СМБ

Д.П. ЖЕЛОБЕНКО

А.И. ШТЕРН

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ

СМБ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Главная редакция
физико-математической
литературы

СПРАВОЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Д. П. ЖЕЛОБЕНКО, А. И. ШТЕРН

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.162
Ж 51
УДК 517.5

**Представления групп Ли.** Желобенко Д. П., Штерн А. И. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 360 с.

Справочник систематизирует богатый материал, накопленный в теории представлений групп Ли. Необходимость такой систематизации продиктована потребностями не только математики, но и физики и химии, где широко используются группы Ли.

Для научных работников, аспирантов и студентов — математиков, физиков, химиков.

Библ. 613 назв.



*Дмитрий Петрович Желобенко*
*Александр Исаакович Штерн*

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ

(Серия: «Справочная математическая библиотека»)

Редактор *И. В. Викторенкова*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *Л. И. Назарова, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 2353

Сдано в набор 19.05.82. Подписано к печати 24.12.82. Формат 60×90$^{1}/_{16}$. Бумага тип. № 2. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 22,5. Уч.-изд. л. 25,67. Тираж 15 000 экз. Заказ № 180. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

Ж $\dfrac{1702050000 - 023}{053(02)\text{-}83}$ 67-82

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

Часть I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

**Глава 1. Введение в теорию представлений** . . . . . . . . 9

§ 1. Элементы теории групп . . . . . . . . . . . . . 9
§ 2. Элементы линейной алгебры . . . . . . . . . . . 14
§ 3. Основы теории представлений . . . . . . . . . . 22
§ 4. Ассоциативные алгебры, кольца, модули . . . . . . 31

**Глава 2. Топологические группы и их представления** . . . . 39

§ 1. Топологические группы . . . . . . . . . . . . . 39
§ 2. Топологические векторные пространства . . . . . . 46
§ 3. Непрерывные представления . . . . . . . . . . . 54

**Глава 3. Алгебры Ли и их представления** . . . . . . . . 63

§ 1. Алгебры Ли . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
§ 2. Комплексные редуктивные алгебры Ли . . . . . . . 70
§ 3. Вещественные редуктивные алгебры Ли . . . . . . 79
§ 4. Конечномерные представления алгебр Ли . . . . . 88
§ 5. Бесконечномерные представления алгебр Ли . . . . 94

**Глава 4. Группы Ли и их представления** . . . . . . . . 101

§ 1. Многообразия . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
§ 2. Группы Ли (общая теория) . . . . . . . . . . . 106
§ 3. Группы Ли (структурная теория) . . . . . . . . . 113
§ 4. Представления групп Ли (общая теория) . . . . . . 120

**Глава 5. Гармонический анализ на группах Ли** . . . . . . 126

§ 1. Гармонический анализ (общая схема) . . . . . . . 126
§ 2. Конструкция неприводимых представлений . . . . . 134
§ 3. Представления редуктивных групп Ли . . . . . . . 142
§ 4. Гармонический анализ (продолжение) . . . . . . . 151

Литература . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 156

Часть II

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ ГРУПП

**Глава 6. Компактные группы Ли** . . . . . . . . . . . 159

§ 0. Группа $\mathbf{T}^n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 159
§ 1. Группа $SU(2)$ . . . . . . . . . . . . . . . . 159
§ 2. Группа $SO(3)$ . . . . . . . . . . . . . . . . 161
§ 3. Группы $U(n)$ и $SU(n)$ . . . . . . . . . . . . 162
§ 4. Группа $Sp(2n)$ . . . . . . . . . . . . . . . . 173
§ 5. Группы $SO(n)$ и $Spin(n)$ . . . . . . . . . . . 177

Глава 7. **Представления некоторых разрешимых и нильпотентных групп Ли** . . . . . . . . . . . . . . . . . . 187
§ 1. Представления групп аффинных преобразований . . . 187
§ 2. Представления группы движений плоскости . . . . . 196
§ 3. Представления групп Гейзенберга . . . . . . . . . 200
§ 4. Представления группы верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали . . . . . . . . . . 205
§ 5. Примеры разрешимых групп Ли не типа I . . . . . . 208

Глава 8. **Комплексные полупростые группы Ли** . . . . . . . . 211
§ 1. Группа $SL(2, \mathbf{C})$ . . . . . . . . . . . . . . . 211
§ 2. Группа $SL(n, \mathbf{C})$ . . . . . . . . . . . . . . . 226
§ 3. Ортогональные и симплектические группы . . . . . . 238
§ 4. Неприводимые унитарные представления группы $G_2$ . . . 254

Глава 9. **Вещественные полупростые группы Ли** . . . . . 259
§ 1. Группа $SL(2, \mathbf{R})$ . . . . . . . . . . . . . . . 259
§ 2. Группы $U(n, 1)$ и $Spin(n, 1)$ . . . . . . . . . . . 295
§ 3. Некоторые представления основной серии вещественных полупростых групп Ли ранга 1 . . . . . . . . . . 300
§ 4. Представления некоторых вещественных редуктивных групп Ли неединичного ранга . . . . . . . . . . . . 307

Глава 10. **Представления некоторых полупрямых произведений** 319
§ 1. Представления некоторых матричных групп . . . . . 319
§ 2. Представления группы $GL(n, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^n$ . . . . . . . . 325

Литература . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 326

Предметный указатель . . . . . . . . . . . . . . . 349
Указатель обозначений . . . . . . . . . . . . . . 358

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Принципиальное значение теории групп и их представлений в современной математике не удивительно, поскольку изучение каждой математической структуры связано с изучением группы ее автоморфизмов. Теория представлений групп позволяет исследовать родственные связи между автоморфизмами разных структур, индуцированные действием некоторой (абстрактной) группы. Современное развитие теории представлений групп значительно стимулируется приложениями этой теории в квантовой физике, где группы выступают как группы симметрии, т. е. группы автоморфизмов динамических квантовых систем.

Теория представлений групп Ли — часть общей теории представлений топологических групп в топологических векторных пространствах. Условие аналитичности, входящее в определение группы Ли, на первый взгляд ограничительно. Однако в действительности каждая топологическая локально евклидова группа является группой Ли (решение V проблемы Гильберта).

Цель данного справочника — ориентация читателей в основных понятиях и фактах теории представлений групп Ли, которая представляет собой сложный синтез алгебраических, топологических, аналитических конструкций. От читателя требуется знакомство с основными понятиями топологии и анализа. Несколько более специальные сведения из теории групп, линейной алгебры и т. д. приводятся в тексте. В ссылках принята двойная и тройная нумерация. Ссылки на п. 1.2 относится к п. 1.2 § 1 той же главы; ссылка на п. 4.1.2 — к п. 1.2 § 1 главы 4.

Первая часть справочника (посвященная общим вопросам теории групп Ли и их представлений) написана Д. П. Желобенко, вторая (содержащая более детальные сведения о представлениях матричных групп) — А. И. Штерном.

*Д. П. Желобенко, А. И. Штерн*

# ЧАСТЬ I

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

## ГЛАВА 1

## ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В математике часто встречаются алгебраические структуры с бинарными операциями «сложения» и «умножения». К ним относятся моноиды (в частности, группы), кольца (в частности, алгебры), модули (в частности, векторные пространства). В этой книге будут рассматриваться, главным образом, группы и их представления в векторных пространствах, а также ассоциативные алгебры, алгебры Ли и их представления в векторных пространствах.

Понятие векторного пространства предполагается известным. В этой книге рассматриваются, как правило, векторные пространства над классическими полями $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ (поле вещественных и поле комплексных чисел).

### § 1. Элементы теории групп

**1.1. Определение группы.** Абстрактное множество $G$ называется *моноидом*, если в нем определена бинарная операция $(a, b) \mapsto ab$, называемая *умножением*, причем $(ab)c = a(bc)$ для всех $a, b, c \in G$, т. е. умножение ассоциативно. Элемент $ab$ называется *произведением* элементов $a, b$. Элемент $(ab)c = a(bc)$ обозначается $abc$.

Моноид $G$ называется *полугруппой*, если в нем существует единица, т. е. элемент $1 \in G$ такой, что $1a = a1 = a$ для всех $a \in G$ *). Элемент $a \in G$ называется *обратимым слева* (*справа*), если существует элемент $b \in G$ ($c \in G$) такой, что $ba = 1$ ($ac = 1$). Если $b, c$ существуют одновременно, то

$$b = b1 = b(ac) = (ba)c = 1c = c,$$

откуда следует также единственность каждого из элементов $b, c$. При этом элемент $a$ называется *обратимым*, элемент $b = c$ обозначается $a^{-1}$ и называется *обратным* к элементу $a$.

Полугруппа $G$ называется *группой*, если все ее элементы обратимы. Группа $G$ называется *конечной*, если число ее элементов конечно. При этом число элементов $G$ обозначается $|G|$ и называется *порядком группы* $G$. Группа $G$ называется *коммутативной* или *абелевой*, если $ab = ba$ для всех $a, b \in G$. В этом случае вме-

*) Иногда элемент 1 называют *нейтральным элементом*.

сто символа $ab$ часто используется символ $a+b$ (аддитивная запись закона умножения) и символ 1 заменяется символом 0.

Примеры. 1. Множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел — аддитивная абелева группа (относительно сложения), множество $\mathbf{Z}\backslash\{0\}$ — абелева группа относительно умножения. 2. Множество $\mathbf{Z}_n$ всех корней $n$-й степени из единицы — конечная абелева группа. 3. Множество $G_X$ всех взаимно однозначных преобразований некоторого множества $X$ на себя является группой относительно композиции преобразований, причем роль единицы играет тождественное преобразование. В частности, если $X$ конечно и состоит из $n$ элементов, то $G_X = S_n$ — конечная группа (порядка $n!$). Группы $S_n$ называются *группами подстановок* или *симметрическими группами*. 4. Множество $\operatorname{Aut} V$ всех автоморфизмов векторного пространства $V$ является группой (относительно композиции автоморфизмов). 5. Множество $U(H)$ всех унитарных операторов в гильбертовом пространстве $H$ является группой (относительно умножения операторов). 6. Множество $GL(n, \Phi)$ всех невырожденных матриц $n\times n$ над полем $\Phi$ является группой (относительно умножения матриц). Группы $GL(n, \Phi)$ называются *полными линейными группами*.

**1.2. Действие группы в множестве.** Говорят, что группа $G$ *действует* (*слева*) в множестве $X$, если для каждой пары $g\in G$, $x\in X$ определен элемент $gx\in X$, причем

1) $1x = x$ для всех $x\in X$;

2) $(gh)x = g(hx)$ для всех $g, h\in G$.

При этом $X$ называется (*левым*) *$G$-пространством*. Аналогично определяется правое $G$-пространство. Действие $G$ называется *эффективным*, если равенство $gx = x$ для всех $x\in X$ возможно только при $g=1$. В этом случае группу $G$ можно отождествить с группой преобразований $x\mapsto gx$ $(g\in G)$.

Далее, пусть $X$ — левое $G$-пространство. Положим $x\sim y$ для элементов $x, y\in X$, если $y = gx$ при некотором $g\in G$. Отношение $x\sim y$ является *отношением эквивалентности* на множестве $X$. Соответственно $X$ распадается на *классы эквивалентности* относительно действия группы $G$.

При этом класс эквивалентности, содержащий точку $x\in X$, называется *орбитой* точки $x$ (относительно группы $G$). Пространство $X$ называется *однородным*, если оно состоит из единственной орбиты. В последнем случае также говорят, что группа $G$ действует *транзитивно*.

Примеры. 1. Каждая группа $G$ является однородным $G$-пространством относительно операции левых сдвигов

$$x\mapsto gx,\qquad g, x\in G.$$

Аналогично для правых сдвигов

$$x\mapsto xg,\qquad g, x\in G.$$

2. Каждая группа $G$ является $G$-пространством относительно преобразований
$$x \mapsto gxg^{-1}, \quad g, x \in G.$$

3. Орбитами группы вращений в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ являются концентрические сферы с центром в начале координат (включая сферу радиуса 0).

**1.3. Подгруппы, факторпространства.** Непустое подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы $G$, если $ab^{-1} \in H$ для всех $a, b \in H$. В частности, ясно, что $1 \in H$. Поэтому $a^{-1} \in H$ для всех $a \in H$; $ab \in H$ для всех $a, b \in H$. Иначе говоря, подгруппа — это подмножество в $G$, замкнутое относительно всех групповых операций.

Далее, пусть $H$ — подгруппа группы $G$. Если рассматривать $G$ как правое $H$-пространство (относительно правых сдвигов $g \mapsto gh$ $(g \in G, h \in H)$), то $G$ распадается на орбиты
$$gH = \{gh: h \in H\}, \quad g \in G,$$
называемые *правыми классами смежности* группы $G$ по подгруппе $H$. Множество $G/H$ всех таких классов смежности называется (*левым*) *факторпространством* группы $G$ по подгруппе $H$.

С другой стороны, если рассматривать $G$ как левое (однородное) $G$-пространство (относительно левых сдвигов $g \mapsto g_0 g$ $(g_0 \in G)$), то ясно, что правые классы смежности переставляются между собой (причем $gH \mapsto g_0 gH$). Иначе говоря, факторпространство $G/H$ является левым однородным $G$-пространством относительно этого действия.

В действительности каждое левое однородное $G$-пространство $X$ изоморфно $G/H$ при надлежащем выборе подгруппы $H$. При этом левые $G$-пространства $X$, $Y$ считаются изоморфными, если между ними существует биекция, переставляющая действие группы $G$ в пространствах $X$, $Y$.

В самом деле, фиксируем произвольную точку $\varepsilon \in X$, где $X$ — левое $G$-пространство. Подмножество
$$H_\varepsilon = \{h \in G: h\varepsilon = \varepsilon\}$$
является подгруппой в $G$ и называется *стационарной подгруппой* точки $\varepsilon$. Каждый правый класс смежности относительно этой подгруппы совпадает с множеством вида
$$K_x = \{g \in G: g\varepsilon = x\}$$
при некотором $x \in X$. Если $X$ однородно, то $K_x$ непусто для всех $x \in X$, и соответствие $x \mapsto K_x$ является изоморфизмом $G$-пространств $X$, $G/H_\varepsilon$.

Аналогично (с заменой левых сдвигов на правые) определяются правые факторпространства $H\backslash G$, где $H$ — подгруппа в $G$.

Примеры. 1. Пусть $\mathbf{R}$ — аддитивная группа вещественных чисел, $\mathbf{Z}$ — ее подгруппа, состоящая из целых чисел. Факторпространство $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ изоморфно окружности $S^1$ (с естественным действием $\mathbf{R}$ на $S^1$). 2. Пусть $O(n, \mathbf{R})$ — группа вращений в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат. Факторпространство $O(n, \mathbf{R})/O(n-1, \mathbf{R})$ изоморфно сфере $S^{n-1}$ (с естественным действием $O(n, \mathbf{R})$ на $S^{n-1}$).

**1.4. Нормальные делители, факторгруппы.** Рассмотрим теперь группу $G$ как $G$-пространство относительно действия $x \mapsto gxg^{-1}$ ($g \in G$). Заметим, что образом каждой подгруппы $H$ при этом действии является подгруппа $gHg^{-1}$. Подгруппа $H$ называется *инвариантной*, если $gHg^{-1} = H$ для всех $g \in G$.

Условие инвариантности подгруппы $N$ может быть записано в виде $gN = Ng$ для всех $g \in G$. Таким образом, для подгруппы $N$ нет различия между левыми и правыми классами смежности. Кроме того,

$$(g_1N)(g_2N) = g_1Ng_2N = (g_1g_2)N^2 = (g_1g_2)N,$$

где символ $AB$ для подмножеств $A, B \subset G$ означает подмножество всех произведений вида $ab$ ($a \in A$, $b \in B$). Таким образом, в факторпространстве $G/N$ естественно определяется умножение.

Легко проверить, что $G/N$ является группой относительно этого умножения (причем $N$ является нейтральным элементом группы $G/N$). Группа $G/N$ называется *факторгруппой* группы $G$ по инвариантной подгруппе $N$.

Иначе говоря, если $N$ — инвариантная подгруппа, то $G/N$ естественно наделяется не только структурой $G$-пространства, но и факторгруппы. По этой причине инвариантные подгруппы называются также *нормальными делителями* группы $G$.

Примеры. 1. Если $G$ — абелева группа, то каждая ее подгруппа — нормальный делитель группы $G$. 2. Для каждой группы $G$ подгруппа

$$Z = \{z \in G: zg = gz \text{ для всех } g \in G\}$$

— нормальный делитель группы $G$. Подгруппа $Z$ называется *центром группы* $G$. 3. Для каждой пары множеств $H, K \subset G$ положим

$$N_H(K) = \{n \in H: nKn^{-1} = K\},$$
$$Z_H(K) = \{z \in H: zk = kz \text{ для всех } k \in K\}.$$

Ясно, что $Z_H(K) \subset N_H(K)$. При этом $Z_H(K)$, $N_H(K)$ называются соответственно *централизатором* и *нормализатором* множества $K$ в множестве $H$. Если $H$ — подгруппа, то $Z_H(K)$, $N_H(K)$ — подгруппы в $H$, причем $Z_H(K)$ — нормальный делитель $N_H(K)$. 4. Для каждой подгруппы $K \subset G$ множество $N(K) = N_G(K)$ называется *нормализатором* подгруппы $K$ в группе $G$. При этом $K$ — нормальный делитель $N(K)$, $N(K)$ — максимальная среди подгрупп группы $G$, содержащих $K$ в качестве своего нормального делителя.

**1.5. Гомоморфизмы (представления).** *Гомоморфизмом* группы $G$ в группу $H$ называется всякое отображение $\varphi: G \to H$, удовлетворяющее условию

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in G,$$

В частности, $\varphi(1)^2=\varphi(1)$, откуда $\varphi(1)=1$, где в правой части 1 — единица группы $H$. Отсюда

$$\varphi(a^{-1})=\varphi(a)^{-1}\quad \text{для всех}\quad a\in G.$$

Всякий гомоморфизм группы $G$ в группу $H$ называется также *представлением* группы $G$ в группу $H$. Отображение $\psi\colon G\to H$ называется *антигомоморфизмом* (*антипредставлением*), если

$$\psi(ab)=\psi(b)\psi(a)\quad \text{для всех}\quad a,\ b\in G.$$

В этом случае также $\psi(1)=1$, $\psi(a^{-1})=\psi(a)^{-1}$ для всех $a\in G$.

Пусть $\varphi$ — гомоморфизм группы $G$ в группу $H$. Множество

$$N_\varphi=\{g\in G\colon \varphi(g)=1\}$$

называется *ядром гомоморфизма* $\varphi$ и иногда обозначается $\ker\varphi$. Ясно, что $N_\varphi$ — нормальный делитель группы $G$. Ясно также, что

$$\varphi(a)=\varphi(b)\Leftrightarrow ab^{-1}\in N_\varphi.$$

В частности, $\varphi$ инъективно тогда и только тогда, когда $N_\varphi=\{1\}$. В этом случае гомоморфизм (представление) $\varphi$ называется *точным*.

Образ $\varphi(A)$ каждой подгруппы $A\subset G$ является подгруппой в $H$. Полный прообраз каждой подгруппы $B\subset H$ — подгруппа в $G$. При этом, если $B$ — нормальный делитель $H$, то $\varphi^{-1}(B)$ — нормальный делитель $G$.

Пример. Пусть $N$ — нормальный делитель группы $G$. Каноническая проекция $\pi\colon G\to G/N$ (ставящая в соответствие элементу $g\in G$ класс $gN=Ng$) является гомоморфизмом группы $G$ на группу $G/N$. Ядром гомоморфизма $\pi$ является $N$.

**1.6. Изоморфизмы, автоморфизмы.** Всякий биективный гомоморфизм группы $G$ на группу $H$ называется *изоморфизмом* групп $G$, $H$. С абстрактной точки зрения изоморфные группы можно считать одинаковыми.

Всякий изоморфизм группы $G$ на себя называется *автоморфизмом* группы $G$. Множество $\operatorname{Aut} G$ всех автоморфизмов группы $G$ также является группой (относительно композиции автоморфизмов).

Существенным примером автоморфизма группы $G$ является отображение $g\mapsto g_0gg_0^{-1}$ $(g\in G)$ с фиксированным $g_0\in G$. Такие автоморфизмы группы $G$ называются *внутренними*. Множество $\operatorname{Aut}_0 G$ всех внутренних автоморфизмов группы $G$ является нормальным делителем $\operatorname{Aut} G$.

Элементы группы $G$, лежащие на одной орбите $\operatorname{Aut}_0 G$, называются *сопряженными*. Орбиты $\operatorname{Aut}_0 G$ называются *классами сопряженных элементов* группы $G$.

Аналогично, исходя из понятия антигомоморфизма, определяются антиизоморфизмы и антиавтоморфизмы.

Примеры. 1. Отображение $\varphi(x)=e^x$ — изоморфизм аддитивной группы $\mathbf{R}$ на мультипликативную группу $\mathbf{R}_+=(0,\ +\infty)$. 2. Группа $\operatorname{Aut}\mathbf{R}^n$ всех автоморфизмов векторного пространства

$\mathbf{R}^n$ изоморфна $GL(n, \Phi)$. 3. Отображение $g \mapsto g'$ (штрих означает транспонирование) — антиавтоморфизм группы $G = GL(n, \Phi)$. 4. Отображение $g \mapsto g'^{-1}$ — автоморфизм группы $GL(n, \Phi)$.

**1.7. Прямое произведение групп.** Пусть $A$, $B$ — группы. Декартово произведение $G = A \times B$, снабженное покоординатным умножением

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2),$$

также является группой. Группа $G$ называется *прямым произведением* групп $A$, $B$.

При этом группы $A$, $B$ естественно отождествляются с нормальными делителями $A \times \{1\}$, $\{1\} \times B$ группы $G$. Следовательно, можно считать, что $G$ — прямое произведение своих подгрупп $A$, $B$.

Конструкция прямого произведения естественно обобщается также на любое семейство групп $G_i$ $(i \in I)$, где $I$ — произвольное множество индексов.

**1.8. Полупрямое произведение групп.** Если $A$ действует в $B$ с помощью автоморфизмов $b \mapsto b^a$ $(a \in A,\ b \in B)$, то декартово произведение $G = A \times B$ можно также снабдить умножением

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = \left(a_1a_2,\ b_1b_2^{a_1}\right).$$

Полученная группа $G$ называется *полупрямым произведением* групп $A$, $B$. При этом используется обозначение $G = A \circ B$ или $G = A \underset{\alpha}{\times} B$, где $\alpha(a)b = b^a$ — символ действия группы $A$ в группе $B$.

При этом группы $A$, $B$ по-прежнему можно отождествить с изоморфными подгруппами $A \times \{1\}$, $\{1\} \times B$. Ясно, что $G=AB=BA$, $B$ — нормальный делитель $G$ и факторгруппа $G/B$ изоморфна группе $A$.

П р и м е р. Пусть $G$ — группа всех движений евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, $A$ — подгруппа вращений вокруг начала координат, $B$ — подгруппа трансляций. Тогда $G = A \underset{\alpha}{\times} B$, где $\alpha$ — естественное действие $A$ в $B$.

Л и т е р а т у р а: [1], [5], [11], [16], [17], [20], [21].

## § 2. Элементы линейной алгебры

**2.1. Векторные пространства.** Пусть $V$ — векторное пространство над полем $\Phi$. Элементы $x \in V$ обычно называются *векторами*, элементы $\lambda \in \Phi$ — *числами* или *скалярами*. Структурные операции пространства $V$ (сложение векторов и умножение вектора на число) называются *векторными операциями*.

Два векторных пространства $V_1$, $V_2$ над полем $\Phi$ называются *изоморфными*, если между ними существует биекция, сохраняющая векторные операции. Мы будем писать в этом случае $V_1 \simeq V_2$.

Подмножество $V_0 \subset V$ называется *подпространством* векторного пространства $V$, если оно замкнуто относительно векторных операций, т. е.

$$\lambda x + \mu y \in V_0 \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in V_0, \quad \lambda,\ \mu \in \Phi.$$

Для каждого подмножества $S \subset V$ существует наименьшее подпространство $V_0$, содержащее $S$. При этом $V_0$ называется *линейной оболочкой* множества $S$ и состоит из всевозможных линейных комбинаций

$$x = \sum_i \lambda_i e_i \quad (\text{конечная сумма}), \quad e_i \in S, \quad \lambda_i \in \Phi.$$

Множество $S$ называется *линейно независимым*, если все такие разложения однозначны, т. е. $x = 0$ только при $\lambda_i = 0$ для всех $i$.

Подмножество $S \subset V$ называется *базисом* пространства $V$, если оно линейно независимо и его линейная оболочка совпадает со всем пространством $V$. Иначе говоря, в этом случае каждый элемент $x \in V$ представляется, причем единственным образом, в виде линейной комбинации элементов системы $S$.

В каждом векторном пространстве $V$ существует базис (что нетрудно получить путем трансфинитной индукции), причем любые два базиса пространства $V$ имеют одинаковую мощность. Эта мощность обозначается $\dim V$ и называется *размерностью* пространства $V$.

Примеры. 1. Векторное пространство размерности 0 состоит из единственного элемента 0 и обозначается обычно символом $(0)$. 2. Пусть $\Phi^X$ — множество всех числовых функций $f\colon X \to \Phi$ для каждого множества $X$, снабженное стандартными векторными операциями:

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Множество $\Phi^X$ — векторное пространство над полем $\Phi$. 3. Пусть $\Phi(X) \subset \Phi^X$ — линейная оболочка $\delta$-функций

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a, \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$$

Из линейной независимости этих функций следует, что $\dim \Phi(X) = \operatorname{card} X$ (мощность множества $X$). Таким образом, существуют векторные пространства произвольной мощности.

Замечания. 1. Пространство $\Phi(X)$ можно рассматривать как «формальную линейную оболочку» множества $X$ (отождествляя элемент $a \in X$ с функцией $\delta_a$). 2. Если $X$ — конечное множество, состоящее из $n$ элементов, то $\Phi^X = \Phi(X) = \Phi^n$ (декартово произведение $n$ экземпляров поля $\Phi$).

**2.2. Операции над векторными пространствами.** В классе векторных пространств над полем $\Phi$ существуют естественные операции сложения и умножения, позволяющие по данным векторным пространствам строить новые векторные пространства.

1. Суммы. Пусть $\Pi = \prod_i V_i$ — декартово произведение семейства векторных пространств $V_i$ $(i \in I)$, т. е. множество всех наборов $x = (x_i)_{i\in I}$, где $x_i \in V_i$ — $i$-я координата вектора $x$. Операции

$$\lambda(x_i)_{i\in I} + \mu(y_i)_{i\in I} = (\lambda x_i + \mu y_i)_{i\in I}$$

(называемые *покоординатными*) превращают $\Pi$ в векторное пространство над полем $\Phi$. При этом каждое пространство $V_j$ отождествляется с подпространством пространства $\Pi$, состоящим из векторов вида

$$x_j = (x \cdot \delta_{ij})_{i\in I}, \qquad x \in V_j,$$

где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Линейная оболочка $V$ объединения всех подпространств $V_i$ $(i \in I)$ называется *суммой* (*прямой суммой*) пространств $V_i$ $(i \in I)$ и обозначается символом

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i \quad \text{либо} \quad V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n \quad \text{при} \quad I = \{1, \ldots, n\}.$$

Элементы $x \in V$ суть финитные наборы $x = (x_i)_{i\in I}$, т. е. такие наборы, у которых лишь конечное число координат $x_i$ отлично от нуля. Для этих элементов обычно используются обозначения

$$x = \bigoplus_{i\in I} x_i \quad \text{либо} \quad x = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \quad \text{при} \quad I = \{1, \ldots, n\}.$$

В частности, $V = \Pi$, если $I$ конечно. Нетрудно видеть, что в общем случае $\dim V$ — сумма размерностей $\dim V_i$ $(i \in I)$.

Пример. $\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m \simeq \mathbf{R}^{n+m}$.

2. Факторпространства. Пусть $V_0 \subset V$ — подпространство векторного пространства $V$. Фактормножество $V/V_0$ по отношению эквивалентности $x \sim y$, если $x - y \in V_0$ (см. п. 1.3) естественно снабжается векторными операциями:

$$\lambda(x + V_0) + \mu(y + V_0) = (\lambda x + \mu y) + V_0,$$

где $x + V_0$ — класс эквивалентности, содержащий вектор $x \in V$. Пространство $V/V_0$ называется *факторпространством* $V$ по $V_0$. Переход от $V$ к $V/V_0$ осуществляется путем замены эквивалентности равенством. В частности, $V_0$ — нулевой элемент $V/V_0$.

Пример. $\mathbf{R}^n/\mathbf{R}^m \simeq \mathbf{R}^{n-m}$ при $n \geqslant m$.

3. Произведения. Пусть по-прежнему $\Pi$ — декартово произведение пространств $V_i$ $(i \in I)$. Каждому набору $x = (x_i)_{i\in I}$ поставим в соответствие формальное произведение

$$\tilde{x} = \bigotimes_{i\in I} x_i \quad \text{либо} \quad \tilde{x} = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \quad \text{при} \quad I = \{1, \ldots, n\},$$

обладающее свойством линейности по каждому сомножителю $x_i \in V_i$, и пусть $W$ — линейная оболочка всех таких произведений. Пространство $W$ называется *произведением* (*тензорным произведением*) пространств $V_i$ $(i \in I)$ и обозначается символом

$$W = \bigotimes_{i\in I} V_i \quad \text{либо} \quad W = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \quad \text{при} \quad I = \{1, \ldots, n\}.$$

Более строгое определение: $W = L/L_0$, где $L = \Phi(\Pi)$ — линейная оболочка множества $\Pi$ (см. п. 2.1), $L_0 \subset L$ — линейная оболочка векторов вида

$$(\ldots \lambda x_{i_0} + \mu y_{i_0} \ldots) - \lambda(\ldots x_{i_0} \ldots) - \mu(\ldots y_{i_0} \ldots) \sim 0, \quad i_0 \in I,$$

где многоточие означает фиксированную совокупность координат $(x_i)$ при $i \neq i_0$. При этом $\tilde{x}$ — класс эквивалентности, содержащий $(x_i)_{i\in I}$. Кроме того, $\dim W$ — произведение размерностей $\dim V_i$ $(i \in I)$.

Пример. $\mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^m \simeq \mathbf{R}^{n+m}$.

Замечание. Пусть $e_i^{(k)}$ $(i \in I_k)$ — базис пространства $V_k$ $(k = 1, \ldots, n)$; тогда элементы

$$e_{i_1 \ldots i_n} = e_{i_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}^{(n)}$$

образуют базис пространства $W = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$.

**2.3. Линейные операторы.** Пусть $V_1$, $V_2$ — векторные пространства над полем $\Phi$. Отображение $A\colon V_1 \to V_2$ называется *линейным*, если оно сохраняет векторные операции, т. е.

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A x + \mu A y \quad \text{для всех } \lambda, \mu \in \Phi,\ x, y \in V_1.$$

Линейные отображения называются также *гомоморфизмами* (векторных) пространств или *линейными операторами*. Гомоморфизмы $A\colon V \to V$ называются *эндоморфизмами* пространства $V$.

Множество $L(E, F)$ всех гомоморфизмов $F \to E$ само является векторным пространством над полем $\Phi$ — относительно стандартных операций

$$(\lambda A + \mu B)x = \lambda A x + \mu B x \quad \text{для всех } \lambda, \mu \in \Phi, \quad A, B \in L(E, F).$$

Элементы $A \in L(E, F)$ допускают умножение (композицию) на элементы $B \in L(F, H)$, где $E$, $F$, $H$ — векторные пространства над полем $\Phi$:

$$(AB)x = A(Bx) \quad \text{для всех} \quad x \in H,$$

так что $AB \in L(E, H)$. В частности, $L(E) = L(E, E)$ — ассоциативная алгебра над полем $\Phi$.

Вместо символа $L(E, F)$ иногда используется символ $\operatorname{Hom}(E, F)$. Соответственно вместо $L(E)$ используется символ $\operatorname{End} E$.

Частным случаем линейного оператора является *линейная форма* (или *линейный функционал*) $f\colon E \to \Phi$, где $\Phi$ — основное поле (т. е. векторное пространство над полем $\Phi$ размерности 1). Пространство $E^* = L(\Phi, E)$ называется *алгебраически сопряженным* пространству $E$.

Каждый линейный оператор $A \in L(E, E)$ однозначно определяется своими значениями на фиксированном базисе $f_j$ $(j \in J)$ пространства $F$. При этом

$$Af_j = \sum_i a_{ij} e_i \quad \text{(конечная сумма)},$$

где $e_i$ $(i \in I)$ — фиксированный базис пространства $E$. Следовательно, $A$ однозначно определяется матрицей своих коэффициентов $a_{ij}$ $(i \in I,\ j \in J)$. При этом сложение и умножение операторов сводятся к известным операциям сложения и умножения соответствующих матриц.

Декартово произведение $\prod_i L(E_i, F_i)$ естественно вкладывается (путем покоординатного действия) в $L(E, F)$, где $E = \prod_i E_i$, $F = \prod_i F_i$. Иначе говоря, полагаем

$$(A_i)_{i \in I}(x_i)_{i \in I} = (A_i x_i)_{i \in I}, \quad \text{где } A_i \in L(E_i, F_i).$$

Полученный линейный оператор $A \in L(E, F)$ является также линейным операторам класса $L(E_0, F_0)$, где $E_0(F_0)$ — прямая сумма пространств $E_i(F_i)$ $(i \in I)$. Условимся в этом случае использовать обозначение

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i, \quad \text{где} \quad A_i \in L(E_i, F_i)$$

(хотя набор $(A_i)_{i \in I}$ — не обязательно финитный). В то же время с каждым финитным набором $(A_i)_{i \in I}$ связан единственный линейный оператор

$$A = \bigotimes_{i \in I} A_i, \quad \text{где} \quad A_i \in L(E_i, F_i),$$

класса $L(\tilde{E}, \tilde{F})$, где $\tilde{E}(\tilde{F})$ — тензорное произведение пространств $E_i(F_i)$. Этот оператор определяется условием

$$A \bigotimes_{i \in I} x_i = \bigotimes_{i \in I} A_i x_i \quad \text{для всех} \quad x_i \in F_i.$$

Замечание. Матричные элементы оператора $A = A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ относительно базисов, указанных в конце п. 2.2, суть всевозможные произведения матричных элементов операторов $A_1, \ldots, A_n$.

**2.4. Полилинейные отображения.** Отображение $A\colon \Pi \to E$, где $\Pi = V_1 \times \ldots \times V_n$ — декартово произведение векторных пространств $V_1, \ldots, V_n$, $E$ — векторное пространство (над одним и тем же полем $\Phi$) называется *$n$-линейным* (*полилинейным*), если оно линейно по каждому аргументу $x_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Множество $L(E, \Pi)$ всех таких отображений само является векторным пространством над полем $\Phi$ (относительно стандартных операций). Далее, положим $W = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ (см. п. 2.2) и условимся считать, что $\Pi \subset W$ (отождествляя набор $(x_i)_{i \in I}$ с произведением $\left(\bigotimes_i x_i\right)$. Существенно, что каждое отображение $A \in L(E, \Pi)$ продолжается, причем единственным образом, до линейного оператора $A \in L(E, W)$. Более того, указанное продолжение определяет изоморфизм векторных пространств $L(E, \Pi)$, $L(E, W)$.

Частным случаем $n$-линейных отображений являются *$n$-линейные формы* (*функционалы*) над $\Pi$. Вместо терминов «2-линейность», «3-линейность» обычно используются термины «билинейность», «трилинейность» и т. д.

Условие линейности над полем C иногда бывает удобно заменять условием *антилинейности*:

$$A(\lambda x+\mu y)=\bar{\lambda}Ax+\bar{\mu}Ay \quad \text{для всех} \quad \lambda, \mu\in\Phi, \quad x, y\in V,$$

где $\lambda\mapsto\bar{\lambda}$ — комплексное сопряжение в поле $\Phi$. Форма $f(x, y)$ называется *полуторалинейной*, если она линейна по $x\in V_1$ и антилинейна по $y\in V_2$.

Пример. Полуторалинейная форма $f$ на $V\times V$ называется *эрмитовой*, если она удовлетворяет условию симметричности:

$$f(x, y)=\overline{f(y, x)} \text{ для всех } x, y\in V.$$

**2.5. Двойственные векторные пространства.** Говорят, что векторные пространства $E$, $F$ *двойственны* друг другу относительно билинейной (полуторалинейной) формы $f(x, y)=\langle x, y\rangle$, если эта форма невырожденна на $E\times F$, т. е.

(1) $\forall x\neq 0\ \exists y$: $\langle x, y\rangle\neq 0$,

(2) $\forall y\neq 0\ \exists x$: $\langle x, y\rangle\neq 0$.

Условия (1) и (2) равносильны инъективности следующих отображений:

$$x\mapsto x(y)=\langle x, y\rangle, \quad y\mapsto y(x)=\langle x, y\rangle.$$

Иначе говоря, пространство $E$ (соответственно $F$) можно рассматривать как подпространство пространства $F^*$ (соответственно $E^*$), алгебраически сопряженного к $F$ (соответственно к $E$).

Пример. Пара $(E, E^*)$ всегда находится в двойственности относительно канонической билинейной формы $\langle x, y\rangle=y(x)$ (значение функционала $y\in E^*$ на элементе $x\in E$). Соответственно $E\subset E^{**}$.

Фиксация билинейной (полуторалинейной) невырожденной формы $f$ на $E\times E$ позволяет выделить важные классы векторных пространств.

Примеры. 1. Пространство $E$ называется *псевдоевклидовым* (*псевдоунитарным*), если $f$ симметрична (эрмитова). 2. При этом $E$ называется *евклидовым* (*унитарным*), если $f$ положительно определенна, т. е. $f(x, x)\geqslant 0$ для всех $x\in E$, причем $f(x, x)=0$ только при $x=0$. В последнем случае (над полями $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$) форма $f$ называется *скалярным произведением*.

**2.6. Сопряженные операторы.** Пусть $E$, $F$ — двойственные векторные пространства относительно формы $f(x, y)=\langle x, y\rangle$. Два линейных оператора $A\in L(E)$, $B\in L(F)$ называются *сопряженными* друг другу (относительно $f$), если

$$\langle Ax, y\rangle=\langle x, By\rangle \text{ для всех } x\in E, \quad y\in F.$$

Условимся в этом случае использовать обозначения $A=B^*$, $B=A^*$ (иногда используются символы $A=B'$, $B=A'$). Если форма $f$ полуторалинейна, то операторы $A$, $A^*$ называются также *эрмитово сопряженными*.

Пример. Если $F = E^*$, то для каждого оператора $A \in L(E)$ существует сопряженный оператор $A^* \subset L(E^*)$.

Аналогично определяется свойство сопряженности операторов $A \in L(E_1, E_2)$, $B \in L(F_1, F_2)$, где $(E_1, F_2)$, $(E_2, F_1)$ — двойственные пары векторных пространств.

В частности, пусть $E$ — евклидово пространство. Оператор $A \in L(E)$ называется соответственно *симметричным*, *кососимметричным*, *ортогональным*, если $A^* = A$, $A^* = -A$, $A^* = A^{-1}$. Аналогично, пусть $E$ — унитарное пространство. Оператор $A \in L(E)$ называется соответственно *эрмитовым*, *косоэрмитовым*, *унитарным*, если $A^* = A$, $A^* = -A$, $A^* = A^{-1}$.

Замечание. Если $E$ евклидово (унитарно), то матрицы операторов $A$, $A^*$ относительно фиксированного базиса пространства $E$ получаются друг из друга с помощью операции транспонирования (эрмитова сопряжения).

**2.7. Проекционные операторы.** Оператор $P \in L(E)$ называется *проекционным* (или *проектором*), если $P^2 = P$. Семейство проекторов $P_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ называется *ортогональным*, если $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$. В этом случае оператор $P = P_1 + \ldots + P_n$ — также проектор. Если $P = 1$ (единичный оператор в $E$), то семейство $P_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ называется *разложением единицы* в $E$.

С каждым разложением единицы $P_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ связано разложение $E$ в прямую сумму подпространств $E_i = P_iE$ $(i = 1, \ldots, n)$. Обратно, каждое разложение пространства $E$ в прямую сумму конечного числа подпространств порождается некоторым разложением единицы в $E$.

Термин «разложение единицы» можно обобщить также на бесконечные семейства $P_i$ $(i \in I)$ с условием финитности: для каждого $x \in E$ лишь конечное число проекций $x_i = P_ix$ $(i \in I)$ отлично от 0. При этом будем писать

$$1 = \bigoplus_{i \in I} P_i.$$

Пример. Пусть $E$ — евклидово (унитарное) пространство. Проектор $P \in L(E)$ называется *ортопроектором*, если $P^* = P$. В этом случае ортогональность семейства $P_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ равносильна взаимной ортогональности подпространств $E_i = P_iE$ $(i = 1, \ldots, n)$. Соответствующая сумма

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

называется *прямой ортогональной суммой* подпространств $E_i$.

**2.8. Инвариантность и неприводимость.** Подпространство $V_0 \subset V$ называется *инвариантным* относительно оператора $A \in L(V)$, если $AV_0 \subset V_0$, т. е. $Ax \in V_0$ для каждого $x \in V_0$. В этом случае сужение $A_0 = A|_{V_0}$ — оператор класса $L(V_0)$ и в факторпространстве $V_1 = V/V_0$ индуцируется оператор $A_1 \in L(V_1)$: $x + V_0 \mapsto \mapsto Ax + V_0$.

Подпространства $(0)$, $V$, инвариантные относительно любого оператора $A \in L(V)$, называются *тривиальными* (или *несобственными*). Остальные подпространства $V_0 \subset V$ называются *нетривиальными* (или *собственными*).

Подпространство $V_0 \subset V$ называется *инвариантным* относительно семейства $\mathscr{M} \subset L(V)$, если оно инвариантно относительно любого оператора $A \in \mathscr{M}$. Семейство $\mathscr{M}$ называется *приводимым*, если существует хотя бы одно нетривиальное подпространство $V_0 \subset V$, инвариантное относительно $\mathscr{M}$. В противном случае семейство $\mathscr{M}$ называется *неприводимым*.

Подпространство $V_0 \subset V$ называется *приводимым* (*неприводимым*) относительно $\mathscr{M}$, если $V_0$ инвариантно относительно $\mathscr{M}$ и сужение $\mathscr{M}_0 = \mathscr{M}|_{V_0}$ приводимо (неприводимо) в пространстве $V_0$.

Семейство $\mathscr{M}$ называется *вполне приводимым*, если каждое его инвариантное подпространство $V_1 \subset V$ имеет инвариантное дополнение $V_2 \subset V$, т. е. $V = V_1 \oplus V_2$ — прямая сумма двух инвариантных подпространств. Применяя (трансфинитную) индукцию, находим, что в этом случае

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

есть прямая сумма неприводимых подпространств $V_i$ $(i \in I)$. Соответственно, каждый оператор $A \in \mathscr{M}$ — прямая сумма операторов $A_i = A|_{V_i}$ $(i \in I)$. Условимся в этом случае использовать обозначение

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{M}_i, \quad \text{где} \quad \mathscr{M}_i = \mathscr{M}|_{V_i}, \quad i \in I.$$

Замечания. 1. Вместо термина «полная неприводимость» используются также термины «полупростота» и «редуктивность». Оператор $A \in L(E)$ называется *полупростым* (*редуктивным*), если семейство $\mathscr{M} = \{A\}$ вполне приводимо. 2. Если $E$, $F$ — двойственные векторные пространства и если $E_0 \subset E$ — инвариантное подпространство относительно семейства $\mathscr{M} \subset L(E)$, то его ортогональное дополнение

$$E_0^{\perp} = \{y \in F\colon \langle x, y\rangle = 0 \ \text{ для всех } \ x \in E_0\}$$

инвариантно относительно сопряженного семейства

$$\mathscr{M}^* = \{A^*\colon A \in \mathscr{M}\}.$$

Примеры. 1. Вектор $0 \neq e_0 \in V$ называется *весовым* (или *собственным*) относительно $\mathscr{M}$, с весом $\lambda \in \Phi_{\mathscr{M}}$, если $Ae_0 = \lambda(A)e_0$ для всех $A \in \mathscr{M}$. В этом случае $\Phi e_0$ — неприводимое подпространство относительно $\mathscr{M}$. 2. Семейство операторов, определяемых матрицами

$$z(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \Phi,$$

приводимо, но не вполне приводимо в пространстве $\Phi^2$. 3. Семейство $\mathscr{M} \subset L(E)$ в евклидовом (унитарном) пространстве $E$ называется *симметричным*, если $\mathscr{M}^* = \mathscr{M}$. Если $\dim E < \infty$, то каждое симметричное семейство $\mathscr{M} \subset L(E)$ вполне приводимо. 4. Семейство операторов, определяемых матрицами

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

неприводимо в $\mathbf{R}^2$ и вполне приводимо в $\mathbf{C}^2$, причем, $\mathbf{C}^2 \simeq V_1 \oplus \oplus V_2$, где $V_1$, $V_2$ инвариантны и одномерны.

**2.9. Сплетающие операторы.** Пусть

$$\mathscr{M} = \{A_i\}_{i \in I} \subset L(E), \quad \mathscr{N} = \{B_i\}_{i \in I} \subset L(F)$$

— два семейства линейных операторов. Оператор $C \in L(E, F)$ называется *сплетающим* для пары $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$, если

$$A_i C = C B_i \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Множество $I(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ всех таких операторов — подпространство $L(E, F)$. Число $c(\mathscr{M}, \mathscr{N}) = \dim I(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ называется *числом сплетения* для пары $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$.

Множество $I(\mathscr{M}) = I(\mathscr{M}, \mathscr{M})$ — подалгебра в $L(E)$, состоящая из всех операторов $C \in L(E)$ таких, что

$$A_i C = C A_i \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Алгебра $I(\mathscr{M})$ обычно обозначается $\mathscr{M}'$ и называется *коммутантом* множества $\mathscr{M}$.

Семейства $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ называются *эквивалентными*, если существует биекция $C \in I(\mathscr{M}, \mathscr{N})$. В этом случае

$$A_i = C B_i C^{-1} \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Семейства $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ называются *дизъюнктными*, если $I(\mathscr{M}, \mathscr{N}) = (0)$, т. е. каждый сплетающий оператор $C = 0$.

*Если $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ неприводимы, то каждый оператор $C \in I(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ либо биективен, либо равен* 0 (лемма Шура).

Следовательно, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ либо эквивалентны, либо дизъюнктны. Кроме того, $\mathscr{M}'$ — тело над полем $\Phi$.

Предположим теперь, что $\dim E$ конечно или счетно, $\mathscr{M}$ неприводимо. Тогда $\mathscr{M}'$ — *алгебраическое расширение* поля $\Phi$. Если, кроме того, $\Phi$ алгебраически замкнуто, то $\mathscr{M}' \simeq \Phi$.

Последнее означает, что каждый оператор $A \in \mathscr{M}'$ кратен единице:

$$A = \lambda \cdot 1 \quad \text{при некотором } \lambda \in \Phi.$$

Литература: [1], [5], [11], [15], [16].

## § 3. Основы теории представлений

**3.1. Представления, модули.** *Представлением* группы $G$ в векторном пространстве $V$ называется всякий гомоморфизм группы $G$ в группу $\operatorname{Aut} V$. Можно дать еще одно эквивалентное определение: *представлением* группы $G$ в векторном пространстве $V$ называется всякое отображение $\varphi$: $G \to \operatorname{End} V$ такое, что

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) \quad \text{для всех} \quad g, h \in G,$$
$$\varphi(1) = 1,$$

где в правой части $1 = 1_V$ — единичный оператор пространства $V$. Действительно, в этом случае $\varphi(g)\varphi(g^{-1}) = 1$ для всех $g \in G$, т. е. $\varphi(G) \subset \operatorname{Aut} V$. Пространство $V$ называется *пространством представления* $\varphi$. Иногда вместо символа $\varphi(g)x$ используется символ $gx$ ($g \in G$, $x \in V$). При этом $V$ называется *$G$-модулем.*

Размерность пространства $V$ обычно называют *размерностью* представления $\varphi$ и обозначают $\dim \varphi$. Всякое одномерное представление называется *характером* группы $G$. Характер $\varepsilon(g) = 1$ называется *единичным* или *тривиальным* представлением группы $G$.

Вектор $x \in V$ называется *инвариантом* группы $G$, если $\varphi(g)x = x$ для всех $g \in G$. Вектор $x \in V$ называется *весовым* (или *относительным инвариантом* группы $G$), если $\varphi(g)x = \lambda(g)x$ ($g \in G$), где $\lambda$ — характер группы $G$.

Если $H$ — подгруппа в $G$, то для всякого представления $\varphi$ группы $G$ определено представление $\varphi \downarrow H$ подгруппы $H$, действующее в том же пространстве $V$ и получаемое сужением операторной функции $\varphi(g)$ ($g \in G$) на элементы $h \in H$. Переход от $\varphi$ к $\varphi \downarrow H$ называется *редуцированием* (с группы $G$ на подгруппу $H$).

Пример. Пусть $X$ — правое $G$-пространство (см. п. 1.2). Тогда $\Phi^X$ является $G$-модулем относительно представления

$$(\varphi(g)f)(x) = f(xg), \quad x \in X, \quad g \in G.$$

Аналогично, пусть $X$ — левое $G$-пространство. Тогда $\Phi^X$ является $G$-модулем относительно представления

$$(\varphi(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad x \in X, \quad g \in G.$$

**3.2. Приводимость и неприводимость.** Представление $\varphi$ называется *неприводимым*, *приводимым* или *вполне приводимым*, если множество $\mathcal{M}_\varphi = \{\varphi(g)\colon g \in G\}$ соответственно неприводимо, приводимо или вполне приводимо (см. п. 2.8). В этих случаях модуль $V$ также называется *неприводимым*, *приводимым* или *вполне приводимым*.

Подпространство $V_0 \subset V$ называется *инвариантным* относительно представления $\varphi$, если оно инвариантно относительно $\mathcal{M}_\varphi$ (т. е. инвариантно относительно всех операторов $\varphi(g)$ ($g \in G$)). В этом случае семейство $\varphi_0(g) = \varphi(g)|_{V_0}$ — представление группы $G$ в подпространстве $V_0$ и семейство $\varphi_1(g)(x + V_0) = \varphi(g)x + V_0$ — представление группы $G$ в факторпространстве $V_1 = V/V_0$. Соответственно $V_0$, $V_1$ называются *подмодулем* и *фактормодулем* $G$-модуля $V$. Представления $\varphi_0$, $\varphi_1$ называются *подпредставлением* и *факторпредставлением* представления $\varphi$.

В частности, для каждого $x \in V$ линейная оболочка $V_x$ орбиты $\varphi(G)x$ — подмодуль $G$-модуля $V$. При этом $V_x$ называется *циклическим подмодулем* модуля $V$, с *циклическим вектором* $x$. Модуль $V$ называется *циклическим*, если $V = V_x$ при некотором $x$. Модуль $V$ неприводим тогда и только тогда, когда $V = V_x$ для каждого $x \neq 0$.

Представление $\varphi$ называется *точным*, если $\ker \varphi = \{1\}$. Традиционно принято говорить, что группа $G$ имеет *точное линейное представление*, если она имеет точное представление конечной размерности над полем $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$). В этом случае также говорят, что группа $G$ является *линейной*.

В частности, каждая подгруппа $GL(n, \mathbf{R})$ ($GL(n, \mathbf{C})$) называется *линейной* (или *матричной*) *группой*.

**3.3. Операции над представлениями.** Пусть $\varphi$, $\psi$ — представления группы $G$ в векторных пространствах $E$, $F$ над полем $\Phi$.

Оператор $C \in L(E, F)$ называется *сплетающим* для пары $\varphi$, $\psi$, если он сплетающий для пары $\mathscr{M}_\varphi$, $\mathscr{M}_\psi$ (см. п. 2.9), т. е. если

$$\varphi(g)C = C\varphi(g) \quad \text{для всех } g \in G.$$

Иногда оператор $C$ называется *гомоморфизмом* $G$-модуля $F$ в $G$-модуль $E$. Соответственно вместо символа $I(\mathscr{M}_\varphi, \mathscr{M}_\psi)$ используются символы $I(\varphi, \psi)$, $\operatorname{Hom}(\varphi, \psi)$, $\operatorname{Hom}_G(E, F)$.

Представления $\varphi$, $\psi$ называются *эквивалентными*, если множества $\mathscr{M}_\varphi$, $\mathscr{M}_\psi$ эквивалентны, т. е. если существует биекция $C \in \operatorname{Hom}(\varphi, \psi)$. Модули $E$, $F$ в этом случае также называются *эквивалентными* или *изоморфными*. Обозначения: $\varphi \sim \psi$, $E \simeq F$. Представления $\varphi$, $\psi$ называются *дизъюнктными*, если $\operatorname{Hom}(\varphi, \psi) = (0)$. Каждые два неприводимые конечномерные представления группы $G$ либо эквивалентны, либо дизъюнктны (см. п. 2.9).

Прямая сумма $\tau = \varphi \oplus \psi$ и тензорное произведение $\pi = \varphi \otimes \psi$ представлений $\varphi$, $\psi$ определяются по правилу

$$\tau(g) = \varphi(g) \oplus \psi(g), \quad \pi(g) = \varphi(g) \otimes \psi(g), \qquad g \in G,$$

соответственно в пространствах $E \oplus F$, $E \otimes F$, где $E$, $F$ — пространство представлений $\varphi$, $\psi$. Аналогично определяются суммы и произведения любого числа представлений. Представление $\varphi$ называется (*прямой*) *суммой* подпредставлений $\varphi_i$ ($i \in I$), если

$$V = \bigoplus_i V_i, \quad \varphi_i = \varphi|_{V_i} \quad (V_i \text{ — подмодуль } V).$$

При этом мы будем использовать обозначение

$$\varphi = \bigoplus_i \varphi_i.$$

Представление $\varphi$ называется *кратным* представлению $\psi$, если $\varphi_i \sim \psi$ для всех $i \in I$. В этом случае будем писать $\varphi = n\psi$, где $n = \operatorname{card} I$. Кардинальное число $n$ называется *кратностью* представления $\psi$ в представлении $\varphi$.

Представление $\varphi$ вполне приводимо тогда и только тогда, когда оно представимо в виде суммы неприводимых представлений. Такое разложение, вообще говоря, неоднозначно. Однако разложение

$$\varphi = \bigoplus_i n_i \varphi_i,$$

где $\varphi_i \not\sim \varphi_j$ при $i \neq j$ и все представления $\varphi_i$ неприводимы, однозначно (с точностью до порядка слагаемых). При этом

$$n_i = c(\varphi_i, \varphi) = c(\varphi, \varphi_i)$$

(число сплетения для пар $\varphi_i$, $\varphi$ и $\varphi$, $\varphi_i$) называется *кратностью* представления $\varphi_i$ в представлении $\varphi$ и обычно обозначается символом $[\varphi : \varphi_i]$.

Представления $\varphi$, $\psi$ называются *двойственными* относительно билинейной (или полуторалинейной) формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $E \times F$, если $E$, $F$ двойственны относительно этой формы и

$$\langle \varphi(g)x, \psi(g)y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{для всех} \quad g \in G, \; x \in E, \; y \in F.$$

В частности, каждое представление группы $G$ двойственно представлению

$$\hat{\varphi}(g) = \varphi(g)^{*-1}$$

в сопряженном пространстве $E^*$. Представление $\hat{\varphi}$ называется *контрагредиентным* (или *сопряженным*) представлению $\varphi$.

Представление $\varphi$ в унитарном пространстве $E$ называется *унитарным*, если все операторы $\varphi(g)$ $(g \in G)$ унитарны, т. е. $\varphi(g)^* = \varphi(g)^{-1}$ для всех $g \in G$. Аналогично определяется псевдоунитарность представления $\varphi$.

*Если $\varphi$ — неприводимое представление в конечномерном пространстве $V$, то скалярное произведение в $V$, относительно которого $\varphi$ унитарно, определяется (если оно существует) однозначно с точностью до числового множителя* (следствие леммы Шура).

**3.4. Матричные элементы.** Пусть $\varphi$ — представление группы $G$ в векторном пространстве $V$. Для каждой пары элементов $x \in V$, $y \in V^*$ числовая функция

$$\varphi_{xy}(g) = \langle \varphi(g)x, y \rangle, \qquad g \in G,$$

называется *матричным элементом* представления $\varphi$. В частности, пусть $V$ конечномерно, и пусть $e_i$, $\overset{*}{e_j}$ — дуальные базисы векторных пространств $V$, $V^*$, т. е. $\langle e_i, \overset{*}{e_j} \rangle = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Тогда

$$\varphi_{ij}(g) = \langle \varphi(g) e_j, \overset{*}{e_i} \rangle, \qquad g \in G,$$

суть матричные элементы матрицы $\varphi(g)$ относительно базиса $e_i \in V$. Иначе говоря,

$$\varphi(g) e_j = \sum_i \varphi_{ij}(g) e_i, \qquad g \in G.$$

Числовые функции $\varphi_{ij}(g)$ удовлетворяют соотношениям

$$\varphi_{ij}(gh) = \sum_k \varphi_{ik}(g)\,\varphi_{kj}(h),$$
$$\varphi_{ij}(1) = \delta_{ij}.$$

Если векторы $e_j$ $(j = 1, \ldots, n_0)$, образуют базис инвариантного подпространства $V_0$, то матрица $\varphi(g)$ имеет вид

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} \varphi_0(g) & \tilde{\varphi}(g) \\ 0 & \varphi_1(g) \end{pmatrix},$$

где $\varphi_0(g)$ — матрица подпредставления $\varphi_0 = \varphi|_{V_0}$, $\varphi_1(g)$ — матрица факторпредставления $\varphi_1$ в пространстве $V_1 = V/V_0$. Если $V$ вполне приводимо, то дополнительные векторы базиса $e_j$ $(j = n_0 + 1, \ldots, n)$ можно выбрать таким образом, чтобы $\tilde{\varphi}(g) = 0$. В этом случае $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$.

*Если $\varphi$ неприводимо, то числовые функции $\varphi_{ij}$ линейно независимы* (следствие теоремы Бернсайда; см. п. 4.3).

Для каждого конечномерного представления группы $G$ числовая функция

$$t_\varphi(g) = \operatorname{tr} \varphi(g), \qquad g \in G,$$

(след матрицы $\varphi(g)$) называется *характером* (или *следом*) представления $\varphi$.

*Характеры попарно неэквивалентных представлений линейно независимы. Два неприводимых представления, имеющие одинаковый характер, эквивалентны.*

Таким образом, каждое неприводимое конечномерное представление группы $G$ определяется своим характером однозначно с точностью до эквивалентности.

**3.5. Регулярное представление.** Напомним, что $\Phi^G$ — векторное пространство всех числовых ($\Phi$-значных) функций на $G$. Операторы

$$(L(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad (R(g)f)(x) = f(xg)$$

(см. п. 3.1) порождают представления $L$ и $R$ в пространстве $\Phi^G$, называемые соответственно *левым* и *правым регулярным представлением* в $\Phi^G$. Сужение каждого из этих представлений на инвариантное подпространство $E \subset \Phi^G$ называется (*левым* или *правым*) *регулярным представлением* в пространстве $E$.

Представления $L$ и $R$ взаимно эквивалентны. Действительно, $CR(g) = L(g)C$, где $(Cf)(x) = f(x^{-1})$.

Далее, пусть $\varphi$ — представление группы $G$ в пространстве $V$. Для каждого $y \in V^*$ отображение

$$C_y\colon x \mapsto \varphi_{xy}(g) = \langle \varphi(g)x, y\rangle$$

сплетает представления $\varphi$ и $R$. Аналогично, для каждого $x \in V$ отображение

$$C_x\colon x \mapsto \varphi_{xy}(g) = \langle \varphi(g)x, y\rangle.$$

сплетает представления $\hat{\varphi}$ и $L$ (напомним, что $\hat{\varphi}$ — представление, контрагредиентное $\varphi$).

Если $\varphi$ неприводимо, то оператор $C_y$ инъективен при $y \neq 0$. Следовательно, *всякое неприводимое представление группы $G$ эквивалентно подпредставлению (правого) регулярного представления.*

Замечание. Если $\varphi$ конечномерно, то вложение $\varphi$ в представление $R$ можно осуществить с помощью матрицы $\varphi_{ij}(g)$ (см. п. 3.4), сопоставляя базисному элементу $e_j \in V$ функцию $\varphi_{ij}$ при фиксированном $i$ (т. е. каждому $i$ отвечает $i$-й способ вложения). При этом инъективность указанного отображения вытекает из линейной независимости матричных элементов.

**3.6. Квазирегулярное представление.** Конструкция регулярного представления является частным случаем стандартных представлений в пространствах $\Phi^X$ (см. п. 3.1), где $X$ — левое или правое $G$-пространство.

В частности, пусть $X$ — однородное (левое или правое) $G$-пространство. Операторы

$$(L(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad (R(g)f)(x) = f(xg)$$

образуют представление группы $G$ (соответственно в левом или правом варианте), называемое *квазирегулярным.*

*Каждое (левое или правое) квазирегулярное представление группы $G$ эквивалентно подпредставлению регулярного представления.*

Действительно, пусть $X$ — правое $G$-пространство. Фиксируем точку $\varepsilon \in X$ и положим

$$\tilde{f}(g) = f(x) \text{ при } \varepsilon g = x, \quad g \in G, \ x \in X.$$

Отображение $f \mapsto \tilde{f}$ является изоморфизмом $G$-модуля $\Phi^X$ на $G$-модуль

$$\Phi_H^G = \{f \in \Phi^G;\ f(hg) = f(g),\ h \in H\}$$

(подмодуль $\Phi^G$), где $H$ — стационарная подгруппа точки $\varepsilon$ (см. п. 1.3). Иначе говоря, отображение $f \mapsto \tilde{f}$ сплетает представление $R$ с правым регулярным представлением в пространстве $\Phi^G$.

Конструкция квазирегулярного представления, в свою очередь, допускает естественное обобщение на вектор-функции (определенные на $X$ или на $G$). См. п. 3.7.

**3.7. Индуцированные представления.** Пусть $H$ — подгруппа в $G$, $\tau$ — ее представление в векторном пространстве $V$. Введем обозначение $V_\tau(G)$ для векторного пространства всех $V$-значных функций на $G$, удовлетворяющих соотношению

$$f(hg) = \tau(h)f(g), \quad h \in H, \quad g \in G.$$

Операторы

$$(R_\tau(g)f)(x) = f(xg), \quad x, g \in G,$$

образуют представление группы $G$ в пространстве $V_\tau(G)$. Отображение $\tau \mapsto R_\tau$ называется операцией *индуцирования* с подгруппы $H$ на группу $G$. При этом представление $R_\tau$ (в том или ином инвариантном подпространстве $V \subset E_\tau(G)$) называется *индуцированным* и обозначается символом

$$R_\tau = \tau \uparrow G \quad \text{или} \quad R_\tau = \operatorname{Ind}_H^G \tau.$$

Если $\tau$ — тривиальное представление ($\tau(g) \equiv 1$), то $R_\tau$ эквивалентно квазирегулярному представлению группы $G$ (см. п. 3.6). В общем случае функции $f \in V_\tau(G)$ не постоянны на классах смежности по $G$. Тем не менее, существует естественная реализация представления $R_\tau$ в пространстве вектор-функций на однородном пространстве $X = G/H$.

Для описания этой реализации удобно отождествить пространство $X$ с семейством представителей в классах смежности группы $G$ (по одному из каждого класса смежности). В этом случае $G = HX$ и каждый элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде

$$g = hx, \quad h = h(g) \in H, \quad x = x(g) \in X,$$

причем можно считать, не ограничивая общности, что $h(1) = x(1) = 1$. Соответственно действие группы $G$ в пространстве $X$ определяется символом $x \circ g = x(xg)$. Далее, заметим, что оператор сужения

$$C\colon f \mapsto f_0 = f|_X, \quad f \in V_\tau(G),$$

определяет изоморфизм пространства $V_\tau(G)$ на пространство $V(X)$ всех $V$-значных функций на $X$. Действительно, обратное преобразование $f_0 \mapsto f$ определяется равенством

$$f(g) = f(hx) = f_0(x), \quad f_0 \in V(X).$$

Легко проверить, что оператор $C$ сплетает представление $R_\tau$ с представлением

$$(S_\tau(g)f)(x) = \tau(x, g)f(x \circ g), \quad f \in V(X),$$

где $\tau(x, g) = \tau(h(xg))$ ($x \in X$, $g \in G$). При этом операторная функция $\tau(x, g)$ удовлетворяет соотношениям

$$\tau(x, g_1 g_2) = \tau(x, g_1)\tau(x \circ g_1, g_2), \quad g_1, g_2 \in G,$$
$$\tau(x, 1) = 1_V \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Обратно, если $\tau(x, g) \in \operatorname{End} V$ — операторная функция на $X \times G$, удовлетворяющая этим соотношениям, то $\tau(1, h) = \tau(h)$ — представление группы $H$ и $S_\tau$ эквивалентно $R_\tau$.

З а м е ч а н и е. Пространство $V_\tau(G)$ можно рассматривать как векторное расслоение над $X$ со слоем $V$ и с проекцией $p_x$: $f \to f(x)$.

Операция индуцирования $\tau \mapsto R_\tau$ удовлетворяет следующему свойству транзитивности:

$$\operatorname{Ind}_H^G \operatorname{Ind}_K^H \tau \sim \operatorname{Ind}_K^G \tau$$

($\sim$ означает эквивалентность) для произвольной цепочки вложенных подгрупп $K \subset H \subset G$.

Легко проверить также, что каждому сплетающему оператору $C \in \mathrm{Hom}(\tau_1, \tau_2)$ отвечает сплетающий оператор $\tilde{C} \in \mathrm{Hom}(R_{\tau_1}, R_{\tau_2})$. Иначе говоря, операция $\tau \mapsto R_\tau$ обладает свойствами ковариантного функтора (см. п. 4.8).

Аналогично определяется операция индуцирования, связанная с левыми классами смежности по подгруппе $G$.

Операция индуцирования используется часто для построения явных моделей неприводимых представлений группы $G$ (см. § 2 гл. 5).

**3.8. Представления конечных групп.** Исторически развитие теории представлений групп началось с рассмотрения конечномерных представлений конечных групп в работах Р. Фробениуса, И. Шура, В. Бернсайда. Результаты этих работ легко обобщаются также на бесконечномерные представления конечных групп.

1. *Каждая конечная группа линейна и изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы $S_n$ при некотором $n$* (см. п. 1.1). *Всякое неприводимое представление конечной группы $G$ конечномерно, множество $\hat{G}$ всех классов эквивалентности неприводимых представлений группы $G$ конечно* (следует из п. 3.5). *Всякое представление конечной группы $G$ в пространстве $E$ над полем* **C** *унитарно* (*относительно некоторого скалярного произведения в пространстве $E$*) *и вполне приводимо* (принцип полной приводимости для конечных групп).

2. *Каждое неприводимое представление конечной группы $G$ содержится в регулярном с кратностью, равной его размерности. Отсюда*

$$|G| = \sum_\lambda n_\lambda^2,$$

*где $n_\lambda = \dim \tau_\lambda$, $\tau_\lambda$ — представление класса $\lambda \in \hat{G}$* (1-я теорема Бернсайда). *Число элементов $\hat{G}$ равняется числу классов сопряженных элементов группы $G$* (2-я теорема Бернсайда).

3. *Для каждого $G$-модуля $V$ имеет место разложение в конечную прямую сумму*

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda, \qquad \lambda \in \hat{G},$$

*где $V_\lambda$ — максимальный подмодуль, представление в котором кратно $\tau_\lambda$. Оператор проектирования $P_\lambda$: $V \to V_\lambda$* (*относительно этой суммы*) *имеет вид*

$$P_\lambda = |G|^{-1} \sum_g \overline{\chi_\lambda(g)}\, \varphi(g), \qquad g \in G,$$

*где $\varphi$ — представление группы $G$ в пространстве $V$, $\chi_\lambda$ — характер* *представления* $\tau_\lambda$ (см. п. 3.4). *В частности,*

$$P_0 = |G|^{-1} \sum_g \varphi(g)$$

*(оператор усреднения) — проектор на линейную оболочку* $V_0$ *всех инвариантов модуля* $V$.

Замечание. Если $V$ — унитарный $G$-модуль (т. е. $\varphi$ унитарно), то указанное разложение ортогонально.

4. Для конечных групп имеет место двойственность (правило Фробениуса) между операциями редуцирования (см. п. 3.1) и индуцирования (см. п. 3.6). Именно, *представление* $\lambda \in \widehat{G}$ *содержится с той же кратностью в* $\tau \uparrow G$, *с какой представление* $\tau \in \widehat{H}$ *содержится в* $\lambda \downarrow H$:

$$[\tau \uparrow G\colon \lambda] = [\lambda \downarrow H\colon \tau].$$

**3.9. Проективные представления.** Пусть $G$ — группа, $V$ — векторное пространство над полем $\Phi$. *Проективным представлением* группы $G$ в пространстве $V$ называется всякий гомоморфизм группы $G$ в группу

$$\operatorname{Aut} \mathrm{P} V = \operatorname{Aut} V/\Phi_*,$$

где $\Phi_* = \{\lambda \cdot 1\colon 0 \neq \lambda \in \Phi\}$ — центр группы $\operatorname{Aut} V$. Группа $\operatorname{Aut} \mathrm{P} V$ называется группой *проективных автоморфизмов* пространства $V$ (или группой автоморфизмов соответствующего проективного пространства $V$).

Выбирая в каждом классе смежности группы $\operatorname{Aut} \mathrm{P} V$ по одному представителю, можно рассматривать проективное представление $\pi$ группы $G$ в пространстве $V$ как операторную функцию $\pi(g) \in \operatorname{Aut} V$ $(g \in G)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\pi(x)\pi(y) = \lambda(x, y)\pi(xy) \text{ для всех } x, y \in G,$$

с добавочным условием $\pi(1) = 1$. Числовая функция $\lambda(x, y)$ $(x, y \in G)$ называется *мультипликатором* представления $\pi$. Представление $\pi$ называется *линейным* (или *линеализируемым*), если при некотором выборе представителей $\pi(x)$ достигается равенство $\lambda(x, y) = 1$ $(x, y \in G)$.

Пример. Группа $G^0$ называется *центральным расширением* группы $G$, если $G = G^0/Z$, где $Z$ — центральный делитель группы $G^0$ (т. е. нормальный делитель, содержащийся в центре группы $G^0$). Пусть $\pi^0$ — представление группы $G^0$ в пространстве $V$, скалярное на $Z$:

$$\pi^0(z) = \lambda(z) \cdot 1, \quad z \in Z,$$

где $\lambda$ — характер группы $Z$. Полагая $\pi(x) = \pi^0(x^0)$, где $x^0$ — фиксированный представитель класса $x \in G$, получаем проективное представление группы $G$ в пространстве $V$ с мультипликатором

$$\lambda(x, y) = \lambda(z(x, y)),$$

где $z = z(x, y)$ определяется из равенства

$$(xy)^0 = x^0 y^0 z.$$

При этом говорят, что группа $G^0$ *линеаризует* представление $\pi$ (т. е. $\pi$ получается указанным выше способом из линейного представления $\pi^0$ группы $G^0$).

Оказывается, что каждое проективное представление $\pi$ группы $G$ линеаризуется некоторым центральным расширением группы $G$ (зависящим от $\pi$). Расширение $G^0$ называется *универсальным*, если оно линеаризует все проективные представления группы $G$.

*Если $G$ конечна, то универсальное расширение группы $G$ существует в классе конечных групп* (теорема Шура).

Замечание. Каждый автоморфизм матричной алгебры $\mathrm{Mat}_n\,\Phi$ (см. п. 4.1) имеет вид

$$x \mapsto gxg^{-1}, \quad x \in \mathrm{Mat}_n\,\Phi, \quad g \in \mathrm{GL}(n, \Phi),$$

причем матрица $g$ определяется с точностью до скалярного множителя. Поэтому

$$\mathrm{Aut}\,\mathrm{P}\,\Phi^n \simeq \mathrm{Aut}\,\mathrm{Mat}_n\,\Phi.$$

Следовательно, каждое представление $G \to \mathrm{Aut}\,\mathrm{Mat}_n\,\Phi$ порождается некоторым проективным представлением группы $G$.

Литература: [5], [11], [15], [17], [20], [21], [24].

## § 4. Ассоциативные алгебры, кольца, модули

**4.1. Определение алгебры.** Абстрактное множество $\mathcal{A}$ называется *алгеброй* над полем $\Phi$, если $\mathcal{A}$ — векторное пространство над $\Phi$, снабженное *умножением*, т. е. билинейной операцией $(a, b) \mapsto ab$, определенной на декартовом квадрате $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, со значениями в $\mathcal{A}$.

Отображение $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — алгебры над полем $\Phi$, называется *гомоморфизмом* (алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$), если оно сохраняет алгебраические операции (т. е. векторные операции и умножение). Соответственно, алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм (биективный гомоморфизм). Изоморфизмы алгебры на себя называются ее *автоморфизмами*.

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *ассоциативной*, если умножение ассоциативно; *коммутативной*, если умножение коммутативно; *алгеброй с единицей*, если существует единица (нейтральный элемент относительно умножения).

Подмножество $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ называется *подалгеброй* алгебры $\mathcal{A}$, если оно замкнуто относительно алгебраических операций. Для каждого подмножества $S \subset \mathcal{A}$ существует наименьшая подалгебра $\mathcal{A}(S)$ алгебры $\mathcal{A}$, содержащая $S$. При этом $\mathcal{A}(S)$ — линейная оболочка всевозможных произведений элементов множества $S$. Семейство $S$ называется *системой образующих алгебры* $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S)$.

В частности, если $\mathscr{A}$ — ассоциативная алгебра с системой образующих $S$, то $\mathscr{A}$ — линейная оболочка одночленов

$$e_{i_1 \dots i_n} = e_{i_1} \dots e_{i_n}, \quad e_{i_k} \in S, \quad n = 1, 2, \dots \tag{*}$$

Алгебра $\mathscr{A}$ называется *свободной* над $S$, если все такие одночлены линейно независимы.

Возрастающее семейство подпространств $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_1 \subset \dots, \mathscr{A} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathscr{A}_n$, алгебры $\mathscr{A}$ называется *фильтрацией* алгебры $\mathscr{A}$, если $\mathscr{A}_n \mathscr{A}_m \subset \mathscr{A}_{n+m}$ для всех $n, m = 0, 1, \dots$ В частности, пусть $\mathscr{A}_n$ — линейная оболочка одночленов (*) с фиксированным $n \neq 0$, $\mathscr{A}_0 = \Phi \cdot 1$. Тогда $\mathscr{A}_n$ — фильтрация алгебры $\mathscr{A}$.

Для каждой алгебры $\mathscr{A}$ множество

$$Z(\mathscr{A}) = \{z \in \mathscr{A}: \ za = az \quad \text{для всех } a \in \mathscr{A}\}$$

называется *центром* алгебры $\mathscr{A}$. Элементы $z \in Z(\mathscr{A})$ называются *центральными элементами* алгебры $\mathscr{A}$.

Примеры. 1. Для каждого абстрактного множества $S$ существует свободная алгебра $\mathscr{A} = \mathscr{A}(S)$, где $S \subset \mathscr{A}$ (формальная линейная оболочка формальных одночленов от элементов $e_i \in S$). 2. Для каждого множества $X$ пространство $\Phi^X$ — коммутативная алгебра относительно поточечного умножения функций. 3. Для каждого векторного пространства $E$ множество $\mathscr{A} = \operatorname{End} E$ — ассоциативная алгебра относительно умножения операторов. Если $\dim E = n < \infty$, то алгебра $\operatorname{End} E$ изоморфна алгебре $\operatorname{Mat}_n \Phi$ всех квадратных матриц $n \times n$ над полем $\Phi$.

**4.2. Идеалы, факторалгебры.** Подмножество $I$ алгебры $\mathscr{A}$ называется *левым* (*правым*) *идеалом* алгебры $\mathscr{A}$, если $I$ — векторное подпространство, инвариантное относительно умножения слева (справа) на элементы алгебры $\mathscr{A}$. Подмножество $I$ называется *идеалом* (или *двусторонним идеалом*) алгебры $\mathscr{A}$, если оно является одновременно левым и правым идеалом алгебры $\mathscr{A}$. В последнем случае $\mathscr{A}/I$ снабжается структурой алгебры над полем $\Phi$ по правилу $(a+I)(b+I) = ab + I$ $(a, b \in \mathscr{A})$. Алгебра $\mathscr{A}/I$ называется *факторалгеброй* алгебры $\mathscr{A}$ по идеалу $I$.

Для каждого подмножества $T \subset \mathscr{A}$ существует наименьший идеал $I(T)$ алгебры $\mathscr{A}$, содержащий $T$ (аналогично для левых или правых идеалов). Действительно, $I(T)$ — пересечение всех идеалов алгебры $\mathscr{A}$, содержащих $T$. При этом $I(T)$ — линейная оболочка всевозможных элементов, получаемых из элементов множества $T$ с помощью конечного числа операций умножения (слева и справа) на элементы алгебры $\mathscr{A}$.

Конструкция факторалгебры широко используется для построения ассоциативных алгебр с заданной системой образующих и заданной системой алгебраических соотношений между этими образующими. Последнее означает задание системы уравнений

$$\varphi_\gamma(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0, \quad e_{i_k} \in S, \quad \gamma \in \Gamma,$$

где $S$ — данная система образующих, $\varphi_\gamma$ — полиномы (линейные комбинации одночленов) от этих образующих ($\Gamma$ — множество индексов). Действительно, пусть $T$ — множество левых частей заданных соотношений, т. е. $T \subset \mathscr{A}(S)$, где $\mathscr{A}(S)$ — свободная алгебра, порожденная множеством $S$. Положим

$$\mathscr{A}_T(S) = \mathscr{A}(S)/I(T).$$

Алгебра $\mathscr{A}_T(S)$ является искомой, поскольку элементы множества $T$ обращаются в нуль при переходе к факторалгебре. Более того, любое алгебраическое соотношение между образующими в алгебре $\mathscr{A}_T(S)$ является «алгебраическим следствием» данных соотношений.

Примеры. 1. Алгебра $\mathscr{A}$ называется *простой,* если она не имеет идеалов кроме $(0)$, $\mathscr{A}$. Если $\dim V < \infty$, то алгебра $\operatorname{End} V$ проста. 2. Каждый левый идеал алгебры $\operatorname{End} V$ — аннулятор некоторого подпространства $V_0 \subset V$. Каждый правый идеал получается из левого операцией транспонирования.

**4.3. Представления, модули.** Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная алгебра, $V$ — векторное пространство над полем $\Phi$. *Представлением* алгебры $\mathscr{A}$ в пространстве $V$ называется всякий гомоморфизм $\varphi$: $\mathscr{A} \to \operatorname{End} V$, т. е. операторная функция $\varphi$, удовлетворяющая соотношениям

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) \quad \text{для всех} \quad \lambda,\ \mu \in \Phi,\ x,\ y \in \mathscr{A},$$
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{для всех} \ x,\ y \in \mathscr{A}.$$

Представление $\varphi$ называется *невырожденным,* если не существует вектора $\xi \neq 0$, переводимого в нуль всеми операторами $\varphi(x)$ ($x \in \mathscr{A}$). Если $\mathscr{A}$ — алгебра с единицей и $\varphi$ — ее невырожденное представление, то $\varphi(1) = 1$, где в правой части $1 = 1_V$.

Иногда вместо символа $\varphi(x)\xi$ используется символ $x\xi$ ($x \in \mathscr{A}$, $\xi \in V$). Пространство $V$ в этом случае называется *левым $\mathscr{A}$-модулем.* Аналогично, если $\varphi$ — антипредставление (т. е. $\varphi$ меняет порядок умножения), то вместо символа $\varphi(x)\xi$ используется символ $\xi x$ и пространство $V$ наделяется структурой *правого $\mathscr{A}$-модуля.*

Пространство $V$ называется *$\mathscr{A}$-бимодулем,* если $V$ — одновременно левый и правый $\mathscr{A}$-модуль, причем действия алгебры $\mathscr{A}$ слева и справа взаимно перестановочны, т. е. $(x\xi)y = x(\xi y)$ для всех $x$, $y \in A$, $\xi \in V$.

Понятия инвариантности, неприводимости, эквивалентности представлений и т. д. вводятся так же, как для представлений групп (см. пп. 3.2, 3.3). Неприводимые $\mathscr{A}$-модули часто называют *простыми,* вполне приводимые — полупростыми.

Примеры. 1. Алгебра $\mathscr{A}$ является $\mathscr{A}$-бимодулем относительно представления $x \mapsto ax$ (называемого *регулярным*) и анти-

представления $x \mapsto xa$ (также называемого *регулярным*), где $a, x \in \mathscr{A}$. Инвариантные подпространства регулярного представления (антипредставления) суть левые (правые) идеалы алгебры $\mathscr{A}$.
2. Если $I$ — левый (правый) идеал алгебры $\mathscr{A}$, то факторпространство $\mathscr{A}/I$ естественно снабжается структурой левого (правого) $\mathscr{A}$-модуля. При этом $\mathscr{A}/I$ называется *фактормодулем* алгебры $\mathscr{A}$ по идеалу $I$.

Теория представлений алгебры $\mathscr{A}$ тесно связана с теорией идеалов алгебры $\mathscr{A}$. Действительно, для каждого представления (антипредставления) $\varphi$ алгебры $\mathscr{A}$ множество

$$\ker\varphi = \{x \in \mathscr{A}\colon\ \varphi(x) = 0\}$$

— идеал алгебры $\mathscr{A}$, причем соответствующее представление алгебры $\mathscr{A}_\varphi = \mathscr{A}/\ker\varphi$ является точным, т. е. алгебра $\mathscr{A}_\varphi$ изоморфна алгебре $\varphi(\mathscr{A})$. С другой стороны, для каждого $\xi \in V$ множество

$$I_\xi = \{x \in \mathscr{A}\colon\ \varphi(x)\xi = 0\}$$

(аннулятор вектора $\xi$) — левый (правый) идеал алгебры $\mathscr{A}$, причем соответствующее отображение $x + I_\xi \mapsto \varphi(x)\xi$ $(x \in \mathscr{A})$ является изоморфизмом $\mathscr{A}$-модулей $\mathscr{A}_\xi = \mathscr{A}/I_\xi$, $V_\xi = \varphi(\mathscr{A})\xi$.

*Если $V$ — простой $\mathscr{A}$-модуль конечной размерности над алгебраически замкнутым полем $\Phi$ (в частности, $\Phi = \mathbf{C}$), то $\varphi(\mathscr{A}) = \operatorname{End} V$, где $\varphi$ — представление (антипредставление) алгебры $\mathscr{A}$ в пространстве $V$* (теорема Бернсайда).

Иначе говоря, $\varphi(\mathscr{A}) \simeq \operatorname{Mat}_n\Phi$, $n = \dim V$.

**4.4. Характеры конечномерных представлений.** Пусть $\tau$ — конечномерное представление ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$. Линейный функционал

$$\chi_\tau(a) = \operatorname{tr}\tau(a), \qquad a \in \mathscr{A},$$

называется *характером* представления $\tau$. Для каждой пары представлений $\tau_1$, $\tau_2$

$$\chi_{\tau_1\oplus\tau_2} = \chi_{\tau_1} + \chi_{\tau_2}, \quad \chi_{\tau_1\otimes\tau_2} = \chi_{\tau_1}\chi_{\tau_2}.$$

Иначе говоря, отображение $\tau \mapsto \chi_\tau$ является гомоморфизмом кольца (или полукольца) представлений алгебры $\mathscr{A}$ в кольцо (или полукольцо) ее характеров.

*Характер $\chi_\tau$ неприводимого представления $\tau$ определяет это представление с точностью до эквивалентности. Характеры попарно различных (неэквивалентных) представлений линейно независимы.*

Поэтому кольцо вполне приводимых представлений алгебры $\mathscr{A}$, рассматриваемых с точностью до эквивалентности, изоморфно кольцу характеров этих представлений.

Пример. Пусть $G$ — конечная группа, $\Phi(G)$ — линейная оболочка множества $G$. Пространство $\Phi(G)$ становится ассоциативной алгеброй относительно умножения

$$(f_1 * f_2)(x) = \sum_{gh=x} f_1(g)f_2(h).$$

При этом каждое представление $\tau$ группы $G$ порождает представление $\tau$ алгебры $\Phi(G)$:

$$\tau(f) = \sum_g f(g)\,\tau(g), \quad f \in \Phi(G).$$

Соответственно, каждый характер $\chi_\tau(g) = \operatorname{tr}\tau(g)$ группы $G$ порождает характер

$$\chi_\tau(f) = \sum_g f(g)\,\chi_\tau(g)$$

алгебры $\Phi(G)$. Линейная оболочка $Z(G)$ всех характеров $\chi_\tau$ $(\tau \in \hat{G})$ совпадает с центром алгебры $\Phi(G)$.

**4.5. Тензорные алгебры.** Для каждого векторного пространства $E$ свободная алгебра $T(E)$, порожденная элементом 1 (единица) и фиксированным базисом $S \subset E$, не зависит от выбора базиса и называется *тензорной алгеброй* над пространством $E$. При этом

$$T(E) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T_k(E), \quad \text{где} \quad T_k(E) \simeq E \otimes \ldots \otimes E$$

($k$ сомножителей), $T_0(E) = \Phi \cdot 1$. Элементы $t \in T_k(E)$, называемые (*ковариантными*) *тензорами ранга* $k$, представляются в виде

$$t = \sum_{i_1, \ldots, i_k} t^{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \ldots e_{i_k}, \qquad e_i \in S,$$

(умножение $ab$ заменяет тензорное произведение $a \otimes b$). Тензор $t \in T_k(E)$ называется *симметрическим* (*кососимметрическим*), если его координаты $t^{i_1 \ldots i_k}$ симметричны (кососимметричны) относительно всевозможных подстановок индексов $i_1, \ldots, i_k$. Соответственно положим

$$S(E) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k(E), \quad \Lambda(E) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda_k(E),$$

где $S_k(E)$ $(\Lambda_k(E))$ — подпространство всех симметрических (кососимметрических) тензоров ранга $k$. Заметим, что если $\dim E = n < \infty$, то

$$\dim C_k(E) = C_{n+k}^k, \quad \dim \Lambda_k(E) = C_n^k,$$

где $C_n^k$ — биномиальный коэффициент. В частности, $\dim \Lambda_k(E) = 0$ при $k > n$, $\dim \Lambda(E) = 2^n$.

Процесс факторизации позволяет получить из $T(E)$ классические алгебры с системой образующих $S \subset E$, где $S$ — базис $E$.

1. Симметрическая алгебра $T(E)/I$, где $I$ — идеал, порожденный элементами вида $xy - yx$ $(x \in E)$, изоморфна алгебре всех коммутирующих полиномов от элементов $e_i \in S$. По запасу элементов эта алгебра отождествляется с $S(E)$, ввиду разложения $T(E) = I \oplus S(E)$.

2. Грассманова алгебра $T(E)/J$, где $J$ — идеал, порожденный элементами вида $x^2$ $(x \in E)$. Эта алгебра по запасу элементов отождествляется с $\Lambda(E)$, ввиду разложения $T(E) = J \oplus \Lambda(E)$.

3. Клиффордова алгебра $T(E)/J_f$, где $J_f$ — идеал, порожденный элементами вида $x^2 - f(x)\cdot 1$, $f$ — квадратичная форма над $E$:

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

При этом образующие $e_i \in S$ удовлетворяют соотношениям $e_i e_j = e_j e_i$ в $S(E)$, $e_i e_j = -e_j e_i$ в $\Lambda(E)$, $e_i e_j + e_j e_i = 2a_{ij}$ в клиффордовой алгебре $\Lambda_f(E)$.

Замечание. Умножение в $\Lambda(E)$ обычно называется *внешним умножением* и обозначается символом $x \wedge y$, где $x, y \in \Lambda(E)$.

**4.6. Кольца и модули.** Алгебры и векторные пространства над полем $\Phi$ суть частные случаи общих понятий кольца и модуля над кольцом.

Абстрактное множество $K$ называется *кольцом*, если в нем определены две бинарные операции: сложение $(a, b) \mapsto a + b$ и умножение $(a, b) \mapsto ab$, причем

1) $K$ — коммутативная группа относительно сложения;

2) сложение и умножение связаны законами дистрибутивности:

$$(a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac$$

для всех $a, b, c \in K$.

Аналогично, если в аксиоме 1) вместо слова «группа» написать «полугруппа», то множество $K$ называется *полукольцом*.

Кольцо $K$ называется соответственно *ассоциативным*, *коммутативным*, *кольцом с единицей*, если умножение в нем ассоциативно, коммутативно, обладает единицей. Кольцо $K$ называется *телом*, если $K\setminus\{0\}$ — группа относительно умножения. Коммутативное тело называется *полем*.

Примеры. 1. $\mathbf{Z}$ — коммутативное кольцо с единицей (относительно обычных алгебраических операций над целыми числами). 2. Классические поля: $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$ (поле рациональных чисел), $\mathbf{Q}_p$ (поле $p$-адических чисел). 3. Множество $\mathbf{H}$ вещественных кватернионов является телом.

Для колец определяются естественным образом понятия гомоморфизма, изоморфизма, подкольца, левого и правого идеала, факторкольца по идеалу и т. д.

Далее, пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативное кольцо. Аддитивная группа $\mathcal{M}$ называется (*левым*) *$\mathcal{A}$-модулем*, если определена операция $(a, x) \mapsto ax$ $(a \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{M})$, причем

1) $a(x + y) = ax + ay$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $x, y \in \mathcal{M}$;

2) $(a + b)x = ax + bx$, $(ab)x = a(bx)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$, $x \in \mathcal{M}$.

В частности, $0 \cdot x = 0$, где 0 в правой части — нейтральный элемент группы $\mathcal{M}$. Аналогично определяются правые $\mathcal{A}$-модули и $\mathcal{A}$-бимодули.

В классе модулей над $\mathcal{A}$ естественно определяются понятия гомоморфизма, изоморфизма, подмодуля, фактормодуля и т. д.

П р и м е р ы. 1. Векторное пространство $V$ над полем $\Phi$ — это $\Phi$-бимодуль с добавочным условием $\lambda x = x\lambda$ для всех $\lambda \in \Phi$ ($x \in V$). 2. Алгебра $\mathscr{A}$ над полем $\Phi$ — это кольцо и $\Phi$-бимодуль с добавочным условием

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \text{ для всех } a, b \in \mathscr{A}, \lambda \in \Phi.$$

З а м е ч а н и е. Если $\mathscr{A}$ — ассоциативная алгебра, то не всякий модуль над кольцом $\mathscr{A}$ является модулем над алгеброй $\mathscr{A}$ (см. п. 4.3). Добавочное условие — согласованность умножения на числа $\lambda \in \Phi$.

**4.7. Индуцированные модули.** Пусть $\mathscr{A}_0$ — алгебра над полем $\Phi$, $E$ — правый $\mathscr{A}_0$-модуль, $F$ — левый $\mathscr{A}_0$-модуль. Положим

$$E \otimes_{\mathscr{A}_0} F = (E \otimes F)/Z,$$

где $Z$ — линейная оболочка элементов вида

$$z = xa_0 \otimes y - x \otimes a_0 y, \quad x \in E, \quad a_0 \in \mathscr{A}_0, \quad y \in F.$$

Пространство $E \otimes_{\mathscr{A}_0} F$ называется *тензорным произведением* модулей $E$, $F$ над алгеброй $\mathscr{A}_0$. В частности, $E \otimes_\Phi F = E \otimes F$.

Если $E$ является также левым $\mathscr{A}$-модулем, где $\mathscr{A}$ — алгебра над полем $\Phi$, то $E \otimes_{\mathscr{A}_0} F$ снабжается структурой $\mathscr{A}$-модуля по правилу

$$a(x \otimes y) = ax \otimes y, \quad a \in \mathscr{A}, \quad x \in E, \quad y \in F,$$

(с переходом к классам эквивалентности относительно $Z$). В частности, если $\mathscr{A}_0$ — подалгебра алгебры $\mathscr{A}$, то пространство

$$W = \operatorname{Ind}_{\mathscr{A}_0}^{\mathscr{A}} F = \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{A}_0} F$$

является левым $\mathscr{A}$-модулем. Операция $F \to W$ аналогична операции индуцирования в теории представлений групп (см. п. 3.7).

**4.8. Категории и функторы.** Семейство множеств $K = \{K_{\tau\sigma}\}_{\tau, \sigma \in T}$ ($T$ — семейство индексов) называется *категорией*, если для каждой пары элементов $a \in K_{\tau\sigma}$, $b \in K_{\sigma\rho}$ определено произведение $ab \in K_{\tau\rho}$, причем

1) умножение $(a, b) \mapsto ab$ ассоциативно;

2) для каждого $\sigma \in T$ существует нейтральный элемент $1_\sigma$ относительно умножения:

$$a1_\sigma = a, \quad 1_\sigma b = b \quad \text{для всех} \quad a \in K_{\tau\sigma}, \quad b \in K_{\sigma\rho}.$$

При этом элементы $\tau \in T$ называются *объектами* категории $K$, элементы $a \in K_{\tau\sigma}$ — *морфизмами* объекта $\sigma$ в объект $\tau$. Соответственно, вместо символа $K_{\tau\sigma}$ используется символ $\operatorname{Mor}(\tau, \sigma)$.

П р и м е р ы. 1. К а т е г о р и я г р у п п. Объекты — группы, морфизмы — гомоморфизмы групп. 2. К а т е г о р и я в е к т о р н ы х п р о с т р а н с т в н а д п о л е м $\Phi$. Объекты — векторные пространства, морфизмы — линейные операторы. 3. К а т е г о р и я п р е д с т а в л е н и й г р у п п ы $G$ в в е к т о р н ы х п р о с транствах над полем Ф. Объекты — представления, морфизмы — сплетающие операторы.

Отображение $\varphi$: $H \to K$ называется *ковариантным функтором* из категории $H$ в категорию $K$, если $\varphi$ отображает $H_{\tau\sigma}$ в $K_{\tau\sigma}$ ($H$, $K$ обладают общим семейством индексов), причем

1) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех $a \in H_{\tau\sigma}$, $b \in H_{\sigma\rho}$;

2) $\varphi(1_\sigma) = 1_\sigma$ для всех $\sigma \in T$.

Примеры. 1. Операция редуцирования (см. п. 3.1) — ковариантный функтор из категории представлений группы $G$ в категорию представлений подгруппы $H$. 2. Операция индуцирования (см. п. 3.7) — ковариантный функтор из категории представлений подгруппы $H$ в категорию представлений группы $G$. 3. Операция $G \to \Phi(G)$ (см. п. 4.4) — ковариантный функтор из категории групп в категорию ассоциативных алгебр над полем Ф.

Литература: [5], [15], [16], [17], [20].

# ГЛАВА 2

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Теория представлений приобретает новые черты, если структурные операции предполагать непрерывными в той или иной топологии. С формальной точки зрения условие непрерывности не сужает область исследования, поскольку можно рассматривать дискретную топологию, в которой все функции непрерывны. Однако практически приходится иметь дело с конкретными топологиями (например, топология евклидова или гильбертова пространства), и в этом случае условие непрерывности является существенным ограничением.

Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями топологии. Однако в § 1 приводится ряд определений (связность, линейная связность, односвязность и т. д.), которые существенны для описания общих свойств топологических групп. В § 2 дается краткий обзор основных понятий теории топологических векторных пространств. Читатель, интересующийся только унитарными представлениями, может ограничиться теорией гильбертовых пространств.

## § 1. Топологические группы

**1.1. Определение топологической группы.** Абстрактное множество $G$ называется *топологической группой*, если оно является одновременно группой и топологическим пространством, причем обе эти структуры согласованы следующим образом: отображение $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ является непрерывным отображением $G \times G$ на $G$. Иначе говоря, все групповые операции непрерывны в топологии группы $G$.

Полезно отметить, что отображения $g \mapsto g^{-1}$, $g \mapsto g_0 g$, $g \mapsto g g_0$, $g \mapsto g_0 g g_0^{-1}$ являются (при фиксированном $g_0$) гомеоморфизмами $G$ на себя. Соответственно, каждое из них переводит окрестность в окрестность, базу окрестностей в базу окрестностей и т. д. Поэтому топологические свойства группы $G$ «однородны» относительно левых и правых сдвигов, симметричны относительно инверсии $g \mapsto g^{-1}$, сохраняются при внутренних автоморфизмах.

Каждый топологический термин (связность, компактность и т. д.) в применении к топологической группе $G$ означает, по определению, выполнение соответствующего свойства для топологического пространства $G$. Наличие групповой структуры существенно влияет на топологию группы $G$. Например, для топологических групп аксиомы отделимости $T_0 - T_3$ равносильны.

Отображение $f$: $G \to H$ называется *изоморфизмом* топологических групп $G$, $H$, если $f$ является одновременно изоморфизмом групп $G$, $H$ и гомеоморфизмом топологических пространств $G, H$. В этом случае топологические группы $G$, $H$ называются *изоморфными*.

Если $H$ — подгруппа топологической группы $G$, то $H$ является топологической группой относительно индуцированной топологии. Факторпространство $G/H$ обычно наделяется *фактортопологией* (сильнейшей топологией, относительно которой каноническая проекция $G$ на $H$ непрерывна). Если $H$ — нормальный делитель, то $G/H$ — топологическая группа.

*Если $\varphi$ — непрерывный гомоморфизм топологической группы $G$ в топологическую группу $H$, то* $\ker\varphi$ — *замкнутый нормальный делитель в $G$ и топологические группы* $G/\ker\varphi$, $\varphi(G) = \mathrm{Im}\,\varphi$ *изоморфны* ($\varphi(G)$ — подгруппа $H$).

*Прямое произведение любого семейства топологических групп есть топологическая группа* (относительно тихоновской топологии).

В дальнейшем, как правило, будут рассматриваться компактные и локально компактные группы. Напомним, что топологическое пространство $X$ называется *локально компактным*, если каждая его точка обладает окрестностью с компактным замыканием *). Частным случаем локально компактных групп являются группы Ли, теория которых излагается в гл. 4.

**1.2. Связность и односвязность.** Напомним, что топологическое пространство называется *связным*, если его невозможно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Подмножество топологического пространства называется *связным*, если оно связно в индуцированной топологии. Каждое топологическое пространство есть объединение непересекающихся максимальных связных подмножеств, называемых его *компонентами*.

В частности, каждая топологическая группа $G$ является объединением своих компонент, среди которых лишь одна компонента $G_1$, содержащая точку $1 \in G$, является подгруппой группы $G$. Подгруппа $G_1$ является замкнутым нормальным делителем в $G$. Факторгруппа $G/G_1$ вполне несвязна (т. е. каждая ее компонента состоит из единственной точки).

*Для каждой окрестности $U$ единичного элемента в $G_1$*

$$G_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

*В частности, если $G$ связна* (т. е. $G = G_1$), *то $U$ порождает $G$.*

*Если $N$ — дискретный нормальный делитель связной группы $G$, то $N$ содержится в центре группы $G$.*

*) Вместо термина «компактность» иногда используется термин «бикомпактность».

Во многих случаях понятие связности сводится к понятию линейной связности. Топологическое пространство $X$ называется *линейно связным*, если любые две его точки $x$, $y$ можно соединить непрерывным путем, т. е. непрерывной кривой $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $x(0) = x$, $x(1) = y$. Линейно связное пространство $X$ называется *односвязным*, если каждый его замкнутый цикл (непрерывный путь $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, для которого $x(0) = x(1)$) может быть непрерывной деформацией стянут в точку (т. е. существует семейство путей $x_s(t)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$, непрерывное по совокупности переменных $s$, $t$, для которого $x_s(0) = x_s(1) = x$ для всех $s$, $x_0(t) = x(t)$, $x_1(t) = x$ для всех $t$).

Понятие односвязности в общем случае может быть выражено в терминах накрывающих пространств. Говорят, что топологическое пространство $Y$ $n$-кратно *накрывает* топологическое пространство $X$, где $n$ — кардинальное число, если существует непрерывное отображение $f$: $X$ на $Y$, для которого обратное отображение $f^{-1}$ локально $n$-значно и непрерывно. Это означает, что каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью $U$, полный прообраз которой состоит из $n$ компонент, и $f$ является гомеоморфизмом каждой такой компоненты на $U$. Пространство $X$ называется *односвязным*, если всякое его накрытие однократно. Пространство $X$ называется *локально односвязным*, если каждая его точка обладает односвязной окрестностью.

*Каждое линейно связное локально односвязное пространство обладает односвязным накрывающим пространством, определяемым однозначно с точностью до изоморфизма.*

Односвязное накрывающее пространство $\mathfrak{G}$ топологической группы $G$ наделяется структурой топологической группы таким образом, чтобы отображение накрытия $f$: $\mathfrak{G} \to G$ являлось гомоморфизмом $\mathfrak{G}$ на $G$. При этом факторгруппа $F = \mathfrak{G}/\ker f$ коммутативна. Группа $F$ называется *фундаментальной группой* группы $G$. Если $G$ односвязна, то $F = \{1\}$.

П р и м е р ы. 1. Сфера $S^n$ в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ односвязна при $n \geqslant 2$. 2. Аддитивная группа $\mathbf{R}$ является счетным накрытием группы вращений окружности $S^1$. 3. Аддитивная группа $\mathbf{R}^n$ односвязна для всех $n$.

**1.3. Топологические $G$-пространства.** Пусть $G$ — топологическая группа. Множество $X$ называется *топологическим (левым) $G$-пространством*, если $X$ является одновременно топологическим пространством и (левым) $G$-пространством, причем отображение $(g, x) \mapsto gx$ является непрерывным отображением $G \times X$ на $X$.

Два топологических $G$-пространства называются *изоморфными*, если между ними существует гомеоморфизм, сохраняющий действие группы $G$ (т. е. являющийся *изоморфизмом* $G$-пространств). Всякое однородное топологическое $G$-пространство $X$ изоморфно $G/H$, (см. 1.1.3), где $H$ — стационарная подгруппа фиксированной точки $e \in X$. Аналогично рассматриваются правые $G$-пространства.

*Для каждого однородного пространства аксиомы отделимости $T_0 - T_2$ равносильны. Выполнение этих аксиом для $G/H$ равносильно замкнутости подгруппы $H$. Дискретность $G/H$ равносильна открытости $H$.*

*Каждое из следующих свойств, будучи выполненным для группы $G$, выполняется также для $G/H$* ($H$ — произвольная подгруппа): *связность, линейная связность, односвязность, компактность, локальная компактность. Каждое из этих свойств, будучи выполненным одновременно для $H$, $G/H$, выполняется также для всей группы $G$.*

Если $X$ — топологическое $G$-пространство, то множество $X/G$ всех его орбит обычно наделяется фактортопологией. При этом отображение $\pi$, ставящее в соответствие точке $x \in X$ ее орбиту $G_x$, непрерывно, открыто, но не обязательно замкнуто.

*Если $X$ — метрически полное сепарабельное $G$-пространство, то полуотделимость $X/G$ (выполнение аксиомы $T_0$) равносильна тому, что каждая орбита локально замкнута (т. е. является пересечением открытого и замкнутого множеств).*

Последнее свойство тесно связано с поведением эргодических борелевских мер на $X$. Счетно аддитивная мера $\mu$ на топологическом пространстве $X$ называется *борелевской*, если областью ее определения является минимальная $\sigma$-алгебра $\mathscr{B}$, содержащая все открытые множества. Элементы $A \in \mathscr{B}$ называются *борелевскими множествами*. Мера $\mu$ называется *конечной*, если $\mu(X) < +\infty$, *$\sigma$-конечной*, если $X$ является объединением счетного семейства борелевских множеств $X_n$: $\mu(X_n) < +\infty$. Мера $\mu$ на $G$-пространстве $X$ называется *эргодической*, если для каждого разбиения $X$ на $G$-инвариантные борелевские множества $A$, $B$ либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(B) = 0$.

*Если $X$ — метрически полное сепарабельное $G$-пространство, то полуотделимость $X/G$ равносильна тому, что каждая эргодическая конечная борелевская мера в $X$ сосредоточена на одной орбите.*

Мера $\mu$ на $G$-пространстве $X$ называется *инвариантной*, если $\mu(gA) = \mu(A)$ для всех $g \in G$ и всех измеримых $A \subset X$. Каждое $G$-пространство $X$ с инвариантной мерой называется *динамической системой*. При этом группа $G$ называется *группой автоморфизмов* (или *группой движений*) динамической системы $X$.

Теория динамических систем тесно связана с теорией унитарных представлений группы $G$ (см. § 3 гл. 1).

**1.4. Интеграл и мера Хаара.** Пусть $G$ — произвольная группа. Мера $\mu$ на $G$ называется *левоинвариантной* (*правоинвариантной*), если $\mu(gA) = \mu(A)$ ($\mu(Ag) = \mu(A)$) для всех $g \in G$ и всех измеримых $A \subset G$. Мера $\mu$ называется *двусторонне инвариантной*, если она является одновременно левоинвариантной и правоинвариантной. Инвариантные меры всегда существуют в классе локально компактных групп. Ввиду известной связи между мерами и интегралами, этот результат удобно выразить в терминах инвариантного интегрирования на группе.

Пусть $X$ — локально компактное пространство, $C_0(X)$ — векторное пространство всех комплексных непрерывных финитных (т. е. с компактными носителями) функций на $X$. Каждый линейный функционал $I$ над $C_0(X)$, такой, что $If \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$, называется *интегралом* в $C_0(X)$. Интеграл в $C_0(G)$, где $G$ — локально компактная группа, называется *левоинвариантным* (*правоинвариантным*), если $I(gf) = If$ $(I(fg) = If)$ для всех $g \in G$, $f \in C_0(G)$.

*На каждой локально компактной группе $G$ существует левоинвариантный интеграл $I \neq 0$, причем такой интеграл определяется однозначно с точностью до числового множителя* (теорема Хаара — фон Неймана — А. Вейля). Аналогично — для правоинвариантных интегралов.

Согласно теореме Рисса всякий интеграл в $C_0(X)$ является интегралом Лебега по локально конечной регулярной борелевской мере в $X$:

$$If = \int f(x)\, d\mu(x),$$

причем мера $\mu$ определяется однозначно в классе локально конечных регулярных борелевских мер.

Мера $\mu$ называется *локально конечной*, если $\mu(F) < \infty$ для всякого компактного подмножества $F$. Мера $\mu$ называется *регулярной*, если для всякого $A \in \mathscr{B}$ $\mu(A) = \inf\limits_{A \subset U} \mu(U)$, где $U$ — открытое множество, $\mu(U) = \sup\limits_{F \subset U} \mu(F)$, где $F$ — компактное множество.

Следовательно, на каждой локально компактной группе $G$ существует локально конечная регулярная левоинвариантная мера $\mu$. Эта мера называется *левой мерой Хаара*. Она удовлетворяет также следующим свойствам:

1) $\mu(U) > 0$ для всякого непустого открытого $U$;

2) $\mu(U) < \infty$ для некоторого открытого $U$.

Аналогично определяется *правая мера Хаара*. При этом инверсия $x \mapsto x^{-1}$ переводит левую меру Хаара в правую меру Хаара, и обратно. Левая (правая) мера Хаара определяется однозначно с точностью до числового множителя.

Из единственности правой меры Хаара $\mu$ вытекает равенство

$$d\mu(xy) = \Delta(x) d\mu(y),$$

где $\Delta(x)$ — положительный характер группы $G$. Легко показать, что этот характер непрерывен. При этом равенство

$$d\nu(x) = \Delta(x)^{-1} d\mu(x)$$

определяет левую меру Хаара $\nu$ на $G$.

Характер $\Delta$ называется *модулем* или *модулярной функцией* группы $G$. Если $\Delta(x) \equiv 1$, то группа $G$ называется *унимодулярной*. В этом случае на $G$ существует двусторонне инвариантная мера.

*Мера Хаара конечна тогда и только тогда, когда группа $G$ компактна. Компактная группа унимодулярна.* Мера Хаара компактной группы $G$ нормируется обычно условием $\mu(G)=1$ (вероятностная мера). При этом $d\mu(x^{-1})=d\mu(x)$.

Мера Хаара отдельной точки $g_0\in G$ положительна тогда и только тогда, когда группа $G$ дискретна. В этом случае все точки $g\in G$ имеют одинаковую меру.

Вместо символа $d\mu(x)$ для левой и правой мер Хаара используются обычно символы $d_lx$, $d_rx$. Если группа унимодулярна, то эти символы записываются в виде $dx$.

Пример. На аддитивной группе $\mathbf{R}$ и на окружности $S^1$ мера Хаара совпадает с обычной мерой Лебега.

**1.5. Квазиинвариантные меры.** Пусть, $X$ — правое топологическое $G$-пространство. Борелевская мера $\mu$ на $X$ называется *квазиинвариантной*, если меры $\mu(Ag)$ $(g\in G)$ эквивалентны, т. е. обладают одинаковым запасом нульмерных множеств. *Если меры $\mu$, $\nu$ эквивалентны, то $d\mu(x)=\rho(x)d\nu(x)$, где $\rho$ — положительная функция* (теорема Радона — Никодима). В частности, если $\mu$ — квазиинвариантная мера на $X$, то

$$d\mu(xg)=a(x,\ g)d\mu(x),\qquad x\in X,\quad g\in G.$$

Функция $a(x,\ g)$ удовлетворяет уравнениям

$$a(x,\ g_1g_2)=a(x,\ g_1)a(xg_1,\ g_2),\qquad g_1,\ g_2\in G,$$
$$a(x,\ h)=1,\ h\in H_x,$$

где $H_x$ — стационарная подгруппа точки $x$. В отличие от меры Хаара, квазиинвариантная мера на $X$ определяется неоднозначно. Действительно, если мера $\mu$ квазиинвариантна, то мера $\nu$, для которой $d\nu(x)=\rho(x)d\mu(x)$, где $\rho$ — неотрицательная функция, также квазиинвариантна. Аналогично рассматриваются квазиинвариантные меры на левых пространствах.

*Если $G$ локально компактна, $X$ — отделимое однородное $G$-пространство, то на $X$ существует квазиинвариантная мера. Если $X=G/H$ ($H$ — замкнутая подгруппа в $G$) и если модуль $\Delta$ группы $H$ продолжается до непрерывного положительного характера группы $G$, то на $X$ существует относительно инвариантная мера $\mu$:*

$$d\mu(gx)=\delta(g)^{-1}d\mu(x),\qquad g\in G.$$

В частности, если $\delta(h)=1$ $(h\in H)$, то меры $\mu$, $\nu$ инвариантны. Соответственно, в этом случае на однородных пространствах $G/H$, $H\backslash G$ существуют инвариантные интегралы.

Если $H$ — замкнутая подгруппа в $G$, то всегда существует борелевское сечение $K$ классов смежности $H\backslash G$, т. е. борелевское подмножество $K\subset G$ такое, что $G=HK\simeq H\times K$. Эта запись означает, что всякий элемент $g\in G$ однозначно представляется в виде $g=hk$ $(h\in H,\ k\in K)$. При этом $d_lg=d_lh\,d\mu(k)$, где $\mu$ — квазиинвариантная мера на $K\simeq H\backslash G$. Заменяя $\mu$ эквивалентной мерой, можно записать это равенство в виде $d_lg=\Delta(k)^{-1}d_lh\,d\mu(k)$, При этом $d_r g = \delta(h)^{-1} d_r h \, d\mu(k)$, и мера $\mu$ удовлетворяет соотношению

$$d\mu(k \circ g) = \delta(h(kg))d\mu(k), \qquad k \in K, \quad g \in G,$$

где, согласно п. 1.3.6, элементы $k \circ g = k'$, $h(kg) = h'$ определяются из разложения $kg = h'k'$ ($h' \in H$, $k' \in K$). Если $K$ — подгруппа в $G$, то $d\mu(k) = d_r k$. В частности, если группа $G$ унимодулярна, то $dg = d_l h \, d_r k$.

Аналогично, если $G = KH$, $H$ — замкнутая подгруппа в $G$, то $K \simeq G/H$ и разложение $g = hk$ ($h \in H$, $k \in K$) определяет разложение $d_r g = \Delta(k) d\mu(k) d_r h$, где $\mu$ — квазиинвариантная мера на $K$. При этом $d_l g = \delta(h) d\mu(k) d_l(h)$, и мера $\mu$ удовлетворяет соотношению

$$d\mu(g \circ k) = \delta(h(gk))^{-1} d\mu(k), \qquad k \in K, \quad g \in G,$$

причем элементы $g \circ k = k'$, $h(gk) = h'$ определяются из разложения $gk = k'h'$ ($k' \in K$, $h' \in H$). Если $K$ — подгруппа в $G$, то $d\mu(k) = d_l k$.

Иногда разложения $g = hk$, $g = kh$ выполняются не всюду, а почти всюду (относительно меры Хаара) в $G$. В этом случае приведенные формулы также остаются в силе.

**1.6. Классические группы.** Проиллюстрируем общие понятия на примере важнейших линейных групп, называемых обычно *классическими* группами.

В следующем списке указаны условия, выделяющие линейную группу $G$ в $M_n(\Phi)$, где $M_n(\Phi)$ — множество всех матриц $n \times n$ над полем $\Phi$, положим $g \in M_n(\Phi)$:

1) *полная линейная группа* $GL(n, \Phi)$: $\det g \neq 0$;

2) *унимодулярная линейная группа* $SL(n, \Phi)$: $\det g = 1$;

3) *ортогональная группа* $O(n, \Phi)$: $g'g = 1$;

4) *собственная ортогональная группа* $SO(n, \Phi)$: $g'g = 1$, $\det g = 1$;

5) *унитарная группа* $U(n)$ *над полем* $\mathbb{C}$: $g^*g = 1$;

6) *собственная унитарная группа* $SU(n)$: $g^*g = 1$, $\det g = 1$;

7) *симплектическая группа* $Sp(m, \Phi)$: $g'\sigma g = \sigma$, $n = 2m$;

8) *спинорная группа* $Spin(m, \Phi)$: $g = \tau(y)$, $y \in G_0$, $n = 2^m$;

9) *псевдоортогональная группа* $O(p, q)$: $g'sg = s$, $n = p + q$;

10) *псевдоунитарная группа* $U(p, q)$ *над полем* $\mathbb{C}$: $g^*sg = s$, $n = p + q$;

11) *полная треугольная группа* $B_+(n, \Phi)$: $g_{ij} = 0$ *при* $i > j$, $\det g \neq 0$;

12) *полная унипотентная группа* $N_+(n, \Phi)$: $g_{ij} = \delta_{ij}$ *при* $i \geqslant j$.

Здесь штрих означает транспонирование, звездочка — эрмитово сопряжение, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, $O(p, q)$ определяется над полем $\mathbb{R}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$, $s = s_{pq} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 1_q \end{pmatrix}$, $1_k$ — единичная матрица $k \times k$, $G_0$ — компонента единицы в группе всех обратимых элементов $y \in K_m$ клиффордовой алгебры $K_m$ над пространством $E = \Phi^m$ (см. 1.2.6) таких, что $\tau(y)E \subset E$, где $\tau(y)x = yxy^{-1}$ ($x, y \in K_m$).

В дальнейшем $\Phi = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Все классические группы являются топологическими группами в евклидовой топологии (индуцированной топологии евклидова пространства $M_n(\Phi)$).

*Группы* $O(n, \mathbf{R})$, $SO(n, \mathbf{R})$, $U(n)$, $SU(n)$ *компактны.*

*Группы* 1—12 *связны за исключением* $GL(n, \mathbf{R})$, $O(n, \Phi)$, $O(p, q)$, $B_+(n, \mathbf{R})$. Группа $GL(n, \mathbf{R})$ состоит из двух компонент, выделяемых условиями $\det g > 0$, $\det g < 0$. Группа $O(n, \Phi)$ состоит из двух компонент, выделяемых условиями $\det g = 1$ $(SO(n, \Phi))$, $\det g = -1$. Группа $O(p, q)$ при $p, q \neq 0$ состоит из четырех компонент, выделяемых условиями $\det g = \pm 1$, $\Delta_p = \pm 1$, где $\Delta_p$ — главный минор матрицы $g$, составленный из первых $p$ строк и первых $p$ столбцов. Группа $B_+(n, \mathbf{R})$ состоит из $2^n$ компонент, выделяемых условиями $g_{ii} = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

*Группы* $SL(n, \mathbf{C})$, $SU(n)$, $Sp(n, \mathbf{C})$, $Spin(n, \Phi)$ $(n \geqslant 2)$, $N_+(n, \Phi)$ *односвязны. Группа* $Spin(n, \Phi)$ *дважды накрывает* $SO(n, \Phi)$ (при сужении $\tau(y)$ $(y \in G_0)$ на $E = \Phi^n$). Группа $N_+(n, \Phi)$ гомеоморфна евклидову пространству.

Положим, в частности, $G = GL(n, \mathbf{C})$, $K = U(n)$, $N = N_+(n, \mathbf{C})$, $A = \{a = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n),\ a_i > 0\ \forall n\}$. *Группа $G$ допускает однозначное разложение* $G = KAN \simeq K \times A \times N$, где $\simeq$ означает гемеоморфизм. Следовательно, $G$ гемеоморфна декартову произведению компакта $K$ на евклидово пространство $A \times N \left(\simeq \mathbf{R}^{n^2}\right)$.

Группа $K$ содержит подгруппу $K_0$, изоморфную $U(n-1)$ (стационарная подгруппа фиксированной точки в $\mathbf{C}^n$), причем пространство $K/K_1 \simeq S^{2n-1}$ связно. Отсюда в силу индукции по $n$ (см. п. 1.3) группа $K$ связна. Следовательно, группа $G$ также связна.

Аналогично проверяется односвязность $SU(n)$, $SL(n, \mathbf{C})$. Из разложения $U(n) \simeq U(1) \times SU(n)$ следует, что $U(n)$ вместе с $U(1)$ имеет счетное односвязное накрытие.

*Группы* $GL(n, k)$ *унимодулярны.* Мера Хаара на них имеет вид

$$dx = |\det x|^{-k} d_0 x,$$

где $k = n$ при $k = \mathbf{R}$, $k = 2n$ при $k = \mathbf{C}$, $d_0 x$ соответствует обычной мере Римана — Лебега в $\mathcal{M}_n(\Phi)$.

Литература: [3], [6], [9], [14], [15], [17], [26], [27].

## § 2. Топологические векторные пространства

**2.1. Определение ТВП.** Начиная с этого момента, все векторные пространства рассматриваются над полями $\Phi = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Векторное пространство $E$ называется *топологическим векторным пространством* (*ТВП*), если в нем определена топология, относительно которой все векторные операции непрерывны, т. е. функции $x + y$, $\lambda x$ непрерывны соответственно на $E \times E$, $\Phi \times E$.

В частности, аддитивная группа пространства $E$ является топологической группой.

Практически часто встречаются *метризуемые ТВП* (топология в которых совпадает с топологией, определяемой метрикой). Всякое полное метризуемое ТВП называется *F-пространством* или *пространством Фреше*.

Для определения полноты в общем случае можно использовать понятие направленности Коши. Направленность $x_\alpha \in E$ называется *фундаментальной* или *направленностью Коши*, если для всякой окрестности нуля $U \subset E$ существует индекс $\alpha_0$ такой, что $x_\alpha - x_\beta \in U$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Пространство $E$ называется *полным*, если всякая направленность Коши $x_\alpha \in E$ сходится к элементу $x \in E$.

Пространство $E$ называется *секвенциально полным*, если в нем сходится каждая последовательность Коши. Для метризуемых пространств полнота равносильна секвенциальной полноте.

Множество $K \subset E$ называется *ограниченным*, если оно поглощается каждой окрестностью нуля, т. е. если $K \subset \lambda U$, где $U$ — окрестность нуля, при достаточно большом $\lambda > 0$.

**2.2. Определение ЛВП.** Наиболее распространенный способ введения топологии в векторное пространство $E$ основан на рассмотрении полунорм. *Полунормой* называется всякая неотрицательная функция $p$ над $E$, удовлетворяющая условиям

1) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ (*полуаддитивность*);

2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ (*абсолютная однородность*),

где $x, y \in E$, $\lambda \in \Phi$. В частности, $p(0) = 0$. Если выполняется условие

3) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,

то полунорма $p$ называется *нормой*. В этом случае вместо символа $p(x)$ обычно используется символ $\|x\|$. Для каждой полунормы $p$ множество $V_{p\varepsilon} = \{x \in E\colon p(x) < \varepsilon\}$ является выпуклым.

*Для каждого семейства $P$ полунорм в пространстве $E$ существует слабейшая топология в $E$, относительно которой полунормы $p \in P$ непрерывны.* Базу окрестностей нуля в этой топологии образуют всевозможные конечные пересечения множеств $V_{p\varepsilon}$ ($p \in P$, $\varepsilon > 0$). (Окрестности остальных точек определяются с помощью трансляции.) При этом $E$ становится ТВП и называется *локально выпуклым пространством* (*ЛВП*).

Полунормы $p \in P$ называются *базисными полунормами* в пространстве $E$. Топология в $E$ не изменится, если расширить систему $P$ до системы $\bar{P}$, состоящей из всевозможных полунорм

$$\bar{p}(x) = C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x),$$

где $C \geqslant 0$, $p_i$ ($i = 1, \ldots, n$) — произвольный конечный набор базисных полунорм. *Полунорма $p$ в пространстве $E$ непрерывна тогда и только тогда, когда она мажорируется одной из полунорм $\bar{p} \in \bar{P}$.*

*Пространство $E$ отделимо тогда и только тогда, когда для всякого $x \neq 0$ существует базисная полунорма $p$ такая, что $p(x) \neq 0$.*

*Если $E$ отделимо и система $P$ конечна, то $E$ нормируемо (топология в нем определяется нормой $\bar{p} \in \bar{P}$). Если $E$ отделимо и система $P$ счетна, то $E$ метризуемо.*

Если топология в $E$ определяется единственной нормой, то пространство $E$ называется *нормированным*. Всякое полное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

**2.3. Гильбертовы пространства.** Особое место среди нормированных пространств занимают унитарные (см. 1.2.5) и, в частности, гильбертовы пространства. Каждое унитарное пространство со скалярным произведением $(x, y)$ $(x, y \in E)$ снабжается нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Каждое полное унитарное пространство $H$ называется *гильбертовым пространством.*

Элементы $x, y \in H$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Система $e_\alpha \in H$ называется *ортогональной*, если $(e_\alpha, e_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$ и *ортонормированной*, если $(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Система $e_\alpha$ называется *базисом пространства* $H$, если каждый вектор $x \in H$ однозначно записывается в виде ряда

$$x = \sum_\alpha x_\alpha e_\alpha, \qquad x_\alpha \in \Phi,$$

в котором не более счетного числа коэффициентов отлично от нуля. Если $e_\alpha$ — ортонормированный базис, то $x_\alpha = (x, e_\alpha)$, $\|x\|^2 = \sum_\alpha |x_\alpha|^2$. Каждое гильбертово пространство обладает ортонормированным базисом. Мощность этого базиса зависит только от $H$ и обозначается $\dim H$ (*размерность* гильбертова пространства $H$) *).

*Два гильбертовых пространства одинаковой размерности изоморфны* (т. е. между ними существует векторный изоморфизм, сохраняющий скалярное произведение). Если $H$ сепарабельно, то $\dim H = 0, 1, \ldots, \infty$, где $\infty$ — символ счетного множества.

*Прямая сумма* $H = H_1 \oplus H_2$ двух гильбертовых пространств также является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2).$$

*Тензорное произведение* $E = H_1 \otimes H_2$ является унитарным пространством относительно скалярного произведения

$$(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = (x_1, y_1)(x_2, y_2).$$

Пополнение $E$ по соответствующей норме обозначим символом $H = H_1 \overline{\otimes} H_2$. Пространство $H$ называется *полным тензорным произведением* $H_1$, $H_2$.

Для каждого подмножества $S \subset H$ его ортогональное дополнение $S^\perp = \{y \in H: (x, y) = 0$ при $x \in S\}$ является замкнутым подпространством в $H$. Если $H_1$ — замкнутое подпространство в $H$, $H_2$ — его ортогональное дополнение, то $H = H_1 \oplus H_2$.

*) Определения размерности и базиса в $H$ отличны от алгебраических определений размерности и базиса.

**2.4. Примеры ЛВП.** Пусть $X$ — локально компактное пространство. Опишем важнейшие ЛВП, составленные из функций на пространстве $X$.

1. Пространство $C(X)$ всех непрерывных комплексных функций на $X$ наделяется базисными полунормами

$$p_K(f) = \max_{x \in K} |f(x)|, \qquad K \in \mathscr{K},$$

где $\mathscr{K}$ — семейство всех компактных подмножеств $K \subset X$. *Пространство $C(X)$ отделимо и полно.*

*Если $X$ — компакт, то $C(X)$ — банахово пространство относительно нормы $\|f\| = p_X(f)$.*

2. Пространство $L^p_\mu(X)$ всех комплексных функций на $X$, измеримых относительно локально конечной борелевской меры $\mu$ и суммируемых в степени $p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, наделяется нормой

$$\|f\|_p = \left\{\int |f(x)|^p \, d\mu(x)\right\}^{1/p}.$$

При этом функции $f_1$, $f_2$ считаются равными, если они эквивалентны относительно меры $\mu$, т. е., если множество $Z = \{x \in X: f_1(x) \neq f_2(x)\}$ локально нулевое: $\mu(Z \cap K) = 0$ для всякого компактного подмножества $K$. Пространство $L^\infty_\mu(X)$ состоит из всех измеримых существенно ограниченных функций на $X$ и наделяется нормой

$$\|f\|_\infty = \inf_Z \sup_{X \setminus Z} |f(x)|, \qquad Z \in \mathscr{Z},$$

где $\mathscr{Z}$ — семейство всех локально нулевых подмножеств $Z \subset X$. *При этом $L^p_\mu(X)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ являются банаховыми пространствами.*

*Пространство $L^2_\mu(X)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения*

$$(f_1, f_2) = \int f_1(x) \overline{f_2(x)} \, d\mu(x).$$

3. Пусть в каждой точке $x \in X$ задано сепарабельное гильбертово пространство $H_x$, причем $n(x) = \dim H_x$ — измеримая функция относительно меры $\mu$. В этом случае $X$ является объединением борелевских множеств

$$X_n = \{x \in X: n(x) = n\}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \infty.$$

Поскольку пространства $H_x$ $(x \in X_n)$ изоморфны (см. п. 2.3), их можно отождествить с фиксированным гильбертовым пространством $H(n)$. Вектор-функция $f(x)$ со значениями в $H_x$ $(x \in X)$ называется *измеримой*, если все числовые функции $(f(x), h)$ $(h \in H_x)$ измеримы на каждом $X_n$. В этом случае функция $\|f(x)\|$ также измерима. Положим

$$\|f\|^2 = \int \|f(x)\|^2 \, d\mu(x),$$

и пусть $L^2_\mu(X, H_x)$ — векторное пространство всех вектор-функций $f(x)$, для которых этот интеграл существует. *Пространство* $L^2_\mu(X, H_x)$ *является гильбертовым пространством со скалярным произведением*

$$(f_1, f_2) = \int (f_1(x), f_2(x))_x \, d\mu(x),$$

*где* $(\varphi, \psi)_x$ — *скалярное произведение в* $H_x$.

Пространство $H = L^2_\mu(X, H_x)$ называется *прямым интегралом* (или *непрерывной прямой суммой*) *пространств* $H_x$ $(x \in X)$ и обозначается символом

$$H = \int \oplus H_x d\mu(x).$$

Если $X$ дискретно и мера каждой точки равна единице, то этот интеграл называется обычно *прямой ортогональной суммой* пространств $H_x$ $(x \in X)$ и обозначается символом

$$H = \sum_x \oplus H_x.$$

В этом случае все функции $f(x)$ измеримы, причем

$$\|f\|^2 = \sum_x \|f(x)\|^2, \quad f \in H,$$

где не более счетного числа слагаемых отлично от нуля.

Замечание. Каждое пространство $H_x$ можно отождествить с подпространством в $H = \sum\limits_x \oplus H_x$. Однако для прямого интеграла такое отождествление не всегда возможно.

Пример. Пусть $H = L^2_\mu(\mathbf{R})$, где $\mu$ — обычная мера Лебега на $\mathbf{R}$. Разложение функций $f \in H$ в интеграл Фурье равносильно разложению $H$ в прямой интеграл одномерных пространств $H_\lambda = \mathbf{C}e_\lambda$ $(\lambda \in \mathbf{R})$, где $e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ $(x \in \mathbf{R})$. При этом $e_\lambda$ не является элементом $H$.

**2.5. Линейные функционалы.** Важнейшими функциями над векторным пространством $E$ являются *линейные функционалы*, т. е. элементы $E^*$ (см. 1.2.1). Для каждого множества $F \subset E^*$ полунормы

$$p_y(x) = |\langle x, y\rangle|, \quad y \in F,$$

определяют в $E$ слабейшую локально выпуклую топологию, относительно которой все функционалы $y \in F$ (а также их линейные комбинации) непрерывны. Эта топология обозначается $\sigma(E, F)$.

Особенно интересен случай, когда $E$, $F$ — векторные пространства в двойственности относительно формы $\beta(x, y) = \langle x, y\rangle$ (см. 1.2.1). В этом случае $E$, $F$ отделимы соответственно относительно топологий $\sigma(E, F)$, $\sigma(F, E)$. Топологии $\sigma(E, F)$, $\sigma(F, E)$ называются *слабыми топологиями*.

Для каждого ТВП $E$ пусть $E' \subset E^*$ — пространство всех непрерывных линейных функционалов над $E$. Если $E$ — отделимое

ЛВП, то $E'$ достаточно богато в том смысле, что для каждого $x \neq 0$ существует $y \in E'$, для которого $\langle x, y \rangle \neq 0$. В этом случае $E$, $E'$ находятся в двойственности. Топология $\sigma(E, E')$ называется *слабой* (или *ослабленной*) *топологией* в $E$, она слабее исходной топологии в $E$. При этом исходная топология в $E$ называется *сильной*. Топология $\sigma(E', E)$ называется *слабой топологией* в $E'$.

Обычно термины «слабая сходимость», «сильная сходимость» и т. д. относятся соответственно к слабой или сильной топологии в $E$, $E'$.

**2.6. Линейные операторы.** Пусть $E$, $F$ — ЛВП. *Линейный оператор $A$: $E \to F$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждой базисной полунормы $q$ в пространстве $F$ существует непрерывная полунорма $p$ в пространстве $E$* (см. п. 2.2) *такая, что*

$$q(Ax) \leqslant p(x), \qquad x \in E. \tag{$*$}$$

Подмножество ЛВП называется *ограниченным*, если каждая базисная полунорма на нем ограничена. Согласно ($*$) оператор $A$ переводит ограниченные множества в ограниченные *). Если $E$, $F$ — нормированные пространства, то ($*$) принимает вид

$$\|A(x)\| \leqslant C\|x\|, \qquad x \in E.$$

Семейство операторов $\mathcal{M} \subset L(E, F)$ называется *равностепенно непрерывным*, если ($*$) выполняется для всех $A \in \mathcal{M}$ с полунормой $p$, не зависящей от $A \in \mathcal{M}$.

*Линейный оператор $A$: $E \to F$ слабо непрерывен (непрерывен относительно слабых топологий в $E$, $F$) тогда и только тогда, когда существует сопряженный оператор $A'$: $F' \to E'$, т. е. когда*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A'y \rangle, \qquad x \in E, \quad y \in F'.$$

Линейный оператор $A$: $E \to F$ называется *компактным* или *вполне непрерывным*, если он переводит ограниченные множества в относительно компактные (с компактным замыканием).

Линейный оператор $A$: $E \to F$ называется *оператором конечного ранга*, если он является линейной комбинацией одномерных операторов вида

$$A_{zy}x = \langle x, y \rangle z, \qquad x \in E, \quad y \in E', \quad z \in F.$$

Пусть $L_f(E, F)$, $L_k(E, F)$, $L_s(E, F)$, $L_\sigma(E, F)$ — соответственно множества всех операторов конечного ранга, всех компактных, всех непрерывных, всех слабо непрерывных линейных операторов $E \to F$. Тогда

$$L_f(E, F) \subset L_k(E, F) \subset L_s(E, F) \subset L_\sigma(E, F),$$

причем все эти множества являются подпространствами в $L(E, F)$. Если $F$ конечномерно, то все эти пространства совпадают. Если

---

*) Последнее условие равносильно непрерывности $A$, если $E$ метризуемо.

также $E$ конечномерно, то они совпадают с $L(E, F)$. *Если* $E$, $F$ — *пространства Фреше, то* $L_s(E, F) = L_\sigma(E, F)$.

В дальнейшем вместо символов $L(E, E)$, $L_s(E, E)$, ... используются обозначения $L(E)$, $L_s(E)$, ...

**2.7. Операторные топологии.** Пространство $L(E, F)$ и его подпространства, введенные в п. 2.6, обычно наделяются различными локально выпуклыми топологиями.

*Слабая (слабая операторная) топология* в $L(E, F)$ определяется полунормами

$$p_{xy}(A) = |\langle Ax, y\rangle|, \quad x \in E, \quad y \in F'.$$

*Сильная (сильная операторная) топология* в $L(E, F)$ определяется полунормами

$$r_{px}(A) = p(Ax), \quad p \in P, \quad x \in E,$$

где $P$ — базисная система полунорм пространства $E$. Эту топологию называют также *топологией простой сходимости* (сходимость на каждом $x \in E$).

*Равномерная топология* в $L_s(E, F)$ определяется полунормами

$$r_{pS}(A) = \sup_{x \in S} p(Ax), \quad p \in P, \quad S \in \mathfrak{S},$$

где $\mathfrak{S}$ — семейство всех ограниченных множеств в $E$. Если $E, F$ — нормированные пространства, то эта топология определяется операторной нормой

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

В частном случае $E' = L_s(E, \Phi)$ слабая и сильная топологии совпадают между собой и с топологией $\sigma(E', E)$. Равномерная топология в этом случае называется *сильной топологией* в $E'$.

Если $E$ — нормированное пространство, то $E'$ также является нормированным пространством (относительно сильной топологии).

Замечание. Если $H$ — гильбертово пространство, то всякий линейный непрерывный функционал над $H$ имеет вид $f_y(x) = (x, y)$ $(y \in H)$. Отображение $y \mapsto f_y$ является изометрией $H$ на $H$.

**2.8. Неприводимость в ТВП.** В теории ТВП существенную роль играют замкнутые подпространства. В этой связи алгебраическое определение неприводимости (см. 1.3.2) оказывается слишком ограничительным. Среди различных вариантов определения неприводимости в ТВП следующие три наиболее употребительны.

1. Множество $\mathcal{M} \subset L(E)$ называется *топологически неприводимым*, если каждое замкнутое подпространство в $E$, инвариантное относительно операторов $A \in \mathcal{M}$, совпадает с $(0)$ или $E$.

2. Множество $\mathcal{M} \subset L(E)$ называется *$k$-неприводимым*, $k = 1, 2, \ldots$, если каждое замкнутое подпространство в $E \otimes \Phi^k$, инвариантное относительно операторов $A \otimes 1$ $(A \in \mathcal{M})$ имеет вид $E \otimes L$, где $L$ — подпространство в $\Phi^k$.

3. Множество $\mathscr{M} \subset L_s(E)$ называется *вполне неприводимым*, если слабое замыкание линейной оболочки множества $\mathscr{M}$ совпадает с $L_s(E)$.

*Топологическая неприводимость равносильна 1-неприводимости. Условие $(k+1)$-неприводимости сильнее условия $k$-неприводимости. Если $E$ — отделимое ЛВП, то полная неприводимость влечет $k$-неприводимость для всех $k = 1, 2, \ldots$ Из алгебраической неприводимости следует полная неприводимость.*

Для полной неприводимости множества $\mathscr{M} \subset L_s(E)$ достаточно, чтобы каждый оператор конечного ранга можно было слабо аппроксимировать линейными комбинациями элементов множества $\mathscr{M}$.

*Из 2-неприводимости множества $\mathscr{M} \subset L_s(E)$ над полем* $\mathbf{C}$ *следует, что коммутант множества $\mathscr{M}$ в $L_s(E)$ равен* $\mathbf{C} \cdot 1$ (аналог леммы Шура). Известно, что этот результат не следует из 1-неприводимости (в банаховых пространствах).

Разумеется, в конечномерном случае определения 1—3 равносильны. То же верно для полугрупп унитарных операторов в гильбертовом пространстве.

**2.9. Интегрирование вектор-функций.** Операция интегрирования функций может быть обобщена на вектор-функции $f: \Lambda \to E$, где $\Lambda$ — локально компактное пространство, $E$ — отделимое ЛВП. Функция $f$ называется *слабо интегрируемой по мере* $\mu$, если все числовые функции $\langle f(\lambda), y\rangle$ $(y \in E')$ интегрируемы по мере $\mu$. В этом случае символ

$$If = \int f(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

определяется по правилу $\langle If, y\rangle = \int \langle f(\lambda), y\rangle\, d\mu(\lambda)$ как линейный функционал над $E'$, т. е. как элемент $(E')^*$. Функция $f$ называется *интегрируемой*, если $If \in E$. Это верно, например, если $E$ полно, $f$ непрерывна и финитна. В этом случае $If$ является сильным пределом интегральных сумм Римана, причем для каждой непрерывной полунормы $p$

$$p(If) \leqslant \int p(f(\lambda))\, d\mu(\lambda).$$

Операторная функция $T: \Lambda \to L(E)$ называется *слабо интегрируемой по мере* $\mu$, если вектор-функция $T(\lambda)x$ слабо интегрируема по мере $\mu$ для всех $x \in E$. В этом случае символ

$$IT = \int T(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

определяется по формуле $(IT)x = \int T(\lambda)\, x\, d\mu(\lambda)$ как элемент $L(E, (E')^*)$. Функция $T$ называется *интегрируемой*, если $IT \in L(E)$. Это верно, если $E$ полно, $T$ непрерывна и финитна. В этом случае $IT$ является сильным пределом интегральных сумм Римана.

Если $E$, $F$ — векторные пространства в двойственности и отображения $(\lambda, x) \mapsto T(\lambda)x$, $(\lambda, y) \mapsto T(\lambda)^*y$ непрерывны соответственно на $\Lambda \times E'$, $\Lambda \times F$, то операторные функции $T(\lambda)$, $T(\lambda)^*$ интегрируемы, причем

$$\left\langle \int T(\lambda)\, x\, d\mu(\lambda),\, y \right\rangle = \left\langle x,\, \int T(\lambda)^*\, y\, d\mu(\lambda) \right\rangle.$$

Литература: [3], [4], [15], [19], [30].

## § 3. Непрерывные представления

**3.1. Основные определения.** Пусть $G$ — топологическая группа, $E$ — ТВП. Представление $T$ группы $G$ в пространстве $E$ называется *непрерывным*, если вектор-функция $T(g)\xi$ $(g \in G,\ \xi \in E)$ непрерывна по совокупности переменных (т. е. непрерывна на $G \times E$).

Если вектор-функция $T(g)\xi$ раздельно непрерывна (непрерывна на $E$ при каждом фиксированном $g$ и непрерывна на $G$ при каждом фиксированном $\xi$), то представление $T$ называется *раздельно непрерывным*. Раздельная непрерывность означает, что $T(g) \in L_s(E)$ для всех $g \in G$ и операторная функция $T(g)$ сильно непрерывна. Если $T$ раздельно непрерывно, то контрагредиентное представление $\hat{T}$ в сопряженном пространстве $E'$ раздельно непрерывно относительно слабой топологии.

В некоторых случаях, например, *если $G$ локально компактна и $E$ — пространство Фреше, из раздельной непрерывности следует непрерывность.*

В дальнейшем всюду предполагается, что $E$ — отделимое ЛВП.

Представление $T$ называется *равностепенно непрерывным*, если семейство операторов $T(g)$ $(g \in G)$ равностепенно непрерывно (см. п. 2.6). *Если $G$ компактна, то всякое ее непрерывное представление равностепенно непрерывно.*

*Если $G$ локально компактна, то всякое ее непрерывное представление равностепенно непрерывно на каждом компактном подмножестве $K \subset G$. В частности, если $E$ — нормированное пространство, то $\|T(g)\| \leqslant C_K$ при $g \in K$.*

Представление $T$ называется *неприводимым* в смысле одного из определений п. 2.8, если семейство $T(g)$ $(g \in G)$ неприводимо в соответствующем смысле. Два представления называются *эквивалентными*, если существует топологический сплетающий изоморфизм между пространствами этих представлений.

Поскольку для 2-неприводимых представлений выполняется аналог леммы Шура (см. п. 2.8), то *всякое 2-неприводимое (в частности, вполне неприводимое) представление абелевой группы в комплексном ТВП $E$ со значениями в $L_s(E)$ одномерно.*

Условие непрерывности в ряде случаев существенно облегчает задачу описания представлений.

Примеры. 1. Регулярное представление локально компактной группы $G$ непрерывно в $C(G)$, $L^p_\mu(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Если $\mu$ — левая (правая) мера Хаара на $G$, то левое (правое) регулярное представление унитарно в $L^2_\mu(G)$. 2. Всякое непрерывное конечномерное представление аддитивной группы $G$ имеет вид $U(t) = e^{tA}$ $(A \in \operatorname{End} E)$. 3. Всякое вполне неприводимое раздельно непрерывное представление группы $G$ над полем $\mathbf{C}$ одномерно и имеет вид $e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbf{C})$.

**3.2. Унитарные представления.** Наиболее изученным и во многих отношениях замечательным классом представлений является класс унитарных представлений в гильбертовых пространствах. Если $T$ — унитарное представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $H$, то $\|T(g)\| = 1$ для всех $g \in G$, откуда $T_g \in L_s(H)$ для всех $g \in G$.

*Размерностью унитарного представления* $T$ в гильбертовом пространстве $H$ принято называть (кардинальное) число $\dim H$. (Если размерность бесконечна, то это определение отлично от определения алгебраической размерности).

Для унитарных представлений топологической группы $G$ *из слабой непрерывности* $T(g)$ (хотя бы в одной точке $g_0 \in G$) *следует сильная непрерывность* $T(g)$ *на группе* $G$. Отсюда, в свою очередь, следует непрерывность представления $T$. Равностепенная непрерывность в данном случае очевидна, поскольку $\|T(g)\| = 1$.

*Если $G$ локально компактна, то для непрерывности представления $T$ достаточна слабая измеримость $T(g)$ (т. е. измеримость функций $(T(g)\xi, \xi)$ $(\xi \in H)$) относительно меры Хаара на $G$.*

Для унитарных представлений все определения неприводимости 1, 2, 3 (см. п. 2.8) равносильны. Топологически неприводимые унитарные представления принято называть *неприводимыми* (хотя это понятие отличается от понятия алгебраической неприводимости). *Неприводимость унитарного представления равносильна тому, что его коммутант в $L_s(H)$ равен* $\mathbf{C} \cdot 1$ (аналог леммы Шура). В частности, каждое неприводимое унитарное представление абелевой группы одномерно.

В пространстве унитарного представления каждое замкнутое инвариантное подпространство имеет инвариантное (ортогональное) дополнение. В частности, *каждое конечномерное унитарное представление вполне приводимо.*

Для унитарных представлений существование топологического сплетающего изоморфизма между пространствами представлений равносильно существованию унитарного сплетающего оператора между пространствами этих представлений. Соответственно, вместо термина «эквивалентность» иногда используется термин «унитарная эквивалентность».

Унитарные представления $T_1$, $T_2$ называются *дизъюнктными*, если ни одно подпредставление $T_1$ не эквивалентно ни одному из подпредставлений $T_2$.

Для каждой пары унитарных представлений $T_1$, $T_2$ в гильбертовых пространствах $H_1$, $H_2$ представление $T_1 \oplus T_2$ унитарно в гильбертовом пространстве $H_1 \oplus H_2$ и представление $T_1 \otimes T_2$ в пространстве $H_1 \otimes H_2$ продолжается до унитарного представления в гильбертовом пространстве $H_1 \overline{\otimes} H_2$ (см. п. 2.3).

**3.3. Дуальные объекты.** Пусть $G$ — локально компактная группа. Символом $\widehat{G}$ обычно обозначается множество всех классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы $G$ в гильбертовых пространствах. Множество $\widehat{G}$ называется *дуальным объектом* или *дуальным пространством* для группы $G$.

Пространство $\widehat{G}$ снабжается топологией следующим образом. Пусть $T_\lambda$ — представление класса $\lambda$ в гильбертовом пространстве $H_\lambda$ для каждого $\lambda \in \widehat{G}$. Заметим, что эквивалентные представления обладают одинаковым запасом матричных элементов

$$t_{\lambda\xi}(g) = (T_\lambda(g)\xi, \xi), \qquad \xi \in H_\lambda.$$

Точка $\lambda \in \widehat{G}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \widehat{G}$, если каждый матричный элемент $t_{\lambda\xi}$ $(\xi \in H_\lambda)$ может быть аппроксимирован матричными элементами $t_{\mu\eta}$ $(\mu \in M,\ \eta \in H_\mu)$ равномерно на каждом компакте $K \subset G$.

Соответственно множество $M \subset \widehat{G}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, и *открытым*, если его дополнение замкнуто.

Если $G$ — абелева группа, то $\widehat{G}$ — множество всех унитарных характеров группы $G$. В этом случае $\widehat{G}$ также является абелевой группой относительно умножения характеров:

$$(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g),$$

причем единицей этой группы является единичный характер $\varepsilon(g) \equiv 1$. Группа $\widehat{G}$ локально компактна (относительно введенной выше топологии) и называется *дуальной группой* для группы $G$.

При этом *группы* $G$, $\widehat{\widehat{G}}$ *изоморфны* (п р и н ц и п  д в о й с т в е н н о с т и  П о н т р я г и н а). *Группа $G$ компактна тогда и только тогда, когда группа $\widehat{G}$ дискретна.*

В общем случае дуальный объект не является группой. Однако существуют естественные обобщения принципа двойственности Понтрягина.

П р и м е р. Для аддитивных групп $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$ имеем $\widehat{\mathbf{R}} \simeq \mathbf{R}$, $\widehat{\mathbf{Z}} \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (группа вращений окружности).

**3.4. Представления компактных групп.** Теория представлений компактных групп в значительной степени подобна теории представлений конечных групп (см. 1.3.8).

Для непрерывных представлений компактной группы $G$ имеют место следующие результаты.

1. *Всякое топологически неприводимое представление конечномерно и унитарно относительно некоторого скалярного произведения в пространстве представления.*

2. *Дуальное пространство $\widehat{G}$ дискретно. Матричные элементы*

$$t^\lambda_{ij}(g) = (T_\lambda(g)e_j, e_i), \quad \lambda \in \widehat{G}, \quad i, j = 1, \ldots, n_\lambda,$$

*где $e_i$ — ортонормированный базис $H_\lambda$ ($n_\lambda = \dim H_\lambda$), образуют ортогональный базис в $L^2_\mu(G)$, где $\mu$ — мера Хаара на $G$. Если $\mu(G) = 1$, то*

$$\| t^\lambda_{ij} \| = n_\lambda^{-1/2}, \qquad i, j = 1, \ldots, n_\lambda.$$

3. *Характеры $t_\lambda(g) = \operatorname{tr} T_\lambda(g)$ образуют ортонормированный базис в подпространстве $Z(G) \subset L^2_\mu(G)$, составленном из функций $f$ таких, что $f(gh) = f(hg)$ для всех $g, h \in G$ (такие функции называются центральными).*

4. *Для каждого унитарного представления $T$ в гильбертовом пространстве $H$ оператор*

$$P_\lambda = \int \overline{t_\lambda(g)}\, T(g)\, dg$$

*является эрмитовым проектором $H$ на максимальное подпространство $H_\lambda$, представление в котором кратно $T_\lambda$. При этом*

$$H = \bigoplus_\lambda H_\lambda.$$

5. *Для каждого представления в полном ЛВП $E$ оператор $P_\lambda$ проектирует $E$ на максимальное подпространство $E_\lambda$, представление в котором кратно $T_\lambda$. Линейные комбинации операторов $P_\lambda$ слабо аппроксимируют единичный оператор в $E$.*

Линейные комбинации матричных элементов $t^\lambda_{ij}$ называются *сферическими функциями* на группе $G$. Множество $S(G)$ всех сферических функций образует алгебру относительно умножения, всюду плотную в $C(G)$. Иначе говоря, *каждая непрерывная функция на $G$ является равномерным пределом последовательности сферических функций.*

*Пространство $\widehat{G}$ конечно тогда и только тогда, когда группа $G$ конечна.* При этом результаты 1—5 сводятся к результатам 1.3.8. В частности, две теоремы Бернсайда, приведенные в 1.3.8, являются следствиями теорем 2, 3.

*Если $G_0$ — замкнутая подгруппа в $G$, $T_\lambda \downarrow G_0$ неприводимо для всех $\lambda \in \widehat{G}$, то $G_0 = G$.*

**3.5. Разложение унитарных представлений.** При переходе к локально компактным группам ситуация усложняется, поскольку дуальное пространство $\widehat{G}$ не обязано быть дискретным. Соответственно вместо прямых ортогональных сумм приходится рассматривать прямые интегралы гильбертовых пространств (см. п. 2.4).

Основная теорема теории унитарных представлений утверждает, что всякое непрерывное унитарное представление локально компактной группы $G$ в сепарабельном гильбертовом пространстве может быть разложено в прямой интеграл неприводимых представлений. Для точной формулировки результата требуется определение прямого интеграла операторов.

Пусть $H = \int \oplus H_\lambda d\mu(\lambda)$ (см. п. 2.4). Операторная функция $A_\lambda$ со значениями в $L_s(H_\lambda)$ называется *измеримой*, если для каждой измеримой вектор-функции $f(\lambda)$ вектор-функция

$$(Af)(\lambda) = A_\lambda f(\lambda), \qquad \lambda \in \Lambda,$$

измерима. Оператор $A$ является линейным непрерывным оператором в пространстве $H$ тогда и только тогда, когда числовая функция $\|A_\lambda\|$ существенно ограничена. При этом $\|A\| = \|A_\lambda\|_\infty$ (см. п. 2.4). Оператор $A$ называется *прямым интегралом* операторов $A_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) и обозначается символом

$$A = \int \oplus A_\lambda d\mu(\lambda).$$

Представление $T$ в пространстве $H$ называется *прямым интегралом представлений* $T_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$), если

$$T(g) = \int \oplus T_\lambda(g)\, d\mu(\lambda), \qquad g \in G. \qquad (*)$$

Основная теорема формулируется теперь следующим образом. *Каждое непрерывное унитарное представление $T$ эквивалентно представлению вида* (*), *где все* (*или почти все*) *представления $T_\lambda$ непрерывны, унитарны и неприводимы.*

Если все (или почти все) представления $T_\lambda$ попарно дизъюнктны (см. п. 3.2), то говорят, что представление $T$ имеет *простой спектр*. Если $T \simeq S \otimes 1_n$, где $S$ — представление с простым спектром, $1_n$ — единичное представление в гильбертовом пространстве размерности $n = 0, 1, \ldots, \infty$, то говорят, что $T$ имеет *$n$-кратный спектр*. Если $T$ — прямая ортогональная сумма представлений с $n$-кратными спектрами ($n = 0, 1, \ldots, \infty$), то говорят, что *$T$ — представление класса* I.

Существуют локально компактные группы, у которых все унитарные представления класса I. Всякая такая группа называется *группой типа* I. В частности, *всякая коммутативная и всякая компактная группа являются группами типа* I (см. также 5.1.5).

Если $G$ — группа типа I со счетной базой окрестностей, то разложение (*) может быть переписано в виде

$$T(g) = \int \oplus \tilde{T}_\lambda(g)\, d\tilde{\mu}(\lambda), \qquad \lambda \in \hat{G}, \qquad (**)$$

где $\tilde{T}_\lambda \simeq T_\lambda \otimes 1_{n(\lambda)}$, $T_\lambda$ — неприводимое представление класса $\lambda$, $n(\lambda)$ — измеримая функция от $\lambda$.

В отличие от (*) разложение (**) однозначно (для группы типа I). Это означает, что *мера $\tilde{\mu}$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности, и то же верно для функции $n(\lambda)$.*

Разложение (**) содержит как весьма частный случай (при $G = \mathbf{R}$) спектральную теорему для унитарных операторов в гильбертовом пространстве.

З а м е ч а н и е. Для произвольных (неунитарных) представлений разложимость в прямую сумму не имеет места даже в конечномерном случае. Например, представление $e^{tA}$ аддитивной группы $\mathbf{R}$ (см. п. 3.1) неразложимо, если $A$ — неразложимая жорданова клетка.

**3.6. Индуцированные представления.** Для построения неприводимых представлений данной группы $G$ обычно используется конструкция индуцированных представлений (см. 1.3.7). Использование этого метода основано на удачном выборе подгруппы $G_0$, с которой индуцируется представление, а также на выборе функционального пространства, в котором действует представление.

Если $G$ — локально компактная группа, $G_0$ — ее замкнутая подгруппа, то естественно выделить следующие классы индуцированных представлений.

I. $\mathscr{C}$-и н д у ц и р о в а н н ы е п р е д с т а в л е н и я. Пусть $T_0$ — непрерывное представление группы $G_0$ в ЛВП $E_0$. Пространство $C(E_0, G)$ всех $E_0$-значных непрерывных функций на $G$ наделяется полунормами

$$p(f) = \max_{x \in K} p_0 |f(x)|, \qquad p_0 \in P_0, \quad K \in \mathscr{K},$$

где $P_0$ — базисная система полунорм в $E_0$, $\mathscr{K}$ — семейство всех компактных подмножеств $K \subset G$. Подпространство

$$C(T_0, E_0, G) = \{f \in C(E_0, G): f(hg) = T_0(h)f(g), \quad h \in G_0\}$$

замкнуто и инвариантно относительно представления $R(g)f(x) = f(xg)$ $(x, g \in G)$. Представление $R$ непрерывно. Сужение этого представления на $C(T_0, E_0, G)$ является подпредставлением $T_0 \uparrow G$. В классе $C$-индуцированных представлений, как и в классе всех индуцированных представлений, выполняется правило транзитивности (см. 1.3.7).

II. У н и т а р н ы е и н д у ц и р о в а н н ы е п р е д с т а в л е н и я. Пусть $T_0$ — непрерывное представление группы $G_0$ в гильбертовом пространстве $H_0$, имеющее вид

$$T_0(h) = \{\delta(h)\}^{1/2} U_0(h), \qquad h \in G_0,$$

где $\delta(h) = \Delta_0(h)/\Delta(h)$ — характер группы $G_0$, определенный в п. 1.5, $U_0$ — унитарное представление группы $G_0$. Оказывается, *на $G$ существует мера $\mu$ такая, что представление $U = T_0 \uparrow G$ унитарно в гильбертовом пространстве*

$$H = \int \oplus H_0 d\mu(g)$$

(см. п. 2.4). Мера $\mu$ имеет вид $d\mu(g) = \rho(g) d_r g$, где функция $\rho$ неотрицательна, непрерывна, удовлетворяет условию

$$\int \rho(hg)\, d_r h = 1, \qquad h \in G_0,$$

и ее носитель имеет компактное пересечение с каждым правым классом смежности $G_0 g$ ($g \in G$). Унитарное представление $U$ обозначается $\mathrm{Ind}(U_0, G_0, G)$.

Представление $U$ может быть реализовано, как в 1.3.7, формулой вида

$$U(g)f(x) = \tau(x, g)f(x \circ g)$$

в гильбертовом пространстве

$$H = \int \oplus H_0 d\nu(x),$$

где $\nu$ — квазиинвариантная мера на пространстве $X = G_0 \backslash G$. При этом операторы $\tau(x, g)$ имеют вид

$$\tau(x, g) = \{d\nu(xg)/d\nu(x)\}^{1/2} u(x, g),$$

где $u(x, g)$ — унитарный оператор в $H_0$.

В классе унитарно индуцированных представлений также выполняется правило транзитивности (см. 1.3.7).

Если $G$-компактна, то $\delta(h) \equiv 1$. Для представлений компактной группы $G$ выполняется правило двойственности Фробениуса: *представление* $T_\lambda$ ($\lambda \in \widehat{G}$), *входит в* $\mathrm{Ind}(U_0, G_0, G)$ *с конечной кратностью, равной кратности вхождения* $U_0$ *в сужение* $T_\lambda \downarrow G_0$.

**3.7. Системы импримитивности.** Существует простой критерий эквивалентности данного унитарного представления группы $G$ представлению вида $\mathrm{Ind}(U_0, G_0, G)$.

Пусть $T$ — унитарное представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $H$. Положим $X = G_0 \backslash G$, и пусть для каждого борелевского подмножества $A \subset X$ определен эрмитов проекционный оператор $P(A)$ в пространстве $H$, причем

1) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2)$,

2) $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Семейство $P(A)$ называется *проекционной мерой* или *спектральной мерой* в $X$. Спектральная мера $P(A)$ называется *системой импримитивности* для представления $T$, если

$$P(A)T(g) = T(g)P(Ag), \quad g \in G,$$

для всех борелевских множеств $A \subset X$. *Представление $T$ эквивалентно* $\mathrm{ind}(U_0, G_0, G)$ *тогда и только тогда, когда в однородном пространстве $X$ существует система импримитивности для представления $T$* (теорема Макки).

Вместо спектральной меры $P(A)$ можно рассматривать операторный интеграл

$$P(f) = \int f(x)\, P(dx), \quad f \in C_0(X),$$

определяемый как сильный предел интегральных сумм Лебега. Спектральная мера $P(A)$ является системой импримитивности для представления $T$ тогда и только тогда, когда

$$P(f)T(g) = T(g)P(fg), \quad g \in G, \quad f \in G_0(G),$$

**3.8. Малая теорема Макки.** Если группа $G$ содержит коммутативный нормальный делитель, то описание ее неприводимых унитарных представлений может быть сведено к аналогичной задаче для некоторых подгрупп $G_0 \subset G$.

Пусть $G$ — локально компактная группа, $N$ — ее замкнутый коммутативный нормальный делитель. Для каждого характера $\chi$ группы $N$ положим

$$(\chi g)(n) = \chi(gng^{-1}), \quad n \in N, \quad g \in G.$$

Дуальная группа $\widehat{N}$ становится правым $G$-пространством относительно этого действия. Скажем, что *действие $G$ регулярно*, если его орбиты локально замкнуты (см. п. 1.3),

Для каждой орбиты $\Omega \subset \widehat{N}$ фиксируем точку $\omega \in \Omega$, и пусть $G_0$ — стационарная подгруппа точки $\omega$. Неприводимое унитарное представление $U_0$ группы $G_0$ назовем *допустимым*, если $U_0(n) = \omega(n) \cdot 1$ $(n \in N)$. Заметим, что стационарная подгруппа $G_1$ каждой точки $\chi \in \Omega$ сопряжена $G_0$, т. е. имеет вид $G_1 = gG_0g^{-1}$ (где $g$: $\omega \to \chi$). Представление $U_1$ группы $G_1$ назовем *согласованным* с представлением $U_0$ группы $G_0$, если

$$U_1(ghg^{-1}) = U_0(h), \quad h \in G_0.$$

Если действие $G$ в $\widehat{N}$ регулярно, то имеет место следующая («малая») теорема Макки:

1) *Для каждого допустимого представления $U_0$ группы $G_0$ представление* $\mathrm{Ind}\,(U_0, G_0, G)$ *неприводимо, причем эквивалентно* $\mathrm{Ind}\,(U_1, G_1, G)$ *тогда и только тогда, когда подгруппы $G_0$, $G_1$ сопряжены и представления $U_0$, $U_1$ согласованы.*

2) *Каждое неприводимое унитарное представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $H$ эквивалентно одному из представлений* $\mathrm{Ind}\,(U_0, G_0, G)$ *с допустимым $U_0$.*

Замечание. Если $G = K \circ N$ (полупрямое произведение), то $G_0 = K_0 \cdot N$, где $K_0$ — подгруппа в $K$ (иногда называемая *малой группой*), причем $U_0 \downarrow K_0$ неприводимо.

Теорема Макки допускает также более общую формулировку для произвольного (некоммутативного) замкнутого нормального делителя $N$.

**3.9. Слабая эквивалентность.** С каждым неприводимым представлением $T$ локально компактной группы $G$ в ЛВП $E$ естественно связать минимальное замкнутое подмножество $\mathcal{M}_T \subset C(G)$, порожденное матричными элементами $\langle T(g)\xi, \xi' \rangle$ ($\xi \in E$, $\xi' \in E'$). Представления $T_1$, $T_2$ называются *функционально эквивалентными* или *слабо эквивалентными*, если $\mathcal{M}_{T_1} = \mathcal{M}_{T_2}$.

Далее, пусть $\check{G}$ — множество классов слабой эквивалентности вполне неприводимых представлений группы $G$. Неприводимые унитарные представления группы $G$ слабо эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны, поэтому $\widehat{G} \subset \check{G}$. Множество $\check{G}$ называется *дуальным сверхобъектом* или *неунитарным дуальным пространством* для группы $G$.

Топология в $\tilde{G}$ вводится так же, как в случае $\hat{G}$ (см. п. 3.3), с той разницей, что вместо $t_{\lambda\xi}$ рассматриваются матричные элементы $\langle T_\lambda(g)\xi, \eta\rangle$ $(\lambda \in \tilde{G})$. При этом топология $\hat{G}$ индуцируется топологией $\tilde{G}$. Существенно, что эти топологии не обязательно отделимы. Если $G$ — типа I, то топология в $\tilde{G}$ полуотделима.

Задача описания дуальных объектов $\hat{G}$, $\tilde{G}$ решена в настоящее время лишь для отдельных классов групп (см. гл. 5). При этом во многих случаях пространство $\tilde{G}$ устроено проще $\hat{G}$ (см. гл. 5).

Говорят, что представление $T_1$ *слабо содержится в представлении* $T_2$, если $\mathcal{M}_{T_1} \subset \mathcal{M}_{T_2}$. Если $G$ компактна, $T_1$ неприводимо, то $\mathcal{M}_{T_1} \subset \mathcal{M}_{T_2}$ тогда и только тогда, когда $T_1$ содержится в разложении $T_2$ на неприводимые представления.

Говорят, что представление $T$ допускает *спектральный синтез*, если его матричные элементы аппроксимируются в $C(G)$ линейными комбинациями матричных элементов неприводимых представлений, слабо содержащихся в $T$. *Если $G$ компактна, то всякое ее непрерывное представление в полном ЛВП допускает спектральный синтез.*

Литература: [3], [12], [15], [18], [19], [25].

# ГЛАВА 3

# АЛГЕБРЫ ЛИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

С теорией групп Ли тесно связана теория специального класса алгебр, называемых алгебрами Ли. Алгебры Ли не являются, вообще говоря, ни коммутативными, ни ассоциативными. Следует помнить, что аксиомы алгебры Ли выполняются автоматически, если ввести в ассоциативной алгебре новую операцию, сопоставляющую паре элементов этой алгебры их коммутатор ($[x, y] = xy - yx$). Однако в действительности закон умножения в каждой алгебре Ли может быть выражен с помощью коммутаторов некоторой вспомогательной ассоциативной алгебры (см. § 5).

В §§ 1—3 излагается структурная теория алгебр Ли, которая, в сущности, может рассматриваться как часть теории представлений алгебр Ли (изучение присоединенных представлений). Особое внимание уделяется конечномерным алгебрам Ли над полями $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, ввиду их связи с группами Ли. В §§ 4, 5 изложены элементы теории представлений (конечномерных и бесконечномерных) для конечномерных алгебр Ли над полями $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

В соответствии с традицией (принятой в теории групп Ли), алгебры Ли обозначаются малыми готическими буквами.

## § 1. Алгебры Ли

**1.1. Определение алгебр Ли.** Алгебра $\mathfrak{g}$ над полем $\Phi$ называется *алгеброй Ли*, если умножение в ней антикоммутативно и удовлетворяет специальному тождеству, называемому тождеством Якоби. Произведение элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ принято обозначать символом $[x, y]$ и называть *коммутатором* элементов $x, y$. Коммутатор является билинейной функцией от $x, y$ и удовлетворяет аксиомам

1) $[x, x] = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$,

2) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Следствием 1) и билинейности является тождество $[x, y] = -[y, x]$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$ (*антикоммутативность*). Тождество 2) является заменой ассоциативности и называется *тождеством Якоби*.

Понятия гомоморфизма и изоморфизма для алгебр Ли определяются так же, как для ассоциативных алгебр (см. 1.2.5).

Если $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли, то закон умножения в алгебре $\mathfrak{g}$ вполне определяется соотношениями коммутации для базисных векторов $e_i \in \mathfrak{g}$:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k, \quad i, j = 1, \ldots, n. \qquad (*)$$

Коэффициенты $c_{ij}^k$ называются *структурными константами* алгебры $\mathfrak{g}$ (относительно базиса $\{e_i\}$). Структурные константы определяют алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма.

Структурные константы антисимметричны по нижним индексам (антикоммутативность) и удовлетворяют системе квадратичных уравнений (тождество Якоби).

Если $\tilde{\Phi}$ — расширение поля $\Phi$, то алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$, определяемая над полем $\tilde{\Phi}$ соотношениями коммутации (*), называется *расширением алгебры* $\mathfrak{g}$ над полем $\Phi$.

**1.2. Примеры алгебр Ли.** Среди последующих примеров пример 1 является основным и, в сущности, универсальным (см. п. 5.1).

1. Каждая ассоциативная алгебра $\mathscr{A}$ над полем $\Phi$ является алгеброй Ли относительно операции

$$[x, y] = xy - yx, \quad x, y \in \mathscr{A}.$$

2. Подалгебра Ли алгебры $\mathscr{A}$ не обязательно является подалгеброй ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$. Например, алгебра Ли $\mathscr{A} = \operatorname{Mat}_n \Phi$ содержит подалгебры

$$\mathscr{A}_0 = \{a \in \mathscr{A}\colon \operatorname{tr} a = 0\}, \quad \mathscr{A}_1 = \{a \in \mathscr{A}\colon a' = -a\},$$

где $\operatorname{tr} a$ означает *след матрицы* $a$.

3. Линейное преобразование $\mathscr{D}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, где $\mathscr{A}$ — любая (не обязательно ассоциативная) алгебра, называется *дифференцированием*, если

$$\mathscr{D}(xy) = \mathscr{D}(x)y + x\mathscr{D}(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathscr{A}.$$

Множество $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ всех дифференцирований алгебры $\mathscr{A}$ является алгеброй Ли (подалгеброй $\operatorname{End} \mathscr{A}$). Дифференцирование

$$\mathscr{D}_a x = ax - xa, \quad a, x \in \mathscr{A},$$

называется *внутренним*. Множество $\mathscr{D}_0(\mathscr{A})$ всех внутренних дифференцирований алгебры $\mathscr{A}$ является подалгеброй $\mathscr{D}(\mathscr{A})$.

4. Содержательные примеры алгебр Ли связаны с понятием гладких векторных полей на многообразиях (см. 4.1.5), в частности, на группах Ли (см. 4.2.3).

5. Векторное пространство $\Phi^3$ является алгеброй Ли относительно векторного произведения, определяемого в базисе $e_1, e_2, e_3$ соотношениями коммутации

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

(остальные коммутаторы равны нулю либо получаются из данных перестановкой соотношений).

6. Если $\mathfrak{g}$ — коммутативная алгебра Ли, то $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$. Всякое векторное пространство $\mathfrak{g}$ является коммутативной алгеброй Ли относительно операции $[x, y] = 0$.

7. Если $\dim \mathfrak{g} = 1$, то $\mathfrak{g}$ коммутативна. Если $\dim \mathfrak{g} = 2$, то либо $\mathfrak{g}$ коммутативна, либо в $\mathfrak{g}$ существует базис $e_1, e_2$ с соотношениями

коммутации
$$[e_1, e_2] = e_1.$$

**1.3. Представления в векторных пространствах.** *Представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве $V$ называется всякий гомоморфизм $\varphi$ алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\operatorname{End} V$. Иначе говоря, операторная функция $\varphi(x)$ линейно зависит от $x \in \mathfrak{g}$ и удовлетворяет тождеству
$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad x, y \in \mathfrak{g},$$
где коммутатор в правой части имеет вид $\varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$ (см. п. 1.2, пример 1). Понятия подпредставления, неприводимости и эквивалентности представлений вводятся так же, как для групп и ассоциативных алгебр (см. § 3). Ядро $\ker \varphi$ определяется как $\{x \in \mathfrak{g}\colon \varphi(x) = 0\}$.

Представление $\varphi$ называется *точным*, если $\ker \varphi = (0)$. В этом случае алгебры $\mathfrak{g}$, $\varphi(\mathfrak{g})$ изоморфны. Нетрудно показать, что всякая алгебра Ли имеет точное представление. Более глубоким фактом является теорема Адо, согласно которой *всякая конечномерная алгебра Ли имеет точное конечномерное представление*. Таким образом, всякая конечномерная алгебра Ли изоморфна линейной алгебре Ли $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End} V$, $\dim V < \infty$.

*Инвариантом алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ в пространстве $V$ представления $\varphi$ называется всякий вектор $\xi \in V$ такой, что $\varphi(x)\xi = 0$, $x \in \mathfrak{g}$. *Тензорным произведением представлений* $\varphi$, $\psi$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ в пространствах $E$, $F$ называется представление $\pi = \varphi \otimes \psi$, определяемое в пространстве $V = E \otimes F$ по правилу
$$\pi(x)(\xi \otimes \eta) = \varphi(x)\xi \otimes \eta + \xi \otimes \psi(x)\eta, \quad x \in \mathfrak{g}.$$
Представления $\varphi$, $\psi$ называются *дуальными* относительно билинейной невырожденной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, если $\psi(x) = -\varphi(x)^*$ относительно этой формы, т. е.
$$\langle \varphi(x)\xi, \eta \rangle + \langle \xi, \psi(x)\eta \rangle = 0, \quad x \in \mathfrak{g}.$$
В частности, каждое представление $\varphi$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $V$ дуально представлению $\hat{\varphi}(x) = -\varphi(x)^*$ в пространстве $V^*$. Представление $\hat{\varphi}$ называется *контрагредиентным* (или *сопряженным*) представлению $\varphi$.

**1.4. Присоединенное представление.** Структура алгебры Ли $\mathfrak{g}$ может быть выражена в терминах специального представления алгебры $\mathfrak{g}$, действующего в $\mathfrak{g}$. Для каждого $x \in \mathfrak{g}$ оператор
$$\operatorname{ad} x\colon\ y \mapsto [x, y], \quad y \in \mathfrak{g},$$
является линейным преобразованием $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. В силу тождества Якоби $\operatorname{ad} x \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$ (см. п. 1.2, пример 3). Также в силу тождества Якоби отображение $x \mapsto \operatorname{ad} x$ является представлением алгебры $\mathfrak{g}$.

Представление $x \mapsto \operatorname{ad} x$ называется *присоединенным* (или *регулярным*) представлением алгебры $\mathfrak{g}$.

Подпространства $\mathfrak{g}$, инвариантные относительно присоединенного представления, суть в точность идеалы алгебры $\mathfrak{g}$ (см. 1.4.2). Ввиду условия антикоммутативности в алгебре $\mathfrak{g}$ нет различия между левыми и правыми идеалами. Если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — идеалы $\mathfrak{g}$, то подпространство $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, натянутое на коммутаторы $[a, b]$ ($a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$), также является идеалом $\mathfrak{g}$ (поскольку $\operatorname{ad} x \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$).

В частности, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ является идеалом $\mathfrak{g}$ и называется производной (или *коммутаторной*) *подалгеброй* алгебры $\mathfrak{g}$. Последовательные производные $\mathfrak{g}^{(k)} = (\mathfrak{g}^{k-1})'$ ($k = 1, 2, \ldots$), $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ являются идеалами $\mathfrak{g}$ (*производный ряд* алгебры $\mathfrak{g}$). Идеалы $\mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}]$ ($k = 1, 2, \ldots$), $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ образуют так называемый (*нижний*) *центральный ряд* алгебры $\mathfrak{g}$. При этом

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}_{k+1} \subset \mathfrak{g}_k.$$

Подпространство $\mathfrak{z} = \{z \in \mathfrak{g}\colon (\operatorname{ad} x)z = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}\}$ является идеалом $\mathfrak{g}$ и называется *центром алгебры* $\mathfrak{g}$.

Если $\mathfrak{g}_0$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ также является алгеброй Ли и называется *факторалгеброй* алгебры $\mathfrak{g}$ по идеалу $\mathfrak{g}_0$. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ — прямая сумма идеалов $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, то $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = (0)$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_2 \simeq \mathfrak{g}_1$.

**1.5. Разрешимые алгебры Ли.** Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой*, если она имеет конечный производный ряд, т. е. если $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ при некотором $n$. Минимальное из этих чисел $n$ называется *длиной* (или *высотой*) *разрешимости* алгебры $\mathfrak{g}$. Если $n = 1$, то алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативна.

Каждая подалгебра и каждая факторалгебра разрешимой алгебры Ли разрешима. Если $\mathfrak{g}_0$ — разрешимый идеал и факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ разрешима, то алгебра $\mathfrak{g}$ также разрешима. Алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда в ней существует цепочка вложенных идеалов $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_m = (0)$ таких, что факторалгебры $\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}$ коммутативны. Частным случаем такой цепочки является производный ряд алгебры $\mathfrak{g}$.

Если основное поле алгебраически замкнуто и $\dim \mathfrak{g} < \infty$, то указанную выше цепочку можно выбрать так, чтобы $\dim \mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1} = 1$. Иначе говоря, алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда ее присоединенное представление треугольно (т. е. существует базис, в котором все операторы $\operatorname{ad} x$ задаются верхними треугольными матрицами).

*Всякое неприводимое представление разрешимой алгебры Ли в конечномерном векторном пространстве $V$ коммутативно* (теорема Ли). *Если основное поле алгебраически замкнуто, то отсюда следует, что* $\dim V = 1$. *Соответственно всякое конечномерное представление разрешимой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем треугольно.*

Пример. Все алгебры Ли размерности не больше 2 разрешимы (см. п. 1.2, пример 7).

**1.6. Нильпотентные алгебры Ли.** Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной,* если она имеет конечный центральный ряд, т. е. если $\mathfrak{g}_n = (0)$ при некотором $n$. Иначе говоря,

$$[\ldots[[x_1, x_2], \ldots, x_n] = 0$$

для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$. Минимальное из этих чисел $n$ называется *длиной* (или *высотой*) *нильпотентности* алгебры $\mathfrak{g}$. Если $n = 1$, то алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативна.

Каждая подалгебра и каждая факторалгебра нильпотентной алгебры Ли нильпотентна. Всякая нильпотентная алгебра Ли разрешима и имеет ненулевой центр ($(0) \neq \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}$, где $n$ — длина нильпотентности). Алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда в ней существует цепочка вложенных идеалов $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_m = (0)$ таких, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{k+1}$ (т. е. $\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}$ содержится в центре $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{k+1}$). Частным случаем такой цепочки является центральный ряд алгебры $\mathfrak{g}$.

Если $\dim \mathfrak{g} < \infty$, то указанную цепочку всегда можно выбрать так, чтобы $\dim \mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1} = 1$. Иначе говоря, алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда ее присоединенное представление строго треугольно (треугольно с нулями на главной диагонали).

*Для строгой треугольности линейной алгебры Ли* $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End} V$, $\dim V < \infty$, *достаточно, чтобы все операторы* $x \in \mathfrak{g}$ *были нульстепенны, т. е.* $x^n = 0$ *при некотором* $n$, *зависящем от* $x$ (теорема Энгеля). *В этом случае* $\mathfrak{g}$ *нильпотентна. Конечномерная алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *нильпотентна тогда и только тогда, когда все операторы* $\operatorname{ad} x$ $(x \in \mathfrak{g})$ *нульстепенны.*

*Конечномерная алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *разрешима тогда и только тогда, когда ее производная подалгебра нильпотентна.*

**1.7. Инвариантные формы.** Пусть $\pi_1$, $\pi_2$ — представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространствах $V_1$, $V_2$. Билинейная форма $\beta$ на $V_1 \times V_2$ называется *инвариантной* относительно пары $\pi_1$, $\pi_2$, если

$$\beta(\pi_1(y)x, z) + \beta(x, \pi_2(y)z) = 0 \quad \text{для всех} \quad x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Билинейная форма $\beta$ на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ называется *инвариантной*, если она инвариантна относительно присоединенного представления, т. е. если

$$\beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z]) \quad \text{для всех} \quad x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Иначе говоря, операторы $\operatorname{ad} y$ $(y \in \mathfrak{g})$ кососимметричны относительно формы $\beta$. В частности, для каждого представления $\pi$ алгебры $\mathfrak{g}$ в конечномерном векторном пространстве $E$ форма

$$\beta_\pi(x, y) = \operatorname{tr}(\pi(x)\pi(y)), \qquad x, y, \in \mathfrak{g},$$

инвариантна на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Пусть $\dim \mathfrak{g} < \infty$. Билинейная форма $B$, отвечающая присоединенному представлению алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. форма

$$B(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y), \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

называется *киллинговой формой* (или *формой Киллинга* или *Киллинга — Картана*) алгебры $\mathfrak{g}$.

Если $\mathfrak{g}_0$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$, то сужение $B$ на $\mathfrak{g}_0$ совпадает с киллинговой формой алгебры $\mathfrak{g}_0$. Если $\mathfrak{g}_0$ — коммутативный идеал, то $\mathfrak{g} \perp \mathfrak{g}_0$ относительно формы $B$. Если алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима, то $\mathfrak{g} \perp \mathfrak{g}'$. Если алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то $B = 0$.

Пусть основное поле — характеристики 0, $\dim \mathfrak{g} < \infty$. *Если $B = 0$, то алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима* (критерий разрешимости Э. Картана). *Алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g} \perp \mathfrak{g}'$, т. е. $B([x, y], z) = 0$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$.*

**1.8. Редуктивные алгебры Ли.** В дальнейшем, для простоты изложения, будем считать, что основное поле — характеристики 0, $\dim \mathfrak{g} < \infty$.

Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *редуктивной*, если ее присоединенное представление вполне приводимо. Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *простой*, если она некоммутативна и ее присоединенное представление неприводимо. Если $\mathfrak{g}$ редуктивна, то она является прямой суммой неприводимых идеалов, каждый из которых либо прост, либо коммутативен.

Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *полупростой*, если она не имеет разрешимых идеалов, отличных от (0). Равносильное условие — алгебра $\mathfrak{g}$ не имеет коммутативных идеалов, отличных от (0). *Алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда киллингова форма на ней невырождена.* Отсюда следует, что $\mathfrak{g}$ редуктивна. Следовательно, *всякая полупростая алгебра Ли является прямой суммой простых идеалов.*

Всякая редуктивная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является прямой суммой своего центра $Z$ и полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Редуктивная алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда ее центр нулевой, т. е. когда $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

*Всякое конечномерное представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо* (теорема Г. Вейля).

Для коммутативных (следовательно, для редуктивных) алгебр Ли этот факт не имеет места. Именно это обстоятельство побудило исключить коммутативные алгебры из числа простых.

Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *компактной*, если на ней существует положительно определенная инвариантная форма (относительно термина «компактность» в данном случае см. 4.3.3). Всякая компактная алгебра Ли редуктивна.

**1.9. Разложение Леви — Мальцева.** В каждой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует максимальный разрешимый идеал $\mathfrak{r}$, в котором содержатся все разрешимые идеалы алгебры $\mathfrak{g}$. Идеал $\mathfrak{r}$ называется *радикалом* алгебры $\mathfrak{g}$. Факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ полупроста.

Теорема Леви. *Алгебра $\mathfrak{g}$ содержит полупростую подалгебру $\mathfrak{s}$ такую, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.*

При этом очевидно, $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$, $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$. Алгебра $\mathfrak{s}$ называется *фактором Леви* алгебры $\mathfrak{g}$.

Теорема Мальцева. *Фактор Леви алгебры $\mathfrak{g}$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$.*

Иначе говоря, если $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}_1\oplus\mathfrak{r}=\mathfrak{s}_2\oplus\mathfrak{r}$, где $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ — полупростые подалгебры, то существует автоморфизм $\alpha$ алгебры $\mathfrak{g}$ такой, что $\alpha\mathfrak{s}_1=\mathfrak{s}_2$. (При этом $\alpha\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$.)

Теорема Хариш-Чандры. *Каждая полупростая подалгебра $\mathfrak{s}_0\subset\mathfrak{g}$ содержится в некотором факторе Леви $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{g}$.*

Если алгебра $\mathfrak{g}$ редуктивна, то ее радикал совпадает с центром алгебры $\mathfrak{g}$.

Конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вполне приводимо тогда и только тогда, когда вполне приводимо его сужение на радикал.

**1.10. Полупростые и нильпотентные элементы.** Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли. Элемент $x\in\mathfrak{g}$ называется *полупростым* (соответственно *нильпотентным*), если эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ полупрост (соответственно нильпотентен). Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то каждый элемент $x\in\mathfrak{g}$ однозначно представляется в виде $x=y+z$ $(y, z\in\mathfrak{g})$, где $y$ полупрост, $z$ нильпотентен, $[y, z]=0$ (разложение Жордана). В этом случае *следующие три условия эквивалентны*:

1) *элемент $x\in\mathfrak{g}$ полупрост (соответственно нильпотентен)*,

2) *эндоморфизм $\pi(x)$ полупрост (соответственно нильпотентен) для точного представления $\pi$ алгебры $\mathfrak{g}$*, $\dim\pi<\infty$,

3) *эндоморфизм $\pi(x)$ полупрост (соответственно нильпотентен) для каждого линейного представления $\pi$ алгебры $\mathfrak{g}$*.

Пусть $V$ — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль относительно представления $\pi$, $\beta_\pi$ — инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$, ассоциированная с $\pi$ (см. п. 1.7). *Среди идеалов алгебры $\mathfrak{g}$, элементам которых отвечают нильпотентные преобразования $V$, существует единственный максимальный идеал $N_\pi$, который может быть также определен как ядро формы $\beta_\pi$ (ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно $\beta_\pi$)*. Если $V=V_0\supset V_1\supset\ldots\supset V_m=(0)$ — композиционный ряд модуля $V$, $\pi_i$ — представление алгебры $\mathfrak{g}$ в $V_i/V_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, m-1)$, то $N_\pi$ совпадает с пересечением $\ker\pi_i$ $(i=0, 1, \ldots, m-1)$.

Среди нильпотентных идеалов алгебры $\mathfrak{g}$ существует единственный максимальный идеал, который совпадает с $N_\pi$, где $\pi$ — присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$. Этот идеал называется *нильрадикалом* алгебры $\mathfrak{g}$.

**1.11. Веса и корни.** Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ — векторное пространство, двойственное к $\mathfrak{g}$, $\pi$ — представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $V$. Для каждого $\lambda\in\mathfrak{g}^*$ положим

$$V_n^\lambda=\{\xi\in V\colon\ (\pi(x)-\lambda(x))^n\xi=0\ \text{ для всех }\ x\in\mathfrak{g}\},$$

и пусть $V^\lambda$ — объединение всех $V_n^\lambda$ $(n=1, 2, \ldots)$. Линейная форма $\lambda\in\mathfrak{g}^*$ называется *весом представления $\pi$ (модуля $V$)*, если $V^\lambda\neq(0)$. Последнее условие равносильно $V_1^\lambda\neq(0)$. Элементы $\xi\in V_1^\lambda$, отличные от 0, называются *весовыми векторами представления $\pi$ (модуля $V$)*, отвечающими весу $\lambda$.

Пусть $V_0$ — сумма всех $V^\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{g}^*)$. Эта сумма — прямая. Если поле $\Phi$ алгебраически замкнуто, алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима и $V$ конечномерно, то $V_0 \neq (0)$, т. е. веса существуют (по теореме Ли). Если, кроме того, $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то $V_0 = V$. В этом случае $V^\lambda$ — подмодуль $V$ для каждого $\lambda$, и в $V^\lambda$ существует базис, относительно которого операторы $\pi(x) - \lambda(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ строго треугольны.

Если $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, то веса присоединенного представления $\pi(x) = \operatorname{ad} x$ $(x \in \mathfrak{g}_0)$ называются *корнями алгебры* $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{g}_0$. Соответственно, весовые векторы $\xi \in \mathfrak{g}$ называются *корневыми векторами* (относительно $\mathfrak{g}_0$).

**1.12. Автоморфизмы алгебр Ли.** Множество $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ образует группу (относительно композиции автоморфизмов).

Для каждого подполя $\Phi_0 \subset \Phi$ пусть $\mathfrak{g}_{\Phi_0}$ — алгебра $\mathfrak{g}$, рассматриваемая над полем $\Phi_0$. Тогда $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ — подгруппа $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}_{\Phi_0}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем $\Phi = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. Каждому дифференцированию $\mathscr{D}$ алгебры $\mathfrak{g}$ соответствует автоморфизм $\theta = \exp \mathscr{D}$. Если $\mathscr{D}x = [a, x]$ $(a \in \mathfrak{g})$, то соответствующий автоморфизм $\theta_a$ называется *внутренним*. Все остальные автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g}$ называются *внешними*. Множество $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$ всех внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ является подгруппой в $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$. Группа $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$ называется *присоединенной группой алгебры* $\mathfrak{g}$ (см. 4.2.8).

Если $\theta$ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, $x$ и $y$ — собственные векторы этого автоморфизма с собственными значениями $\alpha$ и $\beta$ соответственно, то $z = [x, y]$ — собственный вектор этого автоморфизма с собственным значением $\alpha \cdot \beta$. В частности, для каждого автоморфизма $\theta$ алгебры $\mathfrak{g}$ множество неподвижных точек этого автоморфизма является подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$.

Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \operatorname{Mat}_n \Phi$. Преобразование $\theta x = -x'$ (штрих — транспонирование) является внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$.

Литература: [2], [8], [10], [11], [13], [20], [21], [22], [23], [27], [29].

## § 2. Комплексные редуктивные алгебры Ли

**2.1. Задача классификации.** Далее рассматриваются алгебры Ли над полями $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. Задача классификации этих алгебр (с точностью до изоморфизма), решена в настоящее время только для редуктивных алгебр Ли. Ввиду разложения редуктивной алгебры Ли в прямую сумму центра и простых идеалов (см. п. 1.8), достаточно классифицировать простые алгебры Ли. Успех, достигнутый в решении этой задачи, связан с существованием на каждой полупростой алгебре Ли невырожденной инвариантной билинейной формы (формы Киллинга).

Всюду в этом параграфе $\mathfrak{g}$ — комплексная редуктивная алгебра Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$.

Примеры. 1. Для размерностей $\dim \mathfrak{g} \leqslant 2$ простых алгебр Ли не существует. 2. Существует единственная (с точностью до изоморфизма) простая трехмерная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ с базисом $e_-$, $e_0$, $e_+$ и соотношениями коммутации

$$[e_+, e_-] = e_0, \quad [e_0, e_+] = 2e_+, \quad [e_0, e_-] = -2e_-.$$

Эта алгебра изоморфна алгебре векторных произведений над $\mathbf{C}$ (см. п. 1.2) относительно преобразования $e_0 = ie_3$, $e_+ = i(e_1 + ie_2)$, $e_- = i(e_1 - ie_2)$.

**2.2. Картановские подалгебры.** Описание структуры алгебры $\mathfrak{g}$ основано на выделении специального класса коммутативных подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *картановской подалгеброй* (или *подалгеброй Картана*), если

1) $\mathfrak{h}$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$,

2) операторы $\operatorname{ad} x$ $(x \in \mathfrak{h})$ диагональны в $\mathfrak{g}$.

*Картановские подалгебры существуют* (теорема Э. Картана) *и сопряжены друг другу относительно группы* $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$. Эффективное построение картановских подалгебр состоит в следующем. Элемент $x \in \mathfrak{g}$ называется *невырожденным*, если его нильпространство $\mathfrak{g}^0(x)$ имеет минимально возможную размерность в $\mathfrak{g}$. В этом случае $\mathfrak{g}^0(x)$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$.

Замечание. Элемент $x \in \mathfrak{g}$ называется *регулярным*, если его централизатор, т. е. множество $\mathfrak{z}(x) = \{z \in \mathfrak{g}: [z, x] = 0\}$ имеет минимально возможную размерность в $\mathfrak{g}$. Элемент $x \in \mathfrak{g}$ невырожден тогда и только тогда, когда он полупрост и регулярен, причем в этом случае $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{g}^0(x)$.

С каждой картановской подалгеброй $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ связано разложение $\mathfrak{g}$ в прямую сумму подпространств

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{x \in \mathfrak{g}: [h, x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\},$$

называемых *корневыми подпространствами* ($\mathfrak{g}^\alpha \neq (0)$ лишь если $\alpha$ — корень алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$). При этом

1) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$, 2) $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$, 3) $\dim \mathfrak{g}^\alpha \leqslant 1$ при $\alpha \neq 0$.

Из очевидного включения $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{z}$ следует, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{h}_0$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}'$.

Размерность $l = \dim \mathfrak{h}$ (не зависящая от выбора картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$) называется *рангом алгебры* $\mathfrak{g}$. При этом $l = m + k$, $m = \dim \mathfrak{h}_0$, $k = \dim \mathfrak{z}$.

Пример. Алгебра $\mathfrak{g}_0$ в п. 2.1 имеет ранг 1.

**2.3. Базис Картана — Вейля.** Пусть $\Delta$ — множество всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Множество $\Delta$ — конечная система векторов из $\mathfrak{h}^*$. Для каждого $\alpha = \Delta$ $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$, т. е. $\mathfrak{g}^\alpha = \mathbf{C}e_\alpha$, где $e_\alpha$ — фиксированный вектор из $\mathfrak{g}^\alpha$. Если $\alpha \in \Delta$, то $-\alpha \in \Delta$. Если элементы $h_i \in \mathfrak{h}$ образуют базис $\mathfrak{h}$, то элементы $h_i$, $e_\alpha$ образуют базис $\mathfrak{g}$, называемый *базисом Картана — Вейля*. *Соотношения коммутации в этом базисе имеют вид*

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha,$$
$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha, \quad [e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$$

*для всех* $h \in \mathfrak{h}$, $\alpha, \beta \in \Delta$, *где* $h_\alpha \in \mathfrak{h}$, $N_{\alpha\beta} \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha + \beta \in \Delta$. *Векторы* $e_\alpha$, $e_\beta$ *ортогональны относительно киллинговой формы* $(x, y) = B(x, y)$ *при* $\alpha + \beta \neq 0$ *и могут быть нормированы условием* $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. *При этом условии выполняется равенство*

$$\alpha(h) = (h, h_\alpha), \qquad h \in \mathfrak{h}, \quad \alpha \in \Delta.$$

Отображение $\alpha \mapsto h_\alpha$ является вложением системы $\Delta$ в $\mathfrak{h}$. Иногда система $\Delta$ отождествляется со своим образом относительно этого вложения. При этом линейная оболочка $\mathfrak{h}_1$ системы $\Delta$ является картановской подалгеброй в $\mathfrak{g}'$, т. е. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{z}$. *Киллингова форма невырождена в* $\mathfrak{h}_0$ *и положительно определена (т. е. является скалярным произведением) в вещественной линейной оболочке* $\mathfrak{h}_0$ *системы* $\Delta$.

*Для каждой пары корней* $\alpha, \beta \in \Delta$ *число* $(\alpha, \beta)$ *рационально, числа* $(\alpha, \alpha)/(\beta, \beta)$, $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ — *целые, причем*

$$-2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) = p + q,$$

*где* $p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$ — *крайние значения* $k$, *при которых* $\beta + k\alpha \in \Delta$. *Матрица* $P = ((\alpha, \beta))$ $(\alpha, \beta \in \Delta)$ *является проекционной, т. е.* $P^2 = P$.

*Структурные константы* $N_{\alpha\beta}$ *удовлетворяют соотношениям* $N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha}$, $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}$ *для каждой пары корней* $\alpha, \beta \in \Delta$ *и каждой тройки* $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ *такой, что* $\alpha + \beta + \gamma = 0$. *Существует нормировка векторов* $e_\alpha$, *при которой* $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$, $N_{\alpha\beta} = \pm(p - 1)$. *Соответственно константы* $N_{\alpha\beta}$ — *целые* (теорема Шевалле).

Иногда используется другая нормировка, при которой $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$ (соответственно $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = -h_\alpha$). При этом константы $N_{\alpha\beta}$ вещественны. Из вещественности всех структурных констант следует, что $\mathfrak{g}$ — расширение над $\mathbf{C}$ вещественной редуктивной алгебры Ли. Из теоремы Шевалле следует, что алгебра $\mathfrak{g}$ может быть определена над произвольным полем.

**2.4. Системы корней.** Существует абстрактное определение системы корней, которому, в частности, удовлетворяет система $\Delta$ (см. п. 2.3).

Пусть $R$ — конечная система ненулевых векторов вещественного евклидова пространства $V$. Система $R$ называется *системой корней*, если

1) числа $c(\alpha, \beta) = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ — целые,

2) $\alpha - c(\alpha, \beta)\beta \in R$ для всех $\alpha, \beta \in R$.

Преобразование $s_\beta x = x - c(x, \beta)\beta$ имеет простой геометрический смысл — это отражение относительно $\beta$, т. е. отражение относительно гиперплоскости $V_\beta$, ортогональной вектору $\beta$. Из аксиом 1), 2) вытекают следующие свойства:

1. *Если* $\alpha \in R$, *то* $-\alpha \in R$.

2. *Если* $\alpha \in R$, $m\alpha \in R$, *то* $m = \pm 1/2, \pm 1, \pm 2$.

3. *Если* $\alpha, \beta \in R$, *то* $\alpha - k\beta \in R$ *для всех целых* $k$, *заключенных между* 0 *и* $c(\alpha, \beta)$.

4. *Если* $\alpha, \beta \in R$, *то* $0 \leqslant c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha) \leqslant 4$. *Если* $\alpha, \beta$ *не коллинеарны, то* $0 \leqslant c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha) \leqslant 3$.

5. *Если* $\alpha, \beta \in R$ *не коллинеарны и не ортогональны, то пара* $\alpha, \beta$ *может быть упорядочена так, что* $(\alpha, \alpha)/(\beta, \beta) = c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha)$.

Система $R$ называется *приведенной*, если из $\alpha \in R$ следует $m\alpha \in R$ только при $m = \pm 1$. В частности, система $\Delta$ является приведенной (см. п. 2.3). В действительности всякая приведенная система корней является системой ненулевых корней некоторой полупростой комплексной алгебры Ли.

Подсистема $S \subset R$ называется *базисом системы* $R$, если каждый корень $\alpha \in R$ однозначно записывается в виде $\sum\limits_i n_i\alpha_i$ $(\alpha_i \in S)$, где $n_i$ — целые числа одинакового знака. Корень $\alpha$ называется при этом *положительным*, если все $n_i \geqslant 0$, и *отрицательным*, если все $n_i \leqslant 0$. Соответственно $R = R_- \cup R_+$, где $R_-$ $(R_+)$ — множество всех отрицательных (положительных) корней из $R$. Если $\alpha, \beta \in S$, то $(\alpha, \beta) \leqslant 0$.

Каждый базис в $R$ может быть построен путем введения лексикографической упорядоченности в линейную оболочку $L$ системы $R$. Фиксируем базис в $L$ и для векторов $\xi, \eta \in L$ с координатами $\xi_i, \eta_i$ положим $\xi > \eta$, если $\xi_1 > \eta_1$, либо $\xi_1 = \eta_1$, но $\xi_2 > \eta_2$ и т. д. Корень $\alpha > 0$ называется *простым*, если его невозможно представить в виде суммы двух корней $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Подсистема $S$ всех простых корней является базисом в $R$.

**2.5. Структурная матрица Картана.** В частности, пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\Delta$ — система всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно фиксированной картановской подалгебры $\mathfrak{h}$, $\Pi \subset \Delta$ — подсистема простых корней. Положим $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Числа

$$c_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j), \qquad i, j = 1, \ldots, l,$$

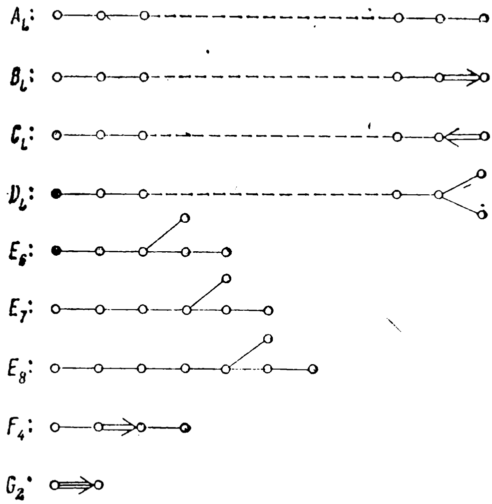
образуют квадратную матрицу $C$, называемую *структурной матрицей Картана* алгебры $\mathfrak{g}$. При этом $c_{ij} \leqslant 0$ $(i \neq j)$, $c_{ij}c_{ji} = 4\cos^2\theta_{ij}$, где $\theta_{ij}$ — угол между векторами $\alpha_i, \alpha_j$ (в вещественном евклидовом пространстве $\mathfrak{h}_0$). Из равенства $c_{ij}c_{jk} = 0, 1, 2, 3$ при $i \neq j$ (см. п. 2.4) следует, что $\theta_{ij} = 90°, 120°, 135°, 150°$.

Существует простой графический способ описания матрицы $C$ с помощью графической схемы, называемой *схемой Дынкина*. Каждый элемент этой схемы (кружочек) соответствует одному из корней $\alpha_i \in \Pi$. Каждые два кружочка, соответствующие корням $\alpha_i, \alpha_j$, соединяются $n_{ij}$ отрезками прямой линии, где $n_{ij} = c_{ij}c_{ji}$. Если $n_{ij} = 0$, то кружочки не соединяются (в этом случае $a_i \perp \alpha_j$). Если $(\alpha_i, \alpha_i) > (\alpha_j, \alpha_j)$, то $(\alpha_i, \alpha_i) = n_{ij}(\alpha_j, \alpha_j)$. Для описания этого соотношения обычно используются числовые отметки при каждом кружочке (пропорциональные $(\alpha_i, \alpha_i)$) либо стрелки, идущие от «большего» корня к «меньшему» при $n_{ij} \neq 1$.

Структурная матрица Картана определяет алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма. Алгебра $\mathfrak{g}$ проста тогда и только тогда, когда ее схема Дынкина связна (т. е. $\Pi \neq \Pi_1 \cup \Pi_2$, где $\Pi_1 \perp \Pi_2$,

$\Pi_1 \neq \varnothing$, $\Pi_2 \neq \varnothing$). Таким образом, классификация всех простых комплексных алгебр Ли сводится к классификации связных схем Дынкина.

2.6. Схемы Дынкина. Ниже приводятся схемы Дынкина, отвечающие простым комплексным алгебрам Ли. Каждая простая комплексная алгебра Ли относится либо к одной из бесконечных серий $A_l$, $B_l$, $C_l$, $D_l$, либо к одной из конечных серий $E_l$, $F_4$, $G_2$. Индекс внизу означает ранг.




Алгебры Ли, отвечающие этим схемам, неизоморфны, если считать, что $l \geqslant 1$ для серии $A_l$, $l \geqslant 2$ для серии $B_l$, $l \geqslant 3$ для серии $C_l$, $l \geqslant 4$ для серии $D_l$.

Алгебры Ли $A_l - D_l$ называются *классическими* (см. п. 2.7). Алгебры Ли $E_l$, $F_4$, $G_2$ называются *исключительными* (или *особыми*) *алгебрами Картана* (см. п. 2.8).

Пример. Алгебра $\mathfrak{g}_0$ из п. 2.1 является простой алгеброй Ли типа $A_1$. Система $\Delta$ в этом случае состоит из двух корней $\pm\alpha$ $(\alpha \in \Pi)$.

**2.7. Классические алгебры Ли.** Алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ всех комплексных матриц $n \times n$ является редуктивной алгеброй Ли (относительно коммутатора $[x, y] = xy - yx$ $(x, y \in \mathfrak{g})$). Киллингова форма в $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$B(x, y) = 2n \operatorname{tr} xy - \operatorname{tr} x \operatorname{tr} y, \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Фактором Леви алгебры $\mathfrak{g}$ является простая алгебра Ли $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$, состоящая из матриц с нулевым следом. Центр алгебры $\mathfrak{g}$ одномерен и состоит из матриц, кратных единичной.

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, состоящая из всех диагональных матриц, является картановской подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Корневыми векторами относительно $\mathfrak{h}$ являются матрицы $e_{ij}$ такие, что $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$, где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Алгебру $\mathfrak{h}$ удобно рассматривать как евклидово пространство с ортонормированным базисом $e_i = e_{ii}$

($i=1, \ldots, n$). Система $\Delta$, вложенная в $\mathfrak{h}$, состоит из векторов $e_i - e_j$ ($i \neq j$). Система $\Pi$ может быть составлена из векторов $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ ($i=1, \ldots, n-1$). Алгебра $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ является алгеброй типа $A_l$ при $l = n-1$.

Алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$, состоящая из всех кососимметрических матриц $x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ ($x' = -x$), проста при $n \neq 1, 2, 4$. Заменяя $\mathfrak{g}$ изоморфной алгеброй, удобно считать, что матрицы $x \in \mathfrak{g}$ кососимметричны относительно побочной диагонали. В этом случае подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, составленная из диагональных матриц, является картановской подалгеброй в $\mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{h} = l = [n/2]$. Система $\Delta$ состоит из векторов $\pm e_i \pm e_j$ ($i, j = 1, \ldots, l$). Подсистема $\Pi$ состоит из векторов $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ ($i = 1, \ldots, l-1$), с добавлением вектора $\alpha_l = e_l$ при $n$ нечетном, $\alpha_l = e_{l-1} + e_l$ при $n$ четном. Алгебра $\mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ является алгеброй типа $B_l$ при $n = 2l+1$, типа $D_l$ при $n = 2l$.

Замечание. $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C}) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, $\mathfrak{so}(4, \mathbf{C}) \simeq \mathfrak{so}(3, \mathbf{C}) \oplus \mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$. Существование этих изоморфизмов очевидно из схем Дынкина.

Алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbf{C})$ состоит из всех матриц $x \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C})$, удовлетворяющих соотношению $fx' + xf = 0$, где $f$ — кососимметрическая невырожденная матрица. Удобно выбрать эту матрицу в виде

$$f = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_{ij} = \delta_{i,n-j+1}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

При этом подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, составленная из диагональных матриц, является картановской подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Система $\Delta$ состоит из векторов $\pm 2e_i$, $\pm e_i \pm e_j$ ($i, j = 1, \ldots, n$). Система $\Pi$ может быть составлена из векторов $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ ($i = 1, \ldots, n-1$), $\alpha_n = 2e_n$. Алгебра $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{C})$ является алгеброй типа $C_n$.

Замечание. $\mathfrak{sp}(1, \mathbf{C}) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, $\mathfrak{sp}(2, \mathbf{C}) \simeq \mathfrak{so}(5, \mathbf{C})$.

**2.8. Особые алгебры Картана.** Система $\Delta$ для алгебры $G_2$ может быть составлена из векторов $e_i - e_j$ ($i, j = 1, 2, 3$), $\pm(3e_i - e_0)$, где $e_i$ — ортонормированный базис $\mathbf{R}^3$, $e_0 = e_1 + e_2 + e_3$. Другой вариант: система $\Delta$ состоит из векторов $\pm e_1$, $\pm \sqrt{3} e_2$, $\pm \frac{1}{2} e_1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} e_2$, $\pm \frac{3}{2} e_1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} e_2$. Система $\Pi$ может быть составлена из векторов $e_1$, $-\frac{3}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2$.

Система $\Delta$ для алгебры $F_4$ состоит из векторов $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$), $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$. Подсистема $\Pi$ состоит из векторов $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$, $e_3$, $\frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$.

Система $\Delta$ для алгебры $E_6$ состоит из векторов $e_i - e_j$ ($i, j = 1, \ldots, 6$), $\pm\sqrt{2} e_7$, $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6) \pm e_7/\sqrt{2}$, с одинаковым количеством плюсов и минусов в круглых скобках. Подсистема $\Pi$ состоит из векторов $e_i - e_{i+1}$ ($i = 1, \ldots, 5$), $\frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6) + e_7/\sqrt{2}$.

Система $\Delta$ для алгебры $E_7$ состоит из векторов $e_i - e_j$ ($i, j = 1, \ldots, 7$), $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$, с одинаковым числом плюсов и минусов в круглых скобках. Подсистема П состоит из векторов $e_i - e_{i+1}$ $(i=1, \ldots, 6)$, $1/2(-e_1-e_2-e_3-e_4+ e_5+e_6+e_7+e_8)$.

Система $\Delta$ для алгебры $E_8$ состоит из векторов $\pm e_i \pm e_j$ $(i, j = 1, \ldots, 8)$, $1/2(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$, с четным числом плюсов (и минусов) в круглых скобках. Подсистема П состоит из векторов $e_i - e_{i+1}$ $(i=1, \ldots, 7)$, $1/2(-e_1-e_2-e_3-e_4+ e_5+e_6+e_7+e_8)$.

Все особые алгебры Картана могут быть охарактеризованы как алгебры, составленные из дифференцирований некоторых неассоциативных алгебр. Например, $G_2$ является алгеброй всех дифференцирований чисел Кэли. Более подробно см. [8].

**2.9. Системы образующих.** Для каждого базиса $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ элементы $e_i = e_{\alpha_i}$, $f_i = e_{-\alpha_i}$ порождают полупростую алгебру $\mathfrak{g}$, для которой $\Delta$ — система простых корней. Положим $h_i = [e_i, f_i]$ $(=h_{\alpha_i})$ $(i=1, \ldots, l)$. Тогда *имеют место соотношения*

1) $[h_i, h_j] = 0$,
2) $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j$,
3) $[h_i, e_j] = c_{ij} e_j$, $[h_i, f_j] = -c_{ij} f_j$,
4) $(\operatorname{ad} e_i)^{\varepsilon_{ij}+1} e_j = 0$, $i \neq j$,
5) $(\operatorname{ad} f_i)^{\varepsilon_{ij}+1} f_j = 0$, $i \neq j$,

*где* $c_{ij}$ *— элементы структурной матрицы Картана* (см. п. 2.5), $\varepsilon_{ij} = -c_{ij}$ *— неотрицательное целое число при* $i \neq j$. *Соотношения* 1)—5) *определяют алгебру* $\mathfrak{g}$ *с точностью до изоморфизма* (*т. е. все остальные соотношения коммутации в алгебре* $\mathfrak{g}$ *являются следствиями* 1)—5)).

Подалгебра $\mathfrak{n}_+$ $(\mathfrak{n}_-)$, порожденная образующими $e_i$ $(f_i)$, совпадает с линейной оболочкой $e_\alpha$ при $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$ и является максимальной нильпотентной подалгеброй в $\mathfrak{g}$. При этом

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Подалгебра $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ $(\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-)$ является максимальной разрешимой подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Из равенств $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+] = \mathfrak{n}_+$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_-] = \mathfrak{n}_-$ следует, что $\mathfrak{n}_+$ $(\mathfrak{n}_-)$ является производной подалгеброй в $\mathfrak{b}_+$ $(\mathfrak{b}_-)$.

*Каждая максимальная разрешимая подалгебра* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ *сопряжена* $\mathfrak{b}_+$ *относительно* $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$ (теорема Бореля — Морозова). Максимальные разрешимые подалгебры называются также *борелевскими подалгебрами* алгебры $\mathfrak{g}$. Элемент $x \in \mathfrak{g}$ называется *нильпотентным*, если оператор $\operatorname{ad} x$ нульстепенен ($(\operatorname{ad} x)^n = 0$). Каждый нильпотентный элемент $x \in \mathfrak{g}$ содержится в производной подалгебре $\mathfrak{b}'$ некоторой борелевской подалгебры $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$. Кроме того, $x$ содержится в трехмерной простой подалгебре $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ с базисом $x$, $y$, $z$ и соотношениями коммутации

$$[x, y] = z, \quad [z, x] = 2x, \quad [z, y] = -2y.$$

Пример. Если система П для $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ выбрана как в п. 2.7, то алгебры $\mathfrak{b}_-$, $\mathfrak{b}_+$ состоят соответственно из нижних и верхних треугольных матриц, алгебры $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{n}_+$ состоят из нижних и верхних строго треугольных матриц. Аналогичное описание имеет место для всех комплексных редуктивных алгебр Ли.

**2.10. Параболические подалгебры.** Каждая подалгебра $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$, содержащая борелевскую подалгебру $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, называется *параболической подалгеброй* алгебры $\mathfrak{g}$.

*Существует лишь конечное число параболических подалгебр, содержащих фиксированную борелевскую подалгебру $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, причем эти подалгебры находятся во взаимно однозначном соответствии с подсистемами $\Pi_0 \subset \Pi$, где $\Pi$ — система простых корней относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.* Это соответствие устанавливается следующим образом.

Пусть $\Delta_0$ — множество всех корней из $\Delta$, представимых в виде линейных комбинаций корней из $\Pi_0$, и пусть $\mathfrak{n}_-(\Pi_0)$, $\mathfrak{n}_+(\Pi_0)$ — линейные оболочки $\mathfrak{g}^\alpha$ $(\alpha \in \Delta_0)$, соответственно при $\alpha < 0$, $\alpha > 0$. Подпространства $\mathfrak{n}_\pm(\Pi_0)$ являются подалгебрами соответственно в $\mathfrak{n}_\pm$. Подалгебра

$$\mathfrak{f}(\Pi_0) = \mathfrak{b}_- \oplus \mathfrak{n}_+(\Pi_0)$$

является параболической подалгеброй в $\mathfrak{g}$ (содержащей $\mathfrak{b}_-$). Алгебра $\mathfrak{f}(\Pi_0)$ содержит редуктивную подалгебру $\mathfrak{g}(\Pi_0) = \mathfrak{n}_-(\Pi_0) \oplus \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+(\Pi_0)$. Алгебра $\mathfrak{g}$ представляется в виде

$$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathfrak{g}(\Pi_0) \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+,$$

где $\tilde{\mathfrak{n}}_-$, $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ — линейные оболочки подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta \backslash \Delta_0)$ соответственно при $\alpha < 0$, $\alpha > 0$. При этом $\mathfrak{f}(\Pi_0) = \tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathfrak{g}(\Pi_0)$ ($\tilde{\mathfrak{n}}_-$ — идеал в $\mathfrak{f}(\Pi_0)$). Фактором Леви алгебры $\mathfrak{f}(\Pi_0)$ является $\mathfrak{s}(\Pi_0) = \mathfrak{n}_-(\Pi_0) \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{n}_+(\Pi_0)$, где $\mathfrak{h}_0$ — линейная оболочка подсистемы $\Pi_0$ (вложенной в $\mathfrak{h}$).

Радикалом алгебры $\mathfrak{f}(\Pi_0)$ является $\tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \tilde{\mathfrak{h}}$, где $\tilde{\mathfrak{h}}$ — ортогональное дополнение в $\mathfrak{h}$ к $\mathfrak{h}_0$. Редуктивная алгебра $\mathfrak{g}(\Pi_0)$ может быть охарактеризована как централизатор $\tilde{\mathfrak{h}}$, т. е. как множество

$$\tilde{Z}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g}\colon\ [x, y] = 0 \text{ для всех } y \in \tilde{\mathfrak{h}}\}.$$

**2.11. Группы Вейля.** Существенную роль в изучении алгебры $\mathfrak{g}$ и ее представлений играют автоморфизмы картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, сохраняющие систему корней. К ним относятся отражения

$$s_\alpha x = x - 2(x, \alpha)/(\alpha, \alpha), \qquad x \in \mathfrak{h},\ \alpha \in \Delta.$$

Отражения $s_\alpha$ $(\alpha \in \Pi)$ порождают конечную группу $W$, называемую *группой Вейля*. Группа $W$ содержит все отражения $s_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$. Группа $W$ как абстрактная группа определяется образующими $s_\alpha$ $(\alpha \in \Pi)$ и соотношениями

$$s_\alpha^2 = 1, \quad (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1,$$

где $m(\alpha, \beta) = 2, 3, 4, 6$ соответственно при $c(\alpha, \beta) = 0, 1, 2, 3$ (см. п. 2.4).

Каждый корень $\alpha \in \Delta$ представляется в виде $s\beta$ ($s \in W$, $\beta \in \Pi$). Для каждой пары базисов $\Pi_1$, $\Pi_2 \subset \Delta$ существует единственный элемент $s \in W$ такой, что $s\Pi_1 = \Pi_2$. С каждым базисом $\Pi$ связано множество

$$C_\Pi = \{x \in \mathfrak{h} \colon (x, \alpha) > 0 \text{ для всех } \alpha \in \Pi\},$$

называемое *камерой Вейля* (*доминантной камерой Вейля относительно* $\Pi$). При этом $C_{s\Pi} = sC_\Pi$. Всевозможные камеры Вейля $C_{s\Pi}$ ($s \in W$) являются связными компонентами множества $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} \setminus \bigcup_\alpha \mathfrak{h}_\alpha$, где $\mathfrak{h}_\alpha$ — гиперплоскость в $\mathfrak{h}$, ортогональная корню $\alpha$.

Примеры. 1. Группа Вейля алгебры $A_l$ изоморфна симметрической группе $S_n$ ($n = l + 1$) (подстановки базисных векторов $e_i$ ($i = 1, \ldots, n$)). 2. Группы Вейля алгебр $B_l$, $C_l$ порождаются подстановками базисных векторов $e_i$ ($i = 1, \ldots, l$) и отражениями $e_i \to -e_i$ ($i = 1, \ldots, l$). 3. Группа Вейля алгебры $D_l$ порождается подстановками базисных векторов $e_i$ ($i = 1, \ldots, l$) и парными отражениями $e_i \mapsto -e_i$, $e_j \mapsto -e_j$ ($i \neq j$).

Группа $W$ является нормальным делителем группы $\mathfrak{S}$ всех элементов $\operatorname{Aut} \mathfrak{h}$, сохраняющих $\Delta$. Группа $\mathfrak{S}$ иногда называется *группой Картана*. При этом $\mathfrak{S}/W \simeq S_k$ ($k = 1$ для алгебр $A_1$, $B_n$, $C_n$, $G_2$, $F_4$, $E_7$, $E_8$; $k = 2$ для алгебр $A_n$ ($n \geqslant 2$), $D_n$ ($n \geqslant 5$); $k = 3$ для алгебры $D_4$).

**2.12. Автоморфизмы.** Каждый автоморфизм $\theta$ алгебры $\mathfrak{g}$ сохраняет киллингову форму, т. е. $(\theta x, \theta y) = (x, y)$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$. Если $\theta$ сохраняет картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$, то

$$\theta e_\alpha = \nu_\alpha e_{\theta\alpha}, \qquad \alpha \in \Delta,$$

($\Delta \subset \mathfrak{h}$, см. п. 2.3), причем $\nu_\alpha \nu_\beta = \pm \nu_{\alpha+\beta}$, если константы $N_{\alpha\beta}$ нормированы условием $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha, -\beta}$ (либо условием $N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha, -\beta}$). Если $\nu_\alpha \nu_\beta = \nu_{\alpha+\beta}$, то $\theta \subset \operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$, причем $\theta$ является продолжением на $\mathfrak{g}$ некоторого автоморфизма из $\operatorname{Aut} \mathfrak{h}$.

Аналогично рассматриваются автоморфизмы из $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ ($\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ — алгебра $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbf{R}$). Приведем важнейшие примеры.

1. Транспонирование $x \mapsto x'$, определяемое в базисе Картана — Вейля по правилу $h' = h$, $e'_\alpha = e_{-\alpha}$ при $h \in \mathfrak{h}$, $\alpha \in \Delta$, $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha, -\beta}$, является антиавтоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$. Соответственно $x \mapsto -x^*$ есть автоморфизм $\mathfrak{g}$

2. Комплексное сопряжение $x \mapsto \bar{x}$ относительно базиса Картана — Вейля с вещественными структурными константами является автоморфизмом $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$.

3. Эрмитово сопряжение $x^* = \bar{x}'$ является антиавтоморфизмом $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. Соответственно $x \mapsto -x^*$ есть автоморфизм $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$.

4. Каждое преобразование группы Вейля $W$ продолжается до элемента группы $\operatorname{Aut}_0 (\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ всех внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, сохраняющих $\mathfrak{h}$. При этом

$$W \simeq \operatorname{Aut}_0 (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) / \operatorname{Aut} \mathfrak{h}.$$

5. Каждое преобразование группы Картана $\mathfrak{S}$ продолжается до элемента группы $\operatorname{Aut} (\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$,

сохраняющих $\mathfrak{h}$. При этом

$$\mathfrak{S} \simeq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}.$$

Литература: [2], [8], [10], [11], [13], [21], [22], [25], [27], [29].

## § 3. Вещественные редуктивные алгебры Ли

**3.1. Задача классификации.** Исследование вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно свести к рассмотрению ее *комплексификации* $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ (расширение алгебры $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbf{C}$). Алгебра $\mathfrak{g}$ называется при этом *вещественной формой* алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$.

Если $\mathfrak{g}$ редуктивна, то $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ редуктивна. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ полупроста. Поэтому для описания всех вещественных полупростых алгебр Ли достаточно описать все вещественные формы комплексных полупростых алгебр Ли. Для этого достаточно описать все базисы комплексных полупростых алгебр Ли, в которых структурные константы вещественны.

Если $\mathfrak{g}$ — вещественная форма комплексной алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, то $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$, т. е. каждый элемент $z \in \tilde{\mathfrak{g}}$ однозначно записывается в виде $z = x + iy$ $(x, y \in \mathfrak{g})$. Операция $\sigma(z) = x - iy$ является антилинейным $(\sigma(\lambda z) = \bar{\lambda}\sigma(z)$ $(\lambda \in \mathbf{C}))$ инволютивным $(\sigma^2 = 1)$ автоморфизмом алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. Обратно, если $\sigma$ — антилинейный инволютивный автоморфизм алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, то множество его неподвижных точек является вещественной формой алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. Поэтому для описания всех вещественных форм алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ достаточно описать все антилинейные инволютивные автоморфизмы алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Замечание. Если $\mathfrak{g}$ проста, то $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ либо проста, либо является прямой суммой двух изоморфных идеалов $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$. В последнем случае $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$ над $\mathbf{R}$, т. е. алгебра $\mathfrak{g}$ сама имеет комплексную структуру. (Пример: $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$.)

**3.2. Теорема Картана.** Для каждой комплексной полупростой алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ легко указать две неизоморфные вещественные формы:

$$\mathfrak{g}_r = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}}\colon\ \bar{x} = x\}, \qquad \mathfrak{g}_\tau = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}}\colon\ x^* = -x\},$$

где черта — комплексное сопряжение относительно базиса Картана — Вейля, звездочка — эрмитово сопряжение (см. п. 2.12).

Алгебра $\mathfrak{g}_\tau$ является компактной алгеброй Ли с инвариантным скалярным произведением $(x, y) = -B(x, y)$ (форма $B$ отрицательно определена в $\mathfrak{g}_\tau$). Алгебра $\mathfrak{g}_\tau$ называется *компактной формой Вейля* алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Все остальные вещественные формы алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ могут быть получены из $\mathfrak{g}_\tau$ (либо из $\mathfrak{g}_r$) с помощью автоморфизмов алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. Автоморфизм $\theta \in \mathrm{Aut}\,\tilde{\mathfrak{g}}$ называется *автоморфизмом Картана*, если он инволютивен $(\theta^2 = 1)$ и перестановочен с эрмитовым сопряжением.

Теорема Картана. *Каждая вещественная форма алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ сопряжена относительно* $\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g}$ *одной из форм*

$$\mathfrak{g}_\sigma = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}}:\ \sigma(x) = x\},$$

*где* $\sigma(x) = -\theta(x^*)$, $\theta$ — *автоморфизм Картана алгебры* $\tilde{\mathfrak{g}}$. *Каждая комплексная вещественная форма алгебры* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *сопряжена* $\mathfrak{g}_\tau$.

В частности, $r(x) = \bar{x}$, $\tau(x) = -x^*$ — антилинейные автоморфизмы, отвечающие формам $\mathfrak{g}_r$, $\mathfrak{g}_\tau$ (соответственно $\theta(x) = -x'$, $\theta(x) = x$).

Автоморфизм Картана оставляет инвариантной компактную подалгебру $\mathfrak{g}_\tau$, и его сужение на $\mathfrak{g}_\tau$ является произвольным инволютивным автоморфизмом $\mathfrak{g}_\tau$. Очевидно также, что $\theta$ вполне определяется своим сужением на $\mathfrak{g}_\tau$. Поэтому для описания всех вещественных форм алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ достаточно описать все инволютивные автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g}_\tau$.

Полная классификация вещественных простых алгебр Ли приводится в конце параграфа (см. таблицы).

**3.3. Разложение Картана.** Теорема Картана позволяет исследовать структуру вещественной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\sigma$, не прибегая к детальной классификации вещественных простых алгебр Ли. Из инвариантности $\mathfrak{g}_\sigma$ относительно $\theta$ вытекает разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g}:\ \theta x = x\}, \quad \mathfrak{p} = \{x \in \mathfrak{g}:\ \theta x = -x\}.$$

Разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ называется *разложением Картана*. Ясно, что $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. Подалгебра $\mathfrak{k}$ является максимальной компактной подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Подпространство $\mathfrak{p}$ является ортогональным дополнением $\mathfrak{k}$ (относительно $B$).

Форма $B$ отрицательно определена на $\mathfrak{k}$ и положительно определена на $\mathfrak{p}$. Соответственно $(x, y) = -B(x, \theta y)$ — скалярное произведение в $\mathfrak{g}$. Подпространства $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ ортогональны также относительно этого скалярного произведения.

*Всякие две максимальные компактные подалгебры в* $\mathfrak{g}$ *сопряжены относительно* $\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g}$. *Соответственно с каждой максимальной компактной подалгеброй* $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ *связано разложение Картана* $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp)$, *и всякие два разложения Картана алгебры* $\mathfrak{g}$ *сопряжены относительно* $\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g}$.

Автоморфизм Картана $\theta$ алгебры $\mathfrak{g}$ может быть охарактеризован (однозначно, с точностью до действия $\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g}$) как инволютивный автоморфизм, множество неподвижных точек которого является максимальной компактной подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ — разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}_\tau = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ — компактная форма Вейля алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. При этом $\mathfrak{g}_\tau$ — максимальная компактная подалгебра в $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ (над $\mathbf{R}$).

**3.4. Картановские подалгебры.** Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *редуктивной* в $\mathfrak{g}$, если ее присоединенное представление $x \mapsto \mathrm{ad}\,x$ $(x \in \mathfrak{h})$ вполне приводимо во всем пространстве $\mathfrak{g}$. В частности, $\mathfrak{h}$ редуктивна.

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *картановской подалгеброй* (или *подалгеброй Картана*) алгебры $\mathfrak{g}$, если

1) $\mathfrak{h}$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$,

2) $\mathfrak{h}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$.

В отличие от комплексного случая, операторы $\operatorname{ad} x$ ($x \in \mathfrak{h}$) не обязательно диагональны. Однако, если их продолжить (по линейности) на $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, то они диагональны в $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. Соответственно $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$.

В отличие от комплексного случая, картановские подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ не обязательно сопряжены относительно $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$ (и даже $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$). Однако *существует лишь конечное число классов сопряженности картановских подалгебр* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ (теорема Хариш-Чандры).

Каждая картановская подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ однозначно представляется в виде $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_r + \mathfrak{h}_\tau$, где $\mathfrak{h}_r(\mathfrak{h}_\tau)$ — множество всех элементов $h \in \mathfrak{h}$, для которых все собственные значения оператора $\operatorname{ad} x$ вещественны (чисто мнимы). Подпространство $\mathfrak{h}_r$ называется *векторной частью* алгебры $\mathfrak{h}$. Подпространство $\mathfrak{h}_\tau$ называется *тороидальной частью* алгебры $\mathfrak{h}$. Значение этих терминов станет ясным из контекста теории групп Ли (см. гл. 4). Если $\mathfrak{g}$ комплексна, то $\mathfrak{h}_r = \mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_\tau = i\mathfrak{h}_0$.

Картановская подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *главной*, если ее векторная часть имеет максимально возможную размерность. *Все главные картановские подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ сопряжены относительно* $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$.

Картановская подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *компактной*, если $\mathfrak{h}_r = 0$. *Все компактные картановские подалгебры (если они существуют) сопряжены относительно* $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$.

*Если $\mathfrak{g}$ — компактная алгебра Ли, то каждая максимальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является картановской подалгеброй в $\mathfrak{g}$, все картановские подалгебры компактны и сопряжены относительно* $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$.

**3.5. Описание картановских подалгебр.** Подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ называется *подпространством Картана*, если $\mathfrak{a}$ — максимальное подпространство в $\mathfrak{p}$, являющееся абелевой подалгеброй в $\mathfrak{g}$ ($[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$). Каждое подпространство Картана $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ является векторной частью некоторой главной картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

Для описания подалгебры $\mathfrak{h}$ достаточно рассмотреть редуктивную подалгебру $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{k}$, определяемую как централизатор $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{k}$ (т. е. как множество всех $y \in \mathfrak{k}$, перестановочных со всеми $x \in \mathfrak{a}$) и выделить максимальную абелеву подалгебру $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{m}$. При этом $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a} = \mathfrak{h}_r$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_\tau$). Согласно п. 3.4 каждая главная картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$ сопряжена подалгебре $\mathfrak{h}$ относительно $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$. Размерность $r = \dim \mathfrak{a}$ называется *вещественным рангом* (real rank) алгебры $\mathfrak{g}$. Соответственно $l = \dim \mathfrak{h}$ называется *полным рангом* (или *комплексным рангом*) алгебры $\mathfrak{g}$.

Далее, пусть $\Delta$ — система всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ относительно $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$. Подпространство $\mathfrak{a}$ содержится в вещественной оболочке $\mathfrak{h}_0$ системы $\Delta$ (см. п. 2.3). Подсистема $\Delta_1 \subset \Delta$ называется *свободной*, если $\alpha - \beta \notin \Delta \cup \{0\}$ для всех $\alpha$, $\beta \in \Delta_1$. *Подпространство $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}$ является векторной частью некоторой картановской подалгебры $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}_1$ является ортогональным дополнением в $\mathfrak{a}$ к некоторой свободной системе корней $\Delta_1 \subset \mathfrak{a}$.* При этом $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}_1$ ($\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{k}$). Каждая картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из подалгебр $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}(\Delta_1)$.

Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *нормальной*, если она содержит картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$, для которой $\mathfrak{h}_\mathfrak{k} = 0$. Каждая нормальная полупростая алгебра Ли (над $\mathbf{R}$) изоморфна одной из алгебр $\mathfrak{g}_\tau$ (см. п. 3.2). Каждая свободная система корней $\Delta_1 \subset \mathfrak{a}$ порождает нормальную полупростую подалгебру $f(\Delta_1) \subset \mathfrak{g}$ (см. п. 2.10).

**3.6. Ограниченные системы корней.** Пусть по-прежнему $\Delta$ — система всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}^\mathbf{C}$ относительно $\mathfrak{h}^\mathbf{C}$. *Если $\alpha \in \Delta$, то $\alpha + \theta\alpha \notin \Delta$* (лемма Сатаке), где $\theta$ — автоморфизм Картана, действующий в $\mathfrak{h}$. Множество всех корней $\alpha \in \Delta$, для которых $\theta\alpha = \alpha$, совпадает с множеством

$$\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta\colon\ \alpha|\mathfrak{a} = 0\},$$

где $\alpha|\mathfrak{a}$— сужение линейной формы $\alpha$ на подпространство $\mathfrak{a}$ (или проекция $\alpha \in \mathfrak{h}^\mathbf{C}$ на $\mathfrak{a}$ относительно разложения $\mathfrak{h}^\mathbf{C} = \mathfrak{a}^\mathbf{C} \oplus \mathfrak{b}^\mathbf{C}$). Элементы $\alpha \in \Delta_0$ называются *компактными корнями*. Элементы $\alpha \in \Delta\backslash\Delta_0$ называются *некомпактными корнями*. Система $\Delta_0$ совпадает с системой всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{m}^\mathbf{C}$ относительно $\mathfrak{b}^\mathbf{C}$.

Далее, пусть $\bar\Delta$ — множество всех сужений $\alpha|_\mathfrak{a}$ ($\alpha \in \Delta$). Элементы $\lambda \in \bar\Delta$ называются *ограниченными корнями* (restricted roots). Для описания $\bar\Delta$ достаточно рассматривать некомпактные корни. Система $\bar\Delta$ совпадает с системой всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно подалгебры $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$. Система $\bar\Delta$ является (не обязательно приведенной) системой корней в смысле определения 2.4.

Лексикографические упорядоченности в $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}$ называются *согласованными*, если отношение $\alpha|\mathfrak{a} < \beta|\mathfrak{a}$ влечет $\alpha < \beta$. Пусть $\Pi$ — соответствующая система простых корней из $\Delta$. Тогда системы

$$\Pi_0 = \Pi \cap \Delta_0, \qquad \bar\Pi = \{\alpha|\mathfrak{a}\colon\ \alpha \in \Pi\}$$

являются соответственно базисами (системами простых корней) в $\Delta_0$ и в $\bar\Delta$. Отражения $s_\alpha$ ($\alpha \in \bar\Pi$) порождают конечную группу $\bar W$, называемую *ограниченной группой Вейля*. При этом

$$\bar W \simeq W_*/W_0,$$

где $W_*$ — множество всех преобразований группы Вейля $W$ (относительно $\Delta$), перестановочных с автоморфизмом $\sigma$ ($\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_\sigma$).

*Две картановские подалгебры* $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ *с векторными частями* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}$ *сопряжены относительно* $\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда, когда соответствующие свободные системы корней* $\Delta_1, \Delta_2$ *сопряжены относительно* $\overline{W}$ (теорема Сюгиуры).

**3.7. Канонические разложения.** Пусть $\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_-$ — вещественные линейные оболочки векторов $e_\alpha \in \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ $(\alpha \in \Delta \backslash \Delta_0)$ соответственно при $\alpha > 0$, $\alpha < 0$. Тогда $\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_- \subset \mathfrak{g}$ и алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{n}_+, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}, \tag{$*$}$$

причем $\mathfrak{g}_0$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{a}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Соответственно $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{n}_-^{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{n}_+^{\mathbf{C}}$, причем $\mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}(\Delta_0)$ в терминах п. 2.10. Разложение $(*)$ называется *треугольным разложением* алгебры $\mathfrak{g}$, подалгебра $\mathfrak{g}_0$ — *треугольным усечением алгебры* $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}_0$ редуктивна). Для каждой из подалгебр $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_-, \mathfrak{n}_+$ имеет место разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \tag{$**$}$$

называемое *разложением Ивасавы.*

Подалгебра $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$ называется *параболической подалгеброй* алгебры $\mathfrak{g}$, если ее комплексификация $\mathfrak{f}^{\mathbf{C}}$ является параболической подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ (см. п. 2.10). Подалгебра $\mathfrak{f} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ является минимальной параболической подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. При этом $\mathfrak{f}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{f}(\Delta_0)$ в терминах п. 2.10. Все минимальные параболические подалгебры в $\mathfrak{g}$ сопряжены относительно $\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g}$.

Разложение Картана и разложения $(*)$, $(**)$ естественно обобщаются на произвольную редуктивную вещественную алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Для этого достаточно положить $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_1$, где $\mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ — разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$ — произвольное разложение центра алгебры $\mathfrak{g}$. Соответственно $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{p}_1$, где $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_0$.

**3.8. Симметрические алгебры.** Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\Phi$ характеристики 0 называется *симметрической*, если в ней фиксирован инволютивный автоморфизм $\theta$, так что $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ в обозначениях п. 3.3. Обычно в этом случае вместо символа $\mathfrak{g}$ используется символ $(\mathfrak{g}, \theta)$. Структурная теория, изложенная в п. 3.3—3.7, в значительной степени переносится на симметрические алгебры Ли.

Симметрическая алгебра $\mathfrak{g}$ над полем $\Phi$ называется *ортогональной*, если $\mathfrak{k}$ — компактная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *неприводимой*, если 1) $\mathfrak{g}$ полупроста, 2) $\mathfrak{k}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры $\mathfrak{g}$, 3) представление $x \mapsto \mathrm{ad}\,x$ $(x \in \mathfrak{k})$ неприводимо в подпространстве $\mathfrak{p}$. Все неприводимые ортогональные симметрические алгебры Ли относятся к одному из следующих четырех типов.

Компактные алгебры. I. $\mathfrak{g}$ проста, $\theta$ — произвольный инволютивный автоморфизм.

II. $\mathfrak{g}$ — прямая сумма двух простых идеалов, $\theta$ — инволютивный автоморфизм, переставляющий эти идеалы.

Некомпактные алгебры. III. $\mathfrak{g}$ проста, $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ проста.

IV. $\mathfrak{g}$ проста, $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ — прямая сумма двух простых идеалов ($\mathfrak{g}$ имеет комплексную структуру). В этих случаях $\theta$ — автоморфизм Картана алгебры $\mathfrak{g}$.

Разложения $\mathfrak{g}_\tau = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}_\sigma = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ (см. п. 3.3) устанавливают *двойственность* (взаимно однозначное соответствие) между типами I и III, II и IV.

**3.9. Классические алгебры Ли.** Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ — одна из классических редуктивных алгебр Ли, описанных в п. 2.7. Операции $x \mapsto \bar{x}$, $x \mapsto x'$, $x \mapsto x^*$ в этом разделе означают соответственно комплексное сопряжение, транспонирование и эрмитово сопряжение матриц $x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$. Алгебра $\mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ выделяется условием $x' = -x$. Далее используются обозначения

$$r(x) = \bar{x},\quad s(x) = sx^*s^{-1},\quad \sigma_{pq}(x) = -\sigma x^*\sigma,\quad \tau_{pq}(x) = -\tau x^*\tau,$$

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ -1_k & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 1_q \end{pmatrix},\quad \tau = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Для описания вещественной формы $\mathfrak{g}_\sigma \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ указывается соответствующий автоморфизм $\sigma$, так что $\mathfrak{g}_\sigma = \{x \in \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}: \sigma(x) = x\}$.

1. *Алгебра* $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ *имеет вещественные формы* $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, $\mathfrak{u}(p, q)$, $\mathfrak{u}^*(n)$, *отвечающие автоморфизмам* $r$, $\sigma_{pq}$ $(p+q=n)$, $s$ *($n$ четно).*

2. *Алгебра* $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ *имеет вещественные формы* $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$, $\mathfrak{su}(p, q)$, $\mathfrak{su}^*(n)$, *отвечающие автоморфизмам* $r$, $\sigma_{pq}$ $(p+q=n)$, $s$ *($n$ четно).*

3. *Алгебра* $\mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ *имеет вещественные формы* $\mathfrak{so}(p, q)$, $\mathfrak{so}^*(n)$, *отвечающие автоморфизмам* $\sigma_{pq}$ $(p+q=n)$, $s$ *($n$ четно).*

4. *Алгебра* $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{C})$ *имеет вещественные формы* $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$, $\mathfrak{sp}(p, q)$, *отвечающие автоморфизмам* $r$, $\tau_{pq}$ $(p+q=n)$.

Компактными вещественными формами при этом являются $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{u}(n, 0) \simeq \mathfrak{u}(0, n)$, $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{su}(n, 0) \simeq \mathfrak{su}(0, n)$, $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(n, 0) \simeq \mathfrak{so}(0, n)$, $\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(n, 0) \simeq \mathfrak{sp}(0, n)$. *Имеют место изоморфизмы*:

1) $\mathfrak{so}(2n) \cap \mathfrak{sp}(n) \simeq \mathfrak{u}(n)$,
2) $\mathfrak{sp}(p, q) \cap \mathfrak{u}(2p+2q) \simeq \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q)$,
3) $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R}) \cap \mathfrak{u}(2n) \simeq \mathfrak{u}(n)$,
4) $\mathfrak{so}^*(2n) \cap \mathfrak{u}(2n) \simeq \mathfrak{u}(n)$,
5) $\mathfrak{su}(p, q) \cap \mathfrak{u}(p+q) \simeq \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q))$,
6) $\mathfrak{su}^*(2n) \cap \mathfrak{u}(2n) \simeq \mathfrak{sp}(n)$,

*где* $\oplus$ *означает прямую сумму идеалов,* $\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q))$ — *множество всех элементов* $x \in \mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q)$ *таких, что* $\operatorname{tr} x = 0$.

Замечание. В реализации п. 2.7, при которой $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$ диагональна в $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, операции $x \mapsto \bar{x}$, $x \mapsto x'$, $x \mapsto x^*$ совпадают с соответствующими операциями в базисе Картана — Вейля (см. п. 2.12).

**3.10. Пояснения к таблицам.** Таблицы 1, 2 содержат список всех простых вещественных алгебр Ли типов I и III (т. е. вещественных форм простых комплексных алгебр Ли). При этом

Таблица 1. Компактные простые алгебры Ли

| Тип | $\mathfrak{g}$ | $\mathfrak{g}^{C}$ | $\dim\mathfrak{g}$ | $\operatorname{rank}\mathfrak{g}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{a}_n$, $n\geqslant 1$ | $\mathfrak{su}(n, 1)$ | $\mathfrak{sl}(n+1, C)$ | $n(n+2)$ | $n$ |
| $\mathfrak{b}_n$, $n\geqslant 1$ | $\mathfrak{so}(2n+1)$ | $\mathfrak{so}(2n+1, C)$ | $n(2n+1)$ | $n$ |
| $\mathfrak{c}_n$, $n\geqslant 1$ | $\mathfrak{sp}(n)$ | $\mathfrak{sp}(n, C)$ | $n(2n+1)$ | $n$ |
| $\mathfrak{d}_n$, $n\geqslant 1$ | $\mathfrak{so}(2n)$ | $\mathfrak{so}(2n, C)$ | $n(2n-1)$ | $n$ |
| $\mathfrak{e}_6$ | $\mathfrak{e}_6$ | $E_6$ | 78 | 6 |
| $\mathfrak{e}_7$ | $\mathfrak{e}_7$ | $E_7$ | 133 | 7 |
| $\mathfrak{e}_8$ | $\mathfrak{e}_8$ | $E_8$ | 248 | 8 |
| $\mathfrak{f}_4$ | $\mathfrak{f}_4$ | $F_4$ | 52 | 4 |
| $\mathfrak{g}_2$ | $\mathfrak{g}_2$ | $G_2$ | 14 | 2 |

Таблица 2. Некомпактные простые алгебры Ли

| Тип | $\mathfrak{g}$ | $\mathfrak{k}$ | $\mathfrak{g}_\tau$ | $\dim\mathfrak{p}$ | $\operatorname{rank}\mathfrak{g}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ I | $\mathfrak{sl}(n, R)$ | $\mathfrak{so}(n)$ | $\mathfrak{su}(n)$ | $^1/_2(n-1)(n+2)$ | $n-1$ |
| $A$ II | $\mathfrak{su}^*(2n)$ | $\mathfrak{sp}(n)$ | $\mathfrak{su}(2n)$ | $(n-1)(2n+1)$ | $n-1$ |
| $A$ III | $\mathfrak{su}(p,q), 0\leqslant p\leqslant q$ | $\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(q))$ | $\mathfrak{su}(p+q)$ | $2pq$ | $p$ |
| $BD$ I | $\mathfrak{so}(p,q), 0\leqslant p\leqslant d$ | $\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(q)$ | $\mathfrak{so}(p+q)$ | $pq$ | $p$ |
| $D$ III | $\mathfrak{so}^*(2n)$ | $\mathfrak{u}(n)$ | $\mathfrak{so}(2n)$ | $n(n-1)$ | $[n/2]$ |
| $C$ I | $\mathfrak{sp}(n, R)$ | $\mathfrak{u}(n)$ | $\mathfrak{sp}(n)$ | $n(n+1)$ | $n$ |
| $C$ II | $\mathfrak{sp}(p, q), 0\leqslant p\leqslant q$ | $\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(q)$ | $\mathfrak{sp}(p+q)$ | $4pq$ | $p$ |
| $E$ I | $\mathfrak{e}_6'$ | $\mathfrak{sp}(4)$ | $\mathfrak{e}_6$ | 42 | 6 |
| $E$ II | $\mathfrak{e}_6''$ | $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$ | $\mathfrak{e}_6$ | 40 | 4 |
| $E$ III | $\mathfrak{e}_6'''$ | $\mathfrak{so}(10)\oplus R$ | $\mathfrak{e}_6$ | 32 | 2 |
| $E$ IV | $\mathfrak{e}_6^{IV}$ | $\mathfrak{f}_4$ | $\mathfrak{e}_6$ | 26 | 2 |
| $E$ V | $\mathfrak{e}_7'$ | $\mathfrak{su}(8)$ | $\mathfrak{e}_7$ | 70 | 7 |
| $E$ VI | $\mathfrak{e}_7''$ | $\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$ | $\mathfrak{e}_7$ | 64 | 4 |
| $E$ VII | $\mathfrak{e}_7'''$ | $\mathfrak{e}_6\oplus R$ | $\mathfrak{e}_7$ | 54 | 3 |
| $E$ VIII | $\mathfrak{e}_8'$ | $\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$ | $\mathfrak{e}_8$ | 128 | 8 |
| $E$ IX | $\mathfrak{e}_8''$ | $\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$ | $\mathfrak{e}_8$ | 112 | 4 |
| $F$ I | $\mathfrak{f}_4'$ | $\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$ | $\mathfrak{f}_4$ | 28 | 4 |
| $F$ II | $\mathfrak{f}_4''$ | $\mathfrak{so}(9)$ | $\mathfrak{f}_4$ | 16 | 1 |
| $G$ | $\mathfrak{g}_2'$ | $\mathfrak{su}(2)$ | $\mathfrak{g}_2$ | 8 | 2 |

Таблица 3. Специальные изоморфизмы

| Совпадение классов | Изоморфизмы между алгебрами |
|---|---|
| $A$ I $(n=2)=A$ III $(p=q=1)=$ $=BD$ I $(p=2,\ q=1)=C$ I $(n=1)$ | $\mathfrak{su}(2)\simeq\mathfrak{so}(3)\simeq\mathfrak{sp}(1)$ $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})\simeq\mathfrak{su}(1,1)\simeq\mathfrak{so}(2,1)\simeq\mathfrak{sp}(1,\mathbf{R})$ |
| $BD$ I $(p=3,\ q=2)=C$ I $(n=2)$ | $\mathfrak{so}(5)\simeq\mathfrak{sp}(2)$, $\mathfrak{so}(3,2)\simeq\mathfrak{sp}(2,\mathbf{R})$ |
| $BD$ I $(p=4,\ q=1)=C$ II $(p=q=1)$ | $\mathfrak{so}(5)\simeq\mathfrak{sp}(2)$, $\mathfrak{so}(4)\simeq\mathfrak{sp}(1)\oplus\mathfrak{sp}(1)$, $\mathfrak{so}(4,1)\simeq\mathfrak{sp}(1,1)$ |
| $A$ I $(n=4)=BD$ I $(p=q=3)$ | $\mathfrak{su}(4)\simeq\mathfrak{so}(6)$, $\mathfrak{so}(4)\simeq\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{so}(3)$ $\mathfrak{sl}(4,\mathbf{R})\simeq\mathfrak{so}(3,3)$ |
| $A$ II $(n=2)=BD$ I $(p=5,\ q=1)$ | $\mathfrak{su}(4)\simeq\mathfrak{so}(6)$, $\mathfrak{sp}(2)\simeq\mathfrak{so}(5)$, $\mathfrak{su}^*(4)\simeq\mathfrak{so}(5,1)$ |
| $A$ III $(p=q=2)=BD$ I $(p=4,\ q=2)$ | $\mathfrak{su}(4)\simeq\mathfrak{so}(6)$, $\mathfrak{su}(2,2)\simeq\mathfrak{so}(4,2)$ |
| $A$ III $(p=3,\ q=1)=D$ III $(n=3)$ | $\mathfrak{su}(4)\simeq\mathfrak{so}(6)$, $\mathfrak{su}(3,1)\simeq\mathfrak{so}^*(6)$ |
| $BD$ I $(p=6,\ q=2)=D$ III $(n=4)$ | $\mathfrak{su}(4)\simeq\mathfrak{so}(6)$, $\mathfrak{so}^*(8)\simeq\mathfrak{so}(6,2)$ |
| $BD$ I $(p=3,\ q=1)=\ \mathfrak{a}_n(n=1)$ | $\mathfrak{so}(4)\simeq\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(3,1)\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ |
| $BD$ I $(p=q=2)=A$ I $(n=2)\oplus A$ I $(n=2)$ | $\mathfrak{so}(4)\simeq\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(2,2)\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ |
| $D$ III $(n=2)=A$ I $(n=2)$ | $\mathfrak{so}(4)\simeq\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}^*(4)\simeq\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ |

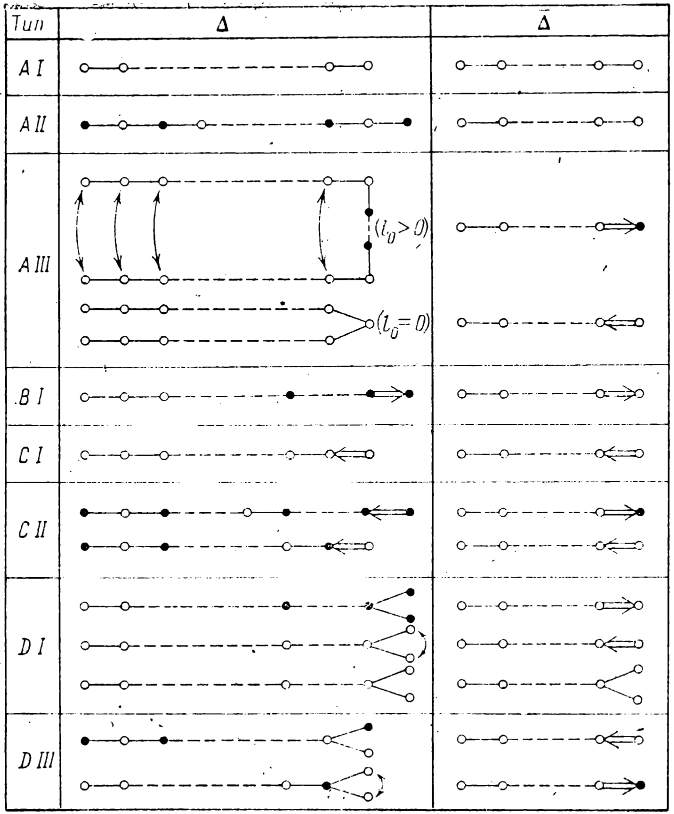
Таблица 4. Классы картановских подалгебр

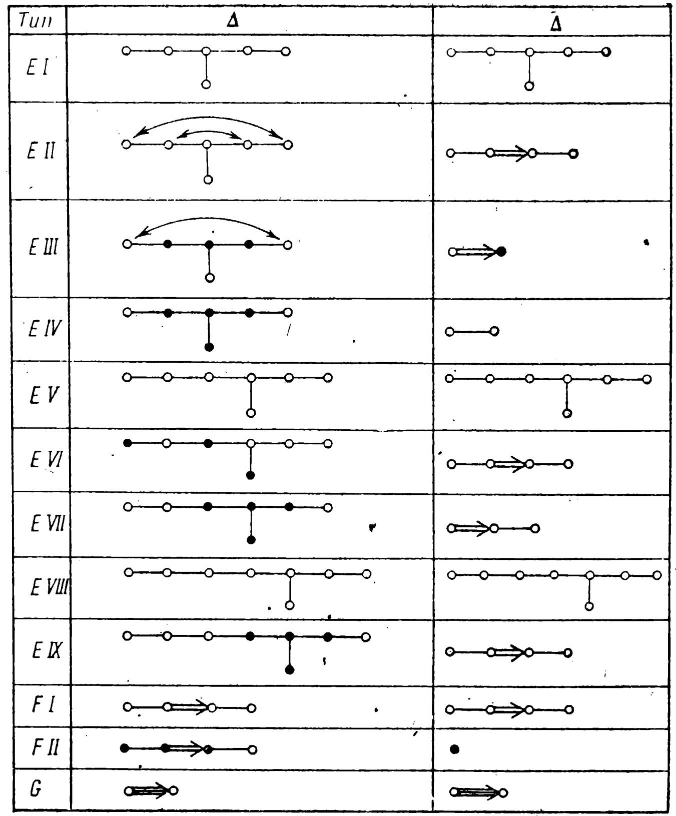
| Тип | $A$ I | $A$ II | $A$ III | $B$I | $C$ I |
|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $s+1$ | 1 | $r+1$ | $1/2(r+2)^2$ ($r$ четно) $1/2(r+1)(r+3)$ ($r$ нечетно) | $1/2(r+2)^2$ ($r$ четно) $1/2(r+1)(r+3)$ ($r$ нечетно) |

| Тип | $C$ II | $D$ I | $D$ III | $E$ I | $E$ II | $E$ III |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $r+1$ | $1/2(s+1)(s+2)$ ($r<l$ или $r=l$—нечетно) $1/2(s+1)(s+2)+1$ ($r=l$ — четно) | $s+1$ | 5 | 5 | 3 |

| Тип | $E$ IV | $E$ V | $E$ VI | $E$ VII | $E$ VIII | $E$ IX | $E$ X | $F$ II | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | 1 | 10 | 5 | 4 | 10 | 5 | 8 | 2 | 1 |

Таблица 5. Схемы Сатаке



в таблице 2 указаны двойственные пары симметрических алгебр $\mathfrak{g}_\sigma$ (типа III), $\mathfrak{g}_\tau$ (типа I). Классификация по типам следует (в основном) обозначениям Картана.

В таблице 3 отмечены случаи совпадения отдельных классов из таблиц 1, 2 и указаны соответствующие изоморфизмы между алгебрами Ли.

В таблице 4 указано число $N$ классов сопряженных картановских подалгебр в алгебрах типа III. При этом использованы обозначения $r = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$, $l = \operatorname{rank} \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, $s = [r/2]$.

Таблица 5 содержит модифицированные схемы Дынкина, отвечающие простым вещественным алгебрам Ли, называемые *схемами Сатаке*, а также схемы Дынкина ограниченных корней. Компактные корни $\alpha \in \Pi_0$ на схеме Сатаке выделяются зачерненными кружочками. Корни $\alpha$, $\beta \in \Pi \backslash \Pi_0$ такие, что $\theta\alpha + \beta \in \Delta_0$, называются *компактно связными*. Компактно связные корни на схеме Сатаке соединяются кривыми стрелками. При этом вещественный ранг алгебры $\mathfrak{g}$ равняется числу элементов множества $(\Pi \backslash \Pi_0)/R$, где $R$ — отношение компактной связности. Вещественный ранг алгебры $\mathfrak{g}$ равняется также числу элементов схемы Дынкина для системы $\overline{\Delta}$ ограниченных корней. Зачерненные кружочки на схеме Дынкина отвечают корням $\alpha \in \overline{\Pi}$, для которых $2\alpha \in \overline{\Delta}$.

Если нет особых указаний в таблице 4, то число $l_0$ зачерненных кружочков может принимать все допустимые (по конфигурации схемы) значения из сегмента $0 \leqslant l_0 \leqslant l$.

Литература: [22], [27], [31], [37].

## § 4. Конечномерные представления алгебр Ли

**4.1. Представления, модули.** Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем $\Phi = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, $\pi$ — ее представление в векторном пространстве $V$ над полем $\Phi$. Вместо символа $\pi(x)\xi$ иногда используется символ умножения $x\xi$ $(x \in \mathfrak{g},\ \xi \in V)$. Соответственно $V$ называется (*левым*) *$\mathfrak{g}$-модулем*.

Одномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ иногда называются *характерами* алгебры $\mathfrak{g}$. Характер $\varepsilon(x) = 0$ называется *тривиальным*. Каждый характер алгебры $\mathfrak{g}$ тривиален на производной подалгебре $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$.

Каждое представление вещественной алгебры $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве $V$ можно продолжить (по линейности) до представления комплексной алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ в пространстве $V^{\mathbf{C}}$, где $V^{\mathbf{C}}$ — комплексификация $V$ (расширение над полем $\mathbf{C}$). При этом каждому подмодулю $V_0 \subset V$ соответствует подмодуль $V_0^{\mathbf{C}} \subset V^{\mathbf{C}}$. Если модуль $V$ неприводим, то модуль $V^{\mathbf{C}}$ либо неприводим, либо является прямой суммой двух изоморфных неприводимых подмодулей. Поэтому изучение вещественных представлений сводится к изучению их комплексных продолжений.

Теория конечномерных представлений алгебр Ли развита лишь для случая вполне приводимых представлений. *Каждое неприводимое представление* $\pi$ *комплексной алгебры Ли* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}$, *где* $\mathfrak{s}$ — *фактор Леви*, $\mathfrak{r}$ — *радикал*, *остается неприводимым при сужении на* $\mathfrak{s}$ *и скалярно при сужении на* $\mathfrak{r}$, *т. е.* $\pi(x) = \lambda(x)\cdot 1$ $(x \in \mathfrak{r})$, *где* $\lambda$ — *характер алгебры* $\mathfrak{r}$, *причем* $\lambda(x) = 0$ *для всех* $x \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]$. Следовательно, представление $\pi$ можно рассматривать как представление редуктивной алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{z} = \mathfrak{r}/[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]$ — центр алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Таким образом, теория неприводимых (конечномерных) представлений содержательна лишь для класса полупростых комплексных алгебр Ли.

**4.2. Представления со старшим вектором.** Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\Delta$ — система ее ненулевых корней относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}$, $\Pi$ — подсистема простых корней относительно фиксированной упорядоченности в $\mathfrak{h}^*$. Если $\xi$ — весовой вектор $\mathfrak{g}$-модуля $V$ относительно $\mathfrak{h}$ с весом $\mu \in \mathfrak{h}^*$, то

$$\eta = e_\alpha\xi, \quad \alpha \in \Delta,$$

также является весовым вектором веса $\mu + \alpha \in \mathfrak{h}^*$. Следовательно, если существует максимальный вес $\lambda$ в пространстве $V$, то

$$e_\alpha\xi = 0, \quad \alpha \in \Delta_+,$$

для каждого весового вектора $\xi$, отвечающего весу $\lambda$. Максимальный вес $\mathfrak{g}$-модуля $V$ принято называть *старшим весом* (highest weight). Соответствующий вектор $\xi$ иногда называют *старшим вектором* (leading vector). Каждый старший вектор $\xi$ может быть охарактеризован как весовой вектор борелевской подалгебры $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. Аналогично, если $\mu$ — минимальный вес в пространстве $V$, то

$$e_\alpha\xi = 0, \quad \alpha \in \Delta_-,$$

для каждого вектора $\xi$, отвечающего весу $\mu$. Минимальный вес $\mathfrak{g}$-модуля $V$ обычно называют *младшим весом*, соответствующий вектор $\xi$ — *младшим вектором* модуля $V$. Младший вектор является весовым вектором борелевской подалгебры $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$.

*Если* $\dim V < \infty$, *то старшие* (*и младшие*) *веса всегда существуют* (следствие теоремы Ли, см. п. 1.5). *Если* $\dim V < \infty$, *модуль* $V$ *неприводим, то старший вес* $\lambda$ (*младший вес* $\mu$) *имеет единичную кратность и характеризует модуль* $V$ *однозначно с точностью до изоморфизма.*

**4.3. Неприводимые конечномерные представления.** Пусть по-прежнему $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли. Для описания множества $\mathfrak{g}^\wedge$ всех неприводимых конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{g}$ достаточно, согласно п. 4.2, описать старшие веса этих представлений.

Используя изоморфизм между $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$, определяемый формулой Киллинга, будем считать, что веса содержатся в $\mathfrak{h}$. Для каждого $x \in \mathfrak{h}$ положим

$$x_\alpha = 2(x, \alpha)/(\alpha, \alpha), \qquad \alpha \in \Delta.$$

Вектор $x \in \mathfrak{h}$ называется *целочисленным*, если $x_\alpha \in \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in \Pi$ (следовательно, для всех $\alpha \in \Delta$), где $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел. Вектор $x \in \mathfrak{h}$ называется *доминантным*, если $x_\alpha \geqslant 0$ для всех $\alpha \in \Pi$, т. е. $x \in \mathfrak{h}_+$, где $\mathfrak{h}_+$ — замыкание доминантной камеры Вейля $C_\Pi$ (см. п. 2.11).

Далее, пусть $\Gamma$ — множество всех целочисленных векторов $\mu \in \mathfrak{h}$, $\Gamma_+ = \Gamma \cap \mathfrak{h}_+$. Множество всех весов конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{g}$ совпадает с $\Gamma$. *Множество всех старших весов конечномерных неприводимых представлений совпадает с* $\Gamma_+$. *Соответственно* $\mathfrak{g}^\wedge \sim \Gamma_+$.

В дальнейшем символ $\pi_\lambda$ обозначает неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом $\lambda$, символ $E_\lambda$ обозначает пространство представления $\pi_\lambda$. (При этом $\pi_\lambda$, $E_\lambda$ определяются с точностью до эквивалентности.)

*Множество* $\Gamma_+$ *является свободной полугруппой относительно сложения с образующими* $\varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l, \ l = \operatorname{rank} \mathfrak{g})$, *определяемыми из условий*

$$2(\varepsilon_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, l,$$

*где* $\delta_{ij}$ — *символ Кронекера*, $\alpha_j \in \Pi$. Соответствующие представления $\pi_i = \pi_{\varepsilon_i}$ называются *фундаментальными представлениями алгебры* $\mathfrak{g}$.

Представление $\pi_0$ тривиально ($\dim \pi_0 = 1$, $\pi_0(x) \equiv 0$). Представление $\widehat{\pi}_\lambda$, контрагредиентное к $\pi_\lambda$, имеет старшим весом $\widehat{\lambda} = -s_0\lambda$, где $s_0 \in W$ — единственный элемент, отображающий $C_+$ на $-C_+$.

**4.4. Характеры.** Представление $\pi_\lambda$ вполне приводимо (т. е. диагонально) при сужении на подалгебру $\mathfrak{h}$. Каждый вес $\mu$ в пространстве $E_\lambda$ относительно $\mathfrak{h}$ имеет вид

$$\mu - \sum_i n_i\alpha_i, \quad n_i \in \mathbf{Z}_+, \quad \alpha_i \in \Pi,$$

где $\mathbf{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел. Множество $\Gamma_\lambda$ всех весов $E_\lambda$ относительно $\mathfrak{h}$ инвариантно относительно группы Вейля и имеет вид

$$\Gamma_\lambda = \{\mu \in \Lambda \colon \mu^+ \leqslant \lambda\},$$

где $\mu^+$ — единственный элемент орбиты $W \cdot \mu$, лежащий в $\Gamma_+$ (см. п. 2.11). Действие группы Вейля сохраняет кратность $n_\mu$ веса $\mu$:

$$n_{s\mu} = n_\mu \quad \text{для всех} \quad s \in W.$$

Пусть $E(\Gamma)$ — мультипликативная группа, изоморфная аддитивной группе $\Gamma$ и составленная из символов $e(\mu)$, $\mu \in \Gamma$, так что $e(0) = 1$, $e(\mu + \nu) = e(\mu) \cdot e(\nu)$. *Характером представления* $\pi$

*алгебры* $\mathfrak{g}$ называется формальная сумма

$$S(\pi) = \sum_{\mu} n_{\mu} e(\mu),$$

где $n_\mu$ — кратность веса $\mu$ в пространстве представления $\pi$ ($\dim \pi < \infty$). При этом $S(\pi \oplus \pi') = S(\pi) + S(\pi')$, $S(\pi \otimes \pi') = S(\pi)S(\pi')$, $S(\pi_0) = 1$. Для описания характера $S_\lambda = S(\pi_\lambda)$ удобно рассматривать $E(\Gamma)$ как подгруппу в $E({}^1/_2\Gamma)$. Положим

$$X_\lambda = \sum_{s \in W} (\det s)\, e(s(\lambda + \delta)), \qquad \lambda \in \Gamma_+,$$

где $\delta$ — полусумма положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$. При этом $\det s = \pm 1$. Тогда *имеет место равенство* $X_\lambda = S_\lambda X_0$, *которое символически может быть записано в виде*

$$S_\lambda = X_\lambda / X_0$$

(формула Г. Вейля). Положим также $D_\lambda = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (\alpha, \lambda + \delta)$. Тогда *размерность* $d_\lambda$ *представления* $\pi_\lambda$ *записывается в виде*

$$d_\lambda = D_\lambda / D_0.$$

**4.5. Формулы для кратности весов.** Среди различных формул для вычисления кратностей весов представления $\pi_\lambda$ следующие три наиболее известны.

1. Формула Фрейденталя. Положим $c(\mu) = \|\lambda + \delta\|^2 - \|\mu + \delta\|^2$, где $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ — норма вектора $x \in \mathfrak{h}_0$, $\delta$ — полусумма положительных корней. Если $\mu \in \Lambda_\lambda$, то $c(\mu) > 0$. Имеет место рекуррентная формула

$$n_\mu = \frac{2}{c(\mu)} \sum_{\alpha > 0} \sum_{k=1}^{\infty} n_{\mu + k\alpha} (\mu + k\alpha, \alpha).$$

2. Формула Костанта. Для каждого $\mu \in \Lambda$ пусть $P(\mu)$ — число различных представлений вектора $\mu$ в виде суммы положительных корней, $P(0) = 1$. Функция $P(\mu)$ называется *функцией разбиения*. Через эту функцию кратность $n_\mu$ выражается непосредственно с помощью знакопеременного суммирования по группе Вейля:

$$n_\mu = \sum_{s \in W} (\det s)\, P(s(\lambda + \delta) - (\mu + \delta)).$$

3. Локальная рекуррентность. Для каждого $s \in W$, $s \neq 1$, имеет место неравенство $\delta - s\delta > 0$. При этом для точек $\mu \in \Lambda_\lambda$

$$n_\mu = - \sum_{s \neq 1} (\det s)\, n_{\mu + \delta - s\delta}.$$

Пример. Для алгебры $\mathfrak{g} = sl(n, \mathbf{C})$ условие доминантности вектора $\lambda \in \mathfrak{h}$ имеет вид $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, где $\lambda_i$ — координаты $\lambda$ относительно базиса $e_i \in \mathfrak{h}$ (см. 3.2.7), $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$. Условие целочисленности вектора $\lambda \in \mathfrak{h}$ имеет вид $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbf{Z}$ для всех $i$, $j$. Если $n = 2$, то $\Gamma_\lambda$ состоит из векторов $\mu \in \mathfrak{h}$ таких, что $\mu_1$ — целое число одинаковой четности с $\lambda_1$ из отрезка $[-\lambda_1, \lambda_1]$. При этом $n_\mu = 1$ для всех $\mu \in \Gamma_\lambda$. Если $n = 3$, то $\Gamma_\lambda$ состоит из целочисленных точек шестиугольника, вершины которого получаются из точки $\lambda$ отражениями относительно проекций координатных осей на плоскость $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$. При этом $n_\mu = 1$ для точек, лежащих на границе этого шестиугольника. (При движении от границы к центру шестиугольника $n_\mu$ вначале возрастает линейно и затем становится константой.)

**4.6. Спектральный анализ.** Для каждого $\mathfrak{g}$-модуля $V$ пусть $V_\lambda$ — максимальный подмодуль $V$, представление в котором кратно $\pi_\lambda$. Согласно теореме Г. Вейля (см. п. 1.8), если $\dim V < \infty$, то

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda.$$

Подмодуль $V_\lambda$ называется *примарным подмодулем* веса $\lambda$. Его структура описывается изоморфизмом $V_\lambda \simeq E_\lambda \otimes F_\lambda$, где $E_\lambda$ — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\lambda$, $F_\lambda$ — тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль ($x\xi = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, $\xi \in F_\lambda$). При этом $m_\lambda = \dim F_\lambda$ — кратность вхождения $\pi_\lambda$ в пространство $V_\lambda$. Множество

$$\Gamma_+(V) = \{\lambda \in \Gamma_+ \colon m_\lambda \neq 0\}$$

называется *спектром модуля* $V$. Число $m_\lambda$ называется *кратностью точки* $\lambda \in \Gamma_+(V)$. Существуют следующие методы спектрального анализа (описания спектров $\Gamma_+(V)$).

1. Метод старших векторов. Старшие векторы подмодулей $V_\lambda$ ($\lambda \in \Gamma_+(V)$) образуют базис подпространства

$$V_+ = \{\xi \in V \colon e_\alpha \xi = 0 \text{ для всех } \alpha \in \Pi\}.$$

Поэтому спектр $\Gamma_+(V)$ совпадает с весовым спектром $\mathfrak{h}$-модуля $V_+$ (с учетом кратностей).

2. Метод характеров. Пусть $\pi$ — представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $V$. Из равенства

$$S(\pi) = \sum_\lambda m_\lambda S_\lambda$$

следует, что для описания $\Gamma_+(V)$ достаточно разложить характер $S(\pi)$ представления $\pi$ по характерам $S_\lambda$ (см. п. 4.4).

Все эти определения и результаты остаются в силе для редуктивной комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}$, если рассматривать только вполне приводимые $\mathfrak{g}$-модули. При этом множество $\Gamma_+$ всех старших весов алгебры $\mathfrak{g}$ определяется как $\Gamma'_+ \oplus \mathfrak{z}^*$, где $\Gamma'_+$ — множество старших весов полупростой подалгебры $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{z}^*$ — дуальное пространство к центру $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{g}$.

**4.7. Тензорные произведения.** Пусть по-прежнему $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли. В силу полной приводимости для каждой пары старших весов $\lambda'$, $\lambda''$ имеет место равенство

$$\pi_{\lambda'} \otimes \pi_{\lambda''} = \sum_{\lambda} m_{\lambda}(\lambda', \lambda'') \pi_{\lambda}.$$

Кратность $m_\lambda(\lambda', \lambda'')$ совпадает с кратностью вхождения тривиального представления $\pi_0$ в произведение $\pi_{\hat{\lambda}} \otimes \pi_{\lambda'} \otimes \pi_{\lambda''}$. Поэтому функция $m(\lambda, \lambda', \lambda'') = m_{\hat{\lambda}}(\lambda', \lambda'')$ симметрична по своим аргументам. Известны следующие общие формулы для вычисления кратностей $m_\lambda(\lambda', \lambda'')$.

1. Пусть $n_\mu$ — кратность веса $\mu$ в представлении $\pi_{\lambda'}$. Тогда

$$m_{\lambda}(\lambda', \lambda'') = \sum_{s \in W} (\det s)\, n_{\lambda+\delta-s(\lambda''+\delta)}.$$

2. Пусть $E_\lambda(\mu)$ — весовое подпространство веса $\mu$ в пространстве $E_\lambda$ представления $\pi_\lambda$. Для каждого $\nu \in \Gamma_+$ положим

$$E_{\lambda}(\mu, \nu) = \{\xi \in E_{\lambda}(\mu) : e_{\alpha}^{\nu_\alpha+1}\xi = 0, \alpha \in \Pi\},$$

где $\nu_\alpha = 2(\nu, \alpha)/(\alpha, \alpha)$. Тогда

$$m_\lambda(\lambda', \lambda'') = \dim E_{\lambda'}(\lambda - \lambda'', \lambda'').$$

Пример. Для алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ положим $\pi(l) = \pi_\lambda$ при $l = \lambda_1/2$ в обозначениях п. 4.5. Тогда

$$\pi(l') \otimes \pi(l'') = \sum_{l=|l'-l''|}^{l'+l''} \pi(l).$$

**4.8. Сужение на подалгебру.** Редуктивная подалгебра $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ называется *регулярно вложенной* в $\mathfrak{g}$, если ее картановская подалгебра $\mathfrak{h}_0$ содержится в картановской подалгебре $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}_0$ — регулярно вложенная подалгебра в $\mathfrak{g}$, то сужение $\pi_\lambda \downarrow \mathfrak{g}_0$ вполне приводимо.

В следующих случаях спектр $\pi_\lambda \downarrow \mathfrak{g}_0$ является простым (т. е. однократным) для всех $\lambda \in \Gamma_+$:

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{gl}(n-1, \mathbf{C})$ — подалгебра всех матриц $x \in \mathfrak{g}$ таких, что $x_{1i} = x_{i1} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{so}(n-1, \mathbf{C})$ — подалгебра всех матриц $x \in \mathfrak{g}$ таких, что $x_{1i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (откуда $x_{i1} = 0$ ввиду кососимметричности матриц $x \in \mathfrak{g}$).

В указанных случаях существует цепочка регулярно вложенных подалгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_m = \mathfrak{h}$ таких, что спектр $\tau \downarrow \mathfrak{g}_{i+1}$ — простой для каждого неприводимого представления $\tau$ алгебры $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, причем $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{h}$ — абелева алгебра Ли. Каждому набору $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, где $\lambda_i$ — старший вес подалгебры $\mathfrak{g}_i$, $\lambda_1 = \lambda$, можно сопоставить весовой вектор $\xi = \xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ в пространстве $E_\lambda$, преобразующийся подалгеброй $\mathfrak{g}$ по представлению $\pi_{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots$
$\ldots, m)$, причем этот вектор $\xi$ определяется однозначно с точностью числового множителя. Совокупность полученных векто-

ров образует весовой базис пространства $E_\lambda$, называемый *базисом Гельфанда — Цетлина.* Известен явный вид операторов алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе Гельфанда — Цетлина.

Литература: [2], [8], [10], [11], [20], [22].

## § 5. Бесконечномерные представления алгебр Ли

**5.1. Универсальные обертывающие алгебры.** В теории представлений алгебр Ли удобно использовать вложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ такую, что $[x, y] = xy - yx$ для элементов $x, y \in \mathfrak{g}$, относительно умножения в $\mathcal{A}$. Каждая такая алгебра $\mathcal{A}$ называется *обертывающей алгеброй* алгебры $\mathfrak{g}$.

*Универсальная обертывающая алгебра* $U(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ определяется как алгебра с образующими $e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $e_i$ — базис $\mathfrak{g}$, и соотношениями

$$e_ie_j - e_je_i = \sum_k c_{ij}^k e_k, \quad i, j = 1, \ldots n,$$

где $c_{ij}^k$ — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$. Иначе говоря, $U(\mathfrak{g}) \simeq T(\mathfrak{g})/J$, где $T(\mathfrak{g})$ — тензорная алгебра над $\mathfrak{g}$ (см. 1.4.5). $J$ — идеал, порожденный элементами вида $[x, y] - (xy - yx)$ $(x, y \in \mathfrak{g})$. Ввиду разложения $T(\mathfrak{g}) = J \oplus S(\mathfrak{g})$, *алгебра* $U(\mathfrak{g})$ *как векторное пространство изоморфна симметрической алгебре* $S(\mathfrak{g})$ (теорема Биркгофа — Витта).

*Алгебра* $U(\mathfrak{g})$ *может быть охарактеризована однозначно, с точностью до изоморфизма, как минимальная обертывающая алгебра алгебры* $\mathfrak{g}$, *в которой одночлены*

$$e_0 = 1, \quad e_{i_1\ldots i_k} = e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k}, \quad i_1 < \ldots < i_k, \qquad (*)$$

*линейно независимы* (следствие теоремы Биркгофа — Витта). Следовательно, *эти одночлены образуют базис* $U(\mathfrak{g})$.

*Каждое представление* $\pi$ *алгебры* $\mathfrak{g}$ *в векторном пространстве* $V$ *однозначно продолжается до представления алгебры* $U(\mathfrak{g})$. При этом элементы $\pi(u)$ $(u \in U(\mathfrak{g}))$ являются (некоммутативными) полиномами от элементов $\pi(e_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Обратно, если $\pi$ — представление алгебры $U(\mathfrak{g})$ в пространстве $V$, то его сужение на $\mathfrak{g}$ является представлением алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, *существует взаимно однозначное соответствие между представлениями алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *и ассоциативной алгебры* $U(\mathfrak{g})$.

В дальнейшем основное поле $\Phi = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

**5.2. Канонические изоморфизмы.** Излагаемые ниже свойства алгебры $U(\mathfrak{g})$ являются следствиями теоремы Биркгофа — Витта.

1. Прямые разложения. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ — прямая сумма подпространств $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, то

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{b}) \simeq U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b}),$$

где $U(\mathfrak{a})$, $U(\mathfrak{b})$ — линейные оболочки одночленов вида $(*)$ соответственно при $e_i \in \mathfrak{a}$, $e_i \in \mathfrak{b}$. Отсюда следует, что

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{b}U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{a}) \oplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{b}.$$

2. Отображение симметризации. Отображение $\sigma$: $S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ определяется как линейное отображение, переводящее одночлены (*) в полиномы

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_{i_1 \ldots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_s e_{s(i_1)} e_{s(i_2)} \ldots e_{s(i_k)},$$

где $s$ — произвольная подстановка индексов $i_1, \ldots, i_k$. Отображение $\sigma$ называется *отображением симметризации* и является изоморфизмом $S(\mathfrak{g})$ на $U(\mathfrak{g})$.

Замечание. Отображение $\sigma$ однозначно определяется условием линейности и условием $\sigma(x^k) = \sigma(x)^k$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

3. Алгебра полиномов. Пусть $P(\mathfrak{g})$ — алгебра полиномов над пространством $\mathfrak{g}$. Алгебра $P(\mathfrak{g})$ содержит дуальное пространство $\mathfrak{g}^*$ (линейные формы) и порождается этим подпространством, откуда $P(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{g}^*)$. Соответственно $S(\mathfrak{g}) \simeq P(\mathfrak{g}^*)$, откуда

$$U(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{g}) \simeq P(\mathfrak{g}^*).$$

Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то отображение $y \mapsto f_y$: $f_y(x) = B(x, y)$ является изоморфизмом $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^*$ (ввиду невырожденности киллинговой формы). В этом случае $P(\mathfrak{g}) \simeq P(\mathfrak{g}^*)$, откуда

$$U(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{g}) \simeq P(\mathfrak{g}).$$

Связь между этими алгебрами позволяет в ряде случаев свести изучение алгебры $U(\mathfrak{g})$ к изучению коммутативных алгебр $S(\mathfrak{g})$, $P(\mathfrak{g}^*)$ или $P(\mathfrak{g})$.

**5.3. Присоединенное представление.** Присоединенное представление $D_x = \operatorname{ad} x$ в алгебре $\mathfrak{g}$ (см. п. 1.4) однозначно продолжается до дифференцирования каждой из алгебр $U(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})$, $P(\mathfrak{g}^*)$:

$$D_x(ab) = (D_x a)b + a(D_x b), \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

При этом $D_x$ является представлением алгебры $\mathfrak{g}$ соответственно в пространстве $U(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})$, $P(\mathfrak{g}^*)$. Отображение симметризации сплетает присоединенные представления в $U(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})$. Канонический изоморфизм между $S(\mathfrak{g})$, $P(\mathfrak{g}^*)$ сплетает присоединенные представления в этих пространствах.

Алгебра $U(\mathfrak{g})$ фильтрована подпространствами $U_k(\mathfrak{g})$ $(k = 0, 1, \ldots)$, где $U_k(\mathfrak{g})$ — линейная оболочка одночленов (*) при фиксированном $k$ $(U_0(\mathfrak{g}) = \Phi e_0)$. Подпространства $U_k(\mathfrak{g})$ инвариантны относительно присоединенного представления в $U(\mathfrak{g})$. Отображение симметризации является изоморфизмом $S_k(\mathfrak{g})$ на $U_k(\mathfrak{g})$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то ее присоединенное представление в пространствах $U(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})$, $P(\mathfrak{g}^*) \simeq P(\mathfrak{g})$ вполне приводимо. Это утверждение является следствием инвариантности фильтрации и теоремы Вейля (см. п. 1.8).

**5.4. Алгебра $Z(\mathfrak{g})$.** Пусть $V^{\mathfrak{g}}$ — множество всех $\xi \in V$ таких, что $x\xi = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ для каждого $\mathfrak{g}$-модуля $V$. Элементы $\xi \in V^{\mathfrak{g}}$ называются *инвариантами алгебры* $\mathfrak{g}$ в пространстве $V$. В частности, положим

$$Z(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}, \quad I(\mathfrak{g}^*) = P(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}, J(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$$

относительно присоединенных представлений в пространствах $U(\mathfrak{g})$, $P(\mathfrak{g}^*)$, $S(\mathfrak{g})$. Пространство $Z(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g})$ является центром алгебры $U(\mathfrak{g})$, т. е. совпадает с множеством всех $z \in U(\mathfrak{g})$, перестановочных с каждым элементом $x \in U(\mathfrak{g})$. Изоморфизмы

$$Z(\mathfrak{g}) \simeq J(\mathfrak{g}) \simeq I(\mathfrak{g}^*)$$

сводят описание $Z(\mathfrak{g})$ к описанию инвариантов в коммутативных алгебрах $S(\mathfrak{g})$, $P(\mathfrak{g}^*)$ (теорема Гельфанда). При этом отображение $J(\mathfrak{g}) \to Z(\mathfrak{g})$ задается симметризацией. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то также $Z(\mathfrak{g}) \simeq I(\mathfrak{g})$.

Если $\pi$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $V \neq (0)$ над полем $\mathbf{C}$, то $\pi(x) = \varepsilon(x) \cdot 1$ для всех $x \in Z(\mathfrak{g})$ (согласно лемме Шура), где $1 = 1_V$, $\varepsilon$ — характер алгебры $Z(\mathfrak{g})$, т. е. ненулевой гомоморфизм в поле комплексных чисел. Следовательно, если $J_\varepsilon$ — идеал в $U(\mathfrak{g})$, порожденный элементами вида $x - \varepsilon(x) \cdot 1$ $(x \in Z(\mathfrak{g}))$, то $J_\varepsilon$ содержится в ядре представления $\pi$. Поэтому можно рассматривать $\pi$ как представление алгебры $U_\varepsilon(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})/J_\varepsilon$.

В частности, пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная комплексная алгебра Ли. Каждому $\lambda \in \Gamma_+$ соответствует характер $\varepsilon_\lambda$ алгебры $Z(\mathfrak{g})$ такой, что $\pi_\lambda(x) = \varepsilon_\lambda(x) \cdot 1$ $(x \in Z(\mathfrak{g}))$. Характеры $\varepsilon_\lambda$ разделяют точки $\lambda \in \Gamma_+$, т. е. для каждой пары точек $\lambda$, $\mu \in \Gamma_+$ существует $z \in Z(\mathfrak{g})$ такой, что $\varepsilon_\lambda(z) \neq \varepsilon_\mu(z)$. Следовательно, *каждое неприводимое конечномерное представление алгебры* $\mathfrak{g}$ *однозначно определяется соответствующим характером алгебры* $Z(\mathfrak{g})$. Для бесконечномерных представлений это неверно (см., например, [22]).

Замечание. Базисные векторы Гельфанда — Цетлина (см. п. 4.8) разделяются характерами алгебр $Z(\mathfrak{g}_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

**5.5. Элементы Казимира.** Существует простой способ описания квадратичных центральных элементов $U(\mathfrak{g})$, основанный на рассмотрении инвариантных билинейных форм (см. п. 1.7). Пусть $\beta$ — инвариантная билинейная форма в алгебре $\mathfrak{g}$, невырожденная на некотором идеале $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$. Пусть $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ — дуальные базисы $\mathfrak{g}_0$ относительно формы $\beta$, т. е. $\beta(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n_0,\ n_0 = \dim \mathfrak{g}_0)$, где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Элемент

$$c_\beta = \sum_{i=1}^{n_0} e_i f_i \in U(\mathfrak{g})$$

называется *элементом Казимира*, соответствующим форме $\beta$ (и идеалу $\mathfrak{g}_0$). При этом $c_\beta \in Z(\mathfrak{g})$. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, $\beta$ — киллинтова форма в $\mathfrak{g}$, то элемент $c_\beta$ называется *элементом Казимира* алгебры $\mathfrak{g}$. Если алгебра $\mathfrak{g}$ проста, то элемент Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ является единственным, с точностью до числового множителя, центральным элементом $U(\mathfrak{g})$, представимым в виде однородного полинома 2-й степени от элементов алгебры $\mathfrak{g}$.

Если $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, $\{h_i\}$, $\{h^i\}$ — дуальные базисы $\mathfrak{h}$ относительно киллинговой формы $\beta$, $e_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ — корневые векторы $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, то элемент Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$c_\beta = \sum_{i=1}^{l} h_i h^i + \frac{1}{2} \sum_{\alpha>0} (e_\alpha e_{-\alpha} + e_{-\alpha} e_\alpha).$$

**5.6. Теорема Шевалле.** Для комплексных полупростых алгебр Ли известно полное описание алгебры $Z(\mathfrak{g})$.

*Если $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, то алгебра $I(\mathfrak{g})$ имеет $l$ независимых однородных образующих, где $l = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$* (теорема Шевалле). Соответственно $Z(\mathfrak{g})$ имеет $l$ независимых образующих, получаемых отображением симметризации из образующих алгебры $I(\mathfrak{g})$. Если $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$, то операция сужения $p \mapsto p_0 = p|\mathfrak{h}$ является изоморфизмом алгебры $I(\mathfrak{g})$ на алгебру $I(\mathfrak{h})$ всех элементов $P(\mathfrak{h})$, инвариантных относительно группы Вейля. При этом действие группы Вейля на полиномы $p \in P(\mathfrak{h})$ определяется по правилу $(sp)(x) = p(s^{-1}x)$ $(x \in \mathfrak{h},\ s \in W)$.

Теорема Шевалле обобщается также на редуктивные алгебры Ли, если вместо $I(\mathfrak{g})$ рассматривать $I(\mathfrak{g}^*)$ и считать, что $\mathfrak{h}^*$ вложена в $\mathfrak{g}^*$ как ортогональное дополнение ко всем $e_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$.

Пример. Алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ удобно рассматривать как евклидово пространство относительно формы

$$(x, y) = \operatorname{tr} xy' = \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}.$$

Соответственно $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$. Действие группы $W$ в пространстве $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$ сводится к подстановке базисных векторов $e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ (см. п. 2.11). Образующие $I(\mathfrak{h})$ можно выбрать в виде

$$S_k(t) = t_1^k + \ldots + t_n^k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

где $t_i$ — координаты вектора $t \in \mathfrak{h}^*$ относительно базиса $\{e_i\}$. Соответствующие элементы в $I(\mathfrak{g}^*)$ имеют вид

$$p_k(x) = \operatorname{tr} x^k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Для описания образующих $Z(\mathfrak{g})$ следует заменить координаты $x_{ij}$ базисными векторами $e_{ij} \in \mathfrak{g}$ и применить симметризацию. Однако в данном случае симметризация оказывается излишней и образующие в $Z(\mathfrak{g})$ можно выбрать в виде

$$u_k = \sum_{i_1, \ldots, i_{k-1}} e_{i_1 i_2} e_{i_2 i_3} \ldots e_{i_{k-1} i_1}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

**5.7. Индуцированные представления.** Существуют естественные способы построения представлений алгебры $\mathfrak{g}$ по данному представлению подалгебры $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$.

1. Пусть $V_0$ — левый $\mathfrak{g}_0$-модуль. Рассмотрим алгебру $U(\mathfrak{g})$ как правый $U(\mathfrak{g}_0)$-модуль относительно умножения в $U(\mathfrak{g})$. Положим

$$\operatorname{Ind}(\mathfrak{g}, V_0) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g}_0)} V_0.$$

Пространство $V = \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}, V_0)$ наделяется структурой левого $U(\mathfrak{g})$-модуля (относительно умножения в $U(\mathfrak{g})$). Модуль $V$ называется *индуцированным $\mathfrak{g}$-модулем* (относительно $V_0$). Если $\pi_0$ — представление $\mathfrak{g}_0$ в $V_0$, то представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $V$ обозначается $\operatorname{Ind}(\mathfrak{g}, \pi_0)$ и называется *индуцированным представлением* (относительно $\pi_0$).

При этом модуль $V_0$ отождествляется с подмодулем $V$ относительно вложения $V_0 \to 1 \otimes V_0 \simeq U(\mathfrak{g}_0) \otimes_{U(\mathfrak{g}_0)} V_0$.

2. Пусть $V_0$ — левый $\mathfrak{g}_0$-модуль. Рассмотрим алгебру $U(\mathfrak{g})$ как левый $U(\mathfrak{g}_0)$-модуль относительно умножения в $U(\mathfrak{g})$ и положим

$$\operatorname{coind}(\mathfrak{g}, V_0) = \operatorname{Hom}_{U(\mathfrak{g}_0)}(U(\mathfrak{g}), V_0).$$

Пространство $V = \operatorname{coind}(\mathfrak{g}, V_0)$ наделяется структурой левого $U(\mathfrak{g})$-модуля относительно преобразования $(uf)(x) = f(xu)$ $(u, x \in U(\mathfrak{g}),\ f \in V)$. Модуль $V$ называется *коиндуцированным модулем* (относительно $V_0$). Соответствующее представление $\pi = \operatorname{coind}(\mathfrak{g}, \pi_0)$, где $\pi_0$ — представление $\mathfrak{g}_0$ в $V_0$, называется *коиндуцированным представлением* (относительно $\pi_0$).

При этом модуль $V_0$ отождествляется с фактормодулем $V$ по ядру отображения $f \mapsto f(1)$.

Если $V_0, V_0^*$ — дуальные $\mathfrak{g}_0$-модули относительно формы $\beta_0$, то модули $V = \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}, V_0), V^* = \operatorname{coind}(\mathfrak{g}, V_0^*)$ дуальны относительно формы

$$\beta(u \otimes \xi, f) = \beta_0(\xi, f(\tilde{u})), \quad u \in U(\mathfrak{g}), \quad \xi \in V_0, \quad f \in V^*,$$

где $u \mapsto \tilde{u}$ — антиавтоморфизм алгебры $U(\mathfrak{g})$, определяемый на элементах $x \in \mathfrak{g}$ по правилу $\tilde{x} = -x$.

**5.8. Модули Верма.** Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли. Представления алгебры $\mathfrak{g}$, индуцированные характерами борелевской подалгебры $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, обладают старшими весами (относительно $\mathfrak{b}$). Соответствующие $\mathfrak{g}$-модули называются *модулями Верма*.

Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ в обозначениях п. 3.7. Каждый характер $\lambda$ борелевской подалгебры $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ тривиален на $\mathfrak{n}_+$ и однозначно определяется своим сужением на картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$: $\lambda(x) = (\lambda, x)$ $(\lambda, x \in \mathfrak{h})$. Пусть $I_\lambda$ — левый идеал $U(\mathfrak{g})$, порожденный элементами $\mathfrak{n}_+$ и элементами вида $x - (\lambda - \delta, x) \cdot 1$ $(x \in \mathfrak{h})$, где $\delta$ — полусумма положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$. Положим

$$M_\lambda = U(\mathfrak{g})/I_\lambda.$$

Модуль $M_\lambda$ является модулем Верма со старшим весом $\lambda - \delta$ относительно подалгебры $\mathfrak{b}$. Соответствующий старший вектор $1_\lambda$ является образом $1 \in U(\mathfrak{g})$ относительно канонической проекции на $M_\lambda$ (т. е. $1_\lambda = 1 + I_\lambda$). При этом $M_\lambda = U(\mathfrak{g}) \cdot 1_\lambda$, т. е. $1_\lambda$ — циклический вектор $M_\lambda$. Если $z \in Z(\mathfrak{g})$, то $z\xi = \varepsilon_\lambda(z)\xi$ для всех $\xi \in M_\lambda$, где $\varepsilon_\lambda$ — характер $Z(\mathfrak{g})$. При этом

$$\varepsilon_{w\lambda}(z) = \varepsilon_\lambda(z) \quad \text{для всех} \quad w \in W,$$

где $W$ — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}$. *Модуль $M_\lambda$ неприводим тогда и только тогда, когда $2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ не является целым положительным числом ни при одном корне $\alpha \in \Delta_+$. Для каждого $\lambda \in \mathfrak{h}$ существует максимальный подмодуль $M'_\lambda \subset M_\lambda$, не содержащий $1_\lambda$. При этом фактормодуль $F_\lambda = M_\lambda/M'_\lambda$ неприводим.*

В частности, если $2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ — целое положительное число для всех $\alpha \in \Delta_+$, то $F_\lambda$ — неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\lambda - \delta$.

**5.9. Циклические модули со старшим весом.** *Каждый циклический $U(\mathfrak{g})$-модуль, порожденный вектором старшего веса $\lambda - \delta$ ($\lambda \in \mathfrak{h}$), изоморфен некоторому фактормодулю $M_\lambda$. Каждый неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\lambda - \delta$ изоморфен $F_\lambda$.* (Следовательно, этот модуль определяется своим старшим весом с точностью до изоморфизма.)

Ввиду разложения $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-) \oplus I_\lambda$ (вытекающего из теоремы Биркгофа — Витта), $M_\lambda \simeq U(\mathfrak{n}_-)$ как векторное пространство. *Пространство $M_\lambda$ является прямой суммой весовых подпространств $M_\lambda^\nu$ ($\nu \in \mathfrak{h}$), причем каждый вес $\nu$ в пространстве $M_\lambda$ имеет вид $\lambda - \delta - \mu$ ($\mu \in \Gamma_+$) и кратность $P(\mu)$, где $P$ — функция разбиения Костанта* (см. п. 4.5). *Соответственно* $\dim M_\lambda^\nu = P(\mu)$.

*Нетривиальный сплетающий оператор $C_{\lambda\mu}$: $M_\mu \to M_\lambda$ существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) $\mu = s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}\ldots s_{\alpha_k}\lambda \quad (\alpha_i \in \Delta, i = 1, 2, \ldots, k)$,

2) $2\left(s_{\alpha_{i+1}}\ldots s_{\alpha_k}\lambda, \alpha_i\right)/(\alpha_i, \alpha_i)$ — *целое положительное число для всех $i = 1, \ldots, k$. При этом $C_{\lambda\mu}$ является вложением и определяется однозначно с точностью до числового множителя.*

Если модуль $M_\lambda$ приводим, то всегда существуют нетривиальные вложения $M_\mu \to M_\lambda$ ($\mu \neq \lambda$). Однако не всякий подмодуль $M_\lambda$ является суммой подмодулей вида $M_\mu$.

**5.10. Модули Хариш-Чандры.** Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая вещественная алгебра Ли, $\mathfrak{k}$ — ее максимальная компактная подалгебра. Модуль $V$ над алгеброй $\mathfrak{g}$ называется *модулем Хариш-Чандры*, если при сужении на $\mathfrak{k}$ он является прямой суммой примарных подмодулей $V_\delta$ ($\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$) (т. е. представление алгебры $\mathfrak{k}$ в $V_\delta$ кратно неприводимому представлению $\pi_\delta$). Модуль $V$ называется *финитным*, если $\dim V_\delta < \infty$ для всех $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$. Всякий неприводимый модуль Хариш-Чандры является финитным.

Классификация модулей Хариш-Чандры основана на следующих технических соображениях. Согласно п. 4.6 имеем $V_\delta \simeq E_\delta \otimes \otimes F_\delta$, где $F_\delta$ — тривиальный $\mathfrak{k}$-модуль. В то же время $F_\delta$ естественно наделяется структурой $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$-модуля ($U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ — множество элементов $U(\mathfrak{g})$, перестановочных с алгеброй $\mathfrak{k}$). Соответствующий модуль $F_\delta$ называется *ассоциированным* $\mathfrak{g}$-модулю $V$. *Если $V$ — неприводимый модуль Хариш-Чандры, то его ассоциированные модули $F_\delta$ неприводимы. Два неприводимых модуля Хариш-Чандры изоморфны тогда и только тогда, когда они обладают изоморфными ненулевыми ассоциированными модулями хотя бы при одном* $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$.

Замечание. Неприводимый модуль $V$ является одновременно модулем Верма и модулем Хариш-Чандры лишь в том случае, когда $\dim V < \infty$.

В частности, с каждым модулем Верма $M_\lambda$ связан модуль Хариш-Чандры $X_\lambda$, состоящий из всех $\mathfrak{k}$-финитных векторов сопряженного модуля $M_\lambda^*$. *Модуль $X_\lambda$ имеет конечный композиционный ряд (ряд Жордана — Гёльдера) и неприводим для точек $\lambda$ «общего положения» (таких, что $2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ — не целое для всех $\alpha \in \Delta$). Каждый модуль Хариш-Чандры изоморфен одному из факторов композиционного ряда $X_\lambda$ при некотором $\lambda$.* Изучение модулей Хариш-Чандры тесно связано с теорией представлений полупростых групп Ли (см. 4.4.6, 5.3.3).

Литература: [10], [12], [22], [25].

# ГЛАВА 4

# ГРУППЫ ЛИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Группы Ли — топологические группы, наделенные структурой аналитического многообразия, согласованной с законом умножения группы $G$ (групповые операции аналитичны). Аксиоматика групп Ли позволяет использовать на этих группах аппарат математического анализа, приводящий к замечательной связи между группами Ли и алгебрами Ли.

В этой главе излагается общая теория групп Ли и их представлений в локально выпуклых векторных пространствах (ЛВП). В начале главы изложены необходимые сведения из теории гладких многообразий.

## § 1. Многообразия

**1.1. Определение многообразий.** Топологическое пространство $\mathscr{M}$ называется *многообразием* (или *локально евклидовым пространством*), если каждая точка $x \in \mathscr{M}$ обладает окрестностью, гомеоморфной открытому множеству евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Число $n$, зависящее от точки $x \in \mathscr{M}$ (но не зависящее от выбора ее окрестности), обозначается $\dim_x \mathscr{M}$ и называется *размерностью многообразия $\mathscr{M}$ в точке $x$*. Если $\mathscr{M}$ связно, то $\dim_x \mathscr{M}$ не зависит от $x$. В этом случае число $n = \dim \mathscr{M}$ называется *размерностью многообразия $\mathscr{M}$*.

Каждая пара $(U, \alpha)$, где $U$ — открытое множество в $\mathscr{M}$, $\alpha$ — гомеоморфизм этого множества на открытое множество в $\mathbf{R}^n$, называется *картой* на $\mathscr{M}$. Декартовы координаты точки $\alpha x \in \mathbf{R}^n$ называются *локальными координатами точки* $x \in \mathscr{M}$ (относительно карты $(U, \alpha)$). Набор карт, покрывающий $\mathscr{M}$, называется *атласом* на $\mathscr{M}$. При этом для каждой пары карт $(U, \alpha)$, $(V, \beta)$ функция $\alpha\beta^{-1}$ осуществляет гомеоморфизм между открытыми множествами в $\mathbf{R}^n$:

$$\alpha\beta^{-1}\colon\ \beta(U \cap V) \to \alpha(U \cap V).$$

Иначе говоря, функция $\alpha\beta^{-1}$ осуществляет согласование между локальными координатами точек $x \in U \cap V$ относительно $(U, \alpha)$ и $(V, \beta)$. Наличие атласа позволяет использовать на $\mathscr{M}$ аппарат математического анализа. При этом условие открытости множества $U$ из карты $(U, \alpha)$ существенно, поскольку позволяет производить малые смещения в пределах множества $U$.

Аналогично с заменой $\mathbf{R}^n$ на $\Phi^n$, где $\Phi$ — нормированное поле, определяется понятие многообразия над полем $\Phi$. Многообразия над полем $\mathbf{C}$ называются *комплексными многообразиями.* Многообразия над полем $p$-адических чисел $\mathbf{Q}_p$ называются *$p$-адическими многообразиями.*

Примеры. 1. Сфера $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ — вещественное многообразие размерности $n-1$. На сфере $S^{n-1}$ существует атлас, состоящий из двух карт. 2. Группа $GL(n, \Phi)$ — открытое множество в $\Phi^{n^2}$. Поэтому $GL(n, \Phi)$ — многообразие размерности $n^2$ над $\Phi$.

**1.2. Гладкие многообразия.** Атлас $\mathscr{A}$ многообразия $\mathscr{M}$ называется *$k$-гладким* ($k = 0, 1, \ldots, \infty, \omega$), если все отображения $\alpha\beta^{-1}$ являются $k$-гладкими. При этом $k$-гладкость при конечном $k$ означает наличие непрерывных производных до порядка $k$ включительно, $\infty$-гладкость — бесконечная дифференцируемость, $\omega$-гладкость — аналитичность. Если на $\mathscr{M}$ существует $k$-гладкий атлас $\mathscr{A}$, то на $\mathscr{M}$ существует также максимальный $k$-гладкий атлас $\mathscr{A}_{\max}$ (состоящий из карт $(U, \alpha)$, $k$-гладко согласованных со всеми картами атласа $\mathscr{A}$). Многообразие $\mathscr{M}$ называется в этом случае *$k$-гладким* или *многообразием класса $C^k$.*

Многообразия класса $C^\omega$ называются обычно *аналитическими многообразиями.* Понятие аналитического многообразия можно рассматривать также над произвольными полными нормированными полями.

Отображение $\varphi\colon \mathscr{M} \to \mathscr{N}$, где $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ — многообразия класса $C^k$, называется *$l$-гладким* ($l \leqslant k$), если оно определяется $l$-гладкими функциями локальных координат относительно максимальных гладких атласов многообразий $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$. Множество всех $l$-гладких отображений $\varphi\colon \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ обозначается $C^l(\mathscr{N}, \mathscr{M})$. Векторное пространство $C^l(\mathbf{R}, \mathscr{M})$ обозначается $C^l(\mathscr{M})$.

Многообразия класса $C^k$ образуют категорию, морфизмами которой являются $k$-гладкие отображения.

**1.3. Подмногообразия, фактормногообразия.** Пусть $\mathscr{M}$ — многообразие. Подмножество $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}$, наделенное индуцированной топологией, называется *подмногообразием* многообразия $\mathscr{M}$, если каждая точка $x_0 \in \mathscr{M}_0$ обладает картой $(U, \alpha)$ такой, что $\alpha(U \cap \mathscr{M}_0)$ — пересечение $\alpha(U)$ с подпространством $\mathbf{R}^m \subset \mathbf{R}^n$ ($m \leqslant n$). Следовательно, $\mathscr{M}_0$ — многообразие с набором карт $(U_0, \alpha_0)$, где $U_0 = U \cap \mathscr{M}_0, \alpha_0 = \alpha|_{U_0}$. Если $\mathscr{M}$ — многообразие класса $C^k$, то $\mathscr{M}_0$ — также класса $C^k$.

Аналогично, пусть $\mathscr{M}$ — многообразие, $\sim$ — отношение эквивалентности на $\mathscr{M}$. Фактормножество $\widetilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M}/\sim$ называется *фактормногообразием* многообразия $\mathscr{M}$, если каждая точка $x_0 \in \mathscr{M}$ обладает картой $(U, \alpha)$ такой, что $x \sim y$ для элементов $x, y \in U$ равносильно $\alpha x \sim \alpha y$ относительно факторизации $\mathbf{R}^n/\mathbf{R}^m$ ($m \leqslant n$). В частности, $\widetilde{\mathscr{M}}$ — многообразие с набором карт $(\widetilde{U}, \widetilde{\alpha})$, где $\widetilde{U} = U/\sim$, $\widetilde{\alpha}$ — отображение $\alpha$, перенесенное на классы эквивалентности. Если $\mathscr{M}$ — многообразие класса $C^k$, то $\widetilde{\mathscr{M}}$ — также класса $C^k$.

Отображение $\varphi \in C^k(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ называется *регулярным*, если его образ $\varphi(\mathscr{M})$ является подмногообразием в $\mathscr{N}$. Отображение $\varphi$ называется *корегулярным*, если множество классов $\varphi^{-1}(n)$ ($n \in \in \mathscr{N}$), является фактормногообразием многообразия $\mathscr{M}$.

Пример. Подмножество $\mathscr{M} \subset \mathbf{R}^n$ называется *регулярным многообразием в* $\mathbf{R}^n$, если $\mathscr{M}$ — подмногообразие многообразия $\mathbf{R}^n$.

Замечание. Каждое многообразие $\mathscr{M}$ класса $C^k$ можно рассматривать вложенным в (бесконечномерное) векторное пространство $V$. В частности, в качестве $V$ можно взять векторное пространство $F_l(\mathscr{M})$, дуальное к $C^l(\mathscr{M})$ при $l \leqslant k$. Соответствующее вложение $\mathscr{M} \to F_l(\mathscr{M})$ сопоставляет каждой точке $x \in \mathscr{M}$ $\delta$-функцию $\delta_x(f) = f(x)$ ($x \in \mathscr{M}$).

В дальнейшем мы рассматриваем классы $C^k$ при $k = \infty$, $\omega$.

**1.4. Касательные векторы.** Вложение $\mathscr{M} \to F_\infty(\mathscr{M})$ удобно использовать для введения касательных векторов к многообразию $\mathscr{M}$. *Касательным вектором* к многообразию $\mathscr{M}$ в точке $x_0 \in \mathscr{M}$ называется всякий функционал $X \in F_\infty(\mathscr{M})$, удовлетворяющий уравнению

$$X(f_1 f_2) = X(f_1) f_2(x_0) + f_1(x_0) X(f_2)$$

для всех $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathscr{M})$. Множество всех таких функционалов обозначается $T_{x_0}\mathscr{M}$ и называется *касательным пространством* к многообразию $\mathscr{M}$ в точке $x_0$. Легко проверить, что в локальных координатах функционал $X$ имеет вид

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}, \qquad \xi_i \in \mathbf{R},$$

где $x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) — локальные координаты точки $x$ в окрестности точки $x_0$. Следовательно, $\dim T_{x_0}\mathscr{M} = \dim_{x_0}\mathscr{M}$ и векторы $X_i f = \partial f(x_0)/\partial x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) образуют базис в $T_{x_0}\mathscr{M}$. Число $X(f)$, называемое *производной функции $f$ по направлению* $X$, линейно зависит от $X$ (при фиксированном $f$). Поэтому

$$X(f) = \langle X, df \rangle, \quad df \in T^*_{x_0}\mathscr{M},$$

где $T^*_{x_0}\mathscr{M}$ — векторное пространство, дуальное к $T_{x_0}\mathscr{M}$. Вектор $df \in T^*_{x_0}\mathscr{M}$ называется *дифференциалом функции $f$* в точке $x_0$. Элементы $dx_i \in T^*_{x_0}\mathscr{M}$ ($i = 1, \ldots, n$), дуальные к $X_i$, т. е. такие, что $\langle X_i, dx_j \rangle = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \ldots, n$), образуют базис в $T^*_{x_0}\mathscr{M}$.

Другой способ введения касательных векторов основан на рассмотрении гладких кривых на $\mathscr{M}$, т. е. функций класса $C^\infty(\mathscr{M}, \mathbf{R})$. Функционал

$$X(f) = \left. \frac{df(x(t))}{dt} \right|_{t=0},$$

где $x(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) — гладкая кривая, проходящая через точку $x_0 \in \in \mathscr{M}$ при $t = 0$, принадлежит $T_{x_0}\mathscr{M}$, обозначается $x'(0)$ и навывается *касательным вектором* к кривой $x(t)$ при $t=0$. При этом

$$x'(0)=y'(0) \Leftrightarrow |x(t)-y(t)|=o(t) \text{ при } t\to 0.$$

Рассматривая равенство в правой части как отношение эквивалентности, можно отождествить $T_{x_0}\mathcal{M}$ с множеством классов эквивалентности гладких кривых, проходящих через точку $x_0$ при $t=0$.

Отображение $\varphi\in C^\infty(\mathcal{N},\mathcal{M})$ сохраняет отношение эквивалентности и потому порождает отображение $T_x\varphi\colon T_x\mathcal{M}\to T_y\mathcal{N}$ при $y=\varphi(x)$. Отображение $T_x$ линейно и называется *производным* или *касательным отображением* к отображению $T$ в точке $x\in\mathcal{M}$.

Вместо символа $T_x\varphi$ при фиксированном $x$ иногда используется символ $d\varphi$ (*дифференциал отображения* $\varphi$ в точке $x\in\mathcal{M}$).

**1.5. Векторные поля.** Если в каждой точке $x\in\mathcal{M}$ задан касательный вектор $A(x)\in T_x\mathcal{M}$, то говорят, что $A(x)$ — *векторное поле* на $\mathcal{M}$. В локальных координатах

$$A(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

т. е. $A(x)$ задается набором функций $a_i\colon \mathcal{M}\to\mathbf{R}$ $(i=1,\ldots,n)$. Говорят, что векторное поле $A$ является *$l$-гладким*, если все функции $a_i$ — класса $C^l$.

Каждое гладкое (т. е. $\infty$-гладкое) векторное поле можно рассматривать как оператор в $C^\infty(\mathcal{M})$. Множество $\mathrm{Vect}\,\mathcal{M}$ всех гладких векторных полей на $\mathcal{M}$ является (бесконечномерной) алгеброй Ли относительно коммутатора

$$[A,B](x)=A(x)B(x)-B(x)A(x).$$

Семейство отображений $\varphi_t\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ $(t\in\mathbf{R})$, называется *гладким потоком на многообразии* $\mathcal{M}$, если отображение $(t,x)\mapsto\varphi_t x$ является гладким отображением $\mathbf{R}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ (с естественной структурой многообразия в $\mathbf{R}\times\mathcal{M}$) и если $\varphi_0 x=x$ для всех $x\in\mathcal{M}$. В этом случае через каждую точку $x\in\mathcal{M}$ проходит гладкая кривая $x(t)=\varphi_t x$. Семейство касательных векторов $A(x)=x'(0)$ является векторным полем на $\mathcal{M}$, которое называется *производным полем* (или *полем скоростей*) *потока* $\varphi_t$.

В действительности каждое гладкое векторное поле является полем скоростей для некоторого гладкого потока $\varphi_t$. Если $\mathcal{M}$ компактно, то этот поток можно выбрать в виде однопараметрической подгруппы:

$$\varphi_{t_1+t_2}=\varphi_{t_1}\varphi_{t_2}, \quad t_1,t_2\in\mathbf{R}; \quad \varphi_0=1.$$

**1.6. Тензорные поля.** По аналогии с векторными полями можно рассматривать тензорные поля произвольного ранга на $\mathcal{M}$. При этом тензорные поля, порожденные образующими $dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$

($i = 1, \ldots, n$), принято называть *ковариантными* (*контравариантными*).

Тензорное поле называется *симметричным* (*кососимметричным*), если все его коэффициенты симметричны (кососимметричны). Ковариантные тензорные поля называются также *дифференциальными формами* на $\mathcal{M}$. Кососимметричные формы ранга $k$ называются *внешними $k$-формами* (или коротко *$k$-формами*) на $\mathcal{M}$.

Векторное пространство $\Lambda(\mathcal{M})$ всех гладких внешних форм является алгеброй относительно внешнего умножения (см. 1.4.5). При этом каждая внешняя $k$-форма имеет вид

$$\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

В пространстве $\Lambda(\mathcal{M})$ однозначно определен линейный оператор $d$, совпадающий с дифференциалом на 0-формах и удовлетворяющий условиям

1) $d^2 = 0$,

2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$

для каждой 1-формы $\omega_1$ и каждой $k$-формы $\omega_2$. Оператор $d$ называется *оператором внешнего дифференцирования*.

Форма $\omega$ называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если $\omega = d\omega'$, где $\omega'$ — некоторая другая форма. Множество замкнутых внешних форм является алгеброй относительно внешнего умножения, подмножество точных форм — идеалом этой алгебры.

Многообразие $\mathcal{M}$ называется *римановым*, если на нем определена симметрическая форма ранга 2:

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, dx_i dx_j,$$

причем матрица $a_{ij}(x)$ положительно определена для всех $x \in \mathcal{M}$.

**1.7. Симплектические многообразия.** Многообразие $\mathcal{M}$ называется *симплектическим*, если на нем определена замкнутая невырожденная 2-форма

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j,$$

причем невырожденность означает, что $\det(a_{ij}(x)) \neq 0$ для всех $x \in \mathcal{M}$. Последнее условие возможно (ввиду косой симметрии) только при $n = 2k$.

При этом локальные координаты $p_i$, $q_i$ ($i = 1, \ldots, k$) всегда можно выбрать так, чтобы

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} dp_i \wedge dq_i.$$

Для каждой пары функций $F$, $G$ на $\mathcal{M}$ функция

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{k} \left( \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right)$$

называется *скобкой Пуассона* функций $F$ и $G$. Определение скобки Пуассона можно дать в инвариантных терминах (не зависящих от локальных координат).

Пространство $C^\infty(\mathcal{M})$ является (бесконечномерной) алгеброй Ли относительно скобки Пуассона.

Пример. Фазовое пространство классической механики — гладкое симплектическое многообразие с фиксированной функцией $H$, называемой *функцией Гамильтона*. Уравнения движения для функции $F$ (зависящей от времени $t$) имеют вид $\dot F = \{H, F\}$, где $\dot F$ — производная функции $F$ по параметру $t$.

Литература: [15], [23], [29].

## § 2. Группы Ли (общая теория)

**2.1. Определение групп Ли.** Группа $G$ называется *группой Ли* (над полем $\mathbf{R}$), если $G$ — аналитическое многообразие (над $\mathbf{R}$) и функция $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ аналитична.

Согласно этому определению, группа Ли является локально евклидовой топологической группой. В действительности верно и обратное: *всякая локально евклидова группа $G$ является группой Ли* (*т. е. многообразие $G$ обладает аналитической структурой, относительно которой $G$ — группа Ли*). Эта теорема, принадлежащая Глисону, Монтгомери и Циппину, является положительным решением 5-й проблемы Гильберта. Всякая группа Ли отделима, метризуема и полна (относительно левой и правой равномерных структур).

Из однородности группы $G$ относительно сдвигов следует, что многообразие $G$ имеет во всех точках одинаковую размерность, обозначаемую $\dim G$.

Аналогично определяется понятие группы Ли над произвольным полем $\Phi$, полным относительно нетривиального абсолютного значения. Если $G$ — группа Ли над полем $\Phi$, то она является также группой Ли над подполем $\Phi_0 \subset \Phi$. Группы Ли над полями $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}_p$ называются соответственно *вещественными*, *комплексными* и *p-адическими группами Ли*.

Группы Ли над полем $\Phi$ образуют категорию, морфизмами которой являются аналитические гомоморфизмы.

В дальнейшем для простоты изложения предполагается, что поле $\Phi$ — характеристики 0.

Примеры. 1. Всякая одномерная связная группа Ли над полем $\mathbf{R}$ изоморфна $\mathbf{R}$ или $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. 2. Все классические матричные группы, описанные в 2.1.6, являются группами Ли. 3. Прямое произведение конечного числа групп Ли является группой Ли.

**2.2. $G$-многообразия.** Аналитическое многообразие $X$ над полем $\Phi$ называется *левым* (*правым*) *$G$-многообразием*, где $G$ — группа Ли над полем $\Phi$, если $X$ является левым (правым) $G$-пространством и умножение $(g, x) \mapsto gx$ ($(g, x) \mapsto xg$) аналитично на $G \times X$.

В частности, пусть $G$ — группа Ли. Подгруппа $H \subset G$ называется *подгруппой Ли*, если $H$ — подмногообразие в $G$. *В этом случае $H$ замкнута, вложение $H \to G$ регулярно, $G/H$ является левым $G$-многообразием и отображение $G \to G/H$ корегулярно.* В частности, если $H$ — нормальный делитель, то $G/H$ — группа Ли.

*Над полями* $\mathbf{R}$ *и* $\mathbf{C}$ *всякая замкнутая подгруппа $H \subset G$ является подгруппой Ли.*

В общем случае пусть $X$ — левое $G$-многообразие, $H_x$ — стационарная подгруппа точки $x \in X$. *Подгруппа $H_x$ замкнута в $G$ и отображение $G/H_x \to X$ (образом которого является орбита точки $x$) регулярно. Орбита $O_x$ точки $x$ является подмногообразием в $X$ тогда и только тогда, когда она локально замкнута* *).

Левое (правое) $G$-многообразие $X$ называется *левым* (*правым*) *расслоенным $G$-пространством с базой $B$*, если $H_x = \{1\}$ для всех $x \in X$ и если существует морфизм $p$: $X \to B$, где $B$ — аналитическое многообразие, такой, что $O_x = p^{-1}p(x)$ для всех $x \in X$. В частности, если $H$ — подгруппа Ли, то $G$ является правым расслоенным $G$-пространством с базой $G/H$.

**2.3. Алгебра Ли группы $G$.** Пусть $G$ — группа Ли над полем $\Phi$. Закон умножения в окрестности единичной точки $1 \in G$ определяется в локальных координатах аналитической вектор-функцией $F$: $V \times V \to \Phi^n$, где $V$ — окрестность $0 \in \Phi^n$ ($n = \dim G$) и точка $0 \in \Phi^n$ соответствует точке $1 \in G$. При этом 1) $F(x, 0) = F(0, x) = x$, 2) $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$, если все выражения, входящие в эти равенства, определены. Каждая окрестность $V \subset \Phi^n$ с фиксированной аналитической вектор-функцией $F$, удовлетворяющей 1) и 2), называется *локальной группой Ли*. Вектор-функция $F$ определяется набором рядов Тейлора, сходящихся в $V \times V$.

Если не заботиться о сходимости рядов Тейлора, т. е. рассматривать их как формальные степенные ряды, то аксиомы 1), 2) определяют объект, называемый *формальной группой Ли*. При этом

$$F(x, y) = x + y + \varepsilon(x, y) + \ldots,$$

где $\varepsilon$ — билинейное отображение $\Phi^n \times \Phi^n \to \Phi^n$ и многоточие означает сумму однородных одночленов степени однородности не меньше 3. Операция $(x, y) \mapsto \varepsilon(x, y)$ является ассоциативным умножением в $\Phi^n$. Соответственно $\Phi^n$ является алгеброй Ли относительно коммутатора

$$[x, y] = \varepsilon(x, y) - \varepsilon(y, x).$$

Следовательно, *каждой группе Ли $G$ над полем $\Phi$ соответствует алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\Phi$, причем* $\dim G = \dim \mathfrak{g}$. Определе-

---

*) Эти утверждения справедливы также при $\operatorname{char} \Phi \neq 0$, если дополнительно требовать, чтобы отображение $\varphi_x : g \mapsto gx$ было локально линейно, т. е. чтобы соответствующее касательное отображение имело постоянный ранг в некоторой окрестности точки $g \in G$.

ние $\mathfrak{g}$ не зависит от выбора карты в окрестности $1 \in G$. Алгебра $\mathfrak{g}$ естественно отождествляется с касательным пространством $T_1G$ в точке $1 \in G$ (см. п. 2.4). Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли* группы $G$.

Пример. Группа $G = GL(n, \Phi)$ является открытым множеством в $\Phi^{n^2}$. Локальными координатами точки $g \in G$ являются декартовы координаты матрицы $x = g - 1$. При этом $F(x, y) = x + y + xy$, откуда $[x, y] = xy - yx$. Следовательно, алгеброй Ли группы $GL(n, \Phi)$ является $\mathfrak{gl}(n, \Phi)$.

**2.4. Экспоненциальное отображение.** Пусть $G$ — группа Ли над полем $\mathbf{R}$, $T_1G$ — касательное пространство к $G$ в единичной точке $1 \in G$. Каждому вектору $x \in T_1G$ соответствует единственная однопараметрическая подгруппа $g(t) \in G$, аналитически зависящая от параметра $t \in \mathbf{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$g(t_1 + t_2) = g(t_1)g(t_2), \qquad g(0) = 1$$

и имеющая $x$ своим касательным вектором: $x = g'(0)$. Точка $g(1)$ обозначается $\exp x$, так что $g(t) = \exp tx$. Отображение exp является (аналитическим) морфизмом $T_1G$ на некоторую окрестность $U$ элемента $1 \in G$. Обратное отображение обозначается log. Окрестность $U$, снабженная отображением log, является картой многообразия $G$. Согласно п. 2.3, пространство $\mathfrak{g} = T_1G$ является алгеброй Ли группы $G$. При этом коммутатор $[x, y] \in \mathfrak{g}$ совпадает с касательным вектором к кривой

$$f(t) = \exp(\tau x)\exp(\tau y)\exp(-\tau x)\exp(-\tau y), \qquad \tau = (\operatorname{sgn} t)\sqrt{|t|}.$$

Координаты вектора $x = \log g$ называются *каноническими координатами* (I *рода*) в окрестности $U$. Если $U = G$ (т. е. канонические координаты определены всюду на $G$), то группа $G$ называется *экспоненциальной*.

Если воспользоваться формальными рядами над $\mathfrak{g}$ (см. п. 2.3), то точка $\exp x \in U$ отождествляется с формальной экспонентой

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

где 1 — нулевой формальный ряд и $x^n$ определяется относительно умножения $xy = \varepsilon(x, y)$. В этом виде удобно определять экспоненту в общем случае (над полем $\Phi$).

Экспонента $g(t) = \exp tx$ определяется также, как единственная непрерывная однопараметрическая подгруппа, проходящая через точку $g = \exp x \in U$.

Пример. Для группы $G = GL(n, \Phi)$ экспонента совпадает с обычной матричной экспонентой. Если $\Phi = \mathbf{R}$, то окрестность $U$ совпадает с множеством всех матриц $g \in G$ с положительными собственными значениями. Если $\Phi = \mathbf{C}$, то $U = G$.

**2.5. Формула Кемпбелла — Хаусдорфа.** Закон умножения в канонических координатах выражается рядом $z = F(x, y)$, определяемым из равенства $\exp z = \exp x \exp y$, т. е.

$$z = \log(\exp x \exp y).$$

Оказывается, что *ряд $F(x, y)$ может быть выражен через кратные коммутаторы в алгебре* $\mathfrak{g}$. Именно, пусть символ $[x_1x_2\ldots x_n]$ обозначает $\frac{1}{n}[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_n]$. Тогда

$$F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{(k_i, l_i)} \frac{[x^{k_1}y^{l_1}\ldots x^{k_m}y^{l_m}]}{k_1!\,l_1!\ldots k_m!\,l_m!}, \qquad (*)$$

где сумма берется по всем целым $k_i$, $l_i$ таким, что $k_i \geqslant 0$, $l_i \geqslant 0$, $k_i + l_i \geqslant 1$. Этот ряд называется *рядом Кемпбелла — Хаусдорфа*. Равенство $(*)$ остается в силе над каждым полем $\Phi$ характеристики 0.

Ряд Кемпбелла — Хаусдорфа неудобен для практического использования. Однако из сходимости этого ряда следует, что *закон умножения в окрестности $U$* (локальная группа Ли) *полностью определяется законом коммутации в алгебре* $\mathfrak{g}$ (т. е. определяется структурными константами алгебры $\mathfrak{g}$).

С другой стороны, для каждой конечномерной алгебры Ли над полем $\Phi$ характеристики 0 ряд Кемпбелла — Хаусдорфа определяет некоторую локальную группу Ли. Таким образом, *существует взаимно однозначное соответствие между конечномерными алгебрами Ли над полем $\Phi$ и локальными группами Ли над полем $\Phi$.*

Пример. Если $[x, y] = 0$, то $\exp x \exp y = \exp(x + y)$.

**2.6. Локально изоморфные группы Ли.** Две локальные группы Ли $V_1$, $V_2$ называются *изоморфными*, если существует аналитический гомеоморфизм $\tau$: $U_1$ на $U_2$, где $U_i \subset V_i$ ($i = 1, 2$) — окрестности нуля, причем

$$\tau F_1(x, y) = F_2(\tau x, \tau y), \qquad x, y \in U_1,$$

где $F_i$ — закон умножения в $U_i$ при условии, что обе части этого равенства определены. Две группы Ли $G_1$, $G_2$ называются *локально изоморфными*, если они обладают изоморфными локальными группами Ли (см. п. 2.3).

Таким образом, каждой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствует семейство $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$ локально изоморфных между собой связных групп Ли. Группы $G \subset \mathscr{L}(\mathfrak{g})$ не обязательно изоморфны между собой, как показывает простейший пример одномерных групп Ли над полем $\mathbf{R}$: группы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ локально изоморфны, но не изоморфны. Иначе говоря, структурные константы определяют группу $G$ лишь с точностью до локального изоморфизма.

Положение меняется, если рассматривать *односвязные* группы Ли над классическими полями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. В этом случае класс $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$ содержит единственную односвязную группу Ли. Следовательно, *существует взаимно однозначное соответствие между конечномерными алгебрами Ли и связными односвязными груп-*

*пами Ли.* Односвязная группа $\mathfrak{g} \subset \mathscr{L}(\mathfrak{g})$ накрывает каждую группу $G \in \mathscr{L}(\mathfrak{g})$, причем $G \simeq \mathfrak{g}/N$, где $N$ — дискретный нормальный делитель, содержащийся в центре группы $\mathfrak{g}$.

Связь между группами и алгебрами Ли впервые была исследована в фундаментальных работах С. Ли. Основная теорема о соответствии с односвязными группами Ли доказана Э. Картаном.

**2.7. Гомоморфизмы.** Пусть $G$, $H$ — две группы Ли, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — соответствующие алгебры Ли. Для каждого регулярного гомоморфизма $\varphi$: $G \to H$ соответствующее касательное отображение $d\varphi$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ называется *дифференциалом гомоморфизма* $\varphi$. Дифференциал $d\varphi$ переводит касательный вектор $g'(0) \in \mathfrak{g}$ в касательный вектор $(\varphi g)'(0) \in \mathfrak{h}$, откуда следует (см. п. 2.4), что $d\varphi$ является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру $\mathfrak{h}$. Иначе говоря, *соответствие между группами Ли и алгебрами Ли функториально.*

*Если $G$ — группа Ли, то каждой подгруппе Ли $H \subset G$ соответствует подалгебра Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. При этом пересечению подгрупп соответствует пересечение подалгебр, произведению подгрупп — сумма подалгебр, нормальному делителю — идеал.* Обратные утверждения имеют место только локально, т. е. при замене групп Ли соответствующими локальными группами Ли. В частности, каждой подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ соответствует аналитическая подгруппа $H = \exp \mathfrak{h} \subset G$, но эта подгруппа не обязательно замкнута в $G$.

*Если $\Phi = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то каждый непрерывный гомоморфизм $G \to H$ регулярен* (теорема Э. Картана). *Если рассматривать только связные односвязные группы Ли, то пересечению подалгебр соответствует пересечение подгрупп, сумме подалгебр соответствует произведение подгрупп и каждому идеалу $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ соответствует нормальный делитель $H \subset G$.*

Пример. Положим $G = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$. В этом случае $\mathfrak{g} = \mathbf{R}^2$. Каждому вектору $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ с иррациональным отношением $x_1/x_2$ соответствует аналитическая подгруппа $H_x = \exp \mathbf{R}x$, всюду плотная в $G$ (*иррациональная обмотка тора*). Следовательно, $H_x$ не замкнута в $G$ (т. е. не является подгруппой Ли).

**2.8. Представления.** Пусть $G$ — группа Ли над полем $\mathbf{R}$, $\varphi$ — ее непрерывное представление в конечномерном векторном пространстве $V$. Дифференциал $d\varphi$ обычно обозначается прежним символом $\varphi$ и определяется равенством

$$\varphi(x) = \left.\frac{d\varphi(\exp tx)}{dt}\right|_{t=0}.$$

При этом $\varphi$ — представление алгебры Ли в пространстве $V$. Обратно, если $\varphi$ — представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $V$, то операторы

$$\varphi(\exp x) = \exp \varphi(x), \qquad x \in \mathfrak{g},$$

образуют представление локальной группы Ли $U$, отвечающей группе $G$. Эти операторы всегда могут быть продолжены до проективного (многозначного) представления группы $G$. Если $G$ односвязна, то $\varphi$ — однозначное представление группы $G$.

При этом $\varphi$ аналитично на $G$. Следовательно, всякое непрерывное представление группы $G$ аналитично.

В частности, пусть $V = \mathfrak{g}$. Операция внутреннего автоморфизма $g \mapsto g_0 g g_0^{-1}$ переводит гладкую кривую $g(t)$, $g(0) = 1$, в гладкую кривую $h(t) = g_0 g(t) g_0^{-1}$, $h(0) = 1$, и потому переводит касательный вектор $x = g'(0)$ в касательный вектор $y = h'(0)$, который обозначается символом $g_0 x g_0^{-1}$ или $\operatorname{Ad} g_0 \cdot x$. Операция $g_0 \mapsto \operatorname{Ad} g_0$ является представлением группы $G$ в пространстве $\mathfrak{g}$ и называется *присоединенным представлением* группы $G$. Дифференциалом этого представления является присоединенное представление $\operatorname{ad} x_0$: $x \mapsto [x_0, x]$ алгебры $\mathfrak{g}$.

**2.9. Инвариантные структуры.** Каждому элементу $x \in \mathfrak{g}$ можно поставить в соответствие дифференциалы левых и правых сдвигов на $G$:

$$L(x) = \frac{dL(\exp tx)}{dt}\bigg|_{t=0}, \quad R(x) = \frac{dR(\exp tx)}{dt}\bigg|_{t=0},$$

где $L(g) f = gf$, $R(g) f = fg^{-1}$ — левые и правые сдвиги в пространстве $C^\infty(G)$. *Операторы $L(x)$ ($R(x)$) являются векторными полями на $G$, инвариантными относительно правых (левых) сдвигов. Обратно, каждое правоинвариантное (левоинвариантное) гладкое векторное поле на $G$ совпадает с $L(x)$ ($R(x)$) при некотором $x \in \mathfrak{g}$.*

Отображения $x \mapsto L(x)$, $x \mapsto R(x)$ являются изоморфизмами алгебры $\mathfrak{g}$ на подалгебры $\mathfrak{g}_L$, $\mathfrak{g}_R \subset \operatorname{Vect} G$, состоящие соответственно из всех правоинвариантных и всех левоинвариантных векторных полей на $G$.

*В частности, на $G$ существует ровно $n$ линейно независимых левоинвариантных (правоинвариантных) гладких векторных полей, где $n = \dim G$.* В действительности эти поля аналитичны. *Аналогично на $G$ существует ровно $n$ линейно независимых левоинвариантных (правоинвариантных) дифференциальных 1-форм, причем эти формы аналитичны.*

Используя левоинвариантные (правоинвариантные) дифференциальные формы на $G$, можно определить на $G$ левоинвариантную (правоинвариантную) риманову метрику и левоинвариантную (правоинвариантную) меру Хаара(см. 2.1.4). *Модулярная функция $\Delta$ группы $G$ в канонических координатах имеет вид*

$$\Delta(\exp x) = e^{\operatorname{tr} \operatorname{ad} x}, \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Следовательно, группа $G$ унимодулярна тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} \operatorname{ad} x = 0$.

Однопараметрические подгруппы $g(t) = \exp tx$ являются геодезическими относительно инвариантных римановых метрик на группе $G$.

**2.10. Канонические координаты II рода.** Пусть $G$ — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, и пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m$ — прямая сумма подпространств $\mathfrak{g}_i$, каждое из которых является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Положим

$$V = G_1 G_2 \ldots G_m, \qquad (*)$$

где $G_i = \exp \mathfrak{g}_i$ — аналитическая подгруппа в $G$, отвечающая подалгебре $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Множество $V$ содержит окрестность $U$ единичного элемента, в которой все разложения

$$g = g_1 g_2 \ldots g_m, \qquad g_i \in G_i,$$

однозначны. В частности, пусть $\mathfrak{g}_i$ — одномерное подпространство в $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}_i = \Phi e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда $G_i = \exp te_i$ — однопараметрическая подгруппа в $G$. Элементы $g \in U$ принимают вид

$$g(t_1, \ldots, t_m) = g(t_1) \ldots g(t_m),$$

т. е. однозначно определяются параметрами $t_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Эти параметры называются *каноническими координатами* II *рода* в окрестности $U$ (отвечающими базису $e_i \in \mathfrak{g}$ $(i = 1, \ldots, m)$).

Разложение $(*)$ называется *аналитическим разложением* в группе $G$, если отображение $(g_1, \ldots, g_m) \mapsto g_1 \ldots g_m$ является аналитическим гомеоморфизмом $G_1 \times \ldots \times G_m$ на $V$. В этом случае каждый сомножитель $g_i$ является аналитической функцией от $g \in V$. Группа $G$ называется *аналитическим произведением* $G_1, \ldots, G_m$, если $G = V$ и разложение $(*)$ аналитично.

**2.11. Классические группы.** Всякая замкнутая подгруппа в $GL(n, \mathbf{R})$, $GL(n, \mathbf{C})$ является группой Ли. Соответствующая алгебра Ли является подалгеброй в $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$.

В частности, все классические матричные группы над полями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$, описанные в 2.1.6, являются группами Ли. Алгебры Ли этих групп обозначаются соответствующими малыми готическими буквами. Например, $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ — алгебра Ли $SL(n, \mathbf{C})$.

Если $G_1$ — связная компонента единицы группы $G$, то $G_1$ и $G$ имеют одну и ту же алгебру Ли. Например, $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{o}(n, \mathbf{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbf{R})$ и т. д. Локально изоморфным группам Ли соответствуют изоморфные алгебры Ли. Например, $\mathfrak{so}(n, \mathbf{R}) \simeq \mathfrak{spin}(n, \mathbf{R})$.

Комплексная группа Ли $G^{\mathbf{C}}$ называется *комплексификацией* вещественной группы Ли $G$, если алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ группы $G^{\mathbf{C}}$ является комплексификацией алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$ и если каждая связная компонента $G^{\mathbf{C}}$ содержит единственную связную компоненту $G$. Соответственно $G$ называется *вещественной формой* группы $G^{\mathbf{C}}$.

*Каждая вещественная связная линейная группа Ли $G$ имеет комплексификацию $G^{\mathbf{C}}$ (порожденную экспонентами вида $e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbf{C}$, $x \in \mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G)$.* В частности, $GL(n, \mathbf{C})$ — комплексификация группы $GL^+(n, \mathbf{R})$, выделяемой из $GL(n, \mathbf{R})$ условием $\det g > 0$. В то же время $GL(n, \mathbf{C})$ — комплексификация $U(n)$.

**2.12. Группы Ли и локально компактные группы.** *Если $G$ — связная локально компактная группа, то каждая окрестность $U$*

*единичного элемента $1 \in G$ содержит нормальный делитель $N_U$ группы $G$ такой, что $G/N_U$ — группа Ли.*

Поскольку окрестность $U$ может быть сделана «сколь угодно малой», то $N_U$ «сколь угодно близко к 1», т. е. группа $G$ аппроксимируется группами $G_U = G/N_U$. В этом случае говорят, что $G$ является *проективным пределом* групп $G_U$. Следовательно, *всякая связная локально компактная группа является проективным пределом групп Ли.*

Результат остается в силе, если $G$ локально компактна и $G/G_1$ — компакт, где $G_1$ — связная компонента единицы в группе $G$.

*Связная локально компактная группа $G$ является группой Ли тогда и только тогда, когда существует окрестность единицы $U \subset G$, которая не содержит ни одной подгруппы, отличной от* $\{1\}$. То же верно для любой локально компактной группы $G$ с компактной факторгруппой $G/G_1$.

Аппроксимация локально компактных групп группами Ли позволяет использовать аналитические методы в общей теории локально компактных групп.

Литература: [2], [3], [5], [21] — [23], [27].

## § 3. Группы Ли (структурная теория)

**3.1. Основные типы групп Ли.** В этом параграфе рассматриваются группы Ли только над полями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. Если нет специальных оговорок, термин «группа Ли» означает «вещественная группа Ли».

Пусть $G$ — связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Группа $G$ называется *простой*, *полупростой*, *редуктивной*, *разрешимой* или *нильпотентной*, если соответственно алгебра $\mathfrak{g}$ проста, полупроста, редуктивна, разрешима или нильпотентна.

Нетрудно выразить эти определения непосредственно в терминах группы $G$. Например, простота означает, что $G$ не имеет замкнутых связных нормальных делителей, отличных от $\{1\}$ и $G$. Это определение отличается от соответствующего определения, принятого в теории топологических групп (отсутствие замкнутых нормальных делителей), а также от определения, принятого в общей теории групп (отсутствие нормальных делителей). Аналогично — для полупростоты и редуктивности.

Понятия разрешимости и нильпотентности совпадают с соответствующими понятиями теории топологических групп. Топологическая группа $G$ называется *разрешимой*, если она имеет конечный производный ряд

$$G' = [G, G], \quad G'' = [G', G'], \ldots, G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}],$$

где $[A, B]$ — минимальная замкнутая подгруппа, порожденная элементами вида $aba^{-1}b^{-1}$ $(a \in A, \ b \in B)$, (групповые коммутаторы), и конечность ряда $G^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $G^{(0)} = G$ означает, что $G^{(n)}=\{1\}$ при некотором $n$. Группа $G$ называется *нильпотентной*, если она имеет конечный центральный ряд

$$G_1=[G, G], \quad G_2=[G, G_1], \ \ldots, \ G_n=[G, G_{n-1}].$$

Иногда соответствующие термины применяются также для несвязных групп Ли. Например, группа Ли называется *редуктивной*, если ее связная компонента, содержащая единицу, редуктивна.

Примеры. 1. Группы $SL(n, \Phi)$, $SO(n, \Phi)$, $Sp(n, \Phi)$, где $\Phi=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, просты соответственно при $2\leqslant n$, $3\leqslant n\neq 4$, $1\leqslant n$. 2. Группы $B_+(n, \Phi)$ разрешимы, группы $N_+(n, \Phi)$ нильпотентны.

**3.2. Основные структурные теоремы.** Пусть $G$ — связная группа Ли. В группе $G$ существуют 1) единственный максимальный связный разрешимый нормальный делитель $R$, называемый *радикалом группы* $G$, 2) максимальная связная полупростая группа $S$, определяемая однозначно с точностью до внутренних автоморфизмов. При этом подгруппа $S\cap R$ дискретна, и имеет место разложение $G=SR$, называемое *разложением Леви — Мальцева*. Группа $G$ локально изоморфна полупрямому произведению $S\circ R$ (см. 1.1.7). *Группа $G$ односвязна тогда и только тогда, когда обе компоненты $S$, $R$ односвязны. В этом случае $S\cap R=\{1\}$ и разложение $SR$ аналитично* (см. п. 1.10). Группа $G$ редуктивна тогда и только тогда, когда $R$ содержится в центре группы $G$. Группа $G$ полупроста тогда и только тогда, когда $R=\{1\}$.

*Каждая полупростая связная группа Ли $S$ является произведением своих простых связных нормальных делителей*:

$$S=S_1\ldots S_k\simeq S_1\times\ldots\times S_k,$$

*где $\simeq$ означает локальный изоморфизм. Каждая разрешимая связная группа Ли $G$ является произведением своих однопараметрических подгрупп*:

$$R=R_1\ldots R_m\sim R_1\times\ldots\times R_m,$$

*где $\sim$ означает гомеоморфизм. При этом произведение можно упорядочить таким образом, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *каждый сомножитель $R_{k+1}, \ldots, R_m$ $(0\leqslant k\leqslant m-1)$ является нормальным делителем в $R$*,

2) *$K=R_1\ldots R_d$ — компактная коммутативная подгруппа (при некотором $d$: $0\leqslant d\leqslant m$)*,

3) *$V=R_{d+1}\ldots R_m$ — односвязная подгруппа. При этом $R=KV\simeq K\circ V$. Подгруппа $K$ гомеоморфна $d$-мерному тору. Подгруппа $V$ гомеоморфна векторному пространству $\mathbf{R}^{m-d}$. Группа $G$ односвязна тогда и только тогда, когда $K=\{1\}$.*

Каждая экспоненциальная группа Ли (см. п. 2.4) разрешима. Каждая связная односвязная нильпотентная группа Ли экспоненциальна.

**3.3. Редуктивные группы Ли.** Если $G$ — редуктивная связная группа Ли, то ее радикал является связной компонентой центра группы $G$ и имеет вид $AB \simeq A \times B$, где $A$ — односвязная абелева группа (векторное пространство), $B$ — компактная абелева группа (тор). *При этом $G = RS = ABS \simeq A \times BS$, где $S$ — полупростая компонента группы $G$.* Группа $G$ компактна тогда и только тогда, когда $A = \{1\}$, $S$ компактна. Группа $G$ односвязна тогда и только тогда, когда $B = \{1\}$, $S$ односвязна. Односвязная накрывающая редуктивной группы редуктивна.

*Полупростая связная группа Ли $G$ имеет дискретный центр. Ее односвязная накрывающая полупроста. Ее присоединенная группа* $\mathrm{Ad}\, G$ *локально изоморфна $G$ и имеет тривиальный центр* (т. е. он равен $\{1\}$). Следовательно, $G$ накрывает $\mathrm{Ad}\, G$. Таким образом, в классе групп Ли, локально изоморфных $G$, существует максимальная (накрывающая) группа и минимальная (присоединенная) группа. *Если группа $G$ линейна, то ее центр конечен.* Среди линейных групп, локально изоморфных $G$, также существует максимальная (линейная накрывающая) группа. Если $G$ — комплексная полупростая группа, то она линейна (т. е. имеет точное линейное представление).

*Каждая компактная группа Ли редуктивна и имеет конечный центр. Односвязная накрывающая компактной группы Ли компактна* (теорема Г. Вейля). *Каждая компактная группа Ли линейна. Каждая компактная связная группа Ли имеет комплексификацию (т. е. является вещественной формой комплексной редуктивной группы Ли).*

Полупростая связная группа Ли компактна тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли компактна в смысле 3.1.8.

**3.4. Картановские подгруппы.** Здесь и далее, до п. 3.7 включительно, $G$ — полупростая связная группа Ли с конечным центром (в частности, линейная полупростая связная группа Ли), $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли.

Подгруппа $H \subset G$ называется *редуктивной* в $G$, если ее присоединенное представление в алгебре $\mathfrak{g}$ (т. е. представление $\mathrm{Ad}\, G \downarrow H$) вполне приводимо. Максимальные коммутативные подгруппы $H \subset G$, редуктивные в $G$, называются *картановскими подгруппами* группы $G$. Каждая картановская подгруппа замкнута, связна и имеет вид $\exp \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Отсюда согласно 3.3.4 следует описание всех картановских подгрупп группы $G$. В частности, *существует лишь конечное число классов сопряженности картановских подгрупп относительно внутренних автоморфизмов.*

Каждая картановская подгруппа $H \subset G$ имеет вид $AT \simeq A \times T$, где $A$ — максимальная связная односвязная подгруппа в $H$ (векторное пространство или расщепимый тор), $T$ — максимальная компактная связная подгруппа в $H$ (максимальный тор или компактный тор). Подгруппа $A$ называется *векторной частью* группы $H$, подгруппа $T$ называется *тороидальной частью* группы $H$. Картановская подгруппа $H = AT$ называется *главной*, если ее векторная часть имеет максимально возможную размерность. Векторные части главных картановских подгрупп называются *главными векторными подгруппами* группы $G$. Все главные картановские подгруппы (соответственно все главные векторные подгруппы) группы $G$ сопряжены относительно внутренних автоморфизмов.

Размерность $l = \dim H$ картановской подгруппы $H \subset G$ не зависит от выбора $H$ и называется *полным рангом* группы $G$. Размерность $r = \dim A$ главной векторной подгруппы $A \subset G$ не зависит от выбора $A$ и называется *вещественным рангом* (или *расщепимым рангом*) группы $G$.

Если $G$ компактна, то каждая максимальная коммутативная подгруппа в $G$ является картановской подгруппой и все такие подгруппы сопряжены. Следовательно, каждый элемент $g \in G$ содержится в некоторой картановской подгруппе. Если картановская подгруппа $H \subset G$ фиксирована, то каждый элемент $g \in G$ представляется в виде $u^{-1}hu$ $(h \in H,\ u \in G)$.

Если $G$ комплексна, то все картановские подгруппы сопряжены и имеют вид $AT$, где $\dim A = \dim T$ (равен рангу комплексной алгебры Ли группы $G$).

**3.5. Аналитические разложения.** *Каждая максимальная компактная подгруппа $K \subset G$ связна и имеет вид* $\exp \mathfrak{k}$, *где* $\mathfrak{k}$ — *максимальная компактная подалгебра в* $\mathfrak{g}$ (см. 3.3.3). *Все такие подгруппы сопряжены относительно внутренних автоморфизмов. Каждая максимальная компактная подгруппа $K \subset G$ содержит центр группы $G$.*

С каждой максимальной компактной подгруппой $K \subset G$ связаны известные аналитические разложения группы $G$.

1. Положим $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^{\perp}$ (в пространстве $\mathfrak{g}$), где $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли группы $K$. Множество $P = \exp \mathfrak{p}$ — замкнутое связное многообразие в $G$. Имеет место аналитическое разложение

$$G = KP = PK,$$

называемое *разложением Картана. Разложение Картана однозначно с точностью до внутренних автоморфизмов.* Если $G \subset GL(n, \mathbb{C})$, то можно выбрать $K \subset U(n)$. При этом $P$ состоит из положительно определенных (эрмитовых) матриц $g \in G$.

2. Пусть $A = \exp \mathfrak{a}$ — главная векторная подгруппа группы $G$, $N = \exp \mathfrak{n}$ — максимальная связная нильпотентная подгруппа в $G$, где $\mathfrak{n}$ — линейная оболочка векторов $e_\alpha$ $(\alpha > 0)$ ($\alpha$ — корень алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$). Группа $N$ замкнута, односвязна и все ее замкнутые подгруппы односвязны. Имеет место аналитическое разложение

$$G = NAK = KAN,$$

называемое *разложением Ивасавы. Разложение Ивасавы однозначно с точностью до внутренних автоморфизмов.* Если $G \subset GL(n, \mathbb{C})$, $K \subset U(n)$, то $A$ — максимальная абелева подгруппа в $P$, и $N$ можно выбрать как пересечение группы $G$ с группой верхних (или нижних) матриц с единицами на главной диагонали.

При этом $A$ определяется с точностью до автоморфизмов $a \mapsto k^{-1}ak$ ($a \in A$, $k \in K$), и $P$ — объединение подгрупп $k^{-1}ak$ ($k \in K$). Подгруппа $N$ определяется с точностью до замены $\Delta_+$ на $\Delta_-$ (т. е. $\lambda > 0$ на $\lambda < 0$ в определении $\mathfrak{n}$). В частности, можно заменить $N$ на $\bar{N}$ (противоположная подгруппа), где $\bar{N} = \exp \bar{\mathfrak{n}}$, $\bar{\mathfrak{n}}$ — линейная оболочка $e_\lambda$ ($\lambda < 0$).

3. Пусть $\mathfrak{a}^+$ — замыкание доминантной камеры Вейля в алгебре $\mathfrak{a}$, $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$. Тогда имеет место разложение

$$G = KA^+K,$$

называемое *разложением Картана*, которое становится однозначным, если левый (правый) множитель $K$ заменить на $K/M$ ($M \backslash K$), где $M$ — централизатор $A$ в $K$.

*Группы $K$, $A$, $N$ унимодулярны. Разложения Ивасавы $g = nak$, $g = kan$, где $k \in K$, $a \in A$, $n \in N$, индуцируют (соответственно) разложения меры Хаара*

$$dg = a^{-2\rho} dk\,da\,dn, \quad dg = a^{2\rho} dk\,da\,dn,$$

где $dk$, $da$, $dn$ — нормированные меры Хаара на группах $K$, $A$, $N$ и $a^\lambda$ — характер группы $A$, определяемый по правилу

$$a^\lambda = (\exp x)^\lambda = e^{(\lambda, x)},$$

$(\cdot, \cdot)$ — киллингова форма в алгебре $\mathfrak{a}$, $\rho$ — полусумма положительных корней.

Все эти результаты сохраняют силу также для вещественных редуктивных групп Ли.

**3.6. Параболические подгруппы.** В теории представлений редуктивных групп Ли существенную роль играют замкнутые подгруппы $P \subset G$ с компактным факторпространством $G/P$. Такие подгруппы $P \subset G$ называются *параболическими подгруппами* группы $G$.

1. Если $G$ комплексна, то минимальной параболической подгруппой группы $G$ является ее *борелевская подгруппа* $B \subset G$, определяемая равенством $B = \exp \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b}$ — борелевская подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Соответственно $B = HN = NH$, где $H$ — картановская подгруппа группы $G$, $N$ — максимальная нильпотентная подгруппа группы $G$. При этом $B$ — максимальная разрешимая подгруппа группы $G$.

*Если $B = HN$ — борелевская подгруппа группы $G$ и $\bar{N}$ — подгруппа, противоположная к $N$, то множество $G_0 = \bar{N}HN$ всюду плотно в $G$.* Разложение $G_0 = \bar{N}HN$ называется *разложением Гаусса* в группе $G$.

2. В общем случае пусть $A$ — главная векторная подгруппа в $G$, $M$ — ее централизатор в $K$, группа $N$ определяется, как в п. 2.5. Подгруппа $F = AM = MA$ централизует $N$. Поэтому $P = NAM = MAN$ — подгруппа в $G$. Подгруппа $P$ является минимальной параболической подгруппой в $G$.

*Все минимальные параболические подгруппы группы $G$ сопряжены относительно внутренних автоморфизмов. Все осталь-*

*ные параболические подгруппы суть замкнутые подгруппы $P$: $P_0 \subset P \subset G$, где $P_0$ — минимальная параболическая подгруппа группы $G$.*

Если $P_0 = N_0 A_0 M_0$, то $P = NAM$, где $N \subset N_0$, $A \subset A_0$ — замкнутые подгруппы, $AM$ — централизатор $A$ в $G$. Разложение $P = NAM = MAN$ называется *разложением Ленглендса* группы $P$. При этом $A \subset A_0$ — векторная подгруппа группы $G$.

**3.7. Группы Вейля.** Пусть $A$ — векторная подгруппа группы $G$, $F = AM$ — ее централизатор в $G$, $F' = AM'$ — ее нормализатор в $G$. Факторгруппа $W = F'/F \simeq M'/M$ конечна и называется *группой Вейля* относительно пары $(G, A)$. В дальнейшем используется обозначение $W = W(G, A)$.

Группа $W$ естественно действует в $A$ и в $M$ (с помощью внутренних автоморфизмов). Соответственно $W$ действует в алгебрах Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{a}$ — алгебра Ли группы $A$, $\mathfrak{m}$ — алгебра Ли группы $M$):

$$w(\exp x) = \exp(wx), \quad w \in W, \text{ где } x \in \mathfrak{a} \text{ или } x \in \mathfrak{m}.$$

Далее, пусть $\mathcal{P}(A)$ — множество всех параболических подгрупп $P = NAM$ с фиксированной векторной подгруппой $A$. *Множество $\mathcal{P}(A)$ конечно и транзитивно относительно группы Вейля $W = W(G, A)$.*

В частности, пусть $G$ комплексна, $A$ — главная векторная подгруппа в $G$. В этом случае $H = AM$ — картановская подгруппа в $G$ ($M$ — максимальный тор, $\dim A = \dim M$), и группа $W$ действует в комплексной картановской алгебре $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$. При этом $W$ изоморфна группе Вейля комплексной пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Если $G$ комплексна, то $B = HN$ — борелевская подгруппа группы $G$. Для каждого $w \in W$ пусть $\bar{w}$ — представитель класса $w$ в группе $F'$ (по одному из каждого класса). Тогда имеет место разложение

$$G = \bigcup_{w \in W} B\bar{w}B,$$

называемое *разложением Брюа*. Следовательно, факторпространство $B \backslash G / B$ двусторонних классов смежности по $B$ конечно, причем число его элементов равняется порядку группы $W$. Разложение Брюа становится однозначным, если записать его в виде

$$G = \bigcup_{w \in W} B\bar{w}N_w = \bigcup_{w \in W} N_w \bar{w} B,$$

где положено $N_w = N \cap N^w$ ($N^w$ — образ группы $N$ относительно внутреннего автоморфизма, определяемого элементом $w$).

**3.8. Топология групп Ли.** Разложение Ивасавы, описанное в п. 2.5, обобщается на произвольную связную группу Ли таким образом, что $G = KAN \sim K \times A \times N$ (тильда — гомеоморфизм), $K$ — компактная подгруппа в $G$, $A$ — односвязная абелева подгруппа в $G$, $N$ — односвязная разрешимая подгруппа в $G$. Следовательно, группа $G$ как топологическое пространство гомеоморфна прямому произведению компакта $K$ на векторное пространство $V=A\times N$. Группа $G$ *стягивается* к $K$, т. е. каждый путь, лежащий в $G$, может быть переведен непрерывной деформацией в некоторый путь, лежащий в $K$. Группа $G$ односвязна тогда и только тогда, когда $K$ односвязна.

Следовательно, топология групп Ли сводится, по существу, к топологии компактных групп Ли. Согласно п. 3.2, последний вопрос в свою очередь сводится к теории простых компактных групп Ли.

Каждая компактная простая связная группа Ли изоморфна $\tilde{K}/C$, где $\tilde{K}$ — односвязная накрывающая группа, $C$ — ее центральная подгруппа, т. е. $C\subset Z$, где $Z$ — центр группы $K$. При этом $K$ компактна и однозначно определяется соответствующей схемой Дынкина. Следовательно, для описания компактных простых групп Ли достаточно описать центры $Z\subset K$. Это описание дается следующей таблицей, где $\mathbf{Z}_n$ — циклическая группа порядка $n$:

| $K$ | $A_n$ | $B_n$ | $C_n$ | $D_{2k}$ | $D_{2k+1}$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ | $F_4$ | $G_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | $\mathbf{Z}_{n+1}$ | $\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{Z}_4$ | $\mathbf{Z}_3$ | $\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{Z}_1$ | $\mathbf{Z}_1$ | $\mathbf{Z}_1$ |

**3.9. Симметрические пространства.** Среди однородных $G$-многообразий, где $G$ — группа Ли, особое место занимают так называемые симметрические пространства. Классификация этих пространств тесно связана с классификацией редуктивных групп Ли.

Аналитическое риманово пространство $\mathcal{M}$ называется *симметрическим пространством*, если каждая его точка $p\in\mathcal{M}$ является изолированной неподвижной точкой некоторой инволютивной изометрии $s_p$, $s_p\neq 1$, $s_p^2=1$. Каждое связное симметрическое пространство $\mathcal{M}$ аналитически гомеоморфно $G/K$, где $G$ — связная компонента единицы в группе $I(\mathcal{M})$ всех изометрий пространства $\mathcal{M}$, наделенной естественной (компактно-открытой) топологией, $K$ — компактная подгруппа в $G$. При этом группа $G$ редуктивна и ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет разложение Картана $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли подгруппы $K$. Подпространство $\mathfrak{p}$ естественно отождествляется с касательным пространством $T_0\mathcal{M}$ в фиксированной точке $0\in\mathcal{M}$ ($0$ — образ $1\in G$).

Алгебра $\mathfrak{g}$ называется соответственно *алгеброй компактного*, *некомпактного*, *евклидова типа*, если $\mathfrak{g}$ компактна полупроста, некомпактна полупроста, $\mathfrak{p}$ — абелев идеал в алгебре $\mathfrak{g}$. В общем случае алгебра $\mathfrak{g}$ является суммой трех идеалов, относящихся к указанным типам. Соответственно локальная классификация симметрических пространств сводится к описанию симметрических ортогональных алгебр Ли (см. 3.3.8).

Примерами симметрических пространств являются сфера, евклидово пространство, гиперболическое пространство (пространство Лобачевского). Двойственность между компактным и некомпактным типами (см. 3.3.8) является обобщением известной двойственности между сферической и гиперболической тригонометриями.

Литература: [21], [22], [25], [27].

## § 4. Представления групп Ли (общая теория)

**4.1. Непрерывные представления.** Всюду в этом параграфе $T$ — непрерывное представление группы Ли $G$ в ЛВП $E$. Аналитическая структура группы $G$ проявляется лишь частично в таких представлениях.

Вектор $\xi \in E$ называется *дифференцируемым* (относительно $T$), если вектор-функция $T(g)\xi$ дифференцируема на $G$ (в топологии $E$). Аналогично определяется кратная дифференцируемость. Вектор $\xi \in E$ называется *аналитическим*, если вектор-функция $T(g)\xi$ аналитична на $G$.

Для каждого дифференцируемого вектора $\xi \in E$ и каждого $x \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$, определено выражение

$$T(x)\xi = \frac{d}{dt} T(\exp tx)\xi|_{t=0}.$$

Линейные операторы $T(x)$ $(x \in \mathfrak{p})$, называются *инфинитезимальными операторами* представления $T$ группы $G$. Подпространство $E^\infty$ всех бесконечно дифференцируемых векторов инвариантно как относительно операторов $T(g)$ $(g \in G)$, так и относительно операторов $T(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$. Отображение $x \mapsto T(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ является представлением алгебры $\mathfrak{g}$ в $E^\infty$. Это представление называется *дифференциалом* исходного представления $T$ группы $G$. Если $\xi$ — аналитический вектор, то

$$T(\exp tx)\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n T(x)^n \xi}{n!},$$

т. е. в этом случае вектор-функция $T(g)\xi$ восстанавливается хотя бы локально (в окрестности $\exp \mathfrak{g}$), по операторам $T(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$. Подпространство $E^\omega$ всех аналитических векторов является частью $E^\infty$.

*Если $E$ — полное* ЛВП, *то $E^\infty$ всюду плотно в $E$. Если $E$ — банахово пространство, то также $E^\omega$ всюду плотно в $E$.*

В дальнейшем $E$ — полное ЛВП. Эквивалентным представлениям группы $G$ отвечают эквивалентные дифференциалы. Замкнутому подмодулю $E_0 \subset E$ отвечает $\mathfrak{g}$-подмодуль $E_0^\infty \subset E^\infty$, всюду плотный в $E_0$. Топологическая приводимость $E$ влечет приводимость $E^\infty$. Топологически неприводимое представление может иметь приводимый дифференциал.

Если $E$ — банахово пространство, то представление в $E$ определяется своим дифференциалом в $E^\omega$ с точностью до эквивалентности. Если $\dim E < \infty$, то $E^\omega = E^\infty = E$.

Пример. Дифференциал тензорного произведения представлений группы $G$ равен тензорному произведению их дифференциалов (см. 3.1.3). Дуальным представлениям группы $G$ отвечают дуальные дифференциалы. Вектор $\xi \in E$ является инвариантом группы $G$ тогда и только тогда, когда $\xi \in E^\infty$ и $\xi$ является инвариантом алгебры $\mathfrak{g}$ (см. 3.1.3).

**4.2. Пространство Гординга.** Подпространство $E^\infty$ иногда называют *пространством Гординга* представления $T$ ($G$-модуля $E$). Подпространство $E^\infty$ является (левым) $U(\mathfrak{g})$-модулем, где $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Если $E$ — ЛВП, то $E^\infty$ — также ЛВП относительно системы полунорм

$$p_u(\xi) = p(u\xi), \qquad p \in P, \quad u \in U(\mathfrak{g}),$$

где $P$ — базисная система полунорм пространства $E$. Если $E$ полно, то $E^\infty$ также полно. Представление группы $G$ непрерывно в $E^\infty$. Операторы $T(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ непрерывны в $E^\infty$. Имеет место равенство (с совпадением топологий)

$$(E^\infty)^\infty = E^\infty.$$

В дальнейшем $E$ — полное ЛВП. Подпространство $E^\infty$ совпадает с аналогичным подпространством, определяемым относительно слабой топологии в $E$, т. е. состоит из векторов $\xi \in E$, для которых каждая функция

$$\varphi_{\xi\eta}(g) = \langle T(g)\xi, \eta\rangle, \qquad \eta \in E',$$

бесконечно дифференцируема на $G$. Для каждого $\xi \in E^\infty$ оператор $A_\xi$: $\eta \mapsto \varphi_{\xi\eta}$ является непрерывным сплетающим оператором $E' \to C^\infty(G)$ относительно контрградиентного представления в $E'$ и левого регулярного представления в $C^\infty(G)$. Соответственно

$$E^\infty \simeq \mathrm{Hom}_G(E', C^\infty(G)) \simeq E \mathbin{\hat{\otimes}}_G C^\infty(G),$$

где $\hat{\otimes}$ — символ проективного тензорного произведения, означающий пополнение $E \otimes C^\infty(G)$ в определенной локально выпуклой топологии. Эта топология в $E^\infty$ определяется полунормами

$$p_u^K(\xi) = \max_{g \in K} p(ug\xi), \qquad p \in P, \quad u \in U(\mathfrak{g}),$$

где $K$ — произвольное компактное подмножество в $G$.

Если $A \in \mathrm{Hom}_G(E, F)$, где $E$, $F$ — непрерывные $G$-модули, то $A \in \mathrm{Hom}_G(E^\infty, F^\infty)$. В частности, если $E \simeq F$, то $E^\infty \simeq F^\infty$.

Примеры. Пространство $C(G)^\infty$ относительно левого (правого) регулярного представления группы $G$ совпадает с $C^\infty(G)$. Пространство $(L^2(G))^\infty$ состоит из всех функций $f \in C^\infty(G)$, производные которых $(uf$ $(u \in U(\mathfrak{g})))$ содержатся в $L^2(G)$.

**4.3. Дифференцируемые и аналитические представления.** Представление $T$ называется *дифференцируемым*, если операторная функция $T(g)$ дифференцируема в $L_s(E)$ (см. 1.2.6) относительно топологии простой сходимости. Представление $T$ дифференцируемо тогда и только тогда, когда все $\xi \in E$ дифференцируемы и $T(x) \in L_s(E)$ для каждого $x \in \mathfrak{g}$. В этом случае функция $T(g)$ бесконечно дифференцируема, $E = E^\infty$ (с совпадением топологий), сопряженное представление $\hat{T}$ слабо дифференцируемо (дифференцируемо относительно слабой топологии в $E'$).

*Каждое непрерывное представление группы $G$ дифференцируемо в пространстве Гординга.*

Представление $T$ называется *аналитическим*, если операторная функция $T(g)$ аналитична в $L_s(E)$ относительно топологии простой сходимости. Представление $T$ комплексной группы $G$ называется *комплексно аналитическим*, или *голоморфным*, если операторная функция $T(g)$ голоморфна в $L_s(E)$. Аналогично определяются слабая аналитичность и слабая голоморфность.

Если $T$ — аналитическое представление связной группы $G$ с комплексификацией $G^{\mathbf{C}}$, то равенство $T(\exp x) = \exp T(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ позволяет продолжить представление $T$ на окрестность $\exp \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ группы $G^{\mathbf{C}}$. Это представление продолжается в свою очередь до аналитического проективного (конечно- или счетнозначного) представления группы $G$. Если $G^{\mathbf{C}}$ односвязна, то представление $T$ продолжается до голоморфного представления группы $G^{\mathbf{C}}$.

Сужение с $G^{\mathbf{C}}$ на $G$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $G^{\mathbf{C}}$-подмодулями и $G$-подмодулями голоморфного (слабо голоморфного) $G^{\mathbf{C}}$-модуля $E$. Это правило эффективно использовалось Г. Вейлем в ситуации, когда $G$ — компактная группа Ли, а $\dim E < \infty$, и известно под названием *унитарного приема* (или *унитарного трюка*) *Вейля.*

*В классе конечномерных представлений каждое непрерывное представление группы $G$ аналитично.*

По существу, лишь аналитические представления группы $G$ являются представлениями $G$ как группы Ли. Однако традиционно принято рассматривать непрерывные представления, теория которых значительно богаче теории аналитических представлений.

**4.4. Представления в банаховых пространствах.** Непрерывные представления связной группы Ли $G$ в банаховом пространстве $E$ обладают свойством экспоненциального роста:

$$\|T(g)\| \leqslant C_0 e^{a\tau(g)}, \qquad g \in G,$$

где $\tau(g) = \rho(g, 1)$, $\rho$ — фиксированная метрика в $G$, инвариантная относительно левых или правых сдвигов. Если $G \subset \mathrm{Mat}_n \mathbf{R}$ — матричная группа, то условие экспоненциального роста может быть записано в виде

$$\|T(g)\| \leqslant C_1 \|g\|^{a_1}, \qquad g \in G,$$

где $\|g\|$ — норма матрицы $g \in G$ (в качестве $\|g\|$ можно взять произвольную норму в векторном пространстве $\mathrm{Mat}_n \mathbf{R}$).

Представление $T_0$ алгебры $\mathfrak{g}$ в подпространстве $E_0 \subset E$ называется *интегрируемым на группу* $G$, если $E_0 \subset E^\infty$ относительно некоторого непрерывного представления $T$ группы $G$ в пространстве $E$ и $T_0$ совпадает с дифференциалом $T$ на $E_0$. *Для интегрируемости* $T_0$ *на локальную группу Ли* $G$, *с условием* $G$*-инвариантности* $E_0$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *операторы* $T(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$, *допускают замыкание,*

2) *резольвенты* $R_\lambda(x) = (T(x) - \lambda \cdot 1)^{-1}$ *определены и удовлетворяют оценкам вида*

$$\|R_\lambda(x)^n\| \leqslant \frac{C}{(|\operatorname{Re}\lambda| - \varepsilon)^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

*для всех* $x \in V$, $|\operatorname{Re}\lambda| > \varepsilon > 0$, *где* $V \subset \mathfrak{g}$ — *ограниченная окрестность нуля,*

3) $E_0$ *инвариантно относительно* $R_\lambda(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$.

Интегрируемость на локальную группу Ли $G$ равносильна интегрируемости на односвязную группу $\tilde{G}$, соответствующую алгебре $\mathfrak{g}$. Вместо термина «интегрируемость на $G$» используется также термин «продолжение $T_0$ до представления $T$ группы $G$».

*Представление* $T_0$ *продолжается до унитарного представления односвязной группы* $G$ *в гильбертовом пространстве* $H$ *тогда и только тогда, когда операторы*

$$iT(x), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} T(e_i)^2,$$

*где* $e_i$ — *базис* $\mathfrak{g}$, *допускают самосопряженное замыкание. При этом* $E^\infty$ *совпадает с пересечением областей определения* $\bar{\Delta}^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *где* $\bar{\Delta}$ — *самосопряженное замыкание* $\Delta$ (теорема Нельсона).

**4.5. Индуцированные представления.** Конструкция индуцированных представлений групп Ли допускает обобщения, связанные с инфинитезимальным методом и комплексным продолжением.

Пусть $G$ — группа Ли, $H$ — ее замкнутая подгруппа, $\tau$ — конечномерное непрерывное представление группы $H$ в пространстве $E$. Положим

$$\operatorname{Ind}_E^\infty(G) = \{f \in C_E^\infty(G) \colon \ f(hg) = \tau(h) f(g), \ \ h \in H, \ \ g \in G\},$$

где $C_E^\infty(G)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых $E$-значных функций на $G$. Пространство $\operatorname{Ind}_E^\infty(G)$ наделяется структурой индуцированного $G$-модуля относительно правых сдвигов на $G$. Если $G$ связна, то определение этого пространства можно выразить в инфинитезимальной форме:

$$\operatorname{Ind}_E^\infty(G) = \{f \in C_E^\infty(G) \colon \ (L(x) + \tau(x)) f(g) = 0, \ \ x \in \mathfrak{g}, \ \ g \in G\},$$

где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы $H$, $L(x)$ — инфинитезимальный оператор левого сдвига на $G$, $\tau(x)$ — инфинитезимальный оператор представления $\tau$ группы $H$. Определение модуля $\mathrm{Ind}_E^\infty(G)$ в этом виде допускает следующие обобщения:

1. Уравнения $(L(x)+\tau(x))f(g)=0$ можно заменить уравнениями вида

$$(L(e_i)+\tau(e_i))^{n_i}f(g)=0, \quad i=1,\ldots,m,$$

где $e_i$ $(i=1,\ldots,m)$ — конечное семейство элементов алгебры $\mathfrak{g}$, $n_i>0$ — целые числа.

2. В определении 1 можно рассматривать также элементы $e_i\in\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, где $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}=\mathfrak{g}\oplus i\mathfrak{g}$ — комплексификация алгебры $\mathfrak{g}$.

Получаемые таким образом $G$-модули иногда называют *инфинитезимально индуцированными*. Если группа $G$ является смешанным (т. е. частично комплексным) многообразием, то среди уравнений 2 могут встречаться условия голоморфности (условия Коши — Римана) по некоторым комплексным переменным в $G$. В этом случае соответствующий $G$-модуль называется *голоморфно индуцированным*.

Пространство $\mathrm{Ind}_E^\infty(G)$ можно интерпретировать как пространство гладких сечений векторного $G$-расслоения с базой $H\backslash G$ и слоем $E$. Аналогично голоморфно индуцированный $G$-модуль можно рассматривать как пространство (частично) голоморфных сечений некоторого векторного расслоения.

**4.6. Представления компактных групп Ли.** Пусть $K$ — компактная топологическая группа, $\hat{K}$ — множество всех классов эквивалентности ее неприводимых конечномерных представлений. Для каждого непрерывного представления $T$ группы $K$ в полном ЛВП $E$ и каждого $\delta\in\hat{K}$ положим

$$P_\delta=n_\delta\int\overline{\chi_\delta(k)}\,T(k)\,dk,$$

где $\chi_\delta$ — характер представления класса $\delta$, $n_\delta$ — его размерность. Для каждого $\xi\in E$ положим $\xi_\delta=P_\delta\xi$. Вектор $\xi$ содержится в замкнутой линейной оболочке векторов $\xi_\delta$ $(\delta\in\hat{K})$. Соответственно $E$ совпадает с замкнутой линейной оболочкой подпространств $E_\delta=P_\delta E$. Положим

$$E_K=\bigoplus_{\delta\in\hat{K}}E_\delta$$

(прямая алгебраическая сумма). Элементы $\xi\in E_K$ могут быть охарактеризованы как векторы из $E$, орбиты которых относительно $K$ конечномерны (т. е. лежат в конечномерном подпространстве). Такие векторы $\xi\in E$ называются *$K$-финитными*. Подпространство $E_K$ всюду плотно в $E$.

*Если $G$ — группа Ли, $K$ — ее компактная подгруппа, $T$ — представление группы $G$ в полном* ЛВП $E$, *то подпространство*

$$E_K^\infty=E^\infty\cap E_K$$

*($E^\infty$ — подпространство Гординга относительно $G$) также всюду*

*плотно в $E$. Если $E$ — банахово пространство, то $E^\omega \cap E_K$ всюду плотно в $E$.*

Представление $T$ называется *$K$-финитным*, если $\dim E_\delta < \infty$ для всех $\delta \in \widehat{K}$. В этом случае $E_K \subset E^\infty$ ($E_K \subset E^\omega$, если $E$ — банахово пространство). Иначе говоря, $K$-финитные векторы бесконечно дифференцируемы (аналитичны).

Если $G$ — компактная группа Ли и ее представление $T$ дифференцируемо, то каждый вектор $\xi \in E$ представляется сходящимся рядом

$$\xi = \sum_{\delta \in \widehat{K}} \xi_\delta.$$

**4.7. Конечномерные представления.** Пусть $G$ — вещественная связная группа Ли, $T$ — ее представление в конечномерном векторном пространстве $E$. Поскольку $T$ аналитично, теория таких представлений сводится к теории представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$.

Пусть $G = SR$ — разложение Леви группы $G$ ($R$ — радикал), $T$ — представление группы $G$ в пространстве $E$. *Если $E$ неприводимо, то оно неприводимо при сужении на $S$ и скалярно при сужении на $R$ (т. е. операторы $T(g)$ $(g \in R)$ кратны $1_E$).* Поэтому теория неприводимых (конечномерных) представлений групп Ли содержательна лишь в классе полупростых связных групп Ли.

*Если $G$ полупроста, то каждое ее конечномерное представление вполне приводимо. Если $G$ разрешима, то каждое ее конечномерное представление над полем $\mathbf{C}$ треугольно (т. е. операторы $T(g)$ $(g \in G)$ приводятся в одном и том же базисе к треугольному виду). В частности, каждое неприводимое представление одномерно.*

Пусть $G^\mathbf{C}$ — односвязная группа Ли класса $\mathscr{L}(\mathfrak{g}^\mathbf{C})$. Тогда в пространстве $E$ над полем $\mathbf{C}$ определено голоморфное представление $T^\mathbf{C}$ группы $G^\mathbf{C}$, дифференциал которого есть комплексная оболочка дифференциала представления $T$. При этом множество подмодулей относительно $G^\mathbf{C}$ совпадает с множеством подмодулей относительно $G$.

Таким образом, теория конечномерных представлений связных групп Ли сводится к частному случаю, когда группа $G$ односвязна, комплексна и полупроста.

**4.8. Проективные представления.** *Каждое унитарное проективное представление $T$ связной группы Ли $G$ линеаризуется одномерным расширением $\widetilde{G} = G \circ A$, где $A$ — одномерный тор.* Соответственно алгебра Ли $\widetilde{\mathfrak{g}}$ группы $\widetilde{G}$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — идеал. Описание всех таких расширений дается в терминах двумерных когомологий алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в поле $\mathbf{R}$.

Если $G$ полупроста, то все ее двумерные когомологии тривиальны. *Соответственно каждое унитарное проективное представление полупростой односвязной группы Ли $G$ линейно.*

Литература: [11], [12], [15], [25].

## ГЛАВА 5

## ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ГРУППАХ ЛИ

Теория представлений групп тесно связана с изучением функций на группе $G$ в терминах их поведения относительно регулярного представления (т. е. левых или правых сдвигов на $G$). Например, неприводимые представления порождают систему специальных функций на группе (матричные элементы), которые играют роль базисных функций в вопросах ортогонального разложения, аппроксимации и т. д. Указанный круг вопросов известен под названием *гармонического анализа* функций на группах.

В этой главе излагается общая схема гармонического анализа на локально компактных группах (главным образом, на группах Ли), включая ряд специальных вопросов по классификации неприводимых представлений, описанию меры Планшереля и т. д.

Всюду в этой главе, если нет специальных оговорок, группы Ли вещественны, представления — непрерывны, в полных ЛВП над полем C. При этом термин неприводимость означает полную неприводимость, эквивалентность — слабую эквивалентность.

### § 1. Гармонический анализ (общая схема)

**1.1. Групповые алгебры.** Операция умножения в группе $G$ индуцирует операцию умножения (свертки) в различных классах функций, мер или обобщенных функций на группе $G$. Соответствующие алгебры, ассоциированные с группой $G$, называются *групповыми алгебрами* группы $G$.

1. С каждой группой $G$ связана *свободная групповая алгебра* $\Phi(G)$ над полем $\Phi$ (см. 1.4.4). Если рассматривать $\Phi(G)$ как свободную линейную оболочку множества $G$, то закон умножения в $\Phi(G)$ определяется равенством

$$\left(\sum_g a(g)\cdot g\right)\left(\sum_h b(h)\cdot h\right)=\sum_{g,h} a(g)\,b(h)\cdot gh=\sum_x c(x)\cdot x,$$

где функция $c=a*b$ выражается через функции $a$, $b$ следующим образом:

$$c(x)=\sum_{gh=x} a(g)\,b(h)=\sum_h a(xh^{-1})b(h)=\sum_g a(g)\,b(g^{-1}h).$$

Операция инверсии $g\mapsto g^{-1}$ $(g\in G)$ индуцирует в алгебре $\Phi(G)$ инволюцию $a\mapsto a^*$ (антилинейный инволютивный антиавтоморфизм) следующим образом:

$$a^*(x)=\overline{a(x^{-1})}, \qquad x\in G,$$

где черта — комплексное сопряжение ($\Phi=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$).

2. Если $G$ — топологическая группа, то в качестве групповой алгебры можно выбрать *алгебру* $M_1(G)$ *всех ограниченных борелевских (комплексных) мер на* $G$. При этом свертка мер $\mu, \nu\in M_1(G)$ определяется равенством

$$\int_G \varphi(x)\,d(\mu*\nu)(x)=\int_G\int_G \varphi(gh)\,d\mu(g)\,d\nu(h), \qquad \varphi\in C_1(G),$$

где $C_1(G)$ — пространство всех ограниченных непрерывных функций на $G$. Вместо алгебры $M_1(G)$ можно рассматривать также подалгебру $M_0(G)$ всех финитных (сосредоточенных на компактах) мер $\mu\in M(G)$. Билинейная форма

$$\langle\varphi,\mu\rangle=\int_G\varphi(x)\,d\mu(x)$$

устанавливает двойственность между векторными пространствами $C_1(G)$ и $M_1(G)$, $C(G)$ и $M_0(G)$, где $C(G)$ — пространство всех непрерывных функций на $G$. Алгебра $M_1(G)$ является банаховой алгеброй относительно нормы

$$\|\mu\|=\sup_{\varphi\neq 0}\frac{|\langle\varphi,\mu\rangle|}{\|\varphi\|},$$

где $\|\varphi\|$ — равномерная норма функции $\varphi\in C_1(G)$. Алгебры $M_1(G)$, $M_0(G)$ можно рассматривать также как топологические алгебры относительно слабых топологий (индуцированных двойственностью с $C_1(G)$, $C(G)$). Инволюция в $M_1(G)$ $(M_0(G))$ определяется равенством

$$\langle\varphi,\mu^*\rangle=\overline{\langle\varphi^*,\mu\rangle}, \qquad \varphi\in C_1(G), \quad \mu\in M_1(G),$$

где $\varphi^*(x)=\overline{\varphi(x^{-1})}$ $(x\in G)$.

3. Если $G$ — локально компактная группа, то в качестве групповой алгебры можно выбрать $L_1(G)$ — *пространство суммируемых функций относительно (левой) меры Хаара на* $G$. При этом свертка функций $f_1, f_2\in L_1(G)$ определяется равенством

$$(f_1*f_2)(x)=\int_G f_1\left(xh^{-1}\right)f_2(h)\,dh,$$

где $dg$ — дифференциал меры Хаара на группе $G$. Алгебру $L_1(G)$ можно рассматривать как подалгебру $M_1(G)$, если сопоставить каждой функции $f\in L_1(G)$ меру $\mu=\mu_f$ с дифференциалом $d\mu(g)=f(g)dg$. Алгебра $L_1(G)$ является банаховой алгеброй относительно нормы

$$\|f\|_1=\int|f(x)|\,dx.$$

Инволюция:

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \qquad x \in G.$$

Замечания. 1. $L_1(G)$ — идеал $M_1(G)$. 2. В теории представлений определяется также другая естественная норма в $L_1(G)$ (см. п. 1.3).

**1.2. Групповые алгебры групп Ли.** Со структурой группы Ли более тесно связана *групповая алгебра* $D_0(G)$, *состоящая из всех финитных обобщенных функций на* $G$.

Пусть $C^\infty(G)$ — векторное пространство всех бесконечно дифференцируемых финитных функций на $G$. Дифференцируемость функции на $G$ можно понимать как применимость левых (или правых) инфинитезимальных сдвигов на $G$. Пространство $C^\infty(G)$ — полное ЛВП с полунормами

$$p_K^{uv}(\varphi) = \max_{x \in K} |u\varphi v(x)|, \qquad \varphi \in C^\infty(G),$$

где $K \subset G$ — компактное подмножество, $u$, $v \in U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$, $U(\mathfrak{g})$ — ее универсальная обертывающая алгебра. Пространство $D_0(G)$ можно определить как векторное пространство, сопряженное к $C^\infty(G)$. Элементы $f \in D_0(G)$ называются *финитными обобщенными функциями* на $G$.

В дальнейшем мы используем обозначение $\langle f, \varphi\rangle = f(\varphi)$ ($f \in D_0(G)$, $\varphi \in C^\infty(G)$). Для каждой функции $f \in D_0(G)$ существует наименьший компакт $K \subset G$ такой, что $\langle f, \varphi\rangle = 0$, если $\varphi = 0$ со всеми производными (т. е. $u\varphi v = 0$ ($u$, $v \in U(\mathfrak{g})$)) на компакте $K$. При этом $K$ обозначается $\operatorname{supp} f$ и называется *носителем* функции $f$.

Закон умножения (свертки) для функций класса $D_0(G)$ определяется следующим образом. Вначале определяется действие $D_0(G)$ в $C^\infty(G)$:

$$(f * \varphi)(g) = \langle f, g^{-1}\varphi\rangle, \quad (\varphi * f)(g) = \langle f, \varphi g^{-1}\rangle, \qquad g \in G.$$

После этого свертка двух функций $a$, $b \in D_0(G)$ определяется равенством

$$\langle a * b, \varphi\rangle = \langle a, \varphi * b\rangle = \langle b, a * \varphi\rangle, \qquad \varphi \in C^\infty(G).$$

Инволюция в $D_0(G)$ получается сопряжением из инверсии $\varphi^*(x) = \varphi(x^{-1})$ $(x \in G)$:

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \overline{\langle f, \varphi^*\rangle}, \qquad \varphi \in C^\infty(G).$$

Таким образом, с каждой группой Ли $G$ связаны групповые алгебры $M_0(G)$, $M_1(G)$, $L_1(G)$, $D_0(G)$. В теории представлений группы $G$ существенную роль играет алгебра $C_0^\infty(G)$, состоящая из всех бесконечно дифференцируемых финитных функций на $G$. При этом $C_0^\infty(G)$ — идеал $D_0(G)$.

Для каждой замкнутой подгруппы $H \subset G$ подмножество $D_0(G, H) \subset D_0(G)$, состоящее из функций $f \in D_0(G)$: $\operatorname{supp} f \subset H$, является подалгеброй алгебры $D_0(G)$.

В частности, алгебра $D_0(G, \{1\})$ изоморфна обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ (теорема Шварца).

Замечания. 1. $D_0(G)=U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})C_0(G)$ (= линейная оболочка производных $uf$ ($u \in U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$, $f \in C_0(G)$)), где $C_0(G)$ — пространство всех финитных непрерывных функций на $G$ (дифференцирование в $D_0(G)$). 2. Известны также другие групповые алгебры групп Ли, например алгебры гиперфункций.

**1.3. Представления групповых алгебр.** Соответствие между группами и групповыми алгебрами играет существенную роль в теории представлений, поскольку оно индуцирует соответствие между представлениями исходной группы и соответствующей групповой алгебры.

1. Для каждой группы $G$ и каждого представления $T$ этой группы в векторном пространстве $V$ формула

$$T(f)=\sum_g f(g)\,T(g)$$

определяет представление алгебры $\Phi(G)$ в пространстве $V$. Обратно, каждое представление алгебры $\Phi(G)$ (с условием $T(1)=1$) имеет указанный вид, причем

$$T(g)=T(\varepsilon_g), \quad g \in G,$$

где $\varepsilon_g$ — базисная функция $\Phi(G)$ (см. 1.2.1), сосредоточенная в точке $g \in G$.

Указанное соответствие между $G$-модулями и $\Phi(G)$-модулями *функториально*, т. е. сохраняет все гомоморфизмы (в частности, эквивалентность), а также все подмодули (в частности, неприводимость). Иначе говоря, теория представлений группы $G$ сводится к теории представлений алгебры $\Phi(G)$.

2. Если $G$ — топологическая группа и $T$ — представление группы $G$ в отделимом полном ЛВП $E$, то формула

$$T(\mu)=\int_G T(g)\,d\mu(g), \qquad \mu \in M_0(G),$$

определяет представление алгебры $M_0(G)$ со значениями в $L_s(E)$. Обратно, каждое такое невырожденное ($T(\mu)\xi=0$ для всех $\xi \in E$ только при $\mu=0$) представление алгебры $M_0(G)$ имеет указанный вид, причем $T(g)=T(\delta_g)$ ($g \in G$), где $\delta_g$ — единичная мера ($\delta$-функция), сосредоточенная в точке $g \in G$.

Если $g \mapsto T_g$ равностепенно непрерывно, то $\mu \mapsto T(\mu)$ продолжается также до представления алгебры $M_1(G)$.

Если $G$ локально компактна, то соответствующее представление $T(f)=T(\mu_f)$ алгебры $L_1(G)$ имеет вид

$$T(f)=\int f(g)\,T(g)\,dg, \quad f \in L_1(G).$$

Соответствие между $G$-модулями и $M_0(G)$-модулями по-прежнему функториально (если рассматривать только непрерывные гомоморфизмы и замкнутые подмодули). Аналогично — для $M_1(G)$, $L_1(G)$.

3. Унитарным представлениям группы $G$ соответствуют *симметричные представления* алгебры $M_1(G)$, определяемые равенством

$$T(\mu^*)=T(\mu)^*,\quad \mu\in M_1(G),$$

(аналогично — для $L_1(G)$), где звездочка в левой части — инволюция в $M_1(G)$, в правой части — эрмитово сопряжение. Норма

$$\|f\|=\sup_T\|T(f)\|,\qquad f\in L_1(G),$$

где супремум берется по всем симметричным представлениям, называется *минимальной регулярной нормой* в $L_1(G)$. Пополнение $L_1(G)$ по этой норме обозначается $C^*(G)$.

4. Если $G$ — группа Ли и $T$ дифференцируемо (в отделимом полном ЛВП), то формула

$$T(f)=\int f(g)\,T(g)\,dg,\quad f\in D_0(g),$$

понимается следующим образом: $\langle T(f)\xi,\eta\rangle=\langle f,\tau_{\xi\eta}\rangle$, где $\tau_{\xi\eta}(x)=\langle T(x)\xi,\eta\rangle$ ($\xi\in E$, $\eta\in E'$) — матричные элементы представления $T$ группы $G$.

При этом $f\mapsto T(f)$ — представление $D_0(G)$, и теория дифференцируемых $G$-модулей сводится к теории (непрерывных) $D_0(G)$-модулей.

**1.4. Теория характеров.** Теория характеров конечномерных представлений (см. 1.4.4) допускает обобщение на некоторые классы бесконечномерных представлений ассоциативных алгебр, в частности, на представления групповой алгебры $M_1(G)$ в гильбертовых пространствах.

Пусть $B(H)$ — алгебра линейных непрерывных (т. е. ограниченных) операторов в гильбертовом пространстве $H$. Оператор $A\in B(H)$ называется *положительным* ($A\geqslant 0$), если $(Ax,x)\geqslant 0$ для всех $x\in H$. Если $A\geqslant 0$, то существует единственный положительный оператор $B\geqslant 0$ такой, что $A=B^2$. При этом вводится обозначение $B=A^{1/2}$. В частности, для каждого оператора $A\in B(H)$ существует оператор

$$|A|=(A^*A)^{1/2}.$$

Далее, пусть $F(H)$ — подалгебра всех конечномерных операторов пространства $H$, и пусть $N(H)$ — пополнение $F(H)$ по норме $\|A\|_1=\operatorname{tr}|A|$, где $\operatorname{tr}A$ означает след (конечномерного) оператора $A$. Операторы $A\in N(H)$ называются *ядерными*. Линейный функционал $A\to\operatorname{tr}A$, определенный на $F(H)$, продолжается на $N(H)$ по непрерывности, причем

$$\operatorname{tr}A=\sum_i(Ae_i,e_i)$$

для каждого ортонормированного базиса $e_i$ пространства $H$. Функционал $A\to\operatorname{tr}A$ ($A\in N(H)$) называется *следом оператора* $A$. При этом $|\operatorname{tr}A|\leqslant\|A\|_1\leqslant\|A\|$ для каждого $A\in N(H)$. Пространство $N(H)$ является идеалом в $B(H)$, причем

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA \text{ для всех } A \in N(H), \quad B \in B(H).$$

Билинейная форма $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} AB$ определяет двойственность между $N(H)$, $B(H)$, относительно которой $B(H) = (N(H))^*$, т. е. каждый линейный непрерывный функционал на $N(H)$ имеет вид $\langle A, B\rangle$ при некотором $B \in B(H)$. Оператор $A \in B(H)$ называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если $A^*A \in N(H)$. Множество $S(H)$ всех операторов Гильберта — Шмидта в $H$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(A, B) = \operatorname{tr} AB^*, \quad A, B \in S(H).$$

Далее, пусть $T$ — представление алгебры $M_1(G)$ в пространстве $H$ и пусть $\mathscr{A}_T(G) \subset M_1(G)$ — множество всех $\mu \in M_1(G)$, для которых $T(\mu) \in N(H)$. Линейный функционал

$$\chi_T(\mu) = \operatorname{tr} T(\mu), \qquad \mu \in \mathscr{A}_T(G)$$

называется *характером представления* $T$ алгебры $M_1(G)$ (группы $G$), с областью определения $\mathscr{A}_T(G)$. При этом $\mathscr{A}_T(G)$ — идеал алгебры $M_1(G)$.

Обычно предполагается дополнительно, что $\mathscr{A}_T(G)$ достаточно велико (например, всюду плотно в $M_1(G)$) и отображение $T \mapsto \chi_T$ непрерывно (относительно стандартных топологий в $M_1(G)$, $N(H)$). Если $C_0^\infty(G) \subset \mathscr{A}_T(G)$ и отображение $T \mapsto \chi_T$ непрерывно в топологии $C_0^\infty(G)$, то $\chi_T$ — обобщенная функция на группе $G$.

Вместо алгебры $M_1(G)$ можно также рассматривать алгебры $M_0(G)$, $L_1(G)$, $C^*(G)$. Вместо гильбертова пространства можно рассматривать ЛВП (определение характера в этом случае видоизменяется). *Нетривиальные характеры симметричных представлений $C^*(G)$ существуют лишь в том случае, когда $G$ — типа* I. *В этом случае характер определяет неприводимое представление с точностью до эквивалентности.*

**1.5. Преобразование Фурье.** Пусть $G$ — сепарабельная локально компактная унимодулярная группа. Регулярное представление группы $G$ в $L_2(G)$ унитарно и потому разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений $T_\lambda$ $(\lambda \in \widehat{G})$. Если $G$ — типа I, то указанное разложение имеет вид

$$L_2(G) \simeq \int_{\widehat{G}} S(H_\lambda)\, d\mu(\lambda), \tag{$*$}$$

где $H_\lambda$ — пространство представления $T_\lambda$, $S(H_\lambda)$ — пространство операторов Гильберта — Шмидта в $H_\lambda$, $\mu$ — счетно аддитивная мера в $\widehat{G}$, называемая *мерой Планшереля*. При этом представление группы $G$ в $S(H_\lambda)$ эквивалентно $T_\lambda \overline{\otimes} 1_\lambda$, где $1_\lambda$ — единичное представление в $H_\lambda$.

Оператор изоморфизма $\mathscr{F}$: $L_2(G) \to L_2(\widehat{G})$, где $L_2(\widehat{G})$ — пространство в правой части $(*)$, является замечательным аналогом классического интеграла Фурье (и сводится к последнему при $G=\mathbf{R}$). Для функций $f\in L_1(G)$ *преобразование Фурье на группе* $G$ определяется равенством

$$T_\lambda(f)=\int_G f(g)\,T_\lambda(g)\,dg.$$

Для функций $f\in L_1(G)\cap L_2(G)$ операторы $T_\lambda(f)$ содержатся в $S(H_\lambda)$ (для почти всех $\lambda$ по мере $\mu$), причем имеет место тождество

$$\int_G |f(g)|^2\,dg=\int_{\widehat{G}}\operatorname{tr}[T_\lambda(f)\,T_\lambda(f)^*]\,d\mu(\lambda), \tag{**}$$

называемое *формулой Планшереля* (или *аналогом формулы Планшереля*). При этом равенство (**) продолжается до изометрического изоморфизма между $L_2(G)$, $L_2(\widehat{G})$. Кроме того, существует подпространство $\mathscr{A}_0(G)$, всюду плотное в $L_1(G)\cap L_2(G)$, для элементов которого

$$f(g)=\int_{\widehat{G}}\operatorname{tr}[T_\lambda(f)\,T_\lambda(g)^*]\,d\mu(\lambda). \tag{***}$$

При этом $T_\lambda(f)\in N(H_\lambda)$ (для почти всех $\lambda$). Формула (***) называется *формулой обращения* преобразования Фурье.

Преобразование Фурье на группе $G$ естественно определяется также в классе $M_1(G)$ (преобразование Фурье — Стилтьеса) или в классе $D_0(G)$, где $G$ — группа Ли (преобразование Фурье обобщенных функций). При этом *преобразование Фурье переводит свертку функций в произведение их (операторных) образов Фурье.*

В частности, *все связные полупростые, все экспоненциальные* (см. 1.2.4) *группы Ли относятся к типу* I. Поэтому для них справедлива формула Планшереля. Кроме того, *все линейные алгебраические группы относятся к типу* I.

В теории преобразований Фурье естественно выделяются два случая:

1. $G$ абелева. В этом случае $\dim T_\lambda=1$ для всех $\lambda$, т. е. $T_\lambda$ — характер группы $G$. Обратное преобразование Фурье сводится к преобразованию Фурье на группе характеров $\widehat{G}$. При этом $\widehat{\widehat{G}}\simeq G$ (двойственность Понтрягина).

2. $G$ компактна. В этом случае $\dim T_\lambda<\infty$ для всех $\lambda$, и преобразование Фурье сводится к обобщенной теории рядов Фурье:

$$f(x)=\sum_{\lambda,i,j}c_{ij}^\lambda\tau_{ij}^\lambda(x),\qquad x\in G,$$

где $\tau_{ij}^\lambda(x)=(T_\lambda(x)\,e_j,\,e_i)$ — матричные элементы $T_\lambda$ (относительно ортонормированного базиса $e_i$ в пространстве $H_\lambda$).

Замечание. Условие унимодулярности (и также сепарабельности) группы $G$ можно отбросить.

**1.6. Алгебра Фурье.** Исследование обратного преобразования Фурье тесно связано с изучением матричных элементов унитарных представлений группы $G$.

Пусть $G$ — локально компактная группа, $\mathscr{B}(G)$ — множество всех матричных элементов $\tau_{\xi\eta}(x) = (\tau(x)\xi, \eta)$, где $\tau$ — унитарное представление группы $G$. Нетрудно видеть, что $\mathscr{B}(G)$ — векторное пространство. Билинейная форма

$$\langle \tau_{\xi\eta}, f\rangle = \int\limits_G f(x)\, \tau_{\xi\eta}(x)\, dx = \langle \tau(f)\,\xi, \eta\rangle$$

продолжается по непрерывности на $\mathscr{B}(G) \times C^*(G)$, причем $\mathscr{B}(G)$ отождествляется с пространством, сопряженным к $C^*(G)$ (т е о р е м а Э й м а р а). Соответственно $\mathscr{B}(G)$ наделяется структурой банахова пространства и даже банаховой алгебры — относительно поточечного умножения.

Далее, пусть $F_\tau$ — линейная оболочка матричных элементов представления $\tau$, $\mathscr{A}_\tau$ — замыкание $F_\tau$ в топологии $\mathscr{B}(G)$. Пространство $\mathscr{A}_\tau$ состоит из элементов вида

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{\xi_n\eta_n}, \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|\cdot\|\eta_n\| < +\infty,$$

причем $\|f\|$ совпадает с точной нижней гранью последних рядов (по всем $\xi_n$, $\eta_n$, входящим в указанные разложения).

Пространство $\mathscr{A}(G) = \mathscr{A}_\rho \subset \mathscr{B}(G)$, где $\rho$ — регулярное представление группы $G$, является подалгеброй $\mathscr{B}(G)$. Алгебра $\mathscr{A}(G)$ называется *алгеброй Фурье* группы $G$. Алгебра $\mathscr{B}(G)$ называется *алгеброй Фурье — Стилтьеса* группы $G$.

В частности, пусть $G$ — типа I, $\mu$ — мера Планшереля группы $G$. Пространство $L_1(\widehat{G})$ определяется как множество всех $\mu$-измеримых операторных функций $F = (F_\lambda)_{\lambda\in\widehat{G}}$, где $F_\lambda \in N(H_\lambda)$ (для почти всех $\lambda$), причем

$$\|F\|_1 = \int\limits_{\widehat{G}} \|F_\lambda\|_1\, d\mu(\lambda) < +\infty.$$

Для элементов $f \in L_1(\widehat{G})$ естественно определяется *обратное преобразование Фурье* $\overline{\mathscr{F}}$:

$$f(x) = \int\limits_{\widehat{G}} \operatorname{tr}[T_\lambda T_\lambda(x)^*]\, d\mu(\lambda).$$

При этом $\overline{\mathscr{F}}$ *является топологическим изоморфизмом* $L_1(\widehat{G})$ *на алгебру* $\mathscr{A}(G)$. Иначе говоря, $\mathscr{A}(G)$ является прообразом Фурье пространства $L_1(\widehat{G})$.

Аналогично $\mathscr{B}(G)$ допускает характеризацию как прообраз Фурье пространства $M(\widehat{G})$ ограниченных борелевских мер на $\widehat{G}$.

В частности, пусть $G$ — компактная группа. В этом случае элементы $f \in \mathscr{A}(G)$ называются *абсолютно сходящимися рядами*

*Фурье* на группе $G$. Каждое одномерное представление (характер) алгебры $\mathscr{A}(G)$, отличное от тождественного нуля, имеет вид

$$\tau(f) = f(g_0) \quad \text{при фиксированном} \quad g_0 \in G$$

(аналог теоремы Гельфанда для абсолютно сходящихся рядов Фурье на окружности). Отсюда следует, что если $f \in \mathscr{A}(G)$ отлична от нуля во всех точках группы $G$, то функция $1/f$ $(=1/f(x)$ $(x \in G))$ также содержится в алгебре $\mathscr{A}(G)$ (аналог теоремы Винера).

Если $G$ компактна, то каждый замкнутый идеал $\mathscr{A}(G)$ совпадает с пересечением содержащих его максимальных идеалов (спектральный синтез в $\mathscr{A}(G)$).

**1.7. Задачи гармонического анализа.** Под гармоническим анализом на группе $G$ понимается исследование функций, мер, обобщенных функций на $G$ при помощи специальных функций — матричных элементов неприводимых представлений группы $G$. При этом основным инструментом гармонического анализа является преобразование Фурье на группе $G$. Отметим следующие задачи.

1. *Изучение регулярного (квазирегулярного) представления в различных классах функций, мер, обобщенных функций на* $G$.

2. *Изучение идеалов групповых алгебр группы* $G$ *и соответствующих представлений (действующих в факторпространствах).*

3. *Описание явного вида меры Планшереля для конкретных групп (или классов групп). Описание носителя меры Планшереля.*

Замечания. 1. Задачи 1, 2, 3 взаимосвязаны. Например, идеалы групповой алгебры $\mathscr{A}$ суть подмодули $G$-бимодуля $\mathscr{A}$ (относительно левого и правого регулярных представлений). 2. Квазирегулярное представление сводится к регулярному (см. 1.3.6), однако практически это не всегда бывает эффективно.

Указанная программа гармонического анализа в известной степени может считаться разработанной лишь для абелевых и компактных групп Ли, в меньшей степени — для редуктивных групп Ли (см. § 4). Среди редуктивных групп Ли сравнительно подробно изучены комплексные редуктивные групп Ли.

Литература: [12], [15], [25], [26], [28].

## § 2. Конструкция неприводимых представлений

**2.1. Конечномерные представления.** Согласно 4.3.7, достаточно рассматривать случай, когда $G$ — полупростая связная комплексная группа Ли.

Пусть $T$ — неприводимое голоморфное представление группы $G$ в конечномерном векторном пространстве $V$. Вектор $0 \neq \xi \in E$ называется *старшим вектором* представления $T$, если он весовой относительно фиксированной борелевской подгруппы $B = HN$:

$$T(n)\xi = \xi, \quad n \in N, \qquad T(h)\xi = \lambda(h)\xi, \quad h \in H,$$

где $\lambda$ — характер картановской подгруппы $H$, называемый *стар-*

*шим весом* представления $T$. Старший вектор всегда существует и определяется однозначно с точностью до числового множителя. *Старший вес определяет представление с точностью до эквивалентности.*

Далее, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$, $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли картановской подгруппы $H$, $\Gamma_+$ — множество старших весов алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ (см. 3.4.3), $\Gamma_+(H)$ — подмножество тех $\lambda \in \Gamma_+$, для которых функция

$$\lambda(\exp x) = e^{\langle \lambda, x\rangle}, \quad x \in \mathfrak{h},$$

однозначна на группе $H$. Полученная функция $\lambda(h) = \lambda(\exp x)$ $(h \in H)$ дает общий вид (голоморфного) старшего веса группы $G$ относительно $H$. Следовательно, множество $G^+$ всех классов эквивалентности неприводимых (голоморфных) представлений группы $G$ отождествляется с множеством $\Gamma_+(H)$.

Характер $\chi_\lambda$ представления $T_\lambda$ выражается формулой Вейля (см. 3.4.4) для элементов $h \in H$, в которой формальные экспоненты заменяются весами $\mu(h)$ $(h \in H)$.

Представление $T_\lambda$ со старшим весом $\lambda$ конструктивно восстанавливается по весу $\lambda$. Действительно, пусть $G_0 = \bar{N}HN$ — разложение Гаусса в группе $G$, и пусть $\eta$ — старший вектор контрагредиентного представления $\hat{T}_\lambda$ относительно $\bar{B} = H\bar{N}$. Функция

$$f_\lambda(\bar{n}hn) = \lambda(h), \quad \bar{n} \in \bar{N}, \quad h \in H, \quad n \in N,$$

совпадает с матричным элементом $\langle T_\lambda(g)\xi, \eta\rangle$ $(g \in G_0)$, и потому однозначно продолжается (по непрерывности) до голоморфной функции на всей группе $G$. Пространство

$$F_\lambda = \text{линейная оболочка } \{R(g)f_\lambda\}_{g \in G}$$

является $G$-модулем относительно правого регулярного представления $R$ группы $G$. При этом представление в $F_\lambda$ эквивалентно $T_\lambda$. Имеет место равенство

$$F_{\lambda+\mu} = F_\lambda F_\mu \textit{ для каждой пары весов } \lambda, \mu \in \Gamma(H),$$

где правая часть означает линейную оболочку произведений $\varphi\psi$ $(\varphi \in F_\lambda, \psi \in F_\mu)$. Следовательно, $F_\lambda$ порождается пространствами $F_{\varepsilon_i}$, где $\varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ — образующие аддитивной полугруппы $\Gamma_+(H)$.

Замечание. Каждый модуль $F_\lambda$ является подмодулем бесконечномерного $G$-модуля

$$E_\lambda = \operatorname{Ind}_{C_\lambda}^\infty (G),$$

где $C_\lambda$ — одномерный $\bar{B}$-модуль, отвечающий характеру $\lambda$. При этом $F_\lambda$ выделяется из $E_\lambda$ условием голоморфности и уравнениями вида

$$e_i^{n_i+1} f = 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

где $e_i = L(e_{-\alpha_i})$ — оператор левого сдвига на $G$, $\alpha_i$ — простые корни, $n_i = 2(\lambda, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Пример. $G = GL(n, \mathbf{C})$. В этом случае $\mathfrak{h}^* \simeq \mathbf{C}^n$ и производящая функция $f_\lambda$ имеет вид

$$f_\lambda(g) = (\det)^{\lambda_n} \prod_{i=1}^{r} \Delta_i(g)^{n_i},$$

где $0 \leqslant n_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbf{Z}$ $(i = 1, \ldots, r,\ r = n - 1)$, $\Delta_i(g)$ — главный минор матрицы $g \in G$.

**2.2. Бесконечномерные представления.** Конструкция бесконечномерных неприводимых представлений группы $G$ ($G$ — группа Ли) основана на следующих эвристических соображениях.

А. Если группа $G$ содержит «достаточно большую» разрешимую подгруппу $G_0 \subset G$, то можно искать неприводимые $G$-модули среди индуцированных $G$-модулей

$$E_\tau = \operatorname{Ind}^{\infty}_{\mathbf{C}_\tau}(G),$$

где $\mathbf{C}_\tau$ — одномерный $G_0$-модуль, отвечающий характеру $\tau$ группы $G_0$. Правомерность этой гипотезы основана на опытных фактах (априорно — на конечномерном случае).

Б. Если $G$ не имеет комплексной структуры, то семейство ее разрешимых подгрупп может оказаться недостаточным. В этом случае естественно рассматривать разрешимые подгруппы $G_0 \subset G^{\mathbf{C}}$, где $G^{\mathbf{C}}$ — комплексная оболочка группы $G$. При этом операция индуцирования заменяется операцией голоморфного индуцирования.

В. Если $G$-полупроста, то в качестве индуцирующих подгрупп рассматриваются параболические подгруппы группы $G$. При этом существенно используется правило транзитивности операции индуцирования. Если $G$ комплексна, то достаточно рассматривать максимальные разрешимые (борелевские) подгруппы.

Г. Индуцирующий характер $\tau$ группы $G_0$ удобно выразить (локально) в терминах линейного функционала $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ (или $\lambda \in (\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})^*$), где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$, полагая $\tau(\exp x) = e^{\langle\lambda, x\rangle}$ $(x \in \mathfrak{g}_0)$. При этом оказывается, что свойства индуцированного модуля $E_\tau$ тесно связаны с геометрическими свойствами орбиты $\Omega = G \cdot \lambda$ относительно естественного действия $G$ в $\mathfrak{g}^*$ (представление, сопряженное к присоединенному).

Представление группы $G$ в $\mathfrak{g}^*$, сопряженное к присоединенному представлению в алгебре $\mathfrak{g}$, называется *коприсоединенным представлением* группы $G$. Исследование связи между индуцированными $G$-модулями и орбитами $G$ в $\mathfrak{g}^*$ носит название *метода орбит*.

Другой подход к теории неприводимых представлений связан с изучением характеров этих представлений (см. § 7). Основные результаты теории неприводимых представлений относятся в данное время к редуктивному случаю (группа $G$ редуктивна) или к унитарным представлениям некоторых классов групп Ли (метод орбит).

В этом параграфе изложены, для иллюстрации, конструкция неприводимых представлений полупростых комплексных групп Ли и более подробная схема метода орбит.

**2.3. Редуктивные группы (комплексный случай).** Пусть $G$ — редуктивная связная комплексная группа Ли. Поскольку действие центральных элементов (в неприводимых $G$-модулях) скалярно, можно считать, для простоты изложения, что центр группы $G$ тривиален, т. е. $G$ полупроста.

Фиксируем борелевскую подгруппу $B = HN$ ($H$ — картановская подгруппа, $N$ — максимальная нильпотентная подгруппа в $G$) и для каждого характера $\tau$ группы $B$ положим

$$E(B, \tau) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_\tau}^{\infty}(G),$$

где $\mathbf{C}_\tau$ — одномерный $B$-модуль, отвечающий характеру $\tau$. Заметим, что характер $\tau$ тривиален на подгруппе $N$ и определяется своими значениями на подгруппе $H$. При этом $\tau$ совпадает с одним из характеров

$$\tau_{pq}(h) = \tau_{pq}(\exp x) = e^{\langle p,x\rangle + \langle q,\bar{x}\rangle}, \qquad x \in \mathfrak{h},$$

где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы $H$ ($p$, $q \in \mathfrak{h}^*$, $p - q \in \Gamma(H)$) (последнее условие равносильно однозначности функции $\tau_{pq}$ на группе $H$). Далее, пусть $\delta$ — полусумма положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Положим

$$E(p|q) = E(B, \tau_{p-\delta, q-\delta}),$$

и пусть $e(p|q)$ — представление группы $G$ в пространстве $E(p, q)$. Представление $e(p|q)$ (модуль $E(p|q)$) называется *элементарным представлением группы $G$ (элементарным $G$-модулем)* с параметрами $p$, $q$.

Вместо параметров $p$, $q$ удобно рассматривать параметры $\lambda = p + q$ (произвольный комплексный вектор), $\mu = p - q$ (целочисленный вектор). Таким образом, каждое элементарное представление определяется набором $r$ комплексных чисел и $r$ целых чисел, где $r = \mathrm{rank}\, G$.

*Каждый модуль $E(p|q)$ бесконечно дифференцируем (в топологии $C^\infty(G)$), $K$-финитен, где $K$ — максимальная компактная подгруппа в $G$, и имеет конечный композиционный ряд (ряд Жордана — Гельдера), составленный из подмодулей группы $G$.*

Пара $(p|q)$ называется *вырожденной по корню* $\alpha \in \Delta$ ($\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$), если оба числа

$$p_\alpha = 2(p, \alpha)/(\alpha, \alpha), \quad q_\alpha = 2(q, \alpha)/(\alpha, \alpha)$$

— целые неотрицательные. *Представление $e(p|q)$ неприводимо тогда и только тогда, когда пара $(p|q)$ невырождена по каждому корню $\alpha \in \Delta$.*

Далее, пусть $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. *Если пара $(p|q)$ невырождена, то модули $E(wp|wq)$ ($w \in W$) изоморфны (представления $e(wp|wq)$ эквивалентны).*

*В общем случае модули $E(wp|wq)$ имеют одни и те же неприводимые факторы композиционного ряда.*

*Среди факторов композиционного ряда $E(p|q)$ существует единственный фактор $D(p|q)$, содержащий представление $d(p|q)$ с наименьшим (относительно стандартной лексикографической упорядоченности) старшим весом группы $K$ (относительно максимального тора $M = H \cap K$).* Соответствующее представление $d(p|q)$ называется *минимальным представлением* группы $G$ с параметрами $p$, $q$.

При этом представления $d(wp|wq)$ $(w \in W)$ взаимно эквивалентны. Если пара $(p|q)$ невырождена по всем отрицательным корням (такая пара всегда существует на каждой орбите группы $W$), то $D(p|q)$ — подмодуль $E(p|q)$. *Любое неприводимое представление группы $G$ эквивалентно одному из представлений $d(p|q)$* (теорема Желобенко — Наймарка).

Таким образом, множество всех классов эквивалентности (вполне) неприводимых представлений группы $G$ находится во взаимно однозначном соответствии с орбитами группы Вейля в классе параметров $p$, $q$.

Более детально о свойствах элементарных $G$-модулей см. § 3.

Представления $e(p|q)$ при чисто мнимых $\lambda = p + q$ допускают продолжение до унитарных представлений группы $G$, называемых *представлениями основной (унитарной) серии. Представления основной* (унитарной) *серии группы $G$ неприводимы и на них сосредоточена мера Планшереля группы $G$* (см. п. 4.4).

**2.4. Унитарные представления (метод орбит).** Пусть $G$ — произвольная односвязная связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подчиненной функционалу* $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, если

$$\langle \lambda, [x, y] \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathfrak{h},$$

т. е. $\lambda = 0$ на производной подалгебре $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. В этом (и только в этом) случае функционал $\lambda(x) = \langle \lambda, x \rangle$ является одномерным представлением алгебры $\mathfrak{h}$. Далее, пусть $H$ — замкнутая подгруппа группы $G$ с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Подгруппа $H$ называется *согласованной с функционалом* $\lambda$, если функция

$$\pi_\lambda(h) = \pi_\lambda(\exp x) = e^{2\pi i \langle \lambda, x \rangle}, \qquad x \in \mathfrak{h},$$

допускает продолжение (хотя бы одно) до одномерного представления (характера) группы $H$. Пусть $\pi_{\lambda,\gamma}$ $(\gamma \in \Gamma)$ — множество всех таких продолжений. Положим

$$E(H, \lambda, \gamma) = \operatorname{Ind}(\mathrm{C}_{\lambda,\gamma}, H, G)$$

(унитарное индуцирование), где $\mathrm{C}_{\lambda,\gamma}$ — одномерный $H$-модуль с характером $\pi_{\lambda,\gamma}$. Соответственно пусть $e(H, \lambda, \gamma)$ — представление группы $G$ в пространстве $E(H, \lambda, \gamma)$.

Легко показать, что сопряженным относительно группы $G$ показателям $H$, $\lambda$, $\gamma$ соответствуют эквивалентные представления группы $G$. Поэтому фактически указанная конструкция индуцированных представлений зависит не от точки $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, а от орбиты $\Omega = G\lambda$, относительно действия $G$ в $\mathfrak{g}^*$, контрагредиентного присоединенному представлению в $\mathfrak{g}$. Соответствующее представление $G$ в $\mathfrak{g}^*$ называется *коприсоединенным представлением* группы $G$.

Для каждого функционала $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ пусть $G_\lambda$ — стационарная подгруппа точки $\lambda$, так что $\Omega \simeq G/G_\lambda$. Соответственно $T_\lambda\Omega \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\lambda$, где $T_\lambda\Omega$ — касательное пространство к $\Omega$ в точке $\lambda$, $\mathfrak{g}_\lambda$ — алгебра Ли группы $G_\lambda$. Далее, положим

$$B_\lambda(x, y) = \langle\lambda, [x, y]\rangle, \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Билинейная форма $B_\lambda$ кососимметрична и невырождена на $T_\lambda\Omega$ (поскольку ее ядро совпадает с $\mathfrak{g}_\lambda$). Отсюда вытекает, что пространство $T_\lambda\Omega$ четномерно. Другими словами, *каждая орбита* $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ *имеет четную размерность.*

Семейство билинейных форм $B_\lambda$ $(\lambda \in \Omega)$ определяет на $\Omega$ невырожденную замкнутую 2-форму $B_\Omega$ (форма Кириллова).

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, подчиненная функционалу $\lambda$, не может иметь размерность, превосходящую $^1/_2 \dim \Omega$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ называется *поляризацией функционала* $\lambda$, если она имеет максимально возможную размерность, т. е.

$$\dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\lambda).$$

В частности, пусть $G$ нильпотентна. В этом случае каждый функционал $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ обладает поляризацией $\mathfrak{h}_\lambda$ и подгруппа $H_\lambda = \exp \mathfrak{h}_\lambda$ согласована с функционалом $\lambda$, причем в этом случае характер $\pi_\lambda$ определяется единственным образом. Положим

$$T_\Omega = e(H_\lambda, \lambda, \gamma), \quad \lambda \in \Omega,$$

где $\gamma$ — единственный элемент множества $\Gamma$ (представление $T_\Omega$ определяется с точностью до эквивалентности). В этом случае *отображение* $\Omega \mapsto T_\Omega$ *является биекцией множества орбит* $\mathfrak{g}^*/G$ *на* $\widehat{G}$, *где* $\widehat{G}$ — *множество классов эквивалентности унитарных представлений группы* $G$ (теорема Кириллова).

**2.5. Унитарные представления (продолжение).** В общем случае соответствие между орбитами и представлениями носит более сложный характер.

1. Прежде всего приходится рассматривать функционалы $\lambda \in (\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})^*$, причем операция индуцирования, определенная в п. 2.6, заменяется операцией голоморфного индуцирования (см. 4.4.5).

2. Функционал $\lambda \in (\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})^*$ называется *регулярным*, если ему соответствует орбита наибольшей размерности (т. е. $\dim \mathfrak{g}_\lambda$ — наименьшая среди всех $\dim \mathfrak{g}_\mu$ $(\mu \in (\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})^*)$). *Если* $\lambda$ — *регулярный функционал, то он обладает разрешимой поляризацией* $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ (т. е. алгебра $\mathfrak{f}$ разрешима). С другой стороны, *если алгебра* $\mathfrak{g}$ *разрешима, то каждый функционал* $\lambda \in (\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})^*$ *обладает поляризацией* $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$.

3. Поляризация $\mathfrak{f}$ называется *нормальной*, если $\lambda + \mathfrak{f}^{\perp} \subset \Omega$, где $\mathfrak{f}^{\perp}$ — аннулятор алгебры $\mathfrak{f}$ в $\mathfrak{g}^*$ (т. е. множество всех $\mu \in \mathfrak{g}^*$, продолжение которых на $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ обращается в нуль на $\mathfrak{f}$). Нормальная поляризация называется *регулярной*, если

1) $\mathfrak{f}$ инвариантна относительно $G_\lambda$,

2) $\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$

(черта — комплексное сопряжение). Подгруппа $H \subset G$ называется *регулярной*, если она содержится в цепочке замкнутых подгрупп $G_\lambda \subset H \subset M \subset G$ со следующими условиями:

(1) Существует регулярная поляризация $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ такая, что $\mathfrak{f} \cap \bar{\mathfrak{f}} = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$, $\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}} = \mathfrak{m}^{\mathbf{C}}$, где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы $H$, $\mathfrak{m}$ — алгебра Ли группы $M$.

(2) Подгруппа $H$ согласована с $\lambda$ (см. п. 2.4), причем $H = G_\lambda H_1$, где $H_1$ — связная компонента единицы группы $H$.

Если $G$ разрешима, то регулярные поляризации существуют для каждого $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. В то же время существование регулярных подгрупп связано с более глубокой топологической природой орбиты $\Omega$.

4. Орбита $\Omega$ называется *целочисленной*, если интеграл 2-формы $B_\Omega$ по любому двумерному циклу в $\Omega$ равен целому числу. Оказывается, что целочисленность орбиты $\Omega$ необходима, а в ряде случаев и достаточна для существования регулярной подгруппы $H \subset G$, согласованной с $\lambda \in \Omega$. При этом множество $\Gamma$, определенное в п. 2.4, совпадает с фундаментальной группой многообразия $\Omega/H$.

5. Если $G$ разрешима, то она принадлежит типу I тогда и только тогда, когда пространство орбит $\mathfrak{g}^*/G$ полуотделимо и все формы $B_\Omega$ точны. При этом *каждое неприводимое (унитарное) представление группы $G$ эквивалентно одному из представлений* $E(H, \lambda, \gamma)$ (теорема Ауслендера — Константа).

6. В частности, *если $G$ экспоненциальна, то* $\mathfrak{g}^*/G \simeq \widehat{G}$ (аналог теоремы Кириллова).

7. Каждая орбита $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ имеет $G$-инвариантную структуру симплектического многообразия (относительно формы $B_\Omega$) и потому является аналогом фазового пространства классической механики. Переход от орбиты $\Omega$ к унитарному представлению группы $G$ аналогичен операции квантования в квантовой механике.

**2.6. Характеры и мера Планшереля.** Одним из достижений метода орбит является описание гипотетической формулы для характеров неприводимых представлений группы $G$ в терминах орбит (формула Кириллова).

Используя экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$, можно сопоставить каждой орбите $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ обобщенную функцию $I_\Omega$ на группе $G$:

$$\langle I_\Omega, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \int\limits_U \varphi(\exp x)\, e^{2\pi i \langle \lambda, x \rangle} d\lambda\, d\beta_\Omega(\lambda), \qquad \varphi \in C_0^\infty(G),$$

где $U \subset \mathfrak{g}$ — диффеоморфный прообраз открытого множества $V =$

$=\exp \mathfrak{g} \subset G$, $d\lambda$ — лебеговская мера на $U$, $\operatorname{supp} \varphi \subset V$, $\beta_\Omega$ — дифференциальная форма (элемент объема) на $\Omega$:

$$\beta_\Omega = \frac{1}{k!} B_\Omega \wedge \ldots \wedge B_\Omega \quad (k \text{ сомножителей}),$$

$k = {}^1/_2 \dim \Omega$. Унитарное представление $T$ группы $G$ называется *соответствующим орбите* $\Omega$, если существует центральная функция $p_\Omega \in C^\infty(V)$, $p_\Omega(1) = 1$, отличная от нуля на $V$ и такая, что

$$\operatorname{tr} T(\varphi) = \langle p_\Omega^{-1} I_\Omega, \varphi \rangle \tag{*}$$

для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(V)$, входящей в область определения характера $\chi_T(\varphi) = \operatorname{tr} T(\varphi)$. При этом предполагается дополнительно, что каждая функция $\varphi$, для которой определен интеграл в правой части (*) и оператор $T(\varphi)$ положителен, входит в область определения характера $\chi_T(\varphi)$. При этих условиях используются обозначения

$$T = T_\Omega, \quad \chi_T = \chi_\Omega = p_\Omega^{-1} I_\Omega.$$

Справедливость формулы (*) доказана, например, для всех односвязных компактных, всех экспоненциальных групп Ли, для всех представлений основной серии редуктивных групп Ли.

Если $\Omega$ — максимальной размерности, то в качестве $p_\Omega$ можно выбрать универсальную функцию (не зависящую от $\Omega$):

$$q(\exp x) = \det \left[ \frac{\operatorname{sh}({}^1/_2 \operatorname{ad} x)}{{}^1/_2 \operatorname{ad} x} \right],$$

где sh — гиперболический синус $\left( \operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \right)$.

Если $G$ унимодулярна и пространство орбит $\mathcal{O}(G) = \mathfrak{g}^*/G$ полуотделимо, то формула (*) может быть интерпретирована как разложение $\delta$-функции на $G$ по характерам $\chi_\Omega$:

$$\delta(g) = \int_{\mathcal{O}_{\max}} \chi_\Omega(g)\, d\mu(\Omega), \tag{**}$$

где $\mathcal{O}_{\max}$ — подмножество орбит максимальной размерности и $\mu$ — лебеговская мера на $\mathcal{O}_{\max}$, однозначно определяемая равенством

$$d\lambda = \int_{\mathcal{O}_{\max}} \beta_\Omega\, d\mu(\Omega).$$

Нетрудно видеть, что (**) равносильно формуле Планшереля. Поэтому мера $d\mu(\Omega)$ совпадает с мерой Планшереля (причем $\mathcal{O}_{\max}$ — носитель меры Планшереля).

Оказывается, что мера Планшереля сравнительно просто выражается через локальные координаты $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, t_1, \ldots, t_{2m}$ на $\mathfrak{g}^*$ такие, что уравнения $t_1 = \ldots = t_{2m} = 0$ выделяют многообразие $\Lambda$, трансверсальное к орбитам максимальной размерности. Иначе говоря (локально) каждая орбита $\Omega \subset \mathcal{O}_{\max}$ пересекается с $\Lambda$ ровно в одной точке $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Положим в этом случае $\Omega = \Omega_\lambda$. При этом $t_1, \ldots, t_{2m}$ — локальные координаты на многообразии $\Omega = \Omega_\lambda$. Положим

$$S_{ij}(\lambda) = \{t_i, t_j\}(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda, \quad i, j = 1, \ldots, 2m,$$

где символ $\{\varphi, \psi\}$ означает скобку Пуассона функций $\varphi$, $\psi$ на многообразия $\Omega = \Omega_\lambda$. Матрица $S_{ij}$ кососимметрична, и поэтому ее детерминант имеет вид $\det S = (\mathrm{pf}\, S)^2$, где $\mathrm{pf}\, S$ — полином от элементов матрицы $S$, называемый *пфаффианом матрицы* $S$. Далее, пусть $dx$ — лебеговская мера в $\mathfrak{g}^*$: $dx = \rho(\lambda, t)\, d\lambda\, dt$, где $d\lambda$ $(dt)$ — внешнее произведение дифференциалов $d\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ $(dt_j$ $(j = 1, \ldots, 2m))$. *Окончательное выражение для меры Планшереля* $d\mu(\lambda) = d\mu(\Omega_\lambda)$ *имеет следующий вид*:

$$d\mu(\lambda) = \rho(\lambda, 0)\mathrm{pf}\, S(\lambda) d\lambda.$$

Полученная формула упрощается, если координаты $\lambda_i$, $t_j$ линейны, т. е. отождествляются с векторами пространства $\mathfrak{g}$. В этом случае $\rho(\lambda, t) = \mathrm{const}$, матрица $S$ выражается формулой

$$S_{ij}(\lambda) = \langle \lambda, [t_i, t_j] \rangle = \sum_{s=1}^{k} c_{ij}^s \lambda_s,$$

где $c_{ij}^s$ — соответствующие структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$. Соответственно $\pi(\lambda) = \mathrm{pf}\, S(\lambda)$ — однородный полином от $\lambda$, и мера Планшереля имеет вид $d\mu(\lambda) = \pi(\lambda) d\lambda$.

В частности, эта формула позволяет практически вычислить меру Планшереля для всех экспоненциальных групп Ли.

**2.7. Инфинитезимальные характеры.** Пусть $T$ — неприводимое представление группы $G$. Тогда существует характер $\varepsilon_T$ алгебры $Z(\mathfrak{g})$ (нетривиальный гомоморфизм этой алгебры в поле комплексных чисел) такой, что

$$T(z) = \varepsilon(z) \cdot 1, \quad z \in Z(\mathfrak{g}).$$

Характер $\varepsilon_T$ называется *инфинитезимальным характером представления* $T$. Если $T = T_\Omega$ в обозначениях п. 2.6, то характер $\varepsilon_T$ может быть непосредственно вычислен по орбите $\Omega$.

Сопоставляя каждому элементу $x \in \mathfrak{g}$ линейную форму $x(y) = 2\pi i \langle x, y \rangle$ $(y \in \mathfrak{g}^*)$, можно продолжить это отображение (линейно и мультипликативно) до изоморфизма алгебр $S(\mathfrak{g})$, $P(\mathfrak{g}^*)$. Соответственно $Z(\mathfrak{g})$ отождествляется с алгеброй полиномов из $P(\mathfrak{g}^*)$, постоянных на орбитах $\mathfrak{g}^*$. При этом $\varepsilon_T(p) = p(\lambda)$ $(p \in Z(\mathfrak{g}))$ для каждой точки $\lambda \in \Omega$.

Литература: [12], [15], [25].

## § 3. Представления редуктивных групп Ли

**3.1. Конструкция основных серий.** Всюду в этом параграфе $G$ — редуктивная связная линейная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Условие линейности можно отбросить, если $S = [G, G]$ имеет конечный центр. Условие связности также можно ослабить (в целях индукции по редуктивным подгруппам группы $G$).

Основной конструктивный прием в теории представлений группы $G$ — индукция по редуктивным подгруппам $F \subset G$, где $F = AM$ — редуктивная часть параболической подгруппы $P = NAM$. Представления группы $G$, определенные в пространствах

$$E(P, \tau) = \operatorname{Ind}^{\infty}_{V_\tau}(G), \quad \tau \in \tilde{P},$$

где $\tilde{P}$ — множество классов эквивалентности неприводимых представлений группы $P$, тривиальных на $N$, называется *основной $P$-серией представлений группы $G$*. При этом каждое представление $\tau \in \tilde{P}$ однозначно записывается в виде

$$\tau(nam) = a^{i\lambda-\rho}\pi_\mu(m), \quad n \in N, \quad a \in A, \quad m \in M,$$

где $\lambda \in (\mathfrak{a}^{\mathbf{C}})^*$, $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли группы $A$, $\rho$ — полусумма положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$ ($\mu \in \tilde{M}$), $\tilde{M}$ — множество классов эквивалентности неприводимых представлений группы $M$.

Иначе говоря, $\tilde{P} \sim \tilde{A} \times \tilde{M}$, где $\tilde{A} \sim (\mathfrak{a}^{\mathbf{C}})^*$ — множество характеров абелевой группы $A$. Условимся в этом случае писать $\tau = 1 \times \lambda \times \mu$ и положим $E(P, \tau) = E(P, \lambda, \mu)$. Соответствующее представление группы $G$ обозначим $e(P, \tau) = e(P, \lambda, \mu)$.

В частности, пусть $P_0$ — главная параболическая подгруппа группы $G$. Представления (модули)

$$e(\lambda, \mu) = e(P_0, \lambda, \mu), \quad E(\lambda, \mu) = E(P_0, \lambda, \mu)$$

называются *элементарными представлениями (модулями) группы $G$*. В этом случае $M$ компактна, откуда

$$\dim V_\tau = \dim V_\mu < \infty \quad \text{для всех} \quad \mu \in \tilde{M} = \hat{M}.$$

Элементарные $G$-модули дифференцируемы и $K$-финитны, где $K$ — максимальная компактная подгруппа группы $G$.

В дальнейшем группа $K$ выбирается входящей в разложение Ивасавы $G = NAK$. В этом случае $M \subset K$. Отображение $f \mapsto f|_K$ определяет топологический изоморфизм

$$E(\lambda, \mu) \simeq E(\mu) = \operatorname{Ind}^{\infty}_{V_\mu}(K).$$

Отсюда следует, в частности, равенство кратностей

$$[e(\lambda, \mu) : \gamma] = [\gamma : \mu] \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \hat{K}.$$

Представление $e(\lambda, \mu)$, реализованное в модуле $E(\mu)$, является целой функцией от параметров $\lambda \in (\mathfrak{a}^{\mathbf{C}})^*$. Дифференциал такого представления — линейная функция от параметров $\lambda \in (\mathfrak{a}^{\mathbf{C}})^*$.

Представление $e(\lambda, \mu)$ продолжается также до непрерывного представления в гильбертовом пространстве $H(\lambda, \mu)$ — пополнении $E(\lambda, \mu)$ в метрике $L_2(K)$. Представления $e(\lambda, \mu)$ при $\operatorname{Im} \lambda = 0$

унитарны (*основная невырожденная серия унитарных представлений группы $G$*).

Каждый модуль $E(\lambda, \mu)$ имеет конечный композиционный ряд и неприводим для параметров «общего положения». *Каждый неприводимый $G$-модуль эквивалентен неприводимому фактору композиционного ряда одного из модулей $E(\lambda, \mu)$* (теорема Хариш-Чандры).

Следствие. Каждый модуль $E(P, \tau)$ эквивалентен некоторому фактору $V_1/V_2$, где $V_1 \supset V_2$ — подмодули $E(\lambda, \mu)$ при некоторых $\lambda, \mu$.

Относительно уточнения этих результатов см. п. 3.7.

**3.2. Сплетающие операторы.** Между представлениями $P$-серий существуют нетривиальные гомоморфизмы (сплетающие операторы). Некоторые из этих операторов связаны с действием групп Вейля $W(G, A)$ (операторы I рода). Другие операторы связаны с действием группы Вейля $W(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbf{C}})$ (операторы II рода).

I. Пусть $A$ — векторная часть группы $G$, $\mathcal{P}(A)$ — множество всех параболических подгрупп $P = NAM$ с фиксированной векторной частью $A$. Множество $\mathcal{P}(A)$ конечно и транзитивно относительно группы Вейля $W = W(G, A)$. Для каждой пары параболических подгрупп $P = Q^w \in \mathcal{P}(A)$ положим

$$(A_{PQ}(\lambda, \mu) f)(x) = c(P, Q) \int\limits_{N_w} f(nx)\, dn, \qquad f \in E(Q, \lambda, \mu),$$

где $N_w = N \cap N^w$, $c(P, Q) = \mathrm{const}$. Интегральные операторы $A_{PQ}$, определенные при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, продолжаются (в реализации в пространствах $E(\mu)$) до мероморфных функций от параметров $\lambda \in (\mathfrak{a}^{\mathbf{C}})^*$. При этом

$$A_{PQ}(\lambda, \mu) \in \operatorname{Hom}_G (E(P, w\lambda, w\mu), E(Q, \lambda, \mu)), \quad w \in W,$$

где $\lambda \mapsto w\lambda$, $\mu \mapsto w\mu$ — естественные действия группы $W$ в $\tilde{A}$, $\tilde{M}$ (сопряженные к действию $W$ в множествах $A$, $M$). Соответственно $G$-модули $E(Q^w, w\lambda, w\mu)$ $(w \in W)$ имеют одинаковые факторы композиционных рядов. Если хотя бы один из этих модулей неприводим, то все они неприводимы и взаимно эквивалентны.

II. Каждое элементарное представление может быть реализовано в классе числовых (бесконечно дифференцируемых) функций на $G$.

Фиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m}$ — алгебра Ли группы $M$); тогда $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{a}^{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{b}^{\mathbf{C}}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. Фиксируем $\Pi_0 \subset \Pi$ — систему простых корней алгебры $\mathfrak{m}^{\mathbf{C}}$ относительно $\mathfrak{b}^{\mathbf{C}}$ ($\Pi$ — система простых корней $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ относительно $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$). Для каждого вектора $\sigma = \lambda \oplus \nu$, где $\lambda \in (\mathfrak{a}^{\mathbf{C}})^*$, $\nu \in (\mathfrak{b}^{\mathbf{C}})^*$ — старший вес группы $M$ (относительно $\Pi_0$), рассмотрим систему уравнений

$$e_\alpha f = 0, \quad \alpha \in \Pi, \quad xf = (\sigma - \delta) f, \quad x \in \mathfrak{h}^{\mathbf{C}},$$

порожденную левым действием $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ в $C^\infty(G)$, где $\delta$ — полусумма положительных корней $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ относительно $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$. Пространство $E_\sigma$ всех решений этой системы — прямая сумма (конечного числа) модулей $E(\lambda, \mu)$ таких, что $\nu$ — старший вес представления $\mu \in \widehat{M}$. В частности, если группа $M$ связна, то $E_\sigma = E(\lambda, \mu)$.

С другой стороны, пусть $1_\sigma$ — сужение $\delta$-функции $\delta \in D_0(G)$ на элементы $f \in E_\sigma$, и пусть $U_\sigma = U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}) \cdot 1_\sigma$ (относительно левого действия $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ в $D_0(G)$). Каждый модуль $U_\sigma$ — фактормодуль модуля Верма (см. 3.5.8). Соответственно каждому сплетающему оператору $U_{\sigma_1} \to U_{\sigma_2}$ отвечает сопряженный оператор

$$C(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathrm{Hom}_G\left(E_{\sigma_1}, E_{\sigma_2}\right).$$

Семейство таких операторов (называемых *операторами дискретной симметрии* или операторами II рода) определено лишь в точках $\sigma_2 = w\sigma_1$ $(w \in W)$, где $W = W(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbf{C}})$ — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. Все такие точки совпадают с особыми точками операторов $A_{PQ}$ (операторов I рода).

**3.3. Допустимые представления.** Специфика теории представлений редуктивных групп Ли существенно связана с «массивностью» группы $K$ ($K$ — максимальная компактная подгруппа в $G$). Достаточно напомнить (см. п. 3.1), что все неприводимые $G$-модули $K$-финитны (следствие теоремы Хариш-Чандры).

Представление $T$ группы $G$ в банаховом пространстве $E$ называется *допустимым*, если

1. Представление $T$ $K$-финитно, т. е. $\dim E_\gamma < \infty$ $(\gamma \in \widehat{K})$.
2. Представление $T$ $Z(\mathfrak{g})$-финитно, т. е. существует полином $p$ такой, что $p(T(z)) = 0$ для всех $z \in Z(\mathfrak{g})$.

Представление $T$ называется *квазипростым*, если оно скалярно на $Z(\mathfrak{g})$ и на $Z(G)$. *Каждое квазипростое представление допустимо. Каждое допустимое представление является конечным композиционным рядом квазипростых неприводимых представлений.* Для каждого допустимого представления выполняется оценка

$$\dim E_\gamma \leqslant C n_\gamma^2, \qquad \gamma \in \widehat{K}, \tag{$*$}$$

где $n_\gamma = \dim \gamma$ $(\gamma \in \widehat{K})$. *Подпространство* $E_K = \bigoplus\limits_\gamma E_\gamma$ *всех $K$-финитных векторов всюду плотно в $E$ и содержится в $E^\omega$, т. е. все $K$-финитные векторы аналитичны* (теорема Хариш-Чандры). В частности, все представления основных $P$-серий допустимы.

Свойство $K$-финитности вместе с оценкой $(*)$ позволяет развить для допустимых представлений теорию характеров с областью определения $X(G) = C_0^\infty(G)$. Характер $S_T$ представления $T$ определяется формулой

$$S_T(\varphi) = \sum_\gamma \mathrm{tr}\,(e_\gamma T(\varphi) e_\gamma), \qquad \varphi \in X(G),$$

где $e_\gamma$ — оператор проектирования $E$ на $E_\gamma$ (такие операторы существуют и порождаются представлением групповой алгебры $C^\infty(K)$).

*При этом для каждой пары неприводимых квазипростых представлений $T_1$, $T_2$ условие $S_{T_1} = S_{T_2}$ равносильно* $\ker \pi_1 = \ker \pi_2$ *в алгебре $X(G)$ и также условию* $\ker \pi_1 = \ker \pi_2$ *в алгебре $M_0(G)$* (слабая эквивалентность). *В свою очередь слабая эквивалентность равносильна эквивалентности представлений $T_1$, $T_2$ алгебры $U(\mathfrak{g})$ в пространствах $K$-финитных векторов* (инфинитезимальная эквивалентность).

Для каждой пары допустимых представлений $T_1$, $T_2$ условие $S_{T_1} = S_{T_2}$ равносильно взаимной эквивалентности неприводимых компонент композиционных рядов $T_1$, $T_2$. В частности, это верно для элементарных представлений $e(w\lambda, 'w\mu)$ $(w \in W)$, где $W = M'/M$ — группа Вейля пары $(G, A)$.

Обобщенные функции $S_T$ центральны (т. е. инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы $G$) и $Z(\mathfrak{g})$-финитны (относительно левых и правых сдвигов на $G$). Если $T$ — неприводимо, то $S_T$ — собственная функция операторов $Z(\mathfrak{g})$ и $Z(G)$.

Аналитичность $K$-финитных векторов влечет аналитичность матричных элементов $\varphi(g) = \langle T(g)\xi, \eta\rangle$, где $T$ — допустимое представление, $\xi \in E_K$, $\eta \in E'_K$ ($K$-финитные векторы в пространствах $E$ и $E'$).

**3.4. Описание характеров.** Хариш-Чандра описал все центральные $Z(\mathfrak{g})$ — финитные обобщенные функции на $G$. Из этого описания следует, в частности, описание характеров допустимых представлений группы $G$.

Элемент $g \in G$ называется *регулярным*, если он содержится в одной из картановских подгрупп $H \subset G$ и его дискриминант, определяемый равенством

$$D(g) = \det(\operatorname{Ad} g^{-1} - 1)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}},$$

где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы $H$, $\operatorname{Ad}$ — оператор присоединенного представления группы $G$ в алгебре $\mathfrak{g}$ (редуцированный на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$), отличен от нуля. Множество $G'$ всех регулярных элементов группы $G$ есть объединение конечного числа связных компонент

$$G'_i = \{g \in G\colon\ g = u^{-1}hu,\ h \in H'_i\},$$

где $H'_i = H_i \cap G'$, $H_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ — попарно не сопряженные (относительно внутренних автоморфизмов) картановские подгруппы группы $G$. При этом $G'$ всюду плотно в $G$.

*Далее, пусть $F$ — центральная $Z(\mathfrak{g})$ — финитная обобщенная функция на $G$. Тогда*:

1. *$F$ локально интегрируема на $G$, т. е. для каждой функции* $\varphi \in C_0^\infty(G)$

$$\langle F, \varphi\rangle = \int_{\widehat{G}} \varphi(g) F(g)\, dg,$$

*где $F(g)$ — локально интегрируемая функция на $G$.*

2. *$F$ аналитична на $G'$. Следовательно, $F$ определяется своими значениями на подгруппах $H_i$ $(i=1, \ldots, r)$.*

3. *На каждой группе $H=H_i$ $(i=1, \ldots, r)$ функция $F$ имеет вид*

$$F(g)=|D(g)|^{-1/2}E(g), \quad g\in H'=H\cap G',$$

*где $D(g)$ — дискриминант элемента $g$, $E(g)$ — экспоненциальный полином от канонических координат группы $G$. При этом*

$$E(ngn^{-1})=E(g), \quad n\in N(H),$$

*где $N(H)$ — нормализатор подгруппы $H$ в группе $G$. Иначе говоря, функция $E$ инвариантна относительно группы Вейля*

$$W(G, H)=N(H)/Z(H),$$

*где $Z(H)$ — централизатор подгруппы $H$ в группе $G$.*

4. *В частности, если $F$ является собственной функцией относительно $Z(\mathfrak{g})$, то существует линейная форма $\lambda$ над $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$ ($\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы $H$) такая, что*

$$E(g)=E(g_0\exp x)=\sum_{w\in W} p_w(g_0, x)\, e^{\langle w\lambda, x\rangle}, \quad x\in \mathfrak{h},$$

*где $W=W(G, H)$, $p_w$ — полиномы от $x\in\mathfrak{h}$.*

5. *Функция $F\neq 0$ является характером допустимого представления группы $G$ тогда и только тогда, когда коэффициенты $p_w(g_0, x)$ не зависят от $x\in\mathfrak{h}$.*

Таким образом, функция $E$ является кусочно аналитической функцией на $H'$ (аналитической на связных компонентах $H'$).

В частности, существует лишь конечное число взаимно неэквивалентных неприводимых представлений $T$ таких, что $T(z)=\varepsilon(z)\cdot 1$ $(z\in Z(\mathfrak{g}))$ при фиксированном характере $\varepsilon$ алгебры $Z(\mathfrak{g})$.

**3.5. Представления дискретной серии.** Представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $H$ называется *представлением класса $L_p$*, если все его матричные элементы содержатся в $L_p(G)$ (относительно меры Хаара). Представления класса $L_2$ называются *квадратично интегрируемыми.*

Неприводимые представления $T_\lambda$ $(\lambda\in\hat{G})$ называются *представлениями дискретной серии*, если они квадратично интегрируемы. Представление $T_\lambda$ относится к дискретной серии тогда и только тогда, когда оно эквивалентно регулярному представлению в неприводимом подпространстве $H_\lambda\subset L_2(G)$.

*Множество $G^*$ всех $\lambda\in\hat{G}$, отвечающих представлениям дискретной серии, является носителем дискретной компоненты меры Планшереля. $G^*$ непусто тогда и только тогда, когда $G$ содержит компактную картановскую подгруппу (т. е. максимальный тор $H\subset K$).* В этом случае группа $G$ называется *каспидальной.*

Если $G$ компактна, то $G^*=\hat{G}$. В общем случае представления дискретной серии по своим свойствам напоминают представления компактных групп. Например, для них выполняются соотношения ортогональности:

$$\int_G \tau_{\xi\eta}(x)\, \overline{\tau'_{\xi'\eta'}(x)}\, dx = \delta_{\tau\tau'} d_\tau^{-1} (\xi, \xi') (\eta, \eta'),$$

где $\tau$, $\tau'$ — представления дискретной серии, $\delta_{\tau\tau'}$ — символ Кронекера, $d_\tau$ — положительная константа, называемая *формальной размерностью представления* $\tau$ (если $\tau$ конечномерно, то $d_\tau = \dim \tau$). Кроме того,

$$\tau_{\xi\eta} * \tau'_{\xi'\eta'} = \delta_{\tau\tau'} d_\tau^{-1} (\eta, \xi') \tau_{\xi\eta'}.$$

Характеры дискретной серии вполне определяются своими значениями на компактной картановской подгруппе $H \subset G$. Для описания этих характеров условимся отождествлять $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ (относительно формы Киллинга) и положим

$$\omega(x) = \prod_{\alpha>0} (\alpha, x), \quad \Delta(\exp x) = \prod_{\alpha>0} \left(e^{(\alpha, x)/2} - e^{-(\alpha, x)/2}\right),$$

где $\alpha$ — корень алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Элемент $x \in \mathfrak{h}$ называется *регулярным*, если $\omega(x) \neq 0$. Функция $\Delta(\exp x)$ продолжается до центральной аналитической функции на $G'$. Далее, пусть $\Lambda$ — множество всех $\lambda \in \mathfrak{h}$, для которых $e^{i(\lambda, x)}$ — однозначная функция на $H$. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ положим

$$\Theta_\lambda(\exp x) = \Delta(\exp x)^{-1} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{i(w\lambda, x)}, \qquad x \in \mathfrak{h}',$$

где $\mathfrak{h}'$ — множество регулярных элементов $x \in \mathfrak{h}$, $W = W(G, H)$, $\varepsilon(w) = \det w$ $(=\pm 1)$ $(w \in W)$. Функция $\Theta_\lambda(\exp x)$ продолжается (вообще говоря, не единственным образом) до центральной локально интегрируемой функции на $G$, удовлетворяющей оценке

$$\sup_{g \in G'} |D(g)|^{1/2} |\Theta_\lambda(g)| < +\infty.$$

Если $\lambda \in \Lambda'$, где $\Lambda' = \Lambda \cap \mathfrak{h}'$ — множество регулярных элементов $\lambda \in \Lambda$, то функция $\Theta_\lambda$ продолжается единственным образом. При этом функция

$$S_\lambda(g) = (-1)^q \operatorname{sign} \omega(\lambda) \cdot \Theta_\lambda(g), \qquad q = \frac{1}{2} \dim G/K,$$

является характером одного из представлений дискретной серии, которое обозначим $T_\lambda$. *Представления* $T_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda')$ *исчерпывают* $G^*$. *При этом* $T_\lambda \sim T_\mu$ *тогда и только тогда, когда* $\mu = w\lambda$ $(w \in W)$ (теорема Хариш-Чандры).

Следовательно, $G^*$ отождествляется с множеством орбит $\Lambda'/W$.

**3.6. Представления умеренного роста.** Существенную роль в гармоническом анализе и классификации унитарных представлений группы $G$ играет определение «быстро убывающих» функций на $G$ и соответствующих сопряженных элементов — обобщенных функций «умеренного роста» на $G$.

Пусть $G = NAK$ — разложение Ивасавы группы $G$, $G = KA^+K$ — соответствующее разложение Картана. Рассмотрим две вспомогательные функции на абелевой группе $A$:

$$\sigma(\exp x) = (x, x)^{1/2}, \quad R(\exp x) = e^{-(\rho, x)}, \qquad x \in \mathfrak{a},$$

где $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли группы $A$, $\rho$ — полусумма положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ отождествляется с $\mathfrak{a}^*$ относительно формы Киллинга). Далее, положим

$$\sigma(k_1ak_2) = \sigma(a), \quad R(k_1ak_2) = R(a), \qquad k_1, k_2 \in K, \quad a \in A,$$

т. е. продолжим $\sigma$, $R$ до однозначных ($K$-биинвариантных) функций на группе $G$. С помощью функций $\sigma$, $R$ определяются специальные полунормы в $C^\infty(G)$:

$$N_{\delta k}(f) = \sup_G |\delta f| (1 + \sigma)^k \cdot R^{-1}, \qquad \delta \in D, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $D$ означает множество всех дифференциальных операторов, порожденных левыми и правыми сдвигами на $G$ (т. е. $\delta f = ufv$ ($u, v \in U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$)). Пространство

$$S(G) = \{f \in C^\infty(G) \colon N_{\delta k}(f) < \infty \quad \text{для всех } \delta, k\}$$

с локально выпуклой топологией, определяемой полунормами $N_{\delta k}$, называется *пространством Шварца на группе* $G$. При этом

$$C_0^\infty(G) \subset S(G) \subset L_2(G)$$

— непрерывные и всюду плотные вложения, $S(G)$ отделимо, полно и является топологической алгеброй относительно свертки (т. е. групповой алгеброй группы $G$).

Пространство $S(G)^*$, сопряженное к $S(G)$, называется *пространством обобщенных функций умеренного роста на* $G$. Центральная $Z(\mathfrak{g})$-финитная обобщенная функция на $G$ содержится в $S(G)^*$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет оценке

$$|F(x)| \leqslant CR(x)(1 + \sigma(x))^k \qquad (*)$$

при некотором $k = 0, 1, 2, \ldots$. Допустимое представление $T$ группы $G$ называется *представлением умеренного роста*, если его характер содержится в $S(G)^*$. В этом случае матричные элементы $(T(g)\xi, \eta)$ ($\xi, \eta \in H_K$) также содержатся в $S(G)^*$ и удовлетворяют оценкам $(*)$.

В частности, все представления дискретной серии являются представлениями умеренного роста. Другим примером являются *пределы дискретных серий*, определяемые характерами вида $S_\lambda$ (см. п. 2.3), где $\lambda \in \Lambda$ (не обязательно регулярная точка).

Пространство Шварца $S(G)$ содержится в шкале топологических векторных пространств $S_p(G)$ ($1 \leqslant p < \infty$), где $S_p(G)$ определяется полунормами

$$N_{\delta kp}(f) = \sup_G |\delta f| \cdot (1 + \sigma)^k R^{-2/p}, \quad \delta \in D, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

так что $S(G)=S_2(G)$. Пространство $S_p(G)$ отделимо и полно, причем имеют место непрерывные и всюду плотные вложения

$$C_0^\infty(G)\subset S_p(G)\subset L_p(G),\quad S_{p_1}(G)\subset S_{p_2}(G)\ \text{при}\ p_1\leqslant p_2.$$

**3.7. Классификация неприводимых представлений.** Основные результаты классификации неприводимых представлений группы $G$ можно выразить следующим образом.

1. Параболическая подгруппа $P=NAM$ называется *каспидальной*, если ее редуктивная часть $F=AM$ каспидальна, т. е. $M$ содержит компактную картановскую подгруппу $H$. Положим в этом случае

$$E(P,\lambda,\omega)=E(P,1\times\lambda\times\omega),$$

где $\operatorname{Im}\lambda\in\mathfrak{a}_+$, $\mathfrak{a}_+$ — замыкание доминантной камеры Вейля, $\omega$ — представление дискретной серии или предельная точка дискретной серии. Далее, положим

$$D(P,\lambda,\omega)=\ker A_{\bar{P}P}(\lambda,\omega)\subset E(P,\lambda,\omega),$$

где $\bar{P}=\bar{N}AM$, $\bar{N}$ — нильпотентная подгруппа группы $G$, противоположная группе $N$ ($\bar{N}=N^{w_0}$, где $w_0\in W$ переводит корни $\alpha>0$ в корни $\alpha<0$). Соответственно пусть $d(P,\lambda,\omega)$ — представление группы $G$ в пространстве $D(P,\lambda,\omega)$.

*Каждое неприводимое (квазипростое) представление группы $G$ эквивалентно одному из представлений $d(P,\lambda,\omega)$* (теорема Ленглендса — Кнаппа — Цукермана).

2. В классе модулей $D(P,\lambda,\omega)$ сравнительно просто выделяется подкласс псевдоунитарных $G$-модулей. Однако эффективный критерий унитарности (т. е. положительной определенности) не известен. Все известные случаи неприводимых унитарных представлений относятся к следующим сериям: (1) представления основных унитарных серий, (2) представления дополнительных серий — унитарные модули $E(\lambda,\mu)$ при $\operatorname{Re}\lambda=0$, (3) предельные точки дополнительных серий, (4) дискретные серии и их пределы, (5) тривиальное представление.

3. Известны различные реализации представлений дискретной серии — в пространствах голоморфных функций на однородных многообразиях, в пространствах когомологий и т. д.

Для каждого представления дискретной серии $T_\lambda$ $(\lambda\in G^*)$ описано сужение этого представления на максимальную компактную подгруппу $K$. *Пусть $\pi_\mu$ — неприводимое представление группы $K$ со старшим весом $\mu\in\Lambda$ (относительно подгруппы $H$). Тогда*

$$[T_\lambda:\pi_\mu]=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\,R\,(w(\mu+\delta_0)-(\lambda+\delta_1)),$$

*где $R$ — функция разбиения Костанта* (см. 3.4.5) *относительно системы $\Delta_0$ компактных корней, $\delta_0$ $(\delta_1)$ — полусумма положительных компактных (некомпактных) корней. При этом $\lambda$ и $\mu$ согла-*

*сованы условием доминантности относительно фиксированной камеры Вейля* (теорема Блаттнера — Шмида).

В частности, среди старших весов группы $K$, удовлетворяющих условию $[T_\lambda : \pi_\mu] \neq 0$, существует наименьший вес $\mu_0$, причем $\mu_0 = \lambda + \rho_0$, где $\rho_0$ — постоянный вектор. Поэтому $\mu_0$ определяет $T_\lambda$ с точностью до эквивалентности.

Пример. Для группы $G = SL(2, \mathbf{R})$ множество $\Lambda$ естественно отождествляется с множеством $\mathbf{Z}$ целых чисел $\Lambda' = \mathbf{Z}\backslash\{0\}$, и множество весов $\mu$: $[T_\lambda : \pi_\mu] \neq 0$ совпадает с множеством $\mu \in \mathbf{Z}$: $\mu \geqslant \lambda$ при $\lambda > 0$, $\mu \leqslant \lambda$ при $\lambda < 0$.

Литература: [12], [25], [32]—[36], [38].

## § 4. Гармонический анализ (продолжение)

**4.1. Гармонический анализ на $K\backslash G/K$.** Всюду в этом параграфе сохраняются обозначения § 3. Пространство $X_0 = K\backslash G/K$ определяется как пространство двусторонних классов смежности группы $G$ по максимальной компактной подгруппе $K$. Соответственно, функции на $X_0$ можно рассматривать как функции на $G$, биинвариантные относительно $K$.

Гармонический анализ на $X_0$ может быть получен редукцией из гармонического анализа на группе $G$. Однако первая задача намного проще и может быть изложена даже без явного использования теории представлений группы $G$.

*Для функции $\varphi \in C(G)$ следующие условия равносильны*:

1) *Функция $\varphi$ удовлетворяет уравнению*

$$\int_K \varphi(g_1 k g_2)\, dk = \varphi(g_1)\varphi(g_2), \qquad g_1, g_2 \in G, \quad \varphi(1) = 1.$$

2) *Функция $\varphi \in C^\infty(X_0)$ удовлетворяет уравнению*

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad \varphi(1) = 1,$$

*где $0 \neq \Delta \in Z(\mathfrak{g})$ — оператор Казимира на группе $G$* (называемый также *оператором Лапласа* на $G$).

3) *Функция $\varphi$ представима в виде*

$$\varphi_\lambda(g) = \int a(gk)^{i\lambda - \rho} dk, \qquad \lambda \in (\mathfrak{a}^{\mathbf{C}})^*,$$

*где $a(g) \in A$ определяется разложением Ивасавы $g = k(g)a(g)n(g)$ $(k(g) \in K,\ n(g) \in N)$, $\rho$ — полусумма положительных корней.*

Функция $\varphi$, удовлетворяющая одному из условий 1), 2), 3), называется *зональной сферической функцией.* Условия 1), 2), 3) равносильны также условиям:

4) Отображение $f \mapsto \int f(x)\varphi(x)\, dx$ является характером (ненулевым гомоморфизмом в поле $\mathbf{C}$) алгебры $C_0^\infty(X_0)$.

5) Функция $\varphi \in C^\infty(X_0)$ — собственная функция операторов $D \in D(G)$, где $D(G)$ — алгебра дифференциальных операторов на $G$, порожденных регулярным представлением группы $G$ и перестановочных с левыми и правыми сдвигами на элементы группы $K$.

Равенство $\varphi_\lambda = \varphi_\mu$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mu = w\lambda$ $(w \in W)$, где $W$ — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$.

Для функций $f \in L_1(X_0)$ преобразование

$$\tilde{f}(\lambda) = \int f(x)\overline{\varphi_\lambda(x)}\,dx = \int f(x)\,\varphi_{-\lambda}(x)\,dx$$

называется *сферическим преобразованием Фурье. Соответствующая формула обращения имеет вид*

$$f(x) = d^{-1}\int \tilde{f}(\lambda)\,\varphi_\lambda(x)\,|c(\lambda)|^{-2}d\lambda,$$

*где* $d = |W|$ *— порядок группы Вейля* $W$ *и где положено*

$$c(\lambda) = \int\limits_{\bar{N}} a(n)^{-i\lambda-\rho}dn,$$

$\bar{N} = \exp\bar{\mathfrak{n}}$ *в обозначениях* 4.3.5. *При этом* $c(\lambda) = \pi(i\lambda)/\pi(\rho)$, *где функция* $\pi$ *выражается в виде произведения бэта-функций:*

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in R_+} B\left(\frac{m_\alpha}{2}, \frac{m_{2\alpha}}{4} + \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\right),$$

$R_+$ *— приведенная система корней (множество корней* $\alpha \in \Delta_+$ *таких, что* $\alpha/2 \notin \Delta_+$), $m_\alpha$ *— кратность корня* $\alpha$.

Аналогично выписывается формула Планшереля. Для сферического преобразования Фурье известны также аналоги теоремы Бохнера и теорем Пэли — Винера для классов $C_0^\infty(X_0)$, $D_0(X_0)$, $S_p(X_0)$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

**4.2. Гармонический анализ на $G/K$.** Обобщением сферического преобразования Фурье является преобразование Фурье на симметрическом пространстве $X = G/K$. Для функций класса $L_1(X)$ преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(\lambda, k) = \int f(g)\,a(gk)^{i\lambda-\rho}dg, \qquad \lambda \in \mathfrak{a}^*, \quad k \in K,$$

где функция $f$ рассматривается как функция на $G$, инвариантная относительно правых сдвигов на элементы подгруппы $K$. Соответственно $\tilde{f}(\lambda, k)$ инвариантна относительно правых сдвигов на элементы подгруппы $M$ ($M$ — централизатор $A$ в $K$), т. е. может рассматриваться как функция на пространстве

$$Y = \mathfrak{a}^* \times K/M.$$

Преобразование Фурье $f \mapsto \tilde{f}$ можно представить в виде композиции $f \mapsto \hat{f} \mapsto \tilde{f}$, где $\hat{f} \mapsto \tilde{f}$ — обычное преобразование Фурье на векторном пространстве $\mathfrak{a}^*$ и $f \mapsto \hat{f}$ — операция усреднения, называемая *преобразованием Радона*:

$$\hat{f}(z, k) = \int\limits_{\omega(z,k)} f(x)\,d\nu(x), \qquad z \in \mathfrak{a}, \quad k \in K,$$

где $\omega(z, k)$ — множество точек $x = k \cdot \exp z \cdot n \cdot x_0$ $(n \in N)$, $x_0$ — начальная точка пространства $X$ $(x_0 = 1$, если $f$ рассматривается как функция на $G)$, $d\nu(x) = dn$ — инвариантная мера на $N$. Многообразия $\omega(z, k)$ называются *орисферами пространства* $X$. При этом множество всех орисфер совпадает с однородным пространством $\Omega = G/MN$, так что $\Omega \simeq \mathfrak{a} \times K/M$. *Преобразование, обратное к преобразованию Фурье на* $X$, *имеет следующий вид*:

$$f(x) = d^{-1} \int\limits_{\mathfrak{a}^*} \int\limits_{K} a(xk)^{-i\lambda-\rho} \tilde{f}(\lambda, k) \, |c(\lambda)|^{-2} \, d\lambda \, dk.$$

Соответственно выписывается формула Планшереля, которая означает разложение гильбертова пространства $L_2(X)$ в прямой интеграл неприводимых гильбертовых пространств $H_\lambda$ по мере $d\mu(\lambda) = |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$.

Известно описание образов Фурье (аналоги теорем Пэли — Винера) для пространств $C_0^\infty(X)$, $S(X)$, $D_0(X)$.

Пространство $D_0(X_0)$ естественно вкладывается в $D_0(X)$, причем $D_0(X_0) \subset D_0(X)_K \subset D_0(X)$, где $D_0(X)_K$ — подпространство всех $K$-финитных функций из $D_0(X)$. При этом

$$D_0(X)_K = U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}) D_0(X_0).$$

Иначе говоря, каждая $K$-финитная функция $f \in D_0(X)$ представима в виде суммы функций вида $u\varphi$ $(u \in U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$, $\varphi \in D_0(X_0))$.

Преобразование Фурье используется также в теории дифференциальных уравнений на группе $G$. Например, с его помощью устанавливается сюръективность операторов Лапласа $\Delta \in D(X)$, где $D(X)$ — кольцо дифференциальных операторов на $X$, перестановочных с действием группы $G$. Система уравнений

$$\Delta u = \lambda(\Delta) u, \qquad \Delta \in D(X),$$

играет роль уравнения Пуассона в пространстве $X$. Существует аналог интегрального оператора Пуассона, причем обратный оператор определяется предельными переходами по геодезическим пространства $X$. Рассматриваются также стохастические процессы на пространстве $X$.

**4.3. Параболические формы.** Гармонический анализ функций $f \in S(G)$, где $S(G)$ — пространство Шварца на группе $G$, существенно связан с выделением специального класса функций, называемых *параболическими формами*.

Для каждой функции $f \in S(G)$ и каждой параболической подгруппы $P = NAM$ положим

$$f^P(x) = \int\limits_N f(nx) \, dn$$

(такие интегралы всегда существуют). Функция $f$ называется *параболической формой* на $G$, если $f^P = 0$ для всех $P \neq G$.

*Пространство* $S^0(G) \subset S(G)$, *состоящее из всех параболических форм, совпадает с замыканием всех* $Z(\mathfrak{g})$-*финитных* $K$-*финитных* *функций класса $S(G)$. При этом $S^0(G)=(0)$, если $G$ не каспидальна. Кроме того,*

$$S^0(G)\cap C_0^\infty(G)=(0).$$

*Замыкание $L_2^0(G)$ подпространства $S^0(G)$ в $L_2(G)$ совпадает с прямой ортогональной суммой всех замкнутых неприводимых подпространств $L_2(G)$ (относительно левого и правого действия группы $G$). Оператор ортогонального проектирования $e^0$: $L_2(G)\to L_2^0(G)$ имеет вид*

$$e^0f(x)=c_0\sum_\lambda f(xy)\overline{S_\lambda(x)}\,dx, \qquad \lambda\in\Lambda',$$

*в обозначениях п. 3.5, где $S_\lambda$ — характер представления дискретной серии $T_\lambda$, $c_0=\mathrm{const}\neq 0$. Оператор $e^0$ непрерывен в топологии $S(G)$ и является также оператором проектирования $S(G)$ на $S^0(G)$.*

Далее, фиксируем семейство представителей картановских подгрупп $H_i$ $(i=1,\ldots,r)$, и пусть $P_i=N_iA_iM_i$ — фиксированные параболические подгруппы, где $A_i$ — векторная часть $H_i$ $(i=1,\ldots,r)$. Условимся писать $f^P\sim 0$, если

$$\int\limits_M f^P(mx)\overline{\varphi(m)}\,dm=0 \text{ для всех } \varphi\in S^0(M),$$

где $P=MAN$ — каспидальная подгруппа группы $G$ (т. е. $M$ каспидальна). *Пусть $S_i(G)$ $(i=1,\ldots,r)$ — множество всех $f\in S(G)$ таких, что $f^P\sim 0$, если группы $P$, $P_i$ не сопряжены (относительно $G$). Тогда имеет место разложение в прямую сумму*

$$S(G)=\sum_{i=1}^r S_i(G), \tag{$*$}$$

*причем операторы проектирования $e_i: S(G)$ на $S_i(G)$ в этом разложении непрерывны в топологии $S(G)$ и продолжаются до операторов ортогонального проектирования в $L_2(G)$. Соответственно*

$$L_2(G)=\bigoplus_{i=1}^r L_{2i}(G), \tag{$**$}$$

*где $L_{2i}(G)$ — замыкание $S_i(G)$ в $L_2(G)$.* Разложения ($*$), ($**$) называются *разложениями Хариш-Чандры.*

Подпространства $L_{2i}(G)$ $(i=1,\ldots,r)$ являются двусторонними $G$-модулями (относительно левых и правых сдвигов на $G$). Разложение Хариш-Чандры играет существенную роль в описании меры Планшереля на группе $G$.

**4.4. Описание меры Планшереля.** Пусть по-прежнему $H_i$ $(i=1,\ldots,r)$ — представители в классах сопряженности картановских подгрупп группы $G$, $A_i$ — векторная часть $H_i$, $\mathscr{P}_i$ — множество всех параболических подгрупп $P=NAM$ с фиксированной векторной подгруппой $A=A_i$.

Напомним, что множество $\mathscr{P}_i$ конечно и транзитивно относительно группы Вейля $W_i=W(G,A_i)$ $(i=1,\ldots,r)$. Для каждой подгруппы $P\subset\mathscr{P}_i$ рассматривается семейство унитарных представлений группы $G$:

$$e(P, \lambda, \omega), \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*, \quad \mu \in M^*,$$

(т. е. $\operatorname{Im}\lambda = 0$, $\omega$ — представление дискретной серии). При этом $M^* \neq \varnothing$ лишь если $M$ каспидальна. Далее, для каждой пары параболических подгрупп $P, Q \in \mathscr{P}_i$ рассматриваются сплетающие операторы $A_{PQ}$. Имеет место тождество

$$\mu(\lambda, \omega) A_{PQ}(w_0\lambda, w_0\omega) A_{QP}(\lambda, \omega) = 1, \qquad Q = P^{w_0},$$

где $P, Q$ — противоположные группы класса $\mathscr{P}_i$, $\mu(\lambda, \omega) = \mu_i(\lambda, \omega)$ — непрерывная положительная функция от $\lambda, \omega$. Оказывается, что функции $\mu_i(\lambda, \omega)$ $(i = 1, \ldots, r)$ непосредственно определяют меру Планшереля на группе $G$.

Основной результат по описанию меры Планшереля может быть теперь сформулирован следующим образом (теорема Хариш-Чандры).

1. *Пусть* $G_i^\vee (i = 1, \ldots, r)$ — *множество всех классов эквивалентности представлений* $e(P, \lambda, \omega)$, *где* $P$ *пробегает* $\mathscr{P}_i$ $(\lambda \in \mathfrak{a}^*, \mu \in M^*)$ *и пусть* $G^\vee$ — *объединение всех* $G_i^\vee$ $(i = 1, \ldots, r)$. *Множество* $G^\vee$ *является носителем меры Планшереля группы* $G$.

2. *Преобразование Фурье функции* $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ *можно рассматривать как операторную функцию на* $G^\vee$:

$$\tilde{f}(P, \lambda, \omega) = \int_G f(g)\, e(P, \lambda, \omega, g)\, dg,$$

*где* $e(P, \lambda, \omega, g)$ — *оператор представления* $e(P, \lambda, \omega)$ *в гильбертовом пространстве* $H(P, \lambda, \omega)$. *При этом*

$$\int |f(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^{r} \sum_{P \in P_i} \int_{\mathfrak{a}_i^*} \|\tilde{f}(P, \lambda, \omega)\|^2 \mu_i(\lambda, \omega)\, d\lambda,$$

*где* $\|\cdot\|$ — *норма Гильберта — Шмидта для операторов в пространстве* $H(P, \lambda, \omega)$.

Иначе говоря, каждая функция $\omega_i(\lambda, \omega)$ является плотностью меры Планшереля на компоненте $G_i^\wedge$ $(i = 1, \ldots, r)$.

При этом функции $f \in L_{2i}(G)$ (см. п. 3.3) разлагаются только по компоненте $G_i^\wedge$, т. е. их преобразования Фурье обращаются в нуль при $P \notin \mathscr{P}_i$.

Пример. Если $G$ комплексна, то $r = 1$ и в параметрах $p, q$ (см. п. 2.3) плотность меры Планшереля имеет вид

$$\mu(p, q) = \prod_{\alpha > 0} (p, \alpha)(q, \alpha).$$

**4.5. Другие результаты.** Для пространства $S(G)$ известно описание его образа Фурье в пространстве $L_2(\widehat{G})$. Для комплексного случая ($G$ комплексна) известны аналогичные результаты для пространств $C_0^\infty(G)$, $D_0(G)$, $D_0(G, K)$ и т. д.

1. Пусть $S(\widehat{G})$ — образ Фурье пространства $S(G)$. Элементы $F \in L_2(\widehat{G})$ можно рассматривать как операторные функции

$F(P, \lambda, \omega)$, удовлетворяющие условиям симметрии I рода

$$A_{PQ}(\lambda, \omega) F(Q, \lambda, \omega) = F(P, \lambda', \omega') A_{PQ}(\lambda, \omega),$$

где положено $P = Q^w$, $\lambda' = w\lambda$, $\omega' = w\omega$ $(w \in W)$. При этом $F \in S(\widehat{G})$ тогда и только тогда, когда $F$ удовлетворяет условию

$$P_{n\delta}(F) = \sup_{G^\vee} \| \delta\Delta^n F \Delta^n \| (1 + (\lambda, \lambda))^n, \quad \delta \in D_0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $D_0$ — множество всех дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на $\mathfrak{a}^*$, $\Delta \in Z(\mathfrak{k}^C)$ — ненулевой квадратичный элемент (оператор Лапласа — Бельтрами на группе $K$).

2. Если $F$ является образом Фурье некоторой функции $f \in C_0^\infty(G)$, то $F$ — целая функция от $\lambda$, удовлетворяющая условиям симметрии I и II рода и условию конечности полунорм

$$P_{n\delta a}(F) = \sup \|\delta\Delta^n f \Delta^n\| (1 + \|\lambda\|)^n e^{-a\|\mathrm{Im}\,\lambda\|},$$

где $a > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\|\lambda\| = (\lambda, \bar{\lambda})^{1/2}$ и супремум берется по всем $P, \lambda, \omega$: $P \in \mathcal{P}_i$ $(\lambda \in (\mathfrak{a}^C)^*)$, $\omega$ — пределы дискретных серий. *Если $G$ комплексна, то эти условия также достаточны для принадлежности* $F \in \mathcal{F} C_0^\infty(G)$ (аналог теоремы Пэли — Винера).

При этом в отличие от $S(G)$ существенную роль играют условия симметрии II рода (в особых точках мероморфных функций $A_{PQ}$). Аналогично описываются (в комплексном случае) образы Фурье алгебр $D_0(G)$, $D_0(G, K)$.

3. Методика параболических форм (называемая также *методом орисфер*) существенно используется в гармоническом анализе функций на $G/\Gamma$, где $\Gamma$ — дискретная подгруппа группы $G$ с конечным объемом $G/\Gamma$ (относительно квазиинвариантной меры).

Гармонический анализ в $L_2(G/\Gamma)$ тесно связан с изучением специальных функций на $G$, называемых *автоморфными формами* (неприводимые компоненты $L_2(G/\Gamma)$). Специфика данной задачи связана с тем, что квазирегулярное представление в $L_2(G/\Gamma)$ имеет дискретный спектр, причем неприводимые представления группы $G$ встречаются в этом пространстве с конечными кратностями.

Литература: [26], [27].

## ЛИТЕРАТУРА

### а) Учебники, монографии, обзоры


1. Бурбаки Н. Алгебра.— М.: Физматгиз, 1962.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли.— М.: Мир, 1972 (гл. IV — VI), 1972 (гл. I — III), 1978 (гл. VII — VIII).
3. Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Меры Хаара. Свертка и представления.— М.: Наука, 1970.
4. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства.— М.: ИЛ, 1959.
5. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра.— М.: Наука, 1979.
6. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения.— М.: ИЛ, 1950.

7. Варадарайан В. С. (Varadarajan V. S.). Harmonic analysis on real reductive groups. Lect. Notes Math., 57.— Springer, 1977.
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли.— М.: Мир, 1964.
9. Диксмье Ж. $C^*$-алгебры и их представления.— М.: Наука, 1974.
10. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры.— М.: Мир, 1978.
11. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления.— М.: Наука, 1970.
12. Желобенко Д. П. Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли.— М.: Наука, 1974.
13. Капланский И. Алгебры Ли и локально компактные группы.— М.: Мир, 1974.
14. Келли Дж. Общая топология.— М.: Наука, 1968.
15. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1978.
16. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия.— М.: МГУ, 1980.
17. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр Ли.— М.: Наука, 1968.
18. Липсман Р. Л. (Lipsman R. L.). Group representations. Lect. Notes Math., 388.— Springer, 1974.
19. Наймарк М. А. Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.
20. Наймарк М. А. Теория представлений групп— М.: Наука, 1976.
21. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.— М.: Наука, 1968.
22. Семинар «Софус Ли». Теория алгебр Ли, Топология групп Ли.— М.: ИЛ, 1962.
23. Серр Ж. П. Группы Ли и алгебры Ли.— М.: Мир, 1969.
24. Серр Ж. П. Линейные представления конечных групп.— М.: Мир, 1970.
25. Уорнер Г. (Warner G.) Harmonic analysis on semisimple Lie groups.— Springer, 1972. V. 1, 2.
26. Хариш-Чандра. Автоморфные формы на полупростых группах Ли.— М.: Мир, 1971.
27. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.— М.: Мир, 1964.
28. Хьюит Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. I.— М.: Наука, 1976; II — М.: Мир, 1976.
29. Шевалле К. Теория групп Ли. I.— М.: ИЛ, 1948.
30. Шефер Х. Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1971.

### б) Журнальные статьи

31. Араки Ш. Корневые системы и локальная классификация неприводимых симметрических пространств.— Математика, **10**, № 1, 1963, с. 90—126.
32. Атья М., Шмид В. (Atiyah M., Schmid W.) A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups.— Invent. Math., 1977, **42**, p. 1—62. Erratum.
33. Воган Д. А. (Vogan D. A.) The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups. I.— Ann. Math., 1979, **109**, p. 1—60.
34. Желобенко Д. П. Операторы дискретной симметрии для редуктивных групп Ли.— Изв. АН СССР. Сер. «Матем.», 1976, **40**, № 5, с. 1055—1083.
35. Кнапп А. В., Цукерман Г. (Knapp A. W., Zuckerman G.) Classification of irreducible tempered representations of semisimple Lie groups.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1976, **73**, № 7, p. 2178—2180.
36. Партасарати К. Р. Оператор Дирака и дискретные серии.— Математика, 1972, **16**, № 6, с. 105—148.
37. Сюгиура М. Классы сопряженных картановских подалгебр в полупростых вещественных алгебрах Ли.— Математика, 1969, **13**, № 3, с. 101—155.
38. Хехт Х., Шмид В. (Hecht H., Schmid W.) A proof of Blattner conjecture.— Invent. math., 1975, 31, p. 129—154.

# ЧАСТЬ II

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ ГРУПП

В 1978—1980 гг. появились три книги, посвященные вопросам теории представлений: книга А. А. Кириллова [15], излагающая главным образом вопросы общей теории представлений, книга А. У. Климыка [104], в которой приведены явные формулы для матричных элементов неприводимых представлений матричных групп и формулы разложения тензорного произведения неприводимых унитарных представлений на неприводимые представления *), и перевод книги Барута и Рончки [42], в которой вопросы теории представлений связываются с их приложениями к различным задачам теоретической физики.

В связи с этим в последующих главах излагаются главным образом вопросы построения неприводимых представлений и различных серий представлений групп Ли, в том числе — полных семейств неприводимых унитарных представлений, а также некоторые вопросы гармонического анализа на рассматриваемых группах — такие, как аналоги теорем Планшереля и Пэли — Винера. Для некоторых групп указываются формулы разложения тензорного произведения неприводимых унитарных представлений на неприводимые представления.

Как правило, в библиографию этой части справочника не включаются работы, описанные в библиографиях перечисленных выше книг (а они охватывают около полутора тысяч книг и статей по теории представлений групп и ее приложениям).

Несмотря на то, что в теории представлений получено большое количество результатов, относящихся к конкретным группам, многие задачи еще ждут своего решения.

*) Матричные элементы матрицы перехода от тензорного базиса тензорного произведения представлений к базису, отвечающему разложению этого тензорного произведения на неприводимые представления, называются *коэффициентами Клебша — Гордана* этого тензорного произведения.

## ГЛАВА 6

## КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ ЛИ

### § 0. Группа $\mathbf{T}^n$

**0.1.** Неприводимые представления $n$-мерного тора $\mathbf{T}^n$ определяются формулами

$$\pi_{p_1,\ldots,p_n}(t_1, \ldots, t_n) = t_1^{p_1} \ldots t_n^{p_n},$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — целые числа. Группа характеров группы $\mathbf{T}^n$ есть $\mathbf{Z}^n$ (относительно обычного сложения).

**0.2.** Алгебра Ли тора $\mathbf{T}^n$ есть $\mathbf{R}^n$ (с нулевым умножением Ли).

**0.3.** Пусть $\rho_k(t_1, \ldots, t_n) = t_k$. Кольцо представлений группы $\mathbf{T}^n$ есть кольцо конечных рядов Лорана от $\rho_1, \ldots, \rho_k$.

Единственным вещественным неприводимым представлением является единичное представление; остальные характеры — несамосопряженные.

Литература: [11], [21], [37].

### § 1. Группа $SU(2)$

**1.1. Неприводимые унитарные представления группы $SU(2)$.** Любое неприводимое унитарное представление группы $SU(2)$ унитарных матриц второго порядка с единичным определителем определяется однозначно с точностью до эквивалентности неотрицательным числом $l$, целым или полуцелым. Это представление $\pi^l$ может быть реализовано формулой

$$[\pi^l(g)f](x, y) = f(\alpha x + \gamma y, \ \beta x + \delta y), \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2),$$

где $f$ пробегает пространство $H_l$ однородных многочленов степени $m = 2l$.

**1.2. Алгебра Ли $su(2)$ и ее неприводимые представления.** Алгебра Ли $su(2)$ группы $SU(2)$ есть алгебра Ли косоэрмитовых матриц второго порядка с нулевым следом. Подалгебра Ли $\mathfrak{h} \subset su(2)$ диагональных матриц из $su(2)$ является картановской. Корни алгебры $su(2)$ относительно $\mathfrak{h}$ — это $\lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_2 - \lambda_1$ и $0$, где $\lambda_1(h) = h_{11}$, $\lambda_2(h) = h_{22}$ для всех $h = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$.

Пусть $a_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ есть базис в $su(2)$; элементы этого базиса удовлетворяют соотношениям коммутации $[a_i, a_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} a_k$, где $\varepsilon_{ijk}$ — полностью антисимметрический тензор, для которого $\varepsilon_{123} = 1$. Пусть $A_i^l$ — образы операторов $a_i$ ($i = 1, 2, 3$) в дифференциале $d\pi^l$ представления $\pi^l$, и пусть $E_-^l = i(A_1^l - iA_2^l)$, $E_+^l = i(A_1^l + iA_2^l)$, $E_0^l = iA_3^l$. Тогда $[E_0^l, E_\pm^l] = \pm E_\pm^l$, $[E_+^l, E_-^l] = 2E_0^l$, и в базисе, определяемом формулой $e_k = x^{l-k}y^{l+k}$ $(k = -l, -l+1, \ldots, l)$, выполняются соотношения $E_-^l e_k = (l+k)e_{k-1}$, $E_+^l e_k = (l-k)e_{k+1}$, $E_0^l e_k = ke_k$, так что операторы $E_-^l, E_0^l, E_+^l$ определяются формулами

$$E_-^l = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad E_+^l = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad E_0^l = \frac{1}{2}\left(y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Представления $d\pi^l$ $(l = 0, 1/2, 1, \ldots)$ исчерпывают неприводимые кососимметрические представления алгебры Ли $su(2)$ в конечномерных пространствах.

Пусть $e_0 = ia_3$, $e_\pm = i(a_1 \pm ia_2)$ — элементы обертывающей алгебры для алгебры Ли $su(2)$. Элемент $\Delta = e_+e_- + e_-e_+ + 2e_0^2$ обертывающей алгебры является оператором Лапласа на $SU(2)$ (ср. ниже п. 3.11).

**1.3. Другая реализация представления $\pi^l$.** Представление $\pi^l$ эквивалентно представлению $\tilde{\pi}^l$ в пространстве многочленов от одного переменного степени не выше $m = 2l$, определяемому формулой

$$[\tilde{\pi}^l(g)f](z) = (\beta z + \delta)^m f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right), \qquad g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.$$

**1.4. Размерность и базис. Матричные элементы.** Размерность представления $\pi^l$ равна $2l + 1 = m + 1$.

Базис $f_k = ((l-k)!(l+k)!)^{-1/2}e_k$ $(k = -l, -l+1, \ldots, l)$ является ортонормированным базисом в пространстве представления $\pi^l$ относительно такого скалярного произведения, что все операторы представления $\pi^l$ унитарны в этом скалярном произведении. При этом $E_\mp f_k = \sqrt{(l \pm k)(l \mp k \pm 1)}f_{k\pm1}$, $E_0 f_k = kf_k$.

Матричные элементы $\pi_{pq}^l$ представления $\pi^l$ в ортонормированном базисе $\{f_k\}$ определяются формулой

$$\pi_{pq}^l(g) = \sqrt{\frac{(l+p)!\,(l-p)!}{(l+q)!\,(l-q)!}}\,\frac{(-1)^{p-q}}{(l-p)!}\,\alpha^{-p-q}\beta^{-p+q}P_{pq}^l(\alpha\delta),$$

где $g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in G$, а $P_{pq}^l(t) = \dfrac{d^{l-p}}{dt^{l-p}}\left[t^{l+q}(1-t)^{l-q}\right]$.

**1.5. Характер представления $\pi^l$.** Характер $\chi_l$ представления $\pi^l$ определяется равенством

$$\chi_l(g) = \frac{\lambda^{m+1} - \lambda^{-(m+1)}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \qquad m = 2l,$$

где $\lambda, \lambda^{-1}$ — собственные значения матрицы $g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SU(2)$.

**1.6. Тензорные произведения представлений $\pi^l$.** Тензорное произведение $\pi^l \otimes \pi^{l_1}$ эквивалентно прямой сумме представлений $\pi^{|l-l_1|}$, $\pi^{|l-l_1|+1}$, $\ldots$, $\pi^{l+l_1}$, взятых каждое по одному разу.

**1.7. Свойства рядов Фурье на $SU(2)$.** Как и на всякой компактной группе, ряд Фурье

$$f \sim \sum_l (\dim \pi^l)\, \chi_l * f$$

однозначно определяет суммируемую функцию $f$. Но для рядов Фурье на $SU(2)$ справедливы следующие, более специфические утверждения.

Пусть $\delta > 0$, $\Phi_\delta(t) = (1-t^2)^\delta$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\Phi_\delta(t) = 0$ при $t > 0$. Пусть $f \in L^p(G)$, где $1 \leqslant p < \infty$ и $L^p(G)$ построено по мере Хаара. Пусть

$$S_R^\delta(f) = \sum_l \Phi\left(\frac{2l+1}{R}\right)(2l+1)\, \chi_l * f.$$

Если $\delta > 1$, то $S_R^\delta f$ сходится к $f$ в $L^p(G)$ и почти всюду; если $\delta \geqslant 2$ и $f \in L^1$, причем $f = 0$ в окрестности точки $g_0 \in SU(2)$, то $S_R^\delta f(g_0) \to 0$. Границы ($\delta > 1$ и $\delta \geqslant 2$) являются точными.

**1.8. Параметризация группы $SU(2)$.** Одной из стандартных параметризаций группы $SU(2)$ является параметризация с помощью переменных $t$, $\varphi$, $\psi$, определяемых соотношениями

$$t = |\alpha|^2, \quad \varphi = \arg \alpha, \quad \psi = \arg \beta,$$

так что $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$. В этих параметрах нормированная $\left(\text{условием} \int\limits_{SU(2)} dg = 1\right)$ двусторонне инвариантная мера Хаара на $G$ определяется формулой

$$dg = (4\pi^2)^{-1} dt\, d\varphi\, d\psi.$$

Литература: [11], [65], [131], [226], [484].

## § 2. Группа $SO(3)$

**2.1. Связь с группой $SU(2)$.** Отображение группы $SU(2)$ в $SO(3)$, определяемое формулой

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \beta^2 + \bar\alpha^2 - \bar\beta^2)/2 & i(\alpha^2 + \beta^2 - \bar\alpha^2 - \bar\beta^2)/2 & -\alpha\beta - \bar\alpha\bar\beta \\ i(-\alpha^2 + \beta^2 + \bar\alpha^2 - \bar\beta^2)/2 & (\alpha^2 + \beta^2 + \bar\alpha^2 + \bar\beta^2)/2 & i(\alpha\beta - \bar\alpha\bar\beta) \\ \alpha\bar\beta + \bar\alpha\beta & i(\alpha\bar\beta - \bar\alpha\beta) & \alpha\bar\alpha - \beta\bar\beta \end{pmatrix},$$

является гомоморфизмом группы $SU(2)$ на $SO(3)$ с ядром $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$, и поэтому является двулистным накрытием группы $SO(3)$.

В связи с этим существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми унитарными представлениями $\pi$ группы

$SU(2)$, удовлетворяющими условию $\pi\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)=1$, и неприводимыми унитарными представлениями группы $SO(3)$. Это условие соответствует условию, что $\pi=\pi^l$, где $l$ — целое.

**2.2. Параметризация группы $SO(3)$.** Кроме уже указанной параметризации, часто используемой параметризацией группы $SO(3)$ является параметризация с помощью *углов Эйлера*: если

$$g_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad g^\theta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

то любой элемент $g\in SO(3)$ можно представить в виде произведения $g=g_{\varphi_1}g^\theta g_{\varphi_2}$ $(0\leqslant\varphi_1,\ \varphi_2\leqslant 2\pi,\ \ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ (однозначно, если $0<\theta<\pi$), так что

$$g=(g_{ij})_{i,\,j=1}^{3},$$

где

$$g_{11}=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2,$$

$$g_{12}=-\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\cos\theta\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$g_{13}=\sin\varphi_1\sin\theta,\quad g_{21}=\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\theta\cos\varphi_1\sin\varphi_2,$$

$$g_{22}=-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\theta\cos\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$g_{23}=-\cos\varphi_1\sin\theta,\quad g_{31}=\sin\varphi_2\sin\theta,$$

$$g_{32}=\cos\varphi_2\sin\theta,\quad g_{33}=\cos\theta.$$

В этих параметрах нормированная инвариантная мера $dg$ на группе $SO(3)$ задается формулой

$$dg=(8\pi^2)^{-1}\sin\theta\,d\varphi_1 d\varphi_2 d\theta.$$

Литература: [11], [65], [131].

## § 3. Группы $U(n)$ и $SU(n)$

**3.1. Некоторые подгруппы группы $GL(n,\ \mathbf{C})$.** Обозначим через $K$ совокупность нижних треугольных матриц из $GL(n,\ \mathbf{C})$, через $H$ — совокупность верхних треугольных матриц из $GL(n,\mathbf{C})$, через $D$ — совокупность диагональных матриц из $GL(n,\ \mathbf{C})$, через $Z_+$ (соответственно $Z_-$) — совокупность всех верхних (соответственно нижних) треугольных элементов группы $GL(n,\ \mathbf{C})$ с единицами на главной диагонали, через $\Gamma$ — совокупность диагональных унитарных матриц, через $E$ — совокупность диагональных матриц с положительными элементами.

Группы $K$, $H$, $D$, $Z_+$, $Z_-$, $\Gamma$, $E$ связны. Группы $K$ и $H$ разрешимы, группы $Z_+$ и $Z_-$ нильпотентны (и некоммутативны при $n>2$), группы $D$, $\Gamma$ и $E$ коммутативны. Любой элемент $k$ группы $K$ можно представить единственным образом в виде произведения $k=\delta\zeta$ $(\delta\in D,\ \zeta\in Z_-)$, а также в виде $k=\zeta\delta$ $(\zeta\in Z_-,\ \delta\in D)$. Любой элемент $h$ группы $H$ можно представить единственным образом в виде произведения $h=\delta z$ $(\delta\in D,\ z\in Z_+)$, а также в виде $h=z\delta$ ($\delta\in D$, $z\in Z_+$). Группы $Z_+$ и $Z_-$ совпадают с коммутаторными подгруппами групп $H$ и $K$ соответственно. Любая матрица $\delta\in D$ представляется единственным образом в виде $\delta=\varepsilon\gamma=\gamma\varepsilon$ ($\gamma\in\Gamma$, $\varepsilon\in E$). Матрицу $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ будем в дальнейшем обозначать $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Пусть $g\in GL(n, \mathbf{C})$. Положим

$$\Delta_p(g)\doteq\begin{vmatrix}g_{11} & \cdots & g_{1p}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ g_{p1} & \cdots & g_{pp}\end{vmatrix}.$$

Матрица $g\in GL(n, \mathbf{C})$ называется *регулярной*, если $\Delta_p(g)\neq 0$ для $p=1,\ldots, n$, и *нерегулярной* в противном случае. Множество $G_{\mathrm{reg}}$ регулярных матриц открыто и плотно в $GL(n, \mathbf{C})$.

**3.2. Разложение Гаусса.** Всякую регулярную матрицу $g\in G_{\mathrm{reg}}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде $g=kz$ ($k\in K$, $z\in Z_+$), и потому также можно представить единственным образом и в виде $g=\delta\zeta z$ ($\delta\in D$, $\zeta\in Z_-$, $z\in Z_+$), и в виде $g=\zeta\delta z$ ($\delta\in D$, $\zeta\in Z_-$, $z\in Z_+$). Эти разложения называются *разложениями Гаусса*.

Обозначим через $g\begin{pmatrix}p_1 & \cdots & p_m\\ q_1 & \cdots & q_m\end{pmatrix}$ ($p_1<\ldots<p_m$, $q_1<\ldots<q_m$) минор матрицы $g$, находящийся в строках с номерами $p_1,\ldots,p_m$ и в столбцах с номерами $q_1,\ldots,q_m$. Пусть $k=(k_{pq})$, $z=(z_{pq})$, $\delta=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\zeta=(\zeta_{pq})$. Пусть $g\in G_{\mathrm{reg}}$ и $g=kz$ ($k\in K$, $z\in Z_+$); пусть $k=\zeta\delta$, $\zeta\in Z_-$; пусть $\Delta_0(g)=1$; тогда

$$k_{pp}=\Delta_p(g)(\Delta_{p-1}(g))^{-1},\quad p=2,\ldots,n;\quad k_{11}=\Delta_1(g);$$

$$k_{pq}=g\begin{pmatrix}1\ldots q-1\,p\\ 1\ldots q-1\,q\end{pmatrix}(\Delta_{q-1}(g))^{-1},\qquad p>q;$$

$$\lambda_p=\Delta_p(g)(\Delta_{p-1}(g))^{-1},\quad p=2,\ldots,n;\quad \lambda_1=\Delta_1(g);$$

$$\zeta_{pq}=g\begin{pmatrix}1\ldots q-1\,p\\ 1\ldots q-1\,q\end{pmatrix}(\Delta_q(q))^{-1},\qquad p>q;$$

$$z_{pq}=g\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p-1 & p\\ 1 & 2 & \ldots & p-1 & q\end{pmatrix}(\Delta_p(g))^{-1}.$$

**3.3. Разложение Грама.** Всякую матрицу $g\in GL(n, \mathbf{C})$ можно представить в виде $g=ku$, где $k\in K$, $u\in U(n)$. Если также $g=k_1u_1$ ($k_1\in K$, $u_1\in U(n)$), то $k_1=k\gamma$, $u_1=\gamma^{-1}u$, где $\gamma\in\Gamma$.

Всякую матрицу $g\in GL(n, \mathbf{C})$ можно представить, и притом единственным образом, в виде $g=\zeta\varepsilon u$ ($\zeta\in Z_-$, $\varepsilon\in E$, $u\in U(n)$), а также в виде $g=\varepsilon\zeta u$ ($\varepsilon\in E$, $\zeta\in Z_-$, $u\in U(n)$). Все эти разложения называются *разложениями Грама*.

**3.4. Неприводимые представления группы $U(n)$.** Пусть $\alpha$ — характер группы $D$, определяемый формулой

$$\alpha(\delta)=\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\ldots\lambda_n^{p_n},\quad \delta=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \tag{1}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — такие целые числа, что все числа $p_1-p_2$, $p_2-p_3$, $\ldots$, $p_{n-1}-p_n$ неотрицательны. Пусть $\alpha$ — характер группы $K$, определяемый характером $\alpha$ группы $D$ по формуле $\alpha(\delta\zeta)=\alpha(\delta)$ для всех $\delta\in D$, $\zeta\in Z_-$. Тогда формула $f_0(\delta\zeta z)=\alpha(\delta)$ $(\delta\in D,\ \zeta\in Z_-,\ z\in Z_+)$ определяет функцию $f_0$, имеющую непрерывное продолжение на всю группу $GL(n, \mathbf{C})$.

Пусть $\Phi_\alpha$ — линейная оболочка всех правых сдвигов $f_0(gg_0)$ $(g_0\in GL(n, \mathbf{C}))$. Тогда $\Phi_\alpha$ — конечномерное линейное пространство, и формула

$$[\pi_\alpha(g_0)f](g)=f(gg_0),\quad f\in\Phi_\alpha,\quad g\in GL(n, \mathbf{C}),\quad g_0\in U(n), \tag{2}$$

определяет представление группы $G$. Это представление неприводимо, и семейство представлений $\{\pi_\alpha\}$ есть полное семейство (неэквивалентных при разных $\alpha$) конечномерных неприводимых представлений группы $U(n)$. Функция $f_0$ является старшим вектором представления $\pi_\alpha$. Набор чисел $\{p_1, \ldots, p_n\}$ называется *сигнатурой* представления $\pi_\alpha$ (или характера $\alpha$).

Заметим, что

$$f_0(g)=\prod_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1k}\\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\\ g_{k1} & \ldots & g_{kk}\end{vmatrix}^{p_k-p_{k+1}},\quad \text{где } p_{n+1}=0,$$

для всех $g=(g_{ij})_{i,j=1}^{n}\in GL(n, \mathbf{C})$.

Совокупность функций вида $u\to f_0(g_1ug_2)$ $(u\in U(n),\ g_1, g_2\in G)$ дает некоторый набор матричных элементов представления $\pi_\alpha$. Все эти функции являются многочленами от матричных элементов матрицы $u\in U(n)$ или отношениями таких многочленов к некоторой степени определителя матрицы $u\in U(n)$.

**3.5. Неприводимые представления группы $SU(n)$.** Ограничение $\tau_\alpha$ представления $\pi_\alpha$ группы $U(n)$ на подгруппу $SU(n)$ неприводимо. Ограничения $\tau_\alpha=\pi_\alpha|_{SU(n)}$ и $\tau_\beta=\pi_\beta|_{SU(n)}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда ограничения характеров $\alpha$ и $\beta$ на $D\cap SU(n)$ совпадают, т. е. когда $p_k-p_{k+1}=q_k-q_{k+1}$ $(k=1, \ldots, n-1)$, где

$$\alpha(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))=\lambda_1^{p_1}\ldots\lambda_n^{p_n},\quad \beta(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))=\lambda_1^{q_1}\ldots\lambda_n^{q_n}.$$

Таким образом, неприводимое унитарное представление группы $SU(n)$ однозначно определяется набором неотрицательных целых чисел $r_k=p_k-p_{k+1}$ $(k=1, \ldots, n-1)$.

Формулы для размерности и характера, приведенные ниже в п. 3.7, 3.8, справедливы также для представлений группы $SU(n)$.

**3.6. Другие реализации представлений группы $U(n)$.** Пусть $F_\alpha$ — линейное пространство ограничений функций из пространства $\Phi_\alpha$ (которые являются многочленами от матричных элементов матриц $g\in GL(n, \mathbf{C})$) на группу $Z_+$. Пространство $F_\alpha$ есть линейная оболочка семейства функций $f\colon z\to f_0(zg)$ $(g\in$

$\in GL(n, C))$, и формула

$$[\bar{\pi}_\alpha(g_0)f](z) = \alpha(zg_0)f(z\bar{g}_0), \quad zg_0 = k_1 \cdot z\bar{g}_0, \quad k_1 \in K,$$
$$z\bar{g}_0 \in Z_+, \quad g_0 \in U(n), \quad f \in F_\alpha,$$

определяет представление группы $U(n)$ в пространстве $F_\alpha$, эквивалентное представлению $\pi_\alpha$. Старшим вектором является ненулевая постоянная функция.

Пусть $e_{ij}$ — квадратная матрица порядка $n$, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в $i$-й строке и $j$-м столбце, равного единице. При $j > i$ матрицу $e_{ij}$ можно рассматривать как элемент алгебры Ли группы $Z_+$. Пусть $D_i$ — инфинитезимальный оператор левого сдвига на группе $Z_+$, соответствующий элементу $e_{i,i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ алгебры Ли; тогда

$$D_i = \sum_{k=i+1}^{n} z_{i+1,k} \frac{\partial}{\partial z_{ik}}.$$

Пространство $F_\alpha$ совпадает с совокупностью аналитических функций (или многочленов) $f$ на группе $Z_+$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений $D_i^{p_i+1} f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, где $\{p_1, \ldots, p_n\}$ — сигнатура представления $\pi_\alpha$.

Пусть $\mathcal{F}_\alpha$ — линейное пространство ограничений функций из $\Phi_\alpha$ на группу $U(n)$. Тогда $\mathcal{F}_\alpha$ — линейная оболочка функций вида $u \to f_0(uu_0)$ $(u_0 \in U(n), \quad u \in U(n))$. Формула

$$[\pi^\alpha(u_0)f](u) = f(uu_0), \quad f \in \mathcal{F}_\alpha, \quad u \in U(n), \quad u_0 \in U(n),$$

определяет представление группы $U(n)$ в пространстве $\mathcal{F}_\alpha$, эквивалентное представлению $\pi_\alpha$. Ограничение функции $f_0$ (см. п. 3.4) на $U(n)$ является старшим вектором представления $\pi^\alpha$.

Заметим, что в силу п. 3.2 и 3.3 любая функция $f$ из $\Phi_\alpha$ однозначно определяется своими ограничениями на $Z_+$ или $SU(n)$, так что отображения ограничения определяют изоморфизмы $\Phi_\alpha$ с $F_\alpha$ и $\mathcal{F}_\alpha$.

**3.7. Размерность.** Размерность представления $\pi_\alpha$ равна

$$\frac{1}{0!1!2!\ldots(n-1)!} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (p_i - p_j + j - i),$$

где $\alpha(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\ldots\lambda_n^{p_n}$.

**3.8. Характер.** Пусть $\Delta$ — функция на группе $D$, определяемая формулой

$$\Delta(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Характер $\chi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$ определяется формулой

$$\chi_\alpha(u) = \Delta(\gamma)^{-1} \begin{vmatrix} \gamma_1^{q_1} & \ldots & \gamma_1^{q_n} \\ \gamma_n^{q_1} & \ldots & \gamma_n^{q_n} \end{vmatrix}, \quad u \in U(n),$$

где $\gamma \in \Gamma$ — диагональная унитарная матрица, подобная матрице $u$, $\gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, а числа $q_1, \ldots, q_n$ определяются соотношениями $q_i = p_i + (n - i)$ для $i = 1, \ldots, n$.

Если $p_n \geqslant 0$, то

$$\chi_\alpha(u) = \begin{vmatrix} \sigma_{p_1} & \sigma_{p_1+1} & \cdots & \sigma_{p_1+(n-1)} \\ \sigma_{p_2-1} & \sigma_{p_2} & \cdots & \sigma_{p_2+(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p_n-(n-1)} & \sigma_{p_n-(n-2)} & \cdots & \sigma_{p_n} \end{vmatrix},$$

где

$$\sigma_k(u) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k \\ k_i \geqslant 0}} \gamma_1^{k_1}\gamma_2^{k_2}\ldots\gamma_n^{k_n}$$

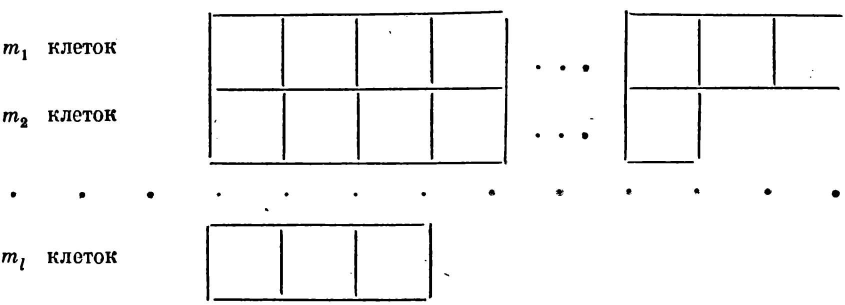
при $k > 0$, $\sigma_k(u) = 0$ при $k < 0$, а $\gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \Gamma$ подобна $u \in G$.

**3.9. Представления в пространствах полилинейных форм.** Пусть $\rho_m$ — представление группы $U(n)$ в линейном пространстве $T_m$ полилинейных форм $f$ на $\mathbf{C}^n$ ранга $m$:

$$(\rho_m(g)f)(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1 g, \ldots, x_m g), \qquad x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{C}^n.$$

Представление $\rho_m$ эквивалентно тензорному произведению $m$ экземпляров представления $\pi_\alpha$, где $\alpha(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1$, т. е. $p_1 = 1$, $p_2 = \ldots = p_n = 0$.

Пусть $S(m)$ — симметрическая группа и пусть $m = \sum_{k=1}^{m} m_k$ — разбиение числа $m$ в сумму $m$ невозрастающих неотрицательных целых слагаемых $m_k$ $(k = 1, \ldots, m)$. Пусть $\mu = (m_1, \ldots, m_m)$. Сопоставим набору $\mu$ схему из $m$ клеток:




из $l$ строк (если $m_l > 0$, $m_{l+1} = \ldots = m_m = 0$), в которой $k$-я строка состоит из $m_k$ клеток $(k = 1, \ldots, l)$, а $j$-я клетка $k+1$-й строки находится под $j$-й клеткой $k$-й строки. Такая схема называется *схемой Юнга*, соответствующей набору $\mu$, и сама обозначается $\mu$.

Размещение чисел $1, 2, \ldots, m$ по клеткам схемы $\mu$ называется *диаграммой Юнга*, отвечающей схеме $\mu$, и обозначается $\sum_\mu$. Если $s \in S(m)$, то через $s\sum_\mu$ обозначим диаграмму, полученную из $\sum_\mu$ заменой в каждой клетке находящегося в ней числа $j$ числом $s(j)$.

Сопоставим каждой диаграмме $\sum_\mu$ подстановку, рассматривая строки диаграммы как циклы подстановки. Пусть $P_\mu$ (соответственно $Q_\mu$) — подгруппа в группе $S(m)$, образованная подстановками, переставляющими элементы лишь в строках (соответственно лишь в столбцах) диаграммы $\sum_\mu$. Пусть $s \in S(m)$ и пусть $\bar{s}$ — линейный оператор в пространстве $T_m$, определяемый формулой $(\bar{s}f)(x_1, \ldots, x_m) = f(x_{s^{-1}(1)}, \ldots, x_{s^{-1}(m)})$. Отображение $s \to \bar{s}$ есть представление группы $S(m)$ в пространстве $T_m$. Пусть для данной диаграммы Юнга $\sum_\mu$ операторы $F_\mu$ и $\mathcal{F}_\mu$ в $T_m$ определяются формулами

$$F_\mu = \sum_{p \in P_\mu} \bar{p}, \quad \mathcal{F}_\mu = \sum_{q \in Q_\mu} \sigma(q)\, \bar{q},$$

где $\sigma(q) = +1$, если $q$ — четная, и $\sigma(q) = -1$, если $q$ — нечетная подстановка.

Пусть

$$H_\mu = F_\mu \mathcal{F}_\mu = \sum_{p \in P_\mu,\ q \in Q_\mu} \sigma(q)\, \bar{p}\bar{q}.$$

Тогда $H_\mu$ — эрмитов оператор, кратный проектору. Образ оператора $\bar{s}H_\mu\bar{s}^{-1}$ $(s \in S(m))$ есть подпространство в $T_m$, в котором действует неприводимое представление группы $SU(n)$ со старшим вектором

$$\omega = \bar{s}\prod_{k=1}^{n} \omega_k^{r_k}, \quad r_k = p_k - p_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad p_{n+1} = 0,$$

где

$$\omega_k(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_k^{(1)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_1^{(k)} & \ldots & x_k^{(k)} \end{vmatrix}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

отметим, что $H_\mu = 0$, если в $\mu = (m_1, \ldots, m_m)$ более $n$ ненулевых компонент.

Пусть $H_\mu^2 = \nu(\mu) H_\mu$ и пусть

$$E(\mu) = \nu(\mu)^{-2} \sum_{s \in S(m)} \bar{s}H_\mu\bar{s}^{-1}.$$

Тогда пространство $\Phi_\mu = E(\mu)\Phi_m$ есть максимальное подпространство в $\Phi_m$, в котором представление $\rho_m$ кратно представлению $\pi_\alpha$, и $\nu(\mu)k(\mu) = m!$, где $k(\mu)$ — кратность, с которой $\pi_\alpha$ содержится в $\rho_m$.

**3.10. Произведение Юнга.** Пусть $\alpha_1, \alpha_2$ — характеры группы $D$, удовлетворяющие условиям п. 3.4. Тогда характер $\alpha$ группы $D$, определяемый формулой $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, также удовлетворяет условиям п. 3.4, так что представление $\pi_\alpha$ определено. Представление $\pi_\alpha$ называется *произведением Юнга* представлений $\pi_{\alpha_1}$ и $\pi_{\alpha_2}$. Пространство $\Phi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$ (см. п. 3.4) есть линейная оболочка всевозможных произведений $f_1 f_2$, где $f_1 \in \Phi_{\alpha_1}$, $f_2 \in \Phi_{\alpha_2}$.

Пусть $\pi_p$ — представление группы $U(n)$ в пространстве $\overline{X}_p$ антисимметрических полилинейных функций от $p$ векторов $x_1, \ldots, x_p \in \mathbf{C}^n$:

$$((\pi_p)(g)f)(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1 g, \ldots, x_p g), \qquad f \in \overline{X}_p.$$

Представление $\pi_p$ эквивалентно представлению вида $\pi_{\alpha_p}$, где $\alpha_p(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1 \ldots \lambda_p$. Любое представление $\tau_\alpha$ группы $SU(n)$ эквивалентно произведению Юнга $\pi_1^{r_1} \ldots \pi_{n-1}^{r_{n-1}}$, где $\pi_i^{r_i}$ есть произведение Юнга $r_i$ экземпляров представления $\pi_i$, а $\alpha(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1^{p_1} \ldots \lambda_n^{p_n}$ с $r_k = p_k - p_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$.

**3.11. Операторы Лапласа.** Пусть $e_{ij}$ — квадратная матрица порядка $n$, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в $i$-й строке и $j$-м столбце, равного единице. Матрица $e_{ij}$ может рассматриваться как элемент комплексной оболочки $gl(n, \mathbf{C})$ алгебры Ли $u(n)$ группы $U(n)$. Элемент

$$c_m = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} e_{i_1 i_2} e_{i_2 i_3} \ldots e_{i_m i_1}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

обертывающей алгебры $\mathcal{G}$ алгебры Ли $gl(n, \mathbf{C})$ является элементом центра алгебры $\mathcal{G}$. Элементы $c_1, \ldots, c_n$ являются образующими в центре алгебры $\mathcal{G}$ (в случае группы $SU(n)$ утверждение остается справедливым, но $c_1 = 0$).

Пусть $c_k(\alpha)$ — оператор в пространстве представления $\pi_\alpha$, являющийся образом элемента $c_k$. Тогда $c_k(\alpha)$ кратен единичному оператору: $c_k(\alpha) = C_k(\alpha) \cdot 1$, где

$$C_k(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i^k, \qquad \gamma_i = \prod_{j \neq i} (1 - (l_i - l_j)^{-1}), \quad l_i = p_i + (n - i),$$

если $\alpha(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1^{p_1} \ldots \lambda_n^{p_n}$. Число $C_k(\alpha)$ есть коэффициент при $z^k$ в разложении функции $z^{-1}\left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - (1 - l_i z)^{-1}\right)$ по степеням $z$.

Представление $\pi_\alpha$ определяется однозначно (с точностью до эквивалентности) набором чисел $C_1(\alpha), \ldots, C_n(\alpha)$.

**3.12. Ограничение на подгруппу.** Пусть группа $U(n-1)$ считается вложенной в группу $U(n)$ с помощью отображения $u \to \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(u \in U(n-1))$. Ограничение представления $\tilde{\pi}_\alpha$ на подгруппу $U(n-1)$ эквивалентно прямой сумме всех неприводимых представлений $\tilde{\pi}_\beta$ группы $U(n-1)$, сигнатуры которых $\{q_1, \ldots, q_{n-1}\}$ удовлетворяют условию $p_1 \geqslant q_1 \geqslant p_2 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_{n-1} \geqslant p_n$. Все эти представления $\tilde{\pi}_\beta$ входят в разложение однократно.

Подпространство пространства $F_\alpha$, в котором действует подпредставление группы $U(n-1)$, эквивалентное представлению $\tilde{\pi}_\beta$, является циклической оболочкой его старшего вектора $\varphi_\beta$, где $\varphi_\beta(z) = z_{1n}^{p_1-q_1} z_{2n}^{p_2-q_2} \ldots z_{n-1,n}^{p_{n-1}-q_{n-1}}$.

**3.13. Базис Гельфанда — Цетлина.** Пусть $U(n) \supset U(n-1) \supset \ldots \ldots \supset U(2) \supset U(1)$ — цепочка подгрупп, вложенных друг в друга по правилу п. 3.12, и пусть $\mu$ — таблица целых чисел:

$$\mu = \begin{pmatrix} p_{1n} & & p_{2n} & \cdots & p_{n-1,n} & & p_{nn} \\ & p_{1,n-1} & & p_{2,n-1} & \cdots & p_{n-1,n-1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & p_{12} & & p_{22} & & \\ & & & p_{11} & & & \end{pmatrix},$$

где $p_{in} = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, а остальные элементы таблицы удовлетворяют соотношениям $p_{ik} \geqslant p_{i-1,k} \geqslant p_{i,k-1}$ для всех $k = 2, \ldots, n$, $i = 2, \ldots, k$. Пусть $e_\mu$ — такой ненулевой вектор в пространстве $\Phi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$, что для любого $k = n-1, n-2, \ldots, 1$ вектор $e_\mu$ принадлежит подпространству в $\Phi_\alpha$, в котором ограничение представления $\pi_\alpha$ на подгруппу $U(k)$ кратно неприводимому представлению этой группы с сигнатурой $\{p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{kk}\}$. Согласно п. 3.12, этими условиями вектор $e_\mu$ определен однозначно с точностью до множителя. Векторы $e_\mu$ образуют ортогональный базис в пространстве $\Phi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$, называемый *базисом Гельфанда — Цетлина.* Каждый вектор $e_\mu$ является весовым вектором; соответствующий вес равен

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to \lambda_1^{s_1} \lambda_2^{s_2-s_1} \ldots \lambda_n^{s_n-s_{n-1}},$$

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} p_{ik}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

В базисе Гельфанда — Цетлина все операторы Лапласа всевозможных подгрупп $U(k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ диагонализуются одновременно, и каждый вектор $e_\mu$ этого базиса однозначно определяется совокупностью собственных значений операторов Лапласа на этом векторе.

**3.14. Дифференциал представления $\pi_\alpha$.** Пусть $e_{ij}$ — элемент обертывающей алгебры группы $U(n)$, введенный в п. 3.11. Пусть $E_{ij} = d\pi_\alpha(e_{ij})$ — образ элемента $e_{ij}$ в представлении $\pi_\alpha$. Пусть $\nabla_{ij}$ — многочлен от операторов $E_{ij}$ $(i > j)$ и операторов $L_i = E_{ii} + (n-i)1$, определенный формулами:

$$\nabla_{jj} = 1, \quad \nabla_{j+1,j} = E_{j+1,j}, \quad \nabla_{ij} = \sum_{i > k_1 > \ldots > k_l > j} c_{k_1 \ldots k_l} E_{ik_1} E_{k_1 k_2} \ldots E_{k_l j},$$

если $i > j+1$, $l$ — любое, при котором условия $i > k_1 > \ldots > k_l > j$ выполнимы, и $c_{k_1 \ldots k_l} = \prod\limits_{\substack{i>k>j \\ k \neq k_1, \ldots, k_l}} (L_j - L_k)$.

Пусть $l_i = p_i - i$, где $\{p_1, \ldots, p_n\}$ — сигнатура представления $\alpha$, и пусть $l_{ik} = p_{ik} - i$ для всех $i, k$ $(1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n)$. Пусть

$$\Omega_\mu = \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \nabla_{ki}^{p_{ik} - p_{i,k-1}},$$

где $\mu$ — схема, описанная в п. 3.13. Тогда для элементов ортонормированного базиса Гельфанда — Цетлина $e_\mu$ имеет место равенство $e_\mu = N_\mu^{-1} \Omega_\mu f_0$ (предполагается, что $\|f_0\| = 1$), где

$$N_\mu = \prod_{k=2}^{n-1} \left\{ \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k-1} \frac{(l_{ik} - l_{jk} - 1)!}{(l_{i,k-1} - l_{jk} - 1)!} \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{i=1}^{k-1} (l_{ik} - l_{i,k-1}) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k-1} \frac{(l_{ik} - l_{j,k-1})!}{(l_{i,k-1} - l_{j,k-1})!} \right\}^{1/2},$$

В этом базисе операторы $E_{i-1,i}$ и $E_{i,i-1}$ определяются формулами

$$E_{i-1,i}\, e_\mu =$$
$$= \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{\prod\limits_{k=1}^{i} (l_{ki} - l_{j,i-1}) \prod\limits_{k=1}^{i-2} (l_{k,i-2} - l_{j,i-1} - 1)}{\prod\limits_{k=1}^{i-1} (l_{k,i-1} - l_{j,i-1} - 1) \prod\limits_{k=1}^{i-1}{}' (l_{k,i-1} - l_{j,i-1})} \right|^{1/2} \cdot e_{\mu + \varepsilon_j(i-1)},$$

$$E_{i,i-1}\, e_\mu =$$
$$= \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{\prod\limits_{k=1}^{i} (l_{ki} - l_{j,i-1} + 1) \prod\limits_{k=1}^{i-2} (l_{k,i-2} - l_{j,i-1})}{\prod\limits_{k=1}^{i-1}{}' (l_{k,i-1} - l_{j,i-1}) \prod\limits_{k=1}^{i-1} (l_{k,i-1} - l_{j,i-1} + 1)} \right|^{1/2} \cdot e_{\mu - \varepsilon_j(i-1)};$$

штрих в этих формулах означает, что исключается нулевой сомножитель (соответствующий $j = k$), а число $l_{kj}$ считается равным нулю при $i > j$; таблица $\mu \pm \varepsilon_j(i-1)$ получается из таблицы $\mu$ прибавлением к $(i-1)$-й строке таблицы $\mu$ вектора $(0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0)$ с $\pm 1$ на $j$-м месте.

**3.15. Матричные элементы.** Неприводимое представление $\pi_\alpha$ допускает аналитическое продолжение до неприводимого представления $\pi_{(\alpha)}$ группы $GL(n, \mathbf{C})$, матричные элементы которого являются многочленами от матричных элементов матрицы из $GL(n, \mathbf{C})$. Операторы этого неприводимого представления $\pi_{(\alpha)}(1 + (t-1)e_{ii})$, $\pi_{(\alpha)}(1 + te_{i,i-1})$ и $\pi_{(\alpha)}(1 + te_{i-1,i})$ выражаются в базисе $e_\mu$ следующими формулами:

$$\pi_{(\alpha)}(1 + (t-1)e_{ii})\, e_\mu = t^{s_i - s_{i-1}} e_\mu, \quad s_k = \sum_{j=1}^{k} p_{jk}, \quad s_0 = 0;$$

$$\pi_{(\alpha)}(1 + te_{i,i-1})\, e_\mu = \sum_{\mu'} B_{i-1}^{(1)}(\mu', \mu)\, \lambda(\mu')\, \lambda(\mu)^{-1} t^{s_{i-1} - s_{i-1}} e_{\mu'},$$

где суммирование ведется по всем схемам $\mu'$, у которых

$$p'_{kj}=p_{kj} \text{ при } j\neq i-1,\quad m'_{k,i-1}\leqslant m_{k,i-1} \text{ при } k=1,\ldots,i-1;$$

$$\pi_{(\alpha)}(1+te_{i-1,i})e_\mu=\sum_{\mu'}B^{(2)}_{i-1}(\mu',\mu)\lambda(\mu')\lambda(\mu)^{-1}t^{s'_{i-1}-s_{i-1}}e_{\mu'},$$

где суммирование ведется по всем схемам $\mu'$, у которых $p'_{kj}=p_{kj}$ при $j\neq i-1$, $m'_{k,i-1}\geqslant m_{k,i-1}$ при $k=1,\ldots,i=1$, $\mu=(p_{ik})$, $\mu'=(p'_{ik})$, а величины $\lambda$, $B^{(1)}_{i-1}$, $B^{(2)}_{i-1}$ определяются формулами

$$\lambda(\mu)=\prod_{k=2}^{n}\left\{\frac{\prod\limits_{i>j}(l_{j,k-1}-l_{ik}-1)!\prod\limits_{i\leqslant j}(l_{ik}-l_{j,k-1})!}{\prod\limits_{i<j}(l_{i,k-1}-l_{j,k-1})}\right\}^{1/2},$$

$$B^{(1)}_{i-1}(\mu',\mu)=\prod_{k<j}\frac{(l_{k,i-1}-l_{ji}-1)!}{(l'_{k,i-1}-l_{ji}-1)!}\prod_{k\leqslant j}\frac{(l_{k,i-1}-l_{j,i-2})!}{(l'_{k,i-1}-l_{j,i-2})!}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{k<j}(l'_{k,i-1}-l_{j,i-1}-1)!}{\prod\limits_{k\leqslant j}(l_{k,i-1}-l'_{j,i-1})!}\prod_{k<j}(l'_{k,i-1}-l'_{j,i-1}),$$

$$B^{(2)}_{i-1}(\mu',\mu)=\prod_{k\leqslant j}\frac{(l_{ki}-l_{j,i-1})!}{(l_{ki}-l'_{j,i-1})!}\prod_{k<j}\frac{(l_{k,i-2}-l_{j,i-1}-1)!}{(l_{k,i-2}-l'_{j,i-1}-1)!}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{k<j}(l_{k,i-1}-l'_{j,i-1}-1)!}{\prod\limits_{k\leqslant j}(l'_{k,i-1}-l_{j,i-1})!}\prod_{k<j}(l'_{k,i-1}-l'_{j,i-1}),$$

причем $l_{kj}=p_{kj}-k$, $l'_{kj}=p'_{kj}-k$.

**3.16. Формула для кратности веса.** Имеет место равенство

$$\chi_\alpha(\gamma)=\sum n_\omega\omega(\gamma),$$

где суммирование распространяется на все веса $\omega$ представления $\pi_\alpha$, а $n_\omega$ — кратность веса $\omega$ в представлении $\pi_\alpha$. Для чисел $n_\omega$ справедливы формулы Фрейденталя, Костанта и формула локальной рекуррентности (см. п. 4.5 гл. 3).

**3.17. Тензорные произведения.** Пусть $\pi_\alpha\otimes\pi_\beta=\sum\limits_\rho m_\rho\pi_\rho$ — разложение тензорного произведения двух неприводимых представлений группы $U(n)$ на неприводимые представления. Пусть, кроме того, $\chi_\alpha=\sum\limits_\omega n_\omega\omega$, где суммирование распространено на все веса $\omega$ представления $\pi_\alpha$, и $n_\omega$ — кратность веса $\omega$ в представлении $\pi_\alpha$. Пусть $w=\{w_1,\ldots,w_n\}$ — сигнатура характера $\omega$ группы $D$; $a=\{a_1,\ldots,a_n\}$ — сигнатура представления $\pi_\alpha$, $b=\{b_1,\ldots,b_n\}$ — сигнатура представления $\pi_\beta$, $r=\{r_1,\ldots,r_n\}$ — сигнатура представления $\pi_\rho$. Пусть $\varepsilon=\{n-1,n-2,\ldots,0\}$ и пусть $s_\rho(\omega)$ — подстановка (если она существует), переводящая целочисленный вектор $w+b+\varepsilon$ в вектор $r+\varepsilon$. Тогда

$$m_\rho = \sum n_\omega \operatorname{sgn} s_\rho(\omega),$$

где суммирование распространяется на те веса $\omega$ представления $\pi_\alpha$, для которых такая подстановка существует, а $\operatorname{sgn} s_\rho(\omega) = \pm 1$ в зависимости от четности или нечетности подстановки $s_\rho(\omega)$.

В частности, $m_\rho \leqslant n_\omega$, где $\rho = \omega\beta$.

Пусть $D_i$ (соответственно $R_i$) — инфинитезимальный оператор левого (соответственно правого) сдвига на группе $Z_+$, отвечающий элементу $e_{i,\,i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ алгебры Ли группы $Z_+$ (ср. п. 3.6). Пусть $\Phi_{\alpha\beta}$ — пространство всех решений $\varphi$ системы уравнений $D_i^{a_i+1}\varphi = 0$, $R_i^{b_i+1}\varphi = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Формула $f(x, y) = \varphi(xy^{-1})$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между старшими векторами в пространстве $F_{\alpha\beta}$ тензорного произведения представлений $\tilde{\pi}_\alpha \otimes \tilde{\pi}_\beta$ (т. е. пространства многочленов $f$ от элементов двух матриц $xy \in Z_+$, удовлетворяющих системе уравнений $D_i^{a_i+1}f = 0$ по переменной $x$ и $D_i^{b_i+1}f = 0$ по переменной $y$) и функциями $\varphi$ из $\Phi_{\alpha\beta}$, удовлетворяющими условию $\varphi(\delta^{-1}z\delta) = \mu(\delta)\varphi(z)$ для всех $z \in Z_+$, $\delta \in D$ и некоторого характера $\mu$ группы $D$; соответствующий такой функции $\varphi$ старший вектор $f$ имеет при этом вес $\alpha\beta\mu$.

Пусть $\pi_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ — представления, определенные в п. 3.10. Представление $\pi_\alpha$ однократно содержится в произведении вида $\pi_1^{\otimes(p_1-p_2)} \otimes \ldots \otimes \pi_{n-1}^{\otimes(p_{n-1}-p_n)} \otimes \pi_n^{\otimes p_n}$, где $\{p_1, \ldots, p_n\}$ — сигнатура представления $\pi_\alpha$. Произведение Юнга и тензорное произведение связаны соотношениями

$$\pi_p \otimes \pi_q = \sum_{k\geqslant 0} \pi_{p-k}\pi_{q+k}, \quad \pi_p\pi_q = \begin{vmatrix} \pi_p & \pi_{p-1} \\ \pi_{q+1} & \pi_q \end{vmatrix}^{\otimes}, \quad p \leqslant q.$$

Кроме того, для представлений группы $SU(n)$ справедливо соотношение

$$\pi_\alpha = \begin{vmatrix} \pi_1^{p_1} & \pi_1^{p_1+1} & \ldots & \pi_1^{p_1+(n-1)} \\ \pi_1^{p_2-1} & \pi_1^{p_2} & \ldots & \pi_1^{p_2+(n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi_1^{p_n-(n-1)} & \pi_1^{p_n-(n-2)} & \ldots & \pi_1^{p_n} \end{vmatrix}^{\otimes},$$

где $\pi_1^k$ заменяется нулем, если $k < 0$.

**3.18. $L^p$-оценки рядов Фурье на группе $SU(n)$.** Пусть $\Gamma$ — множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы $SU(n)$; пусть $\{\pi_\alpha\} \in \Gamma$, $\chi_\alpha$ — характер представления $\pi_\alpha$, $d(\alpha)$ — размерность представления $\pi_\alpha$. Пусть $M(\alpha, p)$ — верхняя грань норм $\|f\|_{L_p}$, где $f$ — такая суммируемая функция на $SU(n)$ с $\|f\|_{L_1} = 1$, что $f * \chi_\alpha = f$. Для любого $p > 1$ существует положительная постоянная $C = C(n, p)$, удовлетворяющая условию $M(\alpha, p) > Cd(\alpha)^{1-1/p}$ для всех $\{\pi_\alpha\} \in \Gamma$.

**3.19. Вещественные и кватернионные представления.** Напомним, что неприводимое (комплексное) представление $\pi$ группы $G$ называется *вещественным*, *несамосопряженным* или *кватернионным* в зависимости от того, является ли комплексификация $\pi_{\mathrm{C}}$ представления $\pi$ неприводимым представлением, прямой суммой двух неэквивалентных представлений или прямой суммой двух эквивалентных представлений соответственно. Если $G$ — компактная группа, то эти условия равносильны условиям, что $\int\limits_G \chi_\pi(g^2)\,dg$ равен 1, 0 или $-1$ соответственно, где $\chi_\pi$ — характер представления $\pi$, а $dg$ — нормированная мера Хаара на $G$.

Неприводимые подпредставления представления $\pi_k \otimes \pi_{n-k}/\pi_n$ ($k=1, 2, \ldots, [n/2]$) суть вещественные представления (здесь $\pi_n(u) = \det u$ $(u \in U(n))$). Если $n = 2m$, то представление $\pi_m$ группы $SU(n)$ вещественно при четном $m$ и кватернионно при нечетном $m$. Неприводимые подпредставления представления $\pi_k \otimes \pi_{n-k}$ группы $SU(n)$ вещественны.

**3.20. Кольцо представлений.** Кольцо комплексных представлений группы $U(n)$ есть тензорное произведение кольца многочленов от $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ и кольца конечных рядов Лорана от $\pi_n$. Кольцо комплексных представлений группы $SU(n)$ есть кольцо многочленов от $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$.

Литература: [11], [20], [37], [60], [69], [104], [126], [129], [211], [284], [300], [311], [312], [336], [394], [395], [560].

## § 4. Группа $Sp(2n)$

**4.1. Некоторые подгруппы группы $Sp(2n, \mathrm{C})$.** Положим

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $s_1$ — матрица $n$-го порядка. Положим $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{2n} x_k y_k$ и $\varphi(x, y) = (s_0 x, y)$ для всех $x, y \in \mathrm{C}^{2n}$. Группа $Sp(2n, \mathrm{C})$ состоит из всех линейных преобразований $g$ пространства $\mathrm{C}^{2n}$, сохраняющих форму $\varphi$ и удовлетворяющих, таким образом, условию $g' s_0 g = s_0$. В дальнейшем $n \geqslant 2$ (группа $Sp(2, \mathrm{C})$ совпадает с $SL(2, \mathrm{C})$, а $Sp(2)$ — с $U(2)$).

Обозначим через $H^{(n)}, Z_+^{(n)}, D^{(n)}, E^{(n)}, Z_-^{(n)}, K^{(n)}, \Gamma^{(n)}$ подгруппы $H, Z_+, D, E, Z_-, K, \Gamma$, построенные в § 3 для группы $GL(n)$.

Обозначим через $H, Z_+, D, E, Z_-, K, Sp(2n), \Gamma$ пересечения группы $Sp(2n, \mathrm{C})$ с группами $H^{(2n)}, Z_+^{(2n)}, D^{(2n)}, E^{(2n)}, Z_-^{(2n)}, K^{(2n)}, U(2n), \Gamma^{(2n)}$ соответственно. Каждый элемент $h$ группы $H$ единственным образом представляется в виде $h = \delta z$ $(\delta \in D,\ z \in Z_+)$, а также в виде $h = z\delta$ $(\delta \in D,\ z \in Z_+)$. Каждый элемент $k$ группы $K$ представляется единственным образом в виде $k = \delta\zeta$ $(\delta \in D,\ \zeta \in Z_-)$, а также в виде $k = \zeta\delta$ $(\delta \in D,\ \zeta \in Z_-)$.

Каждая матрица $z \in Z_+$ представляется единственным образом в виде $z = xy$, где $xy \in Z_+$ — матрицы вида

$$x = \begin{pmatrix} 1_n & \xi \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix};$$

независимыми параметрами в группе $Z_+$ являются: а) матрица $\eta \in Z_+^{(n)}$; б) симметричная матрица $\hat{\xi} = s_1\xi$. Матрица $z = xy$ определяется формулой

$$z = \begin{pmatrix} \eta_1 & s_1^{-1}\hat{\xi}\eta \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad \eta_1 = (s_1\eta' s_1)^{-1} = s_1\eta'^{-1}s_1.$$

Каждая матрица $\delta \in D$ имеет вид $\delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$ $\ldots, \lambda_{2n})$, где $\lambda_{n-k+1} = \lambda_k^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$ являются независимыми параметрами в группе $D$.

**4.2. Разложения Гаусса и Грама.** Пусть $\Delta_p(g)$ — минор матрицы $g \in Sp(2n, \mathrm{C})$, образованный из элементов на пересечении первых $p$ строк и $p$ столбцов, и пусть $G_{\mathrm{reg}}$ — совокупность всех $g \in Sp(2n, \mathrm{C})$, для которых $\Delta_p(g) \neq 0$ $(p = 1, 2, \ldots, 2n)$. Множество $G_{\mathrm{reg}}$ открыто и плотно в $Sp(2n, \mathrm{C})$. Каждая матрица $g \in G_{\mathrm{reg}}$ представляется единственным образом в виде $g = kz$ $(k \in K, z \in$ $\in Z_+)$, в виде $g = \delta\zeta z$ $(\delta \in D, \zeta \in Z_-, z \in Z_+)$, а также в виде $g = \zeta\delta z$ $(\zeta \in Z_-, \delta \in D, z \in Z_+)$; каждое из этих трех разложений называется *разложением Гаусса*. Элементы матриц, входящих в разложения Гаусса, вычисляются по формулам п. 3.2.

Каждый элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = ku$ $(k \in K, u \in Sp(2n))$; если $g = k_1u_1$ — другое такое разложение, то $k_1 = k\gamma$, $u_1 = \gamma^{-1}u$ $(\gamma \in \Gamma)$. Каждый элемент $g \in G$ можно представить, и притом единственным образом, в виде $g = \varepsilon\zeta u$ $(\varepsilon \in E,$ $\zeta \in Z_-, u \in Sp(2n))$.

**4.3. Неприводимые представления группы $Sp(2n)$.** Пусть $\alpha$ — характер группы $D$, определяемый формулой

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\ldots\lambda_n^{p_n},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — такие целые числа, что все числа $p_1 - p_2,$ $p_2 - p_3, \ldots, p_{n-1} - p_n, p_n$ неотрицательны. Пусть $f_0(g) = \Delta_1(g)^{p_1-p_2}\times$ $\times\Delta_2(g)^{p_2-p}\ldots\Delta_{n-1}(g)^{p_{n-1}-p_n}\Delta_n(g)^{p_n}$ $(g \in Sp(2n, \mathrm{C}))$ — многочлен на группе $Sp(2n, \mathrm{C})$, определенный характером $\alpha$. Пусть $\Phi_\alpha$ — линейная оболочка всех правых сдвигов $f_0(gg_0)$ $(g_0 \in$ $\in Sp(2n, \mathrm{C}))$. Тогда $\Phi_\alpha$ — конечномерное линейное пространство, и формула $[\pi_\alpha(g_0)f](g) = f(gg_0)$ $(f \in \Phi_\alpha, g \in Sp(2n, \mathrm{C}), g_0 \in Sp(n))$ определяет представление группы $Sp(2n)$. Это представление неприводимо, и семейство представлений $\pi_\alpha$ есть полное семейство (неэквивалентных при разных $\alpha$) конечномерных неприводимых представлений группы $Sp(2n)$.

Функция $f_0$ является старшим вектором представления $\pi_\alpha$. Набор чисел $\{p_1, \ldots, p_n\}$ называется *сигнатурой* представления $\pi_\alpha$ (или характера $\alpha$).

Пусть $F_\alpha$ — линейное пространство ограничений функций из пространства $\Phi_\alpha$ на группу $Z_+$. Пространство $F_\alpha$ есть линейная оболочка семейства функций $f\colon z \to f_0(zg)$ $(g \in Sp(2n, \mathbf{C}))$, и формула $[\tilde{\pi}_\alpha(g_0)f](z) = \alpha(zg_0)f(z\bar{g}_0)$, где $zg_0 = k_1 z\bar{g}_0$ $(k_1 \in K)$, $z\bar{g}_0 \in Z_+ (g_0 \in Sp(n)$, $f \in F_\alpha)$, определяет представление группы $Sp(2n)$ в пространстве $F_\alpha$, эквивалентное представлению $\pi_\alpha$. Старшим вектором является ненулевая постоянная функция.

Пусть $\mathcal{F}_\alpha$ — линейное пространство ограничений функций из $\Phi_\alpha$ на группу $Sp(2n)$. Тогда $\mathcal{F}_\alpha$ — линейная оболочка функций вида $u \to f_0(uu_0)$ $(u,\ u_0 \in Sp(2n))$. Формула $[\pi^\alpha(u_0)f](u) = f(uu_0)$ $(f \in \mathcal{F}_\alpha,\ u,\ u_0 \in Sp(2n))$ определяет представление группы $Sp(2n)$ в пространстве $\mathcal{F}_\alpha$, эквивалентное представлению $\pi_\alpha$. Ограничение функции $f_0$ на $Sp(2n)$ является старшим вектором представления $\pi^\alpha$.

Характер $\chi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$ определяется формулой $\chi_\alpha(\gamma) = \xi(q_1, \ldots, q_n)/\xi(n, n-1, \ldots, 1)$, где $\gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_n^{-1}, \ldots \ldots, \gamma_1^{-1}) \in \Gamma$, $q_i = p_i + m_i$ для $m_i = n + 1 - i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\xi(q_1, \ldots \ldots, q_n) = \det(\gamma_i^{q_j} - \gamma_i^{-q_j})_{i,j=1}^n$. Размерность представления $\pi_\alpha$ равна $\prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{q_i}{m_i} \prod\limits_{i<k<n} \dfrac{q_i^2 - q_k^2}{m_i^2 - m_k^2}$.

Пространство $F_\alpha$ представления $\tilde{\pi}_\alpha$ есть совокупность всех аналитических функций $f$ на группе $Z_+$, удовлетворяющих системе уравнений $D_i^{p_i - p_{i+1} + 1} f = 0$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$ $(p_{n+1} = 0)$, где оператор $D_i$ является аналитическим оператором левого сдвига на группе $Z_+$, порожденным однопараметрической подгруппой $z_i(t) = 1 + (1/2)t(e_{i,\,i+1} - e_{j-1,\,j})$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$; $z_n(t) = 1 + te_{n,\,n+1}$; здесь $j = 2n - i + 1$, а матрицы $e_{ij}$ определены в п. 3.6.

Если принять в качестве независимых параметров матрицы $z \in Z_+$ элементы $z_{ij}$ с $i = 1, \ldots, n$, $i + j \leqslant 2n + 1$, то операторы $D_i$ принимают вид

$$D_i = \frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}} + z_{i+1,i+2} \frac{\partial}{\partial z_{i,i+2}} + \ldots + z_{i+1,2n-i-1} \frac{\partial}{\partial z_{i,2n-i-1}},$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Если же принять параметризацию

$$z = xy = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & s_1 \xi'^{-1} s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y \in Z_+,$$

где $\xi \in Z_+^{(n)}$, $\eta$ — квадратная матрица порядка $n$, симметричная относительно косой диагонали, то $D_p = x_{p+1} \partial/\partial x_p$ $(p = 1, 2, \ldots \ldots, n-1)$, а $D_n = \sum\limits_{i,j} a_{in} b_{1j} \partial/\partial y_{ij}$ $(a = \xi^{-1},\quad b = s_1 \xi'^{-1} s_1)$, где сумма берется по тем элементам $y_{ij}$ матрицы $y$, которые лежат на косой диагонали и выше ее.

**4.4. Представления в поливекторах.** Пусть $\rho_1$ — тождественное представление группы $Sp(2n)$, а $\rho_p$ — представление группы $Sp(2n)$

в пространстве $X_p$ антисимметричных полилинейных функций $f$ от $p$ векторов $x_1, \ldots, x_p \in \mathbf{C}^{2n}$ (ср. п. 3.10):

$$[\rho_p(g)f](x_1, \ldots, x_p) = f(x_1 g, \ldots, x_p g), \quad f \in X_p, \quad g \in Sp(2n).$$

Пусть $\pi_p$ — неприводимое представление $\pi_{\alpha_p}$, где

$$\alpha_p\left(\operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1}\right)\right) = \lambda_1 \ldots \lambda_p, \quad p = 1, \ldots, n.$$

Представление $\rho_p$ эквивалентно прямой сумме представлений $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p$. Характер представления $\rho_p$ как функция $\gamma \in \Gamma$ есть $p$-я элементарная симметрическая функция от собственных значений матрицы $\gamma$. Любое представление $\pi_\alpha$ эквивалентно произведению Юнга $\pi_1^{p_1-p_2}\pi_2^{p_2-p_3} \ldots \pi_{n-1}^{p_{n-1}-p_n}\pi_n^{p_n}$. Размерность представления равна $C_{2n}^p - C_{2n}^{p-2}$ $(C_{2n}^{p-2} = 0$ при $p = 1)$.

**4.5. Ограничение на подгруппу.** Пусть произведение групп $Sp(2n-2)$ и $\mathbf{C}^*$ (мультипликативной группы комплексных чисел) считается вложенным в группу $Sp(2n)$ с помощью отображения

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \lambda\right\} \to \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix},$$

$$\lambda \in \mathbf{C}^*, \quad a, b, c, d \in M_n(\mathbf{C}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2n).$$

Пусть $H$ — образ этого отображения. Ограничение представления $\pi_\alpha$ на $H$ содержит все представления вида $\pi_\gamma \otimes \chi_s$, где $\pi_\gamma$ — представление группы $Sp(2n-2)$ с сигнатурой $\{r_1, \ldots, r_{n-1}\}$, а $\chi_s$ — характер группы $\mathbf{C}^*$ $(\chi_s(\lambda) = \lambda^s, \lambda \in \mathbf{C}^*)$, причем $s = 2\sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n-1} r_i - \sum_{i=1}^{n} p_i$, где $\{p_1, \ldots, p_n\}$ — сигнатура представления $\pi_\alpha$ и целые числа $q_i$, $r_i$ принимают всевозможные значения, удовлетворяющие условиям $p_k \geqslant q_k \geqslant p_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n)$, где $p_{n+1} = 0$, и $q_k \geqslant r_k \geqslant q_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Таким образом, ограничение представления $\pi_\alpha$ на $Sp(2n-2)$ может содержать некоторые представления $\pi_\gamma$ с неединичными кратностями. Аналогичное утверждение справедливо и для ограничения на подгруппу $Sp(2n-2) \times Sp(2)$.

**4.6. Кольцо представлений.** Все неприводимые унитарные представления группы $Sp(2n)$ самосопряжены. Представления $\pi_p$ вещественны при четном $p$ и кватернионны при нечетном $p$.

Кольцо представлений группы $Sp(2n)$ есть кольцо многочленов от $\pi_1, \ldots, \pi_n$.

Литература: [11], [20], [37], [129], [207], [211], [284].

## § 5. Группы $SO(n)$ и $Spin(n)$

**5.1. Некоторые подгруппы группы ($SOn$, C).** Пусть $s_1^{(n)} = s_1$ — матрица $n$-го порядка, введенная в п. 4.1. Пусть $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ и $\varphi(x, y) = (s_1 x, y)$ для всех $x, y \in \mathbf{C}^n$. Группа $SO(n, \mathbf{C})$ состоит из всех линейных преобразований $g$ пространства $\mathbf{C}^n$, сохраняющих форму $\varphi$ и имеющих единичный определитель, т. е. из преобразований с такими матрицами $g$, что $g' s_1 g = s_1$. В дальнейшем предполагается, что $n \geqslant 2$ (группа $SO(2)$ коммутативна).

Обозначим через $H$, $Z_+$, $D$, $E$, $Z_-$, $K$, $SO(n)$, $\Gamma$ пересечения группы $SO(n, \mathbf{C})$ с группами $H^{(n)}$, $Z_+^{(n)}$, $D^{(n)}$, $E^{(n)}$, $Z_-^{(n)}$, $K^{(n)}$, $U(n)$, $\Gamma^{(n)}$ соответственно, введенными в п. 4.1.

Каждый элемент $h$ группы $H$ единственным образом представляется в виде $h = \delta z$ ($\delta \in D$, $z \in Z_+$), а также в виде $h = z\delta$ ($\delta \in D$, $z \in Z_+$). Каждый элемент $k$ группы $K$ представляется единственным образом в виде $k = \delta\zeta$ ($\delta \in D$, $\zeta \in Z_-$), а также в виде $k = \zeta\delta$ ($\delta \in D$, $\zeta \in Z_-$).

Пусть $n = 2m$. Каждая матрица $z \in Z_+$ представляется единственным образом в виде $z = xy$, где $x, y \in Z_+$ — матрицы вида

$$x = \begin{pmatrix} 1_m & \xi \\ 0 & 1_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix},$$

причем матрица $\hat{\xi} = s_1^{(m)} \xi$ кососимметрична, а $\eta \in Z_+^{(m)}$; $\hat{\xi}$ и $\eta$ являются независимыми параметрами в группе $Z_+$. Матрица $z = xy$ определяется формулой

$$z = \begin{pmatrix} \eta_1 & s_1^{(m)} \hat{\xi} \eta \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \eta_1 = s_1^{(m)} \eta'^{-1} s_1^{(m)}.$$

Пусть $n = 2m + 1$. Каждая матрица $z \in Z_+$ представляется единственным образом в виде $z = xy$, где $x, y \in Z_+$ — матрицы вида

$$x = \begin{pmatrix} 1_m & \eta_0 & \xi \\ 0 & 1 & \xi_0 \\ 0 & 0 & 1_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{-1} \end{pmatrix};$$

здесь $\eta$, $\eta_{-1}$ и $\xi$ — квадратные матрицы порядка $m$, а $\eta_0$ и $\xi_0$ — столбец и строка из $m$ чисел соответственно; независимыми параметрами являются матрица $\eta \in Z_+^{(m)}$, кососимметрическая матрица $\hat{\xi}\,(= \xi s_1^{(m)} + (1/2)\,\eta_0 \eta_0')$ и строка $\xi_0$ из $m$ чисел. Матрица $z = xy$ определяется формулой

$$z = \begin{pmatrix} \eta & -s_1^{(m)} \xi_0' & \hat{\xi} s_1^{(m)} - {}^1/_2 s_1^{(m)} \xi_0' \xi_0 \\ 0 & 1 & \xi_0 s_1^{(m)} \eta'^{-1} s_1^{(m)} \\ 0 & 0 & s_1^{(m)} \eta'^{-1} s_1^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Каждая матрица $\delta \in D$ имеет вид $\delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_m^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1})$, если $n=2m$, и $\delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 1, \lambda_m^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1})$, если $n=2m+1$. Таким образом, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ являются независимыми параметрами в группе $D$.

**5.2. Зеркальный автоморфизм группы $SO(2m, \mathrm{C})$.** Пусть $n=2m$ и $\omega$ — матрица

$$\begin{pmatrix} 1_{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{m-1} \end{pmatrix}$$

Отображение $g \to \omega g \omega$ $(g \in SO(2m, \mathrm{C}))$ называется *зеркальным автоморфизмом* в группе $SO(2m, \mathrm{C})$.

**5.3. Разложения Гаусса и Грама.** Пусть $\Delta_p(g)$ — минор матрицы $g \in SO(n, \mathrm{C})$, образованный элементами, расположенными на пересечении ее первых $p$ строк и $p$ столбцов, и пусть $G_{\mathrm{reg}}$ — совокупность всех матриц $g \in SO(n, \mathrm{C})$, для которых $\Delta_p(g) \neq 0$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$. Множество $G_{\mathrm{reg}}$ открыто и плотно в $SO(n, \mathrm{C})$. Каждая матрица $g \in G_{\mathrm{reg}}$ представляется единственным образом в виде $g = kz$ $(k \in K,\ z \in Z_+)$, в виде $g = \delta\zeta z$ $(\delta \in D,\ \zeta \in Z_-,\ z \in Z_+)$, а также в виде $g = \zeta\delta z$ $(\zeta \in Z_-,\ \delta \in D,\ z \in Z_+)$; каждое из этих трех разложений называется *разложением Гаусса.* Элементы матриц, входящих в разложение Гаусса, вычисляются по формулам п. 3.2.

Каждый элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = ku$ $(k \in K,\ u \in SO(n))$; если $g = k_1 u_1$ — другое такое разложение, то $k_1 = k\gamma$, $u_1 = \gamma^{-1}u$ $(\gamma \in \Gamma)$. Каждый элемент $g \in G$ можно представить, и притом единственным образом, в виде $g = \varepsilon\zeta u$ $(\varepsilon \in E,\ \zeta \in Z_-,\ \zeta \in SO(n))$.

**5.4. Неприводимые представления группы $SO(2m)$ $(m>1)$.** Пусть $S_+$ — многочлен от матричных элементов группы $SO(2m, \mathrm{C})$, удовлетворяющий условию $S_+^2 = \Delta_m$, где $\Delta_p(g)$ — минор матрицы $g \in SO(2m, \mathrm{C})$, составленный из элементов первых $p$ строк и столбцов. Пусть $S_-$ — многочлен на $SO(2m, \mathrm{C})$, удовлетворяющий условию $S_+S_- = \Delta_{m-1}$. Пусть $\alpha$ — характер группы $D \subset SO(2m, \mathrm{C})$, определяемый формулой $\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1} \ldots \lambda_m^{p_m}$ $(\delta \in D)$, где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — такие одновременно целые или одновременно полуцелые*) числа, что $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{m-1} \geqslant |p_m|$. Тогда

$$\alpha(\delta) = \Delta_1^{p_1-p_2}(\delta)\Delta_2^{p_2-p_3}(\delta) \ldots \Delta_{m-2}^{p_{m-2}-p_{m-1}}(\delta) S_+^{p_{m-1}+p_m}(\delta) S_-^{p_{m-1}-p_m}(\delta)$$

и линейная оболочка $\Phi_\alpha$ всех правых сдвигов $f_0(gg_0)$ $(g_0 \in SO(2m, \mathrm{C}))$ функции $f_0$, определенной формулой

$$f_0(g) = \Delta_1(g)^{p_1-p_2} \Delta_2(g)^{p_2-p_3} \ldots$$
$$\ldots \Delta_{m-2}(g)^{p_{m-2}-p_{m-1}} S_+(g)^{p_{m+1}+p_m} S_-(g)^{p_{m-1}-p_m}, \quad g \in SO(2m, \mathrm{C}),$$

*) Если $p_i$ — полуцелые числа, то характер $\alpha$ двузначен на $D$.

есть конечномерное линейное пространство; формула

$$[\pi_\alpha(g_0)f](g) = f(gg_0), \quad f \in \Phi_\alpha, \quad g \in SO(2m, \mathbf{C}), \quad g_0 \in SO(2m),$$

определяет представление группы $SO(2m)$ в пространстве $\Phi_\alpha$, однозначное, если все $p_k$ — целые числа, и двузначное, если $p_k$ — полуцелые числа (в этом случае представление $\pi_\alpha$ определяет однозначное представление группы $Spin(2m)$, являющейся универсальной (двулистной) накрывающей группой для $SO(2m)$; см. п. 5.6).

Представления $\pi_\alpha$ неприводимы. Функция $f_0$ является старшим вектором представления $\pi_\alpha$. Набор чисел $\{p_1, \ldots, p_n\}$ называется *сигнатурой* представления $\pi_\alpha$ (или характера $\alpha$). Семейство представлений $\pi_\alpha$ с целочисленными сигнатурами есть полное семейство (неэквивалентных при разных $\alpha$) конечномерных неприводимых представлений группы $SO(2m)$.

Представление $\pi_\alpha$ допускает реализации $\tilde{\pi}_\alpha$, $\pi^\alpha$ в пространствах $F_\alpha$, $\mathcal{F}_\alpha$ функций на группах $Z_+$ и $SO(2m)$ соответственно, аналогичные соответствующим реализациям представлений группы $Sp(2n)$ (см. п. 4.3).

Пусть $\pi_1$ — тождественное представление группы $SO(2m)$, а $\pi_p$ — представление группы $SO(2m)$ в пространстве $X_p$ антисимметрических полилинейных функций $f$ от векторов $x_1, \ldots, x_p \in \mathbf{C}^{2m}$ (ср. пп. 3.10, 4.3):

$$[\pi_p(g)f](x_1, \ldots, x_p) = f(x_1 g, \ldots, x_p g), \quad f \in X_p, \quad g \in SO(2m).$$

При $p = 1, 2, \ldots, m-1$ представления $\pi_p$ неприводимы и эквивалентны представлениям $\pi_{\alpha_p}$, где

$$\alpha_p\left(\operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_m^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1}\right)\right) = \lambda_1 \ldots \lambda_p.$$

Характер представления $\pi_p$ как функция $\gamma \in \Gamma$ ($\gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$) есть $p$-я элементарная симметрическая функция от $\gamma_1, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_m, \gamma_m^{-1}$. Размерность представления $\pi_p$ равна $C_{2m}^p$.

Представление $\pi_m$ приводимо и эквивалентно прямой сумме представлений $\pi_+ = \pi_{\alpha+}$ и $\pi_- = \pi_{\alpha-}$, где $\alpha_\pm(\delta) = S_\pm^2(\delta)$ $(\delta \in D)$. Размерности этих представлений равны $C_{2m}^m/2$. Пусть $\chi$ — $m$-я элементарная симметрическая функция от $\gamma_1, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_m, \gamma_m^{-1}$, $(\gamma \in \Gamma)$. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ принимают значения $\pm 1$ и пусть $\chi_\pm(\gamma) = \sum \gamma_1^{\varepsilon_1}\gamma_2^{\varepsilon_2} \ldots \gamma_m^{\varepsilon_m}$, где $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m = \pm 1$. Характеры представления $\pi_+$ и $\pi_-$ равны $(\chi + \chi_+ - \chi_-)/2$ и $(\chi - \chi_+ + \chi_-)/2$ соответственно.

Любое (однозначное) неприводимое представление $\pi_\alpha$ группы $SO(2m)$ есть произведение Юнга (см. п. 3.10): $\pi_1^{p_1-p_2}\pi_2^{p_2-p_3} \ldots \pi_{m-1}^{p_{m-1}-p_m}\pi_{(\operatorname{sgn} p_m)}^{|p_m|}$, где $\{p_1, \ldots, p_m\}$ — (целочисленная) сигнатура представления $\pi_\alpha$. Пусть $q_k = p_k + (m-k)$ $(k = 1, \ldots, m-1)$, $q_m = |p_m|$, и пусть $\xi_0(q_1, \ldots, q_m) = \det\left(\gamma_i^{q_j} + \gamma_i^{-q_j}\right)_{i,j=1}^m$, $\xi_1(q_1, \ldots, q_m) =$

$$=\det\left(\gamma_i^{q_j}-\gamma_i^{-q_j}\right)_{i,j=1}^{m} \quad \text{для} \quad \gamma=\operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_m^{-1}, \ldots, \gamma_1^{-1})\in\Gamma.$$

Тогда характер $\chi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$ определяется формулой

$$\chi_\alpha(\gamma)=\frac{\xi_0(q_1, \ldots, q_m)}{\xi_0(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)},$$

если $p_m=q_m=0$,

$$\chi_\alpha(\gamma)=\frac{\xi_0(q_1, \ldots, q_m)+(\operatorname{sgn} p_m)\,\xi_1(q_1, \ldots, q_m)}{2\xi_0(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)},$$

если $p_m\neq 0$ $(\gamma\in\Gamma)$. Размерность представления $\pi_\alpha$ равна

$$\frac{2^{k-1}}{(2k-2)!\,(2k-4)!\ldots 4!\,2!}\prod_{1\leqslant i<j}^{m}(q_i^2-q_j^2).$$

Если $m$ четно, то все неприводимые представления группы $SO(2m)$ вещественны. Если $m$ нечетно, то неприводимое представление $\pi_\alpha$ самосопряжено (и вещественно) тогда и только тогда, когда $p_m$ — четное число.

Кольцо представлений группы $SO(2m)$ есть свободный модуль с двумя образующими 1 и $\pi_{\alpha_+}$ (или 1 и $\pi_{\alpha-}$) над кольцом многочленов от $\pi_1, \ldots, \pi_m$.

Двузначные представления $\pi_{S+}$ и $\pi_{S-}$ называются *спинорными* представлениями. Характеры $\chi_{S_\pm}$ этих представлений определяются формулами

$$\chi_{S_\pm}(\gamma)=\frac{\xi_0(m-1/2, \ldots, 1/2)\pm\xi_1(m-1/2, \ldots, 1/2)}{2\xi_0(m-1, \ldots, 1, 0)},$$
$$\gamma\in\Gamma.$$

Размерности представлений $\pi_{S_\pm}$ равны $2^{m-1}$. Эти представления несамосопряжены при нечетном $m$, вещественны при $m\equiv 0 \pmod 4$ и кватернионны при $m\equiv 2 \pmod 4$ (как представления спинорной группы или алгебры Ли).

Пусть $\pi_\alpha$ — неприводимое (двузначное) представление группы $SO(2m)$ с сигнатурой $\{p_1, \ldots, p_m\}$, где $p_1\geqslant\ldots\geqslant p_{m-1}\geqslant|p_m|$ — полуцелые числа; пусть $q_k=p_k+(m-k)$ $(k=1, \ldots, m-1)$, $q_m=|p_m|$. Тогда характер $\chi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$ определяется формулой

$$\chi_\alpha(\gamma)=\frac{\xi_0(q_1, \ldots, q_m)+\operatorname{sgn}(p_m)\,\xi_1(q_1, \ldots, q_m)}{2\xi_0(m-1, \ldots, 1, 0)}, \qquad \gamma\in\Gamma.$$

Размерность представления $\pi_\alpha$ равна

$$\frac{2^{k-1}}{(2k-2)!\,(2k-4)!\ldots 2!}\prod_{1\leqslant i<j}^{m}(q_i^2-q_j^2).$$

**5.5. Неприводимые представления группы $SO(2m+1)$ $(m\geqslant 1)$.** Пусть $S$ — многочлен от матричных элементов группы $SO(2m+1, \mathbf{C})$, удовлетворяющий условию $S^2=\Delta_m$, где $\Delta_p(g)$ — $p$-й главный минор матрицы $g\in SO(2m+1, \mathbf{C})$. Пусть $\alpha$ — характер группы $D\subset SO(2m+1, \mathbf{C})$, определяемый формулой

$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1} \ldots \lambda_m^{p_m}$, где $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_m \geqslant 0$ и все числа $p_1, \ldots, p_m$ одновременно целые или одновременно полуцелые (в последнем случае характер $\alpha$ двузначен на $D$). Тогда

$$\alpha(\delta) = \Delta_1(\delta)^{p_1-p_2} \Delta_2(\delta)^{p_2-p_3} \ldots \Delta_{m-1}(\delta)^{p_{m-1}-p_m} S(\delta)^{2p_m},$$

и линейная оболочка $\Phi_\alpha$ всех правых сдвигов $f_0(gg_0)$ ($g_0 \in SO(2m+1, \mathbf{C})$) функции $f_0$, определяемой формулой

$$f_0(g) = \Delta_1(g)^{p_1-p_2} \Delta_2(g)^{p_2-p_3} \ldots \Delta_{m-1}(g)^{p_{m-1}-p_m} S(g)^{2p_m},$$
$$g \in SO(2m+1, \mathbf{C}),$$

есть конечномерное линейное пространство; формула

$$[\pi_\alpha(g_0)f](g) = f(gg_0), \quad f \in \Phi_\alpha, \quad g \in SO(2m, \mathbf{C}), \ g_0 \in SO(2m),$$

определяет представление группы $SO(2m+1)$ в пространстве $\Phi_\alpha$, однозначное, если все $p_k$ — целые числа, и двузначное, если $p_k$ — полуцелые числа (в этом случае представление $\pi_\alpha$ определяет однозначное представление группы $Spin(2m+1)$, являющейся универсальной (двулистной) накрывающей группой для $SO(2m+1)$, см. п. 5.6).

Представления $\pi_\alpha$ неприводимы. Функция $f_0$ является старшим вектором представления $\pi_\alpha$. Набор чисел $\{p_1, \ldots, p_n\}$ называется *сигнатурой* представления $\pi_\alpha$ (или характера $\alpha$). Семейство представлений $\pi_\alpha$ с целочисленными сигнатурами есть полное семейство (неэквивалентных при разных $\alpha$) конечномерных неприводимых представлений группы $SO(2m+1)$.

Представление $\pi_\alpha$ допускает реализации $\tilde{\pi}_\alpha$, $\pi^\alpha$ в пространствах $F_\alpha$, $\mathcal{F}_\alpha$ функций на группах $Z_+$ и $SO(2m+1)$ соответственно, аналогичные соответствующим реализациям представлений группы $Sp(n)$ (с. п. 4.3).

Пусть $\pi_1$ — тождественное представление группы $SO(2m+1)$, а $\pi_p$ — представление группы $SO(2m+1)$ в пространстве $X_p$ антисимметричных полилинейных функций $f$ от векторов $x_1, \ldots, x_p \in \mathbf{C}^{2m+1}$ (ср. пп. 3.10, 4.3):

$$[\pi_p(g)f](x_1, \ldots, x_p) = f(x_1 g, \ldots, x_p g), \quad f \in X_p, \quad g \in SO(2m+1).$$

Представления $\pi_p$ неприводимы и эквивалентны представлениям $\pi_{\alpha_p}$, где $\alpha_p(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 1, \lambda_m^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1})) = \lambda_1 \ldots \lambda_p$. Характер представления $\pi_p$ как функция $\gamma \in \Gamma$ есть сумма $\sigma_p + \sigma_{p-1}$, где $\sigma_p$ — $p$-я элементарная симметрическая функция от $\gamma_1, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_m, \gamma_m^{-1}$, а $\sigma_0 = 1$. Размерность представления $\pi_p$ равна $C_{2m}^p$.

Любое (однозначное) неприводимое представление $\pi_\alpha$ группы $SO(2m+1)$ есть произведение Юнга (см. п. 3.10) $\pi_1^{p_1-p_2}\pi_2^{p_2-p_3} \ldots \pi_{m-1}^{p_{m-1}-p_m}\pi_m^{p_m}$, где $\{p_1, \ldots, p_m\}$ — сигнатура представления $\pi_\alpha$. Пусть $q_k = p_k + m - k + \frac{1}{2}$ ($k = 1, \ldots, m$) и пусть $\xi_1(q_1, \ldots, q_m) =$

$= \det\left(\gamma_i^{q_j} - \gamma_i^{-q_j}\right)_{i,j=1}^m$ для $\gamma = \mathrm{diag}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, 1, \gamma_m^{-1}, \ldots, \gamma_1^{-1}) \in \Gamma$. Тогда характер $\chi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$ определяется формулой

$$\chi_\alpha(\gamma) = \xi_1(q_1, \ldots, q_m)/\xi_1\left(m - \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right), \quad \gamma \in \Gamma;$$

размерность представления $\pi_\alpha$ равна

$$\frac{2^m}{(2m-1)!\ldots 3!\,1!}\, q_1 \ldots q_m \prod_{1<i<j}^{m} (q_i^2 - q_j^2).$$

Все неприводимые представления группы $SO(2m+1)$ вещественны.

Кольцо представлений группы $SO(2m+1)$ есть алгебра многочленов с образующими $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$.

Двузначное представление $\pi_s$ называется спинорным представлением. Характер $\chi_s$ этого представления определяется формулой

$$\chi_S(\gamma) = \xi_1(m, m-1, \ldots, 1)\,\xi_1^{-1}(m - 1/2, \ldots, 1/2), \qquad \gamma \in \Gamma.$$

Размерность представления $\pi_s$ равна $2^m$. Это представление вещественно при четном $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ и кватернионно в противном случае (как представление спинорной группы или алгебры Ли).

Пусть $\pi_\alpha$ — неприводимое (двузначное) представление группы $SO(2m+1)$ с сигнатурой $\{p_1, \ldots, p_m\}$, где $p_1 \geqslant \ldots \geqslant p_{m-1} \geqslant p_m \geqslant \geqslant 0$ — полуцелые числа; пусть $q_k = p_k + (m-k) + 1/2$ $(k = 1, 2, \ldots \ldots, m)$. Тогда характер $\chi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$ определяется формулой $\chi_\alpha(\gamma) = \xi_1(q_1, q_2, \ldots, q_m)\,\xi_1^{-1}(m - 1/2, \ldots, 1/2)$, $\gamma \in \Gamma$. Размерность представления $\pi_\alpha$ равна

$$\frac{2^m}{(2m-1)!\ldots 3!\,1!}\, q_1 \ldots q_m \prod_{1\leqslant i<j}^{m} (q_i^2 - q_j^2).$$

**5.6. Спинорная группа $Spin(n)$.** Пусть $E$ — $n$-мерное евклидово пространство, $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в $E$, $C(E)$ — ассоциативная алгебра с образующими $1, e_1, \ldots, e_n$ и соотношениями $e_ie_j + e_je_i = 2\delta_{ij}1$. Пусть $L$ — линейная оболочка всех попарных произведений $e_ie_j$ $(i \neq j)$ и пусть $e_{ij}$ — линейный оператор в $C(E)$, определяемый формулой $e_{ij}(z) = (e_ie_j)z - z(e_ie_j)$ $(z \in E$, $i, j = 1, \ldots, n, i \neq j)$. Так как $\dim C(E) = 2^n$, то $C(E)$ и $L$ — конечномерные линейные пространства. Формула $[a, b] = ab - ba$ $(a, b \in L)$ снабжает $L$ структурой вещественной алгебры Ли. Пусть $E_{ij}$ — линейный оператор в пространстве $E$, являющийся ограничением оператора $e_{ij}$ на пространстве $E \subset C(E)$. Отображение $\rho$: $e_{ij} \to E_{ij}$ есть точное линейное представление алгебры Ли $L$, изоморфной алгебре Ли $SO(n)$, в пространстве $E$. Связная подгруппа $G$ в группе $SO(2^n)$ (рассматриваемой как группа ортогональных матриц в $C(E)$), определяемая подалгеброй Ли $L$, называется *спинорной* группой и обозначается $Spin(n)$. Представление $\rho$: $e_{ij} \to E_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ алгебры Ли определяет представление группы $Spin(n)$; это представление имеет образ $SO(n)$ и является двулистным накрытием группы $SO(n)$. Группа $Spin(n)$ связна и односвязна.

Пусть $1_2$ — единичная матрица второго порядка,

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Элементы $e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, определяемые формулами

$$e_{2i-1} = (f_3)^{\otimes(i-1)} \otimes f_1 \otimes (1_2)^{\otimes([n/2]-i)}, \quad e_{2i} = (f_3)^{\otimes(i-1)} \otimes f_2 \otimes \otimes (1_2)^{\otimes([n/2]-i)}$$

(и $e_{2m+1} = (f_3)^{\otimes m}$, если $n = 2m+1$), удовлетворяют соотношениям $e_p e_q + e_q e_p = \delta_{pq} 1$ и косоэрмитовы; таким образом, они определяют точное унитарное представление группы $Spin(n)$ размерности $2^{[n/2]}$.

Каждое (однозначное или двузначное) неприводимое представление $\pi_\alpha$ группы $SO(n)$ определяет однозначное неприводимое представление $\pi'_\alpha$ группы $Spin(n)$ в том же пространстве, дифференциал которого $d\pi'_\alpha$ есть композиция $d\pi_\alpha \circ \rho$ дифференциала $d\pi_\alpha$ и представления $\rho$ алгебры Ли группы $Spin(n)$ на $SO(n)$.

**5.7. Ограничение на подгруппу.**

а) $SO(2m+1) \supset SO(2m)$. Пусть $SO(2m)$ реализована как подгруппа в группе $SO(2m+1)$, образованная матрицами, сохраняющими базисный вектор с номером $m+1$. Пусть $\pi_\alpha$ — неприводимое представление группы $SO(2m+1)$ с сигнатурой $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$. Ограничение представления $\pi_\alpha$ на подгруппу $SO(2m)$ эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений $\pi_\beta$ группы $SO(2m)$, где сигнатуры $\{q_1, \ldots, q_m\}$ представлений $\pi_\beta$ удовлетворяют неравенствам $p_k \geqslant q_k \geqslant p_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, m-1)$, $p_m \geqslant q_m \geqslant -p_m$, причем все числа $q_k$ являются целыми (соответственно полуцелыми) одновременно с числами $p_k$. В частности, каждое представление $\pi_\beta$ содержится в ограничении $\pi_\alpha|_{SO(2m)}$ однократно.

б) $SO(2m) \supset SO(2m-1)$. Пусть $SO(2m-1)$ реализована как подгруппа в группе $SO(2m)$, образованная матрицами, сохраняющими сумму базисных векторов с номерами $m$, $m+1$. Пусть $\pi_\alpha$ — неприводимое представление группы $SO(2m)$ с сигнатурой $\{p_1, \ldots, p_m\}$. Ограничение представления $\pi_\alpha$ на подгруппу $SO(2m-1)$ эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений $\pi_\beta$ группы $SO(2m-1)$, где сигнатуры $\{q_1, \ldots, q_{m-1}\}$ представлений $\pi_\beta$ удовлетворяют неравенствам $p_k \geqslant q_k \geqslant p_{k+1}$ $(k=1, \ldots, m-2)$, $p_{m-1} \geqslant q_{m-1} \geqslant |p_m|$, причем все числа $q_k$ являются целыми (соответственно полуцелыми) одновременно с числами $p_k$. В частности, каждое представление $\pi_\beta$ содержится в ограничении $\pi_\alpha|_{SO(2m-1)}$ однократно.

**5.8. Базис Гельфанда — Цетлина и дифференциал представления $\pi_\alpha$.** Пусть $\pi_\alpha$ — неприводимое представление группы $SO(n)$ с сигнатурой $\{p_1, p_2, \ldots, p_{[n/2]}\}$. Пусть $SO(n) \supset SO(n-1) \supset \ldots$

$\ldots \supset SO(2)$ — цепочка подгрупп, вложенных друг в друга по правилу п. 5.7. Пусть $\mu$ — числовая таблица, строки которой $\tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-2}, \ldots, \tilde{p}_1$ являются наборами $\tilde{p}_k = (p_{k,1}, \ldots, p_{k,[(k+1)/2]})$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, причем числа $p_{n-1,i}$ совпадают с $p_i$ для всех $i = 1, \ldots, [n/2]$, а все числа $p_{ij}$ таблицы $\mu$ являются одновременно целыми или одновременно полуцелыми и удовлетворяют неравенствам $p_{2i+1,j+1} \leqslant p_{2i,j} \leqslant p_{2i+1,j}$ $(j = 1, \ldots, i)$, $p_{2i,j+1} \leqslant p_{2i-1,j} \leqslant p_{2i,j}$ $(j = 1, \ldots, i-1)$, $-p_{2i,i} \leqslant p_{2i-1,i} \leqslant p_{2i,i}$, $|p_{2i-1,i}| \leqslant p_{2i-2,i-1} \leqslant p_{2i-1,i-1}$ для всех $i$, для которых соответствующие элементы схемы определены. Строку $\tilde{p}_k$ $(k = n-2, \ldots, 1)$ можно рассматривать как сигнатуру ограничения представления на соответствующую подгруппу $SO(k+1)$; тогда схеме $\mu$ отвечает (определенный однозначно с точностью до множителя) вектор $e_\mu$, принадлежащий для любого $k = n-2, n-3, \ldots, 1$ подпространству в пространстве $\Phi_\alpha$, в котором ограничение представления $\pi_\alpha$ на подгруппу $SO(k+1)$ кратно неприводимому представлению этой группы с сигнатурой $\{p_{k,1}, \ldots, p_{k,[(k+1)/2]}\}$. Векторы $e_\mu$ образуют ортогональный базис в пространстве $\Phi_\alpha$ представления $\pi_\alpha$, называемый *базисом Гельфанда — Цетлина*. В этом базисе все операторы Лапласа всевозможных подгрупп $SO(k+1)$ $(k = 1, \ldots, n-2)$ диагонализуются одновременно, и каждый вектор базиса Гельфанда — Цетлина однозначно определяется совокупностью собственных значений операторов Лапласа на этом векторе.

Пусть $a_{ik}$ $(i \neq k)$ — кососимметрическая матрица с $(a_{ik})_{ik} = 1$, $(a_{ik})_{ki} = -1$ (остальные элементы — нулевые), рассматриваемая как элемент алгебры Ли $so(n)$ группы $SO(n)$; пусть $I_{ik} = d\pi_\alpha(a_{ik})$ — образ элемента $a_{ik}$ в представлении $\pi_\alpha$. Тогда при надлежащей нормировке векторов $e_\mu$ (удовлетворяющей, в частности, условию ортонормированности системы $\{e_\mu\}$) операторы $I_{pq}$ задаются в базисе $\{e_\mu\}$ косоэрмитовыми матрицами, причем $I_{pq}^{+} = -I_{qp}$, а операторы $I_{2k+1,2k}$ и $I_{2k+2,2k+1}$ определяются формулами

$$I_{2k+1,2k}e_\mu = \sum_{j=1}^{k} A(p_{2k-1,j})\, e_{\mu+\varepsilon_j(2k-1)} - \sum_{j=1}^{k} A(p_{2k-1,j}-1)\, e_{\mu-\varepsilon_j(2k-1)},$$

$$I_{2k+2,2k+1}e_\mu = \sum_{j=1}^{k} B(p_{2k,j})\, e_{\mu+\varepsilon_j(2k)} - \sum_{j=1}^{k} B(p_{2k,j}-1)\, e_{\mu-\varepsilon_j(2k)} + iC_{2k}e_\mu,$$

где $\varepsilon_j(k)$ — таблица вида $\mu$, в которой все числа равны нулю, кроме $j$-го числа в $k$-й строке, равного единице, а коэффициенты разложения определяются формулами

$$A(p_{2k-1,j}) = \left| \frac{\prod_{r=1}^{k-1} (l_{2k-2,r} - l_{2k-1,j} - 1)(l_{2k-2,r} + l_{2k-1,j}) \prod_{r=1}^{k} (l_{2k,r} - l_{2k-1,j} - 1)(l_{2k,r} + l_{2k-1,j})}{2\prod_{r\neq j} (l_{2k-1,r}^2 - l_{2k-1,j}^2)\left[l_{2k-1,r}^2 - (l_{2k-1,j}+1)^2\right]} \right|^{1/2},$$

$$B(p_{2k,j}) = \left| \frac{\prod_{r=1}^{k} \left(l_{2k-1,r}^2 - l_{2k,j}^2\right) \prod_{r=1}^{k+1} \left(l_{2k+1,r}^2 - l_{2k,j}^2\right)}{l_{2k,j}^2 \left(4l_{2k,j}^2 - 1\right) \prod_{r \neq j} \left(l_{2k,r}^2 - l_{2k,j}^2\right) \left[(l_{2k,r} - 1)^2 - l_{2k,j}^2\right]} \right|^{1/2},$$

$$C_{2k} = \frac{\prod_{r=1}^{k} l_{2k-1,r} \prod_{r=1}^{k+1} l_{2k+1,r}}{\prod_{r=1}^{k} l_{2k,r} (l_{2k,r} - 1)},$$

а числа $l_{ij}$ определяются формулами $l_{ij} = p_{ij} + [i/2] - j + 1$.

**5.9. Дифференциальные уравнения для матричных элементов.** Пусть $\pi_\alpha$ — представление группы $SO(n)$ с сигнатурой $\{p_1, \ldots, p_{[n/2]}\}$; пусть $\{e_\mu\}$ — базис Гельфанда — Цетлина, описанный в п. 5.8. Матрицу оператора $\pi_\alpha(g)$ $(g \in SO(n))$ можно представить в виде произведения $\pi_\alpha(g) = \pi_\alpha(g_1)K(\varphi)\pi_\alpha(g_2)$, где $g_1, g_2 \in SO(n-1)$ (здесь $SO(n-1)$ считается вложенной в $SO(n)$ с помощью отображения

$$\omega \to \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega \in SO(n-1),$$

а матрица $K(\varphi)$ соответствует повороту в плоскости $(x_{n-1}, x_n)$ на угол $\varphi$). Обозначим через $K_{p_{n-3}}(\varphi)$ матричный элемент $(K(\varphi)e_\mu, e_\nu)$, где $\mu$ — схема со строками $p_{n-1}, p_{n-2}, p_{n-3}, \ldots, p_2, p_1$, $\nu$ — схема со строками $p_{n-1}, p'_{n-2}, p_{n-3}, \ldots, p_2, p_1$, и строка $p_{n-1} = \{p_{n-1,1}, \ldots, p_{n-1,[n/2]}\}$ совпадает с сигнатурой $\{p_1, \ldots, p_{[n/2]}\}$. Тогда функция $K_{p_{n-3}}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} K_{p_{n-3}}(\varphi) + (n-2) \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} K_{p_{n-3}}(\varphi) +$$
$$+ \cos\varphi \sin^{-2}\varphi \sum_{i=1}^{[(n-2)/2]} \left[\delta_i^+ K_{p_{n-3,i}^+}(\varphi) + \delta_i^- K_{p_{n-3,i}^-}(\varphi)\right] +$$
$$+ [\sin^{-2}\varphi\delta + 2\cos\varphi \sin^{-2}\varphi\eta + \gamma] K_{p_{n-3}}(\varphi) = \rho K_{p_{n-3}}(\varphi),$$

где $p_{n-3,i}^\pm$ получаются из строки $p_{n-3}$ заменой $p_{n-3,i}$ на $p_{n-3,i} \pm 1$, $\rho$ — собственное значение в представлении $\pi_\alpha$ квадратичного оператора Лапласа $\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} A_{jk}^2$ (здесь $A_{jk}$ — инфинитезимальный оператор, соответствующий однопараметрической подгруппе вращений в плоскости $(x_j, x_k)$), так что

$$\rho = -\sum_{j=1}^{m} l_j(l_j - 1) + \frac{m(m^2-1)}{3} \quad \text{при} \quad n = 2m+1,$$

$$\rho = -\sum_{j=1}^{m} l_j^2 + \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} \quad \text{при} \quad n = 2m$$

для $l_j = p_j + [(n-1)/2] - j + 1$ $(j = 1, \ldots, [n/2])$. Постоянные $\delta_i^{\pm}$, $\delta$, $\eta$ и $\gamma$ однозначно определяются коэффициентами таблиц $\mu$ и $\eta$.

**5.10. Разложение ограничения представления группы $SU(n)$ на группу $SO(n)$.** Пусть $\pi_1^k$ — неприводимое представление группы $SU(n)$ с сигнатурой $\{k, 0, \ldots, 0\}$, где $k$ — неотрицательное целое число. Ограничение представления $\pi_1^k$ на подгруппу $SO(n)$ есть сумма неприводимых представлений этой группы с сигнатурами $\{k-2l, 0, \ldots, 0\}$ $(l = 0, 1, \ldots, [k/2])$, входящих в разложение с единичными кратностями. Если реализовать представление $\pi_1^k$ в пространстве $P_k$ однородных комплексных многочленов степени $k$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, то $P_k = H_k \oplus r^2 H_{k-2} \oplus \oplus r^4 H_{k-4} \oplus \ldots$, где $r^2(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, $H_j$ — пространство однородных гармонических многочленов степени $j$ от $x_1, \ldots, x_n$. Каждое из пространств $r^{2l}H_{k-2l}$ инвариантно относительно ограничения $\pi_1^k \,|\, SO(n)$, и в нем действует неприводимое подпредставление с сигнатурой $\{k-2l, 0, \ldots, 0\}$ $(l = 0, 1, \ldots, [k/2])$. Формула в п. 3.17, выражающая любое неприводимое представление $\pi_\alpha$ группы $SO(n)$ через линейную комбинацию с целыми коэффициентами тензорных произведений представлений вида $\pi_1^k$, сводит задачу о разложении представления $\pi_\alpha | SO(n)$ к задаче о тензорных произведениях.

Литература: [11], [20], [37], [70], [104], [129], [211], [284], [302], [387], [436], [444], [500], [555], [607].

Дополнительная литература к гл. 6: [2], [8], [10], [11], [13], [15], [20], [22], [23], [24], [28], [37], [42], [48], [52], [112], [146], [147], [179], [192], [223], [227], [231], [247], [253], [254], [255], [265], [292], [321], [351], [361], [392], [412], [435], [479], [506], [540], [543], [552], [577].

ГЛАВА 7

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ РАЗРЕШИМЫХ И НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ

## § 1. Представления групп аффинных преобразований

**1.1. Неприводимые унитарные представления групп невырожденных аффинных преобразований вещественной прямой.** Пусть $G$ — множество невырожденных аффинных преобразований вещественной прямой, т. е. преобразований $x \to ax+b$ $(x \in \mathbf{R})$, где $a \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ $(b \in \mathbf{R})$. Множество $G$ образует группу Ли относительно операции композиции преобразований, изоморфную группе матриц второго порядка вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbf{R}^*,\ b \in \mathbf{R})$. Пусть $G_0$ — подгруппа индекса два в группе $G$, образованная преобразованиями, сохраняющими ориентацию, т. е. $G_0 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,\ a > 0\right\}$.

Любое неприводимое унитарное представление группы $G_0$ в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентно одному из представлений $\pi_+$, $\pi_-$, $\pi_\alpha$ $(\alpha \in (\mathbf{R}^+)^\wedge)$, определяемых следующим образом:

$$\pi_\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha(a), \tag{1}$$

где $\alpha$ — данный унитарный характер группы $\mathbf{R}^+$, т. е. $\alpha(a) = a^{i\alpha}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$, а представления $\pi_\pm$ реализуются в гильбертовом пространстве измеримых функций вещественного переменного на полупрямой $\mathbf{R}^+ = \{x\colon x \in \mathbf{R},\ x > 0\}$, квадратично интегрируемых по мере $x^{-1}dx$, и определяются формулами

$$[\pi_\pm(g) f](x) = e^{\pm ibx} f(ax), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}^+, x^{-1}dx). \tag{2}$$

Эти представления допускают также реализацию в пространстве $L^2(\mathbf{R})$, построенном по обычной лебеговой мере и связанном с $L^2(\mathbf{R}^+, x^{-1}dx)$ преобразованием Меллина:

$$F(w) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, x^{iw-1} dx, \qquad w \in \mathbf{R}.$$

Представление $\tilde{\pi}_\pm$, эквивалентное представлению $\pi_\pm$ и действующее в $L^2(R)$, задается формулой

$$[\tilde{\pi}_\pm(g)F](w) = \begin{cases} a^{-iw}F(w) \text{ при } b = 0, \\ \dfrac{a^{-iw}}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(iw - z)\left(\mp ba^{-1}i\right)^{z-iw} F(z)\,dz \text{ при } \mp b > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Любое неприводимое унитарное представление группы $G$ в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентно одному из представлений $\pi$, $\pi^\gamma$ $(\gamma \in (\mathbf{R}^*)^\wedge)$, определяемых следующим образом:

$$\pi^\gamma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \gamma(a) = |a|^{i\rho-\varepsilon} a^\varepsilon, \tag{4}$$

где $\rho \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, так что $\gamma$ — унитарный характер группы $\mathbf{R}^*$, а представление $\pi$ реализуется в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R}^*, |x|^{-1}dx)$ измеримых вещественных функций на $\mathbf{R}^*$, квадратично интегрируемых по мере $|x|^{-1}dx$, и определяется формулой

$$[\pi(g)f](x) = e^{ibx} f(ax), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f \in L^2\left(\mathbf{R}^*, |x|^{-1}dx\right). \tag{5}$$

**1.2. Инфинитезимальные операторы неприводимых унитарных представлений групп аффинных преобразований вещественной прямой.** Группы $G_0$ и $G$ имеют одну и ту же алгебру Ли $\mathfrak{g}$, образованную матрицами второго порядка вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; тогда

$$\pi_\alpha(A) = i\alpha, \quad \pi_\alpha(B) = 0;$$

$$\pi_\pm(A) = x(d/dx), \quad \pi_\pm(B) = \pm x; \tag{1}$$

$$\tilde{\pi}_\pm(A) = -w, \quad \tilde{\pi}_\pm(B) = \pm T,$$

где $TF(w) = F(w+1)$ для всех $F \in L^2(\mathbf{R})$ $(w \in \mathbf{R})$, а для представлений группы $G$

$$\pi^\gamma(A) = i\rho, \quad \pi^\gamma(B) = 0, \quad \pi(A) = x(d/dx), \quad \pi(B) = x. \tag{2}$$

**1.3. Ограничения неприводимых унитарных представлений группы $G$ на подгруппу $G_0$.** Ограничение представления $\pi^\gamma$ на $G_0$ совпадает с $\pi_\rho$ (см. (4) и (1) п. 1.1); ограничение представления $\pi$ на $G_0$ изоморфно прямой сумме $\pi_+ \oplus \pi_-$, где соответствующее разложение пространства $H = L^2(\mathbf{R}^*, |x|^{-1}dx)$ в прямую сумму есть разложение $H = H_+ \oplus H_-$, где $H_+$ (соответственно $H_-$) — подпространство в $H$, образованное функциями, равными нулю при $x < 0$ (соответственно $x > 0$).

**1.4. Индуцированные представления группы $G_0$.** Унитарное представление $\pi^\lambda$ группы $G_0$, индуцированное унитарным характером $\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & 1\end{pmatrix} \to e^{i\lambda b}$ $(b \in \mathbf{R})$ нормального делителя $N = \left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\right.$ $\left. b \in \mathbf{R}\right\}$, задается формулой

$$\left[\pi^\lambda(g) f\right](x) = e^{i\lambda x b} f(ax), \quad g = \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}^+, \quad f \in L^2(\mathbf{R}^+, x^{-1}dx). \tag{1}$$

Представление $\pi^\lambda$ $(\lambda > 0)$ эквивалентно представлению $\pi_+$ с помощью отображения $S_\lambda$ (т. е. $\pi^\lambda = S_\lambda \pi_+ S_\lambda^{-1}$), определяемого равенством

$$(S_\lambda f)(x) = f(\lambda x), \quad x \in \mathbf{R}^+, \quad \lambda \in \mathbf{R}^+, \quad f \in L^2(\mathbf{R}^+, x^{-1}dx). \tag{2}$$

Аналогично, представление $\pi^\lambda$ $(\lambda < 0)$ эквивалентно представлению $\pi_-$ с помощью отображения $\tilde{S}_\lambda$ (т. е. $\pi^\lambda = \tilde{S}_\lambda \pi_- \tilde{S}_\lambda^{-1}$), где

$$(\tilde{S}_\lambda f)(x) = f(-\lambda x), \quad x \in \mathbf{R}^+, \quad -\lambda \in \mathbf{R}^+, \quad f \in L^2(\mathbf{R}^+, x^{-1}dx). \tag{3}$$

Унитарное представление $\rho^\sigma$ группы $G_0$, индуцированное унитарным характером $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to a^{i\sigma}$ $(a \in \mathbf{R}^+)$ подгруппы $K = \left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\right.$ $\left. a \in \mathbf{R}^+\right\}$, действует в пространстве $L^2(\mathbf{R})$, построенном по обычной лебеговой мере, и определяется формулой

$$\left[\rho^\sigma(g) f\right](x) = a^{i\sigma - 1/2} f\left(a^{-1}(x + b)\right), \quad g = \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}). \tag{4}$$

Преобразование Фурье

$$f \to \tilde{f}, \quad \tilde{f}(y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx, \quad f, \tilde{f} \in L^2(\mathbf{R}), \quad x, y \in \mathbf{R},$$

переводит представление $\rho^\sigma$ в представление

$$\left[\tilde{\rho}^\sigma(g)\tilde{f}\right](y) = a^{i\sigma + 1/2} e^{-iyb} \tilde{f}(ay), \quad g = \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad y \in \mathbf{R}, \quad \tilde{f} \in L^2(\mathbf{R}). \tag{5}$$

Представление $\tilde{\rho}^\sigma$ эквивалентно (с помощью отображения $\tilde{f} \to (\varphi_1, \varphi_2)$ пространства $L^2(\mathbf{R})$ в прямую сумму пространств $L^2(\mathbf{R}^+, x^{-1}dx)$, определяемого формулой $\varphi_1(x) = x^{i\sigma+1/2}\tilde{f}(x)$ $(x > 0)$; $\varphi_2(-x) = (-x)^{i\sigma+1/2}\tilde{f}(x)$ $(x < 0)$) прямой сумме представлений $\pi_-$ и $\pi_+$ (соответственно действующих по первой и второй компонентам пары $(\varphi_1, \varphi_2)$).

**1.5. Индуцированные представления группы $G$.** Представление $T^{\rho, \varepsilon}$ группы $G$, индуцированное характером $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to |a|^{i\rho - \varepsilon} a^\varepsilon$ $(a \in \mathbf{R}^*, \ \rho \in \mathbf{R}, \ \varepsilon \in \{0, 1\})$ диагональной подгруппы группы $G$, определяется формулой

$$[T^{\rho, \varepsilon}(g) f](x) = |a|^{i\rho - \varepsilon - 1/2} a^\varepsilon f(a^{-1}(x + b)), \qquad f \in L^2(\mathbf{R}); \tag{1}$$

преобразование Фурье переводит это представление в представление $S$ группы $G$ в $L^2(\mathbf{R})$, определяемое формулой

$$[S(g)\varphi](\lambda) = |a|^{i\rho-\varepsilon-1/2}a^{\varepsilon+1}e^{-i\lambda b}\varphi(a, \lambda), \quad \varphi \in L^2(\mathbf{R}). \tag{2}$$

Представление $S$ эквивалентно (с помощью соответствия $\varphi(\lambda) = |\lambda|^{-i\rho+\varepsilon+1/2}\lambda^{-(\varepsilon+1)}\psi(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbf{R}^*,\ \psi \in L^2(\mathbf{R}^*, |\lambda|^{-1}d\lambda)))$ представлению $R'$, заданному равенством

$$(R'(g)\psi)(\lambda) = e^{-i\lambda b}\psi(a\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{R}^*, \quad \psi \in L^2(\mathbf{R}^*, |\lambda|^{-1}d\lambda). \tag{3}$$

Представление $R'$ эквивалентно представлению $\pi$ (см. п. 1.1) с помощью замены переменной $x \to -x$.

Кроме того, представления группы $G$, индуцированные нетривиальными характерами нормального делителя $N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbf{R}\right\}$, унитарно эквивалентны представлению $\pi$ (ср. (1) — (3) п. 1.4).

**1.6. Правые регулярные представления групп $G_0$ и $G$.** Правая (соответственно левая) мера Хаара на группе $G_0$ имеет вид $d\mu_r(g) = \frac{da\,db}{a}$ (соответственно $d\mu_l(g) = \frac{da\,db}{a^2}$) при $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_0$.

Аналогично, правая (соответственно левая) мера Хаара на группе $G$ имеет вид $d\mu_r(g) = \frac{da\,db}{|a|}$ (соответственно $d\mu_l(g) = \frac{da\,db}{a^2}$), где $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

Правое регулярное представление группы $G_0$ действует в пространстве $L^2(G_0, d\mu_r)$ по формуле

$$[R_0(g_0)f](g) = f(gg_0), \quad f \in L^2(G_0, d\mu_r), \quad g, g_0 \in G_0. \tag{1}$$

Отображение $J$: $f \to \varphi$ пространства $L^2(G_0, d\mu_r)$ в прямой интеграл $L^2(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}))$ гильбертовых пространств $L^2(\mathbf{R})$ по пространству $\mathbf{R}$ с лебеговой мерой определим формулой

$$\varphi_\sigma(y) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty f(t, ty)\, t^{-i\sigma-1/2}dt, \tag{2}$$

где

$$f(a, b) = f(g) \text{ при } g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f \in L^2(G_0, d\mu_r). \tag{3}$$

Отображение $J$ изометрично, т. е.

$$\|f\|^2_{L^2(G, d\mu_r)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\varphi_\sigma\|^2_{L^2(\mathbf{R})}d\sigma. \tag{4}$$

При этом

$$(JR_0(g_0)f)_\sigma = \rho^\sigma(g_0)(Jf)_\sigma, \tag{5}$$

т. е. формулы (2), (3) определяют разложение представления $R_0$

в прямой интеграл рассмотренных выше представлений $\rho^\sigma$. Формула

$$f(g)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\sigma\left(ba^{-1}\right)a^{i\sigma-1/2}d\sigma,$$
$$g=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \varphi\in L^2(\mathbf{R},\,L^2(\mathbf{R})),\tag{6}$$

определяет отображение, обратное отображению $J$.

Аналогично, правое регулярное представление $R$ группы $G$ действует в пространстве $L^2(G,\,d\mu_r)$ по формуле, аналогичной (1), и отображение $I$: $f\to\varphi$ пространства $L^2(G,\,d\mu_r)$ на прямой интеграл $L^2((\mathbf{R}^*)^\wedge,\,L^2(\mathbf{R}))$, заданное равенством

$$\varphi_{\rho,\varepsilon}(y)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_0^\infty f(t,\,ty)\,|\,t\,|^{-i\rho-\varepsilon-1/2}t^\varepsilon dt,$$
$$f\in L^2(G,\,d\mu_r),\tag{7}$$

осуществляет разложение представления $R$ в прямой интеграл рассмотренных в п. 1.5 представлений $T^{\rho,\,\varepsilon}$.

**1.7. Представления групповой алгебры и формула Планшереля.** Пусть $L^1(G_0)$ — групповая алгебра группы $G_0$, построенная по правоинвариантной мере $d\mu_r$; пусть $\varphi\in L^1(G_0)$. Тогда для представлений групповой алгебры имеем

$$\left[\pi_\pm^r(\varphi)\,f\right](x)=\iint\limits_{a>0}\varphi(a,\,b)\,e^{\pm ibx}f(ax)\frac{da\,db}{a}=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}\widehat{\varphi}_{\text{II}}\left(tx^{-1},\,\pm x\right)f(t)\,t^{-1}dt,\tag{1}$$

где $\widehat{\varphi}_{\text{II}}$ — функция, получаемая из функции $\varphi$ преобразованием Фурье по второй переменной. Таким образом, $\pi_\pm^r(\varphi)$ — интегральные операторы в $L^2(\mathbf{R}^+,\,x^{-1}dx)$ с ядрами

$$K_\pm(t,\,x)=\widehat{\varphi}_{\text{II}}(tx^{-1},\,\pm x),\quad x,\,t\in\mathbf{R}^+.\tag{2}$$

Для $\varphi\in L^1(G)\cap L^2(G)$ имеет место формула

$$\|\varphi\|^2_{L^2(G,d\mu_r)}=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty(|\,K_+(t,\,x)\,|^2+|\,K_-(t,\,x)\,|^2)\,t^{-1}dt\,dx,\tag{3}$$

или

$$\iint\limits_{a>0}|\,\varphi(a,\,b)\,|^2a^{-1}da\,db=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty(|\,K_+\,|^2+|\,K_-\,|^2)\,t^{-1}dt\,dx,\tag{4}$$

являющаяся аналогом формулы Планшереля. Другим аналогом формулы Планшереля является формула

$$\|\varphi\|^2_{L^2(G,d\mu_l)}=$$
$$=\iint\limits_{a>0}|\,\varphi(a,\,b)\,|^2a^{-2}da\,db=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty(|\,\widetilde{K}_+\,|^2+|\,\widetilde{K}_-\,|^2)\,x^{-1}dt\,dx,\tag{5}$$

где

$$\tilde{K}_{\pm}(t,\ x)=xt^{-1}\hat{\varphi}_{\text{II}}(tx^{-1},\ \pm x)=xt^{-1}K_{\pm}(t,\ x),\qquad x,\ t\in\mathbf{R}^{+},\qquad (6)$$

т. е. $\tilde{K}_{\pm}$ — ядра интегральных операторов $\pi_{\pm}^{l}(\varphi)$, отвечающих элементу $\varphi$ групповой алгебры, построенной по левоинвариантной мере Хаара.

Аналогично, «левая» формула Планшереля для группы $G$ имеет вид

$$\int\int|f|^2|a|^{-2}da\,db=\int\int|\tilde{K}|^2|x|^{-1}dt\,dx,\qquad (7)$$

где

$$\tilde{K}(t,\ x)=|x|\,|t|^{-1}\hat{f}_{\text{II}}(tx^{-1},\ x),\qquad x,\ t\in\mathbf{R}^{*},\qquad (8)$$

а «правая» формула имеет вид

$$\int\int|f|^2|a|^{-1}da\,db=\int\int|K|^2|t|^{-1}dt\,dx,\qquad (9)$$

где

$$K(t,\ x)=\hat{f}_{\text{II}}(tx^{-1},\ x),\qquad x,\ t\in\mathbf{R}^{*}.\qquad (10)$$

Отметим, что операторы $\pi_{\pm}^{r}(\varphi)$ вполне непрерывны тогда и только тогда, когда

$$\int_{a>0}\varphi(a,\ b)\,a^{i\alpha-1}da\,db=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}_{\text{I}}(0,\ b)\,db=0,$$

где $\hat{\varphi}_{\text{I}}$ — преобразование Меллина по первому аргументу функции $\varphi$. Аналогичное условие имеет место для $\varphi\in L^1(G,\ d\mu_l)$, а также для представления $\pi$ группы $G$.

**1.8. Орбиты Кириллова.** Группа $G_0$ связна и односвязна. Реализуем сопряженное к $\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \alpha,\beta\in\mathbf{R}\right\}$ пространство $\mathfrak{g}'$ как пространство матриц вида $\left\{\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ \delta & 0\end{pmatrix},\quad \gamma,\delta\in\mathbf{R}\right\}$, так что $f(t)=\operatorname{tr}(tf)$ для $t\in\mathfrak{g}$, $f\in\mathfrak{g}'$. Действие группы $G_0$ в $\mathfrak{g}'$, сопряженное к присоединенному, определяется формулой

$$g\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ \delta & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma+a^{-1}b\delta & 0\\ a^{-1}\delta & 0\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\qquad (1)$$

Соответствующие орбиты (см. пп. 2.4, 2.5 гл. 5) бывают двух родов: а) точки вида $\delta=0$; б) полупространства $\delta>0$ и $\delta<0$.

Точке $\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $(\gamma\in\mathbf{R})$ соответствует функционал $f_\gamma(\alpha,\ \beta)=\gamma\alpha$; стабилизатор функционала $f_\gamma$ есть вся группа $G$; формула $(\alpha,\ \beta)\to\gamma\alpha$ есть одномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, экспонента которого есть представление $\pi_\gamma$ (см. (1) п. 1.1).

Точка $\gamma=0$, $\delta=1$ принадлежит орбите $\Omega_{+}=\left\{\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ \delta & 0\end{pmatrix},\quad \delta>0\right\}$. Стабилизатор этой точки состоит лишь из единицы. Пусть $\mathfrak{n}=$

$= \left\{\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbf{R}\right\}$; тогда $\mathfrak{n}$ — абелев идеал Ли в $\mathfrak{g}$, так что если $F_+$ — функционал на $\mathfrak{g}$, отвечающий $\gamma = 0$, $\delta = 1$, то $F_+([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]) = 0$. С другой стороны, аннулятор $\mathfrak{n}^\perp$ идеала $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}'$ состоит из матриц вида $\left\{\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbf{R}\right\}$, так что $F_+ + \mathfrak{n}^\perp \subset \Omega_+$. Представление, индуцированное представлением группы $N = \exp \mathfrak{n}$, действующим по формуле

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \exp \left( iF_+ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = e^{ib},$$

и есть представление $\pi_+$.

Симплектическая форма $B_\Omega$ на орбите $\Omega_+$ есть $d\gamma\, d\delta - d\delta\, d\gamma$. Орбита $\Omega_+$ стягиваема, поэтому форма $B_\Omega^+$ целочисленна (нулевая на нулевом цикле).

Точка $\gamma = 0$, $\delta = -1$ аналогичным образом приводит к представлению $\pi_-$.

**1.9. Квадратично интегрируемые представления.** Представления $\pi_\alpha$ не являются квадратично интегрируемыми представлениями группы $G_0$. Представления $\pi_\pm$ являются подпредставлениями регулярного представления (см. пп. 1.4, 1.6), т. е. квадратично интегрируемы. Аналогично, $\pi$ — единственное (с точностью до унитарной эквивалентности) квадратично интегрируемое неприводимое унитарное представление группы $G$.

**1.10. Аналог теоремы типа Пэли — Винера.** Пусть $L^1(G_0, d\mu_r)$ — групповая алгебра, построенная по правоинвариантной мере Хаара, пусть $\varphi \in L^1(G_0, d\mu_r)$, и пусть операторы $\pi_\pm^r(\varphi)$ определены формулой (1) п. 1.7, где представления $\pi_\pm$ реализованы по формуле (2) п. 1.1 (так что элемент $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ переходит в представлении $\pi_\pm$ в оператор умножения на функцию $e^{ibx}$ $(x > 0)$). Пусть $K_\pm$ — ядра интегральных операторов $\pi_\pm(\varphi)$ (см. (2) п. 1.7). Тогда функция $\varphi$ является финитной и бесконечно дифференцируемой функцией в том и только в том случае, если функция $\psi(t, x)$, равная $K_+(tx, x)$ при $x > 0$, $t > 0$ и $K_-(-tx, -x)$ при $x < 0$, $t > 0$, допускает продолжение до финитной по $t$, $t^{-1}$ бесконечно дифференцируемой функции, допускающей при каждом $t$ аналитическое продолжение по $x$ до целой аналитической функции, причем эти продолжения быстро убывают на вещественной оси и имеют экспоненциальный тип, ограниченный в совокупности.

**1.11. Неприводимые унитарные представления группы аффинных преобразований комплексной прямой.** Пусть $G_{\mathbf{C}}$ — группа невырожденных аффинных преобразований комплексной прямой, т. е. преобразований $z \to az + b$ $(z \in \mathbf{C})$, где $a \in \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ $(b \in \mathbf{C})$, изоморфная группе матриц второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbf{C}^*$, $b \in \mathbf{C})$. Любое неприводимое унитарное представление группы $G_{\mathbf{C}}$ эквивалентно одному из представлений $\sigma$, $\sigma_{m,\rho}$ $(m \in \mathbf{Z}$, $\rho \in \mathbf{R})$, определяемых следующим образом:

$$\sigma_{m,\rho}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |a|^{i\rho-m}a^m, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad \rho \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

а представление $\sigma$ реализуется в гильбертовом пространстве измеримых функций комплексного переменного $z \in \mathbf{C}$, квадратично интегрируемых по мере $(x^2 + y^2)^{-1}dx\,dy$, где $z = x + iy$, и определяется формулой

$$[\sigma(g)f](z) = e^{i\mathrm{Re}(bz)}f(az), \quad f \in L^2(\mathbf{C},(x^2 + y^2)^{-1}dx\,dy). \tag{2}$$

**1.12. Индуцированные представления группы $G_\mathbf{C}$.** Унитарные представления $T^{\rho,m}$ группы $G_\mathbf{C}$ индуцированные характерами диагональной подгруппы $A = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbf{C}^*\right\}$ вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to |a|^{i\rho-m}a^m$, действуют в $L^2(\mathbf{C})$ по формуле

$$\left[T^{\rho,m}(g)f\right](z) = |a|^{i\rho-m-1}a^m f\left(a^{-1}(z+b)\right), \quad f \in L^2(\mathbf{C}), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

преобразование Фурье переводит это представление в представление $S$ в пространстве $L^2(\mathbf{C})$:

$$[S(g)\varphi](z) = |a|^{i\rho-m-1}a^m e^{-i\mathrm{Re}(b\lambda)}\varphi(a\lambda),$$

$$\varphi \in L^2(\mathbf{C}), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

представление $S$ эквивалентно представлению $Q$ в $L^2(\mathbf{C}^*, |z|^{-2}dz)$ (где $|z|^{-2}dz = (x^2 + y^2)^{-1}dxdy$), определяемому формулой

$$[Q(g)\psi](\lambda) = e^{-i\mathrm{Re}(b\lambda)}\psi(a\lambda), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{C}^*,$$

$$\psi \in L^2\left(\mathbf{C}^*, |z|^{-2}dz\right); \tag{3}$$

эквивалентность устанавливается с помощью соответствия $\varphi \to \psi$, определяемого равенством $\varphi(\lambda) = |\lambda|^{-i\rho+m-1}\lambda^{-m}\psi(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbf{C}^*)$. Представление $Q$ эквивалентно $\sigma$ (см. п. 1.11) заменой независимой переменной $\lambda \to -\lambda$.

**1.13. Правое регулярное представление группы $G_\mathbf{C}$.** Правая (соответственно левая) мера Хаара на группе $G_\mathbf{C}$ имеет вид

$$d\mu_r(g) = \frac{da\,db}{|a|^2} = \frac{da_1\,da_2\,db_1\,db_2}{a_1^2 + a_2^2},$$

где $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ $\left(\text{соответственно } d\mu_l(g) = \dfrac{da\,db}{|a|^4}\right)$ при $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Правое регулярное представление группы $G_\mathbf{C}$ действует в пространстве $L^2(G, d\mu_r)$ по формуле

$$[R_\mathbf{C}(g_0)f](g) = f(gg_0), \quad f = L^2(G_\mathbf{C}, d\mu_r), \quad g, g_0 \in G_\mathbf{C}. \tag{1}$$

Положим

$$\varphi(a, b) = f(g) \text{ при } g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f \in L^2(G_{\mathbf{C}}, d\mu_r); \tag{2}$$

тогда $\varphi \in L^2(\mathbf{C}^2, |a|^{-2} da\, db)$. Отображение $K\colon f \to \psi$ пространства $L^2(G, d\mu_r)$ на прямой интеграл $L^2(\widehat{\mathbf{C}}^*, L^2(\mathbf{C}))$ гильбертовых пространств $L^2(\mathbf{C})$ по пространству $\widehat{\mathbf{C}}^* = \{(m, \rho), m \in \mathbf{Z}, \rho \in \mathbf{R}\}$ с лебеговой мерой, определяемое формулой

$$\psi_{m,\rho}(y) = \int\limits_{\mathbf{C}} \varphi(t, ty) \, |t|^{-i\rho+m-1} \check{t}^{-m} dt \tag{3}$$

($dt = dt_1 dt_2$ при $t = t_1 + it_2$), где $\varphi$ определяется равенством (2), изометрично, т. е.

$$\|f\|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\psi_{m,\rho}\|^2 d\rho,$$

и определяет разложение представления $R_{\mathbf{C}}$ в прямой интеграл представлений $T^{\rho,m}$ (см. п. 1.12).

**1.14. Формулы Планшереля для $G_{\mathbf{C}}$.** Преобразование Фурье на группе $G_{\mathbf{C}}$, связанное с правоинвариантной мерой, определяется для $\varphi \in L^1(G, d\mu_r)$ формулой

$$\left[\sigma^r(\varphi) f\right](z) = \int\int \varphi(a, b)\, e^{i\operatorname{Re}(bz)} f(az) \, |a|^{-2} da\, db =$$
$$= \int \widehat{\varphi}_{\text{II}}(tz^{-1}, z) f(t) \, |t|^{-2} dt, \tag{1}$$

где $\widehat{\varphi}_{\text{II}}$ — преобразование Фурье функции $f$ по второму аргументу, так что $\sigma^r(\varphi)$ — интегральный оператор в $L^2(\mathbf{C}^*, |t|^{-2} dt)$ с ядром

$$K(t, z) = \widehat{\varphi}_{\text{II}}(tz^{-1}, z), \quad t, z \in \mathbf{C}^*. \tag{2}$$

Для $\varphi \in L^1(G, d\mu_r) \cap L^2(G, d\mu_r)$ имеет место формула Планшереля

$$\|\varphi\|^2_{L^2(G, d\mu_r)} = \int\limits_{\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*}\int |K(t, z)|^2 \, |t|^{-2} dt\, dz. \tag{3}$$

Другим аналогом формулы Планшереля является формула

$$\|\varphi\|^2_{L^2(G, d\mu_l)} = \int\limits_{\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*}\int |\widetilde{K}(t, z)|^2 \, |z|^{-2} dt\, dz, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{K}(t,z) = |z|^2 |t|^{-2} \widehat{f}_{\text{II}}(tz^{-1}, z) = |zt^{-1}|^2 K(t,z), \quad t, z \in \mathbf{C}^*. \tag{5}$$

**1.15. Тензорные произведения неприводимых унитарных представлений групп аффинных преобразований.** Эти тензорные произведения устроены исключительно просто. Тензорное произведение одномерных представлений есть произведение характеров; тензорное произведение одномерного и бесконечномерного представлений эквивалентно бесконечномерному сомножителю; $\sigma \otimes \sigma$

кратно $\sigma$; $\pi\otimes\pi$ кратно $\pi$; $\pi_+\otimes\pi_+$ кратно $\pi_+$; $\pi_-\otimes\pi_-$ кратно $\pi_-$, а $\pi_+\otimes\pi_-$ кратно $\pi_+\oplus\pi_-$, и все кратные бесконечны.

Литература: [15], [52], [66], [81], [277].

## § 2. Представления группы движений плоскости

**2.1. Неприводимые унитарные представления группы движений плоскости.** Пусть $G$ — группа движений (т. е. преобразований, сохраняющих расстояние и ориентацию) плоскости. Группа $G$ естественно изоморфна группе матриц вида

$$g(\alpha, a, b)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & a\\ \sin\alpha & \cos\alpha & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \alpha,a,b\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

а также группе матриц вида

$$\tilde{g}(\alpha, z)=\begin{pmatrix}e^{i\alpha} & z\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \alpha\in\mathbf{R},\quad z=a+ib\in\mathbf{C} \tag{2}$$

Любое неприводимое унитарное представление группы $G$ эквивалентно одному из представлений: $\pi_\rho$ $(\rho>0)$ или $\sigma_n$ $(n\in\mathbf{Z})$, определяемых формулами

$$\sigma_n(\tilde{g}(\alpha, z))=e^{i\alpha n},\qquad \alpha\in\mathbf{R},\quad z\in\mathbf{C}, \tag{3}$$

а представления $\pi_\rho$ $(\rho>0)$ действуют в гильбертовом пространстве $L^2(S^1)$ (построенном по обычной лебеговой мере на окружности) и определяются формулой

$$\left[\pi_\rho(\tilde{g}(\alpha, z))f\right](e^{i\varphi})=e^{i\rho\operatorname{Re}(ze^{i\varphi})}f\left(e^{i(\varphi-\alpha)}\right), \tag{4}$$
$$\alpha,\varphi\in\mathbf{R},\quad z\in\mathbf{C},\quad f\in L^2(S^1).$$

Инфинитезимальные операторы представления $\pi_\rho$, отвечающие подгруппе сдвигов, суть операторы умножения на функцию. А именно, инфинитезимальный оператор подгруппы $b=\alpha=0$ есть оператор умножения на $i\rho\cos\varphi$, а подгруппы $a=\alpha=0$ — оператор умножения на $i\rho\sin\varphi$. Инфинитезимальный оператор представления $\pi_\rho$, отвечающий подгруппе $a=b=0$, есть дифференциальный оператор $(-d/d\varphi)$.

Матричные элементы представления $\pi_\rho$ в ортонормированном базисе $f_n(e^{i\varphi})=e^{in\varphi}$ $(n\in\mathbf{Z})$ определяются равенством

$$(\pi_\rho(\tilde{g}(\alpha,z))f_n,\ f_m)=i^{n-m}e^{-in\alpha}(z/|z|)^{n-m}J_{n-m}(\rho|z|), \tag{5}$$

где $J_k$ — функция Бесселя индекса $k$.

**2.2. Квазирегулярное представление группы $G$.** Пусть $\lambda$ — унитарное представление группы $G$ в $L^2(\mathbf{C})$, определяемое формулой

$$[\lambda(\tilde{g}(\alpha, z))f](w)=f(e^{i\alpha}w+z),$$
$$\alpha\in\mathbf{R},\quad z,\ w\in\mathbf{C},\quad f\in L^2(\mathbf{C}). \tag{1}$$

Преобразование Фурье в $L^2(\mathbf{C})$ переводит это представление в представление $\hat{\lambda}$ группы $G$ в $L^2(\mathbf{C})$, определяемое формулой

$$[\hat{\lambda}(\tilde{g}(\alpha, z))\varphi](w) = e^{i\,\mathrm{Re}\,(zw)}\varphi(we^{-i\alpha}),$$
$$\alpha \in \mathbf{R}, \quad z,w \in \mathbf{C}, \ \varphi \in L^2(\mathbf{C}) \tag{2}$$

(ср. (2) п. 1.10 § 1). Пусть $H_\rho$ $(\rho > 0)$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций на окружности $|w| = \rho$ с нормой

$$\|\psi\|_\rho^2 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} |\psi(\rho e^{it})|^2 dt, \quad \psi \in H_\rho.$$

Тогда формула

$$\varphi(\rho e^{it}) = \varphi_\rho(e^{it}), \quad \rho > 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \varphi \in L^2(\mathbf{C}), \tag{3}$$

определяет отображение пространства $L^2(\mathbf{C})$ в прямой интеграл $2\pi\int_0^\infty \oplus H_\rho \rho\, d\rho$ гильбертовых пространств $H_\rho$ $(\rho > 0)$. Композиция преобразования Фурье и отображения, определяемого формулой (3), определяет разложение квазирегулярного представления $\lambda$ в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений $\pi_\rho$ $(\rho > 0)$ (см. п. 2.1); в частности,

$$\int_{\mathbf{C}} |f(w)|^2 dw = 2\pi\int_0^\infty \|\hat{f}_\rho\|^2 \rho\, d\rho. \tag{4}$$

**2.3. Разложение регулярного представления и формула Планшереля.** Группа $G$ унимодулярна; инвариантная мера (в параметризации (1), (2) п. 2.1) имеет вид $d\mu(g) = d\alpha\, da\, db = d\alpha\, dz$. Левое регулярное представление группы $G$ действует в гильбертовом пространстве $L^2(G)$ по формуле

$$[L(g_0)f](g) = f(g_0^{-1}g), \quad f \in L^2(G), \quad g, g_0 \in G. \tag{1}$$

Пусть $\psi \in L^1(G)$; тогда образ функции $\psi$ в представлении групповой алгебры, отвечающем представлению $\pi_\rho$ $(\rho > 0)$, есть интегральный оператор в $L^2(S^1)$ с ядром

$$K_\rho(e^{i\varphi}, e^{i\chi}) = \hat{\psi}_{\mathrm{II}}(e^{i(\varphi-\psi)}, \rho e^{i\varphi}), \quad \varphi, \chi \in \mathbf{R}, \ \rho > 0, \ \psi \in L^1(G), \tag{2}$$

где положено $\psi(e^{i\alpha}, z) = \psi(\tilde{g}(\alpha, z))$ $(\alpha \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{C})$, а $\hat{\psi}_{\mathrm{II}}$ — преобразование Фурье функции $\psi$ по второму аргументу. Таким образом,

$$[\pi_\rho(\psi)f](e^{i\varphi}) = \int K_\rho(e^{i\varphi}, e^{i\chi}) f(e^{i\chi})\, d\chi, \quad f \in L^2(S^1), \tag{3}$$

операторы $\pi_\rho(\psi)$ $(\psi \in L^1(G))$ вполне непрерывны, а для $C^2$-гладких функций $\psi$ ядерны. Формула

$$\int_G |\psi(e^{i\alpha}, z)|^2 d\alpha\, dz = \int_0^{+\infty} \operatorname{tr}(\pi_\rho(\psi)^* \pi_\rho(\psi))\, \rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} |K_\rho(e^{i\varphi}, e^{i\psi})|^2 \rho\, d\varphi\, d\psi\, d\rho, \quad (4)$$

справедливая для всех функций $\psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$, является аналогом формулы Планшереля. Отображение, сопоставляющее функции $f \in L^2(G)$ двустороннюю последовательность $\{f_n,\ n \in \mathbf{Z}\}$ функций из $L^2(\mathbf{C})$, определяемое формулой

$$f_n(z) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(\tilde{g}(e^{i\alpha}, z))\, e^{-in\alpha} d\alpha, \quad (5)$$

определяет унитарный оператор из $L^2(G)$ на гильбертову прямую сумму $\oplus \sum_{n=-\infty}^{+\infty} L^2(\mathbf{C})$, переводящий регулярное представление в прямую сумму представлений, эквивалентных квазирегулярному представлению. А именно, преобразование Фурье квазирегулярного представления (см. (2) п. 2.2) эквивалентно преобразованию Фурье представления, определяемого регулярным представлением группы $G$ в пространстве функций вида $f_n$ (см. (5)) при данном $n \in \mathbf{Z}$ (с помощью оператора умножения на $n$-ю степень показательной части комплексного независимого переменного).

**2.4. Орбиты Кириллова.** Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$ (рассматриваемой как группа матриц вида (2) п. 2.1) с алгеброй Ли матриц вида $\begin{pmatrix} i\alpha & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbf{R},\ w \in \mathbf{C})$, а пространство $\mathfrak{g}'$, сопряженное к $\mathfrak{g}$, отождествим с пространством матриц вида $\begin{pmatrix} -i\beta & 0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ $(\beta \in \mathbf{R},\ \omega \in \mathbf{C})$, так что $f(t) = \operatorname{Re} \operatorname{tr}(tf)$ для $t \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}'$. Действие группы $G$ в $\mathfrak{g}'$, сопряженное к присоединенному, определяется формулой

$$g\begin{pmatrix} -i\beta & 0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\beta - i\operatorname{Im}(z\omega e^{-i\varphi}) & 0 \\ \omega e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \tilde{g}(\varphi, z). \quad (1)$$

В связи с этим орбиты бывают двух родов: а) точки $O^\beta$ вида $\begin{pmatrix} -i\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) двумерные многообразия $O_\rho$ вида $S^1 \times \mathbf{R}$, состоящие из точек вида $\begin{pmatrix} -i\beta & 0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ с заданным модулем $|\omega| = \rho$ и произвольным $\beta$.

Точке $O^\beta$ $(\beta \in \mathbf{R})$ соответствует функционал $f^\beta(\alpha, w) = \alpha\beta$, стабилизатор функционала $f^\beta$ есть вся группа $G$, форма $B_{f^\beta}$ тождественно равна нулю, и соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть $f^\beta$; это представление одномерно. Так как группа $G$

неодносвязна, то не все представления $f^\beta$ экспоненциируются до представлений группы $G$, а именно, $f^\beta$ есть дифференциал представления группы $G$ тогда и только тогда, когда $\beta$ есть целое кратное $2\pi$.

Точка $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho & 0 \end{pmatrix}$ $(\rho > 0)$ принадлежит орбите $O_\rho$ и определяет функционал

$$F_\rho\left(\begin{pmatrix} i\alpha & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \rho \operatorname{Re} w, \quad \alpha \in \mathbf{R}, w \in \mathbf{C}.$$

Стабилизатор функционала $F_\rho$ состоит из точек вида $\begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ с чисто мнимым $w$. Пусть $\mathfrak{n} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, w = \mathbf{C}\right\}$. Подалгебра Ли $\mathfrak{n}$ допустима, так как $\operatorname{codim} \mathfrak{n} = {}^1/_2 \dim O_\rho = 1$, и аннулятор $\mathfrak{n}^\perp$ идеала $\mathfrak{n}$ состоит из точек вида $\begin{pmatrix} i\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\beta \in \mathbf{R})$, лежащих в $O_\rho$, причем $F_\rho + \mathfrak{n}^\perp \subset O_\rho$. Формула

$$\begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \rho \operatorname{Re} w, \qquad w \in \mathbf{C},$$

задает представление алгебры Ли $\mathfrak{n}$; экспоненциируя, получаем представление

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to e^{i\rho \operatorname{Re} z}, \qquad z \in \mathbf{C},$$

подгруппы сдвигов $\{\tilde{g}(\alpha, z), \alpha = 0, z \in \mathbf{C}\}$. Индуцированное этим представлением представление группы $G$ совпадает с $\pi_\rho$.

Симплектическая форма $B_\Omega$ на орбите $O_\rho$ определяется формулой

$$B_\Omega(F)(\xi_X(F), \xi_Y(F)) = (F, [X, Y]) = \rho(d\beta\, d \operatorname{Im} w - d \operatorname{Im} w\, d\beta).$$

Орбита $O_\rho$ стягивается в окружность и, таким образом, не содержит нетривиальных 2-циклов. Следовательно, форма $B_\Omega$ заведомо целочисленна.

Квадратично интегрируемых неприводимых унитарных представлений у группы $G$ нет.

**2.5. Тензорное произведение неприводимых унитарных представлений группы движений плоскости.** Очевидно, что $\sigma_n \otimes \sigma_m = \sigma_{n+m}$. Кроме того, тензорное произведение $\sigma_n \otimes \pi_\rho$ эквивалентно $\pi_\rho$. Наконец, тензорное произведение $\pi_{\rho_1} \otimes \pi_{\rho_2}$ разлагается в (двукратный) прямой интеграл неприводимых представлений $\pi_\rho$, где $\rho$ удовлетворяет условию $\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos\mu$ $(0 \leqslant \mu \leqslant 2\pi)$. Точнее, пусть представление $\pi_{\rho_1} \otimes \pi_{\rho_2}$ реализовано в гильбертовом пространстве $L^2(S^1 \times S^1)$ функций $f$ по формуле

$$\left[\pi_{\rho_1} \otimes \pi_{\rho_2} (\tilde{g}(\alpha, z)) f\right] \left(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}\right) = e^{i\left\{\rho_1 \operatorname{Re}\left(ze^{i\varphi_1}\right) + \rho_2 \operatorname{Re}\left(ze^{i\varphi_2}\right)\right\}} f\left(e^{i(\varphi_1 - \alpha)}, e^{i(\varphi_2 - \alpha)}\right), \quad (1)$$

где $f \in L^2(S^1 \times S^1)$, $\alpha, \rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{C}$.

Представление $\pi_{\rho_1} \otimes \pi_{\rho_2}$ эквивалентно представлению $\tau$ в $L^2(S^1 \times S^1)$, определенному формулой

$$[\tau(\tilde{g}(\alpha, z))\psi](e^{i\varphi}, e^{i\mu}) = e^{i\operatorname{Re} z(\rho_1+\rho_2 e^{i\mu})e^{i\varphi}}\psi(e^{i(\varphi-\alpha)}, e^{i\mu}), \qquad (2)$$

где $\psi \in L^2(S^1 \times S^1)$, $\varphi, \psi, \alpha, \rho_1, \rho_2 \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{C}$, с помощью отображения $f \to \varphi$, определенного соотношением

$$\psi(e^{i\varphi}, e^{i\mu}) = f(e^{i\varphi}, e^{i(\varphi+\mu)}), \quad \varphi, \mu \in \mathbf{R}, \quad \psi, f \in L^2(S^1 \times S^1). \qquad (3)$$

Представление $\tau$ (см. (2)) разлагается в прямой интеграл (по $\mu \in [0, 2\pi]$ с лебеговой мерой) представлений, соответствующих точкам $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho_1 + \rho_2 e^{i\mu} & 0 \end{pmatrix}$ пространства $\mathfrak{g}'$ (см. п. 2.4), эквивалентных, таким образом, представлениям вида (4) п. 2.1 с $\rho = |\rho_1 + \rho_2 e^{i\mu}|$. А именно, представление $\tilde{\pi}$ группы $G$ в $L^2(S^1)$, определяемое формулой

$$[\tilde{\pi}(\tilde{g}(\alpha, z)) f](e^{i\varphi}) = e^{i\operatorname{Re} z(\rho_1+\rho_2 e^{i\mu})e^{i\varphi}} f(e^{i(\varphi-\alpha)}), \qquad f \in L^2(S^1),$$

где $\alpha, \varphi, \rho_1, \rho_2, \mu \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{C}$, эквивалентно представлению $\pi_\rho$ ($\rho > 0$, $\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos\mu$) с помощью внутреннего автоморфизма вида $g \to g_\beta^{-1} g g_\beta$, где $g_\beta = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ с $e^{i\beta} = (\rho_1 + \rho_2 e^{i\mu})\rho^{-1}$.

Литература: [52], [144], [413], [414], [524], [525], [597], [598].

## § 3. Представления групп Гейзенберга

**3.1. Неприводимые унитарные представления групп Гейзенберга.** Пусть $G$ — нильпотентная группа Ли верхних треугольных матриц вида

$$g(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1_n & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $a$ — $n$-мерная вещественная вектор-строка, $c$ — $n$-мерный вещественный вектор-столбец, $b \in \mathbf{R}$, $1_n$ — единичная матрица порядка $n$. Любое неприводимое унитарное представление группы $G$ эквивалентно одному из представлений $\chi_{\alpha,\gamma}$, где $\alpha$ — $n$-мерный вещественный вектор-столбец, $\gamma$ — $n$-мерная вещественная вектор-строка, или представлений $\pi_\lambda$ ($\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$), определяемых следующим образом:

$$\chi_{\alpha,\gamma}(g(a,b,c)) = e^{i(a\alpha+\gamma c)}, \qquad g(a,b,c) \in G, \qquad (2)$$

где $a\alpha$ и $\gamma c$ понимаются как произведения матриц, а представления $\pi_\lambda$ ($\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$) действуют в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R}^n)$, построенном по обычной лебеговой мере в пространстве вещественных $n$-вектор-строк, по формуле

$$[\pi_\lambda(g)f](x) = e^{i\lambda(b+xc)}f(x+a), \quad g = g(a,b,c), \quad x,a \in \mathbf{R}^n,$$
$$c \in (\mathbf{R}^n)', \quad b, \lambda \in \mathbf{R}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}^n). \tag{3}$$

Инфинитезимальные операторы представления $\pi_\lambda$, отвечающие подгруппе $b=0$, $c=0$, суть операторы частных производных; операторы, отвечающие подгруппе $a=0$, $b=0$, суть операторы умножения на $i\lambda x_j$ $(j=1, \ldots, n)$, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$; инфинитезимальный оператор, отвечающий однопараметрической подгруппе $a=0$, $c=0$, есть оператор умножения на число $i\lambda$.

**3.2. Следы представлений группы Гейзенберга.** Группа $G$ унимодулярна, инвариантная мера (в параметризации (1) п. 3.1) имеет вид

$$d\mu(g) = da\,db\,dc = \prod_{k=1}^{n} da_k \prod_{k=1}^{n} db_k dc.$$

Пусть $\psi \in L^1(G)$; тогда образ функции $\psi$ в представлении групповой алгебры, отвечающем представлению $\pi_\lambda$ $(\lambda \in \mathbf{R}^*)$, есть интегральный оператор в $L^2(\mathbf{R}^n)$ с ядром

$$K_\lambda(x,t) = \hat{\psi}_{\text{II, III}}(t-x, \lambda, \lambda x), \qquad t,x \in \mathbf{R}^n, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

где $\hat{\psi}_{\text{II,III}}$ — преобразование Фурье функции $\psi \in L^1(G)$ (точнее, суммируемой функции $\psi$ на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^n)'$, определяемой равенством $\psi(a,b,c) = \psi(g(a,b,c))$) по второму и третьему аргументам. Таким образом,

$$[\pi_\lambda(\psi) f](x) = \int K_\lambda(x,t) f(t)\,dt, \qquad f \in L^2(\mathbf{R}^n). \tag{2}$$

Операторы $\pi_\lambda(\psi)$ $(\psi \in L^1(G))$ вполне непрерывны, а для бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности вместе с производными, ядерны. След оператора $\pi_\lambda(\psi)$ (если этот след существует) определяется для бесконечно гладкой функции $\psi \in L^1(G)$, быстро убывающей на бесконечности вместе со всеми производными, формулой

$$\operatorname{tr} \pi_\lambda(\psi) = (2\pi\lambda^{-1})^n \hat{\psi}_{\text{II}}(0, \lambda, 0), \tag{3}$$

где $\hat{\psi}_{\text{II}}$ — преобразование Фурье функции $\psi$ по второму аргументу.

**3.3. Разложение регулярного представления и формула Планшереля.** Левое регулярное представление группы $G$ действует в гильбертовом пространстве $L^2(G)$ по формуле

$$[L(g_0) f](g) = f(g_0^{-1} g), \quad f \in L^2(G), \quad g, g_0 \in G. \tag{1}$$

Формула

$$\int_G |\psi(g(a,b,c))|^2 da\,db\,dc = (2\pi)^{-n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(\pi_\lambda(\psi)^* \pi_\lambda(\psi)) \lambda^n d\lambda =$$
$$= (2\pi)^{-n-} \int |K_\lambda(x, t)|^2 \lambda^n dx\,dt\,d\lambda, \tag{2}$$

справедливая для всех функций $\psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$, является аналогом формулы Планшереля, а формула

$$\psi(g(a, b, c)) = (2\pi)^{-n-1} \int \lambda^n e^{i\lambda(-b+ac-xc)} K_\lambda (x - a, x)\, dx\, d\lambda, \qquad (3)$$

справедливая для бесконечно дифференцируемых функций $\psi$ на $G$, быстро убывающих на бесконечности вместе с производными, является аналогом формулы обращения. Отображение, сопоставляющее функции $\psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ функцию $K_\lambda$, определенную формулой (1), определяет отображение пространства $L^2(G)$ в прямой интеграл пространств $L^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ (в которых действует представление, кратное (с бесконечной кратностью) представлению $\pi_\lambda$ ($\lambda \in \mathbf{R}^*$)) на $\mathbf{R}^*$ по мере $\lambda^n\, d\lambda$, где $d\lambda$ — мера Лебега.

**3.4. Орбиты Кириллова.** Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$ с алгеброй Ли матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0_n & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^n, \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad \gamma \in (\mathbf{R}^n)', \qquad (1)$$

а пространство $\mathfrak{g}'$, сопряженное к $\mathfrak{g}$, отождествим с пространством матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0_n & 0 \\ \eta & \zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi \in (\mathbf{R}^n)', \quad \eta \in \mathbf{R}, \quad \zeta \in \mathbf{R}^n, \qquad (2)$$

так что $f(t) = \operatorname{tr}(tf)$ для $t \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}'$. Действие группы $G$ в $\mathfrak{g}'$, сопряженное к присоединенному, определяется формулой

$$g(a, b, c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0_n & 0 \\ \eta & \zeta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi + c\eta & 0_n & 0 \\ \eta & \zeta - a\eta & 0 \end{pmatrix},$$
$$\xi \in (\mathbf{R}^n)', \quad \eta \in \mathbf{R}, \quad \zeta \in \mathbf{R}^n. \qquad (3)$$

В связи с этим орбиты бывают двух родов: а) точки $O^{\xi, \zeta}$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0_n & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi \in (\mathbf{R}^n)', \ \zeta \in \mathbf{R}^n;$$

б) $2n$-мерные гиперплоскости $O_\eta$ с фиксированным $\eta \neq 0$ и произвольными $\xi \in (\mathbf{R}^n)'$ и $\zeta \in \mathbf{R}^n$.

Точке $O^{\xi,\zeta}$ соответствует функционал $f^{\xi,\zeta}(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\xi + \zeta\gamma$, стабилизатор функционала $f^{\xi,\zeta}$ есть вся группа $G$, и соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть $f^{\xi,\zeta}$. Соответствующее представление группы $G$ есть $\chi_{\xi,\zeta}$ (см. (2) п. 3.1).

Точка

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_n & 0 \\ \eta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

принадлежит орбите $O_\eta$ и определяет функционал $F_\eta(\alpha, \beta, \gamma) = \beta\eta$ ($\beta$, $\eta \in \mathbf{R}$, $\eta \neq 0$). Стабилизатор функционала $F_\eta$ есть подгруппа элементов вида $g(0, b, 0)$. Пусть $\mathfrak{n}$ — подалгебра Ли (и даже идеал) в $\mathfrak{g}$, определяемая условием $\alpha = 0$ (см. (1)). Тогда коразмерность $\mathfrak{n}$ равна половине размерности орбиты $O_\eta$ (т. е. $\operatorname{codim} \mathfrak{n} = n$), а аннулятор $\mathfrak{n}^\perp$ идеала $\mathfrak{n}$ состоит из элементов вида (2) с $\eta = 0$, $\zeta = 0$, так что $F_\eta + \mathfrak{n}$ содержится в $O_\eta$ (как множество матриц вида (2) с фиксированным $\eta$ и с $\zeta = 0$).

Формула

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0_n & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \beta\eta, \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad \gamma \in (\mathbf{R}^n)^*,$$

определяет представление алгебры Ли $\mathfrak{n}$; экспоненциируя, получаем представление

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1_n & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to e^{ib\eta}$$

подгруппы $N$ в $G$, выделяемой условием $a = 0$. Индуцированное этим представлением представление группы $G$ есть $\pi_\eta$ (см. (3) п. 3.1).

Симплектическая форма $B_\Omega$ на орбите $O_\eta$ отличается множителем $\eta$ от стандартной симплектической формы на $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)'$. Заметим, что орбита $O_\eta$ стягиваема.

**3.5. Квадратично интегрируемые представления.** Представления $\chi_{\alpha,\gamma}$ не являются квадратично интегрируемыми. Представления $\pi_\lambda$ $(\lambda \neq 0)$ являются квадратично интегрируемыми (т. е. матричные элементы этих неприводимых унитарных представлений квадратично интегрируемы над $G/Z$, где $Z = \{g(0,b,0),\ b \in \mathbf{R}\}$ — центр группы $G$). Формальная размерность представления $\pi_\lambda$ равна $(2\pi\lambda^{-1})^n$.

**3.6. Тензорные произведения неприводимых унитарных представлений групп Гейзенберга.** Очевидно, что $\chi_{\alpha,\gamma} \otimes \chi_{\alpha',\gamma'} = \chi_{\alpha+\alpha', \gamma+\gamma'}$. Кроме того, $\chi_{\alpha,\gamma} \otimes \pi_\lambda$ эквивалентно $\pi_\lambda$ при $\lambda \neq 0$ и любых $\alpha \in (\mathbf{R}^n)'$, $\gamma \in \mathbf{R}^n$. Наконец, $\pi_\lambda \otimes \pi_\mu$ кратно $\pi_{\lambda+\mu}$ (с бесконечной кратностью) при $\lambda + \mu \neq 0$, а $\pi_\lambda \otimes \pi_{-\lambda}$ эквивалентно представлению $\rho$ группы $G$, соответствующему регулярному представлению группы $G/N$. А именно, представление $\pi_\lambda \otimes \pi_{-\lambda}$ реализуется в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ по формуле

$$\begin{gathered} [(\pi_\lambda \otimes \pi_{-\lambda})(g)f](x,y) = e^{i\lambda c(x-y)} f(x+a,\ y+a), \\ f \in L^2(\mathbf{R}^{2n}), \quad g = g(a,b,c), \end{gathered} \tag{1}$$

где $b \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$, $x$, $y$, $a \in \mathbf{R}^n$, $c \in (\mathbf{R}^n)'$. Положим $(Vh)(x, y) = h(x - y, x)$ для всех $h \in L^2(\mathbf{R}^{2n})$ и почти всех $(x, y) \in \mathbf{R}^{2n}$; тогда $V$ — унитарный оператор в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ и представление $\sigma = V^{-1}(\pi_\lambda \otimes \pi_{-\lambda})V$ действует в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ по формуле

$$\begin{gathered} [\sigma(g(a,b,c))h](t,s) = e^{i\lambda ct} h(t, s+a), \quad h \in L^2(\mathbf{R}^{2n}), \\ t, s, a \in \mathbf{R}^n, \quad c \in (\mathbf{R}^n)', \quad b, \lambda \in \mathbf{R}, \end{gathered} \tag{2}$$

причем $\lambda \neq 0$. Замена переменной $t \to \lambda t$ (невырожденная ввиду $\lambda \neq 0$) в сочетании с преобразованием Фурье по первой переменной (соответственно по второй переменной) осуществляет эквивалентность представления $\sigma$ представлению $\rho$ (соответственно разложение представления $\sigma$ в прямой интеграл характеров группы $G$).

Аналогично, при $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^*$, $\lambda + \mu \neq 0$ представление $\pi_\lambda \otimes \pi_\mu$, действующее в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ по формуле

$$[(\pi_\lambda \otimes \pi_\mu)(g)f](x, y) = e^{i((\lambda+\mu)b + c(\lambda x + \mu y))} f(x + a, y + a),$$
$$f \in L^2(\mathbf{R}^{2n}), \quad g = g(a, b, c), \tag{3}$$

эквивалентно представлению $\tau$ в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$, определяемому формулой

$$[\tau(g(a, b, c))h](s, t) = e^{i((\lambda+\mu)b + cs)} h(s + (\lambda + \mu)a, t),$$
$$h \in L^2(\mathbf{R}^{2n}), \tag{4}$$

с помощью унитарного оператора $u$ в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$, действующего по правилу

$$(uf)(x,y) = |\lambda - \mu|^{-1/2} f(x - y, \lambda x + \mu y), \quad f \in L^2(\mathbf{R}^{2n}), \quad x, y \in \mathbf{R}^n,$$

т. е. $\tau = u^{-1}(\pi_\lambda \otimes \pi_\mu)u$. Представление же $\tau$, определяемое равенством (4), разлагается (по $t$) в прямой интеграл (по $\mathbf{R}^n$ с лебеговой мерой) представлений $\tau'$ группы $G$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$, где

$$[\tau'(g)\varphi](s) = e^{i(\rho b + cs)} \varphi(s + \rho a),$$
$$\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n), \quad \rho = \lambda + \mu, \quad g = g(a,b,c). \tag{5}$$

С помощью унитарного оператора $W$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$, где $(W\varphi)(x) = |\rho|^{-1/2}\varphi(\rho x)$ $(\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n),\ x \in \mathbf{R}^n)$, получаем, что представление $\tau'$ эквивалентно представлению $\pi_\rho$ $(\rho = \lambda + \mu)$.

**3.7. Комплексная группа Гейзенберга.** Пусть $G_{\mathbf{C}}$ — нильпотентная группа Ли верхних треугольных матриц вида (1) п. 3.1, где $a \in \mathbf{C}^n$, $c \in (\mathbf{C}^n)'$, $b \in \mathbf{C}$. Любое неприводимое унитарное представление группы $G$ эквивалентно одному из представлений $\chi^{\mathbf{C}}_{\alpha,\gamma}$, где $\alpha \in (\mathbf{C}^n)'$, $\gamma \in \mathbf{C}^n$, или представлений $\pi^{\mathbf{C}}_\gamma$ $(\lambda \in \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\})$, определяемых формулами, в которых элементы $\mathbf{C}^n$ считаются $n$-строками, а элементы $(\mathbf{C}^n)'$ — $n$-столбцами:

$$\chi^{\mathbf{C}}_{\alpha,\gamma}(g(a, b, c)) = e^{i\operatorname{Re}(\alpha(a) + c(\gamma))}, \quad g(a, b, c) \in G_{\mathbf{C}}, \tag{1}$$

а представления $\pi^{\mathbf{C}}_\lambda$ $(\lambda \in \mathbf{C}^*)$ действуют в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{C}^n)$, построенном по обычной лебеговой мере, по формуле

$$[\pi^{\mathbf{C}}_\lambda(g(a, b, c)) f](x) = e^{i\operatorname{Re}\lambda(b + c(x))} f(x + a), \quad x, a \in \mathbf{C}^n, \tag{2}$$
$$c \in (\mathbf{C}^n)', \quad b, \lambda \in \mathbf{C}, \quad f \in L^2(\mathbf{C}^n).$$

Группа $G_{\mathbf{C}}$ унимодулярна; инвариантная мера имеет вид $d\mu(g) =$

$$= da\,db\,dc = db \prod_{k=1}^{n} da_k \prod_{k=1}^{n} dc_k \quad (\text{где} \quad dz = dx\,dy \quad \text{при} \quad z = x + iy).$$

Пусть $\psi \in L^1(G)$; тогда образ функции $\psi$ в представлении групповой алгебры, отвечающем представлению $\pi_\lambda^{\mathbf{C}}$ $(\lambda \in \mathbf{C}^*)$, есть интегральный оператор в $L^2(\mathbf{C}^n)$ с ядром

$$K_\lambda(x,t) = \hat{\psi}_{\mathrm{II,III}}(t-x, \lambda, \lambda x), \qquad t, x \in \mathbf{C}^n, \quad \lambda \in \mathbf{C}^*,$$

где $\hat{\psi}_{\mathrm{II,III}}$ — преобразование Фурье функции $\psi \in L^1(G)$ (точнее, суммируемой функции $\psi$ на $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times (\mathbf{C}^n)'$, определяемой равенством $\psi(a, b, c) = \psi(g(a, b, c))$) по второму и третьему аргументам, так что

$$\left[\pi_\lambda^{\mathbf{C}}(\psi) f\right](x) = \int_{\mathbf{C}^n} K_\lambda(x, t) f(t)\, dt, \qquad f \in L^2(\mathbf{C}^n).$$

Если $\psi$ бесконечно дифференцируема и быстро убывает вместе со всеми производными, то $\pi_\lambda^{\mathbf{C}}(\psi)$ — оператор Гильберта — Шмидта, след которого определяется формулой

$$\operatorname{tr} \pi_\lambda(\psi) = (2\pi |\lambda|^{-1})^{2n} \hat{\psi}_{\mathrm{II}}(0, \lambda, 0), \tag{4}$$

где $\hat{\psi}_{\mathrm{II}}$ — преобразование Фурье функции $\psi$ по второму аргументу.

Формулы для орбит Кириллова аналогичны формулам п. 3.4. Все представления $\pi_\lambda^{\mathbf{C}}$ $(\lambda \in \mathbf{C}^*)$ квадратично интегрируемы.

Литература: [15], [52], [145], [305], [389], [404], [518].

## § 4. Представления группы верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали

**4.1. Неприводимые унитарные представления общего положения группы $Z(n)$.** Пусть $Z(n)$ — группа всех вещественных треугольных матриц $n$-го порядка, у которых все элементы, стоящие под главной диагональю, равны нулю, а элементы на главной диагонали равны единице. Группа $Z(n)$ $(n \geqslant 3)$ является связной односвязной нильпотентной группой Ли; при $n = 3$ она совпадает с простейшей группой Гейзенберга (см. § 3).

Пусть натуральные числа $p$, $q$ фиксированы так, что $n = p + q$, где $|p - q| = 1$. Пусть $N$ — совокупность матриц вида $n = n(x) = \begin{pmatrix} 1_p & x \\ 0 & 1_q \end{pmatrix} \in Z(n)$, где $1_p$, $1_q$ — единичные матрицы соответствующих порядков, $x$ — вещественная $p \times q$-матрица, а $H$ — совокупность матриц вида $z = (z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2^{-1} \end{pmatrix} \in Z(n)$, так что $z_1 \in Z(p)$, $z_2 \in Z(q)$. Тогда $N$ — коммутативный нормальный делитель в $Z(n)$, $H$ — дополнительная к нему подгруппа, т. е. любой элемент $g \in Z(n)$ допускает однозначное разложение в произведение $g = nz$ $(n \in N, z \in H)$.

Пусть $\tilde{N}$ — совокупность всех (не обязательно унитарных) характеров коммутативной группы $N$. Представляя характеры из $\tilde{N}$ формулой вида

$$\chi_\lambda(n) = e^{\operatorname{tr}(\lambda' x)}, \qquad n = n(x) \in N, \tag{1}$$

где $\lambda$ — некоторая комплексная $p \times q$-матрица, $\lambda'$ — сопряженная к ней матрица, мы можем отождествить пространство $\tilde{N}$ с пространством комплексных $p \times q$-матриц $\lambda$. Пусть

$$\Delta_k(\lambda) = \det \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ q-k+1 & q-k+2 & \dots & q \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \tilde{N}. \tag{2}$$

Многочлены $\Delta_k(\lambda)$ инвариантны относительно действия $\lambda \to z^*\lambda$ группы $H$ в пространстве $\tilde{N}$ по формуле

$$\chi_{z^*\lambda}(n) = \chi_\lambda(znz^{-1}), \qquad n \in N, \quad z \in H, \quad \lambda \in \tilde{N}. \tag{3}$$

Более того, если числа $c_k$ ($k = 1, 2, \dots, \min(p, q) = [n/2]$) отличны от нуля, то множество $\lambda \in \tilde{N}$, $\Delta_k(\lambda) = c_k$ ($k = 1, 2, \dots, [n/2]$) является орбитой относительно указанного действия. Характер $\lambda$, обладающий этим свойством, называется *характером общего положения* группы $N \subset Z(n)$.

Если характер общего положения $\lambda \in \tilde{N}$ является унитарным характером, то индуцированное им представление $\pi_\lambda$ группы $G$ в пространстве $L^2(H, dz)$ (построенном по инвариантной мере $dz = dz_1 dz_2$, где $dz_i$ — произведение дифференциалов непостоянных матричных элементов $(z_i)_{st}$ $(s < t)$ соответствующей матрицы $z_i$; ср. п. 2.5 гл. 8), определяемое формулой

$$\begin{gathered}[\pi_\lambda(nw)\varphi](z) = \chi_\lambda(znz^{-1})\varphi(zw), \\ n \in N, \quad z, w \in H, \quad \varphi = L^2(H, dz),\end{gathered} \tag{4}$$

является неприводимым унитарным представлением группы $Z(n)$; семейство этих представлений называется семейством *представлений общего положения* группы $Z(n)$.

**4.2. Основная серия представлений группы $Z(n)$.** Пусть характер общего положения $\lambda \in \tilde{N}$, вообще говоря, неунитарен. Пусть $z \in H$, и пусть $\|z\|$ — операторная норма линейного преобразования $\lambda \to z^*\lambda$ $(\lambda \in \tilde{N})$, где пространство $\tilde{N}$ снабжено гильбертовой нормой $\|\lambda\|_v = \operatorname{tr}(\lambda'\lambda)$ $(\lambda \in \tilde{N})$. Пусть $t \in \mathbf{R}$, пусть $\mathfrak{H}(t)$ — гильбертово пространство измеримых функций на $H$, квадратично интегрируемых по мере $e^{t\|z\|}dz$, и пусть $\|\cdot\|_t$ — соответствующая гильбертова норма. Пусть $H$ — проективный предел гильбертовых пространств $\mathfrak{H}(t)$ $(t \in \mathbf{R})$. Тогда формула (4) п. 4.1 определяет непрерывное представление группы $Z(n)$ в пространстве $H$; семейство этих представлений называется *основной серией представлений* группы $Z(n)$.

Отметим, что в качестве множества матриц, параметризующих семейство орбит общего положения, можно взять семейство матриц $\lambda \in \tilde{N}$, у которых все элементы равны нулю, кроме элементов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{[n/2]}$, лежащих на косой диагонали (выходящей из правого верхнего угла), так что $\lambda_i$ стоит в $i$-й строке и в $(q-i+1)$-м столбце.

**4.3. Аналог формулы Планшереля.** Примем указанную в конце п. 4.2 параметризацию пространства орбит в множестве характеров общего положения группы $N$. Положим $\lambda_k = i\mu_k$ ($k = 1, \ldots, [n/2]$); тогда характер $\chi_\lambda$ (см. (1) п. 4.1) унитарен в том и только том случае, если все числа $\mu_k$ вещественны. Пусть $dg = dn\,dz$ ($g = nz$, $n \in N$, $z \in H$) — инвариантная мера на $Z(n)$, где $dn(x)$ есть произведение дифференциалов элементов матрицы $x$, а мера $dz$ (и косвенно $dg$) описана в п. 4.1. Пусть $f \in L^1(Z(n))$. Оператор $\pi_\lambda(f)$ является интегральным оператором на $H$ с ядром $K_\lambda(w, z)$ ($w, z \in H$), определяемым формулой

$$K_\lambda(w, z) = \int\limits_N f(w^{-1}nz)\,\chi_\lambda(n)\,dn, \tag{1}$$

что позволяет выразить $K_\lambda$ через значение преобразования Фурье функции $f$ по аргументам $n \in N$ (аналогично формуле (1) п. 3.2); в частности, если $n$ четно ($n = 2p$), и если $f(n(x)z) = f(n(x)(z_1, z_2)) = \varphi(z_1, z_2, x)$ $\quad (z_1, z_2 \in Z(p),\ x \in M_n(\mathbf{R}))$, то

$$K_\lambda(w, z) = \widehat{\varphi}_{\mathrm{III}}\left(w_1^{-1}z_1,\ z_2w_2^{-1},\ z_1^t\lambda z_2^t\right), \tag{2}$$

где $w = (w_1, w_2)$, $z = (z_1, z_2) \in H$ и $z_k^t$ — матрица, транспонированная к $z_k$ ($k = 1, 2$), а $\widehat{\varphi}_{\mathrm{III}}$ — преобразование Фурье функции $\varphi$ по аргументам матрицы $x$.

Формула

$$\|f\|^2_{L^2(Z(n))} = (2\pi)^{-pq}\int\limits_{\mathbf{R}^{\min(p,q)}} \operatorname{tr}(\pi_\lambda(f)^*\,\pi_\lambda(f))\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{\min(p,q)}\left(|\mu_k|^{2k+|p-q|-2}d\mu_k\right), \tag{3}$$

справедливая для всех $f \in L^1(Z(n)) \cap L^2(Z(n))$, является аналогом формулы Планшереля (множество наборов $(\mu_1, \ldots, \mu_{[n/2]})$, не соответствующих характерам общего положения, имеет в $\mathbf{R}^{[n/2]}$ меру нуль).

**4.4. Аналог теоремы Пэли — Винера.** Для того чтобы операторнозначная функция $\pi_\lambda$ ($\lambda \in \tilde{N}$) со значениями в множестве непрерывных линейных операторов в пространстве $H$ (см. п. 4.2) совпадала с «преобразованием Фурье» $\pi_\lambda(f)$ ($\lambda \in \tilde{N}$), финитной бесконечно дифференцируемой функции $f$ на $Z(n)$ (т. е. $\pi_\lambda = \int\limits_{Z(n)} f(g)\,\pi_\lambda(g)\,dg$, $\lambda \in \tilde{N}$), носитель которой содержится в компакте $O_{\alpha,\gamma}$, образованном такими $g = nz$, что $\|z\| \leqslant \alpha$, $\|n\|_v \leqslant \gamma$, необходимо и достаточно, чтобы операторнозначная функция $\pi_\lambda$ удовлетворяла следующим условиям: 1) для любых элементов $y_k$ ($k = 1, 2$) обертывающей алгебры группы $Z(n)$ соответствующие им операторы $\partial_k = d\pi_\lambda(y_k)$ $(k = 1, 2)$ удовлетворяют условию вида

$$\|\partial_1\pi_\lambda\, \partial_2\varphi\|_t \leqslant C(\partial_1, \partial_2)\|\varphi\|_{\tau(t,\lambda,\alpha,\gamma)}$$

для всех $\varphi \in H$, где норма $\|\cdot\|_t$ описана в п. 4.2, а постоянная $C(\partial_1, \partial_2)$ не зависит от $t$, $\lambda$ и $\varphi$; 2) функция $\partial_1\pi_\lambda\,\partial_2\varphi$ слабо аналитична по $\lambda$ $(\lambda \in \tilde{N})$ для всех $\varphi \in H$; 3) $L_{z_0}\pi_\lambda L_{z_0}^{-1} = \pi_{z_0^*\lambda}$ для всех $z_0 \in H$, $\lambda \in \tilde{N}$, где $L_{z_0}$ — оператор левого сдвига на $z_0 \in Z(n)$.

Структура неунитарных представлений вида $\pi_\lambda$ не изучена; в частности, не найдены условия полной неприводимости этих представлений. Кроме того, для групп $Z(n)$ $(n \geqslant 7)$ неизвестно явное описание неприводимых унитарных представлений.

Литература: [15], [94].

## § 5. Примеры разрешимых групп Ли не типа I

**5.1. Группа Маутнера.** Разрешимые группы Ли размерности, не превосходящей четырех, являются группами типа I. Группа Маутнера есть полупрямое произведение $G = \mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}$, реализуемое как группа матриц вида

$$g(t, z, w) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z \\ 0 & e^{i\alpha t} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad z, w \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

где $\alpha$ — иррациональное число. Группа $G$ является разрешимой односвязной унимодулярной группой Ли.

Пусть $p(z, w) \in \mathbf{C}^2$ — вектор-столбец с элементами $z$, $w \in \mathbf{C}$. Действие группы $G$ на группе характеров $\widehat{\mathbf{C}}^2$ группы $\mathbf{C}^2$ определяется умножением строки $q(\xi, \eta) = (\xi, \eta) \in \widehat{\mathbf{C}}^2$ на матрицу $\begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha t} \end{pmatrix}$ справа, где $q(p) = e^{i\,\mathrm{Re}(qp)}$. Таким образом, в $\widehat{\mathbf{C}}^2$ имеются орбиты следующих четырех типов: 1) $\xi = \eta = 0$; 2) $\eta = 0$, $|\xi| = \rho \neq 0$ (круг в плоскости $\eta = 0$); 3) $|\eta| = \rho \neq 0$, $\xi = 0$ (круг в плоскости $\xi = 0$); 4) не локально замкнутые орбиты в области $\xi\eta \neq 0$, замыкания которых являются торами вида $|\xi| = \rho_1 \neq 0$, $|\eta| = \rho_2 \neq 0$. В связи с наличием орбит вида 4) группа $G$ не принадлежит типу I.

Указанным орбитам четырех типов соответствуют по схеме Макки (ср. 2.3.8) неприводимые унитарные представления, а именно: 1) характеры вида $g(t, z, w) \to e^{i\theta t}$ $(t, \theta \in \mathbf{R}, z, w \in \mathbf{C})$; 2) представления $U^{\rho,\lambda}$ $(\lambda \in [0, 1))$ в гильбертовом пространстве $L^2(S^1)$, действующие по формуле

$$[U^{\rho,\lambda}(g(t, z, w))\,\psi](e^{is}) = e^{i(t\lambda + \rho\mathrm{Re}(ze^{-is}))}\psi(e^{i(s-t)}),$$
$$\psi \in L^2(S^1), \tag{2}$$

где $t,\ s\in\mathbf{R},\ z,\ w\in\mathbf{C}$; 3) представления $V^{\rho,\lambda}$ ($\lambda\in[0,\ 1)$), аналогичные представлениям $U^{\rho,\lambda}$, действующие в $L^2(S^1)$ по формуле

$$[V^{\rho,\lambda}(g(t,z,w))\,\psi](e^{is})=e^{i(\alpha t\lambda+\rho\operatorname{Re}(we^{-is}))}\psi(e^{i(s-\alpha t)}),\qquad(3)$$
$$\psi\in L^2(S^1),$$

где также $t,\ s\in\mathbf{R},\ z,\ w\in\mathbf{C}$; 4) представления типа $U$ (где в качестве исходной точки выбрана точка с $|z_0|=\rho_1>0$, $|w_0|=\rho_2>0$, у которой $w_0=|w_0|$, так что $\operatorname{Re}w_0>0$, $\operatorname{Im}w_0=0$), действующие в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R})$ по формуле

$$[U(g(t,z,w))\,\psi](u)=e^{i\operatorname{Re}(z\bar z_0e^{-iu}+w\bar w_0e^{-i\alpha u})}\psi(u-\alpha t),\qquad(4)$$
$$\psi\in L^2(\mathbf{R}),$$

где $t,\ u\in\mathbf{R},\quad z,\ w\in\mathbf{C}$.

Этими представлениями список неприводимых унитарных представлений группы $G$ не исчерпывается. В частности, представление вида $U^{\rho,\lambda}\otimes V^{\rho_1,\lambda_1}$ является неприводимым унитарным представлением группы $G$ (при $\rho,\ \rho_1>0,\ 0\leqslant\lambda,\ \lambda_1<1$), не являющимся представлением вида 1)—4).

**5.2. Разрешимая группа не типа I с локально замкнутыми орбитами.** Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная разрешимая алгебра Ли клеточно-диагональных матриц шестого порядка с диагональными блоками

$$\begin{pmatrix}is&0&z\\0&it&w\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&s&r\\0&0&t\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad(1)$$

где $z,\ w\in\mathbf{C},\ r,\ s,\ t\in\mathbf{R}$. Пусть $G$ — связная односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Орбиты в $\mathfrak{g}'$ (относительно коприсоединенного действия группы $G$), имеющие максимальную возможную размерность 4, гомеоморфны $\mathbf{T}^2\times\mathbf{R}^2$, а именно, если $X,\ Y,\ U,\ V,\ S,\ T,\ R$ — базис в $\mathfrak{g}$, в котором матрицы (1) для элемента $xX+yY+uU+vV+sS+tT+rR$ имеют вид

$$\begin{pmatrix}is&0&x+iy\\0&it&u+iv\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&s&r\\0&0&t\\0&0&0\end{pmatrix},$$

и если векторы базиса рассматриваются как линейные функции на $\mathfrak{g}$, то уравнения

$$X^2+Y^2=r^2,\quad U^2+V^2=\rho^2,\quad R=R_0\qquad(2)$$

задают при $r>0,\ \rho>0,\ R_0\neq0$ орбиту максимальной размерности. Форма $B_\Omega$ на этой орбите имеет вид $d\varphi\wedge dS+d\psi\wedge dT+R_0\,d\varphi\wedge d\psi$, где $\varphi$ и $\psi$ — полярные углы на окружностях $X^2+Y^2=r^2$ и $U^2+V^2=\rho^2$ соответственно. Таким образом, класс когомологий, определенный формой $B_\Omega$, отличен от нуля (из-за слагаемого $R_0\,d\varphi \wedge d\psi$ интеграл от формы $B_\Omega$ по двумерному циклу, определяемому на орбите тором $S = T = 0$, отличен от нуля) и группа $G$ является примером связной односвязной разрешимой группы Ли не типа I (см. п. 2.5 гл. 5) с локально замкнутыми орбитами.

Литература: [15], [237], [294], [448].

Дополнительная литература к гл. 7: [10], [41], [49], [53], [80], [82], [90], [94], [95], [117], [174], [190], [191], [203], [209], [214], [224], [225], [232], [233], [234], [235], [243], [256], [261], [282], [293], [306], [307], [313], [318], [349], [350], [362], [378], [424], [425], [426], [428], [437], [447], [464], [465], [466], [487], [579], [599].

## ГЛАВА 8

## КОМПЛЕКСНЫЕ ПОЛУПРОСТЫЕ ГРУППЫ ЛИ

### § 1. Группа $SL(2, \mathbf{C})$

**1.1. Разложение Гаусса.** Пусть $G = SL(2, \mathbf{C})$, $B$ — подгруппа верхних треугольных матриц в группе $G$ (т. е. $B = \{b: b = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in G, b_{21} = 0\}$). Пусть $Z$ — подгруппа всех нижних треугольных матриц в группе $G$ с единицами на главной диагонали (т. е. $Z = \{z: z = \{z_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in G, z_{12} = 0, z_{11} = z_{22} = 1\}$). Тогда (ср. 4.3.6) множество $G'$ матриц вида $bz$ ($b \in B$, $z \in Z$) состоит из всех матриц $G$ с $g_{22} \neq 0$; оно открыто и плотно в группе $G$. Если $g = bz$, где $g \in G$, $b \in B$, $z \in Z$ и $g = (g_{ij})_{i,j=1}^2$, то $b_{22} = g_{22}$, $b_{12} = g_{12}$, $z_{21} = g_{21}g_{22}^{-1}$. Элемент $z_1 \in Z$, удовлетворяющий условию $zg = bz_1$, где $g \in G$, $z$, $z_1 \in Z$, $b \in B$, будем обозначать $z\bar{g}$, так что $zg = b \cdot z\bar{g}$.

**1.2. Разложения Ивасавы и Картана.** Пусть $K = SU(2)$, $K$ — максимальная компактная подгруппа в группе $G$. Пусть $\Gamma = K \cap B$; тогда $\Gamma$ — совокупность диагональных унитарных матриц с определителем 1. Пусть $D$ — подгруппа диагональных матриц в $G$, $E$ — подгруппа диагональных матриц в $G$ с положительными элементами, $N$ — подгруппа группы $B$, образованная матрицами с единицами на главной диагонали.

Любой элемент $g \in G$ допускает представление в виде

$$g = bu, \quad b \in B, \quad u \in K, \tag{1}$$

и если одновременно $g = b'u'$, где $b' \in B$, $u' \in K$, то $b' = b\gamma$, $u' = \gamma^{-1}u$, где $\gamma \in \Gamma$ (ср. 4.2.5). Пусть $u \in K$, $g \in G$, и пусть $ug = bu_1$, где $b \in B$, $u_1 \in K$; элемент $u_1$ обозначим $u\bar{g}$. Любой элемент $b \in B$ допускает единственное представление в виде $b = \delta n$ ($\delta \in D$, $n \in N$).

Любой элемент $g \in G$ допускает однозначное представление в виде

$$g = \varepsilon n u, \quad \varepsilon \in E, \quad n \in N, \quad u \in K, \tag{2}$$

(разложение Ивасавы); любой элемент $g \in G$ допускает представление в виде

$$g = u\varepsilon v, \quad \varepsilon \in E, \quad u, v \in K, \tag{3}$$

(разложение Картана).

**1.3. Основная серия.** Пусть $\alpha$ — характер (не обязательно унитарный) группы $B$, определяемый формулой

$$\alpha(b) = |b_{22}|^{-m+\sigma} b_{22}^m, \quad b = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in B, \tag{1}$$

где $m \in Z$, $\sigma \in \mathbf{C}$. Пусть $L^2(K)$ — гильбертово пространство измеримых функций на $K$, квадратично интегрируемых относительно меры Хаара на $K$; пусть $L^2_\alpha(K)$ — подпространство в $L^2(K)$, образованное такими функциями $f \in L^2(K)$, что $f(\gamma u) = \alpha(\gamma) f(u)$ для почти всех $u \in K$ при любом $\gamma \in \Gamma$. Формула

$$[T^\alpha(g) f](u) = \alpha(b) f(u\bar{g}), \tag{2}$$

где $u \in K$, $g \in G$, $ug = b \cdot \overline{ug}$ $(b \in B,\ \overline{ug} \in K)$, $f \in L^2_\alpha(K)$, корректно (несмотря на неоднозначность разложения (1) п. 1.2) определяет (непрерывное) представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2_\alpha(K)$. Семейство представлений $T^\alpha$ образует основную (неунитарную) непрерывную серию представлений группы $G$. Все представления $T^\alpha$ операторно неприводимы; они неприводимы тогда и только тогда, когда они вполне неприводимы (см. ниже п. 1.5).

Представление $T^\alpha$, отвечающее характеру $\alpha$ в (1), будем обозначать также $T_{\sigma, m}$. Это представление индуцировано характером $\beta$ группы $B$, определяемым формулой $\beta(b) = \alpha(b)|b_{22}|^2$ $(b \in B)$. Пространство $L^2_\alpha(K)$ будем обозначать также через $L^2_m(K)$, если $\alpha$ определяется формулой (1).

Представления $T^\alpha$ допускают уплотнения, имеющие реализацию в пространствах функций на группе $Z$ (ср. пп. 1.7, 1.8). Эти реализации удобны при описании операторов симметрии (см. п. 1.12) и явного вида инвариантных эрмитовых функционалов (см. п. 1.6), а также описания дифференциала представления (ср. п. 1.4).

Ограничение $T^\alpha|_K$ представления $T^\alpha$ на подгруппу $K$ содержит неприводимое представление $\pi^l$ подгруппы $K = SU(2)$ (см. 6.1.1) не более чем по одному разу; при этом представление $\pi^l$ содержится в ограничении $T^\alpha|_K$ тогда и только тогда, когда $m$ и $2l$ — числа одной четности, удовлетворяющие условию $|m| \leqslant 2l$.

**1.4. Инфинитезимальные операторы представления основной серии.** Пусть $\sigma = i\rho - 2$ и $\{f^l_\nu\}$ — семейство функций на $K$, связанных с матричными элементами $\pi^l_{pq}$ (см. 6.1.4) соотношениями

$$f^l_\nu = (-1)^{\frac{m}{2} - \nu} \sqrt{2l+1} \prod_{\nu = |m/2|}^{b} \frac{-2\nu + i\rho}{\sqrt{4\nu^2 + \rho^2}} \pi^l_{m/2, \nu}, \tag{1}$$

где $\nu$ пробегает набор чисел $-l, -l+1, \ldots, l$, а $l$ — множество таких неотрицательных целых или полуцелых чисел, что $2l$ и $m$

одной четности, причем $|m| \leqslant 2l$. Семейство $\{f_\nu^l\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L^2_\alpha(K)$ представления $T^\alpha$, называется *каноническим базисом*.

Пусть $\{e_+, e_-, e, f_+, f_-, f\}$ — базис (вещественный) в алгебре Ли $sl(2, \mathbf{C})$ группы $SL(2, \mathbf{C})$, определяемый формулами

$$\begin{gathered} e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \\ f_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad f_- = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}; \end{gathered} \tag{2}$$

пусть $E_\pm = dT^\alpha(e_\pm)$, $E = dT^\alpha(e)$, $F_\pm = dT^\alpha(f_\pm)$, $F = dT^\alpha(f)$. В базисе $\{f_\nu^l\}$ операторы $E_\pm$, $E$ определяются формулами

$$\begin{aligned} E_+ f_\nu^l &= \sqrt{(l+\nu+1)(l-\nu)}\, f_{\nu+1}^l, \\ E_- f_\nu^l &= \sqrt{(l+\nu)(l-\nu+1)}\, f_{\nu-1}^l, \\ E f_\nu^l &= \nu f_\nu^l, \end{aligned} \tag{3}$$

а операторы $F_\pm$, $F$ — формулами

$$\begin{aligned} F_+ f_\nu^l &= \sqrt{(l-\nu)(l-\nu-1)}\, C_l f_{\nu+1}^{l-1} - \\ &\quad - \sqrt{(l-\nu)(l+\nu+1)}\, A_l f_{\nu+1}^l + \sqrt{(l+\nu+1)(l+\nu+2)}\, C_{l+1} f_{\nu+1}^{l+1}, \\ F_- f_\nu^l &= -\sqrt{(l+\nu)(l+\nu-1)}\, C_l f_{\nu-1}^{l-1} - \\ &\quad - \sqrt{(l+\nu)(l-\nu+1)}\, A_l f_{\nu-1}^l - \sqrt{(l-\nu+1)(l-\nu+2)}\, C_{l+1} f_{\nu-1}^{l+1}, \\ F f_\nu^l &= \sqrt{(l-\nu)(l+\nu)}\, C_l f_\nu^{l-1} - \nu A_l f_\nu^l - \\ &\quad - \sqrt{(l+\nu+1)(l-\nu+1)}\, C_{l+1} f_\nu^{l+1}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$A_l = \frac{m\rho}{4l(l+1)}, \quad A_0 = 0, \tag{5}$$

$$C_l = \frac{i}{4l} \sqrt{\frac{(4l^2 - m^2)(4l^2 + \rho^2)}{4l^2 - 1}}. \tag{6}$$

Отметим, что представление $\pi^l$ с $l = 0$ может входить в $T^\alpha|_K$ лишь при $m = 0$; в этом случае полагаем $A_l = 0$, $C_0 = 0$. С другой стороны, представление $\pi^l$ с $l = 1/2$ может входить в $T^\alpha|_K$ лишь при $|m| = 1$; в этом случае $C_l = \frac{i}{4l}\sqrt{4l^2 + \rho^2}$ при $l \neq 1/2$ и $C_{1/2} = 0$. В общем случае отметим равенство $C_{|m|/2} = 0$.

**1.5. Конечномерные неприводимые представления.** Пусть $\pi^{l,0}$ (соответственно $\pi^{0,l}$) — аналитическое (соответственно антианалитическое) продолжение представления $\pi^l$ (см. 6.1.1) группы $SU(2)$ на группу $SL(2, \mathbf{C})$. Для любых целых или полуцелых неотрицательных $l_1$ и $l_2$ тензорное произведение представлений $\pi^{l_1,0} \otimes \pi^{0,l_2}$ неприводимо. Обозначим $\pi^{l_1,l_2} = \pi^{l_1,0} \otimes \pi^{0,l_2}$. Представления группы $SL(2, \mathbf{C})$ вида $\pi^{l_1,l_2}$, где $l_1$ и $l_2$ независимо пробегают множество неотрицательных целых или полуцелых чисел, образуют полный набор попарно неэквивалентных неприводимых конечномерных представлений группы $SL(2, C)$.

Представление $\pi^{l_1, l_2}$ можно реализовать в пространстве $H^{l_1, l_2}$ многочленов от комплексных переменных $z$ и $\bar{z}$, степени которых по $z$ (соответственно $\bar{z}$) не превосходят $2l_1$ (соответственно $2l_2$), с помощью формулы

$$[\pi^{l_1, l_2}(g)\, p](z, \bar{z}) =$$
$$= (g_{12}z + g_{22})^{2l_1}\, \overline{(g_{12}z + g_{22})}^{2l_2}\, p\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}, \frac{\bar{g}_{11}\bar{z} + \bar{g}_{21}}{\bar{g}_{12}\bar{z} + \bar{g}_{22}}\right). \quad (1)$$

Характер $\chi_{l_1, l_2}$ представления $\pi^{l_1, l_2}$ определяется формулой

$$\chi_{l_1, l_2}(g) = \frac{\lambda^{2l_1+1} - \lambda^{-(2l_1+1)}}{\lambda - \lambda^{-1}}\, \frac{\bar{\lambda}^{2l_2+1} - \bar{\lambda}^{-(2l_2+1)}}{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^{-1}}, \quad (2)$$

где $\lambda$, $\lambda^{-1}$ — собственные значения матрицы $g \in SL(2, C)$.

Единичное представление является единственным, с точностью до эквивалентности, неприводимым конечномерным унитарным представлением группы $SL(2, C)$; остальные конечномерные неприводимые представления группы $SG(2, C)$ унитарны в индефинитной метрике.

**1.6. Структура представлений основной серии.** Представление $T^\alpha$ вполне неприводимо тогда и только тогда, когда числа $n_1 = \frac{\sigma + m}{2} - 1$, $n_2 = \frac{\sigma - m}{2} - 1$ не являются отличными от нуля целыми числами одного знака. Такие представления $T^\alpha$, $T^{\alpha'}$ эквивалентны (здесь и далее — по Наймарку) тогда и только тогда, когда либо $\alpha = \alpha'$, либо $n_1 = -n_1'$, $n_2 = -n_2'$, где $n_1' = \frac{\sigma' + m'}{2} - 1$, $n_2' = \frac{\sigma' - m'}{2} - 1$, т. е. $m' = -m$, $\sigma' = 4 - \sigma$. Оператор эквивалентности определен однозначно с точностью до множителя.

Пусть числа $n_1 = \frac{\sigma + m}{2} - 1$, $n_2 = \frac{\sigma - m}{2} - 1$ — целые положительные. В этом случае представление $T^\alpha$ неразложимо и в пространстве $L^2_\alpha(K)$ есть конечномерное подпространство $H$, инвариантное относительно представления $T^\alpha$; ограничение представления $T^\alpha$ на $H$ эквивалентно конечномерному неприводимому представлению $\pi^{l_1, l_2}$ группы $SL(2, C)$, где $2l_1 + 1 = n_1$, $2l_2 + 1 = n_2$.

Представление, индуцируемое в этом случае представлением $T^\alpha$ в факторпространстве $L^2_\alpha(K)/H$, эквивалентно таким вполне неприводимым представлениям $T^{\alpha'}$ и $T^{\alpha''}$, что $(n_1', n_2') = (-n_1, n_2)$, $(n_1'', n_2'') = (n_1, -n_2)$. Это представление эквивалентно также подпредставлению представления $T^{\tilde{\alpha}}$, где $(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2) = (-n_1, -n_2)$ (т. е. $\tilde{\sigma} = 4 - \sigma$, $\tilde{m} = -m$) в единственном нетривиальном замкнутом инвариантном подпространстве $\tilde{H}$ этого представления; с друтой стороны, представление $T^{\tilde{\alpha}}$ индуцирует в факторпространстве $L^2_{\tilde{\alpha}}(K)/\tilde{H}$ конечномерное неприводимое представление, эквивалентное $\pi^{l_1, l_2}$ $(2l_1+1=n_1,\ 2l_2+1=n_2)$. Представление $T^{\tilde{\alpha}}$ также неразложимо.

В пространстве представления $T^\alpha$ тогда и только тогда существует ненулевой инвариантный эрмитов функционал, когда либо $\sigma = i\rho - 2$, где число $\rho$ вещественно (ср. п. 1.7), либо число $\sigma$ вещественно. Если в последнем случае числа $n_1$, $n_2$ не являются отличными от нуля целыми числами одного знака, то представление $T^\alpha$ либо эквивалентно унитарному (ср. п. 1.8), либо эквивалентно представлению, унитарному в индефинитной метрике (при $m=0$, $|\sigma-2|>2$), либо не допускает инвариантного эрмитова функционала (при $m\neq 0$). Соответствующие инвариантные эрмитовы функционалы при $m=0$ определены однозначно, с точностью до множителя, формулой

$$(\varphi, \psi) = \pi\left(\Gamma\left(\frac{2-\sigma}{2}\right)\right)^{-1} \iint\limits_{K\times K} |u'_{21}u''_{22} - u'_{22}u''_{21}|^{\sigma}\, \varphi(u')\, \overline{\psi(u'')}\, du'du''$$

для всех $\varphi, \psi \in C^\infty(K) \cap L^2_0(K)$.

Неприводимые подпредставления таких представлений $T^\alpha$, что числа $n_1$, $n_2$ являются одновременно целыми числами одного знака, допускают введение инвариантных эрмитовых функционалов, определяющих представление, унитарное в обычной или индефинитной метрике; соответствующие инвариантные эрмитовы функционалы определены однозначно с точностью до множителя.

Операторы, осуществляющие указанные выше эквивалентности, описаны в п. 1.12.

Семейство представлений $T_{\sigma, m}$ $(-4 < \operatorname{Re}\sigma < 0)$ эквивалентно равномерно ограниченному (т. е. $\|T_{\sigma,m}(g)\| \leqslant C$ для некоторого $C>0$, всех $g\in G$, всех $\sigma$ с $-4<\operatorname{Re}\sigma<0$ и некоторой операторной нормы).

**1.7. Основная серия унитарных представлений.** Представление $T^\alpha$ унитарно тогда и только тогда, когда $\sigma = i\rho - 2$, где число $\rho$ вещественно. Семейство непрерывных унитарных представлений $T^\alpha$, удовлетворяющих этому условию, называется *основной невырожденной серией Гельфанда — Наймарка* представлений группы $G = SL(n, \mathbf{C})$. Представления основной невырожденной серии задаются, таким образом, двумя числами: целым $m$ и вещественным $\rho$. Все представления основной невырожденной серии неприводимы.

Представления $T^\alpha$ основной невырожденной серии допускают также (с помощью разложения Гаусса, п. 1.1) реализацию в гильбертовом пространстве $L^2(Z)$ измеримых функций на группе $Z$, квадратично интегрируемых относительно инвариантной меры $d\mu(z) = dx_{21}dy_{21}$, где $z = z_{21} = x_{21} + iy_{21}$. А именно, представление $\mathring{T}^\alpha$, унитарно эквивалентное представлению $T^\alpha$, определяется тем же характером $\alpha$ группы $B$ по формуле

$$[\mathring{T}^\alpha(g)f](z) = \alpha(b)f(z\bar{g}), \qquad f\in L^2(Z), \qquad g\in G, \tag{1}$$

где $zg = b \cdot z\bar{g}$ (см. п. 1.1) или, в развернутой форме,

$$[\tilde{T}^{\alpha}(g)f](z_{21}) = |g_{12}z_{21} + g_{22}|^{-m+i\rho-2}(g_{12}z_{21}+g_{22})^m f\left(\frac{g_{11}z_{21}+g_{21}}{g_{12}z_{21}+g_{22}}\right), \tag{2}$$

где $f \in L^2(\mathbf{C}) \approx L^2(Z)$.

Унитарный оператор $V: L^2_{\alpha}(K) \to L^2(Z)$, осуществляющий эквивалентность представлений $T^{\alpha}$ и $\tilde{T}^{\alpha}$, задается формулой

$$(Vf)(z) = \alpha(b)f(u) \text{ для } z = bu,\ z \in Z,\ b \in B,\ u \in K. \tag{3}$$

При переходе к преобразованию Фурье $\left(\varphi(w) = \iint f(z)\, e^{i\operatorname{Re}(z\bar{w})}\, dz,\right.$ $\left.w \in \mathbf{C},\ f \in L^2(Z)\right)$ представление $\tilde{T}^{\alpha}$ оказывается эквивалентным представлению $S^{\alpha}$ в пространстве $L^2(\mathbf{C})$, ограничение которого на подгруппу нижних треугольных матриц с единицами на главной диагонали принимает значения в множестве операторов умножения на функцию:

$$\left[S^{\alpha}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}\right)\varphi\right](w) = e^{-i\operatorname{Re}(z\bar{w})}\varphi(w), \quad z, w \in \mathbf{C}, \quad \varphi \in L^2(\mathbf{C}),$$

причем

$$\left[S^{\alpha}\left(\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right)\varphi\right](w) = |\lambda|^{-m+i\rho+2}\lambda^m\varphi(\lambda^{-2}w), \quad \lambda \in \mathbf{C}^*,$$
$$w \in \mathbf{C}, \quad \varphi \in L^2(\mathbf{C}).$$

С другой стороны, переход к преобразованию Меллина $\left(\psi(n, \sigma) = \iint f(z)\,|z|^{-n+i\sigma-1}z^n dz,\ n \in Z,\ \sigma \in \mathbf{R},\ f \in L^2(Z)\right)$ переводит представление $\tilde{T}^{\alpha}$ в эквивалентное ему представление $S_{\alpha}$ в прямой сумме (по $n \in \mathbf{Z}$) гильбертовых пространств $L^2(\mathbf{R})$, ограничение которого на диагональную подгруппу принимает значения в множестве операторов умножения на функцию:

$$\left[S_{\alpha}\left(\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right)\psi\right](n, \sigma) = |\lambda|^{-2n-m+2i\sigma+i\rho}\lambda^{2n+m}\psi(n, \sigma).$$

Операторы представлений $S^{\alpha}$ и $S_{\alpha}$ являются, вообще говоря, сингулярными интегральными операторами.

Пусть $\beta$ — унитарный характер группы $B$, связанный с характером $\alpha$ формулой $\beta(b) = \alpha(b)|b_{22}|^2$ $(b \in B)$.

Два представления $T^{\alpha}$, $T^{\alpha'}$ основной невырожденной серии унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $\beta' = \beta$, либо $\beta' = \beta^{-1}$.

Представление $T^{\alpha}$ будем обозначать через $T^{\rho, m}$, а $\tilde{T}^{\alpha}$ — через $\tilde{T}^{\rho, m}$.

**1.8. Дополнительная серия.** Пусть $\mathfrak{H}_{\rho}$ $(0 < \rho < 2)$ — гильбертово пространство, являющееся пополнением пространства $K(\mathbf{C})$

финитных бесконечно дифференцируемых функций комплексного переменного относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2)_\rho = \int\limits_{C\times C} |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f_1(z_1)\overline{f_2(z_2)}dz_1 dz_2, \quad f_1, f_2 \in K(\mathrm{C}). \qquad (1)$$

Представление $S_\rho$ в пространстве $\mathfrak{H}_\rho$, определяемое формулой

$$[S_\rho(g) f](z) = |g_{12}z + g_{22}|^{-2-\rho} f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right), \quad f \in K(\mathrm{C}), \qquad (2)$$

является непрерывным унитарным представлением группы $SL(2, \mathrm{C})$, эквивалентным представлению $T^\alpha$ основной серии, соответствующему характеру $\alpha(b) = |b_{22}|^{-2-\rho}$ $(0 < \rho < 2)$, т. е. $\sigma = -2 - \rho$, $m = 0$. Соответствующее скалярное произведение в пополнении $\mathfrak{H}$ подпространства $\mathfrak{H}'$ гладких функций, принадлежащих $L^2_\alpha(K)$, определяется формулой

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \pi \int\int |u'_{21}u''_{22} - u'_{22}u''_{21}|^{-2+\rho} \varphi_1(u')\overline{\varphi_2(u'')}\, du'du''. \qquad (3)$$

Представления $S_\rho$ $(0 < \rho < 2)$ называются *представлениями дополнительной серии* для группы $SL(2, \mathrm{C})$.

Представления $T^\alpha$ с $\sigma = -2 - \rho$, $m = 0$ $(-2 < \rho < 0)$, эквивалентны представлениям дополнительной серии (ср. п. 1.6). Остальные представления, допускающие ненулевой инвариантный эрмитов функционал (см. п. 1.6), не эквивалентны унитарным представлениям.

Представления основной серии унитарных представлений, дополнительной серии и единичное представление образуют полный набор попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений группы $SL(2, \mathrm{C})$.

При $|\rho| > 2$ формулы (1) и (2) определяют представление, унитарное в индефинитной метрике (ср. п. 1.6).

**1.9. Зональные сферические функции.** В пространстве $L^2_\alpha(K)$ представления $T^\alpha$ основной серии тогда и только тогда существует ненулевой вектор $\xi$, инвариантный относительно ограничения представления $T^\alpha$ на максимальную компактную подгруппу $K$, когда $m = 0$, и если $\|\xi\| = 1$, то этим условием вектор $\xi$ определен однозначно с точностью до числового множителя с единичным модулем (ср. п. 1.3). Соответствующая этому вектору сферическая функция $\varphi_\alpha$, определенная формулой $\varphi_\alpha(g) = (T^\alpha(g)\xi, \xi)$, определена представлением $T^\alpha$ однозначно; эта функция зависит только от составляющей $\varepsilon$ картановского разложения элемента $g$ $(g = u_1 \varepsilon u_2$ $(\varepsilon \in D,\ u_1, u_2 \in K)$; ср. п. 1.2), причем $\varphi_\alpha(\varepsilon) = \dfrac{2\,\mathrm{sh}\,\rho\tau}{\rho\,\mathrm{sh}\,2\tau}$ при $\varepsilon = \mathrm{diag}(e^{-\tau}, e^\tau)$, если $\sigma = -2 + \rho$, $\rho \neq 0$; $\varphi_\alpha(\varepsilon) = \dfrac{2\tau}{\mathrm{sh}\,2\tau}$ при $\varepsilon = \mathrm{diag}(e^{-\tau}, e^\tau)$, $\sigma = -2$.

**1.10. Следы представлений $T^\alpha$.** Пусть $f$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция на группе $G = SL(2, \mathbb{C})$; $T^\alpha(f) = \int_G f(g) T^\alpha(g)\, dg$ — образ функции $f$ в соответствующем представлению $T^\alpha$ представлении групповой алгебры группы $G$. Отображение $f \to T^\alpha(f)$ принимает значения в множестве операторов со следом в пространстве $L^2_\alpha(K)$, и формула $f \to \operatorname{tr} T^\alpha(f)$ определяет локально интегрируемую обобщенную функцию $\chi_\alpha$ на $G$ по формуле $\operatorname{tr} T^\alpha(f) = \int_G f(g) \chi_\alpha(g)\, dg \; (f \in K(G))$. Справедливо равенство

$$\chi_\alpha(g) = \frac{|\lambda|^{-m+\sigma+2}\lambda^m + |\lambda|^{m-\sigma-2}\lambda^{-m}}{|\lambda - \lambda^{-1}|^2}, \quad g \in SL(2, \mathbb{C}), \tag{1}$$

где $\lambda, \lambda^{-1}$ — собственные значения матрицы $g \in SL(2, \mathbb{C})$.

В частности, эта формула справедлива для представлений основной унитарной серии (п. 1.7) и дополнительной серии (п. 1.8).

**1.11. Аналог формулы Планшереля и формула обращения.** Пусть $f \in L^1(SL(2, \mathbb{C})) \cap L^2(SL(2, \mathbb{C}))$, и пусть $T^\alpha(f) = \int_{SL(2,\mathbb{C})} f(g) T^\alpha(g)\, dg$ для всех представлений основной унитарной серии. Тогда имеет место равенство

$$\int_G |f(g)|^2 dg = (2\pi)^{-4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \operatorname{tr}\left(T^{\rho,m}(f)^* T^{\rho,m}(f)\right)(m^2 + \rho^2)\, d\rho, \tag{1}$$

где $dg$ — мера Хаара на $G$, определяемая равенством $dg = \frac{dg_{11} dg_{12} dg_{21}}{|g_{11}|^2}$ ($dz = dx\, dy$ при $z \in \mathbb{C}$), а представление $T^\alpha = T^{\rho,m}$ определяется формулой (2) п. 1.7; интегралы и ряд в правой части равенства (1) сходятся абсолютно.

Формула

$$f(g) = (2\pi)^{-4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{tr}\left(T^{\rho,m}(f) T^{\rho,m}(g)^*\right)(m^2 + \rho^2)\, d\rho, \tag{2}$$

где интеграл в правой части сходится в среднем в $L^2(G)$, справедлива почти всюду и является формулой обращения. Отображение $f \to T^{\rho,m}(f)$ продолжается до унитарного оператора из $L^2(G)$ на прямой интеграл соответствующих гильбертовых пространств операторов Гильберта — Шмидта.

**1.12. Операторы симметрии.** Пусть $\operatorname{Re}\sigma > -2$. Тогда оператор $W(\sigma, m)$, осуществляющий эквивалентность представлений $T^\alpha = T_{\sigma,m}$ и $T^{\alpha'} = T_{\sigma',m'} = T_{4-\sigma,-m}$ и действующий из $L^2_{\alpha'}(K)$ в $L^2_\alpha(K)$, является интегральным оператором с ядром $w(u_1, u_2) = \alpha(u_1 u_2^{-1} s^{-1})$, где $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а функция $\alpha$ считается продолженной на всю группу $G$ по формуле $\alpha(g) = |g_{22}|^{\sigma-m} g_{22}^{m}$ ($g \in G$). Операторная функция $W(\sigma, m)$ допускает продолжение до мероморфной аналитической функции от $\sigma \in \mathbf{C}$, сплетающей $T_{\sigma,m}$ с $T_{\sigma',m'}$ в таких точках $(\sigma, m)$, что числа $n_1 = \frac{\sigma+m}{2} - 1$, $n_2 = \frac{\sigma-m}{2} - 1$ не являются одновременно целыми отрицательными. Семейство операторов $W(\sigma, m)$ допускает регуляризацию $\widetilde{W}(\sigma, m)$, являющуюся целой аналитической функцией во всей комплексной плоскости, сплетающей представления $T_{\sigma,m}$ и $T_{4-\sigma,-m}$ для всех пар $(\sigma, m)$. Операторами вида $\widetilde{W}(\sigma, m)$ и их кратными исчерпываются операторы, сплетающие представления $T_{\sigma,m}$ и $T_{4-\sigma,-m}$.

Пусть числа $n_1 = \frac{\sigma+m}{2} - 1$, $n_2 = \frac{\sigma-m}{2} - 1$ — целые ненулевые. Обозначим представление $T_{\sigma,m}$ через $T^{n_1,n_2}$. Если $n_1 > 0$, то ненулевой оператор $D^+_{n_1,n_2}$, сплетающий $T^{n_1,n_2}$ с $T^{-n_1,n_2}$, т. е. удовлетворяющий условию $T^{n_1,n_2} D^+_{n_1,n_2} = T^{-n_1,n_2} D^+_{n_1,n_2}$, определен однозначно с точностью до множителя; если $n_2 > 0$, то ненулевой оператор $D^-_{n_1,n_2}$, сплетающий $T^{n_1,n_2}$ с $T^{n_1,-n_2}$, определен однозначно с точностью до множителя. Операторы $D^{\pm}_{n_1,n_2}$ выражаются через операторы инфинитезимального левого сдвига на группе $K$ в $L^2(K)$ и операторы проектирования в $L^2(K)$ на подпространства вида $L^2_\alpha(K)$. Операторами вида $\widetilde{W}(\sigma, m)$ и $D^{\pm}_{n_1,n_2}$ (и их кратными) исчерпывается семейство операторов, сплетающих различные представления вида $T^\alpha$.

**1.13. Аналог теоремы Пэли — Винера.** Пусть $\Delta$ — оператор Лапласа на группе $K$ (ср. 6.1.2 и 6.3.11), $\mathcal{F}$ — алгебра операторнозначных функций $T$ от $\sigma$, $m$ ($\sigma \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{Z}$), принимающих в точке $(\sigma, m)$ значения в пространстве операторов Гильберта — Шмидта в $L^2_\alpha(K)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) для любых неотрицательных целых $n_1$, $n_2$ оператор $\Delta^{n_1} T(\sigma, m) \Delta^{n_2}$ есть оператор Гильберта — Шмидта в $L^2_\alpha(K)$;

2) функция $\sigma \to T(\sigma, m)$ есть целая аналитическая функция не выше первого порядка роста и конечного типа, убывающая

3) выполняются соотношения симметрии, т. е. $T(\sigma, m)\widetilde{W}(\sigma, m) =$

$$\|\sigma^n T(\sigma, m)\|_2 \leqslant C_n(T)\, e^{a|\operatorname{Re}\sigma|}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\|\cdot\|_2$ означает норму Гильберта — Шмидта;

3) выполняются соотношения симметрии, т. е. $T(\sigma, m)\widetilde{W}(\sigma, m) = \widetilde{W}(\sigma, m) T(4-\sigma, -m)$ для всех $\sigma \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{Z}$; $T_{n_1,n_2} D^+_{n_1,n_2} = D^+_{n_1,n_2} T_{-n_1,n_2}$ для целых $(n_1, n_2)$ с $n_1 > 0$; $T_{n_1,n_2} D^-_{n_1,n_2} = D^-_{n_1,n_2} T_{n_1,-n_2}$ для целых $(n_1, n_2)$ с $n_2 > 0$, где $T_{n_1,n_2} = T(n_1 + n_2 + 2, n_1 - n_2)$.

Пусть алгебра $\mathcal{F}$ снабжается структурой индуктивного (по параметру $a$) предела локально выпуклых пространств, топология в которых задается преднормами

$$T \to \sup_{\sigma,m} |\sigma|^n \left\| \Delta^{n_1} T(\sigma, m) \Delta^{n_2} \right\|_2 e^{-a|\mathrm{Re}\,\sigma|}. \qquad (2)$$

Тогда отображение $f \to T(\sigma, m) = \int f(g) T_{\sigma,m}(g)\, dg$ есть топологический изоморфизм алгебры $K(G)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на $G$ в топологии Шварца на топологическую алгебру $\mathcal{F}$.

**1.14. Представления в пространствах с индефинитной метрикой.** Все неприводимые неунитарные представления $T^\alpha$, допускающие инвариантный эрмитов функционал, как и все неединичные конечномерные представления $\pi^{l_1,l_2}$ группы $G$, являются унитарными представлениями в пространствах вида $\Pi_k$ (т. е. в пространствах с конечным числом отрицательных квадратов). При $m=0$ этот функционал для представления $T_{\sigma,0}$ есть аналитическое продолжение функционала, определенного формулой (3) п. 1.9.

**1.15. Тензорное произведение неприводимых унитарных представлений группы $SL(2, C)$. Случай тензорного произведения представлений основной унитарной серии.** Тензорное произведение $T^{\rho_1,m_1} \otimes T^{\rho_2,m_2}$ можно реализовать в гильбертовом пространстве $L^2(Z) \otimes L^2(Z) \approx L^2(Z \times Z)$ измеримых функций $f$ двух переменных $z_1$, $z_2 \in Z$, суммируемых с квадратом относительно произведения мер Хаара, по формуле

$$\left[T^{\rho_1,m_1} \otimes T^{\rho_2,m_2}(g) f\right](z_1, z_2) =$$
$$= |g_{12}z_1 + g_{22}|^{-m_1+i\rho_1-2} (g_{12}z_1 + g_{22})^{m_1} |g_{12}z_2 + g_{22}|^{-m_2+i\rho_2-2} (g_{12}z_2 +$$
$$+ g_{22})^{m_2} f\left(\frac{g_{11}z_1 + g_{21}}{g_{12}z_1 + g_{22}}, \frac{g_{11}z_2 + g_{21}}{g_{12}z_2 + g_{22}}\right). \qquad (1)$$

Это представление разлагается только на представления вида $T^{\rho,m}$, притом на те и только те, для которых сумма $m + m_1 + m_2$ четна. Компоненты $f(z, m, \rho)$ этого разложения, преобразующиеся по представлению $T^{\rho,m}$, определяются формулой

$$f(z, m, \rho) = \int_{Z \times Z} a(z_1, z_2, z, m, \rho) f(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2, \qquad f \in L^2(Z \times Z), \quad (2)$$

где

$$a(z_1, z_2, z, m, \rho) = |z_2 - z_1|^{\frac{m+m_1+m_2}{2} - i\frac{\rho+\rho_1+\rho_2}{2} - 1} (z_2 - z_1)^{-\frac{m+m_1+m_2}{2}} \times$$
$$\times |z - z_1|^{-\frac{m-m_1+m_2}{2} + i\frac{\rho-\rho_1+\rho_2}{2} - 1} (z - z_1)^{\frac{m-m_1+m_2}{2}} \times$$
$$\times |z_2 - z|^{-\frac{m+m_1-m_2}{2} + i\frac{\rho+\rho_1-\rho_2}{2} - 1} (z_2 - z)^{\frac{m+m_1-m_2}{2}}.$$

Функция $f(z_1, z_2)$ выражается через эти компоненты по формуле

$$f(z_1, z_2) = (16\pi^4)^{-1} \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} (m^2+\rho^2)\, d\rho \int \overline{a(z_1, z_2, z, m, \rho)}\, f(z, m, \rho)\, dz, \qquad (4)$$

где суммирование ведется по тем $m$, для которых число $m+m_1+m_2$ четно. При этом имеет место формула Планшереля

$$\int_{Z\times Z} |f(z_1, z_2)|^2 dz_1 dz_2 = (16\pi^4)^{-1} \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} (m^2+\rho^2)\, d\rho \int |f(z, m, \rho)|^2\, dz, \qquad (5)$$

где суммирование в правой части идет по всем таким $m$, что число $m+m_1+m_2$ четно. Интеграл в правой части равенства (2) сходится в смысле нормы, определяемой правой частью равенства (5), а интеграл в правой части равенства (4) сходится в смысле нормы в $L^2(Z\times Z)$. Функция $f(z, m, \rho)$ удовлетворяет функциональному соотношению

$$\varphi(w, -m, -\rho) = (-i)^m 2^{-i\sigma} |w|^{m+i\rho} w^{-m} \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(-\frac{m+m_1-m_2}{4}+\frac{1}{2}-i\frac{\sigma+\sigma_1-\sigma_2}{4}\right)\Gamma\left(\frac{m-m_1+m_2}{4}+\frac{1}{2}-i\frac{\sigma-\sigma_1+\sigma_2}{4}\right)}{\Gamma\left(-\frac{m+m_1-m_2}{4}+\frac{1}{2}+i\frac{\sigma+\sigma_1-\sigma_2}{4}\right)\Gamma\left(\frac{m-m_1+m_2}{4}+\frac{1}{2}+i\frac{\sigma-\sigma_1+\sigma_2}{4}\right)}\varphi(w, m, \rho), \qquad (6)$$

где

$$\varphi(w, m, \rho) = (2\pi)^{-1} \int_Z f(z, m, \rho)\, e^{i\operatorname{Re}(z\overline{w})} dz. \qquad (7)$$

**1.16. Тензорное произведение неприводимых унитарных представлений; случай тензорного произведения представления основной серии и представления дополнительной серии.** Тензорное произведение $T^{\rho_1, m_1} \otimes S_\tau$ (см. пп. 1.7, 1.8) реализуется в тензорном произведении $L^2(Z) \otimes \mathfrak{H}_\tau$, которое является пополнением пространства всех измеримых функций $f$ на $Z\times Z$, для которых абсолютно сходится интеграл

$$\int |z_2 - z_2'|^{-2+\tau} f(z_1, z_2)\, \overline{f(z_1, z_2')}\, dz_1 dz_2 dz_2', \qquad (1)$$

снабженного скалярным произведением

$$(f_1, f_2)_\tau = \int |z_2 - z_2'|^{-2+\tau} f_1(z_1, z_2)\, \overline{f_2(z_1, z_2')}\, dz_1 dz_2 dz_2'. \qquad (2)$$

Представление $T^{\rho_1 m_1} \otimes S_\tau$ определяется на таких функциях $f$ формулой

$$[(T^{\rho_1, m_1} \otimes S_\tau)(g) f](z_1, z_2) = |g_{12}z_1 + g_{22}|^{-m_1 + i\rho_1 - 2} (g_{12}z_1 + g_{22})^{m_1} \times$$
$$\times |g_{12}z_2 + g_{22}|^{-2-\tau} f\left(\frac{g_{11}z_1 + g_{21}}{g_{12}z_1 + g_{22}}, \frac{g_{11}z_2 + g_{21}}{g_{12}z_2 + g_{22}}\right).$$

Это представление разлагается только на представления вида $T^{\rho, m}$, притом на те и только те, для которых $m + m_1$ четно. Компоненты $f(z, m, \rho)$ этого разложения, преобразующиеся по представлению $T^{\rho, m}$, определяются формулой (2) п. 1.15, где функция $a$ определяется равенством

$$a(z_1, z_2, z, m, \rho) = a(z_1, z_2, z, m, \rho, m_1, \rho_1, \tau) =$$
$$= |z_2 - z_1|^{\frac{m+m_1}{2} - i\frac{\rho+\rho_1}{2} + \frac{\tau}{2} - 1} (z_2 - z_1)^{-\frac{m+m_1}{2}} (z - z_1)^{\frac{m-m_1}{2}} \times$$
$$\times |z - z_1|^{-\frac{m-m_1}{2} + i\frac{\rho-\rho_1}{2} - \frac{\tau}{2} - 1} |z_2 - z|^{-\frac{m+m_1}{2} + i\frac{\rho+\rho_1}{2} + \frac{\tau}{2} - 1} (z_2 - z)^{\frac{m+m_1}{2}}. \quad (3)$$

Функция $f$ выражается через эти компоненты по формуле (4) п. 1.15, где суммирование ведется по тем $m$, для которых $m + m_1$ четно. При этом имеет место формула Планшереля

$$\int_{Z \times Z \times Z} |z_2' - z_2|^{-2+\tau} f(z_1, z_2) \overline{f(z_1, z_2')} \, dz_1 dz_2 dz_2' =$$
$$= \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} b(m, \rho) \, d\rho \int |f(z, m, \rho)|^2 \, dz, \quad (4)$$

где суммирование в правой части идет по тем $m$, для которых $m + m_1$ четно, а функция $b(m, \rho)$ определяется равенством

$$b(m, \rho) = \frac{1}{32\pi^3} \frac{\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\tau}{2}\right)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{m+m_1}{4} + i\frac{\rho+\rho_1}{4} - \frac{\tau}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+m_1}{4} - i\frac{\rho+\rho_1}{4} + \frac{\tau}{4} + \frac{1}{2}\right)} \right|^2 \times$$
$$\times (m^2 + \rho^2). \quad (5)$$

Интеграл в правой части равенства (2) п. 1.15 сходится в смысле нормы, определяемой правой частью равенства (4), а в правой части равенства (4) п. 1.15 — в смысле нормы, определяемой левой частью равенства (4). Функция $f(z, m, \rho)$ удовлетворяет функциональному уравнению (6) п. 1.14, в котором следует положить $m_2 = 0$, $\rho_2 = i\tau$, а функция $\varphi$ определяется (7) п. 1.15.

**1.17. Тензорное произведение неприводимых унитарных представлений; случай двух представлений дополнительной серии.** Тензорное произведение $S_{\tau_1} \otimes S_{\tau_2}$ $(0 < \tau_1, \tau_2 < 2)$, действует в тензорном произведении $\mathfrak{H}_{\tau_1} \otimes \mathfrak{H}_{\tau_2}$ по формуле

$$\left[\left(S_{\tau_1} \otimes S_{\tau_2}\right)(g)\, f\right](z_1, z_2) = |g_{12}z_1 + g_{22}|^{-2-\tau_1}\, |g_{12}z_2 + g_{22}|^{-2-\tau_2} \times$$
$$\times f\left(\frac{g_{11}z_1 + g_{21}}{g_{12}z_1 + g_{22}}, \frac{g_{11}z_2 + g_{21}}{g_{12}z_2 + g_{22}}\right), \qquad (1)$$

справедливой для таких измеримых функций $f$ на $Z \times Z$, что интеграл

$$\int\limits_{Z\times Z\times Z\times Z} |z_1 - z_1'|^{-2+\tau_1}\, |z_2 - z_2'|^{-2+\tau_2} f(z_1, z_2)\, \overline{f(z_1', z_2')}\, dz_1 dz_1' dz_2 dz_2' \qquad (2)$$

сходится абсолютно. При $\tau_1 + \tau_2 \leqslant 2$ представление $S_{\tau_1} \otimes S_{\tau_2}$ разлагается только по представлениям $T^{\rho, m}$ основной серии, причем по тем и только тем, для которых $m$ четно. При $\sigma_1 + \sigma_2 > 2$ разложение представления $S_{\tau_1} \otimes S_{\tau_2}$ содержит те же представления $T^{\rho, m}$ и прямое слагаемое $S_{\tau_1+\tau_2-2}$ дополнительной серии. В обоих случаях формула для компоненты $f(z, m, \rho)$ имеет вид (2) п. 1.15, где функция $a$ определяется равенством (3) п. 1.16, в котором следует положить $m_1 = 0$, $\rho_1 = i\tau_1$, $\tau = \tau_2$. При $\tau_1 + \tau_2 > 2$ компонента $\tilde f(z)$, преобразующаяся по представлению $S_{\tau_1+\tau_2-2}$, определяется равенством

$$\tilde f(z) = \int |z_2 - z_1|^{\tau_1+\tau_2-2}\, |z_2 - z|^{-\tau_1}\, |z - z_1|^{-\tau_2} f(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2. \qquad (3)$$

Соответствующая формула Планшереля имеет вид

$$\int |z_1 - z_1'|^{-2+\tau_1}\, |z_2 - z_2'|^{-2+\tau_2} f(z_1, z_2)\, \overline{f(z_1', z_2')}\, dz_1 dz_1' dz_2 dz_2' =$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{m=2k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b(m, \rho)\, d\rho \int |f(z, m, \rho)|^2 d\rho & \text{при } \tau_1 + \tau_2 \leqslant 2, \\ \sum\limits_{m=2k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b(m, \rho)\, d\rho \int |f(z, m, \rho)|^2\, d\rho + \\ \qquad + c \int |z - z'|^{-4+\tau_1+\tau_2}\, \tilde f(z)\, \overline{\tilde f(z')}\, dz\, dz' & \text{при } \tau_1 + \tau_2 > 2, \end{cases} \qquad (4)$$

где

$$b(m, \rho) = $$
$$= (16\pi^4)^{-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\tau_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\tau_2}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\tau_1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\tau_2}{2}\right)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{4} + i\frac{\rho}{4} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{4} + i\frac{\rho}{4} + \frac{\tau_1 + \tau_2}{4} + \frac{1}{2}\right)} \right|^2 \times$$
$$\times (m^2 + \rho^2),$$

$$C = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\tau_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\tau_2}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\tau_1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\tau_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} - 1\right)} \left(1 - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \right\}^2. \qquad (5)$$

**1.18. Тензорные произведения некоторых неунитарных представлений.** Тензорное произведение представления $T^{\rho,0}$ и представления $S_\tau$ $(2<\tau<4)$, унитарного в индефинитной метрике, определяемой формулой (1) п. 1.8, унитарно в некоторой невырожденной индефинитной метрике. При $\rho\neq 0$ в пространстве тензорного произведения имеются три инвариантных подпространства, на одном из которых скалярное произведение положительно определено, а два других подпространства — нулевые косо связанные, в них действуют неунитарные представления основной серии $T_{i\rho-\tau,0}$ и $T_{-i\rho-\tau,0}$. Представление в пополнении подпространства с положительным скалярным произведением разлагается в прямой интеграл представлений основной унитарной серии с четными $m$; соответствующая формула Планшереля является аналитическим продолжением по $\tau$ формулы п. 1.15. При $\rho=0$ неунитарная часть представления есть неразложимое сцепление двух (эквивалентных представлению дополнительной серии $S_{\tau-2}$) неприводимых представлений.

**1.19. Матричные элементы представлений группы Лоренца.** В каноническом базисе $\{f_\nu^l\}$ (см. п. 1.4) матричные элементы представления $T_{\sigma,m}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
(T^{\rho,m}(g)f_\nu^l, f_\mu^k) &= \\
= \sum_{a,c,i,j,s,t} & \frac{\pi(-1)^{l_0+\mu+b+j} c_{lk}c_{\nu\mu}r_c^2 s_d^2}{(l'-l_1-1)!}\,\frac{a!\,(-p-2)!}{(a-p-1)!}\,\frac{b!\,(-\bar q-2)!}{(b-\bar q-1)!}\times \\
&\times \frac{(l-l_1+b-i)!}{(l-l_1)!\,(b-i)!}\,\frac{(l_1-\nu-1)!}{(l_1-c-\mu-j-1)!\,(-\nu+c+\mu+j)!}\times \\
&\times \frac{1}{i!\,(l_0-k+i)!\,(l+k-i)!\,(l-l_0-i)!}\times \\
&\times \frac{1}{j!\,(l_0+\mu+j)!\,(\nu-\mu-j)!\,(\nu-l_0-j)!}\times \\
\times \frac{g_{11}^{p-a-c+s}\,g_{12}^{c-s}\,g_{21}^{a-s}\,g_{22}^{s}}{(p-a-c+s)!\,(c-s)!\,(a-s)!\,s!} & \,\frac{\bar g_{11}^{\bar q-b-d+t}\,\bar g_{12}^{d-t}\,\bar g_{21}^{b-t}\,\bar g_{22}^{t}}{(\bar q-b-d+t)!\,(d-t)!\,(b-t)!\,t!},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где введены обозначения

$$
b=k-l_0+a,\quad d=\mu-l_0+c,\quad l_0=\left|\frac{m}{2}\right|,\quad l_1=-i\,(\operatorname{sgn} m)\frac{\rho}{2},
\tag{2}
$$

суммирование распространяется на такие наборы неотрицательных индексов $a$, $c$, $i$, $j$, $s$, $t$, что $i\leqslant\nu+k$, $\nu-l_0$; $j\leqslant\nu-\mu$, $\nu-l_0$; $s\leqslant a$, $c$; $t\leqslant k-l_0+a$, $\mu-l_0+c$, а величины $c_{\nu\mu}$ определяются равенствами

$$
c_{\mu\nu}=c_0\sqrt{\frac{(\mu-l_1)!\,(2\mu+1)!}{(|l_0|-l_1)!\,(\mu+l_1)!}}\,\sqrt{(\mu+l_0)!\,(\mu-l_0)!\,(\mu+\nu)!\,(\mu-\nu)!},
\tag{3}
$$

где $c_0$ — некоторая постоянная. В этих формулах $z! = \Gamma(z+1)$ для всех $z \in \mathbf{C}$.

**1.20. Коциклы первого порядка.** Пусть $G$ — локально компактная группа, $U$ — непрерывное унитарное представление группы $G$ в $H$. Непрерывное отображение $\delta$ группы $G$ в гильбертово пространство $H$, удовлетворяющее условию $U(g)\delta(h) = \delta(gh) - \delta(g)$ для всех $g, h \in G$, называется *коциклом*; коцикл вида $g \to U(g)x - x$ $(x \in H)$ называется *кограницей*. Существует (с точностью до множителя и прибавления кограницы) лишь один нетривиальный коцикл для группы $SL(2, \mathbf{C})$, а именно, связанный с представлением $T^{0,-2}$ основной унитарной серии (см. формулу (2) п. 1.7). Этот коцикл (как отображение группы $G$ в $L^2(Z)$) определяется функцией

$$\delta(g,z) = \frac{(\bar{g}_{11}\bar{z} + \bar{g}_{21})(\bar{g}_{11} - g_{21}\bar{z}) + (\bar{g}_{12}\bar{z} + \bar{g}_{22})(\bar{g}_{12} - \bar{z}\bar{g}_{22})}{(1+|z^2|)\left(|g_{11}z + g_{21}|^2 + |g_{12}z + g_{22}|^2\right)},$$

$$g \in G, \quad z \in \mathbf{C}. \qquad (1)$$

**1.21. Квадратный корень из квазирегулярного представления.** Представление $T$ группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{C}^2)$, определяемое формулой $[T(g)f](x, y) = f(g_{11}x + g_{21}y,\ g_{12}x + g_{22}y)$ $(g \in G,\ x, y \in \mathbf{C})$, называется *квазирегулярным представлением*. (Преобразование Меллина $f \to \tilde{f}$, где $\tilde{f}(\chi) = \int\limits_{\mathbf{C}^*} f(tx, ty)\,\chi(t)\,|t|^{-2}dt$, осуществляет разложение представления $T$ в однократный прямой интеграл представлений основной серии $T^{\rho,m}$.) Представление $(T^{0,1} \oplus S_1) \oplus (T^{0,1} \oplus S_1)$ унитарно эквивалентно представлению $T$.

**1.22. Собственная группа Лоренца.** $SO_e(3, 1)$ изоморфна факторгруппе группы $SL(2, \mathbf{C})$ по ее центру; отображение накрытия определяется формулой

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \to g = (g_{ij})_{i,j=1}^{4}, \qquad (1)$$

где $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{C})$, а $g$ — вещественная матрица:

$$g = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma}) & -\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\delta - \bar{\beta}\gamma) & \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\gamma - \bar{\beta}\delta) & \operatorname{Re}(\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta}) \\ \operatorname{Im}(\alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma}) & \operatorname{Re}(\alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma}) & \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\gamma - \bar{\beta}\delta) & \operatorname{Im}(\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta}) \\ \operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta}) & -\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta}) & \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) & \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}) \\ \operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta}) & -\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta}) & \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}) & \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

**1.23. Групповая $C^*$-алгебра группы $SL(2, \mathbf{C})$.** Пусть $H$ — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, $K$ — бесконечномерное подпространство в $H$ с одномерным ортогональным дополнением $C$, $U$ — фиксированный изометрический оператор в $H$ с областью значений $K$. Пусть $\Omega$ — пространство пар $\{\rho, m\}$ ($\rho \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{Z}$), где либо $m > 0$, $\rho \in \mathbf{R}$, либо $m = 0$ и $\rho \in \mathbf{R}$ ($\rho \geqslant 0$), либо $m = 0$, $i\rho \in \mathbf{R}$ ($0 < \rho \leqslant 2$). Тогда групповая $C^*$-алгебра $C^*(SL(2, \mathbf{C}))$ группы $SL(2, \mathbf{C})$ изоморфна $C^*$-алгебре таких непрерывных по норме отображений $F$ пространства $\Omega$ в $C^*$-алгебру $CB(H)$ вполне непрерывных линейных операторов в пространстве $H$, что 1) $F$ стремится к нулю на бесконечности на $\Omega$; 2) пространства $K$ и $C$ приводят оператор $F(2, 0)$, причем $U^*F(2, 0)U = F(0, 2)$.

Литература: [61], [62], [63], [65], [122], [131], [132], [133], [158], [169], [198], [199], [279], [283], [375], [592].

## § 2. Группа $SL(n, \mathbf{C})$

**2.1. Разложения Гаусса.** Примем обозначения 6.3.1, 6.3.2. Дополним формулы 6.3.2 формулами для разложения Гаусса вида

$$g = hz_-, \quad h \in H, \quad z_- \in Z_-; \tag{1}$$

это разложение существует для любого элемента $g$ из множества $G'_{\mathrm{reg}}$ таких матриц $g \in G$, у которых миноры вида $g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ p & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix}$, где $1 \leqslant p \leqslant n$, отличны от нуля. Для таких матриц $g$ разложение (1) единственно, и элементы матриц $h$ и $z_-$ определяются формулами

$$h_{pq} = g\begin{pmatrix} p & q+1 & \ldots & n \\ q & q+1 & \ldots & n \end{pmatrix}\left(g\begin{pmatrix} q+1 & q+2 & \ldots & n \\ q+1 & q+2 & \ldots & n \end{pmatrix}\right)^{-1}, \quad p \leqslant q, \tag{2}$$

$$z_{pq} = g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ q & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix}\left(g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ p & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix}\right)^{-1}, \quad p > q. \tag{3}$$

Множество $G'_{\mathrm{reg}}$ открыто и всюду плотно в $G$. В дальнейшем мы будем иногда использовать обозначение $z$ вместо $z_-$.

**2.2. Разложения Ивасавы и Картана** Пусть $U = SU(n)$; группа $U$ является максимальной компактной подгруппой в группе $G$. Любой элемент $g \in G$ допускает однозначное представление в виде

$$g = \varepsilon z_+ u, \quad \varepsilon \in E, \quad z_+ \in Z_+, \quad u \in U, \tag{1}$$

а также в виде

$$g = u'\varepsilon' z'_+, \quad \varepsilon' \in E, \quad z'_+ \in Z_+, \quad u' \in U. \tag{2}$$

Разложения (1) и (2) называются *разложениями Ивасавы* в группе $G$. Кроме того, любой элемент $g$ группы $G$ допускает представление в виде

$$g = uav, \quad a \in A, \quad u, v \in U; \tag{3}$$

разложение (3) называется *разложением Картана* в группе $G$.

**2.3. Основная серия представлений.** Пусть $\alpha$ — неунитарный характер группы $H$, определяемый формулой

$$\alpha(h) = \prod_{k=2}^{n} |h_{kk}|^{-m_k+\sigma_k} h_{kk}^{m_k}, \text{ где } h = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \in H, \tag{1}$$

числа $m_2, \ldots, m_n$ — целые, а $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ — комплексные числа. Пусть $L^2(U)$ — гильбертово пространство измеримых функций на группе $U$, квадратично интегрируемых относительно меры Хаара на $U$; пусть $L^2_\alpha(U)$ — подпространство в $L^2(U)$, образованное такими функциями $f \in L^2(U)$, что $f(\gamma u) = \alpha(\gamma) f(u)$ для почти всех $u \in U$ при любом $\gamma \in \Gamma$. Формула

$$[T^\alpha(g) f](u) = \alpha(h) f(u\bar{g}), \tag{2}$$

где $u \in U$, $g \in G$, $ug = h \cdot u\bar{g}$ $(h \in H,\ u\bar{g} \in U)$, $f \in L^2_\alpha(U)$, корректно (несмотря на неоднозначность разложения (1) п. 2.2) определяет (непрерывное) представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2_\alpha(U)$. Семейство представлений $T^\alpha$ образует основную (неунитарную) серию представлений группы $G$. Все представления $T^\alpha$ операторно неприводимы; они вполне неприводимы тогда и только тогда, когда они неприводимы.

Ограничение $T^\alpha|_U$ представления $T^\alpha$ на подгруппу $U$ содержит те и только те неприводимые представления $\tau_\beta$ группы $U = SU(n)$ (см. 6.3.5), ограничение которых на подгруппу $\Gamma = H \cap U$ содержит ограничение $\alpha|_\Gamma$ характера $\alpha$ на подгруппу $\Gamma$, причем кратность вхождения представления $\tau_\beta$ в $T^\alpha|_U$ равна кратности вхождения характера $\alpha|_\Gamma$ в $\tau_\beta|_\Gamma$. Среди неприводимых представлений $\tau_\beta$, содержащихся в разложении представления $T^\alpha|_U$ на неприводимые подпредставления, представление с наинизшим старшим весом встречается в точности один раз. Этот наинизший старший вес совпадает с весом, получаемым из характера $\alpha|_\Gamma$ расстановкой соответствующих целых чисел в невозрастающем порядке, так что, в соответствии с формулой (1), он однозначно определяется набором целых чисел $m_2, m_3, \ldots, m_n$.

**2.4. Конечномерные неприводимые представления.** Пусть $\theta_\alpha$ (соответственно $\bar{\theta}_\alpha$) — аналитическое (соответственно антианалитическое) продолжение представления $\tau_\alpha$ (см. 6.3.5) на группу $G = SL(n, \mathbf{C})$. Для любых неприводимых представлений $\tau_\alpha$ и $\tau_\beta$ группы $SU(n)$ тензорное произведение $\pi_{\alpha,\beta} = \theta_\alpha \otimes \bar{\theta}_\beta$ является неприводимым представлением группы $G$. Представления вида $\pi_{\alpha,\beta}$, где $\alpha$ и $\beta$ независимо пробегают множество характеров вида (1) 6.3.4 ($p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$ — неотрицательные целые числа), образуют полный набор попарно неэквивалентных неприводимых конечномерных представлений группы $G$.

Представление $\pi_{\alpha,\beta}$ можно реализовать в пространстве $\Phi_{\alpha,\beta}$ непрерывных функций на группе $Z_+ \times Z_+$, которое является линейной оболочкой семейства функций $f$ на $Z_+ \times Z_+$ вида $f(z_1, z_2) = \alpha(k_1^g)\beta^{-1}(\tilde{k}_2^g)$ $(z_1, z_2 \in Z_+)$, где $g$ пробегает группу

$G$, а элементы $k_1^g$ и $\tilde{k}_2^g$ определяются формулами

$$z_1 g = k_1^g \cdot z_1\bar{g}, \quad k_1^g \in K, \quad z_1\bar{g} \in Z_+;$$
$$z_2 g^* = \tilde{k}_2^g \cdot z_2\overline{g^*}, \quad \tilde{k}_2^g \in K, \quad z_2\overline{g^*} \in Z_+. \qquad (1)$$

Представление $\pi_{\alpha,\beta}$ реализуется в этом пространстве формулой

$$[\pi_{\alpha,\beta}(g) f](z_1, z_2) = \alpha(z_1 g)\beta(z_2 g^{*-1}) f(z_1\bar{g}, z_2\overline{g^{*-1}}), \qquad f \in \Phi_{\alpha,\beta}, \quad (2)$$

где элементы $z_1\bar{g}, z_2\overline{g^{*-1}} \in Z_+$ определяются формулами (1), а функции $\alpha$ и $\beta$ считаются продолженными на $G'_{\mathrm{reg}}$ по формуле

$$\alpha(\delta\zeta z) = \alpha(\delta), \quad \beta(\delta\zeta z) = \beta(\delta), \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z_-, \quad z \in Z_+, \quad (3)$$

и затем на всю группу $G$ по непрерывности.

Характер $\chi_{\alpha,\beta}$ представления $\pi_{\alpha,\beta}$ определяется формулой

$$\chi_{\alpha,\beta}(g) = \chi_\alpha(g)\overline{\chi_\beta(g^{-1})}, \qquad g \in G, \quad (4)$$

где $\chi_\alpha$ и $\chi_\beta$ определены формулами (6.3.8), а размерность представления $\pi_{\alpha,\beta}$ есть произведение размерностей представлений $\pi_\alpha$ и $\pi_\beta$, определяемых формулой (6.3.7).

Единичное представление является единственным, с точностью до эквивалентности, неприводимым конечномерным унитарным представлением группы $SL(n, \mathbf{C})$. Остальные конечномерные неприводимые представления группы $SL(n, \mathbf{C})$ унитарны относительно некоторого индефинитного скалярного произведения.

**2.5. Основная невырожденная серия унитарных представлений Гельфанда — Наймарка.** Представление $T^\alpha$ (см. (2) п. 2.3) унитарно тогда и только тогда, когда

$$\sigma_k = i\rho_k - 2(k-1), \; k = 2, 3, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $\rho_k$ — произвольные вещественные числа. Семейство непрерывных унитарных представлений $T^\alpha$, связанных условием (1), называется *основной невырожденной серией унитарных представлений Гельфанда — Наймарка* группы $G = SL(n, \mathbf{C})$. Представления основной невырожденной серии задаются, таким образом, двумя наборами чисел: целыми $m_2, m_3, \ldots, m_n$ и вещественными $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$. Все представления основной невырожденной серии неприводимы.

Представления $T^\alpha$ основной невырожденной серии допускают также реализацию в гильбертовом пространстве $L^2(Z)$ измеримых функций на группе $Z = Z_-$, квадратично интегрируемых относительно инвариантной меры

$$d\mu(z) = \prod_{1 \leqslant q < p \leqslant n} dx_{pq}\, dy_{pq}, \qquad (2)$$

где $z_{pq} = x_{pq} + iy_{pq}$ $(x_{pq}, y_{pq} \in \mathbf{R})$ при всех $p > q$. А именно, представление $\tilde{T}^\alpha$, унитарно эквивалентное представлению $T^\alpha$, определяется тем же характером $\alpha$ группы $H$ по формуле

$$[\tilde{T}^\alpha(g) f](z) = \alpha(h) f(z\bar{g}), \qquad f \in L^2(Z), \qquad (3)$$

где $z \in Z$, $g \in G$, а $zg = h \cdot z\bar{g}$ $(h \in H,\ z\bar{g} \in Z)$ — разложение Гаусса (см. п. 2.1). Положим $g_m = g\begin{pmatrix} m & m+1 & \dots & n \\ m & m+1 & \dots & n \end{pmatrix}$ в обозначениях п. 2.1. Пространство $L^2(Z)$ можно отождествить с пространством всех таких измеримых функций $f = f(\{z_{pq}\}_{1 \leqslant q < p \leqslant n})$ от $n(n-1)/2$ комплексных переменных, что интеграл

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(\{z_{pq}\}_{1 \leqslant q < p \leqslant n})|^2 \prod_{1 \leqslant q < p \leqslant n} dx_{pq}\, dy_{pq} \tag{4}$$

конечен, и представление $\widetilde{T}^\alpha$ определяется формулой

$$[\widetilde{T}^\alpha(g) f](\{z_{pq}\}_{1 \leqslant q < p \leqslant n}) =$$

$$= |(zg)_2|^{i\rho_2 - m_2 - 2} (zg)_2^{m_2} |(zg)_3|^{m_2 - m_3 + i(\rho_3 - \rho_2) - 2} (zg)^{m_3 - m_2} \dots \times$$

$$\times |(zg)_n|^{m_{n-1} - m_n + i(\rho_n - \rho_{n-1}) - 2} (zg)_n^{m_n - m_{n-1}} \times$$

$$\times f\left(\left\{(zg)\begin{pmatrix} p & p+1 & \dots & n \\ q & p+1 & \dots & n \end{pmatrix}(zg)_p^{-1}\right\}_{1 \leqslant q < p \leqslant n}\right). \tag{5}$$

Унитарный оператор $V\colon L^2_\alpha(U) \to L^2(Z)$, осуществляющий эквивалентность представлений $T^\alpha$ и $\widetilde{T}^\alpha$ основной невырожденной серии в различных реализациях, задается формулой

$$(Vf)(z) = \alpha(h) f(u) \text{ для } z = hu,\ z \in Z,\ h \in H,\ u \in U. \tag{6}$$

Пусть $\chi$ — унитарный характер группы $H$, связанный с характером $\alpha$ формулой

$$\chi(h) = \alpha(h) \prod_{k=2}^{n} |h_{kk}|^{2(k-1)}, \qquad h \in H. \tag{7}$$

Два представления $T^\alpha, T^{\alpha'}$ основной невырожденной серии унитарных представлений эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им по формуле (7) характеры $\chi$ и $\chi'$ обладают тем свойством, что $\chi'(h) = \chi(h')$ для всех таких $h$, $h' \in H$, что диагональные элементы матрицы $h'$ образуют фиксированную перестановку диагональных элементов матрицы $h$, т. е. тогда и только тогда, когда характеры $\chi$ и $\chi'$ лежат на одной орбите относительно группы Вейля группы $G$.

**2.6. Основные вырожденные серии Гельфанда — Наймарка.** Пусть

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r, \quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_r, \tag{1}$$

где $r > 1$ и $n_1, n_2, \dots, n_r$ — натуральные числа, хотя бы одно из которых больше единицы. Всякому такому разбиению числа $n$ соответствует некоторая серия непрерывных неприводимых унитарных представлений группы $G$. Эта серия, называемая *основной вырожденной серией*, строится следующим образом (с точки зрения нижеследующего построения основная невырожденная серия из п. 2.5 может рассматриваться как серия, соответствующая представлению числа $n$ в виде суммы единиц).

Обобщенное разложение Гаусса. Представим матрицу $g \in G$ в виде $g = (g_{pq})_{p,q=1}^{r}$, где $g_{pq}$ — матрица с $n_p$ строками и $n_q$ столбцами. Пусть $H_{(n_1,\ldots,n_r)}$ — подгруппа соответствующих верхних блочно-треугольных матриц в группе $G$ (т. е. $H_{(n_1,\ldots,n_r)} = \left\{ h: h = (h_{pq})_{p,q=1}^{r}, \ h_{pq} = 0 \text{ при } p > q, \prod_{p=1}^{r} \det(h_{pp}) = 1 \right\}\Big)$. Пусть $Z_{(n_1,\ldots,n_r)}$ — подгруппа соответствующих нижних блочно-треугольных матриц с единичными матрицами на диагонали (т. е. $Z_{(n_1,\ldots,n_r)} = \{z: z = (z_{pq})_{p,q=1}^{r}, z_{pq} = 0 \text{ при } p < q, z_{pp} = 1_{n_p}\}$). Множество $G'_{(n_1,\ldots,n_r)}$ матриц вида $hz$, где $h \in H_{(n_1,\ldots,n_r)}$, $z \in Z_{(n_1,\ldots,n_r)}$, открыто и всюду плотно в $G$, и если $g \in G'_{(n_1,\ldots,n_r)}$ и

$$g = hz, \quad h \in H_{(n_1,\ldots,n_r)}, \quad z \in Z_{(n_1,\ldots,n_r)}, \tag{2}$$

то матрицы $h_{pq} = \{(h_{pq})_{\lambda\mu}\}$, $z_{pq} = \{(z_{pq})_{\lambda\mu}\}$ определяются формулами (в обозначениях пп. 2.1 и 2.5)

$$(h_{pq})_{\lambda\mu} = (g)^{-1}_{n_1+\ldots+n_q+1} \times$$
$$\times g \begin{pmatrix} n_1 + \ldots + n_p + \lambda & n_1 + \ldots + n_q + 1 & n_1 + \ldots + n_q + 2 \ldots n \\ n_1 + \ldots + n_{q-1} + \mu & n_1 + \ldots n_q + 1 & n_1 + \ldots + n_q + 2 \ldots n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $p \leqslant q$, $1 \leqslant \lambda \leqslant n_p$, $1 \leqslant \mu \leqslant n_q$, а

$$z_{pq} = b_{pp}^{-1} b_{pq}, \tag{4}$$

где матрицы $b_{pq}$ определяются равенствами

$$(b_{pq})_{\lambda\mu} = (g)^{-1}_{n_1+n_2+\ldots+n_p+1} \times$$
$$\times g \begin{pmatrix} n_1 + \ldots + n_{p-1} + \lambda & n_1 + \ldots + n_p + 1 & n_1 + \ldots + n_p + 2 \ldots n \\ n_1 + \ldots + n_{q-1} + \mu & n_1 + \ldots + n_p + 1 & n_1 + \ldots + n_p + 2 \ldots n \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $p \geqslant q$, $1 \leqslant \lambda \leqslant n_p$, $1 \leqslant \mu \leqslant n_q$.

Определение основных вырожденных серий. Пусть $\alpha$ — одномерное представление группы $H_{(n_1,\ldots,n_r)}$, определяемое формулой

$$\alpha(h) = \prod_{k=2}^{r} |\det h_{kk}|^{i\rho_k - m_k - \left(n_1 + 2\sum_{j=2}^{k-1} n_j + n_k\right)} (\det h_{kk})^{m_k}, \tag{6}$$

где $\rho_2, \ldots, \rho_r$ — произвольные вещественные числа, а $m_2, \ldots, m_r$ — произвольные целые числа; при $k = 2$ сумма $\sum_{j=2}^{k-1}$ считается равной нулю. Пусть $L^2(Z_{(n_1,\ldots,n_r)})$ — гильбертово пространство измеримых функций на группе $Z_{(n_1,\ldots,n_r)}$, квадратично интегрируемых по мере

$$d\mu(z) = \prod_{1 \leqslant q < p \leqslant r} \prod_{\substack{1 \leqslant \lambda \leqslant n_p \\ 1 \leqslant \mu \leqslant n_q}} d(x_{pq})_{\lambda\mu} d(y_{pq})_{\lambda\mu},$$

где $(x_{pq})_{\lambda\mu} = \mathrm{Re}\,(z_{pq})_{\lambda\mu}$, $(y_{pq})_{\lambda\mu} = \mathrm{Im}\,(z_{pq})_{\lambda\mu}$. Формула

$$[\widetilde{T}^{\alpha}(g) f](z) = \alpha(h) f(z\bar{g}), \qquad f \in L^2(Z_{(n_1,\ldots,n_r)}), \tag{7}$$

где $z \in Z_{(n_1,\ldots,n_r)}$, $g \in G$, а $zg = h \cdot z\bar{g}$ при $h \in H_{(n_1,\ldots,n_r)}$, $z\bar{g} \in Z_{(n_1,\ldots,n_r)}$, определяет тогда унитарное представление $\widetilde{T}^{\alpha}$ группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2(Z_{(n_1,\ldots,n_r)})$; совокупность этих представлений, связанных с данным разбиением $n = n_1 + \ldots + n_r$, образует соответствующую этому разбиению основную вырожденную серию непрерывных унитарных представлений группы $G$. Все эти представления неприводимы.

Представления $\widetilde{T}^{\alpha}$ основной вырожденной серии допускают также реализацию в пространстве функций на группе $U$. Пусть $\Gamma_{(n_1,\ldots,n_r)} = U \cap H_{(n_1,\ldots,n_r)}$, т.е. $\Gamma_{(n_1,\ldots,n_r)}$ — совокупность таких блочных матриц $g = (g_{pq})_{p,q=1}^r$, что $g_{pq} = 0$ при $p \neq q$, $g_{pp} \in U(n_p)$ при $p = 1, 2, \ldots, r$ и $\prod_{p=1}^{r} \det g_{pp} = 1$. Любой элемент $g \in G$ допускает представление в виде произведения $g = hu$, где $h \in H_{(n_1,\ldots,n_r)}$, $u \in U$, и если также $g = h'u'$ $(h' \in H_{(n_1,\ldots,n_r)}, u' \in U)$, то $h' = h\gamma^{-1}$, $u' = \gamma u$ для некоторого элемента $\gamma \in \Gamma_{(n_1,\ldots,n_r)}$. Пусть $L^2_{\alpha}(U)$ — подпространство в гильбертовом пространстве $L^2(U)$, образованное такими функциями $f \in L^2(U)$, что $f(\gamma u) = \alpha(\gamma) f(u)$ для почти всех $u \in U$ при любом $\gamma \in \Gamma_{(n_1,\ldots,n_r)}$. Тогда формула

$$[T^{\alpha}(g) f](u) = \alpha(h) f(u\bar{g}), \qquad f \in L^2_{\alpha}(U), \tag{8}$$

где $u \in U$, $g \in G$ и $ug = h \cdot u\bar{g}$ $(h \in H_{(n_1,\ldots,n_r)}, u\bar{g} \in U)$, корректно определяет представление $T^{\alpha}$ группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2_{\alpha}(U)$, унитарно эквивалентное представлению $\widetilde{T}^{\alpha}$, с помощью отображения $V: L^2_{\alpha}(U) \to L^2(Z)$, определяемого формулой

$$(Vf)(z) = \alpha(h) f(u), \qquad f \in L^2_{\alpha}(U), \tag{9}$$

для $z = hu$ $(z \in Z_{(n_1,\ldots,n_r)}, h \in H_{(n_1,\ldots,n_r)}, u \in U)$.

Ограничение $T^{\alpha}|_U$ представления $T^{\alpha}$ на подгруппу $U$ содержит неприводимое представление $\tau_{\beta}$ подгруппы $U = SU(n)$ с кратностью, равной кратности, с которой ограничение представления $\tau_{\beta}$ на подгруппу $\Gamma_{(n_1,\ldots,n_r)}$ содержит ограничение $\alpha|_{\Gamma_{(n_1,\ldots,n_r)}}$ характера $\alpha$ на подгрупну $\Gamma_{(n_1,\ldots,n_r)}$.

Пусть $\chi$ — унитарный характер группы $H(n_1, \ldots, n_r)$, связанный с характером $\alpha$ (см. (6)) формулой

$$\chi(h) = \prod_{k=2}^{r} |\det h_{kk}|^{i\rho_k - m_k} (\det h_{kk})^{m_k}, \quad h \in H_{(n_1, \ldots, n_r)}. \tag{10}$$

Два представления $T^\alpha$, $T^{\alpha'}$ основной вырожденной серии унитарных представлений эквивалентны тогда и только тогда, когда они связаны с одним и тем же разбиением вида (1) и соответствующие им по формуле (10) унитарные характеры $\chi$ и $\chi'$ обладают тем свойством, что $\chi'(h) = \chi(h')$ для всех таких матриц $h, h' \in H_{(n_1, \ldots, n_r)}$, что наборы диагональных блоков одинаковых размеров у матриц $h'$ и $h$ получаются один из другого фиксированной перестановкой, т. е. тогда и только тогда, когда $\chi$ и $\chi'$ лежат на одной орбите относительно действия группы Вейля группы $G$.

**2.7. Дополнительная невырожденная серия.** Пусть $\dot{Z}_k$ — семейство блочных матриц $\dot{z} = (\dot{z}_{ij})_{i,j=1}^{k+1}$, где $\dot{z}_{ij}$ — матрица с $n_i$ строками и $n_j$ столбцами, причем $n_1 = n - 2k$, $n_2 = \ldots = n_{k+1} = 2$, $\dot{z}_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\dot{z}_{11}$ — единичная матрица порядка $n - 2k$, а $\dot{z}_{ii}$ — нижние треугольные матрицы второго порядка с единицами на главной диагонали; обозначим матричный элемент $(\dot{z}_{ii})_{21}$ через $z_{i-1}$. Пусть $A$ — функция на семействе $\dot{Z}_k$, определенная формулой

$$A(\dot{z}) = \prod_{j=1}^{k} |z_j|^{2\tau_j - 2}, \tag{1}$$

где $\tau_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ — некоторые числа на интервале $(0, 1)$. Пусть $L$ — линейное пространство всех измеримых функций $f$ на подгруппе $Z$, которые допускают оценку вида

$$|f(z)| \leqslant |\varphi(\hat{z})| \prod_{j=1}^{k} (1 + |z_j|^2)^{-2-2\tau_j}, \tag{2}$$

где $z_1, \ldots, z_k$ — переменные, стоящие в матрице $z$ на тех же местах, на которых стоят переменные $z_1, \ldots, z_k$ в матрицах семейства $\dot{z}$, $\hat{z}$ — набор переменных матрицы $z$, расположенных в остальных матричных элементах, а $\varphi$ — некоторая квадратично интегрируемая (по обычной лебеговой мере) функция своих аргументов. Пусть характер $\alpha$ определен формулой (1) п. 2.3, где

$$\sigma_j = i\rho_j - 2(j - 1), \quad j = 2, \ldots, n, \tag{3}$$

причем первые $n - 2k$ чисел $\rho_j$ вещественны, а следующие за ними пары чисел $\rho_j$ суть такие пары комплексно сопряженных чисел, что модули мнимых частей в этих парах последовательно равны числам $\tau_1, \ldots, \tau_k$, а соответствующие целые числа $m_j$ попарно равны, так что

$$\rho_{n-2k+2j-1} = \rho'_j - i\tau_j, \quad \rho_{n-2k+2j} = \rho'_j + i\tau_j,$$
$$m_{n-2k+2j-1} = m_{n-2k+2j} = m'_j, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

Пусть $\mathscr{H}^\alpha$ — гильбертово пространство, являющееся пополнением евклидова пространства, получаемого введением в векторном пространстве $L$ скалярного произведения по формуле

$$(f_1, f_2) = \int A(\dot{z}) f_1(z) \overline{f_2(\dot{z}z)}\, d\dot{z}\, dz, \quad f_1, f_2 \in L, \tag{5}$$

где функция $A$ определяется формулой (1). Рассмотрим формулу

$$[T^\alpha(g)f](z) = \alpha(h) f(z\bar{g}), \quad f \in L, \tag{6}$$

где $g \in G$, $z \in Z$, $zg = h \cdot z\bar{g}$ $(h \in H,\ z\bar{g} \in Z)$ и $\alpha(h) = \beta(h)^{-1/2}\chi(h)$ $(h \in H)$, причем

$$\beta(h) = \prod_{j=2}^{n} |h_{jj}|^{4j-4}, \tag{7}$$

$$\chi(h) = \prod_{p=2}^{n-2k} |h_{pp}|^{m_p + i\rho_p} h_{pp}^{-m_p} \prod_{j=1}^{k} |\lambda_j|^{m'_j + i\rho'_j + \tau_j} \lambda_j^{-m'_j} |\mu_j|^{m'_j + i\rho'_j - \tau_j} \mu_j^{-m'_j}, \tag{8}$$

где $\lambda_j = h_{n-2k+2j-1,\, n-2k+2j-1}$, $\mu_j = h_{n-2k+2j,\, n-2k+2j}$. Формула (6) определяет (при продолжении по непрерывности с $L$ на все пространство $\mathscr{H}^\alpha$) непрерывное унитарное представление $T^\alpha$ группы $G$ в $\mathscr{H}^\alpha$, называемое представлением *дополнительной невырожденной серии* группы $G$. Таким образом, представление $T^\alpha$ дополнительной невырожденной серии определяется: натуральным числом $k$ $(2k \leqslant n)$, целыми числами $m_2, \ldots, m_{n-2k}, m'_1, \ldots, m'_k$ и вещественными числами $\rho_2, \ldots, \rho_{n-2k}$, $\rho'_1, \ldots, \rho'_k, \tau_1, \ldots, \tau_k$, где $0 < \tau_j < 1$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Все представления дополнительной невырожденной серии неприводимы.

Отметим, что пространство $\mathscr{H}^\alpha$ состоит из всех обобщенных функций $f$, измеримых по переменным из семейства $\hat{Z}$, преобразования Фурье которых по переменным $z_1, \ldots, z_k$ являются обычными функциями из пространства $L^2$ с весом; если

$$\varphi(w_1, \ldots, w_k, \hat{z}) = (2\pi)^{-k} \int f(z_1, \ldots, z_k, \hat{z}) \exp\left(i \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{z}_j\right) dx_1 dy_1 \ldots dx_k dy_k,$$

где $z_j = x_j + iy_j$, $w_j = u_j + iv_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, то функция $f$ содержится в $\mathscr{H}^\alpha$ тогда и только тогда, когда

$$\int |\varphi(w_1, \ldots, w_k, \hat{z})|^2 \left(\prod_{j=1}^{k} |w_j|^{-2\tau_j}\right) du_1 dv_1 \ldots du_k dv_k d\mu(\hat{z}) < \infty.$$

Представление $T^\alpha$ дополнительной невырожденной серии эквивалентно по Наймарку представлению $T^\alpha$ основной (неунитарной) серии с тем же характером $\alpha$. Ограничение представлений дополнительной невырожденной серии на компактную подгруппу

$U$ устроено в точности так же, как и ограничение представлений основной невырожденной серии (см. п. 2.3).

Два представления $\tilde{T}^{\alpha}$, $\tilde{T}^{\alpha'}$ дополнительной серии эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им характеры $\chi$, $\chi'$, связанные с $\alpha$, $\alpha'$ формулами $\alpha=\beta^{-1/2}\chi$, $\alpha'=\beta^{-1/2}\chi'$ (см. (7), (8)), лежат на одной орбите относительно группы Вейля группы $G$ (ср. п. 2.5), т. е. $\chi(h)=\chi'(h')$, если диагональные элементы матрицы $h'$ образуют фиксированную перестановку диагональных элементов матрицы $h$, где $h$, $h'\in H$.

**2.8. Дополнительная вырожденная серия.** Представления *дополнительных вырожденных серий* определяются целым числом $k$ (таким, что $2k<n$) и разбиением $n=n_1+\ldots+n_r$, в котором последние $2k$ чисел равны единице. Представление $\tilde{T}^{\alpha}$ дополнительной вырожденной серии реализуется в пространстве $H^{\alpha}$ функций на подгруппе $Z_{(n_1,\ldots,n_r)}$ по формуле

$$[\tilde{T}^{\alpha}(g)f](z)=\alpha(h)f(z\bar{g}), \tag{1}$$

где $g\in G$, $z\in Z_{(n_1,\ldots,n_r)}$, $zg=h\cdot\bar{zg}$ $\left(h\in H_{(n_1,\ldots,n_r)},\ \bar{zg}\in Z_{(n_1,\ldots,n_r)}\right)$ и $\alpha(h)=\beta(h)^{-1/2}\chi(h)$ $(h\in H)$, причем

$$\beta(h)=|\det h_{22}|^{2(n_1+n_2)}|\det h_{33}|^{2(n_1+2n_2+n_3)}\ldots$$
$$\ldots|\det h_{rr}|^{2(n_1+2n_2+\ldots+2n_{r-1}+n_r)} \tag{2}$$

в обозначениях п. 2.6, а

$$\chi(h)=\prod_{p=2}^{r-2k}|\det h_{pp}|^{m_p+i\rho_p}(\det h_{pp})^{-m_p}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{k}|\lambda_j|^{m'_j+i\rho'_j+\tau_j}\lambda_j^{-m'_j}|\mu_j|^{m'_j+i\rho'_j-\tau_j}\mu_j^{-m'_j}, \tag{3}$$

где $\lambda_j=\det(h_{n-2k+2j-1,\,n-2k+2j-1})$, $\mu_j=\det(h_{n-2k+2j,\,n-2k+2j})$ при $j=1,\ldots,k$, причем $0<\tau_j<1$ $(j=1,\ldots,k)$, числа $m_2,\ldots,m_{r-2k},m'_1,\ldots,m'_k$ — целые, числа $\rho_2,\ldots,\rho_{r-2k},\rho'_1,\ldots,\rho'_k$ — вещественные.

Представления дополнительных вырожденных серий неприводимы.

Ограничение представления вырожденной дополнительной серии на компактную подгруппу $U$ устроено так же, как и ограничения представлений основной вырожденной серии (см. п. 2.6).

Два представления $\tilde{T}^{\alpha}$, $\tilde{T}^{\alpha'}$ дополнительной вырожденной серии эквивалентны тогда и только тогда, когда связанные с характерами $\alpha$, $\alpha'$ характеры $\chi$, $\chi'$ $(\chi=\alpha\beta^{1/2},\ \chi'=\alpha'\beta^{1/2})$ лежат на одной орбите относительно группы Вейля (ср. пп. 2.4, 2.6, 2.7).

Отметим, что любые два неприводимых унитарных представления из построенных в пп. 2.4, 2.6, 2.7 и 2.8, принадлежащие различным сериям, не эквивалентны.

**2.9. Представления Штейна.** Пусть $n$ четно $(n=2k)$. Пусть $G=SL(2k, \mathbf{C})$, и пусть

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad g\in G, \quad g_{ij}\in M_k(\mathbf{C}), \quad i,j=1,2. \tag{1}$$

Рассмотрим подгруппы $H=H(k, k)$ (так что $h_{21}=0$ для $h\in H$) и $Z=Z(k, k)$ (так что $z_{11}=z_{22}$ есть единичная матрица $1_k$ порядка $k$, а $z_{12}=0$). Обозначим через $z$ матрицу $z_{21}$ соответствующего элемента группы $Z$.

Пусть $\alpha_\rho$ — характер группы $H$, определяемый формулой

$$\alpha_\rho(h)=|\det(h_{22})|^{2\rho-2k}, \qquad -1<\operatorname{Re}\rho<1. \tag{2}$$

Пусть $\widetilde{T}^{\alpha_\rho}$ — соответствующее (вообще говоря, неунитарное) представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2(Z)$, определенное формулой (7) п. 2.6. В этой формуле $[\widetilde{T}^{\alpha_\rho}(g)f](z)=\alpha_\rho(h)f(z\bar{g})$, величины $\alpha_\rho(h)$ и $z\bar{g}$ определяются в соответствии с (4), (5) п. 2.6 формулами

$$z\bar{g}=(zg_{12}+g_{22})^{-1}(zg_{11}+g_{21}), \quad \alpha_\rho(h)=|\det(zg_{12}+g_{22})|^{-2k+2\rho}. \tag{3}$$

Введем в пространстве представления, т. е. в $L^2(Z)$, оператор $A(\sigma)$, определенный при $\operatorname{Re}\sigma\geqslant 2k$ на множестве финитных бесконечно дифференцируемых функций на $L^2(Z)$, носитель которых не пересекается с множеством вырожденных матриц, с помощью формулы

$$[A(\sigma)f](z)=\gamma_*(\sigma)^{-1}\int\limits_{M_k(\mathbf{C})} f(x)\,|\det(z-x)|^{-2k+\sigma}dx, \tag{4}$$

где $\gamma_*(\sigma)=\gamma(\sigma)\gamma(\sigma-2)\ \ldots\ \gamma(\sigma-2k+2)$, а функция $\gamma$ определяется равенством $\gamma(\sigma)=\pi^{1-\sigma}\Gamma(\sigma/2)\Gamma((2-\sigma)/2)$ $(\sigma\in\mathbf{C})$. Тогда векторнозначная функция $A(\sigma)f$ допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость и определяет в гильбертовом пространстве $L^2(Z)$ семейство операторов $\{A(\sigma), \sigma\in\mathbf{C}\}$ с общей плотной областью определения, причем на этой области выполняется соотношение $A(\sigma_1+\sigma_2)f=A(\sigma_1)A(\sigma_2)f$ $(\sigma_1, \sigma_2\in\mathbf{C})$, а операторы $A(\sigma)$ при $\operatorname{Re}\sigma=0$ допускают продолжение по непрерывности до унитарных операторов в пространстве $L^2(Z)$. Обозначим это продолжение снова через $A(\sigma)$.

Рассмотрим теперь семейство операторов

$$S^\sigma(g)=A(-\sigma)\widetilde{T}^{\alpha_\sigma}A(\sigma), \qquad g\in G, \qquad \operatorname{Re}\sigma=0. \tag{5}$$

Так как при $i\sigma\in\mathbf{R}$ операторы $A(\sigma)$ унитарны и выполняется соотношение $A(-\sigma)=A(\sigma)^{-1}$, то операторнозначная функция $S^\sigma(g)$ $(g\in G)$ образует непрерывное унитарное представление группы $G$, эквивалентное представлению $\widetilde{T}^{\alpha_\sigma}$ основной вырожденной серии.

Оказывается, семейство операторов $S^\sigma(g)$ $(g\in G, \operatorname{Re}\sigma=0)$ допускает при каждом $g\in G$ аналитическое продолжение в полосу $-1 < \operatorname{Re} \sigma < 1$. Обозначим операторы, полученные при этом продолжении, снова через $S^\sigma(g)$ $(g \in G)$. Тогда отображение $g \to S^\sigma(g)$ $(g \in G)$ определяет при любом фиксированном $\sigma$ $(|\operatorname{Re} \sigma| < 1)$ сильно непрерывное вполне неприводимое равномерно ограниченное представление $S^\sigma$ группы $G$ в пространстве $L^2(Z)$, которое унитарно при $\operatorname{Im} \sigma = 0$ $(-1 < \sigma < 1)$. Полученные неприводимые унитарные представления $S^\sigma$ $(\operatorname{Im} \sigma = 0,\ 0 < |\sigma| < 1)$ называются *представлениями Штейна.*

Отметим, что при всех комплексных $\sigma$ с $|\operatorname{Re} \sigma| < 1$ ограничение представления $S^\sigma$ на компактную подгруппу $U$ устроено так же, как и ограничение на $U$ представления основной вырожденной серии, отвечающего разбиению $n = 2k = k + k$ и характеру $\alpha = \beta^{-1/2}$ (см. п. 2.6).

Если $k > 1$, то унитарные представления $S^\sigma$ $(\operatorname{Im} \sigma = 0,\ 0 < |\sigma| < 1)$ не эквивалентны представлениям, построенным в пп. 2.4, 2.6—2.8. Представления $S^{\sigma_1}$, $S^{\sigma_2}$ $(\operatorname{Im} \sigma_1 = \operatorname{Im} \sigma_2 = 0,$ $0 < |\sigma_1|,\ |\sigma_2| < 1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\sigma_1 = \sigma_2$ или $\sigma_1 = -\sigma_2$.

**2.10. Характеры неприводимых унитарных представлений группы $SL(n, \mathbf{C})$.** Пусть $\varphi$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция на группе $G = SL(n, \mathbf{C})$. Для всех построенных выше представлений $T$ этой группы оператор $T(\varphi)$ есть оператор со следом (ср. 4.4.2), и $\operatorname{tr} T(\varphi) = \int\limits_G \varphi(g)\, \chi_T(g)\, dg$ для всех $\varphi \in C_c^\infty(G)$, где $\chi_T$ — некоторая локально интегрируемая функция на $G$. В обозначениях 4.4.2 имеем для представлений основной (неунитарной) серии:

$$\chi_{T^\alpha}(g) = \frac{\sum \chi(\delta(g))}{\prod\limits_{1 \leqslant q < p \leqslant n} |\lambda_g^{(p)} - \lambda_g^{(q)}|^2}, \qquad g \in G, \tag{1}$$

где $\chi = \alpha\beta^{1/2}$, характер $\beta$ определен формулой (7) п. 2.7 (ср. (7) п. 2.5), $\lambda_g^{(1)}, \ldots, \lambda_g^{(n)}$ — набор собственных значений матрицы $g \in G$ в некотором порядке, $\delta(g) = \operatorname{diag}(\lambda_g^{(1)}, \ldots, \lambda_g^{(n)})$, а сумма в числителе в (1) берется по всем перестановкам собственных значений $\lambda_g^{(1)}, \ldots, \lambda_g^{(n)}$ матрицы $g \in G$.

В частности, формула (1) справедлива для представлений основной невырожденной серии унитарных представлений и для представлений дополнительной невырожденной серии (см. пп. 2.5, 2.7).

Для представлений $\tilde{T}^\alpha$ основной вырожденной серии и дополнительной вырожденной серии, отвечающих разбиению $n = n_1 + \ldots + n_r$, а также для представлений Штейна (отвечающих разбиению $n = n/2 + n/2$ для четного $n$) имеем

$$\chi_{\tilde{T}^\alpha}(g) = \sum \chi(\delta) \frac{D(\delta_1) \ldots D(\delta_r)}{D(g)} |\det \delta_1|^{-n_1} \ldots |\det \delta_r|^{-n_r}; \tag{2}$$

сумма в (3) берется по всем таким блочно-диагональным матрицам $\delta = (\delta_{pq})_{p,q=1}^{r}$ (т. е. $\delta_{pq} = 0$ при $p \neq q$, $\delta_p = \delta_{pp} \in GL(n_p, \mathbf{C})$ при $p = 1, \ldots, r$ и $\prod_{p=1}^{r} \det(\delta_{pp}) = 1$), что $g = z^{-1}\zeta^{-1}\delta\zeta z$ для некоторых матриц $z \in Z(n_1, \ldots, n_r)$, $\zeta^* \in Z(n_1, \ldots, n_r)$, а функционал $\chi$ в (2) связан с функционалом $\alpha$ равенством $\chi = \alpha\beta^{1/2}$, где $\beta$ определен формулой (2) п. 2.8; наконец,

$$D(g) = \prod_{1 \leqslant q < p \leqslant n} |\lambda_g^{(p)} - \lambda_g^{(q)}|^2, \qquad g \in G, \tag{3}$$

где $\lambda_g^{(1)}, \ldots, \lambda_g^{(n)}$ — набор собственных значений матрицы $g \in G$ в некотором порядке, и величины $D(\delta_j)$ $(j = 1, \ldots, r)$ определяются аналогично.

Для представлений Штейна в формуле (2) следует взять $r = 2$, $n_1 = n_2 = n/2$ и $\chi(\delta) = |\det(\delta_{22})|^{2\rho}$ $(\delta \in H(n/2, n/2))$, $0 < |\rho| < 1$).

**2.11. Явный вид формулы Планшереля для $SL(n, \mathbf{C})$.** Пусть $\{T^\alpha\}$ — семейство представлений основной невырожденной серии унитарных представлений группы $G$ (см. (1)—(5) п. 2.5). Формула

$$\int |\varphi(g)|^2 d\mu(g) = \\ = \sum_{m_2, \ldots, m_n \in \mathbf{Z}} \int_{\{\rho_2, \ldots, \rho_n\} \in \mathbf{R}^{n-1}} \operatorname{tr}\left(T^\alpha(\varphi)^* T^\alpha(\varphi)\right) \omega(\alpha)\, d\rho_2 \ldots d\rho_n \tag{1}$$

(где

$$\omega(\alpha) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} (2\pi)^{-(n-1)(n+2)} (n!)^{-1} \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n} \left[(\rho_p - \rho_q)^2 + (m_p - m_q)^2\right] \tag{2}$$

с учетом условия $\rho_1 = m_1 = 0$, а $\mu$ — мера Хаара на группе $G$, определяемая с учетом условия $dg_{pq} = d\operatorname{Re} g_{pq} d\operatorname{Im} g_{pq}$ равенством

$$d\mu(g) = d_l h\, dz,$$

$$d_l h = \prod_{j=2}^{n} |h_{jj}|^{2j-4} dh_{jj} \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n} dh_{pq}, \quad dz = \prod_{1 \leqslant q < p \leqslant n} dz_{pq}, \tag{3}$$

если $g = hz$, $h \in H$, $z \in Z$; ср. п. 2.1) справедлива для всех $\varphi \in L^1(G) \cap L^2(G)$; отображение $\varphi \to \{T^\alpha(\varphi)\}$ допускает продолжение по непрерывности до унитарного оператора из $L^2(G)$ на прямой интеграл соответствующих гильбертовых пространств. Формула (1) является аналогом формулы Планшереля.

Формула

$$\varphi(g) = \\ = \sum_{m_2, \ldots, m_n \in \mathbf{Z}} \int_{\{\rho_2, \ldots, \rho_{n-1}\} \in \mathbf{R}^{n-1}} \operatorname{tr}\left(T^\alpha(\varphi)\, T^\alpha(g^{-1})\right) \omega(\alpha)\, d\rho_2 \ldots d\rho_n, \\ g \in G, \tag{4}$$

справедливая, в частности, для всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi$ на $G$, является формулой обращения для преобразования Фурье $\varphi \to \{T^{\alpha}(\varphi)\}$ $(\varphi \in K(G))$.

**2.12. Полный набор неприводимых унитарных представлений группы $SL(3, \mathbf{C})$.** Построенные выше представления позволяют построить такой набор; его образуют следующие представления:

а) единичное представление;

б) представления основной серии (см. п. 2.5);

в) представления основной вырожденной серии (см. п. 2.6) с $n_1 = 2$, $n_2 = 1$;

г) представления дополнительной невырожденной серии (см. п. 2.7).

Утверждение, что единичное представление и неприводимые унитарные представления группы $SL(n, \mathbf{C})$ $(n > 3)$, построенные в пп. 2.5—2.9, образуют полный набор неприводимых унитарных представлений группы $SL(n, \mathbf{C})$, в настоящее время не доказано, но и не опровергнуто.

**2.13. Тензорные произведения неприводимых унитарных представлений группы $SL(n, \mathbf{C})$.** Они разложены в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений этой группы далеко не во всех случаях. В частности, в случае тензорного произведения представлений основной серии эта задача разложения решена методом орисфер в рамках общей теории тензорных произведений неприводимых унитарных представлений основной унитарной серии комплексной полупростой группы Ли. Получены разложения тензорных произведений представлений основной и дополнительной невырожденной серий, а также тензорных произведений двух представлений основной максимально вырожденной серии $(n_1 = n - 1, n_2 = 1$; см. п. 2.6) группы $SL(n, \mathbf{C})$.

Литература: [67], [99], [100], [104], [217], [258], [260], [421], [549], [570], [576].

## § 3. Ортогональные и симплектические группы

**3.1. Разложения Гаусса, Ивасавы и Картана.** Пусть $G$ — одна из комплексных полупростых групп $SO(2n+1, \mathbf{C})$ (группа типа $B_k$ при $n \geqslant 2$), $Sp(2n, \mathbf{C})$ (группа типа $C_n$ при $n \geqslant 3$), $SO(2n, \mathbf{C})$ (группа типа $D_n$ при $n \geqslant 4$). Причем обозначения 6.4.1, 6.4.2, 6.5.1, 6.5.3. Дополним формулы этих пунктов формулой для разложения Гаусса вида

$$g = hz_-, \quad h \in H, \quad z_- \in Z_-; \tag{1}$$

это разложение имеет смысл для любого элемента $g$ из множества $G'_{\mathrm{reg}}$ таких матриц $g \in G$, что все миноры вида $g\begin{pmatrix} p & p+1 \dots m \\ p & p+1 \dots m \end{pmatrix}$ $(1 \leqslant p \leqslant m)$, отличны от нуля, где $m$ — порядок матриц из группы $G$. Для таких матриц $g$ разложение (1) единственно, и элементы матриц $h$ и $z_-$ определяются формулами (2), (3) п. 2.1 (где вместо $n$ следует писать $m$). Множество $G'_{\mathrm{reg}}$ открыто и всюду плотно в $G$.

В дальнейшем мы будем иногда использовать обозначение $Z$ вместо $Z_-$.

Группа $U=G\cap U(m)$ является максимальной компактной подгруппой в группе $G$. Любой элемент $g\in G$ допускает однозначное представление в виде

$$g=\varepsilon z_+u, \quad \varepsilon\in E, \quad z_+\in Z_+, \quad u\in U, \tag{2}$$

а также в виде

$$g=u'\varepsilon'z'_+, \quad \varepsilon'\in E, \quad z_+\in Z_+, \quad u'\in U_-. \tag{3}$$

Разложения (2) и (3) называются *разложениями Ивасавы* в группе $G$. Кроме того, любой элемент $g$ группы $G$ допускает представление в виде

$$g=uav, \quad a\in A, \quad u, \ v\in U; \tag{4}$$

разложение (4) называется *разложением Картана* в группе $G$.

**3.2. Мера Хаара на группе $Z$.** Если $G=SO(2n, \mathbf{C})$ и $z=\begin{pmatrix}\eta_{-1} & 0\\ a & \eta\end{pmatrix}\in Z$, то $z$ единственным образом представляется в виде произведения $z=xy\left(x=\begin{pmatrix}1_n & 0\\ \xi & 1_n\end{pmatrix}, \ y=\begin{pmatrix}\eta_{-1} & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}\right)$, где $x, y\in Z$ (см. 6.5.1), так что матрица $\hat{\xi}=s_1\xi$ кососимметрична, $\eta\in Z_-^{(n)}$, $\eta_{-1}=s_1\eta'^{-1}s_1$ и независимые параметры в $Z$ суть $\eta_{pq}$ $(n+1\leqslant q<p\leqslant 2n)$ и элементы $\hat{\xi}_{pq}$, лежащие над главной диагональю матрицы $\xi$. Инвариантная мера $d\mu(z)$ есть произведение дифференциалов этих независимых параметров, а также произведение дифференциалов элементов $z_{pq}$ матрицы $z\in Z$ с $2n+1-p<q<p$ $(1\leqslant p, \ q\leqslant 2n)$.

Если $G=Sp(n, \mathbf{C})$, то произвольный элемент $z$ группы $Z$ единственным образом представляется в виде произведения $z=xy$ $\left(x=\begin{pmatrix}1_n & 0\\ \xi & 1_n\end{pmatrix}, \ y=\begin{pmatrix}\eta_{-1} & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}\right)$, где $x, y\in Z$ (см. п. 6.4.1), так что матрица $\hat{\xi}=s_1\xi$ симметрична, $\eta\in Z_-^{(n)}$, $\eta_{-1}=s_1\eta'^{-1}s_1$ и независимые параметры в $Z$ суть $\eta_{pq}$ $(n+1\leqslant q<p\leqslant 2n)$ и элементы $\hat{\xi}_{pq}$ матрицы $\hat{\xi}$, лежащие над главной диагональю матрицы $\hat{\xi}$ и на ней. Инвариантная мера $d\mu(z)$ есть произведение дифференциалов этих независимых параметров, а также произведение дифференциалов элементов $z_{pq}$ матрицы $z\in Z$ с $2n+1-p\leqslant q<p$ $(1\leqslant p, \ q\leqslant 2n)$.

Если $G=SO(2n+1, \mathbf{C})$, то произвольный элемент $z$ группы $Z$ единственным образом представляется в виде произведения $z=xy$ $(x, \ y\in Z)$, где

$$x=\begin{pmatrix}1_n & 0 & 0\\ \eta_0 & 1 & 0\\ \xi & \xi_0 & 1_n\end{pmatrix}, \quad y=\begin{pmatrix}\eta_{-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \eta\end{pmatrix},$$

так что матрица $\hat{\xi} = s_1\xi' + (1/2)\,\xi_0\xi_0'$ кососимметрична, $\eta \in Z_-^{(n)}$, $\eta_0 = -\xi_0' s_1$, $\xi_0$ — произвольный комплексный $n$-столбец, и независимыми параметрами в $Z$ являются элементы $\eta_{pq}$ $(n+2 \leqslant q < p \leqslant 2n+1)$, элементы столбца $\xi_0$ и элементы $\hat{\xi}_{pq}$, лежащие над главной диагональю матрицы $\hat{\xi}$. Инвариантная мера $d\mu(z)$ есть произведение дифференциалов этих независимых параметров, а также произведение дифференциалов элементов $z_{pq}$ матрицы $z \in Z$ с $2n+2-p < q < p$ $(1 \leqslant p,\ q \leqslant 2n+1)$.

Пусть $zg = h \cdot z\bar{g}$, где $h \in H$, $z\bar{g} \in Z$ — разложение Гаусса (см. (1) п. 3.1) элемента $zg$ $(z \in Z,\ g \in G)$. Отображение $z \to z\bar{g}$ $(z \in Z,\ g \in G)$ определено почти всюду и измеримо; мера $d\mu(z)$ переходит при этом отображении в меру $d\mu(z\bar{g})$, плотность которой по мере $d\mu(z)$ определяется формулой

$$d\mu(z\bar{g})/d\mu(z) = \beta^{-1}(zg), \qquad z \in Z, \quad g \in G, \tag{1}$$

где функция $\beta$, удовлетворяющая соотношению

$$\beta(g) = \beta(hz) = \beta(h) \text{ для } g \in G'_{\mathrm{reg}}, \quad g = hz, \quad h \in H, \quad z \in Z, \tag{2}$$

определяется своим ограничением на $H$; это ограничение есть плотность Радона — Никодима левоинвариантной меры на группе $H$ по правоинвариантной мере и задается формулой

$$\beta(h) = \begin{cases} \prod\limits_{p=2}^{n} |h_{rr}|^{4p-4} & \text{для } G = SO(2n, \mathbf{C}), \quad (3а) \\ \prod\limits_{p=1}^{n} |h_{rr}|^{4p-2} & \text{для } G = SO(2n+1, \mathbf{C}), \quad (3б) \\ \prod\limits_{p=1}^{n} |h_{rr}|^{4p} & \text{для } G = Sp(2n, \mathbf{C}), \quad (3в) \end{cases}$$

где $r = m - n + p$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ во всех случаях. Аналогично, разложение Ивасавы

$$ug = h \cdot u\bar{g}, \qquad h \in H, \quad u\bar{g} \in H, \tag{4}$$

элемента $ug$ $(u \in U,\ g \in G)$ определяет меру $d\mu(u\bar{g})$, плотность которой по инвариантной мере $d\mu(u)$ определяется с помощью характера $\beta$ (см. (3)) по формуле

$$d\mu(u\bar{g})/d\mu(u) = \beta(u\bar{g})(\beta(ug))^{-1}, \qquad u \in U, \quad g \in G. \tag{5}$$

**3.3. Основная серия представлений.** Пусть $\alpha$ — характер (вообще говоря, неунитарной) группы $H$, определяемый формулой

$$\alpha(h) = \prod_{p=1}^{n} |h_{rr}|^{m_p + \sigma_p} h_{rr}^{-m_p}, \quad r = m - n + p, \quad h = \{h_{ik}\} \in H, \tag{1}$$

причем $m_1, \ldots, m_n$ — целые, а $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — комплексные числа. Пусть $L^2(U)$ — гильбертово пространство измеримых функций на группе $U$, квадратично интегрируемых относительно меры Хаара на $U$; пусть $L^2_\alpha(U)$ — подпространство (замкнутое) в $L^2(U)$, образованное такими функциями $f \in L^2(U)$, что $f(\gamma u) = \alpha(\gamma) f(u)$ для почти всех $u \in U$ при любом $\gamma \in \Gamma$. Формула

$$[T^\alpha(g)f](u) = \alpha(h) f(u\bar{g}), \tag{2}$$

где $u \in U$, $g \in G$, $ug = h \cdot u\bar{g}$ ($h \in H$, $u\bar{g} \in H$), $f \in L^2_\alpha(u)$, корректно (несмотря на неоднозначность разложения (4) п. 3.2, определенного с точностью до $h \to h\gamma$, $u\bar{g} \to \gamma^{-1} \cdot u\bar{g}$ для $\gamma \in \Gamma$) определяет (непрерывное) представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2_\alpha(U)$. Семейство представлений $T^\alpha$ образует основную (неунитарную) серию представлений группы $G$. Представления $T^\alpha$ вполне неприводимы тогда и только тогда, когда они неприводимы.

Ограничение $T^\alpha|_U$ представления $T^\alpha$ на подгруппу $U$ содержит те и только те неприводимые представления $\pi_\beta$ группы $U$ (см. 6.4.3, 6.5.4), ограничение которых на подгруппу $\Gamma$ содержит ограничение $\alpha|_\Gamma$ характера $\alpha$ на $\Gamma$, причем кратность вхождения представления $\pi_\beta$ в $T^\alpha|_U$ равна кратности вхождения $\alpha|_\Gamma$ в $\pi_\beta|_\Gamma$. Среди неприводимых представлений $\pi_\beta$, содержащихся в разложении представления $T^\alpha|_U$ на неприводимые подпредставления, представление с наинизшим старшим весом встречается в точности один раз. Этот наинизший старший вес совпадает с весом, получаемым из характера $\alpha|_\Gamma$ расстановкой соответствующих целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ в невозрастающем порядке; в соответствии с формулой (1) этот наинизший старший вес однозначно определяется набором $(m_1, \ldots, m_n)$. В частности, единичное представление содержится в $T^\alpha|_U$ тогда и только тогда, когда $m_1 = \ldots = m_n = 0$. Соответствующий матричный элемент (зональная сферическая функция) определяется формулой

$$\varphi(\delta) = c \frac{\sum (\deg s)\, \chi(\delta_s)}{\sum (\deg s)\, \beta^{-1/2}(\delta_s)}, \quad \delta \in D, \quad \chi = \alpha\beta^{1/2}, \tag{3}$$

где $c$ — некоторая постоянная (такая, что $\varphi(c) = 1$), а суммирование распространено на подстановки $s$, переводящие $\delta$ снова в элемент группы $D$ (или группы $G$).

**3.4. Конечномерные неприводимые представления.** Пусть $\theta_\alpha$ (соответственно $\overline{\theta}_\alpha$) — аналитическое (соответственно антианалитическое) продолжение представления $\pi_\alpha$ (см. 6.4.3, 6.5.4) группы $U$ на группу $G$. Для любых неприводимых представлений $\pi_\alpha$ и $\pi_\beta$ группы $U$ тензорное произведение $\pi_{\alpha,\beta} = \theta_\alpha \otimes \overline{\theta}_\beta$ является неприводимым конечномерным представлением группы $G$. Представления вида $\pi_{\alpha,\beta}$, где $\alpha$ и $\beta$ независимо пробегают множество соответствующих характеров (см. 6.4.3, 6.5.4), образуют полный набор попарно неэквивалентных неприводимых представлений группы $G$.

Представление $\pi_{\alpha,\beta}$ можно реализовать в пространстве $\Phi_{\alpha,\beta}$ непрерывных функций на группе $Z_+ \times Z_+$, которое является линейной оболочкой семейства функций $f$ на $Z_+ \times Z_+$ вида $f(z_1, z_2) = \alpha(k_1^g)\beta^{-1}(\tilde{k}_2^g)$ $(z_1, z_2 \in Z_+)$, где $g$ пробегает группу $G$, а элементы $k_1^g$ и $\tilde{k}_2^g$ определяются формулами

$$z_1 g = k_1^g \cdot \overline{z_1 g}, \quad z_2 g^* = \tilde{k}_2^g \cdot \overline{z_2 g^*}, \quad k_1^g, \ \tilde{k}_2^g \in K, \quad \overline{z_1 g}, \ \overline{z_2 g^*} \in Z_+. \tag{1}$$

Представление $\pi_{\alpha,\beta}$ реализуется в $\Phi_{\alpha,\beta}$ по формуле

$$[\pi_{\alpha,\beta}(g)f](z_1, z_2) = \alpha(z_1 g)\beta(z_2 g^{*-1}) f(\overline{z_1 g}, \overline{z_2 g^{*-1}}), \qquad f \in \Phi_{\alpha,\beta}, \tag{2}$$

где элементы $\overline{z_1 g}$, $\overline{z_2 g^{*-1}} \in Z_+$ определяются формулами (1), а функции $\alpha$ и $\beta$ считаются продолженными на $G'_{\text{reg}}$ по формуле

$$\alpha(kz) = \alpha(k), \quad \beta(kz) = \beta(k), \quad k = K, \quad z \in Z_+, \tag{3}$$

а затем на всю группу $G$ по непрерывности.

Характер $\chi_{\alpha,\beta}$ представления $\pi_{\alpha,\beta}$ определяется формулой

$$\chi_{\alpha,\beta}(g) = \chi_\alpha(g)\overline{\chi_\beta(g^{-1})}, \qquad g \in G, \tag{4}$$

где $\chi_\alpha$, $\chi_\beta$ определены в 6.4.3, 6.5.4, а размерность представления $\pi_{\alpha,\beta}$ есть произведение размерностей представлений $\pi_\alpha$ и $\pi_\beta$, также определенных в 6.4.3, 6.5.4.

Единичное представление является единственным, с точностью до эквивалентности, неприводимым конечномерным унитарным представлением группы $SO(m, \mathbf{C})$ при $m > 2$ и группы $Sp(2n, \mathbf{C})$ при $n \geqslant 1$. Остальные конечномерные неприводимые представления этих групп унитарны относительно индефинитного скалярного произведения.

**3.5. Основная невырожденная серия унитарных представлений Гельфанда — Наймарка.** Представление $T^\alpha$ (см. (2) п. 3.3) унитарно тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \chi\beta^{-1/2}, \tag{1}$$

где $\chi$ — унитарный характер группы $G$, а характер $\beta$ определяется формулой (3) п. 3.2. Семейство непрерывных унитарных представлений $T^\alpha$, связанных условием (1), называется *основной невырожденной серией унитарных представлений Гельфанда — Наймарка* группы $G$. Представления основной невырожденной серии задаются, таким образом, двумя наборами чисел: целыми $m_1, \ldots, m_n$ и вещественными $\rho_1, \ldots, \rho_n$, где $\rho_k = \operatorname{Im} \sigma_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Все представления основной невырожденной серии неприводимы.

Представления $T^\alpha$ допускают также реализацию в гильбертовом пространстве $L^2(Z)$ измеримых функций на группе $Z$, квадратично интегрируемых относительно инвариантной меры $d\mu(z)$ на $Z$, описанной в п. 3.2. А именно, представление $\tilde{T}^\alpha$, унитарно эквивалентное представлению $T^\alpha$, определяется тем же характером $\alpha$ группы $H$ по формуле

$$[\tilde{T}^\alpha(g)f](z) = \alpha(h)f(z\bar{g}), \qquad f \in L^2(Z), \tag{2}$$

где $z \in Z$, $g \in G$, а $zg = h \cdot z\bar{g}$ ($h \in H$, $z\bar{g} \in Z$) — разложение Гаусса (см. (1) п. 3.1). Положим

$$\Delta_p = g\begin{pmatrix} m-n+p & m-n+p+1 & \dots & m \\ m-n+p & m-n+p+1 & \dots & m \end{pmatrix} \tag{3}$$

и воспользуемся обозначениями (3) п. 2.1, полагая $z_{pq} = z_{pq}(g)$.

Пусть $G = SO(2n, \mathrm{C})$, т. е. $G$ — группа типа $D_n$ ($n \geqslant 2$). Тогда пространство $L^2(Z)$ можно отождествить с пространством всех таких измеримых функций $f$ от комплексных переменных $z_{pq}$ ($2n+1-p < q < p$, $1 \leqslant p$, $q \leqslant 2n$), что интеграл

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\{z_{pq}\})|^2 \prod_{\substack{1 \leqslant p \leqslant 2n, \\ 2n+1-p<q<p}} dx_{pq}\, dy_{pq} \tag{4а}$$

конечен (где $x_{pq} = \operatorname{Re} z_{pq}$, $y_{pq} = \operatorname{Im} z_{pq}$), и представление $\tilde{T}^\alpha$ определяется явной формулой

$$[\tilde{T}^\alpha(g) f](\{z_{pq}\}) = |\Delta_1|^{m_1+i\rho}\Delta_1^{-m_1} |\Delta_2|^{m_2-m_1-2+i(\rho_2-\rho_1)}\Delta_2^{-m_2+m_1} \dots$$
$$\dots |\Delta_n|^{m_n-m_{n-1}-2+i(\rho_n-\rho_{n-1})}\Delta_n^{-m_n+m_{n-1}} \times$$
$$\times f\left(\left\{(zg)\begin{pmatrix} p & p+1 & \dots & 2n \\ q & p+1 & \dots & 2n \end{pmatrix}\Delta_{p-n}^{-1}\right\}\right). \tag{5а}$$

Унитарный оператор $V\colon L^2_\alpha(U) \to L^2(Z)$, осуществляющий эквивалентность представлений $T^\alpha$ и $\tilde{T}^\alpha$ основной невырожденной серии в различных реализациях, задается формулой

$$(Vf)(z) = \alpha(h) f(u) \quad \text{для} \quad z = hu, \quad z \in Z, \quad h \in H, \quad u \in U. \tag{6}$$

Пусть $G = Sp(2n, \mathrm{C})$, т. е. $G$ — группа типа $C_n$ ($n \geqslant 2$). Тогда пространство $L^2(Z)$ можно отождествить с пространством всех таких измеримых функций от комплексных переменных $z_{pq}$ ($2n+1-p \leqslant q < p$, $1 \leqslant p$, $q \leqslant 2n$), что интеграл

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\{z_{pq}\})|^2 \prod_{\substack{1 \leqslant p \leqslant 2n, \\ 2n+1-p \leqslant q<p}} dx_{pq}\, dy_{pq} \tag{4б}$$

конечен и представление $\tilde{T}^\alpha$ определяется формулой

$$[\tilde{T}^\alpha(g) f](\{z_{pq}\}) = |\Delta_1|^{m_1+i\rho_1-2}\Delta_1^{-m_1} |\Delta_2|^{m_2-m_1-2+i(\rho_2-\rho_1)}\Delta_2^{-m_2+m_1} \dots$$
$$\dots |\Delta_n|^{m_n-m_{n-1}-2+i(\rho_n-\rho_{n-1})}\Delta_n^{-m_n+m_{n-1}} \times$$
$$\times f\left(\left\{(zg)\begin{pmatrix} p & p+1 & \dots & 2n \\ q & p+1 & \dots & 2n \end{pmatrix}\Delta_{p-n}^{-1}\right\}\right), \tag{5б}$$

где $f \in L^2(Z)$, а эквивалентность $T^\alpha$ и $\tilde{T}^\alpha$ осуществляется оператором $V$, определяемым равенством (6).

Пусть $G = SO(2n+1, \mathrm{C})$, т. е. $G$ — группа типа $B_n$ ($n \geqslant 1$). Тогда пространство $L^2(Z)$ можно отождествить с пространством всех таких измеримых функций $f$ от комплексных переменных

$z_{pq}$ $(2n+2-p<q<p,\ 1\leqslant p,\ q\leqslant 2n+1)$, что интеграл

$$\|f\|^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(\{z_{pq}\})|^2\prod_{\substack{1\leqslant p\leqslant 2n+1\\ 2n+2-p<q<p}}dx_{pq}\,dy_{pq}\tag{4в}$$

конечен, и представление $\tilde{T}^\alpha$ определяется формулой

$$[\tilde{T}^\alpha(g)f](\{z_{pq}\})=|\Delta_1|^{m_1+i\rho_1-1}\Delta_1^{-m_1}|\Delta_2|^{m_2-m_1-2+i(\rho_2-\rho_1)}\Delta_2^{-m_2+m_1}\dots$$
$$\dots|\Delta_n|^{m_n-m_{n-1}-2+i(\rho_n-\rho_{n-1})}\Delta_n^{-m_n+m_{n-1}}\times$$
$$\times f\left(\left\{(zg)\begin{pmatrix}p & p+1 & \dots & 2n+1\\ q & p+1 & \dots & 2n+1\end{pmatrix}\Delta_{p-n-1}^{-1}\right\}\right),\tag{5в}$$

где $f\in L^2(Z)$, а эквивалентность представлений $T^\alpha$ и $\tilde{T}^\alpha$ осуществляется оператором $V$, определяемым равенством (6).

Пусть $T^\alpha$, $T^{\alpha'}$ — два представления основной невырожденной серии унитарных представлений, $\chi$ и $\chi'$ — унитарные характеры, соответствующие характерам $\alpha$ и $\alpha'$ по формуле (1). Представления $\alpha$ и $\alpha'$ эквивалентны тогда и только тогда, когда характеры $\chi$ и $\chi'$ лежат на одной орбите относительно группы Вейля группы $G$, т. е. тогда и только тогда, когда $\chi'(\delta)=\chi(\delta')$ для всех таких $\delta$, $\delta'\in D$, что диагональные элементы матрицы $\delta'$ образуют фиксированную перестановку диагональных элементов матрицы $\delta\in D$ (не выводящую, таким образом, за пределы группы $D$).

**3.6. Основные вырожденные серии.** Заметим, что представления основной невырожденной серии, описанные в п. 3.5, суть унитарные представления, индуцированные унитарными характерами борелевской, т. е. минимальной параболической, подгруппы группы $G$. Унитарные представления, индуцированные унитарными характерами других параболических подгрупп группы $G$, называются представлениями *основных вырожденных серий.* В отличие от представлений основной невырожденной серии, эти представления, как мы увидим, могут оказаться приводимыми. Мы рассмотрим два примера представлений основных вырожденных серий.

а) Основные вырожденные серии Гельфанда — Наймарка. Введем новую нумерацию базиса в пространстве $\mathbf{C}^m$, полагая, что векторы базиса имеют нумерацию $e_{-n_r}, e_{-n+1}, \dots, e_{-1}, \dots, e_n$ (с пропущенным нулевым индексом, если $m$ четно). Пусть $n_0\leqslant m$ — такое неотрицательное целое, что $m-n_0$ четно, и пусть $m=n_{-r}+n_{-r+1}+\dots+n_0+n_1+\dots+n_r$ — разбиение числа $m$ в сумму неотрицательных целых слагаемых, удовлетворяющих условию $n_{-k}=n_k$ $(k=1,\dots,r)$. Пусть $H^{(m)}_{(-n_r,\dots,n_r)}$, $Z^{(m)}_{(-n_r,\dots,n_r)}$, $G'^{(m)}_{(-n_r,\dots,n_r)}$, $\Gamma^{(m)}_{(-n_r,\dots,n_r)}$ суть подмножества $H_{(-n_r,\dots,n_r)}$, $Z_{(-n_r,\dots,n_r)}$, $G'_{(-n_r,\dots,n_r)}$, $\Gamma_{(-n_r,\dots,n_r)}$ в группе $SL(m,\mathbf{C})$ (построенные в п. 2.6); положим

$$\begin{aligned}H_{(n_0,n_1,\dots,n_r)}&=H^{(m)}_{(-n_r,\dots,n_r)}\cap G, & Z_{(n_0,n_1,\dots,n_r)}&=Z^{(m)}_{(-n_r,\dots,n_r)}\cap G,\\ G'_{(n_0,n_1,\dots,n_r)}&=G'^{(m)}_{(-n_r,\dots,n_r)}\cap G, & \Gamma_{(n_0,n_1,\dots,n_r)}&=\Gamma^{(m)}_{(-n_r,\dots,n_r)}\cap G.\end{aligned}\tag{1}$$

Тогда, в частности, множество $G'_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$ открыто и всюду плотно в $G$ и множество $G'_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$ совпадает с множеством элементов $g$ группы $G$, допускающих (автоматически единственное) представление в виде произведения

$$g = hz, \quad h \in H_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}, \quad z \in Z_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}, \tag{2}$$

где элементы матриц $h$ и $z$ определяются формулами (3)—(5) п. 2.6.

Пусть $G$ — ортогональная группа четного порядка, и пусть $n_0 = 0$. В этом случае матрица $z \in Z_{(0,n_1,\ldots,n_r)}$ имеет вид блочной матрицы $z = \begin{pmatrix} z_{-1} & 0 \\ a & z_1 \end{pmatrix}$, где $z_1 \in Z^{(n)}_{(n_1,\ldots,n_r)}$, $z_{-1} = s_1 z_1'^{-1} s_1$, $a = s_1 \hat{\xi} \times$ $\times\, s_1 z_1'^{-1} s_1$, причем $\hat{\xi}$ — произвольная кососимметричная матрица порядка $n$. Инвариантная мера $d\mu(z)$ на группе $Z_{(0,n_1,\ldots,n_r)}$ определяется в этом случае формулой $d\mu(z) = d\mu(z_1) d\mu(\hat{\xi})$, где $d\mu(\hat{\xi})$ — произведение дифференциалов элементов матрицы $\hat{\xi}$, стоящих над главной диагональю, а $d\mu(z_1)$ — инвариантная мера в $Z^{(n)}_{(n_1,\ldots,n_r)}$, описанная в п. 2.6; та же мера определяется формулой $d\mu(z) = \prod\limits_{p>|q|>0} dz_{pq}$ (где произведение распространяется на все непостоянные матричные элементы матрицы $z \in Z_{(n_0,\ldots,n_r)}$, удовлетворяющие условию $p > |q| > 0$).

Аналогично, если $G = Sp(2n, C)$ и $n_0 = 0$, то матрицы группы $Z_{(0,n_1,\ldots,n_r)}$ имеют аналогичную параметризацию, но с симметричной матрицей $\hat{\xi}$, так что $d\mu(z) = d\mu(z_1) d\mu(\hat{\xi})$, где $d\mu(\hat{\xi})$ есть произведение дифференциалов элементов матрицы $\hat{\xi}$, стоящих на главной диагонали и над ней, или $d\mu(z) = \prod\limits_{p>|q|>0} dz_{pq} \prod\limits_{p>0} dz_{p,-p} =$ $= \prod\limits_{p \geqslant |q| > 0,\, p \neq q} dz_{pq}$.

Если группа ортогональна и $n_0 \neq 0$, то инвариантная мера $d\mu(z)$ есть произведение $\prod\limits_{p>|q|\geqslant 0} dz_{pq}$; если симплектична и $n_0 \neq 0$, то $d\mu(z) = \prod\limits_{p>|q|\geqslant 0} dz_{pq} \prod\limits_{p>0} dz_{p,-p}$. В обоих случаях, как и в предыдущих, можно выразить $d\mu(z)$ через дифференциалы независимых параметров типа $z_1$, $\hat{\xi}$ и вспомогательных столбцов (или строк).

Модуль $\beta(h) = d\mu_l(h)/d\mu_r(h)$ $(h \in H)$ определяется формулой

$$\beta(h) = \prod_{k=1}^{r} |\det(h_{kk})|^{2n_0 + 4\sum\limits_{j=1}^{k-1} n_j}, \quad h \in H_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}, \tag{3a}$$

для ортогональной группы (сумма $\sum\limits_{j=1}^{0}$ считается равной нулю) и формулой

$$\beta(h)=\prod_{k=1}^{r}|\det(h_{kk})|^{2n_0+4\sum\limits_{j=1}^{k}n_j},\qquad h\in H_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)},\tag{3б}$$

для симплектической группы. Формула

$$\beta(hz)=\beta(h),\quad h\in H_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)},\quad z\in Z_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)},\tag{4}$$

определяет продолжение функции $\beta$ на $G'_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$.

Определим теперь представление основной вырожденной серии Гельфанда — Наймарка группы $G$. Оно определяется разбиением $m=\sum\limits_{k=-r}^{r}n_k,\quad n_{-k}=n_k\quad(k=1,\ldots,r)$ и унитарным характером $\chi$ подгруппы $H_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$, определенным равенством

$$\chi(h)=\prod_{k=1}^{r}|\det(h_{kk})|^{m_k+i\rho_k}(\det(h_{kk}))^{-m_k},\qquad h\in H_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)},\tag{5}$$

т. е. набором из $r$ целых чисел $(m_1,\ldots,m_r)$ и $r$ вещественных чисел $(\rho_1,\ldots,\rho_r)$. А именно, положим

$$\alpha(h)=\beta^{-1/2}(h)\chi(h),\qquad h\in H_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)},\tag{6}$$

и определим представление $\tilde{T}^\alpha$ группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2(Z_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)})$, построенном по описанной выше в этом пункте инвариантной мере на группе $Z_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$, с помощью формулы

$$[\tilde{T}^\alpha(g)f](z)=\alpha(h)f(z\bar{g}),\qquad f\in L^2(Z_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}),\tag{7}$$

где $z\in Z_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$ $(g\in G)$, а $zg=h\cdot z\bar{g}$ $(h\in H_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$, $z\bar{g}\in Z_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)})$ — обобщенное разложение Гаусса (см. (2)). Формула (7) определяет унитарное представление группы $G$; совокупность этих представлений, связанных с данным разложением $m=\sum\limits_{k=-r}^{r}n_k$, называется соответствующей этому разбиению *основной вырожденной серией непрерывных унитарных представлений Гельфанда — Наймарка* группы $G$. Все эти представления неприводимы.

Представления $\tilde{T}^\alpha$ основной вырожденной серии Гельфанда — Наймарка допускают также реализацию в пространстве функций на группе $U$, совершенно аналогичную реализации для $SL(n, \mathbb{C})$ (см. п. 2.6). Ограничение $\tilde{T}^\alpha|_U$ содержит представление $\pi_\beta$ подгруппы $U$ с кратностью, равной кратности, с которой ограничение представления $\pi_\beta$ на подгруппу $\Gamma_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$ содержит ограничение характера $\alpha$ (или характера $\chi$) на подгруппу $\Gamma_{(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$. Два представления основных вырожденных серий, соответствующих разбиениям $m=\sum_{k=-r}^{r} n_k=\sum_{k=-r'}^{r} n_k'$, могут быть эквивалентны лишь в случае, если $n_0=n_0'$, $r=r'$ и $(n_1, \ldots, n_r)$ отличается от $(n_1', \ldots, n_r')$ лишь перестановкой, т. е. фактически представления принадлежат одной основной вырожденной серии; два представления $\widetilde{T}^{\alpha}$, $\widetilde{T}^{\alpha'}$ основной вырожденной серии, соответствующей разбиению $m=\sum_{k=-r}^{r} n_k$, эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие $\alpha$ и $\alpha'$ унитарные характеры $\chi$ и $\chi'$ (по формуле (6)) лежат на одной орбите относительно действия группы Вейля группы $G$.

Отметим, что серия представлений называется *максимально вырожденной*, если параболическая подгруппа, характерами которой индуцируются представления серии, является максимальной параболической подгруппой.

б) Некоторые максимально вырожденные серии представлений симплектической группы. Реализуем группу $G_n=Sp(2n, \mathbf{C})$ в виде группы комплексных матриц, сохраняющих квадратичную форму с матрицей

$$\mu_n=\begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Пусть $n=n_1+n_2$ — разбиение числа $n$ в сумму неотрицательных слагаемых, причем $n_1>0$. Пусть $Z$, $S$, $A$ — подгруппы группы $G$, которые задаются (в записи с помощью блочных матриц, соответствующих разбиению $2n=n_1+n_2+n_1+n_2$) формулами

$$Z=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -y' & 1 & 0 & 0 \\ \eta & x & 1 & y \\ x' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta-\eta'=yx'-xy'\right\},$$

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{11} & 0 & s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s_{21} & 0 & s_{22} \end{pmatrix}, \quad s=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\in G_{n_0}\right\}, \tag{9}$$

$$A=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha\in GL(n_1, \mathbf{C})\right\}.$$

Пусть $Z'$ — группа матриц, транспонированных к матрицам из группы $Z$, пусть $H=Z'SA$, и пусть $\chi$ — унитарный характер группы $H$. Введем инвариантную меру $d\mu(z)$ на подгруппе $Z$ (в качестве такой меры можно взять произведение дифференциалов независимых переменных; например, всех элементов матриц $x$ и $y$ и элементов матрицы $\eta$, лежащих над главной диагональю и на ней). Пусть $\delta_H$ — модуль группы $H$, т. е. $\delta_H(h)=d\mu_l(h)/d\mu_r(h)$.

Определим унитарное представление группы $G_n$ в пространстве $L^2(Z)$, построенном по только что указанной инвариантной мере $d\mu(z)$, формулой

$$[T_\chi(g)f](x) = \delta_H(h)^{-1/2}\chi(h)f(z\bar{g}), \qquad g \in G,\ f \in L^2(Z), \tag{10}$$

где $zg = h \cdot z\bar{g}$ ($z$, $z\bar{g} \in Z$, $h \in H$) — аналог разложения Гаусса (множество $HZ$ открыто и всюду плотно в $G_n$, и для любого $g \in G_n$, как и в случае обычного или обобщенного разложения Гаусса, множество $Z_g$ таких элементов $z \in Z$, что $z\bar{g}$ существует, открыто в $G_n$, всюду плотно и имеет дополнение меры нуль). Определенные таким образом представления $T_\chi$ изучены очень мало. При $n = n_1$ мы получаем в другой форме представления группы $G_n$, рассмотренные выше в а) и соответствующие $r = 1$, $n_0 = 0$, $n_1 = n$ (в обозначениях а)). Все эти унитарные представления группы $G_n$ неприводимы. В другом, полностью проанализированном случае $n_1 = 1$, $n_2 = n - 1$, представление $T_\chi$ неприводимо тогда и только тогда, когда $\chi$ — нееденичный характер; если же $\chi = \chi_0$, где $\chi_0$ — единичный характер группы $H$, то $T_{\chi_0}$ есть прямая сумма двух неприводимых унитарных подпредставлений. Отметим, что в этом случае $\delta(h) = \delta(z'sa) = |\alpha|^{4n}$ в обозначениях (9).

**3.7. Представление Шейла — Вейля симплектической группы.** Пусть $G_n = Sp(2n, \mathrm{C})$; реализуем ее, как и в части б) п. 3.6, как группу комплексных матриц, сохраняющих квадратичную форму с матрицей $M_n$ (см. (8) п. 3.6). Группа $G_n$ порождена набором элементов вида

$$l(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{t-1} \end{pmatrix}, \quad m(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $a \in GL(n, \mathrm{C})$, $b$ — симметрическая комплексная матрица порядка $n$. Представление Шейла — Вейля $T$ есть унитарное представление группы $G_n$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathrm{C}_n)$, определяемое формулами

$$\begin{gathered}[T(m(b))f](z) = e^{-i\mathrm{Re}(zbz^t)}f(z), \quad [T(l(a))f](z) = |\det(a)|\, f(za), \\ [T(M_n)f](z) = \hat{f}(z) = \pi^{-n}\int\limits_{\mathrm{C}^n} f(w)\, e^{2i\mathrm{Re}(zw^t)}dw,\end{gathered} \tag{2}$$

где $z$ и $w$ рассматриваются как вектор-строки, а $z^t$, $w^t$ — как транспонированные к ним столбцы. Представление $T$ приводимо и является прямой суммой $T = T_+ \oplus T_-$ двух неприводимых унитарных подпредставлений группы $G_n$, где $T_+$ (соответственно $T_-$) действует в подпространстве четных (соответственно нечетных) функций из $L^2(\mathrm{C}^n)$.

**3.8. Дополнительная невырожденная серия.** Пусть $G$ — одна из групп $SO(2n, \mathrm{C})$, $SO(2n+1, \mathrm{C})$, $Sp(2n, \mathrm{C})$, пусть группа $G$ реализована в виде матричной группы в соответствии с §§ 4, 5 гл. 6, и пусть $D$ — подгруппа диагональных матриц группы $G$ в этой реализации. Пусть $\vartheta$ — алгебра Ли группы $D$; можно рассматривать $\vartheta$ как алгебру Ли диагональных матриц порядка $n$

вида $d = \mathrm{diag}(d_{-n}, \ldots, d_1, d_2, \ldots, d_n)$, так что набор простых корней образуют корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$, определенные равенствами

$$\alpha_k(d) = d_k - d_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{1}$$

а $\alpha_n(d)$ есть $d_n$, $2d_n$ или $d_{n-1}+d_n$ для групп $SO(2n+1, \mathbf{C})$, $Sp(2n, \mathbf{C})$ и $SO(2n, \mathbf{C})$ соответственно. Напомним, что группа Вейля $W$ группы $SO(2n+1, \mathbf{C})$ порождена перестановками индексов $1, 2, \ldots, n$ в матрицах алгебры Ли $\vartheta$ и умножениями координат $d_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ на $\pm 1$; аналогично устроена группа Вейля группы $Sp(2n, \mathbf{C})$ (порядки этих групп равны $2^n n!$), а группа Вейля группы $SO(2n, \mathbf{C})$ отличается от предыдущих дополнительным условием, что произведение множителей равно 1 (и ее порядок равен $2^{n-1}n!$). Пусть $\Omega$ — трубчатая область в $\mathbf{C}^n$, параллельная подпространству чисто мнимых элементов, вещественная часть которой есть внутренность выпуклой оболочки множества точек вида $\left\{w \sum_{j=1}^{k} \alpha_{2j-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, [n/2], \quad w \in W\right\}$. Пусть $n \geqslant 2$ для групп $SO(2n+1, \mathbf{C})$ и $Sp(2n, \mathbf{C})$ и $n \geqslant 3$ для групп $SO(2n, \mathbf{C})$. Для $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Omega$ и любого набора $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$ представление $T^\alpha$ основной серии, определяемое формулой (2) п. 3.3, где $\alpha\beta^{1/2} = \prod_{p=1}^{n} |h_{pp}|^{m_p+\tau_p} h_{pp}^{-m_p}$, $h = \{h_{jk}\} \in H$ (ср. (1) п. 3.3 и (3) п. 3.2; следует отметить различие в нумерации векторов базиса в $\mathbf{C}^m$, и потому также матричных элементов матрицы $h \in H$), эквивалентно непрерывному равномерно ограниченному представлению; такое представление $T^\alpha$ эквивалентно унитарному представлению тогда и только тогда, когда характеры $\alpha\beta^{1/2}$, отвечающие наборам $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и $(-\bar{\tau}_1, \ldots, -\bar{\tau}_n)$, лежат (при одних и тех же $(m_1, \ldots, m_n)$) на одной орбите относительно группы Вейля $W$. Семейство этих унитарных представлений (а иногда, вообще говоря, большее семейство, образованное унитаризуемыми представлениями основной серии, комплексные параметры которых образуют связное множество, содержащее множество чисто мнимых компонент; ср. п. 3.11) называется *дополнительной невырожденной серией* унитарных представлений группы $G$. Часть этой серии была построена Гельфандом и Наймарком наряду с представлениями дополнительных вырожденных серий, которые мы опишем в следующем пункте.

**3.9. Вырожденные и невырожденные дополнительные серии Гельфанда — Наймарка.** Пусть $G$ — одна из групп: $SO(m, \mathbf{C})$ или $Sp(m, \mathbf{C})$, реализованная как в п. 3.8. Пусть $q$ — такое натуральное число, что $m_0 = m - 4q$ — неотрицательное число. Пусть $m_0 = \sum_{p=-r}^{r} n_p$ — разбиение числа $m_0$ в сумму натуральных чисел $n_k$ $(k \neq 0)$, и неотрицательного целого $n_0$, удовлетворяющих условию $n_k = n_{-k}$ $(k = 1, \ldots, r)$, и пусть $n_k = 1$ при $|k| > r$. Обозначим через $\dot{Z}_q^{(m)}$ группу блочно-диагональных матриц $\dot{z} = \mathrm{diag}\,(u_{-q}, u_{-q+1}, \ldots$

$\ldots, u_{-1}, 1_{m_0}, u_1, \ldots, u_q)$, где диагональные клетки $u_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm q$) суть матрицы второго порядка вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_k & 1 \end{pmatrix}$ ($z_k \in \mathbb{C}$). Очевидно, что $\dot{Z}_q^{(m)}$ содержится в $Z^m_{(n_0, n_1, \ldots, n_r, 1, \ldots, 1)}$ в обозначениях п. 3.6. Пусть $\dot{Z}_q = \dot{Z}_q^{(m)} \cap G$; тогда $\dot{Z}_q \subset Z$. Очевидно, что элементы $z_{-k}$ однозначно определяются элементами $z_k$ ($k = 1, \ldots, q$) при $\dot{z} \in \dot{Z}_q$, так что $z_1, \ldots, z_q$ — независимые параметры в $\dot{Z}_q$, а мера $d\mu(\dot{z}) = \prod_{k=1}^{q} dz_k$ является инвариантной мерой на $\dot{Z}_q$.

Пусть теперь $m_1, \ldots, m_r, m_1', \ldots, m_q'$ — набор целых чисел, а $\rho_1, \ldots, \rho_r, \sigma_1', \ldots, \sigma_q', \sigma_1'', \ldots, \sigma_q''$ — набор вещественных чисел, причем $0 < \sigma_j'' < 1$ для всех $j = 1, \ldots, q$. Пусть $\chi$ — характер группы $H_{(n_0, n_1, \ldots, n_r, 1, \ldots, 1)}$, определяемый формулой

$$\chi(h) = \prod_{k=1}^{r} |\mu_k|^{m_k + i\rho_k} (\mu_k)^{-m_k} \prod_{j=1}^{q} |\nu_j|^{m_j' + i\sigma_j' + \sigma_j''} (\nu_j)^{-m_j'} |\lambda_j|^{m_j' + i\sigma_j' - \sigma_j''} (\lambda_j)^{-m_j'}, \tag{1}$$

где $\mu_k = \det(h_{kk})$, $\nu_j = h_{n-2q+2j-1,\, n-2q+2j-1}$, $\lambda_j = h_{n-2q+2j,\, n-2q+2j}$ для всех $k = 1, \ldots, r$ (нумерация блоков, как в п. 3.6) и всех $j = 1, \ldots, q$. Пусть

$$\alpha(h) = \chi(h)\, \beta^{-1/2}(h), \qquad h \in H_{(n_0, \ldots, n_r, 1, \ldots, 1)}, \tag{2}$$

где $\beta$ определено формулой (3) п. 3.6. Пусть, далее, $\mathfrak{H}'$ — предгильбертово пространство финитных непрерывных функций на группе $Z_{(n_0, n_1, \ldots, n_r, 1, \ldots, 1)}$, снабженное скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int \left( \prod_{k=1}^{q} |z_k|^{-2+2\sigma_k''} \right) f_1(z)\, \overline{f_2(z\dot{z})}\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z}), \tag{3}$$

где $f_1, f_2 \in \mathfrak{H}$, $z_1, \ldots, z_q$ — субдиагональные элементы клеток $u_1, \ldots, u_q$ матрицы $\dot{z} \in \dot{Z}_q$, а $z$ пробегает $Z_{(n_0, \ldots, n_r, 1, \ldots, 1)}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство — пополнение пространства $\mathfrak{H}'$. Тогда формула

$$[T_\alpha(g) f](z) = \alpha(h) f(z\bar{g}), \qquad g \in G, \quad f \in \mathfrak{H}', \tag{4}$$

где $zg = h \cdot z\bar{g}$ — обобщенное разложение Гаусса ($h \in H_{(n_0, \ldots, n_r, 1, \ldots, 1)}$, $z\bar{g} \in Z_{(n_0, \ldots, n_r, 1, \ldots, 1)}$) (см. (2) п. 3.6), определяет унитарное представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (в частности, правая часть формулы (4) содержится в $\mathfrak{H}$ для $g \in G$, $f \in \mathfrak{H}'$). Семейство $T_\alpha$ называется *дополнительной серией Гельфанда — Наймарка*. Эта серия называется *невырожденной*, если все натуральные числа $n_1, \ldots, n_r$ равны единице, а $n_0$ равно нулю или единице, и *вырожденной* в противном случае.

Заметим, что не для всех вырожденных основных серий существуют связанные с ними (аналогично связи в п. 3.8 между основной невырожденной и дополнительной невырожденной сериями) дополнительные вырожденные серии. В частности, основная вырожденная серия, построенная в п. 3.6, б) для $n_1 = 1$, $n_2 = n - 1$, не имеет связанной с ней дополнительной серии.

**3.10. Характеры неприводимых унитарных представлений.** Пусть $\varphi$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция на группе $G$ (т. е. на группе $SO(m, \mathbf{C})$ или $Sp(2n, \mathbf{C})$). Для всех построенных в пп. 3.3—3.9 представлений $T$ группы $G$ оператор $T(\varphi)$ есть оператор со следом, и $\operatorname{tr} T(\varphi) = \int\limits_G \varphi(g)\chi_T(g)\,d\mu(g)$ для всех $\varphi \in K(G)$, где $\chi_T$ — некоторая локально интегрируемая функция на $G$.

Характер представления $T^\alpha$ основной непрерывной серии (см. (2) п. 3.3) определяется формулой

$$\chi_{T^\alpha}(g) = D_G(\delta(g))^{-1} \sum \chi(\delta(g)), \qquad g \in G, \tag{1}$$

где характер $\chi$ определен равенством $\chi = \alpha\beta^{1/2}$, характер $\beta$ — формулой (3) п. 3.2, $\delta(g)$ — диагональная матрица, сопряженная к матрице $g \in G$, сумма берется по всем подстановкам элементов $d_{-n}, \ldots, d_n$ матрицы $\delta(g) = \operatorname{diag}(d_{-n}, \ldots, d_1, \ldots, d_n)$, переводящих матрицу $\delta(g)$ снова в матрицу из группы $G$, а функция $D_G$ на диагональных матрицах из группы $G$ определяется формулой

$$D_G(\operatorname{diag}(d_{-n}, \ldots, d_n)) =$$
$$= \begin{cases} \prod\limits_{k=2}^{n} |d_k|^{2-2k} \prod\limits_{p>|q|>0} |d_p - d_q|^2 & \text{для группы } SO(2n, \mathbf{C}), \\ \prod\limits_{k=1}^{n} |d_k|^{1-2k} \prod\limits_{p>|q|\geqslant 0} |d_p - d_q|^2 & \text{для группы } SO(2n+1, \mathbf{C}), \\ \prod\limits_{k=1}^{n} |d_k|^{-2k} \prod\limits_{p=1}^{n} |d_p - d_{-p}|^2 \prod\limits_{p>|q|>0} |d_p - d_q|^2 & \text{для группы } Sp(2n, \mathbf{C}). \end{cases} \tag{2}$$

В частности, формула (1) справедлива для представлений основной невырожденной серии (см. п. 3.5) и дополнительной невырожденной серии (см. пп. 3.8, 3.9).

Для представлений $\widetilde{T}^\alpha$ основной вырожденной серии и дополнительной вырожденной серии, отвечающих разбиению $m = n_{-r} + n_{-r+1} + \ldots + n_r$ (см. пп. 3.6, а), 3.9), характер определяется формулой

$$\chi_{\widetilde{T}^\alpha}(g) = \sum \chi(\delta(g)) \left(\widetilde{D}(\delta(g))\right)^{-1} \prod_{k=-r}^{r} \widetilde{D}_k(\delta_k(g)), \tag{3}$$

где $\delta(g)$ — блочно-диагональная матрица с блоками $\delta_k(g)$ ($k = -r, \ldots, r$), сопряженная матрице $g$ в группе $G$, $\chi$ — характер, определяющий представление (см. (5) п. 3.6 и (1) п. 3.9), сумма распространяется на подстановки, переводящие характер $\chi$ в характер, определяющий представление той же серии (т. е. можно считать, что суммирование идет по различным разложениям $g = z^{-1}hz$, $h \in H_{\{*\}}$, $z \in Z_{\{*\}}$), а функции $\tilde{D}$, $\tilde{D}_k$ определяются следующими формулами:

$$\tilde{D}_k(g_k) = D(g_k) \quad \text{при} \quad k \neq 0, \quad g_k \in GL(n_k, \mathrm{C}), \tag{4}$$

где функция $D$ определена формулой (3) п. 2.10; если $G$ — ортогональная группа, то

$$\tilde{D}_0(\delta_0) = \prod_{p>|q|} |d_{0,p} - d_{0,q}|^2, \tag{5а}$$

где $d_{0,p}$ — собственные значения матрицы $\delta_0 = \operatorname{diag}\left(d_{0,-n_0}, \ldots \ldots, d_{0,n_0}\right)$, а

$$\tilde{D}(\delta) = \prod_{p>|q|} |d_p - d_q|^2, \tag{6а}$$

где $\delta = \operatorname{diag}(d_{-n}, \ldots, d_n)$; если же $G$ — симплектическая группа, то

$$\tilde{D}_0(\delta_0) = \prod_{p>|q|} |d_{0,p} - d_{0,q}|^2 \prod_{p=1}^{n_0} |d_{0,p} - d_{0,-p}|^2 \tag{5б}$$

для $\delta_0 = \operatorname{diag}\left(d_{0,-n_0}, \ldots, d_{0,n_0}\right)$ и

$$\tilde{D}(\delta) = \prod_{p>|q|} |d_p - d_q|^2 \prod_{p=1}^{n} |d_p - d_{-p}|^2 \tag{6б}$$

при $\delta = \operatorname{diag}(d_{-n}, \ldots, d_n)$.

Характер $\chi_T$ представления $T$ Шейла — Вейля (см. п. 3.7) определяется формулой

$$\chi_T(g) = |\det(\delta'(g) - 1_n)|^{-1}, \qquad g \in G, \tag{7}$$

где $\delta(g) = \operatorname{diag}(d_{-n}, \ldots, d_{-1}, d_1, \ldots, d_n)$ — диагональная матрица, подобная матрице $g \in G$, а $\delta'(g) = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

Характеры $\chi_{T_\pm}$ неприводимых подпредставлений $T_\pm$ представления $T$ определяются формулами

$$\chi_{T_+}(g) = D(\delta(g))^{-1} \sum_{\substack{w_1, w_2 \in W \\ w_2^{-1} w_1 \in W_\nu}} \det(w_1 w_2)\, e^{w_1(\rho+\nu)(\ln \delta(g)) + w_2(\rho+\nu)(\overline{\ln \delta(g)})}, \tag{8}$$

$$\chi_{T_-}(g) = $$

$$= D(\delta(g))^{-1} \sum_{\substack{w_1, w_2 \in W \\ w_2^{-1} w_1 \in W_\nu}} \det(w_1 w_2)\, e^{w_1(\rho+\nu-\varepsilon_\nu)(\ln \delta(g)) + w_2(\rho+\nu)(\overline{\ln \delta(g)})}, \tag{9}$$

где $\varepsilon_k(d) = d_k$ для $d = \operatorname{diag}(-d_n, \ldots, -d_1, d_1, \ldots, d_n) \in \vartheta$ (см. п. 3.8), $\nu = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)/2$, $\rho = n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$ — полусумма положительных корней, $\delta(g)$ — диагональная матрица, сопряженная к матрице $g$, $\ln \delta(g) \in \vartheta$ — такая диагональная матрица, что $e^{\ln \delta(g)} = \delta(g)$, $W$ — группа Вейля, а $W_\nu$ — множество таких $w \in W$, что $w\nu - \nu$ есть корень алгебры Ли группы $Sp(2n, \mathbf{C})$ относительно картановской подалгебры $\vartheta$; функция $D$ определяется формулой (3) п. 2.10.

Характеры максимально вырожденных представлений $T_\chi$ симплектической группы $Sp(2n, \mathbf{C})$ (см. б) п. 3.6), соответствующие случаю $n_1 = 1$, $n_2 = n - 1$, определяются формулой

$$\chi_{T_\chi}(g) = \left(\frac{D(\widetilde{\delta(g)})}{D(\delta(g))\, D(\delta_0(g))}\right)^{1/2} \sum \chi(\delta(g)), \tag{10}$$

где $\delta(g)$ — матрица из группы $SA$, сопряженная к матрице $g$, $\widetilde{\delta(g)}$ — матрица $s = Sp(2n-2, \mathbf{C})$, $\delta_0(g) = \operatorname{daig}(\alpha, \alpha^{-1})$ — матрицы, определяемые разложением матрицы $\delta(g)$ в произведение матриц групп $S$ и $A$ (см. (9) п. 3.6), а суммирование распространено на множество всех представлений $g = z^{-1}hz$ $(z \in Z,\ h \in H)$, где $h = z'\delta(g)$ $(z' \in Z',\ \delta(g) \in SA)$; функция $D$ определяется формулой (3) п. 2.10. Заметим, что характеры неприводимых подпредставлений представления $T_{\chi_0}$ в общем случае не найдены (см., однако, п. 3.11).

**3.11. Полный набор неприводимых унитарных представлений группы $Sp(4, \mathbf{C})$.** Любое неприводимое унитарное представление группы $Sp(4, \mathbf{C})$ унитарно эквивалентно одному из следующих представлений:

а) представлению основной невырожденной серии (см. п. 3.5);

б) представлению дополнительной серии, эквивалентному по Наймарку одному из представлений основной серии, описанных в п. 3.3 и соответствующих следующим характерам $\chi = \alpha\beta^{1/2}$ (ср. (1) п. 3.5, так что

$$\alpha(h) = |h_{33}|^{m_1+\tau_1-2}\, h_{33}^{-m_1}\, |h_{44}|^{m_2+\tau_2-4}\, h_{44}^{-m_2}, \qquad h \in H, \tag{1}$$

где, вообще говоря, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{C}$, $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$):

1) $\tau_1$ вещественно, $|\tau_1| < 2$; $\tau_2$ чисто мнимо, $m_1 = 0$;

2) $\tau_1$ чисто мнимо; $\tau_2$ вещественно, $|\tau_2| < 2$; $m_2 = 0$;

3) $\tau_1 = t + i\rho$, $\tau_2 = -t + i\rho$, $\rho$ и $t$ вещественны, $|t| < 1$ (см. дополнительную невырожденную серию Гельфанда — Наймарка в п. 3.9);

4) $\tau_1 = t - i\rho$, $\tau_2 = t + i\rho$, $\rho$ и $t$ вещественны, $|t| < 1$;

5) $\tau_1$ и $\tau_2$ вещественны, $|\tau| < 1$, $|\tau_2| < 1$; $m_1 = m_2 = 0$;

в) неприводимым подпредставлениям $T_\pm$ представления Шейла — Вейля;

г) представлениям основных вырожденных серий (см. пп. 3.6, а) и 3.6, б), где $\chi = \chi_0$);

д) представлениям дополнительной вырожденной серии (ср. п. 3.9), соответствующим разбиению с $n_0 = 0$, $n_1 = 2$ и характеру $\alpha(h) = |\det(h_{11})|^{\tau-2}$ $(h \in H_{(0,2)})$, в обозначениях п. 3.6, а), где $|\tau| < 2$, а представления реализованы обычным образом в пространстве функций на группе $U$ (ср. п. 2.6);

е) единичному представлению.

Изолированные точки в пространстве неприводимых унитарных представлений суть единичное представление и представление $T_{-}$. Отметим, что неприводимые подпредставления представления $T_{\chi_0}$ (ср. г)) содержатся в семействах б) 3) и д).

Литература: [67], [104], [150], [211], [258], [262], [281], [355], [573].

## § 4. Неприводимые унитарные представления группы $G_2$

**4.1. Алгебра Ли типа $G_2$.** Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли (относительно обычной операции коммутирования) квадратных матриц седьмого порядка, допускающих запись вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_1\sqrt{2} & -w_3\sqrt{2} & -z_4\sqrt{2} & -z_1\sqrt{2} & -z_3\sqrt{2} & -w_4\sqrt{2} \\ z_1\sqrt{2} & h_1 & w_2 & z_5 & 0 & z_4 & -w_3 \\ z_3\sqrt{2} & z_2 & h_2 & z_6 & -z_4 & 0 & w_1 \\ w_4\sqrt{2} & w_5 & w_6 & -h_1-h_2 & w_3 & -w_1 & 0 \\ w_1\sqrt{2} & 0 & w_4 & -z_3 & -h_1 & -z_2 & -w_5 \\ w_3\sqrt{2} & -w_4 & 0 & z_1 & -w_2 & -h_2 & -w_6 \\ z_4\sqrt{2} & z_3 & -z_1 & 0 & -z_5 & -z_6 & h_1+h_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $z_1, \ldots, z_6, w_1, \ldots, w_6, h_1, h_2 \in \mathbf{C}$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ диагональных матриц из $\mathfrak{g}$ является картановской подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Пусть $h \in \mathfrak{h}$, и пусть $h = \operatorname{diag}(0, h_1, h_2, -h_1-h_2, -h_1, -h_2, h_1+h_2)$; функции $d_i$ $(i = 1, 2, 3)$ определим формулами $d_1(h) = h_1$, $d_2(h) = h_2$, $d_3(h) = -h_1-h_2$. Полагая $\alpha_1 = d_1$, $\alpha_2 = d_2 - d_1$, получаем, что набор функций

$$\alpha_1 = d_1, \quad \alpha_2 = d_2 - d_1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = d_2, \quad 2\alpha_1 + \alpha_2 = -d_3,$$
$$3\alpha_1 + \alpha_2 = d_1 - d_3, \quad 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = d_2 - d_3 \tag{2}$$

является набором корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, который может рассматриваться как набор положительных корней; в таком случае $\alpha_1$ и $\alpha_2$ суть простые корни ($\alpha_1$ — короткий, $\alpha_2$ — длинный корень). Соответствующие корням набора (2) корневые векторы определяются блочными матрицами вида

$$E_{d_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-\sqrt{2})(e_j)^t \\ \sqrt{2}e_j & 0 & 0 \\ 0 & E_{kl}-E_{lk} & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-d_j} = \begin{pmatrix} 0 & (-\sqrt{2})(e_j)^t & 0 \\ 0 & 0 & E_{kl}-E_{lk} \\ \sqrt{2}e_j & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3a}$$

где $e_j$ — трехмерный вектор-строка с 1 на $j$-м месте и нулями на остальных местах, $E_{kl}$ — $3\times 3$-матрица с единственным ненулевым матричным элементом 1 на пересечении $k$-й строки и $l$-го столбца, причем $j, k, l$ — циклическая перестановка набора 1, 2, 3; наконец,

$$E_{d_j-d_k}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & E_{jk} & 0\\ 0 & 0 & -E_{kj}\end{pmatrix}. \tag{3б}$$

Заметим также, что для векторов $H_\alpha=[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ имеют место равенства

$$\begin{gathered} H_{\alpha_1}=\operatorname{diag}(0, 2, -1, \ldots),\\ H_{\alpha_1+\alpha_2}=\operatorname{diag}(0, -1, 2, \ldots), \quad H_{2\alpha_1+\alpha_2}=\operatorname{diag}(0, 1, 1, \ldots),\\ H_{\alpha_2}=\operatorname{diag}(0, -1, 1, \ldots),\\ H_{3\alpha_1+\alpha_2}=\operatorname{diag}(0, 1, 0, \ldots), \quad H_{3\alpha_2+2\alpha_2}=\operatorname{diag}(0, 0, 1, \ldots). \end{gathered} \tag{4}$$

Элементы подалгебры Ли $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}$, натянутой на множество корневых векторов набора положительных корней, суть матрицы вида (1) с $w_k=h_j=0$; $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$; $j=1, 2$.

**4.2. Разложения Гаусса и Ивасавы в группе $G$ типа $G_2$.** Пусть $G$ — односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$ п. 4.1. Пусть $Z\subset G$ — подгруппа Ли в $G$, отвечающая подалгебре Ли $\mathfrak{n}$. Пусть $\mathfrak{n}'$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, порожденная корневыми векторами отрицательных корней, и пусть $Z'$ — подгруппа Ли в $G$, соответствующая $\mathfrak{n}'$. Пусть $D$ — подгруппа Ли в $G$, отвечающая подалгебре Ли $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ (таким образом, $D$ естественно отождествляется с группой диагональных матриц седьмого порядка вида $\delta=\operatorname{diag}(1, \delta_1, \delta_2, \delta_1^{-1}\delta_2^{-1}, \delta_1^{-1}, \delta_2^{-1}, \delta_1\delta_2)$, $\delta_1, \delta_2\in\mathbf{C}^*$). Пусть $H=Z'D$. Тогда $H$ — подгруппа в $G$. Множество $G'_{\mathrm{reg}}=HZ$ открыто и всюду плотно в $G$, и для любого элемента $g\in G'_{\mathrm{reg}}$ разложение $g=hz$ ($h\in H$, $z\in Z$) однозначно; это разложение называется *разложением Гаусса* в группе $G$.

Пусть $U$ — максимальная компактная подгруппа в группе $G$, связанная с системой положительных корней (2) п. 4.1, так что $U$ соответствует подалгебре Ли в $\mathfrak{g}$, выделяемой условиями $h_1, h_2\in i\mathbf{R}$; $z_j=\overline{w}_j$ ($j=1, 3, 4$); $z_k=-\overline{w}_k$ ($k=2, 5, 6$). Пусть $\Gamma=U\cap H$. Любой элемент $g\in G$ допускает представление в виде

$$g=hu,\quad h\in H,\quad u\in U, \tag{1}$$

и если $g=h'u'$ ($h'\in H$, $u'\in U$), то $h'=h\gamma$, $u'=\gamma^{-1}u$, где $\gamma$ — некоторый элемент группы $\Gamma$. Заметим, что группа $\Gamma$ изоморфна двумерному тору $\mathbf{T}^2$ (как группа матриц вида $\gamma=\operatorname{diag}(1, e^{i\varphi}, e^{i\psi}, e^{-i(\varphi+\psi)}, e^{-i\varphi}, e^{-i\psi}, e^{i(\varphi+\psi)})$, $\varphi, \psi\in\mathbf{R}$). Разложение (1) является следствием разложения Ивасавы.

**4.3. Основная серия представлений группы типа $G_2$.** Пусть $\alpha$ — характер (вообще говоря, неунитарный) группы $H$, определяемый формулой

$$\alpha(h)=|\delta_1(h)|^{\sigma_1+m_1}(\delta_1(h))^{-m_1}|\delta_2(h)|^{\sigma_2+m_2}(\delta_2(h))^{-m_2},\quad h\in H, \tag{1}$$

где $h=z'\delta(h)$ ($z'\in Z'$, $\delta(h)\in D$) и $\delta(h)=\operatorname{diag}(1, \delta_1(h), \delta_2(h), \ldots)$, причем числа $m_1$, $m_2$ — целые, а $\sigma_1$, $\sigma_2$ — комплексные. Пусть $L^2(U)$ — гильбертово пространство измеримых функций на группе $U$, квадратично интегрируемых относительно меры Хаара на $U$; пусть $L^2_\alpha(U)$ — подпространство (замкнутое) в $L^2(U)$, образованное такими функциями $f \in L^2(U)$, что $f(\gamma u) = \alpha(\gamma) f(u)$ для почти всех $u \in U$ при любом $\gamma \in \Gamma$. Формула

$$[T^\alpha(g) f](u) = \alpha(h) f(u\bar{g}), \qquad f \in L^2_\alpha(u), \tag{2}$$

где $u \in U$, $g \in G$, $ug = h \cdot u\bar{g}$ ($h \in H$, $u\bar{g} \in U$) (см. (1) п. 4.2), корректно (несмотря на неоднозначность разложения (1) п. 4.2) определяет (непрерывное) представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2_\alpha(U)$. Семейство представлений $T^\alpha$ образует основную (неунитарную) серию представлений группы $G$. Представления $T^\alpha$ вполне неприводимы тогда и только тогда, когда они неприводимы.

Ограничение $T^\alpha|_U$ представления $T^\alpha$ на подгруппу $U$ содержит те и только те неприводимые представления группы $U$, ограничение которых на подгруппу $\Gamma$ содержит ограничение $\alpha|_\Gamma$ характера $\alpha$ на $\Gamma$, причем кратность вхождения неприводимого представления $\pi$ группы $U$ в $T^\alpha|_U$ равна кратности вхождения $\alpha|_\Gamma$ в $\pi|_\Gamma$. Среди неприводимых представлений $\pi$, содержащихся в разложении представления $T^\alpha|_U$ на неприводимые подпредставления, представление с наинизшим старшим весом, равным $(-\inf(m_1, m_2)$, $-\sup(m_1, m_2))$, встречается в точности один раз; обозначим это представление $\pi_{m_1,m_2}$.

Обозначим через $S^\alpha$ неприводимое (более того, вполне неприводимое) представление группы $G$ в факторпространстве инвариантного подпространства представления $T^\alpha$, порожденного подпространством представления $\pi_{m_1,m_2}$, по его максимальному инвариантному подпространству, не содержащему подпространства представления $\pi_{m_1,m_2}$.

Обозначим через $\beta$ (неунитарный) характер группы $H$, определенный формулой

$$\beta(h) = |\delta_1(h)|^8 |\delta_2(h)|^{12}, \qquad h \in H, \tag{3}$$

в тех же обозначениях, что и (1); положим

$$\chi = \alpha\beta^{1/2}, \quad \tau_1 = \sigma_1 + 4, \quad \tau_2 = \sigma_2 + 6. \tag{4}$$

**4.4. Полный набор неприводимых унитарных представлений группы $G$ типа $G_2$.** Полный набор неприводимых унитарных представлений группы $G$ может быть описан с помощью введенных в п. 4.3 представлений $S^\alpha$ и состоит из тех и только тех представлений вида $S^\alpha$, которые эквивалентны по Наймарку унитарным представлениям группы $G$. В свою очередь, представление вида $S^\alpha$ унитаризуемо тогда и только тогда, когда числа $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{C}$, $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$, определяющие связанный с $\alpha$ характер $\chi$ (см. (1), (3), (4) п. 4.3), удовлетворяют одному из перечисленных ниже условий 1) — 7); в этих условиях $\tau_k = \theta_k + i\rho_k$, $\theta_k$, $\rho_k \in \mathbf{R}$ ($k = 1, 2$).

1) Основная невырожденная серия (аналог основной невырожденной серии Гельфанда — Наймарка), образованная представлениями $S^\alpha = T^\alpha$, соответствующими чисто мнимым $\tau_1$ и $\tau_2$, т. е. $\tau_k = i\rho_k$ $(k = 1, 2)$. Эти представления унитарны. Они могут быть реализованы в гильбертовом пространстве $L^2(Z)$ (аналогично, например, п. 3.5).

2) Дополнительная невырожденная серия (т. е. серия представлений $S^\alpha = T^\alpha$, соответствующих неприводимым унитаризуемым, но не унитарным представлениям $T^\alpha$). Для принадлежности представления $T^\alpha$ множеству представлений, квазиэквивалентных представлениям дополнительной серии, необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из следующих двух условий:

а) существует такой положительный корень $\varepsilon$ (см. список (2) п. 4.1), что для соответствующего элемента $H_\varepsilon = \operatorname{diag}(0, d_{1\varepsilon}, d_{2\varepsilon}, \ldots)$ (см. (4) п. 4.1) выполняются соотношения $m_1\delta_{1\varepsilon} + m_2\delta_{2\varepsilon} = 0$, $\rho_1\delta_{1\varepsilon} + \rho_2\delta_{2\varepsilon} = 0$, и если $\varepsilon = \xi d_1 + \eta d_2$ в обозначениях п. 4.1, то $\theta_1 = t\xi$, $\theta_2 = t\eta$ с $|t| < 1$;

б) $\rho_1 = \rho_2 = m_1 = m_2 = 0$, причем $|\theta_1| < 2$, $|\theta_2| < 2$, $|\theta_1 - \theta_2| < 2$, а произведение $(4 - (2\theta_1 - \theta_2)^2)(4 - (\theta_1 - 2\theta_2)^2)(4 - (\theta_1 + \theta_2)^2)$ положительно.

Формула для скалярного произведения, унитаризующего некоторые из представлений $T^\alpha$ указанного выше вида, аналогична формулам для скалярного произведения в пространствах представлений дополнительной серии классических групп (см., например, п. 3.9).

3) Основная вырожденная серия (соответствующая простым корням $\alpha_1$ и $\alpha_2$; представления обеих этих подсерий могут быть построены явно, аналогично основным вырожденным сериям классических групп; ср., например, п. 3.6). Представления этой серии эквивалентны по Наймарку представлениям $S^\alpha$ для таких $\alpha$, что для некоторого положительного корня $\varepsilon$ и соответствующего вектора $H_\varepsilon = \operatorname{diag}(0, \delta_{1\varepsilon}, \delta_{2\varepsilon}, \ldots)$ выполняются соотношения $m_1\delta_{1\varepsilon} + m_2\delta_{2\varepsilon} = \rho_1\delta_{1\varepsilon} + \rho_2\delta_{2\varepsilon} = 0$, причем $(\theta_1, \theta_2) = \pm(\xi, \eta)$ для $\varepsilon = \xi d_1 + \eta d_2$ (т. е. представления $S^\alpha$ соответствуют характерам, лежащим в замыкании области, описанной в 2), а)).

4) Дополнительная вырожденная серия, связанная с простым корнем $\alpha_1$. Представления этой серии, получаемые продолжением соответствующей основной вырожденной серии из 3), эквивалентны по Наймарку представлениям вида $S^\alpha$ для характеров $\alpha$, лежащих на орбите (относительно действия группы Вейля) характеров, удовлетворяющих условиям $\rho_1 = \rho_2 = m_1 = m_2 = 0$, $\theta_1 = 1 + t$, $\theta_2 = 2t$, где $|t| < 5/3$. Напомним, что группа Вейля группы $G$ типа $G_2$ есть диэдральная группа (полупрямое произведение $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_6$), порожденная в записи (1) матрицами, имеющими в (1, 3, 3)-блочной записи вид

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R \\ 0 & R & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}, \tag{1a}$$

где $R$ и $T$ — матрицы третьего порядка, заданные равенствами

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};\tag{1б}$$

элементы $P$ и $Q$ второго, а элемент $PQ$ шестого порядка; матрицы $P^k(PQ)^l$ ($k=0,\ 1,\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ 5$) образуют полный набор представителей факторгруппы нормализатора группы $D$ в группе $G$ по ее централизатору (совпадающему с $D$).

5) Дополнительная вырожденная серия, связанная с простым корнем $\alpha_2$. Представления этой серии, получаемые продолжением основной вырожденной серии из 3), связанной с корнем $\alpha_2$, эквивалентны по Наймарку представлениям вида $S^\alpha$ для характеров $\alpha$, лежащих на орбите (относительно действия группы Вейля) характеров, удовлетворяющих условиям $\rho_1=\rho_2=m_1=m_2=0,\ \theta_1=t-1,\ \theta_2=t+1,\ t\neq\pm1,\ |t|<2$.

6) Представления $S^\alpha$ (аналогичные подпредставлениям представления Вейля для симплектической группы) для характеров $\alpha$, лежащих на орбите (относительно группы Вейля) характеров, определенных равенствами

а) $\rho_1=\rho_2=m_1=m_2=0,\quad \theta_1=1,\quad \theta_2=3;$

б) $\rho_1=\rho_2=m_1=m_2=0,\quad \theta_1=8/3,\quad \theta_2=10/3;$

в) $\rho_1=\rho_2=0,\ m_1=m_2=2,\quad \theta_1=-4/3,\quad \theta_2=4/3.$

7) Единичное представление (или представление $S^\alpha$ для орбиты характера $\alpha$ с $\rho_1=\rho_2=m_1=m_2=0,\ \theta_1=4,\ \theta_2=6$).

Литература: [71], [211], [258], [262], [314].

Дополнительная литература к гл. 8: [12], [15], [39], [42], [46], [85], [86], [89], [93], [134], [175], [258], [325], [471], [493], [550], [577].

## ГЛАВА 9

## ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПОЛУПРОСТЫЕ ГРУППЫ ЛИ

### § 1. Группа $SL(2, \mathbf{R})$

**1.1. Разложение Гаусса.** Пусть $G = SL(2, \mathbf{R})$, $B$ — подгруппа верхних треугольных матриц в группе $G$ (т. е. $B = \{b\colon b = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in G,\ b_{21} = 0\}$). Пусть $Z$ — подгруппа всех нижних треугольных матриц в группе $G$ с единицами на главной диагонали (т. е. $Z = \{z\colon z = \{z_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in G,\ z_{12} = 0,\ z_{11} = z_{22} = 1\}$). Тогда (ср. 4.3.6) множество $G'$ матриц вида $bz$ ($b \in B$, $z \in Z$) состоит из всех матриц $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in G$ с $g_{22} \neq 0$; это множество открыто и плотно в группе $G$.

Если $g = bz$, где $g \in G$, $b \in B$, $z \in Z$, то $b_{22} = g_{22}$, $b_{12} = g_{12}$, $z_{21} = g_{21}g_{22}^{-1}$.

**1.2. Разложения Ивасавы и Картана.** Пусть $K = SO(2)$, $K$ — максимальная компактная подгруппа в группе $G$. Пусть $\Gamma = K \cap B$; тогда $\Gamma = \{\pm e\}$. Пусть $D$ — подгруппа диагональных матриц в группе $G$, $E$ — подгруппа диагональных матриц в $G$ с положительными элементами, $N$ — подгруппа группы $B$, образованная матрицами с единицами на главной диагонали. Иногда будем писать $Z_+$ вместо $N$ и $Z_-$ вместо $Z$.

Любой элемент $g \in G$ допускает представление в виде

$$g = bu, \qquad b \in B, \qquad u \in K, \tag{1}$$

и если одновременно $g' = b'u'$, где $b' \in B$, $u' \in K$, то $b' = b\gamma$, $u' = \gamma^{-1}u$, где $\gamma \in \Gamma$ (ср. 4.2.5). Пусть $u \in K$, $g \in G$; элемент $u_1 \in K$, удовлетворяющий условию $ug = bu_1$ ($b \in B$), обозначим $u\bar{g}$. Любой элемент $b \in B$ допускает однозначное представление в виде $b = \delta n$ ($\delta \in D$, $n \in N$).

Любой элемент $g \in G$ допускает однозначное представление в виде

$$g = \varepsilon n u, \qquad \varepsilon \in E, \qquad n \in N, \qquad u \in K, \tag{2}$$

(*разложение Ивасавы*); любой элемент $g \in G$ допускает представление в виде

$$g = u\varepsilon v, \qquad \varepsilon \in E, \qquad u, v \in K,$$

(*разложение Картана*).

**1.3. Группы, связанные с $SL(2, \mathbf{R})$.** Группа $SU(1, 1)$ изоморфна группе $SL(2, \mathbf{R})$. Изоморфизм $SU(1, 1) \to SL(2, \mathbf{R})$ устанавливается отображением

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha-\beta) & \operatorname{Im}(\alpha+\beta) \\ -\operatorname{Im}(\alpha-\beta) & \operatorname{Re}(\alpha+\beta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in SU(1, 1). \tag{1}$$

Связная компонента единицы $SO_0(2, 1)$ изоморфна факторгруппе группы $SL(2, \mathbf{R})$ (или $SU(1, 1)$) по ее центру $\{\pm e\}$. Эпиморфизм $SU(1, 1) \to SO_0(2, 1)$ с ядром $\{\pm e\}$ устанавливается отображением

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha^2+\beta^2) & -\operatorname{Im}(\alpha^2-\beta^2) & 2\operatorname{Re}(\alpha\beta) \\ \operatorname{Im}(\alpha^2+\beta^2) & \operatorname{Re}(\alpha^2-\beta^2) & 2\operatorname{Im}(\alpha\beta) \\ 2\operatorname{Re}(\alpha\bar\beta) & -2\operatorname{Im}(\alpha\bar\beta) & \alpha\bar\alpha+\beta\bar\beta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in SU(1, 1), \tag{2}$$

если матрицы $g \in SO_0(2, 1)$ сохраняют билинейную форму

$$[x, y] = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3, \qquad x, y \in \mathbf{R}^3. \tag{3}$$

Обозначим группу $SU(1, 1)$ через $G'$.

**1.4. Основная серия.** Пусть $\alpha$ — характер (неунитарный) группы $B$, определяемый формулой

$$\alpha(b) = |b_{22}|^{\sigma}(\operatorname{sgn}(b_{22}))^{\varepsilon}, \quad b = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{2} \in B, \tag{1}$$

где $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\sigma \in \mathbf{C}$. Пусть $L^2(K)$ — гильбертово пространство измеримых функций на $K$, квадратично интегрируемых относительно меры Хаара на $K$; пусть $L^2_\alpha(K)$ — подпространство в $L^2(K)$, образованное такими функциями $f \in L^2(K)$, что $f(\gamma u) = \alpha(\gamma)f(u)$ для почти всех $u \in K$ при $\gamma = -e$. Формула

$$[T^\alpha(g)f](u) = \alpha(b)f(u\bar g), \tag{2}$$

где $u \in K$, $g \in G$, $ug = b \cdot u\bar g$ ($b \in B$, $u\bar g \in K$), $f \in L^2_\alpha(K)$, корректно (несмотря на неоднозначность разложения (1) п. 1.2) определяет (непрерывное) представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2_\alpha(K)$. Семейство представлений $T^\alpha$ образует основную (неунитарную) серию представлений группы $G$. Все представления $T^\alpha$, кроме представления с $\sigma = -1$, $\varepsilon = 1$, операторно неприводимы; они неприводимы тогда и только тогда, когда они вполне неприводимы (см. ниже, п. 1.5).

Представление $T^\alpha$, отвечающее характеру $\alpha$ в (1), будем обозначать также $T_{\sigma, \varepsilon}$. Это представление индуцировано характером $\beta$ группы $B$, определяемым формулой $\beta(b) = \alpha(b)|b_{22}|$ ($b \in B$).

Пусть $\rho$ — комплексное число, связанное с $\sigma$ равенством $\sigma = i\rho - 1$. Обозначим представление $T_{\sigma, \varepsilon}$ через $T^{\rho, \varepsilon}$.

Представление $T^{\rho, \varepsilon}$ допускает удобную реализацию как представление группы $G' = SU(1, 1)$. При изоморфизме (1) п. 1.3 группе $K = SO(2)$ соответствует группа $K' = U(1)$ диагональных унитарных матриц с определителем единица и представление группы

$G'$, соответствующее представлению $T^{\rho,\varepsilon}$ группы $G$, действует при $\varepsilon = 0$ в подпространстве $L_0^2(K')$, натянутом на функции $\{e^{i2k\psi}, k \in \mathbf{Z}, \psi \in [0, 2\pi]\}$, а при $\varepsilon = 1$ в подпространстве $L_1^2(K')$, натянутом на функции $\{e^{i(2k+1)\psi}, k \in \mathbf{Z}, \psi \in [0, 2\pi]\}$. При изоморфизмах $L_0^2(K') \to L^2(K')$, $e^{2ki\psi} \to e^{ik\psi}$ $(k \in \mathbf{Z})$ и $L_1^2(K') \to L^2(K')$, $e^{i(2k+1)\psi} \to e^{ik\psi}$ $(k \in \mathbf{Z})$ представления, определяемые в $L^2(K)$ представлениями, соответствующими $T^{\rho,\varepsilon}$, задаются формулами

$$\left[\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}(g) f\right](e^{i\psi}) = |\bar{\alpha} + \beta e^{i\psi}|^{i\rho-1-\varepsilon} (\alpha + \bar{\beta} e^{-i\psi})^{\varepsilon} f\left(\frac{\alpha e^{i\psi} + \bar{\beta}}{\bar{\alpha} + \beta e^{i\psi}}\right), \qquad (3)$$

где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in G'$, $\psi \in [0, 2\pi]$, $f \in L^2(U(1))$.

Представления $T^{\alpha} = T^{\rho,\varepsilon}$ допускают уплотнения, имеющие реализацию в пространствах функций на группе $Z$. Эти реализации удобны при описании операторов симметрии (см. п. 1.11), явного вида инвариантных эрмитовых функционалов, а также при описании дифференциала представления (ср. п. 1.5).

Ограничение $\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}|_{K'}$ представления $\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}$ на подгруппу $K'$ содержит неприводимое представление $\pi_n$ (см. 6.0.1) группы $K' \approx \approx U(1) = T^1$ не более чем по одному разу; при этом представление $\pi_n$ содержится в ограничении $\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}|_{K'}$ тогда и только тогда, когда $n$ и $\varepsilon$ — числа одной четности.

**1.5. Инфинитезимальные операторы представления основной серии.** Пусть $f_n(e^{i\psi}) = e^{in\psi}$ $(\psi \in [0, 2\pi])$; семейство функций $\{f_n, n \in \mathbf{Z}\}$ образует ортонормированный базис в $L^2(K')$; этот базис является собственным относительно ограничения $\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}|_{K'}$, а именно,

$$\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}\left(\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}\right) f_n = e^{i(2n+\varepsilon)\varphi} f_n. \qquad (1)$$

Пусть $\{e_+, e_-, e\}$ — базис в алгебре Ли $su(1, 1)$ группы $SU(1, 1)$, определяемый формулами

$$e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \qquad (2)$$

пусть $E_\pm = dT^{\rho,\varepsilon}(e_\pm)$, $E = dT^{\rho,\varepsilon}(e)$. В базисе $\{f_n\}$ операторы $E_\pm$, $E$ определяются формулами

$$\begin{aligned} E_+ f_n &= (1/2)\{(i\rho - 1 - \varepsilon - 2n) f_{n+1} + (i\rho - 1 + \varepsilon + 2n) f_{n-1}\}, \\ E_- f_n &= (i/2)\{(i\rho - 1 - \varepsilon - 2n) f_{n+1} - (i\rho - 1 + \varepsilon + 2n) f_{n-1}\}, \\ E f_n &= i(2n + \varepsilon) f_n. \end{aligned} \qquad (3)$$

Оператор $\Delta = e_+^2 + e_-^2 - e^2$ является оператором Лапласа для $SU(1, 1)$. В представлении $T^{\rho,\varepsilon}$ оператор $\Delta$ переходит в число $-(\rho^2 + 1)$.

Элемент $\Delta^2 - 8\Delta - 4e^2$ обертывающей алгебры группы $G$ переходит в любом непрерывном унитарном представлении группы

$G$ в положительный оператор (с областью определения, состоящей из дифференцируемых векторов), но не является положительным элементом обертывающей алгебры (как алгебры с инволюцией).

**1.6. Конечномерные неприводимые представления.** Пусть $\pi^{l,0}$ — аналитическое продолжение представления $\pi^l$ (см. 6.1.1) группы $SU(2)$ на группу $SL(2, \mathbf{C})$. Ограничение $\pi_l$ представления $\pi^{l,0}$ на подгруппу $SL(2, \mathbf{R})$ неприводимо; семейство представлений $\pi_l$, где $l$ пробегает множество всех целых или полуцелых неотрицательных чисел, образует полный набор попарно неэквивалентных неприводимых конечномерных представлений группы $SL(2, \mathbf{R})$. Аналогично, ограничение $\pi_l'$ представления $\pi^{l,0}$ на подгруппу $SU(1, 1)$ неприводимо, и семейство представлений $\pi_l'$ ($l = 0$, $1/2$, $1, \ldots$) образует полный набор попарно неэквивалентных неприводимых конечномерных представлений группы $SU(1, 1)$.

Представления $\pi_l$ и $\pi_l'$ могут быть реализованы в пространстве $H_l$ многочленов от переменного $z$ степени не выше $2l$ с помощью формул

$$
\begin{gathered}
[\pi_l(g)p](z) = (g_{12}z + g_{22})^{2l}\, p\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right), \quad g \in SL(2, \mathbf{R}), \\
\left[\pi_l'\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}\right)p\right](z) = (\beta z + \bar{\alpha})^{2l}\, p\left(\frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right), \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1, 1).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Характеры $\chi_l$, $\chi_l'$ представлений $\pi_l$, $\pi_l'$ соответственно определяются формулами

$$
\begin{gathered}
\chi_l(g) = \frac{\lambda^{2l+1} - \lambda^{-2l-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \quad g \in SL(2, \mathbf{R}), \\
\chi_l'(g) = \frac{\lambda^{2l+1} - \lambda^{-2l-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \quad g \in SU(1, 1),
\end{gathered} \tag{2}
$$

в которых $\lambda$ и $\lambda^{-1}$ — собственные значения соответствующей матрицы $g$.

Единичное представление группы $G$ является единственным, с точностью до эквивалентности, неприводимым конечномерным унитарным представлением группы $G$; остальные конечномерные неприводимые представления группы $G$ унитарны в индефинитной метрике.

Ограничение конечномерного неприводимого представления $\pi_l'$ на подгруппу $K'$ содержит по одному разу все неприводимые представления $\pi_n$ группы $K'$ (см. 6.0.1), у которых $n$ и $2l$ — числа одной четности, удовлетворяющие условию $|n| \leqslant 2l$.

**1.7. Основная непрерывная серия унитарных представлений.** Представление $T^{\rho,\varepsilon}$ унитарно тогда и только тогда, когда $\rho$ вещественно. Семейство непрерывных унитарных представлений $T^{\rho,\varepsilon}$, удовлетворяющих этому условию, называется *основной непрерывной серией Гельфанда — Наймарка* унитарных представлений группы $SU(1, 1)$. Представления основной непрерывной серии задаются, таким образом, двумя числами: целым $\varepsilon \in \{0, 1\}$ и вещественным $\rho$. Все представления основной непрерывной серии, кроме представления $\tilde{T}^{0,1}$, неприводимы. Представление $\tilde{T}^{0,1}$ является прямой суммой двух неприводимых унитарных представлений $\tilde{T}_{+}^{0,1}$ и $\tilde{T}_{-}^{0,1}$, действующих в инвариантных подпространствах $L_{+}^{2}(K') = \left\{f\colon f \in L^2(K'), \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\, e^{in\varphi} d\varphi = 0 \text{ для всех } n < 0\right\}$

и $\quad L_{-}^{2}(K') = \left\{f\colon f \in L^2(K'), \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\, e^{in\varphi} d\varphi = 0 \text{ для всех } n \geqslant 0\right\}$

соответственно.

Соответствующие представлениям $\tilde{T}^{\rho,\varepsilon}$ представления $T^{\rho,\varepsilon}$ группы $SL(2, \mathbf{R})$, отвечающие вещественным $\rho$, допускают (с помощью разложения Гаусса; см. п. 1.1) реализацию в гильбертовом пространстве $L^2(Z)$ измеримых функций на группе $Z$, квадратично интегрируемых относительно инвариантной меры $d\mu(z) = dz_{21}$, где $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix} \in Z$. А именно, представление $T_{\rho,\varepsilon}$, унитарно эквивалентное представлению $T^{\rho,\varepsilon}$, определяется тем же характером $\alpha$ группы $B$ по формуле

$$[T_{\rho,\varepsilon}(g)f](z) = \alpha(b)f(z\bar{g}), \qquad f \in L^2(Z), \quad g \in G, \tag{1}$$

где $zg = b \cdot z\bar{g}$ $(z, z\bar{g} \in Z,\ b \in B,\ g \in G$; см. п. 1.1), или, в развернутой форме,

$$[T_{\rho,\varepsilon}(g)f](z_{21}) = \\ = |g_{12}z_{21} + g_{22}|^{-\varepsilon+i\rho-1} (g_{12}z_{21} + g_{22})^{\varepsilon} f\left(\frac{g_{11}z_{21} + g_{21}}{g_{12}z_{21} + g_{22}}\right), \tag{2}$$

где $f \in L^2(\mathbf{R}) \approx L^2(Z)$.

Унитарный оператор $V\colon L_{\alpha}^2(K) \to L^2(Z)$, осуществляющий эквивалентность представлений $T^{\rho,\varepsilon}$ и $T_{\rho,\varepsilon}$, определяется формулой

$$(Vf)(z) = \alpha(b)f(u) \quad \text{для} \quad z = bu, \quad z \in Z, \quad b \in B, \quad u \in K. \tag{3}$$

Переход к преобразованию Фурье $\left(\varphi(y) = \int f(x)\, e^{ixy} dx,\ y \in \mathbf{R},\ f \in L^2(Z)\right)$ переводит представление $T_{\rho,\varepsilon}$ в эквивалентное ему представление $R_{\rho,\varepsilon}$ в пространстве $L^2(\mathbf{R})$, ограничение которого на подгруппу $Z$ принимает значения в множестве операторов умножения на функцию:

$$\left[R_{\rho,\varepsilon}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right)\varphi\right](y) = e^{-ixy}\varphi(y), \qquad x, y \in \mathbf{R}, \quad \varphi \in L^2(\mathbf{R}),$$

причем

$$\left[R_{\rho,\varepsilon}\left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\varphi\right](y) = |\lambda|^{-\varepsilon+i\rho+1}\lambda^{\varepsilon}\varphi(\lambda^{-2}y),$$
$$\lambda \in \mathbf{R}^*, \quad y \in \mathbf{R}, \quad \varphi \in L^2(\mathbf{R}).$$

С другой стороны, переход к преобразованию Меллина $\left(\psi(\delta, \sigma) = \int f(x)\,|x|^{-\delta+i\sigma-1/2}x^{\delta}dx,\ \delta \in \{0, 1\},\ \sigma \in \mathbf{R},\ f \in L^2(Z)\right)$ переводит представление $T_{\rho,\varepsilon}$ в эквивалентное ему представление $\tilde{R}_{\rho,\varepsilon}$ в прямой сумме (по $\delta$) двух экземпляров пространства $L^2(\mathbf{R})$, ограничение которого на диагональную подгруппу принимает значения в множестве операторов умножения на функцию:

$$\left[\tilde{R}_{\rho,\varepsilon}\left(\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right)\psi\right](\delta, \sigma) = |\lambda|^{-\varepsilon-\delta+i\sigma+i\rho}\lambda^{\varepsilon+\delta}\psi(\delta, \sigma).$$

Операторы представлений $R_{\rho,\varepsilon}$ и $\tilde{R}_{\rho,\varepsilon}$ являются, вообще говоря, сингулярными интегральными операторами.

Пусть $\beta$ — унитарный характер группы $B$, связанный с характером $\alpha$ формулой $\beta(b) = \alpha(b)|b_{22}|$ $(b \in B)$.

Два представления $T^{\alpha}, T^{\alpha'}$ основной непрерывной серии унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $\beta = \beta'$, либо $\beta^{-1} = \beta'$, т. е. либо $\rho = \rho'$, $\varepsilon = \varepsilon'$, либо $\rho = -\rho'$, $\varepsilon = \varepsilon'$.

**1.8. Дополнительная серия.** Пусть $\mathfrak{H}_\rho$ $(0 < |\rho| < 1)$ — гильбертово пространство, являющееся пополнением пространства $K(\mathbf{R})$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на числовой прямой относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} |x_1 - x_2|^{\rho-1} f_1(x_1)\overline{f_2(x_2)}\,dx_1\,dx_2, \qquad f_1, f_2 \in K(\mathbf{R}). \quad (1)$$

Представление $S_\rho$ в пространстве $\mathfrak{H}_\rho$, определяемое формулой

$$[S_\rho(g)f](x) = |g_{12}x + g_{22}|^{-1-\rho} f\left(\frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{12}x + g_{22}}\right), \qquad f \in K(\mathbf{R}), \quad (2)$$

является непрерывным унитарным представлением группы $SL(2, \mathbf{R})$, эквивалентным представлению $T^{\rho,0}$ основной непрерывной серии. Представления $S_\rho$ $(0 < |\rho| < 1)$ называются *представлениями дополнительной серии* для группы $SL(2, \mathbf{R})$.

Представление $S_\rho$ группы $SL(2, \mathbf{R})$ соответствует представлению $S^\rho$ группы $SU(1, 1)$ в гильбертовом пространстве, являющемся пополнением пространства бесконечно дифференцируемых функций на $K'$ относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2)_{(\rho)} = \int\limits_{[0, 2\pi]\times[0, 2\pi]} \left|\sin\frac{\varphi - \psi}{2}\right|^{-1+\rho} f_1(\varphi)\overline{f_2(\psi)}\,d\varphi\,d\psi, \quad (3)$$

где представление $S^\rho$ определяется формулой

$$[S^\rho(g)f](e^{i\psi}) = |\bar{\alpha} + \beta e^{i\psi}|^{-1-\rho} f\left(\frac{\alpha e^{i\psi} + \bar{\beta}}{\bar{\alpha} + \beta e^{i\psi}}\right), \quad g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix} \in SU(1, 1), \quad (4)$$

где $0 < |\rho| < 1$, $\psi \in [0, 2\pi]$.

Представления $S_\rho$ и $S_{-\rho}$ унитарно эквивалентны.

1.9. **Дискретные серии.** Группа $G' = SU(1, 1)$ имеет дискретную серию представлений, т. е. левое регулярное представление группы $G'$ имеет неприводимые подпредставления.

Пусть $H_m$ $(m \geqslant 1)$ — замкнутое подпространство в $L^2(G')$ (построенное по мере Хаара $dg = d\varepsilon\, dn\, du$ при $g = \varepsilon n u$ $(\varepsilon \in E,\ n \in N,\ u \in K)$ (см. (2) п. 1.2), порожденное функциями $\varphi_p^{(m)}(g) = \alpha^{-1-m-p}\beta^p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$. Подпространство $H_m$ инвариантно относительно левых сдвигов и неприводимо. Пусть $D_m^+$ $(m \geqslant 1)$ — ограничение левого регулярного представления группы $G$ на подпространство $H_m$. Представление $D_m^+$ называется представлением *аналитической дискретной серии.* Пусть $\overline{H}_m$ $(m \geqslant 1)$ — замкнутое подпространство в $L^2(G)$, образованное функциями, комплексно сопряженными к функциям из $H_m$. Тогда подпространство $\overline{H}_m$ также инвариантно относительно левых сдвигов и неприводимо. Пусть $D_m^-$ $(m \geqslant 1)$ — ограничение левого регулярного представления группы $G$ на подпространство $\overline{H}_m$. Представление $D_m^-$ называется представлением *антианалитической дискретной серии.*

Представление $D_m^+$ унитарно эквивалентно представлению $\widetilde{D}_m^+$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_m^+$ аналитических функций $f$ в единичном круге с конечным интегралом $\int\limits_{|z|<1} |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^{m-1} dx\, dy$ (где $z = x + iy$) и со скалярным произведением

$$(f_1, f_2)_m = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_{|z|<1} f_1(z)\, \overline{f_2(z)}\, (1 - |z|^2)^{m-1} dx\, dy, \quad f_1, f_2 \in \mathfrak{H}_m, \tag{1}$$

где представление $\widetilde{D}_m^+$ определяется формулой

$$[\widetilde{D}_m^+(g) f](z) = (\overline{\alpha} + \beta z)^{-1-m} f\left(\frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\overline{\alpha} + \beta z}\right), \quad f \in \mathfrak{H}_m. \tag{2}$$

Представление $D_m^-$ унитарно эквивалентно представлению $\widetilde{D}_m^-$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_m^+$, определяемому формулой

$$\widetilde{D}_m^-(g) = \widetilde{D}_m^+(\overline{g}), \text{ где } \overline{g} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ для } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1, 1). \tag{3}$$

Представление $D_m^-$ допускает также реализацию в гильбертовом пространстве функций, аналитических вне единичного круга.

Представлениям $D_m^\pm$ соответствуют представления $\mathcal{D}_m^\pm$ группы $SL(2, \mathbf{R})$. Представление $\mathcal{D}_m^+$ реализуется в гильбертовом пространстве $H_m^+$ аналитических в верхней полуплоскости функций $f$ с конечным интегралом $\int\limits_{\operatorname{Im} z>0} y^{m-1} |f(x, y)|^2 dx\, dy$ и со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = (\Gamma(m))^{-1} \int\limits_{\operatorname{Im} z>0} y^{m-1} f_1(x, y)\, \overline{f_2(x, y)}\, dx\, dy, \tag{4}$$

в котором представление $\mathscr{D}_m^+$ действует по формуле

$$[\mathscr{D}_m^+(g)f](z) = (g_{21}z + g_{22})^{-m-1} f\left(\frac{g_{11}z + g_{12}}{g_{21}z + g_{22}}\right),$$

$$g \in SL(2, \mathbf{R}), \quad f \in H_m^+. \tag{5}$$

Представление $\mathscr{D}_m^-$ реализуется в гильбертовом пространстве $H_m^-$ функций $f$, аналитических в нижней полуплоскости, с конечным интегралом $\int\limits_{\operatorname{Im} z < 0} y^{m-1} |f(x, y)|^2 \, dx \, dy$ и со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_{\operatorname{Im} z < 0} y^{m-1} f_1(x, y) \overline{f_2(x, y)} \, dx \, dy, \tag{6}$$

в котором представление $\mathscr{D}_m^-$ действует по формуле

$$[\mathscr{D}_m^-(g)f](z) = (g_{12}z + g_{22})^{-m-1} f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right),$$

$$g \in SL(2, \mathbf{R}), \quad f \in H_m^-. \tag{7}$$

Неприводимыми представлениями основной унитарной серии (см. п. 1.7), дополнительной серии (см. п. 1.8), дискретной серии, к которым нужно присоединить единичное представление (ср. п. 1.6) и представления $\widetilde{T}_{\pm}^{0,1}$ (см. п. 1.7), исчерпываются (с точностью до унитарной эквивалентности) все неприводимые унитарные представления группы $G'$.

Представления $\widetilde{T}_{\pm}^{0,1}$ эквивалентны представлениям $\widetilde{D}_0^{\pm}$ соответственно, где представление $\widetilde{D}_0^+$ определяется формулой (2) с $m = 0$ в пространстве $\mathfrak{H}_0^+$ аналитических функций в единичном круге, для которых выражение в правой части формулы (1) конечно при вещественных $m > 0$ и существует предел

$$\lim_{m \to +0} \Gamma(m)^{-1} \int\limits_{|z|<1} |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^{m-1} \, dx \, dy;$$

скалярное произведение в $\mathfrak{H}_0^+$ определяется формулой

$$(f_1, f_2)_0 = \lim_{m \to +0} \Gamma(m)^{-1} \int\limits_{|z|<1} f_1(z) \overline{f_2(z)} (1 - |z|^2)^{m-1} \, dx \, dy, \quad f_1, f_2 \in \mathfrak{H}_0^+.$$

Представление $\widetilde{D}_0^-$ связано с представлением $\widetilde{D}_0^+$ формулой (3).

Ограничение представления $\widetilde{D}_m^+$ $(m \geqslant 0)$ на максимальную компактную подгруппу $K'$ содержит по одному разу все неприводимые представления $\pi_n$ группы $K'$ (см. 6.0.1), у которых разность $n - m - 1$ есть неотрицательное четное число, т. е. $n = m + 2k + 1$ $(k \geqslant 0$ — целое); ограничение представления $\widetilde{D}_m^-$ $(m \geqslant 0)$ на $K'$ содержит по одному разу все неприводимые представления $\pi_n$ группы $K'$, у которых сумма $n + m + 1$ есть неотрицательное четное число, т. е. $n = -m - 2k - 1$ $(k \geqslant 0$ — целое),

**1.10. Матричные элементы и зональные сферические функции.** В ортонормированном базисе $f_n(e^{i\psi}) = e^{in\psi}$ ($\psi \in [0, 2\pi]$) пространства $L^2(K')$ матричные элементы

$$u_{nm}^{\rho,\varepsilon}(g) = (\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}(g) f_m, f_n), \qquad m, n \in \mathbf{Z},$$

определяются формулами

$$u_{nm}^{\rho,\varepsilon}(g) = (-1)^{n-m} \alpha^{(i\rho-1+\varepsilon)/2+m} \times$$
$$\times \bar{\alpha}^{(i\rho-1-\varepsilon)/2-n} \beta^{n-m} \frac{\left(\frac{-i\rho+1+\varepsilon}{2}+m\right)\ldots\left(\frac{-i\rho+1+\varepsilon}{2}+n-1\right)}{(n-m)!} \times$$
$$\times F((-i\rho+1-\varepsilon)/2 - m, (-i\rho+1+\varepsilon)/2+n,$$
$$n-m+1, \beta\bar{\beta}(\alpha\bar{\alpha})^{-1}) \quad (1)$$

при $n \geqslant m$,

$$u_{nm}^{\rho,\varepsilon}(g) = (-1)^{n-m} \alpha^{(i\rho-1+\varepsilon)/2+n} \bar{\alpha}^{(i\rho-1-\varepsilon)/2-m} \times$$
$$\times \bar{\beta}^{m-n} \frac{\left(\frac{-i\rho+1-\varepsilon}{2}-m\right)\ldots\left(\frac{-i\rho+1-\varepsilon}{2}-n+1\right)}{(m-n)!} F((-i\rho+1-$$
$$-\varepsilon)/2-n, (-i\rho+1+\varepsilon)/2+m, m-n+1, \beta\bar{\beta}(\alpha\bar{\alpha})^{-1}) \quad (2)$$

при $n \leqslant m$, где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция. В частности, зональная сферическая функция (т. е. матричный элемент представления, определенного $K'$-инвариантным вектором) существует лишь для представлений с $\varepsilon = 0$ и имеет вид

$$\varphi_\rho(g) = u_{00}^{\rho,0}(g) = |\alpha|^{-1+i\rho} F((-i\rho+1)/2, (-i\rho+1)/2, 1, \beta\bar{\beta}(\alpha\bar{\alpha})^{-1}). \quad (3)$$

Таким образом, представления дополнительной серии имеют, а представления дискретной серии не имеют зональных сферических функций.

Отметим, что если $i\rho - 1 - \varepsilon$ не является четным целым числом, то $u_{nm}^{\rho,\varepsilon}$ не обращается в нуль тождественно; если же $i\rho - 1 - \varepsilon = 2k$, где $k$ — целое, то $u_{nm}^{\rho,\varepsilon} \equiv 0$ при $n \geqslant k \geqslant m$ или при $m \geqslant -k - \varepsilon \geqslant n$.

В параметризации с помощью разложения Картана ($g = u_\varphi g_\tau u_\psi$ ($u_\varphi, u_\psi \in K'$, $g_\tau \in E'$), так что $u_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$, $g_\tau = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau/2 & \operatorname{sh}\tau/2 \\ \operatorname{sh}\tau/2 & \operatorname{ch}\tau/2 \end{pmatrix}$) формула (1) при $n \geqslant m$ имеет вид

$$u_{nm}^{\rho,\varepsilon}(g) = (-1)^{n-m} e^{i\varphi(2m+\varepsilon)} e^{i\psi(2n+\varepsilon)} \times$$
$$\times \left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\right)^{i\rho-1} \left(\operatorname{th}\frac{\tau}{2}\right)^{n-m} \frac{\left(\frac{-i\rho+1+\varepsilon}{2}+m\right)\ldots\left(\frac{-i\rho+1+\varepsilon}{2}+n-1\right)}{(n-m)!} \times$$
$$\times F\left(\frac{-i\rho+1-\varepsilon}{2} - m, \frac{-i\rho+1+\varepsilon}{2} + n, n-m+1, \operatorname{th}^2\frac{\tau}{2}\right); \quad (4)$$

аналогичное равенство справедливо и для $n \leqslant m$ (см. (2)).

**1.11. Структура представлений основной серии группы $G$.** Представления $T^{\rho,\varepsilon}$ группы $G'=SU(1,1)$ вполне неприводимы тогда и только тогда, когда $i\rho-1-\varepsilon$ не является четным целым числом. Если $i\rho-1-\varepsilon=2k$, где $k$ — целое число, то представление $T^{\rho,\varepsilon}$ устроено следующим образом.

Пусть $H^+_{\rho,\varepsilon}$ — замкнутое подпространство в $L^2(S^1)$, порожденное функциями $f_n(e^{i\psi})=e^{in\psi}$ с $n\geqslant -k-\varepsilon$; $H^-_{\rho,\varepsilon}$ — подпространство, порожденное функциями $f_n$ с $n\leqslant k$. Подпространства $H^+_{\rho,\varepsilon}$ и $H^-_{\rho,\varepsilon}$ являются инвариантными подпространствами представления $T^{\rho,\varepsilon}$. Если $k<0$, то эти подпространства имеют нулевое пересечение; в факторпространстве $L^2(S^1)/(H^+_{\rho,\varepsilon}+H^-_{\rho,\varepsilon})$ представление $T^{\rho,\varepsilon}$ определяет неприводимое конечномерное представление, эквивалентное *) представлению $\pi_{(-2k-\varepsilon-2)/2}$ (см. п. 1.6), за исключением случая, когда $k=-1$, $\varepsilon=1$, т. е. $\rho=0$, $\varepsilon=1$, в котором $L^2(S^1)=H^+_{\rho,\varepsilon}\oplus H^-_{\rho,\varepsilon}$. Представления, определяемые подпространствами $H^+_{\rho,\varepsilon}$ и $H^-_{\rho,\varepsilon}$, эквивалентны представлениям $D^+_{-2k-\varepsilon-1}$ и $D^-_{-2k-\varepsilon-1}$ соответственно (см. п. 1.9). Если же $k\geqslant 0$, то подпространства $H^+_{\rho,\varepsilon}$ и $H^-_{\rho,\varepsilon}$ имеют нулевое конечномерное пересечение $H^+_{\rho,\varepsilon}\cap H^-_{\rho,\varepsilon}$ и порождают все пространство $L^2(S^1)$. Представление $T^{\rho,\varepsilon}$ определяет в этом случае в инвариантном пространстве $H^0_{\rho,\varepsilon}=H^+_{\rho,\varepsilon}\cap H^-_{\rho,\varepsilon}$ неприводимое конечномерное представление, эквивалентное представлению $\pi_{(2k+\varepsilon)/2}$ (см. п. 1.6), а в факторпространствах $H^+_{\rho,\varepsilon}/H^0_{\rho,\varepsilon}$ и $H^-_{\rho,\varepsilon}/H^0_{\rho,\varepsilon}$ представление $T^{\rho,\varepsilon}$ определяет неприводимые представления, соответственно эквивалентные представлениям $D^+_{2k+\varepsilon+1}$ и $D^-_{2k+\varepsilon+1}$ дискретной серии (см. п. 1.9).

Если $k<0$, то представление $T^{\rho,\varepsilon}$ неразложимо, за исключением случая представления $T^{-1,-1}$ основной серии, которое эквивалентно прямой сумме $D^+_0\oplus D^-_0$. Если $k\geqslant 0$, то представление $T^{\rho,\varepsilon}$ и его ограничения на подпространства $H^+_{\rho,\varepsilon}$ и $H^-_{\rho,\varepsilon}$ неразложимы, а представление, определяемое представлением $T^{\rho,\varepsilon}$ в факторпространстве $L^2(S^1)/H^0_{\rho,\varepsilon}$, эквивалентно прямой сумме $D^+_{2k+\varepsilon+1}\oplus$ $\oplus D^-_{2k+\varepsilon+1}$.

Если $i\rho-1-\varepsilon$ не является четным целым числом, то представления $T^{\rho,\varepsilon}$ и $T^{\rho',\varepsilon'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\rho'=\rho$, $\varepsilon'=\varepsilon$ или $\rho'=-\rho$, $\varepsilon'=\varepsilon$. Представления $T^{\rho,\varepsilon}$ не эквивалентны никаким нетривиальным подпредставлениям представлений вида $T^{\rho',\varepsilon'}$.

В пространстве представления $T^{\rho,\varepsilon}$ тогда и только тогда существует ненулевой инвариантный эрмитов функционал, когда либо число $\rho$ вещественно (см. п. 1.7), и тогда инвариантный эрмитов функционал определен однозначно с точностью до множи-

*) Здесь и далее в этом пункте эквивалентность понимается в смысле Наймарка.

теля и совпадает с обычным скалярным произведением, либо когда число $\rho$ чисто мнимо. Если в последнем случае число $i\rho-1-\varepsilon$ не является четным целым числом, то инвариантный эрмитов функционал в пространстве представления $L^2(S^1)$ однозначно с точностью до множителя определяется формулой

$$F(f_1, f_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma((i\rho+\varepsilon+1+2n)/2)}{\Gamma((-i\rho+\varepsilon+1+2n)/2)} a_n \bar{b}_n, \tag{1}$$

где

$$f_1(e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\varphi}, \quad f_2(e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\varphi} \tag{2}$$

— разложения функций $f_1, f_2 \in L^2(S^1)$ в ряд Фурье. Функционал (1) может быть задан также интегральной формулой

$$F(f_1, f_2) = \frac{\Gamma((i\rho+\varepsilon+1)/2)\,\Gamma(-(i\rho+\varepsilon-1)/2)}{2^{i\rho+3}\pi^2\Gamma(-i\rho)} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left( \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} e^{i(\varepsilon/2)(\psi-\varphi)} \left|\sin\frac{\psi-\varphi}{2}\right|^{-i\rho-1} f_1(e^{i\psi})\overline{f_2(e^{i\varphi})}\,d\psi \right) d\varphi, \quad f_1, f_2 \in L^2(S^1). \tag{3}$$

Функционал (1) (или (3)) положительно определен тогда и только тогда, когда $\varepsilon=0$ и $-1<i\rho<1$, т. е. когда представление $T^{\rho,0}$ эквивалентно представлению дополнительной серии (см. п. 1.8) или совпадает с представлением $T^{0,0}$ основной унитарной серии (см. п. 1.7). В остальных случаях (при $i\rho-1-\varepsilon \neq 2k$) функционал (1) (или (3)) имеет конечное число отрицательных квадратов.

Если число $i\rho-1-\varepsilon=2k$ четно и если $k+\varepsilon \geqslant 0$, то в пространстве $L^2(S^1)$ существуют в точности два линейно независимых инвариантных линейных функционала. В качестве таких функционалов можно выбрать функционалы $F_+$ и $F_-$, обращающиеся в нуль на подпространствах $H^-_{\rho,\varepsilon}$ и $H^+_{\rho,\varepsilon}$ соответственно, определяемые формулами

$$F_+(f_1, f_2) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\varepsilon+n+1)}{\Gamma(n-k)} a_n \bar{b}_n, \tag{4}$$

$$F_-(f_1, f_2) = \sum_{n=-\infty}^{-k-\varepsilon-1} \frac{\Gamma(k+\varepsilon-n+1)}{\Gamma(-n-k-\varepsilon)} a_n \bar{b}_n, \tag{5}$$

где $f_1, f_2 \in L^2(S^1)$, где числа $a_n$ и $b_n$ определяются формулами (2). Эти функционалы положительно определены на соответствующих факторпространствах.

Если же число $i\rho-1-\varepsilon=2k$ четно и $k+\varepsilon<0$, то в пространстве $L^2(S^1)$ существует лишь один, с точностью до множителя, инвариантный эрмитов функционал, который можно определить формулой

$$F(f_1, f_2) = \sum_{n=k+1}^{-k-\varepsilon-1} \frac{(-1)^n a_n \bar{b}_n}{\Gamma(n-k)\Gamma(-n-k-\varepsilon)}, \quad f_1, f_2 \in L^2(S^1), \tag{6}$$

где числа $a_n$, $b_n$ определяются формулами (2).

Семейство представлений $T^{\rho, \varepsilon}$ ($|\operatorname{Im} \rho| < 1$) эквивалентно равномерно ограниченному семейству.

**1.12. Следы бесконечномерных неприводимых представлений.** Пусть $f$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция на группе $G'$, $\tilde{T}^{\rho,\varepsilon}(f) = \int_{G'} f(g) \tilde{T}^{\rho,\varepsilon}(g)\, dg$ — образ функции $f$ в представлении групповой алгебры группы $G'$, соответствующем представлению $\tilde{T}^{\rho, \varepsilon}$ группы $G'$. Отображение $f \to \tilde{T}^{\rho, \varepsilon}(f)$ принимает значения в множестве операторов со следом в пространстве $L^2(S^1)$, и формула $f \to \operatorname{tr} \tilde{T}^{\rho, \varepsilon}(f)$ $(f \in K(G'))$ определяет локально интегрируемую обобщенную функцию $\chi_{\rho, \varepsilon}$ на $G'$ по формуле $\operatorname{tr} \tilde{T}^{\rho,\varepsilon}(f) = \int_{G'} f(g)\, \chi_{\rho,\varepsilon}(g)\, dg$ $(f \in K(G'))$. Справедливо равенство

$$\chi_{\rho,\varepsilon}(g) = \begin{cases} \dfrac{|\lambda|^{i\rho} + |\lambda^{-1}|^{i\rho}}{|\lambda - \lambda^{-1}|}, & \text{если собственные значения } \lambda, \lambda^{-1} \text{ матрицы } g \in G' \text{ вещественны и различны,} \\ 0, & \text{если собственные значения матрицы } g \in G' \text{ невещественны.} \end{cases} \tag{1}$$

В частности, эта формула справедлива для представлений основной унитарной серии (см. п. 1.7) и дополнительной серии (см. п. 1.8).

Аналогичным образом определяемые следы $\chi_m^{\pm}$ представлений дискретной серии $\left(\operatorname{tr} D_m^{\pm}(f) = \int_{G'} f(g)\, \chi_m^{\pm}(g)\, dg \quad (f \in K(G'))\right)$ задаются формулами

$$\chi_m^{\pm}(g) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{-m}}{\lambda - \lambda^{-1}}, & \text{если собственные значения } \lambda, \lambda^{-1} \text{ матрицы } g \in G' \text{ вещественны и различны, причем } |\lambda| > |\lambda^{-1}|, \\ \mp \dfrac{e^{\pm im\psi}}{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}, & \text{если матрица } g \in G' \text{ сопряжена в группе } G' \text{ матрице } \operatorname{diag}(e^{i\psi}, e^{-i\psi}). \end{cases} \tag{2}$$

Отметим равенство

$$\chi_{i\rho}^{+} + \chi_{i\rho}^{-} + \chi'_{(i\rho-1)/2} = \chi_{\rho,\varepsilon}$$

при неотрицательном целом $i\rho$ и четном $i\rho - \varepsilon - 1$, где $\chi'_l$ определяется формулой (1) п. 1.6.

**1.13. Аналог формулы Планшереля и формула обращения.** Пусть $f \in L^1(G') \cap L^2(G')$; пусть $\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}(f) = \int\limits_{G'} f(g)\, \widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}(g)\, dg$ для представлений основной унитарной серии и $D_m^{\pm}(f) = \int\limits_{G'} f(g) \times$ $\times D_m^{\pm}(g)\, dg$ для представлений дискретной серии, где $dg$ — мера Хаара на $G'$. Будем считать, что мера $dg$ определена равенством $dg = \operatorname{sh}\tau\, d\tau\, d\varphi\, d\psi$, где $\tau \geqslant 0$, $-2\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$ и

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau/2 & \operatorname{sh}\tau/2 \\ \operatorname{sh}\tau/2 & \operatorname{ch}\tau/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{G'} |f(g)|^2 dg =$$
$$= (8\pi^2)^{-1} \left\{ \sum_{\varepsilon=0}^{1} \int\limits_0^{+\infty} \operatorname{tr}\left(\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}(f)^* \widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}(f)\right) \rho \operatorname{th} \pi \frac{\rho + i\varepsilon}{2}\, d\rho + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} 2m \left[\operatorname{tr}\left(D_m^+(f)^* D_m^+(f)\right) + \operatorname{tr}\left(D_m^-(f)^* D_m^-(f)\right)\right] \right\}, \tag{2}$$

где интегралы и ряды в правой части сходятся абсолютно.

Формула

$$f(g) = (4\pi)^{-2} \left\{ \sum_{\varepsilon=0}^{1} \int\limits_0^{+\infty} \operatorname{tr}\left(\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}(f)\, \widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}(g)^*\right) \rho \operatorname{th} \pi \frac{\rho + i\varepsilon}{2}\, d\rho + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} 2m \left[\operatorname{tr}\left(D_m^+(f)\, D_m^+(g)^*\right) + \operatorname{tr}\left(D_m^-(f)\, D_m^-(g)^*\right)\right] \right\}, \tag{3}$$

где интеграл в правой части сходится в среднем в $L^2(G)$, справедлива почти всюду и является формулой обращения.

Отображение $f \to \{\widetilde{T}^{\rho,\varepsilon}(f), D_m^+(f), D_m^-(f)\}$, где $\rho$ вещественно, $m$ натурально, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, а $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, продолжается до унитарного оператора из $L^2(G)$ на прямой интеграл соответствующих гильбертовых пространств операторов Гильберта — Шмидта.

Отметим важное для формул (2) и (3) равенство $\operatorname{th}\pi(\rho + i/2) = \operatorname{cth}\pi\rho$.

Аналогичная формула Планшереля и формула обращения справедливы на группе $G = SL(2, \mathbf{R})$. В частности, правые части формул (2) и (3) не изменятся, если в качестве меры Хаара на $G = SL(2, \mathbf{R})$ взять меру $dg = d\tau\, dx\, d\theta$ для

$$g = \begin{pmatrix} e^{\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$$

в соответствии с разложением Ивасавы (см. п. 1.2).

**1.14. Операторы симметрии.** Пусть $\operatorname{Im}\rho > 0$. Формула

$$(B_{\rho,\varepsilon}f)(e^{i\varphi}) = \frac{1}{\Gamma(-i\rho/2)}\int_0^{2\pi} e^{i(\varepsilon/2)\psi}\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^{-i\rho-1} f(e^{i(\psi+\varphi)})\,d\psi, \quad f\in L^2(S^1), \quad (1)$$

задает допускающий замыкание линейный оператор в $L^2(S^1)$ с плотной областью определения, сплетающий представление $T^{\rho,\varepsilon}$ с $T^{-\rho,\varepsilon}$, т. е. $B_{\rho,\varepsilon}T^{\rho,\varepsilon} = T^{-\rho,\varepsilon}B_{\rho,\varepsilon}$. Этот оператор допускает аналитическое продолжение на всю плоскость $\rho$. Операторы $B_{\rho,\varepsilon}$ и их кратные исчерпывают множество операторов, сплетающих представления $T^{\rho,\varepsilon}$ с $T^{-\rho,\varepsilon}$, если $i\rho-1-\varepsilon$ не является четным целым числом, а также в случае, если $i\rho-1-\varepsilon=2k$, где $k$ — такое целое число, что число $k+\varepsilon$ отрицательно. В случае, если $i\rho-1-\varepsilon=2k$ и $k+\varepsilon\geqslant 0$, семейство операторов, сплетающих $T^{\rho,\varepsilon}$ с $T^{-\rho,\varepsilon}$, является линейной оболочкой множества двух операторов $B^{\pm}_{\rho,\varepsilon}$, определяемых формулами

$$\begin{aligned}
&B^+_{\rho,\varepsilon}e^{in\varphi} = \frac{\Gamma(k+\varepsilon+n+1)}{\Gamma(n-k)}e^{in\varphi} \text{ при } n\geqslant k+1,\\
&B^+_{\rho,\varepsilon}e^{in\varphi} = 0 \text{ при } n\leqslant k,\\
&B^-_{\rho,\varepsilon}e^{in\varphi} = \frac{\Gamma(k+\varepsilon-n+1)}{\Gamma(-n-k-\varepsilon)}e^{in\varphi} \text{ при } n\leqslant -k-\varepsilon-1,\\
&B^-_{\rho,\varepsilon}e^{in\varphi} = 0 \text{ при } n\geqslant -k-\varepsilon.
\end{aligned} \quad (2)$$

Линейной оболочкой операторов вида $B_{\rho,\varepsilon}$ и $B^{\pm}_{\rho,\varepsilon}$ исчерпываются операторы, сплетающие представления вида $T^{\rho,\varepsilon}$.

**1.15. Аналог теоремы Пэли — Винера.** Пусть $\Delta$ — оператор Лапласа на группе $K'$ $\left(\text{т. е. } \Delta=(d/d\varphi)^2 \text{ при } K'=\left\{\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\}\right)$, $\mathcal{F}$ — алгебра операторнозначных функций $T$ от переменных $\rho$ и $\varepsilon$ ($\rho\in\mathbf{C}$, $\varepsilon\in\{0,1\}$), принимающих значения в пространстве операторов Гильберта — Шмидта в $L^2(K')$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) для любых неотрицательных целых чисел $n_1$, $n_2$ оператор $\Delta^{n_1}T(\rho,\varepsilon)\Delta^{n_2}$ есть оператор Гильберта — Шмидта в $L^2(K')$;

2) функция $\rho\to T(\rho,\varepsilon)$ есть целая аналитическая функция не выше первого порядка роста и конечного типа, убывающая на оси $\operatorname{Im}\rho=0$ быстрее любой степени $\operatorname{Re}\rho$, т. е.

$$\|\rho^n T(\rho,\varepsilon)\|_2 \leqslant C_n(T)e^{a|\operatorname{Im}\rho|}, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|_2$ означает норму Гильберта — Шмидта;

3) выполняются соотношения симметрии, т. е. $B_{\rho,\varepsilon}T(\rho,\varepsilon) = T(-\rho,\varepsilon)B_{\rho,\varepsilon}$, если число $i\rho-\varepsilon-1$ не является четным целым числом или если $i\rho-\varepsilon-1=2k$, где $k$ — целое, а число $k+\varepsilon<0$,

и $B^{\pm}_{\rho,\varepsilon}T(\rho,\varepsilon)=T(-\rho,\varepsilon)B^{\pm}_{\rho,\varepsilon}$, если $i\rho-\varepsilon-1=2k$, где $k$ — целое, причем $k+\varepsilon\geqslant 0$.

Пусть алгебра $\mathcal{F}$ снабжается структурой индуктивного (по параметру $a$) предела локально выпуклых пространств, топология в которых задается преднормами вида

$$T\to\sup_{\rho,\varepsilon}|\rho|^n\left\|\Delta^{n_1}T(\rho,\varepsilon)\Delta^{n_2}\right\|_2 e^{-a|\operatorname{Im}\rho|},\qquad T\in\mathcal{F},\tag{2}$$

где $n$, $n_1$, $n_2$ независимо пробегают множество неотрицательных целых чисел. Тогда отображение $f\to\tilde{T}^{\rho,\varepsilon}(f)$ $(f\in K(G'))$ есть топологический изоморфизм алгебры $K(G')$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на группе $G'$ (в топологии Шварца) на топологическую алгебру $\mathcal{F}$.

**1.16. Неприводимые унитарные представления группы $SO_0(2,1)$.** Представление $T^{\rho,\varepsilon}$ основной серии группы $SU(1, 1)$ (см. п. 1.4) определяет представление факторгруппы $G_0$ группы $SU(1,1)$ по ее центру $\{\pm e\}$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon=0$. Группа $G_0=SU(1,1)/\{\pm e\}$ изоморфна группе $SO_0(2, 1)$ (см. (2) п. 1.3). Представления группы $G_0$, определяемые представлениями $T^{\rho,0}$, имеют структуру, описанную в п. 1.11; представления основной непрерывной серии с $\varepsilon=0$, представления дополнительной серии и представления $D^{\pm}_m$ дискретной серии с нечетным $m$ определяют (вместе с единичным представлением) полный набор неприводимых унитарных представлений группы $SO_0(2, 1)$.

Семейство $T_\rho$ $(\rho\in\mathbf{C})$ представлений группы $SO_0(2, 1)$, определяемых представлениями $T^{\rho,\varepsilon}$ основной серии группы $SU(1, 1)$, называется *основной серией* представлений группы $SO_0(2, 1)$.

Представления $T_\rho$ $(\rho\in\mathbf{C})$ допускают реализацию в пространстве $L^2(S)$, где $S$ — окружность в $\mathbf{R}^3$ вида $S=\{s=(\cos\varphi,\sin\varphi,1),\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, с помощью формулы

$$[T_\rho(g)f](s)=f((sg)/(sg)_3)(sg)_3^{(i\rho-1)/2},\quad g\in SO_0(2,1),\quad f\in L^2(S),\tag{1}$$

где $s=(s_1,s_2,s_3)\in S$, $sg$ — произведение строки $s\in S$ на матрицу $g\in SO_0(2,1)$, а $L^2(S)$ построено по мере $ds=d\varphi$.

**1.17. Тензорные произведения неприводимых унитарных представлений группы $SO_0(2, 1)$. Случай тензорного произведения представлений основной непрерывной серии.** Тензорное произведение $T_{\rho_1}\otimes T_{\rho_2}$ представлений основной непрерывной серии группы $G_0=SO_0(2, 1)$ можно реализовать в гильбертовом пространстве $L^2(S\times S)$ измеримых функций $f$ двух переменных $s$, $t\in S$, суммируемых с квадратом относительно произведения мер $ds\,dt$, по формуле

$$[T_{\rho_1}\otimes T_{\rho_2}(g)f](s,t)=$$
$$=(sg)_3^{(i\rho_1-1)/2}(tg)_3^{(i\rho_2-1)/2}f((sg)/(sg)_3,(tg)/(tg)_3),\qquad f\in L^2(S\times S).\tag{1}$$

Пусть $[\cdot,\ \cdot]$ — билинейная форма в $\mathbf{R}^3$, введенная формулой (3) п. 1.3. Пусть $X$ — однополостный гиперболоид $X=\{x\in\mathbf{R}^3: [x,\ x]=1\}$ с мерой $dx=|x_3|^{-1}dx_1dx_2$. Группа $G_0$ действует на $X$ по формуле $g(x)=xg$, где $xg$ — произведение строки $x\in\mathbf{R}^3$ на матрицу $g\in SO_0(2,\ 1)$. Стационарная подгруппа $H$ точки $x^0=(0,1,0)$ есть множество матриц $h_\tau$ $(\tau\in\mathbf{R})$, где

$$h_\tau=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\tau & 0 & \operatorname{sh}\tau\\ 0 & 1 & 0\\ \operatorname{sh}\tau & 0 & \operatorname{ch}\tau\end{pmatrix}.$$

Пусть $a_\tau$ и $k_\tau$ $(\tau\in\mathbf{R})$ — элементы группы $G_0$, определяемые равенствами

$$a_\tau=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \operatorname{ch}\tau & \operatorname{sh}\tau\\ 0 & \operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau\end{pmatrix},\quad k_\tau=\begin{pmatrix}\cos\tau & \sin\tau & 0\\ -\sin\tau & \cos\tau & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда любой элемент $g\in G_0$ допускает однозначное представление в виде $g=h_\tau a_u k_v$; в частности, число $\tau$ можно определить по формуле $e^{2\tau}=(s^+g)_3/(s^-g)_3$ для $s^\pm=(\pm1,0,1)\in S$. Положим

$$g_x=a_uk_v\quad\text{для}\quad x=x^0a_uk_v; \tag{2}$$

этой формулой отображение гиперболоида $X$ в $G$ определено корректно.

Пусть $\sigma\in\mathbf{C}$, и пусть $\nu_\sigma(h_t)=\exp(it\sigma/2)$ $(t\in\mathbf{R})$. Пусть $I_\sigma$ — непрерывное представление группы $G_0$ в пространстве Шварца $K(X)$, определяемое формулой

$$[I_\sigma(g)f](x)=\nu_\sigma\left(g_xgg_{xg}^{-1}\right)f(xg),\quad f\in K(X),\quad x\in X,\quad g\in G_0. \tag{3}$$

Представление $I_\sigma$ допускает при вещественном $\sigma$ продолжение до унитарного представления группы $G_0$ в $L^2(X)$.

Введенное в (1) представление $T_{\rho_1}\otimes T_{\rho_2}$ $(\rho_1,\rho_2\in\mathbf{C})$ эквивалентно по Наймарку представлению $I_{\rho_2-\rho_1}$; если $\rho_1$ и $\rho_2$ вещественны, то эта эквивалентность определяет унитарную эквивалентность представления $T_{\rho_1}\otimes T_{\rho_2}$ унитарному продолжению представления $I_{\rho_2-\rho_1}$. Соответствующий оператор эквивалентности строится с помощью диффеоморфизма $\alpha$ многообразия $S^0$, являющегося дополнением диагонали $S_0$ в произведении $S\times S$, на гиперболоид $X$; этот диффеоморфизм $\alpha$ определяется формулой

$$\alpha(s,\ t)=-[s,\ t]^{-1}(s_2-t_2,\ t_1-s_1,\ s_2t_1-s_1t_2)\in X,\quad s,\ t\in S,\quad s\neq t. \tag{4}$$

А именно, оператор $P_{\rho_1,\rho_2}$, отображающий $K(S^0)$ в $K(X)$ по формуле

$$\left(P_{\rho_1,\rho_2}f\right)(\alpha(s,\ t))=f(s,\ t)\left(-[s,\ t]\right)^{(2-i(\rho_1+\rho_2))/4}, \tag{5}$$

$$f\in K(S^0),\quad (s,\ t)\in S^0,$$

сплетает $T_{\rho_1}\otimes T_{\rho_2}$ с $I_{\rho_2-\rho_1}$.

Пусть $T^z_{\rho j}$ ($\rho, z \in \mathbf{C}$, $j \in \{0, 1\}$) — оператор из $K(X)$ в $C^\infty(S)$, определяемый при условии $\operatorname{Im}\rho < 1 - |\operatorname{Im} z|$ формулой

$$(T^z_{\rho j}f)(s) =$$
$$= \gamma\left(\frac{iz}{2}, \frac{i\rho - 1}{2}, j\right)\int\limits_X f(x)\,|[x, s]|^{(i\rho-1)/2-j}[x, s]^j\left\{\frac{[s^- g_x, s]}{[s^+ g_x, s]}\right\}^{iz/4} dx, \qquad (6)$$

где $f \in K(X)$, а величина $\gamma(z, \mu, j)$ определяется формулой

$$\gamma(z, \mu, j) = \left\{\Gamma\left(\frac{\mu + j + 1 + z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu + j + 1 - z}{2}\right)\right\}^{-1}, \qquad (7)$$
$$\mu, z \in \mathbf{C}, \quad j \in \{0, 1\}.$$

Операторная функция $T^z_{\rho,j}$ продолжается по аналитичности до целой функции по $\rho$ и $z$, удовлетворяющей условию

$$T^z_{\rho j} I_z(g) = T_\rho(g)\, T^z_{\rho j}, \qquad g \in G_0. \qquad (8)$$

Функции $T^z_{\rho,0}f$, $T^z_{\rho,1}f$, принадлежащие $C^\infty(S)$, называются *компонентами Фурье* функции $f$, отвечающими представлению $T_\rho$.

Пусть $f_m(s) = e^{-im\varphi}$ для $s = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1) \in S$, $m \in \mathbf{Z}$. Обозначим через $H^\pm_n$ замкнутую линейную оболочку семейства функций $\{f_m, \pm m \geqslant -n\}$, а через $H^0_n$ — пересечение $H^+_n \cap H^-_n$, где $n$ — неотрицательное целое (ср. п. 1.11).

Обозначим через $\widetilde{T}^z_{-i(2n+1),j} f$ ($j \in \{0, 1\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $z \in \mathbf{C}$, $f \in K(X)$) элементы пространства $C^\infty(S)/H^0_n$, представителями которых являются функции $T^z_{-i(2n+1),j} f$ ($f \in K(X)$), если $iz/2$ — нецелое или если $2n < |z|$; если же $iz/2$ — целое число и $2n \geqslant |z|$, то мы будем обозначать через $\widetilde{T}^z_{-i(2n+1),j} f$ образ в $C^\infty(S)/H^0_n$ элемента $T^z_{-i(2n+1),j} f$ лишь при $j$, удовлетворяющем условию $j \equiv n + iz/2 + 1 \pmod 2$; элемент $T^z_{\rho,j} f \in C^\infty(S)$ определяется формулой (6). В этих обозначениях имеет место равенство

$$\widetilde{T}^z_{-i(2n+1),j} I_z(g) = \left((D^+_{2n+1} \oplus D^-_{2n+1})(g)\right)\widetilde{T}^z_{-i(2n+1),j}, \qquad g \in G_0. \qquad (9)$$

Обозначим элемент $\widetilde{T}^z_{-i(2n+1),j} f$ ($f \in K(X)$), через $\widetilde{T}^{n,z}_j f$.

Отображение

$$f \to \{T^z_{\rho,0}f;\ T^z_{\rho,1}f;\ T^{n,z}_j f\}, \qquad (10)$$
$$f \in K(X), \quad z = (\rho_2 - \rho_1), \quad \rho \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

определяемое в (6)—(9), продолжается до унитарного оператора из пространства $L^2(X)$ в прямой интеграл пространств представлений вида $T_\rho$ и $D^+_{2n+1} \oplus D^-_{2n+1}$ (здесь при данном $n$ число $j$ может принимать любое значение из $\{0, 1\}$, если $\rho_1 \neq \rho_2$, и только значение $j \equiv n + 1 \pmod 2$, если $\rho_1 = \rho_2$); соответствующая формула Планшереля имеет вид

$$\int\limits_X |f(x)|^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \sum_{j=0,1} \omega(\rho, j) \left\| T_{\rho,j}^{\rho_2-\rho_1} f \right\|_{L^2(S)}^2 d\rho + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{2n+1,j} \left\| T_j^{n,\rho_2-\rho_1} f \right\|_{L^2(S)/H_n^0}^2, \tag{11}$$

где нормы отвечают стандартному скалярному произведению в $L^2(S)$ и скалярному произведению в $L^2(S)/H_n^0$, относительно которого представление $D_{2n+1}^+ \oplus D_{2n-1}^-$ унитарно, а функции $\omega(\rho, j)$ и $\omega_{m,j}$ определяются формулами

$$\omega(\rho, j) = (32\pi^2)^{-1} \rho \operatorname{th} \frac{\pi\rho}{2} \left| \gamma\left( \frac{i(\rho_2-\rho_1)}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\rho}{2}, j \right) \right|^2, \tag{12}$$

$$\rho \in \mathbf{R}, \quad \rho \geqslant 0, \quad j \in \{0, 1\},$$

$$\omega_{m,j} = \frac{m}{16\pi^2} \frac{((m-1)/2)!}{2^{(m-1)/2}\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \left\{ \gamma\left( \frac{i(\rho_2-\rho_1)}{2}, \frac{m-1}{2}, j \right) \gamma\left( \frac{i(\rho_2-\rho_1)}{2}, -\frac{m-1}{2}, j \right) \right\}^{-1}, \tag{13}$$

где $m = 2n+1$ — нечетное натуральное число, ограничение на $j$ (в связи с $\rho_1 - \rho_2$) указано выше, а функция $\gamma$ определена формулой (7).

Таким образом, в частности, в разложение тензорного произведения $T_{\rho_1} \otimes T_{\rho_2}$ $(\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{R})$ входят только представления основной непрерывной серии (с кратностью 2) и дискретной серии.

**1.18. Тензорные произведения неприводимых унитарных представлений группы $SO_0(2, 1)$. Случай тензорного произведения представления основной непрерывной серии на представление дополнительной серии.** Тензорное произведение $T_{i\rho_1} \otimes T_{\rho_2}$ представления $T_{i\rho_1}$ $(0 < \rho_1 < 1)$ дополнительной серии и представления $T_{\rho_2}$ $(\rho_2 \geqslant 0)$ основной непрерывной серии группы $G_0 = SO_0(2, 1)$ можно реализовать в гильбертовом пространстве $H$, получаемом пополнением пространства $C^\infty(S \times S)$ относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \Gamma\left(\frac{\rho_1}{2}\right)^{-1} \int\limits_{S\times S\times S} |[s_1, s_2]|^{\frac{\rho_1-1}{2}} f_1(s_1, t)\, \overline{f_2(s_2, t)}\, ds_1\, ds_2\, dt, \tag{1}$$

где $f_1, f_2 \in C^\infty(S \times S)$, а $[\cdot, \cdot]$ определено формулой (3) п. 1.3. Представление $T_{i\rho_1} \otimes T_{\rho_2}$ действует в пространстве $H$ по формуле

$$\left[ (T_{i\rho_1} \otimes T_{\rho_2})(g) f \right](s, t) =$$

$$= (sg)_3^{\frac{-\rho_1-1}{2}} (tg)_3^{\frac{i\rho_2-1}{2}} f((sg)/(sg)_3, (tg)/(tg)_3), \quad g \in G_0, \ (s, t) \in S \times S, \tag{2}$$

для всех $f \in C^\infty(S \times S)$.

Воспользуемся обозначениями, введенными в п. 1.17, в том числе формулами (2) и (3) п. 1.17. Пусть $H_{i\rho_1,\rho_2}$ — гильбертово пространство, получаемое пополнением пространства $K(X)$ относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2)_{i\rho_1,\rho_2} = \int\limits_X f_1(x) B_{i\rho_1,\rho_2}\left(I_{\rho_2-i\rho_1}(g_x) f_2\right) dx, \qquad f_1, f_2 \in K(X), \tag{3}$$

где обобщенная функция $B_{i\rho_1,\rho_2}$ на многообразии $X$ определяется формулой

$$B_{i\rho_1,\rho_2}(f) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\rho_1/2)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u^2+1)^{(i\rho_2-\rho_1)/4} |u|^{\rho_1-1} \overline{f(u, u, 1)}\, du, \tag{4}$$
$$f \in K(X).$$

Оператор $P_{i\rho_1,\rho_2}$ (см. (5) п. 1.17) осуществляет унитарную эквивалентность представления $T_{i\rho_1} \otimes T_{\rho_2}$ и унитарного представления $U$ группы $G_0$ в пространстве $H_{i\rho_1,\rho_2}$, получаемого расширением представления $I_{\rho_2-i\rho_1}$, определяемого формулой (3) п. 1.17, в пространстве $K(X)$.

Формулы (6)—(9) п. 1.17 определяют отображение

$$f \to \{T^z_{\rho,0} f;\ T^z_{\rho,1} f;\ \tilde{T}^{n,z}_j f\}, \tag{5}$$
$$f \in K(X), \quad z = (\rho_2 - i\rho_1), \quad \rho \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

допускающее продолжение по непрерывности до унитарного оператора из пространства $H_{i\rho_1,\rho_2}$ представления $U$ в прямой интеграл гильбертовых пространств представлений вида $T_\rho$ $(\rho \geqslant 0)$ основной непрерывной серии унитарных представлений и представлений $D^+_{2n+1} \oplus D^-_{2n+1}$ $(n \geqslant 0)$ дискретной серии (здесь при данном $n$ число $j$ может принимать любое значение из $\{0, 1\}$). Соответствующая формула Планшереля имеет вид (11) п. 1.17, где левая часть равенства должна быть заменена на

$$\int\limits_X f(x) B_{i\rho_1,\rho_2}\left(I_{\rho_2-i\rho_1}(g_x) f\right) dx, \quad f \in K(G),$$

функции $\omega(\rho, j)$ и $\omega_{n,j}$ определяются формулами

$$\begin{gathered} \omega(\rho, j) = 2^{-9/2}\pi^{-3/2}\rho \operatorname{th}\frac{\pi\rho}{2}\left\{\Gamma\left(\frac{1-\rho_1}{2}\right)\right\}^{-1}\delta_{i\rho}, \\ \omega_{2n+1,j} = 2^{-\frac{7}{2}-n}\cdot\pi^{-2}\cdot n!\cdot(2n+1)\left\{\Gamma\left(\frac{1-\rho_1}{2}\right)^{-1}\right\}\delta_{2n+1}, \end{gathered} \tag{6}$$

в которых использовано обозначение

$$\delta_\lambda = \Gamma\left(\frac{2j-\lambda-\rho_1+i\rho_2+1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2j-\lambda-\rho_1-i\rho_2+1}{4}\right)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{2j+\lambda-\rho_1+i\rho_2+1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2j+\lambda-\rho_1-i\rho_2+1}{4}\right)$$

а вместо $\rho_2-\rho_1$ в правой части (11) п. 1.17 следует писать $\rho_2-i\rho_1$.

Таким образом, в частности, в разложение тензорного произведения представлений основной непрерывной и дополнительной серий входят те же представления (и с теми же кратностями), что и в разложение тензорного произведения основной непрерывной серии (см. п. 1.17).

**1.19. Тензорные произведения неприводимых унитарных представлений группы $SO_0(2, 1)$. Случай тензорного произведения представлений дополнительной серии.** Тензорное произведение $T_{i\rho_1}\otimes T_{i\rho_2}$ $(0<\rho_1,\ \rho_2<1)$ представлений дополнительной серии группы $SO_0(2, 1)$ можно реализовать в гильбертовом пространстве $H$, получаемом пополнением пространства $C^\infty(S\times S)$ относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2)=\Gamma\left(\frac{\rho_1}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{\rho_2}{2}\right)^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_{S\times S\times S\times S}|[s_1, s_2]|^{\frac{\rho_1-1}{2}}|[t_1, t_2]|^{\frac{\rho_2-1}{2}}f(s_1, t_1)\overline{f_2(s_2, t_2)}\,ds_1\,ds_2\,dt_1\,dt_2, \quad (1)$$

где $f_1, f_2\in C^\infty(S\times S)$, а $[\cdot, \cdot]$ определено формулой (3) п. 1.3. Представление $T_{i\rho_1}\otimes T_{i\rho_2}$ действует в пространстве $H$ по формуле

$$\left[\left(T_{i\rho_1}\otimes T_{i\rho_2}\right)(g)f\right](s, t)=$$
$$=(sg)_3^{\frac{-\rho_1+1}{2}}(tg)_3^{\frac{-\rho_2+1}{2}}f((sg)/(sg)_3, (tg)/(tg)_3), \quad g\in G_0, \quad (s, t)\in S\times S, \quad (2)$$

для всех $f\in C^\infty(S\times S)$.

Воспользуемся обозначениями пп. 1.17 и 1.18, в том числе формулами (2) и (3) п. 1.17. Пусть $H_{i\rho_1, i\rho_2}$ — гильбертово пространство, получаемое пополнением пространства $K(X)$ относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2)_{i\rho_1, i\rho_2}=\int\limits_X f_1(x)\,B_{i\rho_1, i\rho_2}\left(I_{i(\rho_2-\rho_1)}(g_x)f_2\right)dx, \quad f_1, f_2\in K(X), \quad (3)$$

где обобщенная функция $B_{i\rho_1, i\rho_2}$ на многообразии $X$ определяется формулой

$$B_{i\rho_1, i\rho_2}(f)=\frac{2^{-\frac{(\rho_1+\rho_2)}{2}+1}}{\Gamma(\rho_1/2)\,\Gamma(\rho_2/2)}\int\limits_X|[s^-, s^-g_x]|^{\frac{\rho_1-1}{2}}|[s^+, s^+g_x]|^{\frac{\rho_2-1}{2}}\overline{f(x)}\,dx, \quad (4)$$
$$f\in K(X).$$

Оператор $P_{i\rho_1, i\rho_2}$ (см. (5) п. 1.17) осуществляет унитарную эквивалентность представления $T_{i\rho_1}\otimes T_{i\rho_2}$ и унитарного представления $U$ группы $G_0$ в пространстве $H_{i\rho_1, i\rho_2}$, получаемого расширением представления $I_{i(\rho_2-\rho_1)}$, определяемого формулой (3) п. 1.17 в пространстве $K(X)$.

Пусть $\rho_1 \geqslant \rho_2$. Формулы (6)—(9) п. 1.17 определяют отображение

$$f \to \{T^z_{\rho,0}f;\ T^z_{\rho,1}f;\ \widetilde{T}^{n,z}_j f\}, \tag{5}$$

$$f \in K(X), \quad z \in i(\rho_2-\rho_1), \quad \rho \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

если $\rho_1+\rho_2 \leqslant 1$, и отображение

$$f \to \{T^z_{\rho,0}f;\ T^z_{\rho,1}f;\ \widetilde{T}^{n,z}_j f;\ T^z_{i(\rho_1+\rho_2-1),0}\}, \tag{6}$$

$$f \in K(X), \quad z = i(\rho_2-\rho_1), \quad \rho \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

если $\rho_1+\rho_2 > 1$; в этих формулах $j$ произвольно при $\rho_1 \neq \rho_2$ и $j \equiv n+1 \pmod 2$ при $\rho_1 = \rho_2$. Отображения (5) и (6) допускают продолжение по непрерывности до унитарного оператора из пространства $H_{i\rho_1, i\rho_2}$ представления $U$ в прямой интеграл гильбертовых пространств представлений вида $T_\rho$ $(\rho \geqslant 0)$ основной непрерывной серии унитарных представлений и представлений дискретной серии $D^+_{2n+1} \oplus D^-_{2n+1}$ $(n \geqslant 0)$, если $\rho_1+\rho_2 \leqslant 1$, и тех же пространств и пространства представления дополнительной серии $T_{i(\rho_1+\rho_2-1)}$, если $\rho_1+\rho_2 > 1$, соответственно. Соответствующие формулы Планшереля имеют вид

$$\int\limits_X f(x)\, B_{i\rho_1, i\rho_2}\left(I_{i(\rho_2-\rho_1)}(g_x) f\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \sum_{j=0,1} \omega(\rho, j) \left\| T^{i(\rho_2-\rho_1)}_{\rho,j} f \right\|^2_{L^2(S)} d\rho + \sum_{n=0} \omega_{2n+1,j} \left\| \widetilde{T}^{n,i(\rho_2-\rho_1)}_j f \right\|^2_{L^2(S)/H^0_n} +$$

$$+ \omega \left\| T^{i(\rho_2-\rho_1)}_{i(\rho_1+\rho_2-1),0} f \right\|^2_{(\rho_1+\rho_2-1)}, \tag{7}$$

где ограничение на $j$ (в случае $\rho_1 = \rho_2$) указано выше, нормы в правой части равенства (7) связаны со скалярными произведениями, относительно которых соответствующие представления унитарны (см. пп. 1.7—1.9; в частности, $\|\cdot\|_{(\rho)}$ обозначает норму, определяемую скалярным произведением (3) п. 1.8), а функции $\omega(\rho, j)$, $\omega_{2n+1, j}$ и число $\omega$ определяются равенствами

$$\omega(\rho, j) = 2^{\rho_1+\rho_2-4}\pi^{-2}\rho \operatorname{th}\frac{\pi\rho}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{\pi\rho}{2} + (-1)^j \sin\left((\rho_1+\rho_2)\frac{\pi}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \Gamma^{-1}\left(\frac{1-\rho_1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-\rho_2}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1-\rho_1-\rho_2}{2} + i\rho\right)\right|^2 \times$$

$$\times \left|\gamma\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{2}, -\frac{1}{2} + i\rho, j\right)\right|^{-2},$$

$$\omega_{2n+1,j} = 2^{\rho_1+\rho_2-3-n}\pi^{-3/2}(-1)^{j+n+1}(2n+1)\,n!\times$$
$$\times\Gamma^{-1}\left(\frac{1-\rho_1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-\rho_2}{2}\right)\Gamma\left(1+n-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right)\times$$
$$\times\Gamma^{-1}\left(1+n+\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right)\left\{\gamma\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{2},\ n,\ j\right)\times\right.$$
$$\left.\times\gamma\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{2},\ -n-1,\ j\right)\right\}^{-1}, \quad (8)$$

$$\omega=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \rho_1+\rho_2\leqslant 1,\\ \dfrac{2^{(\rho_1+\rho_2)/2}\Gamma\left(\frac{\rho_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho_2}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right)^2}{\pi\Gamma\left(\frac{\rho_1+\rho_2-1}{2}\right)}, & \text{если}\quad \rho_1+\rho_2>1;\end{cases}$$

здесь функция $\gamma$ определяется равенством (7) п. 1.17.

Таким образом, в частности, в разложение тензорного произведения представлений дополнительной серии входят те же представления (и с теми же кратностями), что и в разложение тензорного произведения представлений основной непрерывной серии, за исключением тензорного произведения вида $T_{i\rho_1}\otimes T_{i\rho_2}$ с $0<\rho_1,\ \rho_2<1,\ \rho_1+\rho_2>1$, в разложение которого, кроме указанных выше представлений, входит в качестве прямого слагаемого представление дополнительной серии $T_{i(\rho_1+\rho_2-1)}$.

**1.20. Тензорные произведения неприводимых унитарных представлений группы $SO_0(2,\ 1)$. Случай тензорного произведения представления дискретной серии на представление основной непрерывной серии.** Тензорное произведение $V=(D^+_{2n+1}\oplus D^-_{2n+1})\otimes T_{\rho_1}$ ($n\geqslant 0$ — целое, $\rho_1\geqslant 0$ — вещественное) можно реализовать в гильбертовом пространстве $H$, получаемом пополнением факторпространства $H_0$ пространства $C^\infty(S\times S)$ по ядру $\ker A_n$ оператора $A_n$ в $C^\infty(S\times S)$ (т. е. $H_0=C^\infty(S\times S)/\ker A_n$), где оператор $A_n$ определен формулой

$$(A_nf)(s_1\ t)=\lim_{\sigma\to n}\Gamma\left(-\frac{2\sigma+1}{2}\right)^{-1}\int\limits_S|[s_1\ s_2]|^{-\sigma-1}f(s_1,\ t)\,ds_1, \quad (1)$$
$$f\in C^\infty(S\times S),$$

а пространство $H_0$ снабжено скалярным произведением, определяемым полускалярным произведением

$$(f_1,\ f_2)=\lim_{\sigma\to n}\Gamma\left(-\frac{2\sigma+1}{2}\right)^{-1}\int\limits_{S\times S\times S}|[s_1,\ s_2]|^{-\sigma-1}f_1(s_1,\ t)\overline{f_2(s_2,\ t)}\,ds_1ds_2dt, \quad (2)$$
$$f_1,\ f_2\in C^\infty(S\times S).$$

Это тензорное произведение $V$ есть унитарное представление, определенное для элементов пространства $H_0$ представлением в

$C^\infty(S\times S)$, действующим по формуле

$$\left[\left(T_{-i(2n+1)}\otimes T_{\rho_1}\right)(g)f\right](s,t)=(sg)_3^n(tg)_3^{\frac{i\rho_1-1}{2}}f((sg)/(sg)_3,(tg)/(tg)_3), \quad (3)$$

где $g\in G_0$, $(s,t)\in S\times S$, $f\in C^\infty(S\times S)$. Пусть $H_0^+$ (соответственно $H_0^-$) — векторное подпространство в $H_0$, порожденное образами в $H_0$ таких функций $f\in C^\infty(S\times S)$, что в разложении функции $f(s,t)$ в ряд Фурье по $s$ при фиксированном $t$ коэффициенты Фурье $a_k$ (при $e^{ik\varphi}$ $(k\in\mathbf{Z})$, для $s=(\cos\varphi, \sin\varphi, 1)\in S$) равны нулю при всех $k\leqslant n$ (соответственно $k\geqslant -n$). Пусть $H^\pm$ — замкнутые подпространства пространства $H$, порожденные векторными подпространствами $H_0^\pm$. Пространства $H^\pm$ инвариантны относительно представления $V$. Пусть $V^\pm$ — подпредставление представления $V$, определяемое подпространством $H^\pm$; тогда представление $V^\pm$ унитарно эквивалентно представлению $D_{2n+1}^\pm\otimes T_{\rho_1}$, где $D_{2n+1}^\pm$ реализовано как факторпредставление представления $T_{-i(2n+1)}$ (см. п. 1.11).

Воспользуемся обозначениями пп. 1.17 и 1.18, в том числе формулами (2) и (3) п. 1.17. Пусть $H_{-i(2n+1),\rho_1}$ — гильбертово пространство, получаемое введением в пространство $K(X)$ полускалярного произведения

$$(f_1,f_2)_{-i(2n+1),\rho_1}=\int_X f_1(x)\,B_{-i(2n+1),\rho_1}\left(I_{\rho_1+i(2n+1)}(g_x)f_2\right)dx, \quad f_1,f_2\in K(X) \quad (4)$$

(где обобщенная функция $B_{-i(2n+1),\rho_1}$ на многообразии $X$ определяется формулой

$$B_{-i(2n+1),\rho_1}(f)=\lim_{\sigma\to n}\frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(-\frac{2\sigma+1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}(u^2+1)^{\frac{\sigma+i\rho_1+1/2}{2}}|u|^{-2\sigma-2}\overline{f(u,u,1)}\,du, \quad f\in K(X)), \quad (5)$$

с последующим переходом к факторпространству по ядру полускалярного произведения (4) и пополнению полученного пространства по соответствующему скалярному произведению.

Оператор $P_{-i(2n+1),\rho_1}$ (см. (5) и п. 1.17) осуществляет (с помощью перехода к факторпространству по ядру оператора $A_n$; см. (1)) унитарную эквивалентность представления $V$ в пространстве $H$ и унитарного представления $U$ в гильбертовом пространстве $H_{-i(2n+1),\rho_1}$, связанного с представлением $I_{\rho_1+i(2n+1)}$ в пространстве $K(X)$. Пусть $H^\pm_{-i(2n+1),\rho_1}$ — образы пространств $H^\pm\subset H$ при отображении, определяемом оператором $P_{-i(2n+1),\rho_1}$, и пусть $U^\pm$ — подпредставления представления $U$, определяемые этими подпространствами; таким образом, представления $V^{\pm}$ унитарно эквивалентны представлениям $U^{\pm}$.

Формулы (6)—(9) п. 1.17 позволяют определить отображение

$$f \to \{T^z_{\rho,0}f;\ T^z_{\rho,1}f;\ \tilde{T}^{m,z}_j f\}, \tag{6}$$

$$f \in K(X), \quad z = \rho_1 + i(2n+1), \quad \rho \geqslant 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

(в этой формуле $j$ произвольно); это отображение продолжается по непрерывности до унитарного оператора из гильбертова пространства $H_{-i(2n+1),\rho_1}$ на прямой интеграл соответствующих гильбертовых пространств. Соответствующая формула Планшереля имеет вид

$$\int_X f(x)\, B_{-i(2n+1),\rho_1}\left(I_{\rho_1+i(2n+1)}(g_x) f\right) dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{1} \omega(\rho, j) \left\| T^{\rho_1+i(2n+1)}_{\rho,j} f \right\|^2_{L^2(S)} d\rho +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{2m+1,j} \left\| \tilde{T}^{m,\rho_1+i(2n+1)} f \right\|^2_{L^2(S)/H^0_m}, \tag{7}$$

где $f \in K(X)$, функция $B_{-i(2n+1),\rho_1}$ определена формулой (5), а функции $\omega(\rho, j)$ и $\omega_{2m+1,j}$ определяются формулами

$$\omega(\rho, j) = 2^{-9/2}\pi^{-3/2}\rho \operatorname{th}\frac{\pi\rho}{2}(n!)^{-1}\delta_{i\rho},$$

$$\omega_{2m+1,j} = 2^{-7/2-m}\pi^{-2}(2m+1)\frac{m!}{n!}\delta_{2n+1}, \tag{8}$$

в которых использовано обозначение

$$\delta_\lambda = \Gamma\left(\frac{2j-\lambda+2n+i\rho_1+2}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2j-\lambda+2n-i\rho_1+2}{4}\right)\times$$

$$\times\Gamma\left(\frac{2j+\lambda+2n+i\rho_1+2}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2j+\lambda+2n-i\rho_1+2}{4}\right). \tag{9}$$

С помощью формулы (7) отображение (6) можно распространить с $K(X)$ на гильбертово пространство $H_{-i(2n+1),\rho_1}$. Для $f \in H^{\pm}_{-i(2n+1),\rho_1}$ линейная комбинация

$$\sum_{j=0}^{1}\left\{1 + (-1)^{j+n} e^{\mp\frac{\rho+\rho_1}{2}\pi}\right\}\gamma^{-1}\left(\frac{i\rho_1-(2n+1)}{2}, \frac{i\rho-1}{2}, j\right) T^{\rho_1+i(2n+1)}_{\rho,j} f \tag{10}$$

компонент Фурье элемента $f$ равна нулю. Положим

$$T^{n,z,\pm} f = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\left\{1 + (-1)^{j+n} e^{\mp\frac{\pi z}{2}}\right\}\gamma^{-1}\left(\frac{iz}{2}, n, j\right) T^z_{-i(2n+1),j} f, \tag{11}$$

где $f \in K(X)$, а $T^z_{-i(2n+1),j} f$ определяется формулой (6) п. 1.17.

Пусть $\widetilde{T}^{n,\tau,\pm}f$ — образы элементов $T^{n,\tau,\pm}f \in C^\infty(S)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_n$, получаемом введением в пространстве $C^\infty(S)$ полускалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \lim_{\sigma\to n} \Gamma\left(-\frac{2\sigma+1}{2}\right)^{-1} \int_{S\times S} |[s_1, s_2]|^{-\sigma-1} f_1(s_1)\overline{f_2(s_2)}\, ds_1 ds_2,$$

$$f_1, f_2 \in C^\infty(S), \tag{12}$$

с последующим переходом к факторпространству по ядру этого полускалярного произведения и пополнению факторпространства по соответствующему скалярному произведению. Обращение в нуль линейной комбинации (10) означает, что одна из компонент (11) обращается в нуль на $H^{\pm}_{-i(2n+1),\rho_1}$, а две компоненты $T^{\rho_1+i(2n+1)}_{\rho,j}f$ $(j = 0, 1)$ линейно зависимы для $f \in H^{\pm}_{-i(2n+1),\rho_1}$. Поэтому отображение

$$f \to \{T^\tau_{\rho,j}f;\ \widetilde{T}^{m,\tau,\pm}f\},\quad f \in H^{\pm}_{-i(2m+1),\rho_1},\quad \rho \geqslant 0,\quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

определяемое формулами (6) п. 1.17 и (11), является унитарным оператором из пространства $H^{\pm}_{-i(2n+1),\rho_1}$ на прямой интеграл соответствующих гильбертовых пространств; формула Планшереля имеет вид

$$\int_X f(x)\, B_{-i(2n+1),\rho_1}\left(I_{\rho_1+i(2n+1)}(g_x)\, f\right) d\dot{x} =$$
$$= \int_0^\infty \omega^\pm(\rho, j) \left\| T^{\rho_1+i(2n+1)}_{\rho,j} f\right\|^2_{L^2(S)} d\rho + \sum_{m=0}^\infty \omega^\pm_m \left\| \widetilde{T}^{m,\rho_1+i(2n+1),\pm} f\right\|^2_{L^2(S)/H^0_m}, \tag{14}$$

где $f \in H^{\pm}_{-i(2n+1),\rho_1}$, функция $B_{-i(2n+1),\rho_1}$ определена формулой (5), а функции $\omega^\pm(\rho, j)$ и $\omega^\pm_m$ определяются формулами

$$\omega^\pm(\rho, j) = 2^{-2n-7/2}\pi^{-1/2}\rho\, \operatorname{th}\frac{\pi\rho}{2}\,(n!)^{-1} \left\{\left(e^{\pm\frac{\rho+\rho_1}{2}\pi} - (-1)^{j+n}\right) \times\right.$$
$$\left.\times \left|\Gamma\left(-n + i\frac{\rho+\rho_1}{2}\right)\right|^2 \left|\gamma\left(\frac{i\rho_1-(2n+1)}{2}, \frac{i\rho-1}{2}, j\right)\right|^2\right\}^{-1}, \tag{15}$$

$$\omega^\pm_m = 2^{-2n-9/2-m}\pi^{-1}(2m+1)(n!)^{-1}(m!)\times$$
$$\times e^{\pm\frac{\rho_1\pi}{2}} \left|\Gamma\left(\frac{i\rho_1+2m-2n+1}{2}\right)\right|^{-2} \operatorname{ch}^{-2}\frac{\pi\rho_1}{2}.$$

**1.21. Тензорные произведения неприводимых унитарных представлений $SO_0(2, 1)$. Случай тензорного произведения представления дополнительной серии на представление дискретной серии.** Тензорное произведение $V = T_{i\theta} \otimes (D^+_{2n+1} \oplus D^-_{2n+1})$ $(0 < \theta < 1;$

$n \geqslant 0$ — целое) можно реализовать в гильбертовом пространстве $H$, получаемом пополнением факторпространства $H_0$ пространства $C^\infty(S\times S)$ по ядру $\ker A$ оператора $A$ в $C^\infty(S\times S)$ (т. е. $H_0 = C^\infty(S\times S)/\ker A$), где оператор $A$ определен формулой

$$(Af)(s, t) = \lim_{\tau\to n} \Gamma^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(-\frac{2\tau+1}{2}\right)\int_{S\times S} |[s, s_1]|^{\frac{\theta-1}{2}} |[t, t_1]|^{-\tau-1} f(s_1, t_1)\, ds_1 dt_1 \tag{1}$$

для всех $f\in C^\infty(S\times S)$, а пространство $H_0$ снабжено скалярным произведением, определяемым полускалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \lim_{\tau\to n}\Gamma^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(-\frac{2\tau+1}{2}\right)\times$$
$$\times \int_{S\times S\times S\times S} |[s_1, s_2]|^{\frac{\theta-1}{2}} |[t_1, t_2]|^{-\tau-1} f(s_1, t_1)\overline{f(s_2, t_2)}\, ds_1 ds_2 dt_1 dt_2 \tag{2}$$

для всех $f_1, f_2\in C^\infty(S\times S)$. Это тензорное произведение $V$ есть унитарное представление, определенное для элементов пространства $\mathscr{H}_0$ представлением в $C^\infty(S\times S)$, действующим по формуле

$$[(T_{i\theta}\otimes T_{-i(2n+1)})(g) f](s, t) = (sg)_3^{-\frac{\theta+1}{2}} (tg)_3^{n} f((sg)/(sg)_3, (tg)/(tg)_3), \tag{3}$$

где

$$g\in G_0,\quad (s, t)\in S\times S,\quad f\in C^\infty(S\times S).$$

Пусть $H_0^{\pm}$ — подпространства в $H_0$, определенные аналогично п. 1.20, и пусть $H^{\pm}$ — замкнутые подпространства пространства $H$, порожденные векторными подпространствами $H_0^{\pm}$. Пространства $H^{\pm}$ инвариантны относительно представления $V$; представления $V^{\pm}$, определяемые представлением $V$ в подпространствах $H^{\pm}$, унитарно эквивалентны представлениям $T_{i\theta}\otimes D_{2n+1}^{\pm}$, где $D_{2n+1}^{\pm}$ реализовано как факторпредставление представления $T_{-i(2n+1)}$ (см. п. 1.11).

Воспользуемся обозначениями пп. 1.17 и 1.18, в том числе формулами (2) и (3) п. 1.17. Пусть $H_{i\theta,-i(2n+1)}$ — гильбертово пространство, получаемое введением в пространстве $K(X)$ полускалярного произведения

$$(f_1, f_2)_{i\theta,-i(2n+1)} = \int_X f_1(x)\, B_{i\theta,-i(2n+1)}(I_{-i(2n+\theta+1)}(g_x) f_2)\, dx, \qquad f_1, f_2\in K(X), \tag{4}$$

(где обобщенная функция $B_{i\theta,-i(2n+1)}$ на многообразии $X$ определяется формулой

$$B_{i\theta,-i(2n+1)}(f) =$$

$$= \lim_{\tau\to n} \frac{2^{-\frac{\theta+1}{2}+\tau+2}}{\Gamma\left(\frac{\theta}{2}\right)\Gamma\left(-\tau-\frac{1}{2}\right)} \int_X |[s^-, s^-g_x]|^{\frac{\theta-1}{2}} |[s^+, s^+g_x]|^{-\sigma-1} \overline{f(x)}\,dx) \tag{5}$$

с последующим переходом к факторпространству по ядру полускалярного произведения (4) и пополнению полученного пространства по соответствующему скалярному произведению.

Оператор $P_{i\theta,-i(2n+1)}$ (см. (5) п. 1.17) осуществляет (с помощью перехода к факторпространству по ядру оператора $A$; см. (1)) унитарную эквивалентность представления $V$ в пространстве $H$ и унитарного представления $U$ в гильбертовом пространстве $H_{i\theta,-i(2n+1)}$, продолжающего представление $I_{-i(2n+\theta+1)}$ в пространстве $K(X)$.

Пусть подпространства $H^{\pm}_{i\theta,-i(2n+1)}$ пространства $H_{i\theta,-i(2n+1)}$ и подпредставления $U^{\pm}$ представления $U$, эквивалентные представлениям $V^{\pm}$, определены аналогично п. 1.20.

Формулы (6)—(9) п. 1.17 позволяют определить отображение

$$f \to \{T^z_{\rho,0}f;\ T^z_{\rho,1}f;\ \widetilde{T}^{m,z}_j f\},$$

$$f \in K(X),\quad z = -i(2n+\theta+1),\quad \rho \geqslant 0,\quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

(в этой формуле $j$ произвольно); это отображение продолжается по непрерывности до унитарного оператора из гильбертова пространства $H_{i\theta,-i(2n+1)}$ на прямой интеграл соответствующих гильбертовых пространств. Соответствующая формула Планшереля имеет вид

$$\int_X f(x)\, B_{i\theta,-i(2n+1)}(I_{-i(2n+\theta+1)}(g_x) f)\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{1} \omega(\rho, j) \| T^{-i(2n+\theta+1)}_{\rho,j} f\|^2_{L^2(S)} d\rho + \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{2m+1,j} \times$$

$$\times \| \widetilde{T}^{m,-i(2n+\theta+1)}_j f\|^2_{L^2(S)/H^0_m}, \tag{7}$$

где $f \in K(X)$, функция $B_{i\theta,-i(2n+1)}$ определена формулой (5), а функции $\omega(\rho, j)$ и $\omega_{2m+1,j}$ определяются формулами

$$\omega(\rho, j) = 2^{\theta-2n-5}\pi^{-2}\rho\,\mathrm{th}\,\frac{\pi\rho}{2}\left[\mathrm{ch}\frac{\pi\rho}{2} + (-1)^{j+n+1}\cos\frac{\pi\theta}{2}\right] \times$$

$$\times \Gamma^{-1}\left(\frac{1-\theta}{2}\right)(n!)^{-1}\left|\Gamma\left(\frac{i\rho-\theta}{2}+n+1\right)\right|^2 \left|\gamma\left(n+\frac{\theta+1}{2}, \frac{i\rho-1}{2}, j\right)\right|^{-2}, \tag{8}$$

$$\omega_{2m+1,j} = 2^{\theta-2n-m-4}\pi^{-3/2}(-1)^{j+m+1}\frac{(2m+1)\,m!}{n!}\Gamma^{-1}\left(\frac{1-\theta}{2}\right)\times$$
$$\times\Gamma^{-1}\left(\frac{\theta+1}{2}+m-n\right)\Gamma\left(m+n+\frac{3-\theta}{2}\right)\gamma^{-1}\left(n+\frac{\theta+1}{2}, m, j\right)\times$$
$$\times\gamma^{-1}\left(n+\frac{\theta+1}{2}, -m-1, j\right). \qquad (9)$$

С помощью формулы (7) отображение (6) можно распространить с $K(X)$ на гильбертово пространство $H_{i\theta,-i(2n+1)}$. Для $f\in H^{\pm}_{i\theta,-i(2n+1)}$ равна нулю линейная комбинация

$$\sum_{j=0}^{1}\left[1+(-1)^{j+n+1}e^{\mp\frac{\rho+i\theta}{2}\pi}\right]\gamma^{-1}\left(n+\frac{\theta+1}{2}, \frac{i\rho-1}{2}, j\right)T_{\rho,j}^{n+\frac{\theta+1}{2}}f. \quad (10)$$

Воспользуемся обозначениями формул (11) и (12) п. 1.20. Обращение в нуль линейной комбинации (10) показывает, аналогично п. 1.20, что формула

$$f\to\{T^{z}_{\rho,j}f;\ \tilde{T}^{m,z,\pm}f\},$$
$$f\in H^{\pm}_{i\theta,-i(2n+1)},\quad z=-i(2n+\theta+1),\quad \rho\geqslant 0,\quad m=0, 1, 2, \ldots, \quad (11)$$

в обозначениях (6) п. 1.17 и (11) п. 1.20 определяет унитарный оператор из пространства $H^{\pm}_{i\theta,-i(2n+1)}$ на прямой интеграл соответствующих гильбертовых пространств; формула Планшереля имеет вид

$$\int_X f(x)\,B_{i\theta,-i(2n+1)}(I_{-i(2n+\theta+1)}(g_x)f)\,dx =$$
$$=\int_0^\infty \omega^{\pm}(\rho, j)\,\|T_{\rho,j}^{-i(2n+\theta+1)}f\|^2_{L^2(S)}\,d\rho +$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\omega_{2m+1}\|\tilde{T}^{m,-i(2n+\theta+1),\pm}f\|^2_{L^2(S)/H^0_m},$$

где $f\in H^{\pm}_{i\theta,-i(2n+1)}$, функция $B_{i\theta,-i(2n+1)}$ определена формулой (5), а функции $\omega^{\pm}(\rho, j)$ и $\omega_{2m+1}$ определяются формулами

$$\omega^{\pm}(\rho, j) = 2^{\theta-2n-4}\pi^{-2}\rho\,\mathrm{th}\,\frac{\pi\rho}{2}\,\frac{\mathrm{ch}^2\frac{\pi\rho}{2}\mp\sin^2\left(\frac{\theta+1}{2}\pi\right)}{\mathrm{ch}\frac{\pi\rho}{2}\mp(-1)^{n+j}\sin\left(\frac{\theta+1}{2}\pi\right)}\times$$
$$\times\frac{\left|\Gamma\left(\frac{i\rho-\theta}{2}+n+1\right)\right|^2}{n!\,\Gamma\left(\frac{1-\theta}{2}\right)}\left|\gamma\left(n+\frac{\theta+1}{2}, \frac{i\rho-1}{2}, j\right)\right|^{-2}, \quad (13)$$

$$\omega_{2m+1} = 2^{\theta-2n-m-4}\pi^{-1/2} \times$$
$$\times \frac{(2m+1)\, m!\, \Gamma\left(m+n+\frac{3-\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta\pi}{2}\right)\Gamma\left(m-n+\frac{\theta+1}{2}\right)\Gamma\left(m-n-\frac{\theta-1}{2}\right)\Gamma\left(m+n+\frac{\theta+3}{2}\right)}.$$

**1.22. Тензорные произведения неприводимых унитарных представлений $SO_0(2,1)$. Случай тензорного произведения представлений дискретной серии.** Это тензорное произведение $V = (D^+_{2k+1} \oplus D^-_{2k+1}) \otimes (D^+_{2n+1} \oplus D^-_{2n+1})$ ($k$, $n \geqslant 0$ — целые, $k \leqslant n$) определяется формулами, аналогичными формулам (1) и (2) п. 1.21, в которых нужно добавить предельный переход по $\theta$ при $\theta \to -(2k+1)$, и формулой (3) п. 1.21 с $\theta = -(2k+1)$; дальнейшие вычисления требуют замены $\theta$ на $-(2k+1)$ в формуле (4) п. 1.21 и предельного перехода по $\theta$ при $\theta \to -(2k+1)$ в формуле (5) п. 1.21. Отображение, определенное формулой (6) п. 1.21, должно рассматриваться при $\theta = -(2k+1)$, но $j$ должно удовлетворять условию

$$j \equiv m+n-k+1 \pmod 2. \tag{1}$$

Соответствующая формула Планшереля имеет вид (7) п. 1.21, где $j$, входящее в ряд в правой части равенства, выбирается в соответствии с условием (1), вместо $\theta$ нужно подставить $-(2k+1)$, функция $\omega(\rho, j)$ определяется формулой (8) п. 1.21, где следует положить $\theta = -(2k+1)$, а функция $\omega_{2m+1,j}$ (где $j$ определяется равенством (1)) считается равной нулю при $n-k \leqslant m \leqslant n+k$ и определяется как предел правой части равенства (9) п. 1.21 при $\theta \to -(2k+1)$.

С помощью этой формулы Планшереля отображение (6) с $\theta = -(2k+1)$ можно распространить с $K(X)$ на гильбертово пространство $H_{-i(2k+1),\, -i(2n+1)}$.

Пусть $H_0$ — факторпространство пространства $C^\infty(S \times S)$ по ядру отображения $A$, определенного формулой (1) п. 1.21, в которой нужно дополнительно перейти к пределу при $\theta \to -(2k+1)$. Пусть $H_0^{\pm,\pm}$ — векторное подпространство в $H_0$, порожденное образами в $H_0$ таких функций $f \in C^\infty(S, S)$, что в разложении функций $f(s, t)$ в ряд Фурье по $s$, $t$ коэффициенты $a_{pq}$ (при $e^{ip\varphi}e^{iq\psi}$ ($p$, $q \in \mathbf{Z}$) для $s = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1) \in S$, $t = (\cos\psi, \sin\psi, 1) \in S$) равны нулю при $\pm p \leqslant k$, $\pm q \leqslant n$. Пространства $H^{\pm,\pm}$, порожденные векторными пространствами $H_0^{\pm,\pm}$ в гильбертовом пополнении пространства $H_0$, инвариантны относительно представления $V$; пусть $V^{\pm,\pm}$ — соответствующие подпредставления представления $V$ и $U^{\pm,\pm}$ — унитарно эквивалентные им (с помощью отображения $P_{-i(2k+1),\, -i(2n+1)}$; см. (5) п. 1.17) подпредставления представления $U$ в гильбертовом пространстве $H_{-i(2k+1),\, -i(2n+1)}$, продолжающего представление $I_{i(2k-2n)}$ в пространстве $K(X)$.

Рассмотрим представление $V^{+,+}$. Положим

$$T_m^{i(2k-2n),\pm} f = (-2i)\,(\partial/\partial z)\big|_{z=2i(k-n)} T^{m,z,\pm} f, \qquad f \in K(X), \tag{2}$$

и пусть $\widetilde{T}_m^{i(2k-2n),\pm} f$ — образ элемента $T_m^{i(2k-2n),\pm} f \in C^\infty(S)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_m$ (см. (12) п. 1.20). Тогда отображение

$$f \to \{\widetilde{T}_m^{i(2k-2n),+} f\}, \qquad f \in H^{+,+}_{-i(2k+1),-i(2n+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

является унитарным оператором из пространства $H^{+,+}_{-i(2k+1),-i(2n+1)}$ на прямую сумму соответствующих гильбертовых пространств; формула Планшереля имеет вид

$$\int_X f(x)\, B_{-i(2k+1),-i(2n+1)}\,(I_{i(2k-2n)}(g_x) f)\, dx =$$

$$= \sum_{m=k+n+1}^{\infty} \omega_{2m+1} \left\| \widetilde{T}_m^{i(2k-2n),+} f \right\|^2_{\mathfrak{H}_m}, \qquad f \in H^{+,+}_{-i(2k+1),-i(2n+1)}, \tag{4}$$

функция $B_{-i(2k+1),-i(2n+1)}$ определяется формулой (5) п. 1.21, в правой части которой следует перейти к пределу при $\theta \to -(2k+1)$, а $\omega_{2m+1}$ определяется формулой

$$\omega_{2m+1} = 2^{-2k-2n-m-5}\pi^{-5/2} \frac{(2m+1)\, m!\, (m+n+k+1)!}{(m-n-k-1)!\,(m-n+k)!\,(m+n-k)!}. \tag{5}$$

Аналогично рассматривается представление $V^{-,-}$; формулы (3), (4), в которых индекс «+» следует заменить на «−», оказываются справедливыми для представлений $V^{-,-}$; функция $\omega_{2m+1}$ по-прежнему определяется формулой (5).

Рассмотрим теперь представление $V^{+,-}$ (в этом случае условие $k \leqslant n$ существенно). В этом случае отображение

$$f \to \{T^z_{\rho,j} f;\ \widetilde{T}^{m,z,-} f\}, \qquad f \in H^{+,-}_{-i(2k+1),-i(2n+1)}, \quad \rho \geqslant 0, \quad z = i(2k-2n), \tag{6}$$

в обозначениях (6) п. 1.17 и (11) п. 1.20, где $T^{m,z,\pm}$ отсутствуют при $k = n$, а при $n > k$ индекс $m$ пробегает неотрицательные целые от 0 до $n-k-1$, определяет унитарный оператор из пространства $H^{+,-}_{-i(2k+1),-i(2n+1)}$ в прямой интеграл соответствующих гильбертовых пространств; формула Планшереля имеет вид

$$\int_X f(x)\, B_{-i(2k+1),-i(2n+1)}\,(I_{i(2k-2n)}(g_x) f)\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \omega(\rho, j) \left\| T_{\rho,j}^{i(2k-2n)} f \right\|^2 d\rho + \sum_{m=0}^{n-k-1} \omega_{2m+1} \left\| \widetilde{T}^{m,i(2k-2n),-} f \right\|^2_{\mathfrak{H}_m}, \tag{7}$$

где $f \in H^{+,-}_{-i(2k+1),-i(2n+1)}$, а функции $\omega(\rho, j)$ и $\omega_{2m+1}$ определяются формулами

$$\omega(\rho, j) = 2^{-2k-2n-5}\pi^{-2} \times$$
$$\times \operatorname{sh}\frac{\pi\rho}{2}(k!)^{-1}(n!)^{-1}\left|\Gamma\left(\frac{i\rho+3}{2}+k+n\right)\right|^2\left|\gamma\left(n-k, \frac{i\rho-1}{2}, j\right)\right|^{-2},$$
$$\rho \geqslant 0, \quad (8)$$

$$\omega_{2m+1} = 2^{-2k-2n-m-5}\pi^{-5/2}(2m+1)\times$$
$$\times \frac{m!\,(k+n-m)!\,(n-m-k-1)!\,(m+k+n+1)!}{(m+n-k)!}, \quad (9)$$

где $0 \leqslant m \leqslant n-k-1$.

Аналогично разлагается представление $V^{-,+}$ $(k \leqslant n)$; в формулах (6) и (7) нужно индексы «+» заменить на «−», а «−» на «+».

**1.23. Ограничение неприводимых унитарных представлений группы $SL(2, \mathbf{C})$ на подгруппу $SL(2, \mathbf{R})$. Случай представлений основной непрерывной серии.** Пусть $\tilde{T}^{\rho, m}$ ($\rho \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{Z}$) — неприводимое унитарное представление основной серии группы $G_0 = SL(2, \mathbf{C})$, действующее в гильбертовом пространстве $L^2(Z)$ по формуле

$$[\tilde{T}^{\rho,m}(g) f](z) = |g_{12}z + g_{22}|^{-m+i\rho-2}(g_{12}z +$$
$$+ g_{22})^m f\left(\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}\right), \quad g \in SL(2, \mathbf{C}), \quad f \in L^2(Z), \quad (1)$$

(см. (2) 8.1.7). Ограничение $W$ представления (1) на подгруппу $G = SL(2, \mathbf{R})$ определяется той же формулой (1) при $g \in SL(2, \mathbf{R})$.

Пусть $Z^+$ и $Z^-$ — верхняя и нижняя открытые полуплоскости соответственно, снабженные лебеговой мерой; тогда $L^2(Z) = L^2(Z^+) \oplus L^2(Z^-)$, где $L^2(Z^\pm)$ считаются вложенными в $L^2(Z)$ с помощью продолжения нулем на $Z^\mp$. Тогда $L^2(Z^\pm)$ — инвариантные подпространства представления $\tilde{T}^{\rho, m}|_G = W$; пусть $W^\pm$ — соответствующие подпредставления представления $W$. Представления $W^\pm$ эквивалентны с помощью оператора $(Af)(z) = \overline{f(\bar{z})}$ $(f \in L^2(Z^\pm))$.

Пусть $z\tilde{g} = \dfrac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}$ $(z \in Z^+)$. Тогда $Z^+$ — однородное пространство относительно группы $G$. Стационарная подгруппа точки $i$ есть подгруппа $K$ (см. п. 1.2). Пусть $B'_+$ — подгруппа нижних треугольных матриц в $G$ с положительными элементами на диагонали. Пусть $b \in B_+$, и пусть $z(b) = i\tilde{b}$. Тогда формула

$$(Af)(b) = \sqrt{2}\, b_{22}^{i\rho-2} f(z(b)), \quad b \in B'_+, \quad f \in L^2(Z^+), \quad (2)$$

определяет унитарный оператор из пространства $L^2(Z^+)$ на гильбертово пространство $L^2_r(B'_+)$, построенное по правоинвариантной мере на $B'_+$ (т. е. по мере $d_r b = db_{21}db_{22}$ $(b \in B'_+)$). Этот оператор осуществляет эквивалентность представления $W^+$ и представления $S_m$ группы $G$, индуцированного характером $\chi_m$ группы $K$, который определяется формулой

$$\chi_m(u_\varphi) = e^{im\varphi}, \quad u_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in K, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{3}$$

Представление $S_m$ в $L_r^2(B'_+)$ определяется формулой

$$[S_m(g)f](b) = \chi_m(u_{\varphi_1}) f(b_1), \quad f \in L_r^2(B'_+), \; g \in G, \; b, b_1 \in B'_+, \tag{4}$$

в которой $g$, $b$, $b_1$ и $\varphi_1$ связаны соотношением

$$bg = u_{\varphi_1} b_1, \quad u_{\varphi_1} \in K. \tag{5}$$

Представление $S_m$ эквивалентно подпредставлению $\rho_m$ правого регулярного представления $\rho$ группы $G$, определяемому подпространством $H_m \subset L^2(G)$, образованным такими функциями $f \in L^2(G)$, что $f(u_\varphi g) = \chi_m(u_\varphi) f(g)$ для почти всех $g \in G$ и любого $u_\varphi \in K$. Пусть

$$(T_{\rho,\varepsilon} f)(e^{i\varphi}) = e^{-\varepsilon\varphi/2} \int_{B_+} f(b^{-1} u_{\varphi/2})\, b_{22}^{i\rho-1} d_l b,$$

$$f \in H_m \cap K(G), \quad \varepsilon \equiv m \pmod 2), \tag{6}$$

где $B_+ = \{b \in B, \; b_{22} > 0\}$ — подгруппа нижних треугольных матриц в $G$ с положительными элементами на диагонали, $d_l b = db_{21} db_{22}$ $(b \in B_+)$ — левоинвариантная мера Хаара на $B_+$. Формула (6) корректно определяет функцию $T_{\rho,\varepsilon} f \in C^\infty(S^1)$ для любой функции $f \in H_m \cap K(G)$. Пусть $k$ — неотрицательное целое, $k \equiv m + 1 \pmod 2$ и $k + 1 \leqslant |m|$; пусть $\widetilde{T}_k^{\pm} f$ $(f \in H_m \cap K(G))$ — образ элемента $T_{-ik,\varepsilon} f$ (где $\varepsilon \equiv m \pmod 2$)) в факторпространстве $L_2(S_1)/H_{\rho,\varepsilon}^0$ (см. п. 1.11), принадлежащий $H_{\rho,\varepsilon}^{\pm}/H_{\rho,\varepsilon}^0$ при $\pm m > 0$. Отображение

$$f \to \{T_{\rho,\varepsilon} f, \widetilde{T}_k^{\pm} f\}, \quad f \in H_m \cap K(G),$$
$$\varepsilon \equiv m \pmod 2), \quad k \equiv m + 1 \pmod 2), \quad 2 \leqslant k + 1 \leqslant |m|, \quad \rho \geqslant 0, \tag{7}$$

где $\widetilde{T}_k^{\pm} f$ отсутствуют при $m = 0, \pm 1$, определяет оператор, допускающий продолжение по непрерывности до унитарного оператора из гильбертова пространства $H_m$ на однократный прямой интеграл гильбертовых пространств соответствующих представлений; формула Планшереля имеет вид

$$\int_G |f(g)|^2 dg =$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty \| T_{\rho,\varepsilon} f \|_{L^2(S^1)}^2 \frac{\rho}{2} \operatorname{th} \frac{\pi(\rho + i\varepsilon)}{2} d\rho + \sum_{k=1}^{|m|-1} k \| \widetilde{T}_k^{\pm} f \|_{L^2(S^1)/H_{-ik,\varepsilon}^0}^2 \right\}, \tag{8}$$

где $\varepsilon \equiv m \pmod 2$, $\pm m > 0$ при $m \neq 0$, мера $dg$ определяется формулой $dg = d\tau\, dx\, d\varphi$ при

$$g = \begin{pmatrix} e^{\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_{\varphi} \in G.$$

**1.24. Ограничения неприводимых унитарных представлений группы $SL(2, \mathbf{C})$ на подгруппу $SL(2,\mathbf{R})$. Случай представлений дополнительной серии.** Пусть $S_{\rho}$ — представление дополнительной серии группы $G_0 = SL(2, \mathbf{C})$ (см. 8.1.8), действующее по формуле

$$[S_{\rho_0}(g) f](z) = |g_{12}z + g_{22}|^{-2-\rho_0} f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right), \quad f \in K(\mathbf{C}), \tag{1}$$

на плотном подмножестве гильбертова пространства $\mathfrak{H}_{\rho}$, получаемого пополнением $K(\mathbf{C})$ по скалярному произведению

$$(f_1, f_2)_{\rho_0} = \int\limits_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}} |z_1 - z_2|^{-2+\rho_0} f_1(z_1) \overline{f_2(z_2)}\, dz_1 dz_2, \quad f_1, f_2 \in K(\mathbf{C}). \tag{2}$$

Примем обозначения п. 1.23. Пусть

$$\mathcal{K}(z, x, \rho) = (\sqrt{\pi})^{-1} |\operatorname{Im} z|^{(\rho_0 - 1 - i\rho)/2} |x - z|^{i\rho - 1},$$
$$z \in \mathbf{C}, \quad \rho, x \in \mathbf{R}, \quad \rho \geqslant 0, \tag{3}$$

и пусть $\mathfrak{H}_{\rho}^{\pm}$ — инвариантные подпространства ограничения $S_0|_G$, отвечающие пополнениям $K(Z^{\pm})$.

Тогда формула

$$(T_{\rho,0} f)(x) = \int\limits_{Z^+} \mathcal{K}(z, x, \rho) f(z)\, dz, \quad f \in K(Z^+), \tag{4}$$

определяет отображение

$$f \to \{T_{\rho,0} f\}, \quad f \in K(Z^+), \tag{5}$$

которое продолжается до унитарного оператора из $\mathfrak{H}_{\rho}^{+}$ в прямой интеграл соответствующих гильбертовых пространств.

Формула Планшереля для отображения (5) имеет вид

$$\int\limits_{Z^+} |z_1 - z_2|^{-2+\rho_0} f(z_1) \overline{f(z_2)}\, dz_1 dz_2 =$$
$$= \frac{2^{\rho_0 - 2}\Gamma\left(\frac{\rho_0}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\rho_0}{2}\right)\pi} \int\limits_0^{+\infty} \| T_{\rho,0} f \|^2_{L^2(\mathbf{R})} \rho \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi\rho}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi\rho}{2}} \left| \Gamma\left(\frac{1 - \rho_0 - i\rho}{2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \Gamma\left(\frac{1 - \rho_0 + i\rho}{2}\right) \right| d\rho, \quad f \in K(Z^+), \tag{6}$$

а представления в пространствах $\mathfrak{H}_{\rho}^{+}$ и $\mathfrak{H}_{\rho}^{-}$ унитарно эквивалентны с помощью оператора $(Af)(z) = f(\bar{z})$ $(f \in K(Z^{\pm}))$.

**1.25. Разложение квазирегулярного представления на факторпространстве по дискретной подгруппе.** Пусть $\Gamma$ — такая дискретная подгруппа в группе $G$, что $-e \in \Gamma$ и (определенная однозначно с точностью до положительного множителя) $G$-инвариантная мера факторпространства $\Gamma\backslash G$ правых смежных классов конечна. Пусть ${}^\circ L^2(\Gamma\backslash G)$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $L^2(\Gamma\backslash G)$ (построенного по инвариантной мере), порожденное такими ограниченными непрерывными функциями $f$ на $\Gamma\backslash G$, что $\int\limits_{(\Gamma\cap N)\backslash N} f(ng)\,dn = 0$ для всех элементов $g \in G$ и всех таких однопараметрических подгрупп $N$ в $G$, сопряженных к подгруппе $N_0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}\right\}$, что факторпространство $(N\cap\Gamma)\backslash N$ компактно (это условие пусто, если пространство $\Gamma\backslash G$ компактно; таким образом, в этом случае ${}^\circ L^2(\Gamma\backslash G) = L^2(\Gamma\backslash G)$); отметим, что в важном частном случае целочисленной подгруппы $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z})$ семейство таких однопараметрических подгрупп исчерпывается подгруппой $N_\infty$ нижних треугольных матриц с единицами на главной диагонали и множеством подгрупп вида $N_r = \left\{\begin{pmatrix} 1-rx & x \\ r^2x & 1+rx \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}\right\}$, где $r$ пробегает множество рациональных чисел.

Подпространство ${}^\circ L^2(\Gamma\backslash G)$ инвариантно относительно квазирегулярного представления группы $G$ в $L^2(\Gamma\backslash G)$ (т. е. представления, индуцированного единичным представлением группы $\Gamma$), и ограничение квазирегулярного представления на подпространство ${}^\circ L^2(\Gamma\backslash G)$ унитарно эквивалентно прямой сумме счетного набора неприводимых унитарных представлений группы $G$, кратность каждого из которых конечна; ограничение квазирегулярного представления на ортогональное дополнение подпространства ${}^\circ L^2(\Gamma\backslash G)$ является прямой суммой единичного представления, конечной прямой суммы (быть может, пустой) представлений, кратных неприводимым представлениям дополнительной серии, и конечнократного прямого интеграла представлений основной унитарной серии по мере, эквивалентной лебеговой мере. В частном случае группы $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z})$ представление в ортогональном дополнении к подпространству ${}^\circ L^2(\Gamma\backslash G)$ эквивалентно прямой сумме единичного представления (в одномерном подпространстве постоянных функций) и однократного прямого интеграла (по лебеговой мере) представлений основной серии; формула

$$\int\limits_{\Gamma\backslash G} |f(g)|^2\,dg = (4\pi)^{-1}\int\limits_0^\infty \|T^\rho(f)\|^2 d\rho$$

является аналогом формулы Планшереля для функций $f \in L^2(\Gamma\backslash G)$, ортогональных к ${}^\circ L^2(\Gamma\backslash G)$ и к пространству постоянных функций, если элемент $T^\rho(f)$ пространства представления $T_{\rho,0}$ определяется для финитных непрерывных функций $f$ на $\Gamma\backslash G$ формулой

$$T^{\rho}(f)(y) = \int\limits_{E} \int\limits_{(\Gamma \setminus N) \cap N} f(n\delta y)\, \delta_{22}^{i\rho-1} dn\, d\delta_{22}, \quad y \in G,$$

где подгруппы $E$ и $N$ определены в п. 1.2.

**1.26. Представления универсальной накрывающей группы.** Пусть $G$ — универсальная накрывающая группа группы $SL(2, \mathbf{R})$. Группа $G$ может быть реализована как группа пар чисел $(\gamma, \omega)$, где $\gamma \in \mathbf{C}$, $|\gamma| < 1$, $\omega \in \mathbf{R}$, с умножением, определяемым формулой

$$(\gamma, \omega)(\gamma', \omega') = \left( \frac{\gamma + \gamma' e^{-2i\omega}}{1 + \bar{\gamma}\gamma' e^{-2i\omega}},\ \omega + \omega' + (2i)^{-1} \ln \frac{1 + \bar{\gamma}\gamma' e^{-2i\omega}}{1 + \gamma\bar{\gamma}' e^{2i\omega}} \right),$$

в которой ветвь логарифма выделяется условием $\ln 1 = 0$. Отображение, определяемое формулами

$$(0, t) \to \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, \quad (is, 0) \to (1 - s^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 + s^2 & 2s \\ 2s & 1 + s^2 \end{pmatrix},$$

$$(s, 0) \to (1 - s^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 + s^2 & 2is \\ -2is & 1 + s^2 \end{pmatrix},$$

где $t, s \in \mathbf{R}$, $|s| < 1$, продолжается до счетнолистного накрытия $G \to SL(2, \mathbf{R})$. Пусть $(a_0, a_1, a_2)$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$, соответствующий однопараметрическим подгруппам

$$\exp(ta_0) = (0, t/2), \quad \exp(ta_1) = (i \operatorname{th}(t/2), 0),$$
$$\exp(ta_2) = (\operatorname{th}(t/2), 0), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Полный набор неприводимых унитарных представлений группы $G$ образуют следующие представления:

1) Представления $T^{q, t}$ $(q > t(1 - t),\ 0 \leqslant t < 1)$. Представления $T^{q, t}$ $(q \geqslant 1/4,\ 0 \leqslant t < 1,\ (q, t) \neq (1/4, 1/2))$ называются представлениями *основной непрерывной серии*; представления $T^{q, t}$ $(1/4 > q > t(1 - t))$ называются представлениями *дополнительной серии*. Эти представления реализуются в гильбертовом пространстве $H$ с ортонормированным базисом $\{e_k,\ k \in \mathbf{Z}\}$, образованным собственными векторами оператора $T^{q, t}(a_0)$; операторы $T^{q, t}(a_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ действуют в этом базисе по формулам

$$T^{q, t}(a_0) e_k = -i(t + k) e_k,$$
$$T^{q, t}(a_1) e_k =$$
$$= -(i/2)\sqrt{q + (t + k)(t + k + 1)}\, e_{k+1} - (i/2)\sqrt{q + (t + k)(t + k - 1)}\, e_{k-1},$$
$$T^{q, t}(a_2) e_k =$$
$$= -(1/2)\sqrt{q + (t + k)(t + k + 1)}\, e_{k+1} + (1/2)\sqrt{q + (t + k)(t + k - 1)}\, e_{k-1}.$$

2) Представления, аналогичные представлениям дискретной серии (ср. п. 1.9).

а) Представления $D^{l,+}$ $(l>0)$, действующие в гильбертовом пространстве $H_+$ с ортонормированным базисом $\{e_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ по формулам

$$D^{l,+}(a_0)e_n = -i(l+n-1)e_n,$$

$$D^{l,+}(a_1)e_n = -(i/2)\sqrt{l(1-l)+(l+n)(l+n-1)}\,e_{n+1} - \\ -(i/2)\sqrt{l(1-l)+(l+n-1)(l+n-2)}\,e_{n-1},$$

$$D^{l,+}(a_2)e_n = -(1/2)\sqrt{l(1-l)+(l+n)(l+n-1)}\,e_{n+1} + \\ +(1/2)\sqrt{l(1-l)+(l+n-1)(l+n-2)}\,e_{n-1}.$$

б) Представления $D^{l,-}$ $(l>0)$, действующие в гильбертовом пространстве $H_-$ с базисом $\{e_{-n},\ n=1, 2, \ldots\}$ по формулам

$$D^{l,-}(a_0)e_{-n} = -i(-l-n+1)e_{-n},$$

$$D^{l,-}(a_1)e_{-n} = -(i/2)\sqrt{l(1-l)+(l+n-1)(l+n-2)}\,e_{-n+1} - \\ -(i/2)\sqrt{l(1-l)+(l+n)(l+n-1)}\,e_{-n-1},$$

$$D^{l,-}(a_2)e_{-n} = -(1/2)\sqrt{l(1-l)+(l+n-1)(l+n-2)}\,e_{-n+1} + \\ +(1/2)\sqrt{l(1-l)+(l+n)(l+n-1)}\,e_{-n-1}.$$

3) Одномерное единичное представление.

**1.27. Унитарные представления группы $GL(2,\mathbf{R})$.** Существуют четыре серии неприводимых унитарных представлений группы $GL(2, \mathbf{R})$.

1) *Основная непрерывная серия*, которая может быть реализована в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R})$ с помощью формулы

$$\left[T^{\rho_1,\rho_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(g)f\right](x) = \\ = f\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right)\left|\frac{bx+d}{ad-bc}\right|^{-1+i\rho_1}\operatorname{sgn}^{\varepsilon_1}\left(\frac{bx+d}{ad-bc}\right)|ad-bc|^{i\rho_2}\operatorname{sgn}^{\varepsilon_2}(ad-bc), \tag{1}$$

где

$$f\in L^2(\mathbf{R}),\quad g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad a, b, c, d, x\in\mathbf{R},\quad \rho_1, \rho_2\in\mathbf{R},\quad \varepsilon_1, \varepsilon_2\in\{0, 1\}.$$

2) *Дискретная серия*, которая может быть реализована в гильбертовом пространстве $H_k$, где $k$ — натуральное число, образованном такими функциями $f$ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, аналитическими при $\operatorname{Im} z\neq 0$, что $\int |f(z)|^2|\operatorname{Im} z|^{k-1}dz\,d\bar z<+\infty$; соответствующее представление определяется формулой

$$[\Delta^{l,k}(g)f](z) = f\left(\frac{az+c}{bz+c}\right)\left(\frac{bz+d}{ad-bc}\right)^{-k-1}|ad-bc|^{i\rho}, \tag{2}$$

где $f\in H_k$, $k\in\mathbf{N}$, $\rho\in\mathbf{R}$, $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $a, b, c, d\in\mathbf{R}$, $z\in\mathbf{C}$.

3) *Дополнительная серия*, которая может быть реализована в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, получаемом пополнением пространства финитных гладких функций на прямой, в котором скалярное произведение определяется формулой

$$(f_1, f_2)_\sigma = \iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} |x_1 - x_2|^{\sigma-1} f_1(x_1)\overline{f_2(x_2)}\, dx_1 dx_2, \qquad 0 < \sigma < 1; \tag{3}$$

это представление определяется формулой

$$[T_{\sigma,\rho,\varepsilon}(g) f](x) = f\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right)\left|\frac{bx+d}{ad-bc}\right|^{-\sigma-1} |ad-bc|^{i\rho} \operatorname{sgn}^\varepsilon(ad-bc), \tag{4}$$

где $0 < \sigma < 1$, $\rho \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d, x \in \mathbf{R}$, $f$ — финитная гладкая функция из $\mathfrak{H}_\sigma$.

4) Серия одномерных представлений, или *вырожденная серия*, образованная характерами

$$\chi_{\rho,\varepsilon}(g) = |\det(g)|^{i\rho} \operatorname{sgn}^\varepsilon(\det(g)), \quad g \in G, \quad \rho \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in \{0, 1\}. \tag{5}$$

Представления серий 1)—4) образуют полный набор неприводимых унитарных представлений группы $G$.

Литература: [52], [59], [61], [62], [84], [92], [115], [116], [127], [128], [148], [151], [154], [156], [171], [197], [272], [276], [317], [326], [363], [384], [402], [410], [440], [461], [472], [473], [503], [520], [526], [529], [535], [536], [537], [541], [612].

## § 2. Группы $U(n, 1)$ и $\mathrm{Spin}(n, 1)$

### 2.1. Основная непрерывная серия.

а) Группа $G = U(n, 1)$ $(n > 1)$. Реализуем группу $G$ как группу всех линейных преобразований пространства $\mathbf{C}^{n+1}$, сохраняющих форму $(x, x) = -|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2$, где $(x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) = x \in \mathbf{C}^{n+1}$. Пусть $K$ — подгруппа группы $G$, образованная матрицами вида

$$k = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \qquad u \in U(n), \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \tag{1}$$

пусть $A$ — однопараметрическая подгруппа матриц вида

$$a = a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & 1_{n-1} & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}; \tag{2}$$

пусть $M$ — централизатор $A$ в $K$, т. е. группа матриц вида

$$m = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad v \in U(n-1); \tag{3}$$

пусть $G = KAN$ — соответствующее разложение Ивасавы в группе $G$.

Пусть $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$ — картановская подалгебра комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$, которая диагонализуется в координатах $y_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $y_0 = (x_0 + x_n)/\sqrt{2}$, $y_n = (-x_0 + x_n)/\sqrt{2}$. Положим $\sigma(y) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i y_i$ $(y \in \mathfrak{h}^{\mathbf{C}},\ y = \operatorname{diag}(y_0, y_1, \ldots, y_n))$; тогда функционал $\sigma \in (\mathfrak{h}^{\mathbf{C}})^*$ определяется набором чисел $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$. Пусть $\sigma_0 = \lambda + \sigma_*$, $\sigma_n = -\lambda + \sigma_*$. Пусть числа $2\sigma_* = \sigma_0 + \sigma_n$ и $\sigma_i - n/2$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ являются целыми, и пусть $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots$ $\ldots > \sigma_{n-1}$. Положим $p_i = \sigma_i - (n/2) + i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$; пусть $\pi_\alpha$ — непрерывное унитарное представление группы $U(n-1)$ с сигнатурой $\{p_1, \ldots, p_n\}$ (см. 6.3.4). Пусть $\tau$ — конечномерное представление группы $L = MAN$ в пространстве представления $\pi_\alpha$, определенное формулой $\tau(ma_t n) = e^{2i\sigma_*\varphi} e^{(2\lambda - n)t} \pi_\alpha(v)$, где $m \in M$, $a_t \in A$, $n \in N$, причем $m$ и $a$ определены формулами (2) и (3). Пусть $T_\tau$ — непрерывное представление группы $G$, индуцированное представлением $\tau$. Семейство представлений вида $T_\tau$ называется *основной непрерывной серией* представлений группы $G$.

Ограничение представления $T_\tau$ на подгруппу $K$ содержит с единичной кратностью те и только те представления группы $K$ вида $k \to e^{i\gamma_0\varphi}\pi_\beta(u)$, где $k$ определено формулой (1), $\gamma_0$ — целое число, а сигнатура представления $\pi_\beta$ имеет вид $\left\{\gamma_1 - \frac{n-1}{2},\right.$ $\left.\gamma_2 - \frac{n-3}{2}, \ldots, \gamma_n + \frac{n-1}{2}\right\}$, которые удовлетворяют условиям $\gamma_1 > \sigma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n$, причем разности $\gamma_i - \sigma_j$ являются полуцелыми, а $\gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 2\sigma_* + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j$.

б) Группа $G = \operatorname{Spin}(n, 1)$ $(n > 2)$. Рассмотрим группу $G$ как двулистную накрывающую группу для группы $SO_0(n, 1)$, реализованной как группа унимодулярных преобразований пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, сохраняющих квадратичную форму $(x, x) = -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$, где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $K$ — полный прообраз в $G$ множества матриц вида

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad u \in SO(n); \tag{4}$$

пусть $A$ — однопараметрическая подгруппа в $G$, накрывающая множество матриц вида

$$a = a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & 1_{n-1} & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}; \tag{5}$$

пусть $G = KAN$ — разложение Ивасавы в группе $G$, определяемое подгруппами $K$ и $A$, и пусть $M$ (централизатор группы $A$ в $K$)

есть полный прообраз множества матриц вида

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v \in SO(n-1); \tag{6}$$

таким образом, группу $M$ можно отождествить с группой $\mathrm{Spin}(n-1)$.

Пусть $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$ — картановская подгруппа комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$, которая диагонализуется в координатах $y_0 = (x_0 + x_n)/\sqrt{2}$, $y_j = (ix_j + x_{n-j})/\sqrt{2}$, $y_{n-j} = (-ix_j + x_{n-j})/\sqrt{2}$ $(j = 1, \ldots, [(n-1)/2])$ и $y_p = x_p$, если $n = 2p$. Пусть $y = \mathrm{diag}(y_0, \ldots, y_n) \in \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$; тогда $y_{n-j} = y_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Пусть $\sigma(y) = \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \sigma_j y_j$ $(y = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}},\ y = \mathrm{diag}(y_0, \ldots, y_n))$; определенный таким образом функционал $\sigma \in (\mathfrak{h}^{\mathbf{C}})^*$ задается набором чисел $(\sigma_0, \ldots, \sigma_p)$, где $p = [(n-1)/2]$.

Пусть $\sigma_0 = \lambda$. Пусть числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ являются одновременно целыми или полуцелыми, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_p > 0$ при $n = 2p+2$ и $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_{p-1} > |\sigma_p|$ при $n = 2p+1$. Пусть $q_j = \sigma_j - \frac{n-1}{2} + j$ $(j = 1, \ldots, p)$; пусть $\pi_\alpha$ — непрерывное унитарное представление группы $\mathrm{Spin}(n-1)$ с сигнатурой $\{q_1, \ldots, q_p\}$ (см. 6.5.4, 6.5.5). Пусть $\tau$ — конечномерное представление группы $L = MAN$ в пространстве представления $\pi_\alpha$, определенное формулой $\tau(\tilde{m}\tilde{a}_t n) = e^{(\lambda - (n-1)/2)t}\pi_\alpha(\tilde{m})$, где $\tilde{m} \in M$, $\tilde{a}_t \in A$, $n \in N$, причем $\tilde{a}_t$ накрывает матрицу $a_t$, определенную формулой (5). Пусть $T_\tau$ — непрерывное представление группы $G$, индуцированное представлением $\tau$. Семейство представлений $T_\tau$ называется *основной непрерывной серией* представлений группы $G$.

Пусть $r = [n/2]$. Ограничение представления $T_\tau$ на подгруппу $K$ содержит с единичной кратностью те и только те представления группы $K$ (изоморфной группе $\mathrm{Spin}(n)$), сигнатура которых имеет вид $\{\gamma_1 - (n/2) + 1, \ldots, \gamma_r - (n/2) + r\}$, где все разности $\gamma_i - \sigma_j$ $(j \geqslant 1)$ являются полуцелыми, причем $\gamma_1 > \sigma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_{r-1} > \sigma_{r-1} > |\gamma_r|$ при $n = 2r$ и $\gamma_1 > \sigma_1 > \gamma_2 > \ldots > \sigma_{r-1} > \gamma_r > |\sigma_r|$ при $n = 2r+1$.

**2.2. Структура представлений основной серии.**

а) Группа $G = U(n, 1)$ $(n > 1)$. Примем обозначения п. 2.1, а). Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_*$ — такой набор чисел, что $2\sigma_* \in \mathbf{Z}$, $\sigma_i - n/2 \in \mathbf{Z}$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_{n-1}$. Пусть $\Lambda_\sigma$ — множество всех таких $\lambda \in \mathbf{R}$, что $\lambda - \sigma_i \in \mathbf{Z}$. Пусть $\Lambda_{\sigma_j} = \{\lambda \in \Lambda_\sigma\colon \sigma_{j-1} > \lambda > \sigma_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, где для общности записи положено $\sigma_0 = +\infty$, $\sigma_p = -\infty$. Пусть $\tau$ — соответствующее набору $\lambda + \sigma_*, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, -\lambda + \sigma_*$ конечномерное представление группы $L$, и пусть $T_\tau$ — соответствующее представление основной непрерывной серии группы $G$. Пусть $E'_\tau$ (соответственно $E''_\tau$) — замкнутая линейная оболочка пространств таких неприводимых представлений максимальной компактной подгруппы $K$ ограничения представления $T_\tau$ на $K$, которые определяются наборами $\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}$, удовлетворяющими условию $\gamma_i < \lambda + \sigma_*$ (соответственно $\gamma_j > -\lambda + \sigma_*$) при $\lambda + \sigma_* \in \Lambda_{\sigma_i}$ (соответственно при $-\lambda + \sigma_* \in \Lambda_{\sigma_j}$). Подпространства $E'_\tau$ и $E''_\tau$ являются инвариантными подпространствами представления $T_\tau$; эти инвариантные подпространства, их сумма и пересечение, а также тривиальные инвариантные подпространства образуют полную систему инвариантных подпространств представления $T_\tau$.

Более подробно, пусть $\Delta'_i$ (соответственно $\Delta''_i$) — множество таких представлений $\tau$, что $\lambda + \sigma_* \in \Lambda_{\sigma_i}$ (соответственно $-\lambda + \sigma_* \in \Lambda_{\sigma_i}$) $(i=1, 2, \ldots, n)$; пусть $\Delta_{ij} = \Delta'_i \cap \Delta''_j$, $\Delta' = \bigcup_i \Delta'_i$, $\Delta'' = \bigcup_i \Delta''_i$. Тогда при $\tau \in \Delta'_i \setminus \Delta''$ (соответственно при $\tau \in \Delta''_i \setminus \Delta'$) подпространство $E'_\tau$ (соответственно $E''_\tau$) совпадает со всем пространством представления; при $\tau \in \Delta_{ii}$ и $\lambda \geqslant 0$ сумма $E'_\tau + E''_\tau$ совпадает с пространством представления $T_\tau$, причем в фактор-пространстве по пересечению $E'_\tau \cap E''_\tau$ действует прямая сумма представлений; при $\tau \in \Delta_{ii}$ и $\lambda \leqslant 0$ пересечение $E'_\tau \cap E''_\tau$ тривиально, так что сумма представлений в $E'_\tau$ и $E''_\tau$ есть прямая сумма представлений. В остальных случаях $(\sigma \in \Delta_{ij},\ i \neq j)$ все четыре подпространства $E'_\tau$, $E''_\tau$, $E'_\tau + E''_\tau$, $E'_\tau \cap E''_\tau$ нетривиальны и попарно различны.

При $\tau \notin \Delta' \cup \Delta''$ представление $T_\tau$ неприводимо.

Перечисленные представления образуют полный набор вполне неприводимых представлений группы $G$. Опишем теперь подсемейство этого набора, образующее полный набор унитаризуемых вполне неприводимых представлений группы $G = SU(n, 1)$.

Пусть $T_\tau$ — непрерывное представление группы $G$, индуцированное представлением $\tau$, связанным с параметрами $\lambda$ и $\sigma_*$, и представлением $\pi_\alpha$ (см. п. 2.1, а)). (Заметим, что представление $\tau$ не меняется при одновременном прибавлении единицы к числу $\sigma_*$ и к элементам набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$, так как $e^{2i\varphi} \det v = 1$.) Пусть $K(\alpha)$ — дополнение набора $\{\sigma_1 - \sigma_*, \sigma_2 - \sigma_*, \ldots, \sigma_{n-1} - \sigma_*\}$ в множестве целых или полуцелых чисел (в зависимости от того, являются ли члены набора целыми или полуцелыми). Пусть $\lambda_\alpha$ — наименьшее из таких неотрицательных чисел $\lambda$, что $\lambda$ или $-\lambda$ содержится в $K(\alpha)$. Представление $T_\tau$ эквивалентно унитарному тогда и только тогда, когда либо $\lambda$ чисто мнимо, либо $\lambda$ вещественно и $|\lambda| < \lambda_\alpha$ (во всех этих случаях представление $T_\tau$ неприводимо).

Пусть теперь $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

а) Пусть $j > 0$. Пусть либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = \sigma_k - \sigma_*$ для некоторого $k < j$, причем $\sigma_{j-1} + \lambda \geqslant \sigma_* + 1$; кроме того, $\lambda + \sigma_j < \sigma_*$ при $j \neq n$. Подпредставление представления $T_\tau$, действующее в подпространстве $E''_\tau$, эквивалентно унитарному тогда и только тогда, когда $\lambda + \sigma_* + \lambda_2(\tau) > \sigma_j + j$ и $j + 1 > \lambda_1(\tau) + 2\lambda$, где

$\lambda_1(\tau)=j$ при $\sigma_{j-1}+\lambda>\sigma_*+1$ и $\lambda_1(\tau)=\max\{r\in\{1, \ldots, j-1\}, \sigma_{r-1}>\sigma_r+1 \ (\sigma_0=\infty)\}$ в остальных случаях, а $\lambda_2(\tau)=\min\{r\in \in\{j+1, \ldots, n\}, \sigma_{r-1}>\sigma_r+1 \ (\sigma_n=-\infty)\}$.

б) Пусть $j<n$. Пусть либо $\lambda=0$, либо $\lambda=\sigma_r-\sigma_*$ для некоторого $r>j$, причем $\sigma_{j+1}+\lambda+1\leqslant\sigma_*$; кроме того, $\lambda+\sigma_j>\sigma_*$ при $j\neq 0$. Подпредставление представления $T_\tau$, действующее в подпространстве $E'$, эквивалентно унитарному тогда и только тогда, когда $j<\lambda_2(\tau)+2\lambda$, $\sigma_*+l_1(\tau)+\lambda<\sigma_j+j+1$, где $\lambda_1(\tau)=\max\{k\in\{1, \ldots, j\}, \sigma_{k-1}>\sigma_k+1 \ (\sigma_0=\infty)\}$, а $\lambda_2(\tau)= =j+1$ при $\sigma_{j+1}+\lambda+1<\sigma_*$ и $\lambda_2(\tau)=\min\{k\in\{j+2, \ldots, n\}, \sigma_{k-1}>\sigma_k+1 \ (\sigma_n=-\infty)\}$ в остальных случаях.

в) Пусть $0<j<n$. Пусть $\lambda$ — отрицательное целое или полуцелое, и пусть $\sigma_{j-1}-1\geqslant-\lambda+\sigma_*>\sigma_j>\lambda+\sigma_*\geqslant\sigma_{j+1}+1$. Подпредставление представления $T_\tau$, действующее в подпространстве $E'\cap E''$, эквивалентно унитарному тогда и только тогда, когда $-\lambda-\lambda_1(\tau)+1>\sigma_j-\sigma_*-j>\lambda-\lambda_2(\tau)$, где $\lambda_1(\tau)=j$, если $\sigma_{j-1}+\lambda>\sigma_*+1$, и $\lambda_1(\tau)=\max\{r\in\{1, \ldots, j-1\}, \sigma_{r-1}>\sigma_r+1 \ (\sigma_0=\infty)\}$, а $\lambda_2(\tau)=j+1$, если $\lambda+\sigma_*>\sigma_{j+1}+1$, и $\lambda_2(\tau)= =\min\{r\in\{j+2, \ldots, n\}, \sigma_{r-1}>\sigma_r+1 \ (\sigma_n=-\infty)\}$ в остальных случаях.

Пусть теперь $0\leqslant j<k\leqslant n$. Пусть $\lambda$ — отрицательное целое или полуцелое, и пусть $\sigma_j>-\lambda+\sigma_*\geqslant\sigma_{j+1}+1$, $\sigma_{k-1}-1\geqslant \geqslant\lambda+\sigma_*>\sigma_k$. Представление, определяемое представлением $T_\tau$ в факторпространстве пространства представления по инвариантному подпространству $E'_\tau+E''_\tau$, тогда и только тогда унитарно, когда $-\lambda+\sigma_*=\sigma_{j+1}+1=\sigma_{j+2}+2=\ldots=\sigma_{k-1}+k-j-1= =\lambda+\sigma_k+k-j$.

Перечисленные представления образуют полный набор неприводимых унитарных представлений группы $G$.

б) Группа $G=\mathrm{Spin}(n, 1)$ $(n>2)$. Примем обозначения п. 2.1, б). Пусть при $n=2r$ заданы одновременно целые или одновременно полуцелые числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}$, удовлетворяющие условиям $\sigma_1>\ldots>\sigma_{r-1}>0$, а при $n=2r+1$ заданы одновременно целые или одновременно полуцелые числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, удовлетворяющие условиям $\sigma_1>\sigma_2>\ldots>\sigma_{r-1}>|\sigma_r|>0$. Пусть $\Lambda_\sigma$ — множество всех таких $\lambda\in\mathbf{R}$, что $\lambda-\sigma_j\in\mathbf{Z}$. Пусть $\Lambda_{\sigma_j}=\{\lambda\in\Lambda_\sigma\colon \sigma_{j-1}>\lambda>\sigma_j\}$ $(j=1, 2, \ldots, r-1)$, где положено $\sigma_0=+\infty$, и пусть $\Lambda_{\sigma_r}=\{\lambda\in\Lambda_\sigma\colon \sigma_{r-1}>\lambda>-\sigma_{r-1}\}$ для $n=2r$ и $\Lambda_{\sigma_r}=\{\lambda\in\Lambda_\sigma\colon \sigma_{r-1}>\lambda>|\sigma_r|\}$ для $n=2r+1$. Пусть $\tau$ — соответствующее набору $\sigma_0=\lambda, \sigma_1, \ldots, \sigma_p$ $(p=[(n-1)/2])$ конечномерное представление группы $L=MAN$, и пусть $T_\tau$ — соответствующее представление основной непрерывной серии группы $G$. Пусть $E'_\tau$ (соответственно $E''_\tau$) — замкнутая линейная оболочка пространств неприводимых подпредставлений максимальной компактной подгруппы $K$ ограничения представления $T_\tau$ на $K$, определенных наборами $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$, удовлетворяющими условию $\gamma_j<\lambda$ при $\lambda\in \in\Lambda_{\sigma_j}$ (соответственно условию $\gamma_k>-\lambda$ при $-\lambda\in\Lambda_{\sigma_k}$). Подпространства $E'_\tau$, $E''_\tau$, их сумма и пересечение и тривиальные инвариантные подпространства образуют полную систему инвариантных подпространств представления $T_\tau$.

Более подробно, пусть $\Delta_j'$ (соответственно $\Delta_j''$) — множество таких $\tau$, что $\lambda \in \Lambda_{\sigma j}$ (соответственно $-\lambda \in \Lambda_{\sigma j}$); пусть

$$\Delta' = \bigcup_j \Delta_j', \quad \Delta'' = \bigcup_j \Delta_j''.$$

Пусть $n = 2r + 1$ $(r \geqslant 1)$. Если $\tau \in \Delta'$ (соответственно $\tau \in \Delta''$), то подпространство $E_\tau'$ (соответственно $E_\tau''$) совпадает со всем пространством представления $T_\tau$, так что его композиционный ряд двучленен. В остальных случаях представления $T_\tau$ неприводимы.

Пусть $n = 2r$ $(r > 1)$. Если $\tau \in \Delta_j'$ (соответственно $\tau \in \Delta_j''$), $j \neq r$, то подпространство $E_\tau'$ (соответственно $E_\tau''$) совпадает со всем пространством представления $T_\tau$, так что композиционный ряд двучленен. Если $\tau$ содержится в $\Delta_r' = \Delta_r''$ и $\lambda \geqslant 0$ (соответственно $\lambda \leqslant 0$), то сумма $E_\tau' + E_\tau''$ совпадает со всем пространством, так что представление в факторпространстве по пересечению $E_\tau' \cap E_\tau''$ есть прямая сумма представлений (соответственно пересечение $E_\tau' \cap E_\tau''$ тривиально, так что сумма представлений в $E_\tau'$ и $E_\tau''$ является прямой).

Отметим, что представления сферической основной серии (т. е. представления $T_\tau$, содержащие $K$-инвариантный вектор, или, что то же, представления $T_\tau$, связанные с единичным представлением группы $M$) групп $SU(n, 1)$ и $\mathrm{Spin}(n, 1)$, а также любые подфакторы этих представлений, при $n \geqslant 3$ не эквивалентны представлениям дискретной серии соответствующей группы; аналогичный результат справедлив для групп $Sp(n, 1)$ $(n \geqslant 3)$ (см. ниже, п. 3.1). У групп $SU(1, 1)$, $SU(2, 1)$, $SO(2, 1)$ имеются подфакторы представлений сферической основной серии, эквивалентные представлениям дискретной серии.

Литература: [55], [88], [104], [106], [119], [150], [159], [167], [168], [172], [173], [183], [196], [212], [215], [278], [393], [406], [407], [415], [438], [443], [444], [445], [446], [447], [469], [483], [548], [553], [554], [557], [564], [566], [567], [601], [606].

## § 3. Некоторые представления основной серии вещественных полупростых групп Ли ранга 1

**3.1. Некоторые представления основной серии группы $Sp(n, 1)$.** Пусть $\mathrm{H}$ — *тело* (вещественных) *кватернионов*, $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Пусть $\bar{q} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ для $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$; пусть $|q|$ определяется равенством $|q|^2 = q\bar{q}$. Множество всех невырожденных кватернионных матриц $(n+1)$-го порядка, сохраняющих форму $|q_0|^2-|q_1|^2-\ldots-|q_n|^2$ $(q_m\in H)$, образует группу $G=Sp(n,\ 1)$.

Максимальная компактная подгруппа $K=\operatorname{diag}(Sp(1),\ Sp(n))$ изоморфна произведению $Sp(1)\times Sp(n)$. Пусть $\mathfrak{k}$ — ее алгебра Ли, и пусть $\mathfrak{p}$ — подпространство в $\mathfrak{g}=sp(n,\ 1)$, порожденное (как вещественное пространство) матрицами $Y_{0m}$, $iX_{0m}$, $jX_{0m}$, $kX_{0m}$ $(1\leqslant m\leqslant n)$, где $Y_{0m}=E_{0m}+E_{m0}$, $X_{0m}=E_{0m}-E_{m0}$, $(E_{pq})_{st}=\delta_{ps}\delta_{qt}$. Пусть $\mathfrak{a}$ — вещественная одномерная подалгебра в $\mathfrak{p}$ с базисом $Y_{01}$; пусть $A=\exp\mathfrak{a}$. Централизатор $M$ группы $A$ в $K$ есть семейство матриц вид $\operatorname{diag}(u,\ u,\ v)$, где $u\in Sp(1)$, $v\in Sp(n-1)$. Пусть $G=KAN$ — соответствующее группам $K$ и $A$ разложение Ивасавы в группе $G$. Единственная (с точностью до сопряженности) нетривиальная параболическая подгруппа в $G$ есть борелевская подгруппа $P=MAN$.

Пусть $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{k}$, являющаяся вещественной линейной оболочкой семейства матриц $iE_{m,m}$ $(0\leqslant m\leqslant n)$; тогда $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра в $sp(n,\ 1)$.

Пусть $2\varepsilon_m$ $(0\leqslant m\leqslant n)$, $\varepsilon_p\pm\varepsilon_q$ $(0\leqslant p<q\leqslant n)$ — положительные корни комплексификации $sp(n,\ 1)_{\mathbf{C}}$ алгебры Ли $sp(n,\ 1)$, так что $\varepsilon_0\pm\varepsilon_m$ $(1\leqslant m\leqslant n)$ суть положительные компактные корни. Пусть

$$\rho_k=\varepsilon_0+\sum_{m=1}^{n}(n-m+1)\,\varepsilon_m,\quad \rho=\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\,\varepsilon_m \tag{1}$$

— полусуммы положительных корней алгебр Ли $\mathfrak{k}$ и $sp(n,\ 1)$ соответственно.

Старший вес неприводимого представления группы $K$ можно записать в виде $\lambda=\sum\limits_{m=0}^{n}\lambda_m\varepsilon_m$ где $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$ и все $\lambda_m$ — целые. Обозначим соответствующее представление группы $K$ через $[\lambda]$; положим $\lambda+\rho_k=\sum\limits_{m=0}^{n}L_m\varepsilon_m$, так что $L_0=\lambda_0+1$, $L_m=\lambda_m+n-m+1$ $(m=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Обозначим также представление $[\lambda]$ через $[L]$, где $L=\{L_0,\ L_1,\ \ldots,\ L_m\}$.

Аналогично, старший вес $\mu$ неприводимого представления группы $M$ можно записать в виде $\mu=\mu_1(\varepsilon_0+\varepsilon_1)+\sum\limits_{m=2}^{n}\mu_m\varepsilon_m$, где $\mu_1$ — неотрицательное целое или полуцелое, а $\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_n\geqslant 0$ — целые. Обозначим соответствующее представление через $[\mu]$. Пусть $H_\mu$ — пространство представления $[\mu]$; пусть $L^2_\mu(K,\ H_\mu)$ — гильбертово пространство измеримых вектор-функций $f$ на группе $K$ со значениями в $H_\mu$, удовлетворяющих для всех $h\in M$ соотношению $f(hk)=[\mu](h)f(k)$ для почти всех $k\in K$ и условию $\int\limits_K\|f(k)\|^2_{H_\mu}dk<+\infty$. Пусть $\Lambda$ — линейная форма на алгебре Ли $\mathfrak{a}$; пусть $\nu$ — значение линейной формы $\Lambda-\rho_n$ ($\rho_n$ — полусумма ограниченных положительных корней с их кратностями) на элементе $Y_{01} \in \mathfrak{a}$. Пусть $\pi^{\mu,\nu}$ — непрерывное представление группы $G = Sp(n, 1)$ в $L^2_\mu(K, H_\mu)$, определяемое формулой

$$[\pi^{\mu,\nu}(g) f](k) = e^{\Lambda(a)} f(k\bar{g}), \qquad f \in L^2_\mu(K, H_\mu), \quad g \in G, \tag{2}$$

где $k \in K$, $kg = k\bar{g} \exp(a) n$ $(k\bar{g} \in K, \quad a \in \mathfrak{a}, \quad n \in N)$; семейство представлений $\pi^{\mu,\nu}$ называется *основной серией представлений* группы $G$. Ограничение представления $\pi^{\mu,\nu}$ на подгруппу $S$ в $K$, изоморфную $Sp(n)$ (и образованную матрицами $\operatorname{diag}(1, u)$, $u \in Sp(n)$), содержит те и только те представления подгруппы $Sp(n)$, старшие веса которых $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ определяют набор $\{L_1, \ldots, L_n\}$ $(L_m = \lambda_m + n - m + 1)$, связанный с числами $l_1, \ldots, l_n$ $(l_m = \mu_m + n - m + 1, \; m = 1, 2, \ldots, n)$ формулами

$$\begin{gathered} L_1 > l_2 > L_3 > l_4 > \ldots > l_{2k} > L_{2k+1} > \ldots > 0, \\ l_1 > L_2 > l_3 > L_4 > \ldots > L_{2k} > l_{2k+1} > \ldots > 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Представления $\pi^{\mu,\nu}$ и $\pi^{\mu,-\nu}$ имеют одни и те же неприводимые подфакторы (в частности, они одновременно приводимы или неприводимы). В частности, если $\nu + 2\mu_1 + 1$ не является четным числом, то представление $\pi^{\mu,\nu}$ (вполне) неприводимо.

Рассмотрим подмножество основной серии, образуемое представлениями с $\mu_1 = 0$. Пусть $\nu + 1$ — четное целое число. При этих условиях представление $\pi^{\mu,\nu}$ (вполне) неприводимо тогда и только тогда, когда либо $\nu = \pm 1$, либо $(\pm\nu + 1)/2$ равно такому числу $l_i$, что $l_{i+1} = l_i - 1$ для некоторого $i \in \{2, 3, \ldots, n - 1\}$.

Пусть выполняется соотношение $l_{i-1} > (\nu + 1)/2 > l_i + 1$ для некоторого $i = 3, \ldots, n$ или соотношение $(\nu + 1)/2 > l_2 + 1$. Подпространства $H_2$, $H_1$ $(H_2 \supset H_1)$ пространства представления, порожденные подпространствами, в которых действуют представления группы $S$, набор $\{L_1, \ldots, L_n\}$ которых удовлетворяет, кроме условий (3), еще условиям $L_{i-1} \geqslant (\nu + 1)/2$ для $H_2$ и условиям $L_{i-1} \geqslant (\nu + 1)/2$, $L_i \geqslant (\nu + 1)/2$ для $H_1$, инвариантны; представления в $H_1$, $H_2/H_1$ и $L^2_\mu(K, H_\mu)/H_2$ (вполне) неприводимы (и нетривиальны).

Пусть выполняется соотношение $(\nu + 1)/2 = l_i \neq l_{i+1} + 1$ $(i = 2, 3, \ldots, n - 1)$, или соотношение $(\nu + 1)/2 = l_n \neq 1$, или $(\nu + 1)/2 = l_i + 1 \neq l_{i-1}$ $(i = 3, 4, \ldots, n)$, или $l_n > (\nu + 1)/2 > 1$. Подпространство $H$ пространства представления, порожденное подпространствами, в которых действуют представления группы $S$, набор которых удовлетворяет, кроме условий (3), еще условию $L_i \geqslant (\nu + 1)/2$, инвариантно и нетривиально; представления в $H$ и в $L^2_\mu(K, H_\mu)/H$ (вполне) неприводимы.

Представления $\pi^{\mu,\nu}$ унитаризуемы тогда и только тогда, когда либо $\nu = i\varkappa$ $(\varkappa \in \mathbf{R})$, либо $\nu \in \mathbf{R}$ $(3 > \nu > -3)$, либо $l_k = n - k + 1$ для $k = i, i + 1, \ldots, n$ и $|\nu| < 2l_i + 1 = 2n - 2i + 3$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$.

Подпредставления в пространстве $H$ унитаризуемы тогда и только тогда, когда либо $i = n$ и $1 < (\nu + 1)/2 \leqslant l_n$, либо $i \leqslant n$ и

$l_k = n - k + 1$ для $k = i,\ i+1,\ \ldots,\ n$ при $(\nu+1)/2 = n - i + 2$. В остальных случаях вполне неприводимые подфакторы представлений $\pi^{\mu, \nu}$ неунитаризуемы.

Вернемся к общему случаю, отказавшись от ограничения $\mu_1 = 0$. Представление $\pi^{\mu, \nu}$ с неотрицательными целыми $(\nu+1)/2 + \mu_1$ и $(\nu-1)/2 - \mu_1$ приводимо, если выполнено хотя бы одно из следующих условий: а) $(\nu+1)/2 + \mu_1 > l_2$; б) $(\nu-1)/2 - \mu_1$ не совпадает с такими $l_i$ ($i = 2, \ldots, n-1$), что $l_{i+1} = l_i - 1$, а также не совпадает с 0 или 1; в) $(\nu+1)/2 + \mu_1 - 1$ не совпадает с такими $l_i$ ($i = 3, 4, \ldots, n-1$), что $l_{i-1} = l_i + 1$, причем $(\nu-1)/2 - \mu_1 > l_n + s$, где $s$ равно числу таких $l_i$ ($l_i \neq l_n$), что $(\nu+1)/2 + \mu_1 > l_i$. Если же $(\nu+1)/2 + \mu_1$ и $(\nu-1)/2 - \mu_1$ — такие целые, что $(\nu+1)/2 + \mu_1 > 0$, $(\nu-1)/2 - \mu_1 < 0$, $(\nu+1)/2 + \mu_1 > -(\nu-1)/2 + \mu_1$, то представление $\pi^{\mu, \nu}$ приводимо, если выполнено хотя бы одно из следующих условий: а) $(\nu+1)/2 + \mu_1 > l_2$; б) $-(\nu-1)/2 + \mu_1$ не совпадает с 0 и с $l_i$ ($i = 2, \ldots, n$); в) $(\nu+1)/2 + \mu_1$ не совпадает с $l_i$ ($i = 2, \ldots, n$) и $(\nu-1)/2 - \mu_1 > l_n + s$, где $s$ — число таких $l_k \neq l_n$, что $l_k < (\nu+1)/2 + \mu_1$.

**3.2. Сферическая основная серия представлений неклассической некомпактной вещественной полупростой группы Ли ранга 1.** Пусть $\mathbf{H}$ — тело кватернионов, т. е. ассоциативная некоммутативная алгебра над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел с базисом $1, i, j, k$, в которой закон умножения определяется условиями $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ (см. п. 3.1). Пусть $O$ — алгебра над $\mathbf{R}$, определяемая введением в произведении $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ векторных пространств умножения по формуле $(x, y)(x', y') = (xx' - \bar{y}'y,\ y\bar{x}' + y'x)$, $(x, x, y, y' \in \mathbf{H})$, где $\bar{x} = a - bi - cj - dk$ при $x = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$. Пусть $\overline{(x, y)} = (\bar{x}, -y)$ для всех $(x, y) \in O$, и пусть $|z|^2 = \bar{z}z = z\bar{z}$ для всех $z \in O$. Алгебра $O$ (некоммутативная, неассоциативная) называется *алгеброй чисел Кэли*.

Пусть $A(3, O)$ — множество эрмитовых матриц третьего порядка с элементами из $O$. Формула $a \circ b = (ab + ba)/2$ $(a, b \in A(3, O))$ определяет в $A(3, O)$ структуру йордановой алгебры.

Пусть $a \in A(3, O)$, и пусть $L_a$ — линейный оператор в $A(3, O)$, определяемый формулой $L_a x = a \circ x$ $(x \in A(3, O))$. Пусть $e_1 = \operatorname{diag}(1, 0, 0)$, $e_2 = \operatorname{diag}(0, 1, 0)$, $e_3 = \operatorname{diag}(0, 0, 1)$ — матрицы из $A(3, O)$; пусть $A_p$ — множество матриц $a \in A(3, O)$ с нулевыми элементами на главной диагонали, лежащих в ядре оператора $L_{e_p}$ $(p = 1, 2, 3)$. Пусть $D_0$ — множество дифференцирований алгебры $A(3, O)$ (т. е. линейных отображений $\delta$ алгебры $A(3, O)$ в себя, удовлетворяющих условию $\delta(a \circ b) = \delta a \circ b + a \circ \delta b$ $(a, b \in A(3, O))$), переводящих матрицы $e_1, e_2, e_3$ в нуль; пусть $D_p = \{[L_{e_q - e_r}, L_a],\ a \in A_p\}$, где $p, q, r$ образуют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3. Алгебра Ли $D$ всех дифференцирований алгебры Ли $A(3, O)$ совпадает с суммой $D_0 + D_1 + D_2 + D_3$ и является алгеброй Ли компактной группы Ли (типа $F_4$) всех автоморфизмов алгебры $A(3, O)$. Пусть $\mathfrak{k} = D_0 + D_1$, $\mathfrak{p}_0 = D_2 +$

$+D_3$, $\mathfrak{p}=i\mathfrak{p}_0$; тогда $\mathfrak{k}+\mathfrak{p}=\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли некомпактной связной группы Ли $G$, являющейся вещественной формой комплексной группы Ли типа $F_4$. Максимальная компактная подгруппа $K$ группы $G$, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{k}$, есть связная подгруппа группы автоморфизмов йордановой алгебры $A(3, O)$, изоморфная спинорной группе Spin(9).

Пусть $A(3, O)_{\mathbf{C}}=A(3, O)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$; пусть $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — симметричная положительно определенная билинейная форма на $A(3, O)_{\mathbf{C}}$, определяемая формулой $\langle\alpha_1+i\beta_1, \alpha_2+i\beta_2\rangle = \operatorname{tr}\alpha_1\circ\alpha_2+\operatorname{tr}\beta_1\circ\beta_2$ $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\in A(3, O))$. Пусть $P$ — ортогональный проектор пространства $A(3, O)_{\mathbf{C}}$ на $A_2+A_3$ относительно этой билинейной формы; пусть $\|\alpha+i\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$ $(\alpha, \beta\in A(3, O))$. Пусть

$$a=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad 1\in O;\qquad v_0=(1/4)\begin{pmatrix}i&0&1\\0&0&0\\1&0&-i\end{pmatrix}\in A(3, O)_{\mathbf{C}}. \tag{1}$$

Формула $\bar{T}(g)=\sqrt{2}P(ig(v_0))/\|gv_0\|$ $(g\in G)$, определяет отображение группы $G$ на сферу $S^{15}$. Пусть $v=4v_0$; тогда формула

$$[\pi_\sigma(g)f](ka/\sqrt{2})=|\operatorname{tr}((g^{-1}kv)\circ e_1)|^{i\sigma-11/2}f(\bar{T}(g^{-1}k)), \tag{2}$$

где $\sigma\in\mathbf{C}$, $g\in G$, $k\in K$, а функция $f$ пробегает пространство $L^2(S^{15})$, построенное по обычной $SO(16)$-инвариантной мере, определяет непрерывное представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2(S^{15})$, называемое *представлением сферической основной непрерывной серии* представлений группы $G$.

Пусть $H=i[L_{e_1-e_3}, L_a]$, где $a$ определен в (1); пусть $A$ — однопараметрическая подгруппа в $G$, порожденная элементом $H\in\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$. Пусть $M$ — централизатор группы $A$ в группе $K$. Подгруппа группы $K$ (отождествленной с группой Spin(9)), оставляющая на месте некоторую точку сферы $S^{15}=K/M$, изоморфна группе Spin(7) (и может быть с ней отождествлена). Ограничение спинорного представления (см. 6.5.5) группы *Spin* (9), действующего в $\mathbf{R}^{16}\supset S^{15}$, на группу *Spin* (7) определяет разложение $\mathbf{R}^{16}$ в прямую сумму пространств трех представлений: одномерного единичного представления в подпространстве $V_0$, «тождественного» семимерного представления в подпространстве $V_1$, эквивалентного представлению *Spin* (7) $\to$ *SO* (7), и восьмимерного спинорного представления группы *Spin* (7) в подпространстве $V_2$. Пусть $x\in V_0$, $y\in V_1$, $z\in V_2$, $r^2=x^2+\|y\|^2+\|z\|^2$, $r\cos\xi=\sqrt{x^2+\|y\|^2}$ $(0\leqslant\xi\leqslant\pi/2)$, $r\cos\xi\cos\varphi=x$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$. Пусть $m$, $l$ — неотрицательные целые, $m\geqslant l\geqslant 0$, причем $m-l$ четно; пусть $e_{m,l}$ — функция на $S^{15}$, определяемая формулой

$$e_{m,l}(\xi, \varphi)=\cos^m\xi F((l-m)/2, (-m-l-6)/2, 4, \operatorname{tg}\xi)\times$$
$$\times\cos^l\varphi F(-l/2, -(l-1)/2, 7/2, -\operatorname{tg}^2\varphi).$$

Пусть $V^{m,l}$ — $K$-циклическая оболочка вектора $e_{m,l}$ (лежащая в соответствующем пространстве однородных гармонических многочленов).

Представление $\pi_\sigma$ циклично (соответственно неприводимо) тогда и только тогда, когда $2i\sigma - 5$ не является неотрицательным четным числом (соответственно ни $2i\sigma - 5$, ни $5 - 2i\bar{\sigma}$ не является неотрицательным четным числом).

Пусть $2i\sigma - 5 = 2n$, где $n$ — неотрицательное целое. Тогда подпространства $W_n = \sum\limits_{m+k \leqslant 2n-6} \oplus V^{m,k}$, $Z_n = \sum\limits_{m-k \leqslant n} \oplus V^{m,k}$ инвариантны относительно $\pi_\sigma$, причем $Z_n$ нетривиально, а $W_n = (0)$ при $n < 3$ и $W_n \neq (0)$ при $n \geqslant 3$. Соответствующие представления в $L^2(S^{15})/Z_n$, $Z_n/W_n$ и $W_n$ (вполне) неприводимы. Ввиду существования, как обычно, $G$-инвариантной эрмитовой невырожденной формы, спаривающей представления $\pi_\sigma$ и $\pi_{\bar{\sigma}}$, подпространства $\widetilde{W}_n = \sum\limits_{m+k > 2n-6} \oplus V^{m,k}$, $\widetilde{Z}_n = \sum\limits_{m-k > n} \oplus V^{m,k}$ инвариантны относительно $\pi_\sigma$ при $5 - 2i\sigma = 2n$, где $n$ — неотрицательное целое.

Неприводимые унитарные представления группы $G$, ограничение которых на $K$ содержит единичное представление (т. е. представления, являющиеся унитарными и сферическими), относятся к одному из следующих четырех типов:

а) представления $\pi_\sigma$ $(\sigma \in \mathbf{R})$ (*основная непрерывная сферическая серия* унитарных представлений);

б) представления, эквивалентные представлениям $\pi_\sigma$, где $i\sigma \in \mathbf{R}$, $0 < |\sigma| < 5$ (*дополнительная сферическая серия*);

в) подпредставление представления $\pi_5$ в подпространстве $Z_0$;

г) единичное представление (подпредставление представления $\pi_{-5,5i}$ в подпространстве $W_3$).

**3.3. Формула Планшереля для некомпактных вещественных полупростых групп Ли вещественного ранга 1.** Пусть $G$ — связная полупростая группа Ли с конечным центром, $K$ — максимальная компактная подгруппа группы $G$. Пусть ранг $\operatorname{rank} G$ (размерность картановской подгруппы в $G$) равен рангу группы $K$ (так что группа $G$ имеет дискретную серию представлений), и пусть $G$ — группа вещественного ранга 1 (т. е. размерность абелевой подгруппы в разложении Ивасавы равна единице). Пусть $T$ — картановская подгруппа группы $G$, содержащаяся в $K$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$, $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ — ее комплексификация, $G_\mathbf{C}$ — односвязная комплексная группа Ли, соответствующая $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ Предположим, что $G$ — вещественно аналитическая подгруппа группы $G_\mathbf{C}$, соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_\mathbf{C}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы $T$, $\mathfrak{h}_\mathbf{C}$ — ее комплексификация. Пусть $P_T$ — множество положительных корней пары $(\mathfrak{g}_\mathbf{C}, \mathfrak{h}_\mathbf{C})$. Пусть $\alpha_\mathfrak{h}$ — сингулярный мнимый корень из $P_T$, и пусть $X$ — такая точка в $\mathfrak{h}$, что единственный корень из $P_T$, обращающийся в нуль на $X$, есть корень $\alpha_\mathfrak{h}$.

Пусть $\mathfrak{g}_X$ — централизатор элемента $X$ в $\mathfrak{g}$; пусть $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ — центр, а $d_X$ — производная алгебра алгебры $\mathfrak{g}_X$. Алгебра $d_X$ изоморфна алгебре Ли $sl(2, \mathbf{R})$; пусть $e_0^*$, $e_1^*$, $e_2^*$ — такой базис в $d_X$, что $[e_0^*, e_1^*] = 2e_1^*$, $[e_0^*, e_2^*] = -2e_2^*$, $[e_1^*, e_2^*] = e_0^*$. Пусть $\mathfrak{h}_2 = \mathbf{R}(e_1^* -$

$-e_2^*)\subset\mathfrak{h}$, и пусть $T_1$ и $T_2$ — аналитические (компактные) подгруппы в $T$, соответствующие $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$. Пусть $\mathfrak{a}=\mathbf{R}e_0+\mathfrak{h}_1'$; подалгебры $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{a}$ образуют полный набор несопряженных картановских подалгебр в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $A$ — картановская подгруппа в $\mathfrak{g}$, связанная с $\mathfrak{a}$; пусть $P_A$ — множество положительных корней пары $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},\mathfrak{a}_{\mathbf{C}})$. Пусть $\alpha_{\mathfrak{a}}$ — единственный положительный вещественный корень пары $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},\mathfrak{a}_{\mathbf{C}})$ (а именно, $\alpha_{\mathfrak{a}}(e_0^*)=2$, $\alpha_{\mathfrak{a}}=0$ на $\mathfrak{h}_1$).

Группу $\widehat{T}$ (унитарных) характеров группы $T$ можно отождествить с решеткой $L_T$ в пространстве, сопряженном к $i\mathfrak{h}$, сопоставляя элементу $\tau\in L_T$ характер $\chi_\tau$ по формуле $\chi_\tau(\exp(iH))=e^{\tau(H)}$ $(H\in\mathfrak{h})$. Группа Вейля $W(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},\mathfrak{h}_{\mathbf{C}})$ действует на $L_T$ (и, таким образом, на $\widehat{T}$) по формуле $w\tau(H)=\tau(w^{-1}H)$, $\chi_{w\tau}(\exp(iH))=e^{w\tau(H)}$ $(H\in\mathfrak{h},\ \tau\in L_T,\ w\in W(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}))$. Элемент $\tau\in L_T$ называется *регулярным*, если $w\tau\neq\tau$ при всех неединичных $w\in W(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},\mathfrak{h}_{\mathbf{C}})$; пусть $L_T'$ — множество регулярных элементов решетки $L_T$. Пусть $\tau\in L_T'$; пусть $T_\tau$ — локально интегрируемая функция на группе $G$, являющаяся характером такого представления $D_\tau$ дискретной серии группы $G$, что на множестве регулярных элементов группы $G$, сопряженных к элементам картановской подгруппы $T$, произведение $T_\tau(t)$ $(t\in T)$ на дискриминант элемента $t$ есть линейная комбинация с коэффициентом $\pm1$ характеров $\chi_{w\tau}(t)$, где $w$ пробегает группу Вейля $W(G,T)$ (ср. 5.3.5). Пусть $f$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция на $G$, и пусть $T_\tau(f)=\int_G f(g)\,T_\tau(g)\,dg$ — след оператора $D_\tau(f)$, соответствующего функции $f$ в представлении $D_\tau$.

Пусть $A_{\mathfrak{p}}$ — однопараметрическая подгруппа $\{\exp(te_0),\ t\in\mathbf{R}\}$ (входящая в разложение Ивасавы группы $G$). Пусть $M$ — централизатор группы $A_{\mathfrak{p}}$ в $K$. Предположим, что группа $M$ связна (т. е. группа $G$ не содержит простых факторов, изоморфных группе $SL(2,\mathbf{R})$).

Пусть $A_K=A\cap K$; пусть $\widehat{A}_K$ — группа характеров компактной группы $A_K$. Пусть элемент $\gamma\in A_K$ определяется равенством $\gamma=\exp(\pi(e_1^*-e_2^*))=\exp(i\pi e_0)$; тогда $\gamma\neq1$. Пусть $\widehat{A}_K^{\pm}\subset\widehat{A}_K$ — множество таких $\chi\in\widehat{A}_K$, что $\chi(\gamma)=\pm1$ соответственно. Пусть $\chi\in A_K$; обозначим через $\ln\chi$ линейную функцию на $\mathfrak{h}_1$, определенную равенством $\chi(\exp H)=e^{(\ln\chi)(H)}$ $(H\in\mathfrak{h}_1)$. Характер $\chi\in\widehat{A}_K$ называется *регулярным*, если $w\chi\neq\chi$ для всех неединичных элементов $w$ группы Вейля $W(M,A_K)$. Введем для регулярного характера $\chi$ число $\varepsilon(\chi)=\operatorname{sgn}\left(\prod_{\alpha\in P_I^+}(\ln\chi,\alpha)\right)$, где $P_I^+$ — множество положительных мнимых корней пары $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},\mathfrak{a}_{\mathbf{C}})$, и обозначим через $T^{(\chi,\nu)}(f)$ след оператора, соответствующего $f$ в представлении основной непрерывной серии, определяемой характером $\chi \in \widehat{A}_K$ и некоторым характером $\nu \in \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$, так что $T^{(\chi,\nu)}(f) = T^{(\chi,-\nu)}(f)$.

Пусть $s = (1/2)\dim(G/K)$, $r = (1/2)(\dim G - \operatorname{rank} G)$.

Пусть $W(G, A)$ — соответствующая картановской подалгебре $\mathfrak{a}$ группа Вейля, и пусть $[E]$ — порядок конечной группы $E$. Пусть $\beta(\chi, \nu) = \prod\limits_{\alpha \in P_A} \left(\ln \chi + \frac{i\nu}{2} \alpha_{\mathfrak{a}}, \alpha\right)$, где $\nu \in \mathbf{R}$ отождествляется с характером $\nu \in \widehat{A}_{\mathfrak{g}}$ по формуле $\nu(\exp(te_0)) = e^{i\nu t}$ $(t \in \mathbf{R})$. Тогда для всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $f$ на группе $G$ имеет место равенство

$$\int\limits_G |f(g)|^2 dg = (2\pi)^{-r} \sum_{\tau \in L_T'} \left(\prod_{\alpha \in P_T} |(\tau, \alpha)|\right) T_\tau(f^* * f) +$$
$$+ (2\pi)^{-r} 2^{-1} i^{2s+1} ([W(G, T)]/[W(G, A)]) \operatorname{sgn}\left(\prod_{\alpha \in P_T} (\tau, \alpha)\right) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{\chi \in \widehat{A}_K^+} \varepsilon(\chi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T^{(\chi,\nu)}(f^* * f) \operatorname{cth}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \beta(\chi, \nu)\, d\nu + \right.$$
$$\left. + \sum_{\chi \in \widehat{A}_K^-} \varepsilon(\chi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T^{(\chi,\nu)}(f^* * f) \operatorname{th}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \beta(\chi, \nu)\, d\nu \right\},$$

являющееся аналогом формулы Планшереля на группе $G$.

Литература: [107], [108], [109], [194], [199], [289], [340], [348], [365], [381], [434], [457], [470], [476], [527], [565], [575], [604].

## § 4. Представления некоторых вещественных редуктивных групп Ли неединичного ранга

**4.1. Основная серия представлений группы $SL(n, \mathbf{R})$.** Пусть $G = SL(n, \mathbf{R})$. Пусть $K = SO(n)$ — ее максимальная компактная подгруппа; $\Gamma$ — подгруппа, образованная диагональными матрицами $\gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, где $\prod\limits_{j=1}^{n} \gamma_j = 1$ $(\gamma_j \in \mathbf{R}^*)$. Пусть $A$ — подгруппа в $\Gamma$, образованная матрицами с положительными элементами; $N$ — подгруппа нижних треугольных матриц в группе $G$ с единицами на главной диагонали; $B$ — подгруппа верхних треугольных матриц в группе $G$, так что $G = KAN$ — разложение Ивасавы в группе $G$. Пусть $M = \Gamma \cap K$ — подгруппа диагональных матриц с диагональными элементами $\pm 1$. Пусть $\beta$ — характер группы $B$, определяемый формулой $\beta(b) = \prod\limits_{j=1}^{n-1} |b_{jj}|^{n-j}$ $(b \in B)$; пусть $\chi$ — характер группы $B$, определяемый формулой $\chi(b) = \prod\limits_{j=1}^{n-1} |b_{jj}|^{\rho_j} \operatorname{sgn}^{\varepsilon_j}(b_{jj})$ $(b \in B)$, где $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ — комплексные числа, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ принимают значения 0 и 1. Пусть $\alpha = \chi\beta$, и пусть $L^2_\alpha(K)$ — подпространство гильбертова пространства $L^2(K)$ (построенного по мере Хаара на $K = SO(n)$), образованное функциями $f \in L^2(K)$, удовлетворяющими условию $f(\gamma k) = \alpha(\gamma) f(k)$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и почти всех $k \in K$. Формула

$$[T^\alpha(g) f](k) = \alpha(b') f(k'), \quad g \in G, \quad k \in K, \quad f \in L^2_\alpha(K), \tag{1}$$

где

$$kg = b'k', \quad b' = a'n', \quad a' \in A, \quad n' \in N, \quad k' \in K, \tag{2}$$

— разложение Ивасавы элемента $kg$, определяет непрерывное представление группы $G$ в гильбертовом пространстве $L^2_\alpha(K)$. Семейство таких представлений называется *основной серией представлений* группы $G$. Эти представления унитарны тогда и только тогда, когда все числа $\rho_j$ ($j = 1, \ldots, n-1$) чисто мнимы. Вполне неприводимые представления группы $G$ исчерпываются (с точностью до эквивалентности по Наймарку) вполне неприводимыми подфакторами представлений основной серии. Пусть $\rho_n = \varepsilon_n = 0$; пусть $\sigma_j = \rho_j - \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k\right) n^{-1}$; представления $T^\alpha$, $T^{\alpha'}$ основной серии, отвечающие наборам $\{(\rho_j, \varepsilon_j)\}$ и $\{(\rho_j', \varepsilon_j')\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, имеют одинаковые (с точностью до эквивалентности) наборы вполне неприводимых подфакторов тогда и только тогда, когда соответствующие наборы $\{\sigma_j\}$ и $\{\sigma_j'\}$ отличаются лишь такой подстановкой индексов, что набор $\{\varepsilon_j'\}$ совпадает (по модулю два) с набором, получаемым из $\{\varepsilon_j\}$ той же подстановкой и последующим вычитанием из $n-1$ первых элементов полученного набора последнего элемента того же набора. След представления $T^\alpha$ (как локально интегрируемая функция на группе) сосредоточен на множестве матриц $g \in G$, все собственные значения которых вещественны, и на нем определяется формулой $\varphi(g) = |D(g)|^{-1/2} \sum \chi(b)$, где $D(g)$ — дискриминант матрицы $g$, $b$ — матрица из группы $B$, сопряженная к $g$ с помощью матрицы из $K$, а суммирование распространяется на все возможные разложения вида $g = k^{-1}bk$ ($k \in K$, $b \in B$) (что соответствует суммированию по всем перестановкам собственных значений одной из таких матриц $b \in B$).

**4.2. Основная серия унитарных представлений группы $GL(n, \mathbf{R})$ ($n > 2$).** Пусть $n = 2m + \tau$, где $m$, $\tau$ — неотрицательные целые, так что $m \in \{0, 1, \ldots, [n/2]\}$. С каждым таким числом $m$ связана серия представлений группы $G = GL(n, \mathbf{R})$, которая строится следующим образом. Пусть $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 2$, $r_{m+1} = r_{m+2} = \ldots = r_{m+\tau} = 1$. Запишем матрицу $g \in G$ в блочном виде: $g = (g_{pq})$ ($p, q = 1, \ldots, m + \tau$), где $g_{pq}$ — матрица с $r_p$ строками и $r_q$ столбцами. Пусть $B_m$ — группа блочных верхних треугольных матриц, т. е. матриц вида $b = (b_{pq}) \in G$, где $b_{pq} = 0$ при $p > q$. Пусть $k_1, \ldots, k_m$ — натуральные числа, $\rho_1, \ldots, \rho_m, \rho_{m+1}, \ldots, \rho_{m+\tau}$ — вещественные числа, $\varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_{m+\tau} \in \{0, 1\}$. Пусть $T_\lambda$ — унитарное представление группы $G$, индуцированное представлением $\lambda = \lambda^{\{k_j\},\{\rho_j\},\{\varepsilon_j\}}$ группы $B_m$, определяемым формулой

$$\lambda^{\{k_j\},\{\rho_j\},\{\varepsilon_j\}}(b) = \prod_{j=m+1}^{m+\tau} |b_{jj}|^{i\rho_j}\operatorname{sgn}^{\varepsilon_j}(b_{jj}) \prod_{j=1}^{m} \otimes \Delta^{\rho_j, k_j}(b_{jj}), \quad b \in B_m, \tag{1}$$

т. е. тензорным произведением представлений диагональных компонент матрицы $b \in B$, где представления $\Delta^{\rho, k}$ определены формулой (2) п. 1.27. Семейство унитарных представлений $T_\lambda$ и их подпредставлений (в частности, представление $T_\lambda$ приводимо, если $n = 2m$, и в этом случае $T_\lambda$ распадается в прямую сумму двух неприводимых представлений) образует *приведенное дуальное пространство* группы $G$, т. е. замкнутое (в топологии, определяемой равномерной на компактах в $G$ сходимостью матричных элементов) семейство унитарных представлений группы $G$, достаточное для явной записи формулы Планшереля.

**4.3. Некоторые вырожденные серии представлений группы $GL(n, \mathbf{R})$ $(n > 2)$.** Пусть $n = n_1 + \ldots + n_k$ — разбиение числа $n$ в сумму $k$ невозрастающих натуральных чисел, среди которых не все равны единице; $B_{(n_1, \ldots, n_k)}$ — подгруппа блочно-треугольных матриц в $G$, образованных матрицами вида $b = (b_{pq}) \in G$ $(p, q = 1, \ldots, k)$, удовлетворяющими условию $b_{pq} = 0$ при $p > q$, где $b_{pq}$ — вещественная матрица с $n_p$ строками и $n_q$ столбцами. *Вырожденные* (неунитарные) *серии представлений* группы $G$ определяются как серии представлений, индуцированных (вообще говоря, неунитарными) характерами группы $B_{(n_1, \ldots, n_r)}$. Представления этих серий, индуцированные унитарными характерами группы $B_{(n_1, \ldots, n_k)}$, образуют *основную вырожденную серию* унитарных представлений группы $G$; представления же, индуцированные неунитарными характерами и эквивалентные унитарным, образуют соответствующую *дополнительную вырожденную серию*.

В частности, если $n = 2m$ и $B_{(m, m)}$ — подгруппа блочных матриц вида $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$, где $b_{11}, b_{22} \in GL(m, \mathbf{R})$, $\det(b_{11}b_{22}) = 1$, $b_{12} \in M(m, \mathbf{R})$, то формула

$$[T^{\rho, \varepsilon}(g)f](v) = |\det(g_{11} + g_{21}v)|^{-i\rho - m} \operatorname{sgn}^{\varepsilon}(\det(g_{11} + g_{12}v)) \times$$
$$\times f((g_{11} + g_{22}v)(g_{11} + g_{21}v)^{-1}), \tag{1}$$

где $v \in M(m, \mathbf{R})$; $f \in L^2(M(m, \mathbf{R}))$, $g = (g_{jk})$ $(j, k = 1, 2)$ — блочное разложение матрицы $g \in SL(2m, \mathbf{R})$, $\rho \in \mathbf{C}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ и $L^2(M(m, \mathbf{R}))$ построено по мере, определяемой произведением дифференциалов элементов матрицы из $M(m, \mathbf{R})$, определяет одну из вырожденных серий представлений группы $SL(n, \mathbf{R})$, где $n = 2m$. Представления $T^{\rho, \varepsilon}$ унитарны при вещественных $\rho$. Набор этих представлений образует соответствующую *основную вырожденную серию*; представления этой серии неприводимы, за исключением представления $T^{0,1}$, которое является прямой суммой двух неприводимых представлений. Представления $T^{\rho,\varepsilon}$ с невещественным $\rho$ унитаризуемы тогда и только тогда, когда $\varepsilon = 0$, а $\rho$ чисто мнимо и $0 < |\rho| \leqslant 1$ (*дополнительная вырожденная серия*); семейство представлений $T^{\rho,0}$ ($|\operatorname{Im} \rho| < 1$) эквивалентно равномерно ограниченному семейству представлений.

**4.4. Дзета-функция на группе $GL(n, \mathrm{R})$.** Пусть $\varphi$ — положительно определенная зональная сферическая функция на $G = GL(n, \mathbf{R})$ неприводимого унитарного представления вида $T_\lambda$ (см. п. 4.2), соответствующего $m = 0$, $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_\tau = 0$ (т. е. $\varphi$ — матричный элемент представления $T_\lambda$, соответствующий единичному вектору в пространстве представления, инвариантный относительно $O(n)$), так что $\varphi(g) = \int\limits_{O(n)} \lambda(b')\beta(b')\,dk$, где $dk$ — нормированная инвариантная мера Хаара на $O(n)$, элемент $b'$ при фиксированном $g \in G$ и переменном $k \in O(n)$ определяется формулой (2) п. 4.1, а $\lambda$ — формулой (1) п. 4.2, т. е. $\lambda(b) = \prod\limits_{j=1}^{n} |b_{jj}|^{i\rho_j}$ $(b \in B_0)$.

Пусть $f$ — бесконечно дифференцируемая быстро убывающая функция на $M(n, \mathbf{R})$ (т. е. $f$ — элемент из пространства Шварца $S(M(n, \mathbf{R}))$); пусть $f(ugv) = f(g)$ для всех $u, v \in O(n)$, $g \in M(n, \mathbf{R})$. Пусть $d_G g = |\det g|^{-n} dg$ — мера Хаара на $G$, где $dg$ — произведение дифференциалов элементов матрицы $g \in M(n, \mathbf{R})$. Функция $\zeta(f, \varphi, \rho) = \int\limits_G f(g)\,\varphi(g)\,|\det g|^\rho d_G g$ комплексного переменного $\rho$ в области $\operatorname{Re}(\rho) > n - 1$ (в которой интеграл абсолютно сходится) называется *дзета-функцией* функции $f$ относительно $\varphi$. Эта функция допускает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость; аналогичный результат справедлив и в случае, если функция $\varphi$ связана с некоторым представлением дополнительной серии (т. е. связанным с невещественными $\rho_1, \ldots, \rho_n$ такими, что функция $\varphi$ является положительно определенной). Более того, при $\operatorname{Re} \rho \leqslant 0$ имеет место равенство

$$\zeta(f, \varphi, \rho) = \left\{ \pi^{\operatorname{Re}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k\right) + 2^{-1}(n^2 - n)} \prod_{k=1}^{n} \Gamma_R(\rho + \rho_k) \right\} \zeta(\hat{f}, \bar{\varphi}, n - \rho), \tag{1}$$

где $\bar{\varphi}(g) = \overline{\varphi(g)}$ для всех $g \in G$, $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции $f$, также принадлежащее $S(M(n, \mathbf{R}))$ (т. е. $\hat{f}(x) = \int\limits_{M(n,\mathbf{R})} f(y)\, e^{2\pi i \operatorname{tr}(xy')} dy$ $(x, y \in M(n, \mathbf{R}))$, где $y'$ — матрица, транспонированная к $y$), а $\Gamma_R(z) = \pi^{1/2 - z}\Gamma(z/2)\Gamma((1 - z)/2)^{-1}$ $(z \in \mathbf{C})$.

**4.5. Неприводимые унитарные представления группы $GL(3, \mathbf{R})$.** Пусть $B_{2,1}$ — подгруппа верхних треугольных матриц в группе $G = GL(3, \mathbf{R})$, отвечающая разложению $3 = 2 + 1$, так что матрица $g \in G$ содержится в группе $B_{2,1}$ тогда и только тогда, когда $g_{31} = g_{32} = 0$. Пусть $b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$ — соответствующее блочное разложение элемента $b \in B_{21}$.

Любое неприводимое унитарное представление группы $GL(3, \mathbf{R})$ либо одномерно (и тогда имеет вид $\chi^{\rho, \varepsilon}(g) = |\det g|^{i\rho} \operatorname{sgn}^{\varepsilon}(\det g)$ $(\rho \in \mathbf{R},\ \varepsilon \in \{0,\ 1\},\ g \in G)$), либо эквивалентно представлению, индуцированному представлением $\lambda$ группы $B$ вида

$$\lambda(b) = |b_{22}|^{i\rho} \operatorname{sgn}^{\varepsilon}(b_{22}) T(b_{11}), \qquad b \in B,$$

где $\rho \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \{0,\ 1\}$, а $T$ — произвольное неприводимое унитарное представление группы $GL(2, \mathbf{R})$ (см. п. 1.27).

**4.6. Вполне неприводимые представления группы $SL(3, \mathbf{R})$.** Пусть $\nu_1$, $\nu_2$ — комплексные числа, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \in \{0,\ 1\}$; пусть $\rho_1 = \nu_1 + \nu_2$, $\rho_2 = \nu_2$. Обозначим представление $T^{\alpha}$ (см. (1), (2) п. 4.1), отвечающее характеру $\chi$ с параметрами $(\rho_1,\ \rho_2)$, $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$, через $T_{\nu, \varepsilon}$, где $\nu = (\nu_1,\ \nu_2)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$. Введем обозначения $r_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \nu_1$, $r_2 = \varepsilon_2 + \nu_2$, $\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$, $r_3 = \varepsilon_1 + \nu_3$.

Обозначим через $\nu$ линейный функционал на алгебре Ли $\mathfrak{a}$ группы $A$, определяемый соотношениями $\nu(H_j) = \nu_j$ $(j = 1,\ 2)$, где $H_1 = \operatorname{diag}(1,\ -1,\ 0)$, $H_2 = \operatorname{diag}(0,\ 1,\ -1)$. Пусть $Z$ — центр универсальной обертывающей алгебры группы $G$, пусть $W$ — группа Вейля пары $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},\ \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}) = (sl(n,\ \mathbf{C}),\ \mathfrak{a}_{\mathbf{C}})$, действующая на диагональной подалгебре $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ подстановками, и пусть $\gamma$ — изоморфизм алгебры $Z$ на алгебру $W$-инвариантных элементов универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$. Пусть $\beta_\nu$ — функционал на $Z$, определяемый формулой $\beta_\nu(z) = \gamma(z)(\nu)$ $(z \in Z)$. Пусть $\mathfrak{n}_\nu$ — множество классов эквивалентности вполне неприводимых представлений с инфинитезимальными характерами, равными $\beta_\nu$.

Обозначим через $\pi^n$ класс эквивалентности неприводимых представлений группы $K = SO(3)$ размерности $2n + 1$ (ср. 6.2.1). В дальнейшем обозначим через $N(T)$ наименьший из номеров представлений $\pi^n$, входящих в ограничение представления $T$ группы $G$ на подгруппу $K$.

Представление $T_{\nu, \varepsilon}$ приводимо тогда и только тогда, когда хотя бы одно из $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ — целое ненулевое, причем соответствующее $r_j$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ нечетно. Если среди чисел $\nu_j$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ нет целых, то $T_{\nu, \varepsilon}$ неприводимо и $\mathfrak{n}_\nu = \{\pi_{\varepsilon_0, \nu}, \pi_{\varepsilon_k, \nu}, k = 1, 2, 3\}$, где $\varepsilon_0 = (0,\ 0)$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ — остальные наборы из двух элементов, принадлежащих $\{0,\ 1\}$; при этом $N(\pi_{\varepsilon_0, \nu}) = 0$, $N(\pi_{\varepsilon_k, \nu}) = 1$ при $k = 1,\ 2,\ 3$.

Пусть $|\nu_{k_0}| = n \neq 0$, $n$ — целое, а два других — нецелые, тогда из четырех представлений $T_{\nu, \varepsilon}$ два неприводимы, а два других приводимы и содержат одно нетривиальное подпредставление; оба приводимых представления содержат подфактор $T$ с $N(T) =$

$= n+1$, так что в $\mathfrak{n}_\nu$ содержится одно представление с $N(T)=0$, три представления с $N(T)=1$ и одно представление с $N(T)=$ $=n+1$.

Пусть все числа $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$— целые положительные, причем $\nu_1=n$, $\nu_2=m$. Тогда из четырех представлений $T_{\nu,\varepsilon}$ только одно неприводимо. Пусть $T_{\nu,\tilde{\varepsilon}}$ — то приводимое представление, для которого $r_1$ и $r_2$ оба нечетны; оно содержит в качестве подфактора конечномерное неприводимое представление со старшим весом $(n-1,\ m-1)$. Оно содержит четыре нетривиальных инвариантных подпространства $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$, где $H_1\subset H_2\subset H_4$, $H_1\subset$ $\subset H_3\subset H_4$; остальные приводимые представления вида $T_{\nu,\varepsilon}$ содержат два нетривиальных инвариантных подпространства, которые могут быть включены друг в друга. Множество $\mathfrak{n}_\nu$ содержит семь представлений: одно с $N(T)=0$, три с $N(T)=1$, одно с $N(T)=n+1$, одно с $N(T)=m+1$ (так что при $n=m$ имеются два представления с $N(T)=n+1$) и одно с $N(T)=n+m+1$, которое содержится в любом приводимом представлении $T_{\nu,\varepsilon}$. Представления $\pi^{n+1}$, $\pi^{m+1}$ входят в $T_{\nu,\tilde{\varepsilon}}$, и, кроме того, каждое из них входит еще в одно приводимое представление вида $T_{\nu,\varepsilon}$.

Пусть одно из чисел $\nu_k$ равно нулю, а два других — нецелые. В этом случае представление $T_{\nu,\varepsilon}$ неприводимо и $\mathfrak{n}_\nu$ содержит три представления: одно с $N(T)=0$ (а именно, $T_{\nu,\varepsilon_0}$) и два с $N(T)=1$ (а именно, представления $T_{\nu,\varepsilon_1}$ и $T_{\nu,\varepsilon_2}=T_{\nu,\varepsilon_3}$, где $\varepsilon_2=$ $=w\varepsilon_3$ для нетривиального элемента группы Вейля, сохраняющего $\nu$).

Пусть одно из чисел $\nu_k$ равно нулю, а два других — целые ненулевые. Представления с $\nu_1=n$, $\nu_2=-n$ имеют при нечетном $n$ и $\varepsilon=(0,\ 0)$ и при четном $n$ и $\varepsilon=(0,\ 1)$ два нетривиальных инвариантных подпространства, содержащиеся друг в друге, а остальные приводимые представления — одно. Множество $\mathfrak{n}_\nu$ состоит из четырех представлений: одного с $N(T)=0$, двух с $N(T)=1$ и одного с $N(T)=|n|+1$, которое входит в любое приводимое представление $T_{\nu,\varepsilon}$.

Наконец, если $\nu=(0,\ 0)$, то $T_{\nu,\varepsilon}$ неприводимо при всех $\varepsilon$ и $\mathfrak{n}_0$ состоит из двух представлений: представления $T_{0,\varepsilon_0}$ с $N\left(T_{0,\varepsilon_0}\right)=0$ и представления $T_{0,\varepsilon}$ $(\varepsilon\neq\varepsilon_0)$ с $N(T_{0,\varepsilon})=1$.

**4.7. Некоторые серии представлений групп $U(p,q)$, $O(p,q)$, $Sp(p,q)$.** Пусть $\mathbf{F}$ есть либо поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, либо поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел, либо тело $\mathbf{H}$ (вещественных) кватернионов (описанное в п. 3.2). Пусть $p$, $q$ — натуральные числа, $n=p+q$, и пусть $[x,\ y]=x_1\bar{y}_1+\ldots+x_p\bar{y}_p-x_{p+1}\bar{y}_{p+1}-\ldots$ $\ldots-x_{p+q}\bar{y}_{p+q}$ $(x,\ y\in\mathbf{F}^n)$ — эрмитова форма в правом векторном пространстве $\mathbf{F}^n$; пусть $U(p,\ q;\ \mathbf{F})$ — группа матриц $n$-го порядка с коэффициентами из тела $\mathbf{F}$, сохраняющих эрмитову форму $[\cdot,\ \cdot]$, и пусть $SU(p,\ q;\ \mathbf{F})$ — подгруппа матриц из $U(p,\ q;\ \mathbf{F})$ с единичным определителем. Заметим, что группа $U(p,\ q;\ \mathbf{F})$ есть группа $U(p,\ q)$ при $\mathbf{F}=\mathbf{C}$, группа $O(p,\ q)$ при $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ и группа $Sp(p,\ q)$ при $\mathbf{F}=\mathbf{H}$. Будем считать, что $p\geqslant q\geqslant 1$.

Пусть $X$ — квадратная матрица порядка $n$ с коэффициентами из $\mathbf{F}$; пусть $I_{p,q}=\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, где $p+q=n$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G=U(p,\ q;\ \mathbf{F})$ образована такими матрицами $X$, что $X+$ $+I_{pq}\bar{X}^t I_{pq}=0$, так что $X=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_2^t & z_3 \end{pmatrix}$, где $z_1$ и $z_3$ антиэрмитовы, а $z_2$ произвольна. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, образованная матрицами со следом 0, а $G_0$ — связная компонента единицы в группе $SU(p,\ q;\ \mathbf{F})$.

Пусть $U(p,\ \mathbf{F})$ есть группа $U(p,\ 0;\ \mathbf{F})$. Максимальная компактная подгруппа $K$ группы $G$ изоморфна произведению $U(p,\ \mathbf{F})\times U(q,\ \mathbf{F})$ и образована блочно-диагональными матрицами вида $u=\begin{pmatrix} u_p & 0 \\ 0 & u_q \end{pmatrix}\in G$, где $u_j\in U(j,\ \mathbf{F})$ $(j=p,\ q)$. Таким образом, в разложении Картана $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли группы $K$, подпространство $\mathfrak{p}$ есть подпространство матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & z_2 \\ \bar{z}_2^t & 0 \end{pmatrix}$. Пусть $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ — пространство матриц из $\mathfrak{p}$, у которых матрица $z_2$ содержит на своей диагонали вещественные числа $t_1,\ \ldots,\ t_q$, а на остальных местах нули; пространство $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ образует максимальную абелеву подалгебру в $\mathfrak{p}$ и определяет, таким образом, разложение Ивасавы в группе $G$; в частности, если $A_{\mathfrak{p}}$ — аналитическая подгруппа в $G$, соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\subset\mathfrak{g}$, то централизатор $M$ группы $A_{\mathfrak{p}}$ в группе $K$ состоит из тех и только тех матриц $u=\operatorname{diag}(u_q,\ u_{p-q},\ u_q)$, где $u_j\in U(j,\ \mathbf{F})$ $(j=q,\ p-q)$, у которых матрица $u_q$ диагональна, а семейство $\mathfrak{a}$ матриц вида $\operatorname{diag}(i\varphi_1,\ \ldots,\ i\varphi_q,\ i\varphi_{q+1},\ \ldots,\ i\varphi_p,\ i\varphi_1,\ \ldots,\ i\varphi_q)+a_{\mathfrak{p}}$, где $a_{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, образует максимальную абелеву подалгебру в $\mathfrak{g}$ (так что $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{a}$ при $\mathbf{F}=\mathbf{R}$); если $N$ — соответствующая нильпотентная подгруппа, то *основная серия представлений* группы $G$ (образованная представлениями, индуцированными конечномерными неприводимыми представлениями группы $B=MA_{\mathfrak{p}}N$, тривиальными на $N$) содержит в качестве подфактора любое (с точностью до эквивалентности) вполне неприводимое представление группы $G$.

Пусть $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{g}_0$; пусть $\mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}},\ \mathfrak{a}_0^{\mathbf{C}}$ — комплексификации алгебр Ли $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{a}_0$ соответственно. Пусть $\Gamma$ — множество ненулевых ограничений на $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\cap\mathfrak{g}_0$ элементов некоторой фундаментальной системы положительных корней пары $(\mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}},\ \mathfrak{a}_0^{\mathbf{C}})$. С любым подмножеством $O\subset\Gamma$ связана параболическая подгруппа $B_O$ (т. е. подгруппа, содержащая группу $B$) и тем самым также и некоторая вырожденная серия представлений. Опишем построение группы $B_O$. Пусть $\mathfrak{a}_O$ — множество таких $H\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, что корни из $O$ обращаются в нуль на $H$; пусть $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(O)$ — ортогональное дополнение пространства $\mathfrak{a}_O$ в $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$: пусть $\Phi(O)$ — множество корней пары $(\mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}}, \mathfrak{a}_0^{\mathbf{C}})$, обращающихся в нуль на $\mathfrak{a}_O$, и пусть $\mathfrak{a}^{\mathbf{C}}(O)$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{a}_0^{\mathbf{C}}$, порожденная векторами $H_\alpha$ $(\alpha \in \Phi(O))$; пусть $\mathfrak{a}(O) = \mathfrak{a}^{\mathbf{C}}(O) \cap \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{a}_\kappa(O) = \mathfrak{a}(O) \cap \mathfrak{k}$. Пусть $\mathfrak{n}_O^{\mathbf{C}}$ — подалгебра, порожденная корневыми подпространствами положительных корней, не принадлежащих $\Phi(O)$, и пусть $\mathfrak{n}_O = \mathfrak{n}_O^{\mathbf{C}} \cap \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{m}_O^{\mathbf{C}}$ — векторное подпространство, порожденное подпространствами $\mathfrak{a}^{\mathbf{C}} \cap \mathfrak{k}, \mathfrak{a}_\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}(O)$ и корневыми подпространствами корней $\alpha \in \Phi(O)$; тогда $\mathfrak{m}_O^{\mathbf{C}}$ есть комплексификация некоторой подалгебры Ли $\mathfrak{m}_O \subset \mathfrak{g}_0$. Пусть $M_O^+, A_O, N_O$ — аналитические подгруппы в $G$ с алгебрами Ли $\mathfrak{m}_O$, $\mathfrak{a}_O$, $\mathfrak{n}_O$ соответственно; пусть $M_O(K)$ — централизатор $\mathfrak{a}_O$ в $K$, и пусть $B_O = M_O(K)M_OA_ON_O$. Семейство подгрупп вида $B_O$ и образует полный набор подгрупп в $G_0$, содержащих борелевскую подгруппу $B$ (отвечающую случаю $O = \Gamma$); представления группы $G_0$, индуцированные неприводимыми унитарными представлениями группы $B_O$, тривиальными на $N_O$ и определяющими представление группы $M_O(K)M_OA_O$, лежащее в носителе регулярного представления этой группы, образуют соответствующую *основную вырожденную серию* унитарных представлений группы $G_0$; аналогично определяются соответствующая часть основной невырожденной серии (связанная с представлениями, индуцированными представлениями группы $B_O$, определяемыми представлениями основной серии группы $M_O(K)M_OA_O$) и соответствующие дополнительные серии.

В частности, пусть $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_{n-1} \end{pmatrix}$, и пусть $\tau$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, определяемый формулой $\tau(X) = JXJ$ $(X \in \mathfrak{g})$. Пусть

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0_{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тогда $\mathfrak{a} = \mathbf{R}L$ — максимальное абелево подпространство в пространстве таких $X \in \mathfrak{g}$, что $\tau(X) = -X$. Пусть $M$ — подгруппа блочно-диагональных матриц вида $\operatorname{diag}(u, v, u)$, где $u \in \mathbf{F}$, $|u| = 1$, а $v \in U(p-1, q-1, \mathbf{F})$. Пусть $N$ — группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 + w - [z, z]/2 & z^* & -w + [z, z]/2 \\ z & I_{n-2} & z \\ w - [z, z]/2 & z^* & 1 - w + [z, z]/2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $w \in \mathbf{F}$, $w + \bar{w} = 0$, $z$ — $(n-2)$-вектор с коэффициентами из $\mathbf{F}$, а $z^* = -\bar{z}^t I_{p-1, q-1}$. Пусть $A$ — однопараметрическая подгруппа в $G$, соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{a}$; тогда группа $MAN$ — максимальная параболическая подгруппа в $G$ и семейство представлений группы $G$, индуцированных характерами группы $MAN$, тривиальными на $N$, образует так называемую *серию представлений*, связанных с конусом. Пусть $a_t = \exp(tL) \in A$, $\chi_s$ — характер группы $MAN$, определенный формулой $\chi_s(ma_t n) = e^{st}$ ($s \in \mathbf{C}$, $m \in M$, $n \in N$, $a_t \in A$), и пусть $T_s$ — соответствующее индуцированное представление группы $G$. Представление $T_s$ унитарно при $s = i\sigma$ ($\sigma \in \mathbf{R}$) (*основная вырожденная серия*), и при $|s| \leqslant s_0$ ($s \in \mathbf{R}$) (*дополнительная вырожденная серия*), где $s_0$ определяется следующим образом: а) при $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ имеем $s_0 = -1 + n/2$ для $q = 1$, а при $q > 1$ число $s_0$ равно $1/2$ при нечетном $p + q$ и $(-1 + n/2) \pmod 2$ при четном $p + q$; б) при $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{H}$ имеем $s_0 = 2^{-1}(\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F})(n - 2) + 1$ для $q = 1$, а при $q > 1$ число $s_0$ равно $(2^{-1}n(\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F}) - 1) \pmod 2$. Кроме того, если $q > 1$, $s > s_0$, $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $p$ нечетно и число $s - (n/2)$ — целое, то при $s = -1 + (n/2)$ и при нечетном $s - (n/2) + 1$ сферический (т. е. допускающий обобщенный вектор, инвариантный относительно подгруппы $H \subset G$, элементы которой оставляют на месте прямую в $\mathbf{F}^n$, порожденную вектором $(1, 0, \ldots, 0)$) подфактор представления $T_s$ унитаризуем; если же $q > 1$, $s > s_0$ и либо $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ и $p$ четно, либо $\mathbf{F} = \mathbf{C}$, либо $\mathbf{F} = \mathbf{H}$, то при четном $s - 2^{-1}n(\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F}) + 1$ сферический подфактор представления $T_s$ унитаризуем. Эти представления образуют полный набор сферических унитарных представлений среди подфакторов представлений $T_s$ ($s \in \mathbf{C}$).

**4.8. Некоторые представления дискретной серии группы $U(p,q)$.** Воспользуемся понятиями и обозначениями п. 4.7. Пусть $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — блочное разложение элемента $g \in G = U(p, q)$, отвечающее разложению $n = p + q$. Введем обозначения $z^{(1)} = (\alpha^*)^{-1}$, $z^{(2)} = (\delta')^{-1}$, $w = \delta^{-1}\gamma$. Матрица $I_q - ww^*$ является положительно определенной для любого $g \in G$, и матрицы $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, $w$ можно рассматривать как матричные параметры в $G$. Пусть $H$ — пространство функций $f(g) = f(z^{(1)}, z^{(2)}, w)$, аналитических в области $ww^* < 1_q$ и являющихся многочленом степени $k_s$ от миноров первых $s$ строк матрицы $z^{(1)}$ и многочленов степени $l_t$ от миноров первых $t$ строк матрицы $z^{(2)}$ ($s = 1, \ldots, p$, $t = 1, \ldots, q$), причем $k_p + l_q \geqslant n$. Формула $[T(g_0)f](g) = f(gg_0)$ ($f \in H$, $g$, $g_0 \in G$), определяет представление группы $G$, принадлежащее дискретной серии и задаваемое набором $(k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_q)$; эта часть дискретной серии представлений группы $G$ носит название *голоморфной дискретной серии* представлений группы $G$; представления, контрагредиентные представлениям голоморфной дискретной серии, образуют *антиголоморфную дискретную серию* представлений группы $G$.

При $p > 1$ дискретная серия представлений группы $G$ не исчерпывается голоморфной и антиголоморфной дискретными сериями. А именно, существует $p + 1$ подсерий дискретной серии представлений группы $G$, определяемых следующим образом. Пусть $p = \alpha + \beta$ — разложение числа $p$ в сумму неотрицательных целых чисел; пусть $a_{jk}$ — квадратная матрица порядка $n$, все матричные элементы которой равны нулю, кроме элемента на пересечении $j$-й строки и $k$-го столбца, равного единице. Тогда матрицы $b_{kk} = ia_{kk}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $b_{jk} = i(a_{jk} + a_{kj})$ и $\tilde{b}_{jk} = (a_{jk} - a_{kj})$ (либо $j < k \leqslant p$, либо $p < j < k$), $c_{jk} = i(a_{jk} - a_{kj})$ и $\tilde{c}_{jk} = (a_{jk} + a_{kj})$ $(j \leqslant p < k)$ образуют вещественный базис в алгебре Ли $\mathfrak{g} = u(p, q)$ группы $U(p, q)$. Пусть $H$ — гильбертово пространство, определяемое набором $n$ целых чисел $(m_{1n}, m_{2n}, \ldots, m_{nn})$, с ортонормированным базисом, занумерованным таблицами целых чисел $m = (m_{jk})$ $(1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n)$, удовлетворяющим следующим условиям:

$$m_{j,\,k+1} \geqslant m_{jk} \geqslant m_{j+1,\,k+1} \tag{2}$$

при $1 \leqslant j \leqslant k$ и $1 \leqslant k \leqslant p - 1$, а также при $\alpha + 1 \leqslant j \leqslant k - \beta$ и $p + 1 \leqslant k \leqslant n - 1$;

$$m_{1k} \geqslant m_{1,\,k+1} + 1 \geqslant m_{2k} \geqslant m_{2,\,k+1} + 1 \geqslant \ldots \geqslant m_{\alpha k} \geqslant m_{\alpha,\,k+1} + 1 \tag{3}$$

при $k = p, p + 1, \ldots, n - 1$;

$$m_{k-\beta+2,\,k+1} - 1 \geqslant m_{k-\beta+1,\,k} \geqslant m_{k-\beta+3,\,k+1} - 1 \geqslant \ldots$$
$$\ldots \geqslant m_{k+1,\,k+1} - 1 \geqslant m_{kk} \tag{4}$$

при $k = p, p + 1, \ldots, n - 1$.

Пусть $m^j_{k-1} \pm 1$ — таблица, получаемая из $m$ заменой элемента $m_{j,\,k-1}$ на $m_{j,\,k-1} \pm 1$; пусть $e(m)$ — вектор базиса, отвечающий таблице $m$. Формулы

$$\begin{aligned} T(a_{kk})\, e(m) &= \left(\sum_{i=1}^{k} m_{ik} - \sum_{i=1}^{k-1} m_{i,k-1}\right) e(m), \\ T(a_{k,k-1})\, e(m) &= \sum_{j=1}^{k-1} a^j_{k-1}(m)\, e\left(m^j_{k-1} - 1\right), \\ T(a_{k-1,k})\, e(m) &= \sum_{j=1}^{k-1} b^j_{k-1}(m)\, e\left(m^j_{k-1} + 1\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$, сумма вида $\sum\limits_{1}^{0}$ считается нулевой, а числа $a^j_{k-1}(m)$ и $b^j_{k-1}(m)$ определяются формулами

$$a^j_{k-1}(m) =$$
$$= \left\{ - \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (m_{ik} - m_{j,k-1} - i + j + 1) \prod\limits_{i=1}^{k-2} (m_{i,k-2} - m_{j,k-1} - i + j)}{\prod\limits_{i=1,\, i\neq j}^{k-1} (m_{i,k-1} - m_{j,k-1} - i + j + 1)(m_{i,k-1} - m_{j,k-1} - i + j)} \right\}^{1/2}, \tag{6}$$

$$b^j_{k-1}(m) =$$
$$= \left\{ - \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (m_{ik} - m_{j,k-1} - i + j) \prod\limits_{i=1}^{k-2} (m_{i,k-2} - m_{j,k-1} - i + j - 1)}{\prod\limits_{i=1,\, i\neq j}^{k-1} (m_{i,k-1} - m_{j,k-1} - i + j)(m_{i,k-1} - m_{j,k-1} - i + j - 1)} \right\}^{1/2}$$

(причем считается, что $\arg a^j_{k-1}(m) = \arg b^j_{k-1}(m) = 0$ при $k \neq p+1$, а $\arg a^j_p(m) = \arg b^j_p(m) = \pi/2$), определяют с помощью коммутирования ($[a_{jk}, a_{st}] = \delta_{ks}a_{jt} - \delta_{tj}a_{sk}$ $(1 \leqslant j, k, s, t \leqslant n)$) и перехода к линейным комбинациям набор операторов, сопоставляемых элементам базиса (1) алгебры Ли $\mathfrak{g}$, определяющий представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ кососимметрическими операторами в $H$, которое является дифференциалом некоторого неприводимого унитарного представления группы $G$. Голоморфная и антиголоморфная серии соответствуют случаям $\alpha = p$ и $\alpha = 0$.

**4.9. Представления группы $SU(2, 2)$.** Пусть $G$ — группа $SU(2, 2)$, реализованная как группа всех комплексных унимодулярных матриц четвертого порядка, сохраняющих эрмитову форму в $\mathbf{C}^4$, определяемую матрицей $s$, ненулевые элементы которой единичны и расположены на косой диагонали. Пусть

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

пусть $K$ — максимальная компактная подгруппа в $G$, образованная матрицами $k$ вида

$$k = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sigma, \qquad u, v \in U(n), \quad \det(uv) = 1. \tag{2}$$

Пусть $A$ — подгруппа матриц вида $a = \operatorname{diag}(t_1, t_2, t_2^{-1}, t_1^{-1})$ $(t_1, t_2 \in \mathbf{R}^+)$; пусть $M$ — централизатор группы $A$ в $K$, образованный матрицами вида $m = \operatorname{diag}(e^{i\varphi}, \varepsilon e^{-i\varphi}, \varepsilon e^{-i\varphi}, e^{i\varphi})$ $(\varphi \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1)$. Пусть $N$ — подгруппа верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали, принадлежащих группе $G$. Тогда $G = KAN$ — разложение Ивасавы в группе $G$, а $B = MAN$ — борелевская подгруппа в группе $G$ (размерности 9).

Пусть $P$ — параболическая подгруппа в $G$, образованная матрицами вида

$$p = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & Ja^{*-1}J \end{pmatrix}, \qquad a \in GL(2, \mathbf{C}); \tag{3}$$

заметим, что $p \in G$ тогда и только тогда, когда матрица $Ja^{-1}b$ кососимметрична, так что $P$ — одиннадцатимерная подгруппа в $G$. Пусть $P_1$ — содержащая $B$ параболическая подгруппа, соответствующая подалгебре Ли в $su(2, 2)$, образованной матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + i\varphi & b & \beta & \alpha \\ 0 & \lambda_2 - i\varphi & \gamma & \bar\beta \\ 0 & x & -\lambda_2 - i\varphi & \bar b \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 + i\varphi \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \varphi, x, \gamma, \alpha \in \mathbf{R}, \quad b, \beta \in \mathbf{C}, \tag{4}$$

так что $P_1$ — десятимерная подгруппа в $G$, редуктивная часть которой изоморфна $\mathbf{R}^+ \times SL(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{T}$.

Представления группы $G$, индуцированные конечномерными неприводимыми представлениями группы $B$, образуют *основную серию представлений*; представления, индуцированные неприводимыми представлениями групп $P$ и $P_1$, образуют соответствующие *вырожденные серии*.

Пусть $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ — комплексификация алгебры Ли $\mathfrak{k}$ группы $K$; пусть $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — ограничение формы Киллинга алгебры Ли $sl(4, \mathbf{C})$ на $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$. Пусть $\rho_{\mathbf{C}}$ — полусумма положительных компактных корней, и пусть $\|\mu\| = \langle\mu + 2\rho_{\mathbf{C}}, \mu + 2\rho_{\mathbf{C}}\rangle$, где $\mu$ — старший вес неприводимого представления группы $K$. Пусть $\pi$ — неприводимое представление группы $G$, и пусть $\mu_\pi$ — старший вес неприводимого подпредставления ограничения $\pi|_K$ с наименьшим значением $\|\mu_\pi\|$.

Неприводимые представления группы $G$ исчерпываются представлениями следующих трех попарно непересекающихся классов:

1) классом представлений дискретной серии группы $G$;

2) классом подфакторов представлений $\pi$ основной серии, ограничение которых на $K$ содержит подпредставление со старшим весом $\mu_\pi$;

3) классом подфакторов представлений $\pi$ вырожденной серии, индуцированных представлениями дискретной серии группы $P_1$, ограничение которых на $K$ содержит подпредставление со старшим весом $\mu_\pi$.

Отметим, что представления, индуцированные конечномерными неприводимыми представлениями группы $P$, либо неприводимы, либо имеют композиционный ряд длины 3, 5, 6 или 7.

Литература: [76], [77], [106], [123], [124], [137], [138], [139], [142], [152], [153], [161], [162], [184], [185], [186], [208], [210], [219], [220], [229], [251], [290], [298], [301], [303], [320], [343], [354], [358], [382], [390], [395], [396], [403], [405], [411], [420], [422], [426], [459], [468], [478], [491], [510], [516], [519], [533], [545], [548], [574], [593].

Дополнительная литература к гл. 9: [7], [18], [25], [27], [32], [33], [34], [36], [38], [40], [42], [43], [44], [45], [47], [50], [51], [56], [57], [58], [64], [68], [73], [78], [85], [87], [89], [103], [104], [110], [111], [113], [114], [130], [136], [141], [143], [157], [163], [164], [166], [180], [193], [200], [204], [205], [228], [230], [236], [238], [239], [240], [241], [242], [244], [245], [246], [259], [263], [266], [267], [268], [269], [270], [273], [274], [275], [285], [286], [287], [288], [296], [297], [299], [304], [308], [310], [315], [319], [322], [323], [327], [328], [329], [331], [333], [334], [335], [338], [341], [342], [344], [345], [351], [356], [359], [360], [364], [366], [367], [369], [370], [371], [372], [376], [385], [391], [398], [399], [400], [401], [408], [409], [417], [418], [419], [423], [427], [431], [439], [449], [453], [454], [455], [456], [458], [460], [475], [477], [480], [485], [492], [494], [496], [497], [498], [499], [504], [511], [512], [515], [517], [523], [528], [530], [531], [532], [534], [539], [542], [544], [546], [547], [551], [562], [571], [572], [578], [580], [581], [583], [584], [586], [587], [588], [589], [591], [605], [610], [613].

## ГЛАВА 10

## ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПОЛУПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

### § 1. Представления некоторых матричных групп

**1.1. Неприводимые унитарные представления группы $G_{p,q,\mathbf{F}}$ и $U(p, q; \mathbf{F})\cdot\mathbf{F}^{p+q}$.** Пусть $\mathbf{F}$ — либо поле $\mathbf{R}$, либо поле $\mathbf{C}$, либо тело $\mathbf{H}$ (ср. 9.4.7). Пусть $p$, $q$ — натуральные числа, $\mathbf{F}^{p+q}$ — арифметическое правое векторное пространство, и пусть $h = h_{p,q}$ — эрмитова форма на $\mathbf{F}^{p,q}$, определяемая формулой $h(x, y) = \sum_{k=1}^{p} x_k\bar{y}_k - \sum_{k=p+1}^{p+q} x_k\bar{y}_k$ $(x, y \in \mathbf{F}^{p+q})$. Пусть $U(p, q; \mathbf{F})$ — группа матриц $n$-го порядка ($n = p+q$), сохраняющих форму $h$ (см. 9.4.7), и пусть $\operatorname{Im}\mathbf{F}$ — мнимая часть тела $\mathbf{F}$ (т. е. $\mathbf{F} = \mathbf{R} + \operatorname{Im}\mathbf{F}$). Пусть $N_{p,q;\mathbf{F}}$ — нильпотентная односвязная группа Ли (*обобщенная группа Гейзенберга*), определяемая введением на многообразии $\operatorname{Im}\mathbf{F} + \mathbf{F}^{p+q}$ умножения по формуле $(w_0, z_0)(w, z) = (w_0 + w + \operatorname{Im} h(z_0, z), z_0 + z)$ $(w_0, w \in \operatorname{Im}\mathbf{F}, z_0, z \in \mathbf{F}^n)$. Пусть $G_{p,q;\mathbf{F}}$ — полупрямое произведение $N_{p,q;\mathbf{F}}\cdot U(p, q; \mathbf{F})$, в котором умножение определяется формулой

$$(w_0, z_0; g_0)(w, z; g) = (w_0 + w + \operatorname{Im} h(z_0, g_0(z)), z_0 + g_0(z), g_0 g) \quad (1)$$

при $w_0, w \in \operatorname{Im}\mathbf{F}$, $z_0, z \in \mathbf{F}^n$, $g_0, g \in U(p, q, \mathbf{F})$. Группа $G_{p,q;\mathbf{F}}$ естественно вкладывается в $U(p+1, q+1; \mathbf{F})$ как подгруппа элементов, оставляющих на месте некоторый ненулевой изотропный вектор $v \in \mathbf{F}^{n+2}$ (т. е. вектор с $h_{p+1,q+1}(v, v) = 0$).

Неприводимые унитарные представления группы $N_{p,q;\mathbf{F}}$ конечномерны тогда и только тогда, когда они обращаются в нуль на $\operatorname{Im}\mathbf{F}$; это — унитарные характеры вида $(wz) \to e^{if(z)}$, где $f$ — вещественный линейный функционал на $\mathbf{F}^n$, так что можно считать, что $f(z) = \operatorname{Re} h(z, v)$ для некоторого $v \in \mathbf{F}^n$ и всех $z \in \mathbf{F}^n$. Для таких функционалов стационарная подгруппа $L_v$ в $U(p, q; \mathbf{F})$ состоит из таких $g \in U(p, q; \mathbf{F})$, что $gv = v$, что приводит к четырем типам стационарных подгрупп: а) $h(v, v) > 0$; тогда $L_v \approx U(p-1, q; \mathbf{F})$; б) $h(v, v) < 0$; тогда $L_v \approx U(p, q-1; \mathbf{F})$; в) $v = 0$; тогда $L_v = U(p, q; \mathbf{F})$; г) $v \neq 0$ и $h(v, v) = 0$; тогда $L_v \approx G_{p-1,q-1;\mathbf{F}}$. Во всех этих случаях характер, определяемый $v$, продолжается до унитарного характера $\chi_v$ на полупрямом произведении $N_{p,q;\mathbf{F}} \cdot L_v$, действующего по формуле $\chi_v(w, z, g) = e^{i \operatorname{Re} h(z, v)}$ ($w \in \operatorname{Im} \mathbf{F}$; $z, v \in \mathbf{F}^n$; $g \in L_v \subset U(p, q; \mathbf{F})$). Семейство же бесконечномерных неприводимых унитарных представлений $\pi_\lambda$ группы $N_{p,q;\mathbf{F}}$ ($\mathbf{F} \neq \mathbf{R}$) находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством ненулевых вещественных линейных функционалов $\lambda$ на $\operatorname{Im} \mathbf{F}$ (а именно, $\pi_\lambda(w, z) = e^{i\lambda(w)}\pi_\lambda(0, z)$ для $(w, z) \in N_{p,q;\mathbf{F}}$), и $U(p, q, \mathbf{F})$-стационарная подгруппа представления $\pi_\lambda$ совпадает с $U(p, q; \mathbf{F})$ (т. е. действие любого элемента $g \in U(p, q; \mathbf{F})$ переводит представление $\pi_\lambda$ в эквивалентное ему представление), причем представление $\pi_\lambda$ можно продолжить на $G_{p,q;\mathbf{F}}$ следующим образом.

Пусть $\mathbf{F} = \mathbf{C}$; пусть $\lambda(ir) = lr$ ($l, r \in \mathbf{R}$, $l \neq 0$). Пусть $L_\lambda \to N_{p,q;\mathbf{C}} / \operatorname{Im} \mathbf{C} = \mathbf{C}^n$ — комплексное векторное расслоение, определяемое $\lambda$: бесконечно дифференцируемые сечения $L_\lambda$ суть комплексные $C^\infty$-функции $\tilde{u}$ на $N_{p,q;\mathbf{C}}$, удовлетворяющие условию $\tilde{u}(w, z) = e^{-i\lambda(w)}\tilde{u}(0, z)$; они, очевидно, находятся во взаимно однозначном соответствии с комплексными $C^\infty$-функциями $u$ на $\mathbf{C}^n$ ($u(z) = \tilde{u}(0, z)$, $z \in \mathbf{C}^n$). Группа $N_{p,q;\mathbf{C}}$ действует на этих сечениях и функциях по обычной формуле $(\varphi_\lambda(w_0, z_0)u)(z) = e^{i\lambda(w_0 + \operatorname{Im} h(z_0, z))}u(z - z_0)$ $(z, z_0 \in \mathbf{C}^n,\ w_0 \in \operatorname{Im} \mathbf{C})$.

Опишем теперь структуру голоморфного векторного расслоения на $L_\lambda$. Положим $\nu(z) = e^{-(l/2)h(z, z)}$ ($z \in \mathbf{C}^n$) и положим

$$(\rho_\lambda(w_0, z_0)F)(z) = \nu(z - z_0)\nu(z)^{-1}e^{i\lambda(w_0 + \operatorname{Im} h(z_0, z))}F(z - z_0), \quad w_0 \in \operatorname{Im} \mathbf{C}, \quad z, z_0 \in \mathbf{C}^n, \tag{2}$$

для голоморфных функций $F$ на $\mathbf{C}^n$. Пусть голоморфная структура на $L_\lambda$ определяется как структура, в которой голоморфны сечения $\tilde{u}$: $N_{p,q;\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ вида $\tilde{u}(w, z) = e^{-i\lambda(w)}\nu(z)\mathbf{F}(z)$ ($w \in \operatorname{Im} \mathbf{C}$, $z \in \mathbf{C}^n$), где $F$ голоморфна.

Пусть $0 \leqslant r, s \leqslant n$; пусть $A^{r,s}(L_\lambda)$ — пространство $C^\infty(r, s)$-форм на $\mathbf{C}^n$ со значениями в $L_\lambda$. Введем эрмитову метрику $\langle \sum a_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J, \sum b_{UV} dz^U \wedge d\bar{z}^V \rangle = \nu^2 \sum a_{IJ}\bar{b}_{IJ}$ для $I = (i_1, \ldots, i_r)$, $J = (j_1, \ldots, j_s)$ и $dz^I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_r}$, $d\bar{z}^J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_s}$. Пусть $*$ и $\hat{*}$ — соответствующие операторы Ходжа-Кодаира, т. е. $A^{r,s}(L_\lambda) \xrightarrow{\tilde{*}} A^{n-r,n-s}(L_{-\lambda})$ (так как $L_{-\lambda} = L_\lambda^*$), $A^{n-r,n-s} L(_{-\lambda}) \xrightarrow{\tilde{*}} A^{r,s}(L_\lambda)$.

Пусть $\alpha, \beta \in A^{r,s}(L_\lambda)$; тогда $\alpha \wedge (*\beta)$ — обычная $(n, n)$-форма на $\mathbf{C}^n$. Введем предгильбертово пространство $A_2^{r,s}(L_\lambda)$, образованное такими $\alpha \in A^{r,s}(L_\lambda)$, что $\int\limits_{\mathbf{C}^n} \alpha \wedge (*\alpha)$ конечен. Пусть $L_2^{r,s}(L_\lambda)$ — пополнение предгильбертова пространства $A_2^{r,s}(L_\lambda)$. Пусть $\bar{\partial}$ — линейный оператор из $L_2^{r,s}(L_\lambda)$ в $L_2^{r,s+1}(L_\lambda)$, определяемый формулой $\bar{\partial}\left(\sum a_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J\right) = (-1)^r \sum \left(\partial a_{IJ}/\partial \bar{z}^k\right) dz^I \wedge d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^J$, где $\sum a_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J \in A_2^{r,s}(L_\lambda)$; тогда $\bar{\partial}$ — оператор с плотной областью определения и с формально сопряженным оператором $\bar\partial^* = -\tilde{*}\,\bar\partial *$. Пусть $\Box = (\bar\partial + \partial^*)^2 = \bar\partial\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$ — эллиптический оператор Кодаира-Ходжа, являющийся существенно самосопряженным на области определения $D$, образованной формами из $A^{r,s}(l_\lambda)$ с компактным носителем; пусть $\Box^*$ — его сопряженный оператор (совпадающий с замыканием оператора $\Box$ на $D$). Пусть $H_2^{r,s}(L_\lambda)$ — ядро оператора $\Box^*$ в $L_2^{r,s}(L_\lambda)$, и пусть $\sigma_\lambda^{r,s}$ — унитарное представление группы $\tilde{G}$ в $H_2^{r,s}(L_\lambda)$, определяемое действием группы $\tilde{G}$ на $A^{r,s}(L_\lambda)$ с помощью $\rho_\lambda$ (полученное действие на $A^{r,s}(L_\lambda)$ оказывается перестановочным с $*$ и $\tilde{*}$, поэтому определяет унитарное представление в $L_2^{r,s}(L_\lambda)$, которое в свою очередь перестановочно с $\bar\partial$ и $\bar\partial^*$ из-за голоморфности правой части (2) и потому оставляет $H_2^{r,s}(L_\lambda)$ инвариантным), пусть $r = 0$, и пусть $s = p$ при $l > 0$ и $s = q$ при $l < 0$; тогда $H_2^{r,s}(L_\lambda)$ нетривиально, а представление $\rho_\lambda$ неприводимо. Заметим, что ограничение представления $\rho_\lambda$ на центр группы $N_{p,q;\mathbf{C}}$ определяется характером $(w, 0) \to e^{i\lambda(w)}$ и потому $\rho_1$ эквивалентно представлению $\pi_\lambda$. Группа $U(p, q; \mathbf{C})$ действует на $\mathbf{C}^n = N_{p,q;\mathbf{C}} / \operatorname{Im}\mathbf{C}$ обычным образом; это действие продолжается до действия на $L_\lambda$, так как $L_\lambda$ можно рассматривать как $G_{p,q;\mathbf{C}}$-однородное векторное расслоение над $\mathbf{C}^n = G_{p,q;\mathbf{C}} / (\operatorname{Im}\mathbf{C}) \cdot U(p, q; \mathbf{C})$, связанное с отображением $(w, 0, g) \to e^{i\lambda(w)}$ ($w \in \operatorname{Im}\mathbf{C}$, $g \in U(p, q, \mathbf{C})$). Очевидно, что функция $\nu$ (и определяемая ею эрмитова метрика) инвариантна относительно $U(p, q; \mathbf{C})$ и относительно $G_{p,q;\mathbf{C}}$, поэтому действие группы $G_{p,q;\mathbf{C}}$ перестановочно с $*$ и $\tilde{*}$, а ограничение на $A_2^{r,s}(L_\lambda)$ — также с $\bar\partial$, что определяет неприводимое унитарное представление $\sigma_\lambda$ группы $G_{p,q;\mathbf{C}}$ в $H_2^{r,s}(L_\lambda)$, ограничение которого на $N_{p,q;\mathbf{C}}$ совпадает с $\rho_\lambda$, чем завершается построение продолжения представления $\pi_\lambda$ группы $N_{p,q;\mathbf{C}}$ на группу $G_{p,q;\mathbf{C}}$.

Пусть теперь $\mathbf{F} = \mathbf{H}$, и пусть $\lambda$ — ненулевой вещественный линейный функционал на $H$. Пусть $z_\lambda$ — ядро функционала $\lambda$ в $\operatorname{Im} H$. Выберем единицы $i$, $j$, $k$ так, чтобы $j, k \in Z_\lambda$; тогда группа $N_{p,q;\mathbf{H}} / Z_\lambda \cong N_{2p,2q;\mathbf{C}}$ допускает подъем представления, определяемого функционалом $\lambda$, на группу $U(2p, 2q; \mathbf{C})$, содержащую группу $U(p, q; \mathbf{H})$ как подгруппу, что позволяет построить представление группы $G_{p,q;\mathbf{H}} / Z_\lambda$, продолжающее данное представление группы $N_{p,q;\mathbf{H}} / Z_\lambda$, и, таким образом, представление $\sigma_\lambda$ группы $G_{p,q;\mathbf{H}}$, продолжающее представление $\pi_\lambda$ группы $N_{p,q;\mathbf{H}}$, соответствующее данному функционалу $\lambda$.

В связи с тем, что орбита точки $v_0 \in \mathbf{F}^n$, $v_0 \neq 0$, относительно группы $U(p, q; \mathbf{F})$ есть при $h(v_0, v_0) \neq 0$ множество всех точек $v \in \mathbf{F}^n$, для которых $h(v, v) = h(v_0, v_0)$, а при $h(v_0, v_0) = 0$ эта орбита есть множество всех ненулевых точек $v \in \mathbf{F}^n$, удовлетворяющих условию $h(v, v) = 0$, мы получаем следующее описание полного набора неприводимых унитарных представлений группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$.

Любое неприводимое унитарное представление группы $Q_{p,q;\mathbf{F}}$ эквивалентно одному из представлений перечисленных ниже серий а) — д).

а) Пусть $r>0$, $T$ — неприводимое унитарное представление группы $U(p-1,\ q;\ \mathbf{F})$; пусть $v=v_r\in\mathbf{F}^n$ — такой вектор, что $h(v,\ v)=r^2$; пусть группа $U(p-1,\ q;\ \mathbf{F})$ отождествлена со стационарной подгруппой $L_v$ вектора $v=v_r$, и пусть представление $T$ (и потому также представление $\chi_v\otimes T$) рассматривается как представление полупрямого произведения $N_{p,q;\mathbf{F}}\cdot L_v$; представления $S_{r,T}$ группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$, индуцированные представлениями группы $N_{p,q;\mathbf{F}}\cdot L_v$ вида $\chi_{v_r}\otimes T$ $\left(r\in\mathbf{R}^+,\ T\in U(p-1,\ q;\ \mathbf{F})^\wedge\right.$, а $\widehat{G}$ обозначает, как обычно, пространство классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы $G$), образуют так называемую *положительную серию* неприводимых унитарных представлений группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$. Представления этой серии (точнее, их классы эквивалентности) параметризуются, таким образом, точками произведения $\mathbf{R}^+\times U(p-1,\ q;\ \mathbf{F})^\wedge$.

б) Пусть $r<0$, $T\in U(p,\ q-1,\ \mathbf{F})^\wedge$, пусть $v=v_r\in\mathbf{F}^n$ — такой вектор, что $h(v,\ v)=-r^2$, и пусть группа $U(p,\ q-1,\ \mathbf{F})$ отождествлена со стационарной подгруппой $L_v$ вектора $v=v_r$. Пусть представление $T$ (и также представление $\chi_v\otimes T$) рассматривается как представление полупрямого произведения $N_{p,q;\mathbf{F}}\cdot L_v$; представление $S_{r,T}$ группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$, индуцированные представлениями группы $N_{p,q;\mathbf{F}}\cdot L_v$ вида $\chi_{v_r}\otimes T$ $\left(r\in\mathbf{R}^-,\ T\in U(p,\ q-1;\ \mathbf{F})^\wedge\right)$, образуют так называемую *отрицательную серию* неприводимых унитарных представлений группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$.

в) Неприводимые унитарные представления группы $C_{p,q;\mathbf{F}}$, тривиальные на $N_{p,q;\mathbf{F}}$, являются фактически неприводимыми унитарными представлениями группы $U(p,\ q;\ \mathbf{F})$ (и параметризуются, таким образом, точками множества $U(p,\ q;\ \mathbf{F})^\wedge$); эти представления образуют так называемую *нулевую серию* представлений группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$.

г) Пусть $T\in\widehat{G}_{p-1,q-1;\mathbf{F}}$, пусть $v\in\mathbf{F}^n$ — изотропный вектор (т. е. $h(v,\ v)=0$), и пусть группа $G_{p-1,q-1;\mathbf{F}}$ реализована как стационарная подгруппа $L_v$ вектора $v$. Пусть представление $T$ (и также представление $\chi_v\otimes T$) рассматривается как представление группы $N_{p,q;\mathbf{F}}\cdot L_v$; класс эквивалентности представления $S_T$ группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$, индуцированного представлением $\chi_v\otimes T$ группы $N_{p,q;\mathbf{F}}\cdot L_v$, не зависит от выбора изотропного ненулевого вектора $v\in\mathbf{F}^n$, т. е. $S_T$ определяется (с точностью до эквивалентности) представлением $T\in\widehat{G}_{p-1,q-1;\mathbf{F}}$. Семейство этих представлений $S_T$ группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$ (параметризуемое, таким образом, точками $T$ множества $\widehat{G}_{p-1,q-1;\mathbf{F}}{}^\wedge$) образует так называемую *изотропную серию* неприводимых унитарных представлений группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$.

д) Пусть $\lambda$ — ненулевой вещественный характер на $\operatorname{Im}\mathbf{F}$, $T$ — неприводимое унитарное представление группы $U(p,\ q;\ \mathbf{F})$, рассматриваемое как представление группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$; пусть $\sigma_\lambda$ — построенное выше продолжение неприводимого унитарного представления $\pi_\lambda$ группы $N_{p,q;\mathbf{F}}$ (ограничение которого на центр определяется характером $\exp(i\lambda)$) на всю группу $G_{p,q;\mathbf{F}}$. Представления вида $\sigma_\lambda \otimes T$ образуют так называемую *бесконечную серию* неприводимых унитарных представлений группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$ (представления этой серии нумеруются точками произведения $((\operatorname{Im}\mathbf{F})^*\setminus\{0\}) \times U(p,\ q;\ \mathbf{F})^{\wedge}$).

Отметим, что группа $G_{p,q;\mathbf{F}}$ является центральным (с центром $\operatorname{Im}\mathbf{F}$) расширением группы движений $U(p,\ q,\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^n$, неприводимые унитарные представления которой (как представления факторгруппы группы $G_{p,q;\mathbf{F}}$) исчерпываются сериями а) — г).

**1.2. Формулы Планшереля для групп $G_{p,q;\mathbf{F}}$ и $U(p,\ q;\ \mathbf{F})\,\mathbf{F}\cdot{}^{p+q}$.**

а) Пусть $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, так что $G_{p,q;\mathbf{F}} = U(p,\ q;\ \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^{p+q} = O(p,\ q) \cdot \mathbf{R}^{p+q}$. Тогда в формуле Планшереля участвуют только представления положительной и отрицательной серий (см. а), б) п. 1.1) и для финитной бесконечно дифференцируемой функции $f$ на $G = O(p,\ q) \cdot \mathbf{R}^{p+q}$ имеет место формула

$$\int\limits_G |f(g)|^2 dg = c_1 \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{T \in O(p-1,q)^{\wedge}} \operatorname{tr}(S_{r,T}(f^* * f))\, d\mu(T) \right\} r^{p+q-1} dr + {}$$
$$+ c_2 \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{T \in O(p,q-1)^{\wedge}} \operatorname{tr}(S_{-r,T}(f^* * f))\, d\nu(T) \right\} r^{p+q-1} dr, \qquad (1)$$

являющаяся аналогом формулы Планшереля для группы $G$, где $c_1$ и $c_2$ — положительные постоянные, $\mu$ — мера Планшереля для группы $O(p-1,\ q)$, $\nu$ — мера Планшереля для группы $O(p,\ q-1)$, а $dg$ — мера Хаара на $G$.

б) Пусть $\mathbf{F} = \mathbf{C}$. Тогда в формуле Планшереля для группы $U(p,\ q) \cdot \mathbf{C}^{p+q}$ участвуют только представления положительной и отрицательной серий (см. а), б) п. 1.1) и для финитной бесконечно дифференцируемой функции $f$ на $U(p,\ q) \cdot \mathbf{C}^{p+q}$ имеет место формула

$$\int\limits_{U(p,q)\cdot \mathbf{C}^{p+q}} |f(g)|^2 dg = c_1 \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{T \in U(p-1,q)^{\wedge}} \operatorname{tr}(S_{r,T}(f^* * f))\, d\mu(T) \right\} \times$$
$$\times r^{2(p+q)-1} dr + c_2 \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{T \in U(p,q-1)^{\wedge}} \operatorname{tr}(S_{-r,T}(f^* * f))\, d\nu(T) \right\} r^{2(p+q)-1} dr, \qquad (2)$$

где $c_1$ и $c_2$ — положительные постоянные, $\mu$ — мера Планшереля для группы $U(p-1,\ q)$, $\nu$ — мера Планшереля для группы $U(p,\ q-1)$, а $dp$ — мера Хаара на $U(p,\ q) \cdot \mathbf{C}^{p+q}$.

В формуле Планшереля для группы $G_{p,q;\mathbf{C}}$ участвуют только представления бесконечной серии (см. д) п. 1.1), и для финитной бесконечно дифференцируемой функции $f$ на $G_{p,q;\mathbf{C}}$ имеет место формула

$$\int\limits_{G_{p,q;\mathbf{C}}} |f(g)|^2 dg =$$

$$= c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int\limits_{T \in U(p,q)^\wedge} \operatorname{tr}((\sigma_\lambda \otimes T)(f^* * f))\, d\mu(T) \right\} |l|^{p+q} dl, \qquad (3)$$

где $c$ — положительная постоянная, $\mu$ — мера Планшереля для группы $U(p, q)$, $dg$ — мера Хаара на $G_{p,q;\mathbf{C}}$, а вещественный линейный функционал $\lambda$ на $\operatorname{Im}\mathbf{C} = i\mathbf{R}$ связан с числом $l \in \mathbf{R}$ формулой $\lambda(ir) = lr$ $(r, l \in \mathbf{R}, l \neq 0)$.

в) Пусть $\mathbf{F} = \mathbf{H}$. В формуле Планшереля для группы $Sp(p, q) \cdot \mathbf{H}^{p+q}$ участвуют только представления положительной и отрицательной серий, и для финитной бесконечно дифференцируемой функции $f$ на $Sp(p, q) \cdot \mathbf{H}^{p+q}$ имеет место формула

$$\int\limits_{Sp(p,q)\cdot \mathbf{H}^{p+q}} |f(g)|^2 dg =$$

$$= c_1 \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{T \in Sp(p-1,q)^\wedge} \operatorname{tr}(S_{r,T}(f^* * f))\, d\mu(T) \right\} r^{4(p+q)-1} dr +$$

$$+ c_2 \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{T \in Sp(p,q-1)^\wedge} \operatorname{tr}(S_{-r,T}(f^* * f))\, d\nu(T) \right\} r^{4(p+q)-1} dr, \qquad (4)$$

где $c_1$ и $c_2$ — положительные постоянные, $\mu$ — мера Планшереля для группы $Sp(p-1, q)$, $\nu$ — мера Планшереля для группы $Sp(p, q-1)$, а $dg$ — мера Хаара на $Sp(p, q) \cdot \mathbf{H}^{p+q}$.

В формуле Планшереля для группы $G_{p,q;\mathbf{H}}$ участвуют только представления бесконечной серии (см. д) п. 1.1), и для финитной бесконечно дифференцируемой функции $f$ на $G_{p,q;\mathbf{H}}$ имеет место формула

$$\int\limits_{G_{p,q;\mathbf{H}}} |f(g)|^2 dg =$$

$$= c \int\limits_{\mathbf{R}^3} \left\{ \int\limits_{T \in Sp(p,q)^\wedge} \operatorname{tr}((\sigma_\lambda \otimes T)(f^* * f))\, d\mu(T) \right\} \|l\|^{2(p+q)} dl, \qquad (5)$$

где $c$ — положительная постоянная, $\mu$ — мера Планшереля для группы $Sp(p, q)$, $dg$ — мера Хаара на $G_{p,q;\mathbf{H}}$, а вещественный линейный функционал $\lambda$ на $\operatorname{Im}\mathbf{H}$ определяется формулой $\lambda(ai + bj + lk) = l_1 a + l_2 b + l_3 c$, $a, b, c, l_1, l_2, l_3 \in \mathbf{R}$, причем $l = (l_1, l_2, l_3)$, $\|l\|^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$.

Литература: [101], [102], [125], [149], [170], [176], [181], [182], [189], [206], [213], [280], [347], [374], [444], [482], [508], [509], [561], [608], [609].

## § 2. Представления группы $GL(n, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^n$

**2.1. Неприводимые унитарные представления группы $GL(n, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^n$.** Пусть $\mathbf{F}$ — одно из тел $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{H}$, и пусть $G_n$ — полупрямое произведение $GL(n, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^n$ (реализованное, например, как матричная группа невырожденных матриц $(n+1)$-го порядка с элементами из $\mathbf{F}$, нижняя строка которых имеет вид $(n+1)$-строки $(0, \ldots, 0, 1)$). Пусть $\chi$ — неединичный характер аддитивной группы поля $\mathbf{F}$. Отождествим группу характеров $\widehat{\mathbf{F}^n}$ векторного пространства $\mathbf{F}^n$ с пространством $\mathbf{F}^n$, полагая $\chi_a(v) = \chi(va)$ для всех $v$, $a \in \mathbf{F}^n$. Орбиты группы $GL(n, \mathbf{F})$ в $\widehat{\mathbf{F}^n}$ исчерпываются точкой $\{0\}$ и ее дополнением $\widehat{\mathbf{F}^n} \backslash \{0\}$, причем стационарная подгруппа точки $\chi_{e_n} \in \widehat{\mathbf{F}^n} \backslash \{0\}$, где $e_n$ — $n$-строка $(0, \ldots, 0, 1)$, естественно отождествляется с $G_{n-1} = GL(n-1, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^{n-1}$. В связи с этим неприводимые унитарные представления группы $G_n$ могут быть описаны индуктивно, и пространство $\widehat{G}_n$ есть объединение множества представлений группы $G_n$, тривиальных на $\mathbf{F}^n$ (эти представления фактически являются представлениями факторгруппы $G_n/\mathbf{F}^n \approx GL(n, \mathbf{F})$ и естественно параметризуются точками пространства $GL(n, \mathbf{F})^\wedge$), и множества представлений группы $G_n$, индуцированных представлениями группы $G_{n-1} \cdot \mathbf{F}^n$ (полупрямого произведения, где $\mathbf{F}^n$ — нормальный делитель), определяемыми формулой вида $\pi_T(g, v) = \chi_{e_n}(v)\, T(g)$, где $g \in G_{n-1}$, $v \in \mathbf{F}^n$, $T \in \widehat{G}_{n-1}$ (которые, таким образом, параметризуются точками $T$ пространства $\widehat{G}_{n-1}$). Поэтому $\widehat{G}_n$ можно представить как объединение пространств $GL(k, \mathbf{F})^\wedge$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

**2.2. Структура регулярного представления для $GL(n, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^n$.** Так как регулярное представление группы $G = GL(n, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^n$ индуцировано регулярным представлением нормального делителя $\mathbf{F}^n$, то в формулу Планшереля для группы $G$ входят только представления группы $G$, нетривиальные на $\mathbf{F}^n$, т. е. представления, индуцированные представлениями вида $\pi_T$ $(T \in \widehat{G}_{n-1})$ (см. п. 2.1). Продолжая это рассуждение, получаем (индукцией по размерности), что регулярное представление группы $G$ кратно некоторому неприводимому представлению $T_0$ (соответствующему в описании п. 2.1 единственной точке множества $GL(0, \mathbf{F})^\wedge$). Это представление $T_0$ эквивалентно представлению группы $G$, индуцированному характером $\chi_0$ группы $N_\mathbf{F}$ верхних треугольных матриц $(n+1)$-го порядка (с элементами из поля $\mathbf{F}$) с единицами на главной диагонали, где характер $\chi_0$ определяется формулой $\chi_0(t) = \chi\left(\sum_{j=1}^{n} t_{j,j+1}\right)$ для $t = (t_{jk}) \in N_\mathbf{F}$.

Дополнительная литература к гл. 10: [15], [18], [52], [72], [74], [75], [79], [83], [85], [91], [96], [97], [98], [104], [118], [120], [121], [135], [140], [155], [160], [165], [177], [178], [187], [188], [201], [202], [216], [218], [222], [248], [249], [250], [252], [257], [264], [271], [283], [291], [295], [316], [324], [330], [332], [339], [346], [352], [353], [357], [368], [373], [377], [379], [380],

[383], [386], [388], [397], [416], [429], [430], [432], [433], [441], [442], [451], [452], [462], [463], [474], [481], [486], [488], [489], [490], [495], [501], [502], [505], [513], [514], [521], [522], [538], [556], [558], [563], [568], [569], [573], [582], [585], [590], [594], [595], [596], [600], [602], [603], [611].

## ЛИТЕРАТУРА


37. Адамс Дж. Лекции по группам Ли. М.: Наука, 1979.
38. Арифметические группы и автоморфные функции. М.: Мир, 1969.
39. Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н. Описание некоторого класса проекционных операторов для полупростых комплексных алгебр Ли.— Матем. заметки, 1979, **26**, № 1, с. 15—25.
40. Аграновский М. Л. Инвариантные алгебры функций на однородных пространствах некомпактных полупростых групп Ли.— Матем. заметки, 1980, 28, № 5, с. 645—653.
41. Андо Сенч. Аналог теоремы Пэли — Винера для некоторой матричной группы.— J. Math. Kyoto Univ., 1976, **16**, p. 375—393.
42. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения.— М.: Мир, 1980. Т. 1, 2.
43. Березин А. В., Богуш А. А. и др. Матричные элементы буста унитарных представлений группы Лоренца в базисе $SO(3,1) \supset SO(2,1) \supset SO(2)$.— ДАН СССР, 1979, **244**, № 4, с. 864—867.
44. Березин А. В., Богуш А. А. и др. Матричные элементы основной серии унитарных представлений группы де Ситтера в базисе $SO(4,1) \supset E(3) \supset T_3$.— ДАН СССР, 1980, **253**, № 4, с. 857—859.
45. Березин Ф. А., Переломов А. М. Теоретико-групповая интерпретация уравнений Кортевега — де Фриза.— Функц. анализ, 1980, **14**, № 2, с. 50—51.
46. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. Структура представлений, порожденных векторами старшего веса.— Функц. анализ, 1971, **5**, № 1, с. 1—9.
47. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. Модели представлений группы Ли.— В кн.: Тр. Семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 2. М.: МГУ, 1976, с. 3—21.
48. Быстренко А. В. Метрический тензор и оператор Лапласа на группе $SO(4)$ в переменных — углах Эйлера.— Киев: ИТФ, 1980. Препринт 80—132Р.
49. Варфоломеев В. В. Структура некоторых групповых алгебр.— Функц. анализ, 1981, **15**, № 4, с. 71—72.
50. Вахутинский И. Я. Унитарные неприводимые представления группы $GL(3, \mathbf{R})$ вещественных матриц третьего порядка.— Матем. сб., 1968, **75**, № 2, с. 303—320.
51. Венков А. Б. О формуле следа Сельберга для $SL(3, \mathbf{Z})$.— ДАН СССР, 1976, **228**, № 2, с. 273—276.
52. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп.— М.: Наука, 1965.
53. Виленкин Н. Я. Функция Уиттекера и представления группы треугольных матриц третьего порядка.— В кн.: Уч. зап. Моск. гос. заочн. пед. ин-та. Вып. 30. М.: МГЗПИ, 1971, с. 225—233.
54. Виленкин Н. Я., Худякова Г. И., Шапиро Р. Л. Обобщенные многочлены Якоби и их предельные значения.— В кн.: Функц. анализ. Вып. 9. Ульяновск: УГПИ, 1977, с. 29—39.
55. Гаврилик А. М., Климык А. У. Матричные элементы неприводимых представлений группы $U(n, 1)$.— ДАН УССР, 1978, сер. А, № 6, с. 486—490.
56. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г. Комплексные многообразия, остовы которых — полупростые вещественные группы Ли, и аналитические дискретные серии представлений.— Функц. анализ, 1977, **11**, № 4, с. 19—27.

57. Гельфанд И. М., Граев М. И. Унитарные представления вещественной унимодулярной группы (основные невырожденные серии).— Изв. АН СССР, сер. матем. 1953, 17, с. 189—248.
58. Гельфанд И. М., Граев М. И. Следы неприводимых унитарных представлений вещественной унимодулярной группы.— ДАН СССР, 1955, 100, № 6, с. 1037—1041.
59. Гельфанд И. М., Граев М. И. Применение метода орисфер к спектральному анализу функций в вещественном и мнимом пространствах Лобачевского.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1962, 11, с. 243—308.
60. Гельфанд И. М., Граев М И. Конечномерные неприводимые представления унитарной и полной линейной группы и связанные с ними специальные функции.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1965, 29, № 6, 1329—1356.
61. Гельфанд И. М., Граев М. И. Квадратные корни из квазирегулярного представления группы $SL(2, K)$.— Функц. анализ, 1975, 9, № 2, с. 64—66.
62. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. (Обобщенные функции. Вып. 5).— М.: Физматгиз, 1962.
63. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пономарев В. А. Модули Хариш-Чандры над группой Лоренца.— ДАН СССР, 1970, 194, № 5, с. 1002—1005.
64. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции. (Обобщенные функции. Вып. 6).— М.: Наука, 1966.
65. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца.— М.: Физматгиз, 1958.
66. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления группы линейных преобразований прямой.— ДАН СССР, 1947, 55, № 7, с. 571—574.
67. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления классических групп. (Труды МИАН им. Стеклова, т. 36).— М.: МИАН, 1950.
68. Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И. Автоморфные функция и теория представлений.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1963, 12, с. 389—412.
69. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. Конечномерные представления группы унимодулярных матриц.— ДАН СССР, 1950, 71, № 5, с. 825—828.
70. Гельфанд И. М., Цетлин М. И. Конечномерные представления группы ортогональных матриц.— ДАН СССР, 1950, 71, № 6, с. 1017.
71. Гельфанд С. И. Представление Вейля алгебры Ли типа $G_2$ и связанные с ним представления $SL_3$.— Функц. анализ, 1980, 14, № 1, с. 51—52.
72. Гиндикин С. Г. Унитарные представления групп автоморфизмов римановых симметрических пространств нулевой кривизны.— Функц. анализ и его прил., 1967, 1, № 1, с. 51—52.
73. Гиндикин С. Г. Инвариантные обобщенные функции в однородных областях.— Функц. анализ и его прил., 1975, 9, № 1, с. 56—58.
74. Гинзбург В. А. Метод орбит и теория возмущений.— ДАН СССР, 1979, 249, № 3, с. 525—528.
75. Гинзбург В. А. Метод орбит в теории представлений групп Ли.— Функц. анализ и его прил., 1981, 15, № 1, с. 23—37.
76. Голод П. И. О неприводимости элементарных представлений группы $SU(2,2)$.— Укр. матем. ж., 1977, 29, № 4, с. 513—519.
77. Граев М. И. Унитарные представления вещественных простых групп Ли.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1958, 7, с. 335—389.
78. Граев М. И., Карпелевич Ф. И., Кириллов А. А. Теория представлений групп Ли.— В кн.: Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, 1962, т. II, с. 275—281.
79. Демичев А. П., Нелипа Н. Ф., Чайчиан М. Инвариантные операторы неоднородных групп.— Вестник МГУ. Сер. физ., астрон., 1981, 21, с. 3—10, 23—31.

80. Диксмье Ж. Неприводимые представления нильпотентных алгебр Ли.— Математика, 1973, **17**, № 3, с. 3—35.
81. До Нгок Зьеп. О структуре групповой $C^*$-алгебры группы аффинных преобразований прямой.— Функц. анализ и его прил., 1975, **9**, № 1, с. 65—66.
82. Дюфло М. Характеры разрешимых алгебр Ли.— Математика, 1971, **15**, № 2, с. 12—13.
83. Дюфло М. Конструкция примитивных идеалов в обертывающей алгебре.— Математика, 1973, **17**, № 3, с. 36—51.
84. Жаке Э., Ленглендс Р. Автоморфные формы на $GL(2)$.— М.: Мир, 1973.
85. Желобенко Д. П. К теории линейных представлений комплексных и вещественных групп Ли.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1963, **12**, с. 53—98.
86. Желобенко Д. П. Циклические модули для полупростой комплексной группы Ли.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1973, **37**, № 3, с. 502—515.
87. Желобенко Д. П. Операторы дискретной симметрии для редуктивных групп Ли.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, **40**, № 5, с. 1055—1083.
88. Желобенко Д. П. Описание квазипростых неприводимых представлений групп $U(n, 1)$, $Spin(n, 1)$.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1977, **41**, № 1, с. 34—53.
89. Желобенко Д. П. Гармонический анализ на редуктивных группах Ли.— В кн.: Итоги науки и техники. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1979, с. 207—269.
90. Зайцев А. А. Условие нетривиальности гильбертова пространства голоморфно индуцированного представления разрешимой группы Ли.— Матем. сб., 1980, **112**, № 4, с. 568—587.
91. Зайцев А. А. Голоморфно индуцированные представления группы Ли с абелевым нормальным делителем.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1979, **40**, с. 47—82.
92. Исмагилов Р. С. О линейных представлениях группы $SL(2, \mathbf{R})$.— Матем. сб., 1967, **74**, № 4, с. 496—515.
93. Исмагилов Р. С. Об одном классе линейных представлений комплексных полупростых групп Ли.— Функц. анализ и его прил., 1967, **1**, № 4, с. 69—74. Исправление.— Там же, 1968, **2**, № 3, с. 90.
94. Кириллов А. А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли.— Успехи мат. наук, 1962, **17**, № 4, с. 57—110.
95. Кириллов А. А. О мере Планшареля для нильпотентных групп Ли.— Функц. анализ и его прил., 1967, **1**, № 4, с. 84—85.
96. Кириллов А. А. Метод орбит в теории унитарных представлений групп Ли.— Функц. анализ и его прил., 1968, **2**, № 1, с. 96—98.
97. Кириллов А. А. Характеры унитарных представлений групп Ли.— Функц. анализ и его прил., I, 1968, **2**, № 2, с. 40—55; II, 1969, **3**, № 1, с. 36—47.
98. Кириллов А. А. Конструкции унитарных неприводимых представлений групп Ли.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1970, № 2, с. 41—51.
99. Киссин Э. В. Разложение тензорного произведения неприводимых максимально вырожденных представлений группы комплексных матриц $n$-порядка с определителем 1.— ДАН СССР, 1970, **190**, № 4, с. 763—766.
100. Киссин Э. В. О разложении некоторых тензорных произведений представлений основных на представления дополнительных серий группы $SL(n, \mathbf{C})$ на неприводимые компоненты.— Функц. анализ и его прил., 1974, **8**, № 2, с. 81—82.
101. Клесова Л. М. Тензорное произведение двух неприводимых унитарных представлений полупрямого произведения $MO(n, 1) = SO(n, 1) \cdot \mathbf{R}^{n+1}$.— В кн.: Функц. анализ. Вып. 9. Ульяновск: УГПИ, 1977, с. 61—70.
102. Клесова Л. М. Тензорное произведение двух максимально вырожденных представлений группы Пуанкаре $P(n, 1)$, соответствующих однополостному гиперболоиду.— В кн.: Функц. анализ. Вып. 10. Ульяновск: УГПИ, 1978, с. 71—81.

103. Климык А. У. О представлениях со старшим вектором полупростых алгебр Ли. Киев: ИТФ, 1967. Препринт 68—2.
104. Климык А. У. Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп.— Киев: Наукова думка, 1979.
105. Климык А. У. Матричные элементы и операторы Казимира представлений дискретной серии группы $U(p, q)$. Киев: ИТФ, 1979. Препринт 79—9Р.
106. Конопельченко Б. Г., Румер Ю. Б. Некомпактная алгебра $SO(2, 1)$ и классификация потенциалов в уравнении Шредингера. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1974. Препринт 74—24.
107. Конюшихина Т. Н. Дополнительная серия представлений группы матриц второго порядка над телом кватернионов.— В кн.: Функц. анализ. Вып. 9. Ульяновск: УГПИ, 1977, с. 93—101.
108. Конюшихина Т. Н. Описание представлений основной серии унимодулярной группы матриц $n$-го порядка над телом кватернионов.— В кн.: Функц. анализ. Вып. 11. Ульяновск: УГПИ, 1978, с. 81—91.
109. Конюшихина Т. Н. Представления группы кватернионных матриц второго порядка, связанные с кватернионной плоскостью и конусом.— Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу и их прил. к геометрии, мех. и физ. МГУ, 1981, **20**, с. 108—118.
110. Костант Б. Существование и неприводимость некоторых серий представлений.— Математика, 1970, **14**, № 2, с. 102—116.
111. Костант Б., Раллис С. Представления и орбиты, связанные с симметрическими пространствами.— Математика, 1970, **14**, № 1, 137—144.
112. Лезнов А. Н., Савельев М. В. Об одной параметризации компактных групп.— Функц. анализ и его прил., 1974, **8**, № 4, с. 87—88.
113. Лезнов А. Н., Савельев М. В. О базисах неприводимых представлений полупростых групп Ли при неканонических вложениях, I. Серпухов: ОТФ, 1976. Препринт 76—101.
114. Лезнов А. Н., Савельев М. В. Об одном базисе полупростых алгебр Ли. Серпухов: ОТФ, 1978. Препринт 78—86.
115. Ленг С. $SL(2, \mathbf{R})$.— М.: Мир, 1977.
116. Ленглендс Р. Эйлеровы произведения.— Математика, 1971, **15**, № 1, с. 14—43.
117. Литвинов Г. Л. О вполне неприводимых представлениях комплексных и вещественных нильпотентных групп Ли.— Функц. анализ и его прил., 1969, **3**, № 4, с. 87—88.
118. Литвинов Г. Л. Представления групп в локально выпуклых пространствах и топологические групповые алгебры.— Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу и их прил. к геометрии, мех. и физ. МГУ, 1972, **16**, с. 267—349.
119. Луцюк А. В. Аналог теоремы Пэли — Винера для групп $U(n, 1)$, $SO_0(n, 1)$.— ДАН СССР, 1981, **257**, № 3, с. 534—538.
120. Маргулис Г. А. Арифметические свойства дискретных подгрупп.— Успехи мат. наук, 1974, **29**, № 1, с. 49—98.
121. Маргулис Г. А. Конечность факторгрупп дискретных подгрупп.— Функц. анализ и его прил., 1979, **13**, № 3, с. 28—39.
122. Марковски Б. Разложение лестничной серии представлений группы $U(2, 2)$ по представлениям группы $SL(2, \mathbf{C})$.— Изв. Физ. ин-т с АНЕБ Бълг. АН, 1971, **20**, с. 81—86.
123. Молчанов В. Ф. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом.— Матем. сб., 1970, **81**, № 3, с. 358—375.
124. Молчанов В. Ф. Сужение представлений дополнительной серии псевдоортогональной группы на псевдоортогональную группу меньшей размерности.— ДАН СССР, 1977, **237**, № 4, с. 782—785.
125. Молчанов В. Ф. Элементарные представления группы Лагерра.— Мат. заметки, 1978, **23**, № 1, с. 31—39.
126. Молчанов В. Ф. Формула кратности веса для некоторых представлений полной линейной группы.— В кн.: Функц. анализ. Вып. 10. Ульяновск: УГПИ, 1978, с. 114—117.

127. Молчанов В. Ф. Тензорные произведения унитарных представлений трехмерной группы Лоренца.— Известия АН СССР. Сер. матем., 1979, 43, № 4, с. 860—891.
128. Молчанов В. Ф. Квантование на мнимой плоскости Лобачевского.— Функц. анализ и его прил., 1980, 14, № 1, с. 73—74.
129. Мурнаган Ф. Теория представлений групп.— М.: ИЛ, 1950.
130. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Об одной задаче И. М. Гельфанда.— Функц. анализ и его прил., 1973, 7, № 4, с. 54—69.
131. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца.— М.: Физматгиз, 1958.
132. Наймарк М. А. Разложение тензорного произведения неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления.— Тр. Моск. матем. о-ва, I, 1959, 8, с. 121—153; II, 1960, 9, с. 237—282; III, 1961, 10, с. 181—216.
133. Наймарк М. А. Об унитарных представлениях группы Лоренца в пространстве $\Pi_k$.— ДАН СССР, 1963, 152, № 5, с. 1064—1067.
134. Наймарк М. А. О разложении унитарного представления комплексной полупростой группы Ли на ее неприводимые представления.— Studia Math. (PRL), 1968, 31, p. 383—398.
135. Наймарк М. А., Исмагилов Р. С. Представления групп и алгебр в пространствах с индефинитной метрикой.— В кн.: Матем. анализ 1968 (Итоги науки). М.: ВИНИТИ, 1969, с. 73—105.
136. Нарасимхан М. С., Окамото К. Аналог теоремы Бореля — Вейля — Ботта для симметрических пространств некомпактного типа.— Математика, 1971, т. 15, № 3, с. 35—59.
137. Николов А. В. Дискретная серия унитарных представлений алгебры Ли группы $O(p, q)$.— Функц. анализ и его прил., 1968, 2, № 1, с. 99—100.
138. Николов А. В. Об одной вырожденной серии унитарных представлений алгебры Ли группы $O(p, q)$.— Функц. анализ и его прил., 1969, 3, № 4, с. 91—92.
139. Николов А. В. О полном наборе коммутирующих операторов для лестничных представлений алгебры Ли группы $U(6, 6)$.— Функц. анализ и его прил., 1971, 5, № 2, с. 86—88.
140. Новодворский М. Е. О неразложимых конечномерных представлениях алгебр Ли.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1966, № 6, с. 52—55.
141. Новодворский М. Е. О некоторых группах движений некомпактных неособых симметрических пространств ранга 1.— Матем. сб., 1968, 75, № 2, с. 235—240.
142. Ольшанский Г. И. Описание унитарных представлений со старшим весом для групп $U(p, q)^{\sim}$.— Функц. анализ и его прил., 1980, 14, № 3, с. 32—44.
143. Ольшанский Г. И. Инвариантные конусы в алгебрах Ли, полугруппы Ли и голоморфная дискретная серия.— Функц. анализ и его прил., 1981, т. 15, № 4, с. 53—66.
144. Панов А. Н. Структура групповой $C^*$-алгебры евклидовой группы движений.— Вестник МГУ. Сер. мат., мех., 1978, № 4, с. 46—49.
145. Петросян В. С. О неунитарных представлениях группы треугольных матриц третьего порядка.— Вестник МГУ. Сер. мат., мех., 1971, № 1, с. 16—22.
146. Попов В. Л. О классификации представлений, исключительных в смысле Игузы.— Функц. анализ и его прил., 9, № 4, с. 83—84.
147. Попов В. С. Инвариантные операторы для классических групп.— Теор. мат. физ., 1977, 32, № 3, с. 344—347.
148. Рашевский П. К. Биинвариантные пространства функций на $SL(2, \mathbf{R})$.— Функц. анализ и его прил., 1977, 11, № 3, с. 90—91.
149. Розенблюм А. В. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений класса 1 группы $M(n)$ движений $n$-мерного евклидова пространства.— Доклады АН УССР, 1975, 19, № 4, с. 297—300.
150. Розенблюм А. В. Дифференциальные уравнения для матричных элементов неприводимых унитарных представлений групп вращений

$n$-мерных евклидовых и псевдоевклидовых пространств.— Успехи мат. наук, 1976, **31**, № 4, 235—236.

151. Ромм Б. Д. Разложение на неприводимые представления тензорного произведения двух неприводимых представлений вещественной унимодулярной группы второго порядка (случай двух дискретных серий).— Известия АН СССР. Сер. матем., 1964, **28**, № 4, с. 855—866.
152. Ромм Б. Д. Аналог формулы Планшереля для вещественной унимодулярной группы третьего порядка.— ДАН СССР, 1965, **160**, № 6, с. 1269.
153. Ромм Б. Д. Аналог формулы Планшереля для вещественной унимодулярной группы $n$-го порядка.— Известия АН СССР. Сер. мат., 1965, **29**, № 5, с. 1147—1202. Замечание.— Там же, 1966, **30**, № 6, с. 1420.
154. Ромм Б. Д. Сужение представления дополнительной серии комплексной унимодулярной группы второго порядка на вещественную подгруппу.— ДАН СССР, 1966, **168**, № 5, с. 1015—1018.
155. Сельберг А. Недавнее развитие теории групп движений симметрических пространств.— Математика, 1972, **16**, № 4, с. 74—91.
156. Смирнов Ю. Ф., Шустов А. П. Проекционные операторы для простых групп Ли и их приложения. Киев: ИТФ, 1978. Препринт 78—130Р.
157. Султанов Ш. Ш. О тензорных произведениях представлений группы $SL(2, \mathbf{R})$.— Функц. анализ и его прил., 1976, **10**, № 2, с. 90—92.
158. Султанов Ш. Ш. О тензорных произведениях представлений группы $SL(2, \mathbf{C})$.— Функц. анализ и его прил., 1977, **11**, № 4, с. 92—93.
159. Такахаси Р. Дискретная серия для групп Лоренца $SO_0(2n, 1)$.— Математика, 1973, **17**, № 4, с. 25—33.
160. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц.— Киев: Наукова думка, 1967.
161. Фомин А. И. О приводимости элементарных представлений групп $SL(n, \mathbf{R})$ и $GL(n, \mathbf{R})$.— Функц. анализ и его прил., 1975, **9**, № 2, с. 95—96.
162. Фомин А. И. Неприводимые квазипростые представления группы $SL(3, \mathbf{R})$.— Функц. анализ и его прил., 1975, **9**, № 3, с. 67—74.
163. Фомин А. И. О характерах неприводимых представлений вещественных линейных полупростых групп Ли.— Функц. анализ и его прил., 1976, **10**, № 3, с. 95—96.
164. Фомин А. И., Шаповалов Н. Н. Об одном свойстве характеров неприводимых представлений вещественных полупростых групп Ли.— Функц. анализ и его прил., 1974, **8**, № 3, с. 87—88.
165. Хаджиев Дж. Некоторые вопросы теории векторных инвариантов.— Матем. сб., 1967, **72**, № 3, с. 420—435.
166. Хелгасон С. Сферические функции, сферические представления и соответствующие теоремы для сферического преобразования Фурье.— Математика, 1973, **17**, № 4, с. 9—14.
167. Хорошкин С. М. О категории модулей Хариш — Чандры группы $SU(n, 1)$.— Функц. анализ и его прил., 1980, **14**, № 2, с. 85—86.
168. Хорошкин С. М. Неразложимые представления групп Лоренца.— Функц. анализ и его прил., 1981, **15**, № 2, с. 50—60.
169. Христов Х., Арнаудова Я. и др. О матричных элементах представлений группы Лоренца.— Изв. Физ. ин-та с АНЕБ Бълг. АН, 1971, **20**, с. 37—76.
170. Шапиро Р. Л. Представления класса I группы движений $n$-мерного комплексного пространства.— Уч. зап. Моск. гос. заочн. пед. ин-та, 1971, **30**, с. 247—264.
171. Штерн А. И. О вполне неприводимых представлениях вещественной унимодулярной группы второго порядка.— ДАН СССР, 1964, **154**, № 4, с. 798—801.
172. Штерн А. И. Вполне неприводимые представления $SU(2, 1)$ и их следы.— Функц. анализ и его прил., 1968, **2**, № 4, с. 94—95.
173. Штерн А. И. Ограничения и тензорные произведения некоторых неприводимых унитарных представлений псевдоунитарной группы матриц третьего порядка.— УМН, 1981, **36**, № 5, с. 207—208.

174. Щепочкина И. М. Метод орбит в задачах ограничения и индуцирования для нормальной подгруппы разрешимой группы Ли.— Доклады Бълг. АН, 1980, **33**, № 8, с. 1039—1042.
175. Эль-Сайед М. А. Разложение тензорных произведений некоторых представлений классических групп.— Функц. анализ и его прил., 1979, **13**, № 1, с. 90—91.
176. Юрик И. И. Редукция унитарных представлений алгебры Ли неоднородной группы де Ситтера.— Укр. матем. ж., 1975, **27**, № 6, с. 851—855.
177. Aarnes J. F. Frobenius reciprocity of differentiable representations.— Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**, № 2, p. 337—340.
178. Agrawala V. Wigner — Eckart theorem for an arbitrary group of Lie algebra.— J. Math. Phys., 1980, **21**, № 7, p. 1562—1565.
179. Aguila F. del. Classification of three — particle states according to an orthonormal $SU(3) \supset SO(3)$ basis.— J. Math. Phys., 1980, **21**, № 9, p. 2327—2334.
180. Alcaras C. J. A., Biedenharn L. C. On the coupling of self — conjugate systems with $\overline{SL(3, R)}$ symmetry.— J. Math. Phys., 1979, **20**, № 8, p. 1615—1621.
181. Ali S. T. On some representations of the Poincaré group on phase space.— J. Math. Phys.. 1979, **20**, p. 1385—1391; 1980, **21**, p. 818—829.
182. Angelopoulos E. Sur certaines types de représentations indécomposables du groupe de Poincaré.— C. r. Acad. sci., 1975, **281**, p. A665 — A668.
183. Angelopoulos E. Sur les représentations locales de $so$ (3, 1).— C. r. Acad. sci., 1977, **285**, p. A493 — A495.
184. Angelopoulos E. The linear representations of $\overline{SL}(3, \mathbf{R})$ on a Banach space.— J. Math. Phys., 1978, **19**, № 10, p. 2108—2120.
185. Angelopoulos E. Sur les représentations unitaires irréductibles de $SO_0(p, 2)$.— C. r. Acad. sci., 1981, sér. 1, **292**, № 9, p. 469—471.
186. Angelopoulos E., Flato M. On unitary implementability of conformal transformations.— Lett. Math. Phys., 1978, **2**, № 5, p. 405—412.
187. Anh N. H. Classification des groupes de Lie connexes unimodulaires possédant une série discrète.— C. r. Acad. sci., 1978, **AB297**, № 13, A847—A849.
188. Anh N. H. Classification of connected unimodular Lie groups with discrete series.— Ann. Inst. Fourier, 1980, **30**, p. 152—192.
189. Antoine J. P. Indefinite metric and Poincaré covariance.— Acta Univ. Bratisl., 1979, **519**, p. 225—260.
190. Auslander L., Moore C. C. Unitary representations of solvable Lie groups.— Providence: A. M. S., 1966.
191. Auslander L., Tolimiery R. Abelian harmonic analysis, theta functions and function algebras on a nilmanifold.— Berlin e. a.: Springer-Verlag, 1975.
192. Auslander L., Tolimiery R. Is computing with the finite Fourier transform pure or applied mathematics? — Bull. Amer. Math. Soc., 1979, **1**, p. 847—897.
193. Bagchi S. C., Sitaram A. Spherical mean periodic functions on semisimple Lie groups.— Pacif. J. Math., 1979, **84**, p. 241—250.
194. Baldoni S. M. W. The embeddings of the discrete series in the principal series for semisimple Lie groups of real rank one.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, **261**, p. 303—368.
195. Baldoni S. M. W., Kraljević H. Composition factors of the principal series representations of the group $Sp(n, 1)$.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, **262**, p. 447—471.
196. Bamazi L. Représentations sphériques uniformement bornées des groupes de Lorentz.— Lect. Notes Math., 1979, **739**, p. 1—14.
197. Bargmann V. Irreducible unitary representations of the Lorentz group.— Ann. Math., 1947, **48**, 568—640.
198. Basarab-Horwath P., Streater R. F., Wright J. Lorentz covariance and kinetic charge.— Commun. Math. Phys., 1979, **68**, № 3, p. 195—207.

199. Basu D., Mitra D. The Lorentz group in the oscillator realization. III. The group $SO(3, 1)$.— J. Math. Phys., 1981, 22, p. 946—953.
200. Beau D., Horchani S. A Lie group framework for composite particles and mass spectrum.— J. Math. Phys., 1979, 20, p. 1700—1711.
201. Berezin F. A. General concept of quantization.— Preprint ITP — 74—20E. Kiev: ITP, 1974.
202. Berline N., Vergne M. Équations de Hua et intégrales de Poisson.— C. r. Acad. sci., 1980, AB290, p. A123 — A125.
203. Bernat P., Conze N., Duflo M., Levy-Nahas M., Rais M., Renouard P., Vergne M. Représentations des groupes de Lie resolubles.— Paris: Dunod, 1972.
204. Bernstein J. N., Gelfand S. I. Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie algebras.— Compos. math., 1980, 41, p. 245—285.
205. Bernstein J., Gelfand I., Gelfand S. Structure locale de la catégorie des modules de Harish-Chandra.— C. r. Acad. sci., 1978, AB286, № 11, p. A495 — A497.
206. Bertrand J. On the decomposition of the tensorial product of two representations of the Poincaré group. Case with at least one imaginary mass.— Ann. Inst. Henri Poincaré, Sec. A: Phys. théor., 1970, 13, № 2, p. 163—194.
207. Bincer A. M. Missing label operators in the reduction $Sp(2n) \downarrow \downarrow Sp(2n-2)$.— J. Math. Phys., 1980, 21, p. 671—674.
208. Blattner R. J., Wolf J. A. Explicit quantization of the Kepler manifold.— Proc. Amer. Math. Soc., 1979, 77, p. 145—149.
209. Boidol J. $*$-regularity of exponential Lie groups.— Invent. Math., 1980, 56, № 9, p. 231—238.
210. Borisov A. B. The unitary representations of $\overline{GL}(4, \mathbf{R})$.— Repts Math. Phys., 1978, 13, № 2, p. 141—147.
211. Bose A. K. Finite-dimensional irreducible representations of the classical Lie algebras and $G_2$.— Phys. Lett., 1975, 54A, № 1, p. 11—12.
212. Boyer R., Martin R. The group $C^*$-algebra of the DeSitter group.— Proc. Amer. Math. Soc., 1977, 65, p. 177—184.
213. Brennich R. H. Deformation and contraction of Poincaré group representations.—Repts. Math. Phys., 1975, 8, p. 139—151.
214. Brezin J. Harmonic analysis on compact solvmanifolds.— Berlin e. a. Springer-Verlag, 1977.
215. Brugarino T. DeSitter-invariant field equations.— Ann. Inst. H. Poincaré, Sec A: Phys. théor., 1980, 32, № 3, p. 277—282.
216. Bruhat B. Sur les representations induites des groupes de Lie.— Bull. Soc. Math. France, 1956, 84, p. 97—205.
217. Burdik C., Havliček M., Exner P. Highest-weight representations of the $sl(n+1, \mathbf{C})$ algebras: maximal representations.— J. Phys. A: Math. and Gen., 1981, 14, p. 1039—1054.
218. Busby R. C., Schochetman I. Compact induced representations.— Can. J. Math., 1972, 24, p. 5—16.
219. Caillez J., Oberdoerffer J. Les sous-groupes paraboliques de $SU(p, q)$ et $Sp(n, \mathbf{R})$ et applications a l'etude des représentations.— Lect. Notes. Math., 1979, 739, p. 51—106.
220. Caillez J., Oberdoerffer J. Séries complémentaires associées à certaine paraboliques de $SU(n, n)$.— Lect. Notes Math., 1979, 739, p. 107—121.
221. Carmona J. On irreducibility of the principal series.— Lect. Notes Math., 1977, 581, p. 1—31.
222. Cartier P. Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie.— Lect. Notes Math., 1976, 514, p. 20—34.
223. Cecchini C. Lacunary Fourier series on compact Lie groups.— J. Funct. Anal., 1972, 11, p. 191—203.
224. Charbonnel J.-Y. La formule de Plancherel pour un groupe de Lie resoluble connexe.— Lect. Notes Math., 1977, 587, p. 32—76.

225. Charbonnel J.-Y. La formule de Plancherel pour un groupe de Lie resoluble connexe. II.— Math. Ann., 1980, 250, p. 1—34.
226. Clerc J.-L. Quelgues théoremes de convergence pour l'analyse harmonique de $SU(2)$.— Lect. Notes Math., 1975, 497, p. 16—25.
227. Clerc J.-L. Localisation des sommes de Riesz sur un groupe de Lie compact.— Stud. Math. (PRL), 1976, 55, № 1, p. 21—26.
228. Clerc J.-L. Transformation de Fourier sphérique des espaces de Schwartz.— J. Funct. Anal., 1980, 37, № 2, p. 182—202.
229. Clozel L. «Base change» géometrique: relèvement de la série principale de $GL(n, \mathbf{C}/\mathbf{R})$.— Lect. Notes Math., 1979, 728, p. 17—41.
230. Cohn L. Analytic theory of the Harish-Chandra $C$-function.— Berlin e. a. Springer-Verlag, 1974.
231. Connett W. C., Schwartz A. L. The harmonic machinery for eigenfunction expansions.— Proc. Symp. Pure Math., 1979, 35, № 2, p. 429—434.
232. Corwin L. The Plancherel measure in nilpotent Lie groups as a limit of point measures.— Math. Z., 1977, 155, p. 151—162.
233. Corwin L. A representation — theoretic criterion for local solvability of left invariant differential operators on nilpotent Lie groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1981, 264, p. 113—120.
234. Corwin L., Greenleal F. P. Singular Fourier integral operators and representations of nilpotent Lie groups.— Comm. Pure Appl. Math., 1978, 31, № 6, p. 681—705.
235. Corwin L., Gzeenleaf F. P. Fourier transformations of smooth functions on certain nilpotent Lie groups.— J. Funct. Anal., 1980, 37, № 2, p. 203—217.
236. Cowling M. The Kunze — Stein phenomenon.— Ann. Math., 1978, 107, № 2, p. 209—234.
237. Cowling M. The Plancheral formula for a group not of type I.— Boll. Unione mat. ital., 1978, A15, № 3, p. 616—623.
238. Cowling M. Sur les coefficients des représentations unitaires des groupes de Lie simples.— Lect. Notes Math., 1979, 739, p. 132—178.
239. Cowling M. The Fourier — Stieltjes algebra of a semisimple Lie group.— Colloq. Math., 1979, 41, № 1, p. 89—94.
240. Cressman R. Quantization and group representations.— Can. J. Math., 1977, 29, p. 1264—1276.
241. Dadok J. Paley — Wiener theorem for singular support of $K$-finite distributions on symmetric spaces.— J. Funct. Anal., 1979, 31, p. 341—354.
242. Dani S. G. Invariant measures of horospheric flows on noncompact homogeneous spaces.— Invent. Math., 1978, 47, p. 101—138.
243. Debacker-Mathot Fr. Projective representations of the Galilei group in a rigged Hilbert space.— Repts Math. Phys., 1975, 7, p. 337—348.
244. DeGeorge D. L., Wallach N. R. Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma\backslash G)$.— Ann. Math., 1978, p. 133—150.
245. Delorme P. Sur la cohomologie continue des groupes de Lie semi — simples complexes.— Lect. Notes Math., 1979, 739, p. 179—191.
246. Dieudonné J. Special functions and linear representations of Lie groups.— Providence: A. M. S., 1980.
247. Dieudonné J. Eléments d'analyse. T. V, Ch. XXI, T. VI. Ch. XXII.— Paris e. a.: Gauthier-Villars, 1975.
248. Dixmier J. Sur les homomorphismes d'Harish-Chandra.— Invent. Math., 1972, 17, p. 167—176.
249. Dixmier J. Sur la méthode des orbites.— Lect. Notes Math., 1979, 728.
250. Dixmier J., Malliavin P. Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfinitement différentiables.— Bull. Sci. Math., 1978, 102, № 4, p. 305—330.
251. Dobrev V. K., Petkova V. P. Elementary representations and intertwining operators for the group $SU^*(4)$.— Repts Math. Phys., 1978, 13, № 2, p. 233—277.
252. Doebner H. D., Werth J. E. Global properties of systems quantized via bundles.— J. Math. Phys., 1979, 20, p. 1011—1014.

253. Dooley A. H. Norms of characters and lacunarity for compact Lie groups.— J. Funct. Anal., 1979, **32**, p. 254—276.
254. Dooley A. H. Random Fourier series for central functions on compact groups.— Ill. J. Math., 1980, **24**, p. 545—553.
255. Dressler B. Norms of zonal spherical functions and fourier series on compact symmetric spaces.— J. Funct. Anal., 1981, **44**, p. 74—86.
256. Duflo M. Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents.— Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 1972, **5**, p. 71—120.
257. Duflo M. Opérateurs différentiels bi-invariants sur une groupe de Lie.— Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 1977, **10**, p. 265—288.
258. Duflo M. Représentations unitaires irréductibles des groupes simples complexes de rang deux.— Bull. Soc. Math. France, 1979, **107**, p. 55—96.
259. Duflo M. Représentations de carré intégrable des groupes semisimples réels.— Lect. Notes Math., 1979, **710**, p. 22—40.
260. Duflo M. Polynomes de Vogan pour $SL(n, \mathbf{C})$.— Lect. Notes Math., 1979, 728, p. 64—76.
261. Duflo M. Caractéres des groupes de Lie résolubles.— Lect. Notes Math., 1981, 842, p. 257—272.
262. Duimio F. Parafermion representations of the Lie-algebra chain $O_7 \supset G_2 \supset SU_3$.— Nuovo cim., 1978, A45, p. 315—342.
263. Duistermaat J. J., Kolk J. A. C., Varadarajan V. S. Spectra of compact locally symmetric manifolds of negative curvature.— Invent. Math., 1979, 52, p. 27—93. Erratum.— Ibid., 54, p. 101.
264. Dunkl C. F. An expansion in ultraspherical polynomials with nonnegative coefficients.— SIAM J. Math. Anal., 1974, 5, p. 51—52.
265. Duval C. On the polarizers of compact semi — simple Lie groups. Applications.— Ann. Inst. H. Poincare, Sec. A, Ph. t., 1981, **34**, p. 95—115.
266. Eguchi M. On the Radon transform of the rapidly decreasing functions on symmetric spaces. II.— Hiroshima Math. J., 1971, **1**, p. 161—169.
267. Eguchi M. The Fourier transform of the Schwartz space on a semisimple Lie group.— Hiroshima Math. J., 1974, 4, p. 133—209.
268. Eguchi M. An application of topological Paley — Wiener theorems to invariant differential equations on symmetric spaces.— Lect. Notes Math., 1979, 739, p. 192—206.
269. Eguchi M., Kowata A. On the Fourier transform of rapidly decreasing functions of $L_p$ type on a symmetric space.— Hiroshima Math. J., 1976, **6**, p. 143—158.
270. Eguchi M., Kumahara K. Riemann — Lebesgue lemma for real reductive groups.— Proc. Japan Acad., 1980, **A56**, p. 465—468.
271. Eguchi M, Kumahara K., Muta Y. A subspace of Schwartz space on motion groups.— Hiroshima Math. J., 1980, 10, p. 691—698.
272. Ehrenpreis L., Mautner F. I. Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups.— I. Ann. Math., 1955, **61**, p. 406—439; II. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **84**, p. 1—55; III. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, p. 431—484.
273. Enright T. J. On the fundamental series of a real semisimple Lie algebra: their irreducibility, resolutions and multiplicity formulae.— Ann. Math., 1979, **110**, p. 1—82.
274. Enright T. J., Varadarajan V. S. On an infinitesimal characterization of the discrete series.— Ann. Math., 1975, **102**, p. 1—15.
275. Enright T. J., Wallach N. R. The fundamental series of representations of a real semisimple Lie algebra.— Acta Math., 1978, **140**, p. 1—32.
276. Erven J. Über Kozyklen erster Ordnung von $SL(2, \mathbf{R})$: Diss. Dokt. Naturwiss.: Fak. Math. Techn.— München: Univ. München: 1980, 154S.
277. Eymard P., Terp M. La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe des $ax + b$ d'un corps local.— Lect. Notes Math., 1979, 739, p. 207—248.
278. Fabéc R. C. Localizable representations of the DeSitter group.— J. d'anal. math., 1979, 35, p. 151—208.
279. Falkowski B. J. First order cocycles for $SL(2, \mathbf{C})$.— J. Indian Math. Soc., 1977, 41, p. 245—254.

280. Farault J. Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques.— J. Math. pures et appl., 1979, 58, p. 369—444.
281. Farmer T. A. On the reduction of certain degenerate principal series representations of $Sp(n, \mathbf{C})$.— Pacif. J. Math., 1979, 84, p. 291—303.
282. Felix R. Über Integralzerlegungen von Darstellungen nilpotenter Lie-gruppen.— Manuscr. math., 1979, 27, № 3, p. 279—290.
283. Fell J. M. G. The dual spaces of $C^*$-algebras.— Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 94, p. 365—403.
284. Fell J. M. G. Conjugated representations and related results on semi-simple Lie groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1967, 127, p. 405—426.
285. Flensted-Jensen M. Spherical functions on a simply connected semisimple Lie group.— Amer. J. Math., 1977, 99, p. 341—361.
286. Flensted-Jensen M. Spherical functions on a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case.— J. Funct. Anal., 1978, 30, p. 106—146.
287. Flensted-Jensen M. On a fundamental series of representations related to an affine symmetric space.— Lect. Notes Math., 1979, 728, p. 77—96.
288. Flensted-Jensen M. Discrete series for semisimple symmetric spaces.— Ann. Math., 1980, 111, p. 253—311.
289. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. Positive definite spherical functions on a non-compact, rank one symmetric space.— Lect. Notes Math., 1979, 739, p. 249—282.
290. Friedman J. L., Sorkin R. D. The unitary multiplicity-free representations of $SL_4(\mathbf{R})$.— J. Math. Phys., 1980, 21, p. 1269—1276.
291. Fronsdal C., Hirai T. A note on a regularity of irreducible characters of a non-connected Lie group.— Proc. Japan. Acad., 1981, A57.
292. Frota-Mattos L. A. Analytic continuation of the Fourier series on connected compact Lie groups.— J. Funct. Anal., 1978, 29, p. 1—15.
293. Fujivara H. On holomorphically induced representations of exponential groups.— Jap. J. Math. New Ser., 1978, 4, p. 109—170.
294. Funakosi S. On representations of non — type I groups.— Tohoku Math. J., 1979, 31, p. 139—150.
295. Gaal S. A. Linear analysis and representation theory.— Berlin e. a.: Springer-Verlag, 1973.
296. Gangolli R. On the Plancherel formula and the Paley — Wiener theorem for spherical functions on semisimple Lie groups.— Ann. Math., 1971, 93, p. 150—165.
297. Gangolli R., Warner G. On Selberg's trace formula.— J. Math. Soc. Japan, 1975, 27, p. 328—343.
298. Gangolli R., Warner G. Zeta functions of Selberg's type for some noncompact quotients of symmetric spaces of rank one.— Nagoya Math. J., 1980, 78, p. 1—44.
299. Gawedski K. Fourier-like kernels in geometric quantization.— Rozpr. mat., 1976, 78. Warszawa: PWN, 1976.
300. Gazlau J.-P., Dumont M.-Cl., Ronveux A. Gel'fand lattice polynomials and irreducible representations of $U(n)$.— J. Math. Phys., 1978, 19, p. 734—748.
301. Gelbart S. S. Fourier analysis on $GL(n, \mathbf{R})$.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1970, 65, p. 14—18.
302. Gelbart S. S. Harmonics on Stiefel manifolds and generalized Hankel transforms.— Bull. Amer. Math. Soc., 1972, 78, p. 451—455.
303. Gelbart S. S. Holomorphic discrete series for the real symplectic group.— Invent. Math., 1973, 19, p. 49—58.
304. Gelbart S. S. The decomposition of $L^2(\Gamma\backslash G)$.— Sémin. Choquet. Initiation anal. Univ. Paris, 1971—1973, 11—12, p. 4/1—4/10.
305. Geller D. Fourier analysis on the Heisenberg group. I. Schwartz space.— J. Funct. Anal., 1980, 36, p. 205—254.
306. Goodman R. On the boundedness and unboundedness of certain convolution operators on nilpotent Lie groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 39, p. 409—413.

307. Goodman R. Holomorphic representations of nilpotent Lie groups.— J. Funct. Anal., 1979, 31, p. 115—137.
308. Goodman R., Wallach N. R. Whittaker vectors and conical vectors.— J. Funct. Anal., 1980, 39, p. 199—279.
309. Goodman R., Wallach N. R. Singular integral operators on nilpotent Lie groups.— Ark. Mat., 1980, 18, p. 1—11.
310. Gould M. D. A trace formula for semisimple Lie algebras.— Ann. Inst. H. Poincaré. Ser. A: Phys. th., 1980, 32, p. 203—219.
311. Gould M. D. On the matrix elements of the $U(n)$ generators.— J. Math. Phys., 1981, 22, p. 15—22.
312. Gould M. D. General $U(N)$ raising and lowering operators.— J. Math. Phys., 1981, 22, p. 267—270.
313. Gréla ud G. Représentations unitaires des groupes de Lie résolubles.— Bull. sci. math., 1979, 103, p. 33—70.
314. Gross K. I. The Plancherel transform on the nilpotent part of $G_2$ and some applications to the representation theory of $G_2$.— Trans. Amer. Math. Soc., 1968, 132, p. 411—446.
315. Gross K. I., Holman W. J., III; Kunze R. A. A new class of Bessel functions and applications in harmonic analysis. Harm. Anal. Euclidean spaces.— Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Williamstown, Mass., 1978. Part 2. Providence, R. I., 1979, pp. 407—415.
316. Gross K. I., Kunze R. A. A Poisson integral for Stiefel harmonics.— Symp. math. Ist. naz. alta mat., 1977, 22, p. 353—362.
317. Gruber B., Klimyk A. U. Multiplicity free and finite multiplicity indecomposable representations of the algebra $su(1, 1)$.— J. Math. Phys., 1978, 19, p. 2009—2017.
318. Guichardet A. 1-cohomologie des groupes résolubles de type (R) et propriété $(P)$.— C. r. Acad. sci., 1975, 280, p. A101 — A103.
319. Guichardet A. Cohomologie des groupes localement compacts et produits tensoriels continus des représentations.— J. Multivar. Anal., 1976, 6, p. 138—158.
320. Güler Y. Unitary analytic representations of $SL(3, \mathbf{R})$ and harmonic Regge sequences.— J. Math. Phys., 1978, 19, p. 508—510.
321. Guilini S., Travaglini G. $L^p$-estimates for matrix coefficients of irreducible representations of compact groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1980, 80, p. 448—450.
322. Guillemonat A. On some semi-spherical representations of an hermitian symmetric pair of the tubular type.— I, Manuscr. math., 1980, 31, p. 331—361; II, Math. Ann., 1980, 246, p. 93—116.
323. Gutkin E. Coefficients of Clebsch — Gordan for the holomorphic discrete series.— Lett. Math. Phys., 1979, 3, p. 185—192.
324. Harasymiv S. R. Groups of matrices acting on distribution spaces.— Pacif. J. Math., 1974, 55, p. 403—417.
325. Harish-Chandra. Plancherel formula for complex semisimple Lie groups.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, 37, p. 813—818.
326. Harish-Chandra. Plancherel formula for the $2 \times 2$ real unimodular group.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1952, 38, p. 337—342.
327. Harish-Chandra. Some results on differential equations and their applications.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1959, 45, p. 1763—1764.
328. Harish-Chandra. Some results on an invariant integral on a semisimple Lie algebra.— Ann. Math., 1964, 80, p. 551—593.
329. Harish-Chandra. On the theory of Eisenstein integral.— Lect. Notes Math., 1971, 266, p. 123—149.
330. Harmonic analysis.— Lect. Notes Math., 1980, 781. Berlin e. a.: Springer-Verlag, 1980.
331. Harmonic analysis and representations of semisimple Lie groups.— Lect. NATO Adv. Study Inst., Liége, Sept. 5—17, 1977. Dordrecht e. a.: Reidel publ. Co., 1980.
332. Harter W. G., Patterson C. W. A unitary calculus for electronic orbitals.— Lect. Notes Phys., 1976, 49, p. 1—144.

333. Havliček M. Remark on the integrability of some representations of the semisimple Lie algebras.— Repts Math. Phys., 1975, 7, p. 85—86.
334. Hecht H. The characters of some representations of Harish-Chandra.— Math. Ann., 1976, 219, p. 213—226.
335. Hecht H. On characters and asymptotics of representations of a real reductive Lie group.— Math. Ann., 1979, 242, p. 103—126.
336. Henrich C. J. On Gel'fand states of representations of $U(n)$ and the Gel'fand lattice polynomials.— J. Math. Phys., 1980, 21, p. 1566—1576.
337. Herb R. A. A uniqueness theorem for tempered invariant eigendistributions.— Pacif. J. Math., 1976, 67, p. 203—208.
338. Herb R. A. Characters of averaged discrete series of semisimple real Lie groups.— Pacif. J. Math., 1979, 80, p. 169—177.
339. Herb R. A., Sally P. J., Jr. Singular invariant eigendistributions as characters in the Fourier transform of invariant distributions.— J. Funct. Anal., 1979, 33, p. 195—210.
340. Hirai T. Classification and characters of irreducible representations of $SU(p, 1)$.— Proc. Japan Acad., 1966, 42, p. 907—912.
341. Hirai T. The characters of some induced representations of semisimple Lie groups.— J. Math. Kyoto Univ., 1968, 8, p. 313—363. Suppl. and corr. Ibid., 1975, 15, p. 237—250.
342. Hirai T. Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie group.— Japan J. Math., 1970, 39, 1—68; 1977, 3, 1—48.
343. Hirai T. The Plancherel formula for $SU(p, q)$.— J. Math. Soc. Japan, 1970, 22, p. 134—179.
344. Hirai T. Character formulas for the discrete series for semisimple Lie groups.— Lect. Notes Math., 1979, 739, p. 315—340.
345. Hirai T. The characters of the discrete series for semisimple Lie groups.— J. Math. Kyoto Univ., 1981, 23, p. 417—500.
346. Hochschild G., Mostow G. D. Unipotent groups in invariant theory.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1973, 70, p. 646—648.
347. Holman W. J., III. Generalized Bessel functions and the representation theory of $U(2) \cdot \mathbf{C}^{2\times 2}$.— J. Math. Phys., 1980, 21, p. 1977—2010.
348. Holod P. I., Klimyk A. U. Representations of the group $Sp(n, 1)$.— Preprint ITP. I, ITP — 77—73E; II, ITP — 77—80E. Kiev: ITP, 1977.
349. Howe R. E. On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities.— Pacif. J. Math., 1977, 73, p. 329—363.
350. Howe R. E. Topics in harmonic analysis on solvable algebraic groups.— Pacif. J. Math., 1977, 73, p. 383—435.
351. Howe R. E. On some results of Strichartz and of Rallis and Schiffman.— J. Funct. Anal., 1979, 32, p. 297—303.
352. Howe R. E. Quantum mechanics and partial differential equations.— J. Funct. Anal., 1980, 38, p. 188—254.
353. Howe R. E., Moore C. C. Asymptotic properties of unitary representations.— J. Funct. Anal., 1979, 32, p. 72—96.
354. Hua Y. On a degenerate principal series of representations of $U(2, 2)$.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, 238, p. 229—252.
355. Huszár M. Deformation of the $SO(2, \mathbf{C})$ subgroup of the Lorentz group.— J. Math. Phys., 1974, 15, p. 654—658.
356. Inoue T. Unitary representations and kernel functions associated with boundaries of a bounded symmetric domain.— Hiroshima Math. J., 1980, 10.
357. Jacobsen H. P. Higher order tensor products of wave equations.— Lect. Notes Math., 1979, 728, p. 97—115.
358. Jacobsen H. P. Intertwining differential operators for $Mp(n, \mathbf{R})$ and $SU(n, n)$.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, 246, p. 311—337.
359. Jacobsen H. P. Tensor products. reproducing kernels, and power series.— J. Funct. Anal., 1979, 31, p. 293—305.
360. Jacobsen H. P., Vergne M. Restrictions and expansions of holomorphic representations.— J. Funct. Anal., 1979. 34, p. 29—53.
361. Jarvis P. D. On a solution of the $U(N) \supset O(N)$ state labelling problem for two — rowed representations.— J. Phys. A; Math., Nucl. Gen., 1974, 7, p. 1804—1816.

862. J e n k i n s J. W. Primary projections on $L^2$ of a nilmanifold.— J. Funct. Anal., 1979, **32**, p. 131—138.
863. J o h n s o n K. D. Functional analysis on $SU(1, 1)$.— Adv. Math., 1974, **14**, p. 346—364.
864. J o h n s o n K. D. Composition series and intertwining operators for the spherical principal series. II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1976, **215**, p. 269—283.
865. J o h n s o n K. D. Paley — Wiener theorems on groups of split rank one.— J. Funct. Anal., 1979, **34**, p. 54—71.
866. J o h n s o n K. D., K o r á n y i A. The Hua operators on bounded symmetric domains of tube type.— Ann. Math., 1980, **111**, p. 589—608.
867. J o h n s o n K. D., W a l l a c h N. R. Composition series and intertwining operators for the spherical principal series. I.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, 229, p. 137—173.
868. J o r g e n s e n P. E. Representations of differential operators on a Lie group.— J. Funct. Anal., 1975, **20**, p. 105—135.
869. J o s e p h A. $W$-module structure in the primitive spectrum of the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra.— Lect. Notes Math., 1979, 728, p. 116—125.
870. J o s e p h A. On the annihilators of the simple subquotients of the principal series.— Ann. Sci. Ecole norm. supér., 1977, **10**, p. 419—439.
871. J o s e p h A. A characteristic variety for the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra.— Lect. Notes Math., 1977, 587, p. 102—118.
872. J o s e p h A. On the Gelfand — Kirillow conjecture for induced ideals in the semisimplie case.— Bull. Soc. Math. France, 1979, **107**, p. 139—159.
873. J o s h i K. N., R a j p u t B. S. Addition of complex angular momentum operators.— J. Math. Phys., 1980, **21**, p. 1759—1782.
874. K a i s e r G. Hardy spaces associated with the Poincaré group.— Queen's Pap. Pure·Appl. Math., 1978, **48**, p. 484—486.
875. K a n e t a H. Decomposition of the unitary representations of $SL(2, C)$ induced by the discrete series of $SU(1, 1)$.— Proc. Japan acad., 1977, A53, p. 139.
876. K a s h i w a r a M., V e r g n e M. On the Segal — Shale — Weil representations and harmonic polynomials.— Invent. Math., 1978, **44**, p. 1—47.
877. K a s h i w a r a M., V e r g n e M. Remarque sur la covariance de certaines opérateurs différentiels.— Lect. Notes Math., 1977, **587**, p. 119—137.
878. K a s h i w a r a M., V e r g n e M. The Campbell — Hausdorff formula and invariant hyperfunctions.— Invent. Math., 1978, **47**, p. 249—272.
879. K a s h i w a r a M., V e r g n e M. Functions of the Shilov bounoary of the generalized half plane.— Lect. Notes Math., 1979, **728**, p. 136—176.
880. K a s p a r o v G. G. $K$-theory, group $C^*$-algebras, and higher signatures (conspectus).— Preprint ICP. **1**, 2. Chernogolovka: ICP, 1981.
881. K a w a z o e T. Some characterization of the Schwartz space and an analogue of the Paley — Wiener theorem on rank 1 semisimple Lie groups.— Proc. Japan Acad., 1979, **A55**, p. 205—208.
882. K a w a z o e T. An analogue of Paley — Wiener theorem on $SU(2, 2)$.— Tokyo J. Math., 1980, **3**, p. 219—248.
883. K e e n e F. W., L i p s m a n R. L., W o l f J. A. The Plancherel formula for parabolic subgroups.— Isr. J. Math., 1977, 28, p. 68—90.
884. K e r i m o v G. A., V e r d i e v Yi. A. Clebsch — Gordan coefficients of the $SL(2, C)$ group.— Repts Math. Phys., 1978, **13**, p. 315—326.
885. K i n g D. R. Characters of irreducible Harish-Chandra modules and Goldie ranks of their annihilators.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Phys. sci., 1980, 77, p. 5616—5617.
886. K i n g R. C. Unitary group subjoinings.— J. Phys. A: Math. Gen., 1980, **13**, p. 3563—3583.
887. K i n g R. C., D e h u a i L., W y b o u r n e B. G. Symmetrised powers of rotation group representations.—J. Phys. A: Math. Gen., 1981, **14**, p. 2509—2538.
888. K i r s c h W., M ü l l e r D. On the synthesis problem for orbits of Lie groups in $\mathbf{R}^n$.— Ark. mat., 1980, **18**, p. 145—155.

389. Klein A., Russo B. Sharp inequalities for Weyl operators and Heisenberg groups.— Math. Ann., 1978, 235, p. 175—194.
390. Klimyk A. U. Matrix elements and Casimir operators of the discrete series representations of the group $U(p, q)$.— Lett. Math. Phys., 1979, 3, p. 315—317.
391. Klimyk A. U. On the Clebsch — Gordan coefficients for finite dimensional representations of semisimple Lie groups.— Preprint ITP. ITP — 79—5E, Kiev: ITP, 1979.
392. Klimyk A. U. Representations for matrix elements of compact lie groups.— Lett. Math. Phys., 1980, 4, p. 399—404.
393. Klimyk A. U., Gavrilik A. M. The representations of the groups $U(n, 1)$ and $SO_0(n, 1)$.— Preprint. ITP. ITP — 76—39E, Kiev: ITP, 1976.
394. Klimyk A. U., Gruber B. Matrix elements for infinitesimal operators of the groups $U(p+q)$ and $U(p, q)$ in a $U(p) \times U(q)$ basis.—J. Math. Phys., 1979, 20, p. 1995—2013.
395. Klink W. H., Ton-That T. Holomorphic induction and the tensor product decomposition of irreducible representations of compact groups. I. $SU(n)$ groups.— Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. A, 1979, 31, p. 77—97.
396. Klink W. H., Ton-That T. Orthogonal polynomial bases for holomorphically induced representations of the general linear groups.— Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. A, 1979, 31, p. 99—113.
397. Knapp A. W. Irreducible tempered representations.— Queen's Pap. Pure Appl. Math., 1978, 48, p. 487—495.
398. Knapp A. W. Commutativity of intertwining operators. II.— Bull. Amer. Math. Soc., 1976, 82, p. 271—273.
399. Knapp A. W., Stein E. M. Intertwining operators for semisimple groups. II.— Invent. Math., 1980, 60, p. 9—84.
400. Knapp A. W., Wallach N. R. Szegö kernels associated with discrete series.— Invent. Math., 1976, 34, p. 163—200. Correction and addition.— Ibid., 1980, 62, p. 341—346.
401. Knapp A. W., Zuckerman G. Classification theorems for representations of semisimple Lie groups.— Lect. Notes Math., 1977, 587, p. 138.
402. Koornwinder T. H. A global approach to the representation theory of $SL(2, \mathbf{R})$.— Math. Cent. Afd. toegepaste wisk. TW, 1978, 186, p. 1—43.
403. Kotecký R., Niederle J. On the integrability of discrete representations of the Lie algebra $so(p, q)$.— Repts Math. Phys., 1975, 7, p. 95—101.
404. Kotzmann E. Le théorème généralisé de Wiener pour les groupes du type de Heisenberg.— C. r. Acad. sci., 1975, 281, p. A23 — A25.
405. Kraljević H. Irreducibility of the principal series representations of the group $GL(n, \mathbf{R})$.— Glasnik Mat., Ser. 3, 1972, 7, p. 49—51.
406. Kraljević H. Representations of the universal covering group of the group $SU(n, 1)$.— Glasnik, Mat. Ser. 3, 1973, 8, p. 23—72.
407. Kraljević H. On representations of the group $SU(n, 1)$.— Trans. Amer. Math. Soc., 1976, 211, p. 433—448.
408. Kraljević H. A note on nonunitary principle series representations.— Proc. Amer. Math. Soc., 1978, 70, p. 213—216.
409. Kraljević H. Indecomposable Harish-Chandra modules.— Ber. Mat.— Statist. Sek. Forschungs zent. Graz., 1978, № 110—115, S. 113/1—113/8.
410. Kraljević H., Miličič D. The $C^*$-algebra of the universal covering group of $SL(2, \mathbf{R})$.— Glasnik Mat., 1972, 7, p. 35—48.
411. Kraljević H., Miličič D. Elementary representations of the group $SO(3, 2)$.— Glasnik Mat., 1974, 9, p. 43—57.
412. Krämer M. Some remarks suggesting an interesting theory of harmonic functions on $SU(2n+1)/Sp(n)$ and $SO(2n+1)/U(n)$.— Arch. Math., 1979, 33, p. 76—79.
413. Kumahara K. Fourier transforms on the Cartan motion group.— Proc. Japan Acad., 1974, 50, p. 433—435.
414. Kumahara K. Fourier transforms on the motion group.— J. Math. Soc. Japan, 1976, 28, p. 18—32.

415. Kumei S. Atomic radial integrals and a use of $O(2, 1)$ transformation.— Phys. Rev. A, 1974, 9, p. 2306—2311.
416. Kunze R. A. On the Frobenius reciprocity theorem for square — integrable representations.— Pacif. J. Math., 1974, 53, p. 465—471.
417. Kunze R. A., Stein E. M. Uniformly bounded representations.— I, Amer. J. Math., 1960, 82, p. 1—62; II, Amer. J. Math., 1961, 83, p. 723—760; III, Amer. J. Math., 1967, 89, p. 385—442; IV, Adv. Math., 1973, 11, p. 1—71.
418. Lachaud G. Analyse spectrale des formes automorpes et séries d'Eisenstein.— Invent. Math., 1978, 46, p. 39—79.
419. Lemire F., Pap M. $H$-finite irredicible representations of simple Lie algebras.— Can. J. Math., 1979, 31, p. 1084—1106.
420. Lemire F., Patera J. An explicit construction of some discrete unitary series of representations of $u(p, q)$.— Roy. Soc. Can. Math. Repts, 1979, 1, p. 49—52.
421. Lemire F., Patera J. Formal analytic continuation of Gelfand's finite dimensional representations of $gl(n, \mathrm{C})$.— J. Math. Phys., 1979, 20, p. 820—829.
422. Lerner D. E. Twistors and induced representations of $SU(2, 2)$.— J. Math. Phys., 1977, 18, p. 1812—1817.
423. Lindsey J. N., II. On a six dimensional projective representation of $PSU_4(3)$.— Pacif. J. Math., 1971, 36, p. 407—425.
424. Lion G. Intégrales d'entrelacement sur les groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov.— Lect. Notes Math., 1977, 587, 160—176.
425. Lion G. Extensions de représentations de groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov.— C. r. Acad. Sci., 1979, 288, p. A615 — A618.
426. Lion G., Vergne M. The Weil group, Maslov index and theta series.— Boston e. a.: Birkhäuser, 1980.
427. Lipsman R. L. On the characters and equivalence of continuous series representations.— J. Math. Soc. Japan, 1971, 23, p. 452—480.
428. Lipsman R. L. A direct proof of Kirillov character formula for nilpotent groups.— Duke Math. J., 1975, 42, p. 225—229.
429. Lipsman R. L. Characters of Lie groups.— I, Isr. J. Math., 1976, 24, p. 45—58; II, Итоп леаналиса математит., J. anal. math., 1977, 31, p. 257—286.
430. Lipsman R. L. Orbit theory and harmonic analysis on Lie groups with co-compact nilradical.— J. Math. pures et appl., 1980, 59, p. 337—374.
431. Lipsman R. L. Restrictions of principal series to a real form.— Pacif. J. Math., 1980, 89, p. 367—390.
432. Lipsman R. L., Wolf J. A. The Plancherel formula for parabolic subgroups of the classical groups.— J. Anal. math., 1978, 34, p. 120—161.
433. Liukkonen J. R., Mislove M. W. Fourier — Stieltjes algebras of compact extensions of nilpotent groups.— J. Reine und angew. Math., 1981, 325, S. 210—220.
434. Loeb J. L'analyse harmonique sur les espaces symmétriques de rang 1. Une réduction aux espaces hyperboliques réels de dimension impaire.— Lect. Notes Math., 1979, 739, p. 623—646.
435. Lucquiaud J.— C. Expression sous forme covariante des fonctions sphériques zonales attachées aux groupes $SO(N)$ et $SH(N)$.— C. r. Acad. sci., 1978, AB287, p. A67 — A69.
436. Lucquiaud J.— C. Représentations tensorielles du groupe $SO(H)$ et applications.— C. r. Acad. sci., 1981, 292, p. 1855—1857.
437. Ludwig J. Good ideals in the group algebra of a nilpotent Lie group.— Math. Z., 1978, 161, p. 195—210.
438. Macfayden N. W. A Laplace transform on the Lorentz groups.— Commun. Math. Phys., 1972, 28, p. 87—108; 1973, 34, p. 297—314.
439. Macfayden N. W. The horospheric approach to harmonic analysis on a semisimple Lie group.— Repts Math. Phys., 1974, 6, p. 265—288.
440. Macfayden N. W. A new approach to harmonic analysis on the group $SL(2, \mathrm{R})$.— Repts Math. Phys., 1976, 8, p. 237—248.

441. M a c k e y C. W. Harmonic analysis as the exploitation of symmetry — a historical survey.— Bull. Amer. Math. Soc., 1980, 3, p. 543—698.
442. M a c k e y G. W. Unitary group representations in physics, probability and number theory.— Reading e. a.: Benjamin — Cummings, 1978.
443. M a e k a w a T. Note on the linear representations of any dimensional Lorentz group and their matrix elements.— J. Math. Phys., 1979, 20, p. 1460—1463.
444. M a e k a w a T. On the matrix elements of $SO(n-1, 1)$, $SO(n)$ and $ISO(n-1)$. Computation of integrals in their expressions.— Math. jap., 1977, 22, p. 131—149.
445. M a e k a w a T. On the invariant scalar products and the UIR of $SO(n, 1)$.— J. Math. Phys., 1980, 21, p. 675—679.
446. M a e k a w a T. Linear representations of any dimensional Lorentz group and computational formulas for their matrix elements.— J. Math. Phys., 1979, 20, p. 691—711.
447. M a g n e r o n B. Opérateurs d'entrelacement des représentations unitaires irrédictibles des groupes de Lie nilpotents et indice de Maslov.— C. R. Acad. sci., 1980, AB290, p. A943 — A946.
448. M a g n i n L. Sur certaines représentations du groupe de Mautner.— C. r. Acad. sci., 1975, 281, p. A191 — A193.
449. M a g n u s A. Non — spherical principle series representations of a semisimple Lie group.— Mem. AMS, 1979, 19, № 216, p. 1—52.
450. M a m i u d a M. An analogue of the theorem of Paley — Wiener type on the universal covering group of de Sitter group.— Tokyo J. Math., 1980, 3, p. 75—97.
451. M a r c u s M., H o l m e s J. Groups of linear operators defined by group characters.— Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 172, p. 177—194.
452. M a r g u l i s G. A. Some remarks on invariant means.— Monatsh. math., 1980, 90, p. 233—235.
453. M a r t e n s S. The characters of the holomorphic discrete series.— Proc. Nal. Acad. Sci. USA, 1975, 72, p. 3275—3276.
454. M a t s u m o t o S. The Plancherel formula for a pseudo — riemannian symmetric space.— Hiroshima Math. J., 1978, 8, p. 181—193.
455. M a t s u m o t o S. Discrete series for an affine symmetric space.— Hiroshima Math. J., 1981, 11, p. 53—79.
456. M i a t e l l o R. A formula on the multiplicities of the nonintegrable discrete series in $L^2(\Gamma\backslash G)$.— Notas e comun. mat., 1977, 80, p. 1—18.
457. M i a t e l l o R. On the Plancherel measure for linear Lie groups of rank one.— Notas e comun. mat., 1979, 96, p. 1—36.
458. M i c k e l s s o n J. On irreducible modules of a Lie algebra which are composed of finite-dimensional modules of a subalgebra.— Ann. Ac. Sci. Fennicae, ser. A, I. Math., 1975, 598, p. 1—78.
459. M i c k e l s s o n J., N i e d e r l e J. On integrability of discrete representations of Lie algebra $u(p, q)$.— Ann. Inst. H. Poincaré, Ser. A: Ph. Th., 1973, 19, p. 171—177.
460. M i d o r i k a w a H. On a relation between characters of discrete and non — unitary principal series representations.— Proc. Japan Acad., 1974, 50, p. 29—32.
461. M i l i č i č D. Topological representation of the group $C^*$-algebra of $SL(2, \mathbf{R})$.— Glasnik Mat., 1971, 6, p. 231—246.
462. M i l l e r W., J r. Lie theory and generalized hypergeometric functions.— SIAM J. Mat. Anal., 1972, 3, p. 31—44.
463. M o o r e C. C. The Mautner phenomenon for general unitary representations.— Pacif. J. Math., 1980, 86, p. 155—169.
464. M o s c o v i c i H. A vanishing theorem for $L^2$-cohomology in the nilpotent case.— Lect. Notrs Math., 1979, 728, p. 201—210.
465. M o s c o v i c i H., V e r o n a A. Harmonically induced representations of nilpotent Lie groups.— Invent. Math., 1978, 48, p. 61—73.
466. M o s c o v i c i H., V e r o n a A. Cocycle representations of solvable Lie groups.— Math. Z., 1978, 160, p. 183—194.

467. M o s c o v i c i H., V e r o n a A. Quantization and projective representations of solvable Lie groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, **246**, p. 173—192.
468. M u r p h y T. Schift operators for discrete representations of $O(p, q)$.— J. Math. Phys., 1980, **21**, p. 2317—2320.
469. M u t a Y. Fourier transform of a certain class of functions of the generalized Lorentz group.— Repts Fac. Sci. Eng. Saga Univ. Math., 1976, **4**, p. 7—19.
470. M u t a Y. On the spherical functions with one-dimensional $K$-types and the Paley — Wiener type theorem on some simple Lie groups.— Repts Fac. Sci. Eng. Saga Univ. Math., 1981, **9**, p. 31—59.
471. N a i m a r k M. A. Some problems and results in representation theory of complex semisimple Lie groups.— Actes Congrès intern. Math., 1970, 2, p. 407—411.
472. N e u n h ö f f e r H. Über Kronecker-Produkte irreduzibler Darstellungen von $SL(2, \mathbf{R})$.— Berlin e. a.: Springer-Verlag, 1978.
473. N o m u r a T. The Paley — Wiener type theorem for finite covering groups of $SU(1, 1)$.— Proc. Japan Acad., 1977, **A53**, p. 195—197.
474. Non-commutative harmonic analysis. (Lect. Notes Math., 587).— Berlin e. a.: Springer-Verlag, 1977.
475. N u n e s M e n d e s R. d. M. Symmetries of spherical harmonics.— Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **204**, p. 161—178.
476. N u s s b a u m A. E. Extension of positive definite functions and representation of functions in terms of spherical functions in symmetric spaces of noncompact type of rank 1.— Math. Ann., 1975, **215**, p. 97—216.
477. O d z i j e w i c z A. Conformal kinematics and twistor flag spaces.— Seminarber. Humboldt-Univ. Berlin Sek. Math., 1980, **25**, p. 53—63.
478. O r s t e d B. Composition series for analytic continuations of holomorphic discrete series representations of $SU(n, n)$.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, **260**, p. 563—573.
479. P a r t e n s k y A., Q u e n s e C. Sum rules for matrices of the generators of $SU(3)$ in an $SO(3)$ basis.— J. Math. Phys., 1979, **20**, p. 2014—2027.
480. P a r t h a s a r a t h y K. R. Criteria for the unitarizability of some highest weight modules.— Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 1980, **89**, p. 1—24.
481. P a r t h a s a r a t h y K. R., S c h m i d t K. Stable positive definite functions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **203**, p. 161—174.
482. P a r v i z i D. Indecomposable representations of Poincaré group and quantization of weak gravitational and electromagnetic fields.— Repts Math. Phys., 1975, 8, p. 401—420.
483. P a t e r a F., S h a r p R. T., W i n t e r n i t z P., Z a s s e n h a u s H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups.— J. Math. Phys., 1977, **18**, p. 2259—2288.
484. P a t e r a J., S h a r p R. T. Generating functions for $SU(2)$ plethysms with fixed exchange symmetry.— J. Math. Phys., 1981. **22**, p. 261—266.
485. P a t t o n C. M. On representations in cohomology over pseodo — hermitian symmetric spaces.—Bull. Amer. Math. Soc., 1981, **5**, p. 63—66.
486. P e n n e y R. C. Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem.— J. Funct. Anal., 1975, **18**, p. 177—190.
487. P e n n e y R. C. Canonical objects in Kirillov theory on nilpotent Lie groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1977, 66, p. 175—178.
488. P i c a r d e l l o M. Unimodular Lie groups without discrete series.— Boll. Unione mat. ital., 1980, Suppl. v. 1, p. 61—80.
489. P i c h a u d J. 1-cohomologie des représentations induites.— J. Math. pures et appl., 1977, **56**, p. 339—366.
490. P i n c z o n G., S i m o n J. Extensions of representations and cohomology.— Repts Math. Phys., 1979, **16**, p. 49—77.
491. P o s t G. Properties of massless relativistic fields under the conformal group.— J. Math. Phys., 1976, **17**, p. 24—32.
492. P r i m c M. Irreducibility of nonunitary principal series of semisimple Lie groups with one conjugacy class of Cartan subgroups.— Ber. Mat.-statist. Sek. Forschungszent. Graz, 1978, № 110—115, S. 114/1—114/5.

493. Primc M. A note on cyclicity of spherical principal series of complex semisimple Lie groups.— Glasnik Mat., 1975, 10, p. 241—248.
494. Primc M. Representations of semisimple Lie groups with one conjugacy class of Cartan subgroups.— Glasnik, 1979, 14, p. 227—254.
495. Pukanszky L. Unitary representations of Lie groups with compact radical and applications.— Trans. Amer, Math. Soc., 1978, 236, p. 1—49.
496. Rader C. Invariant polynomials and zonal spherical functions.— Notas e comun. mat., 1979, 95, p. 1—57.
497. Rader C. Invariant polynomials and zonal spherical functions.— Bol. Soc. brasil. mat., 1980, 11, 103—137.
498. Ragozin D. L., Warner G. On a method for computing multiplicities in $L_2(\Gamma\backslash G)$.— Symp. math. Ist. naz. alta mat., 1977, 22, p. 291—314.
499. Rallis S. The Eichler commutation relation and the continuous spectrum of the Weil representation.— Lect. Notes Math., 1979, 728, p. 211—244.
500. Rallis S., Schiffmann G. Distributions invariantes par le groupe orthogonal.— Lect. Notes Math., 1975, 497, p. 494—642.
501. Randol B. A remark on the multiplicity of the discrete spectrum of congruence group.— Proc. Amer. Math. Soc., 1981, 81, p. 339—340.
502. Rashid M. A. The intelligent states. I.— Group theoretic study and the computation of matrix elements.— J. Math. Phys., 1978, 19, p. 1391—1396.
503. Repka J. Tensor products of unitary representations of $SL_2(\mathrm{R})$.— Amer. J. Math., 1978, 100, p. 747—774.
504. Repka J. Tensor products of holomorphic discrete series representations.— Can. J. Math., 1979, 31, p. 836—844.
505. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. II.— Inv. Math., 1981, 63, p. 423—432.
506. Richardson L. F. A class of idempotent measures on compact nilmanifolds.— Acta math., 1975, 135, p. 129—154.
507. Richardson L. F. Poisson summation on Kirillov orbits.— Math. Ann., 1979, 239, p. 229—240.
508. Rideau G. Noncompletely reducible representations of the Poincaré group associated with the generalized Lorentz gauge.— J. Math. Phys., 1978, 19, p. 1627—1634.
509. Rideau G. On the extensions of mass-zero representations of the Poincaré group.— Repts Math. Phys., 1979, 16, p. 251—263.
510. Ringhofer K. Koornwinder's polynomials and representations of the conformal group.— J. Math. Phys., 1979, 20, p. 966—971.
511. Rosenberg J. A quick proof of Harish-Chandra's Plancherel theorem for spherical functions on a semisimple Lie group.— Proc. Amer. Math. Soc., 1977, 63, p. 143—149.
512. Rosenberg J. Realization of square-integrable representations of unimodular Lie groups on $L^2$-cohomology spaces.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, 261, p. 1—32.
513. Rosenberg J. Group $C^*$-algebras and topological invariants. Preprint. Int. Conf. oper. alg. and group representations. Bukurešti: Neptun, 1980.
514. Rosensteel G., Rowe D. J. The algebraic $CM(3)$-model.— Ann. Phys., 1976, 96, p. 1—42.
515. Rossmann W. Kirillov's character formula for reductive Lie groups.— Invent. Math., 1978, 48, p. 207—220.
516. Rossmann W. Analysis on real hyperbolic spaces.— J. Funct. Anal., 1978, 30, p. 448—477.
517. Rossmann W. Limit characters of reductive Lie groups.— Invent. Math., 1980, 61, p. 53—66.
518. Rotschild L. P. Local solvability of left invariant differential operators on the Heisenberg group.— Proc. Amer. Math. Soc., 1979, 74, p. 383.
519. Rubenthaler H. Une série degenerée de représentations de $SL_n(\mathrm{R})$.— Lect. Notes Math., 739, p. 427—459.
520. Rühl W., Yunn B. C. The asymptotic reduction of products of representations of the universal covering group of $SU(1, 1)$.— J. Math. Phys., 1978, 18, p. 972—980.

521. Russo B. The norm of the $L^p$-Fourier transform. II.— Can. J. Math., 1976, 28, p. 1121—1131.
522. Russo B. Operator theory in harmonic analysis.— Lect. Notes Math., 1977, **604**, p. 94—102.
523. Saito M. Représentations unitaires des groupes symplectiques.— J. Math. Soc. Japan, 1972, **24**, p. 232—251.
524. Sakai K. Some results on unitary representations of the Euclidean motion group in $\Pi_\infty$-spaces.— Sci. Repts Kagoshima Univ., 1980, **29**, p. 13—26.
525. Sakai K. On indecomposable unitary representations of the 2 — dimensional Euclidean motion group in finite dimensional indefinite inner product spaces. I.— Sci. Repts. Kagoshima Univ., 1980, 29, p. 27—51.
526. Sally P. J. Analytic continuation of the irreducible unitary representations of the universal covering group of $SL(2, R)$.— Providence: A. M. S., 1967.
527. Sally P. J., Warner G. The Fourier transform on semisimple Lie groups of real rank one.— Acta math., 1973, **131**, № 1—2, p. 1—26.
528. Schiffmann G. Integrales d'entrelacement.— C. r. Acad. sci., 1968, 266, p. 47—48, 859—861.
529. Schiffmann G. Distributions centrales sur $SL(2, \mathbf{R})$.— Ann. Inst. H. Poincaré, 1970, **13**, p. 229—240.
530. Schiffmann G. Travaux de Kostant sur la série principale.— Lect. Notes Math., 1979, **739**, p. 460—510.
531. Schmid W. Some properties of square-integrable representations of semisimple Lie groups.— Ann. Math., 1975, **102**, p. 535—564.
532. Schmid W. On the characters of the discrete series. The hermitian symmetric case.— Invent. Math., 1975, **30**, p. 47—144.
533. Schmid W. Some remarks about the discrete series characters of $Sp(n, \mathbf{R})$.— Lect. Notes Math., 1975, **466**, p. 172—194.
534. Schmid W. Two character identities for semisimple Lie groups.— Lect. Notes Math., 1977, **587**, p. 196—225.
535. Schmüdgen K. Ein positives Element der einhüllenden Algebra der $sl(2, \mathbf{R})$, der keine Quadratssumme ist.— Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig. Math.-naturwiss. R., 1978, 27, S. 299—301.
536. Schwandt E. A. On the Fourier coefficients of the Poincaré series.— J. London Math. Soc., 1972, 2, p. 584—588.
537. Schwandt E. A. On modular cusp forms and their reproducing kernel.— J. London math. Soc., 1976, **12**, p. 459—464.
538. Seland B. Infinitesimal characterization of analytic vectors for representations of real Lie groups on locally convex spaces.— Math-scand., 1976, **39**, p. 359—366.
539. Shelstad D. Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group.— Ann. Sci. Ec. Norm Sup., Ser. 4, 1979, 12, p. 1—31.
540. Sherman T. O. Fourier analysis on compact symmetric space.— Bull. Amer. Math. Soc., 1977, **83**, p. 378—380.
541. Sitaram A. A note on $L_2(\Gamma\backslash SL(2, \mathbf{R}))$.— Michigan Math. J., 1979, **26**, p. 325—331.
542. Sitaram A. An analogue of the Wiener — tauberian theorem for spherical transforms of semisimple Lie groups.— Pacif. J. Math.. 1980, 89, p. 439—445.
543. Smith R. T. The spherical representations of groups transitive on $S^n$.— Indiana Univ. Math. J., 1974, **24**, p. 307—325.
544. Soto A. J. Consruction géometrique de certaines séries discretes.— Lect. Notes Math., 1977, **597**, p. 32—55.
545. Speh B. Degenerate series representations of the universal covering group of $SU(2, 2)$.— J. Funct. Anal., 1979, **33**, p. 95—118.
546. Speh B., Vogan D., Jr. Reducibility of generalized principal series representations.— Acta math., 1980, **145**, № 3—4, p. 227—299.
547. Stanton R. J., Tomas P. A. Expansions for spherical functions on noncompact symmetric spaces.— Acta math., 1978, **140**, № 3—4, p. 251—276.

548. Staunton L. P. Lorentz subgroup analysis of the Lie algebra $Sp(8, \mathbf{R})$ and a null-plane, boson realization.— J. Math. Phys., 1978, 19, p. 1471.
549. Stein E. M. Analysis in matrix spaces and some new representations of $SL(N, \mathbf{C})$.— Ann. Math., 1967, 86, p. 461—490.
550. Stein E. M. Analytic continuation of group representations.— Advances in Math., 1970, 4, p. 172—207.
551. Strasburger A. Inducing spherical representations of semisimple Lie groups. (Rozpr. mat., 72). Warszawa: PWN, 1975.
552. Strese H. Zur harmonischen Analyse der Paare $(SO(n), SO(k) \times \times (SO(n-k))$ und $(SP(n), SP(k) \times SP(n-k))$.— Math. Nachr., 1980, 98, p. 61—73.
553. Strichartz R. S. Harmonic analysis on hyperboloids.— J. Funct. Anal., 1973, 12, p. 341—383.
554. Strichartz R. S. Non — compact rotation groups.— Indiana Univ. Math. J., 1974, 24, p. 499—526. Errata.— Ibid., 1981, 30, p. 479—480.
555. Strichartz R. S. The explicit Fourier decomposition of $L^2(SO(n)/ /SO(n-m))$.— Can. Math. J., 1975, 27, p. 294—310.
556. Strichartz R. S. Bochner identities for Fourier transforms.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, 228, p. 307—327.
557. Ström S. Induced representations of the $(1+4)$ de Sitter group in an angular momentum basis and the decomposition of these representations with respect to representations of the Lorentz group.— Ann. Inst. H. Poincaré, 1970, 13, p. 77—98.
558. Sugiura M. Unitary representations and harmonic analysis. An introduction.— Tokyo: Kodansha; N. Y. e. a.: Wiley, 1975.
559. Sund T. Multiplier representations of exponential Lie groups.— Math. Ann., 1978, 232, p. 287—290.
560. Szczyrba I. On the calculation of multipliers for representations of $SU(n)$.— Lett. Math. Phys., 1980, 4, p. 249—256.
561. Szegö K., Toth K. The representations of Poincaré group as functions of the eigenvalues of Casimir operators.— Közp. fiz. kut. intéz. Publs., 1971, 38, p. 1—17.
562. Szmidt J. The duality theorem for integrable representations and Langlands conjectures.— Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. phys., 1977, 25, p. 1215—1219.
563. Szmidt J., Wawzýncyk A. On $C^\infty$-vectors and intertwining operators for Banach space representations of Lie groups.— Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. phys., 1974, 22, p. 513—520.
564. Takahashi R. Spherical functions in $Spin_0(1, d)/Spin(d-1)$ for $d = 2,4$ and 8.— Lect. Notes Math., 1977, p. 226—240.
565. Takahashi R. Quelques résultats sur l'analyse harmonique dans l'espace symétrique non compact de rang 1 du type exeptionnel.— Lect. Notes Math., 1979, 739, p. 511—567.
566. Thieleker E. The unitary representations of the generalized Lorentz groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 199, p. 327—367.
567. Thieleker E. On the integrable and square integrable representations of $Spin(1, 2m)$.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, 230, p. 1—40.
568. Tolimieri R. Analysis on the Heisenberg manifold.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, 228, p. 329—343.
569. Ton-That T. Lie group representations and harmonic polynomials of a matrix variable.— Trans. Amer. Math. Soc., 1976, 216, p. 1—46.
570. Ton-That T. Sur la décomposition des produits tensoriels des représentations irréductibles de $GL(k, \mathbf{C})$.— J. Math. pures et. appl., 1977, 56, p. 251—261.
571. Ton-That T. Explicit decomposition of tensor products of certain analytic representations of symplectic groups.— J. Math. Phys., 1978, 19, p. 2514—2519.
572. Torasso P. Le thèoréme de Paley — Wiener pour l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact sur un espace symmétrique de type noncompact.— J. Funct. Anal., 1977, 26, p. 201—213.

573. Torasso P. Sur le caractère de la représentation de Shale — Weil de $Mp(n, \mathbf{R})$ et $Sp(n, \mathbf{C})$.— Math. Ann., 1980, **252**, p. 53—86.
574. Torasso P. Quantification géométrique et représentations de $SL_3(\mathbf{R})$.— C. r. Acad. sci., 1980, **AB291**, p. A185 — A188.
575. Trombi P. C. Asymptotic expansion of matrix coefficients: the real rank one case.— J. Funct. Anal., 1978, **30**, p. 83—105.
576. Tsuchikawa M. On the representations of $SL(3, \mathbf{C})$.— Proc. Japan Acad., 1968, **44**, p. 127—129.
577. Varadarajan V. S. Lie groups, Lie algebras and their representations.— Englewood-Cliffs: Prentice-Hall Inc., 1974.
578. Vargas J. A character formula for the discrete series of a semisimple Lie group.— Bull. Amer. Math. Soc., 1980, **2**, p. 465—467.
579. Vergne M. Représentations unitaires des groupes de Lie résolubles.— Sémin. Bourbaki, 1973/74, 26ᵉ ann., № 447, p. 205—226.
580. Vergne M. On Rossmann's character formula for discrete series.— Invent. Math., 1979, **54**, p. 11—14.
581. Vergne M., Rossi H. Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group.— Acta math., 1976, **136**, № 1—2, p. 1—59.
582. Vogan D. A., Jr. Gelfand — Kirillov dimension for Harish-Chandra modules.— Invent. Math., 1978, **48**, p. 75—98.
583. Vogan D. A., Jr. The algebraic structure of the representations of semisimple Lie groups. I.— Ann. Math., 1979, **109**, p. 1—60.
584. Vogan D. A., Jr. Irreducible characters of semisimple Lie groups. I.— Duke Math. J., 1979, **46**, p. 61—108.
585. Vogan D. A., Jr. The size of infinite dimensional representations.— Lect. Notes Math., 1980, **795**, p. 172—178.
586. Vretare L. On $L_p$ Fourier multipliers on certain symmetric spaces.— Math. Scand., 1975, **37**, p. 111—121.
587. Vretare L. On a recurrence formula for elementary spherical functions on symmetric spaces and its applications to multipliers for the spherical Fourier transform.— Math. Scand., 1977, **41**, p. 99—112.
588. Vretare L. Elementary spherical functions on symmetric spaces.— Math. Scand., 1976, **39**, p. 343—358.
589. Wallach N. R. Cyclic vectors and irreducibility for principal series representations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1971, **158**, p. 107—113; 1972, **164**, p. 389—396.
590. Wallach N. R. Harmonic analysis on homogeneous spaces.— N. Y.: Marcel Dekker Inc., 1973.
591. Wallach N. R. On Harish-Chandra's generalized $c$-functions.— Amer. J. Math., 1975, **97**, p. 386—403.
592. Wang A. B. An analogue of the Paley — Wiener theorem for certain function spaces on $SL(2, \mathbf{C})$.— Pacif. J. Math., 1974, **52**, p. 617—629.
593. Warner G. Zeta functions on the real general linear group.— Pacif. J. Math., 1973, **45**, p. 681—691.
594. Wawrzýnczyk A. $G$-index of an invariant differential operator and its applications.— Lect. Notes Math., 1980, **798**, p. 456—464.
595. Weimar E. A general first — order deformation solution.— Nuovo Cimento, 1973, **15**, p. 257—271, 272—283.
596. Weiss G. Complex methods in harmonic analysis.— Amer. Math. Monthly, 1970, **77**, p. 465—474.
597. Weit Y. On Schwartz's theorem for the motion group.— Ann. Inst. Fourier, 1980, **30**, p. 91—107.
598. Weit Y. On closed ideals in the motion group algebra.— Math. Ann., 1980, **248**, p. 279—283.
599. Wigner D. Biinvariant operators on nilpotent Lie groups.— Invent. Math., 1977, **41**, p. 259—264.
600. Williams F. L. Topological irreducibility of nonunitary representations of group extensions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, **233**, p. 69—84.
601. Wilson E. N. Uniformly bounded representations for the Lorentz groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **166**, p. 431—438.

602. W o l f J. A. Representations of certain semidirect product groups.— J. Funct. Anal., 1975, 19, p. 339—372.
603. W o l f J. A. Representations associated to minimal co — adjoint orbits.— Lect. Notes Math., 1978, 676, p. 329—349.
604. W o l f J. A. Fourier inversion problems on Lie groups and an analogue of the Paley — Wiener type theorem on rank 1 semisimple Lie groups.— Proc. Japan Acad., 1979, A55, p. 205—208.
605. W o l f J. A. Representations that remain irreducible on parabolic subgroups.— Lect. Notes Math., 1980, 836, p. 129—144.
606. W o n g M. K. F. Unitary representations of $SO(n, 1)$.— J. Math. Phys., 1974, 15, p. 25—30.
607. W o n g M. K. F. On the Weyl coefficients of $SO(n)$.— J. Math. Phys., 1978, 19, p. 703—708.
608. W o n g M. K. F., Y e h H.-Y. Invariant operators of $IU(n)$ and $IO(n)$ and their eigenvalues.— J. Math. Phys., 1979, 20, p. 247—250.
609. W o n g M. K. F., Y e h H.-Y. Explicit evaluation of the representation functions of $ISO(n)$.— J. Math. Phys., 1980, 21, p. 1—5.
610. W o n g M. K. F., Y e h H.-Y. The most degenerate irreducible representations of the symplectic group.— J. Math. Phys., 1980, 21, p. 630—635.
611. Y a m a m u d a H. Relative invariants of prehomogeneous vector spaces and a realization of certain unitary representations. I.— Hiroshima Math. J., 1981, 11, p. 97—109.
612. Z a g a n e s c u M. Coherent states on the group $SL(2, \mathbf{R})$. Series of coherent states and automorphic forms; Mellin transforms.— Repts Math. Phys., 1977, 12, p. 89—103.
613. Z i m m e r l é A. Formule sommatoire pour la transformation de Fourier sphérique.— C. r. Acad. sci., 1978, AB286, p. A543 — A545.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


**Автоморфизм** 13, 31
— внешний 70
— внутренний 13, 70
— зеркальный (в $SO(2m, \mathbf{C})$) 178
— Картана 79
— проективный 30
Алгебра 31
— ассоциативная 31
— грассманова 35
— групповая 126
— — свободная 126
— клиффордова 35
— коммутативная 31
— Ли 63
— — группы Ли 108
— — евклидова типа 119
— — исключительная 74
— — классическая 74
— — компактная 68
— — компактного типа 119
— — некомпактного типа 119
— — неприводимая 83
— — нильпотентная 67
— — нормальная 82
— — особая 74
— — полупростая 68
— — простая 68
— — разрешимая 66
— — редуктивная 68
— — симметрическая 83
— — — ортогональная 83
— обертывающая 94
— простая 33
— с единицей 31
— свободная 32
— симметрическая 35
— тензорная 35
— универсальная обертывающая 94
— Фурье 133
— Фурье — Стилтьеса 133
— чисел Кэли 303
Аннулятор вектора 34
Антигомоморфизм 13
Антикоммутативность 63
Антилинейность 19
Антипредставление 13, 33

Атлас 101
— $k$-гладкий 102

**Базис** 15
— Гельфанда — Цетлина 94
— — — для группы $SU(n)$ 169
— — — — — $SO(n)$ 184
— гильбертова пространства 48
— Картана — Вейля 71
— системы 73
Билинейность 19

**Вектор** 14
— аналитический 120
— весовой 21, 23, 69
— дифференцируемый 120
— доминантный 90
— касательный 103, 104
— корневой 70
— младший 89
— собственный 21
— старший 89, 134
— целочисленный 90
— циклический 24
— $K$-финитный 124
Векторная часть 81, 113
Векторное поле 104
Вес младший 69
— модуля 69
— представления 69
— старший 89, 134, 135
Вещественная форма 79, 112
Высота разрешимости 67

**Гладкий поток** 104
Гомоморфизм 12
— алгебр 31
— векторных пространств 17
— точный 13
— $G$-модулей 24
Группа 9
— абелева 9
— автоморфизмов 42

Группа аффинных преобразований 187
— Вейля 77, 118
— — ограниченная 82
— верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали 205
— Гейзенберга 200
— — обобщенная 319
— движений 42
— — плоскости 196
— Картана 78
— каспидальная 147
— классическая 45
— коммутативная 9
— конечная 9
— Ли 106
— — вещественная 106
— — комплексная 106
— — локальная 107
— — нильпотентная 113
— — полупростая 113
— — простая 113
— — разрешимая 113
— — редуктивная 113, 114
— — формальная 107
— — экспоненциальная 108
— — $p$-адическая 106
— линейная 24
— малая 61
— матричная 24
— Маутнера 208
— ортогональная 45
— подстановок 10
— полная линейная 10, 45
— — треугольная 45
— — унипотентная 45
— присоединенная 70
— псевдоортогональная 45
— псевдоунитарная 45
— симметрическая 10
— симплектическая 45
— собственная ортогональная 45
— — унитарная 45
— спинорная 45, 183
—, стягиваемая к подгруппе 119
— типа 1 58
— топологическая 39
— унимодулярная 43
— — линейная 45
— унитарная 45
— фундаментальная 41
Групповая $C^*$-алгебра группы $SL(2, \mathbf{C})$ 225
Группы локально изоморфные 109

Двойственность Понтрягина 132
Действие группы 10
— — транзитивное 10
— — эффективное 10
Диаграмма Юнга 166
Дискретная серия представлений 147
— — — группы $SL(2, \mathbf{R})$ 266
— — — — $SU(1, 1)$ 265
— — — — $SU(p, q)$ 315
— — —, пределы 149
Дифференциал гомоморфизма 110
— отображения 104
— представления 120
— функции 103
Дифференцирование 64
— внутреннее 64
Длина разрешимости 67
Дополнительная серия представлений группы $SL(2, \mathbf{C})$ 217
— — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 232
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 264
— — — — $SO(n, \mathbf{C})$ 248
— — — — $Sp(n, \mathbf{C})$ 248
— — — — $SU(1, 1)$ 264
Дуальная группа 56
Дуальное пространство 56
— — неунитарное 61
— — приведенное 309
Дуальный объект 56
— сверхобъект 61

Единица алгебры 31
— группы 9
— кольца 36

Идеал 32
— двусторонний 32
— левый 32
— правый 32
Измеримая вектор-функция 49
— оператор-функция 58
Изоморфизм алгебр 31
— гильбертовых пространств 48
— групп 13
— топологических групп 40
— $G$-пространств 41
Изоморфные алгебры 31
— векторные пространства 14
— гильбертовы пространства 48
— топологические группы 40
— — $G$-пространства 41
Инвариант алгебры Ли 65, 96
— группы 23
— — относительный 23
Интеграл 43
— левоинвариантный 43
— правоинвариантный 43
Интегрируемая функция 53
— слабо функция 53

Камера Вейля 78
— — доминантная 78

Канонические координаты I рода 108
— — II рода 112
Карта 101
Картана критерий 68
Категория 37
Квадратично интегрируемые представления 147, 203
— — — группы аффинных преобразований 193
— — — — Гейзенберга 203
— — — — $SU(1, 1)$ 265
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 265
Классы смежности по подгруппе 11
— сопряженных элементов 13
When Кограница 225
Кольцо 36
— ассоциативное 36
— коммутативное 36
— с единицей 36
Коммутант 22
Коммутатор 63
Компактная форма Вейля 79
Комплексификация алгебры Ли 79
— группы Ли 112
Компонента 40
Конечномерные неприводимые представления группы $SL(2, \mathbf{C})$ 213
— — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 227
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 262
— — — — $SO(n, \mathbf{C})$ 241
— — — — $Sp(n, \mathbf{C})$ 241
— — — — $SU(1, 1)$ 262
Координаты канонические 108, 112
— локальные 101
Корень алгебры 70
— компактный 82
— некомпактный 82
— ограниченный 82
— отрицательный 73
— положительный 73
— простой 73
Корни компактно связные 88
Коцикл 225
Коэффициенты Клебша — Гордана 158
Кратность представления 24, 25
— точки 92
Критерий Картана 68

Лексикографические упорядоченности согласованные 82
Лемма Сатаке 82
— Шура 22, 25, 53, 55
Линеаризация представления 31
Линейная независимость 15
— оболочка 15
Локальные координаты 101

Матрица регулярная 163
Матричный элемент 25
Мера борелевская 42
— двусторонне инвариантная 42
— инвариантная 42
— квазиинвариантная 44
— конечная 42
— левоинвариантная 42
— локально конечная 43
— относительно инвариантная 44
— Планшереля 131
— правоинвариантная 42
— регулярная 43
— Хаара левая 43
— — правая 43
— эргодическая 42
— $\sigma$-конечная 42
Меры эквивалентные 44
Метод орбит 136, 138
— старших векторов 92
— характеров 92
Многообразие 101
— аналитическое 102
— класса $C^k$ 102
— комплексное 102
— регулярное 103
— риманово 105
— симплектическое 105
— $p$-адическое 102
Множество борелевское 42
— ограниченное 47, 51
Модули изоморфные 24
— эквивалентные 24
Модуль 23, 43
— ассоциированный 100
— Верма 98
— группы 43
— коиндуцированный 98
— Хариш-Чандры 99
— элементарный 143
Модулярная функция 43
Моноид 9
Морфизм 37
Мультипликатор 30

Направленность Коши 47
— фундаментальная 47
Нильрадикал 69
Норма 47
— минимальная регулярная 130
Нормализатор 12
Нормальный делитель 12
Носитель обобщенной функции 128

Обобщенная функция умеренного роста 149
— — финитная 128
— — центральная 146
Объект 37

Ограничение представлений группы $U(n)$ на $U(n-1)$ 168
— — — $SO(n)$ на $SO(n-1)$ 183
— — — $Sp(2n)$ на $Sp(2n-2)\times C^*$ 176
— — — $SU(n)$ на $SO(n)$ 186
— — — $SL(2, C)$ на $SL(2, R)$ 289
Оператор внешнего дифференцирования 105
— вполне непрерывный 51
— Гильберта — Шмидта 131
— дискретной симметрии 145
— инфинитезимальный 120
— компактный 51
— конечного ранга 51
— кососимметричный 20
— косоэрмитов 20
— линейный 17
— ортогональный 20
— положительный 130
— полупростой 21
— проекционный 20
— редуктивный 21
— симметричный 20
— сплетающий 22, 24
— — I, II рода 144
— унитарный 20
— эрмитов 20
— ядерный 130
Операторы сопряженные 19
— — эрмитово 20
Операции векторные 14
— покоординатные 16
Орбит метод 136, 138
Орбита 10
— целочисленная 140
Орисфера 153
Ортогональная система 48
Ортогональное семейство проекторов 20
Ортогональные элементы 48
Ортонормированная система 48
Ортопроектор 20
Основная серия представлений 143
— — — группы $SL(2, C)$ 212
— — — — $SL(n, C)$ 227
— — — — $SO(n, C)$ 240
— — — — $Sp(2n, C)$ 240
— — — — $G_2$ 255
— — — — $SU(1, 1)$ 261
— — — — $SU(n, 1)$ 295
— — — — $Spin(n, 1)$ 296
— — — — $Sp(n, 1)$ 302
— — — — $SL(n, R)$ 308
— — — — $U(p, q; F)$ 313
— — унитарных представлений 138
— — — — группы $SL(2, C)$ 215
— — — — — $SL(n, C)$ 228
— — — — — $SO(n, C)$ 242
— — — — — $Sp(2n, C)$ 242
— — — — — $SU(1, 1)$ 262
Основная серия унитарных представлений группы $SL(2, R)$ 263
— — — — — $GL(n, R)$ 308
Отображение касательное 104
— корегулярное 103
— линейное 17
— производное 104
— симметризации 95
— $l$-гладкое 102

Подалгебра 31
— борелевская 76
— Картана 71, 81
— картановская 71, 81
— — главная 81
— — компактная 81
— Ли 64
— — коммутаторная 66
— — производная 66
— параболическая 77, 83
—, подчиненная функционалу 138
— редуктивная 80
— —, регулярно вложенная 93
Подгруппа 11
— борелевская 117
— главная векторная 116
— инвариантная 12
— картановская 115
— — главная 115
— Ли 107
— параболическая 117
— — каспидальная 150
— редуктивная 115
—, согласованная с функционалом 138
— стационарная 11
Подмногообразие 102
Подмодуль 23
— примарный 92
— циклический 24
Подпредставление 23
Подпространство 15
— вполне приводимое 21
— инвариантное 20, 21, 23, 33
— Картана 81
— корневое 71
— неприводимое 21
— несобственное 21
— нетривиальное 21
— приводимое 21
— собственное 21
— тривиальное 21
Поле 36
— скоростей 104
Полный набор неприводимых унитарных представлений группы аффинных преобразований 187, 193
— — — — — — Гейзенберга 200, 204
— — — — — — движений плоскости 196

Полный набор неприводимых унитарных представлений группы, универсальной накрывающей для $SL(2, \mathbf{R})$ 293
— — — — — — — $\mathbf{T}^n$ 158
— — — — — — — $SU(2)$ 159
— — — — — — — $SO(3)$ 162
— — — — — — — $U(n)$ 163
— — — — — — — $SU(n)$ 164
— — — — — — — $Sp(2n)$ 174
— — — — — — — $SO(2m)$ 178
— — — — — — — $SO(2m+1)$ 180
— — — — — — — $SL(2, \mathbf{C})$ 217
— — — — — — — $SL(3, \mathbf{C})$ 238
— — — — — — — $Sp(4, \mathbf{C})$ 253
— — — — — — — $G_2$ 256
— — — — — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 266
— — — — — — — $SO_0(2, 1)$ 273
— — — — — — — $GL(2, \mathbf{R})$ 294
— — — — — — — $SU(n, 1)$ 298
— — — — — — — $GL(3, \mathbf{R})$ 310
— — — — — — — $SU(2, 2)$ 318
Полугруппа 9
Полукольцо 36
Полунорма 47
— базисная 47
Поляризация функционала 139
— — нормальная 140
— — — регулярная 140
Порядок группы 9
Представление 13, 22, 23, 33
— алгебры 33
— — Ли 65
— — — присоединенное 111
— — невырожденное 33
— — регулярное 33, 34
— — фундаментальное 90
— аналитическое 122
— вещественное 173
— вполне приводимое 23
— голоморфное 122
— двузначное (ортогональной группы) 183
— дискретной серии 147
— дифференцируемое 121
— допустимое 145
— единичное 23
— индуцированное 28, 59, 98
— — голоморфно 124
— — инфинитезимально 124
— интегрируемое 123
— квадратично интегрируемое 147
— квазирегулярное 27, 225
— кватернионное 173
— класса I 58
— — $L_p$ 147
— коиндуцированное 98
— комплексно-аналитическое 122
— конечномерное 125
— контрагредиентное 25, 65
— коприсоединенное 136, 139
Представление кратное другому представлению 24
— линеаризуемое 30
— линейное 30
— минимальное 138
— непрерывное 54
— неприводимое 23, 33, 54, 55
— несамосопряженное 173
— общего положения группы $Z(n)$ 206
— приводимое 23
— присоединенное 66, 111
— проективное 30, 125
— равностепенно непрерывное 54
— раздельно непрерывное 54
— регулярное 26, 33, 66
— — левое 26
— — правое 26
— симметричное 130
— слабо содержится в другом представлении 62
—, соответствующее орбите 141
— сопряженное 25, 65
— спинорное 180
— точное 13, 24, 65
— — линейное 24
— тривиальное 23
— унитарное 25
— Шейла — Вейля 248
— Штейна 235
— элементарное 143
— $K$-финитное 125
Представления двойственные 25
— дизъюнктные 24, 55
— изоморфные 24
— эквивалентные 24, 33, 54
— — слабо 61
— — функционально 61
Преобразование Радона 152
— Фурье на группе 132
— — обратное 133
Принцип двойственности Понтрягина 56
— полной приводимости 29
Проективный предел групп 113
Проектор 20
Произведение аналитическое 112
— гильбертовых пространств тензорное 48
— — — — полное 48
— групп полупрямое 14
— — прямое 14, 40
— модулей тензорное 37
— представлений тензорное 24, 65
— пространств 16
— — тензорное 16
— скалярное 19
— элементов 9
Производная по направлению 103
Производное поле 104
Пространства двойственные 19

Пространство гильбертово 48
— Гординга 121
— евклидово 19
— касательное 103
— линейно связное 41
— локально выпуклое 47
— — евклидово 101
— — компактное 40
— накрывающее 41
— — односвязное 41
— нормированное 48
— односвязное 41
— симметрическое 119
— сопряженное алгебраически 17
— представления 23
— псевдоевклидово 19
— псевдоунитарное 19
— связное 40
— секвенциально полное 47
— топологическое векторное 46
— — — метризуемое 47
— — — полное 47
— унитарное 19
— Фреше 47
— Шварца 149
Прямой интеграл гильбертовых пространств 50
— — операторов 58
— — представлений 58
Пфаффиан матрицы 142
Пэли — Винера теорема для группы аффинных преобразований 193
— — — — $Z(n)$ 207
— — — — $SL(2, \mathbf{C})$ 219
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 272
— — — — $SU(1, 1)$ 272

Радикал группы 114
Разложение аналитическое 112
— Брюа 118
— Гаусса 117
— — в группе $GL(n, \mathbf{C})$ 163
— — — — $Sp(2n, \mathbf{C})$ 174
— — — — $SO(n, \mathbf{C})$ 178
— — — — $SL(2, \mathbf{C})$ 211
— — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 226
— — — — $Sp(2n, \mathbf{C})$, $SO(n, \mathbf{C})$ 238
— — — — $G_2$ 255
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 259
— Грама в группе $GL(n, \mathbf{C})$ 163
— — — — $Sp(2n, \mathbf{C})$ 174
— — — — $SO(n, \mathbf{C})$ 178
— Жордана 69
— Ивасавы 116, 118
— — в группе $SL(2, \mathbf{C})$ 211
— — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 226
— — — — $Sp(2n, \mathbf{C})$, $SO(n, \mathbf{C})$ 239
— — — — $G_2$ 255
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 259
— Картана 80, 116, 117
Разложение Картана в группе $SL(2, \mathbf{C})$ 212
— — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 226
— — — — $Sp(2n, \mathbf{C})$, $SO(n, \mathbf{C})$ 239
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 259
— Леви — Мальцева 114
— Ленглендса 118
— треугольное 82
— Хариш-Чандры 154
Размерность 15
— гильбертова пространства 48
— многообразия 101
— представления 23, 55
— — формальная 148
Ранг алгебры 71
— — вещественный 81
— — комплексный 81
— — полный 81
— группы вещественный 116
— — ограниченный 116
— — полный 116
— — расщепимый 116
Расслоенное $G$-пространство 107
Расширение алгебры 64
— поля алгебраическое 22
— универсальное 31
— центральное 30
Редуцирование представления 23
Ряд алгебры производный 66
— — центральный 66
— Жордана — Гельдера 137
— Кемпбелла — Хаусдорфа 109
— Фурье 133, 134, 161, 172

Семейства операторов дизъюнктные 22
— — эквивалентные 22
Семейство операторов вполне приводимое 21, 53
— — равностепенно непрерывное 51
— — симметричное 22
— — топологически неприводимое 52
— — $k$-неприводимое 52
Серия представлений бесконечная группы $G_{p,q}$; $\mathbf{F}$ 323
— — дискретная 147, 149
— — — антиголоморфная группы $U(p, q)$ 315
— — — голоморфная группы $U(p, q)$ 315
— — — группы $SL(2, \mathbf{R})$ 265
— — — — $GL(2, \mathbf{R})$ 294
— — —, пределы 149
— — дополнительная группы $SL(2, \mathbf{C})$ 217
— — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 233
— — — — $SO(m, \mathbf{C})$, $Sp(2n, \mathbf{C})$ 249
— — — — $G_2$ 257
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$, $SU(1, 1)$ 264

Серия представлений дополнительная группы $GL(2, \mathbf{R})$ 295
— — — — $U(p, q; \mathbf{F})$ 315
— — основная 143
— — — вырожденная группы $SL(n, \mathbf{C})$ 229
— — — — — $SO(m, \mathbf{C})$, $Sp(2n, \mathbf{C})$ 244
— — — — — $Sp(2n, \mathbf{C})$ 247
— — — — — $G_2$ 257
— — — — — $GL(2, \mathbf{R})$ 295
— — — — — $GL(n, \mathbf{R})$ 309
— — — — — $U(p, q; \mathbf{F})$ 314
— — — — — $SU(2, 2)$ 318
— — — группы $SL(2, \mathbf{C})$ 212
— — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 227
— — — — $SO(n, \mathbf{C})$, $Sp(2n, \mathbf{C})$ 241
— — — — $G_2$ 256
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$, $SU(1, 1)$ 260
— — — — $U(n, 1)$ 296
— — — — $Spin(n, 1)$ 297
— — — — $Sp(n, 1)$ 302
— — — — $GL(n, \mathbf{R})$ 309
— — — — $U(p, q; \mathbf{F})$ 313
— — — — $SU(2, 2)$ 318
— — — невырожденная 144
— — — — группы $SL(2, \mathbf{C})$ 215
— — — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 228
— — — — — $SO(n, \mathbf{C})$, $Sp(2n, \mathbf{C})$ 242
— — — — — $G_2$ 257
— — — — — $SL(2, \mathbf{R})$, $SU(1, 1)$ 262
— — — — — $GL(2, \mathbf{R})$ 294
— — — унитарная 138
Сигнатура представления группы $U(n)$ 164
— — — $Sp(2n)$ 174
— — — $SO(2m)$ 179
— — — $SO(2m+1)$ 181
Система корней 72
— — приведенная 73
— — свободная 82
— образующих алгебры 31
Скаляр 14
Скобка Пуассона 106
След оператора 130
— представления 26
Смежности правые классы 11
Сопряженные элементы 13
Спектр модуля 92
— простой 58
— $n$-кратный 58
Спектральный синтез 62
Сплетающий оператор 22, 24
— — I рода 144
— — II рода 144
Структурная матрица Картана 73
Структурные константы 64
Сумма подпредставлений прямая 24
— представлений прямая 24
— пространств 16
Сумма пространств гильбертовых прямая 48
— — — — непрерывная 50
— — — — ортогональная 50
— — прямая 16
— — — ортогональная 20
Сферическая функция 57
— — зональная 151
Схема Дынкина 73
— Сатаке 88
— Юнга 166

Тело 36
— кватернионов 300, 303
Тензор ковариантный 35
— — кососимметрический 35
— — симметрический 35
Тензорное поле ковариантное 105
— — контравариантное 105
— — кососимметрическое 105
— — симметрическое 105
— произведение представлений группы аффинных преобразований 195
— — — — Гейзенберга 203
— — — — движений плоскости 199
— — — — $SL(2, \mathbf{C})$ 220
— — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 238
— — — — $SO_0(2, 1)$ 273
Теорема Адо 65
— Ауслендера — Константа 140
— Бернсайда 26, 29, 34
— Биркгофа — Витта 94
— Блаттнера — Шмида 151
— Бореля — Морозова 76
— Г. Вейля 68, 115
— Винера 134
— Гельфанда 96, 134
— Глисона — Монтгомери — Циппина 106
— Желобенко — Наймарка 138
— Жордана 69
— Картана 80, 110
— Кириллова 139, 140
— Леви 68
— Ленглендса — Кнаппа — Цукермана 150
— Ли 66, 89
— Макки 60, 61
— Мальцева 68
— Нельсона 123
— основная теории унитарных представлений 57, 58
— Пэли — Винера 156
— Радона — Никодима 44
— Сюгиуры 82
— Хаара — фон Неймана — Вейля 43
— Хариш-Чандры 69, 81, 144, 145, 148, 155
— Шварца 129
— Шевалле 71, 97

Теорема Шура 31
— Эймара 133
— Энгеля 67
Топология ослабленная 51
— простой сходимости 52
— равномерная 52
— сильная 51, 52
— — операторная 52
— слабая 50, 51
— — операторная 52
Тороидальная часть 81, 113
Треугольное усечение 83
Треугольность представления 66
— — строгая 67

Умножение 9, 31
— внешнее 36
Унитарный прием Г. Вейля 122

Фактор Леви 68
Факторалгебра 32, 66
Факторгруппа 12
Фактормногообразие 102
Фактормодуль 23, 34
Факторпредставление 23
Факторпространство 11, 16
Фактортопология 40
Фильтрация алгебры 32
Форма билинейная инвариантная 67
— Вейля компактная 79
— вещественная алгебры 79
— — группы 112
— дифференциальная 105
— — замкнутая 105
— — точная 105
— Киллинга 68
— Киллинга — Картана 68
— киллингова 68
— Кириллова 139
— линейная 17
— параболическая 153
— полуторалинейная 19
— — эрмитова 19
— $n$-линейная 18
Формула Г. Вейля 91
— Кемпбелла — Хаусдорфа 108
— Кириллова 140
— Костанта 91
— локальной рекуррентности 92
— обращения 132
— Планшереля 132
— — для группы аффинных преобразований прямой 191, 192, 195
— — — — Гейзенберга 201
— — — — движений плоскости 198
— — — — ранга I 135
— — — — $Z(n)$ 207
— — — — $SL(2, \mathbf{C})$ 218
Формула Планшереля для группы $SL(n, \mathbf{C})$ 237
— — — — $SU(1, 1)$ 271
— — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 271
— — — — $G_{p,q}$; F 323
— — — — $U(p, q;$ F$) \cdot \mathbf{F}^{p+q}$ 323
— Фрейденталя 91
Фробениуса правило 30, 60
Функтор ковариантный 38
Функционал линейный 17, 50
— регулярный 139
— $n$-линейный 18
Функция Гамильтона 106
— разбиения 91
— сферическая 57
— — зональная 151
Фурье ряды, абсолютно сходящиеся 133, 134
— — на $SU(2)$ 161
— — $SU(n)$ 172

Характер 23
— алгебры Ли 88
— общего положения группы $Z(n)$ 206
— представления 26, 34, 131
— — алгебры 90, 91
— — инфинитезимальный 142
— тривиальный 88
Характеры неприводимых унитарных представлений группы Гейзенберга 201, 205
— — — — — $SU(2)$ 160
— — — — — $U(n)$ 165
— — — — — $SU(n)$ 165
— — — — — $Sp(2n)$ 175
— — — — — $SO(2m)$ 179
— — — — — $SO(2m+1)$ 180
— — — — — $SL(2, \mathbf{C})$ 218
— — — — — $SL(n, \mathbf{C})$ 236
— — — — — $Sp(2m, \mathbf{C})$ 251
— — — — — $SO(n, \mathbf{C})$ 251
— — — — — $SL(2, \mathbf{R})$ 270
— — — — — $SU(1, 1)$ 270

Центр алгебры 32, 66
— группы 12
Централизатор 12

Число 14
— сплетения 22

Штрих — транспонирование 70
Шура лемма 22, 25, 53, 55

Эквивалентности классы 10
— отношение 10
Эквивалентность инфинитезимальная 146
— слабая 146
Экспоненциальное отображение 108
Элемент Казимира 96, 97
— невырожденный 71
— нейтральный 9
— нильпотентный 69, 76
— обратимый 9
— — слева 9
— обратный 9
— полупростой 69
— регулярный 71, 146, 148
— центральный 32
Эндоморфизм 17

Ядро гомоморфизма 13
Якоби тождество 63

$\mathscr{A}$-бимодуль 33
$\mathscr{A}$-модуль левый 33, 36
— правый 33
— простой 33

$F$-пространство 47

$G$-многообразие левое 106
$G$-многообразие правое 106
$G$-модуль 23
— вполне приводимый 23
— неприводимый 23
— приводимый 23
— циклический 24
$G$-пространство 10
— топологическое 41

$k$-форма 105
— внешняя 105

$\mathfrak{g}$-модуль индуцированный 98
— левый 88

# УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ


$GL(n, \Phi)$ — полная линейная группа над полем $\Phi$ 10, 45
$\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел 11
$\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел 11
$O(n, \mathbf{R})$ — вещественная ортогональная группа 11
$S^1$ — единичная окружность 11
$S^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$ 12
$\mathrm{Aut}\, G$ — группа автоморфизмов группы $G$ 13
$\ker$ — ядро отображения 13
$\mathbf{R}_+$ — группа положительных чисел 13
$\mathbf{R}^n$ — $n$-мерное вещественное арифметическое пространство 13
$\times$ — прямое произведение 14
$\dim$ — размерность 15
$\mathrm{card}$ — мощность 15
$\delta_a$ — дельта-функция в точке $a$ 15
$\Phi^X$ — множество функций на $X$ со значениями в $\Phi$ 15
$\oplus$ — прямая сумма 16, 24, 48
$\otimes$ — тензорное произведение 16, 24, 37, 48, 65
$/$ — факторизация 16
$\mathrm{Hom}\,(E, F)$ — множество гомоморфизмов из $E$ в $F$ 17
$\mathrm{End}\, E$ — множество эндоморфизмов $E$ 17
$L(E, F)$ — пространство линейных операторов из $E$ в $F$ 17
$L(E)$ — пространство линейных операторов в $E$ 17
$E^*$ — пространство линейных функционалов на $E$ 19
$|_V$ — ограничение на подпространство $V$ 20
$I(M, N)$ — пространство операторов, сплетающих $M$ и $N$ 22
$c(M, N)$ — число сплетения $M$ и $N$ 22
$\varphi \downarrow H$ — ограничение или редуцирование представления $\varphi$ на подгруппу $H$ 23
$\sim$, $\simeq$ — эквивалентность 24
$I(\varphi, \psi)$, $\mathrm{Hom}_G\,(\varphi, \psi)$ — пространства сплетающих операторов 24
$\mathrm{tr}$ — след 26
$\tau \uparrow G$, $\mathrm{ind}_H^G \tau$ — представление группы $G$, индуцированное представлением $\tau$ ее подгруппы $H$ 28
$\mathrm{Aut}\, PV$ — группа проективных автоморфизмов 30
$\mathrm{Mat}_n\, \Phi$ — алгебра квадратных матриц порядка $n$ над полем $\Phi$ 32
$T(E)$ — тензорная алгебра над пространством $E$ 35

$S(E)$ — симметрическая алгебра над пространством $E$ 35
$\Lambda(E)$ — внешняя алгебра над пространством $E$ 35
Mor $(\tau, \sigma)$ — семейство морфизмов из объекта $\tau$ в объект $\sigma$ 37
$M_n(\Phi)$ — алгебра матриц $n$-го порядка над полем $\Phi$ 45
$SL(n, \Phi)$ — унимодулярная линейная группа 45
$O(n, \Phi)$ — ортогональная группа 45
$SO(n, \Phi)$ — собственная ортогональная группа 45
$U(n)$ — унитарная группа 45
$SU(n)$ — собственная унитарная группа 45
$Sp(n, \Phi)$ — симплектическая группа 45
$Spin(n, \Phi)$ — спинорная группа 45
$O(p, q)$ — псевдоортогональная группа 45
$U(p, q)$ — псевдоунитарная группа 45
$B_+(n, \Phi)$ — полная треугольная группа 45
$N_+(n, \Phi)$ — полная унипотентная группа 45
$\delta_{ij}$ — символ Кронекера 45
$C(X)$ — пространство непрерывных функций на компакте $X$ 49
$E'$ — пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве $E$ 50
$\int\oplus$ — непрерывная прямая сумма, или прямой интеграл, гильбертовых пространств 50
$[\cdot, \cdot]$ — коммутатор 63
$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ 64
ad — присоединенное представление алгебры Ли 65
Aut $\mathfrak{g}$ — группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ 70
$A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ — простые комплексные алгебры Ли 74
$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ — алгебра Ли группы $GL(n, \mathbf{C})$ 74
$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ — алгебра Ли группы $SL(n, \mathbf{C})$ 74
$\mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ — алгебра Ли группы $SO(n, \mathbf{C})$ 75
$\mathfrak{sp}(n, \mathbf{C})$ — алгебра Ли группы $Sp(n, \mathbf{C})$ 75
$g\mathbf{C}$ — комплексификация алгебры Ли $\mathfrak{g}$ 79
$\mathfrak{k}$ — максимальная компактная подалгебра 80
$\mathfrak{p}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}$ 80
$\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$, ... — вещественные формы комплексных полупростых алгебр Ли 84
$\pi_\lambda$ — неприводимое представление алгебры Ли со старшим весом $\lambda$ 90
Vect $\mathcal{M}$ — алгебра Ли векторных полей на многообразии $\mathcal{M}$ 104
exp — экспоненциальное отображение 108
log — отображение, обратное экспоненциальному 108
$M_1(G)$ — алгебра мер группы $G$ 127
$C_0^\infty(G)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $G$ 128
$C^\infty(G)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $G$ 128
$D_0(G)$ — пространство финитных обобщенных функций на $G$ 128
$gl(n, \mathbf{C})$ — алгебра Ли группы $GL(n, \mathbf{C})$ 168
$u(n)$ — алгебра Ли группы $U(n)$ 168
$so(n)$ — алгебра Ли группы $SO(n, \mathbf{R})$ 184
codim — коразмерность 203

$Z(n)$ — группа верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали 205

$K(X)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $X$ 216

$SO_0(2, 1)$ — компонента единицы в унимодулярной псевдоортогональной группе 260

$\mathrm{Spin}(n, 1)$ — псевдоспинорная группа 296

$\mathbf{H}$ — тело кватернионов 300

$O$ — алгебра чисел Кэли 303

$U(p, q; \mathbf{F})$ — псевдоунитарная группа над полем $\mathbf{F}$ 312

$SU(p, q; \mathbf{F})$ — унимодулярная псевдоунитарная группа 312

$\mathrm{Im}\,\mathbf{F}$ — мнимая часть поля 319

$G_{p,q;\mathbf{F}}$ — полупрямое произведение обобщенной группы Гейзенберга и псевдоунитарной группы 319

$N_{p,q;\mathbf{F}}$ — обобщенная группа Гейзенберга 319

$\square$ — оператор Кодаира-Ходжа 321