XII 1978

8 5 5

ТУ 19-32-73

5

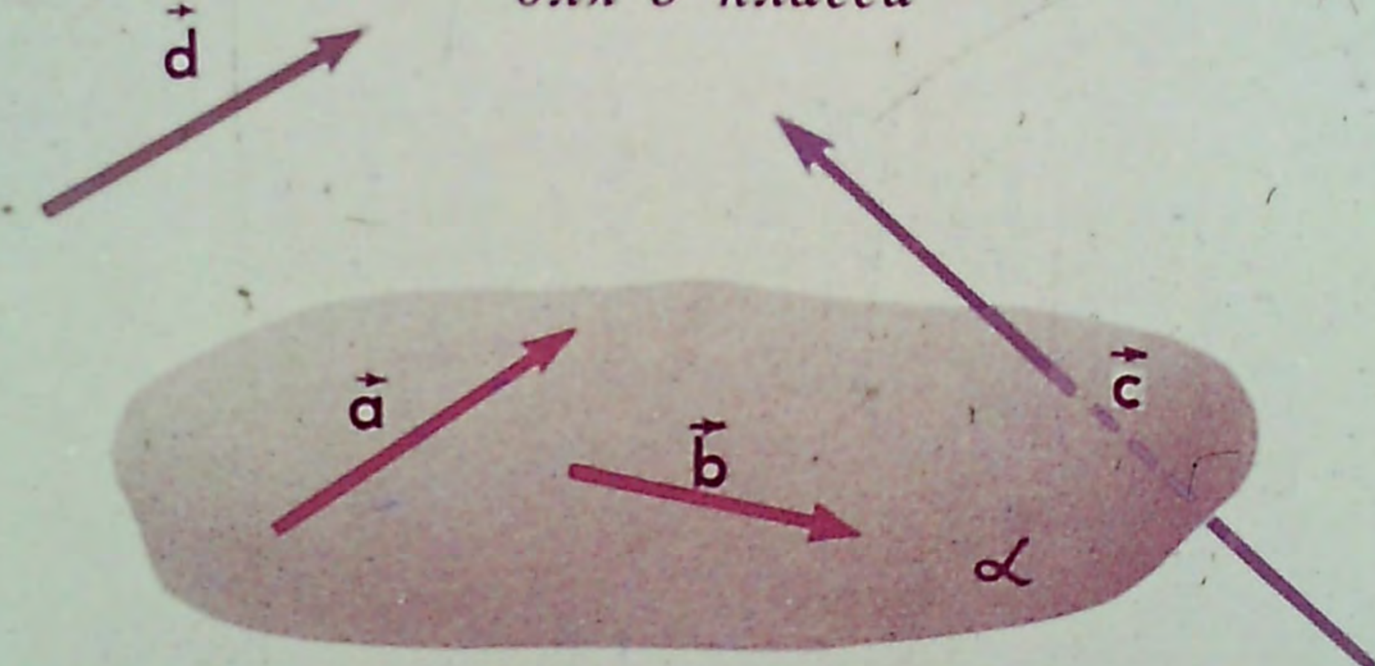
2

ДИАФИЛЬМ

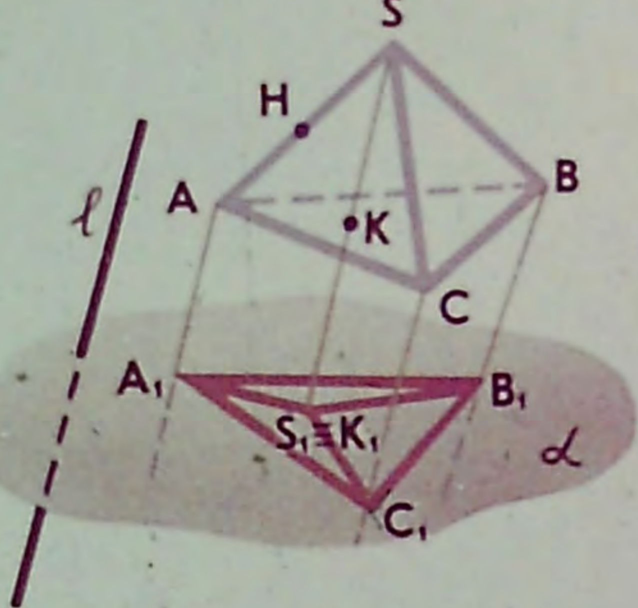
07—3—214

ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

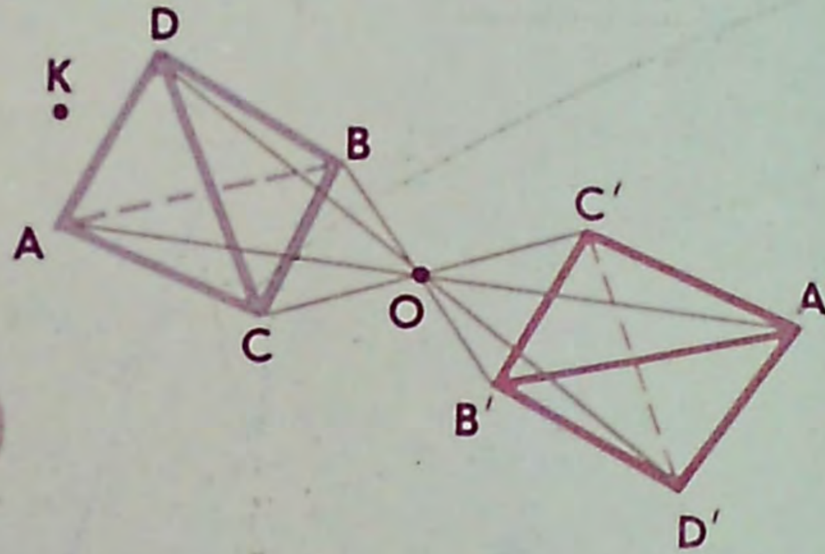
*Диафильм
по математике
для 9 класса*



ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА



1

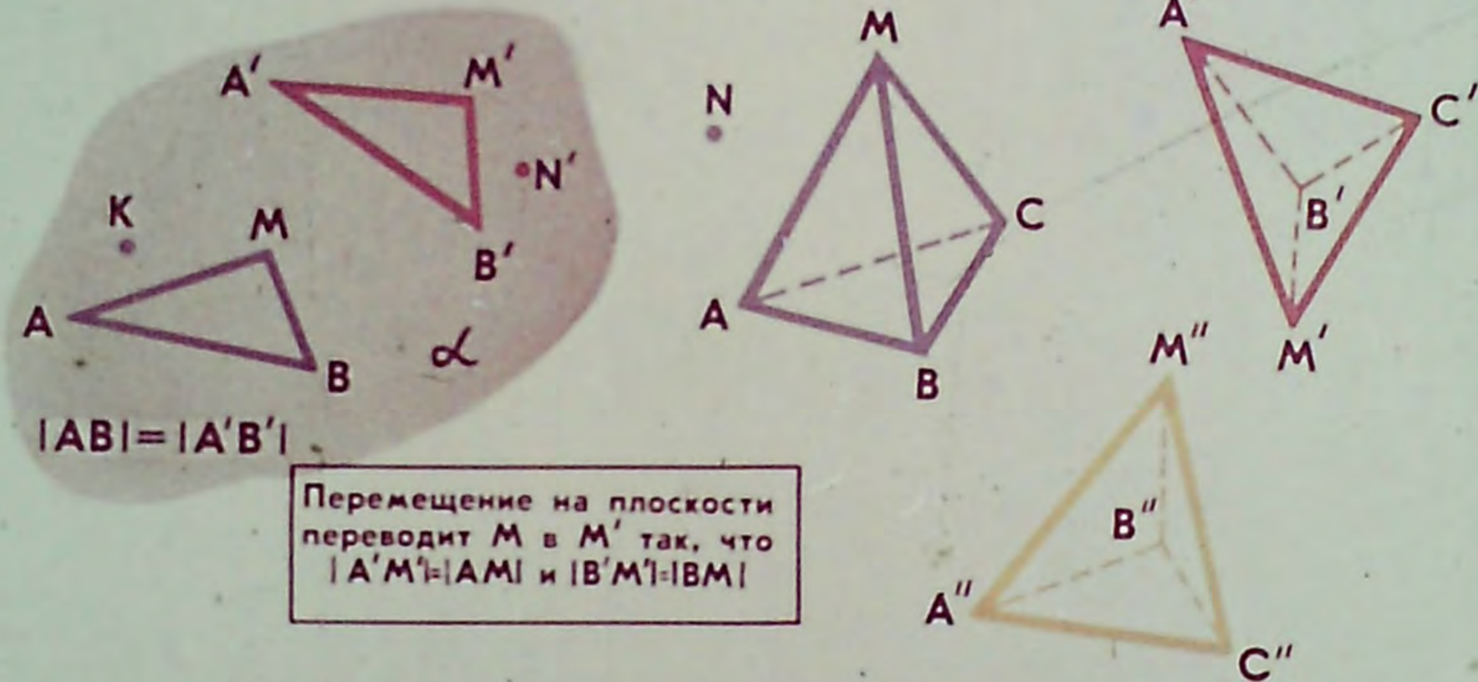


2

Какое из этих отображений пространства является *преобразованием?* **Дайте определение преобразования пространства.**

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

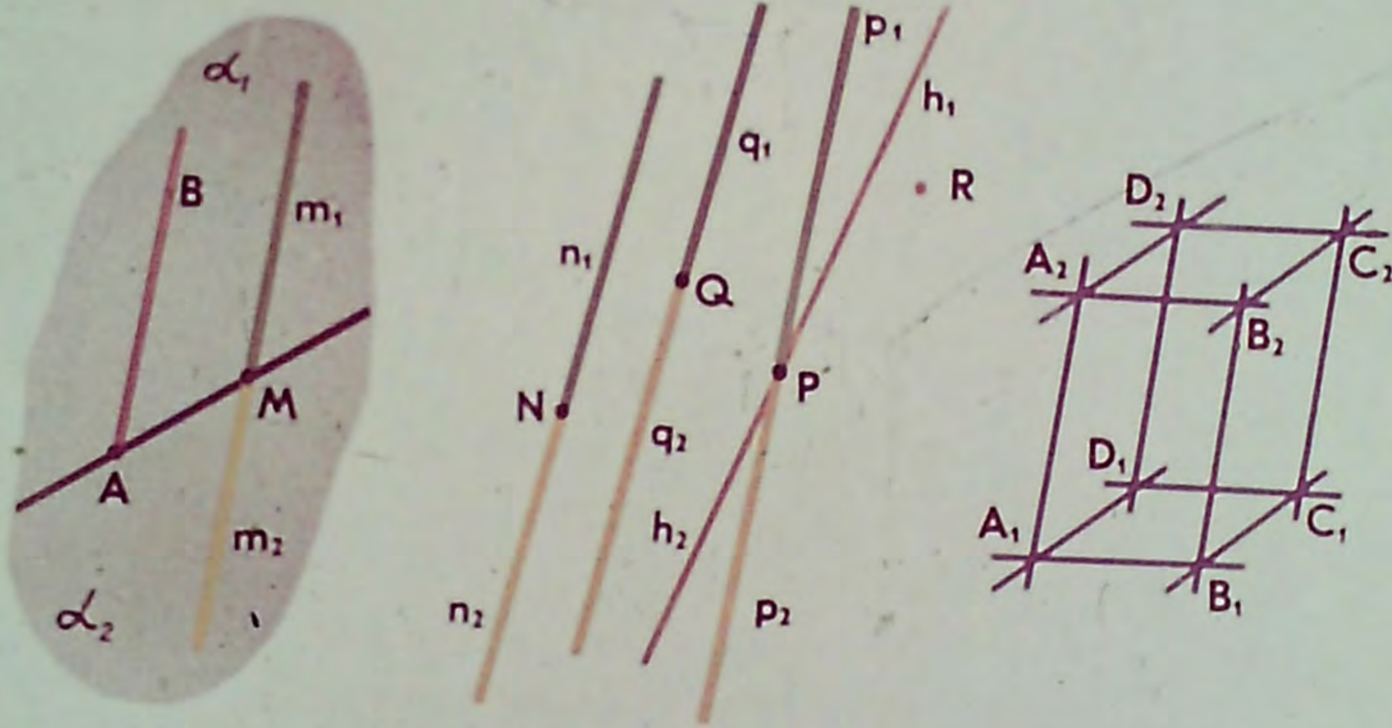
Перемещения



Перемещение в пространстве, как и на плоскости, сохраняет *расстояние* между точками: M переходит в M′ так, что $|A'M'|=|AM|$, $|B'M'|=|BM|$, $|C'M'|=|CM|$.

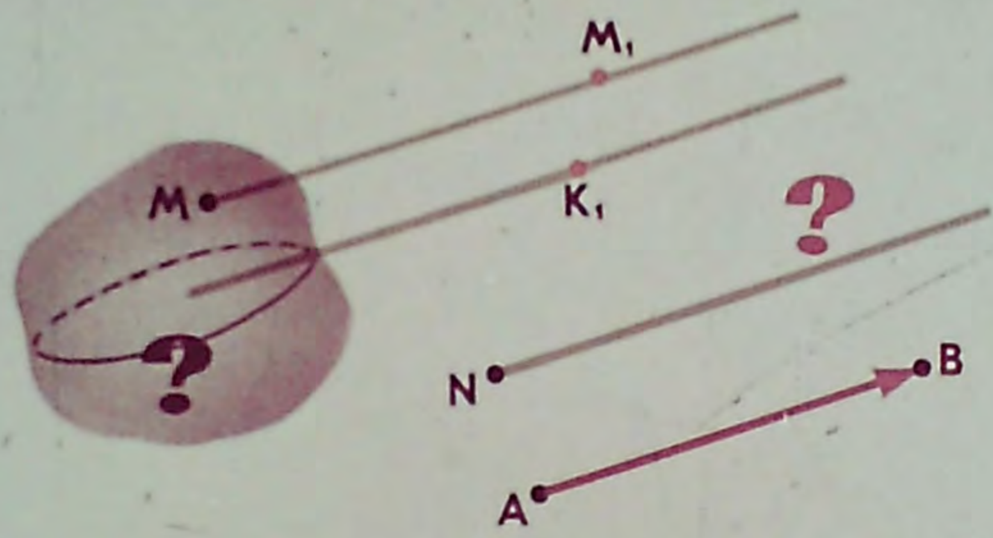
ФРАГМЕНТ I.

Направление в пространстве. Вектор



Луч [AB) задает *направление* в пространстве, т. е. выделяет среди всех лучей множество *сонаправленных с ним лучей*.

Назовите лучи, сонаправленные с [AB); противоположно направленные с [AB).

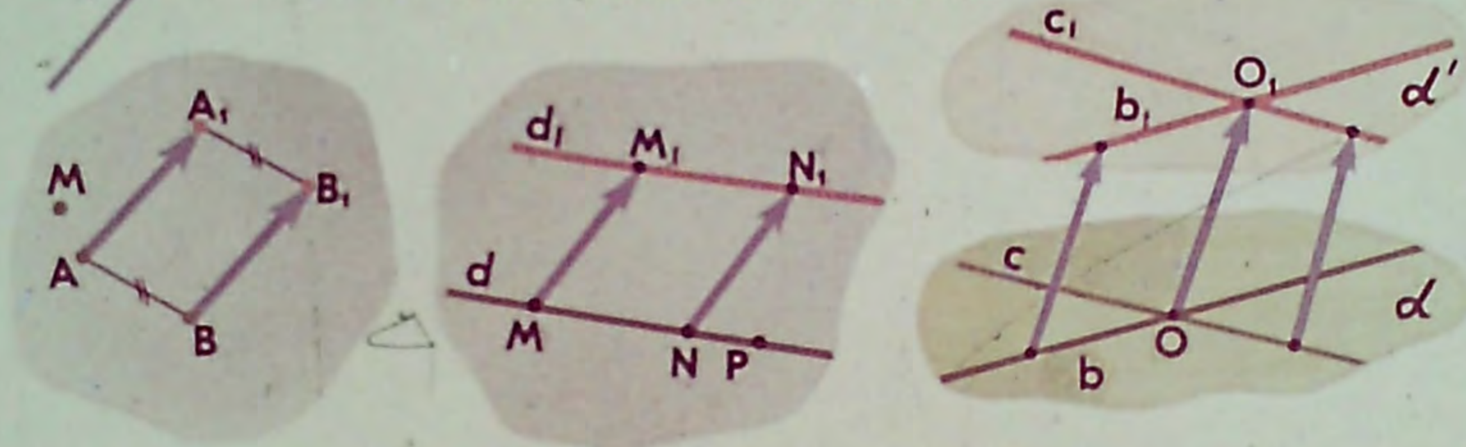


Дана упорядоченная пара точек (A,B), где $A \neq B$.
Вектор (параллельный перенос), определяемый (A,B), переводит любую точку M в такую точку M_1, что:

1. $[MM_1) \upuparrows [AB)$;
2. $|MM_1| = |AB|$.

Вектор (перенос), определяемый (A,A), есть *тождественное преобразование.*

Свойства векторов в пространстве и их доказательство



1.

$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\,(A)=A_1\\ \vec{a}\,(B)=B_1\end{array}\right\} \Rightarrow |AB| = |A_1B_1|$

2.

$[MN) \uparrow\uparrow [M_1N_1)$

$d \parallel d_1$

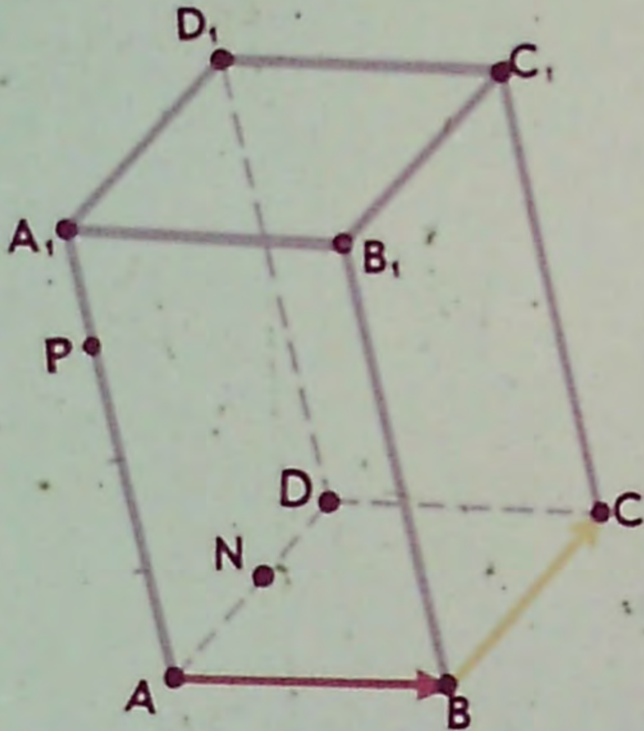
3.

$\alpha \parallel \alpha'$

$\vec{a}\,([MN]) = [M_1N_1]$

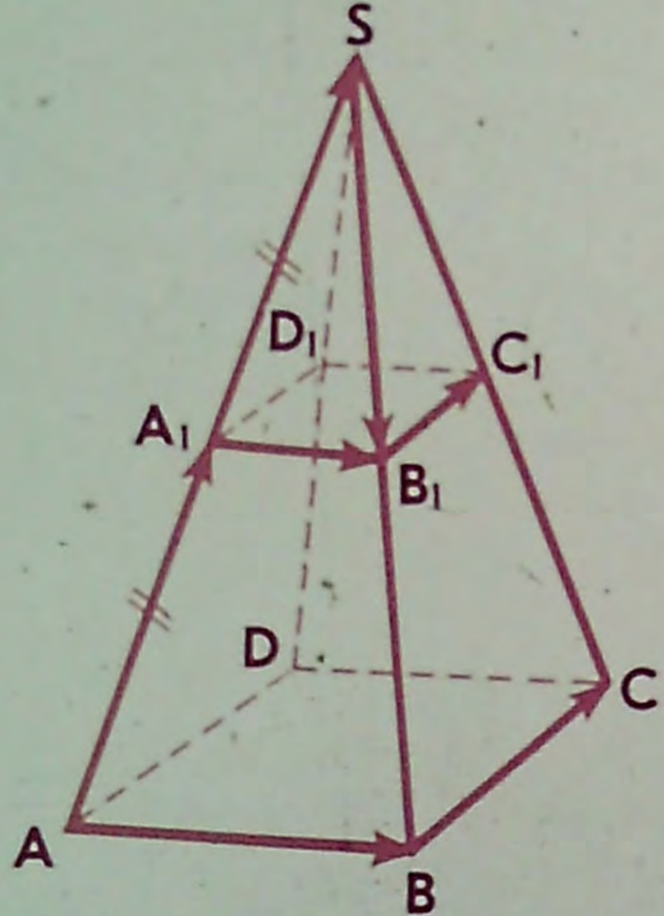
$\vec{a}\,(d) = d_1$

$\vec{a}\,(\alpha) = \alpha'$



x	$\overrightarrow{AB}(x)$	$\overrightarrow{BC}(x)$
D_1		
A_1		
N		
D		
(A_1D_1)		
(A_1D)		
(A_1ND)		

Назовите образы элементов, указанных в таблице, при перемещениях $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$.



Назовите векторы,
имеющие равную длину;
сонаправленные **векторы;**
противоположно
направленные **векторы;**
равные **векторы.**

Какие из данных
векторов являются
коллинеарными?

ФРАГМЕНТ 2.

Действия над векторами в пространстве и их свойства

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

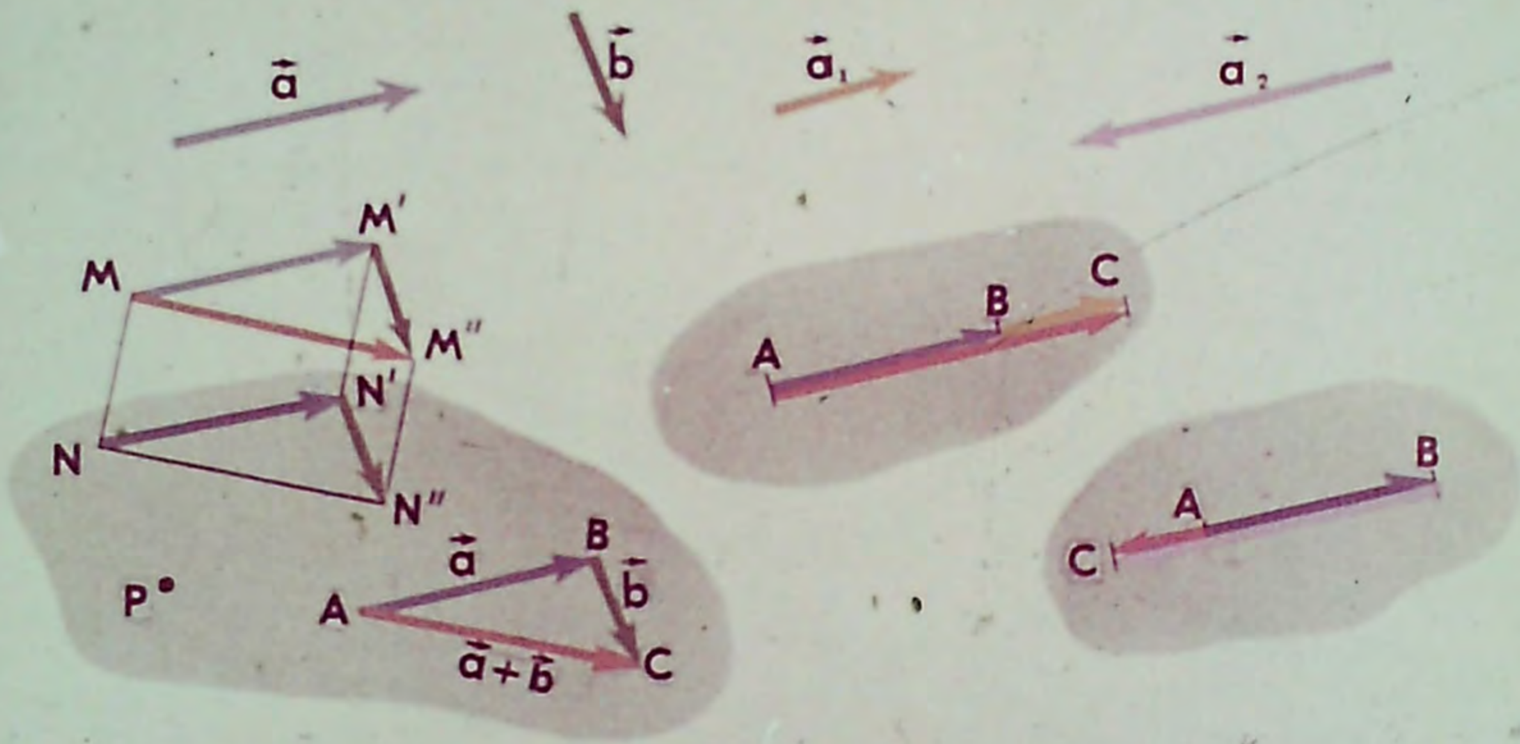
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$x(y\vec{a})=(xy)\vec{a}$

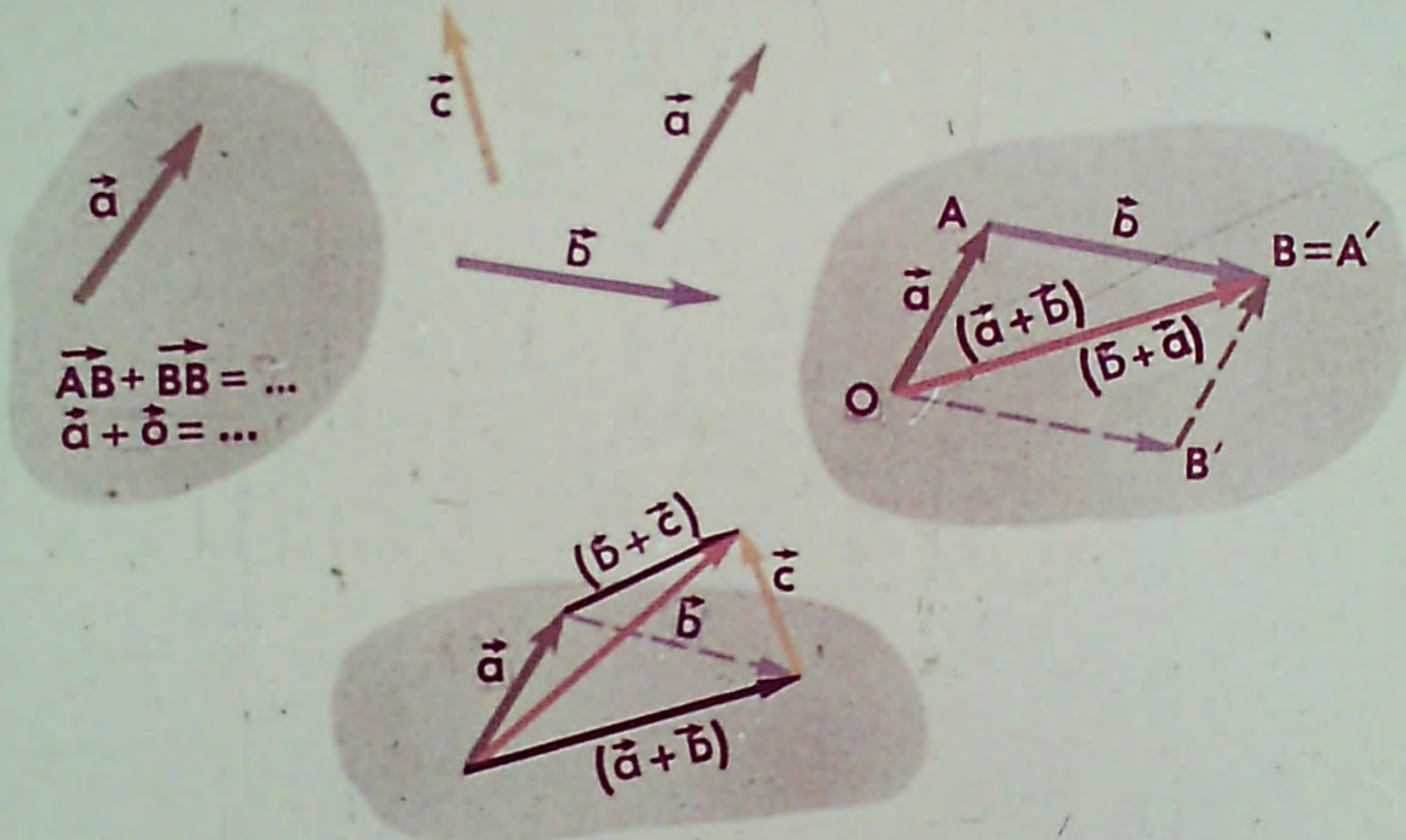
$x\vec{a}+y\vec{a}=(x+y)\vec{a}$

$x\vec{a}+x\vec{b}=x(\vec{a}+\vec{b})$

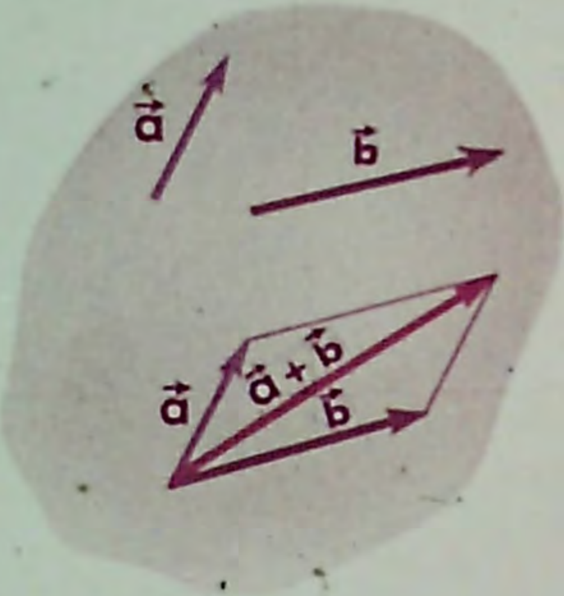


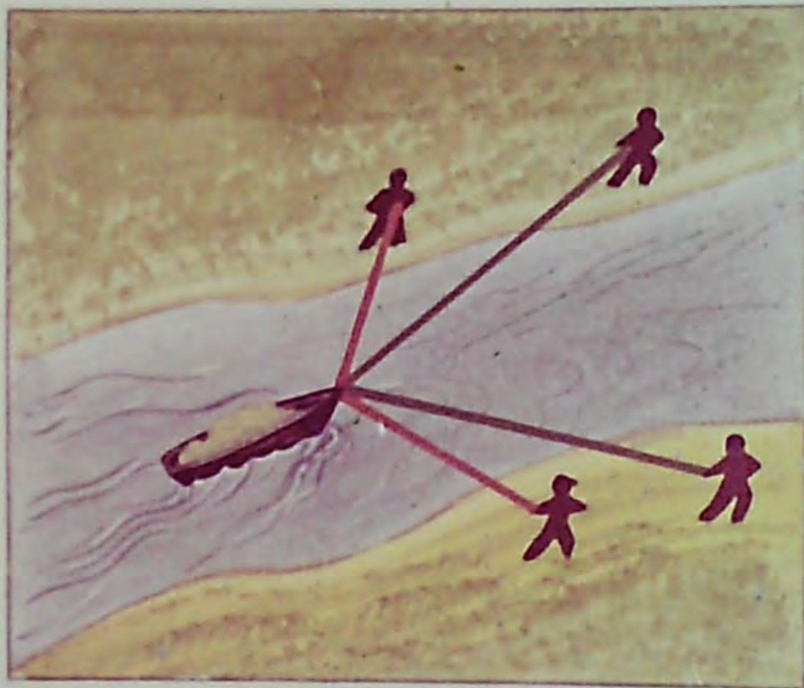
Композиция векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *есть вектор* $\vec{c}$, называемый суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ («правило треугольника»).



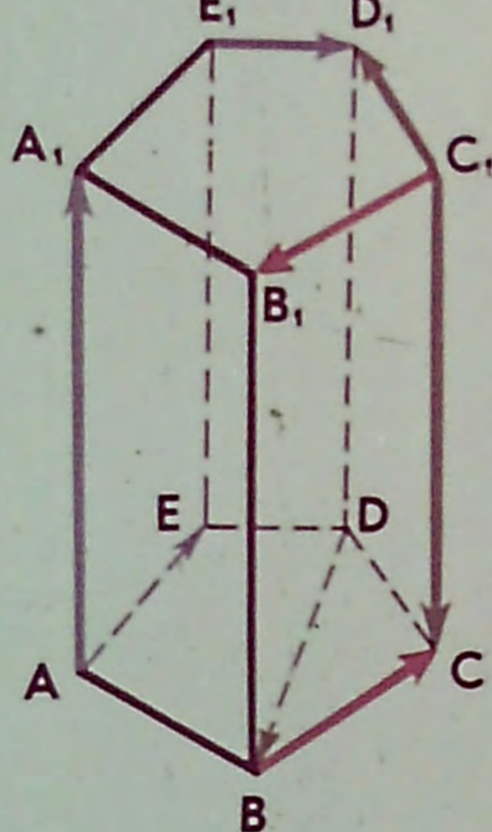
Какими ***свойствами*** **обладает сложение векторов в пространстве?**





Для сложения двух неколлинеарных векторов можно пользоваться *правилом параллелограмма.*

Для того, чтобы тащить лодку против течения, туристы использовали сначала короткие, а потом длинные веревки. В каком случае тащить лодку оказалось легче?



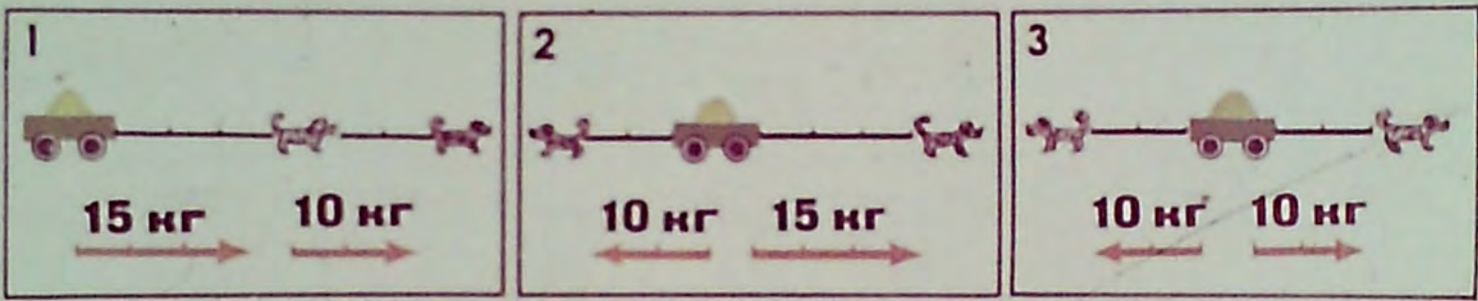
Найдите сумму векторов:

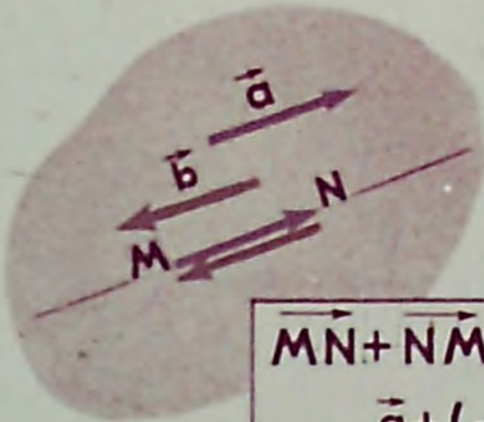
$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{E_1D_1}$;

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1B_1}$;

$\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{DB}$;

$\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{BC}$.





$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Каковы направление и величина равнодействующей силы в каждом случае 1, 2, 3?

Если сумма двух векторов равна нулевому вектору, то векторы называются *противоположными*.

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

«правило треугольника»

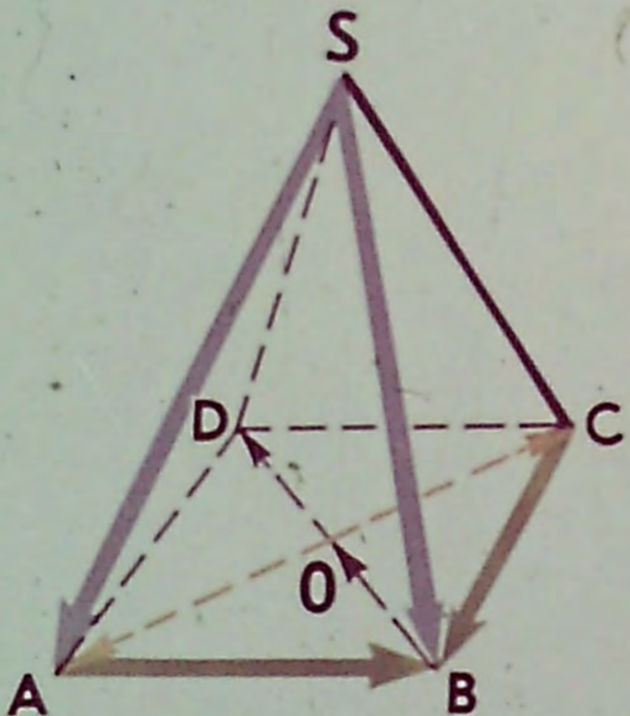
$\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

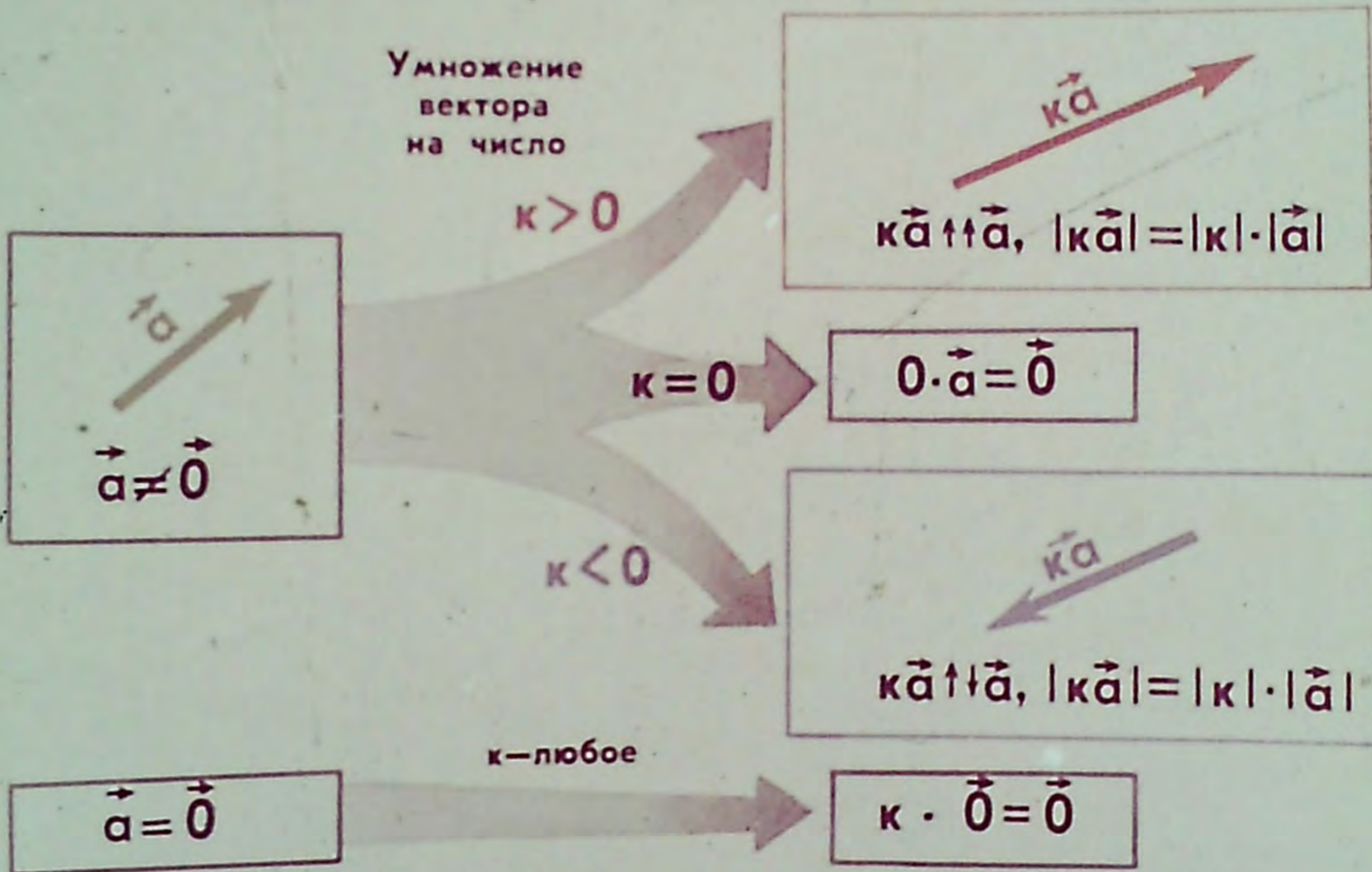
формула вычитания векторов

Вектор $\vec{c}$ называется *разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

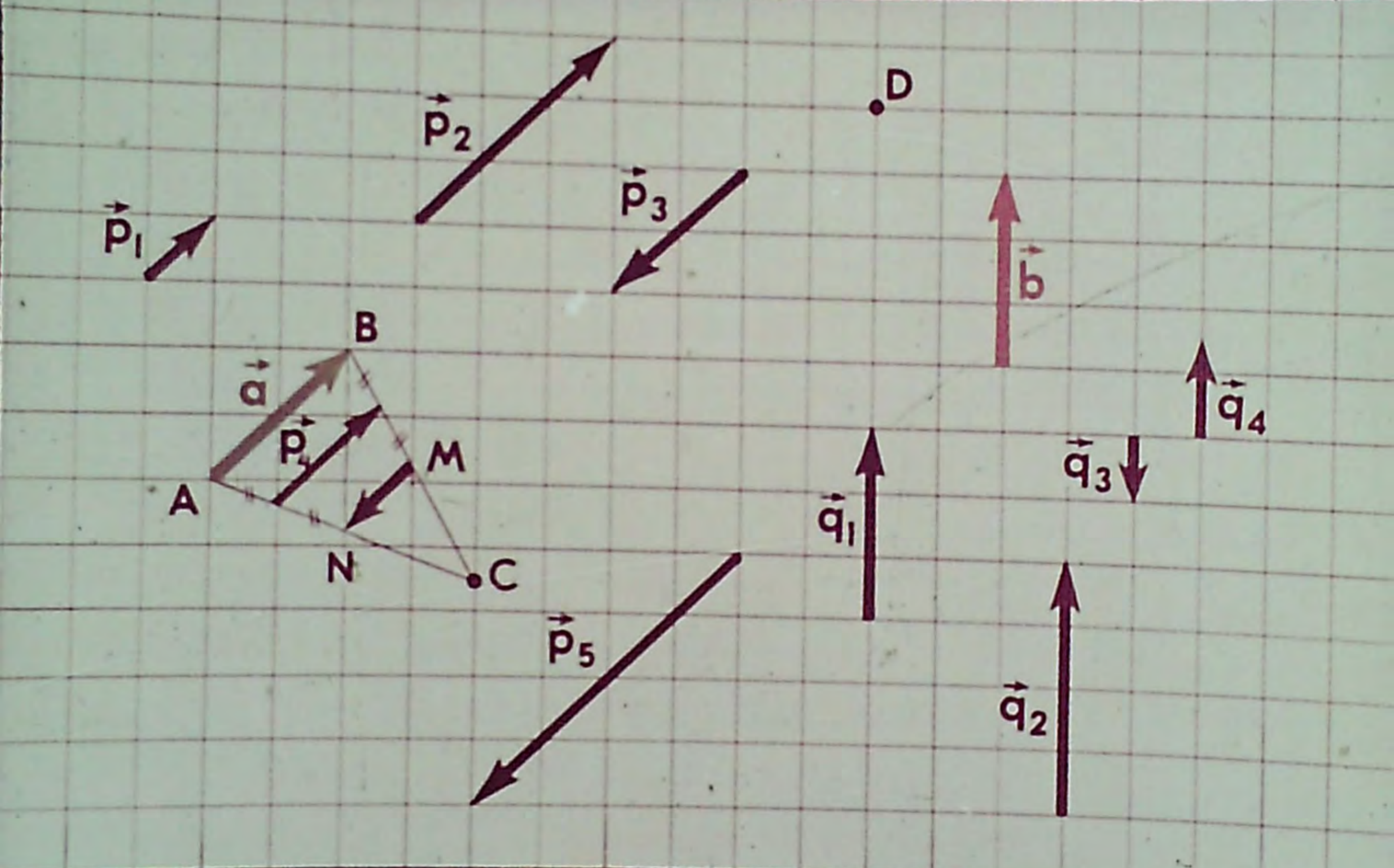
$$\boxed{\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$$



Найдите разность векторов:
$\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$;
$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BO}$.



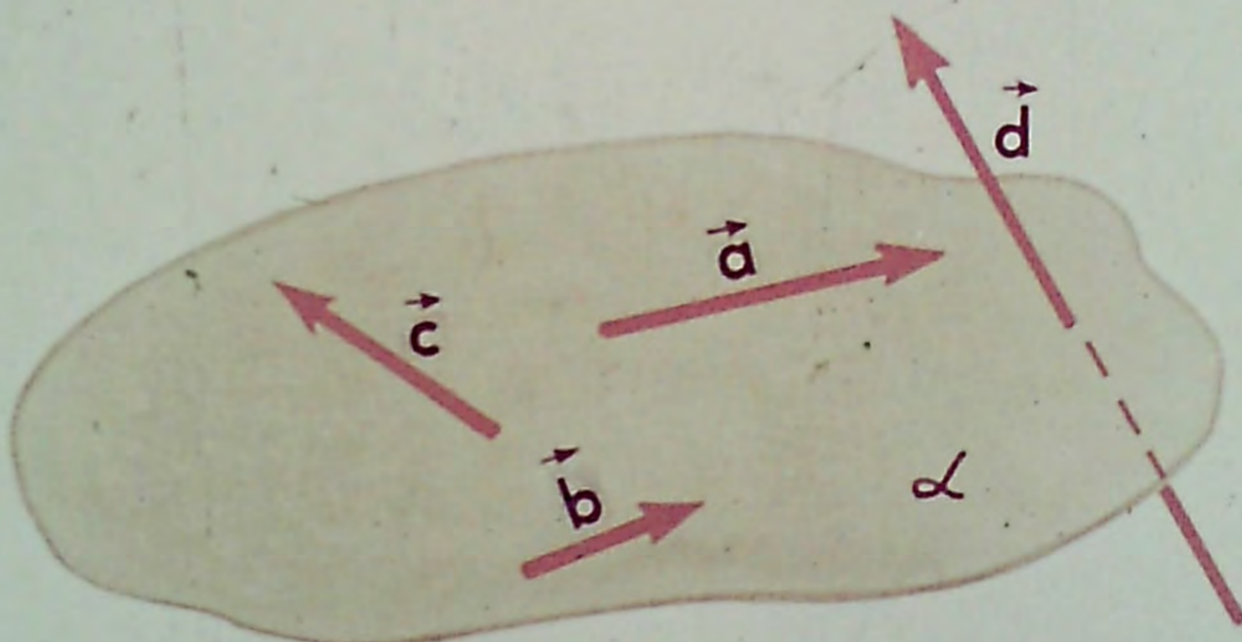
Умножение вектора на число в пространстве определяется так же, как и в планиметрии.

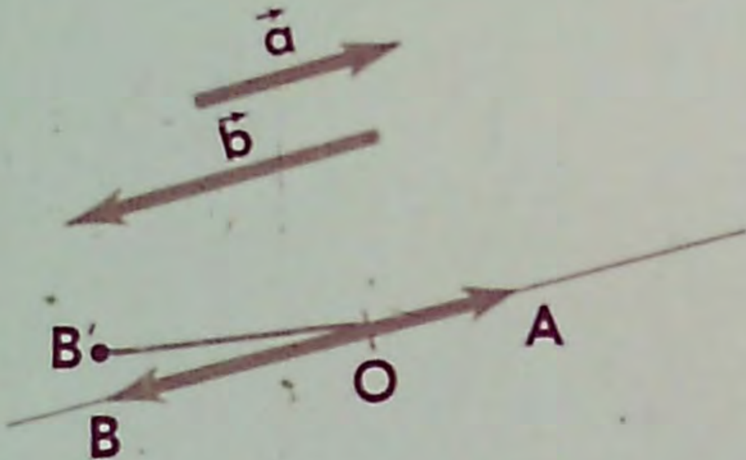


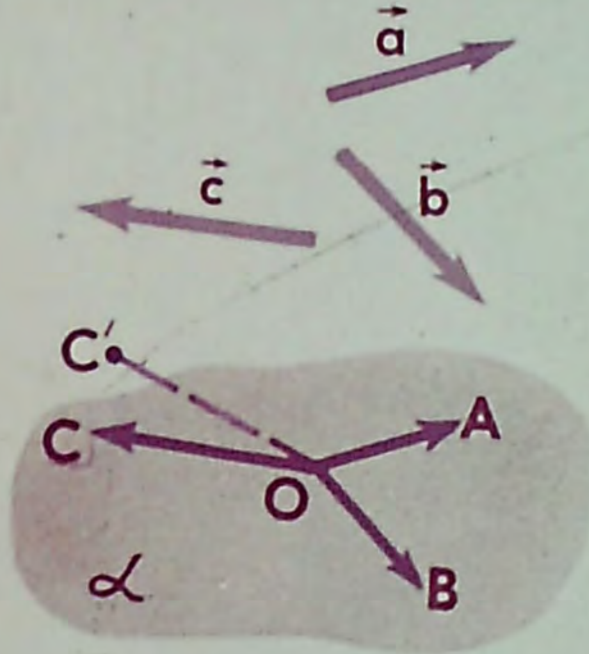
На какие числа нужно умножить вектор $\vec{a}$ (или $\vec{b}$), чтобы получить остальные векторы?

ФРАГМЕНТ 3.

Коллинеарные и компланарные векторы



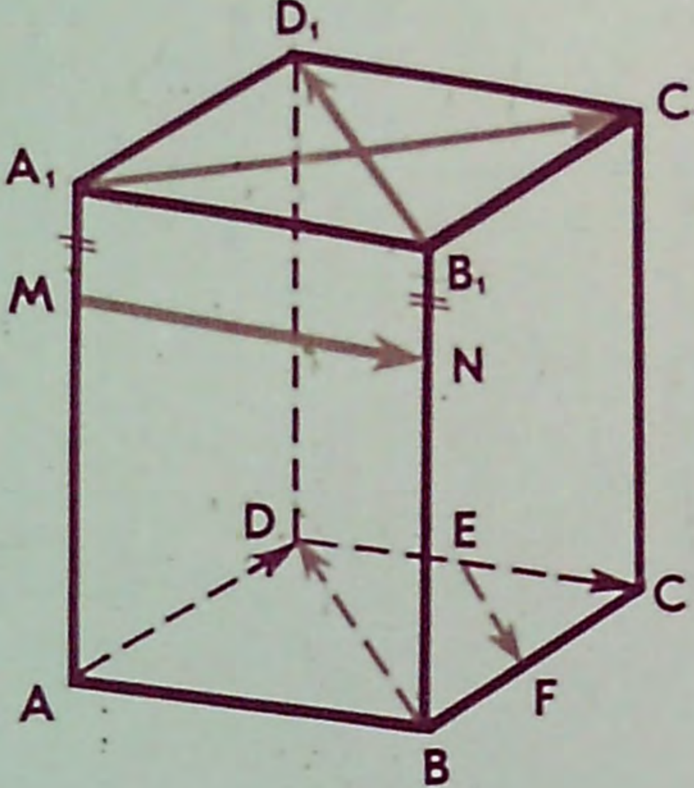




$B \in (OA) \Rightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны

$C \in (OAB) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны

Два ненулевых вектора называют *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны. Три ненулевых вектора называют *компланарными*, если лучи, задающие их направления, лежат на прямых, параллельных одной плоскости.

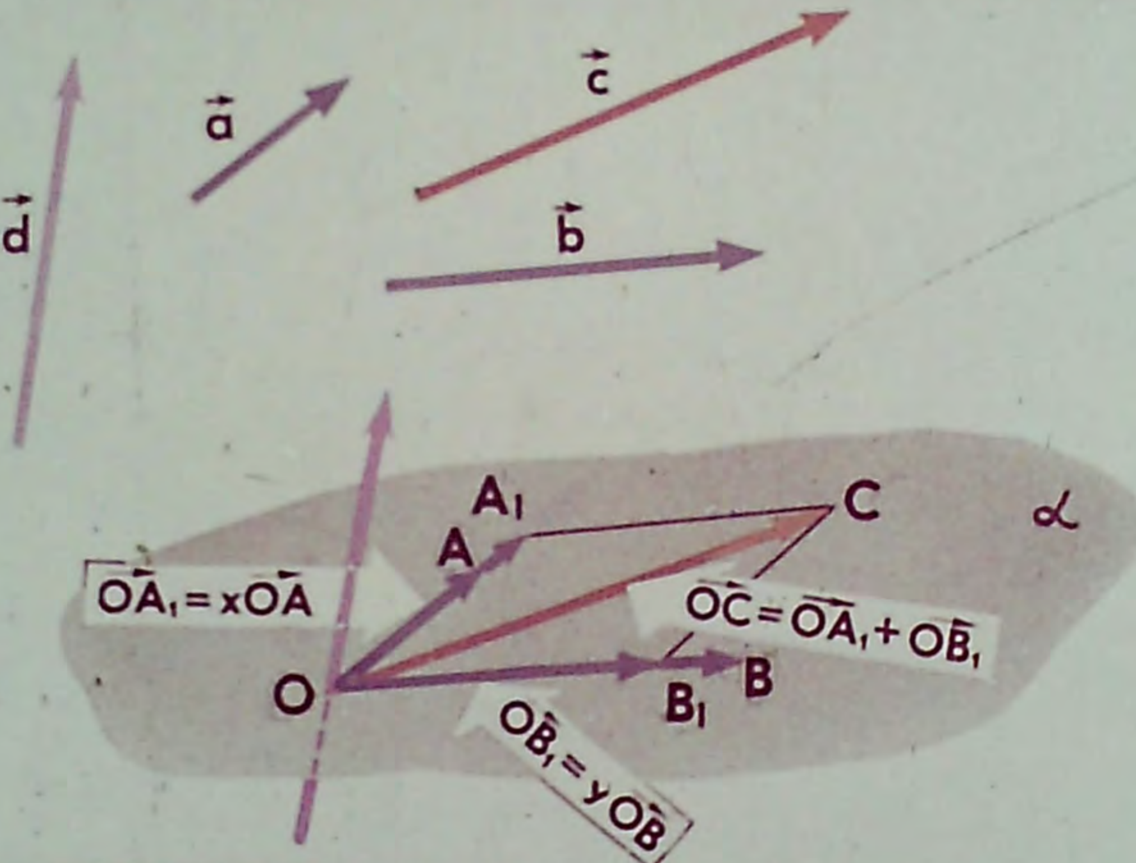


Укажите пары коллинеарных векторов:

$\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{BD}$;
$\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$;
$\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{DC}$;
$\overrightarrow{FC}$ и $\overrightarrow{FB}$.

Укажите тройки компланарных векторов:

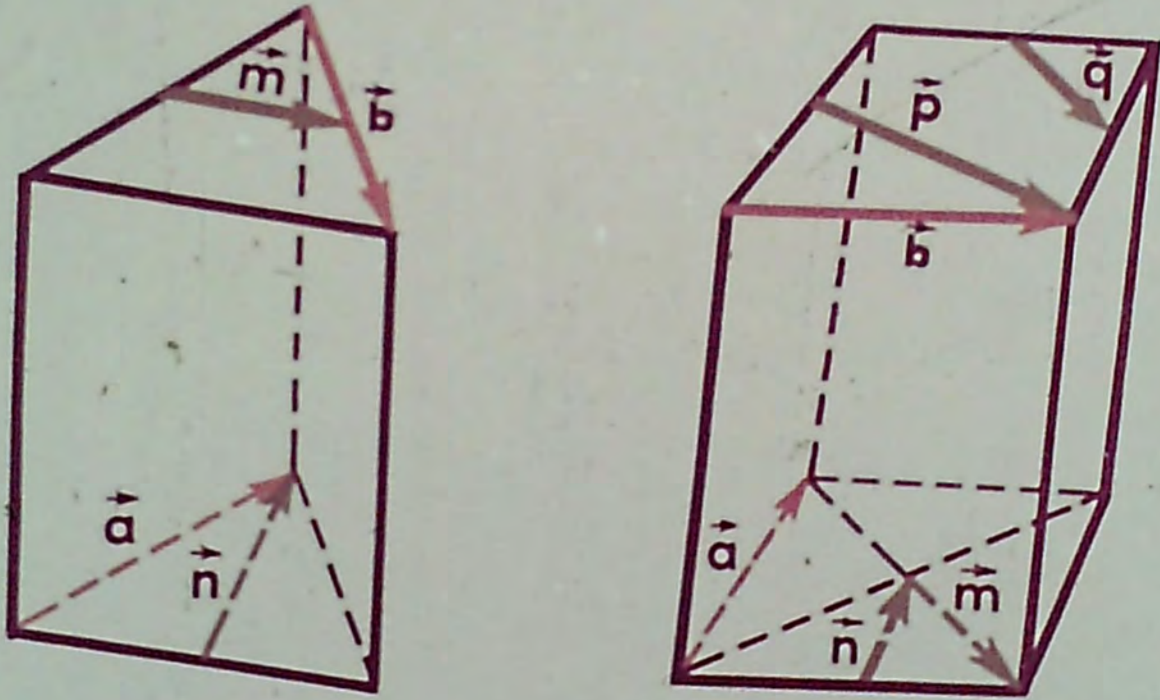
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{EF}$;
$\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{DB}$;
$\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$;
$\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AA_1}$.



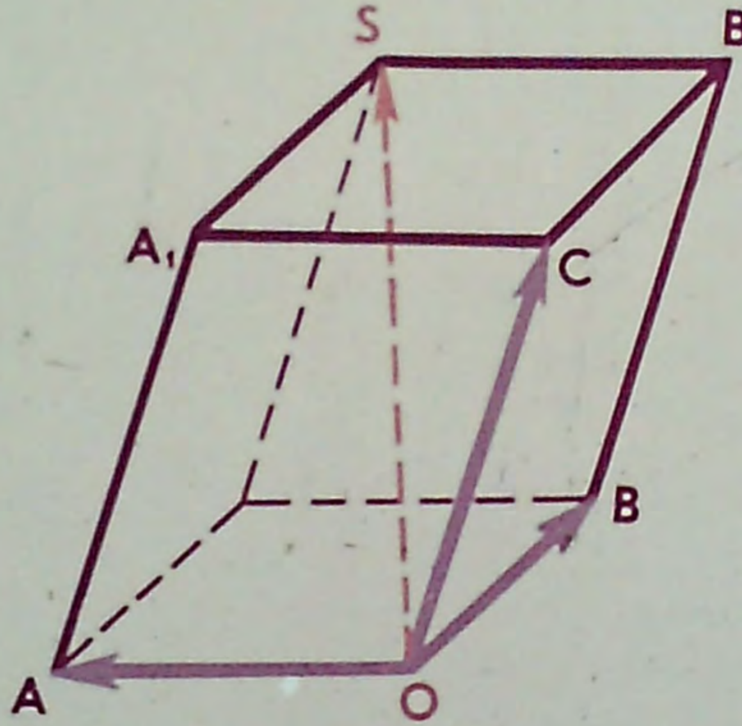
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два неколлинеарных вектора.

Любой вектор $\vec{c}$, компланарный с $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно разложить единственным образом по этим векторам:

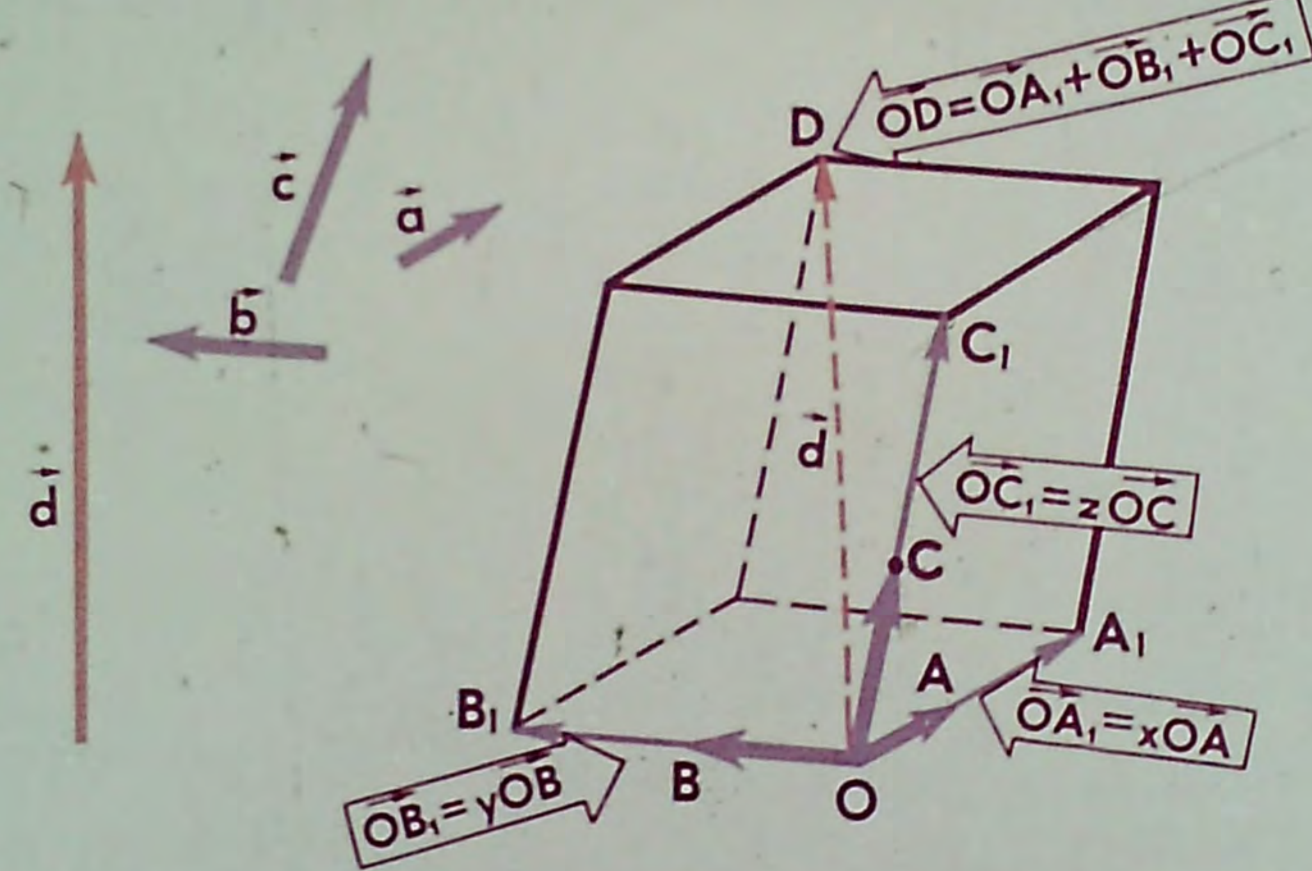
$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$



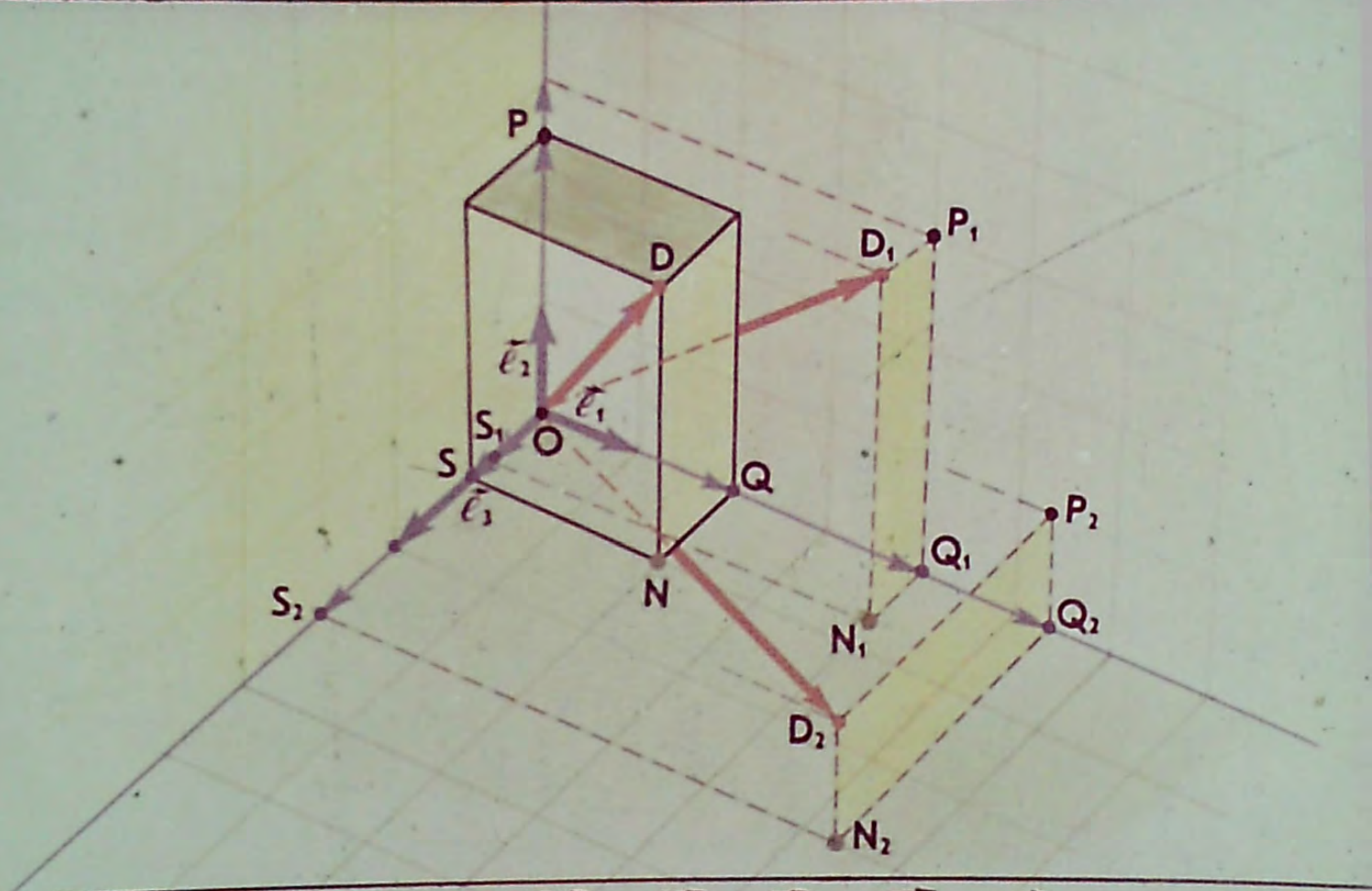
Разложите векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Докажите, что сумма $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$ равна $\vec{OS}$.



Любой вектор пространства $\vec{d}$ *можно разложить и притом единственным образом* **по трем данным некомпланарным векторам $\vec{a}, \vec{б}, \vec{c}$: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{б} + z\vec{c}$.**

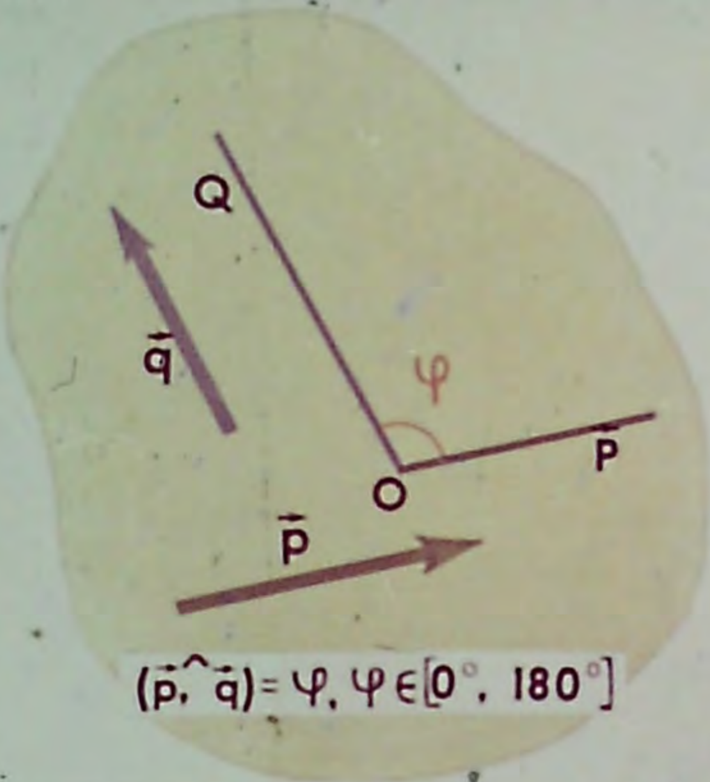


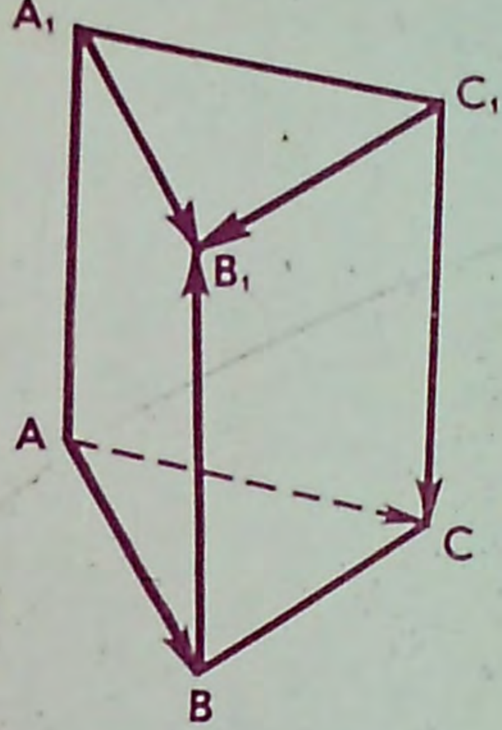
Разложить векторы $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OD}$ и т. д. по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

ФРАГМЕНТ 4.

Угол между двумя векторами.
Скалярное умножение двух векторов

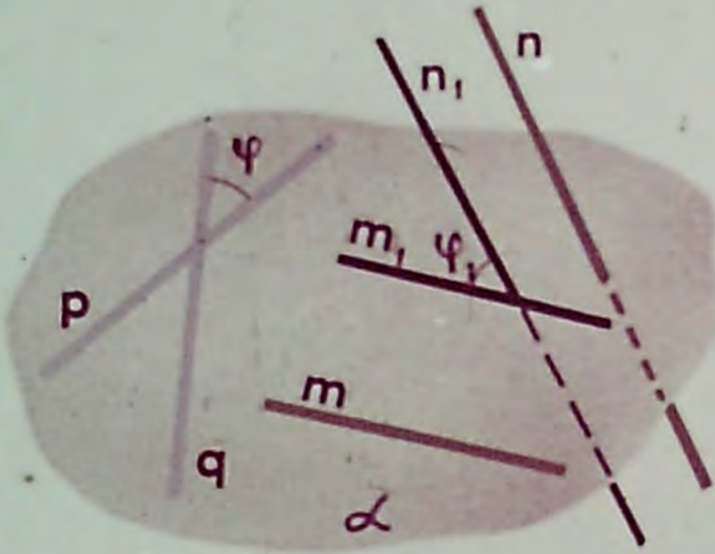
$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$

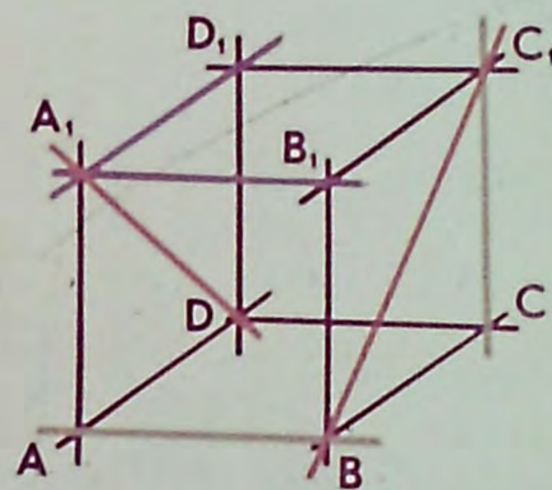




Углом между двумя ненулевыми *векторами* называется *угол между направлениями* этих векторов.

Найдите угол между векторами:
$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$; $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$; $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1B}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1B_1}$; $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$.

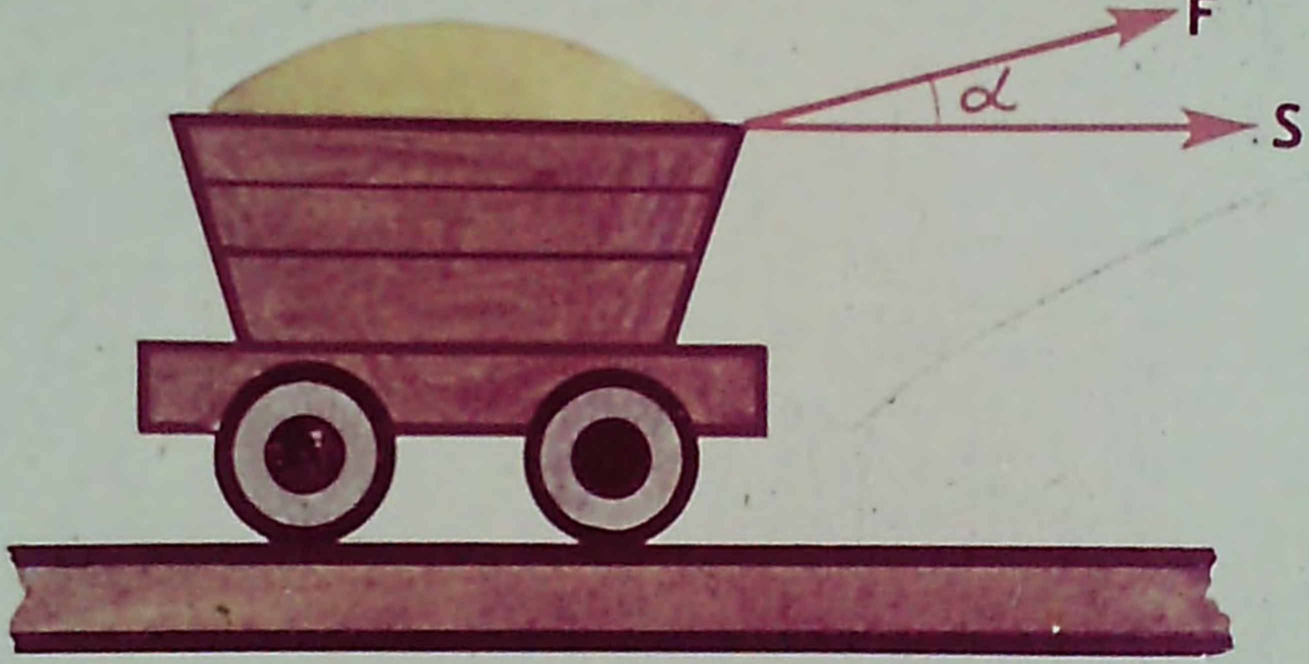




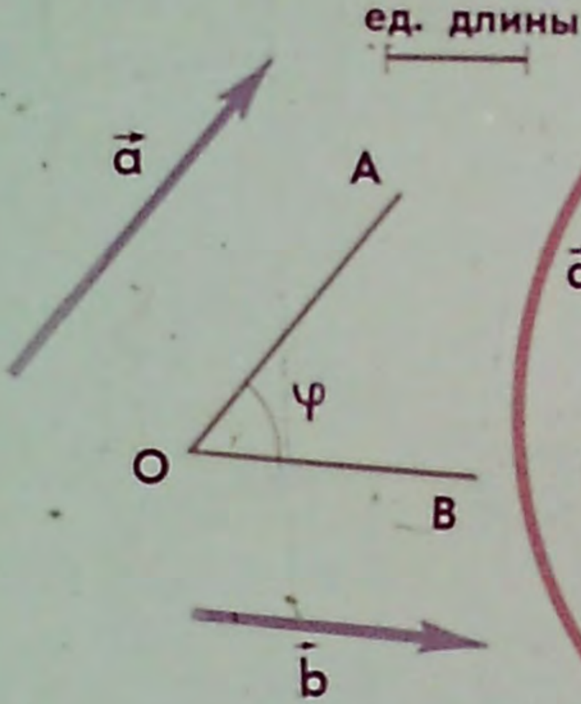
$\boxed{(\widehat{p,q})=\varphi, \text{ где } 0^\circ \le \varphi \le 90^\circ}$

Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, определяемых этими прямыми.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.



Формула, по которой вычисляется в физике и механике работа ($A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$, где $\alpha = (\widehat{\vec{F}, \vec{S}})$), послужила основанием для введения еще одной операции над векторами. Эта операция — *скалярное умножение двух векторов.*



При $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \mathrm{Cos}\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

или

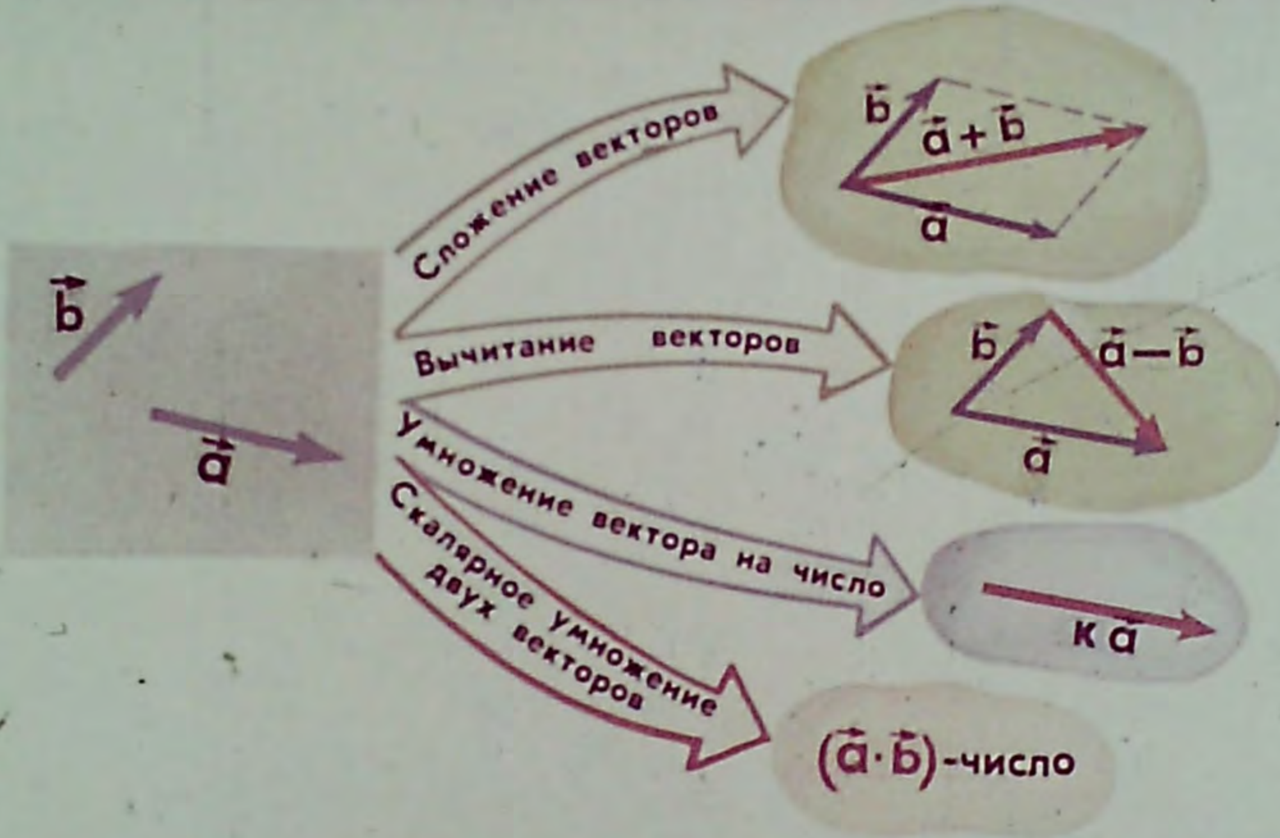
$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\,\mathrm{Cos}\,\varphi$

Если $\vec{a} = \vec{o}$

или $\vec{b} = \vec{o}$,

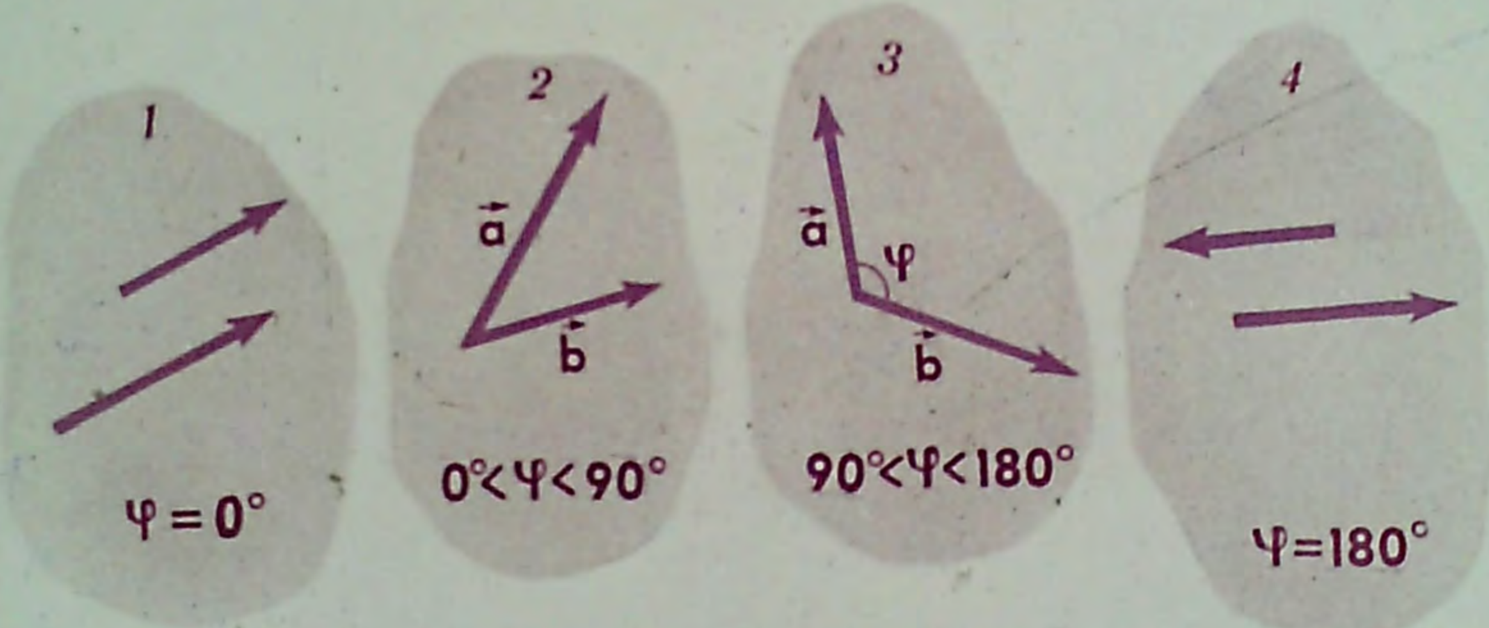
$\vec{a}\cdot\vec{b} = o$

Пользуясь *определением* скалярного произведения двух произвольных векторов, вычислите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 60^\circ$.



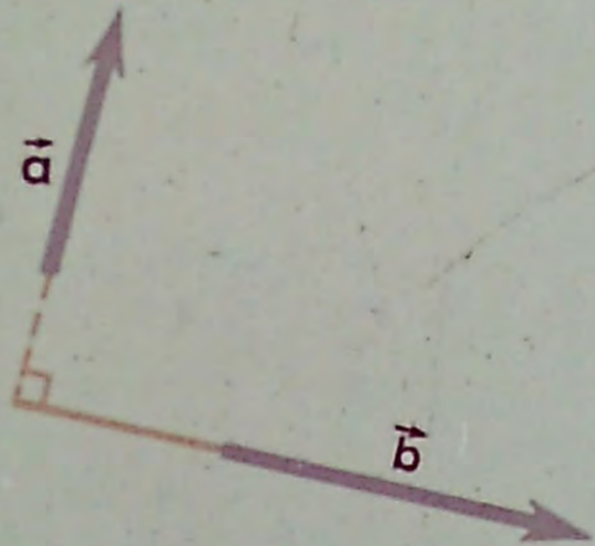
Именно тем, что результатом операции является *число* *(„скаляр“)*, **и объясняется название операции—***скалярное* **умножение двух векторов. Можно ли рассматривать скалярное произведение 3-х (и более) векторов?**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \text{Cos}\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$



Какой знак имеет скалярное произведение ненулевых векторов, изображенных на рис. *1—4?*

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \mathrm{Cos}\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})}$$

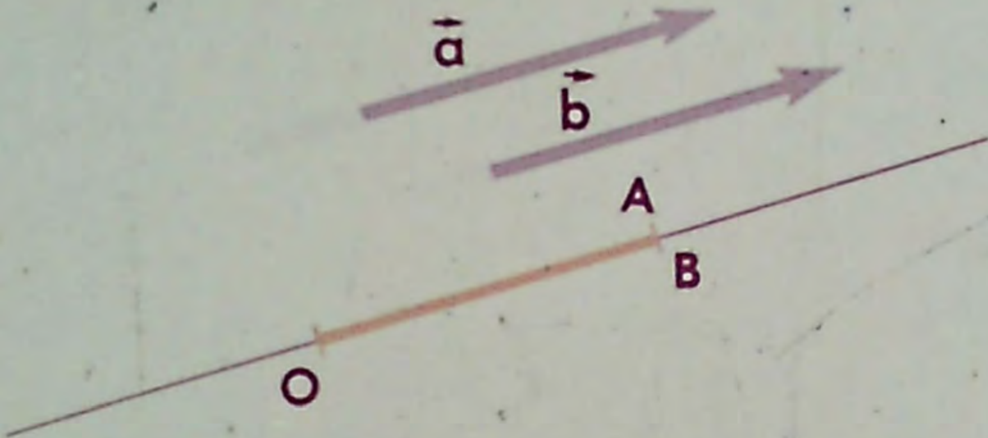


$\vec{a}\neq\vec{o},\quad \vec{b}\neq\vec{o}$

Чему равно скалярное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}}$?

Как расположены ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$?

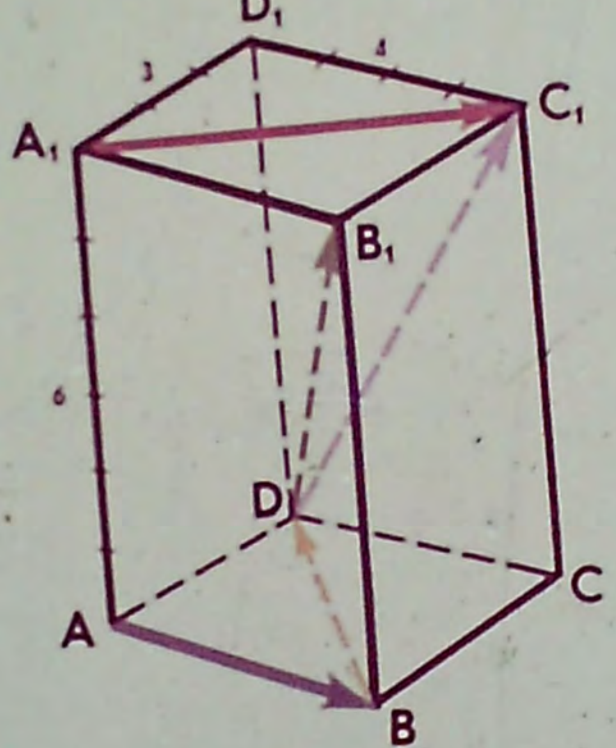
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})}$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot \cos(\widehat{\vec{a},\vec{a}})$$

$$\underline{\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2}$$

Скалярное произведение $\underline{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ называют *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$.



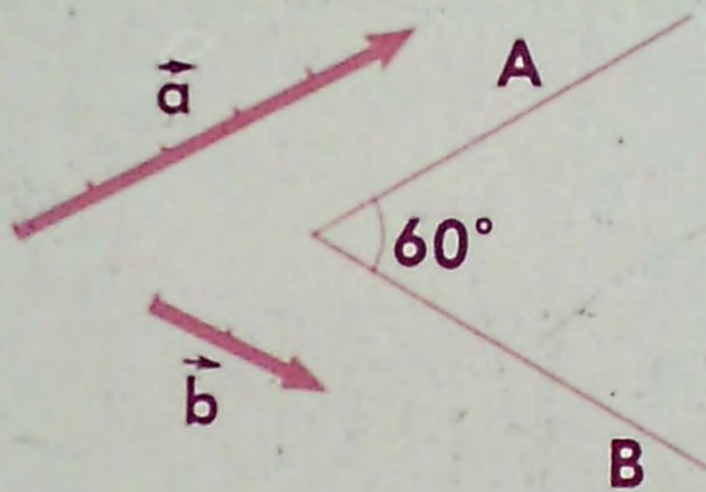
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеем $|AA_1|=6$, $|A_1D_1|=3$, $|D_1C_1|=4$. Вычислите $\overrightarrow{AB}^2$, $\overrightarrow{BA}^2$; $\overrightarrow{A_1C_1}^2$; $\overrightarrow{BD}^2$ $\overrightarrow{DB_1}^2$; $\overrightarrow{DC_1}^2$.

$\lvert\vec{a}\rvert$	$\lvert\vec{b}\rvert$	φ	$\vec{a}\cdot\vec{b}$
$2\sqrt{3}$	4	30°	
$8\sqrt{2}$	3	135°	
5	2		5
$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	45°	
	$\sqrt{3}$	0°	$\sqrt{6}$
6		150°	$-3\sqrt{6}$
3	1		-3
$3+\sqrt{2}$	$3+\sqrt{2}$	180°	
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$		0

Вычислите каждый из недостающих компонентов таблицы.

Для любых чисел a, b, c	Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
$ab = ba$	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
$(ab)c = a(bc)$	$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \neq \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$
	$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
$a(b+c) = ab+ac$	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Термин *произведение* выбран для обозначения скаляра $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ не случайно: операция $\vec{a}\cdot\vec{b}$ *имеет многие свойства, присущие операции умножения чисел.*



$$|\vec{a}| = 5, \quad |\vec{b}| = 2, \quad (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 60^\circ$$

Вычислите:

$\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{b}\cdot\vec{a}$; $(3\vec{a})\cdot\vec{b}$; $(-\vec{a})\cdot(2\vec{b})$; $2\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$;
$\vec{b}\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$; $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.

КОНЕЦ

Диафильм сделан по заказу Министерства просвещения СССР

Автор **А. Литвинова**
Консультант **Г. Левитас**
Художник-оформитель **Н. Дунаева**
Редактор **Н. Морозова**

Студия «Диафильм» Госкино СССР, 1977 г.
101000, Москва, Центр, Старосадский пер., д № 7

Цветной 0-30
Д-167-77