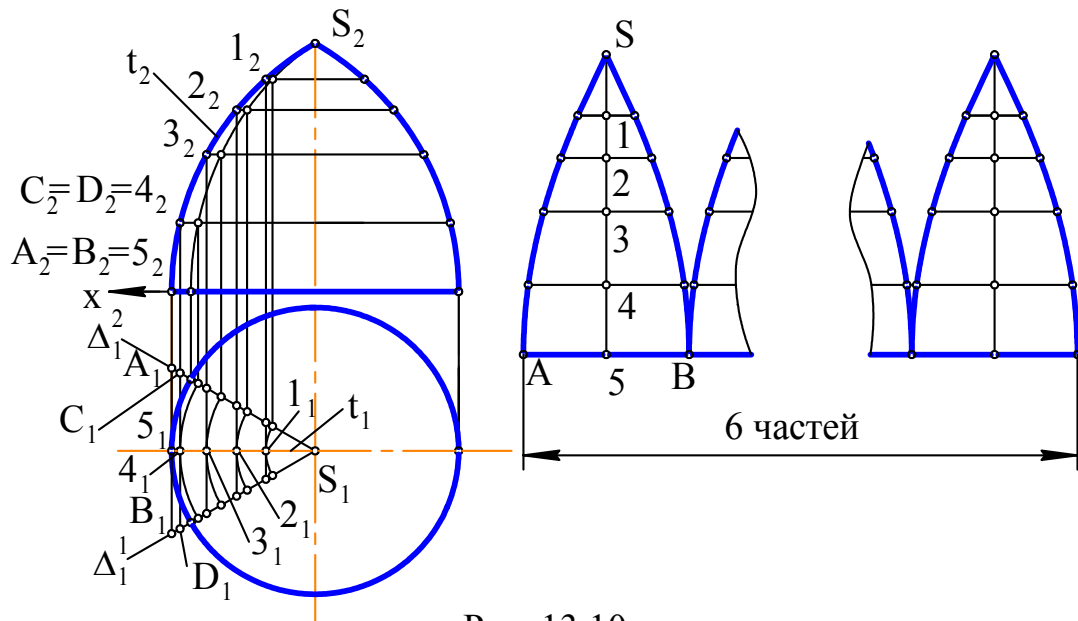


Рис. 13.10

Отсеком этой поверхности выполнена аппроксимация выбранной части исходной поверхности. В соответствии со схемой построения условной развертки выполним вторую аппроксимацию, заменив отсек цилиндрической поверхности отсеком призматической поверхности. Для этого выберем на направляющей t ряд точек, например $S, 1, 2, 3, 4, 5$, и проведем через них фронтально проецирующие образующие, например, $AB \in 5$. Отрезки этих прямолинейных образующих между осевыми плоскостями Δ^1 и Δ^2 заменяют соответствующие отрезки параллелей (окружностей) исходной поверхности и являются ребрами призматической поверхности, а ломаная линия $S12345$, вписанная в линию t , является направляющей линией этой поверхности. Точная развертка призматической поверхности, вписанной в цилиндрическую поверхность, будет служить приближенной разверткой описанной цилиндрической поверхности и условной разверткой отсека исходной поверхности вращения. Для построения развертки отсека вписанной призматической поверхности проведем в стороне от исходного КЧ горизонтальную линию и выберем на ней точку 5. По обе стороны от точки 5 отметим горизонтально и симметрично точки A и B такие, что $AB = A_1B_1$. Вертикально от точки A отложим отрезок $5A = 5_2A_2$. Затем от точки 4 горизонтально и симметрично отметим точки C и D такие, что $CD = C_1D_1$ и т. д. В итоге построений получаем два ряда точек, симметричных относительно линии $5S$. Соединив точки каждого ряда лекальными кривыми, получим условную развертку выделенного отсека исходной поверхности. Присоединив к ней такие же (равные) развертки остальных отсеков, получим полную условную развертку поверхности.

Задача. Дана четверть поверхности тора (рис. 13.11). Построить ее развертку. Для решения задачи расsection четверть поверхности тора фронтально проецирующими осевыми плоскостями $\Delta^i, i = 1, 2, 3 \dots$ на равные отсеки и выделим один из них, например заключенный между секущими плоскостями Π_1 и Δ^1 . Проведем плоскость симметрии Δ этого отсека. Она рассекает отсек тора по окружности t , при этом $t_2 = 1_2 7_2$, где t_1^1 – НВ этой окружности. Заменим выделенный отсек поверхности четверти тора отсеком описанной цилиндрической поверхности с направляющей t и образующими – фронтальными линиями уровня, заключенными между плоскостями Π_1 и Δ^1 . Отрезки этих образующих в пределах между Π_1 и Δ^1 заменяют отрезки соответствующих параллелей (окружностей) поверхности четверти тора. Например отрезок $AB(A_2B_2)$ прямой заменяет дугу параллели $1^1 1^{11}(1_2^1 1_2^{11})$, отрезок $CD(C_2D_2)$ заменяет дугу параллели $7^1 7^{11}(7_2^1 7_2^{11})$ и т. д. После этого заменим отсек описанной цилиндрической поверхности отсеком призматической поверхности, вписанной в цилиндрическую.

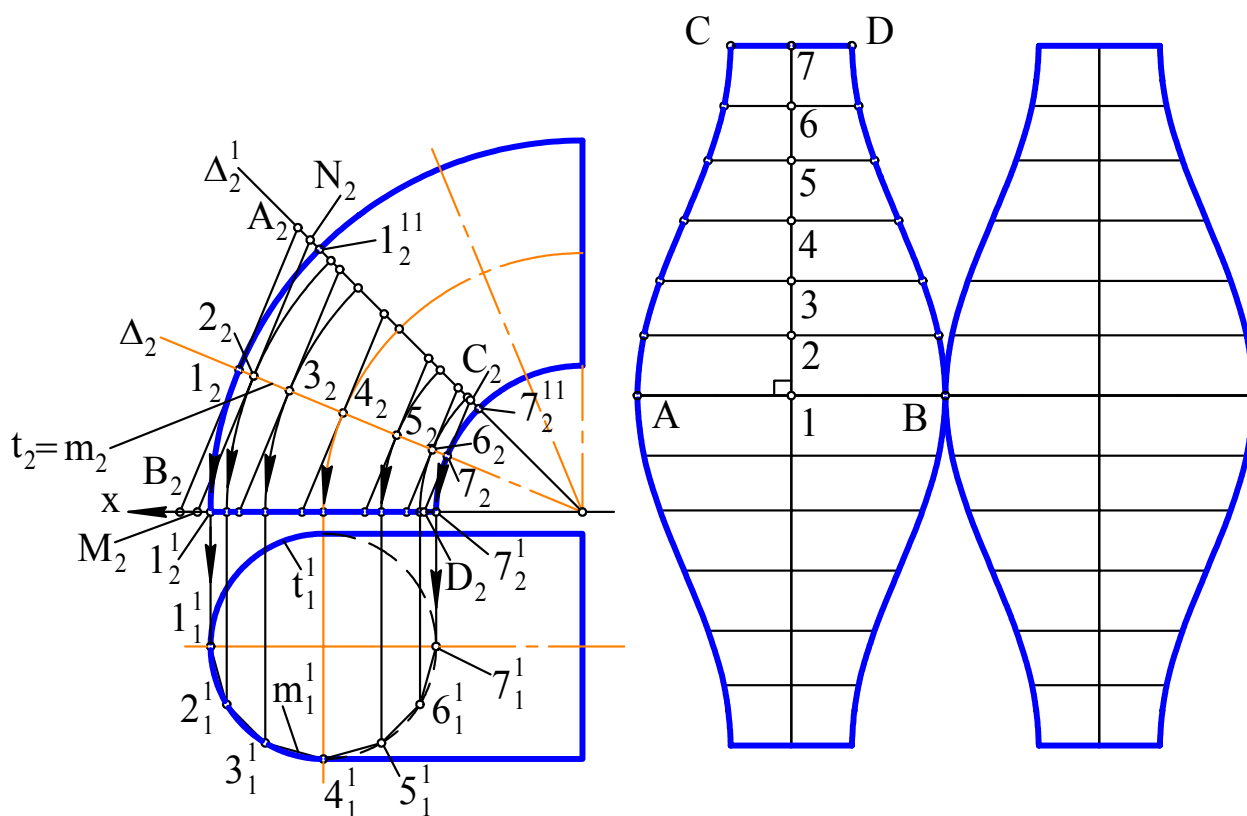


Рис. 13.11

Линия m (m_2) – ломаная линия, вписанная в окружность t и проходящая через вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Эта линия служит направляющей вписанной призматической поверхности и имеет своей НВ ломаную линию m_1^1 , проходящую через вершины $1_1^1, 2_1^1, \dots, 7_1^1$. Образующие AB, \dots, CD цилиндрической поверхности являются ребрами призматической поверхности. Точная развертка отсека вписанной призматической поверхности является приближенной разверткой отсека описанной цилиндрической поверхности и условной разверткой отсека

поверхности тора. Для построения условной развертки отметим в стороне от КЧ на горизонтальной прямой точку 1 и симметричные точки А и В такие, что $AB = A_2B_2$. На вертикальной прямой на точке 1 отложим отрезок $12 = 1_1^1 2_1^1$ и проведем через точку 2 горизонтальную прямую, на которой построим симметричные точки М и N так, что $MN = M_2N_2$ и т. д. В итоге построений получим два вертикально симметричных точечных ряда А, N, ...С и В, М, ..., D. Отразив их симметрично относительно горизонтальной прямой АВ и проведя через каждый из них лекальную кривую, получим условную развертку выделенного отсека поверхности тора. Добавив к ней такие же (равные) развертки остальных отсеков, получим полную условную развертку четверти поверхности тора или же всей его поверхности.

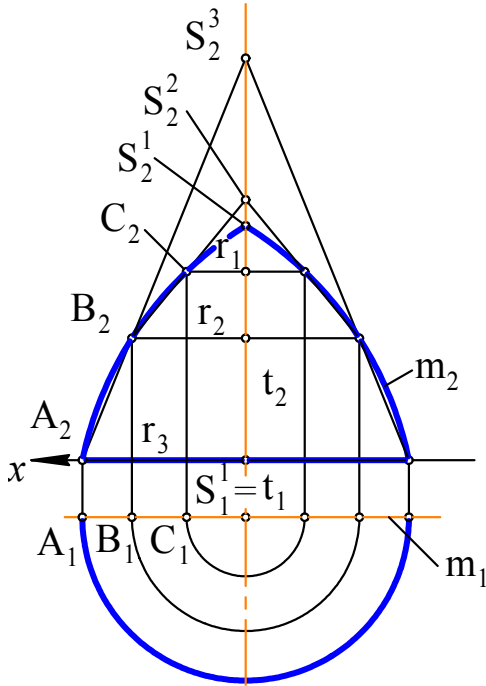


Рис. 13.12

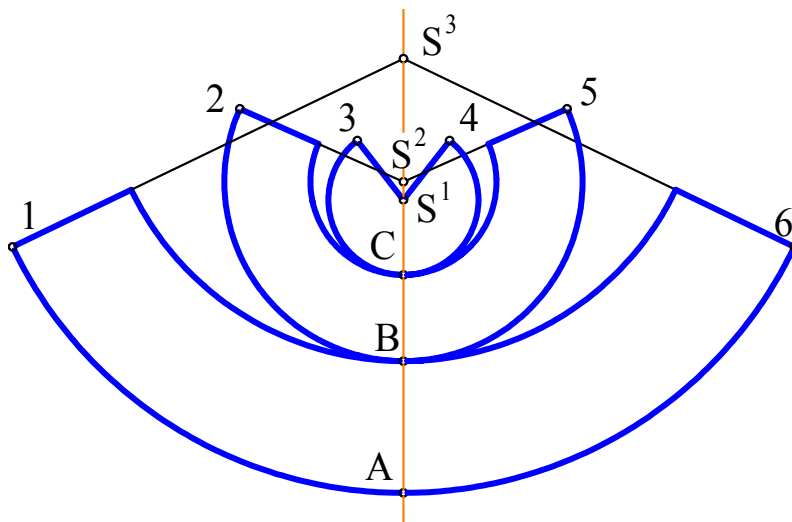


Рис. 13.13

Задача. Дана поверхность вращения с осью вращения t и образующей кривой m (рис.13.12). Построить ее развертку.

Очевидно, данная поверхность может иметь только условную развертку. Для ее построения можно применить метод конусов. Решение задачи в этом случае может быть следующим:

- 1) заменяем образующую m ломаной линией $ABCS^1(A_1 B_1 C_1 S^1_1, A_2 B_2 C_2 S^1_2)$;
- 2) рассекаем заданную поверхность вращения плоскостями, перпендикулярными оси t и проходящими через вершины ломаной;
- 3) образующиеся в сечениях окружности принимаем в качестве оснований конических поверхностей с вершинами и радиусами оснований: $S^1, r_1; S^2, r_1; S^2, r_2; S^3, r_2; S^3, r_3$;
- 4) для каждой конической поверхности строим

ее точную развертку на основе ранее приведенной формулы $\alpha_i = \frac{2\pi r}{R}$, где r

принимает значения r_1, r_2, r_3 ; R принимает значения $S^1C, S^2C, S^2B, S^3B, S^3A$; $\alpha_1 = \angle 3S^1 4$, $\alpha_2 = \angle 2S^2 5$, $\alpha_3 = \angle 1S^3 6$.

В итоге построений получаем условную развертку исходной поверхности вращения, составленную из трех точных разверток таких конических поверхностей: полной S^1, r_1 и двух усеченных поверхностей $S^2, r_1, r_2; S^3, r_2, r_3$.

14. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В переводе с греческого языка слово «аксонометрия» означает измерение по осям. Особенностью аксонометрического проецирования является то, что вместе с фигурой на плоскость проецируется и пространственная система координат, связанная с этой фигурой. При этом ни одна из осей системы координат не проецируется в точку. Использование аксонометрического проецирования позволяет повысить наглядность изображения фигуры.

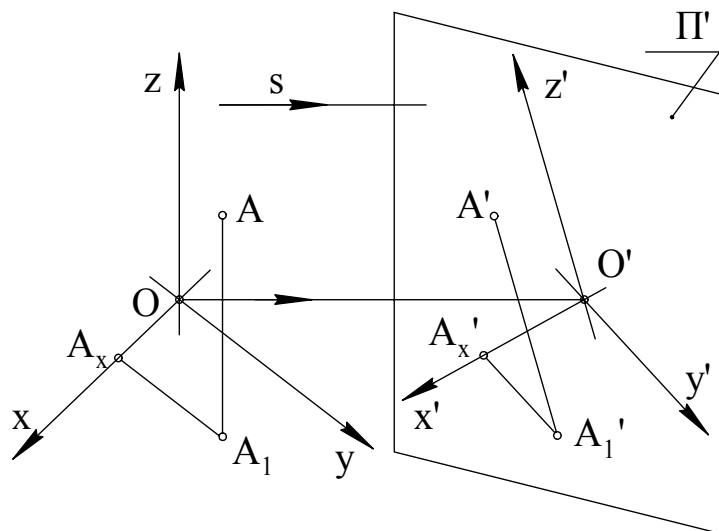


Рис. 14.1

Рассмотрим проекционную схему получения аксонометрической проекции простейшей фигуры – точки (рис. 14.1). Точка A и пространственная система координат $Oxyz$ связаны координатной ломаной OA_xA_1A , звеньями которой являются координатные отрезки $|OA_x| = |x_A|$, $|A_xA_1| = |y_A|$, $|A_1A| = |z_A|$. Плоскость Π' – аксонометрическая плоскость, s – направление проецирования. Все проецирующие прямые параллельны s . Если прямая s не перпендикулярна Π' ,

то имеем косоугольное проецирование и получим косоугольную аксонометрическую проекцию. Если прямая s перпендикулярна Π' , то имеем ортогональное проецирование и получим ортогональную (прямоугольную) аксонометрическую проекцию. В дальнейшем рассматривается ортогональное проецирование и ортогональные аксонометрические проекции.

На плоскости Π' после проецирования получим: A' – аксонометрическая проекция точки A ; $O'x'y'z'$ – аксонометрическая система координат (проекция системы $Oxyz$); x', y', z' – аксонометрические оси (проекции осей x, y, z); A_1' – аксонометрическая проекция горизонтальной проекции точки A , или вторичная проекция точки A ; $O'A_x'A_1'A'$ – аксонометрическая координатная ломаная (проекция ломаной OA_xA_1A). Звенья аксонометрической координатной ломаной параллельны соответствующим аксонометрическим осям, так как параллельные прямые проецируются в параллельные прямые.

Пусть угол между осью x и осью x' (проекция x на Π') равен α , между y и y' – β , между z и z' – γ . Если отрезок расположен на оси x или на линии параллельной оси x , то его угол наклона к плоскости Π' равен α , если – на оси y , то – β , если – на оси z , то – γ . Тогда $|O'A_x'| = |OA_x| \cos \alpha$, $|A_x'A_1'| = |A_xA_1| \cos \beta$, $|A_1'A'| = |A_1A| \cos \gamma$. Введем следующие обозначения: $u = \cos \alpha$; $v = \cos \beta$; $w = \cos \gamma$. Числа u, v, w называются коэффициентами искажения по аксонометрическим осям x', y', z' соответственно. Зная координаты точки $A(x_A; y_A; z_A)$ и коэффициенты u, v, w ,

можно найти аксонометрические координаты точки $A' (x_A'; y_A'; z_A')$: $x_A' = x_A u$; $y_A' = y_A v$; $z_A' = z_A w$. Для коэффициентов искажения справедлива зависимость

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2, \quad (14.1)$$

которую принимаем без доказательства.

Поскольку проекции фигуры на параллельные плоскости равны, то вместо Π' (рис. 14.1) можно взять любую плоскость ей параллельную. Для повышения наглядности ортогональных аксонометрических проекций положительные полуоси осей x, y, z располагают в одном полупространстве относительно аксонометрической плоскости, проведенной через начало координат (рис. 14.1, точка O). При этом углы α, β, γ будут более нуля, но менее девяноста градусов. Тогда коэффициенты u, v, w (косинусы этих углов) будут менее единицы, но более нуля.

Если известны коэффициенты искажения u, v, w , то легко найти углы α, β, γ ($\alpha = \arccos u, \beta = \arccos v, \gamma = \arccos w$). Зная коэффициенты искажения u, v, w и определив по ним углы α, β, γ , можно найти углы между аксонометрическими осями. Формула (1.1) для расчета проекции угла, которая при проецировании прямого угла ($\varphi = 90^\circ$) на плоскость $\Pi' (\varphi_1 = \varphi')$ имеет вид

$$\cos \varphi' = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (14.2)$$

Например, угол между осями x и y равен 90° , т.е. $(x, y) = 90^\circ$, он проецируется на плоскость Π' в угол между осями x' и y' . По формуле (14.2) $\cos(x', y') = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$, где α – угол между x и x' , β – угол между y и y' . По величине косинуса найдем угол между аксонометрическими осями x' и y' . Аналогично можно найти и два других угла.

Обратим внимание на то, что углы между аксонометрическими осями более 90° (тупые), т.е. прямые углы между осями проецируются в тупые углы между аксонометрическими осями. Действительно, в формуле (14.2) тангенсы острых углов более нуля, значит, косинус проекции угла отрицателен, т.е. проекция угла более 90° .

Рассмотрим построение аксонометрической проекции точки A по комплексному чертежу этой точки (рис. 14.2). Пусть на аксонометрической плоскости Π' известно положение осей x', y', z' и известны коэффициенты искажения по этим

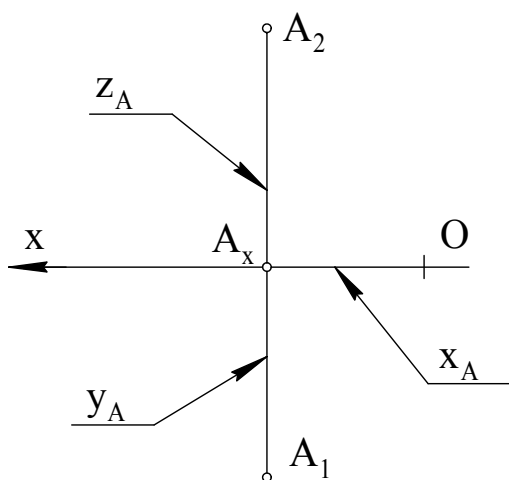


Рис. 14.2

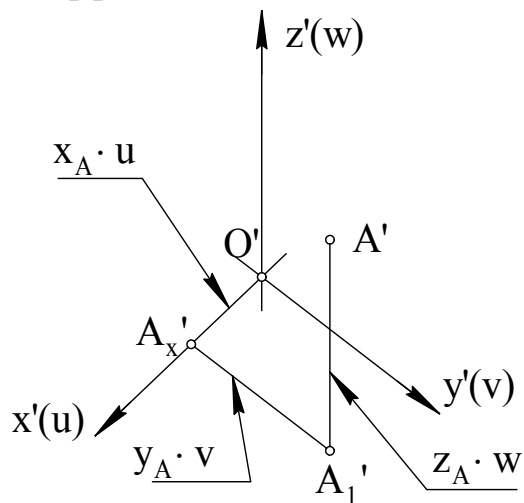


Рис. 14.3

осям u , v , w (рис. 14.3). Обратим внимание на то, что на рис. 14.3 аксонометрическая плоскость является плоскостью чертежа. Ось z' всегда располагается вертикально. Замерив на комплексном чертеже соответствующие отрезки, узнаем координаты x_A , y_A , z_A . Умножим координаты на коэффициенты искажения, построим аксонометрическую координатную ломаную $OA_x'A_1'A'$ и аксонометрическую проекцию точки A – точку A' . Если какая-либо координата менее нуля (отрицательная), то аксонометрический координатный отрезок (звено аксонометрической координатной ломаной) откладывается в противоположную сторону относительно положительного направления, указанного стрелкой на аксонометрической оси.

14.1. Ортогональная (прямоугольная) изометрическая проекция

Ортогональная изометрическая проекция (изометрия) является ортогональной аксонометрической проекцией при $u = v = w$. По формуле (14.1) получим $u = v = w = 0,82$. По формуле (14.2) определим, что угол между любыми осями 120° .

Построение изометрии точки выполняется так же, как показано на рис. 14.2, 14.3. Каждую координату точки необходимо умножить на 0,82. Такая изометрия называется точной или теоретической. Если изометрию точки выполнить в масштабе $1,22 : 1$, то координату точки нужно умножить на 0,82 (коэффициент искажения по оси), а затем умножить на 1,22 (увеличение из-за выполнения в масштабе), и тогда изометрическая координата, например, x_A' равна $0,82 \cdot 1,22 \cdot x_A = x_A$. Значит, при выполнении изометрии в масштабе $1,22 : 1$ (масштаб приведения) можно координаты точки не умножать на коэффициенты искажения, а брать их такими же, как на комплексном чертеже. Изометрия, выполненная в масштабе $1,22 : 1$, называется приведенной или практической, коэффициенты искажения при этом $u = v = w = 1$.

На рис. 14.4 показан комплексный чертеж куба со срезанной вершиной. На

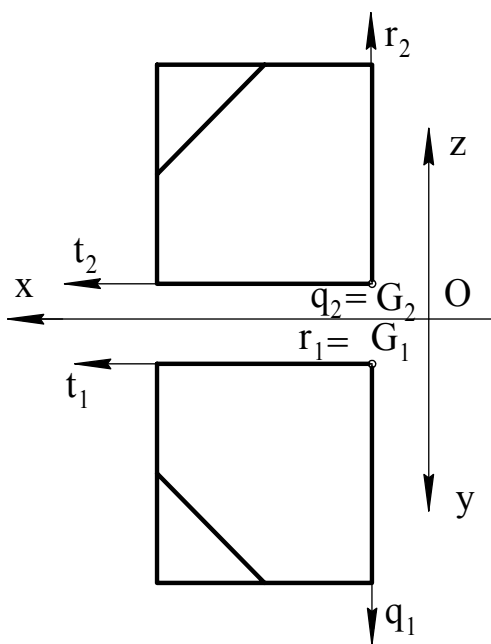


Рис. 14.4

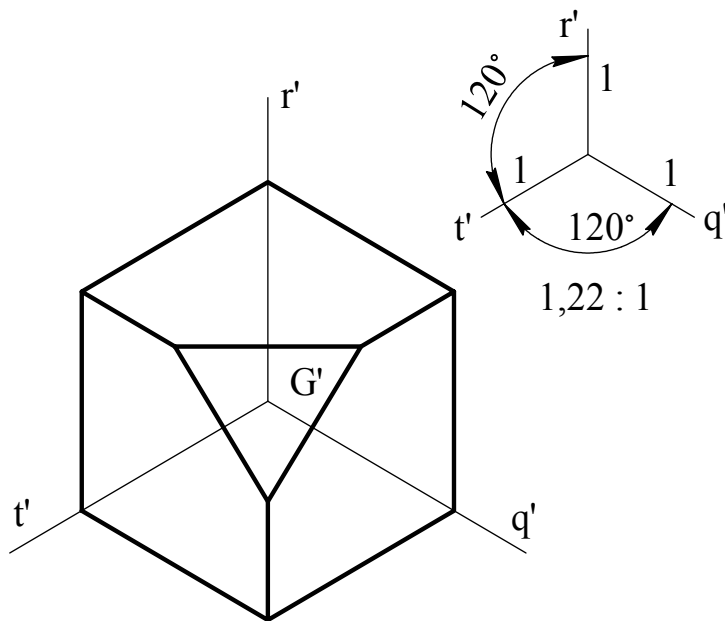


Рис. 14.5

рис. 14.5 построена его приведенная изометрия. Рядом с изометрией дана схема расположения изометрических осей с указанием коэффициентов искажения и масштаба приведения. На рис. 14.4 в качестве системы координат, связанной с кубом, взята $Gtqr$, а не система координат $Oxyz$ комплексного чертежа, как на рис. 14.2, 14.3. Система $Gtqr$ задана своими проекциями $G_1t_1q_1r_1$ и $G_2t_2q_2r_2$. Теперь эта система проецируется в изометрическую систему координат, и относительно нее берутся координаты вершин куба. Изометрию куба легко построить, если построить изометрию его вершин и соединить их. Постройте, в качестве упражнения, изометрию куба, связав с ним систему координат комплексного чертежа $Oxyz$, которая в этом случае будет проецироваться в изометрическую систему координат.

На рис. 14.6 показан комплексный чертеж кривой k . На рис. 14.7 построена приведенная изометрия этой кривой. В качестве системы координат, связанной с кривой, взята система координат комплексного чертежа $Oxyz$, которая проецируется в изометрическую систему координат $O'x'y'z'$. Для построения изометрии кривой необходимо построить изометрию ряда ее точек и соединить их кривой

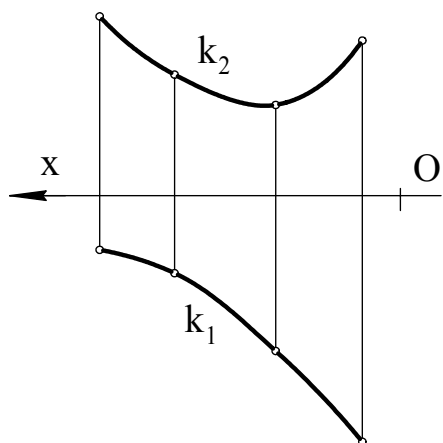


Рис. 14.6

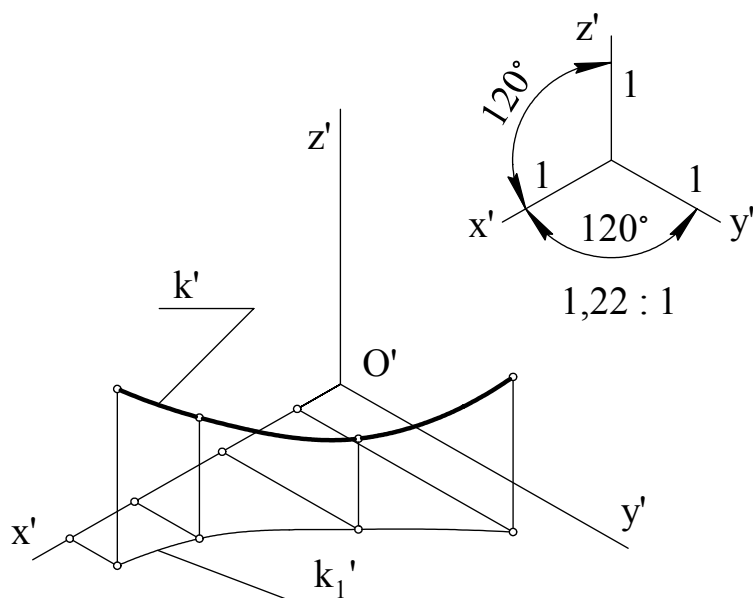


Рис. 14.7

линией. Так можно построить изометрию любой кривой, но для построения изометрии окружности удобно использовать специальные методы.

Пусть окружность диаметром d расположена в плоскости Oxy (или в плоскости, параллельной Oxy). Эта окружность проецируется на аксонометрическую плоскость в эллипс. Все диаметры эллипса, кроме одного, будут меньше диаметра окружности. Большой диаметр эллипса равен диаметру окружности и является проекцией диаметра окружности, расположенного на линии уровня, параллельной аксонометрической плоскости Π' . Большой диаметр расположен на проекции линии уровня. Линия уровня «сохранит» не только длину диаметра d окружности, но и прямой угол с прямой линией, которая ей перпендикулярна (теорема о проецировании прямого угла). Ось z перпендикулярна плоскости Oxy , а значит, перпендикулярна любой прямой этой плоскости, в том числе и линии уровня. Тогда

аксонометрическая проекция линии уровня, на которой расположен большой диаметр эллипса, перпендикулярна проекции оси z – аксонометрической оси z' . Малый диаметр эллипса перпендикулярен большому диаметру.

При выполнении изометрии в масштабе $1,22 : 1$ большой диаметр будет равен $1,22d$. Малый диаметр равен $0,71d$ (принимается без вывода). Эллипс строится по большому и малому диаметрам. Повторяя все сказанное выше, для плоскостей Oxz и Oyz , получим расположение эллипсов, показанное на рис. 14.8. Окружность t , расположенная в плоскости Oxy или ей параллельной плоскости, проецируется на Π' в эллипс t' , который является изометрией окружности t . Изометрией окружности n , принадлежащей плоскости Oxz или ей параллельной плоскости, будет эллипс n' . Изометрией окружности k , принадлежащей плоскости Oyz или ей параллельной плоскости, будет эллипс k' . Изометрии окружностей, принадлежащих плоскостям Oxy , Oxz , Oyz или им параллельным плоскостям, строятся в такой последовательности: строится изометрия центра окружности; строятся большой и малый диаметры; по большому и малому диаметрам строится ряд точек эллипса; точки эллипса соединяются плавной кривой.

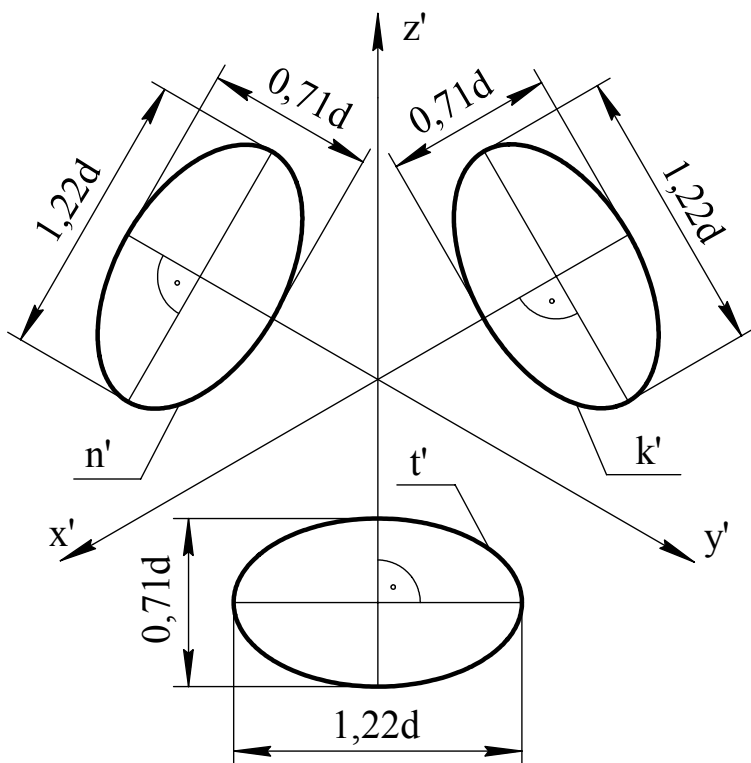


Рис. 14.8

Если окружность принадлежит плоскости общего положения, то прямой, перпендикулярной этой плоскости, на изометрии нет. Поэтому необходимо на комплексном чертеже через центр окружности провести отрезок прямой перпендикулярной плоскости окружности. Затем построить изометрию этого отрезка и провести большой диаметр перпендикулярно изометрии этого отрезка, через изометрию центра окружности. Большой диаметр равен $1,22d$, где d – диаметр окружности. Далее, на комплексном чертеже окружности взять любую точку окружности и построить ее изометрию. Теперь на изометрии есть большой диаметр эллипса и одна его точка. Значит, можно выполнить построение эллипса по большому диаметру и точке.

14.2. Ортогональная (прямоугольная) диметрическая проекция

Ортогональная диметрическая проекция (диметрия) является ортогональной аксонометрической проекцией при $u = w$, $v = 0,5u$. По формуле (14.1) получим:

$u = w = 0,94$; $v = 0,47$. По формуле (14.2) определим, что угол между осями x' и y' равен $97^{\circ}10'$, угол между осями x' и z' равен $131^{\circ}25'$.

Построение диметрии точки выполняется так же, как показано на рис. 14.2, 14.3. Коэффициенты искажения: $u = w = 0,94$; $v = 0,47$. Такая диметрия называется точной (теоретической). Точно так же, как в изометрии, вводится масштаб приведения, который в этом случае равен $1,06 : 1$, так как $0,94 \cdot 1,06 \approx 1$. Коэффициенты искажения при этом $u = w = 1$, $v = 0,5$. Диметрия, выполненная в масштабе $1,06 : 1$, называется приведенной (практической) диметрией.

На рис. 14.9 показана диметрия куба со срезанной вершиной, комплексный чертеж которого приведен на рис. 14.4. Рядом с диметрией дана схема расположения диметрических осей с указанием коэффициентов искажения и масштаба приведения.

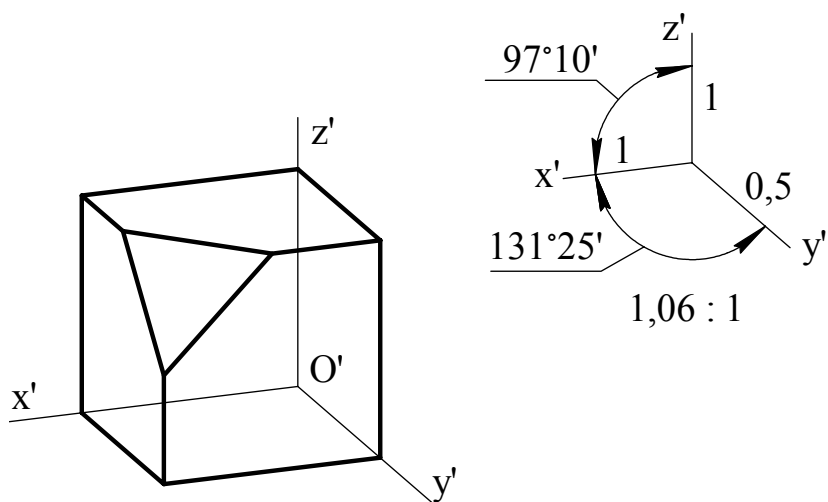


Рис. 14.9

Рядом с диметрией дана схема расположения диметрических осей с указанием коэффициентов искажения и масштаба приведения. На рис. 14.10 показана диметрия кривой k , комплексный чертеж которой приведен на рис. 14.6.

Окружности t , n , k , расположенные в плоскостях Oxy , Oxz , Oyz или им параллельных плоскостях, проецируются в эллипсы t' , n' , k' (рис. 14.11). Большие диаметры равны $1,06d$, так как масштаб приведения $1,06 : 1$. Малый диаметр у t' и k' равен $0,35d$, у n' – $0,94d$ (принимается без вывода).

Диметрия окружности, принадлежащей плоскости общего положения, строится так же, как и изометрия. Большой диаметр эллипса равен $1,06d$, где d – диаметр окружности.

В построении изометрии и диметрии фигуры много общего, так как изометрия и диметрия – это частные случаи (конкретные

виды) прямоугольной аксонометрической проекции, но есть и отличия, вызванные тем, что у изометрии и диметрии разные коэффициенты искажения по осям.

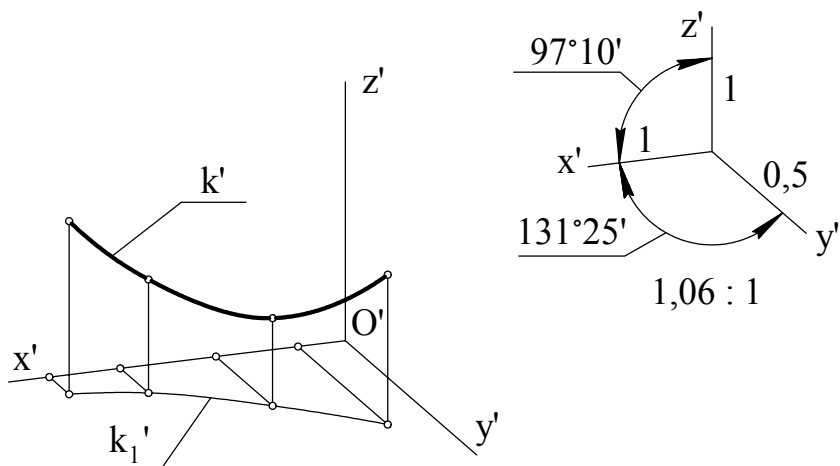


Рис. 14.10

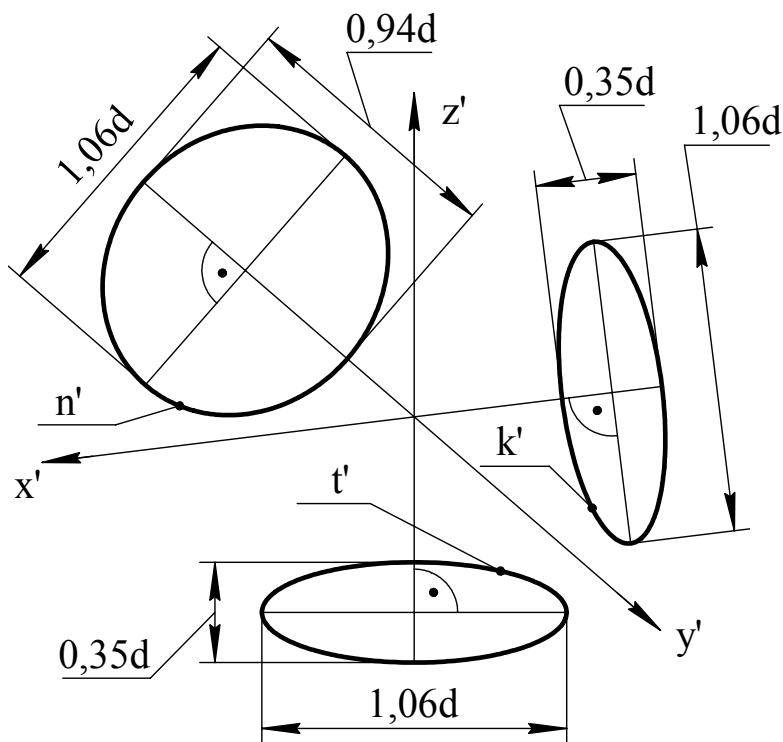


Рис. 14.11

В курсе инженерной графики при выполнении изометрии и диметрии деталей для повышения наглядности делается вырез части детали. На рис. 14.12, 14.13 показаны изометрия и диметрия куба с цилиндрическим отверстием. Направление штриховки в каждой из плоскостей определяется по треугольнику штриховки, который добавлен к изображению осей. Вершины треугольников штриховки лежат на осях и удалены от начала координат на расстояния, пропорциональные коэффициентам искажения. В изометрии эти расстояния равны между собой ($u = v = w = 1$), в диметрии расстояние по оси y в два раза меньше, чем по осям x и z ($u = w = 1, v = 0.5$).

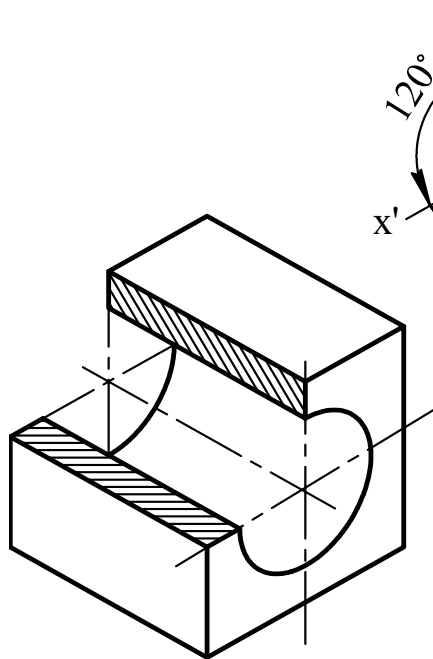


Рис. 14.12

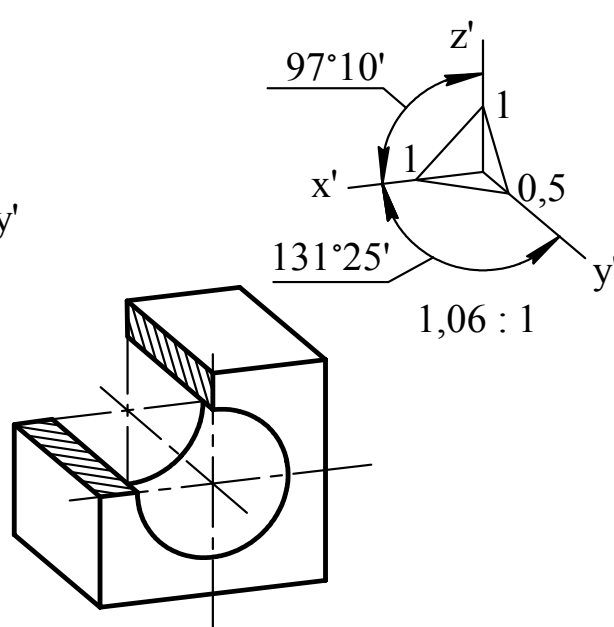


Рис. 14.13

15. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Построить КЧ ($\Pi_1\Pi_2\Pi_3$) точек $A(30; 40; 20)$, $B(60; -40; -30)$ (рис. 15.1).
2. Дана точка $A(70; 60; 30)$. Построить точку B , симметричную точке A относительно Π_1 (рис. 15.2).
3. Даны прямые $a \parallel b$ общего положения. Построить прямую $h \parallel \Pi_1$, пересекающую a и b и удаленную от Π_1 на 30 миллиметров (рис. 15.3).
4. Даны $A(90; 40; 30)$, $B(10; 15; 20)$, $C(60; 45; 20)$, $D(30; 15; 40)$. Построить прямые (AB) и (CD) . Записать координаты конкурирующих точек (рис. 15.4).
5. Дана плоскость $(\triangle ABC)$, проекции D_2, E_1, F_2 . Построить проекции D_1, E_2, F_1 , если D, E, F принадлежат плоскости $(\triangle ABC)$ (рис. 15.5).
6. Дана плоскость $(\triangle DFE)$. Через точку D провести горизонталь h , через точку F – фронталь f в этой плоскости (рис. 15.6).
7. Построить точку пересечения прямой e и плоскости $(\triangle ABC)$, указать видимость (рис. 15.7).
8. Построить линию пересечения плоскостей $(\triangle ABC)$ и $(\triangle DFE)$ (рис. 15.8).
9. Построить КЧ правой винтовой линии, расположенной на цилиндре и проходящей через точку A (один виток), шаг винтовой линии равен 80 миллиметров (рис. 15.9).
10. Построить проекции окружности $R40$, с центром O , принадлежащей плоскости Σ (рис. 15.10).
11. Построить вторые проекции точек, принадлежащих сфере (рис. 15.11).
12. Построить вторую проекцию линии, принадлежащей конической поверхности (рис. 15.12).
13. Построить линию пересечения плоскости Σ и конической поверхности Γ (рис. 15.13).
14. Построить линию пересечения призмы и проецирующей плоскости Σ (рис. 15.14).
15. Построить линию пересечения поверхностей: а) рис. 15.15, б) рис.15.16, в) рис. 15.17.
16. Определить натуральную величину (НВ) отрезка и угол его наклона к плоскости Π_1 (рис. 15.18).
17. Определить угол между прямой и плоскостью (рис. 15.7).
18. Определить угол между плоскостями (рис. 15.8).
19. Определить расстояние от точки N до прямой (BC) (рис. 15.19).
20. Определить угол и расстояние между данными прямыми (рис. 15.20).
21. Определить НВ $(\triangle ABC)$ и построить центр вписанной окружности (рис. 15.21).
22. Через точку D провести прямую параллельную плоскости $(\triangle ABC)$, и пересекающую прямую EF (рис. 15.22).
23. Построить изометрию фигуры (рис. 15.23).
24. Построить диметрию фигуры (рис. 15.24).

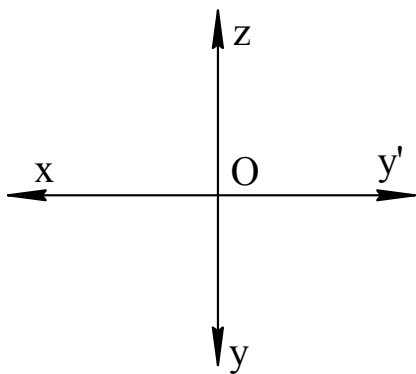


Рис. 15.1

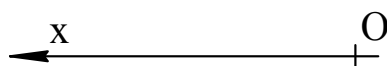


Рис.15.2

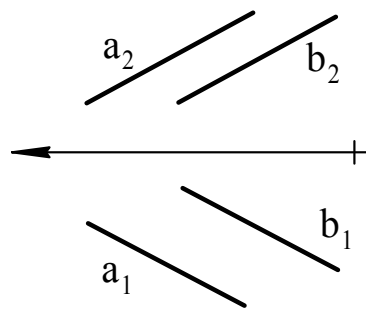


Рис. 15.3

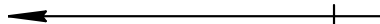


Рис. 15.4

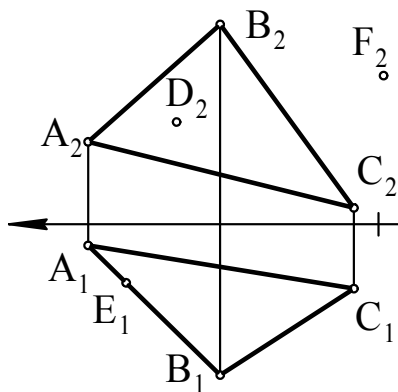


Рис. 15.5

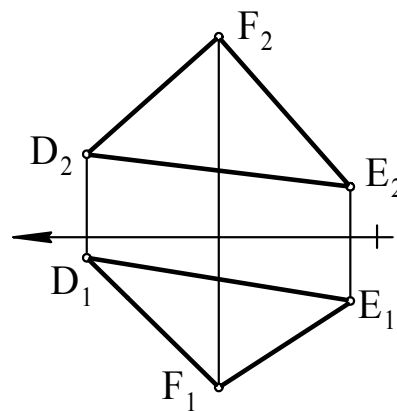


Рис. 15.6

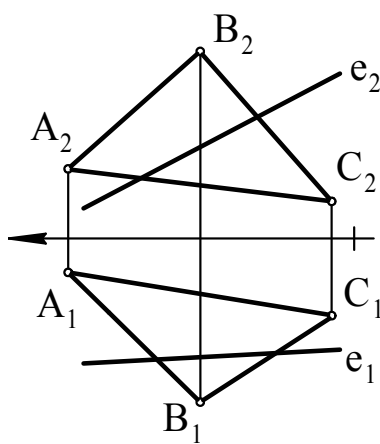


Рис. 15.7

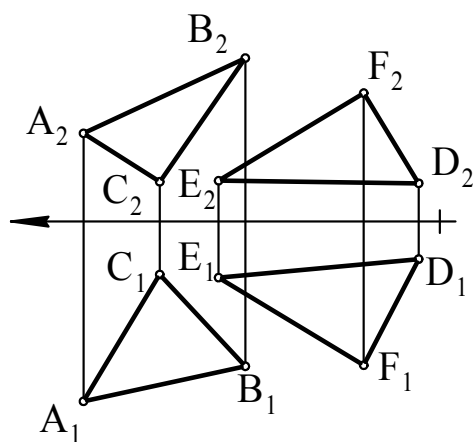


Рис. 15.8

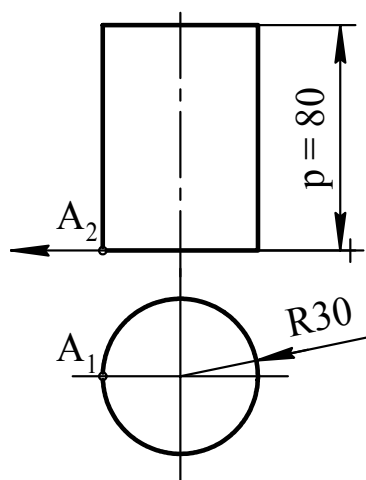


Рис. 15.9

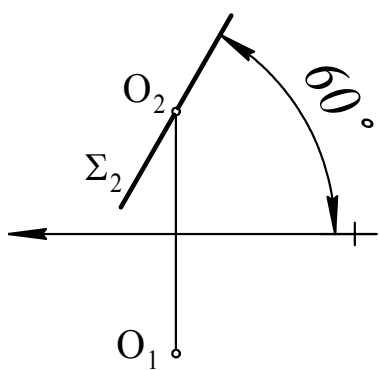


Рис. 15.10

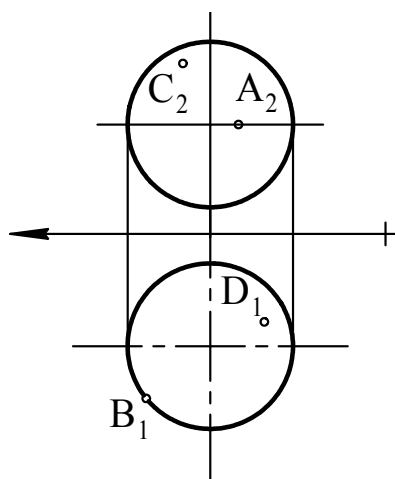


Рис. 15.11

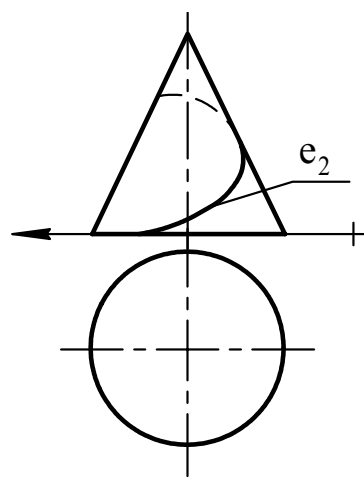


Рис. 15.12

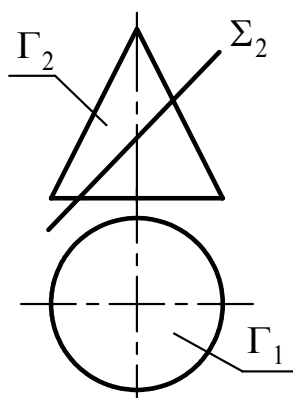


Рис. 15.13

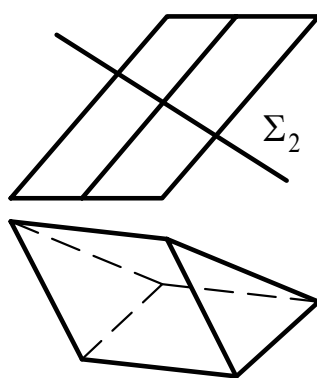


Рис. 15.14

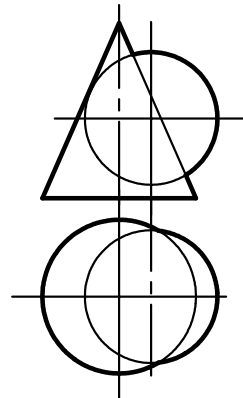


Рис. 15.15

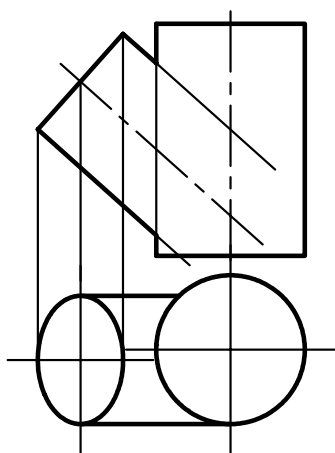


Рис. 15.16

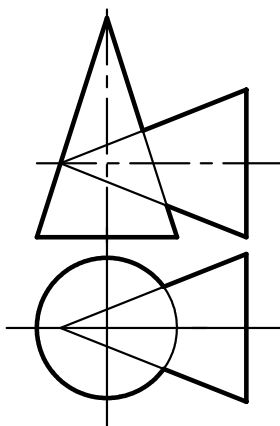


Рис. 15.17

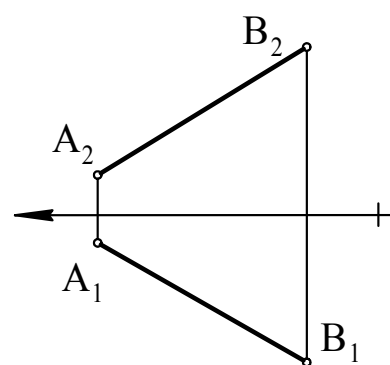


Рис. 15.18

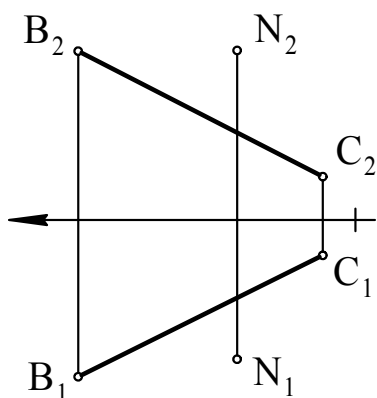


Рис. 15.19

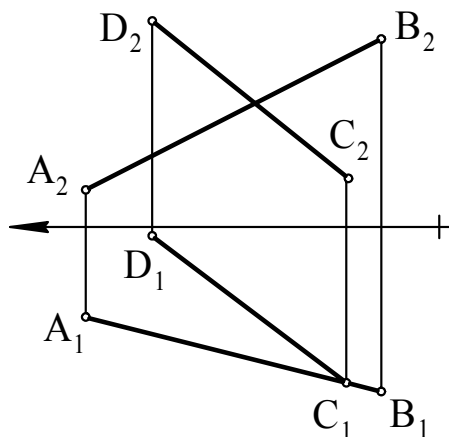


Рис. 15.20

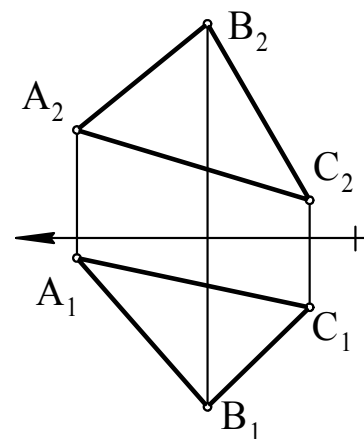


Рис. 15.21

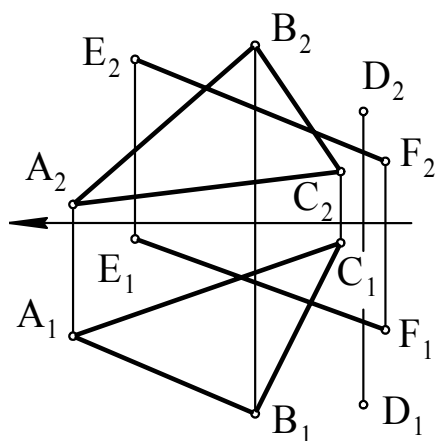


Рис. 15.22

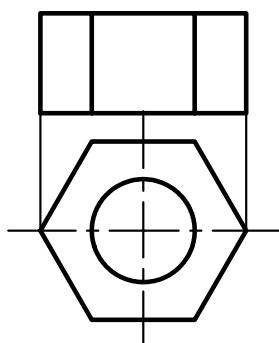


Рис. 15.23

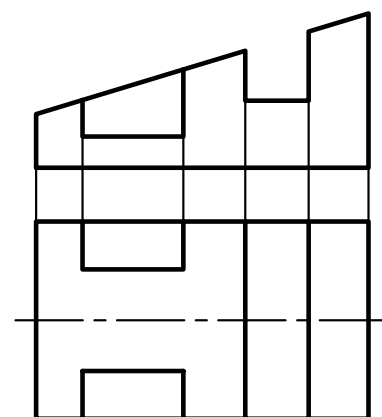


Рис. 15.24

25. Достроить на Π_1 проекцию плоского пятиугольника ABEFC, если $A(50; 10; 15)$, $B(25; 0; 0)$, $C(30; 30; 30)$, $E(10; \dots; 5)$, $F(5; \dots; 15)$.

26. Построить прямую t , параллельную прямой (EF) и пересекающую прямые (AB) и (CD), если $A(80; 10; 5)$, $B(50; 20; 25)$, $C(65; 30; 30)$, $D(40; 20; 5)$, $E(30; 5; 15)$, $F(5; 30; 15)$.

27. Найти точку пересечения плоскости $\Sigma(a // b)$ и прямой (МК), указать видимость. Определить угол между прямой и плоскостью (рис. 15.25).

28. Найти точки пересечения прямой e с поверхностью тора, указать видимость проекций прямой (рис. 15.26).

29. Построить линию пересечения поверхностей: а) рис. 15.27; б) рис. 15.28.

30. На прямой линии (CD) найти точку, равноудаленную от концов отрезка AB, если $A(70; 30; 10)$, $B(35; 15; 40)$, $C(90; 20; 35)$, $D(40; 30; 45)$.

31. Построить проекцию A_2B_2 отрезка AB, если его натуральная величина равна 70 мм и $A(80; 30; 30)$, $B(30; 60; \dots)$.

32. Построить равносторонний треугольник ABC, если задана его сторона AB и известно, что плоскость треугольника составляет 45° с плоскостью проекций Π_2 , $A(125; 30; 20)$, $B(80; 30; 40)$. Определить число решений.

33. Построить: а) изометрию цилиндра и винтовой линии (задача 9, рис. 15.9); б) диметрию конуса и линии e (задача 12, рис. 15.12).

34. Построить развертку: а) поверхности призмы (рис. 15.14); б) цилиндрической поверхности и винтовой линии (задача 9, рис. 15.9); в) конической поверхности и линии e (задача 12, рис. 15.12); г) сферы радиуса 50 мм.

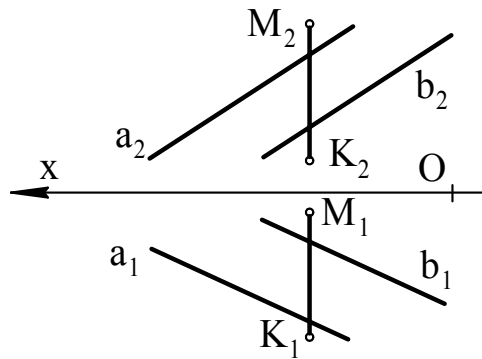


Рис. 15.25

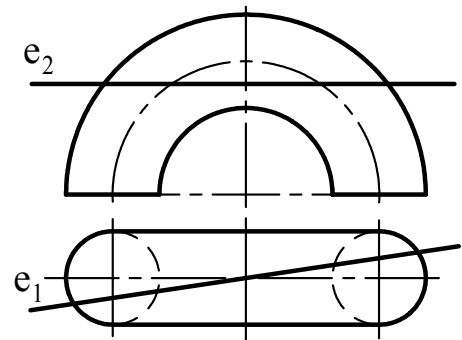


Рис. 15.26

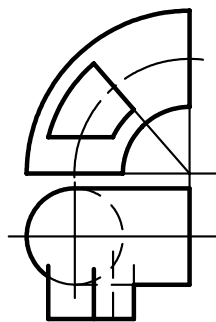


Рис. 15.27

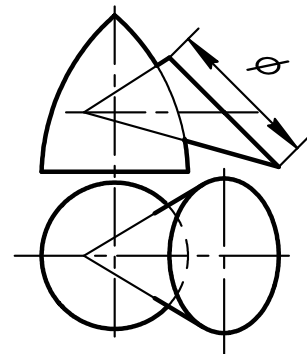


Рис. 15.28

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бубенников А.В. Начертательная геометрия / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – М.: Высш. шк., 1973. – 416 с.
2. Волков В.Я. Геометрическое моделирование в курсе начертательной геометрии: Учеб. пособие / В.Я. Волков, Л.К. Куликов. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 1995. – 58 с.
3. Волков В.Я. Сборник задач по начертательной геометрии / В.Я. Волков, А.А. Ляшков, К.Л. Панчук. – Омск: ОмГТУ, 2000. – 108 с.
4. Гордон В.О. Курс начертательной геометрии / В.О. Гордон, М.А. Семенов-Огиевский. – М.: Физматгиз, 1962. – 420 с.
5. Иванов Г.С. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1995. – 224 с.
6. Котов И.И. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1970. – 384 с.
7. Куликов Л.К. Элементы начертательной геометрии: Учеб. пособие. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2000. – 80 с.
8. Куликов Л.К. Пересечение поверхностей: Учеб. пособие / Л.К. Куликов, Л.Г. Петровская. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2001. – 36 с.
9. Курс начертательной геометрии (на базе ЭВМ): Учебник для инж.-техн. вузов / А.М. Тевлин, Г.С. Иванов, Л.Г. Нартова, В.С. Полозов, В.И. Якунин; под ред. А.М. Тевлина. – М.: Высш. шк., 1983. – 175 с.
10. Лагерь А.И. Инженерная графика / А.И. Лагерь, Э.А. Колесникова. – М.: Высш. шк., 1985. – 176 с.
11. Михайленко В.Е. Инженерная графика / В.Е. Михайленко, А.М. Пономарев. – Киев: Вища шк., 1985. – 295 с.
12. Начертательная геометрия: Учебник для вузов / Н.Н. Крылов, П.И. Лобандиевский, С.А. Мэн, В.Л. Николаев, Г.С. Иконникова. – М.: Высш. шк., 1977. – 231 с.
13. Панчук К.Л. Начертательная геометрия. Точка, прямая и плоскость: Учеб. пособие. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 1996. – 180 с.
15. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1974. – 191 с.
16. Четверухин Н.Ф. Начертательная геометрия / Н.Ф. Четверухин, В.С. Левицкий, З.И. Прянишникова и др. – М.: Высш. шк., 1963. – 420 с.
17. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Обозначения и символика.....	4
1. Ортогональное (прямоугольное) проецирование и его свойства.....	5
2. Комплексный чертеж.....	7
2.1. Комплексный чертеж точки.....	8
2.2. Комплексный чертеж прямой	11
2.3. Комплексный чертеж плоскости.....	13
3. Взаимное положение точек и прямых, их принадлежность плоскости ...	15
3.1. Взаимное положение точки и прямой. Деление отрезка прямой в дан- ном отношении.....	15
3.2. .Взаимное положение прямых	16
3.3. Принадлежность точки и прямой плоскости	17
4. Преобразование комплексного чертежа.....	20
4.1 Метод замены плоскостей проекций.....	20
4.2. Определение расстояния между двумя точками.....	21
4.3. Проецирование прямой общего положения в точку на новую плоскость проекций.....	22
4.4. Проецирование плоскости общего положения в прямую на новую плоскость проекций. Нахождение натуральной величины плоской фигуры..	23
5. Первая и вторая позиционные задачи.....	25
5.1. Взаимное положение прямой и плоскости.....	25
5.2. Построение точки пересечения прямой с плоскостью.....	25
5.3. Прямая и плоскость занимают общее положение.....	27
5.4. Взаимное положение плоскостей.....	29
6. Метрические задачи. Ортогональная проекция прямого угла.....	32
7. Построение взаимно перпендикулярных фигур.....	33
7.1. Перпендикулярность двух прямых.....	33
7.2. Перпендикулярность прямой и плоскости.....	34
7.3. Линии наибольшего наклона.....	35
7.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.....	36
7.5. Перпендикулярность двух плоскостей.....	37
8. Определение расстояний.....	38
8.1. Расстояние от точки до фигуры (точки, прямой, плоскости).....	38
8.2. Определение расстояния между параллельными фигурами.....	40
8.3. Определение расстояния между скрещивающимися прямыми.....	41
9. Определение углов между фигурами.....	42
9.1. Углы между прямыми.....	42
9.2. Угол между прямой и плоскостью.....	44
9.3. Угол между плоскостями.....	47
10. Кривые линии.....	50

10.1. Свойства кривых, инвариантные относительно ортогонального проецирования.....	50
10.2. Комплексный чертеж окружности	51
10.3. Комплексный чертеж цилиндрической винтовой линии.....	53
11. Поверхности.....	54
11.1. Понятие поверхности.....	54
11.2. Контур и очерк поверхности.....	55
11.3. Точка и линия на поверхности.....	56
11.4. Поверхности (общие сведения).....	56
11.5. Линейчатые поверхности.....	56
11.6. Гранные поверхности и многогранники.....	59
11.7. Поверхности вращения.....	60
11.8. Принадлежность точки и линии поверхности вращения.....	63
11.9. Циклические поверхности.....	65
11.10. Винтовые поверхности.....	66
12. Построение пересечений фигур.....	67
12.1. Пересечение поверхности и плоскости.....	67
12.2. Пересечение конической поверхности вращения плоскостью.....	69
12.3. Пересечение линии и поверхности.....	71
12.4. Пересечение поверхностей.....	73
12.5. Пересечение поверхностей второго порядка.....	81
13. Развертки поверхностей.....	83
13.1. Развертки гранных поверхностей.....	83
13.2. Приближенные развертки развертывающихся поверхностей.....	87
13.3. Условные развертки неразвертывающихся поверхностей.....	90
14. Аксонометрические проекции.....	94
14.1. Ортогональная (прямоугольная) изометрическая проекция.....	96
14.2. Ортогональная (прямоугольная) диметрическая проекция.....	98
15. Задачи для самостоятельного решения.....	101
Библиографический список	106