

В. А. Прянишников, Е. А. Петров, Ю. М. Осипов

ДЛЯ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ТОЭ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

WWW.ULIT.RU

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ТОЭ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

**В. А. Прянишников
Е. А. Петров
Ю. М. Осипов**

Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах

Практическое пособие

*Под общей редакцией
проф. В. А. Прянишникова*

Издательство «Корона.Век»
Санкт-Петербург
2021

ББК 31.21
П 85

Прянишников В. А., Петров Е. А., Осипов Ю. М.

Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: Практическое пособие. —
СПб.: Издательство «Корона.Век», 2018. — 336 с., ил.

ISBN 978-5-903383-74-0

Учебное пособие соответствует программам курсов электротехники и ТОЭ. Пособие включает примеры и задачи по следующим темам: расчет цепей на постоянном токе, расчет цепей на синусоидальном токе, расчет цепей на несинусоидальном токе, расчет переходных процессов в электрических цепях, компьютерное моделирование электрических цепей.

Раздел, включающий задачи для самостоятельного решения, окажет студентам и преподавателям неоценимую помощь в учебном процессе.

Дополнительные материалы к книге можно скачать в сети интернет по адресу www.ulit.ru/files/

ISBN 978-5-903383-74-0

© Издательство «Корона.Век», 2021.

КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА ОПТОМ И В РОЗНИЦУ

Интернет-магазин: **WWW.ULIT.RU**, E-mail: **book@ulit.ru**

Книга-почтой: 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29 (для Корона.Век)

Оптовая торговля: (812) 969-73-34, (499) 148-35-12

Прянишников В. А., Петров Е. А., Осипов Ю. М.

Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах
практическое пособие

Ответственный за выпуск *Зилина М. С.*

Компьютерная верстка *Барышникова Т. К.*

Компьютерный дизайн обложки *Чиклаев А. А.*

Компьютерная графика *Иванов Г. В.*

Формат 70×100 1/16. Бумага газетная.

Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Объем 21 п. л.

Доп. тираж 300 экз.

Содержание

Введение	7
Методические указания по выполнению заданий и контрольных работ	9

Раздел 1 **РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА**

1.1. Основные понятия и определения	11
1.2. Расчет эквивалентных параметров соединений элементов	13
<i>Задание 1.1. Расчет эквивалентных параметров</i> <i>соединений элементов</i>	22
1.3. Расчет параметров эквивалентных источников	26
<i>Задание 1.2. Расчет параметров эквивалентного источника</i>	29
1.4. Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа	33
1.5. Расчет сложных цепей постоянного тока	36
1.6. Особенности решения обратных задач	40
1.7. Энергетические расчеты в цепях постоянного тока	45
<i>Задание 1.3. Расчет сложной цепи постоянного тока</i>	48

Раздел 2 **РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**

2.1. Способы представления синусоидальных величин	56
2.2. Энергетические расчеты в цепи синусоидального переменного тока	60
2.3. Расчет цепей синусоидального переменного тока по мгновенным значениям	61
<i>Задание 2.1. Расчет канонической схемы последовательного контура</i>	66
<i>Задание 2.2. Расчет разветвленных цепей синусоидального</i> <i>переменного тока по мгновенным значениям</i>	71
2.4. Расчет цепей синусоидального переменного тока по комплексным значениям	73
<i>Задание 2.3. Расчет цепей по комплексным значениям</i>	88
2.5. Расчет резонансных цепей	92
<i>Задание 2.4. Расчет резонансных схем</i>	99

Раздел 3
РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

3.1. Способы представления несинусоидальных функций	102
3.2. Энергетические характеристики несинусоидального тока	103
3.3. Расчет цепей несинусоидального переменного тока по мгновенным значениям	105
3.4. Расчет цепей несинусоидального переменного тока по комплексным значениям	116
<i>Задание 3.1. Расчет цепей несинусоидального тока</i>	124
<i>Задание 3.2. Расчет цепей с гармоническими источниками разных частот</i>	126

Раздел 4
РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

4.1. Способы расчета переходных процессов	128
4.2. Расчет переходных процессов по мгновенным значениям	136
<i>Задание 4.1. Расчет переходных процессов в цепях первого порядка.</i>	193
<i>Задание 4.2. Расчет переходных процессов в цепях второго порядка</i>	197
<i>Задание 4.3. Расчет переходных процессов при импульсных воздействиях.</i>	202

Раздел 5
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

5.1. Общие сведения о моделирующих программах	206
5.2. Моделирование цепей постоянного тока	225
5.3. Моделирование цепей синусоидального переменного тока	233
5.4. Моделирование цепей периодического несинусоидального тока	236
5.5. Моделирование переходных процессов в электрических цепях	264

Раздел 6
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6.1. Цепи постоянного тока	280
6.2. Цепи синусоидального переменного тока	292
6.3. Цепи несинусоидального тока	305
6.4. Переходные процессы в электрических цепях	312

ПРИЛОЖЕНИЯ	323
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	333

Даже маленькая практика стоит большой теории.

Закон Букера

ВВЕДЕНИЕ

Курс теоретических основ электротехники невозможно освоить без практических расчетов электрических цепей. Многообразие структур этих цепей и режимов их работы, применение достаточно сложного математического аппарата для их расчета делают эту задачу весьма важной при освоении курса. Давно установлено, что лучше всего учиться на ошибках, поэтому после решения любой типовой задачи результат целесообразно проверить моделированием на компьютере.

В настоящее время имеется много хороших учебников по ТОЭ (перечень некоторых из них приведен в библиографии). Однако с задачками дело обстоит несколько хуже. Не все из них отвечают изменившемуся состоянию техники расчета и особенно вопросам моделирования электрических цепей. Большинство студентов теперь имеет доступ к компьютерам с их весьма обширными и разнообразными программами. Все это авторы постарались учесть при написании данного учебного пособия.

В основу задачника были положены курс лекций по ТОЭ [11] и типовые задания, которые в течение ряда лет использовались авторами при чтении курсов электротехники и ТОЭ в Санкт-Петербургском институте точной механики и оптики (Техническом университете СПб ИТМО).

Авторы стремились к такой форме изложения материала, которая способствовала бы учащимся самостоятельно выбрать план решения задачи. В связи с этим в задачник были включены следующие материалы:

- ❖ *краткие теоретические сведения*, позволяющие облегчить решение практических задач;
- ❖ *примеры решения типовых задач с разбором результатов решения*;

- »» *многовариантные типовые задания*, которые можно использовать в качестве контрольных работ или домашних заданий;
- »» *вопросы моделирования электрических схем*, прежде всего с целью проверки правильности выполненных расчетов;
- »» *применение персональных компьютеров* при решении задач.

Содержание настоящего учебного пособия представлено следующими основными разделами:

- »» расчет цепей *при постоянном электрическом токе и напряжении*;
- »» расчет цепей *при синусоидальном токе и напряжении* в стационарном режиме по мгновенным значениям;
- »» расчет цепей *при синусоидальном напряжении и токе* в стационарном режиме по комплексным значениям;
- »» расчет цепей *при несинусоидальных периодических токах и напряжениях* в стационарных режимах работы;
- »» расчет цепей *в нестационарных режимах работы по мгновенным значениям* напряжений и токов (классический метод и метод переменных состояния);
- »» расчет цепей *в нестационарных режимах работы по комплексным значениям* напряжений и токов (операторный метод).

Принятый перечень разделов не перекрывает все теоретические вопросы курса ТОЭ, однако несомненно то, что он будет способствовать его лучшему усвоению.

Авторы будут благодарны читателям за любые указания о замеченных недостатках или пожеланиях по усовершенствованию настоящего пособия. Все замечания и предложения просим присылать в адрес редакции издательства «Корона принт» по адресу: 198005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., д. 29.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Типовые задания настоящего учебного пособия можно использовать в качестве контрольных работ при аудиторных занятиях или как домашние задания. Их назначение — проверка знаний учащихся по отдельным разделам курса. Для выполнения любого задания необходимо прежде всего изучить теоретический материал по одному из рекомендованных учебников и ознакомиться с примерами решения типовых задач, приведенными в настоящем пособии.

При оформлении решения любой задачи *следует вначале четко изложить условия задачи, привести исходную электрическую схему и проставить на ней буквенные и числовые значения параметров элементов. Все рисунки, схемы и графики должны быть выполнены аккуратно с помощью чертежных инструментов.* Графики следует выполнять на миллиметровой бумаге с указанием выбранного масштаба с шкалами, кратными 1, 2 или 5. Допускается применение логарифмических или полулогарифмических шкал, а также растянутых шкал со смещенным нулем. На осях координат должны быть указаны значения величин и единицы их измерения.

При решении задач необходимо четко *указывать порядок решения* и используемые при расчете формулы. Окончательный результат по каждому пункту задачи должен быть выделен из общего текста решения задачи. Решение задач не следует перегружать подробными математическими преобразованиями. *Каждый этап решения задачи должен иметь краткие пояснения.*

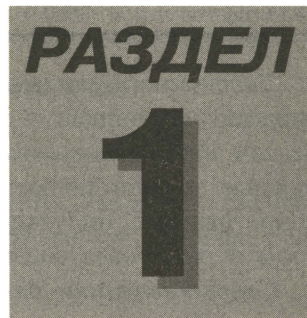
При решении задач можно использовать калькуляторы или персональные компьютеры. При использовании персональных компьютеров можно применять универсальный калькулятор, который имеется в прилагаемой к учебному пособию дискете. Программное обеспечение универсального калькулятора позволяет использовать его в следующих режимах работы с действительными или комплексными числами:

- »» калькулятор;
- »» решение системы линейных алгебраических уравнений;
- »» определение собственных чисел матрицы.

Результаты расчета следует приводить с точностью до трех-четырех значащих цифр. В ходе решения можно приводить краткие комментарии. В окончательных результатах расчета обязательно указывать размерность полученных значений величин.

Оформленная контрольная работа или задание должны иметь *титульный лист с указанием факультета или отделения, номера группы или ее шифра, фамилии и имени учащегося.* В конце работы следует привести перечень ис-

пользованной литературы, дату выполнения работы и подпись исполнителя. Виды выполняемых заданий и контрольных работ устанавливаются кафедрами или методическими комиссиями учебного заведения. Объем заданий и контрольных работ при необходимости можно сокращать. Все задания и контрольные работы выполнены в тридцати вариантах.



РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Все не так просто, как кажется.

Первый закон Мерфи

1.1. Основные понятия и определения

Электрической цепью называют совокупность различных электротехнических устройств, соединенных между собой проводниками. Состояние электрической цепи можно описать с помощью понятий **напряжения** и **тока**. Все электротехнические устройства, входящие в электрическую цепь, условно можно разделить на две большие группы: **источники** и **приемники** электрической энергии.

К источникам электрической энергии принято относить различные генераторы, которые преобразуют один из видов неэлектрической энергии в электрическую: электромеханические, тепловые, радиоизотопные и другие. Различают два вида источников электрической энергии: источники напряжения и источники тока. **Идеальный источник напряжения** характеризуется неизменным напряжением на зажимах при любом токе, протекающем в нем. Его внутреннее сопротивление $r_{\text{и}}$ равно нулю, поэтому потери энергии в нем отсутствуют. **Идеальный источник тока** характеризуется неизменным значением тока при любом напряжении на его зажимах. Внутренняя проводимость такого источника $g_{\text{и}}$ равна нулю, поэтому потери энергии здесь также отсутствуют.

Реальные источники отличаются от идеальных тем, что в них учтены потери энергии. В связи с этим в схемах замещения реальных источников напряжения присутствует внутреннее сопротивление источника $r_{\text{и}}$, а в схемах замещения реального источника тока — внутренняя проводимость $g_{\text{и}}$.

Пассивными называют элементы электрической цепи, которые преобразуют энергию источников в любой другой вид энергии или запасают ее в электрическом или магнитном поле. Пассивные элементы принято делить на двухполюсные и многополюсные. К двухполюсным пассивным элементам относят сопротивление, индуктивность и емкость, а к многополюсным — трансформаторы и различные соединения двухполюсных элементов.

Сопротивлением называют такие пассивные элементы, в которых происходит преобразование электрической энергии в любой другой вид энергии (например, световую, звуковую или механическую). Простейшим реальным элементом, обладающим сопротивлением, является **резистор**.

Индуктивностью называется пассивный элемент электрической цепи, который способен запасать энергию источников в магнитном поле без преобразования ее в другой вид энергии. Простейшим реальным элементом, обладающим индуктивностью, является **катушка**.

Емкостью называется пассивный элемент электрической цепи, который способен запасать энергию источников в электрическом поле без преобразования ее в другой вид энергии. Простейшим реальным элементом, обладающим емкостью, является **конденсатор**.

На рис.1.1 показаны условные обозначения элементов на электрических схемах

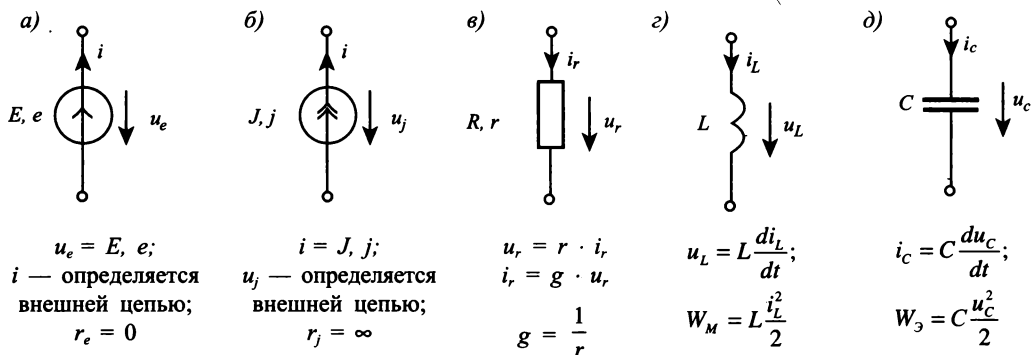


Рис. 1.1. Идеальные элементы электрических цепей:

а — источник напряжения; б — источник тока; в — сопротивление; з — индуктивность; д — емкость

и положительные направления токов и напряжений в них. Перед расчетом цепи необходимо указать эти направления. Направление активных элементов определяется их полярностью. Стрелка на изображении источника постоянного напряжения соответствует направлению перемещения условных положительных зарядов. Аналогично, стрелка на изображении источника постоянного тока указывает направление электрического тока в нем.

1.2. Расчет эквивалентных параметров соединений элементов

Последовательное соединение элементов. Соединение элементов называют последовательным, если в них протекает один и тот же ток. На рис. 1.2а показано

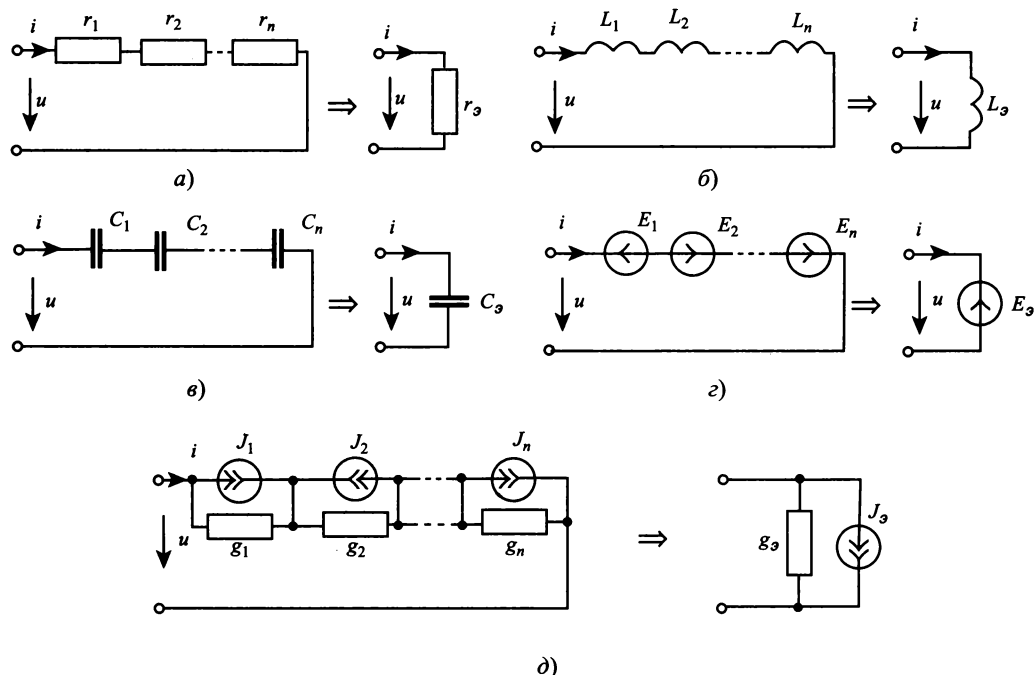


Рис. 1.2. Последовательное соединение элементов

последовательное соединение n сопротивлений. Это соединение элементов можно заменить одним эквивалентным сопротивлением, вычисленным по формуле:

$$r_3 = \sum_{k=1}^n r_k.$$

При последовательном соединении проводимостей g_k эквивалентная проводимость определяется по формуле:

$$1/g_3 = \sum_{k=1}^n (1/g_k).$$

Для последовательного соединения индуктивностей и емкостей используют аналогичные соотношения (рис.1.2б и рис.1.2в):

$$L_s = \sum_{k=1}^n L_k,$$

$$1/C_s = \sum_{k=1}^n (1/C_k).$$

При объединении последовательно соединенных идеальных источников напряжения, как показано на рис. 1.2г, эквивалентное напряжение E_s определяется их алгебраической суммой, знаки в которой учитывают направление отдельных источников:

$$E_s = \sum_{k=1}^n E_k.$$

Последовательное соединение идеальных источников тока не допускается, так как значение тока эквивалентного источника в этом случае оказывается неопределенным. Однако последовательное включение реальных источников тока, как показано на рис. 1.2д, позволяет определить проводимость и ток эквивалентного источника по формулам, в которых учитывается полярность составляющих токов:

$$1/g_s = \sum_{k=1}^n 1/g_k,$$

$$J_s/g_s = \sum_{k=1}^n (J_k/g_k),$$

где J_k и g_k — токи и проводимости составляющих источников.

Параллельное соединение элементов. Соединение нескольких элементов называют параллельным, если напряжение на каждом из элементов имеет одно и то же значение. На рис. 1.3а показано параллельное соединение проводимостей g_k , которое можно заменить эквивалентной проводимостью g_s , используя формулу:

$$g_s = \sum_{k=1}^n g_k.$$

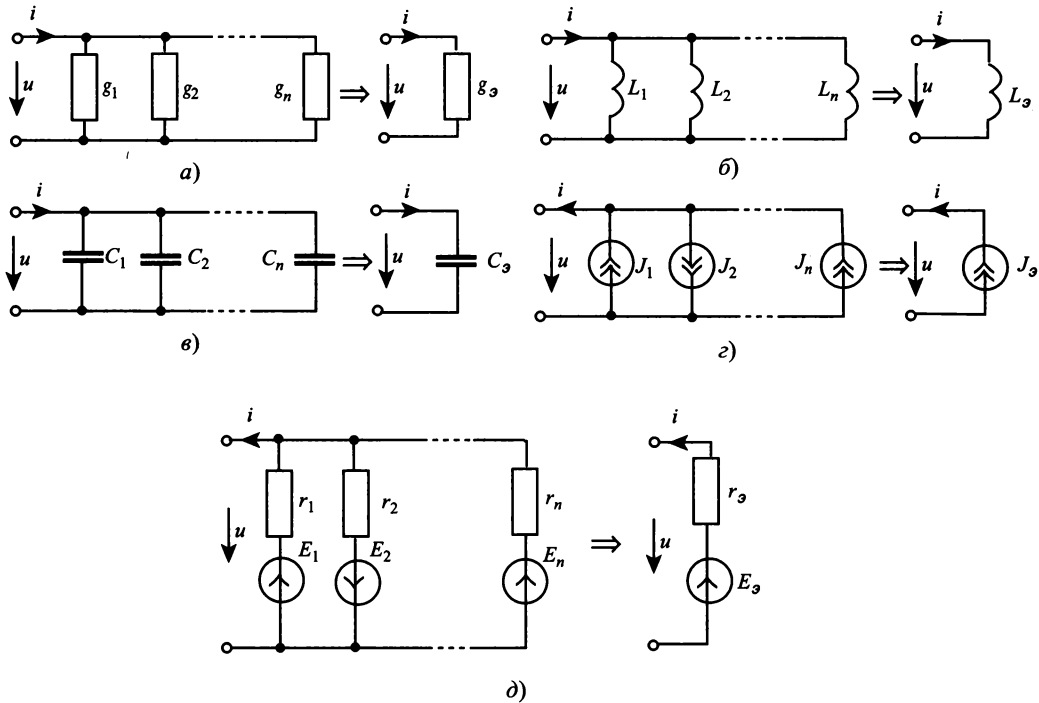


Рис. 1.3. Параллельное соединение элементов

При параллельном соединении сопротивлений r_k эквивалентное сопротивление r_3 определяют по формуле

$$1/r_3 = \sum_{k=1}^n 1/r_k,$$

где: $r_k = 1/g_k$; $r_3 = 1/g_3$ — сопротивления составляющих и эквивалентного элементов, соответственно.

Так, например, для параллельного соединения элементов r_1 и r_2 имеем $r_3 = r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$ или $g_3 = g_1 + g_2$.

При параллельном соединении индуктивностей, емкостей и источников тока, изображенных на рис.1.3б,в,г, их эквивалентные значения определяют по формулам

$$1/L_3 = \sum_{k=1}^n 1/L_k,$$

$$C_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n C_k,$$

$$J_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n J_k,$$

где J_{Σ} — определяется алгебраической суммой, знаки в которой учитывают направления составляющих источников тока.

Параллельное соединение идеальных источников напряжения не допускается, так как при этом напряжение эквивалентного источника оказывается неопределенным. Однако параллельное соединение реальных источников напряжения, в которых учтены внутренние сопротивления $r_k = g_k^{-1}$ составляющих источников (рис. 1.3д), позволяет определить напряжение E_{Σ} и сопротивление r_{Σ} эквивалентного источника по формулам, в которых учитывается полярность составляющих источников:

$$1/r_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n 1/r_k,$$

$$E_{\Sigma}/r_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n (E_k/r_k).$$

В разветвленных электрических цепях можно выделить фрагменты последовательно и параллельно соединенных элементов. Такое соединение называется смешанным. Постепенно, шаг за шагом заменяя отдельные группы элементов на эквивалентные, можно заменить все элементы одним эквивалентным, присоединенным к одному источнику питания. Значения параметров пассивных эквивалентных элементов в такой схеме часто называют входными.

Пример 1.1. Определить эквивалентное сопротивление для схемы, изображенной на рис.1.4а, если $r_1 = 3 \text{ Ом}$, $r_2 = 5 \text{ Ом}$, $r_3 = 6 \text{ Ом}$, $r_4 = 4 \text{ Ом}$, $r_5 = 4 \text{ Ом}$.

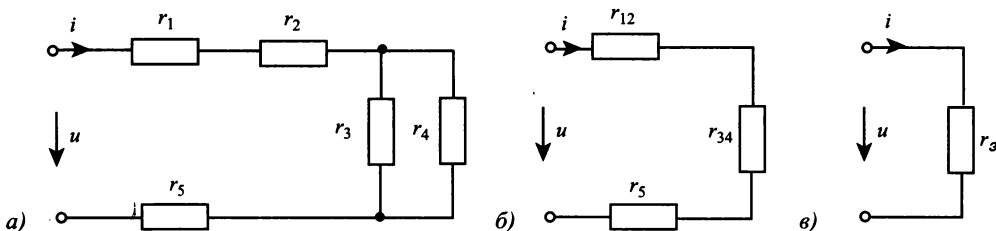


Рис. 1.4. К расчету эквивалентного сопротивления последовательно-параллельной цепи

Решение. Решение задачи произведем в два этапа. На первом этапе объединим последовательно соединенные элементы r_1 и r_2 и параллельно соединенные элементы r_3 и r_4 :

$$r_{12} = r_1 + r_2 = 3 + 5 = 8 \text{ Ом};$$

$$r_{34} = r_3 r_4 / (r_3 + r_4) = 6 \cdot 4 / (6 + 4) = 2,4 \text{ Ом}.$$

В результате схема упрощается и принимает вид последовательного соединения трех элементов, как показано на рис.1.4б. На втором этапе суммируем сопротивления r_{12} , r_{34} и r_5 (рис.1.4в):

$$r_3 = r_{12} + r_{34} + r_5 = 8 + 2,4 + 4 = 14,4 \text{ Ом}.$$

В результате расчета вся совокупность сопротивлений сводится к одному эквивалентному, которое и будет входным или эквивалентным сопротивлением цепи.

Преобразования элементов, соединенных по схемам звезды и треугольника. В ряде случаев встречаются соединения групп элементов, для которых необходимо выполнить преобразование элементов, соединенных по схемам трехлучевой звезды или по схеме треугольника. После этого можно выполнить эквивалентные преобразования и определить входное сопротивление цепи. На рис.1.5 показаны такие соединения для сопротивлений и проводимостей, а также приведены формулы для их эквивалентных преобразований.

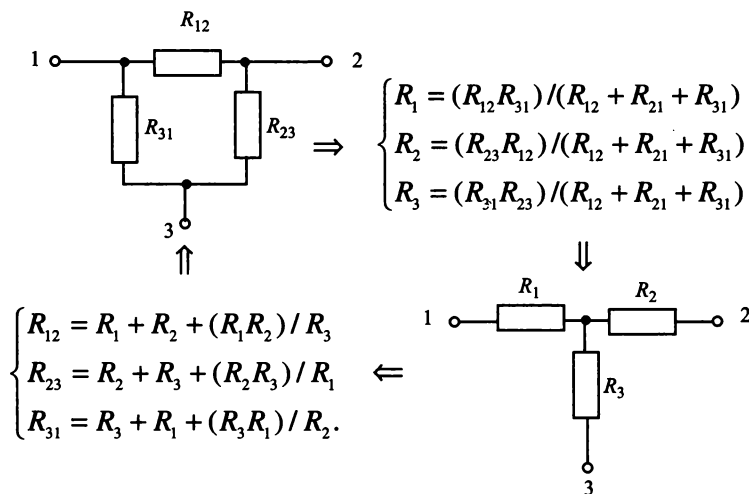


Рис. 1.5. Формулы преобразования звезды в треугольник и обратно (для сопротивлений)

Аналогичные преобразования можно выполнить для соединений звездой или треугольником индуктивностей и емкостей, которые изображены на рис. 1.6.

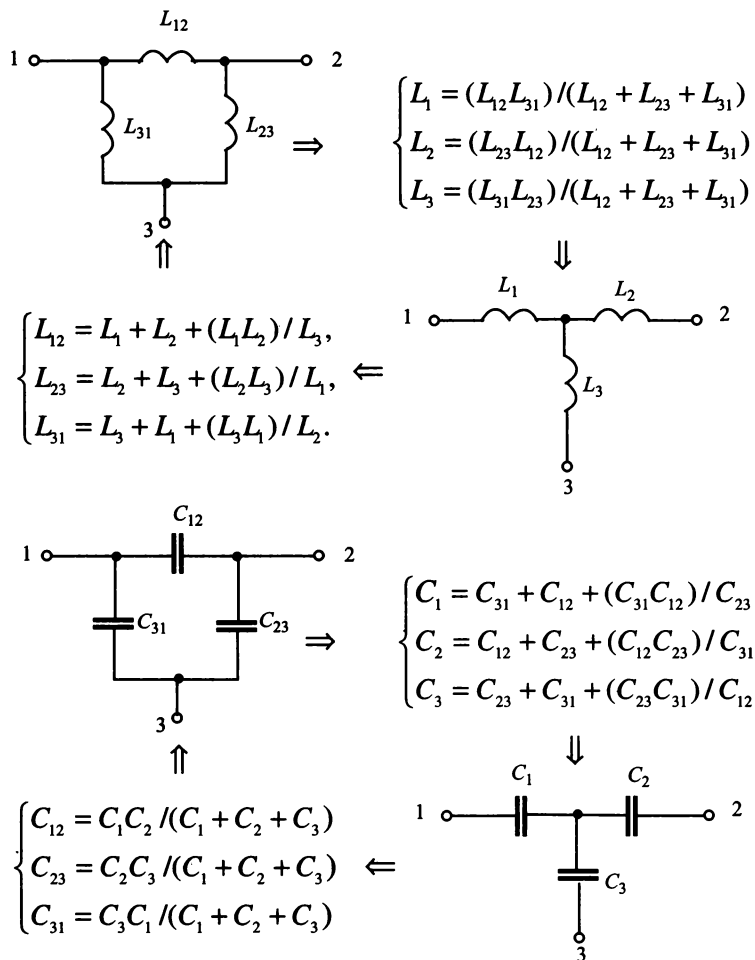


Рис. 1.6. Формулы преобразования индуктивной и емкостной звезды в треугольник и обратно

Пример 1.2. Для цепи, изображенной на рис. 1.7, требуется определить входное сопротивление, если сопротивления схемы имеют следующие значения: $r_1 = r_4 = 1 \text{ Ом}$, $r_2 = r_5 = 4 \text{ Ом}$, $r_3 = r_6 = 5 \text{ Ом}$.

Решение. Варианты упрощения схемы, изображенной на рис. 1.7, приведены на рис. 1.8. Если преобразовать соединение звездой сопротивлений r_4 , r_5 , r_6 в эквивалентное соединение треугольником сопротивлений R_{45} , R_{56} , R_{64} , то получаем схему, изображенную на рис. 1.8б, где можно выделить параллельно и последовательно соединенные

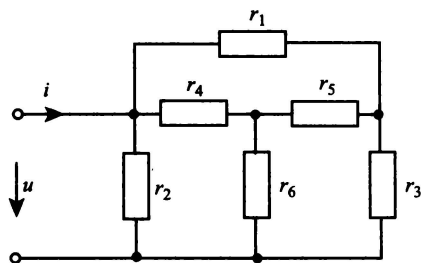


Рис. 1.7. Исходная схема к примеру 1.2

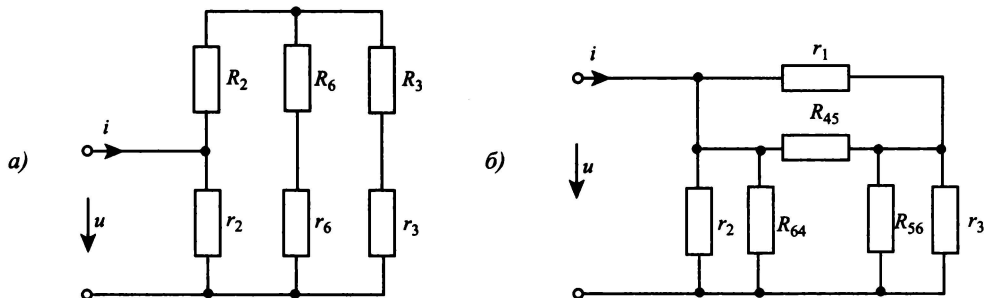


Рис. 1.8. Преобразование треугольника в звезду и звезды в треугольник для примера 1.2

элементы. Аналогично можно преобразовать соединение треугольником сопротивлений r_1, r_4, r_5 в эквивалентное соединение сопротивлений звездой сопротивлений R_2, R_3, R_6 и также упростить схему, как показано на рис 1.8а.

Выполним расчет для схемы, изображенной на рис. 1.8б. Вначале найдем значения сопротивлений преобразованной звезды

$$\begin{aligned} R_{45} &= r_4 + r_5 + r_4 r_5 / r_6 = 1 + 4 + 1 \cdot 4 / 5 = 5,8 \text{ Ом}, \\ R_{56} &= r_5 + r_6 + r_5 r_6 / r_4 = 4 + 5 + 4 \cdot 5 / 1 = 29 \text{ Ом}, \\ R_{64} &= r_6 + r_4 + r_6 r_4 / r_5 = 5 + 1 + 5 \cdot 1 / 4 = 7,25 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Затем объединим параллельно включенные сопротивления

$$\begin{aligned} r_1' &= r_1 R_{45} / (r_1 + R_{45}) = 1 \cdot 5,8 / (1 + 5,8) = 0,853 \text{ Ом}, \\ r_2' &= r_2 R_{64} / (r_2 + R_{64}) = 4 \cdot 7,25 / (4 + 7,25) = 2,578 \text{ Ом}, \\ r_3' &= r_3 R_{56} / (r_3 + R_{56}) = 5 \cdot 29 / (5 + 29) = 4,265 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Эквивалентное входное сопротивление найдем по формуле

$$\begin{aligned} r_0 &= r_2' (r_1' + r_3') / (r_2' + r_1' + r_3') = \\ &= 2,578 (0,853 + 4,265) / (2,578 + 0,853 + 4,265) = 1,714 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Такой же результат можно получить, если воспользоваться схемой, изображенной на рис. 1.8а. Для этой схемы сопротивления эквивалентной звезды имеют значения:

$$R_2 = r_1 r_4 / (r_1 + r_4 + r_5) = 1/6 = 0,166 \text{ Ом};$$

$$R_6 = r_4 r_5 / (r_1 + r_4 + r_5) = 4/6 = 0,666 \text{ Ом};$$

$$R_3 = r_1 r_5 / (r_1 + r_4 + r_5) = 4/6 = 0,666 \text{ Ом}.$$

Объединяя последовательно соединенные сопротивления, получим $r_3' = R_3 + r_3 = 5,666 \text{ Ом}$; $r_6' = R_6 + r_6 = 5,666 \text{ Ом}$.

Поскольку эти сопротивления включены параллельно, то результирующее сопротивление имеет значение $r_{63} = 2,833 \text{ Ом}$. Объединяя это сопротивление с сопротивлением R_2 , найдем $R_2' = R_2 + r_{63} = 3 \text{ Ом}$. Эквивалентное входное сопротивление схемы найдем по формуле:

$$r_3 = r_2 R_2' / (r_2 + R_2') = 4 \cdot 3 / (4 + 3) = 1,714 \text{ Ом},$$

что совпадает с результатом, полученным ранее, и показывает, что от способа преобразования схемы результат не зависит.

Пример 1.3. Для схемы, изображенной на рис. 1.9а, требуется определить эквивалентную входную емкость, при условии, что $C_1 = C_3 = 4 \text{ мкФ}$; $C_2 = C_4 = 6 \text{ мкФ}$; $C_5 = 2 \text{ мкФ}$.

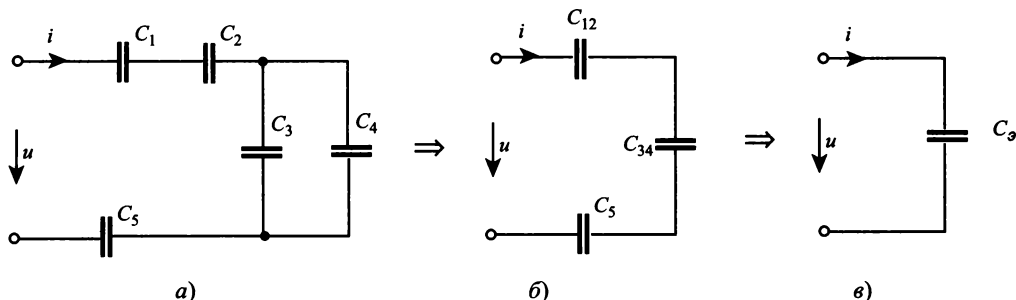


Рис. 1.9. К расчету эквивалентной емкости последовательно-параллельной цепи

Решение. Последовательные этапы упрощения схемы изображены на рис. 1.9б,в. Значения емкостей при последовательных преобразованиях схемы определяем по формулам:

$$C_{12} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 4 \cdot 6 / (4 + 6) = 2,4 \text{ мкФ};$$

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 6 + 4 = 10 \text{ мкФ}.$$

Поскольку эти емкости включены последовательно с C_5 , то эквивалентную входную емкость найдем, складывая обратные значения составляющих емкостей:

$$1/C_3 = 1/C_{12} + 1/C_{34} + 1/C_5 = 1/2,4 + 1/10 + 1/2 = 1,017 \text{ мкФ}^{-1},$$

откуда находим значение

$$C_3 = 1/1,017 = 0,983 \text{ мкФ}.$$

Пример 1.4. Для схемы, приведенной на рис. 1.10а, требуется определить эквивалентную индуктивность L_3 при условии, что составляющие индуктивности имеют следующие значения: $L_1 = L_4 = 2 \text{ Гн}$; $L_2 = L_3 = 4 \text{ Гн}$.

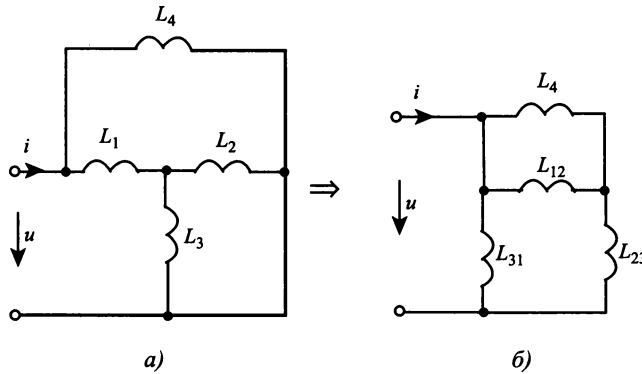


Рис. 1.10. К расчету эквивалентной индуктивности

Решение. Для определения эквивалентной индуктивности L_3 произведем замену индуктивностей L_1 , L_2 , L_3 , соединенных по схеме звезды, эквивалентным соединением по схеме треугольника, как изображено на рис. 1.10б. Значения индуктивностей преобразованной схемы определим по формулами:

$$L_{12} = L_1 + L_2 + L_1 L_2 / L_3 = 2 + 4 + 2 \cdot 4 / 4 = 8 \text{ Гн};$$

$$L_{23} = L_2 + L_3 + L_2 L_3 / L_1 = 4 + 4 + 4 \cdot 4 / 2 = 16 \text{ Гн};$$

$$L_{31} = L_3 + L_1 + L_3 L_1 / L_2 = 4 + 2 + 4 \cdot 2 / 4 = 8 \text{ Гн}.$$

При определении эквивалентной индуктивности L_3 учтем, что индуктивности L_4 и L_{12} включены между собой параллельно и последовательно с индуктивностью L_{23} , поэтому

$$L_4' = L_{23} + L_4 L_{12} / (L_4 + L_{12}) = 16 + 2 \cdot 8 / (2 + 8) = 17,6 \text{ Гн}.$$

Эквивалентную индуктивность найдем по формуле:

$$L_3 = L_{31} L_4' / (L_{31} + L_4') = 8 \cdot 17,6 / (8 + 17,6) = 5,5 \text{ Гн}.$$

ЗАДАНИЕ 1.1. Расчет эквивалентных параметров соединений элементов

Для электрических цепей, схемы которых приведены на рис. 1.11, рассчитать значение параметра эквивалентного элемента. Значения параметров составляющих элементов приведены в табл. 1.1.

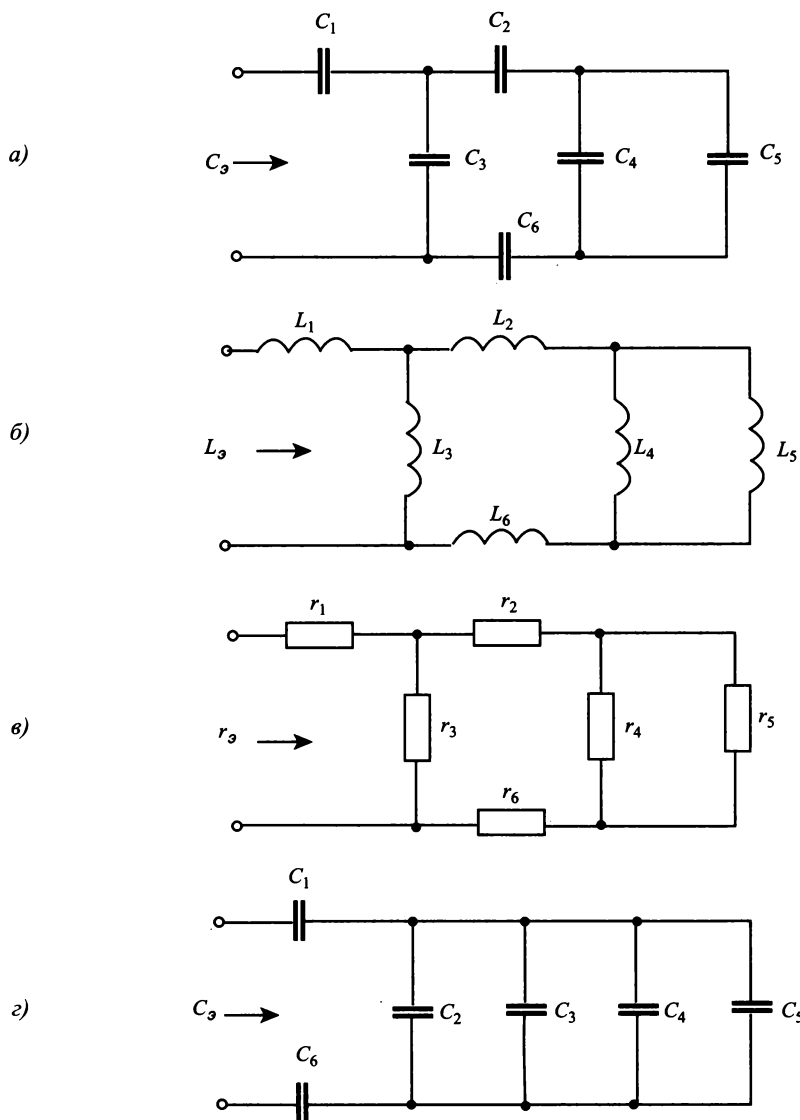


Рис. 1.11. Схемы соединений элементов к заданию 1.1

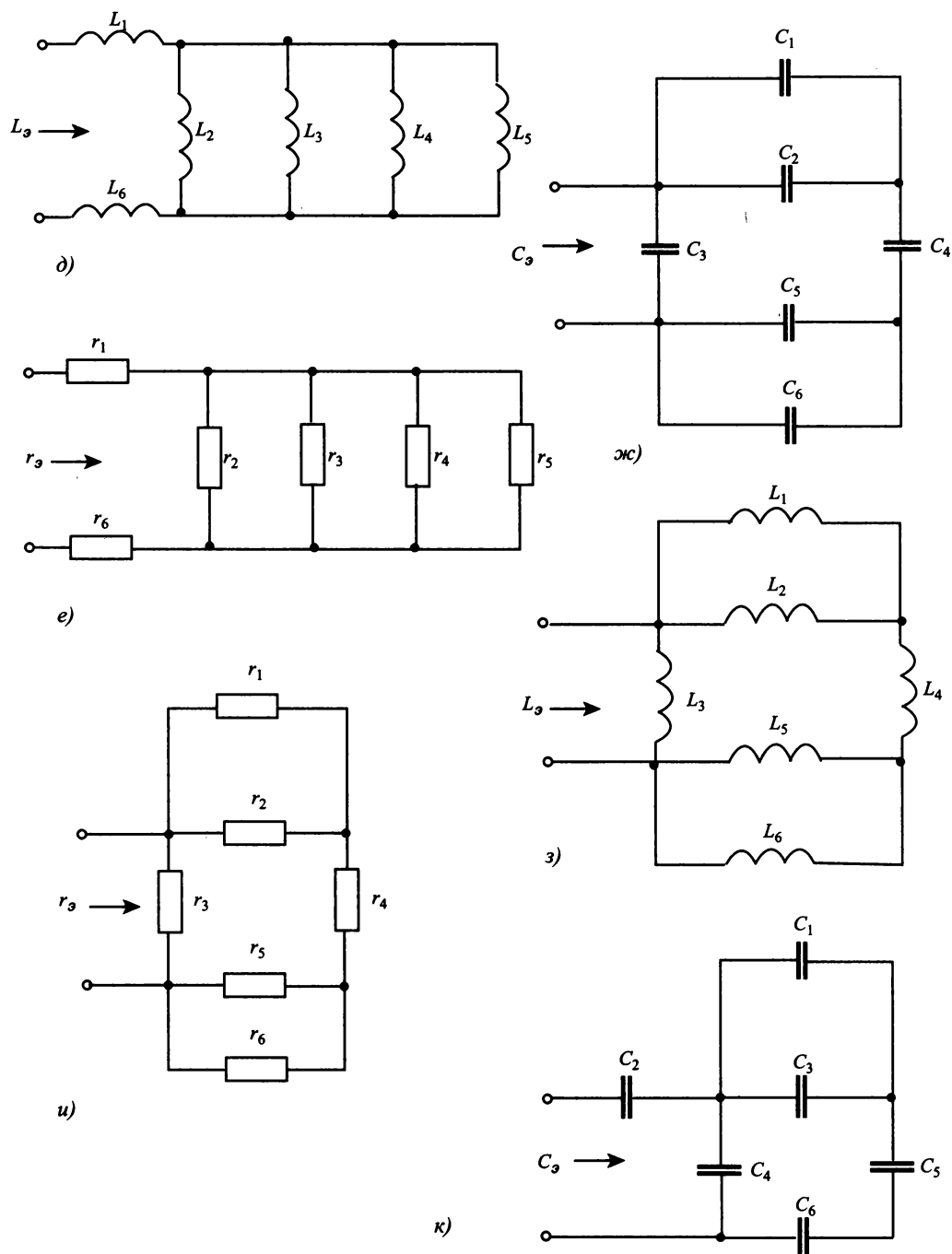


Рис. 1.11 (продолжение). Схемы соединений элементов к заданию 1.1

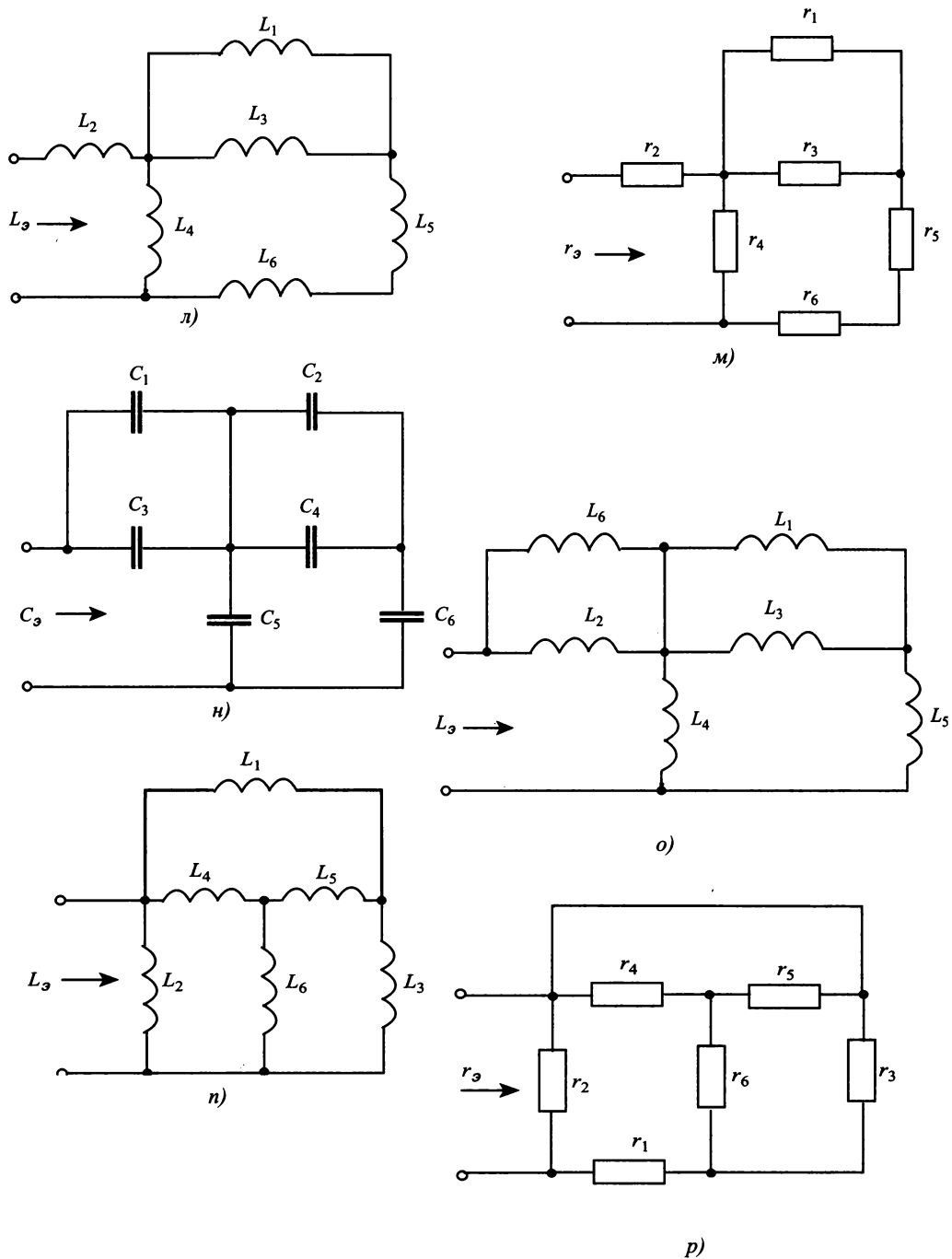


Рис. 1.11 (окончание). Схемы соединений элементов к заданию 1.1

Таблица 1.1

Значения параметров элементов схем

Вариант	Рисунок	Значения параметров элементов ветвей [Ом, Гн, мкФ]					
		1	2	3	4	5	6
1	а	1	2	2	7	3	2
2	б	1	1	4	4	4	7
3	г	30	10	10	20	10	20
4	д	1	2	2	4	4	3
5	ж	6	6	12	9	6	6
6	з	4	4	12	8	4	4
7	к	2	2	12	8	8	8
8	л	4	4	10	6	9	1
9	н	2	4	2	4	4	8
10	о	2	2	2	2	1	1
11	в	8	8	6	4	4	2
12	е	5	1	4	4	2	4
13	и	2	6	9	6	2	6
14	м	4	6	12	6	3	6
15	п	2	2	2	4	4	4
16	р	2	2	2	3	3	3
17	а	6	1	3	2	4	6
18	б	2	8	12	4	12	1
19	г	10	3	5	2	5	30
20	д	4	12	12	12	8	6
21	ж	4	8	8	12	4	8
22	з	3	6	3	2	3	6
23	к	6	3	6	6	5	6
24	л	6	3	2	6	1	3
25	н	2	4	2	4	4	8
26	г	10	2	8	6	4	20
27	з	10	10	10	15	30	60
28	н	5	6	5	6	10	10
29	р	5	5	5	6	6	6
30	о	3	6	4	4	3	6

1.3. Расчет параметров эквивалентных источников

При расчете цепей постоянного тока широко используется приведение схем к эквивалентному источнику напряжения или тока. В результате такого преобразования любая схема приводится к реальному источнику напряжения с параметрами E_n , r_n или реальному источнику тока с параметрами J_n , g_n , схемы которых показаны на рис. 1.12а,б.

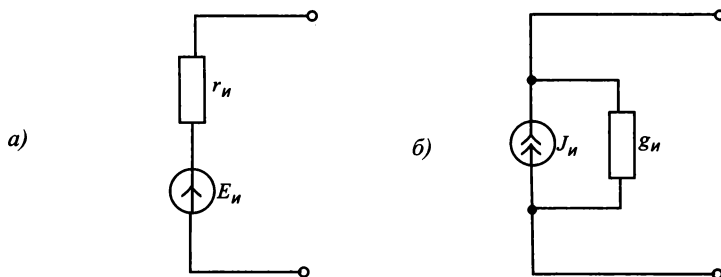


Рис. 1.12. Эквивалентные источники напряжения (а) и тока (б)

При расчете *внутреннего сопротивления* эквивалентного источника напряжения или *внутренней проводимости* эквивалентного источника тока полагают, что значения напряжения и тока всех источников, входящих в исходную схему, равны нулю. Это соответствует тому, что источники напряжения исходной схемы заменяют перемычками, а источники тока — разрывом цепи. В результате такого преобразования получают схему, состоящую только из пассивных элементов. Объединяя отдельные группы элементов, полученную пассивную схему сводят к эквивалентному пассивному двухполюснику, сопротивление которого равно внутреннему сопротивлению эквивалентного источника.

Для определения напряжения E_n эквивалентного источника находят напряжение на разомкнутых зажимах цепи (напряжение холостого хода). Аналогично для определения тока J_n эквивалентного источника находят ток через замкнутые зажимы цепи (ток короткого замыкания).

Пример 1.5. Для схемы, изображенной на рис. 1.13а, требуется определить параметры эквивалентного источника напряжения, позволяющего рассчитать ток в сопротивлении r_4 . Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E_1 = 3 \text{ В}$; $E_2 = 1 \text{ В}$; $E_3 = E_6 = 2 \text{ В}$; $J_3 = 1 \text{ А}$; $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$; $r_3 = 2 \text{ Ом}$; $r_4 = r_5 = 3 \text{ Ом}$.

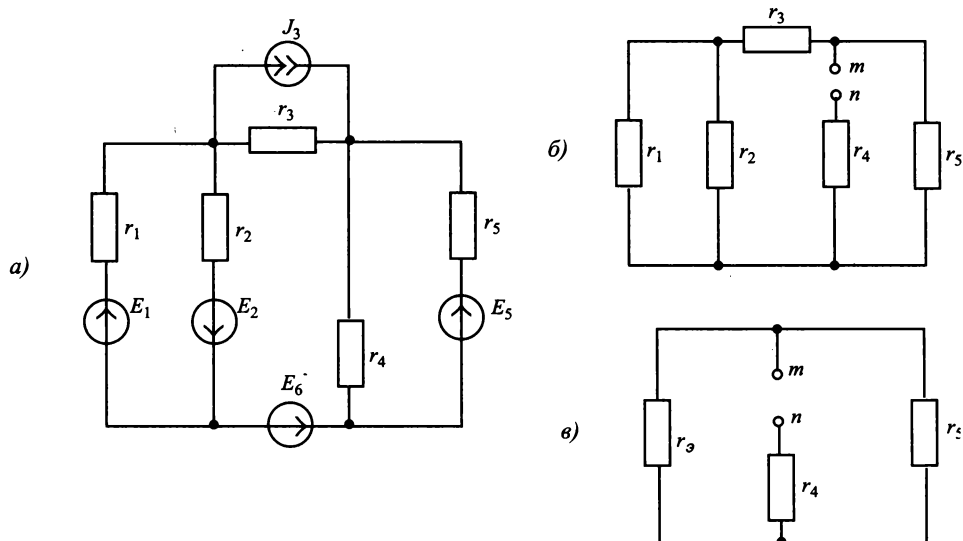


Рис. 1.13. Схема (а) и ее преобразования (б и в) к примеру 1.5

Решение. Для определения сопротивления эквивалентного источника напряжения необходимо выполнить следующие действия:

- разомкнуть ветвь с сопротивлением r_4 ;
- исключить все источники электрической энергии, для чего источники напряжения в схеме следует замкнуть, а источники тока — разомкнуть;
- объединить последовательно и параллельно соединенные сопротивления и найти входное сопротивление между зажимами mn .

На рис. 1.13б показана пассивная схема, полученная после исключения всех источников энергии и сохранения всех сопротивлений. Входное сопротивление между зажимами mn в этой схеме будет равно сопротивлению r_n эквивалентного источника.

Расчет входного сопротивления выполним методом последовательного упрощения. На первом этапе объединим элементы, расположенные слева от разомкнутой ветви. Результирующее сопротивление этой части схемы имеет значение:

$$r_3 = r_3 + r_1 r_2 / (r_1 + r_2) = 2 + 1/2 = 2,5 \text{ Ом},$$

а схема после преобразования получит вид, изображенный на рис. 1.13в. На втором этапе объединяем параллельно включенные сопротивления r_3 и r_5 и находим внутреннее сопротивление эквивалентного источника.

$$r_H = r_4 + r_3 r_5 / (r_3 + r_5) = 3 + 2,5 \cdot 3 / (2,5 + 3) = 4,36 \text{ Ом.}$$

Для определения напряжения эквивалентного источника можно использовать различные методы расчета цепей, в том числе метод эквивалентных преобразований или законы Кирхгофа. Пользуясь методом эквивалентных преобразований, выполним замену двух параллельно включенных реальных источников напряжения E_1 , E_2 одним с параметрами

$$E_{12} = (E_1/r_1 + E_2/r_2)/(r_1^{-1} + r_2^{-1}) = (3/1 - 1/1)/(1 + 1) = 1 \text{ В};$$

$$r_{12} = r_1 r_2 / (r_1 + r_2) = 1/2 = 0,5 \text{ Ом.}$$

Далее выполним замену реального источника тока J_3 реальным источником напряжения E_3 с внутренним сопротивлением r_3 :

$$E_3 = J_3 r_3 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ В.}$$

В результате выполненных преобразований получим схему, изображенную на рис. 1.14а. После этого, заменив последовательно включенные источники напряжения E_{12} , E_3 , E_6 , одним эквивалентным источником E_9 , получим схему, представленную на рис. 1.14б, параметры которой имеют следующие значения:

$$E_9 = E_3 + E_{12} - E_6 = 2 + 1 - 2 = 1 \text{ В};$$

$$r_3 = r_3 + r_{12} = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ Ом.}$$

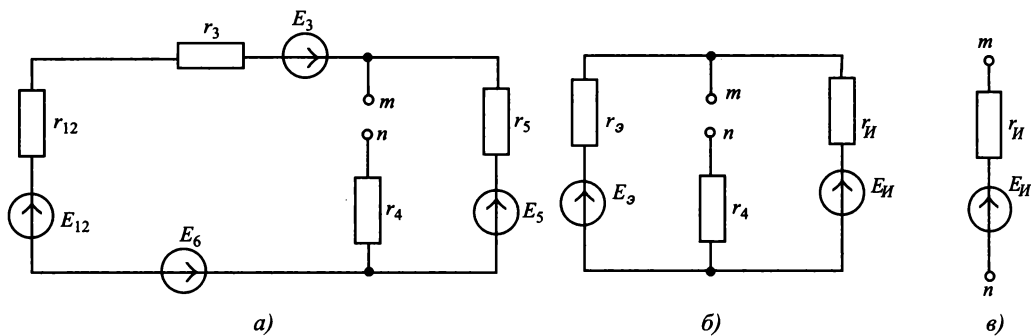


Рис. 1.14. К расчету параметров эквивалентного источника

Объединив два параллельно соединенных реальных источника напряжения E_9 , E_5 , найдем напряжение эквивалентного источника

$$E_H = (E_9/r_3 + E_5/r_5) / (1/r_3 + 1/r_5) = (1/2,5 + 2/3)/(1/2,5 + 1/3) = 2 \text{ В.}$$

Результирующая схема эквивалентного источника приведена на рис. 1.14в.

ЗАДАНИЕ 1.2. Расчет параметров эквивалентного источника

Для схем, приведенных на рис. 1.15, требуется рассчитать значения параметров эквивалентных источников напряжения $r_{и}$ и $E_{и}$ по отношению к зажимам a и b . Значения параметров элементов схем приведены в табл. 1.2.

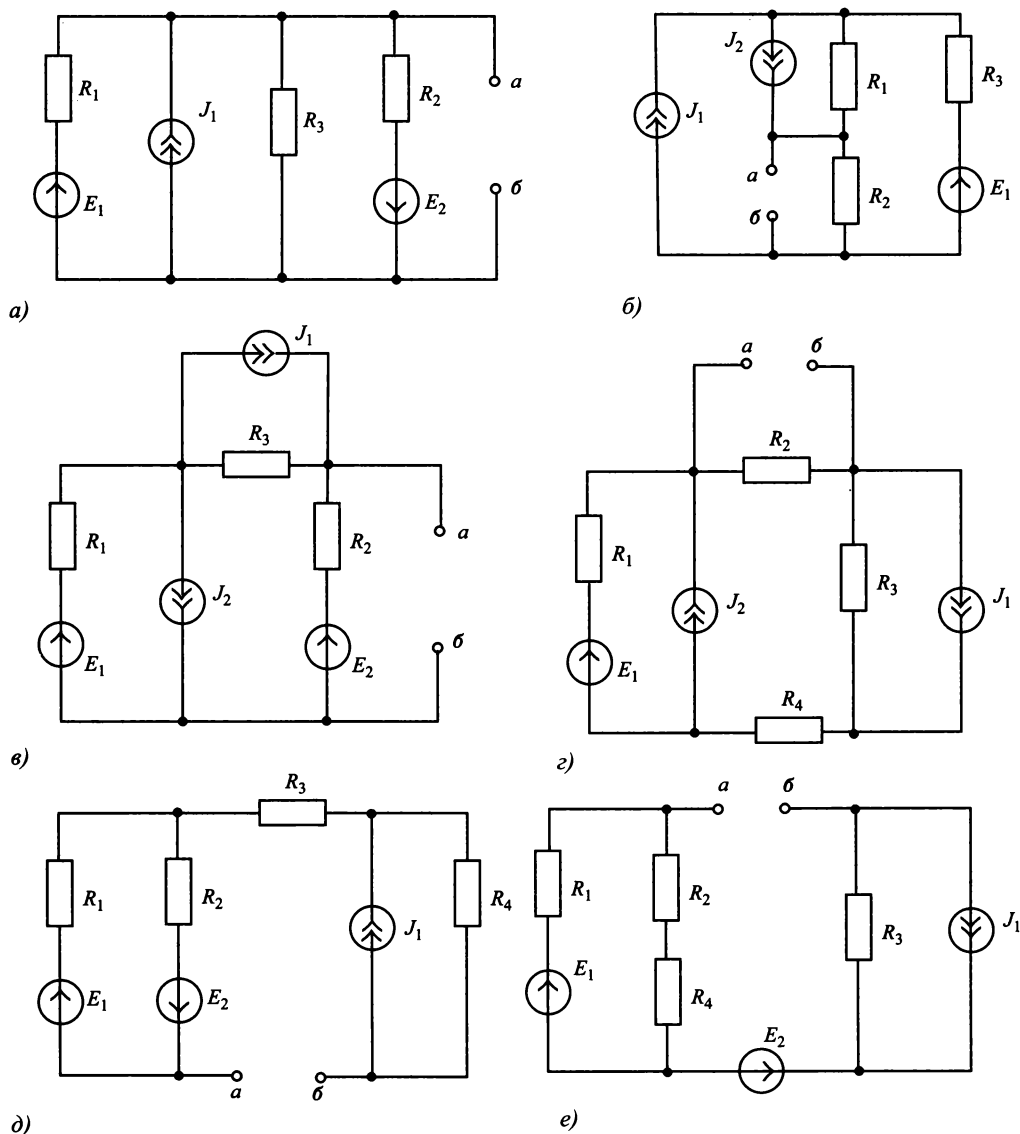
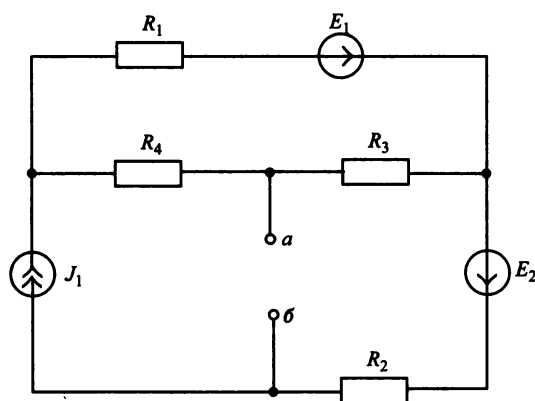
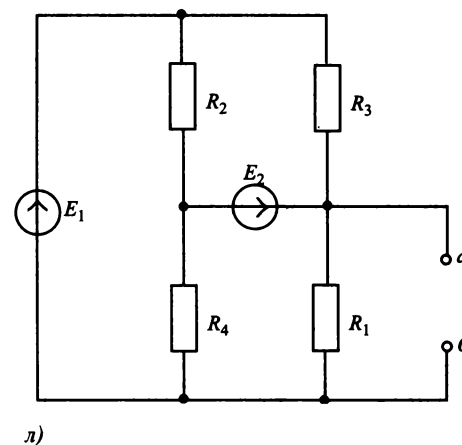
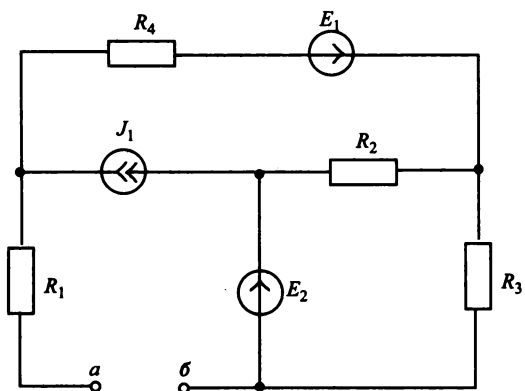
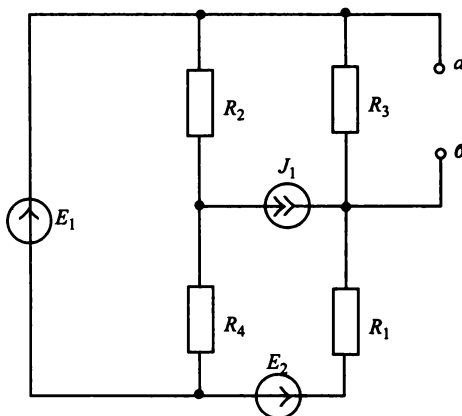
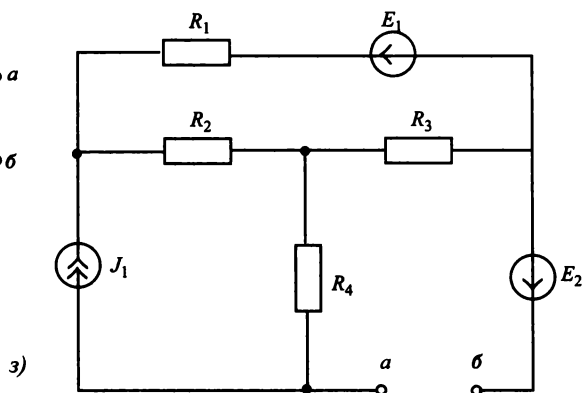
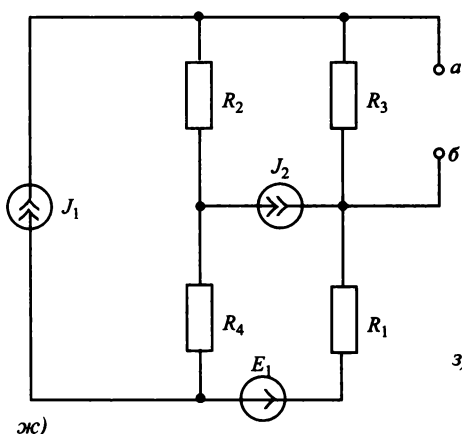
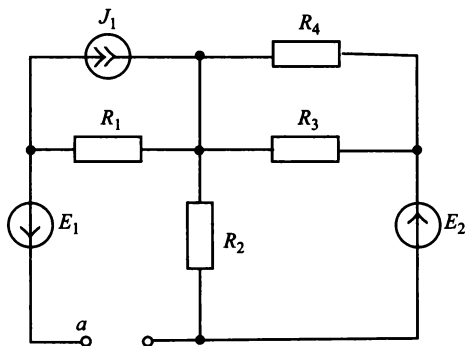


Рис. 1.15 Схемы цепей к заданию 1.2

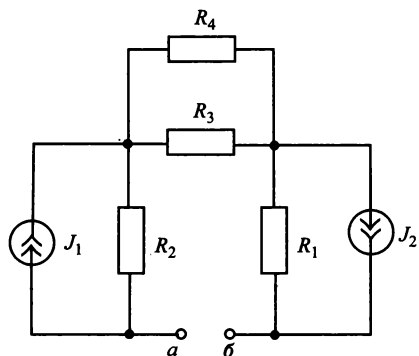


задания

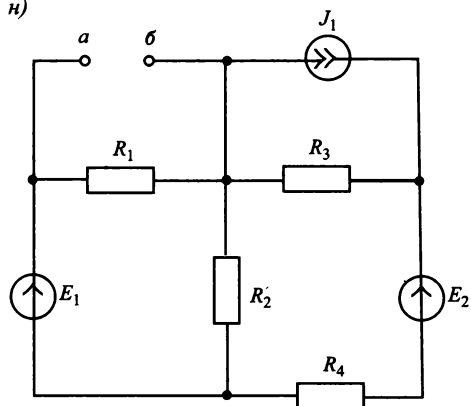
Рис. 1.15 (продолжение). Схемы цепей к заданию 1.2



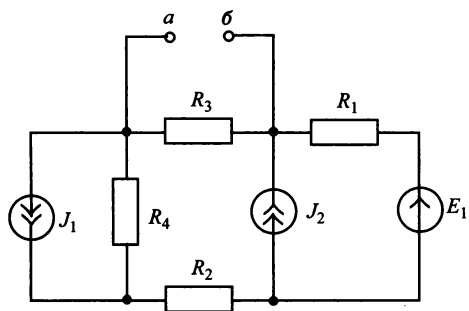
k)



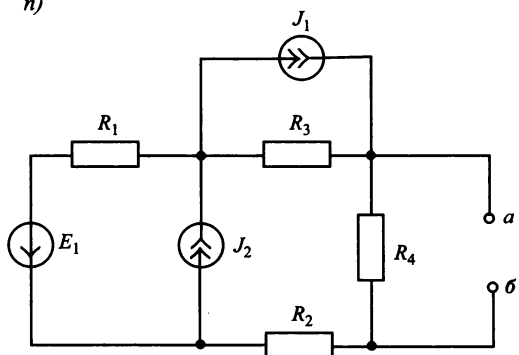
o)



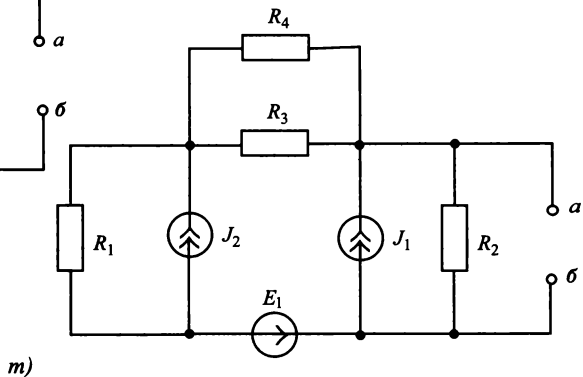
n)



p)



c)



m)

Рис. 1.15 (окончание). Схемы цепей к заданию 1.2

Таблица 1.2

Значения параметров элементов схем

Вариант	Рисунок	Значения параметров элементов схем							
		Сопротивления, Ом				Токи, А		Напряжения, В	
		R_1	R_2	R_3	R_4	J_1	J_2	E_1	E_2
1	а	1	2	4	–	2	0	14	7
2	б	4	6	4	–	5	2	14	0
3	в	5	8	2	–	1	3	20	30
4	г	2	3	5	5	1	2	30	0
5	д	4	4	3	4	4	0	18	36
6	е	4	4	5	1	2	0	26	13
7	ж	3	2	4	5	1	2	24	0
8	з	4	5	2	2	2	0	15	10
9	и	3	2	4	6	1	0	16	14
10	к	3	6	5	–	2	0	26	13
11	л	4	4	6	8	0	0	22	11
12	м	3	6	8	4	1	0	30	15
13	н	10	5	10	10	4	0	25	50
14	о	3	2	6	2	4	3	0	0
15	п	2	6	2	2	2	0	11	22
16	р	4	3	8	8	1	2	7	0
17	с	5	2	8	10	2	1	10	0
18	т	4	5	6	3	2	1	11	0
19	з	1	8	6	3	3	0	12	6
20	и	7	5	1	3	1	0	8	4
21	л	6	4	2	4	0	0	4	8
22	н	4	8	9	3	1	0	6	12
23	о	30	10	20	20	6	4	0	0
24	т	4	6	10	10	5	1	15	0
25	р	10	6	8	8	5	10	20	0
26	м	6	10	8	6	4	0	10	20
27	н	6	4	10	10	12	0	15	5
28	б	5	10	10	–	2	0	30	0
29	а	6	8	8	–	6	0	10	20
30	в	10	20	30	–	4	6	30	15

задания

1.4. Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа

При расчете цепей постоянного тока по законам Кирхгофа будем считать, что цепь, кроме источников, содержит только сопротивления r_k или проводимости g_k . В соответствии с первым законом Кирхгофа алгебраическая сумма токов I_k , сходящихся в любом узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0,$$

где n — число ветвей, которые сходятся в узле.

При этом токи, направленные к узлу, считают отрицательными, а токи, направленные от узла, — положительными. По второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма напряжений U_k на ветвях в любом замкнутом контуре также равна нулю:

$$\sum_{k=1}^m U_k = 0,$$

где m — число ветвей, которые образуют контур.

При этом напряжения, направление которых совпадает с направлением обхода контура, считают положительными, а напряжения, направление которых противоположно направлению обхода контура, — отрицательными.

Порядок расчета цепей, основанный на использовании законов Кирхгофа, следующий:

- ❖ выбирают положительные направления токов в ветвях;
- ❖ составляют $(n_y - 1)$ независимых уравнений по первому закону Кирхгофа.
- ❖ выбирают направления обхода независимых контуров,
- ❖ составляют $n_b - (n_y - 1)$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа,
- ❖ решают совместно полученную систему уравнений.

Пример 1.6. Пользуясь законами Кирхгофа, рассчитать токи в ветвях схемы, которая изображена на рис. 1.16а. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E_1 = 40$ В, $E_2 = 20$ В, $E_4 = 10$ В, $J_6 = 3$ А, $r_1 = 5$ Ом, $r_3 = 5$ Ом, $r_4 = 20$ Ом, $r_5 = 10$ Ом.

Решение. Цепь образована шестью ветвями ($n_b = 6$). В ветвях 1, 2, 4 содержатся источники напряжения E_1, E_2, E_4 , а ветвь 6 содержит источник тока J_6 . В цепи имеются четыре узла, три из которых можно считать независимыми. Выберем направления токов в ветвях, как по-

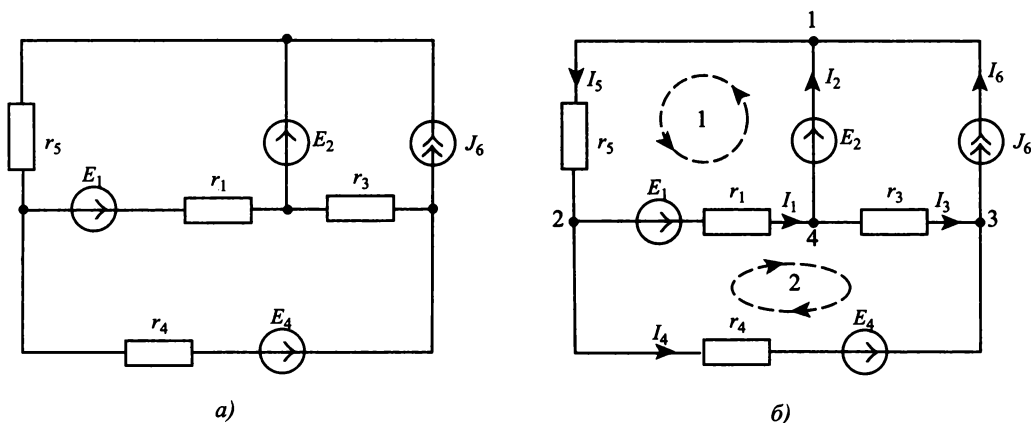


Рис. 1.16. Исходная (а) и расчетная (б) схемы к примеру 1.6

казано на рис. 1.16б, и составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2, 3:

$$\begin{cases} -I_2 + I_5 - I_6 = 0, \\ I_1 + I_4 - I_5 = 0, \\ -I_3 - I_4 + I_6 = 0. \end{cases}$$

В схеме имеются три независимых контура. Таким образом, по второму закону Кирхгофа можно составить три уравнения, однако, учитывая, что ток в ветви 6 равен току источника J_6 , достаточно составить уравнения только для двух контуров 1 и 2, в которые не входит ветвь с источником тока. Затем выберем направления обхода этих контуров, как показано на рис. 1.16б, и запишем уравнения Кирхгофа:

$$\begin{cases} r_1 I_1 + r_5 I_5 = E_1 + E_2, \\ r_1 I_1 + r_3 I_3 - r_4 I_4 = E_1 - E_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, полная система уравнений, составленная по законам Кирхгофа, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} -I_2 + I_5 = J_6; \\ I_1 + I_4 - I_5 = 0; \\ I_3 + I_4 = J_6; \\ r_1 I_1 + r_5 I_5 = E_1 + E_2; \\ r_1 I_1 + r_3 I_3 - r_4 I_4 = E_1 - E_4. \end{cases}$$

Эту систему уравнений можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ r_1 & 0 & 0 & 0 & r_5 \\ r_1 & 0 & r_3 & -r_4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_6 \\ 0 \\ J_6 \\ E_1 + E_2 \\ E_1 - E_4 \end{bmatrix}.$$

Подставив значения параметров элементов, получим матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 5 & -20 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Решая полученное матричное уравнение, находим значения токов $I_1 = 3,882$ А, $I_2 = 1,058$ А, $I_3 = 2,823$ А, $I_4 = 0,176$ А, $I_5 = 4,058$ А. Для решения этого матричного уравнения можно воспользоваться программой универсального калькулятора, которая приведена на диске.

1.5. Расчет сложных цепей постоянного тока

При расчете сложных цепей для исключения возможных ошибок используют различные способы формализации порядка составления и решения уравнений цепи. К таким способам формализации относят [1]:

- » применение топологических графов цепи;
- » использование матричных уравнений Кирхгофа;
- » применение методов узловых напряжений и контурных токов;
- » использование сигнальных направленных графов.

При составлении топологического графа цепи используют понятие обобщенной ветви, в состав которой могут входить источник напряжения E_k , источник тока J_k , сопротивление R_k или проводимость G_k . Две возможные структуры таких ветвей приведены на рис. 1.17. Ветвь, изображенная на рис. 1.17а, состоит из идеального источника тока J_k и реального источника напряжения E_k с внутренним сопротивлением R_k , включенных параллельно. Напряжение на такой ветви имеет значение

$$U_k + E_k = (I_k + J_k)R_k.$$

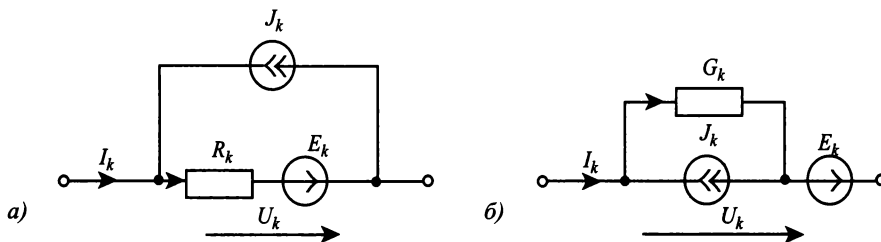


Рис. 1.17. Последовательно-параллельная (а) и параллельно-последовательная (б) обобщенные ветви

Аналогично, обобщенная ветвь, изображенная на рис. 1.17б, состоит из идеального источника напряжения E_k и реального источника тока J_k с внутренней проводимостью G_k , включенных последовательно. Напряжение на такой ветви определяется по формуле:

$$U_k + E_k = (I_k + J_k)/G_k.$$

Эти ветви эквивалентны при выполнении условия $G_k^{-1} = R_k$. Чтобы облегчить составление уравнений Кирхгофа для сложных цепей, вначале нужно построить топологический граф цепи, в который входят обобщенные ветви, но без элементов. В обобщенных ветвях выбирают направления токов и напряжений, после чего составляют уравнения Кирхгофа. Затем по уравнениям Кирхгофа записывают матричное уравнение цепи и выполняют его решение.

Пример 1.7. Составить топологический граф для цепи, изображенной на рис. 1.18а. Записать уравнения Кирхгофа в матричной форме и рассчитать токи в ветвях цепи при условии, что параметры элементов имеют следующие значения: $E_1 = 1 \text{ В}$; $E_2 = 5 \text{ В}$; $E_4 = 9 \text{ В}$; $J_3 = 3 \text{ А}$; $J_6 = 6 \text{ А}$; $r_1 = 1 \text{ Ом}$; $r_4 = 2 \text{ Ом}$; $r_5 = 3 \text{ Ом}$.

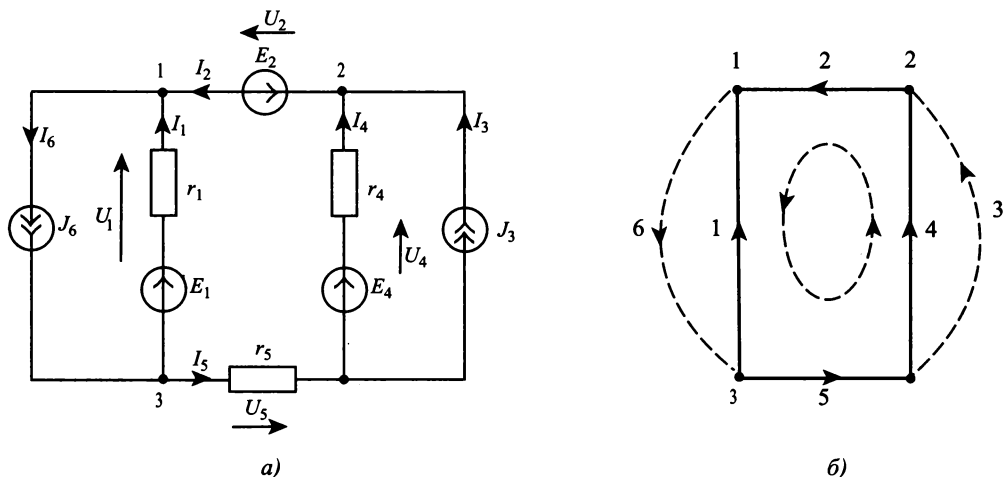


Рис. 1.18. Исходная (а) и расчетная (б) схемы к примеру 1.7

Решение. Исследуемая цепь состоит из шести ветвей ($n_b = 6$). В ветвях 1, 2, 4 включены источники напряжения E_1 , E_2 , E_4 , а в ветвях 3, 6 — источники тока J_3 , J_6 . При построении топологического графа учтем, что ветви 1, 6 и 3, 4 соответствуют схемам двух обобщенных ветвей (рис. 1.17а), а ветви 2 и 5 являются обобщенными неполными. В связи с этим основной граф содержит всего четыре ветви. Структура этого графа приведена на рис. 1.18б. Направления токов в ветвях графа соответствуют направлениям токов в ветвях основной схемы.

Очевидно, что если из этого графа удалить одну из ветвей, то в оставшемся графе контуров не будет. Граф, полученный после удаления ветви 4, называется *деревом графа*, а удаленная ветвь 4 — *ветвью связи*. Добавление к дереву графа ветви связи позволяет построить для этого графа один-единственный контур.

Для расчета этой схемы нужно составить четыре уравнения. При этом по второму закону Кирхгофа можно составить одно уравнение для единственного независимого контура, а остальные три уравнения можно составить по первому уравнению Кирхгофа для любых

трех узлов, например узлов 1, 2, 3. Уравнения, составленные по графу цепи, имеют вид:

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + J_6 = 0, \\ I_2 - I_3 - I_4 = 0, \\ I_1 + I_5 - J_6 = 0, \\ -U_1 + U_2 + U_4 + U_5 = 0. \end{cases}$$

Полученные уравнения обычно называют топологическими, так как они отражают структуру графа цепи. Однако для расчета цепи этих уравнений недостаточно, так как они написаны для различных переменных — токов и напряжений ветвей. Для решения этой системы уравнений необходимо выразить напряжения ветвях через токи и сопротивления ветвей. Такие уравнения можно составить, используя уравнения обобщенных ветвей. Такие уравнения иногда называют компонентными, так как они соответствуют составу отдельных ветвей, т. е. их компонентам. Так, для ветвей схемы, изображенной на рис. 1.18а, можно записать следующие компонентные уравнения:

$$\begin{cases} U_1 = r_1 I_1 - E_1, \\ U_2 = E_2, \\ U_4 = r_4 I_4 - E_4, \\ U_5 = r_5 I_5, \\ I_6 = J_6, \\ I_3 = J_3. \end{cases}$$

Подставляя значение компонентных уравнений в топологические, получим полную систему уравнений для токов в цепи:

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 = -J_6, \\ I_2 - I_4 = J_3, \\ I_1 + I_5 = J_6, \\ -r_1 I_1 + r_4 I_4 + r_5 I_5 = -E_1 - E_2 + E_4. \end{cases}$$

Матричное уравнение для этой системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -r_1 & 0 & r_4 & r_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_6 \\ J_3 \\ J_6 \\ -E_1 - E_2 + E_4 \end{bmatrix}.$$

Подставив числовые значения параметров элементов, получим матричное уравнение цепи в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Решая эту матричную систему уравнений, находим токи в цепи: $I_1 = 3,5$ А; $I_2 = 2,5$ А; $I_4 = -0,5$ А; $I_5 = 2,5$ А. Знак минус у тока I_4 означает, что его действительное направление противоположно выбранному на схеме. Изменять знак тока на обратный до полного решения задачи не следует, так как это может привести к ошибочным результатам в дальнейших расчетах.

Подставляя полученные значения токов в компонентные уравнения, найдем напряжения на ветвях: $U_1 = 2,5$ В; $U_2 = 5$ В; $U_4 = 10$ В; $U_5 = 7,5$ В. Правильность решения задачи можно подтвердить подстановкой значений вычисленных токов и напряжений в исходную систему уравнений, которая при этом обращается в тождество.

Примечание к решению задачи

Компонентные уравнения для ветвей цепи можно записать в иной форме:

$$\begin{cases} I_1 = g_1(U_1 + E_1), \\ I_4 = g_4(U_4 + E_4), \\ I_5 = g_5 U_5, \end{cases}$$

где $g_1 = 1/r_1$, $g_4 = 1/r_4$, $g_5 = 1/r_5$.

После подстановки этих токов в исходные уравнения системы можно получить уравнения для трех независимых напряжений U_1 , U_4 , U_5 . Однако

исходная система состоит из четырех уравнений, поэтому перед подстановкой в нее компонентных уравнений целесообразно число уравнений сократить до трех. Это сокращение можно выполнить, исключив из исходной системы уравнений ток I_2 . Для этого, суммируя первое и второе уравнения исходной системы уравнений, получим:

$$\begin{cases} -I_1 - I_4 = J_3 - J_6, \\ I_1 + I_5 = J_6, \\ -U_1 + U_4 + U_5 = -E_2. \end{cases}$$

После подстановки в эту систему значений токов из компонентных уравнений, получим систему из трех уравнений для определения неизвестных напряжений U_1, U_4, U_5 :

$$\begin{cases} -g_1 U_1 - g_4 U_4 = J_3 - J_6 + g_1 E_1 + g_4 E_4, \\ g_1 U_1 + g_5 U_5 = J_6 - g_1 E_1, \\ -U_1 + U_4 + U_5 = -E_2. \end{cases}$$

Подставив в эту систему численные значения проводимостей, напряжений и токов источников, запишем матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} -1 & -0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0,333 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Решив эту систему уравнений, найдем значения напряжений: $U_1 = 2,5$ В; $U_4 = -10$ В; $U_5 = 7,5$ В. Подставив найденные напряжения в компонентные уравнения, найдем токи ветвей: $I_1 = 3,5$ А; $I_4 = -0,5$ А; $I_5 = 2,5$ А. Ток I_2 найдем как алгебраическую сумму токов $I_2 = I_4 + I_3 = 2,5$ А. Найденные значения напряжений и токов совпадают по значениям с полученными ранее, что свидетельствует о корректности решения. Другие напряжения могут быть определены из соотношений: $U_2 = E_2$; $U_3 = U_4$; $U_6 = -U_1$.

1.6. Особенности решения обратных задач

Определение токов и напряжений в ветвях и элементах электрической цепи можно представить в виде решения *прямой* или *обратной задач*. При решении прямой задачи предполагают заданными параметры источников напряжения E , тока J и элементов r, g, L, C электрической цепи. При этом *определению*

подлежат токи или напряжения на ветвях цепи. Прямые задачи решают с помощью системы алгебраических уравнений, составленных одним из способов, рассмотренных выше. Такие задачи имеют одно-единственное решение.

При решении *обратной задачи*, наоборот, известными считают токи и напряжения на некоторых элементах или ветвях электрической цепи. При этом определению подлежат напряжения или токи всех или некоторых источников энергии, а также напряжения и токи некоторых ветвей. Такие задачи могут иметь неоднозначное решение, особенно в тех случаях, когда в цепи действуют несколько источников энергии. В отдельных случаях обратная задача может совсем не иметь решения.

Все рассмотренные выше примеры можно отнести к прямым задачам. В связи с этим рассмотрим примеры решения обратной задачи и проанализируем возникающие при этом неопределенности.

Пример 1.8. Найти токи и напряжения на всех участках электрической цепи и значение напряжения источника питания E_1 для схемы, изображенной на рис. 1.19, если известно, что напряжение U_2 на сопротивлении r_2 имеет значение $U_2 = 4 \text{ В}$. Остальные параметры цепи имеют следующие значения: $r_1 = 1 \text{ Ом}$; $r_2 = 2 \text{ Ом}$; $r_3 = 2 \text{ Ом}$; $r_4 = 5 \text{ Ом}$; $E_2 = 10 \text{ В}$.

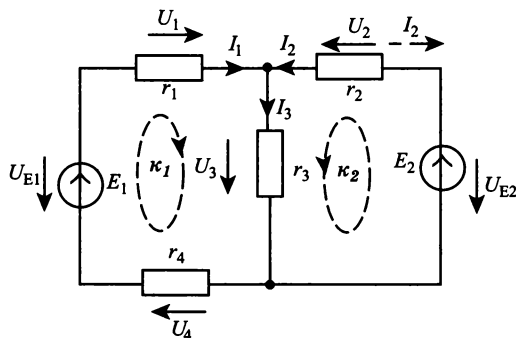


Рис. 1.19. Схема цепи к примеру 1.8

Решение. В рассматриваемой цепи известно значение напряжения U_2 , однако его направление зависит от произвольно выбираемого при решении задачи направления тока I_2 в сопротивлении r_2 . Кроме этого, заданы направления источников энергии E_1 и E_2 , как показано на рис. 1.19, однако значение напряжения источника E_1 неизвестно. Направления остальных токов и напряжений выбираем произвольно.

Рассмотрим решение задачи с помощью последовательных расчетов.

1 Определяем значение тока $I_2 = U_2 / r_2 = 4 / 2 = 2 \text{ А}$.

2 Для контура k_2 составим уравнение по второму закону Кирхгофа и определим напряжение U_3 :

$$U_2 - U_{E2} + U_3 = 0;$$

$$\text{отсюда находим } U_3 = -U_2 + E_2 = -4 + 10 = 6 \text{ В.}$$

3 По закону Ома находим ток $I_3 = U_3/r_3 = 6/2 = 3 \text{ А.}$

4 По первому закону Кирхгофа определим ток $I_1 = I_3 - I_2 = 3 - 2 = 1 \text{ А.}$

5 По закону Ома находим напряжения на элементах r_1 и r_4 :

$$U_1 = r_1 \cdot I_1 = 1 \text{ В}; \quad U_4 = r_4 \cdot I_4 = 5 \text{ В.}$$

6 Для контура k_1 составим уравнение по второму закону Кирхгофа и определим значение напряжения источника E_1 :

$$-U_{E1} + U_1 + U_3 + U_4 = 0;$$

$$\text{отсюда находим } E_1 = U_1 + U_3 + U_4 = 12 \text{ В.}$$

На этом решение задачи можно считать законченным.

Однако следует отметить, что решение задачи будет иным, если выбрать другое направление тока I_2 в сопротивлении r_2 , как показано на рис. 1.19 штриховой линией. Пользуясь той же последовательностью расчета, найдем напряжение источника E_1 в этом случае.

$$1. I_2 = U_2/r_2 = 2 \text{ А.}$$

$$2. U_3 = U_2 + E_2 = 4 + 10 = 14 \text{ В.}$$

$$3. I_3 = U_3/r_3 = 14/2 = 7 \text{ В.}$$

$$4. I_1 = I_2 + I_3 = 2 + 7 = 9 \text{ В.}$$

$$5. U_1 = r_1 I_1 = 9 \text{ В}; \quad U_4 = r_4 I_1 = 45 \text{ В.}$$

$$6. E_1 = U_1 + U_3 + U_4 = 9 + 7 + 45 = 61 \text{ В.}$$

Примечание к решению задачи

Выполненные расчеты показывают, что для однозначного решения поставленной задачи необходимо указывать не только значения величин, но и их положительные направления (т. е. их полярность). В противном случае решение задачи может быть неоднозначным. Решение такой задачи становится еще более неопределенным в том случае, когда неизвестны оба напряжения источников питания E_1 и E_2 . При этом становится невозможным определение напряжения U_3 и, следовательно, тока I_3 . Для продолжения решения задачи в этом случае необходимо дополнительно задать или напряжение U_3 или ток I_3 .

Пример 1.9. Для электрической цепи, схема которой приведена на рис. 1.20, требуется определить ток источника J , если известен ток $I_4 = 2 \text{ А}$ в сопротивлении r_4 , а также параметры элементов схемы: $r_1 = 4 \text{ Ом}$; $r_2 = 2 \text{ Ом}$; $r_3 = 2 \text{ Ом}$; $r_4 = 1 \text{ Ом}$.

Решение. В этой задаче, в отличие от предыдущей, имеется единственный источник тока J . В связи с этим задача имеет одно-

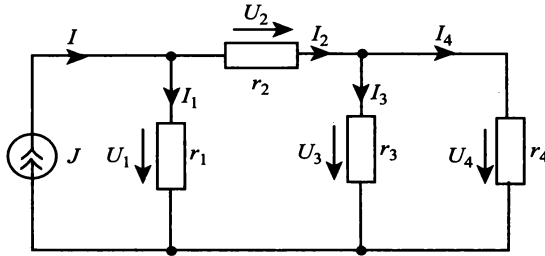


Рис. 1.20. Схема цепи к примеру 1.9

единственное решение, так как направление тока I_4 определяется направлением тока источника J . Решение этой задачи также выполним способом последовательных расчетов.

1. Вначале найдем напряжение $U_4 = I_4 r_4 = U_3 = 2 \cdot 1 = 2$ В.
2. Определим ток I_3 в сопротивлении r_3 : $I_3 = U_4 / r_3 = 2 / 2 = 1$ А.
3. Пользуясь первым законом Кирхгофа, найдем ток $I_2 = I_3 + I_4 = 1 + 2 = 3$ А.
4. Найдем напряжение $U_2 = I_2 r_2 = 3 \cdot 2 = 6$ В.
5. Пользуясь вторым законом Кирхгофа, определим напряжение $U_1 = U_2 + U_3 = 8$ В.
6. Найдем ток $I_1 = U_1 / r_1 = 8 / 4 = 2$ А.
7. Определим ток источника $J = I_1 + I_2 = 2 + 3 = 5$ А.

Примечание к решению задачи

При решении обратных задач можно использовать различные методы расчета цепей, например методы контурных токов или узловых напряжений. Однако при использовании этих методов приходится выполнять замену переменных в уравнениях, составленных по этим методам. В связи с этим рассмотрим пример на применение метода контурных токов при решении обратной задачи.

Пример 1.10. В мостовой схеме, изображенной на рис. 1.21, известен ток $I_4 = 0,125$ А в диагональной ветви моста. Требуется определить напряжение источника E , если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $r_1 = 16$ Ом; $r_2 = r_3 = 24$ Ом; $r_4 = 40$ Ом; $r_0 = 0,4$ Ом.

Решение.

1 Составим уравнения цепи, пользуясь методом контурных токов:

$$\begin{cases} r_{11}I_{11} - r_{12}I_{22} - r_{13}I_{33} = E_{11}, \\ -r_{21}I_{11} - r_{22}I_{22} - r_{23}I_{33} = E_{22}, \\ -r_{31}I_{11} - r_{32}I_{22} + r_{33}I_{33} = E_{33}, \end{cases}$$

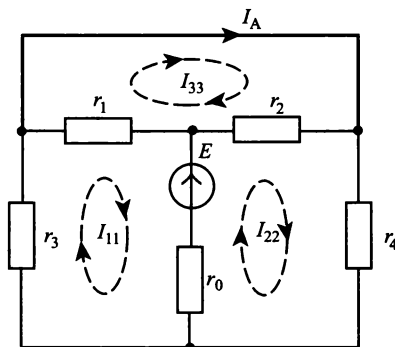


Рис. 1.21. Схема цепи к примеру 1.10

В этих уравнениях параметры элементов имеют следующие значения: $r_{11} = r_1 + r_3 + r_0 = 40,4 \text{ Ом}$; $r_{33} = r_4 + r_0 = 40,4 \text{ Ом}$; $r_{22} = r_2 + r_4 + r_0 = 64,4 \text{ Ом}$; $r_{12} = r_{21} = r_0 = 0,4 \text{ Ом}$; $r_{13} = r_{31} = r_1 = 16 \text{ Ом}$; $r_{23} = r_{32} = r_2 = 24 \text{ Ом}$; $I_{33} = I_A = 0,125 \text{ А}$; $E_{11} = -E$; $E_{22} = E$; $E_{33} = 0$.

2 Если в уравнения контурных токов подставить числовые значения параметров элементов и поменять местами члены с известным током $I_{33} = I_A$ и неизвестным напряжением E , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 40,4I_{11} - 0,4I_{22} + E = 2, \\ -0,4I_{11} + 64,4I_{22} - E = 3, \\ -16I_{11} - 24I_{22} + 0 = 8,5. \end{cases}$$

3 Решим эту систему уравнений относительно напряжения E :

$$E = \Delta_3 / \Delta,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 40,4 & -0,4 & 1 \\ -0,4 & 64,4 & -1 \\ -16 & -24 & 0 \end{vmatrix} = 64;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 40,4 & -0,4 & 2 \\ -0,4 & 64,4 & 3 \\ -16 & -24 & 8,5 \end{vmatrix} = -8000.$$

4 Определим напряжение источника питания:

$$E = \Delta_3 / \Delta = -8000 / 64 = -125 \text{ В.}$$

Знак минус в этом решении означает, что выбранное направление тока I_A нужно заменить на противоположное.

1.7. Энергетические расчеты в цепях постоянного тока

При выполнении энергетических расчетов в цепях постоянного тока определяют следующие характеристики, связанные с распределением электрической энергии по элементам цепи:

- » определение мощности, рассеиваемой в сопротивлениях цепи;
- » определение суммарной рассеиваемой мощности;
- » определение мощности, которую отдает в цепь источник напряжения или тока;
- » проверку баланса мощностей.

Рассеиваемая мощность P_k характеризует способность сопротивления r_k (или проводимости g_k) необратимо преобразовывать электрическую энергию в любой другой вид энергии и рассчитывается по одной из формул:

$$P_k = U_k I_k = r_k I_k^2 = g_k U_k^2.$$

Суммарная рассеиваемая мощность для n сопротивлений и проводимостей определяется *арифметической суммой* мощностей, рассеиваемых в отдельных сопротивлениях r_k или проводимостях g_k цепи:

$$P = \sum_{k=1}^n P_k,$$

где $P_k = I_k^2 r_k = U_k^2 g_k$ — мощность, рассеиваемая в сопротивлении r_k или проводимости g_k , при этом направление напряжения или тока не влияет на рассеиваемую мощность.

В отличие от сопротивлений и проводимостей, которые способны только потреблять электрическую энергию, активные элементы (источники напряжения или тока) способны как потреблять, так и отдавать энергию во внешнюю цепь. В цепях с одним источником всегда происходит передача энергии источника во внешнюю цепь. При наличии в цепи нескольких источников некоторые из них могут работать в режиме потребления энергии. Такое положение может иметь место, например, при зарядке или разрядке аккумуляторов. В связи с

этим мощность источников следует определять с учетом направлений напряжения и тока в них, пользуясь формулами:

$$P_E = EI \text{ или } P_J = JU_J.$$

При положительных направлениях напряжения и тока источников, которые приведены на рис. 1.22, энергия источников передается во внешнюю цепь, и, следовательно, их мощность имеет положительное значение ($P_E > 0$, $P_J > 0$). При отрицательных направлениях источники работают в режиме потребления энергии, и, следовательно, их мощность имеет отрицательное значение ($P_E < 0$, $P_J < 0$).

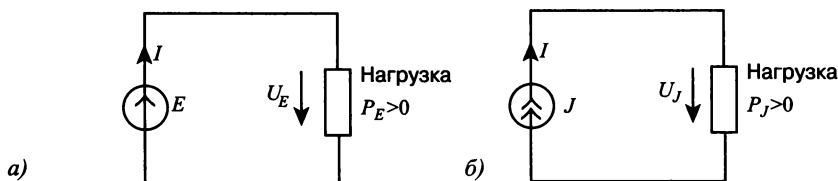


Рис. 1.22. К расчету мощности источников напряжения (а) и тока (б)

Балансом электрических мощностей называют установление равенства мощностей, отдаваемых источниками во внешнюю цепь, и мощностей, потребляемых нагрузками.

Баланс мощностей можно установить с помощью формулы:

$$\sum_{k=1}^m P_{Ek} + \sum_{k=1}^s P_{Jk} = \sum_{k=1}^n P_k,$$

где сравнивается сумма мощностей s источников тока J_k и m источников напряжения E_k (с учетом их знаков) с суммой мощностей P_k , потребляемых в n сопротивлениях r_k или проводимостях g_k цепи. При правильном решении задачи баланс мощностей соблюдается.

Пример 1.11. Требуется определить мощности источников энергии, мощности, рассеиваемые в сопротивлениях, и установить баланс мощностей для цепи, рассмотренной в примере 1.7 (рис. 1.18а).

Решение. Решение задачи будем основывать на значениях токов и напряжений, полученных при решении примера 1.7.

Вначале определим мощность, которую отдают в цепь источники напряжения:

$$P_E = P_{E1} + P_{E2} + P_{E4} = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_4 I_4 = 3,5 - 12,5 - 4,5 = -13,5 \text{ Вт.}$$

Из выполненного расчета следует, что только источник E_1 отдает энергию в цепь, а источники E_2 и E_4 ее потребляют.

Теперь определим суммарную мощность, которую отдают в цепь источники тока:

$$P_J = P_{J3} + P_{J6} = J_3 U_4 + J_6 U_1 = 30 + 15 = 45 \text{ Вт.}$$

Из этого решения следует, что оба источника тока отдают энергию в цепь.

Полная мощность источников энергии:

$$P_E + P_J = 45 - 13,5 = 31,5 \text{ Вт.}$$

Наконец, определим мощность потерь в сопротивлениях цепи:

$$P = P_{r1} + P_{r3} + P_{r4} = r I_1^2 + r_3 I_3^2 + r_4 I_4^2 = 12,25 + 18,75 + 0,5 = 31,5 \text{ Вт.}$$

Результаты расчета показывают, что баланс мощностей выполняется.

ЗАДАНИЕ 1.3. Расчет сложной цепи постоянного тока

Для обобщенной цепи, приведенной на рис. 1.23, требуется выполнить следующее:

- 1) пользуясь данными табл. 1.3, составить расчетную схему электрической цепи;
- 2) записать систему уравнений Кирхгофа, необходимых для определения токов во всех ветвях схемы;
- 3) выполнить расчет схемы методом контурных токов и найти токи во всех ветвях;
- 4) выделить в схеме три сопротивления, включенные по схеме треугольника, и заменить их эквивалентным соединением по схеме звезды;
- 5) рассчитать полученную схему методом узловых напряжений и найти токи в ветвях;
- 6) определить ток в сопротивлении R_6 по методу эквивалентного генератора;
- 7) рассчитать напряжение между точками А и В схемы;
- 8) составить баланс мощностей для исходной схемы.

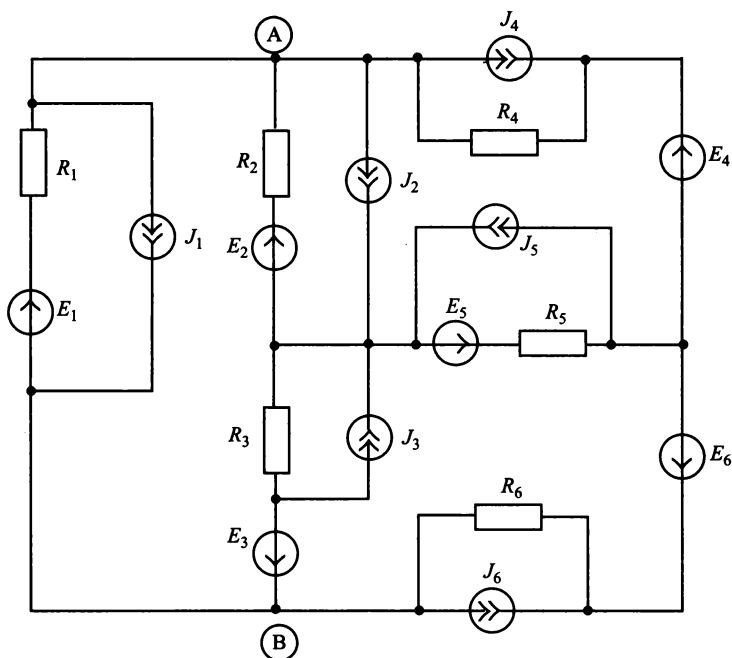


Рис. 1.23. Обобщенная схема цепи к заданию 1.3

Таблица 1.3

Вариант	Значения параметров элементов схемы																	
	Сопротивления, Ом						Напряжения, В						Токи, А					
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	E ₁	E ₂	E ₃	E ₄	E ₅	E ₆	J ₁	J ₂	J ₃	J ₄	J ₅	J ₆
1	2	1	4	5	4	3	0	0	0	10	0	15	0	0	0	0	6	0
2	4	3	1	4	5	3	10	0	16	0	0	0	0	4	0	0	0	0
3	6	5	2	1	4	5	12	20	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0
4	1	2	7	4	3	5	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	5	3
5	5	4	3	4	7	8	0	0	0	0	0	22	5	0	8	0	0	0
6	7	2	5	8	3	4	18	0	0	0	0	0	0	8	0	2	0	0
7	2	3	6	7	4	5	0	0	0	0	10	20	0	0	0	3	0	0
8	4	7	4	3	6	3	20	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	7
9	6	1	2	3	2	5	16	0	0	21	0	0	0	12	0	0	0	0
10	9	4	7	2	3	6	0	0	0	0	10	0	0	0	0	8	0	3
11	3	2	1	4	5	4	0	0	20	0	0	0	6	0	0	0	0	4
12	7	4	5	4	3	2	18	0	0	0	0	0	0	5	0	3	0	0
13	6	1	2	5	4	3	0	0	0	15	10	0	0	0	0	0	0	6
14	4	7	4	3	8	5	20	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	4
15	2	3	6	5	2	3	0	14	0	20	0	0	8	0	0	0	0	0
16	3	6	7	4	1	4	0	0	0	0	20	0	0	0	0	6	0	5
17	7	2	5	6	3	2	0	0	15	0	0	0	3	0	0	0	0	9
18	5	4	3	2	7	5	0	20	0	0	0	0	4	0	0	9	0	0
19	8	3	4	7	4	5	0	0	0	0	20	10	0	0	0	3	0	0
20	4	5	8	3	6	7	0	0	17	0	0	15	5	0	0	0	0	0
21	6	1	4	5	8	3	0	14	0	10	0	0	3	0	0	0	0	0
22	5	8	3	6	3	4	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	5
23	3	4	7	8	1	6	14	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	4
24	7	6	5	4	3	8	0	0	0	24	0	0	2	3	0	0	0	0
25	6	3	4	7	4	5	0	0	0	0	0	20	0	0	0	3	5	0
26	2	7	2	1	8	3	0	0	18	0	0	0	7	0	0	0	0	8
27	4	5	8	3	2	9	0	20	0	0	0	0	5	0	0	7	0	0
28	3	6	7	2	5	2	0	0	0	16	0	18	0	0	0	0	4	0
29	9	4	3	6	3	4	25	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	5
30	7	2	9	4	3	6	0	15	0	23	0	0	3	0	0	0	0	0

задания

Пример 1.11. Для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 1.24, выполнить расчет по условиям задания 1.3. Дополнительно построить потенциальную диаграмму для внешнего контура цепи. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E_1 = 30 \text{ В}$; $E_2 = 16 \text{ В}$; $E_3 = 10 \text{ В}$; $R_1 = 2 \text{ Ом}$; $R_2 = 5 \text{ Ом}$; $R_3 = 3 \text{ Ом}$; $R_4 = 1 \text{ Ом}$; $R_5 = 8 \text{ Ом}$; $R_6 = 5 \text{ Ом}$.

Примечание. При расчете схемы внутренние сопротивления источников напряжения считать равными нулю, т. е. полагать источники идеальными.

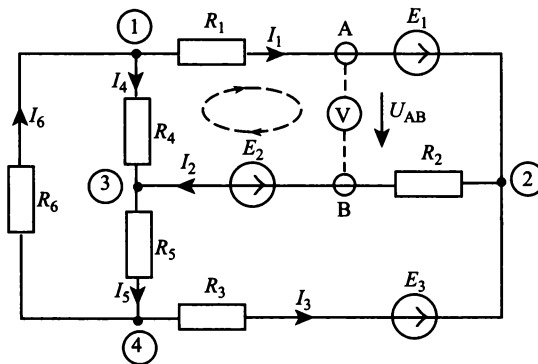


Рис. 1.24. Схема цепи к примеру 1.11

Решение. При расчете схемы будем придерживаться порядка, указанного в задании 1.3.

1 Выберем направления токов в ветвях и составим уравнения по первому закону Кирхгофа для независимых узлов 1, 2, 3, которые укажем на схеме рис. 1.24:

$$\begin{cases} I_6 - I_1 - I_4 = 0; \\ I_1 + I_3 - I_2 = 0; \\ I_4 + I_2 - I_5 = 0. \end{cases}$$

Выберем три независимых контура 1, 2, 3, и укажем на рис. 1.24 направление их обхода. Составим для этих контуров уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_6 R_1 + I_2 R_2 - I_4 R_4 = E_1 - E_2; \\ -I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_5 R_5 = E_2 - E_3; \\ I_4 R_4 + I_5 R_5 + I_6 R_6 = 0 \end{cases}$$

2 Выполним расчет цепи по методу контурных токов. При расчете цепи по методу контурных токов вначале нужно составить уравнения и определить значения контурных сопротивлений и напряжений источников. Если в схеме содержатся источники тока, то их предварительно нужно заменить эквивалентными источниками напряжения. Расчетная схема для метода контурных токов приведена на рис. 1.25.

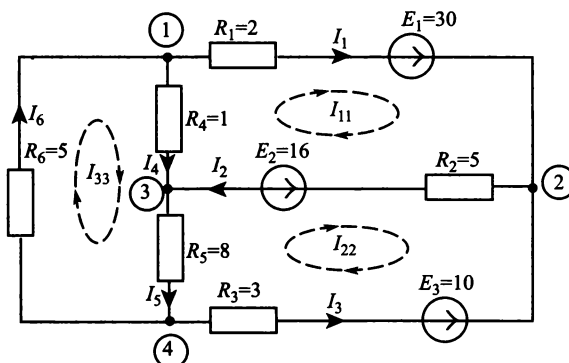


Рис. 1.25. Схема цепи для расчета по методу контурных токов

Уравнения контурных токов для этой схемы имеют вид:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} - R_{12}I_{22} - R_{13}I_{33} = E_{11}; \\ -R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} - R_{23}I_{33} = E_{22}; \\ -R_{31}I_{11} - R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{22}, \end{cases}$$

где $R_{11} = R_1 + R_2 + R_4 = 2 + 5 + 1 = 8 \text{ Ом};$

$R_{22} = R_2 + R_3 + R_5 = 5 + 3 + 8 = 16 \text{ Ом};$

$R_{33} = R_4 + R_5 + R_6 = 1 + 8 + 5 = 14 \text{ Ом};$

$R_{12} = R_{21} = R_2 = 5 \text{ Ом}; R_{23} = R_{32} = R_5 = 8 \text{ Ом}; R_{13} = R_{31} = R_4 = 1 \text{ Ом};$

$E_{11} = E_1 - E_2 = 30 - 16 = 14 \text{ В}; E_{22} = E_2 - E_3 = 16 - 10 = 6 \text{ В}; E_{33} = 0.$

После подстановки значений контурных сопротивлений и напряжений источников получим систему контурных уравнений:

$$\begin{cases} 8I_{11} - 5I_{22} - I_{33} = 14; \\ -5I_{11} + 16I_{22} - 8I_{33} = 6; \\ -I_{11} - 8I_{22} + 14I_{33} = 0. \end{cases}$$

Вычислим контурные токи, пользуясь этими уравнениями:

$$I_{11} = \Delta_1/\Delta; I_{22} = \Delta_2/\Delta; I_{33} = \Delta_3/\Delta,$$

где определители контурных уравнений имеют значения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -5 & 16 & -8 \\ -1 & -8 & 14 \end{vmatrix} = 834;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & -R_{23} \\ E_{33} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & -5 & -1 \\ 6 & 16 & -8 \\ 0 & -8 & 14 \end{vmatrix} = 2708;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & -R_{13} \\ -R_{21} & E_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 14 & -1 \\ -5 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 1758;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & E_{11} \\ -R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ -R_{31} & -R_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -5 & 14 \\ -5 & 16 & 6 \\ -1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 1198.$$

Подставив значения определителей, вычислим значения контурных токов:

$$I_{11} = 2708/834 = 3,247 \text{ А}; I_{22} = 1758/834 = 2,108 \text{ А}; I_{33} = 1198/834 = 1,436 \text{ А}.$$

Используя значения контурных токов, найдем токи в ветвях цепи:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} = 3,247 \text{ А}; I_2 = I_{11} - I_{22} = 3,247 - 2,108 = 1,139 \text{ А}; \\ I_3 &= -I_{22} = -2,108 \text{ А}; I_4 = I_{33} - I_{11} = 1,436 - 3,247 = -1,811 \text{ А}; \\ I_5 &= I_{33} - I_{22} = 1,436 - 2,108 = -0,672 \text{ А}; I_6 = I_{33} = 1,436 \text{ А}. \end{aligned}$$

Примечание. Правильность полученного решения можно легко проверить подстановкой найденных токов в уравнения, составленные по законам Кирхгофа.

3 Упростим схему, заменив соединение сопротивлений R_4, R_5, R_6 на эквивалентное соединение сопротивлений звездой. Схема, полученная после преобразования, приведена на рис. 1.26. В этой схеме сопротивления преобразованных ветвей имеют следующие значения:

$$\begin{cases} R_{46} = R_4 R_6 / (R_4 + R_5 + R_6) = 5/14 = 0,357 \text{ Ом}; \\ R_{45} = R_4 R_5 / (R_4 + R_5 + R_6) = 8/14 = 0,571 \text{ Ом}; \\ R_{56} = R_5 R_6 / (R_4 + R_5 + R_6) = 40/14 = 2,857 \text{ Ом}. \end{cases}$$

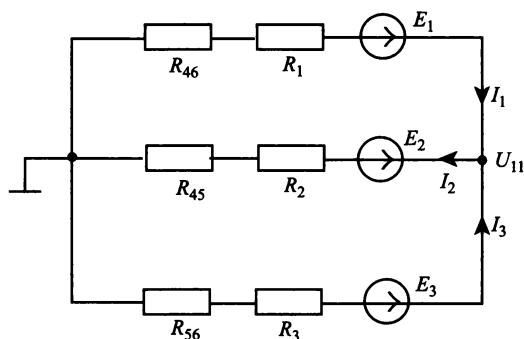


Рис. 1.26. Схема цепи для расчета по методу узловых напряжений

4 Выполним расчет преобразованной схемы методом узловых напряжений. В полученной схеме имеются только два узла, поэтому для нее можно составить только одно уравнение по методу узловых напряжений:

$$G_{11}U_{11} = J_{11},$$

где U_{11} — узловое напряжение;

$G_{11} = (R_1 + R_{46})^{-1} + (R_2 + R_{45})^{-1} + (R_3 + R_{56})^{-1} = 0,744 \text{ 1/Ом}$ — узловая проводимость;

$J_{11} = E_1/(R_1 + R_{46}) + E_2/(R_2 + R_{45}) + E_3/(R_3 + R_{56}) = 30/2,357 + 16/5,571 + 10/5,857 = 17,307 \text{ А}$ — узловой ток источников.

Подставив значение узловой проводимости G_{11} и узлового тока J_{11} , найдем узловое напряжение:

$$U_{11} = J_{11}/G_{11} = 17,307/0,774 = 22,360 \text{ В.}$$

Используя значение узлового напряжения, найдем токи в ветвях:

$$\begin{cases} I_1 = (E_1 - U_{11})/(R_1 + R_{46}) = 3,247 \text{ А;} \\ I_2 = (-E_2 + U_{11})/(R_2 + R_{45}) = 1,139 \text{ А;} \\ I_3 = (E_3 - U_{11})/(R_3 + R_{56}) = -2,108 \text{ А.} \end{cases}$$

Сравнение результатов расчета токов I_1 , I_2 , I_3 методами узловых напряжений и контурных токов показало их полное совпадение, что подтверждает корректность решения задачи.

5 Определим ток в сопротивлении R_6 , пользуясь методом эквивалентного генератора. Для этого будем считать, что сопротивление R_6 является нагрузкой, исключим его, разорвав ветвь, в которой оно было включено, как показано на рис. 1.27а. Затем для полученной схемы найдем напряжение U_{xx} холостого хода и ее вход-

ное сопротивление $R_{\text{вх}}$ между зажимами подключения нагрузки (т. е. сопротивления R_6). В результате схема сводится к цепи, которая изображена на рис. 1.26б.

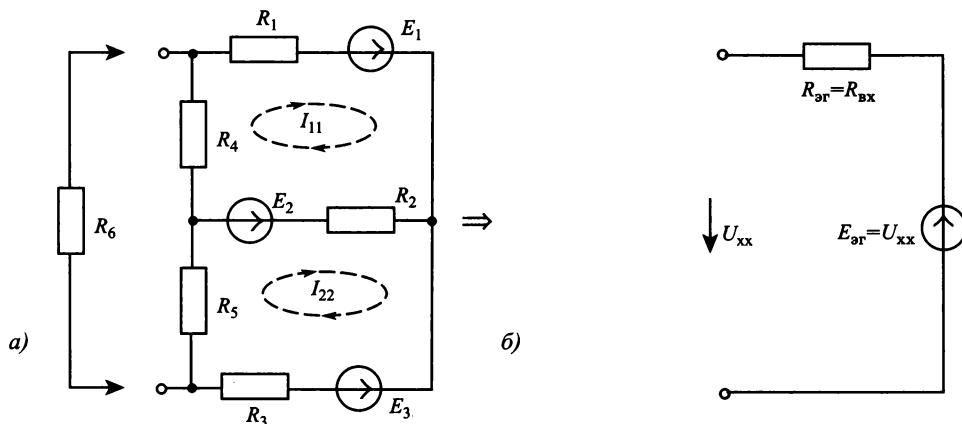


Рис. 1.27. Схема цепи для расчета по методу эквивалентного генератора

Найдем токи в ветвях цепи, изображенной на рис. 1.27а. Для этого воспользуемся методом контурных токов. Уравнения цепи, составленные по методу контурных токов, имеют вид:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} - R_{12}I_{22} = E_{11}; \\ -R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22}, \end{cases}$$

где: $R_{11} = R_1 + R_2 + R_4 = 8 \text{ Ом}$; $R_{22} = R_2 + R_3 + R_5 = 16 \text{ Ом}$; $R_{12} = R_{21} = R_2 = 5 \text{ Ом}$;

$E_{11} = E_1 - E_2 = 14 \text{ В}$; $E_{22} = E_2 - E_3 = 6 \text{ В}$.

Подставив значения сопротивлений и напряжений, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 8I_{11} - 5I_{22} = 14; \\ -5I_{11} + 16I_{22} = 6. \end{cases}$$

В результате решения этой системы уравнений находим токи

$I_{11} = \Delta_1/\Delta$; $I_{22} = \Delta_2/\Delta$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 16 \end{vmatrix} = 103; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & -5 \\ 6 & 16 \end{vmatrix} = 254; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 14 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 118.$$

Подставив значения определителей, найдем токи в ветвях цепи:

$$I_{11} = 254/103 = 2,466 \text{ А}; I_{22} = 118/103 = 1,146 \text{ А}.$$

Теперь можно найти напряжение U_{XX} на зажимах подключения нагрузки:

$$U_{XX} = I_{11}R_4 + I_{22}R_5 = 11,634 \text{ В}.$$

Для определения входного сопротивления R_{BX} необходимо исключить из схемы источники напряжения, заменив их перемычками, как показано на рис. 1.28а. При расчете входного сопротивления произведе-

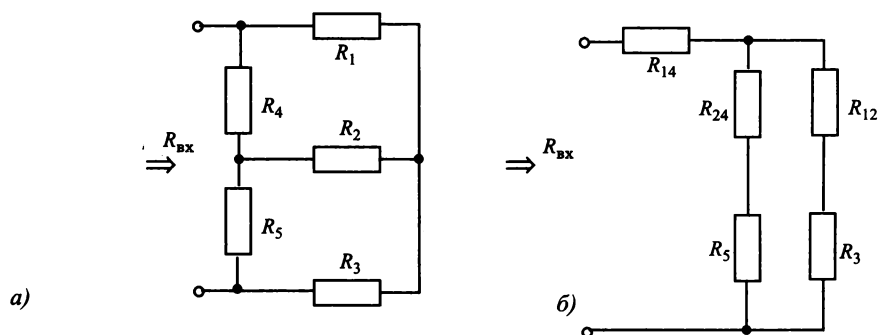


Рис. 1.28. К определению входного сопротивления цепи

дем замену треугольника сопротивлений R_1, R_2, R_4 эквивалентной звездой, как показано на рис. 1.28б. Значения сопротивлений эквивалентной звезды найдем по формулам:

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 R_2 / (R_1 + R_2 + R_4) = 1,25 \text{ Ом}; \\ R_{24} &= R_2 R_4 / (R_1 + R_2 + R_4) = 0,625 \text{ Ом}; \\ R_{14} &= R_1 R_4 / (R_1 + R_2 + R_4) = 0,25 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Расчет входного сопротивления выполним по схеме, изображенной на рис. 1.28б:

$$R_{BX} = R_{14} + (R_{12} + R_3)(R_{24} + R_5) / (R_{12} + R_3 + R_{24} + R_5) = 3,097 \text{ Ом}.$$

В заключение найдем ток в сопротивлении R_6 :

$$I_6 = U_{XX} / (R_{BX} + R_6) = 1,436 \text{ А}.$$

Этот результат точно совпадает со значением тока I_6 , полученным ранее по методу контурных токов, что подтверждает правильность выполненного расчета.

6 Определим напряжение между точками А и В схемы, используя выполненные выше расчеты. Для расчета напряжения U_{AB} со-

ставим уравнение по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, который показан штриховой линией на рис. 1.24:

$$U_{AB} - I_4 R_4 + I_1 R_1 + E_2 = 0.$$

Из этого уравнения находим напряжение

$$U_{AB} = -E_2 - I_1 R_1 + I_4 R_4.$$

Подставив найденные ранее значения токов, получим:

$$U_{AB} = -16 - 3,247 \cdot 2 - 1,811 = -24,305 \text{ В.}$$

Таким образом, напряжение между узлами А и В имеет в действительности направление, противоположное обозначенному на схеме рис. 1.24.

7 Составим баланс мощностей для исходной схемы, изображенной на рис. 1.24. При составлении баланса мощностей учтем, что мощность, потребляемая всеми элементами цепи, должна быть равна мощности, которую отдают источники энергии. Однако возможна такая ситуация, при которой ток в каком-либо источнике имеет направление, противоположное напряжению этого источника. В этом случае источник не отдает энергию во внешнюю цепь, а, наоборот, потребляет ее. Как указывалось выше, такое положение может иметь место, например, при зарядке аккумулятора.

При составлении баланса мощностей найдем вначале мощности источников напряжения:

$$P_{ист} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = 30 \cdot 3,247 - 16 \cdot 1,139 - 10 \cdot 2,108 = 58,1 \text{ Вт.}$$

Из этого уравнения следует, что мощность в цепь отдает только источник E_1 , а два других источника E_2 и E_3 ее потребляют.

Теперь найдем мощность, которую потребляют сопротивления цепи:

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = 58,1 \text{ Вт.}$$

Таким образом, можно считать, что баланс мощностей выполняется, так как

$$P_{ист} = P_R.$$

8 Построим теперь потенциальную диаграмму для внешнего контура цепи. Для этого запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для внешнего контура:

$$I_1 R_1 - E_1 + E_3 - I_3 R_3 + I_6 R_6 = 0.$$

Подставим в это уравнение значения токов, напряжений и сопротивлений, тогда

$$\begin{aligned} 3,247 \cdot 2 - 30 + 10 + 2,108 \cdot 3 + 1,436 \cdot 5 = \\ 6,494 - 30 + 10 + 6,324 + 7,182 = 0. \end{aligned}$$

Эта формула, построенная в выбранном масштабе, рассматривается как потенциальная диаграмма и приведена на рис. 1.29.

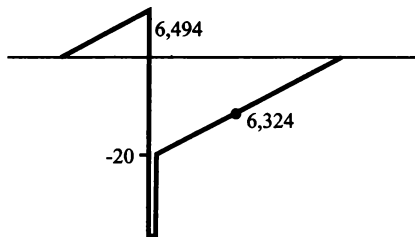


Рис. 1.29. Потенциальная диаграмма цепи

РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Всякая работа требует больше времени,
чем вы думаете.

Второй закон Мерфи

2.1. Способы представления синусоидальных величин

При расчете цепей синусоидального переменного тока используют различные формы представления синусоидальных величин — напряжений и токов. Эти формы можно в общем случае разделить на две группы: аналитические и графические. К аналитическим формам можно отнести представление синусоидальных величин их *мгновенными значениями*. При этом используют две формы записи — с помощью функции синуса или косинуса. Продемонстрируем это на примере записи мгновенного значения гармонического напряжения:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \text{ или } u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u),$$

где U_m — амплитуда, а ψ_u — начальная фаза напряжения; $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — угловая частота напряжения; $f = 1/T$ — частота.

Обе эти формы можно использовать при расчете цепи по мгновенным значениям, однако следует учитывать, что согласно известному тригонометрическому соотношению $\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos \alpha$, при второй форме записи воздействие (а соответственно, и реакция цепи) имеют дополнительный фазовый сдвиг на $+90^\circ$.

При любом из этих видов записи мгновенное значение напряжения можно представить в виде суммы двух гармонических колебаний с нулевыми начальными фазами, находящихся в квадратуре:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U_m \cos \psi_u \sin \omega t + U_m \sin \psi_u \cos \omega t = a_m \sin \omega t + b_m \cos \omega t$$

или же

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) = U_m \cos \psi_u \cos \omega t - U_m \sin \psi_u \sin \omega t = a_m \cos \omega t - b_m \sin \omega t$$

где $a_m = U_m \cos \psi_u$, $b_m = U_m \sin \psi_u$, $U_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$, $\operatorname{tg} \psi_u = b_m / a_m$.

Любые линейные комбинации (т. е. сложение или вычитание) нескольких гармонических колебаний с одной и той же частотой ω дают результирующее колебание той же частоты. Дифференцирование и интегрирование гармонических колебаний также приводит к гармоническим колебаниям той же частоты, но сдвинутым по фазе на 90° , т. е. находящимся в квадратуре с исходным колебанием.

При другой форме записи гармонические колебания представляют их **комплексным значением**. Так, например, комплексное мгновенное значение напряжения представляют в следующем виде:

$$\dot{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}.$$

Очевидно, что модуль этой комплексной величины равен амплитуде колебания, а аргумент растет пропорционально текущему времени t . Переход от комплексного к мгновенному значению осуществляют при помощи операций вычисления вещественной или мнимой частей комплексной величины:

$$u(t) = \operatorname{Im}(U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}) = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

$$u(t) = \operatorname{Re}(U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}) = U_m \cos(\omega t + \psi_u).$$

Комплексное значение колебания можно также представить в виде произведения

$$\dot{u}(t) = U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t},$$

где $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ — комплексная амплитуда напряжения.

Применение комплексной формы записи напряжений и токов имеет ряд преимуществ по сравнению с применением мгновенных значений. Так, например, дифференцирование и интегрирование комплексного напряжения сводится к умножению или делению его комплексной амплитуды на оператор поворота $j\omega = \omega e^{j\pi/2}$, так как

$$\frac{d}{dt} \dot{u}(t) = \frac{d}{dt} \dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t},$$

$$\int \dot{u}(t) dt = \int \dot{U}_m e^{j\omega t} dt = (\dot{U}_m / j\omega) e^{j\omega t}.$$

Графическое представление гармонических колебаний также возможно в двух формах. В первой форме колебание изображают в виде функции времени t , как показано на рис. 2.1. При этом по оси абсцисс можно откладывать не только текущее время t , но и текущее значение угла ωt .

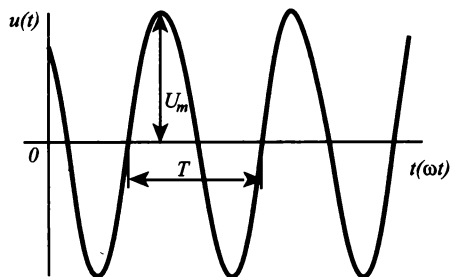


Рис. 2.1. Графическое изображение синусоидального напряжения

При второй форме гармонические колебания представляют в виде векторов на комплексной плоскости. Совокупность таких векторов называют векторной диаграммой. Между этими двумя представлениями гармонических колебаний имеется связь. Развертка во времени проекций вращающихся векторов с угловой скоростью ω соответствует временным зависимостям, как показано на рис. 2.2.

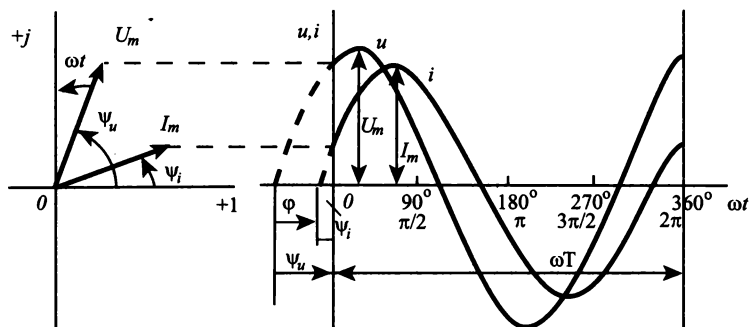


Рис. 2.2. Векторное представление гармонических колебаний

Пример 2.1. Гармоническое напряжение задано его мгновенным значением $u(t) = 100 \sin(200t + 60^\circ)$ В, а мгновенное значение тока в цепи равно $i(t) = 5 \cos(200t + 45^\circ)$ А. Требуется для этих колебаний найти амплитуды квадратурных составляющих, записать комплексные значения напряжения и тока, построить временные и векторные диаграммы.

Решение. Вначале найдем амплитуды квадратурных составляющих напряжения и тока

$$a_{um} = U_m \cos \psi_u = 100 \cos 60^\circ = 50 \text{ В},$$

$$b_{um} = U_m \sin \psi_u = 100 \sin 60^\circ = 86,6 \text{ В},$$

$$a_{im} = I_m \cos \psi_i = 5 \cos 45^\circ = 3,535 \text{ А},$$

$$b_{im} = I_m \sin \psi_i = 5 \sin 45^\circ = 3,535 \text{ А}.$$

Используя значения квадратурных составляющих и заданные мгновенные значения, запишем комплексные амплитуды напряжения и тока

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = 100 e^{j60^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi} = 5 e^{j(90+45^\circ)} = 5 e^{j135^\circ} \text{ А}.$$

Графическое представление напряжения и тока в форме векторной диаграммы приведено на рис. 2.3а. При построении векторной диа-

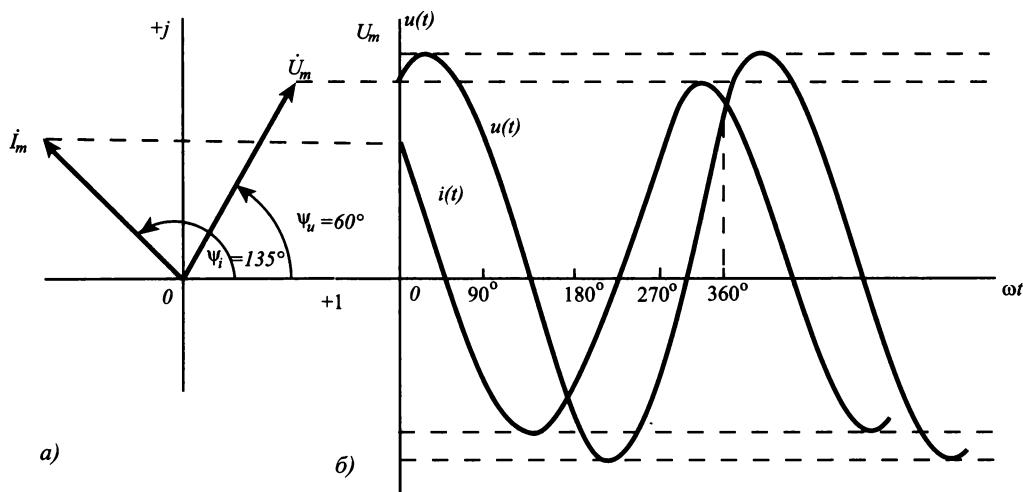


Рис. 2.3. К построению векторной диаграммы для примера 2.1

граммы учтено, что напряжение $u(t)$ задано в синусной форме, а ток $i(t)$ — в косинусной. Временную зависимость мгновенных значений напряжения и тока получим, используя проекции векторов при их вращении в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, как показано на рис. 2.3б.

2.2. Энергетические расчеты в цепи синусоидального переменного тока

При энергетических расчетах в электрических цепях синусоидального переменного тока пользуются действующими (среднеквадратичными) значениями напряжения и тока

$$U = U_m / \sqrt{2} = 0,707 U_m; I = I_m / \sqrt{2} = 0,707 I_m,$$

которые эквивалентны по воздействию соответствующим постоянным напряжениям и токам.

Мощность и энергию в цепи переменного тока можно рассчитать при любой форме записи напряжений и токов. Различают следующие виды мощностей:

- ▶▶ мгновенную мощность $p(t) = u(t)i(t) = P + p_m$;
- ▶▶ среднюю мощность $P = UI \cos \varphi$;
- ▶▶ переменную мощность $p_m = S \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$;
- ▶▶ реактивную мощность $Q = UI \sin \varphi = Q_L + Q_C$;
- ▶▶ полную, или кажущуюся, мощность $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$;
- ▶▶ комплексную мощность $\dot{S} = \dot{U} I = P + jQ$.

Следует отметить, что для некоторых видов мощностей введены особые единицы измерения. Так, например, мгновенную мощность p_m и среднюю мощность P измеряют в *ваттах* (*Вт*), реактивную мощность Q измеряют в *вольт-амперах реактивных* (*вар*), а полную и комплексную мощности S измеряют в *вольт-амперах* (*ВА*). Более подробные сведения о расчете мощностей можно найти в учебниках по ТОЭ [1, 2, 3].

Энергию в электрических цепях можно подразделить на две группы: диссипативную, которая рассеивается цепью в сопротивлениях r_k и пропорциональна времени t

$$W_r = \sum \left[\int p_{rk} dt \right] = \sum (I_k^2 r_k t),$$

и энергию, которая запасается цепью в индуктивных и емкостных элементах L_k, C_k

$$W_{\Sigma} = W_M + W_{\Sigma} = \sum \left(\frac{L_k I_k^2}{2} + \frac{C_k U_k^2}{2} \right) = Q / \omega.$$

Полная энергия электрической цепи равна сумме этих энергий

$$W = W_r + W_{\Sigma}.$$

При расчете мощностей в цепях переменного тока пользуются понятием коэффициента мощности

$$k_M = \cos \varphi = P/S,$$

который характеризует долю средней мощности P в полной мощности S .

2.3. Расчет цепей синусоидального переменного тока по мгновенным значениям

При расчете цепей по мгновенным значениям используют приведение произвольной цепи к одной из канонических схем. В качестве канонических схем обычно используют последовательное или параллельное соединение активных и реактивных сопротивлений или проводимостей. При этом для последовательной канонической схемы пользуются последовательным соединением активного и реактивного сопротивлений r и x , а для параллельной канонической схемы — параллельным включением активной и реактивной проводимостей g и b . Такие соединения элементов приведены на рис. 2.4.

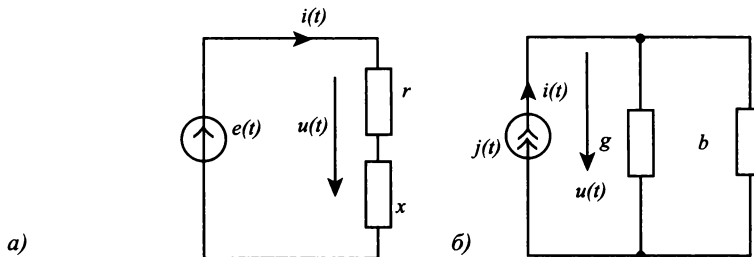


Рис. 2.4. Последовательная (а) и параллельная (б) схемы замещения

Если к входу последовательной канонической схемы подключен источник напряжения $e(t)$, то ток в цепи определяется по уравнению:

$$i(t) = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

где $\varphi = \arctg(x/r)$ — сдвиг фазы между напряжением и током,

$z = \sqrt{r^2 + x^2}$ — полное сопротивление цепи.

При подключении к входу параллельной канонической схемы источника тока $j(t)$ напряжение на элементах схемы определяется по формуле:

$$u(t) = \frac{I_m}{y} \sin(\omega t + \psi_i + \varphi),$$

где $\varphi = \arctg(b/g)$ — сдвиг фаз между током источника и напряжением на входе схемы;

$y = \sqrt{g^2 + b^2}$ — полная проводимость цепи.

Переход от последовательной канонической схемы к параллельной выполняется с помощью уравнений:

$$g = r/z^2; \quad b = x/z^2.$$

Аналогично выполняется переход от параллельной канонической схемы к последовательной:

$$r = g/y^2; \quad x = b/y^2.$$

При выполнении этих условий обе схемы будут эквивалентными.

Пример 2.2. Требуется определить напряжение $u(t)$ на входе электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.5а, если ток источника $i(t) = 0,1 \sin 500t$ А. Параметры схемы имеют следующие значения: $b_C = 0,2$ См; $x_L = r = 10$ Ом.

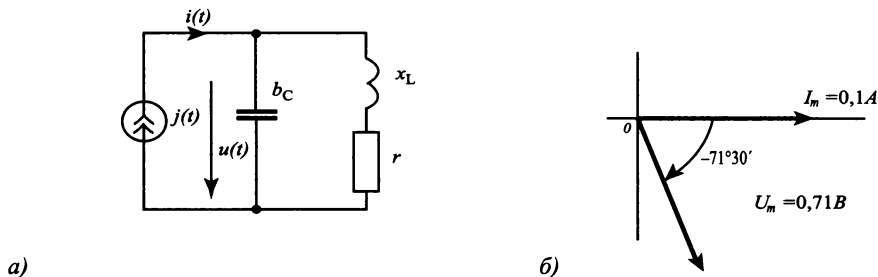


Рис. 2.5. Схема цепи (а) и векторная диаграмма (б) для примера 2.2

Решение. Вначале преобразуем последовательное соединение r и x_L в параллельное соединение g и b_L :

$$g = r/z^2 = r/(r^2 + x_L^2) = 10/200 = 0,5 \text{ См},$$

$$b_L = x_L/z^2 = x_L/(r^2 + x_L^2) = 10/200 = 0,5 \text{ См}.$$

Затем рассчитаем реактивную проводимость цепи

$$b = b_L - b_C = 0,05 - 0,2 = -0,15 \text{ См}$$

и определим ее полную проводимость

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = 0,05\sqrt{2} = 0,16 \text{ См}$$

Найдем амплитуду напряжения на входе цепи

$$U_m = I_m / y = 0,1 / 0,16 = 0,625 \text{ В.}$$

и определим сдвиг фаз между током и напряжением $\text{tg } \varphi = b/g = -3$, откуда получаем $\varphi = -71^\circ 30'$.

Мгновенное значение напряжения на входе цепи определяется формулой:

$$u(t) = U_m \sin(500t + \psi_i + \varphi) = 0,625 \sin(500t - 71^\circ 30') \text{ В.}$$

Из выполненного расчета следует, что входная проводимость цепи имеет емкостной характер ($b_C > b_L$), поэтому напряжение на входе цепи отстает от приложенного тока на угол $\varphi = 71^\circ 30'$. Векторная диаграмма, которая соответствует расчетным значениям напряжения и тока, приведена на рис. 2.5б.

Пример 2.3. Для цепи, изображенной на рис. 2.6, требуется определить мгновенные значения тока $i(t)$, напряжений $u_r(t)$, $u_C(t)$, $u_L(t)$, $u_{rL}(t)$, $u_{rC}(t)$, а также активную мощность P , потребляемую цепью. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $e(t) = 20 \sin 100t \text{ В}$; $r = 4 \text{ Ом}$; $L = 70 \text{ мГн}$; $C = 2500 \text{ мкФ}$.

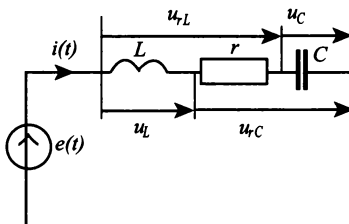


Рис. 2.6. Схема цепи к примеру 2.3

Решение. Определим реактивные сопротивления элементов цепи:

$$x_L = \omega L = 100 \cdot 70 \cdot 10^{-3} = 7 \text{ Ом};$$

$$x_C = 1/\omega C = 1/(100 \cdot 25 \cdot 10^{-3}) = 4 \text{ Ом.}$$

Вычислим полное сопротивление цепи:

$$z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{4^2 + (7 - 4)^2} = 5 \text{ Ом.}$$

Определим угол сдвига фаз между напряжением источника и током в цепи:

$$\varphi = \arctg (x_L - x_C)/r = \arctg (3/4) = 37^\circ.$$

Найдем амплитуду тока в цепи:

$$I_m = E_m/z = 20/5 = 4 \text{ А.}$$

Используя полученные значения, запишем мгновенное значение тока:

$$i(t) = I_m \sin (\omega t - \varphi) = 4 \sin (100t - 37^\circ) \text{ А.}$$

Напряжение на сопротивлении определим по закону Ома:

$$u_r(t) = ri(t) = 16 \sin (100t - 37^\circ) \text{ В.}$$

Напряжение на индуктивности вычислим по формуле:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L di(t)/dt = 70 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 4 \cos (100t - 37^\circ) = \\ &= 28 \sin (100t + 53^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Напряжение на емкости определим по формуле:

$$\begin{aligned} u_C &= [\int i(t) dt] / C = 4 [-\cos (100t - 37^\circ)] / 0,25 = \\ &= 16 \sin (100t - 127^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Напряжение на последовательном соединении сопротивления r и индуктивности L определяется током I_m и полным сопротивлением z_{rL} этого соединения. Амплитуда этого напряжения равна

$$U_{mrL} = I_m z_{rL} = I_m \sqrt{r^2 + x_L^2} = 4 \sqrt{4^2 + 7^2} = 32 \text{ Ом,}$$

а угол сдвига фаз

$$\varphi_{rL} = \arctg (x_L/r) = \arctg 1,75 = 60^\circ.$$

Мгновенное значение этого напряжения имеет значение:

$$u_{rL}(t) = 32 \sin (100t + 23^\circ) \text{ В.}$$

Аналогично определяют напряжение на последовательном соединении сопротивления r и емкости C . Амплитуда этого напряжения имеет значение

$$U_{mrC} = I_m z_{rC} = I_m \sqrt{r^2 + x_C^2} = 4 \cdot 5,66 = 22,64 \text{ В,}$$

а угол сдвига фаз равен

$$\varphi_{rc} = \arctg(-4/4) = -45^\circ.$$

Мгновенное значение напряжения на этом соединении запишем в виде:

$$u_{rc}(t) = 22,64\sin(100t - 82^\circ) \text{ В.}$$

Среднюю мощность, потребляемую цепью, можно рассчитать по формуле:

$$P = I_m^2 \frac{r}{2} = 4^2 \cdot \frac{4}{2} = 32 \text{ Вт.}$$

Реактивная мощность, запасаемая цепью $Q = U_m I_m \sin \varphi / 2 = 48 \text{ вар.}$

Векторная диаграмма для этой схемы приведена на рис. 2.7. При построении векторной диаграммы использованы мгновенные значения напряжений и тока, полученные ранее.

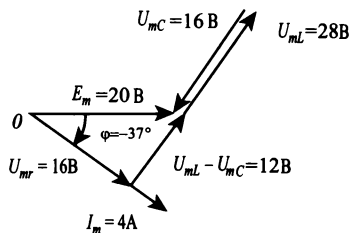


Рис. 2.7. Векторная диаграмма для примера 2.3

**ЗАДАНИЕ 2.1. Расчет канонической схемы
последовательного контура**

Для схем, изображенных на рис. 2.8, требуется определить мгновенные значения тех из величин $e(t)$, $i(t)$, $u_r(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$, $u_{rL}(t)$, $u_{rC}(t)$, $u_{LC}(t)$, которые для заданного варианта не указаны в табл. 2.1. Построить векторную диаграмму цепи, рассчитать среднюю, реактивную и полную мощности.

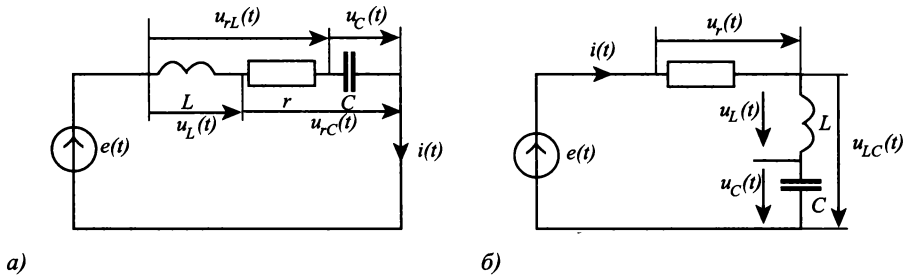


Рис. 2.8. Варианты схем к заданию 2.1

Таблица 2.1

Параметры элементов схемы

Вариант	r , Ом	L , мГн	C , мкФ	Напряжения и токи
$e(t)$, В				
1	2	40	2000	$10\sin 100t$
2	5	14	1000	$10\sin 500t$
3	6	30	2500	$35\sin 200t$
4	4	5	500	$56\sin 1000t$
$i(t)$, А				
5	4	30	2500	$2,121\sin(200t - 45^\circ)$
6	4	30	2000	$3,354\sin(100t + 26^\circ)$
7	8	5	625	$2,910\sin(400t + 14^\circ)$
8	8	40	2000	$2,233\sin(100t + 7^\circ)$
$u_L(t)$, В				
9	4	7,5	625	$10,91\sin(400t + 104^\circ)$
10	8	30	1250	$14,55\sin(200t + 76^\circ)$
11	4	8	400	$46,57\sin(500t + 104^\circ)$
12	3	30	2500	$31,2\sin(200t - 53^\circ)$

задания

Окончание табл. 2.1

Вариант	r , Ом	L , мГн	C , мкФ	Напряжения и токи
$u_c'(t)$, В				
13	3	10	250	$113,1\sin(500t - 45^\circ)$
14	3	60	400	$41,6\sin(50t - 56^\circ)$
15	2	6	250	$73,54\sin(1000t - 135^\circ)$
16	5	10	500	$31,38\sin(400t - 79^\circ)$
$u_r(t)$, В				
17	2	40	5000	$7,07\sin(100t - 45^\circ)$
18	6	40	1250	$16,64\sin(100t + 34^\circ)$
19	4	20	1250	$8,87\sin(100t + 56^\circ)$
$u_{LC}(t)$, В				
20	4	3	200	$17,89\sin(1000t - 64^\circ)$
21	4	35	1250	$9\sin(200t + 53^\circ)$
22	6	20	1000	$4,6\sin(200t - 81^\circ)$
23	6	2	125	$35,35\sin(1000t - 45^\circ)$
24	3	60	2500	$7,76\sin(100t + 56^\circ)$
$u_{rL}(t)$, В				
25	4	15	1250	$24,25\sin(200t + 51^\circ)$
26	5	12	500	$65,26\sin(500t + 29^\circ)$
27	4	14	250	$86,04\sin(500t + 74^\circ)$
$u_{rC}(t)$, В				
28	8	25	312	$54,88\sin(400t - 59^\circ)$
29	4	5	500	$15,37\sin(400t - 15^\circ)$
30	2	25	625	$25,45\sin(400t - 135^\circ)$

Пример 2.4. Для электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.9а, требуется определить следующие величины:

- 1) токи во всех ветвях цепи;
- 2) напряжения на элементах цепи;
- 3) среднюю мощность, потребляемую цепью;
- 4) построить векторную диаграмму токов и напряжений в цепи;
- 5) построить диаграмму напряжений по внешнему контуру цепи.

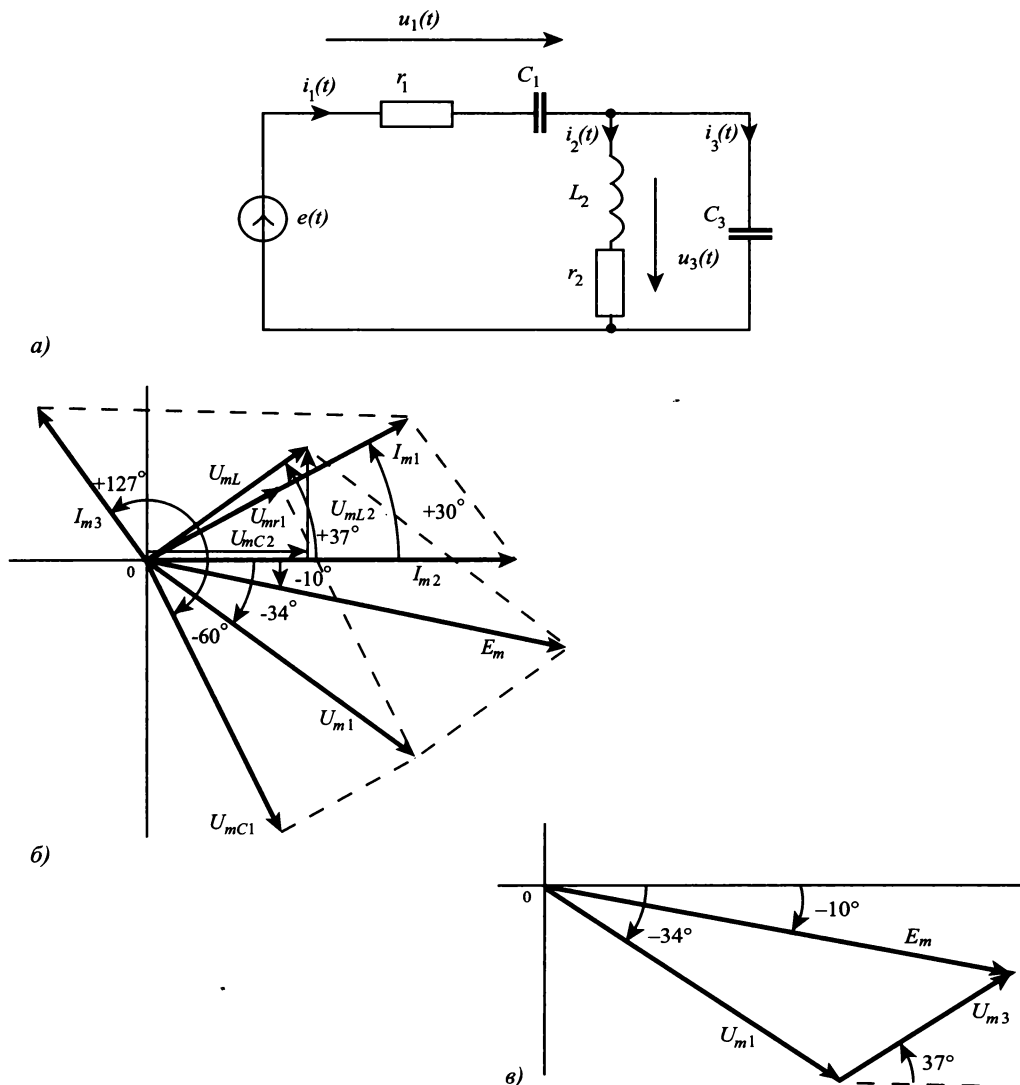


Рис. 2.9. Схема цепи (а) и ее векторные диаграммы (б, в) для примера 2.4

Параметры элементов схемы имеют следующие значения:
 $i_2(t) = 5\sin 100t$ А; $C_1 = 100$ мкФ; $C_3 = 100$ мкФ; $L_2 = 300$ мГн; $r_1 = 50$ Ом; $r_2 = 40$ Ом.

Решение. Расчет цепи для наглядности будем сопровождать построением векторной диаграммы. При построении векторной диаграммы будем соблюдать выбранный масштаб.

1 Выполним расчет напряжений и токов в цепи. Вначале построим на векторной диаграмме заданный ток $i_2(t) = 5\sin 100t$ А, как показано на рис. 2.9б. Этот ток протекает через два последовательно включенных элемента: сопротивление r_2 и индуктивность L_2 , напряжения на которых имеют следующие значения:

$$u_{r_2}(t) = r_2 i_2(t) = 40 \cdot 5 \sin 100t = 200 \sin 100t \text{ В};$$

$$\begin{aligned} u_{L_2}(t) &= L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) = \omega L_{m2} \cos \omega t = 0,3 \cdot 100 \cdot 5 \cos 100t = \\ &= 150 \sin(100t + 90^\circ) \text{ В}. \end{aligned}$$

Построим эти напряжения на векторной диаграмме. В результате сложения этих напряжений найдем напряжение на емкости C_3 :

$$\begin{aligned} u_3(t) &= 200 \sin 100t + 150 \cos 100t = \\ &= \sqrt{200^2 + 150^2} \sin(100t + 37^\circ); \end{aligned}$$

$$u_3(t) = U_{m3} \sin(\omega t + \psi_3) = 250 \sin(100t + 37^\circ) \text{ В},$$

которое также построим на векторной диаграмме.

Определим ток в емкости C_3 :

$$\begin{aligned} i_3(t) &= C_3 \frac{d}{dt} u_{C3} = \omega C_3 U_{mC3} \cos(\omega t + \psi_{C3}) = \\ &= I_{m3} \sin(\omega t + \psi_C + 90^\circ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_3(t) &= 100 \cdot 10^{-4} \cdot 250 \sin(100t + 37^\circ + 90^\circ) = \\ &= 2,5 \sin(100t + 127^\circ) \text{ А} \end{aligned}$$

и построим вектор этого тока на диаграмме.

Вычислим ток в ветви с источником:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_2(t) + i_3(t) = 5 \sin 100t - 1,5 \sin 100t + 2 \cos 100t = \\ &= 3,5 \sin 100t + 2 \cos 100t = 4 \sin(100t + 30^\circ) \text{ А} \end{aligned}$$

и построим его на векторной диаграмме.

Найдем напряжения на емкости C_1 и сопротивлении r_1

$$u_{C1}(t) = \int i_1(t) dt / C_1 = -400 \cos(100t + 30^\circ) = 400 \sin(100t - 60^\circ) \text{ В},$$

$$u_{r1}(t) = i_1(t)r_1 = 50 \cdot 4 \sin(100t + 30^\circ) = 200 \sin(100t + 30^\circ) \text{ В}$$

и построим эти векторы на диаграмме.

Найдем полное напряжение на первой ветви как сумму напряжений

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_{r1}(t) + u_{C1}(t) = 200 \sin(100t + 30^\circ) - 400 \cos(100t + 30^\circ) = \\ &= 447 \sin(100t - 64^\circ + 30^\circ) = 447 \sin(100t - 34^\circ) \text{ В} \end{aligned}$$

и построим его на векторной диаграмме.

Определим напряжение источника

$$\begin{aligned} e(t) &= u_1(t) + u_3(t) = 447 \sin(100t - 34^\circ) + 250 \sin(100t + 37^\circ) = \\ &= 580 \sin(100t - 10^\circ) \text{ В} \end{aligned}$$

и построим этот вектор на диаграмме.

На этом заканчивается расчет токов и напряжений на элементах контура.

2 Найдем среднюю мощность, потребляемую цепью. Поскольку мощность рассеивается только в сопротивлениях цепи, то среднюю мощность можно определить, пользуясь формулой:

$$\begin{aligned} P &= \frac{I_{m1}^2 r_1}{2} + \frac{I_{m2}^2 r_2}{2} = \frac{4^2 \cdot 50}{2} + \frac{5^2 \cdot 40}{2} = \\ &= 400 + 500 = 900 \text{ Вт} \end{aligned}$$

3 Теперь построим диаграмму напряжений для внешнего контура цепи, пользуясь законом Кирхгофа для внешнего контура:

$$u_1(t) + u_3(t) = e(t).$$

При построении диаграммы учтем амплитуды и начальные фазы всех напряжений, которые входят в это уравнение. Результаты построения диаграммы напряжений приведены на рис. 2.9 в. Очевидно, что эти же векторы напряжений входят в векторную диаграмму, приведенную на рис. 2.9 б.

ЗАДАНИЕ 2.2. Расчет разветвленных цепей синусоидального переменного тока по мгновенным значениям

Для электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.10, требуется определить следующие характеристики:

- токи во всех ветвях цепи (кроме тех, которые известны по условию задания);
- напряжение источника, напряжения на индуктивностях и емкостях (кроме тех, которые известны по условию задания);
- активную, реактивную и полную мощности;
- построить векторную диаграмму токов;
- построить диаграмму напряжений по внешнему контуру цепи.

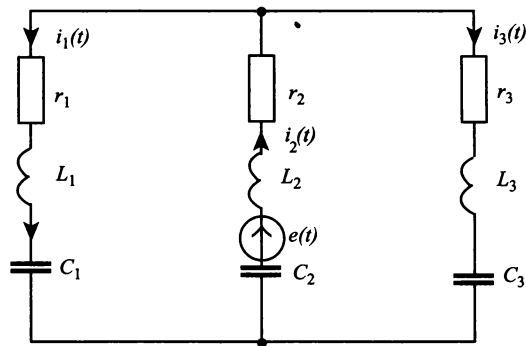


Рис. 2.10. Схема цепи к заданию 2.2

Таблица 2.2

Параметры элементов схемы

Вариант	r_1 , Ом	r_2 , Ом	r_3 , Ом	L_1 , мГн	L_2 , мГн	L_3 , мГн	C_1 , мкФ	C_2 , мкФ	C_3 , мкФ	Напряжения, В	Токи, А
$e(t)$											
1	0	4	2	0	0	40	5000	5000	0	$10\sin 100t$	
2	5	0	3	0	25	0	1000	0	1000	$12,5\sin 200t$	
3	5	0	6	0	0	8	1000	500	0	$15\sin 500t$	
4	0	3	3	0	0	25	2500	2500	0	$17,5\sin 200t$	
5	5	0	5	0	6	0	625	0	625	$20\sin 400t$	

Вариант	r_1 , Ом	r_2 , Ом	r_3 , Ом	L_1 , мГн	L_2 , мГн	L_3 , мГн	C_1 , мкФ	C_2 , мкФ	C_3 , мкФ	Напряжения, В	Токи, А
$u_c(t)$											
6	4	0	0	15	0	20	0	1000	0	$22,5\sin 400t$	
7	0	8	7	2	0	2	0	2500	0	$25\sin 1000t$	
8	5	0	6	0	10	5	500	0	0	$27,5\sin 500t$	
9	6	4	0	12	0	8	0	200	0	$30\sin 1000t$	
10	0	4	7	10	0	10	0	312,5	0	$32,5\sin 400t$	
$u_L(t)$											
11	3	0	2	0	30	0	1000	0	1000	$35\sin 200t$	
12	0	5	4	0	40	0	2500	0	2500	$37,5\sin 100t$	
13	0	6	6	10	0	0	0	250	250	$40\sin 500t$	
14	3	0	4	0	50	0	2500	0	2500	$42,5\sin 100t$	
15	7	2	0	0	0	60	5000	5000	0	$45\sin 100t$	
$i_1(t)$											
16	0	5	0	0	0	20	625	0	625	$3\sin 400t$	
17	8	0	6	0	8	0	250	0	250	$3,25\sin 1000t$	
18	0	4	7	0	0	10	312,5	312,5	0	$3,5\sin 400t$	
19	8	0	5	0	40	0	1000	0	1000	$3,75\sin 200t$	
20	4	0	3	10	8	0	0	0	500	$4\sin 500t$	
$i_2(t)$											
21	0	5	6	9	9	0	0	0	250	$4,25\sin 500t$	
22	7	0	4	0	50	50	2500	0	0	$4,5\sin 100t$	
23	6	5	0	0	0	8	1000	0	1000	$4,75\sin 500t$	
24	0	8	7	6	6	0	0	0	250	$5\sin 1000t$	
25	9	0	4	0	5	0	625	0	625	$5,25\sin 400t$	
$i_3(t)$											
26	6	0	3	0	8	8	250	0	0	$5,5\sin 100t$	
27	0	4	7	40	0	0	5000	0	5000	$5,75\sin 100t$	
28	5	5	0	0	10	12	1000	0	0	$6\sin 200t$	
29	0	6	3	0	25	25	2500	0	0	$6,25\sin 200t$	
30	4	0	2	25	25	0	0	0	800	$6,5\sin 250t$	

2.4. Расчет цепей синусоидального переменного тока по комплексным значениям

При расчете цепей по комплексным значениям пользуются комплексной формой записи напряжений и токов. Однако поскольку сомножитель $e^{j\omega t}$ входит как в напряжение, так и в ток, то он сокращается и в результате в уравнениях Ома и Кирхгофа остаются только комплексные амплитуды или комплексные действующие значения напряжений и токов:

$$\begin{aligned}\dot{U}_k &= \dot{I}_k Z_k; \quad \sum \dot{I}_k = 0; \quad \sum \dot{U}_k = 0; \\ \dot{U}_{mk} &= \dot{I}_{mk} Z_k; \quad \sum \dot{I}_{mk} = 0; \quad \sum \dot{U}_{mk} = 0;\end{aligned}$$

где $\dot{U}_k = \dot{U}_{mk} / \sqrt{2} = U_k e^{j\psi_u}$ — комплексное действующее значение напряжения;
 $\dot{I}_k = \dot{I}_{mk} / \sqrt{2} = I_k e^{j\psi_i}$ — комплексное действующее значение тока;
 \dot{U}_{mk} — комплексная амплитуда напряжения;
 \dot{I}_{mk} — комплексная амплитуда тока.

Комплексные амплитуды напряжения и тока характеризуются двумя параметрами: амплитудой и начальной фазой, а метод расчета с их использованием обычно называют методом комплексных амплитуд. Значение частоты колебаний ω входит только в комплексные сопротивления Z_k . При этом комплексное сопротивление индуктивности имеет значение $Z_{Lk} = j\omega L_k$, а комплексное сопротивление емкости

$$Z_{Ck} = 1/(j\omega C_k).$$

Кроме комплексных сопротивлений, можно использовать комплексные проводимости, которые, в общем случае, являются обратными комплексным сопротивлениям $Y_k = Z_k^{-1}$. Для индуктивностей и емкостей комплексные проводимости имеют значения: $Y_{Lk} = 1/(j\omega L_k)$; $Y_{Ck} = j\omega C_k$.

При расчете цепей по комплексным значениям можно пользоваться уравнениями Кирхгофа, уравнениями контурных токов и узловых напряжений в комплексной форме записи. С помощью комплексных значений напряжения и тока можно определить комплексную мощность $\dot{S} = \dot{U} \dot{I}$, где $\dot{I} = I e^{-j\psi_i}$ — сопряженное комплексное значение тока, $\dot{U} = U e^{j\psi_u}$ — комплексное значение напряжения. Модуль комплексной мощности равен полной (или кажущейся) мощности цепи $S = |\dot{S}| = UI$.

Пример 2.5. Используя метод комплексных амплитуд, требуется определить мгновенные значения: тока $i(t)$, напряжений на емкости $u_C(t)$ и индуктивности $u_L(t)$; действующие значения тока I и напряжений U_L , U_C ; среднюю мощность P в схеме последовательного контура,

изображенного на рис. 2.6а. Параметры элементов схемы имеют те же значения, что и в примере 2.3.

Решение. Используя вычисленные в примере 2.3 значения реактивных сопротивлений, запишем их комплексные значения:

$$Z_L = jx_L = j7 \text{ Ом}; Z_C = -jx_C = -j4 \text{ Ом}.$$

Найдем полное комплексное сопротивление контура:

$$Z = r + Z_L + Z_C = 4 + j7 - j4 = (4 + j3) \text{ Ом}.$$

Запишем комплексную амплитуду напряжения источника $\dot{E}_m = 20 \text{ В}$.

Пользуясь найденными значениями комплексного напряжения и сопротивления цепи, рассчитаем комплексную амплитуду тока в цепи:

$$\dot{I}_m = \dot{E}_m / Z = 20 / (4 + j3) = 4e^{-j37^\circ} \text{ А}.$$

По найденному комплексному значению тока запишем его мгновенное значение:

$$i(t) = 4\sin(100t - 37^\circ) \text{ А},$$

что совпадает со значением тока, найденным в примере 2.3 при расчете цепи по мгновенным значениям.

Комплексное значение напряжения на индуктивности вычислим по формуле:

$$\dot{U}_{mL} = \dot{I}_m Z_L = 4e^{-j37^\circ} 7e^{j90^\circ} = 28e^{j53^\circ} \text{ В}.$$

Аналогично рассчитаем комплексное значение напряжения на емкости:

$$\dot{U}_{mC} = \dot{I}_m Z_C = 4e^{-j37^\circ} 4e^{-j90^\circ} = 16e^{-j127^\circ} \text{ В}.$$

Используя найденные комплексные значения, запишем мгновенные значения напряжений на индуктивности и емкости:

$$u_L(t) = 28\sin(100t + 53^\circ) \text{ В};$$

$$u_C(t) = 16\sin(100t - 127^\circ) \text{ В},$$

что полностью совпадает со значениями, найденными в примере 2.3.

Действующие значения тока и напряжений определим по формулам

$$I = I_m / \sqrt{2} = 2,84 \text{ А}; U_L = U_{mL} / \sqrt{2} = 19,9 \text{ В}; U_C = U_{mC} / \sqrt{2} = 11,3 \text{ В}.$$

Среднюю мощность можно вычислить, пользуясь формулой:

$$P = E_m I_m \cos \varphi / 2 = 20 \cdot 4 \cdot 0,8 / 2 = 32 \text{ Вт}.$$

Пример 2.6. Требуется определить мгновенное значение напряжения источника $e(t)$ в разветвленной цепи, схема которой приведена на рис. 2.11а, при условии, что мгновенное напряжение на емкости C имеет значение $u_C(t) = 10 \sin(100t - 90^\circ)$ В. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $r = 1$ Ом; $L = 10$ мГн; $C = 10\,000$ мкФ. Расчет цепи выполнить с помощью комплексных амплитуд токов и напряжений.

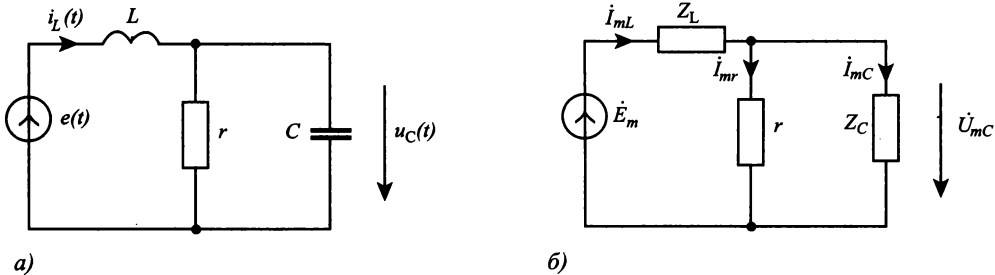


Рис. 2.11. Исходная (а) и расчетная (б) схемы цепи к примеру 2.6

Решение.

1 Запишем комплексную амплитуду напряжения на емкости (рис. 2.11б):

$$\dot{U}_{mC} = 10e^{-j90^\circ} = -j10 \text{ В.}$$

2 Определим комплексные сопротивления элементов схемы:

$$Z_L = j\omega L = j100 \cdot 10^{-2} = j \text{ Ом;}$$

$$Z_C = -j/\omega C = -j/100 \cdot 10^{-2} = -j \text{ Ом.}$$

3 Найдем комплексные амплитуды токов в элементах схемы:

$$\dot{I}_{mC} = \dot{U}_{mC} / Z_C = -j10 / (-j) = 10 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{mr} = \dot{U}_{mC} / r = -j10 / 1 = -j10 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{mL} = \dot{I}_{mC} + \dot{I}_{mr} = (10 - j10) \text{ А.}$$

4 Определим комплексную амплитуду напряжения на индуктивности:

$$\dot{U}_{mL} = \dot{I}_{mL} Z_L = (10 - j10)j = (10 + j10) \text{ В.}$$

5 Рассчитаем комплексную амплитуду напряжения источника:

$$\dot{E}_m = \dot{U}_{mL} + \dot{U}_{mC} = 10 + j10 - j10 = 10 \text{ В.}$$

6 Используя значение комплексной амплитуды, запишем мгновенное значение напряжения источника:

$$e(t) = 10\sin 100t \text{ В.}$$

Пример 2.7. Используя метод комплексных амплитуд, определить мгновенное значение токов $i_1(t)$ и $i_2(t)$, если известны параметры элементов схемы, приведенной на рис. 2.12а: $e_1(t) = 10\sin 100t \text{ В}$; $e_2(t) = 14,1 \sin(100t + 45^\circ) \text{ В}$; $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$; $L = 10 \text{ мГн}$; $C = 10\,000 \text{ мкФ}$.

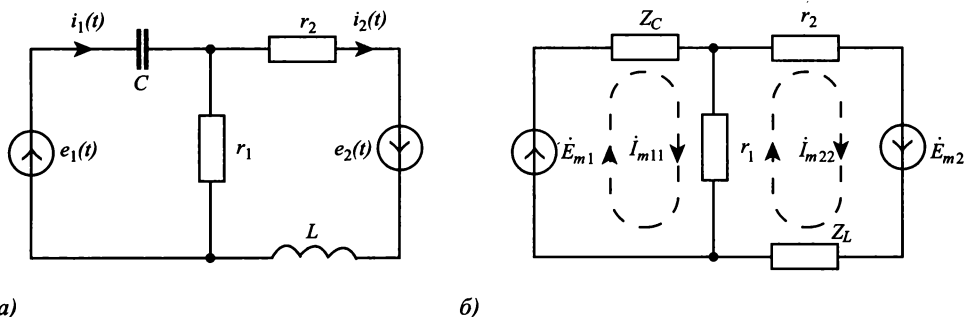


Рис. 2.12. Исходная (а) и расчетная (б) схемы цепи к примеру 2.7

Решение.

1 Запишем комплексные амплитуды напряжений источников:

$$\dot{E}_{m1} = 10 \text{ В}; \quad \dot{E}_{m2} = 14,1 e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

2 Рассчитаем комплексные сопротивления элементов схемы:

$$Z_L = j\omega L = j100 \cdot 10^{-2} = j \text{ Ом};$$

$$Z_C = -j/\omega C = -j/100 \cdot 10^{-2} = -j \text{ Ом.}$$

3 Для расчета комплексных амплитуд токов в ветвях воспользуемся методом контурных токов. Выберем направления контурных токов, показанные на схеме рис. 2.12б, и запишем систему контурных уравнений цепи:

$$\begin{cases} \dot{I}_{m11} Z_{11} - \dot{I}_{m22} Z_{12} = \dot{E}_{m11}; \\ -\dot{I}_{m11} Z_{21} + \dot{I}_{m22} Z_{22} = \dot{E}_{m22}; \end{cases}$$

где $Z_{11} = r_1 + Z_C = (1 - j) \text{ Ом}$; $Z_{22} = r_1 + r_2 + Z_L = 1 + 1 + j = (2 + j) \text{ Ом}$;
 $Z_{12} = Z_{21} = r_1 = 1 \text{ Ом}$; $\dot{E}_{m11} = \dot{E}_{m1} = 10 \text{ В}$; $\dot{E}_{m22} = \dot{E}_{m2} = 14,1e^{j45^\circ} =$
 $= (10 + j10) \text{ В}$.

4 Решим систему контурных уравнений и найдем контурные токи:

$$\dot{I}_{m11} = \Delta_1 / \Delta; \quad \dot{I}_{m22} = \Delta_2 / \Delta;$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-j) & -1 \\ -1 & (2+j) \end{vmatrix} = 2-j;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{m11} & -Z_{12} \\ E_{m22} & Z_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ (10+j10) & (2+j) \end{vmatrix} = 30 + j20;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} Z_{11} & E_{m11} \\ -Z_{21} & E_{m22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-j) & 10 \\ -1 & (10+j10) \end{vmatrix} = 30,$$

откуда после подстановки значений определителей получим:

$$\dot{I}_{m11} = \dot{I}_{m1} = \frac{30 + j20}{2-j} = 16e^{j60^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{m22} = \dot{I}_{m2} = \frac{30}{2-j} = 13,4e^{j27^\circ} \text{ А}.$$

5 Запишем мгновенные значения токов:

$$i_1(t) = 16\sin(100t + 60^\circ) \text{ А};$$

$$i_2(t) = 13,4\sin(100t + 27^\circ) \text{ А}.$$

Пример 2.8. Для электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.13, требуется определить следующие характеристики:

- 1) токи во всех ветвях цепи;
- 2) напряжение на индуктивности L_3 ;
- 3) активную, реактивную и полную мощности, потребляемые цепью,

а также построить:

- 4) векторную диаграмму токов;
- 5) диаграмму напряжений по внешнему контуру цепи.

Элементы цепи имеют следующие параметры: $E = 100 \text{ В}$; $f = 50 \text{ Гц}$;
 $C_1 = 637 \text{ мкФ}$; $C_2 = 159 \text{ мкФ}$; $L_3 = 95 \text{ мГн}$; $r_1 = 6 \text{ Ом}$; $r_3 = 20 \text{ Ом}$.

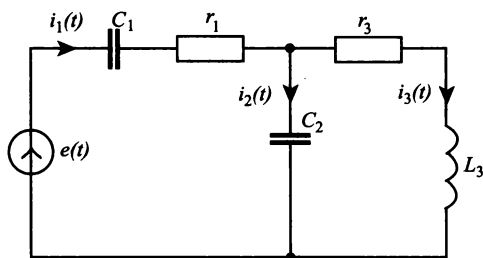


Рис. 2.13. Схема цепи к примеру 2.8

Решение.

1 Определим комплексные сопротивления ветвей схемы:
Первая ветвь содержит сопротивление r_1 и емкость C_1 . Ее комплексное сопротивление имеет значение:

$$Z_1 = r_1 - jx_1 = 6 - j10^6(2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 637)^{-1} = (6 - j5) \text{ Ом.}$$

Аналогично находим комплексные сопротивления других ветвей схемы:

$$Z_2 = -jx_2 = -j10^6(2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 159)^{-1} = -j20 \text{ Ом,}$$

$$Z_3 = r_3 + jx_3 = 20 + j10^3(2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 95) = (20 + j30) \text{ Ом.}$$

Схема цепи с комплексными сопротивлениями приведена на рис. 2.14.

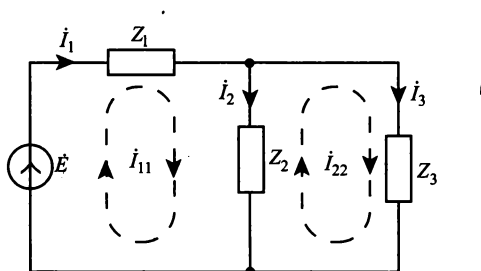


Рис. 2.14. Схема цепи для расчета по методу контурных токов

2 Определим токи в ветвях цепи, используя для этого метод контурных токов в комплексной форме. Уравнения контурных токов цепи имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}Z_{11} - \dot{I}_{22}Z_{12} = \dot{E}_{11}; \\ -\dot{I}_{11}Z_{21} + \dot{I}_{22}Z_{22} = \dot{E}_{22}, \end{cases}$$

где $Z_{11} = Z_1 + Z_2 = (6 - j25) \text{ Ом}$; $Z_{22} = Z_2 + Z_3 = (20 + j10) \text{ Ом}$; $Z_{12} = Z_{21} = Z_2 = -j20 \text{ Ом}$ — контурные сопротивления цепи; $\dot{E}_{11} = \dot{E} = 100 \text{ В}$; $\dot{E}_{22} = 0$.

Подставляя значения комплексных сопротивлений в уравнения контурных токов, получим:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(6 - j25) + \dot{I}_{22}j20 = 100; \\ \dot{I}_{11}j20 + \dot{I}_{22}(20 + j10) = 0. \end{cases}$$

Контурные токи определим из решения этой системы уравнений

$$\dot{I}_{11} = \Delta_1 / \Delta; \dot{I}_{22} = \Delta_2 / \Delta,$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} (6 - j25) & j20 \\ j20 & (20 + j10) \end{vmatrix} = 770 - j440 = 887e^{-j29^\circ 40'};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & j20 \\ 0 & (20 + j10) \end{vmatrix} = (2 + j)10^3 = 2236e^{j26^\circ 30'};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (6 - j25) & 100 \\ j20 & 0 \end{vmatrix} = -j2000 = 2000e^{-j90^\circ}.$$

Подставив значения определителей, найдем контурные токи и токи в ветвях:

$$\dot{I}_{11} = \dot{I}_1 = 2236e^{j26^\circ 30'} / 887e^{-j29^\circ 40'} = 2,52e^{j56^\circ};$$

$$\dot{I}_{22} = \dot{I}_3 = 2000e^{-j90^\circ} / 887e^{-j29^\circ 40'} = 2,25e^{-j60^\circ 20'}.$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = 0,28 + j4,05 = 4,059e^{j86^\circ}.$$

Векторная диаграмма токов в цепи приведена на рис. 2.15.

3 Определим комплексное напряжение на индуктивности L_3 :

$$\dot{U}_L = \dot{I}_3 Z_L = \dot{I}_3 jx_3 = 2,25e^{-j60^\circ 20'} j10 = 22,5e^{j29^\circ 40'} \text{ В}.$$

Таким образом, вольтметр, подключенный к индуктивности L_3 , покажет напряжение 22,5 В.

4 Определим теперь активную, реактивную и полную мощности, потребляемые цепью. Для этого найдем вначале комплексную мощность цепи

$$\dot{S} = \dot{E} \dot{I}_1 = 100 \cdot 2,52e^{-j56^\circ} = 252e^{-j56^\circ} \text{ ВА}.$$

Полная мощность определяется как модуль комплексной мощности:

$$S = |\dot{S}| = 252 \text{ ВА.}$$

Для определения активной и реактивной мощностей представим полную мощность в алгебраической форме:

$$\dot{S} = P + jQ = (141 - j209) \text{ ВА,}$$

откуда найдем активную мощность

$$P = 141 \text{ Вт}$$

и реактивную мощность

$$Q = -209 \text{ вар.}$$

Такую мощность отдает источник. Для составления баланса мощностей следует еще определить мощности, потребляемые элементами ветвей. Активную мощность, потребляемую сопротивлениями r_1 , r_3 , определим по формуле

$$P = I_1^2 r_1 + I_3^2 r_3 = 2,52^2 \cdot 6 + 2,25^2 \cdot 20 = 141 \text{ Вт,}$$

что совпадает с активной мощностью, отдаваемой источником напряжения.

Реактивную мощность, запасаемую в индуктивности L_3 и емкостях C_1 , C_2 , найдем по формуле:

$$\begin{aligned} Q &= Q_3 - (Q_1 + Q_2) = I_3^2 x_3 - (I_2^2 x_2 + I_1^2 x_1) = \\ &= 2,25^2 \cdot 30 - (4,059^2 \cdot 20 - 2,52^2 \cdot 5) \\ &= 151,8 - 329 - 31,7 = -209 \text{ вар,} \end{aligned}$$

что точно совпадает с реактивной мощностью, отдаваемой источником напряжения. Таким образом, баланс активных и реактивных мощностей в схеме полностью соблюдается.

5 Построим топографическую диаграмму напряжений по внешнему контуру цепи. Эта диаграмма практически совпадает с векторной диаграммой для напряжений, так как напряжения откладываются на комплексной плоскости. Для построения этой диаграммы запишем второе уравнение Кирхгофа для внешнего контура

$$\dot{E} = \dot{I}_1 r_1 - \dot{I}_1 jx_1 + \dot{I}_3 r_3 + \dot{I}_3 jx_3$$

или

$$100 = 2,52e^{j56^\circ} 6 - 2,52e^{j56^\circ} 5j + 2,25e^{-j60^\circ 20'} 20 + 2,25e^{-j60^\circ 20'} 30j.$$

Таким образом, уравнение для внешнего контура имеет вид

$$100 = 15,12e^{j56^\circ} - 12,6e^{j146^\circ} + 45e^{-j60^\circ 20'} + 67,5e^{j29^\circ 40'}.$$

Это уравнение, построенное на комплексной плоскости, и составляет основу топографической и векторной диаграмм. Графическое

изображение этого уравнения приведено на рис. 2.16а. В отличие от топографической диаграммы на векторной диаграмме вектора выходят из одной общей точки, как показано на рис. 2.16б.

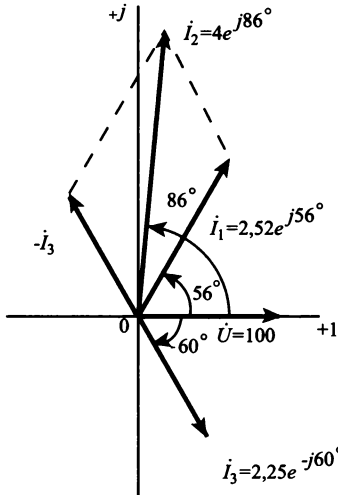
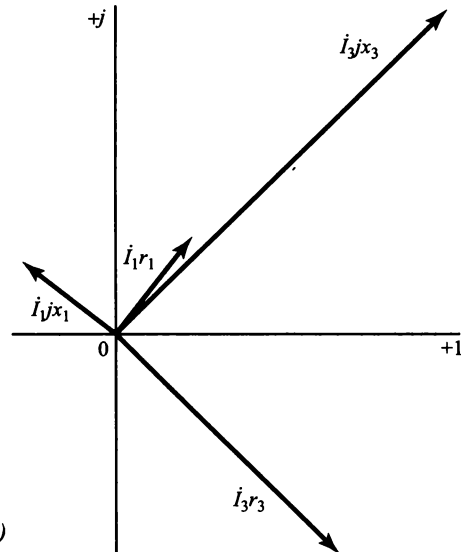
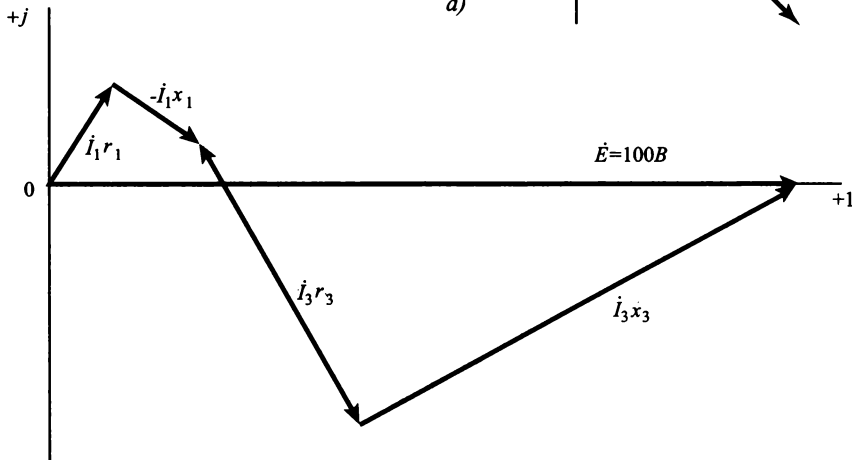


Рис. 2.15. Векторная диаграмма цепи к примеру 2.8



а)



б)

Рис. 2.16. Векторная (а) и топографическая (б) диаграммы цепи к примеру 2.8

Пример 2.9. Для электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.17а, требуется определить напряжение на входе и токи во всех ветвях, если известны значение тока I_3 и параметры элементов. Кроме этого, необходимо записать мгновенные значения токов и рассчитать комплексную мощность \dot{S} . Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $Z_1 = (10 - j10)$ Ом; $Z_2 = -j10$ Ом; $Z_3 = j10$ Ом; $Z_4 = -j10$ Ом; $Z_5 = (10 + j10)$ Ом; $\dot{I}_3 = 4$ А.

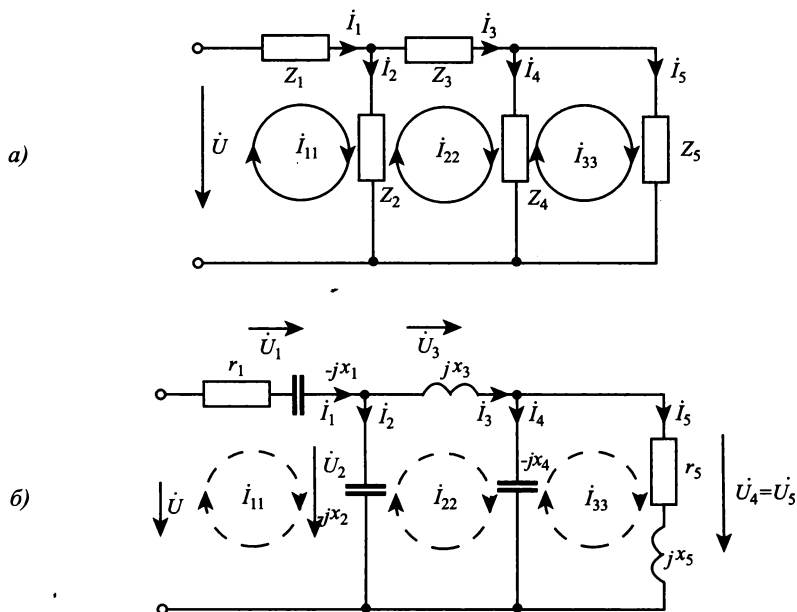


Рис. 2.17. Исходная (а) и расчетная (б) схемы к примеру 2.9

Решение. Рассматриваемая задача относится к разряду обратных задач. Как указывалось ранее, такие задачи можно решать различными способами. Однако анализ схемы показал, что наиболее просто ее можно рассчитать методом контурных токов с перестановкой членов в уравнениях цепи.

1 Составим полную схему цепи для заданных сопротивлений ветвей, приведенную на рис. 2.17а. Выберем на этой схеме направления контурных токов и составим уравнения для рассматриваемой схемы:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(Z_1 + Z_2) - \dot{I}_{22}Z_2 - \dot{I}_{33}0 = \dot{U}; \\ -\dot{I}_{11}Z_2 + \dot{I}_{22}(Z_2 + Z_3 + Z_4) - \dot{I}_{33}Z_4 = 0; \\ -\dot{I}_{11}0 - \dot{I}_{22}Z_4 + \dot{I}_{33}(Z_4 + Z_5) = 0, \text{ где } \dot{I}_{22} = \dot{I}_3 = 4 \text{ А.} \end{cases}$$

Подставим значения параметров элементов в эти уравнения и поменяем местами правую часть уравнений и члены второго столбца:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(10 - j20) - \dot{U} - \dot{I}_{33}0 = -40j; \\ -\dot{I}_{11}(-j10) + 0 - \dot{I}_{33}(-j10) = 40j; \\ -\dot{I}_{11}0 + 0 + \dot{I}_{33}10 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений относительно напряжения \dot{U} на входе цепи:

$$\dot{U} = \Delta_2 / \Delta,$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} (10 - j20) & -1 & 0 \\ j10 & 0 & j10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = j100$ — основной определитель системы;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (10 - j20) & -j40 & 0 \\ j10 & j40 & j10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = j12\,000$$
 — второй частный определитель.

2 Подставив значения определителей, найдем напряжение на входе цепи:

$$\dot{U} = j12\,000 / j100 = 120 \text{ В.}$$

3 Определим теперь остальные контурные токи, пользуясь той же системой уравнений:

$$\dot{I}_{11} = \Delta_1 / \Delta; \dot{I}_{33} = \Delta_3 / \Delta,$$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -j40 & -1 & 0 \\ j40 & 0 & j40 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -400 + j400 = 400\sqrt{2}e^{j135^\circ}$ — первый част-

ный определитель;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (10 - j20) & 1 & -j40 \\ j10 & 0 & j40 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j40j10 = 400$$
 — третий частный оп-

ределитель.

После подстановки значений определителей найдем значения контурных токов:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11} = \Delta_1 / \Delta = (-400 + j400) / j100 = (4 + j4) \text{ A}; \\ \dot{I}_{33} = \Delta_3 / \Delta = 400 / j100 = -j4 \text{ A}. \end{cases}$$

4 Вычислим значения токов во всех ветвях:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 = \dot{I}_{11} &= 4 + j4 = 4\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ A}; & i_1(t) &= 8 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}; \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} &= j4 = 4e^{j90^\circ} \text{ A}; & i_2(t) &= 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}; \\ \dot{I}_3 = \dot{I}_{22} &= 4 \text{ A}; & i_3(t) &= 4\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}; \\ \dot{I}_4 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{33} &= 4 + j4 = 4\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ A}; & i_4(t) &= 8 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}; \\ \dot{I}_5 = \dot{I}_{33} &= -j4 = 4e^{-j90^\circ} \text{ A}; & i_5(t) &= 4\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ A}. \end{aligned}$$

5 Вычислим значения напряжений на ветвях:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 &= (4 + j4)(10 - j10) = 80 \text{ В}; & u_1(t) &= 80\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В}; \\ \dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 &= j4(-j10) = 40 \text{ В}; & u_2(t) &= 40\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В}; \\ \dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3 &= 4j10 = j40 \text{ В}; & u_3(t) &= 40\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ В}; \\ \dot{U}_4 = \dot{I}_4 Z_4 &= (4 + j4)(-j10) = (40 - j40) \text{ В}; & u_4(t) &= 80 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ В}; \\ \dot{U}_5 = \dot{I}_5 Z_5 &= -j4(10 + j10) = (40 - j40) \text{ В}; & u_5(t) &= 80 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ В}. \end{aligned}$$

6 Используя вычисленные значения токов и напряжений, построим векторную диаграмму цепи, изображенную на рис. 2.18. При построении векторной диаграммы учтем необходимость выполнения следующих условий, связанных с законами Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 80 + 40 = 120 \text{ В}; \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_3 + \dot{U}_4 = j40 + 40 - j40 = 40 \text{ В}; \\ \dot{U}_4 &= \dot{U}_5 = (40 - j40) \text{ В}. \end{aligned}$$

7 Найдем комплексную мощность, потребляемую цепью:

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}_1^* = 120(4 - j4) = (480 - j480) = 480\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \text{ ВА}.$$

Из полученного выражения комплексной мощности найдем среднюю мощность

$$P = 480 \text{ Вт}$$

и реактивную мощность

$$Q = -480 \text{ вар.}$$

На этом решение задачи заканчивается.

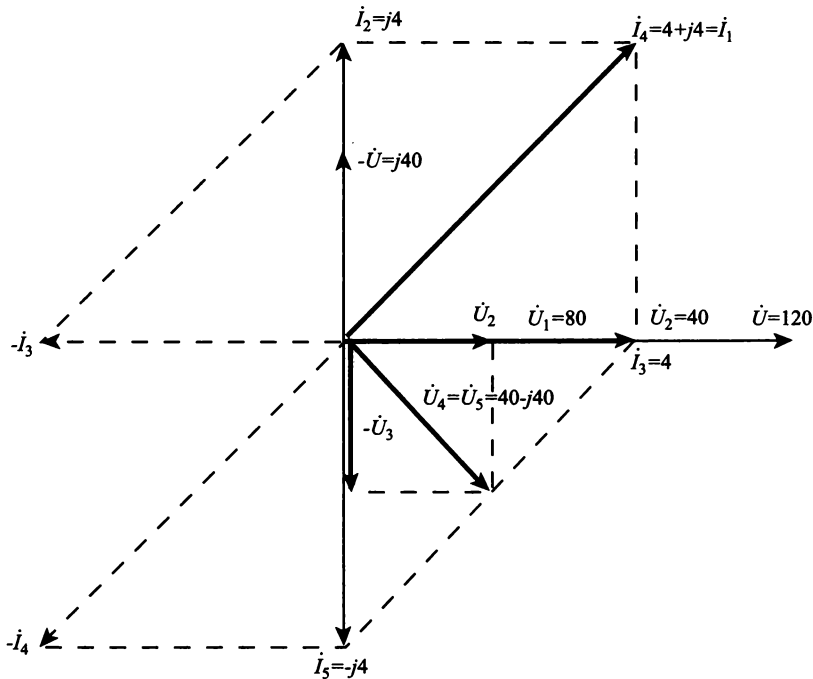


Рис. 2.18. Векторная диаграмма цепи к примеру 2.9

При решении обратных задач с переменным током, так же как с постоянным током, возможна неоднозначность полученного решения. В связи с этим рассмотрим пример решения одного из вариантов обратной задачи.

Пример 2.10. Для электрической цепи, изображенной на рис. 2.19а, известны значения модулей токов $I_1 = I_2 = 10 \text{ А}$ и сопротивления $x_1 = r_2 = x_2 = 4 \text{ Ом}$.

Требуется построить векторную диаграмму цепи и, используя ее, определить напряжение на входе цепи. Кроме этого, требуется определить среднюю (активную) мощность, потребляемую цепью.

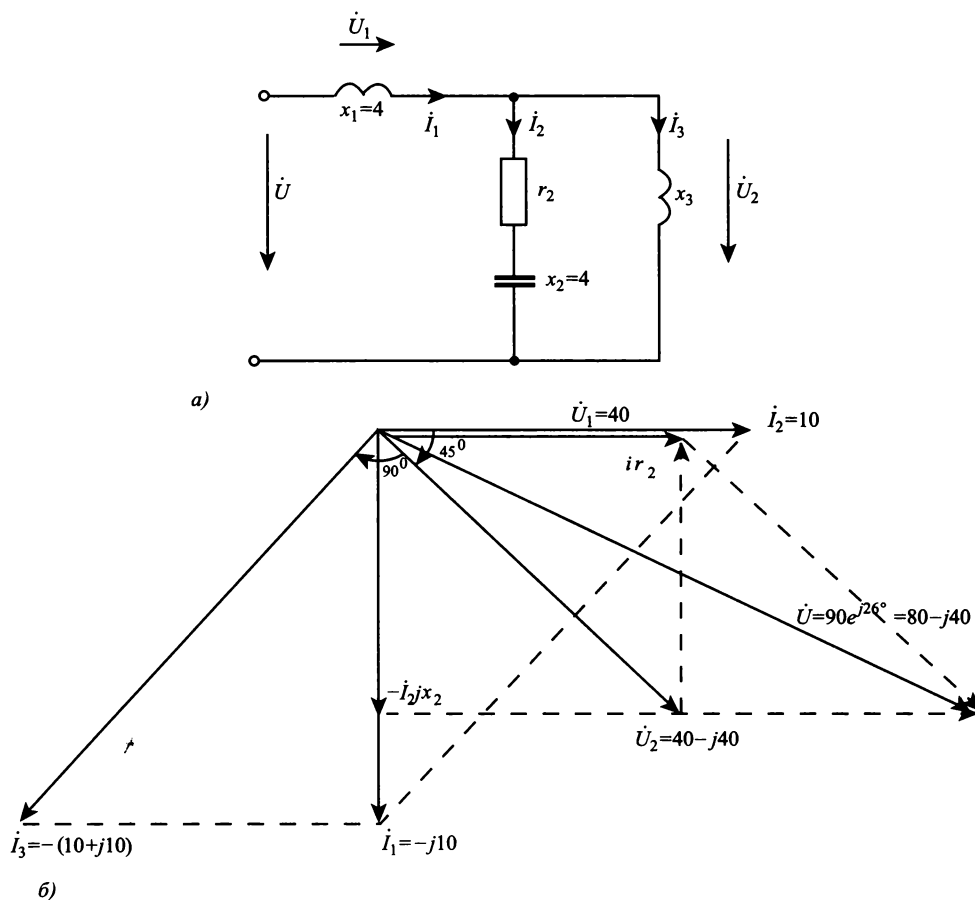


Рис. 2.19. Схема цепи (а) и ее векторная диаграмма (б) к примеру 2.10

Решение. Вначале построим векторную диаграмму для цепи, изображенной на рис. 2.19б. При построении векторной диаграммы будем использовать приведенную ниже последовательность.

1 Построим комплексный ток \dot{I}_2 , полагая, что его начальная фаза равна нулю. При построении векторов тока будем использовать выбранный масштаб (одно деление длины вектора будет соответствовать току 2 А или напряжению 10 В). Таким образом, току $\dot{I}_2 = 10$ А будет соответствовать вектор длиной 5 делений.

2 Теперь построим на векторной диаграмме вектор напряжения $\dot{U}_2 = \dot{I}_2(r_2 - jx_2) = (40 - j40)$ В.

3 Ток \dot{I}_3 в индуктивности L_3 неизвестен, однако можно указать его направление, так как ток в индуктивности отстает от на-

пряжения на ней на угол, равный 90° . Кроме этого, известно, что по первому закону Кирхгофа $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$. При этом известно также, что модуль вектора тока $|\dot{I}_1| = 10$ А. Один из возможных вариантов построения этого уравнения Кирхгофа на комплексной плоскости приведен на рис. 2.19б. Однако возможны и другие варианты построения этого уравнения. В результате построения определяем токи

$$\dot{I}_1 = -j10 \text{ А}; \quad \dot{I}_2 = 10 \text{ А}; \quad \dot{I}_3 = -(10 + j10) \text{ А}.$$

4 Располагая значениями токов, построим векторы напряжений

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 jx_1 = 40 \text{ В}; \quad \dot{U}_2 = (40 - j40) \text{ В};$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 80 - j40 \text{ В}.$$

5 Используя полученные значения токов и напряжений, найдем комплексное сопротивление третьей ветви Z_3 и входное сопротивление Z :

$$Z_3 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_3} = j4 \text{ Ом}; \quad Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = (4 + j8) \text{ Ом}.$$

Таким образом, получен один из возможных вариантов решения задачи.

6 Теперь рассчитаем мощность потерь в этой схеме для найденных выше значений напряжений и токов. Поскольку активная мощность расходуется только в сопротивлении $r_2 = 4$ Ом, то ее можно определить по формуле:

$$P = I_2^2 r_2 = 10^2 \cdot 4 = 400 \text{ Вт}.$$

Правильность полученного решения легко проверить, используя законы Кирхгофа:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / Z = \frac{80 - j40}{4 + j8} = -j10 \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 10 \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = -10(1 + j) \text{ А}.$$

ЗАДАНИЕ 2.3. Расчет цепей по комплексным значениям

На рис. 2.20а приведена схема электрической цепи, состоящая из шести обобщенных ветвей, каждая из которых содержит источник тока J , источник

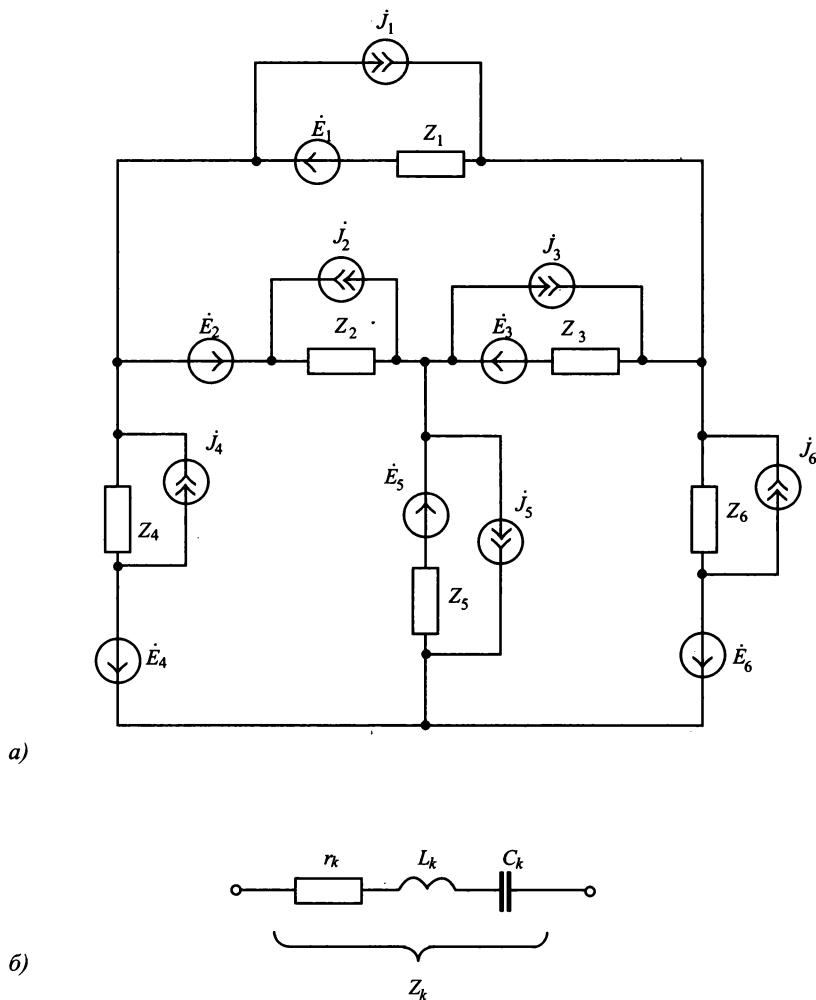


Рис. 2.20. Обобщенная схема цепи к заданию 2.3

напряжения E и комплексное сопротивление Z , структура которого изображена на рис. 2.20б. Используя данные табл. 2.3 и 2.4, составить расчетную схему,

соответствующую заданному варианту. Применяя метод контурных токов для комплексных амплитуд, выполнить следующее:

- определить амплитуды токов во всех ветвях схемы;
- определить напряжения на всех элементах внешнего контура;
- составить баланс активных и реактивных мощностей;
- построить векторную диаграмму токов в цепи;
- построить векторную диаграмму для напряжений внешнего контура.

Параметры пассивных элементов схемы приведены в табл. 2.3, а параметры источников — в табл. 2.4.

Таблица 2.3

Параметры элементов цепи

Вариант	$r_{1'}$ Ом	$r_{2'}$ Ом	$r_{3'}$ Ом	$r_{4'}$ Ом	$r_{5'}$ Ом	$r_{6'}$ Ом	$L_{1'}$ мГн	$L_{2'}$ мГн	$L_{3'}$ мГн	$L_{4'}$ мГн	$L_{5'}$ мГн	$L_{6'}$ мГн	$C_{1'}$ мкФ	$C_{2'}$ мкФ	$C_{3'}$ мкФ	$C_{4'}$ мкФ	$C_{5'}$ мкФ	$C_{6'}$ мкФ
1	30	0	10	0	40	10	0	0	0	100	400	0	1000	500	0	0	0	0
2	0	80	60	0	10	50	0	0	0	0	0	100	0	100	0	500	0	0
3	50	40	0	20	15	30	0	0	0	200	0	0	0	125	65	0	0	0
4	30	20	0	25	0	15	0	0	20	0	0	0	200	0	0	0	0	250
5	20	40	0	50	35	20	100	0	40	0	0	0	0	0	0	0	40	0
6	15	30	20	10	10	0	0	0	0	50	0	100	0	125	0	0	0	0
7	5	30	25	0	0	10	0	400	0	500	0	0	0	0	0	0	250	200
8	25	0	10	35	0	10	0	0	0	0	65	130	65	125	0	0	0	0
9	10	40	0	25	15	0	65	0	0	0	0	50	65	0	250	125	0	0
10	0	25	30	20	50	35	0	0	40	0	0	0	100	0	0	100	0	0
11	15	20	25	10	30	0	0	20	0	0	0	25	0	0	0	50	0	0
12	10	0	40	20	15	0	0	30	0	0	60	15	0	0	100	0	0	0
13	24	8	0	36	18	20	0	0	0	0	0	100	125	0	250	0	0	0
14	22	0	0	20	25	0	40	0	0	0	0	0	0	40	0	0	50	80
15	10	24	0	30	23	18	0	0	45	0	30	0	50	0	0	0	0	0
16	35	12	0	20	15	30	0	0	0	65	0	0	0	0	125	0	125	0
17	20	0	30	15	10	0	0	0	80	0	0	40	0	200	0	250	0	0
18	0	20	10	0	25	0	0	40	0	0	0	20	100	0	0	0	50	0
19	16	22	25	30	20	0	60	0	0	0	0	0	0	0	0	200	0	0
20	35	40	0	25	30	20	0	0	0	25	0	0	0	0	0	0	40	0
21	24	40	30	10	0	0	0	0	50	0	0	100	50	0	0	0	50	0
22	0	16	0	25	35	20	200	0	0	80	0	0	0	0	125	0	0	250
23	0	0	25	30	0	10	0	0	0	0	75	0	200	0	250	0	0	0
24	12	20	0	18	28	0	50	0	75	0	0	0	0	0	0	125	0	250
25	20	28	32	0	40	0	0	0	120	0	0	40	0	100	0	200	0	0
26	0	45	25	15	10	0	250	0	0	150	0	0	0	0	200	0	0	0
27	0	25	40	30	0	30	45	0	0	65	0	0	0	0	0	0	100	50
28	20	22	0	30	36	50	0	0	25	0	20	0	50	0	0	0	0	0
29	10	28	42	25	0	0	0	65	0	0	0	100	0	0	250	0	125	0
30	20	0	24	30	50	48	0	0	0	0	150	0	0	250	125	0	0	0

Таблица 2.4

Параметры источников напряжения и тока

Вариант	E_{m1} $\angle \psi_{E1}$	E_{m2} $\angle \psi_{E2}$	E_{m3} $\angle \psi_{E3}$	E_{m4} $\angle \psi_{E4}$	E_{m5} $\angle \psi_{E5}$	E_{m6} $\angle \psi_{E6}$	J_{m1} $\angle \psi_{J1}$	J_{m2} $\angle \psi_{J2}$	J_{m3} $\angle \psi_{J3}$	J_{m4} $\angle \psi_{J4}$	J_{m5} $\angle \psi_{J5}$	J_{m6} $\angle \psi_{J6}$	ω , рад/с
1	14,5 $\angle 0^\circ$	30 $\angle -55^\circ$	0	0	0	0	0	0	5,5 $\angle 70^\circ$	0	0	0	100
2	16,5 $\angle -75^\circ$	0	26 $\angle 0^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	4,25 $\angle 90^\circ$	0	200
3	18,5 $\angle 85^\circ$	0	0	22 $\angle -25^\circ$	0	0	0	0	0	0	3,75 $\angle 0^\circ$	0	400
4	20,5 $\angle 0^\circ$	0	0	0	18 $\angle 40^\circ$	0	0	0	0	2 $\angle -55^\circ$	0	0	100
5	22,5 $\angle 60^\circ$	0	0	0	0	14 $\angle 0^\circ$	0	1,5 $\angle -75^\circ$	0	0	0	0	500
6	0	17 $\angle -80^\circ$	25 $\angle 10^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	5,25 $\angle 0^\circ$	0	200
7	0	19 $\angle 0^\circ$	0	21 $\angle 25^\circ$	0	0	4,75 $\angle -40^\circ$	0	0	0	0	0	100
8	0	21 $\angle 45^\circ$	0	0	17 $\angle 0^\circ$	0	0	0	3 $\angle -60^\circ$	0	0	0	400
9	0	24,5 $\angle 80^\circ$	0	0	0	10 $\angle -10^\circ$	0	0	0	0	5,5 $\angle 0^\circ$	0	400
10	10 $\angle 0^\circ$	39 $\angle -10^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2 $\angle 25^\circ$	250
11	0	0	19,5 $\angle 30^\circ$	20 $\angle 0^\circ$	0	0	5,75 $\angle -45^\circ$	0	0	0	0	0	1000
12	0	0	21,5 $\angle 50^\circ$	0	16 $\angle -65^\circ$	0	4 $\angle 0^\circ$	0	0	0	0	0	500
13	0	0	24 $\angle 75^\circ$	0	0	11 $\angle 0^\circ$	0	4,5 $\angle -90^\circ$	0	0	0	0	200
14	10,5 $\angle -15^\circ$	0	38 $\angle 0^\circ$	0	0	0	0	0	0	3 $\angle 30^\circ$	0	0	500
15	0	12,5 $\angle -35^\circ$	34 $\angle 50^\circ$	0	0	0	0	0	0	1,5 $\angle 0^\circ$	0	0	500
16	0	0	0	22 $\angle 0^\circ$	15 $\angle 55^\circ$	0	0	5 $\angle -70^\circ$	0	0	0	0	400
17	0	0	0	23,5 $\angle 0^\circ$	0	12 $\angle 70^\circ$	3,5 $\angle -85^\circ$	0	0	0	0	0	250

Окончание таблицы 2.4

Вариант	E_{m1} $\angle \psi_{E1}$	E_{m2} $\angle \psi_{E2}$	E_{m3} $\angle \psi_{E3}$	E_{m4} $\angle \psi_{E4}$	E_{m5} $\angle \psi_{E5}$	E_{m6} $\angle \psi_{E6}$	J_{m1} $\angle \psi_{J1}$	J_{m2} $\angle \psi_{J2}$	J_{m3} $\angle \psi_{J3}$	J_{m4} $\angle \psi_{J4}$	J_{m5} $\angle \psi_{J5}$	J_{m6} $\angle \psi_{J6}$	ω , рад/с
18	11 $\angle -20^\circ$	0	0	37 $\angle 35^\circ$	0	0	0	0	4 $\angle 0^\circ$	0	0	0	1000
19	0	13 $\angle 0^\circ$	0	33 $\angle -40^\circ$	0	0	0	0	0	0	2,5 $\angle 55^\circ$	0	250
20	0	0	15 $\angle -60^\circ$	29 $\angle 0^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	1,25 $\angle 75^\circ$	1000
21	0	0	0	0	23 $\angle 65^\circ$	13 $\angle -80^\circ$	0	0	0	0	0	2,5 $\angle 0^\circ$	500
22	11,5 $\angle 0^\circ$	0	0	0	36 $\angle -25^\circ$	0	0	5 $\angle 40^\circ$	0	0	0	0	200
23	0	13,5 $\angle -45^\circ$	0	0	32 $\angle 0^\circ$	0	0	0	0	0	0	3,5 $\angle 60^\circ$	200
24	0	0	15,5 $\angle -65^\circ$	0	28 $\angle 80^\circ$	0	0	1,25 $\angle 0^\circ$	0	0	0	0	400
25	0	0	0	17,5 $\angle 0^\circ$	24 $\angle -85^\circ$	0	1,75 $\angle 15^\circ$	0	0	0	0	0	250
26	12 $\angle -30^\circ$	0	0	0	0	35 $\angle 0^\circ$	0	0	0	0	6 $\angle 45^\circ$	0	100
27	0	0	0	0	20 $\angle 35^\circ$	19 $\angle -50^\circ$	0	1 $\angle 0^\circ$	0	0	0	0	500
28	0	0	0	18 $\angle -90^\circ$	0	23 $\angle 0^\circ$	0	2,75 $\angle 20^\circ$	0	0	0	0	1000
29	0	0	16 $\angle 0^\circ$	0	0	27 $\angle -70^\circ$	3,25 $\angle 85^\circ$	0	0	0	0	0	400
30	0	14 $\angle -50^\circ$	0	0	0	30 $\angle 65^\circ$	7,5 $\angle 0^\circ$	0	0	0	0	0	200

2.5. Расчет резонансных цепей

Резонансом называют особое состояние двухполюсной электрической цепи, содержащей индуктивности и емкости, при котором сдвиг фаз между напряжением и током на зажимах цепи равен нулю. Такое положение может иметь место только в том случае, если входное сопротивление или входная проводимость электрической цепи на некоторой частоте ω_0 имеют активный характер, т. е. выполняется одно из условий

$$x_{BX}(\omega_{0k}) = 0 \text{ или } b_{BX}(\omega_{0k}) = 0,$$

где $x_{BX}(\omega_{0k})$ — реактивная составляющая входного сопротивления на частоте ω_{0k} ; $b_{BX}(\omega_{0k})$ — реактивная составляющая входной проводимости на частоте ω_{0k} .

При выполнении первого условия в цепи имеется **резонанс напряжений**, а при выполнении второго условия — **резонанс токов**. При резонансе напряжений напряжение на реактивном входном сопротивлении равно нулю (т. е. резонансное реактивное сопротивление можно заменить перемычкой), а при резонансе токов ток в реактивной проводимости равен нулю (т. е. резонансную реактивную проводимость можно заменить разрывом цепи).

Различают резонансы в цепях, содержащих только реактивные элементы, и в цепях, которые кроме реактивных элементов содержат сопротивления. **Резонансные реактивные двухполюсники** можно рассматривать как идеализацию реальных двухполюсников с потерями. Уравнения реактивных двухполюсников значительно проще и легко поддаются анализу в общем виде. При этом можно определить резонансные частоты и установить последовательность их чередования. Рекомендации по анализу резонансных реактивных двухполюсников содержатся в ряде учебников [1, 2, 3].

Резонансные двухполюсники с потерями принято характеризовать их добротностью, под которой понимают отношение энергии W_3 , запасаемой в реактивных элементах цепи, к энергии потерь W_{Π} , которая потребляется цепью от источника за период T :

$$Q = 2\pi W_3 / W_{\Pi},$$

где $W_3 = \sum W_{Lk} + \sum W_{Ck}$ — энергия, запасенная в реактивных элементах цепи; $W_{\Pi} = \sum I_k^2 r_k T$ — энергия потерь в сопротивлениях r_k .

Так, например, для простейшего колебательного контура, схема которого приведена на рис. 2.8, энергия, запасенная в индуктивности, определяется по формуле

$$W_L = LI^2(1 + \cos 2\omega_0 t) / 2.$$

Аналогично определяем энергию, запасенную в емкости

$$W_C = CI^2(1 - \cos 2\omega_0 t) / 2.$$

Поскольку полная энергия, запасенная в цепи, равна сумме энергий в емкости и индуктивности, то

$$W_3 = W_L + W_C = LI^2.$$

Энергия потерь в этом контуре определяется по формуле:

$$W_{\Pi} = PrT = I^2 r \frac{2\pi}{\omega_0},$$

где $T = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$ — период колебания, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота контура.

Таким образом, добротность последовательного контура имеет значение:

$$Q = \omega_0 L / r = \sqrt{L/C} / r.$$

Аналогично определяется добротность параллельного колебательного контура.

Другой важной характеристикой двухполюсника с потерями является его полоса пропускания

$$2\Delta\omega_0 = \omega_B - \omega_H = \omega_0/Q,$$

которая характеризует избирательные свойства контура. Из этого выражения следует, что с повышением добротности контура его полоса пропускания уменьшается. Относительная полоса пропускания

$$\omega_0 = 2\Delta\omega_0/\omega_0 = 1/Q = d,$$

где $d = 1/Q$ — затухание контура.

Пример 2.11. Для реактивного двухполюсника, схема которого приведена на рис. 2.21, требуется определить значения резонансных частот и построить график зависимости $x_{BX}(\omega)$. Параметры элементов схемы имеют следующие значения:

$$L_1 = 10 \text{ мГн}; L_2 = 20 \text{ мГн}; C_1 = 4 \text{ мкФ}; C_2 = 1 \text{ мкФ}.$$

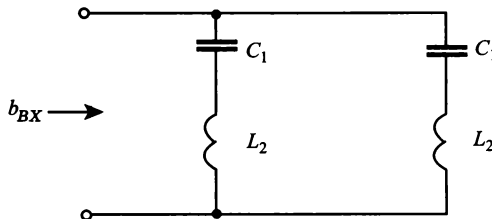


Рис. 2.21. Схема цепи к примеру 2.11

Решение. Найдем реактивную входную проводимость двухполюсника:

$$b_{BX} = 1/x_1 + 1/x_2,$$

где $x_1 = x_{L1} - x_{C1} = \omega L_1 - 1/\omega C_1$ — реактивное сопротивление первой ветви;

$x_2 = x_{L2} - x_{C2} = \omega L_2 - 1/\omega C_2$ реактивное сопротивление второй ветви.

Подставив значения сопротивлений ветвей, найдем реактивную проводимость двухполюсника

$$b_{BX} = \frac{\omega C_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} + \frac{\omega C_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2};$$

отсюда находим:

$$b_{BX} = \frac{\omega [(C_1 + C_2) - C_1 C_2 (L_1 + L_2) \omega^2]}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)(1 - \omega^2 L_2 C_2)}.$$

Приравняв к нулю знаменатель этого выражения, найдем частоты резонансов напряжений

$$\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1 C_1}; \omega_{02} = 1/\sqrt{L_2 C_2}.$$

Подставив значения параметров элементов, найдем частоты резонансов напряжений:

$$\omega_{01} = 1/\sqrt{10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 10^4/2 = 5000 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{02} = 1/\sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}} = 10^4/\sqrt{2} = 7000 \text{ с}^{-1}.$$

На этих частотах входная проводимость обращается в бесконечность (а соответственно, входное сопротивление обращается в нуль).

Приравняв к нулю числитель входной проводимости, найдем частоту резонанса токов

$$\omega_{03} = \sqrt{(C_1 + C_2)/C_1 C_2 (L_1 + L_2)} = 10^4 \sqrt{5/12} = 6455 \text{ с}^{-1}.$$

На этой частоте входная проводимость обращается в нуль, поэтому ток в цепи отсутствует.

Выполненный расчет показывает, что частота резонанса токов расположена между частотами резонансов напряжений. Кроме этого, име-

ется еще вырожденная частота резонанса токов $\omega = 0$, которая соответствует внешнему полюсу частотной характеристики двухполюсника, приведенной на рис. 2.22.

График частотной характеристики входной проводимости начинается с нулевого значения $b_{вх}(0) = 0$. Затем проводимость возрастает и на частоте ω_{01} первого резонанса напряжений обращается в бесконечность. После этого входная проводимость изменяет знак и на частоте ω_{03} обращается в нуль, что соответствует резонансу токов. Затем проводимость вновь возрастает и на частоте ω_{02} снова обращается в бесконечность. При дальнейшем повышении частоты проводимость изменяет знак и асимптотически стремится к нулевому значению (второй вырожденный нуль входной проводимости).

В отличие от идеальных реактивных двухполюсников в реальных двухполюсниках имеются потери, обусловленные присутствием сопротивлений. Наличие потерь приводит к тому, что нули и полюса в частотной характеристике двухполюсника пропадают, а вместо них появляются минимальные или максимальные значения входного сопротивления или проводимости. Однако основной признак резонансного режима — отсутствие сдвига фаз между напряжением и током в цепи — при этом сохраняется.

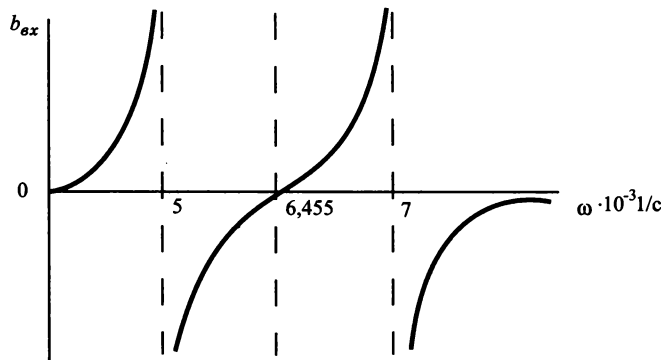


Рис. 2.22. График частотной характеристики к примеру 2.11

Пример 2.12. Требуется определить токи и напряжения в ветвях резонансного двухполюсника с потерями, схема которого приведена на рис. 2.23а. Построить векторную диаграмму, определить среднюю мощность потерь и добротность контура. Параметры схемы имеют следующие значения $x_1 = 40 \text{ Ом}$; $x_2 = 80 \text{ Ом}$; $x_3 = 30 \text{ Ом}$; $x_4 = 60 \text{ Ом}$; $x_5 = 20 \text{ Ом}$; $r_5 = 40 \text{ Ом}$; $U_{вх} = 120 \text{ В}$.

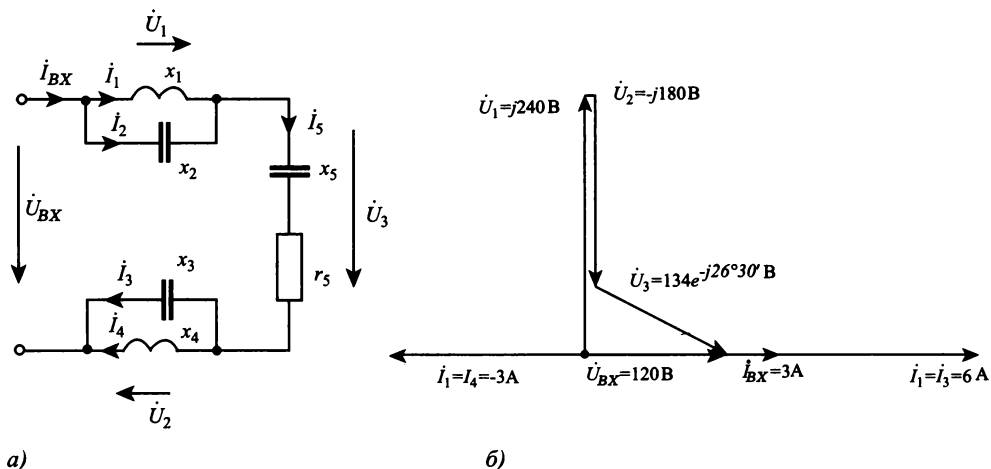


Рис. 2.23. Схема цепи (а) и ее векторная диаграмма (б) к примеру 2.12

Решение.

1 Определим комплексные сопротивления элементов цепи

$$Z_1 = \frac{jx_1(-jx_2)}{jx_1 - jx_2} = j80 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = \frac{jx_4(-jx_3)}{jx_4 - jx_3} = -j60 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = Z_5 - jx_5 = (40 - j20) \text{ Ом}.$$

2 Найдем полное сопротивление цепи:

$$Z_{BX} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 40 \text{ Ом}.$$

Таким образом, входное сопротивление цепи имеет вещественное значение, и, следовательно, в цепи имеется резонанс напряжений, так как напряжение и ток в цепи совпадают по фазе:

$$\dot{I}_{BX} = \dot{U}_{BX} / Z_{BX} = 120/40 = 3 \text{ А}.$$

3 Теперь найдем напряжения на ветвях схемы:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_{BX} Z_1 = j240 \text{ В};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_{BX} Z_2 = -j180 \text{ В};$$

$$\dot{U}_3 = \dot{I}_{BX} Z_3 = 3(40 - j20) = 134e^{-26^\circ 30'} \text{ В}.$$

4 Запишем мгновенные значения тока и напряжений на ветвях цепи:

$$i_{BX}(t) = 3\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A.}$$

$$u_1(t) = 240\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ В;}$$

$$u_2(t) = 180\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В;}$$

$$u_3(t) = 134\sqrt{2} \sin(\omega t - 26^\circ 30') \text{ В.}$$

5 Найдем токи в элементах цепи:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 / jx_1 = \frac{j240}{j40} = 6 \text{ A;}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{-jx_2} = \frac{j240}{-j80} = -3 \text{ A;}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_2}{-jx_3} = \frac{-j180}{-j30} / (-jx_3) = 6 \text{ A;}$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_2}{-jx_3} = \frac{-j180}{-j30} = -3 \text{ A.}$$

6 Найдем напряжения на элементах r_5 , x_5

$$\dot{U}_{x5} = \dot{I}_{BX} (-jx_5) = 3(-j20) = -j60 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{r5} = \dot{I}_{BX} r_5 = 3 \cdot 40 = 120 \text{ В.}$$

7 Построим векторную диаграмму. Для этого вначале построим вектор тока $\dot{I}_{BX} = 3 \text{ A}$. Затем построим векторы напряжений и токов, пользуясь уравнениями Кирхгофа:

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = \dot{U}_{BX};$$

$$\dot{I}_{BX} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_{BX} = \dot{I}_3 + \dot{I}_4.$$

Все эти векторы построены на диаграмме, которая изображена на рис. 2.23б.

8 Добротность контура на резонансной частоте определим по формуле:

$$Q = \frac{x_{Lp}}{r_5} = \frac{|Z_1|}{r_5} = 80/40 = 2,$$

откуда следует, что напряжение $U_1 = I_{BX} |Z_1|$ в два раза превышает напряжение $U_{BX} = I_{BX} r_5$. Относительная полоса пропускания контура имеет значение:

$$\omega_0 = \frac{1}{Q} = 0,5.$$

Задание 2.4. Расчет резонансных схем

Для схем, приведенных на рис. 2.24, требуется определить резонансные частоты и построить график частотной характеристики входного сопротивления (или входной проводимости). Параметры схемы имеют значения, приведенные в табл. 2.5, где $L_0 = 1$ мГн, $C_0 = 1$ мкФ. Номер схемы на рис. 2.24 соответствует номеру варианта, указанному в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Параметры элементов схем реактивных двухполюсников

Вариант	L_1/L_0	L_2/L_0	L_3/L_0	C_1/C_0	C_2/C_0	C_3/C_0
1	5	8	4	3	6	8
2	30	50	20	30	60	30
3	8	10	6	60	30	60
4	10	20	40	1	3	5
5	8	3	6	10	50	30
6	30	50	20	7	4	9
7	9	6	5	3	6	4
8	8	10	6	60	40	80
9	30	60	40	6	8	4
10	70	80	30	50	30	40
11	60	40	60	4	7	3
12	5	7	3	50	30	40
13	6	3	4	7	5	9
14	100	150	300	80	50	30
15	6	7	3	70	60	40
16	50	30	70	6	8	4
17	30	50	90	9	16	7
18	8	5	4	7	5	4
19	250	600	400	60	50	90
20	70	60	76	80	50	60
21	9	5	6	7	4	3
22	80	50	70	40	30	90
23	7	5	2	6	5	1
24	60	80	30	60	50	20
25	80	50	30	60	40	80
26	6	4	9	7	2	8
27	90	70	40	80	40	20
28	8	4	5	40	20	70
29	70	30	50	7	10	3
30	8	10	7	9	4	5

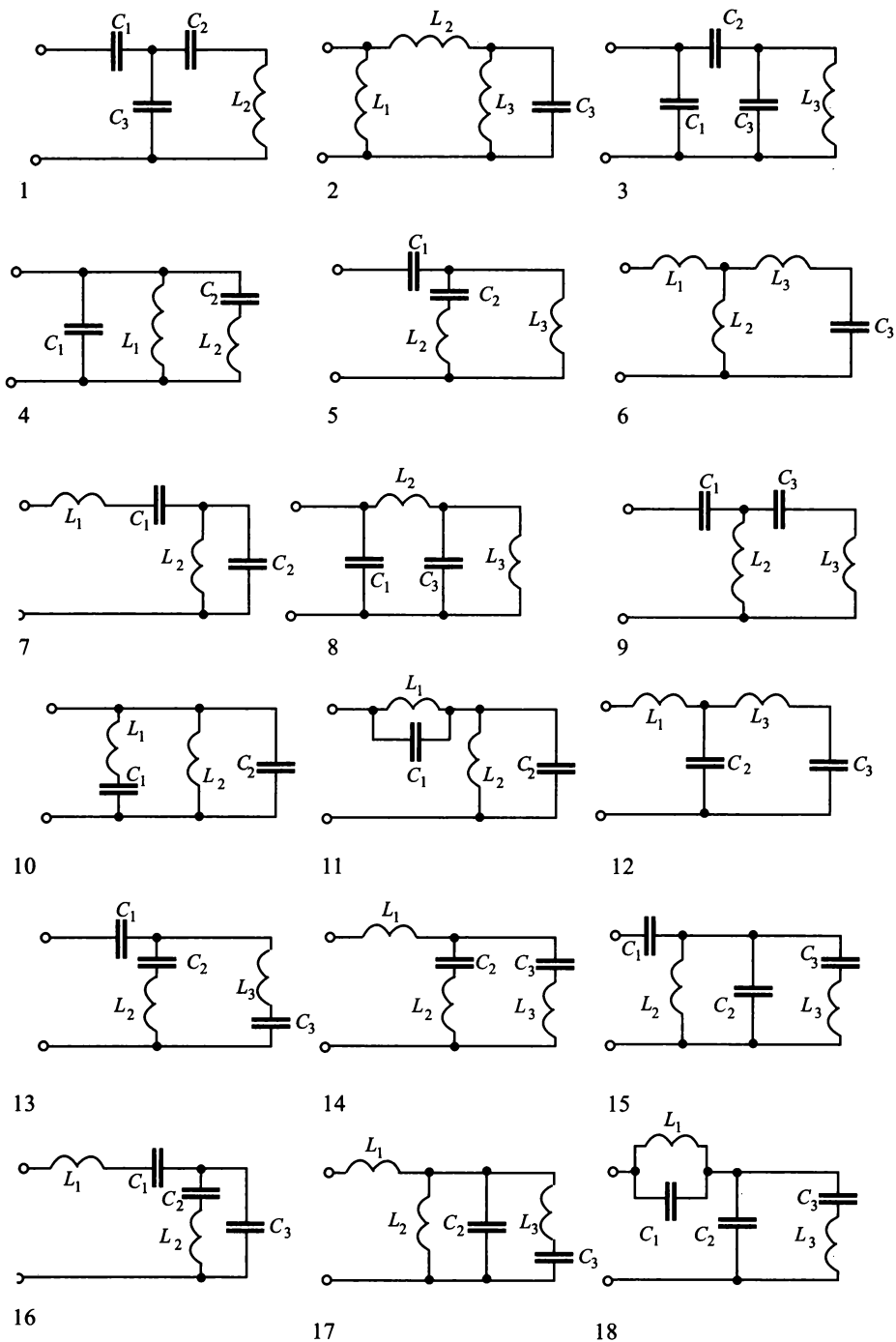


Рис. 2.24. Схемы резонансных цепей к заданию 2.4

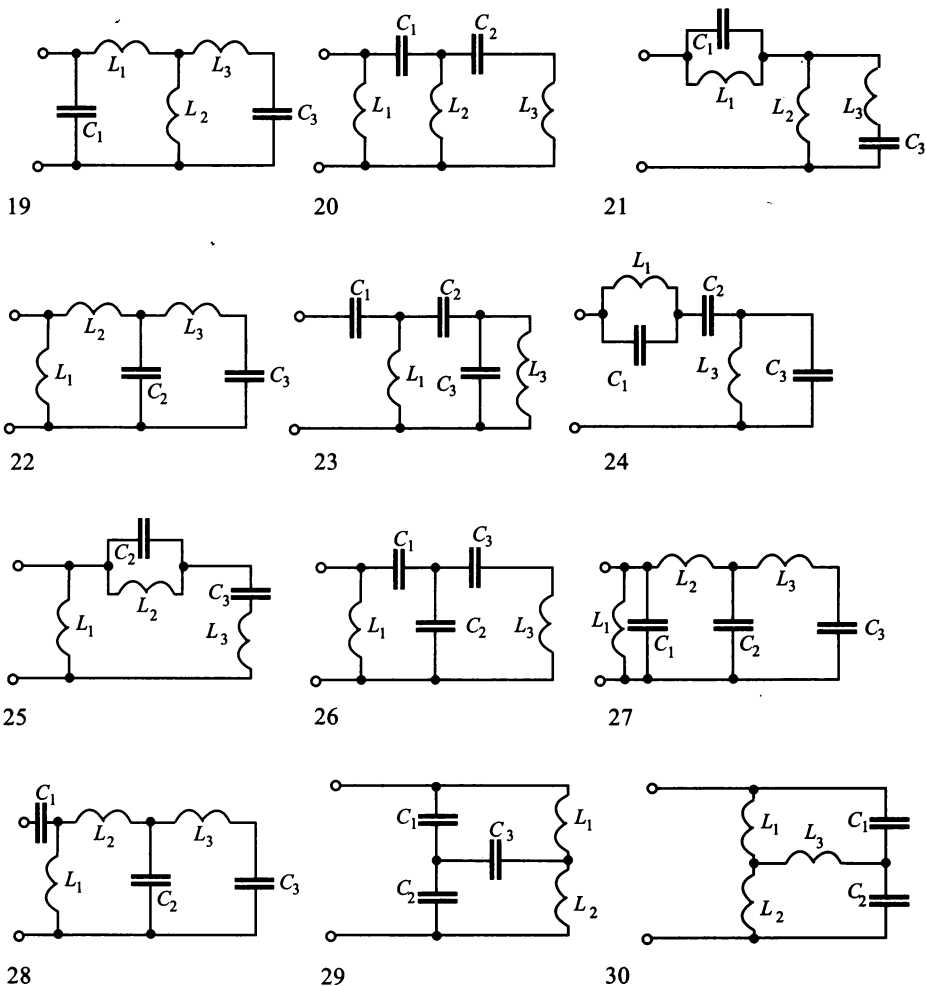


Рис. 2.24 (окончание).
Схемы резонансных цепей к заданию 2.4

РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Всякое решение технических проблем
плодит новые проблемы.

Третий закон Мерфи

3.1. Способы представления несинусоидальных функций

При расчете цепей несинусоидального переменного тока используется разложение периодических функций в одну из форм гармонического ряда Фурье. Если периодическая негармоническая функция представляется суммой мгновенных значений гармонических колебаний различных частот $\omega_k = k\omega_1$, где $k = 1, 2, \dots$ порядковый номер гармоники $\omega_1 = 2\pi/T$, то ряд Фурье записывают в следующем виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos(k\omega_1 t - \alpha_k),$$

где $A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$ — постоянная составляющая функции $f(t)$, равная ее среднему за период T значению;

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt = A_{mk} \cos \alpha_k \text{ и } b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt = A_{mk} \sin \alpha_k \text{ — коэф-}$$

фициенты ряда Фурье, соответствующие амплитудам гармоник квадратурных составляющих;

$$A_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ — амплитуда } k\text{-й гармоники;}$$

$$\alpha_k = \arctg(b_k / a_k) \text{ — начальная фаза } k\text{-й гармоники.}$$

Если же расчет цепи производится по комплексным значениям, то при разложении функции используют ряд Фурье в комплексной форме

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mk} e^{jk\omega_1 t},$$

где $\dot{A}_{mk} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jk\omega_1 t} dt = a_k - jb_k = A_{mk} e^{-j\alpha_k}$ — комплексная амплитуда k -й гармоники.

Поскольку при разложении функции в ряд Фурье использовалась косинусная форма, то связь между комплексным рядом Фурье и разложением по мгновенным значениям устанавливается формулой:

$$f(t) = A_0 + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mk} e^{jk\omega_1 t} \right).$$

Зависимости A_{mk} и α_k от порядкового номера k -й гармоники (или от ее частоты $k\omega_1$) принято называть амплитудным и фазовым спектрами колебания соответственно. Для периодических несинусоидальных колебаний амплитудный и фазовый спектры имеют дискретный характер, а расстояние по оси частот между смежными спектральными линиями равно ω_1 . Теоретически ряд Фурье содержит бесконечное число членов, однако в большинстве практических случаев этот ряд достаточно быстро сходится, и при расчетах можно ограничиться сравнительно небольшим числом гармоник.

3.2. Энергетические характеристики несинусоидального тока

При расчете энергетических характеристик в цепях несинусоидального периодического тока используют следующие величины:

- действующие значения напряжения U и тока I ;
- среднюю мощность P ;

- »» реактивную Q и полную S мощности;
- »» мощность искажений D ;
- »» коэффициент искажений k_D ;
- »» коэффициент мощности k_M .

Действующие значения напряжения и тока определяют как геометрическую сумму действующих значений отдельных гармоник:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum U_k^2};$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum I_k^2};$$

где $U_k = U_{mk} / \sqrt{2}$ — действующее значение k -й гармоники напряжения;
 $I_k = I_{mk} / \sqrt{2}$ — действующее значение k -й гармоники тока;
 U_0, I_0 — постоянные составляющие напряжения и тока, соответственно.

Среднюю мощность несинусоидального тока определяют как сумму мощностей отдельных гармоник:

$$P = P_0 + \sum P_{k0},$$

где $P_k = U_k I_k \cos \varphi_k$ — средняя мощность k -й гармоники тока;
 $P_0 = U_0 I_0$ — мощность постоянного тока.

Полную мощность несинусоидального тока определяют аналогично полной мощности синусоидального тока по формуле

$$S = UI.$$

По аналогии с синусоидальным током вводится понятие *реактивной мощности*

$$Q = \sum Q_k,$$

где $Q_k = U_k I_k \sin \varphi_k$ — реактивная мощность k -й гармоники тока.

В отличие от синусоидального тока полная мощность S оказывается больше геометрической суммы средней и реактивной мощностей

$$S \geq \sqrt{P^2 + Q^2};$$

поэтому разность этих мощностей носит название мощности искажений:

$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)} \geq 0.$$

Отношение мощности искажений D к полной мощности S характеризует отклонение формы тока от формы напряжения и называется *коэффициентом искажений*

$$k_D = D/S.$$

Коэффициент мощности в цепи несинусоидального тока определяют, так же как в цепи синусоидального тока, по формуле

$$k_M = P/S = \cos\varphi_\Sigma,$$

где φ_Σ — угол сдвига фаз эквивалентного синусоидального тока.

Таким образом, при определении большинства энергетических характеристик несинусоидального тока используется понятие эквивалентного по мощности синусоидального тока. Исключения составляют мощность искажений и коэффициент искажений, которые характеризуют отличие формы напряжения от формы тока. Для синусоидального тока $D = k_D = 0$, так как формы напряжения и тока одинаковы.

3.3. Расчет цепей несинусоидального переменного тока по мгновенным значениям

В линейных электрических цепях несинусоидальный ток может присутствовать в двух случаях:

- при негармонических источниках напряжения или тока;
- при наличии в цепи гармонических источников с кратными частотами.

Рассмотрим особенности расчета цепей в этих двух случаях. При негармонических воздействиях алгоритм расчета цепи может быть следующим:

- 1) периодическое негармоническое воздействие представляют в виде суммы *гармонических сигналов*, используя ряд Фурье;
- 2) ограничивают бесконечный ряд Фурье *некоторым числом гармоник*, учитывая при этом, что мощность каждой последующей гармоники убывает пропорционально квадрату ее амплитуды;
- 3) выполняют расчет цепи для каждой отдельной гармоники напряжения или тока, учитывая при этом, что структура цепи сохраняется, а *сопротивления и проводимости реактивных элементов изменяются* с изменением частоты гармоники;
- 4) результирующую реакцию цепи находят при помощи метода наложения путем сложения реакций для отдельных гармоник воздействия.

При наличии в цепи *нескольких гармонических источников с кратными частотами* алгоритм расчета несколько изменяется. Из рассмотренной выше последовательности расчета исключаются операции разложения воздействия в ряд Фурье. Кроме этого, структура цепи может изменяться в зависимости от места включения отдельных источников. В результате алгоритм расчета будет содержать только два этапа:

- 1) расчет цепи для каждого отдельного источника напряжения или тока с учетом изменения структуры цепи и параметров входящих в нее элементов;
- 2) определение результирующей реакции с помощью метода наложения.

Пример 3.1. К электрической цепи, схема которой изображена на рис. 3.1а, приложено периодическое несинусоидальное напряжение форма которого приведена на рис. 3.1б. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $r_H = 10 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $C = 111 \text{ мкФ}$; $E_m = 314 \text{ В}$; $\omega_1 = 100 \text{ рад/с}$.

Требуется выполнить следующее:

- 1) представить напряжение $e(t)$ в виде суммы первых трех членов ряда Фурье;
- 2) построить графики спектров амплитуд и начальных фаз напряжения $e(t)$;
- 3) рассчитать спектральные составляющие напряжения на нагрузке r_H ;
- 4) построить графики спектров амплитуд и начальных фаз напряжения на нагрузке r_H ;
- 5) рассчитать действующие значения напряжения источника, напряжения и тока в нагрузке;
- 6) рассчитать среднюю, реактивную и полную мощности, потребляемые схемой;
- 7) определить мощность искажений и коэффициент искажений.

Решение

1 При разложении функции напряжения источника в ряд Фурье воспользуемся данными табл. 3.1, в которой приведены некоторые типовые воздействия и их разложения. Для заданного в задаче напряжения получим:

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{4E_m}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{\sin 3\omega_1 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_1 t}{5} \right) = \\ &= E_{m1} \sin \omega_1 t + E_{m3} \sin 3\omega_1 t + E_{m5} \sin 5\omega_1 t = \\ &= (400 \sin 100t + 133 \sin 300t + 80 \sin 500t) \text{ В.} \end{aligned}$$

2 График спектра амплитуд гармоник напряжения источника изображен на рис. 3.1в. Спектр начальных фаз гармоник напряжения источника не приводится, так как все начальные фазы равны нулю.

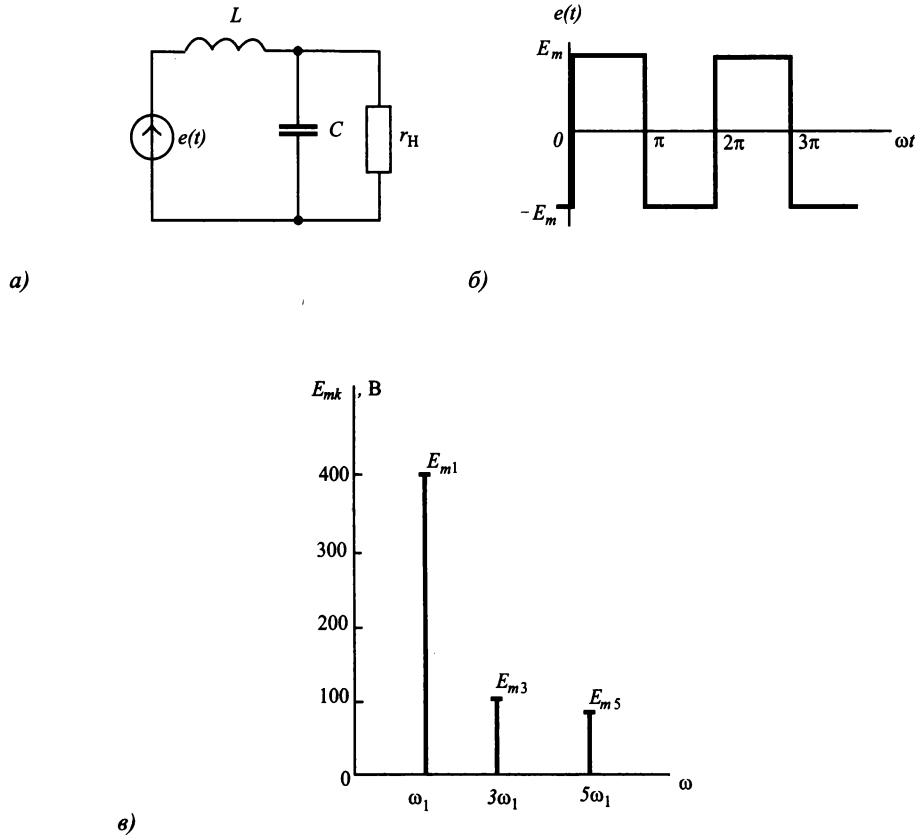


Рис. 3.1. Схема цепи (а), напряжение источника (б) и спектр амплитуд (в) к примеру 3.1

3 При расчете гармоник напряжения и тока в нагрузке схему, изображенную на рис. 3.1а, следует привести к канонической форме. Для этого необходимо заменить ветвь с источником напряжения $e(t)$ и индуктивностью L эквивалентным источником $j(t)$ с проводимостью b_k . Для этого прежде всего необходимо заменить источник напряжения $e(t)$ с сопротивлением $x_{Lk} = k\omega_1 L$ эквивалентным источником тока, параметры которого имеют значения:

$$j(t) = J_{m1} \sin(100t - 90^\circ) + J_{m3} \sin(300t - 90^\circ) + J_{m5} \sin(500t - 90^\circ),$$

где $J_{m1} = E_{m1}/\omega_1 L = 400/10 = 40$ А; $J_{m3} = E_{m3}/3\omega_1 L = 133/30 = 4,43$ А; $J_{m5} = E_{m5}/5\omega_1 L = 80/50 = 1,6$ А.

Полные проводимости для гармоник эквивалентного источника тока найдем по формулам:

$$b_1 = b_{L1} - b_{C1} = 1/(\omega_1 L) - \omega_1 C = 0,1 - 0,011 = 0,089 \text{ Сим};$$

$$b_3 = b_{L3} - b_{C3} = 1/(3\omega_1 L) - 3\omega_1 C = 0,033 - 0,033 = 0 \text{ Сим};$$

$$b_5 = b_{L5} - b_{C5} = 1/(5\omega_1 L) - 5\omega_1 C = 0,02 - 0,055 = -0,035 \text{ Сим}.$$

Результирующая схема после замены источника напряжения эквивалентным источником тока приведена на рис. 3.2а.

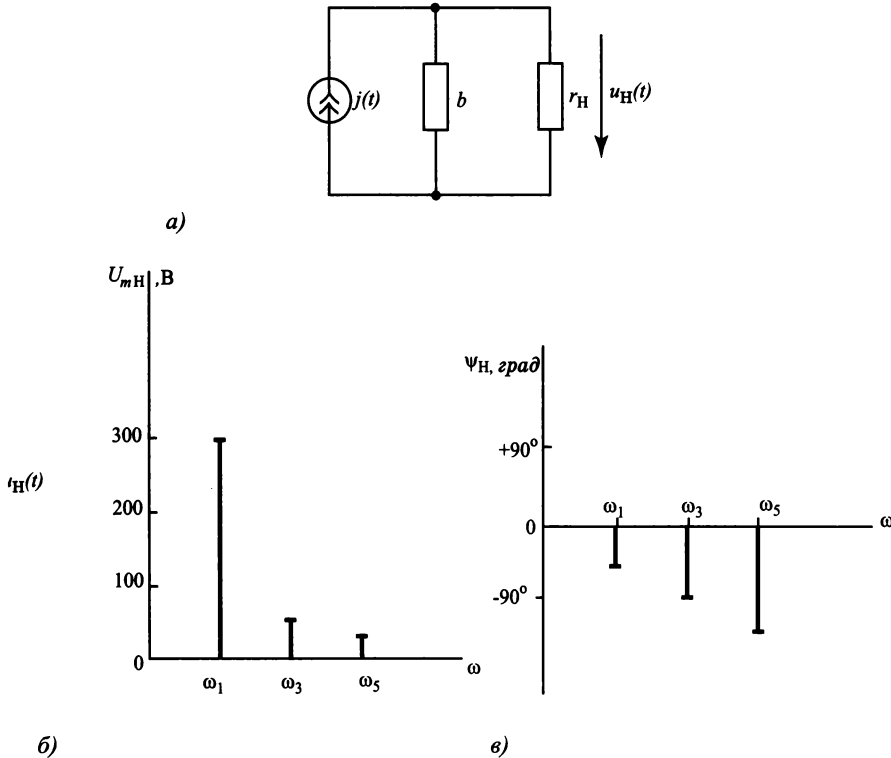


Рис. 3.2. Преобразованная схема (а), спектр амплитуд (б) и спектр фаз напряжения на нагрузке (в)

Теперь можно определить напряжение и ток в нагрузке r_H :

$$u_H(t) = U_{m1}\sin(\omega_1 t - 90^\circ + \varphi_1) + U_{m3}\sin(3\omega_1 t - 90^\circ + \varphi_3) + U_{m5}\sin(5\omega_1 t - 90^\circ + \varphi_5);$$

где: $U_{m1} = J_{m1}/y_1$; $U_{m3} = J_{m3}/y_3$; $U_{m5} = J_{m5}/y_5$ — амплитуды гармоник напряжения на нагрузке; а проводимости y_k имеют следующие значения:

$$y_1 = \sqrt{b_1^2 + g_H^2} = \sqrt{0,089^2 + 0,1^2} = 0,134 \text{ Сим};$$

$$y_3 = \sqrt{b_3^2 + g_H^2} = 0,1 \text{ Сим};$$

$$y_5 = \sqrt{b_5^2 + g_H^2} = \sqrt{0,03^2 + 0,1^2} = 0,106 \text{ Сим},$$

откуда находим:

$$U_{m1} = 40/0,134 = 298,5 \text{ В}; U_{m3} = 4,43/0,1 = 44,3 \text{ В}; \\ U_{m5} = 1,6/0,106 = 15,1 \text{ В}.$$

Углы сдвига фаз гармоник тока источника и напряжений на нагрузке имеют значения:

$$\varphi_1 = \arctg(b_1/g_H) = 42^\circ;$$

$$\varphi_3 = \arctg(b_3/g_H) = 0;$$

$$\varphi_5 = \arctg(b_5/g_H) = -18^\circ.$$

Таким образом, мгновенное значение напряжения на нагрузке определяется по формуле:

$$u_H(t) = 298,5\sin(100t - 48^\circ) + 44,3\sin(300t - 90^\circ) + \\ + 15,4 \sin(500t - 108^\circ) \text{ В},$$

а ток в нагрузке равен

$$i_H(t) = u_H(t)/r_H = 29,85\sin(100t - 48^\circ) + 4,43\sin(300t - 90^\circ) + \\ + 1,54 \sin(500t - 108^\circ) \text{ А}.$$

4 Амплитудный и фазовый спектры напряжения на нагрузке, построенные по результатам расчета, приведены на рис. 3.2б,в. Из этого графика видно, что все гармоники напряжения на нагрузке отстают от гармоник приложенного напряжения, причем фазовый сдвиг растет с ростом частоты гармоники.

5 Определим действующие значения напряжения источника, напряжения и тока в нагрузке:

$$E = (E_{m1}^2/2 + E_{m3}^2/2 + E_{m5}^2/2)^{1/2} = 303,4 \text{ В};$$

$$U_H = (U_{m1}^2/2 + U_{m3}^2/2 + U_{m5}^2/2)^{1/2} = 213,3 \text{ В};$$

$$I_H = (I_{m1}^2/2 + I_{m3}^2/2 + I_{m5}^2/2)^{1/2} = 21,35 \text{ А}.$$

6 Определим среднюю и реактивную мощности, потребляемые схемой:

$$P = U_H^2 g_H = 4550 \text{ Вт};$$

$$Q = \sum Q_k = Q_1 + Q_3 + Q_5;$$

$$\text{где: } Q_1 = U_{m1}^2 b_1/2 = 3952 \text{ вар}; Q_3 = U_{m3}^2 b_3/2 = 0; Q_5 = U_{m5}^2 b_5/2 = -4 \text{ вар}; \\ Q = 3952 - 4 = 3948 \text{ вар}.$$

Полную мощность, потребляемую цепью, можно определить по формуле:

$$S = U_{\text{И}} J,$$

где $J = (J_{m1}^2/2 + J_{m3}^2/2 + J_{m5}^2/2)^{1/2} = 28,5$ А — действующее значение тока источника.

В результате полная мощность источника имеет значение:

$$S = 213,3 \cdot 28,5 = 6079 \text{ ВА.}$$

7 Найдем мощность искажений

$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)} = \sqrt{6079^2 - (4550^2 + 3949^2)} = 810 \text{ Вт}$$

и коэффициент искажений

$$k_D = D/S = 810 / 6079 = 0,133.$$

8 Рассчитаем коэффициент мощности

$$k_M = P/S = \cos \varphi_3 = 4550/6079 = 0,75,$$

что соответствует сдвигу фаз между эквивалентными синусоидами напряжения и тока источника $\varphi_3 = 41^\circ$.

В табл. 3.1 приведены некоторые типовые функции и их разложения в ряд Фурье. Графики этих функций приведены на рис. 3.3. На графиках приняты следующие обозначения: $x = \omega t$; $y = f(\omega t)$; $\omega = k\omega_1$; $\omega_1 = 2\pi/T$.

Таблица 3.1

Виды функций и их разложений в ряд Фурье

Вариант	Функция $y(x)$	Пределы изменения x	Разложение функции $y(x)$ в ряд Фурье
1	2	3	4
1	A_m	$0 < x < \pi$	$\frac{A_m}{2} + \frac{2A_m}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$
2	A_m $-A_m$	$0 < x < \pi$ $-\pi < x < 0$	$\frac{4A_m}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right)$
3	$A_m x / \pi$	$0 < x < 2\pi$	$\frac{2A_m}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$
4	$A_m x / \pi$	$-\pi < x < \pi$	$\frac{A_m}{2} - \frac{A_m}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$

Раздел 3. Расчет цепей несинусоидального переменного тока

1	2	3	4
5	$A_m x / \pi$ $A_m x (2\pi - x) / \pi$	$0 < x < \pi$ $0 < x < 2\pi$	$\frac{A_m}{\pi} - \frac{4A_m}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right)$
6	$A_m x / \pi$ $A_m x (2\pi - x) / \pi$ $-2A_m x (\pi + x) / \pi$	$-\pi/2 < x < \pi/2$ $-\pi/2 < x < \pi$ $-\pi/2 < x < -\pi/2$	$\frac{8A_m}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} + \dots \right)$
7	$A_m \sin x $	$0 < x < 2\pi$	$\frac{A_m}{\pi} + 2A_m \left(\frac{\sin x}{4} - \frac{\cos 2x}{3\pi} - \frac{\cos 4x}{15\pi} - \dots \right)$
8	$A_m \sin x$	$0 < x < \pi$	$\frac{A_m}{\pi} + 2A_m \left(\frac{\sin x}{4} - \frac{\cos 2x}{3\pi} - \frac{\cos 4x}{15\pi} - \dots \right)$
9	$3A_m(\pi + x) / \pi$ $-A_m$ $3A_m x / \pi$ A_m $3A_m(\pi - x) / \pi$	$-\pi/2 < x < -2\pi/3$ $-2\pi/3 < x < -\pi/3$ $-\pi/3 < x < \pi/3$ $\pi/3 < x < 2\pi/3$ $2\pi/3 < x < -2\pi/3$	$A_m \left(\sin x - \frac{\sin 5x}{25} + \frac{\sin 7x}{49} + \dots \right)$
10	$A_m(2\pi - x) / 2\pi$	$0 < x < 2\pi$	$\frac{A_m}{4} + \frac{4A_m}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{9} + \dots \right)$
11	$2A_m(\pi/2 + x) / \pi$ $2A_m(\pi/2 - x) / \pi$	$-\pi/2 < x < 0$ $0 < x < -\pi/2$	$\frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - \dots \right)$
12	$ A_m \cos x $	$-\pi < x < \pi$	$\frac{2A_m}{\pi} + \frac{4A_m}{\pi} \left(\frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots \right)$
13	$-A_m$ A_m	$-\pi < x < -\pi/2$ $\pi/2 < x < \pi$ $-\pi/2 < x < \pi/2$	$\frac{4A_m}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right)$
14	$2A_m x / \pi$ $2A_m(\pi - x) / \pi$	$0 < x < \pi/2$ $\pi/2 < x < \pi$	$\frac{A_m}{4} + \frac{4A_m}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{9} + \dots \right)$
15	$A_m \cos x$	$-\pi/2 < x < \pi/2$	$\frac{A_m}{\pi} + 2A_m \left(\frac{\cos x}{4} + \frac{\cos 2x}{3\pi} + \frac{\cos 4x}{15\pi} + \dots \right)$
16	A_m	$-\pi/2 < x < \pi/2$	$\frac{A_m}{2} + \frac{2A_m}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \dots \right)$
17	$A_m(\pi - x) / \pi$	$0 < x < 2\pi$	$\frac{2A_m}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$

1	2	3	4
18	$-A_m$ $3A_m(\pi/2+x)/\pi$ A_m $3A_m(\pi/2-x)/\pi$ $-A_m$	$-\pi < x < -5\pi/6$ $-5\pi/6 < x < -\pi/6$ $\pi/6 < x < \pi/6$ $\pi/6 < x < 5\pi/6$ $5\pi/6 < x < \pi$	$A_m \left(\cos x - \frac{\cos 5x}{25} - \frac{\cos 7x}{49} - \dots \right)$
19	x^2	$-\pi < x < \pi$	$\frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2x + \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 6x}{9} - \dots \right)$
20	$x(\pi-x)$	$0 < x < \pi$	$\frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2x + \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 6x}{9} - \dots \right)$
21	$x \cos x$	$-\pi < x < \pi$	$-\frac{\sin x}{2} + \frac{4 \sin 2x}{3} - \frac{6 \sin 3x}{15} + \frac{8 \sin 4x}{35} - \dots$
22	$A_m/2$	$-3\pi/4 < x < -\pi/4$ $-\pi/4 < x < \pi/4$ $\pi/4 < x < 3\pi/4$	$\frac{A_m}{2} + \frac{2A_m}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right)$
23	$A_m/2$ A_m $A_m/2$	$-\pi/3 < x < \pi/3$ $\pi/3 < x < 2\pi/3$ $2\pi/3 < x < 4\pi/3$	$\frac{A_m}{2} + \frac{2A_m}{\pi} \left(\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{10} - \dots \right)$
24	$-A_m$ A_m $-A_m$	$-2\pi < x < -5\pi/6$ $-2\pi < x < \pi/6$ $5\pi/6 < x < \pi$	$\frac{4A_m}{\pi} \left(\frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{10} - \dots \right)$
25	$-A_m$ A_m	$-2\pi/3 < x < -\pi/3$ $\pi/3 < x < 2\pi/3$	$\frac{4A_m}{\pi^2} \left(\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{10} - \dots \right)$
26	$3A_m(\pi/2+x)/\pi$ A_m $3A_m(\pi/2-x)/\pi$	$-\pi/2 < x < -\pi/6$ $-\pi/6 < x < \pi/6$ $\pi/6 < x < \pi/2$	$\frac{A_m}{2} + \frac{3\sqrt{3}A_m}{\pi^2} \left(\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} - \dots \right)$
27	$6A_m(\pi/2+x)/\pi$ A_m $6A_m(\pi/2-x)/\pi$	$-\pi/2 < x < -\pi/3$ $-\pi/3 < x < \pi/3$ $\pi/3 < x < \pi/2$	$\frac{A_m}{2} + \frac{12A_m}{\pi^2} \left(\frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 3x}{9} - \frac{\cos 5x}{50} - \dots \right)$
28	$A_m/2$ A_m $A_m/2$	$-2\pi/3 < x < -\pi/3$ $-2\pi/3 < x < \pi/3$ $\pi/3 < x < 2\pi/3$	$\frac{A_m}{2} + \frac{\sqrt{3}A_m}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7} - \dots \right)$
29	$-A_m$ A_m $-A_m$	$-\pi < x < -2\pi/3$ $-\pi/3 < x < \pi/3$ $-2\pi/3 < x < \pi$	$\frac{2\sqrt{3}A_m}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7} - \dots \right)$
30	$3A_m x/\pi$ A_m $3A_m(4\pi/3-x)/\pi$	$0 < x < \pi/3$ $\pi/3 < x < \pi$ $\pi < x < 4\pi/3$	$\frac{A_m}{2} + \frac{3\sqrt{3}A_m}{\pi^2} \left(\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 5x}{25} + \frac{\sin 7x}{49} - \dots \right)$

Примечания

1) В разложениях функции приняты следующие обозначения: $x = \omega t$, где $\omega = k\omega_1$; $y = f(x) = f(k\omega_1 t)$; A_m — максимальное значение функции $f(x)$.

2) Если функция y четная, т. е. $y(-x) = y(x)$, то $b_k = 0$; $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \cos kx dx$;

3) Если функция y нечетная, т. е. $y(-x) = -y(x)$, то $a_k = 0$; $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \sin kx dx$.

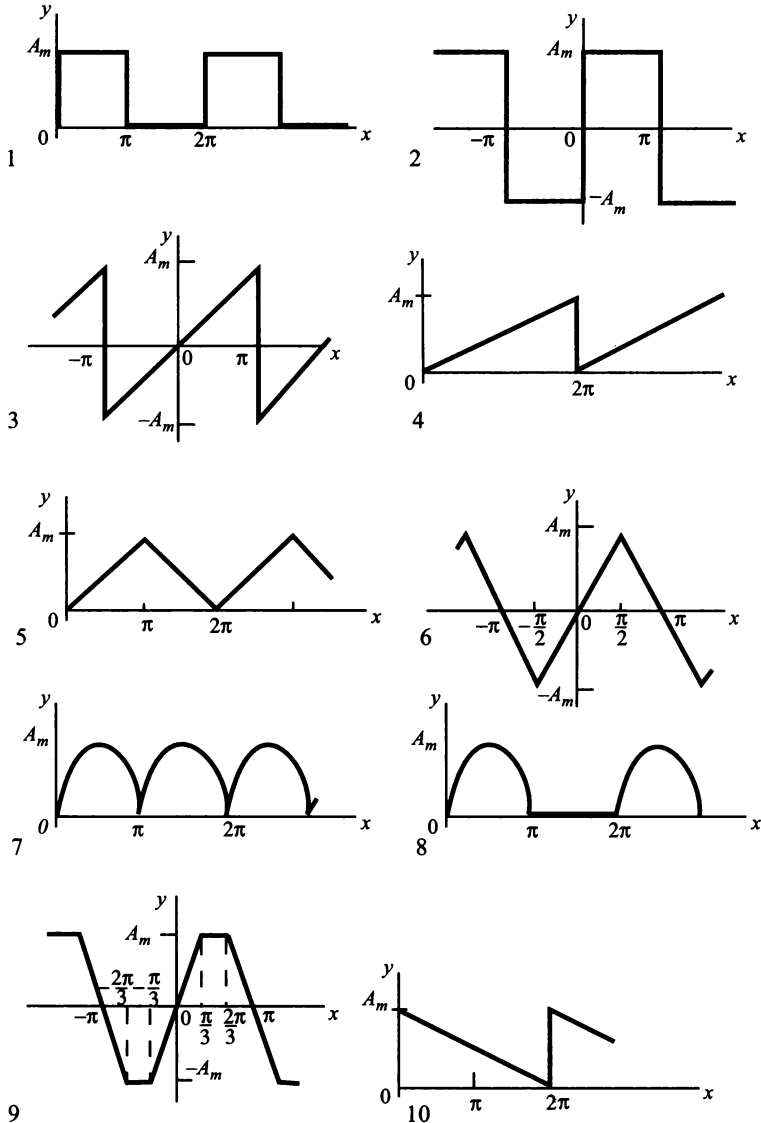
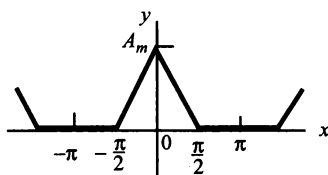
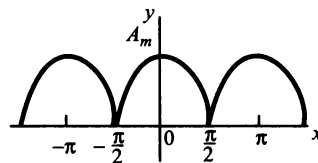


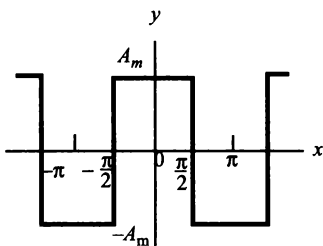
Рис. 3.3. Графики типовых несинусоидальных функций



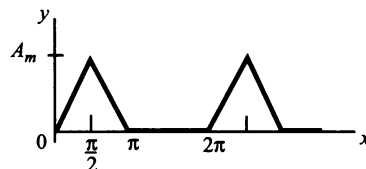
11



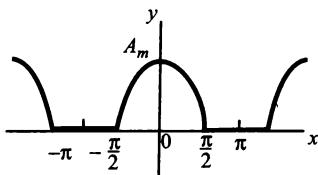
12



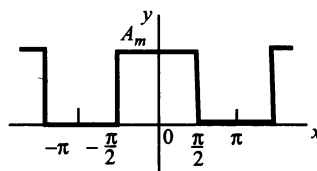
13



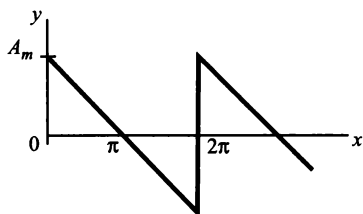
14



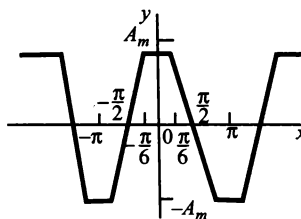
15



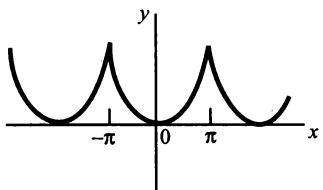
16



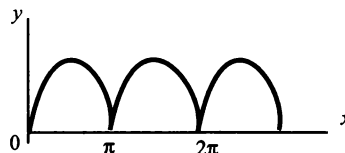
17



18

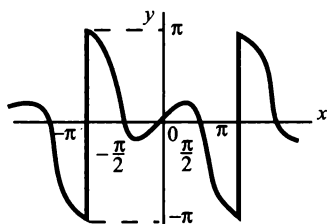


19

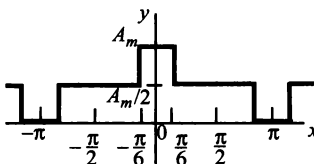


20

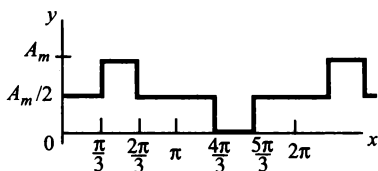
Рис. 3.3 (продолжение). Графики типовых несинусоидальных функций



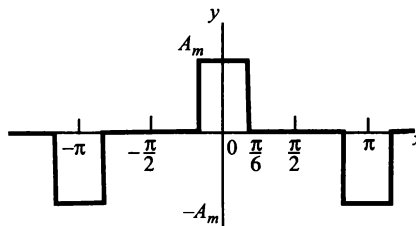
21



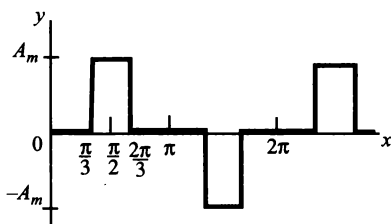
22



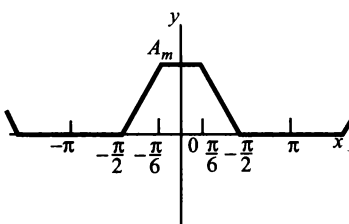
23



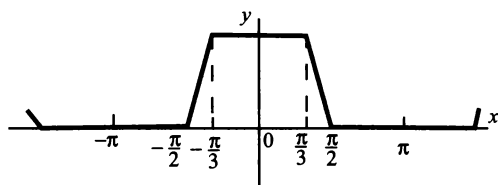
24



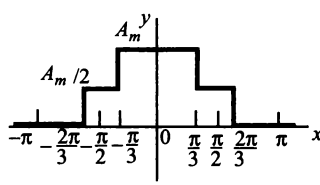
25



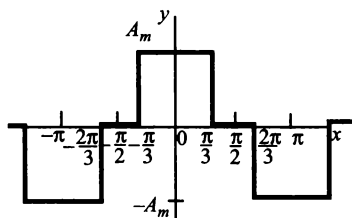
26



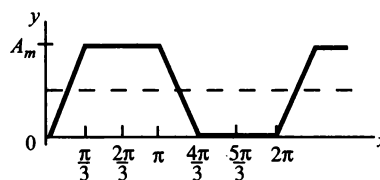
27



28



29



30

Рис. 3.3 (окончание). Графики типовых несинусоидальных функций

3.4. Расчет цепей несинусоидального переменного тока по комплексным значениям

При расчете цепей несинусоидального переменного тока по комплексным значениям можно пользоваться рядом Фурье, представленном в комплексной форме, как показано в разделе 3.1:

$$y(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{mk} e^{ikx} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{mk} e^{jk\omega_1 t}$$

Следует отметить, что членам этого ряда придаются отрицательные и положительные номера, поэтому при определении отдельных гармоник берется полусумма двух членов ряда. Это несколько затрудняет использование ряда Фурье в комплексной форме, поэтому чаще пользуются представлением несинусоидальных функций в виде суммы только положительных членов ряда, которую записывают в следующем виде:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{mk} e^{jk\omega_1 t} \right),$$

где $\dot{A}_{mk} = A_{mk} e^{-j\alpha_k}$ — комплексная амплитуда функции $f(t)$.

Комплексные амплитуды зависят от дискретных значений частоты $k\omega_1$ и образуют комплексный частотный спектр колебания $f(t)$. Следует отметить, что каждый комплексный коэффициент \dot{A}_{mk} определяет амплитуду $A_{mk}(k\omega_1)$ и начальную фазу $\alpha_k(k\omega_1)$ гармонического колебания. Для определения комплексной амплитуды можно использовать формулу:

$$\dot{A}_{mk} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(x) dx,$$

где $x = \omega t$ — текущая угловая координата функции.

Кроме этого, для записи комплексного значения функции можно использовать мгновенные значения, приведенные в табл. 3.1. При этом возможен гибридный метод расчета, когда мгновенное значение несинусоидальной функции, представленное в виде суммы мгновенных значений гармоник, рассматривается как последовательность комплексных амплитуд. В этом случае расчет реакции производится не в общем виде, а в виде суммы мгновенных значений отдельных составляющих, каждая из которых вначале определяется в комплексной форме, а затем находится ее мгновенное значение. Покажем порядок такого расчета на примере.

Пример 3.2. К электрической цепи, схема которой изображена на рис. 3.4а, приложено несинусоидальное периодическое напряжение, полученное в результате выпрямления синусоидального напряжения. Форма этого напряжения приведена на рис. 3.4б. Параметры цепи имеют следующие значения: $r_2 = r_H = 10 \text{ Ом}$; $L_1 = L_3 = 0,1 \text{ Гн}$; $C_2 = 100 \text{ мкФ}$; $E_m = 100 \text{ В}$; $\omega_1 = 100 \text{ рад/с}$.

Требуется выполнить следующие операции:

- 1) разложить напряжение источника $y = e(x) = e(\omega t)$ в ряд Фурье, ограничив число членов ряда постоянной составляющей и тремя первыми гармониками;
- 2) построить графики спектров амплитуд и начальных фаз напряжения источника;
- 3) определить напряжение на нагрузке $u_H(t)$, используя метод расчета по комплексным значениям;
- 4) построить графики спектральных составляющих для напряжения на нагрузке;
- 5) определить действующее значение выходного напряжения и мощность, рассеиваемую в нагрузке;
- 6) выполнить оценку влияния высших гармоник на мощность, поступающую в нагрузку.

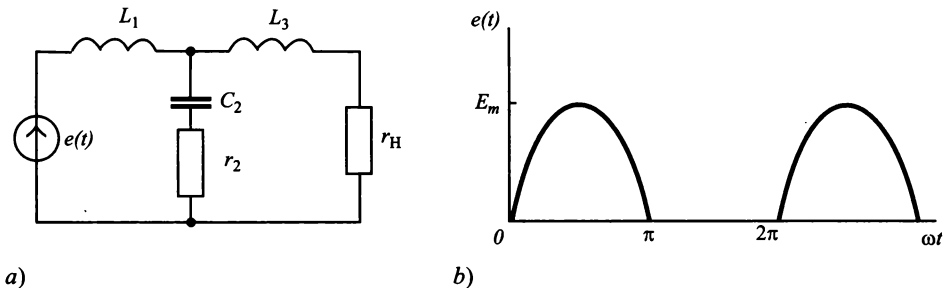


Рис. 3.4. Схема цепи (а) и форма входного напряжения (б) к примеру 3.2

Решение.

1 Воспользуемся данными табл. 3.1 (вариант 8) и представим напряжение источника в виде ряда Фурье, ограниченного постоянной составляющей и тремя первыми гармониками:

$$\begin{aligned}
 e(t) &= E_0 + E_{m1}\sin\omega_1 t - E_{m2}\cos 2\omega_1 t - E_{m4}\cos 4\omega_1 t = \\
 &= E_0 + e_1(t) + e_2(t) + e_4(t) = \\
 &= 31,8 + 50\sin 100t - 21,2\cos 200t - 4,2\cos 400t = \\
 &= 31,8 + 50\sin 100t + 21,2\sin(200t - 90^\circ) + 4,2\sin(400t - 90^\circ) \text{ В.}
 \end{aligned}$$

2 Построим графики спектров амплитуд и начальных фаз напряжения источника, которые изображены на рис. 3.5а, б. При построении графиков используем масштаб, при котором одно деление по оси ординат соответствует 10 В, а по оси абсцисс — 100 Гц.

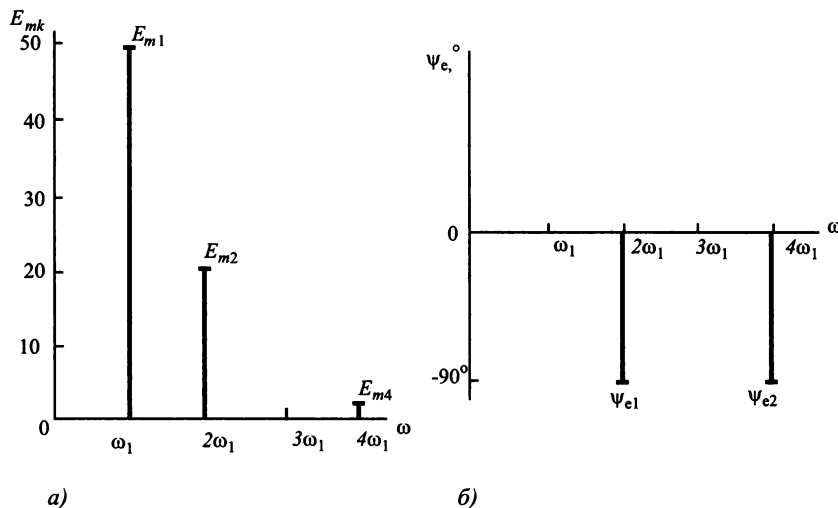


Рис. 3.5. Спектры амплитуд (а) и фаз (б) входного сигнала к примеру 3.2

3 Теперь выполним расчет напряжения на нагрузке, используя для этого метод комплексных амплитуд.
 Для постоянной составляющей напряжения на нагрузке, используя схему замещения, приведенную на рис. 3.6а, получим следующее значение:

$$U_{H0} = E_0 = 31,8 \text{ В.}$$

При выполнении этого расчета учтено, что на постоянном токе индуктивности L_1 , L_2 можно заменить перемычками, а емкость C_1 — разрывом цепи, как показано на рис. 3.6а. Ток в нагрузке определим по закону Ома:

$$I_{H0} = U_{H0}/r_H = 31,8/10 = 3,18 \text{ А.}$$

При расчете напряжения на нагрузке для гармоник напряжения $e(t)$ источника можно пользоваться схемой замещения, приведенной на рис. 3.6б. На этой схеме все элементы цепи заменены их комплексными сопротивлениями, которые имеют двойные индексы. Первый индекс соответствует порядковому номеру ветви, а второй — номеру

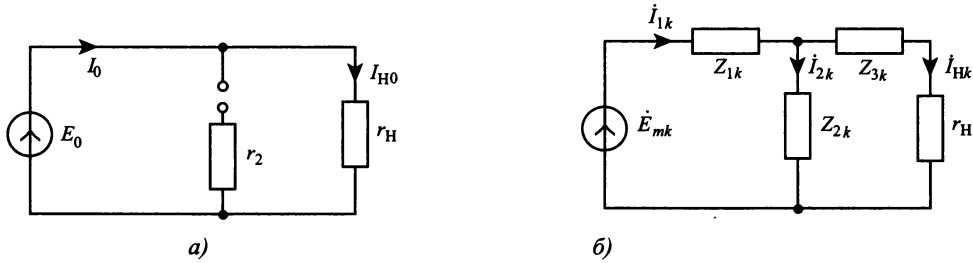


Рис. 3.6. Схемы для расчета постоянной (а) и переменных (б) составляющих выходного напряжения

гармоники. Комплексные значения токов в ветвях определим по формулам:

$$\dot{I}_{1k} = \dot{E}_{mk} / Z_k$$

где $Z_k = Z_{1k} + Z_{2k}(Z_{3k} + r_H) / (Z_{2k} + Z_{3k} + r_H)$ — комплексное сопротивление цепи для k -й гармоники напряжения источника;

$$\begin{aligned} \dot{I}_{2k} &= \dot{I}_{1k} (Z_{3k} + r_H) / (Z_{2k} + Z_{3k} + r_H); \\ \dot{I}_{Hk} &= \dot{I}_{1k} Z_{2k} / (Z_{2k} + Z_{3k} + r_H); \end{aligned}$$

в которых учтено что ток \dot{I}_{1k} делится в ветвях схемы на два тока, которые обратно пропорциональны сопротивлениям ветвей.

Для первой гармоники получим напряжения на нагрузке, пользуясь схемой замещения: $\dot{E}_{m1} = 50$ В; $Z_{11} = Z_{31} = jx_{11} = j\omega_1 L_1 = j10$ Ом; $Z_{21} = r_2 - jx_{21} = (10 - j100)$ Ом; $Z_1 = Z_{11} + Z_{21}(Z_{31} + r_H) / (Z_{21} + Z_{31} + r_H) = 23e^{j58^\circ}$ Ом — сопротивления цепи для первой гармоники напряжения источника.

Комплексная амплитуда тока первой гармоники источника имеет значение:

$$\dot{I}_{m1} = \dot{E}_{m1} / Z_1 = 50 / (23e^{j58^\circ}) = 2,175e^{-j58^\circ} \text{ А.}$$

Этот ток делится обратно пропорционально сопротивлениям параллельно включенных ветвей Z_{2k} и $(Z_{3k} + r_H)$, поэтому ток в нагрузке имеет значение:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{mH1} &= \dot{I}_{m1} Z_{21} / (Z_{21} + Z_{31} + r_H) = \\ &= 2,175e^{-j58^\circ} (10 - j100) / (20 - j90) = 2,37e^{-j65^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Комплексное значение напряжения на нагрузке определим по закону Ома:

$$\dot{U}_{mH1} = \dot{I}_{mH1} r_H = 23,7e^{-j65^\circ} \text{ В.}$$

Полученное значение позволяет записать мгновенное значение первой гармоники напряжения на нагрузке:

$$u_{H1}(t) = 23,7 \sin(100t - 65^\circ) \text{ В.}$$

Вторую гармонику напряжения на нагрузке определим, используя в схеме замещения, изображенной на рис. 3.6б, сопротивления цепи и напряжение источника для второй гармоники: $\dot{E}_{m2} = 21,2e^{-j90^\circ} \text{ В}$; $Z_{12} = Z_{32} = 2j\omega_1 L_1 = j20 \text{ Ом}$; $Z_{22} = r_2 - j/(2\omega_1 C_2) = 10 - j50 \text{ Ом}$; $Z_2 = Z_{12} + Z_{22}(Z_{32} + r_H)/(Z_{22} + Z_{32} + r_H) = 47,4e^{j60^\circ} \text{ Ом}$.

Значение комплексной амплитуды тока второй гармоники в цепи источника напряжения найдем по закону Ома:

$$\dot{I}_{m2} = \dot{E}_{m2} / Z_2 = 21,2e^{-j90^\circ} / 47,4e^{j60^\circ} = 0,45e^{-j150^\circ} \text{ А.}$$

Комплексную амплитуду тока второй гармоники в нагрузке r_H найдем аналогично току первой гармоники путем деления тока источника обратно пропорционально сопротивлениям параллельно включенных ветвей:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{mH2} &= \dot{I}_{m2} Z_{22} / (Z_{22} + Z_{32} + r_H) = \\ &= 0,45 e^{-j150^\circ} (10 - j50) / (20 - j30) = 0,635e^{-j172^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Комплексное значение напряжения второй гармоники на нагрузке найдем с помощью закона Ома:

$$\dot{U}_{mH2} = \dot{I}_{mH2} r_H = 6,35e^{-j172^\circ} \text{ В.}$$

Полученное значение позволяет записать мгновенное напряжение второй гармоники на нагрузке:

$$u_{H2}(t) = 6,35 \sin(200t - 172^\circ) \text{ В.}$$

Определение напряжения *четвертой гармоники* выполним аналогично расчету напряжения второй гармоники. Сопротивления цепи и напряжение источника для четвертой гармоники имеют значения:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m4} &= 4,2e^{-j90^\circ}; Z_{14} = 4j\omega_1 L_1 = Z_{34} = j40 \text{ Ом}; \\ Z_{24} &= r_2 - j/(4\omega_1 C_2) = (10 - j25) \text{ Ом}; \\ Z_4 &= Z_{14} + Z_{24}(Z_{34} + r_H)/(Z_{24} + Z_{34} + r_H) = 43e^{j25^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Комплексную амплитуду тока четвертой гармоники определим по закону Ома:

$$\dot{I}_{m4} = \dot{E}_{m4} / Z_4 = 4,2e^{-j90^\circ} / 43e^{j25^\circ} = 0,098e^{-j115^\circ} \text{ А.}$$

Используя ток четвертой гармоники в ветви с источником напряжения, рассчитаем ток в нагрузке:

$$\dot{I}_{mH4} = \dot{I}_{m4} / Z_{24} / (Z_{24} + Z_{34} + r_H) = 0,106e^{-j220^\circ} \text{ А.}$$

Комплексное значение четвертой гармоники напряжения на нагрузке определим по закону Ома:

$$\dot{U}_{m4} = \dot{I}_{m4} r_H = 1,06e^{-j220^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенное значение четвертой гармоники напряжения на нагрузке определим по формуле:

$$u_{H4}(t) = 1,06\sin(400t - 220^\circ) \text{ В.}$$

Результирующее напряжение на нагрузке найдем путем суммирования отдельных составляющих, рассчитанных выше:

$$\begin{aligned} u_H(t) &= U_{H0} + u_{H1}(t) + u_{H2}(t) + u_{H4}(t) = \\ &= 31,8 + 23,7\sin(100t - 65^\circ) + 6,35\sin(200t - 172^\circ) + \\ &\quad + 1,06\sin(400t - 220^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Графики напряжений источника $e(t)$ и на нагрузке $u_H(t)$ изображены на рис. 3.7.

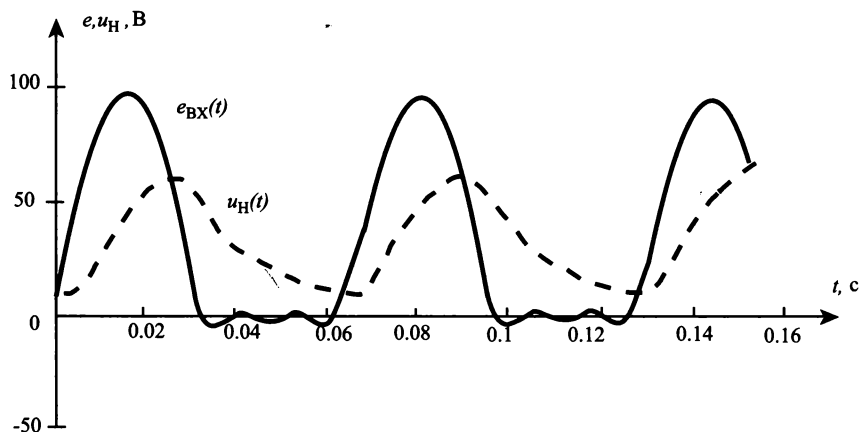


Рис. 3.7. Графики входного и выходного напряжений

4 Построим графики спектральных составляющих напряжения на нагрузке, используя полученное выше мгновенное значение напряжения. График амплитудно-частотного спектра изображен на

рис. 3.8а, а график фазочастотного спектра — на рис. 3.8б. Эти графики показывают, что электрическая цепь, включенная между источником и нагрузкой, оказывает определенное сглаживающее действие: амплитуды спектральных составляющих уменьшаются по мере увеличения их частоты. Кроме этого, заметно существенное запаздывание выходного сигнала по отношению к напряжению источника.

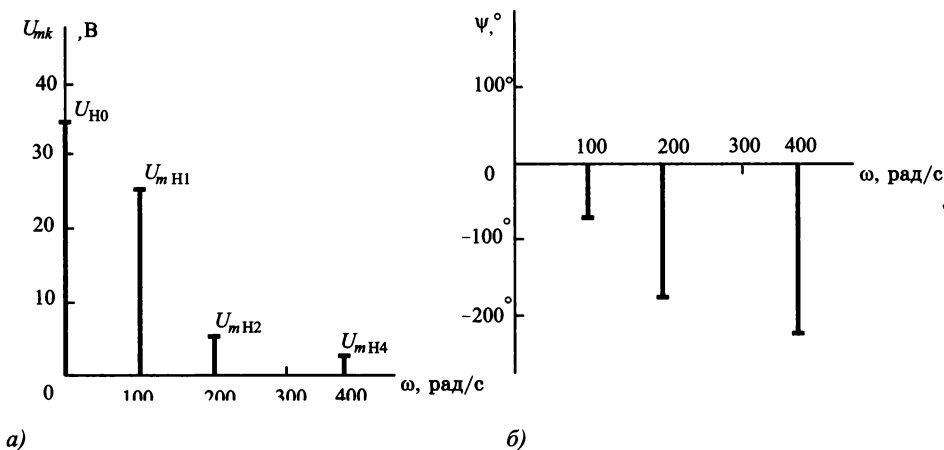


Рис. 3.8. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры выходного напряжения

5 Определим действующее значение напряжения на нагрузке и среднюю мощность, рассеиваемую в ней. Действующее напряжение на нагрузке можно рассчитать по формуле:

$$U_H = \sqrt{U_{H0}^2 + U_{H1}^2 + U_{H2}^2 + U_{H4}^2},$$

где $U_{H0} = 31,80$ В — постоянная составляющая выходного напряжения;

$U_{H1} = U_{mH1}/\sqrt{2} = 16,77$ В — действующее значение напряжения первой гармоники;

$U_{H2} = U_{mH2}/\sqrt{2} = 4,49$ В — действующее значение напряжения второй гармоники;

$U_{H4} = U_{mH4}/\sqrt{2} = 0,75$ В — действующее значение напряжения четвертой гармоники.

После подстановки действующих значений напряжений гармоник получим действующее значение несинусоидального напряжения:

$$U_H = \sqrt{32,80^2 + 16,77^2 + 4,49^2 + 0,75^2} = 36,24 \text{ В.}$$

Средняя мощность несинусоидального тока определяется по формуле:

$$P_H = P_{H0} + P_{H1} + P_{H2} + P_{H4},$$

где $P_{H0} = I_{H0}^2 r_H = 3,18^2 \cdot 10 = 101$ Вт — мощность постоянной составляющей тока;

$P_{H1} = I_{H1}^2 r_H = 28,12$ Вт — средняя мощность первой гармоники тока;

$P_{H2} = I_{H2}^2 r_H = 2,02$ Вт — средняя мощность второй гармоники тока;

$P_{H4} = I_{H4}^2 r_H = 0,06$ Вт — средняя мощность четвертой гармоники тока.

Таким образом, средняя мощность несинусоидального тока имеет значение:

$$P_H = 101 + 28,12 + 2,02 + 0,06 = 131,2 \text{ Вт.}$$

Из этого выражения следует, что средняя мощность почти полностью определяется постоянной составляющей и первой гармоникой тока. Вклад высших гармоник весьма незначителен и составляет всего 1,6% от полной мощности, рассеиваемой в нагрузке.

ЗАДАНИЕ 3.1. Расчет цепей несинусоидального тока

Для электрической цепи, схема которой приведена на рис. 3.9, требуется выполнить следующие расчеты и построения:

- в соответствии с вариантом задания выбрать из табл. 3.1 форму несинусоидального периодического напряжения или тока источника и изобразить его с указанием временных и амплитудных значений, пользуясь данными табл. 3.2, в которой принято: $\omega_0 = 10^4$ рад/с, $A_{m0} = 10$ (А или В);
- выполнить разложение несинусоидального периодического напряжения или тока в ряд Фурье и ограничить число членов ряда до пятой гармоники включительно;
- построить графики спектров амплитуд и начальных фаз напряжения или тока источника;
- выбрать схему цепи в соответствии с вариантом задания и записать значения параметров элементов, входящих в нее, пользуясь данными табл. 3.2 и рис. 3.9, в которых принято $L_0 = 10$ мГн, $C_0 = 1$ мкФ, $R_{H0} = 100$ Ом;
- записать в общем виде комплексное значение напряжения на нагрузке R_H для k -й гармоники сигнала источника;

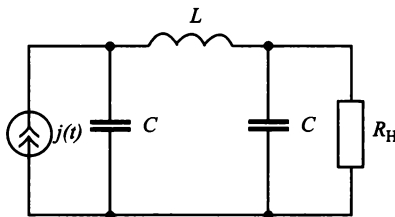
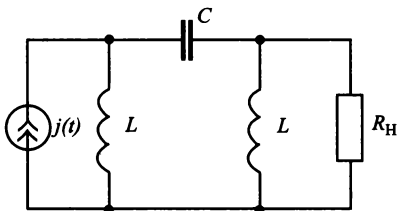
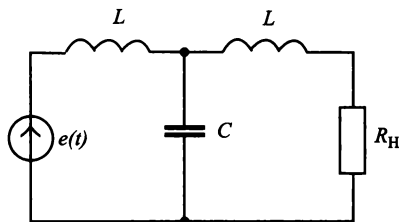
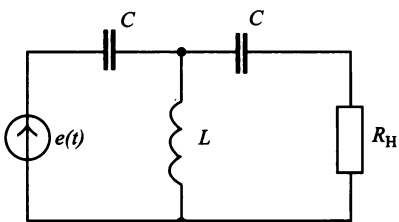


Рис. 3.9. Схемы электрических цепей к заданию 3.1

Таблица 3.2

Параметры элементов схемы

Вариант	Схема	$\omega = \omega/\omega_0$	A_m/A_{m0}	L/L_0	C/C_0	R_H/R_{H0}
1	а	5	10	6	8	3
2	б	3	8	4	3	2
3	в	2	6	1	2	1
4	г	8	4	2	1	3
5	а	6	2	4	3	1
6	б	4	1	5	4	2
7	в	2	3	4	5	3
8	г	9	5	6	3	2
9	а	7	7	5	6	1
10	б	5	9	6	3	2
11	в	3	10	3	2	2
12	г	1	8	2	3	2
13	а	2	6	4	5	1
14	б	4	4	6	4	3
15	в	6	2	5	1	5
16	г	8	9	6	6	3
17	а	10	7	4	3	2
18	б	1	5	8	4	3
19	в	3	3	5	6	3
20	г	5	1	6	4	2
21	а	7	8	6	2	4
22	б	9	6	3	2	4
23	в	2	4	4	8	4
24	г	4	2	6	4	3
25	а	6	7	6	2	2
26	б	8	9	4	3	4
27	в	10	5	5	4	2
28	г	3	3	4	6	2
29	а	5	1	8	4	2
30	б	7	5	6	3	1

- выполнить расчет гармоник напряжения на нагрузке методом комплексных амплитуд для всех членов ряда вплоть до пятой гармоники;
- записать мгновенное значение напряжения на нагрузке и построить его на графике;
- построить графики спектра амплитуд и начальных фаз напряжения на нагрузке;

- »» рассчитать действующие значения напряжения и тока в нагрузке;
- »» определить активную, реактивную и полную мощности в цепи, найти коэффициент мощности;
- »» рассчитать мощность искажений и найти коэффициент искажений.

ЗАДАНИЕ 3.2. Расчет цепей с гармоническими источниками разных частот

В схемах, изображенных на рис. 3.10, действуют два гармонических источника кратных частот $\omega_e = k\omega_0$; $\omega_j = m\omega_0$, где $\omega_0 = 10^4$ рад.с. Параметры элементов схем, значения частот и амплитуд источников приведены в табл. 3.3, где принято $E_{m0} = 10$ В; $J_{m0} = 1$ А; $L_0 = 10$ мГн; $C_0 = 1$ мкФ; $R_{H0} = 100$ Ом. Требуется выполнить следующие расчеты:

- »» определить комплексное и мгновенное значения тока в нагрузке R_H ;
- »» построить графическое изображение мгновенного значения тока в нагрузке;
- »» рассчитать действующие значения напряжения и тока в нагрузке;
- »» рассчитать среднюю, реактивную и полную мощности в цепи.

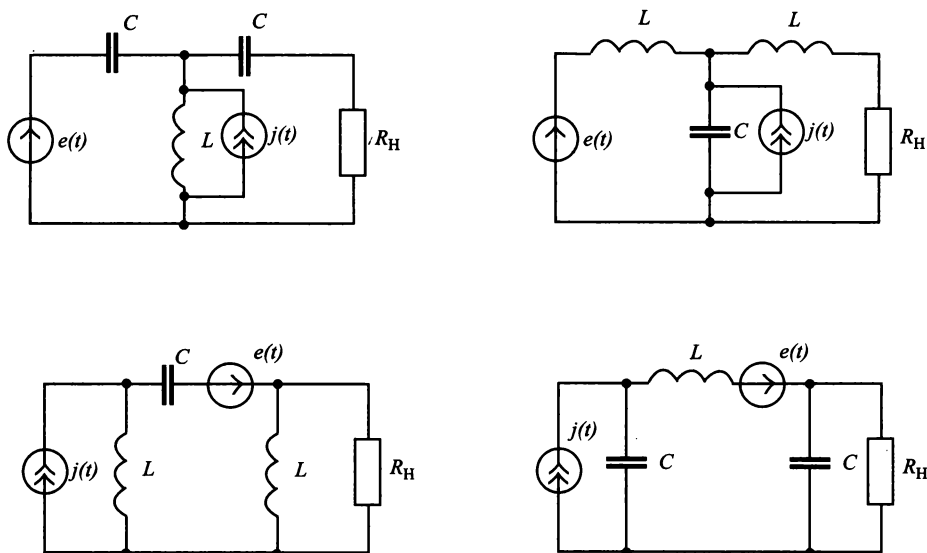


Рис. 3.10. Схемы электрических цепей к заданию 3.2

Таблица 3.3.

Параметры элементов схем

Вариант	E_m/E_{m0}	J_m/J_{m0}	k	m	L/L_0	C/C_0	R_H/R_{H0}	Схем цепи
1	5	7	5	1	8	4	2	а
2	2	5	1	4	2	1	4	б
3	4	6	3	1	4	2	3	в
4	5	2	1	3	1	2	5	г
5	3	4	2	1	4	2	4	а
6	6	4	1	4	2	1	3	б
7	1	3	4	2	6	2	1	в
8	4	3	2	1	4	3	2	г
9	3	2	1	3	2	1	4	а
10	6	4	3	1	1	5	4	б
11	7	6	3	1	3	4	2	в
12	5	4	1	2	3	1	4	г
13	7	9	3	2	3	2	2	а
14	6	4	2	4	3	4	6	б
15	3	3	1	5	7	3	4	в
16	5	6	1	4	7	3	7	г
17	6	4	3	1	6	4	8	а
18	3	5	1	3	5	6	7	б
19	7	4	2	3	8	6	4	в
20	6	5	3	2	3	4	6	г
21	8	5	1	3	3	4	4	а
22	5	9	3	1	4	5	4	б
23	8	4	1	4	8	6	4	в
24	7	9	4	2	4	6	3	г
25	2	1	1	3	6	3	4	а
26	9	3	1	4	4	5	3	б
27	7	2	1	2	5	4	2	в
28	6	3	1	2	9	2	1	г
29	8	3	2	4	7	6	8	а
30	4	4	1	3	3	3	4	б

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В любом наборе исходных данных самая надежная величина, не требующая никакой проверки, является ошибочной.

Третий закон Фингейла

4.1. Способы расчета переходных процессов

Переходным называется процесс, который возникает в электрической цепи после ее коммутации или в результате воздействия на цепь нестационарных электрических сигналов. Этот процесс называют переходным по той причине, что он связывает между собой два стационарных состояния электрической цепи: начальное и конечное.

Переходный процесс протекает в течение определенного времени, которое зависит от запасов энергии в реактивных элементах цепи. Продолжительность переходного процесса может быть весьма незначительной, от долей секунды до долей микросекунды, однако токи и напряжения, которые сопровождают этот процесс, могут существенно превышать токи и напряжения в стационарных режимах, что способно привести к разрушению различных элементов электрических и электронных схем.

В то же время при разумном ограничении напряжений и токов при переходных процессах их можно использовать для формирования различных электрических сигналов. Таким образом, расчет переходных режимов в электрических цепях является очень важным для решения проблемы повышения надежности работы различных электрических и электронных устройств.

Расчет электромагнитных процессов в переходных режимах связан с составлением и решением интегродифференциальных уравнений электрической цепи, составленных при помощи законов Кирхгофа. Такой расчет может выполняться двумя способами: с использованием мгновенных значений напряжений и токов или с использованием их комплексных значений.

Расчет с использованием мгновенных значений напряжений и токов принято называть *классическим методом*, а расчет с использованием комплексных значений — *операторным методом*.

Если воздействие имеет сложную форму, то расчет переходных процессов классическим методом дополняется применением интеграла наложения (интеграла Дюамеля).

При расчете переходных процессов в сложных цепях, которые описываются дифференциальными уравнениями n -го порядка, можно использовать способ замены уравнения n -го порядка n уравнениями первого порядка. Этот способ расчета переходных процессов по мгновенным значениям обычно называют *методом переменных состояния*. При этом под *переменными состояния* понимают токи в индуктивностях и напряжения на емкостях, так как через них можно определить любые другие напряжения и токи в цепи.

Совокупность дифференциальных уравнений для первых производных переменных состояния цепи обычно называют уравнениями состояния. Решение системы дифференциальных уравнений состояния электрических цепей можно выполнять аналитическими или численными методами. Порядок составления и решения уравнений состояния будет рассмотрен ниже на примерах решения различных задач.

При расчете переходных процессов по комплексным значениям используют интегральные преобразования Лапласа, Карсона и Фурье. Метод расчета, основанный на использовании преобразований Лапласа или Карсона, называют *операторным*. Метод расчета, основанный на использовании преобразования Фурье, обычно называют *спектральным* (или *частотным*).

Основным достоинством этих методов является то, что интегродифференциальные уравнения цепи в переходном режиме заменяются алгебраическими уравнениями относительно некоторой комплексной переменной. Такой комплексной переменной в уравнениях Лапласа и Карсона является комплексная частота, называемая *оператором* $p = (c + j\omega)$. В уравнении Фурье используется только мнимая часть этой комплексной частоты, т. е. принимается $p = j\omega$ (т. е. $c = 0$).

Поскольку преобразование Лапласа имеет меньше ограничений, чем преобразование Фурье, в настоящем пособии спектральный метод расчета переход-

ных процессов не рассматривается. Существенных различий методы расчета, основанные на преобразованиях Лапласа и Карсона, не имеют; ниже рассматривается операторный метод, основанный на преобразовании Лапласа.

Переходные процессы связаны с запасами энергии в реактивных элементах цепи. Электромагнитная энергия, которая содержится в индуктивностях и емкостях цепи, определяется по формуле:

$$W_{\text{ЭМ}} = \sum_{k=1}^n (Q_k U_{Ck} + \Psi_k I_{Lk}),$$

где Q_k , U_{Ck} — заряд и напряжение на емкости C_k , соответственно;
 Ψ_k , I_{Lk} — магнитное потокосцепление и ток в индуктивности L_k соответственно;
 k — порядковый номер ветви.

Поскольку при любых изменениях в электрической цепи, связанных с коммутацией, энергия, накопленная в емкостях и индуктивностях, мгновенно не изменяется, то для любого момента времени выполняются условия:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [Q_k(0_-) U_{Ck}(0_-)] &= \sum_{k=1}^n [Q_k(0_+) U_{Ck}(0_+)], \\ \sum_{k=1}^n [\Psi_k(0_-) I_{Lk}(0_-)] &= \sum_{k=1}^n [\Psi_k(0_+) I_{Lk}(0_+)], \end{aligned}$$

где: $Q_k(0_-)$, $U_{Ck}(0_-)$ — заряд и напряжение на емкостях до коммутации;
 $Q_k(0_+)$, $U_{Ck}(0_+)$ — заряд и напряжение на емкостях после коммутации;
 $\Psi_k(0_-)$, $I_{Lk}(0_-)$ — потокосцепление и ток в индуктивностях до коммутации;
 $\Psi_k(0_+)$, $I_{Lk}(0_+)$ — потокосцепление и ток в индуктивностях после коммутации.

Эти же условия должны выполняться для каждой k -й емкости и k -й индуктивности, взятых в отдельности:

$$Q_k(0_-) U_{Ck}(0_-) = Q_k(0_+) U_{Ck}(0_+);$$

$$\Psi_k(0_-) I_{Lk}(0_-) = \Psi_k(0_+) I_{Lk}(0_+).$$

Эти уравнения обычно используются в качестве законов коммутации. Если считать, что в цепи выполняются условия: $Q_k = C_k U_{Ck}$ и $\Psi_k = L_k I_{Lk}$, то законы коммутации можно записать в виде

$$U_{Ck}(0_-) = U_{Ck}(0_+);$$

$$I_{Lk}(0_-) = I_{Lk}(0_+).$$

Эти уравнения показывают, что на момент коммутации емкости C_k можно заменить источниками постоянного напряжения $U_{Ck}(0_-)$, а индуктивности L_k —

источниками постоянного тока $I_{Lk}(0_-)$. Коммутацию с выполнением этих условий называют *корректной*. При корректной коммутации с помощью этих условий можно составить схему замещения для момента времени $t = 0_+$ и найти напряжения на индуктивностях и токи в емкостях после коммутации.

При коммутации в цепях, имеющих узлы с ветвями, содержащими только емкости и источники тока, или контуры с ветвями, содержащими только индуктивности и источники напряжения, можно пользоваться законами коммутации в виде

$$\Psi_k(0_-) = \Psi_k(0_+);$$

$$Q_k(0_-) = Q_k(0_+),$$

согласно которым неизменными при коммутации остаются потокоцепления индуктивностей L_k и заряды емкостей C_k . Очевидно, что в этом случае при коммутации неизменными остаются произведения

$$L_k(0_-)I_{Lk}(0_-) = L_k(0_+)I_{Lk}(0_+);$$

$$C_k(0_-)U_{Ck}(0_-) = C_k(0_+)U_{Ck}(0_+)$$

и, следовательно, допускается мгновенное изменение токов в индуктивностях и напряжений на емкостях. Эти уравнения используют при некорректной коммутации, которая связана с потерями энергии в коммутирующих элементах. Рассмотрим некоторые примеры расчета начальных условий, связанные с корректной и некорректной коммутацией цепей.

Пример 4.1. В цепи, изображенной на рис. 4.1а, размыкается ключ K . Требуется определить напряжения и токи в элементах цепи до размыкания ключа (при $t = 0_-$) и сразу после размыкания (при $t = 0_+$). Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $E = 180$ В, $L = 0,1$ Гн, $C = 10$ мкФ, $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 40$ Ом.

Решение. Вначале определим напряжения и токи в цепи до размыкания ключа K . Схема замещения цепи до коммутации приведена на рис. 4.1б. В этой схеме индуктивность L заменена перемычкой, а емкость C — разрывом цепи. Сопротивление r_2 из схемы исключено, так как оно замкнуто ключом K . Ток в индуктивности до коммутации обусловлен напряжением источника E и сопротивлением r_1 :

$$i_L(0_-) = E/r_1 = 180/20 = 9 \text{ А},$$

а напряжение на емкости равно напряжению источника E :

$$u_C(0_-) = E = 180 \text{ В}.$$

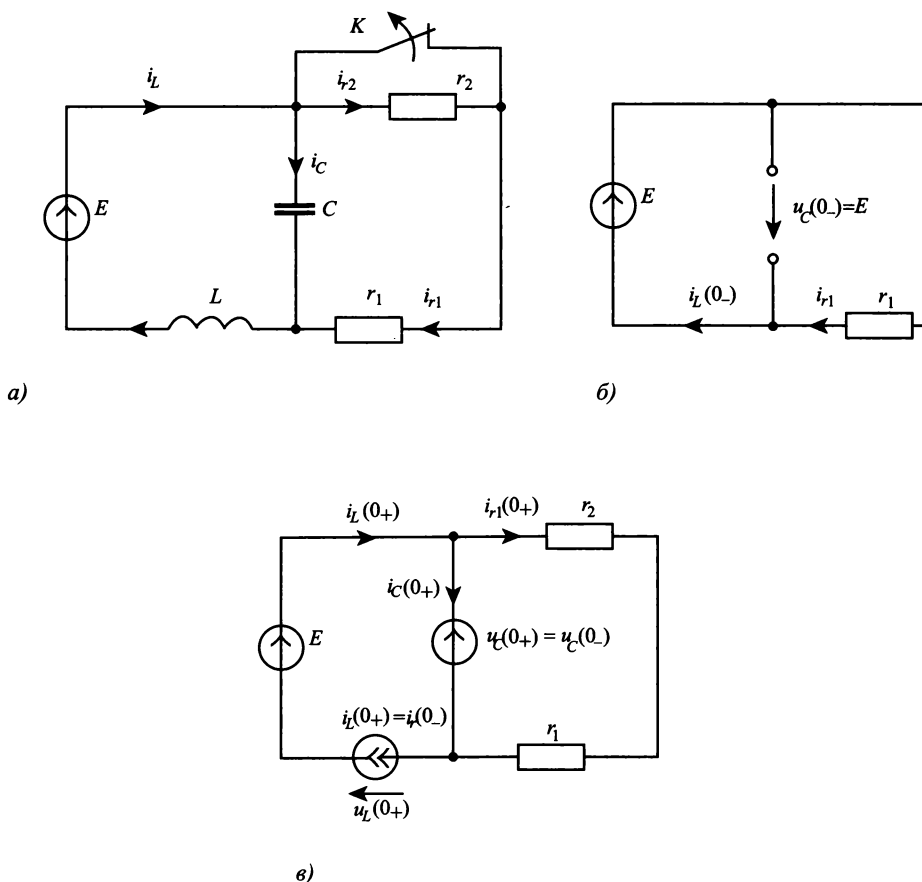


Рис. 4.1. Исходная (а), докоммутационная (б) и расчетная (в) схемы цепи к примеру 4.1

При этом напряжение на индуктивности и ток в емкости равны нулю

$$u_L(0_-) = 0; i_C(0_-) = 0.$$

Ток в сопротивлении r_1 до коммутации имеет значение:

$$i_{r1}(0_-) = i_L(0_-) = 9 \text{ A}.$$

Поскольку коммутация в цепи корректная, то для схемы после коммутации выполняются условия:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 9 \text{ A},$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 180 \text{ B}.$$

Схема замещения цепи сразу после коммутации (для $t = 0_+$) приведена на рис. 4.1б. На этой схеме индуктивность заменена источником тока

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 9 \text{ A},$$

а емкость — источником напряжения

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 180 \text{ В}.$$

Кроме этого, в схему введено сопротивление r_2 , так как ключ K после коммутации исключается.

Схема замещения, приведенная на рис. 4.1б, позволяет определить ток в емкости и напряжение на индуктивности при $t = 0_+$. Поскольку напряжение на емкости $u_C(0_+) = E$ не изменилось в результате коммутации, то ток в ветви с сопротивлениями r_1 , r_2 уменьшился до значения

$$i_{r1}(0_+) = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{180}{60} = 3 \text{ A}.$$

Учитывая, что ток в индуктивности после коммутации не изменился, т. е. остался равным $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 9 \text{ A}$, составим уравнение по первому закону Кирхгофа для узла цепи:

$$i_L(0_+) - i_C(0_+) - i_{r1}(0_+) = 0.$$

Из этого уравнения находим ток в емкости после коммутации:

$$i_C(0_+) = i_L(0_+) - i_{r1}(0_+) = 9 - 3 = 6 \text{ A}.$$

Напряжение на индуктивности после коммутации найдем, составив уравнение по второму закону Кирхгофа для левого контура

$$E - u_C(0_+) + u_L(0_+) = 0,$$

откуда получаем $u_L(0_+) = 0$, т. е. после коммутации напряжение на индуктивности не изменилось и осталось таким же, как до коммутации.

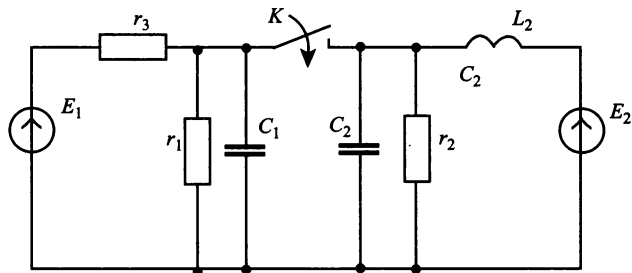
Пример 4.2. Для схемы электрической цепи, изображенной на рис. 4.2а, требуется рассчитать напряжения и токи в элементах до замыкания и сразу после замыкания ключа K . Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E_1 = E_2 = 100 \text{ В}$; $C_1 = C_2 = 1 \text{ мкФ}$; $r_1 = r_2 = r_3 = 100 \text{ Ом}$, $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$.

Решение. Вначале рассчитаем напряжения и токи в элементах цепи до замыкания ключа K . Если ключ K разомкнут, то цепь, изображенная на рис. 4.2а, распадается на две изолированные схемы, как пока-

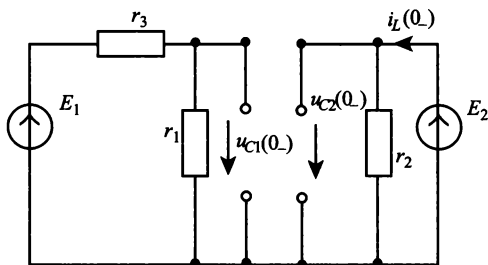
зано на рис. 4.2б. При этом напряжения на емкостях определяются по формулам:

$$u_{C1}(0_-) = u_{r1} = E_1 r_1 / (r_1 + r_3) = 50 \text{ В};$$

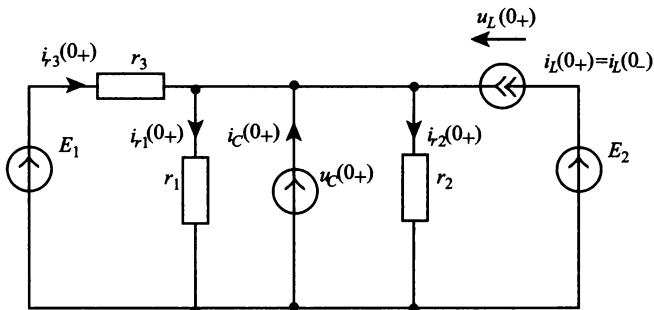
$$u_{C2}(0_-) = E_2 = 100 \text{ В}.$$



а)



б)



в)

Рис. 4.2. Исходная (а), докоммутационная (б) и расчетная (в) схемы цепи к примеру 4.2

Ток в индуктивности имеет значение:

$$i_L(0_-) = i_{r_2} = E/r_2 = 100/100 = 1 \text{ А.}$$

В рассматриваемой цепи при замыкании ключа K образуется узел, в котором сходятся две ветви, содержащие только емкости C_1 , C_2 . Поэтому рассматриваемая коммутация относится к разряду некорректных и, следовательно, при ее расчете необходимо использовать условие для неизменности зарядов емкостей, т. е. считать, что:

$$Q_{C1}(0_-) + Q_{C2}(0_-) = Q_C(0_+)$$

или

$$C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-) = (C_1 + C_2) u_C(0_+),$$

откуда находим напряжение на емкостях после коммутации (рис. 4.2 в):

$$u_C(0_+) = \frac{C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-)}{C_1 + C_2} = \frac{(50 + 100)10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = 75 \text{ В.}$$

Напряжение на индуктивности до коммутации равно нулю:

$$u_L(0_-) = 0.$$

Для определения напряжения на индуктивности сразу после коммутации составим уравнение по второму закону Кирхгофа для внешнего контура, пользуясь схемой замещения, изображенной на рис. 4.2в:

$$E_2 - u_C(0_+) - u_L(0_+) = 0.$$

Из этого уравнения находим напряжение на индуктивности после коммутации:

$$u_L(0_+) = E_2 - u_C(0_+) = 100 - 75 = 25 \text{ В.}$$

Пользуясь найденными значениями напряжений, можно вычислить токи в сопротивлениях цепи:

$$i_{r1}(0_+) = i_{r2}(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{r_1} = 75/100 = 0,75 \text{ А;}$$

$$i_{r3}(0_+) = \frac{E_1 - u_C(0_+)}{r_3} = (100 - 75)/100 = 0,25 \text{ А.}$$

Для определения тока в емкости после коммутации воспользуемся первым законом Кирхгофа для схемы замещения, приведенной на рис. 4.2в:

$$i_C(0_+) = i_{r1}(0_+) + i_{r2}(0_+) - i_L(0_+) - i_{r3}(0_+) = 0,25 \text{ А.}$$

4.2. Расчет переходных процессов по мгновенным значениям

В этом разделе будут рассмотрены три метода расчета переходных процессов по мгновенным значениям: классический, при помощи интеграла наложения и переменных состояния. Каждый метод будет сопровождаться краткими пояснениями, примерами решения задач и типовыми заданиями.

Классический метод. При расчете переходных процессов классическим методом составляют систему интегродифференциальных уравнений цепи, используя для этого законы Кирхгофа и уравнения для отдельных элементов:

$$u_r = r i_r; u_L = L di_L/dt; i_C = C du_C/dt.$$

Затем эту систему уравнений путем замены переменных сводят к дифференциальному уравнению n -го порядка относительно искомой величины, в качестве которой обычно используют одну из переменных состояния, т. е. тока в любой индуктивности или напряжения на одной из емкостей. Общее решение полученного линейного дифференциального уравнения ищут в виде суммы двух членов:

$$i_L = i_{Lсв} + i_{Lпр}$$

или

$$u_C = u_{Cсв} + u_{Cпр},$$

где $i_{Lсв}$, $u_{Cсв}$ — соответствуют общим решениям однородных уравнений (т. е. без независимых источников энергии) и поэтому называются *свободными* составляющими тока в индуктивности или напряжения на емкости;

$i_{Lпр}$, $u_{Cпр}$ — соответствуют частным решениям неоднородных уравнений (т. е. уравнений с независимыми источниками энергии) и поэтому называются *принужденными* составляющими тока в индуктивности или напряжения на емкости.

Решения для свободных составляющих ищут в виде суммы n слагаемых:

$$i_{Lсв} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$$

или

$$u_{Cсв} = \sum_{k=1}^n B_k e^{p_k t},$$

где A_k , B_k — постоянные интегрирования однородных дифференциальных уравнений, которые определяются из начальных условий при помощи законов коммутации цепи;

p_k — корни соответствующих характеристических уравнений цепи, которые получают из дифференциальных уравнений путем замены производных операторами p_k .

Поскольку для линейных электрических цепей с потерями корни характеристических уравнений имеют отрицательные вещественные части, то с увеличением времени t все свободные составляющие решений стремятся к нулю, т. е. затухают. Это связано с тем, что запасы энергии в реактивных элементах ограничены, и при наличии потерь в цепи они уменьшаются, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$.

При этом в решениях остаются только *принужденные составляющие*, которые характеризуют *установившийся режим* после коммутации. Для определения принужденных составляющих рассматривают установившийся режим после коммутации (т. е. при $t \rightarrow \infty$).

Таким образом, расчет переходных процессов классическим методом сводится к определению трех величин:

- постоянных интегрирования A_k (или B_k);
- корней характеристического уравнения p_k ;
- принужденных составляющих i_{Lnp} или u_{Cnp} .

Рассмотрим примеры расчета переходных процессов классическим методом.

Пример 4.3. В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 4.3а, замыкается ключ K . Требуется определить ток в индуктивности L и построить его зависимость от времени t , если параметры элементов цепи имеют следующие значения: $E = 30$ В; $r_1 = r_2 = r_3 = 10$ Ом; $L = 0,1$ Гн.

Решение. Рассматривая схему цепи, приведенную на рис. 4.3а, можно сделать следующие выводы:

- 1) в схеме имеется один реактивный элемент L , поэтому дифференциальное уравнение цепи будет иметь первый порядок;
- 2) при коммутации цепи сопротивление r_3 замыкается ключом K , поэтому в дальнейшем переходном процессе не участвует;
- 3) переходный процесс связан с изменением энергии, запасенной в индуктивности L , при изменении структуры цепи, обусловленной замыканием сопротивления r_3 .

Составим систему уравнений цепи по законам Кирхгофа, для схемы, полученной после коммутации (рис. 4.3б):

$$-i_1 + i_2 + i_L = 0;$$

$$u_1 + u_2 = E;$$

$$u_2 + u_L = 0.$$



Выполнив взаимные подстановки, получим дифференциальное уравнение для тока в индуктивности

$$\frac{L(r_1 + r_2)}{r_2} \frac{di_L}{dt} + r_1 i_L = E.$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} i_L = \frac{Er_2}{L(r_1 + r_2)} \quad \text{или} \quad \frac{di_L}{dt} + 50i_L = 150.$$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения состоит из двух частей:

$$i_L = i_{Lcв} + i_{Lnp},$$

где принужденная составляющая тока определяется в установившемся режиме после коммутации и равна (рис. 4.3в):

$$i_{Lnp} = E/r_1 = 30/10 = 3 \text{ A}.$$

Для определения свободной составляющей тока $i_{Lcв}$ положим правую часть дифференциального уравнения равной нулю, тогда получим:

$$di_{Lcв}/dt + 50i_{Lcв} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$i_{Lcв} = Ae^{pt}.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению для свободной составляющей тока, имеет вид: $p + 50 = 0$, откуда находим $p = -50 \text{ с}^{-1}$. Модуль этой величины характеризует скорость уменьшения свободной составляющей тока и называется коэффициентом затухания. Величина, обратная коэффициенту затухания, имеет размерность времени и называется *постоянной времени цепи*

$$\tau_L = |1/p| = 0,02 \text{ с}.$$

Таким образом, полный ток в индуктивности можно записать в виде:

$$i_L = i_{Lnp} + Ae^{-t/\tau} = (3 + Ae^{-50t}).$$

При определении постоянной интегрирования A воспользуемся первым законом коммутации, согласно которому $i_L(0_-) = i_L(0_+)$. Для вычисления тока $i_L(0_-)$ построим схему, изображенную на рис. 4.3в. На этой схеме индуктивность L заменена перемычкой, поэтому ток в ней рассчитаем по методу эквивалентного источника, преобразуя ветви с источником напряжения E и сопротивлениями r_1 , r_2 к эквивалентному источнику с параметрами:

$$E_r = Er_2/(r_1 + r_2) = 15 \text{ В};$$

$$r_r = r_3 + r_1r_2/(r_1 + r_2) = 15 \text{ Ом}.$$

Ток в индуктивности до коммутации (т. е. при $t = 0_-$) определяется по формуле:

$$i_L(0_-) = E_r/r_r = 1 \text{ A}.$$

Подставив найденное значение тока $i_L(0_-)$ в уравнение для полного тока в индуктивности, получим:

$$A = i_L(0_-) - i_{Lnp} = 1 - 3 = -2 \text{ A.}$$

Окончательное решение для тока в индуктивности представим в виде:

$$i_L = (3 - 2e^{-50t}) \text{ A.}$$

График тока в индуктивности приведен на рис. 4.4. При $t = 3\tau$ значение тока i_L отличается от принужденного всего на 5%. Поэтому принято считать, что переходный процесс практически заканчивается через интервал времени $\Delta t = 3\tau$. Из графика видно, что ток в индуктивности монотонно изменяется от начального значения $i_L(0_-)$ до конечного значения, равного $i_{Lnp} = 3 \text{ A}$.

Располагая током в индуктивности, найдем напряжения и токи в других ветвях.

Напряжение на индуктивности определим по формуле:

$$u_L = L di_L/dt = (-AL/\tau)e^{-t/\tau} = 10e^{-50t} \text{ B.}$$

График напряжения на индуктивности приведен на рис. 4.4. Из этого графика видно, что напряжение на индуктивности в результате коммутации скачком изменяется от начального значения $u_L(0_-) = 0$ до значения $u_L(0_+) = 10 \text{ B}$. После этого оно монотонно убывает до значения $u_L(\infty) = 0$.

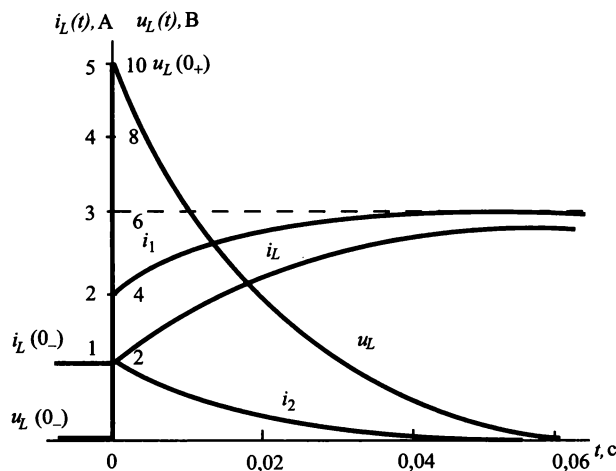


Рис. 4.4. Графики напряжения и токов в цепи к примеру 4.3

Токи в сопротивлениях определяем по формулам:

$$i_2 = u_L / r_2 = e^{-50t} \text{ A};$$

$$i_1 = i_L + i_2 = (3 - 2e^{-50t}) + e^{-50t} = (3 - e^{-50t}) \text{ A}.$$

Графики токов в сопротивлениях r_1 , r_2 также приведены на рис. 4.4.

Пример 4.4. В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 4.5а, требуется определить напряжение на емкости C после размыкания ключа K . Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $J = 1 \text{ A}$; $r_1 = r_2 = r_3 = 100 \text{ Ом}$; $C = 10 \text{ мкФ}$.

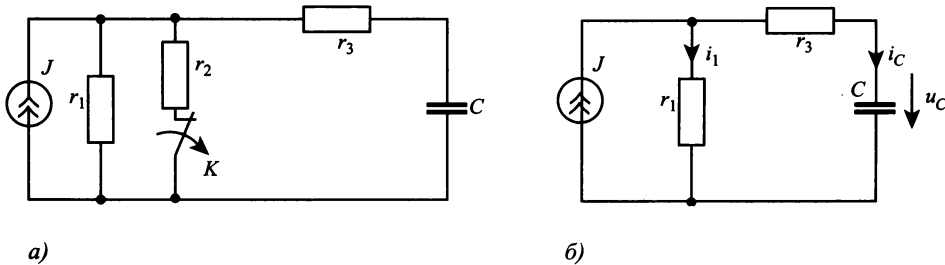


Рис. 4.5. Исходная (а) и расчетная (б) схемы к примеру 4.4

Решение. В представленной на рис. 4.5а схеме при размыкании ключа K происходит изменение напряжения на емкости C . Найдем начальное и конечное напряжения на емкости. Начальное напряжение на емкости определяется током источника через два параллельно включенных сопротивления r_1 , r_2 :

$$u_C(0_-) = Jr_1 r_2 / (r_1 + r_2) = 1 \cdot 50 = 50 \text{ В}.$$

Конечное напряжение, равное принужденному значению напряжения на емкости, определяется током источника только через сопротивление r_1 :

$$u_{Cnp} = Jr_1 = 100 \text{ В}.$$

Таким образом, переходный процесс в этой схеме связан с перезарядом емкости C от начального напряжения $u_C(0_-)$ до конечного напряжения u_{Cnp} . При этом как в начальном, так и в конечном режимах ток через емкость C не протекает, поэтому напряжение на сопротивлении r_3 , которое включено последовательно с емкостью C , существует только при перезаряде емкости.

После размыкания ключа K схема примет вид, показанный на рис. 4.5б. Составим для этой схемы уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i_1 + i_C &= J; \\ -i_1 r_1 + i_C r_3 + u_C &= 0. \end{aligned}$$

После подстановки в эти уравнения напряжения на емкости $i_C = C du_C/dt$, получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$C(r_1 + r_3) \frac{du_C}{dt} + u_C = r_1 J.$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$u_C = u_{Cсв} + u_{Cпр}.$$

Свободную составляющую напряжения на емкости определим как

$$u_{Cсв} = Ae^{pt},$$

где p — корень характеристического уравнения

$$C(r_1 + r_3)p + 1 = 0,$$

откуда находим $p = -1/[C(r_1 + r_3)] = -500 \text{ с}^{-1}$.

Постоянная времени цепи равна величине, обратной модулю p , поэтому

$$\tau_C = |1/p| = 0,002 \text{ с}.$$

Напряжение на емкости найдем в результате сложения свободной и принужденной составляющих:

$$u_C = u_{Cсв} + u_{Cпр} = Ae^{-500t} + 100.$$

Постоянную интегрирования A найдем при помощи второго закона коммутации, полагая, что при $t = 0_+$ напряжение на емкости имеет значение

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 50 \text{ В},$$

откуда находим, что $A = u_C(0_-) - u_{Cпр} = -50 \text{ В}$.

Таким образом, получаем окончательное значение напряжения на емкости

$$u_C = 100 - 50 e^{-500t} \text{ В}.$$

График изменения напряжения на емкости приведен на рис. 4.6. Из этого графика видно, что напряжение на емкости монотонно возрастает от начального значения $u_C(0_-) = 50 \text{ В}$ до конечного $u_{Cпр} = 100 \text{ В}$. Ток в емкости определяется по формуле

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{r_1^2 J}{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)} e^{-t/\tau_C} = 0,25 e^{-500t} \text{ А}.$$

График тока в емкости приведен на том же рис. 4.6. В отличие от напряжения ток в емкости при коммутации изменяется скачком от начального значения $i_C(0_-) = 0$ до значения $i_C(0_+) = 0,25$ А. После этого ток в емкости монотонно убывает до значения $i_C(\infty) = 0$.

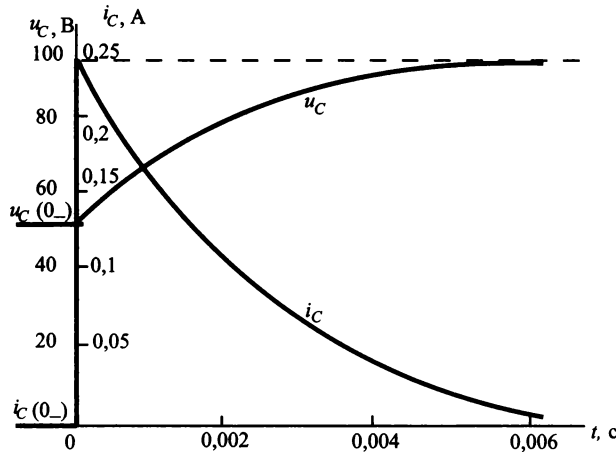


Рис. 4.6. Графики напряжения и тока в емкости к примеру 4.4

В рассмотренных выше примерах рассматривались случаи корректной коммутации, при которой напряжения на емкостях и токи в индуктивностях не менялись при коммутации скачком, т. е. мгновенно. Однако, как было показано в разделе 4.1, возможны случаи некорректной коммутации, при которой эти величины меняются мгновенно. Рассмотрим пример такой коммутации в цепи первого порядка.

Пример 4.5. В цепи, схема которой приведена на рис. 4.7а, размыкается ключ K , который шунтировал катушку индуктивности L_2 . Требуется определить ток в цепи после размыкания ключа K , если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $r_1 = r_2 = 100$ Ом; $L_1 = L_2 = 0,1$ Гн; $E = 100$ В.

Решение. Из рассмотрения схемы, изображенной на рис. 4.7а, следует, что до коммутации тока в индуктивности L_2 не было, так как она шунтировалась ключом K , поэтому $i_2(0_-) = 0$. Однако после размыка-

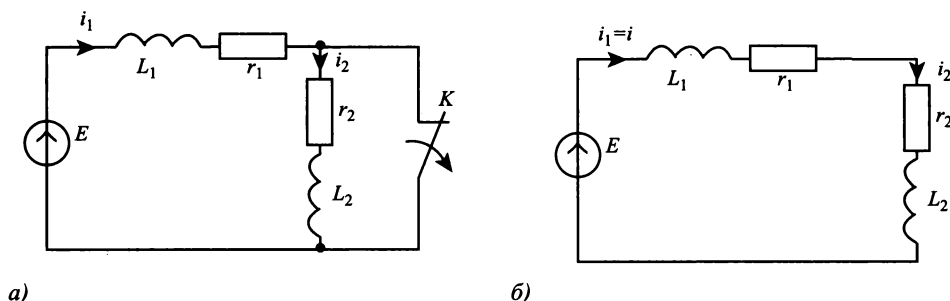


Рис. 4.7. Исходная (а) и расчетная (б) схемы цепи к примеру 4.5

ния ключа K ток в индуктивности L_2 , будет равен току в индуктивности L_1 , который до коммутации имел значение $i_1(0_-) = E/r_1 = 1$ А. Таким образом, в результате коммутации токи в индуктивностях L_1 и L_2 должны мгновенно уравниваться и принять значение $i_1(0_+) = i_2(0_+) = i(0_+)$, которое определяется законом коммутации:

$$L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = (L_1 + L_2) i(0_+);$$

отсюда следует, что

$$i(0_+) = \frac{L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-)}{L_1 + L_2} = 0,5 \text{ А.}$$

Схема цепи, полученная после коммутации, приведена на рис. 4.7б. Токи в индуктивностях после коммутации изменяются одинаковым образом и определяются уравнением

$$i = i_1 = i_2 = i_{св} + i_{np} = A e^{pt} + i_{np}.$$

Значение принужденного тока в индуктивностях определим по формуле:

$$i_{np} = E/(r_1 + r_2) = 0,5 \text{ А.}$$

Для определения свободной составляющей тока в индуктивностях запишем уравнение для схемы, изображенной на рис. 4.7б:

$$i(r_1 + r_2) + L di/dt = E.$$

Характеристическое уравнение получим, заменив производную di/dt на p :

$$(r_1 + r_2) + pL = 0;$$

отсюда находим единственный корень:

$$p = -(r_1 + r_2)/L = -2000 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянная времени цепи имеет значение $\tau_L = |1/p| = 5 \cdot 10^{-4}$ с.

Для определения постоянной интегрирования воспользуемся найденным выше значением тока $i(0_+) = 0,5$ А и выражением для полного тока в цепи при $t = 0_+$

$$i(0_+) = A + i_{np},$$

откуда находим, что $A = i(0_+) - i_{np} = 0,5 - 0,5 = 0$. Таким образом, получено, что $i_{св} = 0$ и, следовательно, переходной процесс в схеме при выбранных параметрах элементов отсутствует, так как в результате коммутации ток в цепи мгновенно принимает новое значение и в дальнейшем не изменяется, т. е.

$$i = i_{np} = 0,5 \text{ А.}$$

Это отражено на графике тока в цепи, изображенном на рис. 4.8.

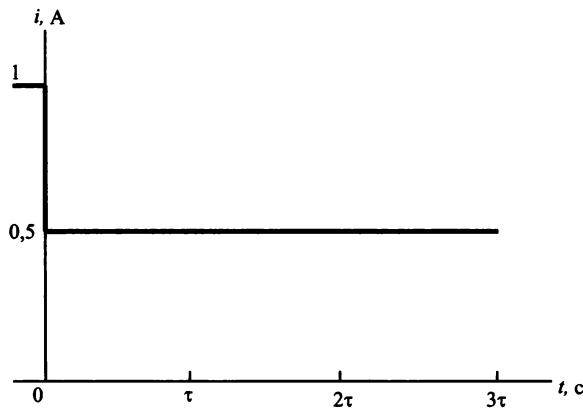


Рис. 4.8. График тока в цепи к примеру 4.5

Рассмотренный пример показывает, что переходный процесс в схеме может отсутствовать несмотря на наличие в ней реактивных элементов, если перераспределение энергии между элементами цепи происходит в момент коммутации.

Интерес представляет энергия, которая расходуется в цепи при коммутации. До коммутации цепи энергия была накоплена только в индуктивности L_1 и имела значение

$$W(0_-) = L_1 i_1^2(0_-)/2 = 0,1 \cdot 1/2 = 0,05 \text{ Дж.}$$

После коммутации энергия будет содержаться в двух индуктивностях L_1 , L_2 , включенных последовательно с общим током $i(0_+) = 0,5$ А, поэтому энергия в цепи после коммутации имеет значение:

$$W(0_+) = (L_1 + L_2)i_2(0_+)/2 = 0,2 \cdot 0,25/2 = 0,025 \text{ Дж.}$$

Таким образом, в результате коммутации происходит мгновенное уменьшение энергии в два раза. Эти потери энергии в цепи называются коммутационными и происходят в элементах коммутации — механических или электронных ключах. Понятно, что если потери энергии в элементах коммутации становятся очень большими, то это снижает общий КПД устройства и может сопровождаться разрушением элементов коммутации — обгоранием контактов механических коммутирующих элементов или пробоем электронных элементов, транзисторов или тиристоров. Для защиты элементов коммутации в подобных схемах принимаются специальные меры, предотвращающие мгновенные изменения тока в цепи с индуктивностью или напряжения в цепи с емкостью.

В рассмотренных выше примерах были приведены расчеты переходных процессов в простейших цепях первого порядка. Перейдем теперь к рассмотрению сложных схем, описываемых дифференциальными уравнениями более высоких порядков.

Цепи второго порядка содержат не менее двух реактивных элементов. Такими элементами могут быть две индуктивности, две емкости или индуктивность и емкость. Кроме этого, в состав цепи могут входить сопротивления и источники энергии.

В зависимости от видов реактивных элементов, включенных в цепи, решение задачи также следует искать для переменных состояния, т. е. для токов в индуктивностях и напряжений на емкостях. Форма записи искомых решений для цепей второго порядка может иметь следующий вид:

$$i_L = i_{Lnp} + i_{Lсв};$$

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв},$$

где $i_{Lсв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$ и $u_{Cсв} = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}$ — свободные составляющие тока в индуктивности и напряжения на емкости;

i_{Lnp} и u_{Cnp} — принужденные составляющие тока в индуктивности и напряжения на емкости;

A_1 , A_2 — постоянные интегрирования дифференциальных уравнений цепи;

p_1 , p_2 — корни характеристического уравнения цепи.

Пример 4.6. Для схемы, изображенной на рис. 4.9а, требуется определить значения переменных состояния i_L и u_C при размыкании ключа K . Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E = 40 \text{ В}$; $L = 1 \text{ Гн}$; $C = 3,33 \text{ мФ}$; $r = 40 \text{ Ом}$.

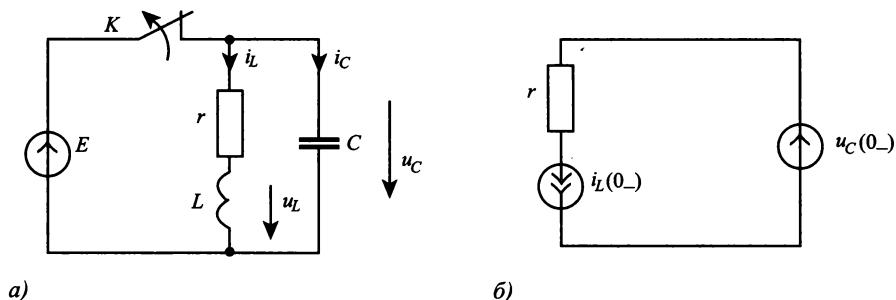


Рис. 4.9. Исходная (а) и расчетная (б) схемы к примеру 4.6

Решение. В рассматриваемой схеме источник напряжения E в результате коммутации отключается от электрической цепи и в последующем переходном процессе не участвует. Развитие переходного процесса происходит только за счет энергии, запасенной в индуктивности L и емкости C к моменту коммутации цепи.

Прежде всего определим начальные и конечные условия для рассматриваемых переменных состояния цепи. Очевидно, что начальное напряжение на емкости C и начальный ток в индуктивности L имеют значения

$$u_C(0_-) = E = 40 \text{ В}; i_L(0_-) = E/r = 1 \text{ А}.$$

Конечные значения этих величин равны нулю, так как при отключении цепи от источника питания энергия, накопленная в реактивных элементах, израсходуется в сопротивлении r , поэтому при $t \rightarrow \infty$, получим

$$u_{Cnp} = i_{Lnp} = 0.$$

Для определения свободных составляющих $i_{Lсв}$, $u_{Cсв}$ необходимо найти корни p_1 , p_2 характеристического уравнения и постоянные интегрирования A_1 , A_2 . Характеристическое уравнение цепи можно получить, приравняв к нулю входное операторное сопротивление (или входную операторную проводимость) цепи, в котором индуктивность заменена операторным сопротивлением pL , а емкость — операторным

сопротивлением $1/(pC)$. При этом совершенно безразлично, какая из ветвей цепи используется для расчета операторного сопротивления*.

Поскольку цепь, изображенная на рис. 4.9б, состоит всего из одного контура, то ее входное операторное сопротивление имеет значение:

$$Z(p) = r + pL + 1/(pC).$$

Приравняв это уравнение к нулю, получим

$$p^2LC + pCr + 1 = 0,$$

откуда, после подстановки численных значений параметров, находим

$$p^2 + 40p + 300 = 0.$$

Это уравнение является характеристическим, и его решение позволяет найти корни:

$$p_1 = -10 \text{ 1/с}; p_2 = -30 \text{ 1/с}.$$

Этим корням соответствуют постоянные времени

$$\tau_1 = 0,1 \text{ с}; \tau_2 = 0,033 \text{ с}.$$

Таким образом, свободную составляющую для тока в индуктивности, которая совпадает с полным током, можно записать в виде

$$i_L = i_{LC\phi} + i_{Lnp} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{-10t} + A_2 e^{-30t},$$

где учтено, что $i_{Lnp} = 0$.

Аналогичное уравнение можно записать для напряжения на емкости:

$$u_C = u_{CC\phi} + u_{Cnp} = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} = B_1 e^{-10t} + B_2 e^{-30t},$$

где также учтено, что $u_{Cnp} = 0$.

Постоянные интегрирования в этих уравнениях определим, используя законы коммутации. По первому закону коммутации

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = E/r = 1 \text{ А};$$

откуда находим: $A_1 + A_2 = 1 \text{ А}$.

По второму закону коммутации

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = E = 40 \text{ В}.$$

Составим уравнение для контура по второму закону Кирхгофа

$$u_C(0_+) - i_L(0_+)r - u_L(0_+) = 0, \text{ откуда находим:}$$

* Теоретическое обоснование такого способа составления характеристического уравнения цепи приводится в разделе, посвященном расчету переходных процессов операторным методом.

$$u_L(0_+) = u_C(0_+) - i_L(0_+)r = 40 - 40 = 0.$$

Используя найденное ранее значение тока в индуктивности, получим

$$u_L(0_+) = (Ldi_L/dt)|_{t=0} = 0,$$

откуда находим:

$$p_1A_1 + p_2A_2 = 0.$$

Совместное решение уравнений, составленных по законам коммутации, позволяет определить значение постоянных интегрирования:

$$A_1 = p_2/(p_2 - p_1) = 1,5;$$

$$A_2 = 1 - A_1 = -p_1/(p_2 - p_1) = -0,5.$$

После подстановки постоянных интегрирования находим значение тока в индуктивности:

$$i_L = 1,5e^{-10t} - 0,5e^{-30t} \text{ A.}$$

График тока в индуктивности приведен на рис. 4.10.

Напряжение на индуктивности определим, пользуясь формулой:

$$u_L = Ldi_L/dt = L(p_1A_1e^{p_1t} + p_2A_2e^{p_2t}) = -15e^{-10t} + 15e^{-30t} \text{ В.}$$

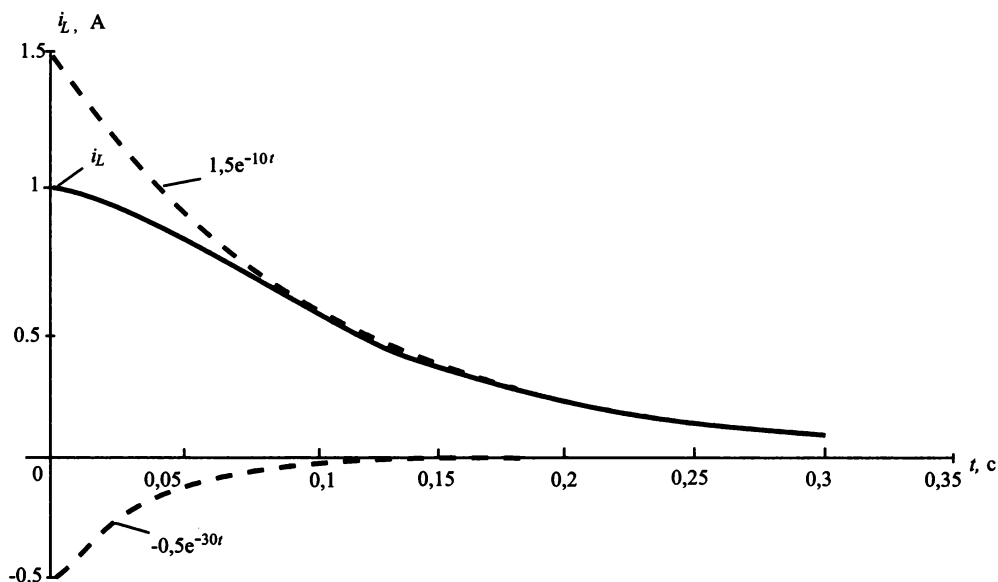


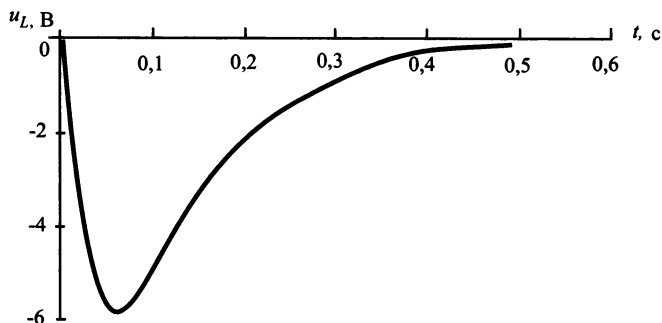
Рис. 4.10а. График тока в индуктивности к примеру 4.6

Напряжение на емкости найдем по формуле:

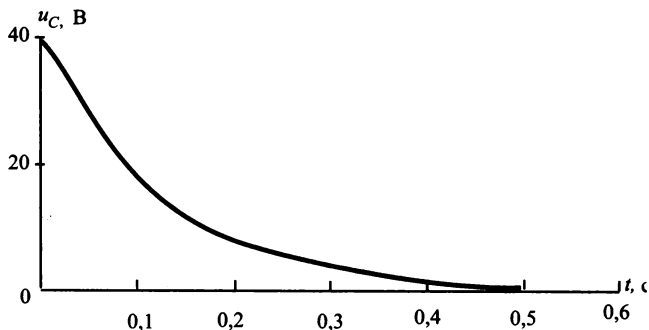
$$u_C = i_L r + u_L = 45e^{-10t} - 5e^{-30t} \text{ В.}$$

Таким образом, постоянные интегрирования имеют значения $B_1 = 45$; $B_2 = -5$.

Графики напряжений на индуктивности и емкости приведены на рис. 4.10 б, в. Из этих графиков следует, что напряжение на индуктивности имеет отрицательный знак, так как ток в индуктивности монотонно уменьшается. При этом максимальное значение напряжения на индуктивности соответствует максимальной скорости уменьшения тока в цепи.



б)



в)

Рис. 4.10б, в. Графики напряжений на индуктивности (б) и емкости (в) к примеру 4.6

Пример 4.7. При условиях примера 4.6 требуется определить ток и напряжение на индуктивности, если емкость C уменьшена до значения $0,5$ мФ, а остальные параметры не изменились.

Решение. При меньшем значении емкости C произойдет изменение корней характеристического уравнения. Эти корни станут комплексными и сопряженными:

$$p_1 = \beta + j\omega_c = -20 + j40;$$

$$p_2 = \beta - j\omega_c = -20 - j40;$$

где $\beta = -20$ называется коэффициентом затухания; $\omega_c = 40$ – угловая частота собственных колебаний в контуре.

При наличии комплексных корней характеристического уравнения решение для тока в индуктивности можно представить в виде:

$$i_L = i_{Lcs} = Ae^{\beta t} \sin(\omega_c t + \psi_i),$$

где A и ψ_i — являются постоянными интегрирования, при этом постоянная A характеризует амплитуду тока, а постоянная ψ_i — его начальную фазу.

Напряжение на индуктивности также будет иметь другой вид:

$$\begin{aligned} u_L &= L di_L / dt = LAe^{\beta t} [\omega_c \cos(\omega_c t + \psi_i) + \beta \sin(\omega_c t + \psi_i)] = \\ &= LA\sqrt{\omega_c^2 + \beta^2} \cos(\omega_c t + \psi_i + \varphi), \end{aligned}$$

где $\tan \varphi = \beta / \omega_c = -2$, откуда находим сдвиг фаз $\varphi = -63^\circ 30'$.

Используя те же начальные условия, которые приведены в примере 4.6, запишем систему уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$i_L(0_+) = A \sin \psi = 1;$$

$$u_L(0_+) = LA(\beta \sin \psi_i + \omega_c \cos \psi_i) = 0.$$

Из второго уравнения находим, что $\tan \psi_i = -\omega_c / \beta = 2$, откуда получаем $\psi_i = 63^\circ 30'$ (или $\psi_i = 1,108$ рад). После этого из первого уравнения получаем: $A = 1,117$.

Таким образом, окончательное решение для тока в индуктивности имеет вид:

$$i_L = 1,117e^{-20t} \sin(40t + 63^\circ 30') \text{ A.}$$

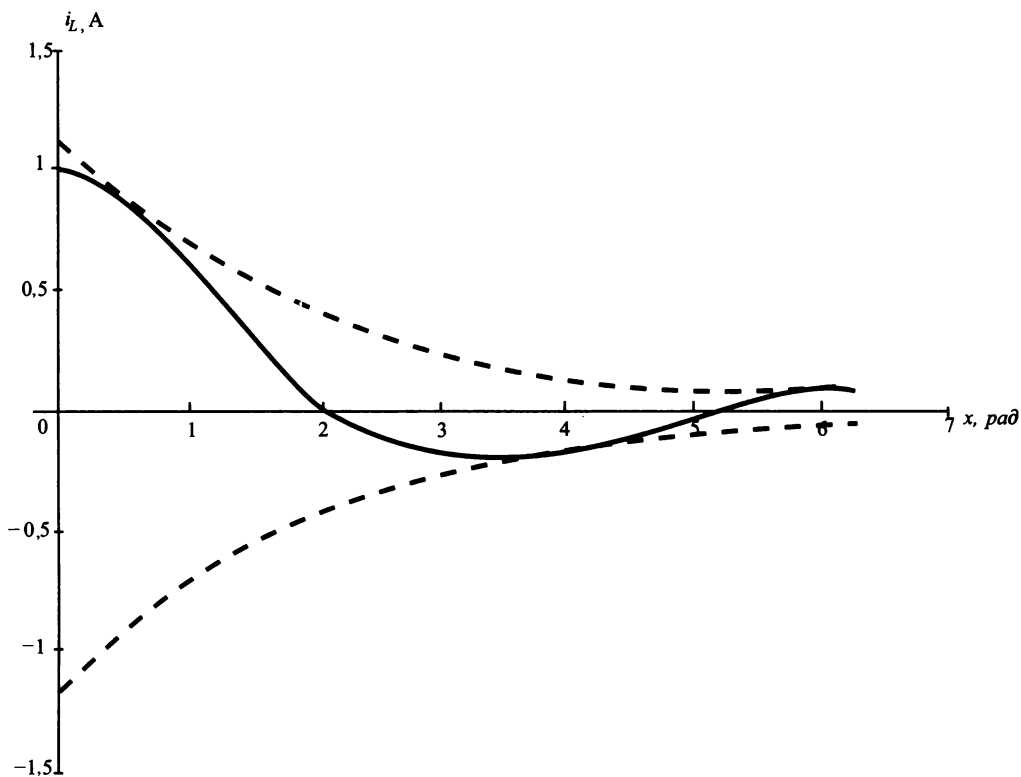
График тока в индуктивности изображен на рис. 4.11а. При построении графика тока в индуктивности использована обобщенная переменная $x = \omega_c t = 40t$, измеряемая в радианах, поэтому значение тока записано в виде:

$$i_L = 1,117e^{-0,5x}\sin(x + 1,108) \text{ A},$$

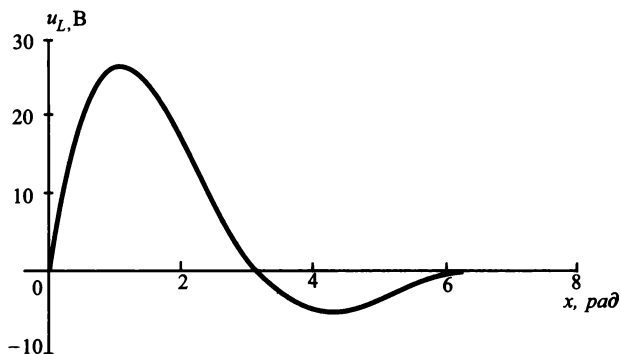
где $x = 40t \text{ рад}$.

При этом ток принимает нулевые значения, если выполняются условия

$$x + 1,108 = n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$



а)



б)

Рис. 4.11. Графики тока (а) и напряжения на индуктивности (б) для примера 4.7

Так, например, ток будет равен нулю при $x = \pi - 1,108 = 2,032 \text{ рад}$ или $x = 2\pi - 1,108 = 5,172 \text{ рад}$.

После подстановки числовых значений параметров находим напряжение на индуктивности:

$$u_L = 1,117 e^{-20t} [40 \cos(40t + 63^\circ 30') - 20 \sin(40t + 63^\circ 30')] = \\ = 50 e^{-20t} \sin 40t = 50 e^{-0,5x} \sin x \text{ В.}$$

Аналогичным образом, напряжение u_L принимает нулевые значения при выполнении условия $x = m\pi$. Так, например, напряжение на индуктивности будет равно нулю при $x = 0; 3,14; 6,28; \dots \text{рад}$. График напряжения на индуктивности приведен на рис. 4.11б.

Пример 4.8. Для схемы электрической цепи, которая изображена на рис. 4.12, требуется найти токи во всех ветвях и напряжения на емкости и индуктивности после замыкания ключа K . Построить зависимости токов и напряжений от времени при условии, что параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E = 180 \text{ В}$; $C = 10 \text{ мкФ}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $r_1 = 20 \text{ Ом}$; $r = 40 \text{ Ом}$.

Решение.

1 Вначале выберем направления токов в ветвях цепи и обозначим их, как показано на рис. 4.12. Затем найдем начальные условия на элементах схемы до замыкания ключа K . Ток в индуктивности L до коммутации имел значение:

$$i_L(0_-) = i_r(0_-) = E/(r_1 + r) = 180/(20 + 40) = 3 \text{ А.}$$

Ток в емкости до коммутации отсутствовал, поэтому $i_C(0_-) = 0$.

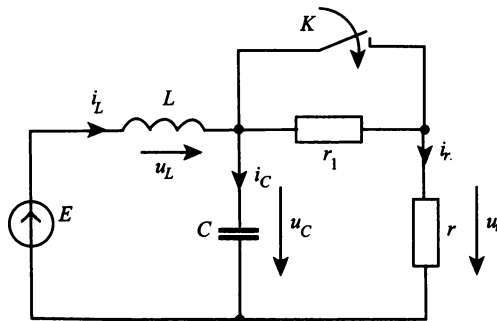


Рис. 4.12. Исходная схема к примеру 4.3

Напряжение на индуктивности также отсутствовало, так как в цепи протекает постоянный ток, поэтому $u_L(0_-) = 0$.

Напряжение на емкости было равно напряжению источника:

$$u_C = E = 180 \text{ В.}$$

2 Составим уравнения цепи после замыкания ключа К, используя для этого уравнения Кирхгофа:

$$u_C + u_L = E;$$

$$i_L = i_C + i_r,$$

где $u_C = u_r$; $i_r = u_C/r$.

3 Составим дифференциальное уравнение для напряжения u_C , пользуясь вторым уравнением Кирхгофа:

$$u_C + u_L = u_C + L di_L/dt = E.$$

Произведя замену тока i_L в этом уравнении на

$$i_L = i_C + i_r = C du_C/dt + u_C/r,$$

получим дифференциальное уравнение для напряжения u_C :

$$u_C + \frac{L}{r} \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = E.$$

Разделив обе части этого уравнения на произведение LC , получим приведенное дифференциальное уравнение второго порядка для напряжения u_C :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{rC} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC}.$$

4 Решение этого дифференциального уравнения будем искать в виде

$$u_C = u_{Cсв} + u_{Cпр},$$

где $u_{Cсв}$ — свободная составляющая напряжения, которая определяется решением однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 u_{Cсв}}{dt^2} + \frac{1}{rC} \frac{du_{Cсв}}{dt} + \frac{u_{Cсв}}{LC} = 0;$$

$u_{Cпр}$ — принужденная составляющая напряжения на емкости, равная значению напряжения в установившемся режиме после коммутации:

$$u_{Cпр} = E.$$

Решение однородного дифференциального уравнения позволяет найти свободную составляющую напряжения

$$u_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где A_1, A_2 — постоянные интегрирования;

p_1, p_2 — корни характеристического уравнения $p^2 + p/rC + 1/LC = 0$.

Решение характеристического уравнения позволяет найти корни

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2rC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2rC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

После подстановки численных значений параметров цепи, найдем значения корней характеристического уравнения:

$$p_1 = -2000 \text{ с}^{-1}; p_2 = -500 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку корни характеристического уравнения отрицательные, вещественные и разные, то можно сделать вывод, что переходный процесс носит затухающий аperiodический характер.

Таким образом, полное решение дифференциального уравнения для напряжения на емкости имеет вид:

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{-2000t} + A_2 e^{-500t} + 180.$$

5 Теперь перейдем к определению постоянных интегрирования A_1, A_2 . Для этого необходимо составить два уравнения, используя законы коммутации цепи. Первое уравнение можно получить из выражения для $u_C(0_+) = E$:

$$A_1 + A_2 = 0.$$

Для составления второго уравнения найдем ток в емкости i_C непосредственно после замыкания ключа K , т. е. определим значение $i_C(0_+)$. Для этого составим уравнение Кирхгофа для токов в цепи при условии $t = 0_+$:

$$i_C(0_+) = i_L(0_+) - i_r(0_+),$$

где $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 3 \text{ А}$; $i_r(0_+) = u_C(0_+)/r = 180/40 = 4,5 \text{ А}$.

Подставляя значения токов $i_L(0_+)$, $i_r(0_+)$, найдем ток

$$i_C(0_+) = 3 - 4,5 = -1,5 \text{ А},$$

что позволяет сделать вывод о мгновенном изменении тока в емкости от 0 до 1,5 А. Кроме этого, действительное направление тока в емкости противоположное выбранному на рис. 4.12.

Для вычисления тока в емкости после коммутации воспользуемся формулой:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C (A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}).$$

Подставив в эту формулу значение $t = 0$, получим второе уравнение для определения постоянных интегрирования

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 = i_C(0+)/C = 1,5/10^{-5} = 1,5 \cdot 10^5.$$

Таким образом, для определения постоянных интегрирования имеем два уравнения:

$$A_1 + A_2 = 0;$$

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 = 1,5 \cdot 10^5.$$

Совместное решение этих уравнений позволяет найти постоянные интегрирования:

$$A_1 = -A_2 = 1,5 \cdot 10^5 / (p_1 - p_2) = 100.$$

После подстановки найденных значений постоянных интегрирования найдем окончательное значение напряжения на емкости:

$$u_C = [100(e^{-2000t} - e^{-500t}) + 4,5] \text{ A}.$$

Ток в емкости найдем по формуле:

$$i_C = C du_C / dt = (-2e^{-2000t} + 0,5e^{-500t}) \text{ A}.$$

Суммируя токи в емкости и сопротивлении, найдем ток в индуктивности:

$$i_L = i_C + i_r = (0,5e^{-2000t} - 2e^{-500t} + 4,5) \text{ A}.$$

Графики напряжений и токов в цепи приведены на рис. 4.13а-г. Из этих графиков видно, что напряжение на емкости после коммутации имеет до-

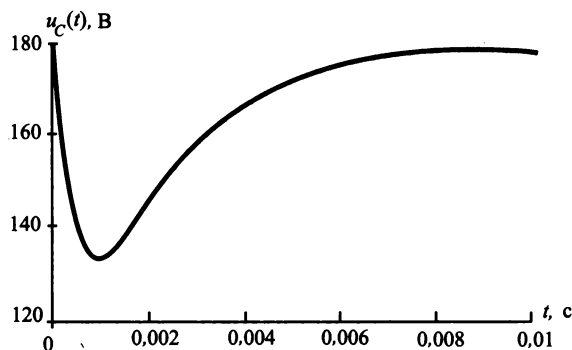
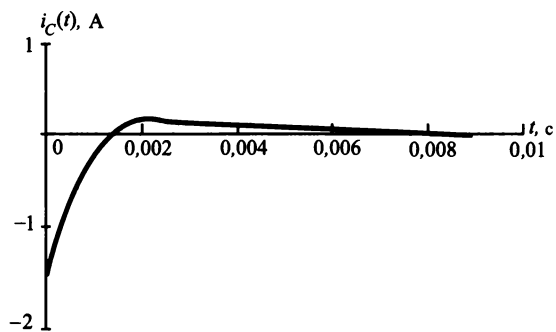
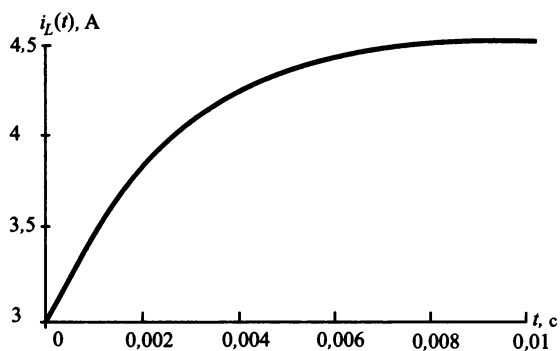


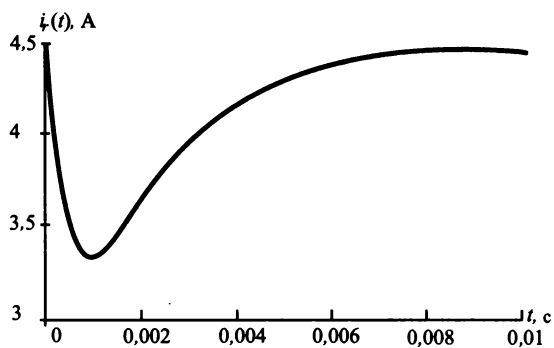
Рис. 4.13а. График напряжения на емкости к примеру 4.8



б)



а)



з)

Рис. 4.13б, в, г. График токов в емкости (б), индуктивности (а) и сопротивления (з) к примеру 4.8

вольно глубокий спад, после чего возвращается к начальному значению. Ток в индуктивности после коммутации монотонно возрастает от 3 до 4,5 А, а ток в емкости после коммутации даже меняет направление. Такой режим не является колебательным, однако он близок к нему. Переход к колебательному режиму может произойти при изменении параметров элементов цепи.

Метод интеграла наложения (Дюамеля). Расчет переходных процессов классическим методом ограничен возможностью определения реакции цепи в установившемся режиме после коммутации, т. е. возможностью определения принужденных составляющих реакции. Как было показано на примерах, такие реакции сравнительно легко определяются в тех случаях, когда воздействие и реакция совпадают по форме (например, при постоянных или гармонических воздействиях). Если же форма реакции в установившемся режиме неизвестна, то применение классического метода становится крайне затруднительным.

В этих случаях для линейных цепей можно использовать принцип наложения, который устанавливает, что реакцию на сложное воздействие можно определять в виде суммы реакций на некоторые элементарные воздействия. В качестве таких элементарных воздействий могут быть использованы ступенчатые или импульсные функции, смещенные во времени.

Таким образом, при использовании интеграла Дюамеля необходимо предварительно рассчитать классическим (или иным) способом реакцию цепи на единичное ступенчатое или импульсное воздействия, которые называются *переходной* или *импульсной характеристиками цепи*, соответственно. Интеграл Дюамеля имеет различные формы, которые отличаются видом переходной характеристики. Кроме этого, при использовании интеграла Дюамеля интегрирование производится по текущему времени реакции τ , в то время, как воздействие рассматривается в текущем времени t . Наиболее распространенные формы интеграла Дюамеля приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Формы интегралов Дюамеля

Форма	Характеристика цепи	Интеграл Дюамеля
1	$h(t)$	$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x'(\tau) h(t-\tau) d\tau$
2	$h(t)$	$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x'(t-\tau) h(\tau) d\tau$

3	$g(t) = h'(t)$	$y(t) = x(0)g(0) + \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau$
4	$g(t) = h'(t)$	$y(t) = x(0)g(0) + \int_0^t x(t-\tau)g(\tau)d\tau$

Примечание. В формулах приняты следующие обозначения: $x(t)$ — входное воздействие; $y(t)$ — выходная реакция; $h(t)$ — переходная характеристика цепи; $g(t)$ — импульсная переходная характеристика цепи.

Порядок расчета переходных процессов методом интеграла наложения может быть следующим:

- ❧ с помощью классического метода выполняют расчет переходной характеристики цепи;
- ❧ определяют производную входного воздействия и заменяют в ней текущее время t на переменную интегрирования τ ;
- ❧ используя одну из форм интеграла Дюамеля, выполняют расчет реакции цепи.

Если воздействие представлено в виде кусочно-разрывной функции текущего времени t , то расчет реакции производят на каждом отдельном участке непрерывности воздействия. При этом учитывают разрывы непрерывности воздействия на границах отдельных участков. Рассмотрим примеры расчета переходных процессов методом интеграла наложения.

Пример 4.9. Для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 4.14а, требуется определить напряжение на индуктивности u_L , если входное воздействие задано в виде кусочно-разрывной функции вида (рис.4.14б):

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ E_0 e^{at} & \text{при } 0 < t < t_H; \\ 0 & \text{при } t > t_H. \end{cases}$$

Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $E_0 = 10 \text{ В}$; $a = -100 \text{ с}^{-1}$; $r = 20 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $t_H = 5 \text{ мс}$.

Решение.

1 Вначале определим переходную характеристику цепи. Для этого рассмотрим схему, изображенную на рис. 4.14а, заменив в ней входное воздействие $e(t)$ единичной функцией $\delta_1(t) = 1(t) \text{ В}$. Рас-

чет этой схемы, выполненный классическим методом, приводит к следующему значению переходной характеристики цепи:

$$h(t) = e^{-tr/L} = e^{-200t} \text{ В.}$$

2 Реакцию цепи на входное воздействие (рис. 4.14б) определим с помощью интеграла Дюамеля, записанного по форме 1 (табл. 4.1). На интервале времени $t < 0$ напряжение на индуктивности равно нулю. При поступлении импульса напряжение на индуктивности в интервале $0_+ < t < t_H$ определим по формуле:

$$\begin{aligned} u_L &= E_0 h(t) + \int_0^t e'(\tau) h(t-\tau) d\tau = E_0 e^{-tr/L} + \int_0^t a E_0 e^{a\tau} e^{-(t-\tau)r/L} d\tau = \\ &= E_0 \left\{ e^{-tr/L} + \frac{a e^{-tr/L}}{a + r/L} [e^{t(a+r/L)} - 1] \right\} = E_0 \frac{a e^{ta} + e^{-tr/L} r/L}{a + r/L} = \\ &= 10 \frac{-100 e^{-100t} + 200 e^{-200t}}{-100 + 200} = 10 (2 e^{-200t} - e^{-100t}) \text{ В.} \end{aligned}$$

Полученное выражение справедливо от начала и до конца импульса. При $t = 0_+$ получаем $u_L(0_+) = 10 \text{ В}$, а при $t_H = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ имеем $u_L(t_H) = 1,4 \text{ В}$. Поскольку при поступлении импульса тока в цепи нет, то перепад напряжения на индуктивности равен начальному скачку напряжения на входе цепи, которое равно 10 В.

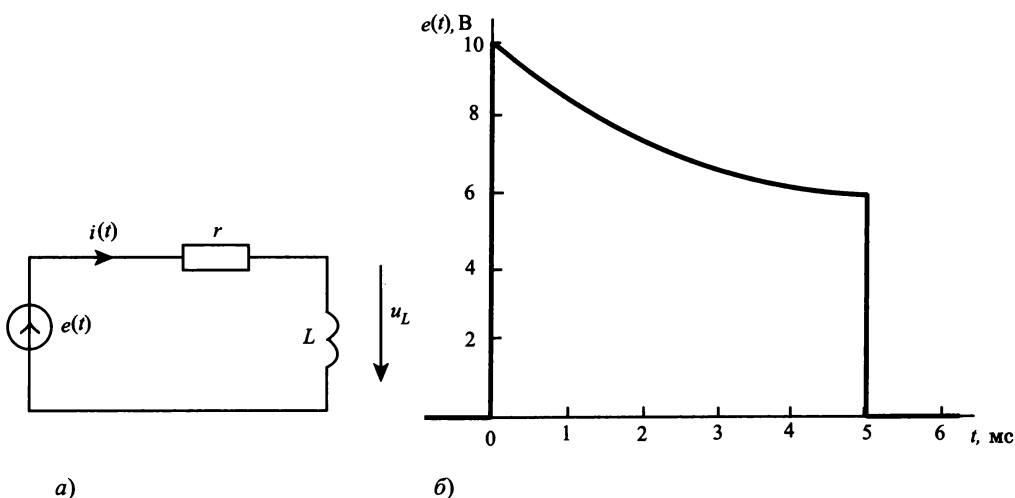


Рис. 4.14. Схема (а) и входное напряжение (б) к примеру 4.9

3 Для определения напряжения на индуктивности при $t > t_H$ импульсное воздействие должно быть проинтегрировано до момента окончания импульса; кроме этого, должен быть учтен перепад, связанный с окончанием импульса, поэтому интеграл Дюамеля принимает вид:

$$\begin{aligned} u_L &= E_0 h(t) + \int_0^{t_H} e'(\tau) h(t-\tau) d\tau - e(t_H) h(t-t_H) = \\ &= E_0 \left\{ e^{-tr/L} + \frac{ae^{-tr/L}}{a+r/L} [e^{t_H(a+r/L)} - 1] - e^{at_H} e^{(t-t_H)r/L} \right\} = \\ &= \frac{E_0}{a+r/L} [e^{-tr/L} - e^{at_H} e^{(t-t_H)r/L}] = 20 [e^{-200t} - 0,6^{-200(t-0,005)}] \text{ В.} \end{aligned}$$

При $t = t_{H+}$ напряжение на индуктивности имеет значение

$$u_L(t_{H+}) = -4,6 \text{ В}$$

и затем асимптотически стремится к нулю. График изменения напряжения на индуктивности приведен на рис. 4.15. Полный перепад на-

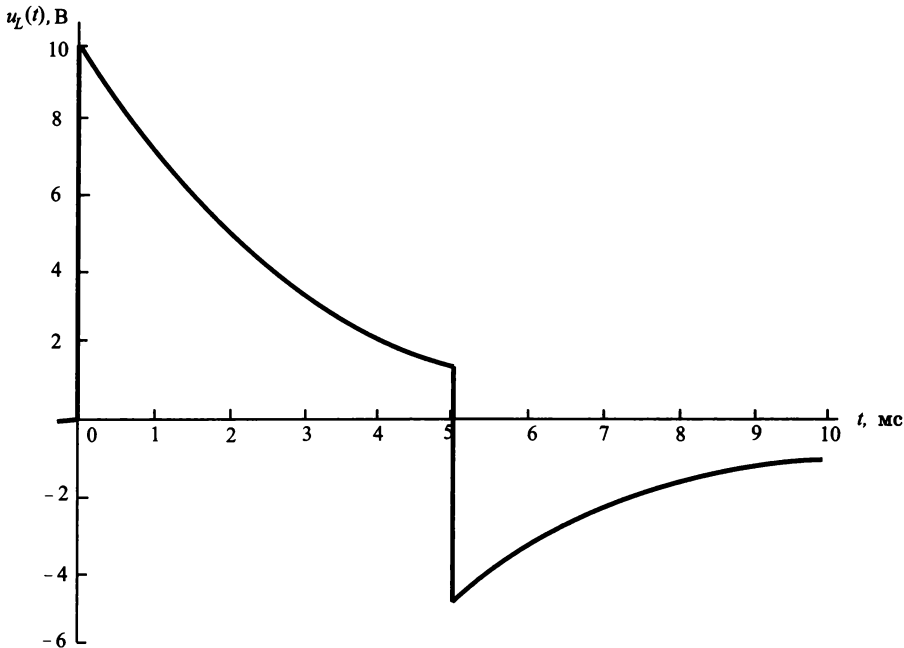


Рис. 4.15. График напряжения на индуктивности к примеру 4.9

пряжения на индуктивности в момент времени t_H имеет значение, равное разности

$$u_L(t_{H+}) - u_L(t_{H-}) = -4,6 - 1,4 = -6 \text{ В},$$

что совпадает с перепадом напряжения источника в момент окончания импульса:

$$e(t_H) = 10e^{at_H} = 10e^{-0,5} = 6 \text{ В}.$$

Пример 4.10. Требуется рассчитать напряжение на емкости C в схеме последовательного колебательного контура, изображенного на рис. 4.16а, при воздействии на него ступенчатого напряжения, показанного на рис. 4.16б. Параметры элементов контура имеют следующие значения: $r = 400 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $C = 2,5 \text{ мкФ}$; $E_m = 10 \text{ В}$; $t_H = 0,5 \text{ мс}$.

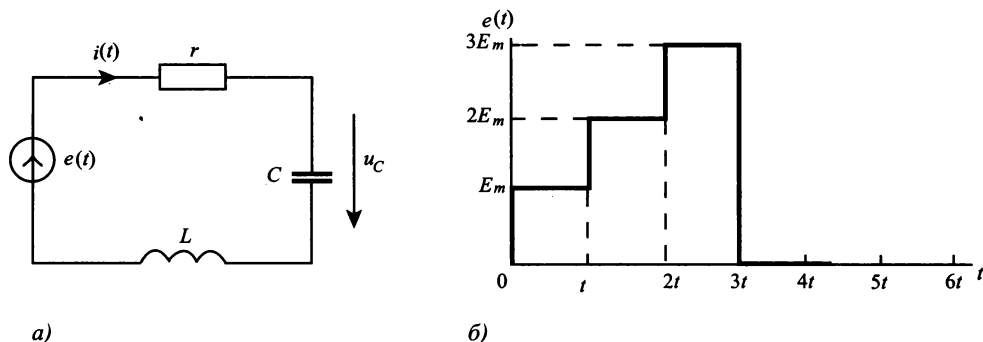


Рис. 4.16. Схема цепи (а) и график входного напряжения (б) к примеру 4.10

Решение.

1 Вначале рассчитаем переходную характеристику контура для напряжения на емкости. При расчете переходной характеристики будем считать, что на вход контура подается единичная ступенчатая функция $e(t) = I(t)$ и определим напряжение на емкости C , которое в этом случае можно записать в виде:

$$h_C = h_{C_{св}} + h_{C_{нр}}.$$

Для рассматриваемой схемы принужденное напряжение на емкости будет равно напряжению источника, т. е. $h_{C_{нр}} = 1 \text{ В}$. Свободную составляющую напряжения на емкости будем искать в виде

$$h_{C_{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где p_1, p_2 — корни характеристического уравнения.

Для определения корней составим характеристическое уравнение

$$Z_{BX}(p) = r + pL + 1/(pC) = 0,$$

откуда получаем:

$$p^2 + pr/L + 1/(LC) = 0.$$

Решение этого характеристического уравнения позволяет найти корни:

$$p_{1,2} = -r/2L \pm \sqrt{(r/2L)^2 - 1/(LC)}.$$

После подстановки значений параметров элементов находим значения корней:

$$p_1 = p_2 = p = -2000 \text{ 1/с}.$$

Поскольку корни характеристического уравнения отрицательные, вещественные и равные, то переходная характеристика является аperiодической и затухающей (граничный режим). Полное решение для переходной характеристики в этом случае имеет вид:

$$h_C(t) = 1 - (1 - pt)e^{pt},$$

откуда после подстановки значения корня получаем:

$$h_C = 1 - (1 + 2000t)e^{-2000t}.$$

График переходной характеристики h_C для напряжения на емкости изображен на рис. 4.17.

2 Для расчета переходного процесса представим входное напряжение в виде кусочно разрывной функции:

$$e(t) = \begin{cases} E_m & \text{при } 0 < t < t_H; \\ 2E_m & \text{при } t_H < t < 2t_H; \\ 3E_m & \text{при } 2t_H < t < 3t_H; \\ 0 & \text{при } 3t_H < t < \infty. \end{cases}$$

На границах этих участков функция $e(t)$ имеет разрывы непрерывности, которые будут учтены при составлении уравнений с помощью интеграла Дюамеля.

На первом участке при $0 < t < t_H$ функция $e(t)$ имеет разрыв непрерывности при $t = 0$, поэтому напряжение на емкости можно представить в виде

$$u_C = e(0_+)h_C(t) + \int_0^t e'(\tau) h_C(t - \tau) d\tau = E_m [1 - (1 + 2000t)e^{-2000t} 1(t)] \text{ В}.$$

В этом выражении учтено, что производная $e'(t) = 0$, поэтому напряжение на емкости определяется только ступенчатым изменением $e(t)$ при $t = 0$.

На втором участке при $t_H < t < 2t_H$ функция $e(t)$ имеет разрыв непрерывности при $t = t_H$, поэтому напряжение на емкости определяется по уравнению

$$u_C = E_m[1 - (1 + 2000t)e^{-2000t}I(t)] + E_m\{1 - [1 - 2000(t - t_H)e^{t-t_H}]1(t - t_H)\},$$

в котором также учтено, что производная $e'(t) = 0$ и изменение напряжения на емкости обусловлено только скачкообразным увеличением $e(t)$ при $t = t_H$.

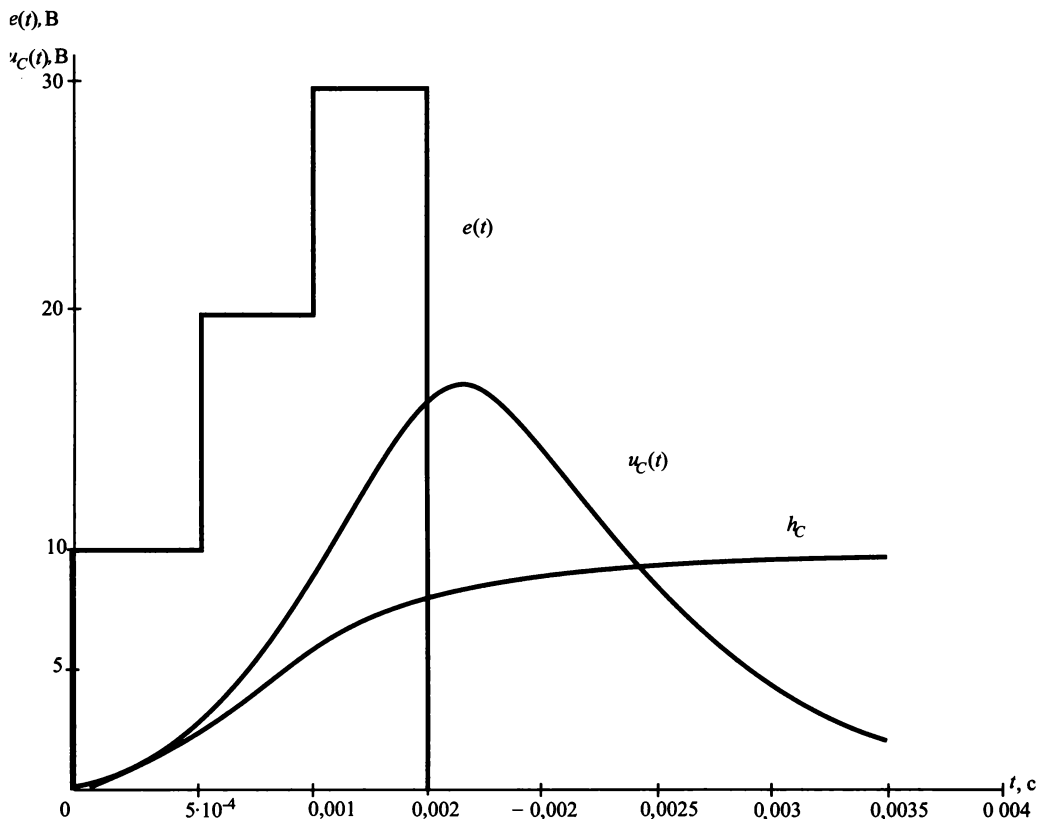


Рис. 4.17. Графики входного и выходного напряжения к примеру 4.10

Аналогично определим напряжение u_C на *третьем* участке при $2t_H < t < 3t_H$:

$$u_C = E_m[1 - (1 + 2000t)e^{-2000t}1(t)] + \\ + E_m\{1 - [1 - 2000(t - t_H)e^{t-t_H}]1(t - t_H)\} + \\ + E_m\{1 - [1 - 2000(t - 2t_H)e^{t-2t_H}]1(t - 2t_H)\}.$$

На последнем, *четвертом* интервале $3t_H < t < \infty$, входное напряжение также изменяется мгновенно от значения $3E_m$ до 0, т. е. имеет приращение $-3E_m$. В связи с этим, напряжение на емкости определяется выражением:

$$u_C = E_m[1 - (1 + 2000t)e^{-2000t}1(t)] + \\ + E_m\{1 - [1 - 2000(t - t_H)e^{t-t_H}]1(t - t_H)\} + \\ + E_m\{1 - [1 - 2000(t - 2t_H)e^{t-2t_H}]1(t - 2t_H)\} - \\ - 3E_m\{1 - [1 - 2000(t - 3t_H)e^{t-3t_H}]1(t - 3t_H)\}.$$

Для разделения этих участков в формулы для напряжения на емкости включены единичные запаздывающие функции, которые равны нулю при отрицательном значении аргумента. График напряжения $u_C(t)$ изображен на рис. 4.17.

Пример 4.11. Требуется определить напряжение на сопротивлении нагрузки R в цепи второго порядка, изображенной на рис. 4.18а, при действии экспоненциального импульса, форма которого показана на рис. 4.18б. Параметры цепи имеют следующие значения: $r = R = 250$ Ом; $C = 1$ мкФ; $L = 10$ мГн; $e(t) = E_0 e^{-at} = 100 e^{-1000t}$ В; $t_H = 0,2$ мс.

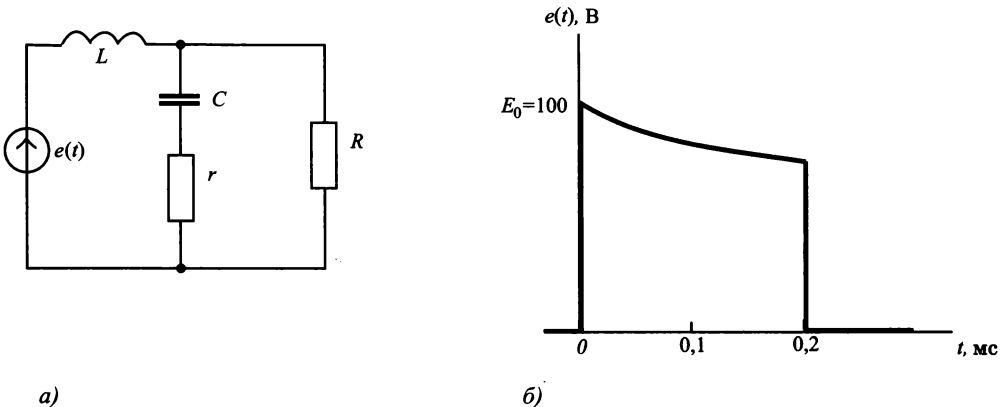


Рис. 4.18. Схема цепи (а) и входное напряжение (б) к примеру 4.11

Решение

1 Вначале определим переходную характеристику цепи при действии на ее входе единичной функции, т. е. положим, что вместо экспоненциального импульса на входе цепи действует напряжение $e(t) = 1(t)$ В и определим напряжение на сопротивлении R . Реакция цепи на такое входное напряжение называется ее *переходной характеристикой* и обозначается $h_R(t)$.

При расчете переходной характеристики $h_R(t)$ цепи воспользуемся классическим методом и представим ее в виде суммы свободной $h_{Rсв}$ и принужденной h_{Rnp} составляющих:

$$h_R(t) = h_{Rсв} + h_{Rnp}.$$

Принужденную составляющую h_{Rnp} определим в установившемся режиме при действии на входе цепи постоянного напряжения, равного 1 В. Поскольку в этом режиме ток в емкости C отсутствует, а напряжение на индуктивности равно нулю, то $h_{Rnp} = 1$ В.

Свободную составляющую переходной характеристики $h_{Rсв}$ будем искать в виде суммы двух членов:

$$h_{Rсв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где A_1, A_2 — постоянные интегрирования, а p_1, p_2 — корни характеристического уравнения цепи.

Таким образом, переходную характеристику цепи можно записать в виде:

$$h_R(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + 1.$$

Для определения корней p_1, p_2 составим характеристическое уравнение, используя для этого значение операторного входного сопротивления:

$$Z_{BX} = pL + \frac{R(r + 1/pC)}{R + r + 1/pC} = 0.$$

После преобразования этого уравнения получаем:

$$p^2 + \frac{L + CRr}{LC(R + r)} p + \frac{R}{LC(R + r)} = 0.$$

Подставляя в полученное выражение значения параметров элементов, найдем:

$$p^2 + 1,45 \cdot 10^4 p + 50 \cdot 10^6 = 0.$$

Решение этого характеристического уравнения дает значение корней:

$$p_1 = -5670 \text{ с}^{-1}; p_2 = -8830 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения постоянных интегрирования A_1, A_2 выразим напряжение на сопротивлении R через переменные состояния: $u_R(t) = e(t) - u_L(t) = e(t) - L di_L/dt$, что позволяет определить переходную характеристику для напряжения на нагрузке $h_R(t)$ через переходную проводимость для тока в индуктивности $g_L(t)$:

$$h_R(t) = 1(t) - L dg_L(t)/dt.$$

Переходную проводимость для тока в индуктивности $g_L(t)$ можно записать в виде:

$$g_L(t) = g_{Lcs} + g_{Lnp} = A_3 e^{p_1 t} + A_4 e^{p_2 t} + g_{Lnp},$$

где $g_{Lnp} = 1(t)/R = 4 \cdot 10^{-3}$ — принужденная составляющая переходной проводимости для тока в индуктивности;

$g_{Lcs} = A_3 e^{p_1 t} + A_4 e^{p_2 t}$ — свободная составляющая переходной проводимости.

Для определения постоянных интегрирования A_3, A_4 воспользуемся начальными условиями для тока:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.$$

После подстановки начальных условий получим первое уравнение для определения постоянных интегрирования:

$$A_3 + A_4 = -g_{Lnp} = -4 \cdot 10^{-3}.$$

Для составления второго уравнения найдем напряжение на индуктивности $u_L = L di_L/dt$ и учтем, что $u_L(0_+) = e(0_+) = 1$. Из этого уравнения следует, что

$$L(dg_L(t)/dt)|_{t=0} = 1$$

или

$$L(A_3 p_1 + A_4 p_2) = 1.$$

После подстановки числовых значений параметров цепи и корней характеристического уравнения получим второе уравнение для определения постоянных интегрирования:

$$-56,7A_3 - 88,3A_4 = 1.$$

Совместное решение найденных уравнений дает возможность определить постоянные интегрирования:

$$A_3 = 20,47 \cdot 10^{-3}; A_4 = -24,47 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, окончательное выражение переходной проводимости для тока в индуктивности имеет вид:

$$g_L(t) = 20,47 \cdot 10^{-3} e^{-5670t} - 24,47 \cdot 10^{-3} e^{-8830t} + 4 \cdot 10^{-3}.$$

Теперь можно записать переходную характеристику для напряжения на нагрузке R :

$$h_R(t) = 1 - L \frac{dg_L(t)}{dt} = 1 + 1,165e^{-5670t} - 2,165e^{-8830t}.$$

2 Перейдем к расчету напряжения на нагрузке, используя интеграл Дюамеля. Для этого вначале запишем аналитическое выражение импульса входного напряжения, график которого приведен на рис. 4.18б:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 100e^{-1000t} & \text{при } 0 < t < t_H; \\ 0 & \text{при } t > t_H. \end{cases}$$

Расчет напряжения на нагрузке выполним отдельно на каждом участке непрерывности входного воздействия. Очевидно, что на первом участке при $t < 0$ напряжение на нагрузке равно нулю, так как входное воздействие отсутствует.

Напряжение на нагрузке на втором участке $0 < t < t_H = 0,2$ мс определим с помощью интеграла Дюамеля:

$$u_R = e(0)h_R(t) + \int_0^t e'(\tau)h_R(t-\tau)d\tau.$$

Найдем отдельные составляющие этого интеграла:

$$\begin{aligned} e(0)h_R(t) &= 100 + 116,5e^{-5670t} - 216,5e^{-8830t}; \\ \int_0^t e'(\tau)h_R(t-\tau)d\tau &= \int_0^t (-10^5 e^{-1000\tau})d\tau + \int_0^t (-10^5 e^{-1000\tau})1,165e^{-5670(t-\tau)}d\tau + \\ &\quad + \int_0^t (-10^5 e^{-1000\tau})(-2,165e^{-8830(t-\tau)})d\tau = \\ &= -100 + 102,7e^{-1000t} + 24,95e^{-5670t} - 27,65e^{-8830t} \text{ В.} \end{aligned}$$

После подстановки значений составляющих в интеграл Дюамеля находим выходное напряжение на втором участке:

$$u_R(t) = (102,7e^{-1000t} + 141,4e^{-5670t} - 244,1e^{-8830t}) \text{ В.}$$

Перейдем к расчету выходного напряжения на третьем участке при $t_H < t < \infty$:

$$\begin{aligned} u_R &= e(0)h_R(t) + \int_0^{t_H} e'(\tau) h_R(t-\tau) d\tau - e(t_H)h_R(t-t_H) = \\ &= (78e^{-5670t} - 112,6e^{-8830t})1(t) - \\ &- [95,32e^{-5670(t-0,0002)} + 177,1e^{-8830(t-0,0002)}]1(t-2 \cdot 10^{-4}) \text{ В.} \end{aligned}$$

График выходного напряжения на сопротивлении нагрузки приведен на рис. 4.19.

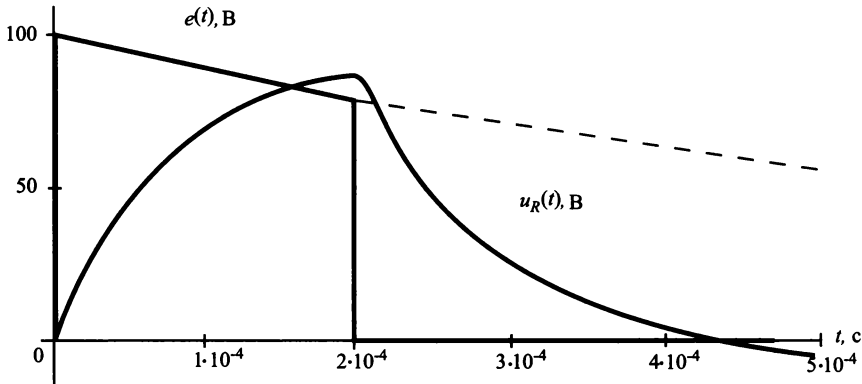


Рис. 4.19. График напряжения на нагрузке к примеру 4.11

Метод переменных состояния. В основу метода переменных состояния положена принципиальная возможность замены дифференциального уравнения n -го порядка электрической цепи n дифференциальными уравнениями первого порядка. Из этого положения можно сделать вывод, что метод переменных состояния целесообразно использовать для цепей сравнительно высокого порядка при $n = (n_C + n_L) > 2$. При этом в качестве переменных состояния, как и раньше, принимают токи в индуктивностях i_{Lk} и напряжения на емкостях u_{Ck} ,

которые однозначно определяют запас энергии цепи в любой момент времени. Для линейных цепей система уравнений состояния также линейна и может быть записана в виде набора дифференциальных уравнений первого порядка, которые можно представить в виде матричного уравнения:

$$\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{V}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(t),$$

где: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ — столбцовая матрица (вектор) n переменных состояния;
 $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]^T$ — столбцовая матрица (вектор) n первых производных переменных состояния;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ — квадратная матрица размером } (n \times n), \text{ элементы}$$

которой определяются коэффициентами дифференциального уравнения цепи;

$\mathbf{V}(t)$ — столбцовая матрица (вектор) m независимых воздействий;

\mathbf{B} — матрица размером $n \times m$, элементы которой зависят от параметров цепи и ее структуры;

$\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}\mathbf{V}(t)$ — столбцовая матрица, элементы которой зависят от независимых воздействий, структуры и параметров цепи.

Формирование системы дифференциальных уравнений цепи основано на использовании дифференциальных уравнений для переменных состояния, согласно которым

$$\begin{cases} di_{Lk} / dt = u_{Lk} / L_k; \\ du_{Ck} / dt = i_{Ck} / C_k. \end{cases}$$

Расчет цепей методом переменных состояния можно разделить на два этапа:

- на первом этапе составляют систему дифференциальных уравнений цепи;
- на втором этапе решают составленную систему дифференциальных уравнений.

Решение системы дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния, можно выполнить двумя способами: аналитическим и численным.

При аналитическом способе решение уравнений состояния записывают в виде суммы матриц свободной \mathbf{x}_{cs} и принужденной \mathbf{x}_{np} составляющих:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{cs} + \mathbf{x}_{np},$$

где $\mathbf{x}_{ce} = \mathbf{x}(0)\mathbf{e}^{At}$ — соответствует реакции цепи, обусловленной ненулевыми начальными условиями $\mathbf{x}(0) \neq 0$ при отсутствии внешних воздействий $\mathbf{V} = 0$;

$\mathbf{x}_{np} = \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} \mathbf{F}(\tau) d\tau$ — соответствует реакции цепи от внешних воздействий

$\mathbf{V}(t) \neq 0$ при нулевых начальных условиях $\mathbf{x}(0) = 0$;

$\mathbf{x}(0)$ — матрица (вектор) начальных значений переменных состояния, полученных при $t = 0$;

\mathbf{e}^{At} — матричная экспоненциальная функция.

Если в цепи после коммутации нет источников энергии, т. е. $\mathbf{V}(t) = 0$, то решение матричного уравнения имеет вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)\mathbf{e}^{At}.$$

Если же в цепи после коммутации есть источники независимых воздействий, то матрица $\mathbf{V}(t) \neq 0$, и интегрирование матричного дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{V}(t)$ приводит к решению в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)\mathbf{e}^{At} + \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{V}(\tau) d\tau,$$

которое состоит из суммы двух слагаемых — реакции цепи при ненулевых начальных условиях и реакции цепи при нулевых начальных условиях и наличии источников внешних воздействий $\mathbf{V}(t)$.

При численном способе решения уравнений состояния используют различные программы численного интегрирования на ЭВМ: метод Рунге–Кутта, метод Эйлера, метод трапеций и др. Так, например, в пакете программ MathCAD PLUS 6.0 PRO [26] приведены программы численного решения дифференциальных уравнений модифицированным методом Эйлера и методом Рунге–Кутта. Поскольку погрешность решения методом Эйлера достигает нескольких процентов, то более предпочтительным является метод Рунге–Кутта, который при решении уравнений четвертого порядка дает погрешность h^4 , где h — шаг приращения переменной. Этот метод обеспечивает контроль точности вычислений на каждом шаге интегрирования и программную регулировку шага.

В системе MathCAD программа интегрирования уравнений по методу Рунге–Кутта имеет имя **rkfixed**. Обращение к ней производится через операцию присваивания какой-либо переменной (в дальнейшем \mathbf{z}) имени программы:

$$\mathbf{z} := \mathbf{rkfixed}(\mathbf{x}, 0, t_k, N, \mathbf{D}),$$

где: \mathbf{x} — вектор переменных состояния, размер которого определяется вектором начальных значений $\mathbf{x}(0)$ и соответствует числу уравнений состояния;

0 и t_k — начало и конец временного интервала интегрирования; N — число точек на интервале интегрирования; \mathbf{D} — функция, которая описывает правую часть уравнений, разрешенных относительно первых производных.

Для линейных цепей функция \mathbf{D} имеет вид линейного матричного преобразования $\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}$, где \mathbf{A} — квадратная матрица коэффициентов, которые определяются структурой цепи и параметрами элементов; \mathbf{F} — вектор независимых переменных, элементы которого определяются входными воздействиями. Все элементы матриц \mathbf{A} и \mathbf{F} должны быть определены перед обращением к программе **rkfixed**.

Матрица \mathbf{z} имеет размер $(N+1, n+1)$, где первый столбец (нулевой) соответствует дискретным значениям времени t_i : $z_{i0}=t_i$. Остальные столбцы этой матрицы соответствуют значениям переменных состояния: $z_{i1}, z_{i2} \dots z_{in}$, где индекс i изменяется от 1 до N .

Для контроля правильности задания исходных данных можно (но не обязательно) обратиться к программе определения собственных чисел матрицы \mathbf{A} : **eigenvals** (\mathbf{A}). Эта программа выводит информацию о собственных числах, которые совпадают с корнями характеристического уравнения цепи. Необходимым, но недостаточным условием правильности ввода данных является набор отрицательных собственных чисел (или комплексно-сопряженных чисел с отрицательной вещественной частью).

Рассмотрим теперь некоторые способы *составления дифференциальных уравнений* цепи по методу переменных состояния. Для этих целей наиболее часто применяют два основных способа:

- использование законов Кирхгофа;
- использование метода наложения.

Рассмотрим применение этих способов на некоторых примерах.

Пример 4.12. *Требуется составить уравнения состояния и решить их для одноконтурной цепи второго порядка при отключении источника напряжения E . Схема цепи приведена на рис. 4.20а, а параметры ее элементов имеют следующие значения: $E = 40 \text{ В}$; $r = 40 \text{ Ом}$; $L = 1 \text{ Гн}$; $C = 500 \text{ мкФ}$.*

Решение. Построим схему замещения цепи для произвольного момента времени t , которая приведена на рис. 4.20б. На этой схеме емкость C заменена источником постоянного напряжения $u_C(t)$, а индуктивность L — источником тока $i_L(t)$. Результирующая схема замещения содержит только сопротивление r , источник тока $i(t)$ и источник напряжения $u_C(t)$.

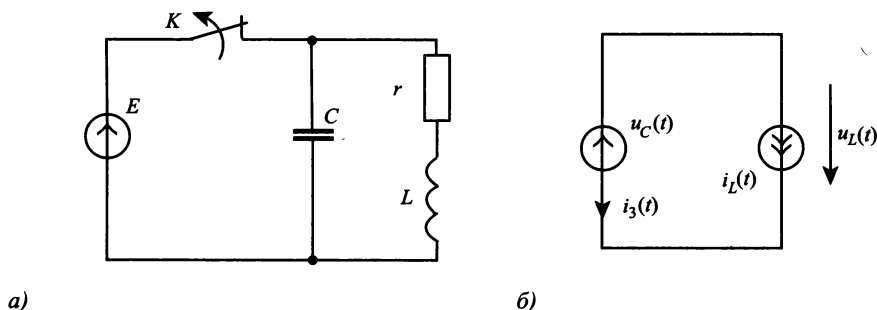


Рис. 4.20. Исходная (а) и расчетная (б) схемы цепи к примеру 4.12

Для полученной схемы можно составить уравнения, пользуясь законами Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_C(t) = -i_L(t); \\ u_L(t) = u_C(t) - ri_L(t), \end{cases}$$

откуда находим:

$$\begin{cases} C du_C / dt = -i_L; \\ L di_L / dt = u_C - ri_L. \end{cases}$$

Из этих уравнений получаем значения первых производных переменных состояния:

$$\begin{cases} du_C / dt = -i_L / C; \\ L di_L / dt = u_C / L - ri_L / L, \end{cases}$$

пользуясь которыми, запишем матричное уравнение цепи:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -r/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}.$$

При использовании программы **rkfixed** это уравнение записывают в виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$$

где $x1 = z11 = u_C$; $x2 = z12 = i_L$; $F = 0$.

Это матричное уравнение необходимо еще дополнить матрицей начальных состояний цепи, которая включает напряжение на емкости и ток в индуктивности на момент коммутации (т. е. при $t = 0_-$):

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} u_C(0_-) \\ i_L(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 1 \end{bmatrix},$$

используемой для начала процесса интегрирования дифференциальных уравнений цепи.

Перед обращением к программе интегрирования **rkfixed** определяем через операцию присваивания значения следующих величин:

- 1) коэффициентов матрицы **A**: $a_{11} := 0$; $a_{12} := -2000$; $a_{21} := 1$; $a_{22} := -40$;
- 2) значений вектора начальных состояний переменных \mathbf{x}_k ;
- 3) число точек интегрирования $N := 500$;
- 4) формализованную матричную запись уравнений состояния $\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ при условии, что $\mathbf{F} = 0$;
- 5) конечное значение временного интервала $t_k := 0,3$.

Необходимый временной интервал интегрирования t_k можно оценить по собственным числам матрицы **A** путем обращения к программе **eigenvals** (**A**). В рассматриваемом примере имеются два комплексно сопряженных числа $p_1 = -20 + j40$ и $p_2 = -20 - j40$, вещественные части которых одинаковы и равны $b = -20 \text{ с}^{-1}$. Эта часть комплексного числа определяет коэффициент затухания и непосредственно связана с длительностью переходного процесса формулой $t_k = 3/b$. Для наглядности в рассматриваемом примере интервал интегрирования выбран в два раза больше $t_k = 6/b = 6/20 = 0,3 \text{ с}$.

Форма записи исходных данных для программы **rkfixed** и результаты расчета приведены на рис. 4.21. Поскольку переменные состояния u_C и i_L измеряются в разных единицах и могут значительно отличаться друг от друга, то при построении графиков необходимо указать масштабные коэффициенты. Так, например, для графика переменной $z_{i2} = i_L$ использован масштабный коэффициент, равный 100. Чтобы получить действительное значение тока i_L , следует разделить значения, отсчитываемые по оси ординат, на 100.

Из полученных графиков следует, что переходный процесс в цепи носит колебательный характер, а обе функции постепенно затухают до нулевого значения при увеличении времени t .

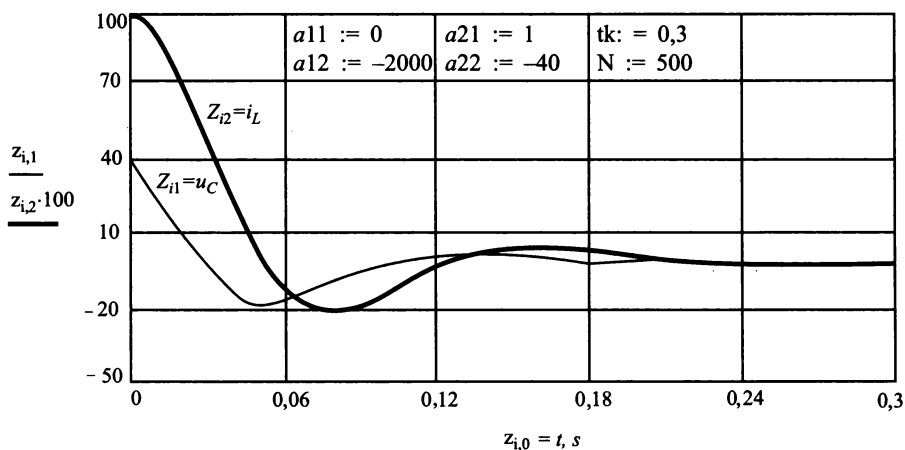


Рис. 4.21. Результаты расчета к примеру 4.12

Пример 4.13. Составить уравнения для переменных состояния и рассчитать их при замыкании ключа K в цепи второго порядка, изображенной на рис. 4.22а. Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $J = 2 \text{ A}$; $r_1 = r_2 = 50 \text{ Ом}$; $L = 5 \text{ мГн}$; $C = 0,1 \text{ мкФ}$.

Решение. Переходный процесс в рассматриваемой цепи возникает в результате перераспределения энергии между индуктивностью L и емкостью C после подключения сопротивления r_1 . Используя первый закон Кирхгофа, определим ток в емкости C :

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = -u_C/r_1 - i_L + J.$$

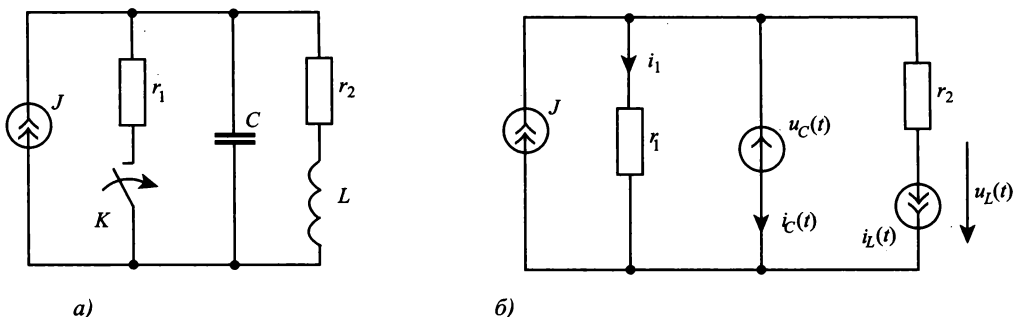


Рис. 4.22. Исходная (а) и расчетная (б) схемы цепи к примеру 4.13

Аналогично, используя второй закон Кирхгофа, найдем напряжение на индуктивности:

$$u_L = L(di_L/dt) = u_C - r_2 i_L.$$

Объединим эти уравнения в систему для переменных состояния:

$$\begin{cases} du_C/dt = -u_C/(r_1 C) - i_L/C + J/C; \\ di_L/dt = u_C/L - i_L r_2/L. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений запишем в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(r_1 C) & -1/C \\ 1/L & -r_2/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J/C \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После подстановки числовых значений параметров элементов, получим уравнения состояния в виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 10^5 & -10^7 \\ 200 & -10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для определения вектора начальных значений найдем напряжение на емкости и ток в индуктивности до замыкания ключа K :

$$u_C(0_-) = J r_2 = 100 \text{ В}; i_L(0_-) = J = 2 \text{ А}.$$

Таким образом, вектор начальных значений переменных состояния имеет вид:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} u_C(0_-) \\ i_L(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Схема замещения для расчета значений переменных состояния приведена на рис. 4.22б. На этой схеме емкость заменена источником напряжения $u_C(t)$, а индуктивность — источником тока $i_L(t)$. Значения этих величин изменяются на каждом шаге интегрирования.

Решение уравнений состояния выполним по программе **rkfixed**, входящей в систему MathCAD. Для этого присвоим переменным состояния следующие значения: $x_1 \rightarrow z_{i1} = u_C$; $x_2 \rightarrow z_{i2} = i_L$ и запишем уравнения состояния в виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

где значения коэффициентов можно взять из уравнений состояния, рассчитанных выше, и включить в программу в виде констант или определить через операции присваивания в самой программе.

Форма задания исходных данных для расчета по программе **rkfixed** приведена на рис. 4.23. Значение $N = 5000$ указано произвольно, так как оно влияет только на время выполнения расчета и его точность. Косвенно оценить точность расчета можно, сравнив результаты интегрирования для двух значений $N = N_1$ и $N_1/2$. Если результаты расчета в этих точках совпадают, то точность вычислений и число точек интегрирования на интервале t_k находятся в приемлемых пределах.

Через операцию присваивания определяем также вектор начальных значений x и вектор независимых источников F . Временной интервал t_k может быть указан произвольно или приближенно выбран с помощью анализа собственных чисел матрицы A .

Для аperiodического процесса, который существует в рассматриваемой цепи, следует выбрать наименьшее по модулю собственное число p_{\min} и воспользоваться формулой $t_k = 3/p_{\min}$. Из двух собственных чисел $p_1 = -1,888E5$ 1/с; $p_2 = -2,118E4$ 1/с меньшее значение имеет p_2 , поэтому $t_k = 3/2,118E4 = 1,42E-4$ с.

Выбор интервала времени t_k можно также выполнить, анализируя постоянные времени цепей первого порядка, которые можно построить на основе исходной цепи путем последовательного исключения реактивных элементов. При этом из найденных постоянных времени

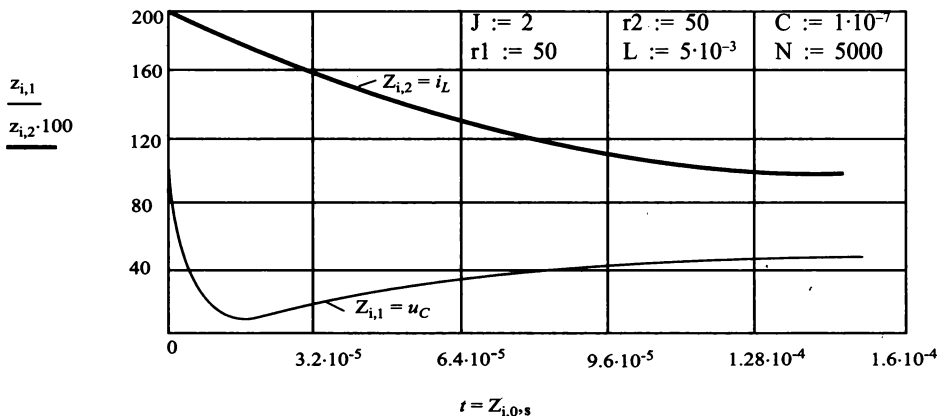


Рис. 4.23. Результаты расчета к примеру 4.13

следует выбрать ту, которая имеет максимальное значение, и, используя ее, рассчитать $t_k = 3\tau_{\max}$.

Графики временных зависимостей i_L и u_C приведены на рис. 4.23. Для переменной $z_{i2} = i_L$ использован масштабный коэффициент, равный 100. Из этих графиков видно, что напряжение на емкости изменяется от $u_C(0_-) = 100$ В до уровня $u_{Cnp} = 50$ В, а ток в индуктивности — от $i_L(0_-) = 2$ А до $i_{Lnp} = 1$ А.

Пример 4.14. Составить уравнения для переменных состояния и выполнить расчет переходного процесса в цепи третьего порядка, приведенной на рис. 4.24а, при замыкании ключа K . Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $E = 120$ В; $r_1 = r_3 = r_4 = 1$ Ом; $r_2 = r_5 = 2$ Ом; $L_1 = 1$ мГн; $L_2 = 2$ мГн; $C = 10$ мкФ.

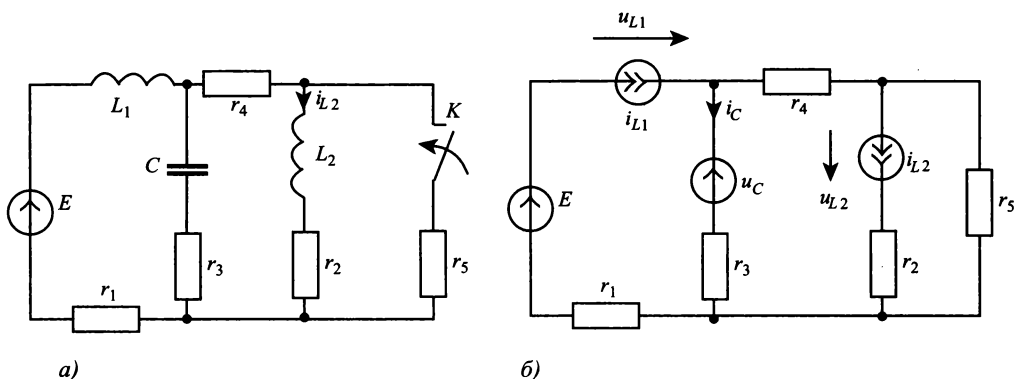


Рис. 4.24. Исходная (а) и расчетная (б) схемы к примеру 4.14

Решение. Переходный процесс в схеме обусловлен перераспределением энергии между реактивными элементами цепи после коммутации ключа K . На рис. 4.24б изображена схема замещения цепи, на которой реактивные элементы заменены источниками напряжения и тока. Положительные направления этих источников согласованы с исходной схемой. При расчете схемы замещения определению подлежат напряжения на источниках тока u_{L1} , u_{L2} и ток в емкости i_C , так как именно они определяют производные от переменных состояния. При расчете этих величин воспользуемся *принципом наложения*, в соответствии с которым реакцию линейной цепи можно определять в виде суммы реакций от отдельных источников. Для этого рассмотрим четыре частных схемы, приведенные на рис. 4.25, в каждой из которых

действует только один из источников, входящих в схему, приведенную на рис. 4.24б.

Расчет схемы, приведенной на рис. 4.25а, позволяет определить искомые величины от действия источника напряжения $u_C(t)$:

$$\begin{cases} i'_C = g u_C = A_{11} u_C; \\ u'_{L1} = g (r_4 + r_5) u_C = A_{21} u_C; \\ u'_{L2} = g r_5 u_C = A_{31} u_C, \end{cases}$$

где $g = (r_3 + r_4 + r_5)^{-1}$.

Аналогично выполняется расчет схемы, изображенной на рис. 4.25б, пользуясь которой, определим те же величины от действия источника тока $i_{L1}(t)$:

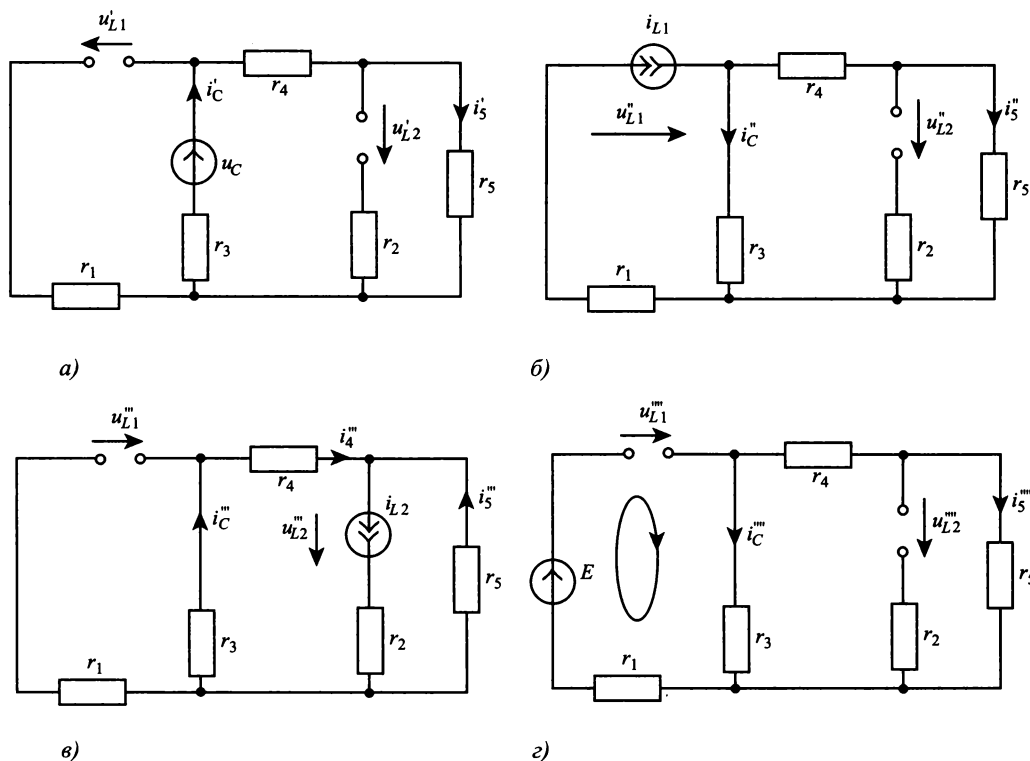


Рис. 4.25. Схемы для расчета реакций цепи от напряжения u_C (а), тока i_{L1} (б), тока i_{L2} (в), источника E (з) к примеру 4.13

$$\begin{cases} \dot{i}_C = g(r_4 + r_5)i_{L1} = A_{12}i_{L1}; \\ \dot{u}_{L1} = -g(r_1r_3 + r_1r_4 + r_1r_5 + r_3r_4 + r_3r_5)i_{L1} = A_{22}i_{L1}; \\ \dot{u}_{L2} = gr_3r_5i_{L1} = A_{32}i_{L1}. \end{cases}$$

Выполнив расчет схемы, приведенной на рис. 4.25в, найдем иско-
мые величины при действии источника тока i_{L2} :

$$\begin{cases} \dot{i}_C = gr_5i_{L2} = A_{13}i_{L2}; \\ \dot{u}_{L1} = gr_3r_5i_{L2} = A_{23}i_{L2}; \\ \dot{u}_{L2} = -g(r_2r_3 + r_2r_4 + r_2r_5 + r_3r_5 + r_4r_5)i_{L2} = A_{33}i_{L2}. \end{cases}$$

Расчет схемы, изображенной на рис. 4.25з, позволяет определить
искомые величины от действия источника напряжения E :

$$\begin{cases} \ddot{i}_C = 0; \\ \ddot{u}_{L1} = E; \\ \ddot{u}_{L2} = 0. \end{cases}$$

Суммируя частные решения для отдельных источников с учетом
выбранных положительных направлений напряжений и токов, нахо-
дим полные значения искомых величин:

$$\begin{cases} i_C = -\dot{i}_C + \dot{i}_C - \ddot{i}_C + \ddot{i}_C = -A_{11}u_C + A_{12}i_{L1} - A_{13}i_{L2}; \\ u_{L1} = -\dot{u}_{L1} + \dot{u}_{L1} + \ddot{u}_{L1} + \ddot{u}_{L1} = -A_{21}u_C + A_{22}i_{L1} + A_{23}i_{L2} + E; \\ u_{L2} = \dot{u}_{L2} + \dot{u}_{L2} + \ddot{u}_{L2} + \ddot{u}_{L2} = A_{31}u_C + A_{32}i_{L1} + A_{33}i_{L2}. \end{cases}$$

Полученные уравнения позволяют сформировать нормальную сис-
тему дифференциальных уравнений для переменных состояния и за-
писать ее в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E/L_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

где $a_{11} = -A_{11}/C$; $a_{12} = A_{12}/C$; $a_{13} = -A_{13}/C$; $a_{21} = -A_{21}/L_1$; $a_{22} = A_{22}/L_1$;
 $a_{23} = A_{23}/L_1$; $a_{31} = A_{31}/L_2$; $a_{32} = A_{32}/L_2$; $a_{33} = A_{33}/L_2$.

После подстановки значений параметров элементов цепи найдем
числовые значения коэффициентов уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -25 \cdot 10^3; a_{12} = 75 \cdot 10^3; a_{13} = -50 \cdot 10^3; \\ a_{21} &= -0,75 \cdot 10^3; a_{22} = -1,75 \cdot 10^3; a_{23} = 0,5 \cdot 10^3; \\ a_{31} &= 0,25 \cdot 10^3; a_{32} = 0,25 \cdot 10^3; a_{33} = -1,5 \cdot 10^3; E/L_1 = 120 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

К системе уравнений, записанной в нормальной форме, необходимо добавить вектор, который отражает начальное состояние цепи в момент времени $t = 0_+$.

Так как переменные состояния подчиняются законам коммутации, то этот вектор можно получить из анализа состояния цепи до коммутации, т. е. при $t = 0_-$:

$$\begin{cases} i_{L1}(0_-) = i_{L2}(0_-) = gE = 30 \text{ A}; \\ u_C(0_-) = g(r_2 + r_4)E = 90 \text{ В}. \end{cases}$$

Таким образом, вектор начальных состояний цепи имеет вид

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} u_C(0) \\ i_{L1}(0) \\ i_{L2}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

При обращении к программе **rkfixed**, входящей в систему MathCAD, можно использовать найденные выше значения коэффициентов дифференциальных уравнений или задать их в виде расчетных формул с указанием значений исходных параметров схемы. Последняя форма заданий параметров приведена на рис. 4.26. Там же приведен результат расчета по программе **rkfixed**. При построении графиков приняты следующие обозначения и масштабные коэффициенты: $x_1 \rightarrow z_{i1} = u_C$; $x_2 \rightarrow z_{i2} = i_{L1}$; $x_3 \rightarrow z_{i3} = i_{L2}$; $\mu_{u_C} = 5$; $\mu_{i_L} = 10$.

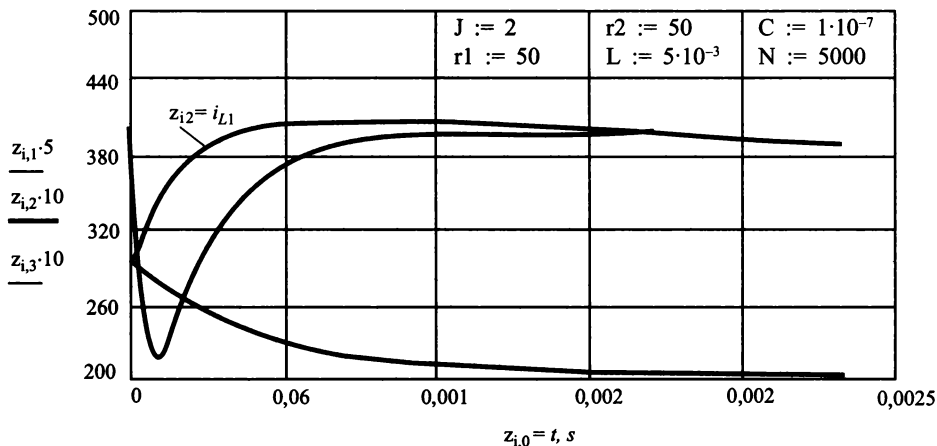


Рис. 4.26. Результаты расчета к примеру 4.14

Кроме этого, при вводе данных указано время интегрирования, которое, как и раньше, выбрано по формуле $t_k = 3/b_{min}$, где b_{min} — минимальное значение модуля вещественной части собственных чисел матрицы $\text{eigenvals}(A)$. Для рассматриваемого примера это число имеет значение $b = 1,268E3$, откуда находим значение $t_k = 2E-3$ с.

Операторный метод. Операторный метод относится к методам расчета переходных процессов по комплексным значениям. В основу операторного метода расчета переходных процессов положено интегральное преобразование Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

где $p = c + j\omega$ — комплексная переменная, обычно называемая оператором, ω — угловая частота, c — некоторая вещественная постоянная. Применительно к электрическим цепям оператор p можно рассматривать как комплексную частоту ω , в которой $c > 0$ характеризует затухание гармонических колебаний, представленных вращающимся вектором $e^{j\omega t}$.

Кроме интегрального преобразования Лапласа, в операторном методе расчета часто используют интегральное преобразование Карсона–Хевисайда, которое отличается от преобразования Лапласа дополнительным множителем p :

$$F(p) = pF(p).$$

Основным достоинством преобразования Карсона–Хевисайда является совпадение размерностей оригинала и изображения. Однако для практического использования операторного метода это особенность не имеет принципиального значения, поэтому в настоящем пособии используется преобразование Лапласа.

Преобразование подобного рода, но при условии $c = 0$ и $p = j\omega$, было использовано ранее при расчете цепей синусоидального и несинусоидального периодического тока по комплексным значениям.

Особенностью применения интегрального преобразования Лапласа является возможность замены интегродифференциальных уравнений цепи, составленных для функций времени t , алгебраическими уравнениями для функций оператора p . В результате этого система интегродифференциальных уравнений для мгновенных значений напряжений и токов заменяется системой алгебраических уравнений в операторной форме.

Алгоритм расчета цепей операторным методом состоит из трех основных этапов:

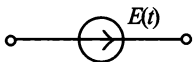
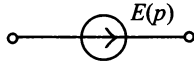

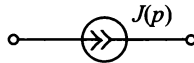
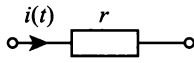
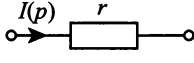
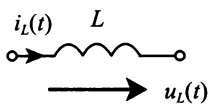
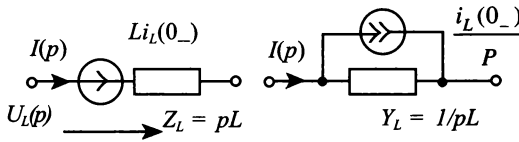
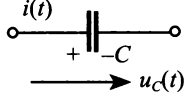
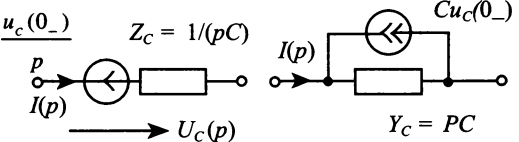
- » составления операторной схемы замещения цепи;
- » расчета операторной схемы замещения;
- » определения оригинала реакции цепи по его операторному изображению.

Рассмотрим эти этапы расчета более подробно. На этапе составления операторной схемы замещения необходимо выполнить следующие действия:

- рассчитать начальные условия в цепи для всех переменных состояния, т. е. для напряжений на емкостях и токов в индуктивностях до коммутации цепи (при $t = 0_-$);
- представить исходную схему после коммутации и, используя таблицу операторных соответствий (табл. 4.2), произвести замену элементов оригинальной схемы их операторными эквивалентами.

Таблица 4.2

Операторные схемы замещения элементов цепи

Элемент цепи	Оригинальная схема	Операторная схема
Источник напряжения		
Источник тока		
Сопротивление		
Индуктивность		
Емкость		

На этапе расчета операторной схемы замещения допускается использование всех известных методов расчета цепей постоянного тока:

- законов Кирхгофа и любых эквивалентных преобразований,
- методов контурных токов и узловых напряжений,
- методов наложения и эквивалентного генератора.

При этом возможно решение как прямых, так и обратных задач, поскольку операторная схема замещения позволяет рассчитать изображения напряжений и

токов всех ветвей цепи. Источники напряжений и токов, соответствующие ненулевым начальным условиям в исходной цепи, допускают любые эквивалентные преобразования, используемые для независимых источников. Некоторые функции и их операторные изображения приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Функции времени и их операторные изображения

№	Функция времени $f(t)$	Изображение по Лапласу $F(p)$
1	at	a/p^2
2	e^{-at}	$1/(p + a)$
3	$1 - e^{-at}$	$a/[p(p + a)]$
4	$\sin(\omega t + \psi)$	$(p \sin \psi + \omega \cos \psi) / (p^2 + \omega^2)$
5	$e^{-at} \sin \omega t$	$\omega / [(p + a)^2 + \omega^2]$
6	$e^{-at} \cos \omega t$	$(p + a) / [(p + a)^2 + \omega^2]$
7	te^{-at}	$1/(p + a)^2$
8	$t \sin \omega t$	$2\omega p / (p^2 + \omega^2)^2$
9	$t \cos \omega t$	$(p^2 - \omega^2) / (p^2 + \omega^2)^2$
10	$f(t) \sin \omega t$	$[F(p - j\omega) - F(p + j\omega)]/2$
11	$f(t) \cos \omega t$	$[F(p - j\omega) + F(p + j\omega)]/2$
12	$t^n/n!$	$p^{-(n+1)}$
13	$1(t)$	$1/p$
14	$A \cdot 1(t)$	A/p
15	$\delta(t) = d1(t)/dt$	1
16	$df(t)/dt$	$pF(p) - f(0)$
17	$\int_0^t f(t) dt$	$F(p)/p$
18	$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)$	$\sum_{k=1}^n a_k F_k(p)$
19	$f(at)$	$F(p/a)/a$
20	$f(t - t_0)$	$e^{-pt_0} F(p)$
21	$1(t - t_0)$	e^{-pt_0}/p
22	$e^{-a(t-t_0)}$	$e^{-pt_0}/(p + a)$
23	$e^{-at} f(t)$	$F(p + a)$

На этапе *определения оригинала* функции цепи по ее эквивалентному операторному изображению допускаются следующие способы:

- использование справочных таблиц операторного соответствия;
- применение формул разложения или вычетов.

Таблицы операторных соответствий приводятся в большинстве справочников по математике. С помощью этих таблиц можно найти требуемую операторную функцию $F(p)$ и записать ее оригинал $f(t)$. Некоторые из таких функций приведены в табл. 4.3.

Если операторное изображение $F(p)$ представлено в виде дробно-рациональной функции, у которой степень m полинома числителя $F_1(p)$ не выше степени n полинома знаменателя $F_2(p)$, т. е. $m < n$:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0},$$

то оригинал можно определить по *формуле разложения*, которая имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

где p_k — корни уравнения $F_2(p) = 0$, которые являются полюсами функции $F(p)$;
 $F_2'(p) = dF_2/dp|_{p=p_k}$ — производная знаменателя при $p = p_k$.

Для определения оригинала можно также использовать формулу вычетов, которая имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} F(p) e^{p_k t},$$

где $\operatorname{res}_{p=p_k} F(p)$ — вычет функции $F(p)$ в полюсе $p = p_k$.

Определение вычетов для случая дробно-рациональных дробей производится по формуле

$$\operatorname{res}_{p=p_k} F(p) = \frac{F_1(p_k)(p - p_k)}{\prod_{k=1} (p - p_k)},$$

откуда следует, что для определения вычета в полюсе $p = p_k$ необходимо значение полюса подставить в числитель рациональной дроби $F_1(p_k)$, а в знаменателе, представленном в виде произведения $\prod (p - p_k)$, исключить член $(p - p_k)$ при подстановке $p = p_k$ (при этом многочлен знаменателя должен быть приведенным, т. е. не содержать коэффициента при старшей степени p).

Пример 4.15. Требуется рассчитать операторным методом переходный процесс в цепи второго порядка, схема которой изображена на рис. 4.20а. Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $E = 40\text{В}$; $r = 40\text{ Ом}$; $L = 1\text{ Гн}$; $C = 1/300\text{ Ф}$.

Решение. Решение задачи начнем с построения операторной схемы замещения, которая должна соответствовать оригинальной схеме после размыкания ключа K . Эта схема приведена на рис. 4.27 и отличается от оригинальной тем, что в ней индуктивность, в соответствии с табл. 4.2, заменена сопротивлением pL и источником напряжения $Li_L(0_-) = LE/r = 1\text{ В}$, а емкость — сопротивлением $(pC)^{-1}$ и источником напряжения $uC(0_-)/p = 40/p\text{ В}$.

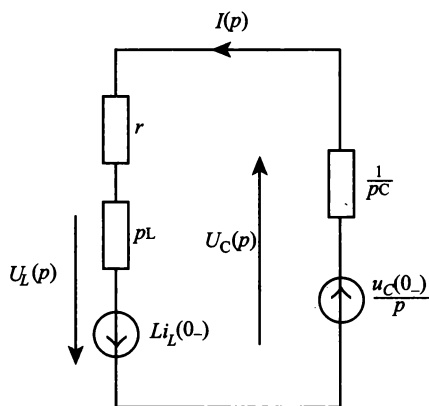


Рис. 4.27. Операторная схема замещения к примеру 4.15

Для расчета этой схемы составим уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$I(p)(r + pL + 1/pC) = u_C(0_-)/p + Li_L(0_-),$$

из которого находим операторный ток

$$I(p) = \frac{u_C(0_-)/p + Li_L(0_-)}{r + pL + 1/pC} = \frac{p + 40}{p^2 + 40p + 300} = \frac{p + 40}{(p + 10)(p + 30)}$$

и операторные напряжения на емкости и индуктивности:

$$U_C(p) = I(p)/pC - u_C(0_-)/p = \frac{-(40p + 1300)}{p^2 + 40p + 300} = \frac{-(40p + 1300)}{(p + 10)(p + 30)},$$

$$U_L(p) = I(p)/(pL) - i_L(0_-)L = \frac{-300}{p^2 + 40p + 300} = \frac{-300}{(p+10)(p+30)}.$$

Из полученных выражений следует, что корни знаменателя для тока и напряжений одинаковы и равны $p_1 = -10 \text{ с}^{-1}$; $p_2 = -30 \text{ с}^{-1}$.

Теперь, располагая операторными значениями тока и напряжений, определим их оригинальные (мгновенные) значения. Наиболее просто оригинальные значения можно определить по формуле вычетов. Для этого в знаменателе при подстановке значений корней следует исключить сомножители, которые обращаются в нуль. В числителе всех выражений значения корней подставляются непосредственно. Таким образом, после подстановки значений корней получим:

$$\begin{cases} i(t) = 1,5e^{-10t} - 0,5e^{-30t} \text{ А;} \\ u_C(t) = -45e^{-10t} + 5e^{-30t} \text{ В;} \\ u_L(t) = -15(e^{-10t} - e^{-30t}) \text{ В.} \end{cases}$$

Графики тока и напряжений приведены на рис. 4.10.

Пример 4.16. В цепи, схема которой приведена на рис. 4.28а, размыкается ключ K . Требуется определить переменные состояния — ток в индуктивности i_L и напряжение на емкости u_C после коммутации цепи. Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $E = 100 \text{ В}$; $J = 1 \text{ А}$; $r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $C = 1000 \text{ мкФ}$.

Решение.

1 Определим начальные условия в цепи до коммутации и составим операторную схему замещения. При замкнутом ключе K ток в цепи протекал по контуру, в который входили следующие элементы: источник напряжения E , индуктивность L , сопротивление r_1 и ключ K . Ток источника J протекал через замкнутый ключ K . Таким образом, начальные условия в цепи до размыкания ключа K имели значения: $i_L(0_-) = E/r_1 = 10 \text{ А}$; $u_C(0_-) = 0$.

После размыкания ключа K в цепи начинается переходный процесс, который связан с подключением к цепи источника тока J и перераспределением энергии между элементами цепи. Операторная схема замещения после размыкания ключа K показана на рис. 4.28б. На этой схеме индуктивность L заменена операторным сопротивлением $Z_L(p) = pL$ и источником напряжения $Li_L(0_-) = 1$, включенными последовательно, а емкость C — операторным сопротивлением $Z_C(p) = 1/pC$. Кроме

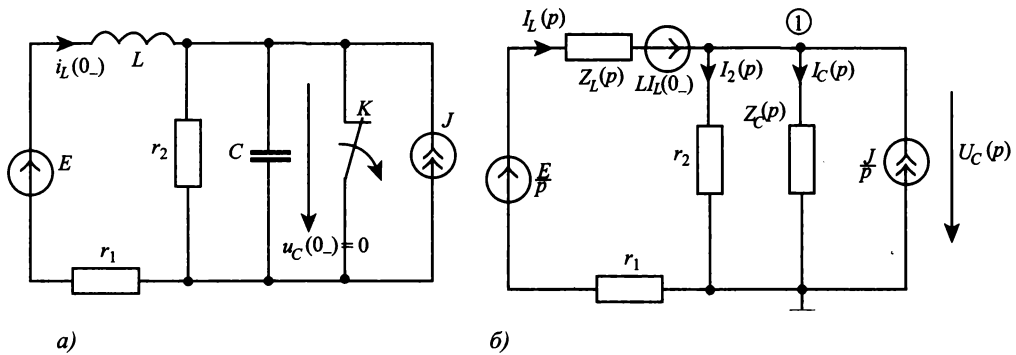


Рис. 4.28. Исходная схема (а) и операторная схема замещения (б) к примеру 4.16

этого, в схему включены операторные источники напряжения E/p и тока J/p .

2 Выполним расчет операторной схемы замещения и найдем операторные значения тока в индуктивности $I_L(p)$ и напряжения на емкости $U_C(p)$. При решении воспользуемся методом узловых напряжений в операторной форме и составим уравнение для единственного независимого узла 1:

$$U_C(p)Y_1(p) = J_1(p);$$

где $Y_1(p) = 1/(r_1 + pL) + pC + 1/r_2 = (10^{-3}p^2 + 0,2p + 20)/(p + 100)$ — узловая проводимость;

$$J_1(p) = \frac{J}{p} + \frac{E/p + Li_L(0_-)}{r_1 + pL} = \frac{110 + 1,1p}{p(10 + 0,1p)} \text{ — узловой ток.}$$

Из этих уравнений находим операторное напряжение на емкости:

$$U_C(p) = \frac{J_1(p)}{Y_1(p)} = \frac{10^4(110 + 1,1p)}{p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)} = \frac{10^4(110 + 1,1p)}{p(p - p_1)(p - p_2)},$$

где p_1, p_2 — корни характеристического уравнения $p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4 = 0$.

Из решения характеристического уравнения находим корни

$$p_1 = -100(1 - j);$$

$$p_2 = -100(1 + j).$$

Операторный ток в индуктивности определим по формуле:

$$I_L(p) = \frac{E/p + Li_L(0_-) - U_C(p)}{r_1 + pL} = \frac{10p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 9 \cdot 10^4}{p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)} = \frac{10p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 9 \cdot 10^4}{p(p - p_1)(p - p_2)}.$$

3 Используя операторные выражения для напряжения на емкости и тока в индуктивности, определим их мгновенные значения. Поскольку знаменатели операторных выражений в обоих случаях одинаковы, то корни характеристических уравнений имеют значения: $p_0 = 0$; $p_1 = -100 + 100j$; $p_2 = -100 - 100j$.

Используя формулу вычетов после подстановки значений корней в операторные выражения, получим:

$$u_C(t) = 55 + 55\sqrt{2} e^{-100t} \sin(100t - 45^\circ) \text{ В};$$

$$i_L(t) = 4,5 + 5,5\sqrt{2} e^{-100t} \sin(100t + 45^\circ) \text{ А}.$$

Полученные выражения показывают, что напряжение на емкости имеет нулевое значение при $t = 0$, а затем принимает затухающий колебательный характер с угловой частотой $\omega_C = 100 \text{ рад/с}$. При $t \rightarrow \infty$ напряжение на емкости стремится к установившемуся значению, равному $u_{Cnp} = 55 \text{ В}$.

Ток в индуктивности равен 10 А при $t = 0$, а затем, так же как и напряжение на емкости, принимает затухающий колебательный характер с той же угловой частотой $\omega_C = 100 \text{ рад/с}$. При $t \rightarrow \infty$ ток в индуктивности стремится к установившемуся значению, равному $4,5 \text{ А}$. При этом переменная составляющая тока в индуктивности опережает переменную составляющую напряжения на емкости на угол, равный 90° .

Графики напряжения на емкости и тока в индуктивности, рассчитанные по полученным выше формулам, приведены на рис. 4.29.

Пример 4.17. Используя условия примера 4.11, требуется рассчитать операторным методом напряжение на сопротивлении R нагрузки для схемы, которая изображена на рис. 4.18а, при импульсном воздействии, приведенном на рис. 4.18б.

Решение.

1 Решение задачи начнем с построения операторной схемы замещения цепи, которая изображена на рис. 4.30а. На этой схеме все элементы цепи заменены их операторными изображениями. В соответствии с условиями задачи, в цепи действуют нулевые начальные условия, поэтому расчет начальных условий в индуктивности и емкости не выполняется. Дополнительные источники, обычно включаемые последовательно с индуктивным и емкостным элементами, в данной схеме отсутствуют.

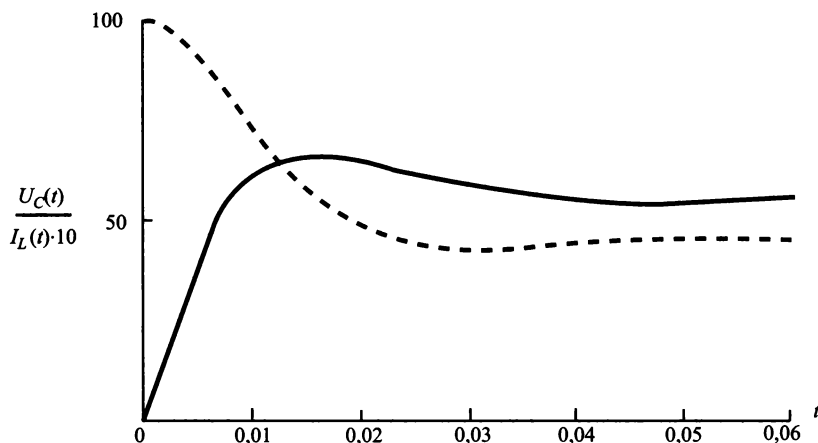


Рис. 4.29. Графики напряжения на емкости и тока в индуктивности к примеру 4.16

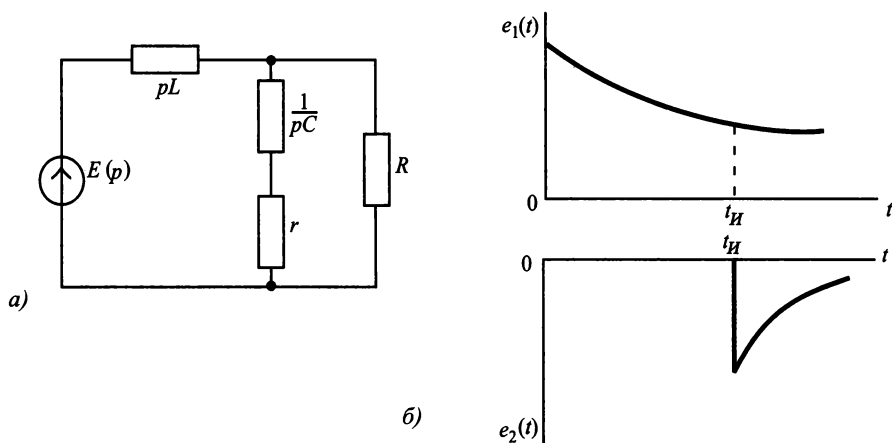


Рис. 4.30. Операторная схема замещения (а) и форма импульса (б) к примеру 4.17

Существенным отличием рассматриваемой схемы является присутствие в ней импульсного источника напряжения, изображение которого можно найти, пользуясь табл. 4.3. Для этого следует представить импульс, изображенный на рис. 4.18б, в виде разности двух экспоненциальных функций, смещенных на время, равное длительности импульса $t_H = 0,2 \cdot 10^{-3}$ с, как показано на рис. 4.30б.

Используя данные табл. 4.3 (позиции 2 и 22), изображения таких функций можно представить в виде:

$$E(p) = \frac{E_0}{a+p} (1 - e^{-at_n} e^{-pt_n}).$$

Такое же выражение можно получить непосредственным применением интеграла прямого преобразования Лапласа при условии замены верхнего предела на время, равное длительности импульса t_H .

После подстановки числовых значений исходных данных получим операторное изображение напряжения экспоненциального импульса в виде:

$$E(p) = E_1(p) - E_2(p) = \frac{100}{p+1000} - \frac{81,87}{p+1000} e^{-0,0002p},$$

из которого следует, что оно состоит из разности двух членов, второй из которых задержан относительно первого на время, равно $t_H = 0,0002$ с и имеет максимальное значение $E_0 e^{-0,2} = 0,8187 E_0$.

Напряжение на нагрузке определим, пользуясь законом Ома:

$$U_R(p) = E(p) Z_1 / (Z_L + Z_1),$$

где $Z_1 = R(1 + pCr) / [1 + pC(r + R)]$ — операторное сопротивление параллельно соединенных ветвей; $Z_L = pL$ — операторное сопротивление индуктивности.

После подстановки значений параметров элементов, найдем значения сопротивлений цепи:

$$Z_1 = 125(p + 4000) / (p + 2000);$$

$$Z_1 + Z_L = p^2 10^{-2} + 145p + 5 \cdot 10^5;$$

$$\begin{aligned} Z_1 / (Z_1 + Z_L) &= 1,25 \cdot 10^4 (p + 4000) / (p^2 + 1,45 \cdot 10^4 p + 5 \cdot 10^7) = \\ &= \frac{1,25 \cdot 10^4 (p + 4000)}{(p + 5670)(p + 8830)}. \end{aligned}$$

Операторное значение напряжения на нагрузке найдем по формуле:

$$\begin{aligned} E_R(p) &= \frac{E(p) Z_1}{Z_1 + Z_2} = 100 \frac{1,25 \cdot 10^4 (p + 4000)}{(p + 1000)(p + 5670)(p + 8830)} - \\ &- 81,87 \frac{1,25 \cdot 10^4 (p + 4000)}{(p + 1000)(p + 5670)(p + 8830)} e^{-0,0002p}. \end{aligned}$$

Используя формулу вычетов, находим мгновенное значение напряжения на нагрузке:

$$u_R(t) = (102,5e^{-1000t} + 141,5e^{-5670t} - 244e^{-8830t}) 1(t) - \\ - [83,86e^{-1000(t - 0,0002)} + 115,7e^{-5670(t - 0,0002)} - \\ - 199,6e^{-8830(t - 0,0002)}] 1(t - 0,0002) \text{ В.}$$

График напряжения на нагрузке был приведен ранее на рис. 4.196 при решении этой задачи с помощью интеграла Дюамеля. Результаты расчета в обоих случаях совпадают.

Из рассмотрения решения этой задачи операторным методом можно сделать следующие выводы:

- ▶▶ операторный метод можно успешно использовать при импульсных воздействиях произвольной формы, заданных в аналитическом виде;
- ▶▶ расчет реакции операторным методом проще, чем с помощью интеграла Дюамеля, так как нет необходимости определять переходную характеристику цепи;
- ▶▶ расчет операторным методом допускает ненулевые начальные условия в цепи.

ЗАДАНИЕ 4.1. Расчет переходных процессов в цепях первого порядка.

Для схем, изображенных на рис. 4.31, требуется рассчитать мгновенное значение величины, указанной в табл. 4.4, после выполнения коммутации. Выбор схемы, параметров ее элементов и вида коммутации осуществляются с помощью табл. 4.4, в соответствии с номером варианта. Расчет выполнить классическим и операторным методами.

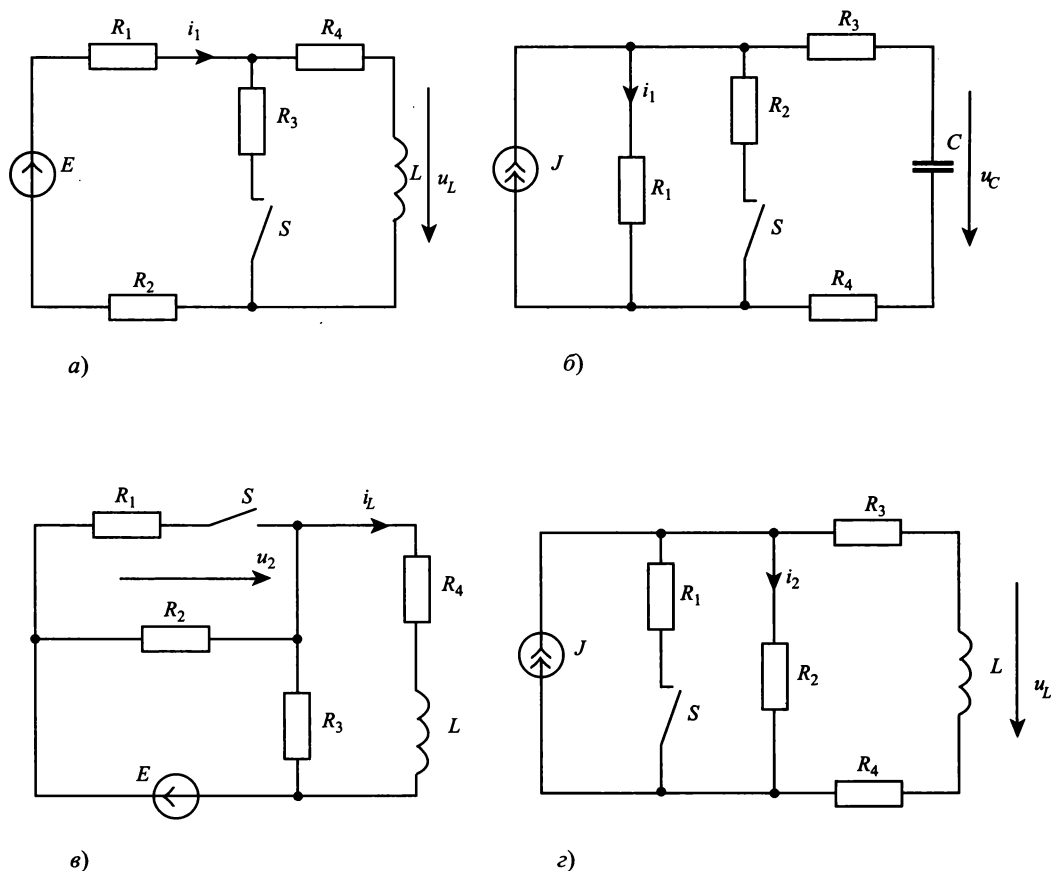
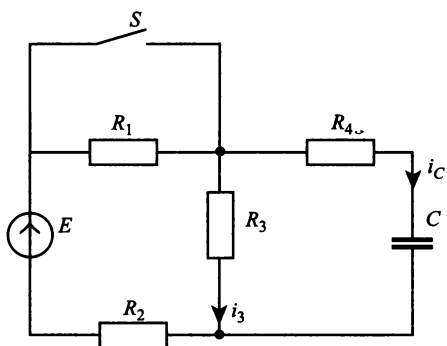
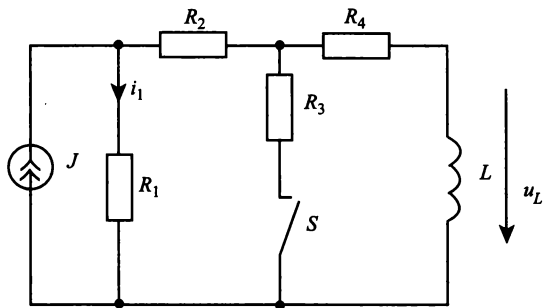


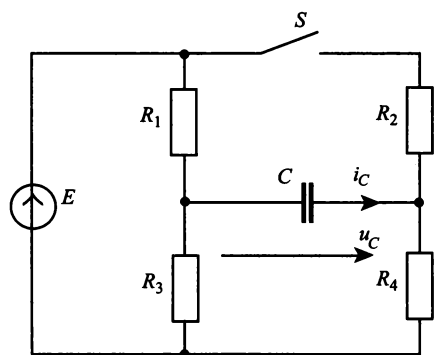
Рис. 4.31. Схемы цепей к заданию 4.1



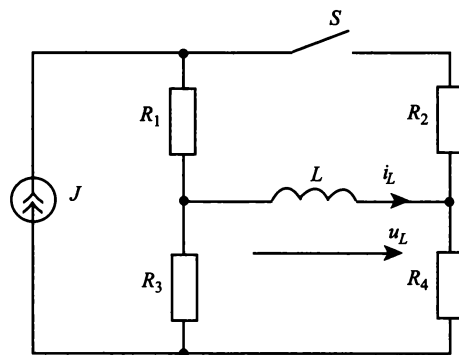
д)



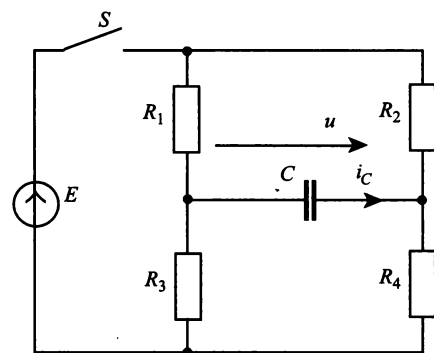
е)



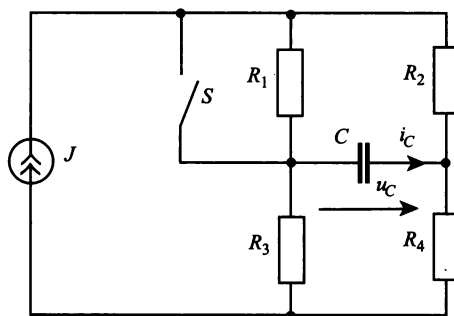
ж)



з)

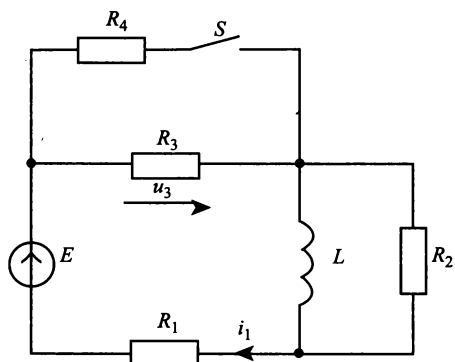


и)

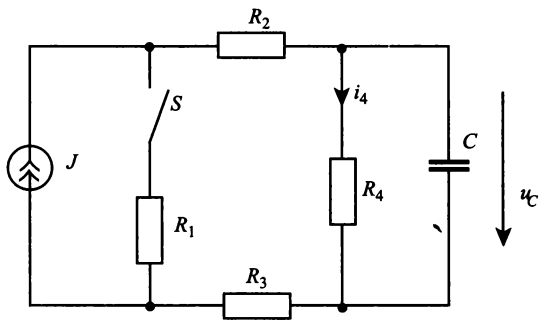


к)

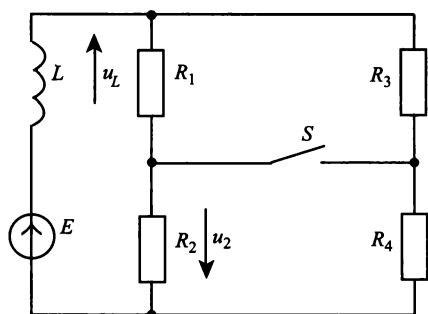
Рис. 4.31 (продолжение). Схемы цепей к заданию 4.1



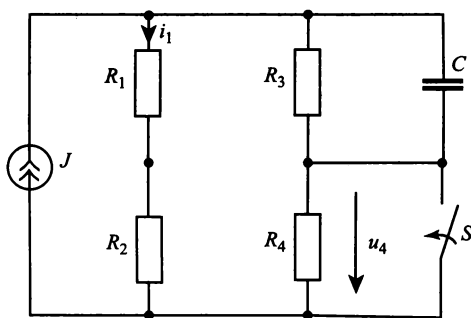
л)



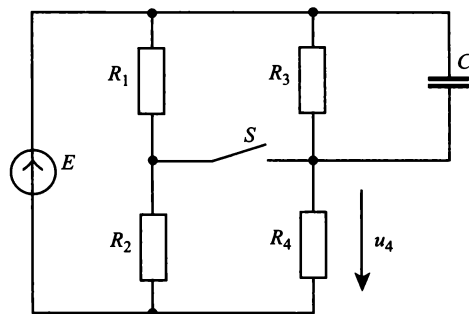
м)



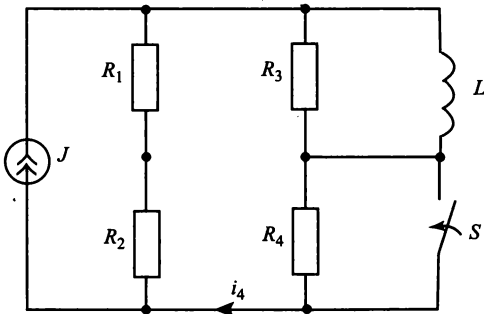
н)



о)



п)



р)

Рис. 4.31 (окончание). Схемы цепей к заданию 4.1

Таблица 4.4

Параметры элементов схемы

Вариант	Схема	$E, В$	$J, А$	$L, мГн$	$C, мкФ$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$R_4, Ом$	Найти	Ключ S
1	а	120	–	1	–	20	20	40	20	u_L	З
2	б	–	2	–	10	40	20	10	30	u_C	Р
3	в	100	–	1	–	10	10	25	25	i_L	З
4	г	–	4	2	–	6	6	3	6	i_2	Р
5	д	150	–	–	10	50	50	25	25	i_C	З
6	е	–	6	2	–	3	3	3	3	i_1	Р
7	ж	120	–	–	5	40	50	20	40	u_C	З
8	з	–	8	1	–	2	4	4	2	u_L	Р
9	и	50	–	–	5	20	30	35	15	i_C	З
10	к	–	10	–	5	10	30	35	5	u_C	Р
11	л	80	–	10	–	20	60	60	40	u_3	З
12	м	–	12	–	5	12	3	6	3	i_4	Р
13	н	100	–	10	–	40	40	20	40	u_L	З
14	о	–	2	–	2	2	4	4	3	i_1	Р
15	п	160	–	–	10	20	60	50	30	u_4	З
16	р	–	4	1	–	1	3	4	2	i_4	Р
17	а	50	–	10	–	10	40	100	100	i_1	Р
18	б	–	6	–	1	20	10	5	15	i_1	З
19	в	60	–	20	–	5	5	15	15	u_2	Р
20	г	–	8	10	–	8	8	4	12	u_L	З
21	д	80	–	–	1	20	20	10	10	i_3	Р
22	е	–	10	10	–	2	2	4	4	u_L	З
23	ж	100	–	–	2	20	40	45	15	i_C	Р
24	з	–	2	2	–	4	2	1	5	i_L	З
25	и	120	–	–	5	40	10	30	30	u_C	Р
26	к	–	4	–	10	4	6	8	2	i_C	З
27	л	150	–	8	–	50	50	60	40	i_1	Р
28	м	–	6	–	8	12	6	3	3	u_C	З
29	н	180	–	8	–	20	20	40	40	u_2	Р
30	о	–	8	–	10	4	8	8	16	u_4	З

Примечание: Р — ключ S размыкается; З — ключ S замыкается.

ЗАДАНИЕ 4.2. Расчет переходных процессов в цепях второго порядка

Для схем, изображенных на рис. 4.32, требуется рассчитать мгновенные значения величин, указанных в табл. 4.5, после выполнения коммутации. Выбор схемы, параметров ее элементов и вида коммутации осуществляются с помощью таблицы 4.5, в соответствии с номером варианта. Расчет выполнить двумя методами: переменных состояния и операторным.

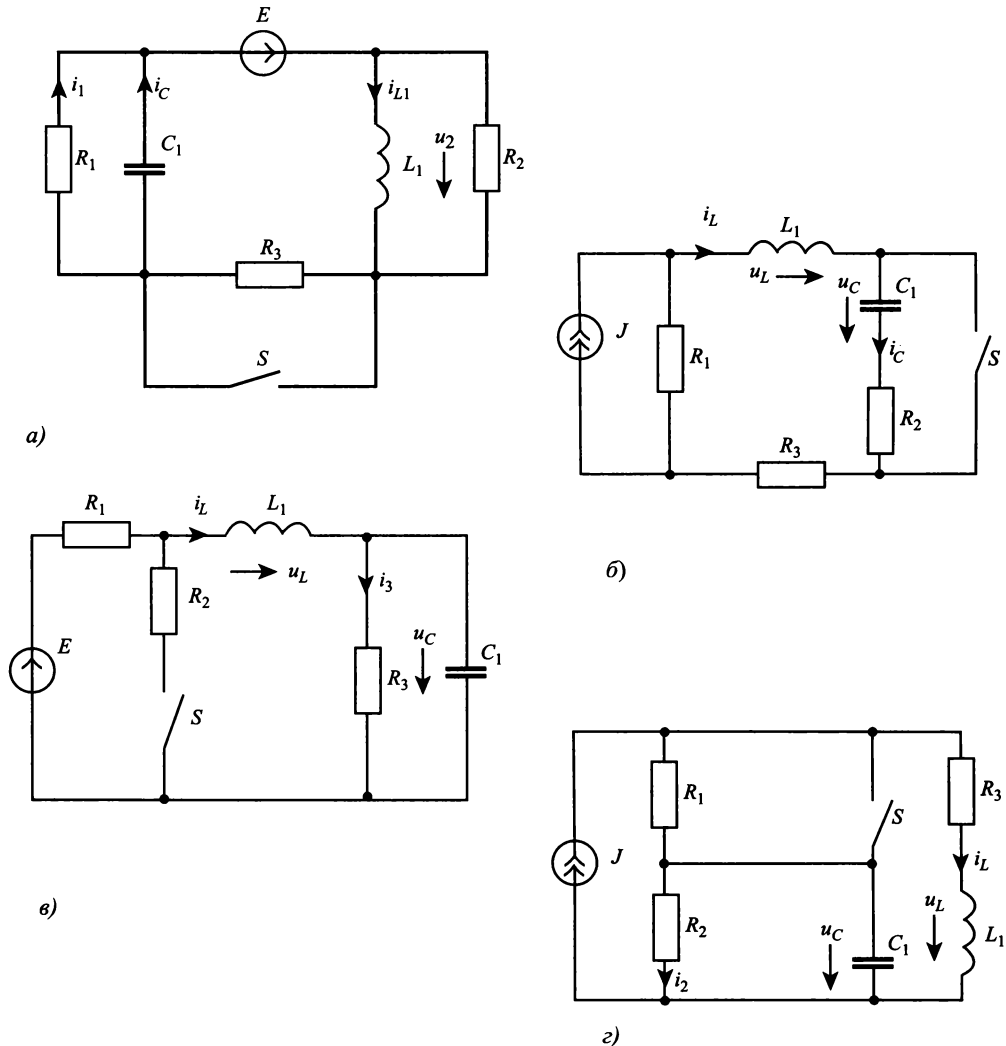
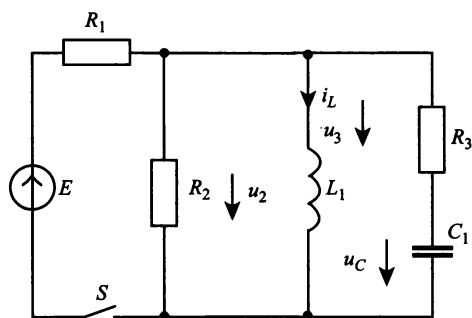
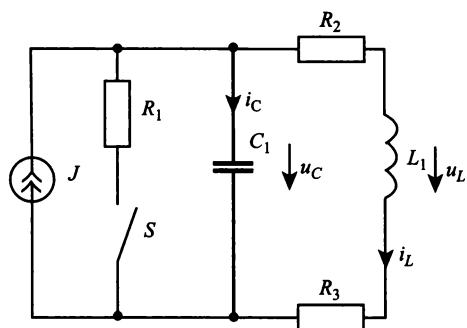


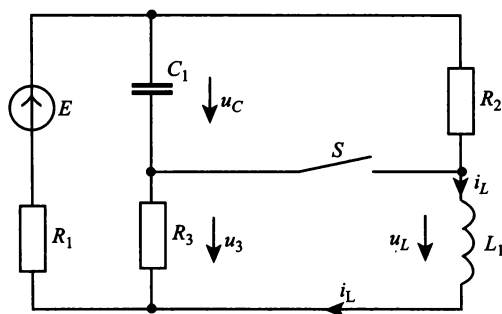
Рис. 4.32. Схемы цепей к заданию 4.2



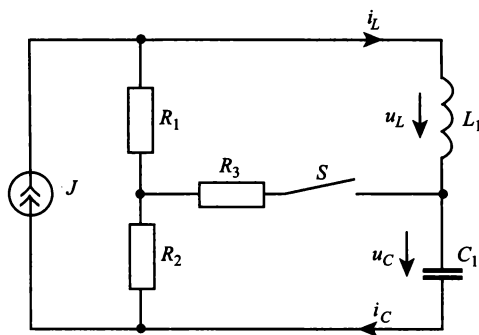
д)



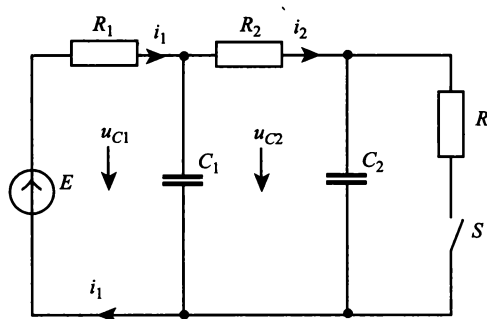
е)



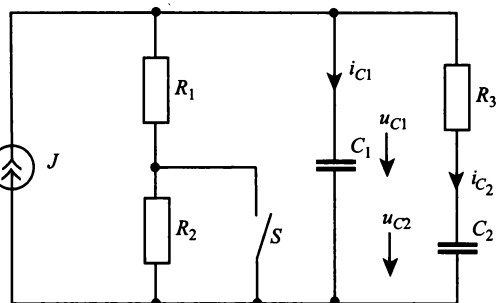
ж)



з)

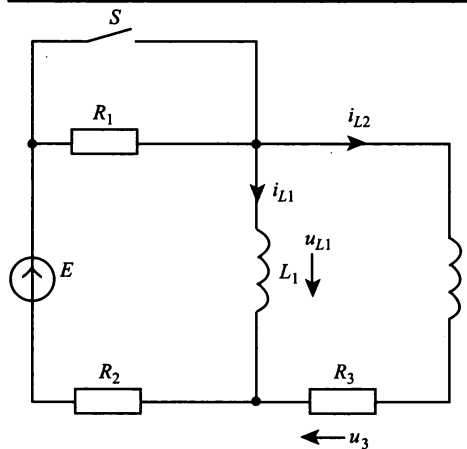


и)

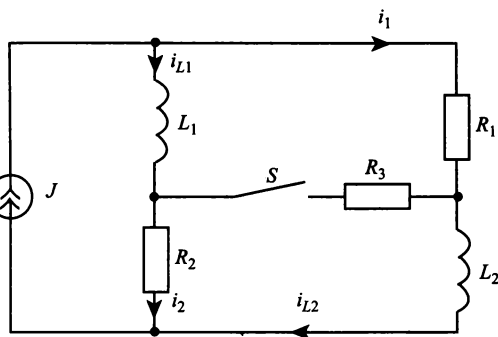


к)

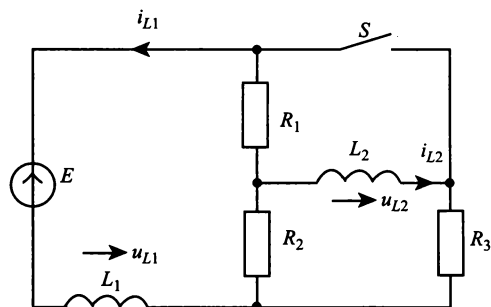
Рис. 4.32 (продолжение). Схемы цепей к заданию 4.2



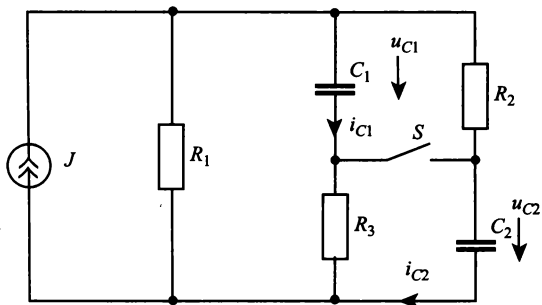
л)



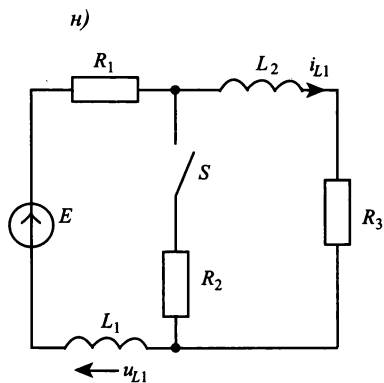
м)



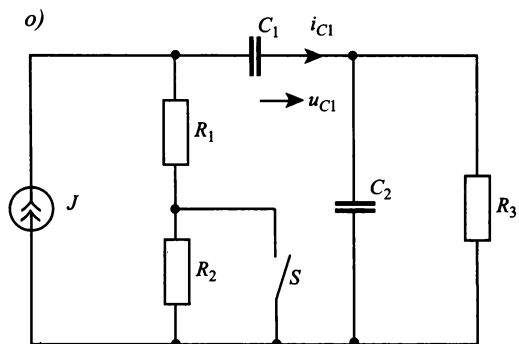
н)



о)



п)



р)

Рис. 4.32 (окончание). Схемы цепей к заданию 4.2

Таблица 4.5

Параметры элементов схемы

Вариант	Схема	$E, В$	$J, А$	$L_1', МГн$	$L_2', МГн$	$C_1', мкФ$	$C_2', мкФ$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	Найти	Ключ S
1	а	120	–	1	–	10	–	4	4	8	i_C i_1	З
2	б	–	5	1	–	10	–	20	20	10	u_C i_C	Р
3	в	120	–	10	–	10	–	100	500	500	i_L u_L	З
4	г	–	10	1	–	500	–	2	2	6	u_C i_2	Р
5	д	120	–	1	–	10	–	1	3	3	i_L u_2	З
6	е	–	30	5	–	4	–	20	10	20	u_C i_C	З
7	ж	60	–	2	–	5	–	10	10	10	u_L i_L	Р
8	з	–	30	0,2	–	10	–	5	5	10	u_C i_C	З
9	и	120	–	–	–	10	50	10	20	10	u_{C1} i_1	Р
10	к	–	5	–	–	20	40	10	20	30	u_{C1} i_{C1}	З
11	л	60	–	10	30	–	–	4	4	8	u_{L1} i_{L1}	З
12	м	–	12	1	4	–	–	4	6	8	i_{L1} i_1	З
13	н	120	–	2	8	–	–	4	4	8	u_{L1} i_{L1}	Р
14	о	–	10	–	–	10	30	6	4	2	u_{C1} i_{C1}	Р
15	п	80	–	1	5	–	–	8	4	4	u_{L1} i_{L1}	З
16	р	–	2	–	–	10	20	5	15	20	u_{C1} i_{C1}	Р
17	а	100	–	1	–	0,5	–	10	5	5	u_2 i_{L1}	Р
18	б	–	2	1	–	1	–	40	20	10	u_L i_L	Р
19	в	100	–	10	–	1	–	40	60	60	u_C i_3	Р

Вариант	Схема	$E, В$	$J, А$	$L_1', мГн$	$L_2', мГн$	$C_1', мкФ$	$C_2', мкФ$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	Найти	Ключ S
20	г	–	4	1	–	10	–	4	4	2	u_L i_L	З
21	д	120	–	5	–	1	–	2	4	2	u_C u_3	Р
22	е	–	4	10	–	1	–	30	20	10	u_L i_L	З
23	ж	60	–	1	–	0,2	–	20	15	5	u_C u_3	З
24	з	–	6	1	–	0,5	–	2	4	4	$i_L u_L$	З
25	и	80	–	–	–	20	10	5	15	20	u_{C2} i_{C2}	З
26	к	–	6	–	–	4	2	10	20	10	u_{C2} u_3	Р
27	л	30	–	5	15	–	–	5	15	5	u_3 i_{L2}	Р
28	м	–	12	4	2	–	–	2	4	6	i_{L2} i_2	З
29	н	60	–	6	1	–	–	4	6	10	u_{L2} i_{L2}	Р
30	о	–	4	–	–	20	10	40	20	60	u_{C2} i_{C2}	З

Примечание: З — ключ S при коммутации цепи замыкается; Р — ключ размыкается.

ЗАДАНИЕ 4.3. Расчет переходных процессов при импульсных воздействиях.

Для схемы, изображенной на рис. 4.33, требуется рассчитать мгновенное значение выходной величины, которая указана в табл. 4.6, в соответствии с вариантом задания, при воздействии импульсного сигнала, форма которого приведена в табл. 4.7. Значения параметров элементов цепи указаны в табл. 4.6.

Расчет выходной величины выполнить двумя методами: с помощью интеграла Дюамеля и операторным.

Таблица 4.6

Параметры элементов схемы

Вариант	$R_1, \text{кОм}$	$R_2, \text{кОм}$	$R_3, \text{кОм}$	$L_1, \text{мГн}$	$L_2, \text{мГн}$	$L_3, \text{мГн}$	$C_1, \text{мкФ}$	$C_2, \text{мкФ}$	$C_3, \text{мкФ}$	$t_{\text{и}}, \text{мкс}$	$e(t)$	Выход ($x_{\text{вых}}$)
1	2	—	2	—	—	—	—	1	—	1500	12	u_{C2}
2	0,4	0,4	0,4	—	—	—	—	—	0,25	300	13	u_{R2}
3	0,5	—	0,5	—	20	—	—	—	—	500	7	i_{L2}
4	1	1	1	—	—	15	—	—	—	30	5	i_{L3}
5	3	3	—	—	—	—	—	—	0,2	1000	8	u_{R3}
6	0,5	0,5	0,5	—	—	—	—	0,2	—	250	10	u_{C2}
7	0,3	0,3	—	—	—	30	—	—	—	400	2	i_{L3}
8	2	2	2	—	60	—	—	—	—	30	4	i_{L2}
9	—	0,3	0,3	—	—	45	4,5	—	—	2000	14	u_{R2}
10	0,45	—	0,45	—	—	25	—	5	—	100	11	u_{L3}
11	0,7	0,7	—	40	—	—	—	—	6	2000	16	u_{C3}
12	—	0,5	0,5	—	40	—	4	—	—	1000	3	i_{L2}
13	0,55	0,55	—	—	35	—	—	—	5,5	150	19	u_{L3}
14	0,65	—	0,65	55	—	—	—	8	—	200	18	i_{L1}
15	10	10	—	20	—	20	—	—	—	2	17	i_{L1}
16	—	30	30	30	30	—	—	—	—	0,5	11	u_{L1}
17	6	—	6	—	80	80	—	—	—	10	16	i_{L2}
18	5	—	5	200	200	—	—	—	—	1000	3	i_{L1}
19	—	8	8	20	—	20	—	—	—	1,5	9	u_{L3}
20	5	5	—	—	25	25	—	—	—	6	15	i_{L2}
21	1	1	—	—	—	—	2	—	2	1000	17	u_{C1}
22	—	0,8	0,8	—	—	—	12,5	12,5	—	5000	18	u_{C1}
23	2,5	—	2,5	—	—	—	—	4	4	8000	9	u_{C3}
24	0,75	—	0,75	—	—	—	4	4	—	5000	6	u_{C1}
25	—	2	2	—	—	—	1	—	1	1000	19	u_{C3}
26	1,5	1,5	—	—	—	—	—	2	2	2000	1	u_{C2}
27	0,2	0,2	0,2	—	—	10	1	—	—	500	6	u_{C1}
28	0,1	0,1	0,1	5	—	—	—	—	0,1	50	15	u_{L1}
29	0,15	0,15	0,15	—	8	—	1	—	—	50	1	i_{L2}
30	0,4	0,4	0,4	2	—	—	—	2,5	—	30	14	u_{C2}

Примечание. 1) В скобках указаны значения коэффициента затухания экспоненциального воздействия. 2) Воздействие указано порядковым номером табл. 4.7. 3) Прочерк в таблице обозначает отсутствие данного элемента на схеме, что соответствует замыканию его выводов. 4) $U_0 = 100$ В; $\alpha = 1000$ с⁻¹.

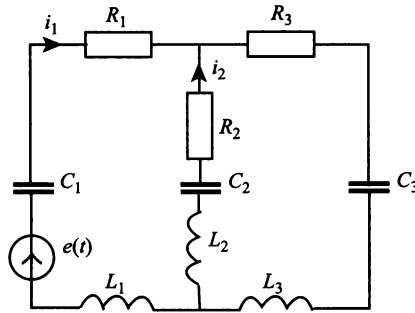
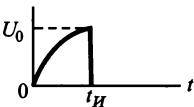
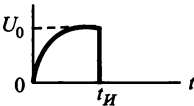
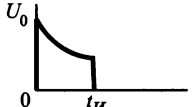
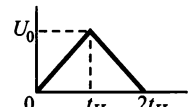

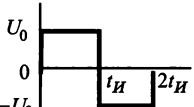
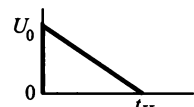
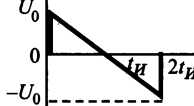
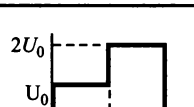


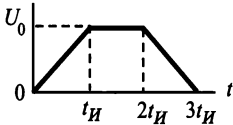
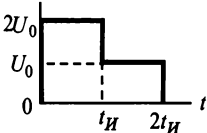
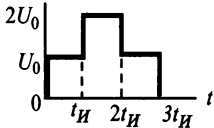
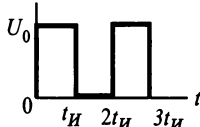
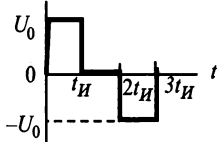
Рис. 4.32. Схема цепи к заданию 4.3

Таблица 4.7

Импульсные воздействия и их представление

№ п/п	Форма воздействия $u_{вх}(t)$	Аналитическое представление $u_{вх}(t)$
1		U_0 для $0 < t < t_{И}$, 0 для $t > t_{И}$
2		$U_0 t / t_0$ для $0 < t < t_{И}$, 0 для $t > t_{И}$
3		$U_0 \cos \omega_0 t$ для $0 < t < t_{И}$, 0 для $t > t_{И}$, где $\omega_0 = \pi / 2t_{И}$
4		$U_0 t / t_0$ для $0 < t < t_{И}$, U_0 для $t_{И} < t < 2t_{И}$, 0 для $t > 2t_{И}$
5		$U_0 + U_0 t / t_0$ для $0 < t < t_{И}$, $2U_0$ для $t_{И} < t < 2t_{И}$, 0 для $t > 2t_{И}$

№ п/п	Форма воздействия $u_{\text{вх}}(t)$	Аналитическое представление $u_{\text{вх}}(t)$
6		$\begin{aligned} &U_0 \sin \omega_0 t \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > t_H, \text{ где } \omega_0 = \pi/2t_H \end{aligned}$
7		$\begin{aligned} &U_0(1 - e^{-\omega t}) \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > t_H \end{aligned}$
8		$\begin{aligned} &U_0 e^{-\omega t} \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > t_H \end{aligned}$
9		$\begin{aligned} &U_0 t/t_H \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &U_0 - U_0(t - t_H)/t_H \quad \text{для } t_H < t < 2t_H \end{aligned}$
10		$\begin{aligned} &U_0 \sin \omega_0 t \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > t_H, \text{ где } \omega_0 = \pi/t_H \end{aligned}$
11		$\begin{aligned} &U_0 \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &-U_0 \quad \text{для } t_H < t < 2t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > 2t_H \end{aligned}$
12		$\begin{aligned} &U_0 - U_0 t/t_H \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > t_H \end{aligned}$
13		$\begin{aligned} &U_0 - U_0 t/t_H \quad \text{для } 0 < t < 2t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > 2t_H \end{aligned}$
14		$\begin{aligned} &U_0 \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &2U_0 \quad \text{для } t_H < t < 2t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > 2t_H \end{aligned}$

№ п/п	Форма воздействия $u_{вх}(t)$	Аналитическое представление $u_{вх}(t)$
15		$\begin{aligned} &U_0 t/t_H \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &U_0 \quad \text{для } t_H < t < 2t_H, \\ &U_0 - U_0(t - t_H)t \quad \text{для } 2t_H < t < 3t_H \end{aligned}$
16		$\begin{aligned} &2U_0 \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &U_0 \quad \text{для } t_H < t < 2t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > 2t_H \end{aligned}$
17		$\begin{aligned} &U_0 \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &2U_0 \quad \text{для } t_H < t < 2t_H, \\ &U_0 \quad \text{для } 2t_H < t < 3t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > 3t_H \end{aligned}$
18		$\begin{aligned} &U_0 \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &0 \quad \text{для } t_H < t < 2t_H, \\ &U_0 \quad \text{для } 2t_H < t < 3t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > 3t_H \end{aligned}$
19		$\begin{aligned} &U_0 \quad \text{для } 0 < t < t_H, \\ &0 \quad \text{для } t_H < t < 2t_H, \\ &-U_0 \quad \text{для } 2t_H < t < 3t_H, \\ &0 \quad \text{для } t > 3t_H \end{aligned}$

РАЗДЕЛ 5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Если эксперимент удался,
то что-то здесь не так.

Третий закон Фингейла

5.1. Общие сведения о моделирующих программах

Проверка правильности выполнения теоретического расчета различных электрических схем может осуществляться двумя способами:

- » экспериментальными исследованиями реальных схем;
- » моделированием схем на персональных компьютерах.

Длительное время в электротехнике преобладал первый способ, который, помимо некоторых достоинств, имел ряд существенных недостатков:

- ☐ для экспериментального исследования схем необходимо располагать соответствующим измерительным оборудованием: вольтметрами, амперметрами, электронными осциллографами, генераторами сигналов, частотомерами, анализаторами спектра и др.;
- ☐ погрешности реальных измерительных приборов не позволяют сравнивать результаты эксперимента и расчета с требуемой для практики точностью;

- ❑ для исследования схем необходимо собирать их макеты из реальных элементов, что приводит к существенным материальным и временным затратам.

Моделирование электрических цепей на компьютерах лишено этих и некоторых других недостатков:

- ❑ не требуются измерительные приборы и макеты исследуемых схем;
- ❑ погрешность исследования схем путем моделирования на компьютере можно сделать достаточно малой;
- ❑ время, затрачиваемое на компьютерное моделирование, несравненно меньше времени, расходуемого на изготовление макета и выполнение экспериментального исследования.

В то же время моделирование реальных схем на компьютере имеет и некоторые существенные недостатки:

- ❑ трудно учесть в моделях некоторые реально существующие паразитные параметры элементов схем: внутренние сопротивления и проводимости источников; собственные индуктивности и емкости реальных резисторов; потери в катушках индуктивности и конденсаторах;
- ❑ порой невозможно определить допустимость использования модели для получения требуемой точности моделирования, например, при использовании в схемах электромеханических двигателей или генераторов.

Тем не менее можно с уверенностью сказать, что моделирование электрических и электронных схем на компьютерах — это существенный прогресс в технике экспериментальных исследований. Путем сравнительно простых средств — персонального компьютера и программы моделирования — можно очень быстро выполнить проверку правильности расчета, установить области допустимых изменений параметров отдельных элементов, существенно снизить затраты на экспериментальные исследования.

В настоящее время существует ряд программ моделирования электрических и электронных схем. Приведем краткий перечень программ компьютерного моделирования и рассмотрим их некоторые особенности.

- Программа **PSpice** (Program Simulation with Integrated Circuits Emphasis) входит в пакет программ системы **OrCAD** (или более ранней системы **P-CAD**) [19, 20, 21]. Эта программа позволяет выполнять моделирование электрических и электронных схем при действии аналоговых входных сигналов. С ее помощью можно выполнять моделирование цепей в режимах постоянного и переменного тока, определять частотные характеристики цепей, анализировать переходные процессы в линейных и нелинейных цепях. Первая версия этой программы была разработана

корпорацией Micro Sim в 1984 году. Эта программа входит в состав систем OrCAD 9.1 и Micro Sim Design Lab 8.0 [22].

- » Программа **Micro-Cap** (Microcomputer Circuit Analysis Program) предназначена для моделирования линейных и нелинейных электрических и электронных схем. Первая версия этой программы была разработана фирмой Spectrum Software в 1981 году. В настоящее время эта программа выпущена в версии 5 [16, 24, 25].
- » Программа **Design Lab** включает модификацию программы **PSpice** и также разработана корпорацией Micro Sim. В настоящее время эта программа выпущена в версии 8.1 [17, 22].
- » Программа **Electronics Workbench** (EWB) разработана фирмой Interactive Image Technologies Ltd. в 1995 г [15, 18, 23]. Особенностью программы является использование в ней измерительных приборов, которые включаются в схему аналогично реальным измерительным приборам. Эта программа в наибольшей степени приспособлена для учебных целей [18].

При выборе программы для моделирования электрических схем, рассматриваемых в настоящем пособии, следует прежде всего руководствоваться следующими соображениями:

- ☐ простотой построения схемы исследуемой электрической цепи;
- ☐ возможностью получения результата моделирования в требуемой форме;
- ☐ наличием в программе всех необходимых для моделирования цепей элементов (источников напряжения и тока, элементов коммутации, источников сигналов требуемой формы и др.);
- ☐ возможностью получения так называемых *демонстрационных* или *обучающих версий* (Demo) программ через Internet.

Как показала практика применения перечисленных выше программ моделирования, все они могут быть использованы для учебных целей, поскольку удовлетворяют большинству поставленным выше требованиям. Некоторые неудобства вызывают отличные от принятых в учебнике условные обозначения ряда элементов: сопротивлений, источников напряжения и тока и др. Однако к этим условным обозначениям можно быстро привыкнуть и не допускать ошибок при составлении и расчете схем.

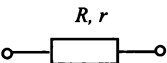

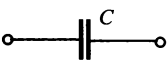
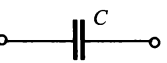
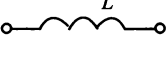
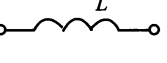
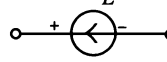
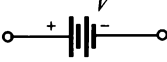
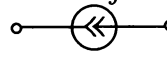
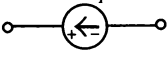
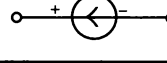
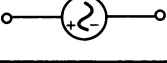
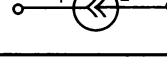

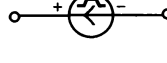
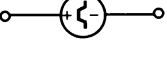
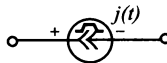
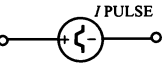
Другим весьма важным вопросом является уточнение целей моделирования при расчетах электрических цепей. Нужно признать, что, хотя моделирование электрических цепей выполняется с применением всех рассмотренных в учебнике методов расчета цепей, однако эти расчеты недоступны пользователю, который получает только конечный результат этих расчетов. В связи с этим представляется целесообразным использовать моделирование электрических цепей для решения следующих задач:

- ☐ контроля правильности выполняемых расчетов на различных этапах;
- ☐ предварительного получения ответа для решаемой задачи;
- ☐ графического построения временных зависимостей результатов расчета;
- ☐ построения частотных характеристик электрических цепей;
- ☐ построения векторных диаграмм по результатам расчета.

Элементная база, используемая во всех перечисленных выше программах моделирования, весьма обширна и включает в себя большое количество различных элементов электронных устройств: диодов, транзисторов и др.

Таблица 5.1

Используемые обозначения элементов электрических цепей

Наименование элемента	Изображение элемента в учебниках	Изображение элемента в программах	Свойства элемента
Сопротивление (Resistance R)			$i_R = u_R/R$ $u_R = i_R R$
Емкость (Capacitance C)			$i_C = C du_C/dt$ $u_C = U_0 + \int_0^t i_C dt$
Индуктивность (Inductance L)			$i_L = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt$ $u_L = L di_L/dt$
Источник постоянного напряжения (VDC)			$V = \text{const}$
Источник постоянного тока (IDC)			$I = \text{const}$
Источник синусоидального напряжения (VSIN)			$V = V_m \sin(2\pi ft + \psi_v)$
Источник синусоидального тока (ISIN)			$I = I_m \sin(2\pi ft + \psi_i)$
Источник импульсного напряжения (VPULSE)			Задается списком параметров
Источник импульсного тока (IPULSE)			Задается списком параметров

При работе с любой из программ моделирования можно выделить три основных этапа:

- 1) выбор элементов и построение схемы с указанием параметров входящих в нее элементов;
- 2) выполнение моделирования работы схемы;
- 3) вывод результатов моделирования в виде таблиц или графиков.

Рассмотрим порядок выполнения этих этапов в используемых ниже программах моделирования.

Программа PSpice системы OrCAD 9.1. Программа PSpice, которая входит в систему OrCAD 9.1, обеспечивает выполнение всех перечисленных выше этапов. Особенностью этой программы является то, что в ней программа моделирования PSpice объединена с программой вывода результатов моделирования Probe. Поэтому выполнение моделирования и вывод результатов выполняются из одного меню.

Структурная схема программы OrCAD 9.1. приведена на рис. 5.1. Рассмотрим основные операции, выполняемые в этой программе.

1 Для построения принципиальных схем в системе OrCAD 9.1 используется программный модуль графического редактора схем OrCAD Capture. Построение исследуемой цепи состоит из выбора необходимых элементов, указания их условных обозначений и параметров, переноса этих элементов в окно создаваемой схемы и соединения элементов между собой с помощью проводников. Программа моделирования аналоговых устройств OrCAD PSpice интегрирована в программу Capture. Интерфейс программы PSpice имеет окно программы Probe, с помощью которой выводятся результаты моделирования. Кроме этого, из оболочки программы Capture можно запустить программу параметрической оптимизации схем PSpice Optimizer. Меню команд программы OrCAD Capture приведен в табл. П1 приложения.

1.1. Построение исследуемой схемы начинается с вызова программы OrCAD Capture. После вызова программы открывается меню, в котором нужно выбрать команду **File > New > Project**.

1.2. В открытом окне **New Project** имеются несколько форточек. В форточке **Name** нужно проставить имя нового документа (например, **Exemple 1**). В форточке **Location** нужно записать название программы. При использовании демоверсии программы эта запись имеет вид: **C:\ProgramFiles\OrCAD Demo\Capture**. При использовании полной версии программы слово **Demo** опускается.

В форточке **Create a New Project Using** нужно выбрать команду **Analog or Mixed-Signal Circuit Wizard**. В завершение

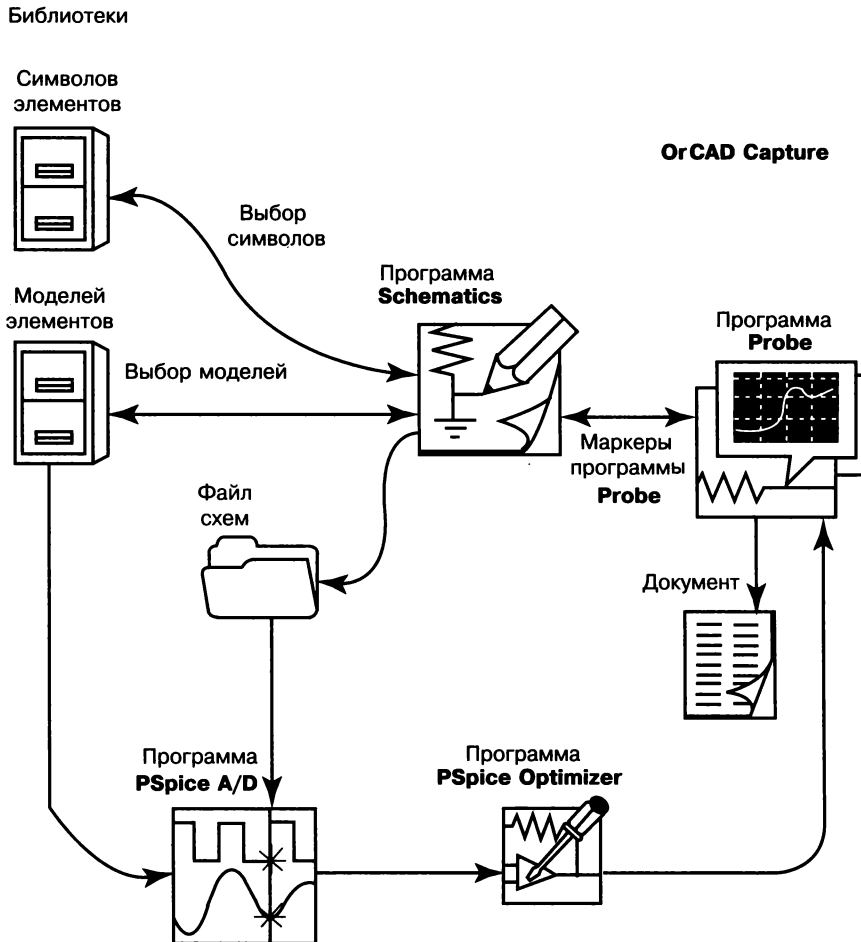


Рис. 5.1. Структурная схема программы OrCAD

нужно подать команду **OK**, после чего открывается окно **Analog Mixed-Mode Project Wizard**.

1.3. В окне **Analog Mixed-Mode Project Wizard** имеются форточки **Add** и **Remove** в которых по умолчанию ничего менять не нужно. Для выхода из этого окна следует подать команду **Finish** (Готово). После этого открывается окно, в котором выполняется построение схемы.

1.4. В меню программы выбираем команду **Place> Part**. При этом открывается окно **Place Part**, которое используется для

выбора элементов схемы и переноса их в окно для построения схемы цепи. В этом окне имеются три форточка. Первая форточка, **Part**, используется для указания типа элемента. Вторая форточка, **Libraries**, предназначена для указания раздела библиотеки элементов. В третьей форточке, **Graphic**, появляется графическое изображение элемента с указанием его условного обозначения и начального значения параметра (например, **V1**; **0V**). Эти характеристики элемента впоследствии можно изменить (отредактировать).

Например, для выбора источника сигнала в форточке **Libraries** следует выбрать команду **SOURCE**, а затем в форточке **Part** — указать его тип, например **VDC**. Для выбора элементов **R**, **L**, **C** следует в форточке **Libraries** выбрать команду **ANALOG**, а в форточке **Part** — указать его тип **R**, **L** или **C**. Изображение выбранного элемента должно появиться в форточке **Graphic**. В завершение следует подать команду **OK**, после чего изображение элемента переносится в окно построения схемы.

1.5. После перемещения элемента в окно построения схемы его нужно разместить в требуемом положении и месте. Для поворота элемента на 90° можно использовать команду **Ctrl+R**. Для зеркального изображения элемента (поворота его на 180°) эту команду следует повторить. Полный перечень команд по перемещению графического изображения элементов приведен в табл. П2 Приложения.

1.6. Для фиксации элемента в требуемом месте окна следует нажать правую кнопку мыши. При этом на экране появится дополнительное меню, в котором следует выбрать команду **End Mode**. После подачи этой команды элемент схемы окрашивается в розовый цвет и фиксируется в выбранном положении. Для закрепления элемента следует отвести курсор от элемента и нажать левую клавишу мыши. При этом цвет элемента становится темным.

1.7. На схему также необходимо перенести символ заземления **Ground**. Для этого в основном меню выбирается команда **Place Part > Ground**. В открывшемся окне выбирается форточка **Libraries**, в которой открывается раздел **CAPSYM**. В форточке **Symbol** выбирается символ **0/SOURCE**. Затем изображение земли переносится в окно построения схемы и фиксируется в выбранном месте.

1.8. Для завершения построения схемы необходимо выбранные элементы схемы соединить проводниками. Для этого в ос-

новном меню выбираем команду **Place Part > Wire**. При этом на поле построения схемы появляется курсор в виде крестика, который нужно установить на вывод первого элемента и нажать левую кнопку мыши. Перемещая крестик от вывода первого элемента до вывода второго элемента, соединяем их выводы между собой. Нажимая левую кнопку мыши, фиксируем проводник в розовом цвете. Для прекращения соединений выводов элементов следует нажать правую кнопку мыши и в появившемся меню подать команду **End Mode**. Для закрепления проводника следует установить курсор на проводник розового цвета и нажать левую кнопку мыши. При этом цвет проводника становится темным.

1.9. Корректировка условных обозначений и параметров элементов схемы выполняется следующим образом. Курсор устанавливается на условное обозначение элемента, затем делается один щелчок левой кнопкой мыши, в результате чего условное изображение элемента окрашивается в розовый цвет и заключается в рамку. Затем двойным щелчком левой кнопки мыши открываем окно корректировки **Display Properties**. В этом окне имеется форточка **Display Format**, в которой нужно выбрать команду вида корректировки, например **Value Only**. После этого в окне **Value** нужно проставить значение параметра элемента. Если необходимо изменить как обозначение, так и параметр элемента, то в форточке **Display Properties** следует выбрать команду **Name and Value**, а в форточках **Name** и **Value** проставить их новые значения. Пользуясь форточкой **Rotation**, можно выполнять поворот элемента на требуемый угол. После окончания корректировки следует подать команду **OK**. При изменении значений параметров элементов следует пользоваться символами, приведенными в табл. 5.2.

2 Для выполнения моделирования построенной схемы следует из основного меню программы **OrCAD Capture** подать команду на создание нового профайла **PSpice > New Simulation Profile**.

2.1. По этой команде открывается окно **New Simulation**, в котором имеются две форточки. В первой форточке, **Name**, необходимо указать тип выполняемого анализа: **Bias** — смещение по постоянному напряжению или **Sweep** — режим развертки при изменении какого-либо параметра. Во второй форточке, **Inherit From**, можно указать источник этого анализа. Если этот источник неизвестен или несущественен, то указывают команду **none**.

Таблица 5.2

Обозначение масштабных множителей

Символ	Значение символа	Программная запись
F (или f)	10^{-15}	1E-15
P (или p)	10^{-12}	1E-12
N (или n)	10^{-9}	1E-9
U (или u)	10^{-6}	1E-6
M (или m)	10^{-3}	1E-3
Нет	10^0	1E0 (или 1)
K (или k)	10^3	1E3
MEG (или meg)	10^6	1E6
G (или g)	10^9	1E9
T (или t)	10^{12}	1E12

2.2. После этого по команде **Create** осуществляется переход к другому окну **Simulation Setting**, которое используется для редактирования типа анализа. Вид и название этого окна зависят от выбранного типа анализа. Так, например, при анализе режима по постоянному напряжению или току окно имеет название **Simulation Setting — Bias**, а при анализе переходных процессов во времени окно называется **Simulation Setting — TRAN**.

В этом окне имеются форточки, в первой из которых указывают тип анализа: временной — **Time Domain (Transient)**, выбор рабочей точки — **Bias Point**, частотный — **AC Sweep/Noise** или развертки по постоянному току — **DC Sweep**. Во второй форточке **Option** указывают конкретную опцию (вид) анализа: **Primary Sweep** — первичная развертка (при изменении одной переменной), **Secondary Sweep** — вторичная развертка (при изменении двух переменных), анализ по методу Монте-Карло — **Monte Carlo (Worst Case)**, температурный анализ — **Temperature Sweep**, параметрический — **Parametric Sweep**, стабильность рабочей точки — **Save Bias Point**, рабочую точку нагрузки — **Load Bias Point**.

2.3. В режиме развертки в форточке **Sweep Variable** можно указать вид переменной, при изменении которой выполняется анализ: **Voltage Source**; **Current Source**; **Global Parameter**; **Model Parameter**; **Temperature**.

В форточке **Sweep Type** необходимо указать параметры развертки: начальное значение переменной — **Start Value**, конечное значение переменной — **End Value**, приращение переменной на каждом шаге — **Increment**. Кроме этого, в этой же форточке можно указать вид шкалы развертки: линейной — **Linear** или логарифмической — **Logarithmic**, и количество декад — **Decade** для логарифмической развертки.

2.4. После выбора типа анализа подается команда **OK**, по которой осуществляется переход к моделированию. Для перехода к моделированию необходимо из основного меню программы **OrCAD Capture** подать команду **PSpice > Run**. По этой команде открывается окно программы **SCHEMATIC — sweep OrCAD PSpice A/D Demo**, в котором имеется заготовка для построения графической зависимости результатов моделирования. Перечень команд программы **OrCAD PSpice A/D** приведен в табл. П2 приложения.

3 Вывод результатов моделирования зависит от формы их представления и может выполняться из окна программы **SCHEMATIC**.

3.1. Для вывода графических зависимостей необходимо с помощью команды **Trace > Add Trace** открыть окно **Add Trace**. В этом окне имеются форточки, в которых можно выбрать выводимые величины и формы их представления. В форточке **Simulation Output Variable** представлены все величины, которые можно вывести на график. Из этих величин нужно выбрать те, которые следует вывести на график и указать их в форточке **Trace Expression**.

3.2. В форточке **Function or Macros** можно указать вид функциональной обработки выводимых величин, например их логарифмирования **LOG()** или взятия абсолютного значения **ABS()**. При этом выводимая величина должна быть внесена в скобки соответствующей функции. Например, можно вывести ток **I1** и его логарифм **LOG(I1)**. После указания всех выводимых величин в форточке **Trace Expression** следует подать команду на вывод результатов моделирования **OK**. По этой команде результаты моделирования с автоматически выбранным масштабом будут выведены на график.

3.3. Для вывода результатов моделирования в виде таблицы можно из основного меню программы **SCHEMATIC** обратиться к команде **View > Output File**. При этом на экран будет выведена распечатка выходного файла в табличной форме. Аналогичным образом, можно вывести результаты функциональной обработки результатов моделирования.

3.4. По команде **Print...**, подаваемой из основного меню программы **SCHEMATIC**, результаты моделирования выводятся на принтер. При этом масштабы выводимых зависимостей и форма табличного представления информации устанавливаются автоматически программой вывода результатов моделирования.

Программный комплекс DesignLab 8.0. Этот комплекс предназначен для проектирования аналоговых и аналого-цифровых электрических и электронных устройств. В состав этого комплекса входят те же программные модули, которые использованы в системе **OrCAD: PSpice, Schematics, Probe**. Программный комплекс **DesignLab 8.0** является развитием более ранней системы **Design Center 6.3**. Основное отличие этого программного комплекса от системы **OrCAD 9.1** состоит в том, что отдельные блоки программ не интегрированы в общую оболочку, а функционируют отдельно. Так, например, графический редактор **Schematics** позволяет создавать чертежи принципиальных схем в среде **Windows** и осуществлять запуск других программ: **PSpice, Parts, Probe**.

В этом комплексе использованы иные названия и обозначения отдельных модулей и программ. Так, например, для построения схем в меню программы **Schematics** входит команда **Drow**, которая функционально соответствует команде **Place** в системе **OrCAD**. Однако большинство иконок (**icon**) этих программ совпадают. Символы элементов на схему наносят по команде **Drow > Get New Part**. Условные обозначения элементов и источников сигналов такие же, как системе **OrCAD**.

Для переноса элементов в окно построения схемы используется команда **Place&Close**, которую можно вызвать из окна **Part Browser Basic**. Проводники наносят на схему по команде **Drow > Wire**.

Директивы моделирования задаются по команде **Analysis > Setup**. Поиск ошибок в схеме выполняется по команде **Analysis > Electrical Rule Check**. Для обозначения режимов анализа используются практически те же команды, что и в системе **OrCAD: DC Sweep, AC Sweep, Bias Point Detail, Load Bias Point**.

Для вывода результатов анализа используется переход к программе **Probe**, который выполняется по команде **Analysis > Probe**. Графики выводятся на экран по команде **Trace > Add**. Возможно переключение окна с изображением схемы на окно с графиками, что значительно облегчает контроль за результатами анализа.

Для сокращения числа команд может быть использована макрокоманда **Trace > Macro**. С помощью этой команды открывается окно **Macros** для создания новых или редактирования существующих макросов, т. е. функциональных преобразований результатов моделирования.

Система схемотехнического моделирования Micro-Cap V. Система **Micro-Cap V** по своим функциональным возможностям несколько уже системы **OrCAD 9.1**. В отличие от программного комплекса **DesignLab 8** она работает по управлению одной оболочкой, подобно системе **OrCAD 9.1**. При смене режима работы частично изменяется состав меню команд.

В этой системе обеспечиваются: графический ввод исследуемых схем; расчет режимов **DC**, **AC**, **Transient**; расчет спектров, вариаций температуры, шумов; применение функционально зависимых источников; параметрическая оптимизация моделей элементов. Библиотека моделей элементов во многом заимствована из программы **PSpice**. Графики результатов моделирования можно вывести в процессе моделирования или после его окончания.

Имеется возможность математической обработки результатов моделирования при выводе графиков. При запуске системы **Micro-Cap V** выводится меню, которое состоит из следующих разделов: **File**; **Edit**; **Component**; **Windows**; **Options**; **Analysis**; **Help**. Состав команд этого меню приведен в таблице ПЗ приложения.

Создание схем и их редактирование выполняются с помощью набора команд, которые сгруппированы в системе меню. Наиболее часто употребляемые команды вызываются с помощью иконок или комбинации клавиш. Перечень таких команд приведен в табл. ПЗ приложения, а назначение некоторых иконок рассмотрено в табл. П4 приложения.

Подробные сведения об использовании системы **Micro-Cap V** для моделирования электрических схем можно найти в работе [16]. После установки основной программы **Micro-Cap V (MC5)** ее запуск производится по команде, подаваемой при помощи иконки системного меню. При этом на экране дисплея появляется рабочее окно, в котором содержатся однострочное меню и иконки, используемые при построении схем.


Используя иконку системного меню, можно изменять или восстанавливать размер окна построения схемы, перемещать его, сворачивать или закрывать. Аналогичным образом с помощью иконки схемного меню можно управлять окнами схем. При работе с файлами используются команды, входящие в меню **File**. С помощью этих команд можно выполнять: создание нового или открытие существующего файлов (**New** и **Open**); сохранять схему в памяти компьютера или на внешнем накопителе (**Save** и **Save as...**); выполнять открытие или

закрытие окна (**Revert** и **Close**); осуществлять просмотр схемы или вывод ее на печать (**Print Review** и **Print**).

При редактировании схем используются команды, входящие в меню **Edit**. С помощью этих команд можно: выбирать или удалять документы; вводить или удалять страницы; изменять шрифт; выполнять регулировки дисплея; перемещать схему.

Для выбора элементов схем используют команды, входящие в меню **Component**. С помощью этих команд выполняют выбор компонентов, необходимых для построения схемы и их соединений между собой. Выбор компонентов, размещаемых на схеме, выполняется с помощью указателей, входящих в выпадающие меню. Перемещая курсор движением мыши, устанавливаем его на выбранный элемент и завершаем выбор компонента щелчком левой клавиши мыши.

Удерживая нажатой левую клавишу, перемещением мыши переносим изображение элемента в окно построения схемы и после размещения элемента в требуемом положении отпускаем левую клавишу. Отпускание левой клавиши приводит к фиксации положения элемента в рабочем окне. Для поворота элемента на 90° необходимо одновременно нажать левую и правую клавиши мыши. После размещения элемента открывается окно для задания его позиционного обозначения **Name** и значения его параметра **Value**.

Для соединения элементов между собой выбираем команду **Option > Wire** или при произвольной ориентации проводников — **Option > Wire D**. При необходимости добавления в схему новых компонентов выбираем команду **Option > Component**. Следует особо отметить функцию команды **Option > Mode > Select**, которая может быть вызвана по иконке . Эта команда обеспечивает выбор объектов для последующего редактирования, например при замене одного элемента другим или при его перемещении.

Для удаления элементов или отрезков проводников используется команда **Edit > Clear (Delete)**. При удалении элементов они должны быть выбраны. Для выбора элементов курсор нужно поместить в один из углов прямоугольной области возле удаляемых элементов. Затем следует нажать левую клавишу мыши и, удерживая ее, переместить курсор так, чтобы выбранные элементы оказались в прямоугольной рамке. После этого клавишу мыши можно отпустить. Цвет выбранного элемента при этом изменяется. Удаление выбранных элементов осуществляется по команде **Delete**.

Программа моделирования электрических и электронных схем Electronics Workbench 5.0. Эта программа отличается от рассмотренных выше программ тем, что в ней на схеме, кроме электрических и электронных компонентов, изображаются еще измерительные приборы. Эти приборы по внешнему виду, органам управления и характеристикам приближены к реальным промышленным аналогам.

Таких контрольно-измерительных приборов в программе имеется семь разновидностей: мультиметр (**Multimeter**); генератор функций (**Function Generator**); осциллограф (**Oscilloscope**); спектроанализатор (**Bode Plotter**); генератор цифровых слов (**Word Generator**); логический анализатор (**Logic Analyzer**); логический преобразователь (**Logic Converter**). При анализе электрических цепей используются первые четыре прибора, которые мы и рассмотрим ниже.

□ Мультиметр (**Multimeter**) можно использовать при измерениях напряжения V , тока I , сопротивления и затухания dB . Прибор можно использовать при измерении постоянного и переменного напряжения и тока ($-$, \sim). Выбор режима работы прибора определяется с помощью клавиш на его передней панели. При измерениях переменного напряжения и тока прибор показывает действующие значения.

При использовании этого прибора можно задать его паразитные параметры: внутреннее сопротивление амперметра **Ammeter resistance**; внутреннее сопротивление вольтметра **Voltmeter resistance**; измерительный ток омметра **Ohmmeter Current**; эталонное напряжение при измерении затухания **Decibel Standard**. Значения этих паразитных параметров выбираются в режиме **Setting**. Внешний вид передней панели прибора показан на рис. 5.2.

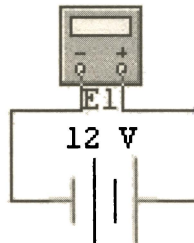


Рис. 5.2. Изображение мультиметра в программе Workbench

□ Измерительный генератор (**Function Generator**) способен создавать выходные напряжения трех форм: синусоидальное (\sim), треугольное (\wedge) и прямоугольное (\square). С помощью клавиш на передней панели прибора можно установить частоту **Frequency** в Гц; коэффициент заполнения **Duty cycle** в %; амплитуду **Amplitude** в В и постоянную составляющую (смещение нулевого уровня) **Offset** в В. Внешний вид передней панели генератора приведен на рис. 5.3. Генератор имеет два выхода + и –, с помощью которых можно получить два выходных сигнала, сдвинутых на 180°. При заземленном общем выводе COM можно получить паразитный сигнал.

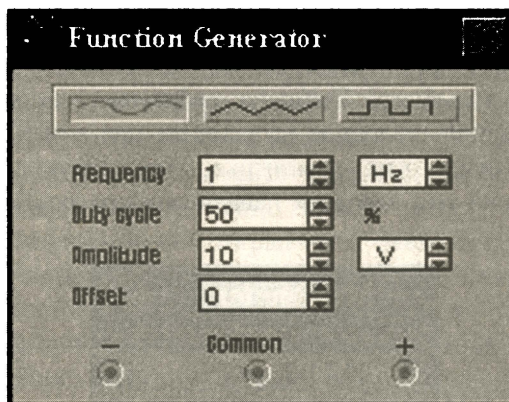


Рис. 5.3. Изображение генератора функций в программе **Workbench**

□ Осциллограф (**Oscilloscope**), подобно реальному прибору, имеет два канала **A** и **B** с отдельными регулировками чувствительности (**Channel A, V/Div; Channel B, V/Div**); смещения по вертикали (**Y Position A; Y Position B**); закрытый **AC**, заземленный **0** и открытый **DC** входы. Развертка осциллографа может работать в трех режимах: временном **Y/T**; и функциональном **B/A** или **A/B**. При работе во временном режиме коэффициент развертки **Time base** выбирается в пределах от 0,1 нс/дел до 1 с/дел. Смещение по горизонтали регулируется клавишей **X Position**.

Запуск развертки может быть автоколебательным **Auto** или ждущим **Trigger**. В ждущем режиме запуск развертки может выполняться по переднему \nearrow или заднему \searrow фронту синхроимпульса **Edge**. Уровень сигнала синхронизации регулируется с помощью клавиши **Level (Amplitude)**. Вид сигнала синхронизации выбирается с помощью клавиш **A, B, Ext**. Внешний сигнал синхронизации **Ext** подается на вход **Trigger**. При син-

хронизации от внутренних сигналов используются каналы **A** или **B**. Общий вывод осциллографа **Ground** должен быть подключен к земле. Внешний вид передней панели осциллографа приведен на рис. 5.4.

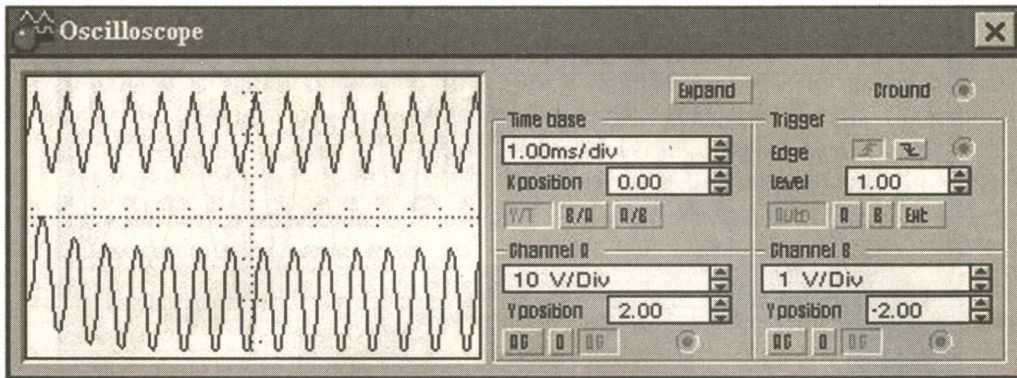


Рис. 5.4. Изображение осциллографа в программе **Workbench**

Осциллограф может работать в режиме масштабирования, который вызывается кнопкой **Zoom (Expand)** на передней панели прибора. В этом режиме изменяется передняя панель прибора: увеличивается размер экрана, создается возможность прокрутки изображения по вертикали и горизонтали или сканирования его с помощью разноцветных вертикальных визирных линий, которые можно перемещать по экрану. При этом под экраном выводятся цифровые значения временных положений **T1**, **T2** визирных линий и их разность **T2 – T1**.

В индикаторных окнах под экраном также приводятся мгновенные значения напряжений, соответствующих положениям визирных линий: **VA1**, **VB1**, **VA2**, **VB2** и их разности (**VA2 – VA1**); (**VB2 – VB1**).

Изображение на экране можно инвертировать нажатием кнопки **Reverse** и запоминать в памяти нажатием кнопки **Save**. Возврат к обычному режиму работы осциллографа выполняется по команде **Reduce**, подаваемой с передней панели прибора. Остальные органы управления осциллографом в режиме **Zoom** не изменяют своих функций, но перемещаются в нижнюю часть передней панели прибора. Внешний вид передней панели прибора в режиме **Zoom** приведен на рис. 5.5.

□ Анализатор частотных характеристик (**Bode Plotter**) предназначен для измерения амплитудно-частотных (в режиме **Magnitude**) и фазочас-

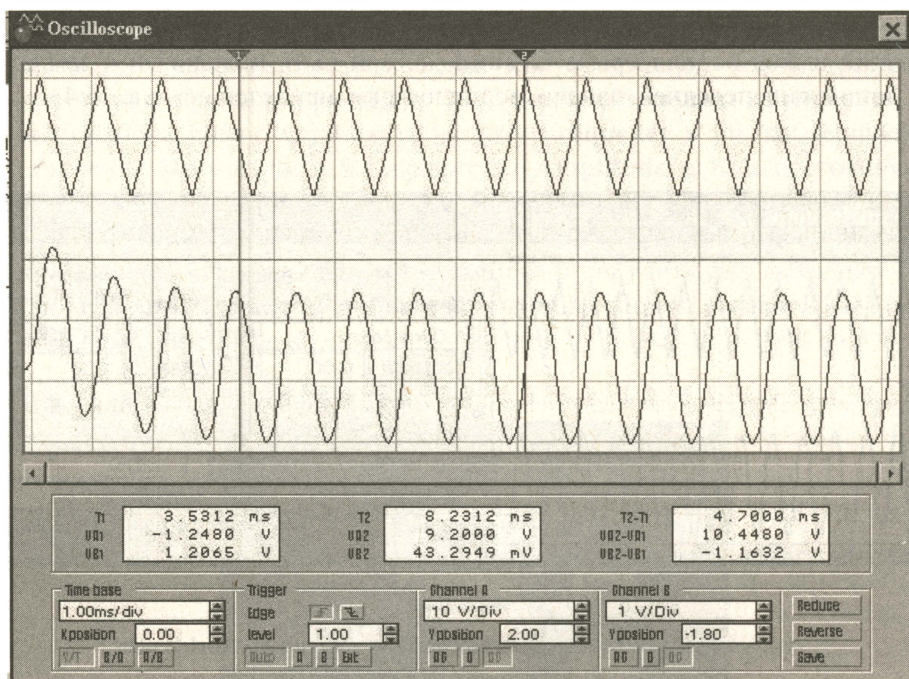


Рис. 5.5. Изображение осциллографа в программе **Expand**

тотных (в режиме **Phase**) характеристик цепей. Он измеряет отношение амплитуд и разность начальных фаз двух сигналов, подаваемыми на входа **In** и **Out**. При этом частоты входного и выходного сигналов имеют одинаковые значения и задаются внутренним генератором, который входит в состав прибора **Code Plotter**. Внешний вид передней панели анализатора приведен рис. 5.6.

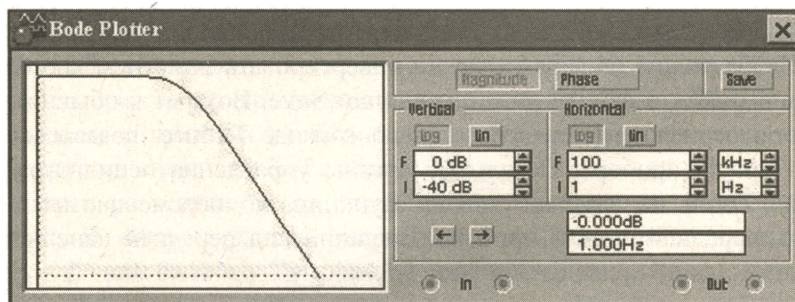


Рис. 5.6. Изображение анализатора частотных характеристик

Левые зажимы входа и выхода подключают к исследуемой цепи, а правые зажимы соединяют с общей точкой **Ground**. Кроме этого, к входу цепи должен быть подключен какой-либо источник переменного напряжения, при этом каких-либо настроек в этом источнике производить не нужно.

По вертикальной оси прибора (**Vertical**) откладывают значения амплитудно-частотных характеристик (**Magnitude**) цепи в относительных единицах в линейном режиме (**Lin**) или в децибелах — в логарифмическом режиме (**Log**). При измерении фазочастотных характеристик (**Phase**) по вертикальной оси откладывают значения угла сдвига фазы в градусах, как в линейном, так и в логарифмическом режимах работы. При этом указывают минимальное **I (Initial)** и максимальное **F (Final)** значения шкалы прибора.

По горизонтальной оси прибора (**Horizontal**) также указывают минимальное **I** и максимальное **F** значения частоты в Гц, как в линейном **Lin**, так и в логарифмическом **Log** режимах работы.

С помощью вертикальной визирной линии, которую можно перемещать по экрану посредством указателей $\leftarrow \rightarrow$ или мыши, определяют численное значение частоты и выходной величины в месте положения визирной линии. Эти значения в цифровой форме выводятся в нижней части передней панели прибора и могут быть записаны в текстовый файл при помощи команды, подаваемой клавишей **Save**.

В связи с тем, что в программе **Electronics Workbench** результаты измерений выводятся непосредственно на измерительные приборы, процедура моделирования несколько проще, чем в других программах. Рабочее окно программы **EWB 5.0** содержит строку меню, в которую входят разделы: **File; Edit; Circuit; Analysis; Window; Help**, аналогичные рассмотренным ранее для других программ. Список команд программы **Electronics Workbench** приведен в табл. П.5 приложения.

■ **Построение схемы.** Построение исследуемой схемы в программе **Electronics Workbench** выполняется аналогично другим программам. Перед построением схемы на компьютере целесообразно подготовить ее эскиз на бумаге с требуемым расположением компонентов схемы и их обозначениями. Затем, пользуясь библиотекой компонентов, следует найти необходимые компоненты и перенести их в окно построения схемы. Символ компонента переносится в окно построения схемы с помощью мыши при нажатой левой кнопке. После размещения компонента в требуемом месте левая кнопка мыши отпускается, и для фиксации выбранного компонента следует еще выполнить двойной щелчок левой кнопкой. При этом открывается окно, с помощью которого устанавливаются требуемые параметры компонента. Корректность выбранных параметров подтверждается нажатием клавиши **Enter**.

Для изменения значения компонента необходимо два раза щелкнуть левой кнопкой мыши по символу компонента и в открытом диалоговом окне произвести необходимые изменения.

После размещения компонентов схемы производится их соединение с помощью проводников. При соединении компонентов к их выводам можно подключать *только один проводник*. Для подключения проводника курсор с помощью мыши подводится к выводу компонента, и после появления площадки красного цвета нужно нажать левую кнопку мыши. При этом проводник протягивается к выводу другого компонента до появления на нем такой же площадки. После выполнения соединения левую кнопку мыши следует отпустить.

Если количество проводников, подключаемых к компоненту, больше одного, то в библиотеке компонентов выбирается символ соединения проводников (точка) и переносится на ранее установленный проводник. Для фиксации точки соединения необходимо отвести курсор на свободное место и щелкнуть левой кнопкой мыши. При этом место соединения проводников (точка) должно потемнеть. К такому соединению можно подключить еще два проводника.

Особо следует отметить, что трасса соединительных проводников выбирается автоматически, а препятствия в виде компонентов и других проводников огибаются ортогональными линиями.

Подключение измерительных приборов выполняется аналогично подключению компонентов схемы. При этом можно использовать цветные проводники, которые выделяют подключенный прибор и окрашивают в соответствующий цвет выводимые графики.

■ **Моделирование схемы.** После построения схемы можно перейти к выполнению ее моделирования. Запуск программы моделирования выполняется по команде **Activate (Ctrl+G)**, которая подается из меню **Analysis**. Программу моделирования можно в любой момент времени остановить по команде **Stop (Ctrl+T)** или прервать по команде **Pause (F9)**, которые подаются из того же меню. Вид анализа выбирается с помощью следующих команд, которые подаются из меню **Analysis**:

- Analysis > DC Operating Point** — расчет режима по постоянному току;
- Analysis > DC Sweep...** — вариация параметров источников (их развертка) в режиме постоянного тока;
- Analysis > AC Frequency...** — расчет частотных характеристик цепи;
- Analysis > Transient...** — расчет переходных процессов;
- Analysis > Fourier...** — спектральный анализ по Фурье;
- Analysis > Noise...** — анализ спектра собственных шумов схемы;
- Analysis > Distortion...** — анализ нелинейных искажений;
- Analysis > Parameter Sweep...** — анализ при вариации параметров схемы;

Analysis > Temperature Sweep... — анализ схемы при изменении окружающей температуры;

Analysis > Transfer Function... — расчет передаточных функций;

Analysis > Pole-Zero... — расчет полюсов и нулей передаточной характеристики схемы;

Analysis > Sensitivity... — расчет относительной чувствительности характеристик схемы к изменениям параметров выбранного компонента;

Analysis > Worst Case... — расчет параметров компонентов схемы при предельно допустимых отклонениях ее характеристик;

Analysis > Monte Carlo... — статистический анализ схемы по методу Монте-Карло. Основные характеристики выбранного типа анализа устанавливаются из окна **Analysis > Analysis Options**.

■ **Вывод результатов** анализа выполняется по команде **Analysis > Display Graph**.

5.2. Моделирование цепей постоянного тока

Моделирование цепей постоянного тока может быть выполнено с помощью любой из рассмотренных выше программ. Вопрос о целесообразности применения той или иной программы при расчете цепей постоянного тока решается пользователем исходя из поставленной задачи.

При моделировании цепей постоянного тока можно решать следующие основные задачи:

- ▶▶ определение режима цепи при заданных характеристиках источников напряжения и тока (решение прямой задачи теории цепей);
- ▶▶ определение характеристик источников тока и напряжения при заданных режимах цепи (решение обратной задачи теории цепей);
- ▶▶ определение влияния изменений напряжений или токов источников на режим цепи (**DC Sweep**);
- ▶▶ расчет относительной чувствительности характеристик схемы к изменениям параметров элементов (**DC Sensitivity**).

Кроме этого, с помощью рассмотренных программ можно выполнять расчет параметров элементов схемы при предельно допустимых отклонениях ее характеристик (**Worst Case**) и статистический анализ схемы по методу Монте-Карло. Эти вопросы в теории электрических цепей обычно не рассматриваются.

Пример 5.1. Выполнить моделирование резистивного делителя постоянного напряжения 120 В в два раза.

Решение. Схема такого резистивного делителя напряжения должна состоять из источника постоянного напряжения $V1 = 120$ В и двух сопротивлений $R1$ и $R2$, значения которых должны быть одинаковыми. Примем, что оба сопротивления, входящие в состав делителя, имеют значения $R1 = R2 = 1$ кОм. Тогда для построения схемы и выполнения ее моделирования необходимо выполнить следующие действия:

- 1) открыть программу моделирования;
- 2) нанести на поле построения схемы необходимые элементы;
- 3) соединить эти элементы между собой проводниками;
- 4) подключить к схеме заземление (**Ground**) и маркеры;
- 5) выполнить моделирование;
- 6) вывести на экран результат моделирования.

Моделирование выполним в программе **OrCAD 9.1**. Для этого обратимся к программе **OrCAD** с помощью последовательности команд: **Пуск > Программы > OrCAD > Capture**. В открытом меню программы **OrCAD Capture** подадим команду **File > New > Project**. В открывшемся окне **New Project** найдем форточку **Name**, в которую запишем имя нового документа, например, **Exemple 1**. После этого в форточке **Create a New Project Using** выберем команду **Analog or Mixed-Signal Circuit Wizard**, а в форточке **Location** запишем название файла программы **C:\Program Files\OrCAD-Demo\Capture** и нажмем клавишу **OK**. В появившемся окне **Analog Mixed-Mode Project Wizard** подадим команду **Готово**, после чего откроется окно для построения новой схемы.

В меню выберем команду **Place > Part**, найдем в окне **Place Part** необходимые для построения схемы элементы, перенесем их в окно построения схемы и отредактируем их значения и условные обозначения. После этого в окне появятся изображения элементов, показанные на рис. 5.7а. Пользуясь командой **Place > Wire** соединим эти элементы между собой проводниками, подключим к схеме заземление **0/GND** и получим полную исследуемую схему, которая изображена на рис. 5.7б.

Результаты моделирования этой схемы выведем в виде распечатки выходного файла по команде **View > Output File**. Вид выходного файла приведен на рис. 5.8. В этой распечатке результатов моделирования указано напряжение источника ($N00009$) = 120 В; напряжение на выходе делителя ($N00012$) = 60 В; ток в цепи источника $6.000E-02$ и общая рассеиваемая мощность $7.20E+00$ Вт.

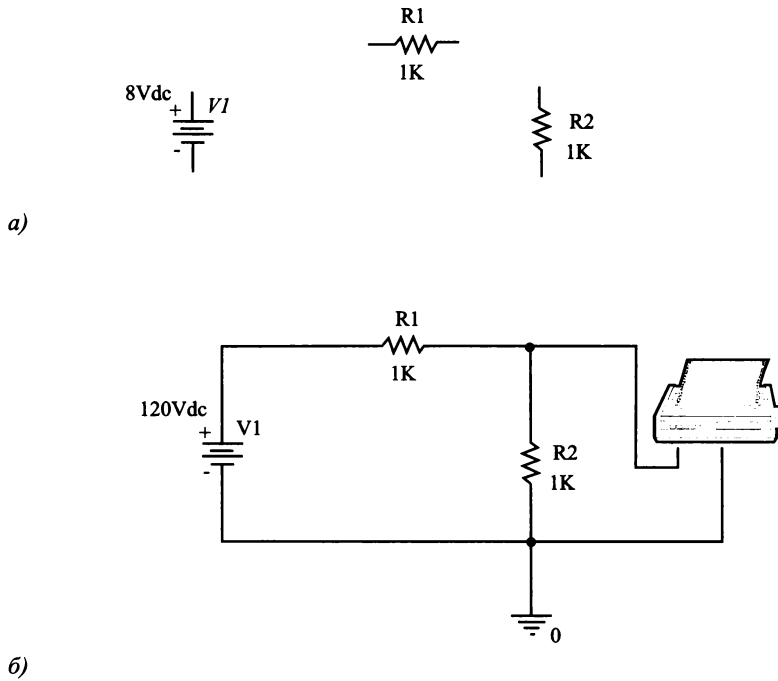


Рис. 5.7. Расположение элементов (а) и их соединение (б) в примере 5.1.

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(N00009)	120.0000	(N00012)	60.0000				
VOLTAGE		SOURCE CURRENTS					
NAME		CURRENTS					
V_V1		-6.000E-02					
TOTAL POWER DISSIPATION		7.02E+00		WATTS			

Рис. 5.8. Распечатка выходного файла к примеру 5.1

Пример 5.2. Выполнить моделирование схемы, изображенной на рис. 5.9, при следующих значениях параметров элементов: $R1 = 10 \text{ Ом}$; $R2 = 20 \text{ Ом}$; $R3 = 50 \text{ Ом}$; $R4 = 20 \text{ Ом}$. Напряжение источника $V1$ изменяется по линейному закону от 0 до 100 В с приращением $\Delta V1 = 10 \text{ В}$. Ток источника $I1 = 5 \text{ А}$. Построить графики напряжений на сопротивлении $R3$, на источнике тока $I1$ и источнике напряжения $V1$. Построить графики токов во всех ветвях схемы.

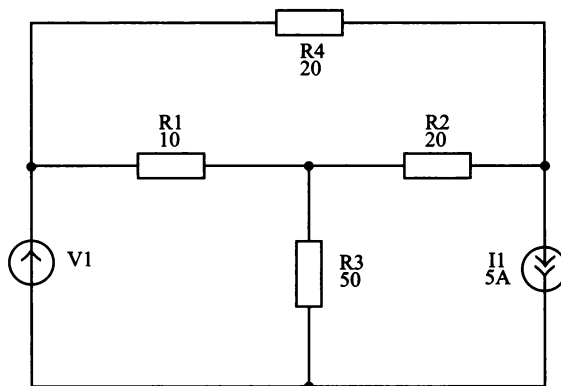


Рис. 5.9. Моделируемая схема к примеру 5.2

Решение. Выполним построение исследуемой схемы в программе **OrCAD 9.1**, пользуясь той же методикой, которая была описана в примере 5.1. Результат построения схемы приведен на рис. 5.10. В связи с тем, что напряжение $V1$ изменяется, его значение на схеме не указано. Однако при выборе режимов измерений в окне **Simulation Setting** — **DC sweep** в форточке **Sweep type** указана линейная развертка **Linear** с начальным значением напряжения источника **Start Value** = 0 V; конечным значением **End Value** = 100 V и приращением на каждом шаге **Increment** = 10 V. Кроме этого, в форточке **Analysis type** указан тип анализа **DC Sweep**, а в форточке **Option** выбрано моделирование при изменении одного параметра **Primary Sweep**.

При выводе результатов моделирования использовалась команда **PSpice > Run**. Результирующие графики напряжений приведены на рис. 5.11, а графики токов в ветвях схемы изображены на рис. 5.12. Из построенных графиков видно, что напряжение $V1$ изменяется линейно от 0 до 100 В. Напряжения на элементах $R3$ и $I1$ также изменяются линейно, однако их полярность при повышении напряжения $V1$ становится обратной.

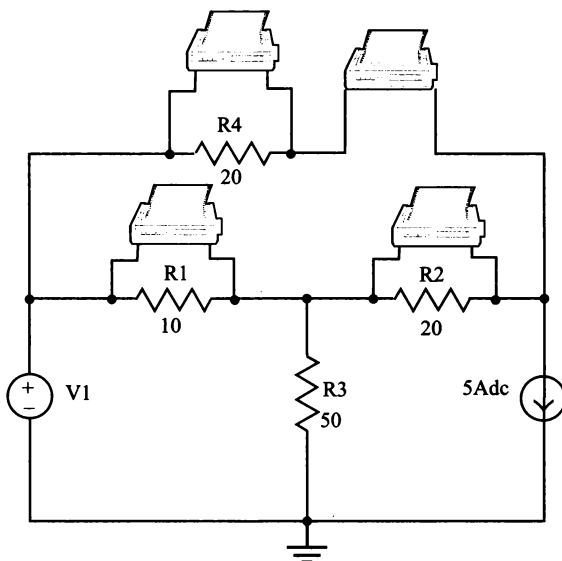


Рис. 5.10. Изображение схемы в программе **Workbench** к примеру 5.2

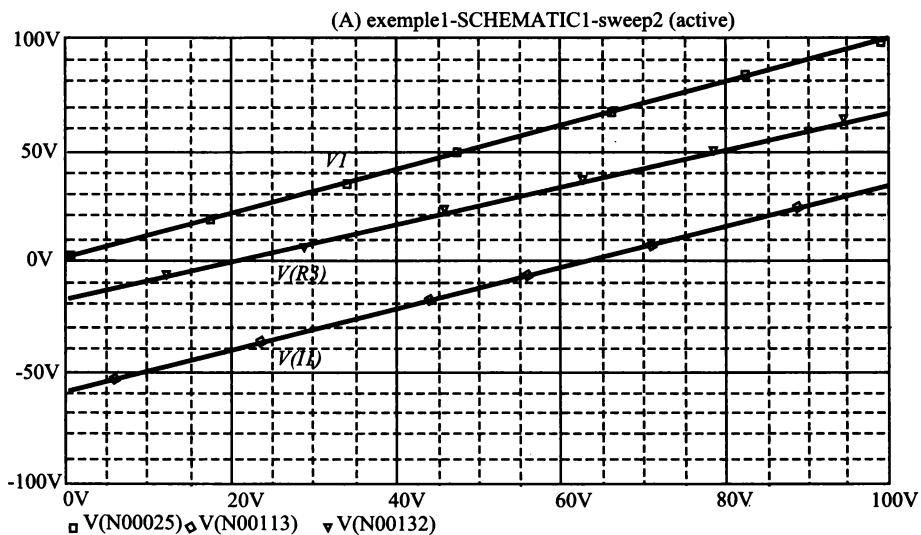


Рис. 5.11. Графики напряжений на ветвях схемы к примеру 5.2

Графики токов в ветвях цепи изображены на рис. 5.12. Из этих графиков видно, что сумма токов в сопротивлениях R_2 и R_4 равна току источника $I_1 = 5$ А. Ток в сопротивлении R_3 изменяет направление при напряжении источника $V_1 = 20$ В. Остальные токи направление не изменяют.

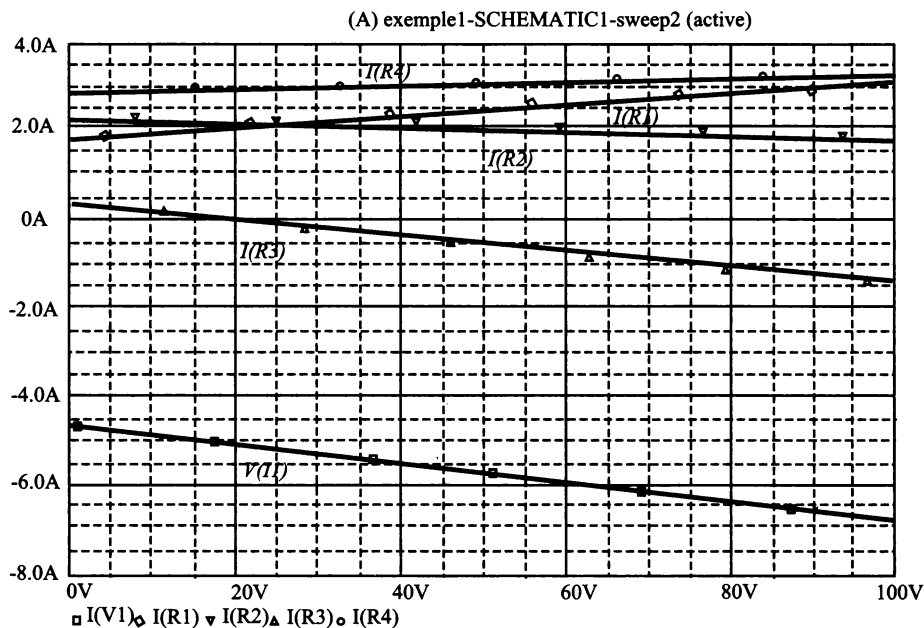


Рис. 5.12. Графики токов в ветвях цепи к примеру 5.2

Была также рассмотрена возможность логарифмирования знакопеременного тока $I(R_3)$. Логарифм этого тока изображен на рис. 5.13. Из этого графика видно, что при логарифмировании малых величин тока, близких к нулю, программа указывает только тенденцию, но не точное значение логарифма.

Аналогично примеру 5.1, можно по команде **View > Output File** вывести распечатку выходного файла.

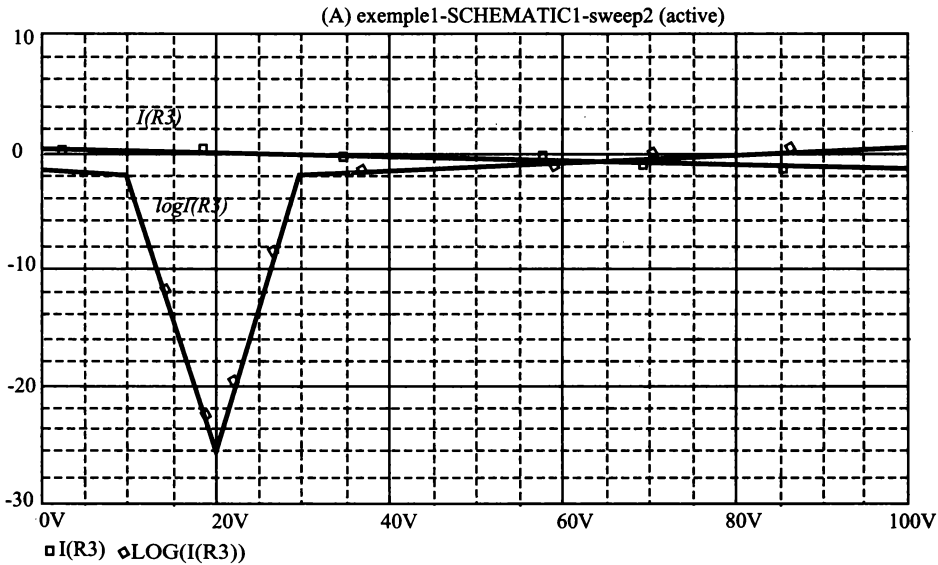


Рис. 5.13. Изображение логарифма знакопеременного тока в примере 5.2

Пример 5.3. Выполнить моделирование трехкаскадного декадного делителя напряжения на сопротивлениях, схема которого приведена на рис. 5.14. Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $E = 100 \text{ В}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ кОм}$. В результате моделирования требуется найти значения сопротивлений R_4, R_5, R_6 , которые обеспечивают напряжение на сопротивлениях $U(R_4) = U_4 = 10 \text{ В}$; $U(R_5) = U_5 = 1 \text{ В}$; $U(R_6) = U_6 = 0,1 \text{ В}$. Рассмотреть возможность моделирования этой задачи в программах **Workbench** и **Micro-Cap V**.

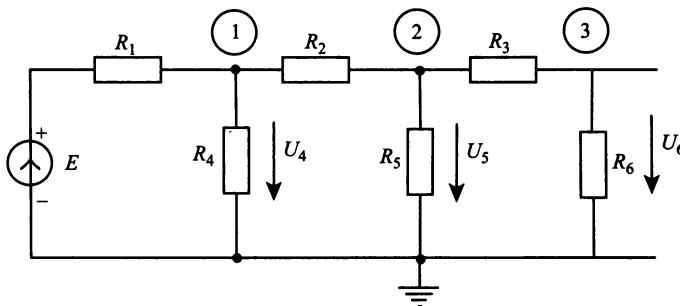


Рис. 5.14. Схема цепи к примеру 5.3.

Решение. Составим уравнения для узлов 1, 2, 3, пользуясь методом узловых напряжений. Обозначим напряжения в этих узлах U_{10} ; U_{20} ; U_{30} и будем считать их заданными: $U_{10} = U_4 = 10$ В; $U_{20} = U_5 = 1$ В; $U_{30} = U_6 = 0,1$ В. Запишем систему узловых напряжений в виде:

$$\begin{cases} G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - G_{13}U_{30} = I_{11}; \\ -G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} - G_{23}U_{30} = I_{22}; \\ -G_{31}U_{10} - G_{32}U_{20} + G_{33}U_{30} = I_{33}. \end{cases}$$

Для первого уравнения этой системы имеем:

$$G_{11} = (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_4) = (2 \cdot 10^{-4} + G_4) \text{ Сим};$$

$$G_{12} = 1/R_2 = 10^{-4} \text{ Сим}; G_{13} = 0; I_{11} = E/R_1 = 10^{-2} \text{ А}.$$

Подставляя эти значения в первое уравнение системы, находим:

$$G_4 = 81 \cdot 10^{-5} \text{ Сим}; R_4 = 1/R_4 = 1,2345679 \text{ кОм}.$$

Аналогично, для второго уравнения системы имеем:

$$G_{21} = 1/R_2 = 10^{-4} \text{ Сим};$$

$$G_{22} = 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_5 = (2 \cdot 10^{-4} + G_5) \text{ Сим};$$

$$G_{23} = 1/R_3 = 10^{-4} \text{ Сим}; I_{22} = 0.$$

Подставляя найденные значения проводимостей, получим:

$$G_5 = 8,1 \cdot 10^{-4} \text{ Сим}; R_5 = 1/G_5 = 1,2345679 \text{ кОм}.$$

Для третьего уравнения системы имеем:

$$G_{31} = 0; G_{32} = 1/R_3 = 10^{-4} \text{ Сим};$$

$$G_{33} = 1/R_3 + 1/R_6 = (10^{-4} + G_6) \text{ Сим}; I_{33} = 0.$$

После подстановки найденных значений проводимостей, получим:

$$G_6 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ Сим}; R_6 = 1,111111 \text{ Ом}.$$

Результаты моделирования декадного делителя напряжения с помощью программы **Workbench** приведены на рис. 5.15. Аналогичные результаты были получены при моделировании этого делителя с помощью программы **Micro-Cap V** (рис. 5.16)

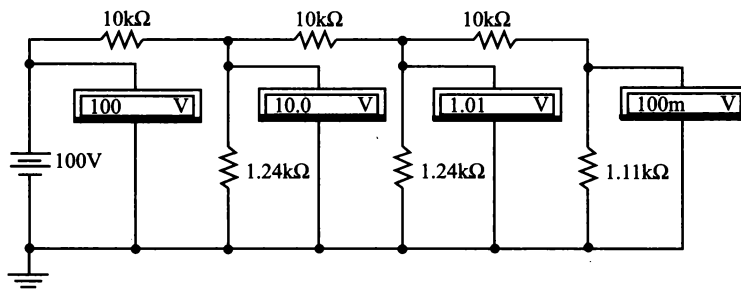


Рис. 5.15. Моделирование делителя напряжения в программе **Workbench**

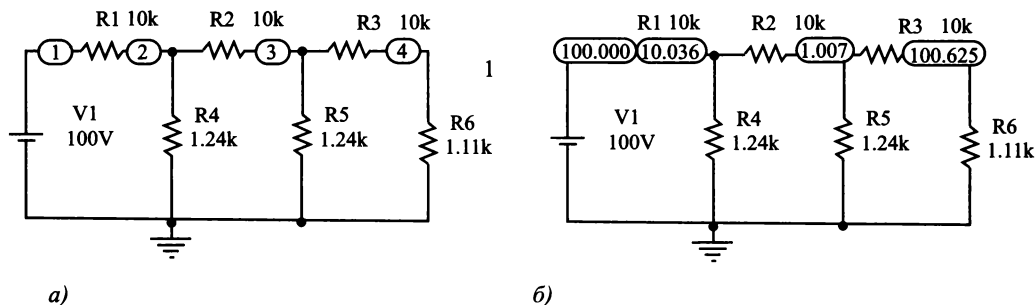


Рис. 5.16. Схема делителя напряжения (а) и результаты моделирования в программе **Micro-Cap V** (б)

5.3. Моделирование цепей синусоидального переменного тока

Основным отличием моделирования и расчетов в цепях синусоидального переменного тока от цепей постоянного тока является необходимость учитывать не только амплитудные, но и фазовые соотношения токов и напряжений. При этом изменение частоты питающих схему источников приводит к изменению сразу двух величин: амплитуд и фаз токов и напряжений. Изучение и моделирование частотных зависимостей амплитуд и фаз может выполняться в режимах **AC Sweep** или регистрироваться с помощью специальных приборов, например измерителей частотных характеристик (**Bode Plotter**).

Простейшие приемы моделирования цепей переменного тока покажем на примерах, которые были рассмотрены ранее в разделе 2.

Пример 5.4. Выполнить при помощи моделирования проверку результатов расчета цепи с одним источником напряжения, приведенной в примере 2.4.

Решение. При расчете цепи, изображенной на рис. 2.9а, были получены следующие значения напряжений и токов в ветвях схемы:

$$\begin{aligned} i_2 &= 5 \sin 100t \text{ A (задано);} \\ i_3 &= 2,5 \sin (100t + 127^\circ) \text{ A; } i_1 = 4 \sin (100t + 30^\circ) \text{ A;} \\ e &= 580 \sin (100t - 10^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

В примере 2.4 решалась обратная задача, в соответствии с чем при заданном токе i_2 определялись: напряжение источника e и токи i_1 , i_3 в других ветвях цепи. В связи с этим проверку результатов расчета выполним в виде решения прямой задачи. Поэтому при моделировании будем считать заданным напряжение источника e и определять токи в ветвях цепи. Моделирование выполним по программе **Eltctronic Workbench 5.0**.

Для выполнения моделирования построим схему цепи, изображенную на рис. 5.17. Напряжение источника зададим в виде:

$$e(t) = E_m \sin (100t - 10^\circ) = 580 \sin (100t - 10^\circ) \text{ В.}$$

Действующие значения токов в ветвях цепи снимаем в виде показаний приборов: $I_1 = 2,84 \text{ A}$; $I_2 = 3,55 \text{ A}$; $I_3 = 1,77 \text{ A}$. Амплитудные значения токов имеют значения: $I_{m1} = 2,84\sqrt{2} = 4,00 \text{ A}$; $I_{m2} = 3,55\sqrt{2} = 5,00 \text{ A}$; $I_{m3} = 1,77\sqrt{2} = 2,50 \text{ A}$, что полностью совпадает с результатами расчета цепи.

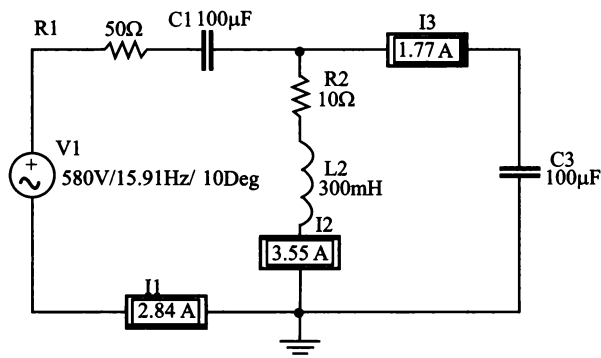


Рис. 5.17. Результаты моделирования схемы к примеру 5.4

Пример 5.5. Требуется при помощи моделирования по программе **Workbench 5.0** проверить корректность решения, полученного в примере 2.7.

Решение. Используя программу **Workbench**, вначале построим схему исследуемой цепи. При построении схемы введем в нее амперметры, которые будем использовать для измерения действующих значений токов в ветвях цепи.

Моделируемая схема с измерительными приборами изображена на рис. 5.18.

В соответствии с решением примера 2.7 были рассчитаны токи в ветвях цепи, которые имели значения:

$$i_1(t) = 16,0 \sin(100t + 60^\circ) \text{ A}; i_2(t) = 13,4 \sin(100t + 27^\circ) \text{ A.}$$

при заданных напряжениях источников

$$e_1(t) = 10 \sin 100t \text{ B}; e_2(t) = 14,1 \sin(100t + 45^\circ) \text{ B.}$$

При задании этих значений напряжений учтем, что в моделируемой схеме следует устанавливать не амплитудные, а действующие значения напряжений, которые равны:

$$U_1 = U_{m1}/\sqrt{2} = 7,09 \text{ B}; U_2 = U_{m2} = U_{m2}/\sqrt{2} = 10 \text{ B.}$$

Показания измерительных приборов, включенных в моделируемую схему, также соответствуют действующим значениям токов

$$I_1 = 11,35 \text{ A}; I_2 = 9,51 \text{ A.}$$

После перевода действующих значений токов в амплитудные, получим

$$I_{m1} = 11,35 \sqrt{2} = 16,00 \text{ A}; I_{m2} = 9,51 \sqrt{2} = 13,40 \text{ A,}$$

что полностью соответствует результатам расчета, полученным в примере 2.7.

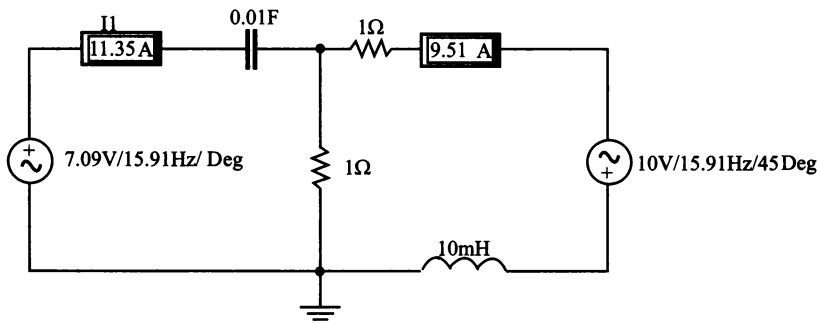


Рис. 5.18. Результаты моделирования схемы к примеру 5.5

5.4. Моделирование цепей периодического несинусоидального тока

При моделировании работы электрических цепей под действием периодических несинусоидальных воздействий можно решать следующие задачи:

- ❏ изучать спектральный состав воздействий и реакций в цепях;
- ❏ определять реакцию линейной цепи на сумму гармонических сигналов кратных частот;
- ❏ определять изменения формы периодического несинусоидального тока или напряжения при изменении параметров элементов цепи.

Первая из поставленных задач решается при помощи тех программ, которые обеспечивают проведение анализа по Фурье (**Fourier Analysis**). Такие программы имеются в системах **OrCAD 9.1**; **Workbench 5**; **Design Lab. 8.0**. Однако подобные программы отсутствуют в системах **Micro-Cap V** и **Workbench 4.1**.

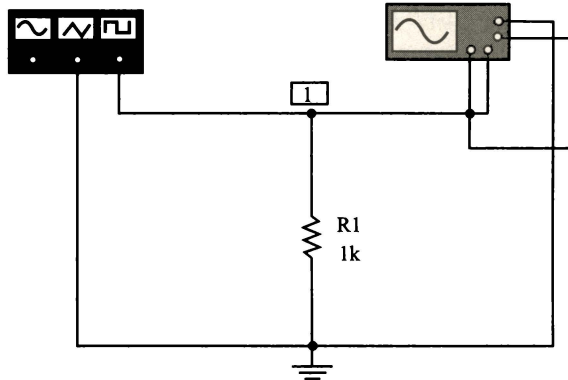
Рассмотрим вначале моделирование разложения в ряд Фурье простейших периодических функций. Наиболее просто подобные задачи решаются с помощью программы **Workbench 5** (или 5.12).

Пример 5.6. *Выполнить разложение в ряд Фурье и построить линейчатые спектры для следующих периодических функций:*

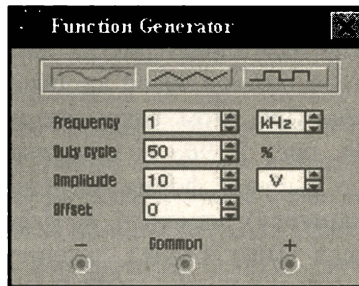
- 1) гармонической;
- 2) гармонической функции со постоянным смещением;
- 3) симметричных импульсов прямоугольной формы;
- 4) симметричных прямоугольных импульсов с постоянным смещением;
- 5) несимметричных прямоугольных импульсов;
- 6) симметричных треугольных импульсов;
- 7) симметричных треугольных импульсов с постоянным смещением;
- 8) несимметричных пилообразных импульсов.

Решение. Импульсные последовательности указанных типов можно легко получить с помощью генератора функций (**Function Generator**), который входит в состав измерительных приборов программы **Workbench 5**. Этот генератор вырабатывает периодические последовательности трех форм: синусоидальной, прямоугольной и треугольной. Кроме этого, он обеспечивает смещение указанных последовательностей по постоянному уровню с помощью регулировки **Off set**, позволяет изменять коэффициент заполнения и симметрию импульсов при помощи регулятора **Duty cycle**.

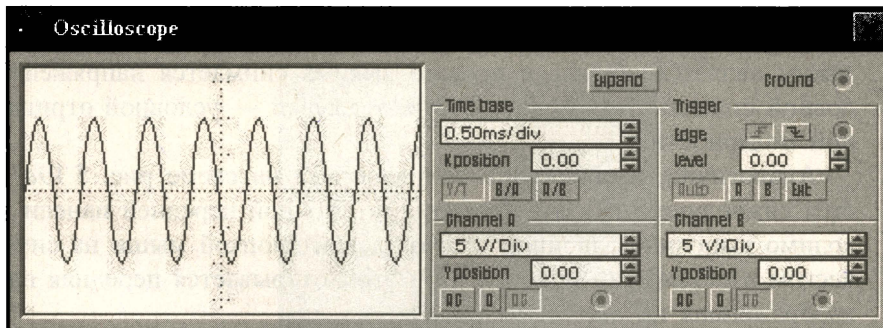
Для решения поставленной задачи необходимо собрать схему, которая приведена на рис. 5.19а. В этой схеме имеются два прибора — генератор функций (**Function Generator**) и осциллограф (**Oscilloscope**), включенные параллельно. Сопротивление R1 является нагрузкой генератора функций и на процессы в схеме влияния не оказывает.



а)



б)



в)

Рис. 5.19а, б, в. Включение измерительных приборов (а), установка генератора (б), изображение сигнала на осциллографе (в) к примеру 5.6

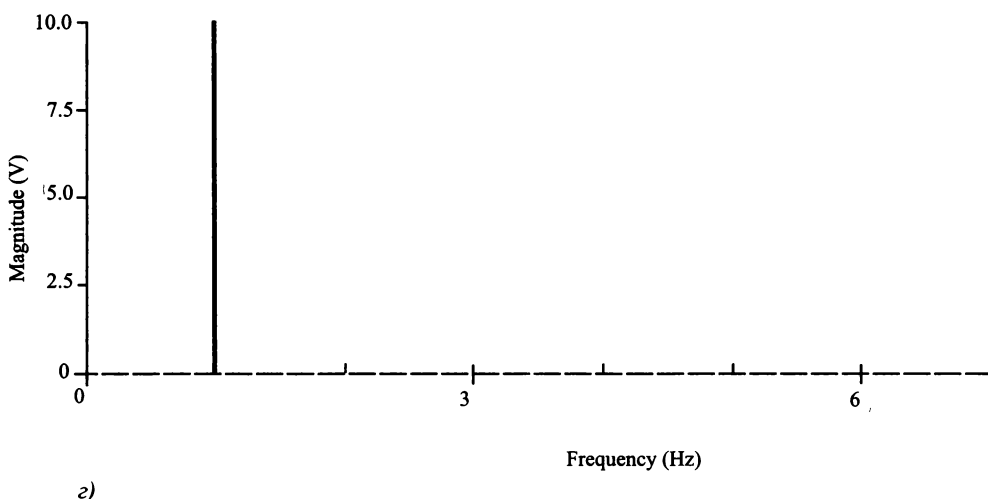


Рис. 5.19. Результат анализа спектра по Фурье (з) к примеру 5.6

Изображение генератора функций на рис. 5.19а является символическим, для установки характеристик выходного сигнала необходимо выполнить двойной щелчок левой кнопкой мыши на этом символическом изображении. При этом открывается передняя панель прибора, изображенная на рис. 5.19б. С помощью органов управления этим прибором можно выбрать форму выходного напряжения; установить его частоту (**Frequency**); изменить коэффициент заполнения или симметрию импульсов (**Duty Cycle**); амплитуду (**Amplitude**) и напряжение смещения нулевого уровня (**Off Set**).

Выходное напряжение генератора функций снимается с зажимов, расположенных в нижней части передней панели прибора. Средний зажим является общим, с правого зажима снимается напряжение условной положительной полярности, а с левой — условной отрицательной полярности.

Аналогично, изображение осциллографа на схеме рис. 5.19а является символическим. Для открытия его полной передней панели необходимо выполнить двойной щелчок левой кнопкой мыши на символическом изображении прибора. При этом открывается передняя панель, изображенная на рис. 5.19в.

С помощью органов управления каналов А и В устанавливаются коэффициенты отклонения по вертикали **V/Div** и смещение изображения по вертикали **Y pos**. С помощью органов управления разверткой **Time Base** устанавливаются коэффициент развертки **s/Div** и смещение изобра-

жения по горизонтали **X Pos**. Способ синхронизации изображения выбирается с помощью органов управления **Trigger**. Вызов расширенной передней панели осциллографа производится нажатием клавиши **Zoom**. Для возвращения к обычной передней панели надо нажать клавишу **Reduce** на расширенной панели прибора.

Для выполнения первого пункта программы выберем с помощью органов управления генератором *синусоидальную форму* выходного напряжения \sim , установим его частоту равной 1 Hz, а напряжение 10 V при коэффициенте заполнения 50%. Органами управления осциллографом настроим этот прибор так, чтобы получить устойчивое изображение синусоидального напряжения, как показано на рис. 5.19в.

Для получения на экране монитора изображения спектральной характеристики этого сигнала необходимо подать команду: **Analysis > Activate > Fourier...** После этого откроется окно **Fourier Analysis**, в котором нужно указать параметры частотного анализа и способ представления результата. Изображение частотного спектра гармонического сигнала приведено на рис. 5.19г. Из этого рисунка видно, что спектр гармонического сигнала состоит из одной единственной линии, амплитуда (**Magnitude**) которой равна 10 В, а частота 1 Гц, установленным на генераторе.

Для получения изображения спектральной характеристики *гармонического сигнала*, смещенного на постоянный уровень, необходимо на генераторе с помощью органа управления **Off Set** установить требуемое смещение, например равное 10 В, как показано на рис. 5.20а. Изображение такого сигнала на осциллографе приведено на рис. 5.20б. После задания смещения, по команде **Analysis > Activate > Fourier...**, получим на экране монитора изображение спектра сигнала в виде двух спектральных линий: постоянного смещения 10 В и гармоники с амплитудой 10 В и частотой 1 кГц, как показано на рис. 5.20в.

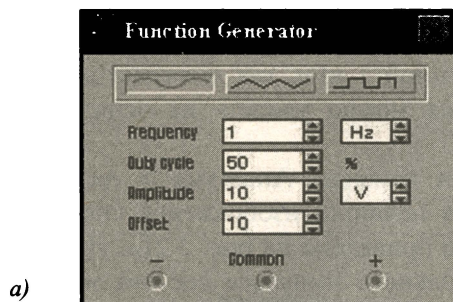


Рис. 5.20, а. Результаты анализа по Фурье гармонического сигнала с постоянной составляющей: установка генератора к примеру 5.6

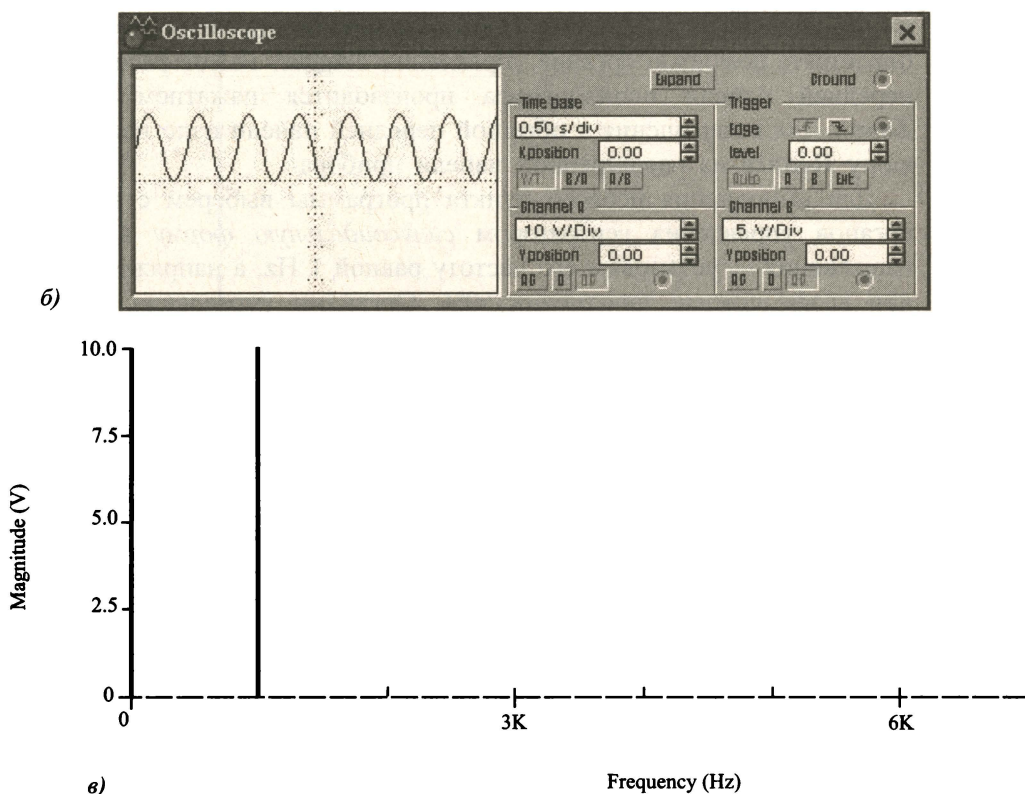
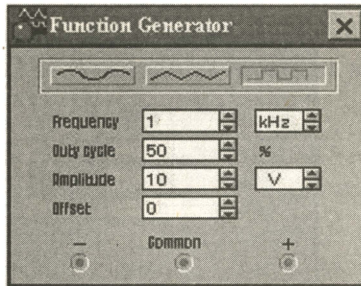


Рис. 5.20б, в. Результаты анализа по Фурье гармонического сигнала с постоянной составляющей: изображение на осциллографе (б), изображение спектра (в) к примеру 5.6

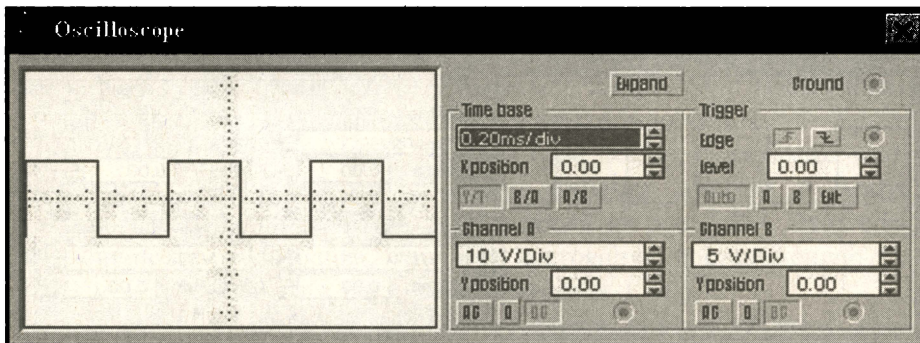
Теперь выполним разложение в ряд Фурье *симметричного периодического напряжения прямоугольной формы*. Для этого на генераторе функций установим соответствующее выходное напряжение с амплитудой 10 В и частотой 1 кГц, как показано на рис. 5.21а. Изображение этого напряжения можно увидеть на осциллографе, как показано на рис. 5.21б.

После подачи команды **Analysis > Activate > Fourier...** в окне **Analysis Graphs** появится изображение спектральной характеристики сигнала, которое приведено на рис. 5.21в. Из этого рисунка видно, что спектр прямоугольного импульса состоит из набора нечетных гармоник, амплитуды которых убывают обратно пропорционально номеру гармоники. Так, например, первая гармоника имеет частоту 1 кГц и амплитуду, равную 12,74 В. Третья гармоника с частотой 3 кГц имеет

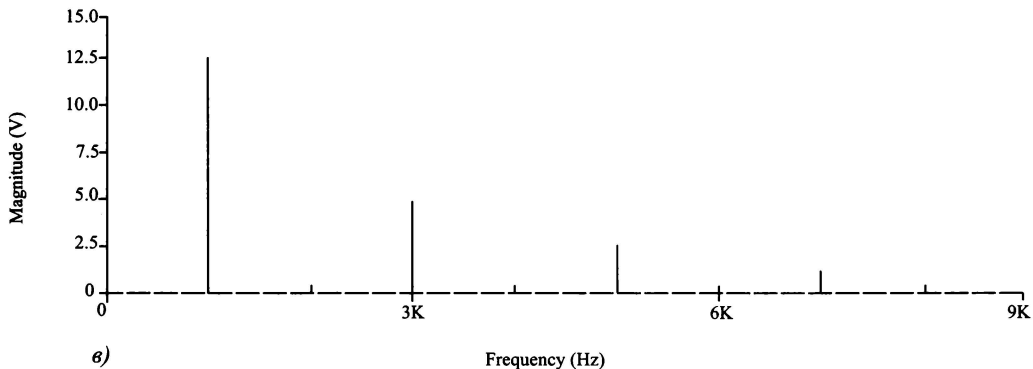
амплитуду 4,25 В (т. е. в три раза меньше амплитуды первой гармоники). Пятая гармоника с частотой 5 кГц имеет амплитуду 2,55 В, а седьмая гармоника с частотой 7 кГц — 1,82 В. Четные гармоники в спектре сигнала отсутствуют. В спектре сигнала нет также постоянной составляющей.



а)



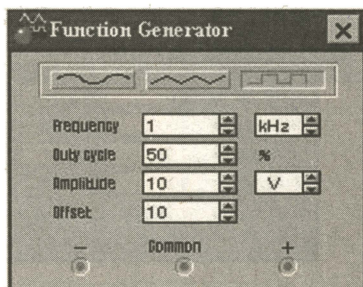
б)



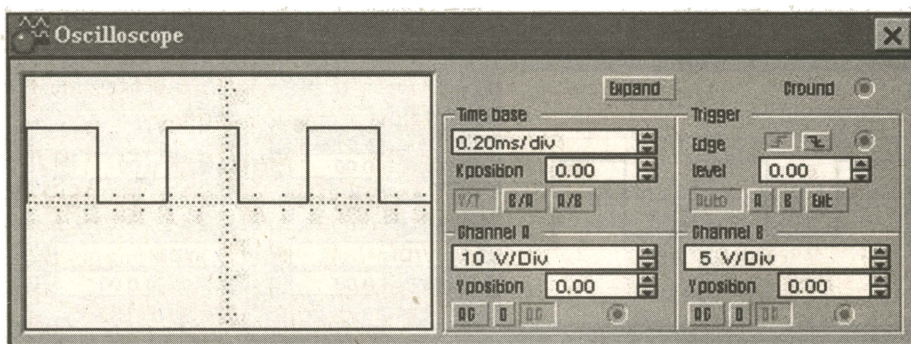
в)

Рис. 5.21. Анализ по Фурье прямоугольного симметричного напряжения: установка генератора (а), изображение сигнала (б), спектральный состав (в)

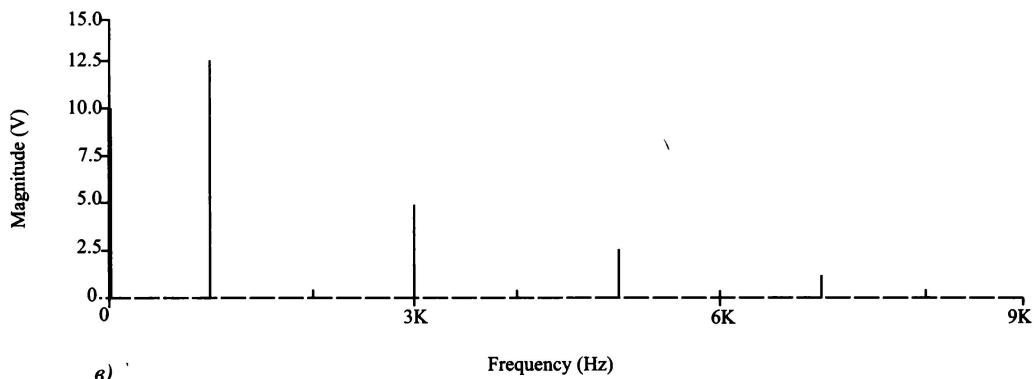
Для получения *однополярных симметричных прямоугольных импульсов* нужно на генераторе функций установить постоянное напряжение смещения **Off Set**, например равное 10 В, как показано на рис. 5.22а. Изображение этого напряжения, которое появится на экране осциллографа, показано на рис. 5.22б. После подачи команды **Analysis** > **Activate** > **Fourier...** в окне **Analysis Graphs** можно увидеть частот-



а)



б)



в)

Рис. 5.22. Анализ по Фурье смещенных прямоугольных импульсов: установка генератора (а), изображение сигнала (б) и его спектр (в)

ный спектр этого сигнала, который отличается от рассмотренного выше спектра прямоугольных импульсов тем, что в нем присутствует постоянная составляющая, равная 10 В. Остальные спектральные составляющие не изменились.

Сравнение этих разложений в ряд Фурье с теоретическими значениями можно произвести, если воспользоваться данными табл. 3.1. Так, для прямоугольных симметричных импульсов, спектральный состав которых определяется по формулам, приведенным для варианта 2, имеем:

- » амплитуда первой гармоники $U_{m1} = 4A_m/\pi = 40/\pi = 12,74$ В;
- » амплитуда третьей гармоники $U_{m3} = 4A_m/(3\pi) = 4,25$ В;
- » амплитуда пятой гармоники $U_{m5} = 4A_m/(5\pi) = 2,55$ В.

Аналогичный расчет можно выполнить для смещенных прямоугольных импульсов, которые содержат постоянную составляющую $U_0 = A_m = 10$ В. Расчетные формулы для этого сигнала приведены в табл. 3.1 (вариант 1). Эти значения полностью совпадают со значениями спектральных составляющих, полученных путем моделирования, что подтверждает корректность выполненного решения.

Для *несимметричных прямоугольных импульсов* с постоянным смещением, форма которых при коэффициенте заполнения ($\gamma = T_H/T = 83\%$) установлена на генераторе функций (рис. 5.23а), а изображение приведено на рис. 5.23б, после подачи команды **Analysis > Activate > Fourier...**, получим спектр, изображенный на рис. 5.23в. Этот спектр, в отличие от предыдущих, содержит постоянную составляющую $U_0 = 10$ В и все гармоники с частотами, кратными 1 кГц.

Амплитуды гармоник, входящих в спектр, вначале убывают, однако затем снова возрастают. Расчетный спектр таких импульсов в табл. 3.1 не приводится, однако в литературе он известен. Так, например, его постоянная составляющая определяется по формуле $U_0 = 2A_m\gamma = 20 \cdot 0,83 = 16,6$ В. Амплитуды гармоник определяются с помощью уравнения

$$U_{mk} = 4A_m \frac{\sin(k\pi\gamma)}{k\pi\gamma}.$$

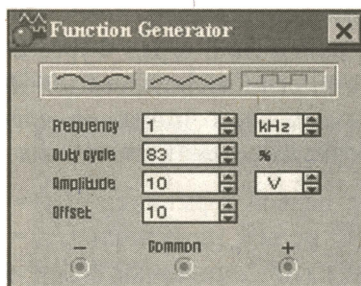
Из этого уравнения следует, что амплитуды первых пяти гармоник имеют значения:

$$U_{m1} = 4A_m \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma} = 7,5 \text{ В}; \quad U_{m2} = 4A_m \frac{\sin(2\pi\gamma)}{2\pi\gamma} = 6,6 \text{ В};$$

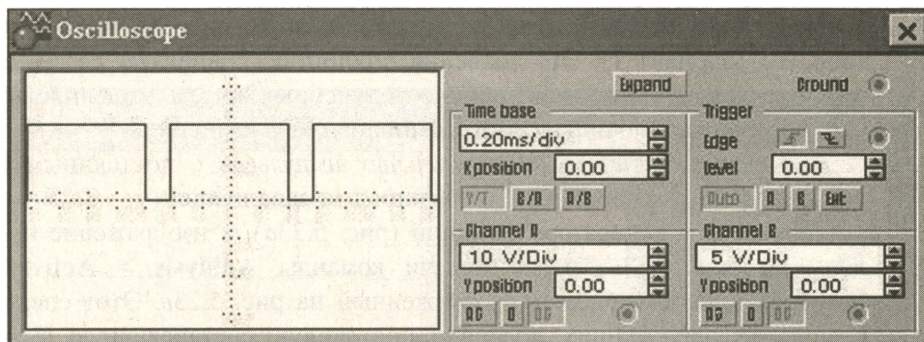
$$U_{m3} = 4A_m \frac{\sin(3\pi\gamma)}{3\pi\gamma} = 5,1 \text{ В}; \quad U_{m4} = 4A_m \frac{\sin(4\pi\gamma)}{4\pi\gamma} = 3,3 \text{ В};$$

$$U_{m5} = 4A_m \frac{\sin(5\pi\gamma)}{5\pi\gamma} = 1,4 \text{ В}.$$

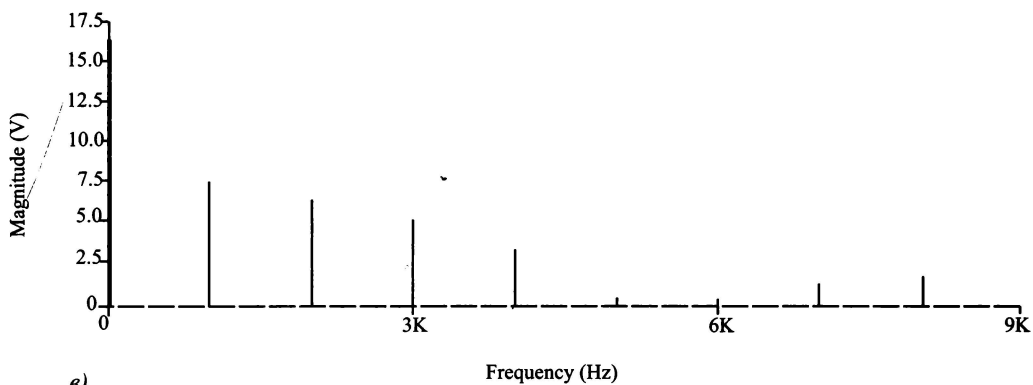
Полученные значения достаточно хорошо согласуются с результатами моделирования, приведенными на рис. 5.23в.



а)



б)



в)

Рис. 5.23. Анализ по Фурье несимметричных прямоугольных импульсов: установка генератора (а), изображение сигнала (б) и его спектр (в)

В заключение этого примера рассмотрим спектральный состав *треугольных импульсов напряжения*. Для получения симметричных треугольных импульсов напряжения с частотой 1 кГц, не имеющих постоянной составляющей, необходимо на генераторе функций (рис. 5.24а) установить режим \wedge ; 1kHz; 50%; 10 V. Форма этих импульсов на экране осциллографа приведена на рис. 5.24б.

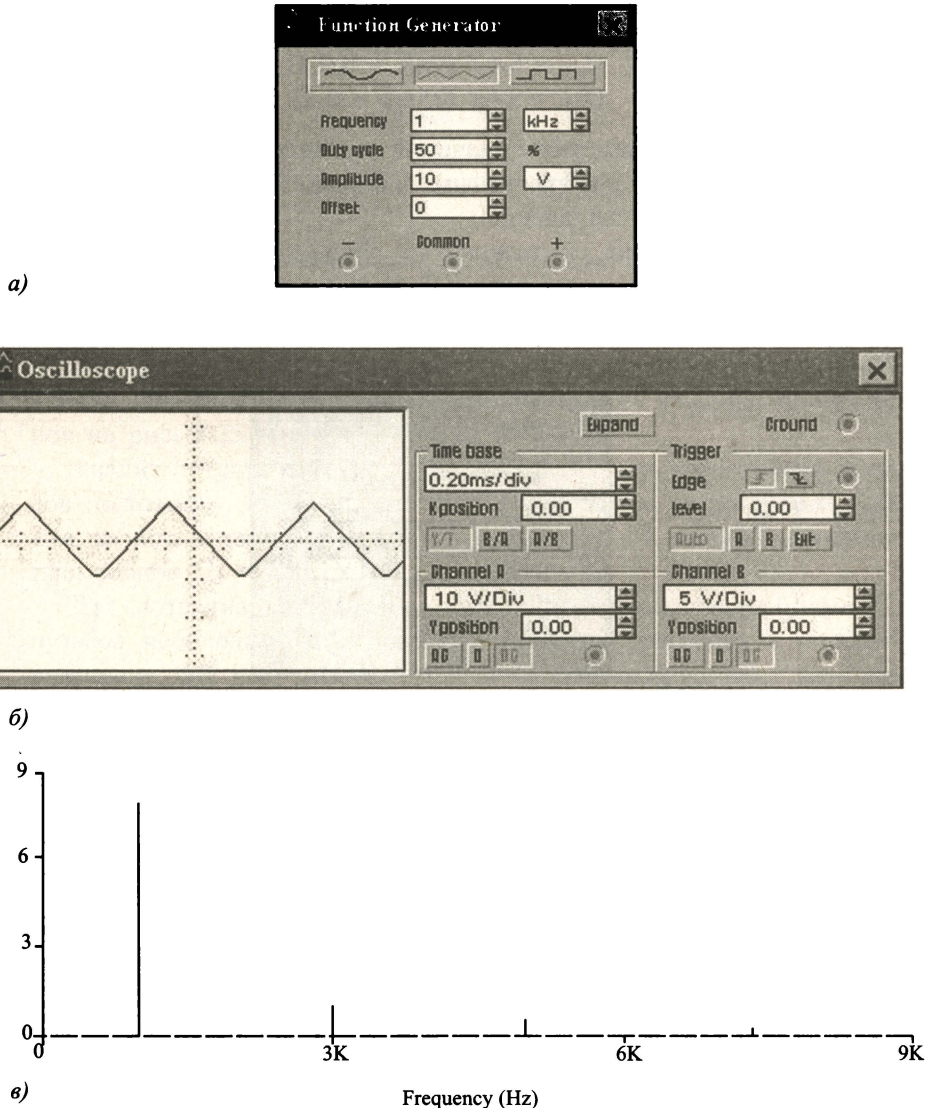


Рис. 5.24. Анализ по Фурье симметричных треугольных импульсов: установка генератора (а), изображение сигнала (б) и его спектр (в)

После подачи команды **Analysis > Activate > Fourier...** в открывшемся окне **Analysis Graphs** получим изображение спектра треугольных импульсов, которое приведено на рис. 5.24в. Полученное изображение показывает, что спектр треугольных импульсов содержит только нечетные гармоники, амплитуды которых убывают достаточно быстро. Расчетные значения амплитуд трех первых гармоник можно получить, если воспользоваться формулой разложения для варианта 6 из табл. 3.1:

$$\begin{aligned} U_{m1} &= 8A_m/\pi^2 = 8,12 \text{ В}; \\ U_{m3} &= 8A_m/(9\pi^2) = 0,9 \text{ В}; \\ U_{m5} &= 8A_m/(25\pi^2) = 0,33 \text{ В}. \end{aligned}$$

Сравнение расчетных значений амплитуд гармоник с результатами моделирования, изображенными на рис. 5.24в, показывает их достаточно хорошее совпадение.

Для получения *симметричных однополярных треугольных импульсов* необходимо на генераторе функций дополнительно установить постоянное смещение **Off Set**, равное 10 В, как показано на рис. 5.25а.

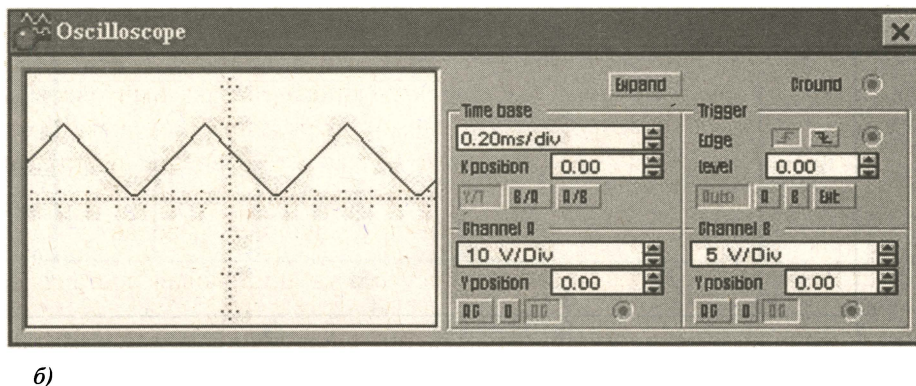
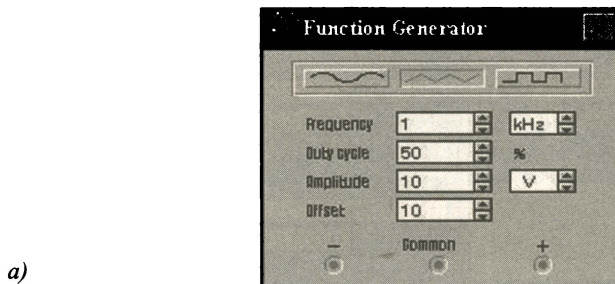
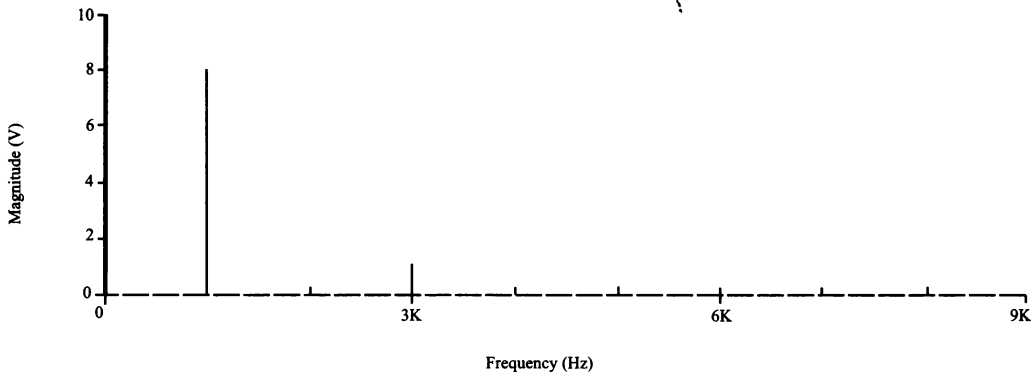


Рис. 5.25а, б. Анализ по Фурье смещенных треугольных импульсов: установка генератора (а), изображение сигнала (б)



в)

Рис. 5.25в. Анализ по Фурье смещенных треугольных импульсов: спектр сигнала

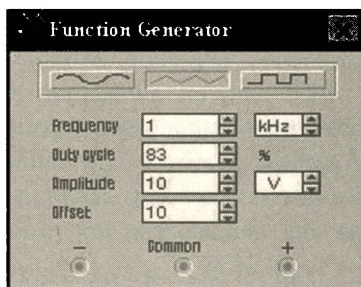
Изображение такого напряжения на экране осциллографа приведено на рис. 5.25б. После подачи команды **Analysis > Activate > Fourier...** в окне **Analysis Graphs** получим изображение спектра, представленное на рис. 5.25в.

Анализ спектрального состава однополярных треугольных импульсов показывает, что оно полностью совпадает с предыдущим вариантом, за исключением постоянной составляющей, которая имеет значение, равное $U_0 = 2A_m/2 = 10$ В.

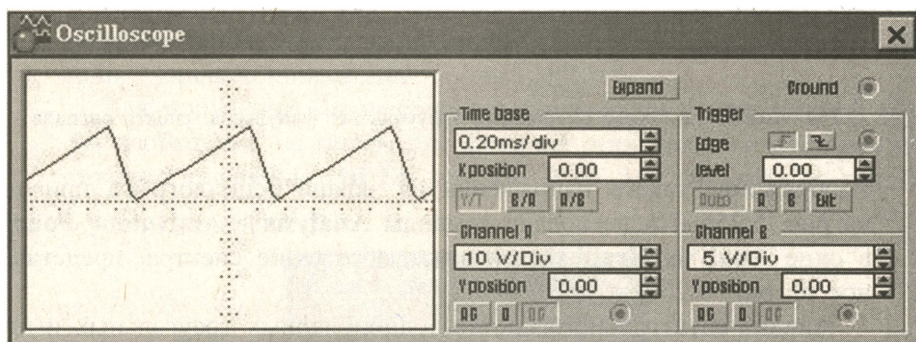
Для создания *несимметричных однополярных пилообразных импульсов* необходимо на генераторе функций установить постоянное смещение **Off Set**, равное 10 В, и ввести коэффициент заполнения $\gamma = 83\%$, как показано на рис. 5.26а. Изображение этих импульсов можно увидеть на экране осциллографа, как показано на рис. 5.26б.

Используя команду **Analysis > Activate > Fourier**, в окне **Analysis Graphs** получим изображение спектрального состава импульсов, приведенное на рис. 5.26в. Аналитическое выражение для спектра таких импульсов в табл. 3.1 отсутствует, однако из сравнения спектра этих импульсов со спектром симметричных треугольных импульсов, приведенных на рис. 5.25в, можно сделать следующие выводы:

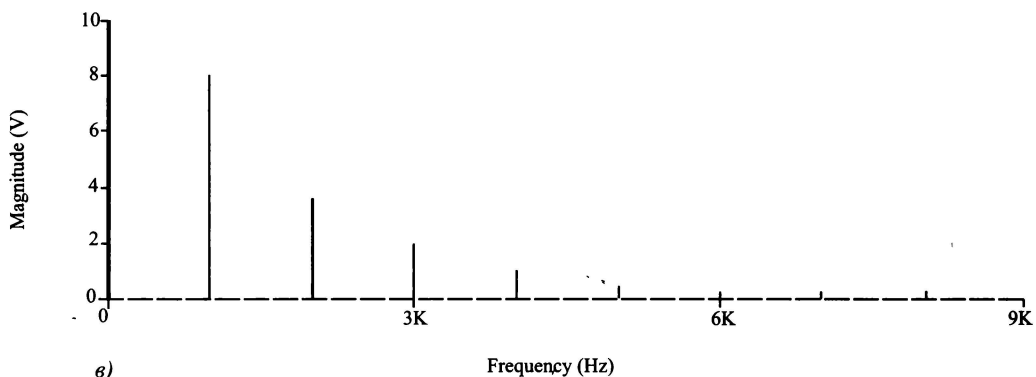
- » в спектре импульсов присутствует постоянная составляющая $U_0 = A_m = 10$ В;
- » спектр импульсов содержит как четные, так и нечетные гармоники;
- » амплитуды гармоник убывают почти пропорционально их порядковому номеру;



а)



б)



в)

Рис. 5.26. Анализ по Фурье несимметричных прямоугольных импульсов: установка генератора (а), изображение сигнала (б) и его спектр (в)

- » амплитуда первой гармоники примерно на один вольт меньше амплитуды первой гармоники для симметричных импульсов, т. е. около 7 В;

- ✎ амплитуда второй гармоники около 3 В, амплитуда третьей гармоники составляет 1,5 В, а амплитуда четвертой гармоники — всего 0,8 В;
- ✎ удельный вес высших гармоник в спектре сигнала возрастает (например, амплитуда третьей гармоники увеличивается примерно на 67%).

Таким образом, асимметрия импульсов приводит к расширению их спектрального состава. В пределе для пилообразных импульсов, которые приведены в табл. 3.1 (вариант 3), амплитуда первой гармоники равна $U_{m1} = 2A_m/\pi = 20/\pi = 6,37$ В, а амплитуды последующих гармоник уменьшаются пропорционально их порядковому номеру (например, амплитуда третьей гармоники составляет 2,12 В).

Пример 5.7. *Требуется выполнить моделирование процесса преобразования сигналов симметричной прямоугольной и треугольной формы при помощи RC-фильтра нижних частот. Построить графики спектра сигнала на выходе фильтра, его амплитудную и фазочастотную характеристики. Решение задачи выполнить при помощи программы **Electronics Workbench 5**.*

Решение. Для рассмотрения процесса преобразования сигнала необходимо вначале построить схему RC-фильтра нижних частот и подать на его вход сигнал от генератора функций (**Function Generator**). К выходу фильтра необходимо подключить измерительные приборы: электронный осциллограф (**Oscilloscope**) и анализатор спектра сигнала (**Bode Plotter**). После выбора из меню программы всех необходимых элементов и приборов, выполним соединение их при помощи проводников и в результате получим схему, которая приведена на рис. 5.27а. С помощью редактора схемы введем необходимые обозначения элементов и значения их параметров, например выберем $R1 = 1 \text{ k}\Omega$, $C1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ (которые обычно устанавливаются по умолчанию).

Затем установим на генераторе функций требуемую форму периодического сигнала (например, прямоугольные импульсы), зададим коэффициент заполнения импульсов $\gamma = 50 \%$, амплитуду выходного напряжения $A_m = 10 \text{ В}$ и частоту повторения $f = 1 \text{ kHz}$ (эти значения также обычно устанавливаются по умолчанию). Изображение передней панели генератора с установленными значениями параметров выходного сигнала приведено на рис. 5.27б.

Поскольку электронный осциллограф имеет два входа, то на первый вход (**node 1**) подадим выходной сигнал генератора, имеющий прямоугольную форму, а на второй вход (**node 2**) — сигнал с выхода фильтра. Общий вывод осциллографа **Ground** необходимо соединить с землей.

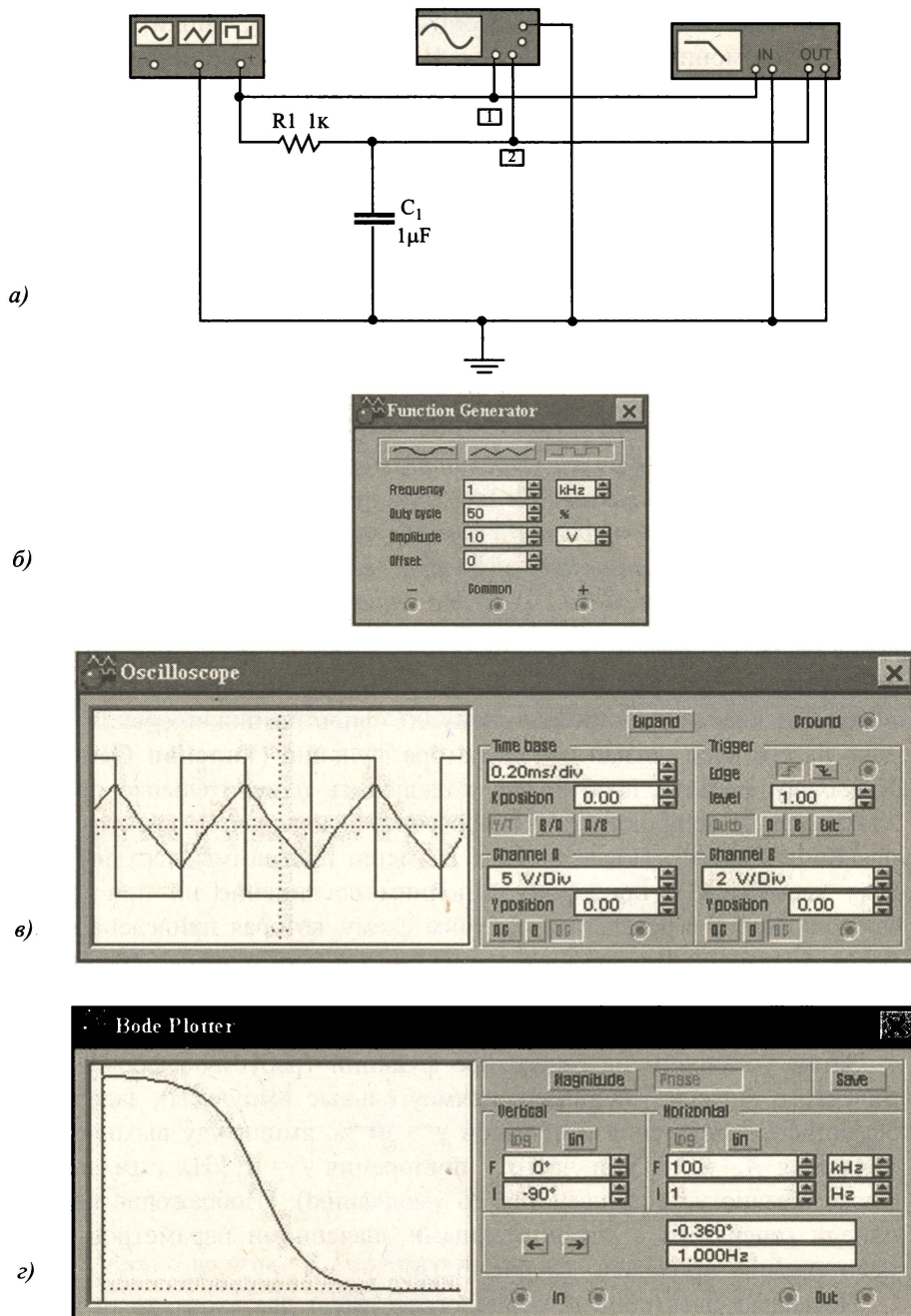


Рис. 5.27. Схема цепи к примеру 5.7 (а), установка генератора (б), изображение входного и выходного сигналов (в) и амплитудно-частотная характеристика (г)

При таком включении осциллографа на его экране получим изображение сразу двух сигналов — на входе и выходе фильтра. Однако эти сигналы появятся на экране прибора только после подачи команды **Analysis > Activate**. Расширенное изображение передней панели осциллографа с установленными сигналами приведено на рис. 5.27в.

Полученное изображение сигналов показывает, что *RC*-фильтр нижних частот преобразует входные импульсы прямоугольной формы в выходные импульсы треугольной формы. Это связано с тем, что фильтр нижних частот существенно ослабляет высшие гармоники в спектре выходного сигнала.

Для анализа спектрального состава выходного сигнала необходимо подать команду **Analysis > Activate > Fourier...** В открывшемся после этой команды окне **Analysis Graphs** получим спектр выходного напряжения фильтра, который изображен на рис. 5.28а. Очевидно, что в отличие от спектра входного сигнала, который был показан ранее на рис. 5.21в, спектр выходного сигнала имеет значительно ослабленные высшие гармоники. Кроме этого, в спектре выходного сигнала появились небольшие по амплитуде четные гармоники, что связано с отклонением выходного сигнала от идеальной треугольной формы.

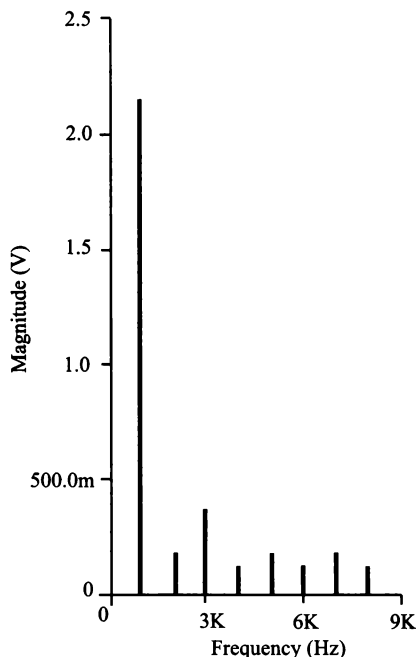


Рис. 5.28а. Спектральный состав выходного сигнала к примеру 5.7

Преобразование спектра сигнала RC -фильтром нижних частот можно также изучать при помощи анализатора спектра **Bode Plotter**. С помощью этого прибора можно анализировать изменение не только амплитудного, но и фазового спектра выходного сигнала фильтра. Внешний вид передней панели анализатора спектра с изображением фазочастотной характеристики фильтра приведен на рис. 5.27 $_2$, а оцифрованные значения спектральных характеристик в логарифмическом масштабе приведены на рис. 5.28 $_б$, $в$.

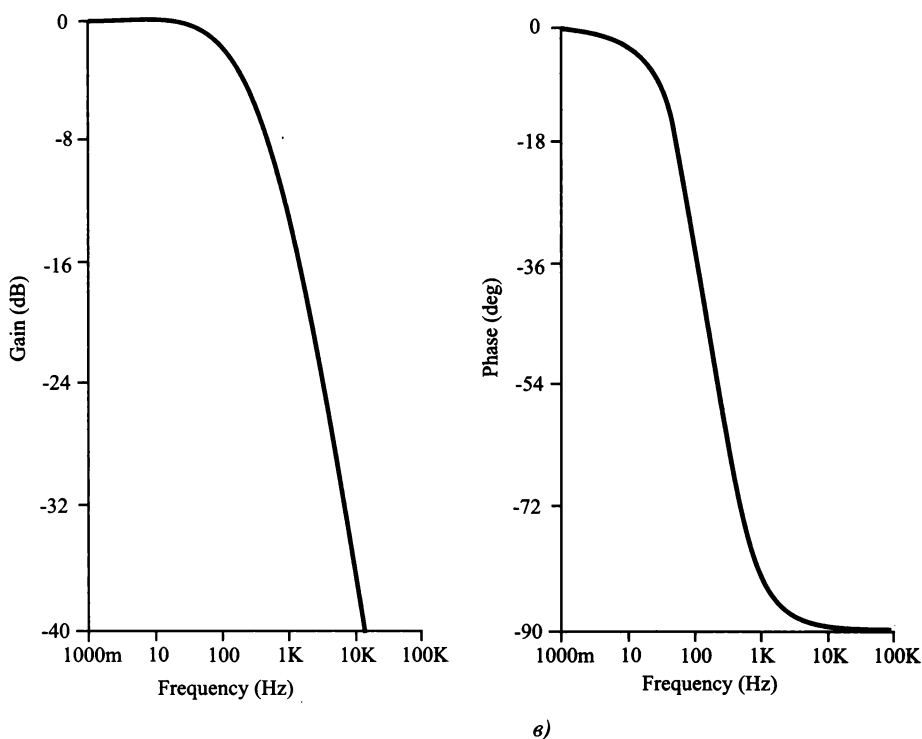


Рис. 5.28 $_б$, $в$ Амплитудная (б) и фазовая (в) характеристики RC -фильтра к примеру 5.7

Из рассмотрения этих характеристик можно сделать следующие выводы:

- » до частоты 100 Гц амплитуда выходного сигнала ослабляется фильтром весьма незначительно (не более 3 дБ);
- » фазовый сдвиг выходного сигнала на частоте 100 Гц достигает -45° ;

- » на частоте 10 кГц амплитуда выходного сигнала ослабляется фильтром примерно на 40 дБ (т. е. почти в 100 раз);
- » на этой же частоте фазовый сдвиг выходного сигнала достигает примерно -90° .

Аналогичным образом выполняется анализ преобразования RC -фильтром нижних частот сигнала треугольной формы. При тех же значениях параметров фильтра и установок генератора сигнала необходимо только переключить форму выходного напряжения генератора. Передние панели измерительных приборов с установленными значениями регулировок приведены на рис. 5.29.

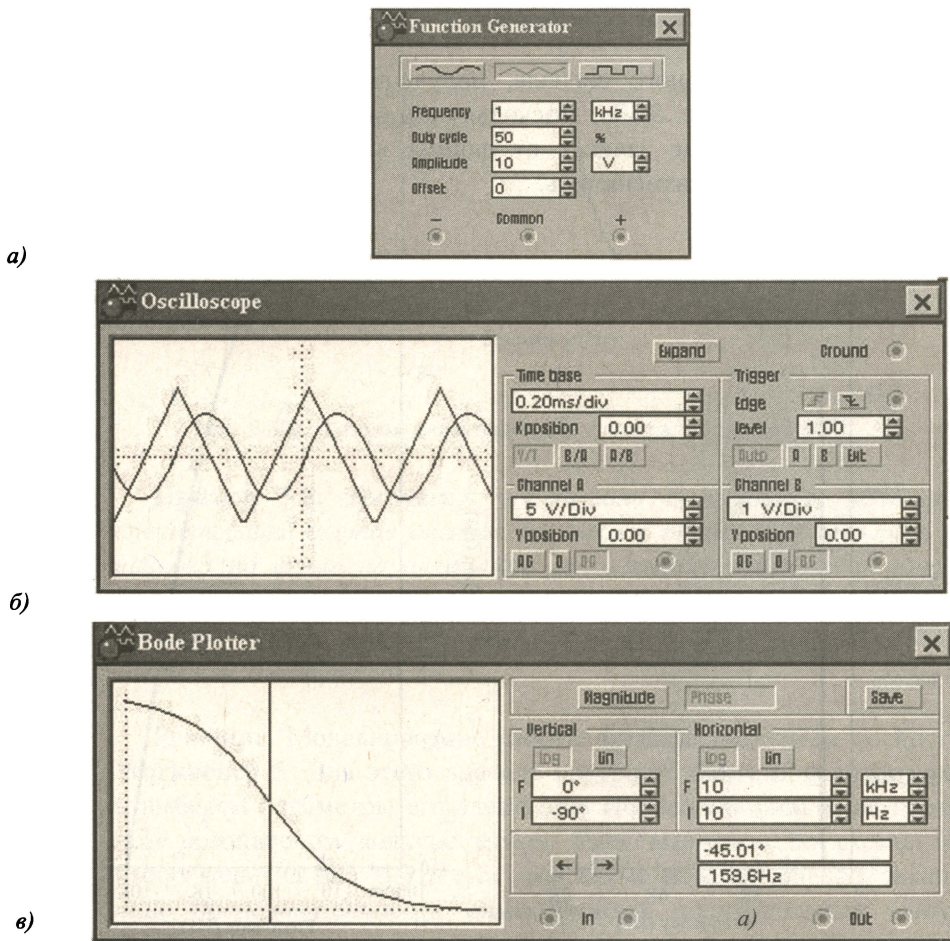


Рис. 5.29а, б, в. Преобразование треугольных импульсов напряжения RC -фильтром нижних частот: установка генератора (а), формы сигналов (б), амплитудная (в) характеристика фильтра к примеру 5.7

а)

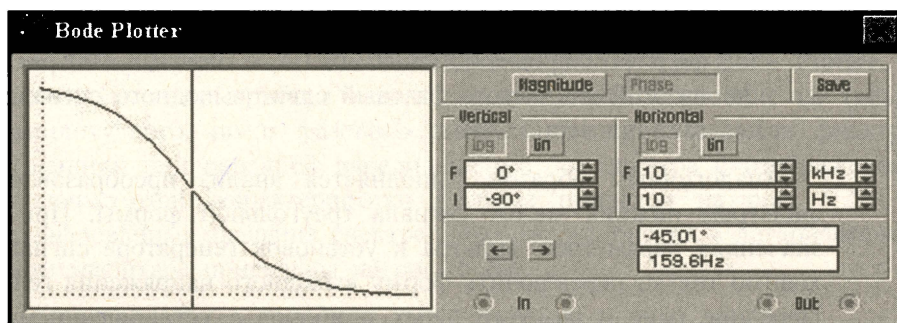
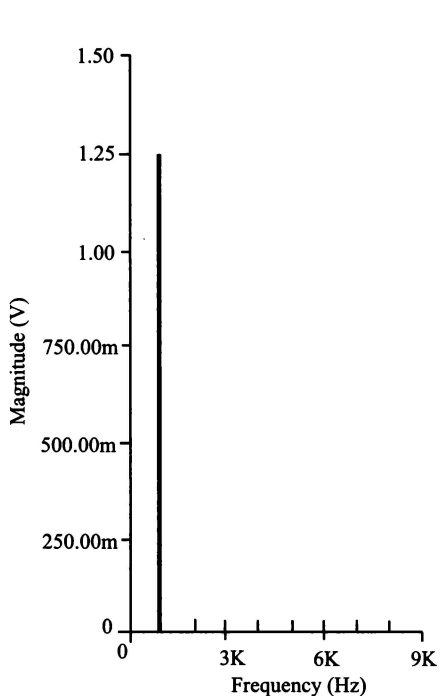
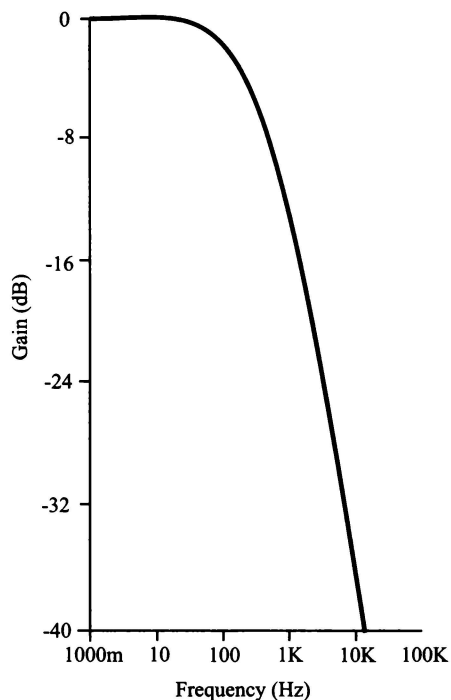


Рис. 5.29г. Преобразование треугольных импульсов напряжения RC -фильтром нижних частот: фазовая характеристика к примеру 5.7

Спектр выходного сигнала, полученный разложением по Фурье, изображен на рис. 5.30а. Поскольку амплитудная и фазовая характеристики фильтра не зависят от формы входного сигнала, то они на рис. 5.30б, в не изменились.



а)



б)

Рис. 5.30а, б. Спектр выходного сигнала (а), амплитудная (б) характеристика фильтра к примеру 5.7

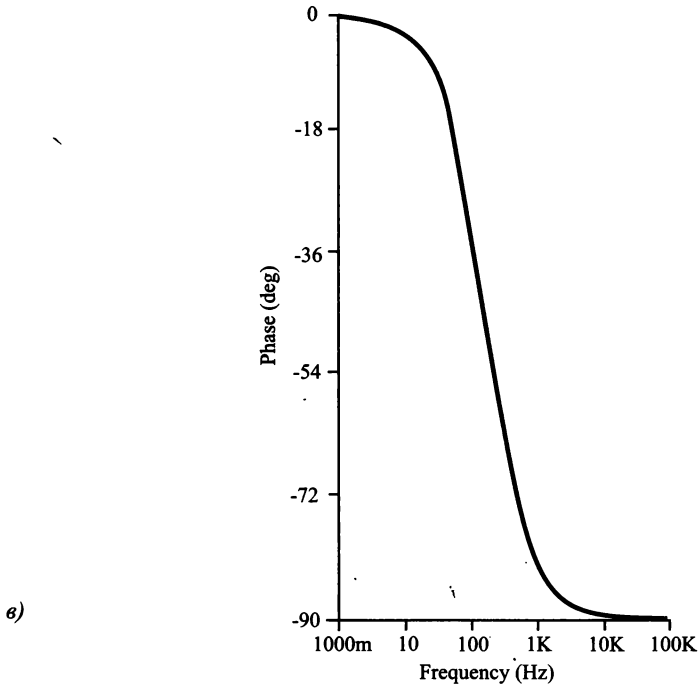


Рис. 5.30в. Фазовая характеристика фильтра к примеру 5.7

Пример 5.8. Требуется определить с помощью моделирования спектральный состав сигнала на выходе полосового фильтра, выполненного по схеме параллельного резонансного контура и построить его амплитудно- и фазочастотную характеристики при входном воздействии в виде симметричных прямоугольных импульсов с частотой 1,6 кГц и амплитудой 10 В.

Решение. Моделирование работы фильтра выполним по программе **Workbench 5**. Для этого вначале построим схему полосового фильтра и выберем параметры его элементов. Полосовой фильтр на параллельном резонансном контуре может быть выполнен по схеме, которая изображена на рис. 5.31а. На этой схеме входной сигнал, заданный в виде последовательности симметричных прямоугольных импульсов, подводится к цепи, которая состоит из последовательного соединения сопротивления $R1$ и параллельного резонансного контура, состоящего из индуктивности $L1$ и емкости $C1$. На резонансной частоте сопротивление такого контура резко увеличивается и входной сигнал почти без

ослабления проходит на выход. При расстройке контура его сопротивление снижается и сигналы, частота которых отличается от резонансной, проходят на выход с ослаблением.

Используя заданное в условии примера значение резонансной частоты $f_p = 1,6$ кГц, найдем параметры элементов резонансного контура, полагая, что $f_p = 1/(2\pi\sqrt{L_1C_1})$. Выбрав $C_1 = 1$ мкФ, получим, используя формулу, значение $L_1 = 10$ мГн. Схема полосового фильтра с такими элементами приведена на рис. 5.31а.

Установим требуемые характеристики выходного сигнала на генераторе функций. Для этого включим прямоугольную форму выходного сигнала и установим его выходное напряжение, равным 10 В при частоте 1,6 кГц. Внешний вид передней панели генератора с установленными значениями параметров сигнала показан на рис. 5.31б.

Для наблюдения формы входного и выходного сигналов используется осциллограф. Изображение этих сигналов на экране осциллографа при установленных значениях коэффициента отклонения 5 В/дел и коэффициента развертки 0,2 мс/дел, приведено на рис. 5.31в. Это изображение показывает, что при прямоугольной форме входного сигнала выходной сигнал имеет практически синусоидальную форму. В то же время заметно существенное запаздывание выходного сигнала по отношению к входному сигналу, так синусоидальный сигнал сдвинут вправо относительно сигнала прямоугольной формы. Амплитуда выходного сигнала немного меньше 10 В, что объясняется неточностью установки резонансной частоты и влиянием входных сопротивлений измерительных приборов.

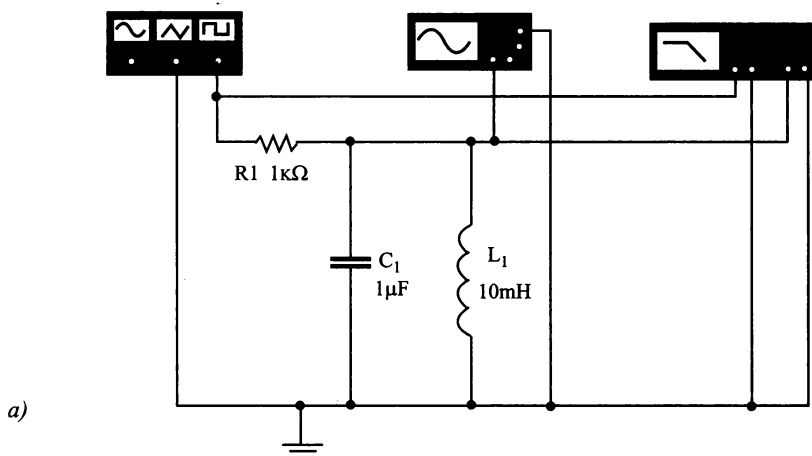
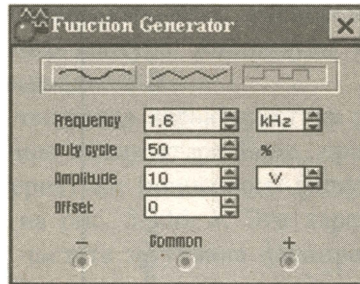
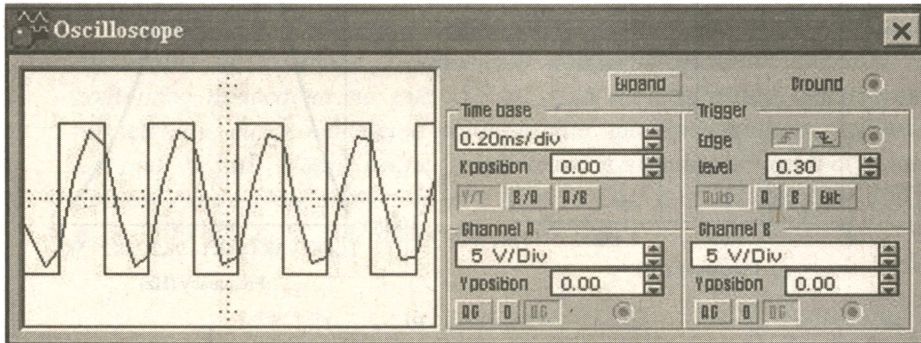


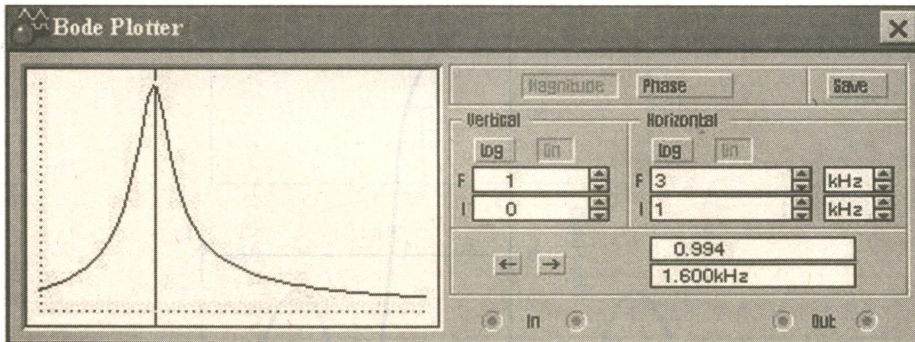
Рис. 5.31а. Схема LC-полосового фильтра



б)



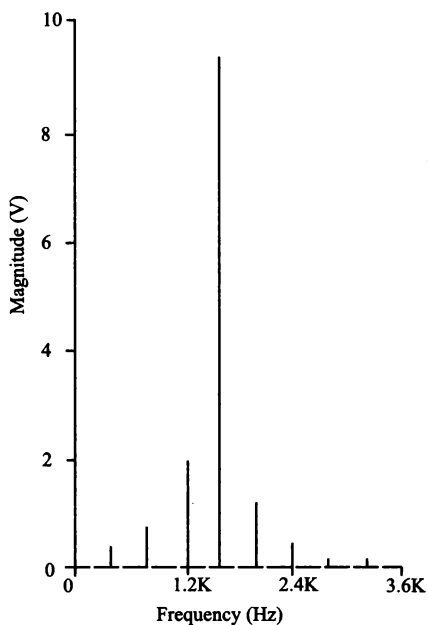
в)



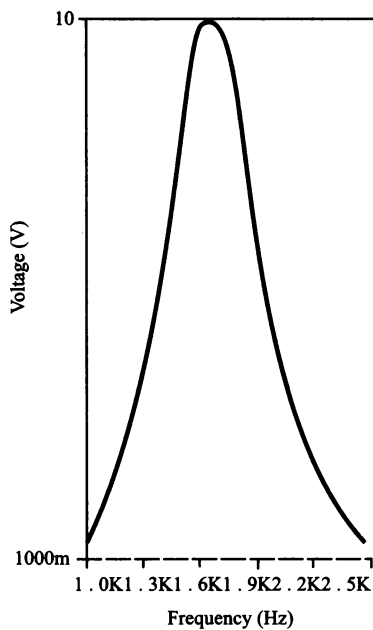
г)

Рис. 5.31б, в, г. Установка генератора (б), изображение входного и выходного сигналов (в) и амплитудно-частотная характеристика фильтра (г) к примеру 5.8

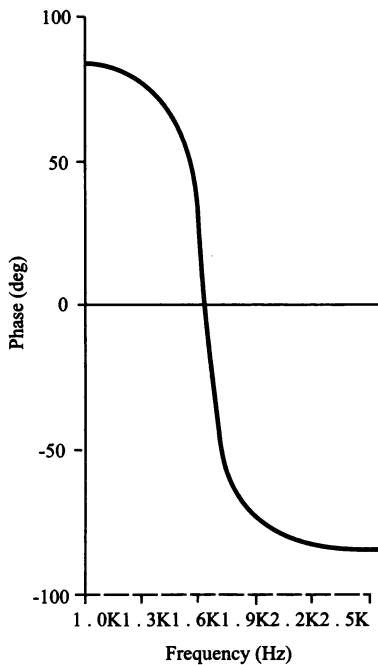
Спектральный состав выходного сигнала, полученный разложением в ряд Фурье по команде **Analysis > Activate > Fourier...**, приведен на рис. 5.32а. Этот график показывает, что выходной сигнал содержит гармонику с частотой 1,6 кГц, амплитуда которой близка к 10 В и



a)



б)



в)

Рис. 5.32. Спектр выходного сигнала (а), амплитудная (б) и фазовая (в) характеристики фильтра к примеру 5.8 /

некоторое количество гармоник, расположенных в полосе пропускания колебательного контура. Амплитуды гармоник с частотами 1,2 и 2,0 кГц не превышают 2 В.

Амплитудно-частотная характеристика резонансного контура, полученная с помощью анализатора Боде, приведена на рис. 5.31г. Резонансные характеристики полосового фильтра с колебательным контуром приведены на рис. 5.32б, в. Эти характеристики показывают, что на резонансной частоте затухание фильтра практически отсутствует, а фазовый сдвиг близок к нулю.

Пример 5.9. Требуется определить с помощью моделирования напряжение на нагрузке Т-образного фильтра нижних частот, схема которого приведена на рис. 5.33а, если на его входе действует выпрямленное синусоидальное напряжение, форма которого изображена на рис. 5.33б. Параметры элементов фильтра и входного сигнала имеют следующие значения: $r = R = 10 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $C = 100 \text{ мкФ}$; $E_m = 100 \text{ В}$; $\omega_1 = 100 \text{ рад/с}$ ($f_1 = 16 \text{ Гц}$).

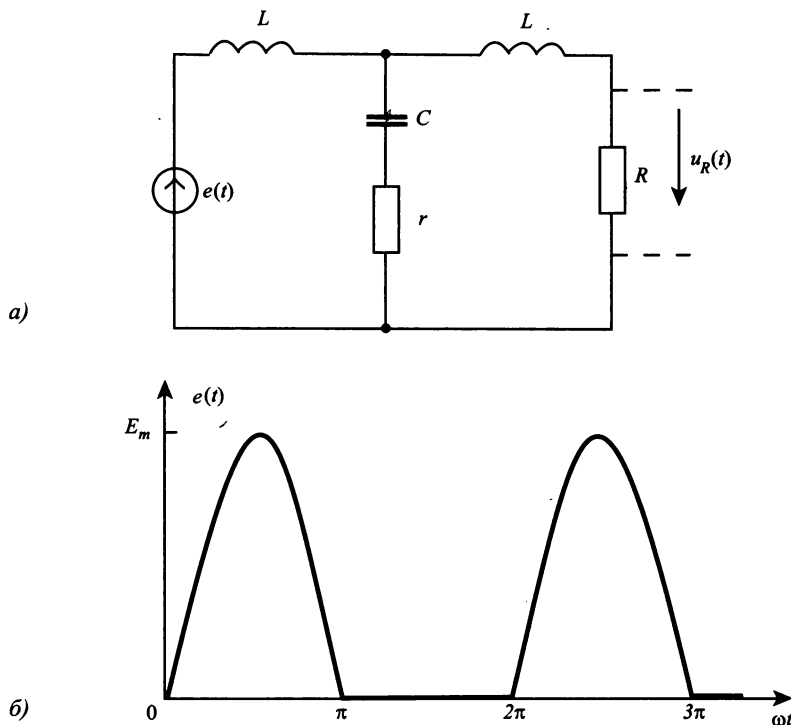


Рис. 5.33. Схема Т-образного фильтра нижних частот (а) и график входного сигнала (б) к примеру 5.9

Решение. Моделирование схемы выполним, пользуясь программой **Micro-Cap V**. При моделировании воспользуемся принципом наложения, в соответствии с которым входной сигнал представим в виде суммы членов ряда Фурье, приведенного в табл. 3.1. (вариант 8). Ограничимся в разложении входного сигнала постоянной составляющей и первыми тремя гармониками ряда:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_m/\pi = 31,8 \text{ В}; \\ E_{m1} &= E_m/2\pi = 50 \text{ В}; \psi_{e1} = 0; \\ E_{m2} &= 2E_m/3\pi = 21,2 \text{ В}; \psi_{e2} = -90^\circ = -1,57 \text{ рад}; \\ E_{m4} &= 2E_m/15\pi = 4,24 \text{ В}; \psi_{e4} = -90^\circ = -1,57 \text{ рад}. \end{aligned}$$

После подстановки найденных значений амплитуд и начальных фаз отдельных составляющих ряда Фурье запишем мгновенное значение напряжения на входе фильтра в виде:

$$e(t) = 31,8 + 50 \sin(100t) + 21,2\sin(200t - 1,57) + 4,24\sin(400t - 1,57) \text{ В}.$$

Используя команду **File > New** откроем окно моделирования программы **Micro-Cap V**. В открытом окне **New** выберем программу **Schematic** для создания новой схемы и построим исследуемую схему в соответствии с рис. 5.33а. На этой схеме введем обозначения элементов, их значения и номера узлов. В первый из источников введем также постоянную составляющую E_0 . Результирующая схема моделируемой цепи приведена на рис. 5.34а.

Входным сигналом в моделируемой цепи будем считать напряжение в узле 1, которое определяется суммой постоянной составляющей и трех первых гармоник с именами:

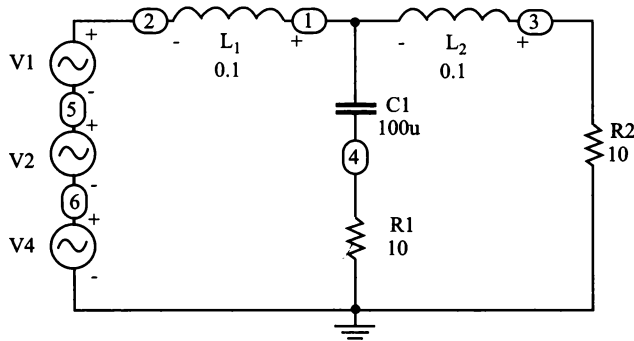
.MODEL16 HZ SIN (F=16HZ A=50V DC=31.8V);
.MODEL 32HZ SIN (F=32HZ A=21.2V PH=-1.57);
.MODEL 64HZ SIN (F=64HZ A=4.24V PH=-1.57).

График напряжения **V(2)** в узле 2 изображен на рис. 5.34б.

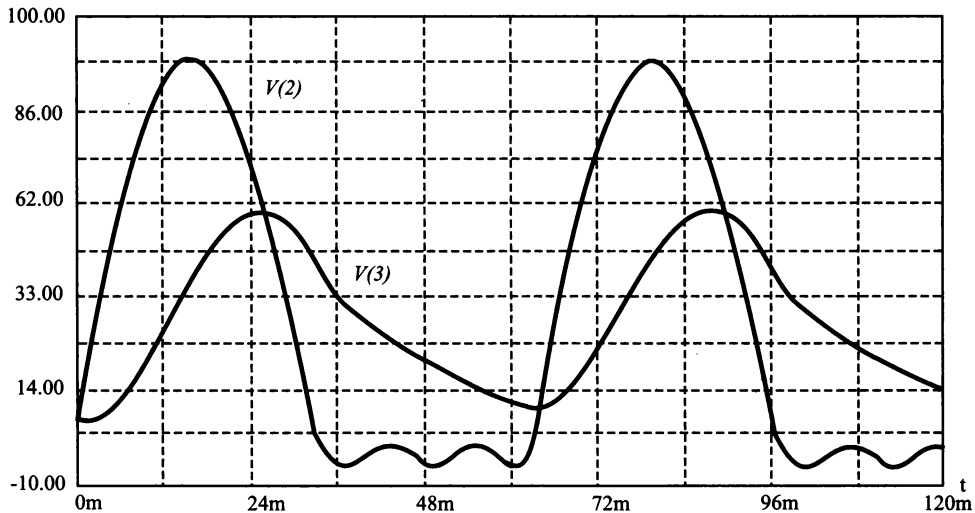
Для выбора вида моделирования используем в меню команду **Analysis > Transient Analysis**. В окне **Transient Analysis Limits** устанавливаем временной интервал **Time Range = 600 ms**; **Maximum Time Step = 1 ms**; **Number of Point = 600** и после подачи команды **Run** выводим график выходного напряжения **V(3)**, который показан на рис. 5.34б. Время анализа выбрано таким образом, чтобы переходный процесс практически закончился и можно было бы рассматривать установившийся режим при несинусоидальном входном сигнале.

Рассматривая этот график, можно сделать следующие выводы:

- » постоянная составляющая входного напряжения передается на выход без изменения своего значения;
- » наиболее сильно в выходном напряжении ослаблена четвертая гармоника входного напряжения;
- » полный размах выходного напряжения уменьшился почти в два раза.



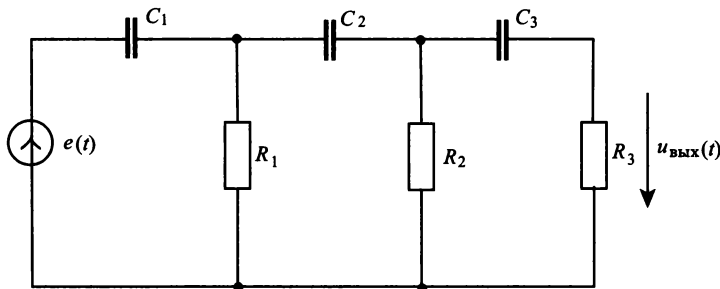
а)



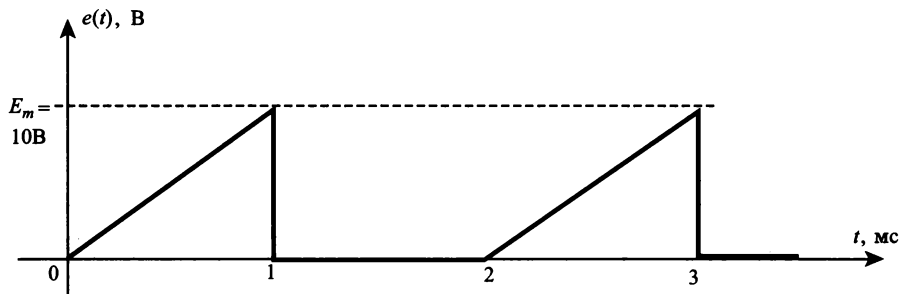
б)

Рис. 5.34. Схема моделируемого фильтра (а) и результаты моделирования (б) к примеру 5.9

Пример 5.10. Требуется определить с помощью моделирования выходное напряжение трехзвенного Г-образного фильтра высших частот, изображенного на рис. 5.35а, при входном напряжении $e(t)$ в виде пилообразных импульсов, имеющих размах $E_m = 10$ В. Параметры элементов фильтра и входного сигнала имеют следующие значения: $C_1 = C_2 = C_3 = 15$ мкФ; $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ Ом; период повторения импульсов $T = 2$ мс; длительность импульса $T_{\text{и}} = 0,5T = 1$ мс.



а)



б)

Рис. 5.35. Схема фильтра верхних частот (а) и график входного сигнала (б) к примеру 5.10

Решение. Выполним моделирование фильтра по программе **Micro-Cap V**. Для этого вначале построим схему фильтра, приведенную на рис. 5.35а, введем обозначения (**Name**) всех элементов, их значений (**Value**) и номера узлов схемы (**Node Numbers**). В результате получим изображение схемы фильтра, приведенное на рис. 5.36а.

Используя форму входного сигнала, изображенную на рис. 5.35б, создадим его модель в виде импульсного сигнала со следующими параметрами:

.MODEL PS PUL
(VZERO=0 VONE=10 P1=0 P2=1m P3=1m P4=1m P5=2m).

В этой модели приняты следующие обозначения:

VZERO — начальное значение импульсного сигнала в В;

VONE — максимальное значение сигнала в В;

P1 — время начала первого импульса в мс;

P2 — длительность переднего фронта пилообразного импульса в мс;

P3 — время окончания переднего фронта импульса в мс;

P4 — время достижения нулевого уровня в мс;

P5 — период повторения импульсов в мс.

Сформированный импульсный сигнал изображен на рис. 5.36б.

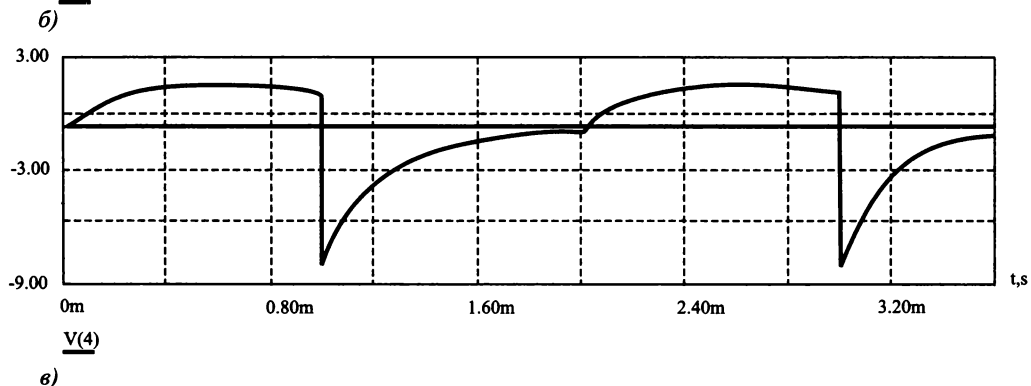
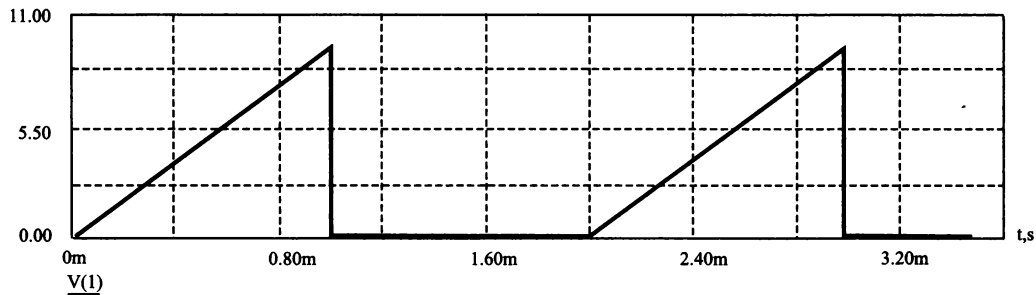
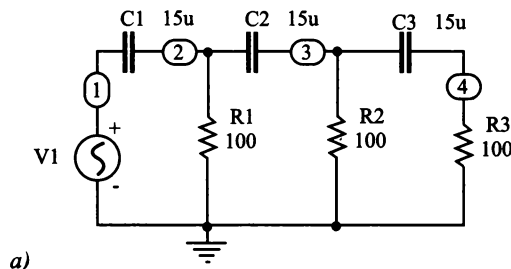


Рис. 5.36. Схема моделируемой цепи (а), графики входного (б) и выходного (в) сигналов к примеру 5.10

Следующим этапом является моделирование работы фильтра. Для начала моделирования необходимо подать команду **Analysis > Transient Analysis** и в открытом окне **Transient Analysis Limits** после задания параметров моделирования

Time Range = 4 ms;
MaximumTime Step = 0,01 ms;
Number of Points = 500

подать команду **Run**. График сигнала на выходе фильтра приведен на рис. 5.36в.

5.5. Моделирование переходных процессов в электрических цепях

Моделирование переходных процессов в электрических цепях является наиболее развитой областью компьютерного моделирования электрических и электронных устройств. В большинстве программ компьютерного моделирования используется метод переменных состояния, подробно рассмотренный в разделе 4. Специально для моделирования переходных процессов в различных системах моделирования имеются программы **Transient Analysis**. Рассмотрим основные вопросы, которые решаются путем моделирования переходных процессов:

- » снимаются проблемы, связанные с составлением и решением характеристического уравнения электрической цепи;
- » практически отсутствуют проблемы, связанные с расчетом переходных процессов в цепях высокого порядка;
- » нет необходимости определять начальные условия в цепи;
- » возможен анализ переходных процессов при сложных воздействиях.

При рассмотрении вопросов, связанных с моделированием переходных процессов, будем придерживаться классификации, связанной с порядком дифференциального уравнения цепи. При этом будем учитывать, что порядок дифференциального уравнения зависит не только от числа реактивных элементов цепи, но и от вида воздействия. Вначале рассмотрим переходные процессы в простейших цепях первого и второго порядка.

Пример 5.11. Требуется выполнить моделирование переходного процесса в цепи первого порядка, которая была рассмотрена в примере 4.3.

Решение. Процесс моделирования переходного процесса в схеме, изображенной на рис. 4.3а, можно разделить на три этапа:

- ▶▶ на первом этапе необходимо выбрать элементы, отредактировать их обозначения и значения параметров, построить исследуемую схему;
- ▶▶ на втором этапе выполняется непосредственное моделирование переходного процесса (**Transient Analysis**);
- ▶▶ на третьем этапе осуществляется вывод информации о результатах моделирования.

Моделирование этой задачи выполним по программе **Workbench 5**, которая была описана в разделе 5.1. При построении исследуемой схемы используем библиотеку компонентов и измерительных приборов программы. Построенная схема приведена на рис. 5.37а. В состав этой схемы входит ключ **S1**, который выполняет коммутацию цепи. В программе имеются четыре типа ключей:

- 1) ключ, управляемый клавишей (по умолчанию — клавишей **Space**);
- 2) ключ, управляемый временем (**TD**);
- 3) ключ, управляемый напряжением;
- 4) ключ, управляемый током.

Для коммутации схемы можно использовать любой из этих ключей. В связи с тем, что в дальнейшем будут использованы ключи, управляемые временем, рассмотрим их основные параметры, которые устанавливаются в процессе редактирования по команде **Circuit > Component Properties**. В открытом окне **Time-Delay Switch Properties** с помощью меню **Label** необходимо установить условное обозначение ключа на схеме (например, **S1**), а с помощью меню **Value** задать два интервала времени: **Time on (Ton)** и **Time off (Toff)**.

Эти два временных интервала позволяют выполнить три типа коммутации:

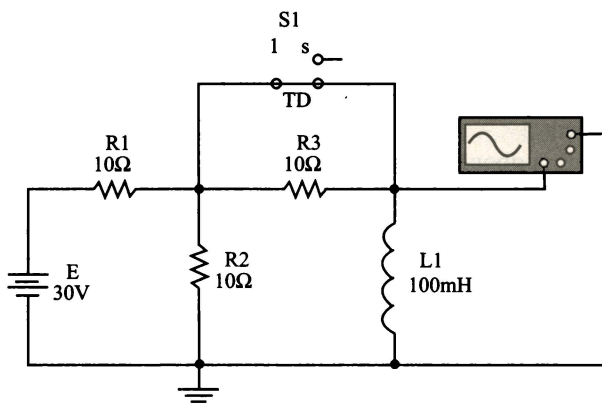
- ▶▶ на замыкание цепи;
- ▶▶ на размыкание цепи;
- ▶▶ на замыкание и последующее размыкание, или наоборот.

Время **Ton** соответствует интервалу замкнутого состояния нормально разомкнутого контакта. Отсчет этого интервала времени ведется от начала моделирования (т. е. от момента подачи команды **Activate**). Время **Toff** соответствует интервалу исходного состояния контактов ключа после начала процесса моделирования.

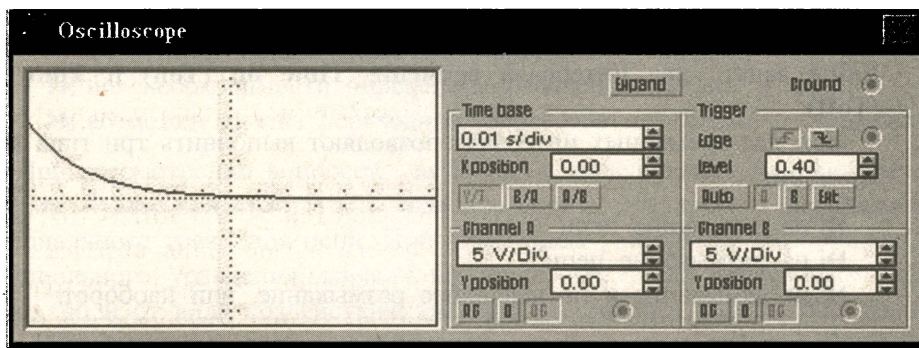
Для реализации ключа, работающего *на замыкание*, необходимо выбирать $T_{on} \gg T_{off}$. В течение интервала T_{on} ключ будет находиться в замкнутом состоянии, вплоть до момента времени, равного ($T_{on} - T_{off}$). Если выбрать время T_{off} достаточно малым, то можно считать, что ключ будет находиться в замкнутом состоянии в течение времени T_{on} .

Для реализации ключа, работающего *на размыкание*, необходимо выбирать $T_{off} \gg T_{on}$. При этом интервал времени T_{on} создает задержку срабатывания ключа на размыкание. Аналогично, при достаточно малом значении времени T_{on} можно считать, что ключ будет разомкнутым в течение времени T_{off} .

Для реализации ключа, работающего *на замыкание с последующим размыканием*, необходимо выбирать $T_{on} > T_{off}$. При этом ключ будет

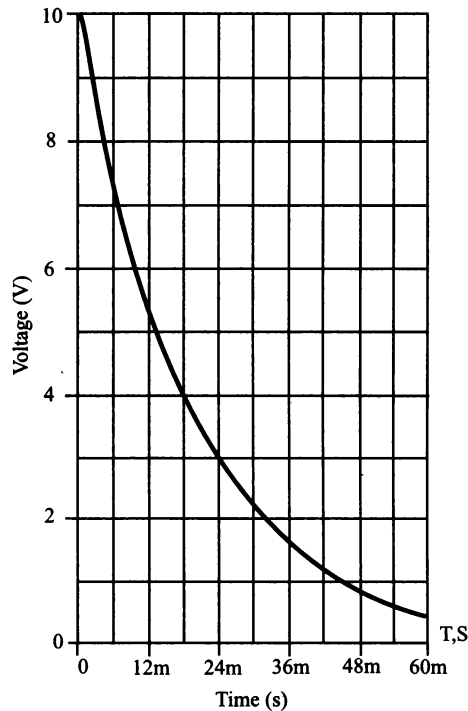


а)



б)

Рис. 5.37а, б. Схема моделируемой цепи (а), изображение выходного сигнала (б) к примеру 5.11



в)

Рис. 5.37в. Переходная характеристика к примеру 5.11

находиться в замкнутом состоянии только в интервале времени $\Delta T = T_{on} - T_{off}$. После этого интервала времени ключ размыкается.

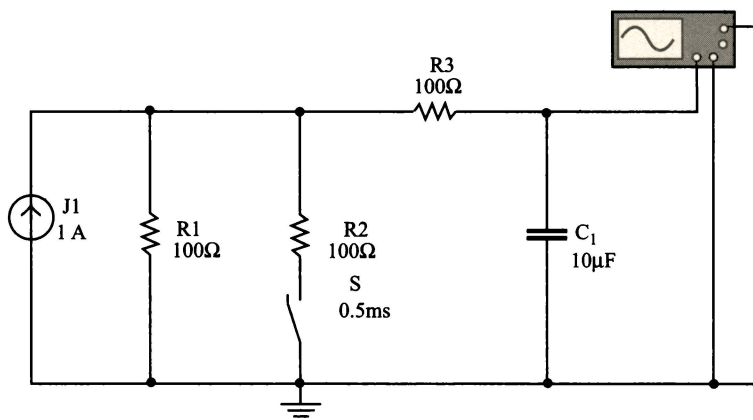
Аналогично, для реализации ключа, работающего на размыкание с последующим замыканием, необходимо выбирать $T_{on} \ll T_{off}$, а интервал времени T_{off} сделать равным времени, через которое ключ должен замкнуться. Можно также менять местами нормально замкнутые и нормально разомкнутые контакты переключателя.

Используя приведенные выше условия, выберем для схемы, изображенной на рис. 5.37а, интервалы времени $T_{on} = 1 \text{ s}$; $T_{off} = 1 \mu\text{s}$. График переходного процесса изображен на экране осциллографа, подключенного к индуктивности L1. Оцифрованный график переходного процесса, полученный в режиме **Analysis Graphs**, изображен на рис. 5.37в. Этот график с необходимой для практики точностью соответствует расчетному, изображенному на рис. 4.4.

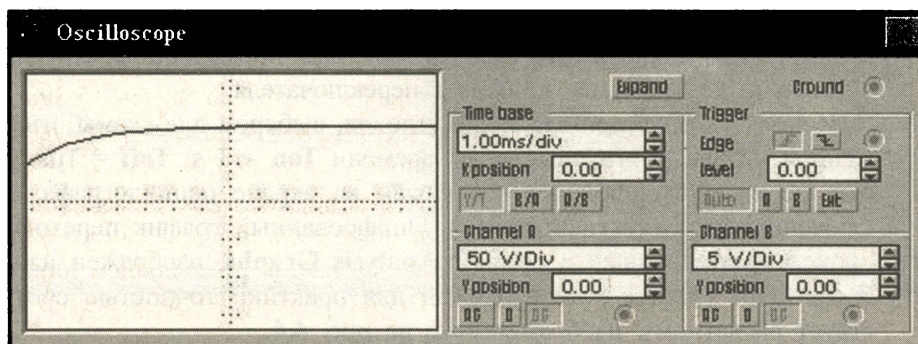
Пример 5.12. Требуется выполнить моделирование переходного процесса в цепи, изображенной на рис. 4.5а, для примера 4.4.

Решение. Используя рекомендации, приведенные в примере 5.11, построим вначале схему цепи, которая изображена на рис. 5.38а. В этой схеме ключ **S1** работает на размыкание, поэтому выберем интервалы времени в соответствии со сделанными выше рекомендациями: **Ton** = 0,5 μ s; **Toff** = 10 s.

После подачи команды **Analysis > Stop > Activate** получим изображение переходного процесса на экране осциллографа, которое приведено на рис. 5.38б. Для получения оцифрованного графика переходного процесса воспользуемся командой **Analysis > Activate > Display Graphs** и в окне **Analysis Graphs** найдем изображение графика переходного процесса. Этот график в интервале времени от 0 до 6 ms приведен на рис. 5.38в. Сравнивая этот график с напряжением на емкости, изображенным на рис. 4.6, получим их практически полное совпадение.



а)



б)

Рис. 5.38а, б. Схема цепи (а), изображение выходного сигнала (б) к примеру 5.12

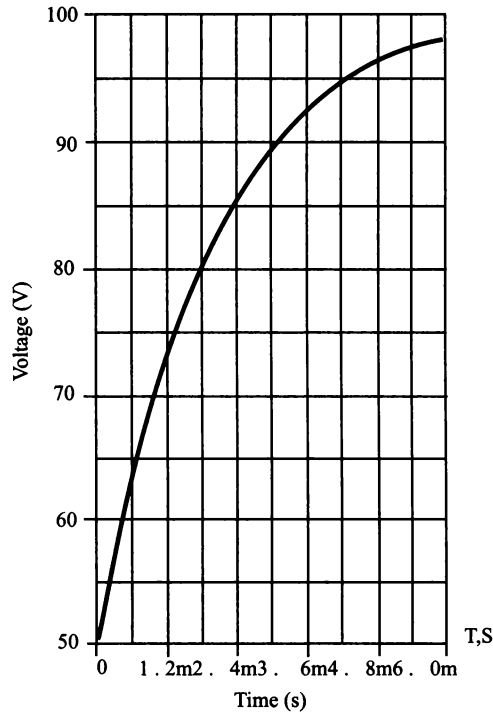
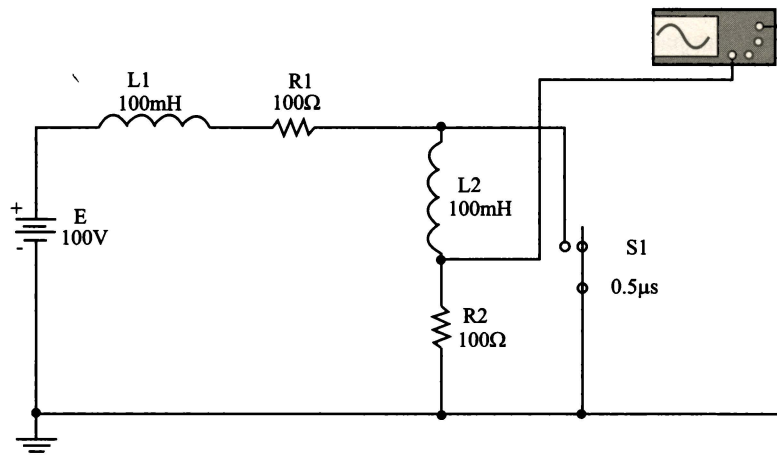


Рис. 5.38а. Переходная характеристика к примеру 5.11

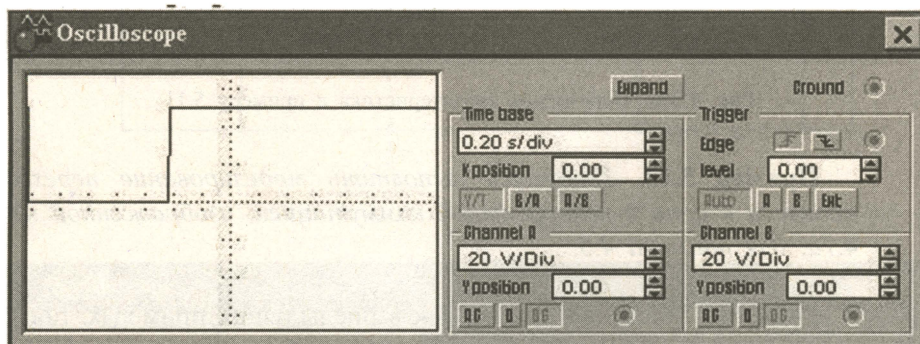
Пример 5.13. Требуется выполнить моделирование переходного процесса в цепи с некорректной коммутацией, изображенной на рис. 4.7а, для примера 4.5.

Решение. Поступая так же, как в предыдущих примерах, построим схему для моделируемой цепи, которая изображена на рис. 5.39а. Поскольку в этой схеме происходит размыкание ключа $S1$, то выберем интервалы времени управления ключом следующим образом: $T_{on} = 0,5 \mu s$; $T_{off} = 1 s$. График переходного процесса на экране осциллографа изображен на рис. 5.39б. Для получения оцифрованного изображения графика воспользуемся, так же как в предыдущем примере, командами **Analysis > Activate > Display Graphs**. Изображение изменения напряжения на сопротивлении $R2$ совпадает по форме с током в этом сопротивлении, однако масштабный коэффициент будет равен 50, так как напряжение источника E делится при коммутации между двумя одинаковыми сопротивлениями $R1$ и $R2$.

Сравнивая график полученного напряжения с графиком тока, изображенным на рис. 4.8, можно установить их практически полное совпадение, что свидетельствует о корректности моделирования процесса в схеме.



а)

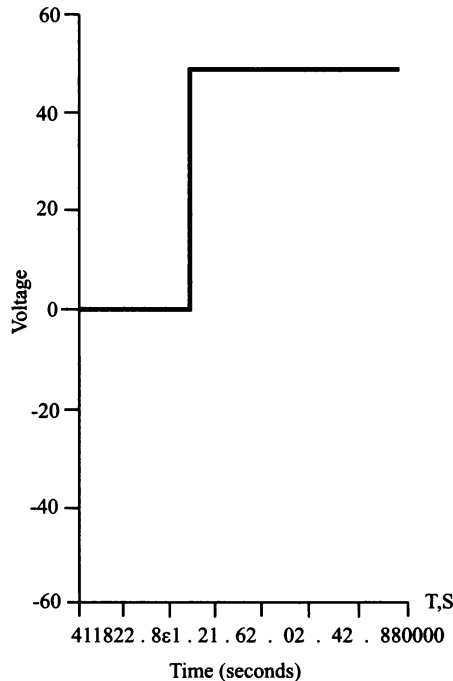


б)

Рис. 39а, б. Схема цепи (а) и изображение выходного сигнала (б) к примеру 5.13

Пример 5.14. Требуется выполнить моделирование переходного процесса в цепи второго порядка с ненулевыми начальными условиями, изображенной на рис. 4.9а, для примера 4.б.

Решение. Решение этой задачи выполняется аналогично предыдущим. Вначале построим схему исследуемой цепи, введем условные



в)

Рис. 4.39в. Переходная характеристика к примеру 5.13

обозначения ее элементов и выберем их значения. К емкости $C1$ подключим осциллограф, при помощи которого можно наблюдать переходный процесс в цепи.

Поскольку коммутирующий ключ в схеме работает на размыкание, то выберем интервалы времени управления ключом в соответствии с высказанными ранее рекомендациями: $T_{on} = 0,1 \mu s$; $T_{off} = 1 s$.

Для запуска программы моделирования подадим команду **Analysis>Activate**. После подачи этой команды на экране осциллографа можно наблюдать переходный процесс для напряжения на емкости, который приведен на рис. 5.40б.

Графики переходного процесса в схеме были получены для трех значений емкости: $C1 = 3,3 mF$ (рис.5.40в); $C1 = 0,5 \mu F$ (рис. 5.40г) и $C1 = 50 \mu F$ (рис.5.40д). Два первых графика были получены расчетным путем в примерах 4.6 и 4.7. Третий график приводится впервые. Из сравнения расчетных графиков с результатами моделирования легко установить их полную идентичность.

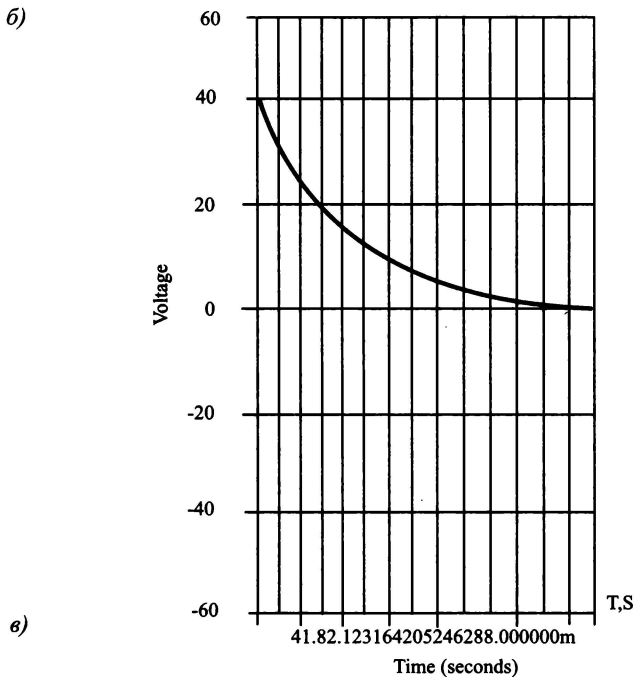
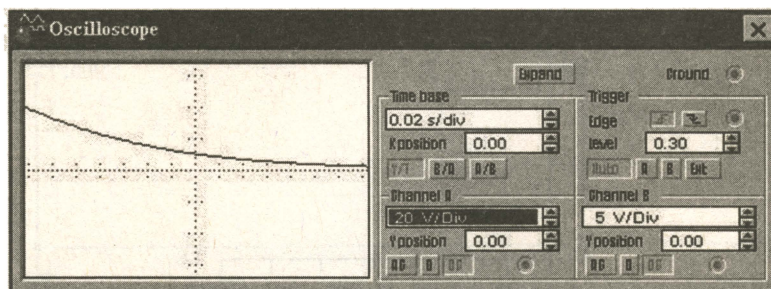
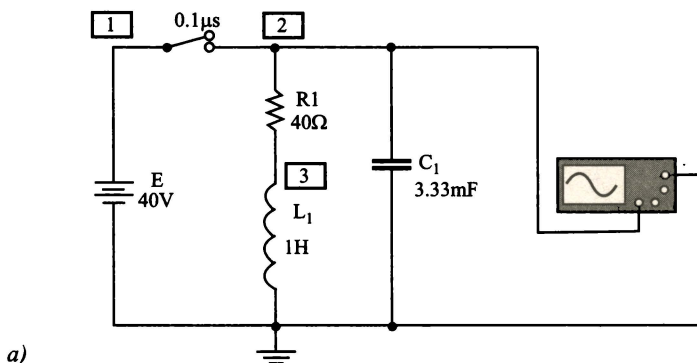
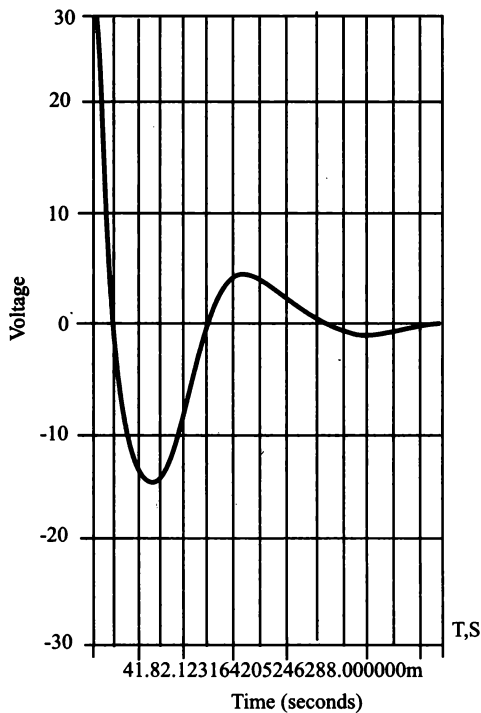
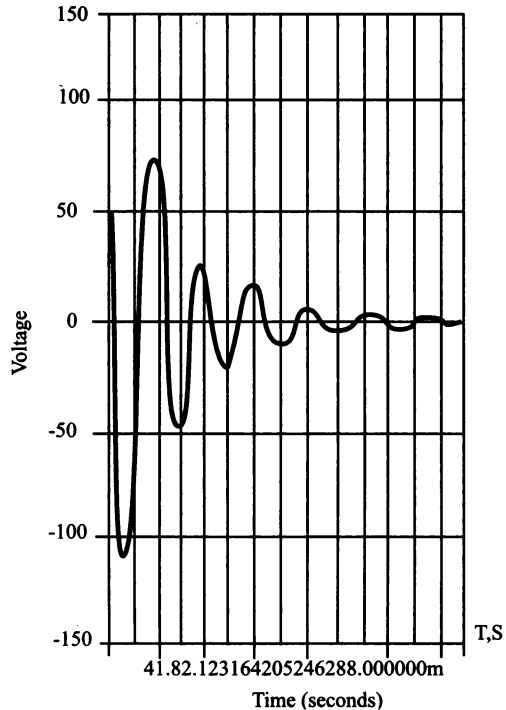


Рис. 5.40а, б, в. Схема цепи (а), изображение выходного сигнала (б) и переходные характеристики (в) к примеру 5.14



г)



д)

Рис. 5.40г, д. Переходные характеристики (г, д) к примеру 5.14

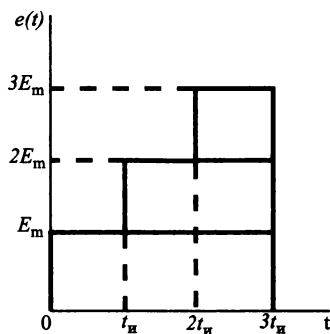
Пример 5.15. Требуется выполнить моделирование переходного процесса в схеме последовательного колебательного контура, приведенного на рис. 4.16а в примере 4.10, при действии на входе ступенчатого напряжения, форма которого изображена на рис. 4.16б. Значения параметров элементов контура и ступенчатого воздействия даны в примере 4.10.

Решение. Основная проблема, которую необходимо решить при составлении схемы для рассматриваемой цепи — это формирование источника ступенчатого сигнала, которого нет в программе **Workbench 5**. Имеются несколько способов формирования такого напряжения, однако в большинстве устройств используются элементы электронной техники — аналого-цифровые или цифро-аналоговые преобразователи, генераторы цифровых слов и др. В связи с тем, что знакомство студентов с электронной техникой недостаточно глубокое, было принято решение использовать программу **Micro-Cap V**, в которой имеется возможность получения ступенчатого импульса с помощью наложения сдвинутых во времени прямоугольных импульсов.

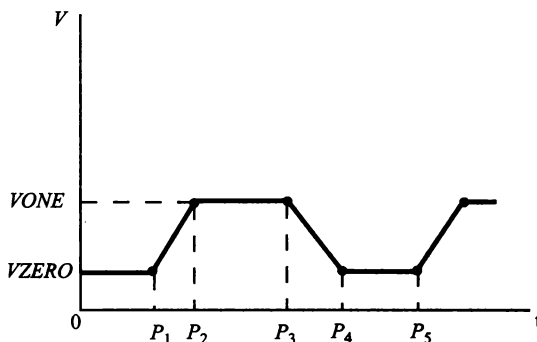
Способ получения ступенчатого импульса методом наложения показан на рис. 5.41а.

Как следует из рисунка, в состав импульса входят три прямоугольных импульса различной длительности, но равной амплитуды. Для формирования составляющих прямоугольных импульсов использован обобщенный трапецевидный импульс, который имеется в программе **Micro-Cap V**. Форма этого обобщенного импульса и обозначения границ его отдельных участков приведены на рис. 5.41б. Принимая, что амплитуды составляющих импульсов одинаковы и равны $E_m = 10$ В, а их длительности имеют значения $T_1 = t_H = 0,5$ мс; $T_2 = 2t_H = 1$ мс; $T_3 = 3t_H = 1,5$ мс, запишем их задание на формирование ступенчатого импульса.

Для указания параметров составляющих импульсных источников, используемых для формирования ступенчатого импульса $e(t)$, исполь-



а)



б)

Рис. 5.41. Формирование входного сигнала (а) и форма обобщенного импульса (б) к примеру 5.15

зуем команду **Windows > Split Text/Drawing Area Horizontal**, с помощью которой открываем окно для записи задания на формирование импульсов. В открытом окне запишем задание на формирование трех составляющих импульсов.

Первый из этих импульсов (верхний) имеет параметры:

**.MODEL PS1 PUL (VZERO=0 VONE=10 P1=1m P2=1m
P3=1.5m P4=1.5m P5=3m).**

Второй импульс (средний) имеет значения параметров:

**.MODEL PS2 PUL (VZERO=0 VONE=10 P1=0.5m
P2=0.5m P3=1.5m P4=1.5m P5=3m).**

Аналогично, параметры третьего импульса (нижнего) имеют значения:

**.MODEL PS3 PUL (VZERO=0 VONE=10 P1=0 P2=0
P3=1.5m P4=1.5m P5=3m).**

Значения этих параметров можно установить из сопоставления рис. 5.41а и 5.41б. Таким образом, сформированный импульс на схеме будет представлен последовательным соединением трех источников импульсного напряжения V1, V2 и V3, как показано на рис. 5.42а. В эту схему также входят элементы цепи R1, L1, C1, значения параметров которых указаны на схеме.

Для выполнения анализа переходного процесса в схеме используем команду **Analysis > Transient Analysis**. Если при составлении схемы допущены какие-либо ошибки, то при переходе в режим анализа переходного процесса программа выводит соответствующее информационное сообщение. При отсутствии ошибок программа выполняет анализ схемы. Для этого вначале открывается окно **Transient Analysis Limits**, в котором необходимо указать основные параметры анализа, например:

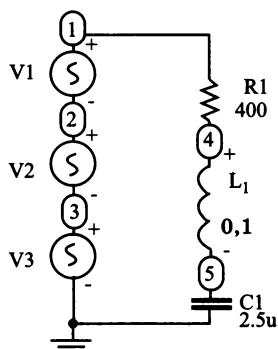
**Time Range = 3mu; Maximum Time Step = 0.01m;
Number of Points = 500.**

Кроме этого, нужно указать выводимые величины, значения диапазонов их изменения и формат (Fmt) выводимых величин, например:

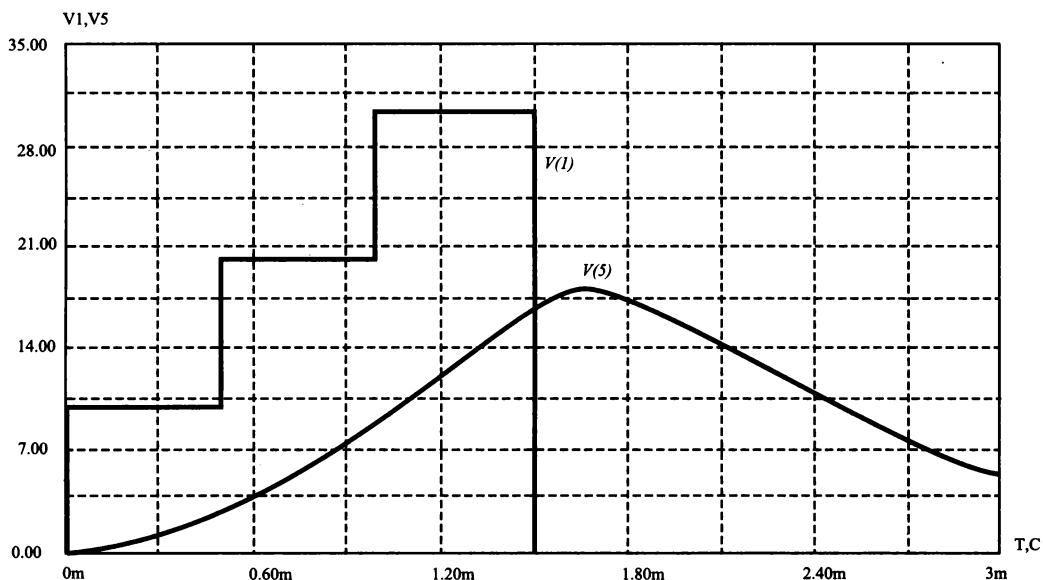
**X Expression = T; Y Expression = V(1); X Range = 0.003;
Y Range = 35.0; Fmt=5.3.**

Расчет переходного процесса проводится с выбираемым автоматически переменным шагом, значение которого определяется по максимально допустимой ошибке. Для начала процесса моделирования переходного процесса следует подать команду **Run**. В процессе моделирова-

ния на экран выводятся результаты моделирования в виде графиков временных зависимостей, например напряжения $V(1)$ или $V(5)$ в виде функции времени T . Графики этих величин в выбранном ранее масштабе приведены на рис. 5.42б. Сравнение результатов моделирования и аналитического расчета переходного процесса методом интеграла Дюамеля, выполненное в примере 4.10, показало их полное совпадение.



а)



б)

Рис. 5.42. Моделируемая схема (а), графики входного и выходного сигналов (б) к примеру 5.15

Пример 5.16. Требуется выполнить моделирование переходного процесса в искусственной линии, схема которой приведена на рис. 5.43. Линия представляет собой многозвенный LC-фильтр нижних частот, который нагружен на вещественное сопротивление $R = \sqrt{L/C}$. Параметры линии имеют значение: $L = 0,1$ Гн; $C = 100$ нФ. На входе линии действует источник напряжения, параметры которого заданы в виде обобщенного импульсного сигнала:

VZERO=0 VONE=100V P1=1u P2=1u P3=6u P4=6u P5=6u,

где значения P1...P5 соответствуют рис. 5.41б.

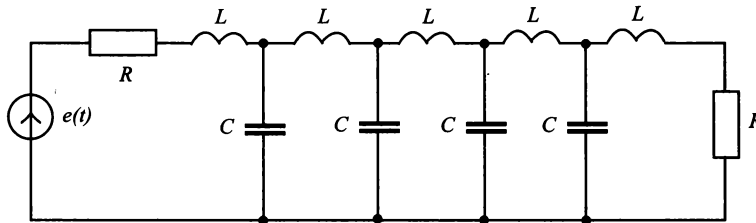


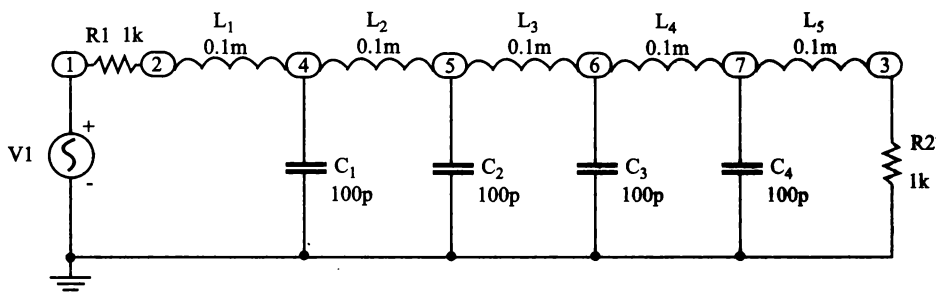
Рис. 5.43. Схема замещения искусственной линии к примеру 5.16

Решение. Этот пример интересен тем, что аналитический расчет подобного рода схем достаточно громоздок, так как приходится рассматривать различные варианты согласования выхода линии задержки с нагрузкой, особенно в тех случаях, когда нагрузка является комплексным сопротивлением. Кроме этого, приходится выполнять подбор количества звеньев и параметров ее элементов для снижения искажений сигнала. Моделирование в значительной мере упрощает решение этой задачи, так как легко позволяет получить общее ориентирование в подборе числа звеньев и влияния их параметров.

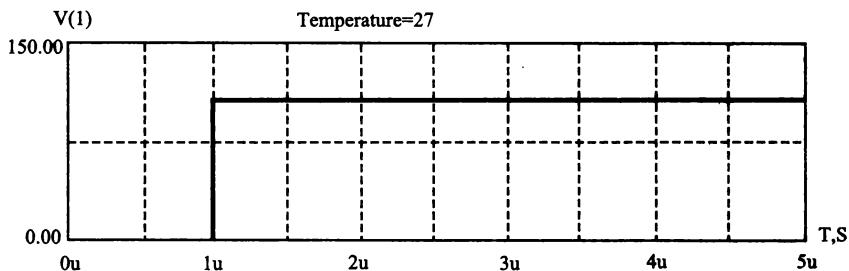
Решение этой задачи выполним с помощью программы **Micro-Cap V**. для этого вначале построим схему исследуемой линии, которая приведена на рис. 5.44а. Напряжение на входе линии зададим с помощью импульсного генератора V1. Форма этого напряжения приведена на рис. 5.44б.

Для выполнения моделирования подадим команду **Analysis > Transient Analysis**. В открывшемся окне **Transient Analysis Limits** укажем основные параметры анализа: **Time Range** = 5us; **Maximum Time Step** = 0,01 us; **Number of Point** = 500.

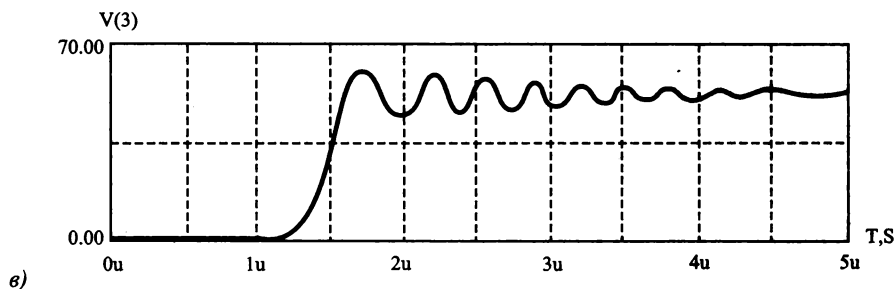
Для начала процесса моделирования подадим команду **Run**. График переходного процесса на выходе линии (напряжение **V3**) показан на рис. 5.44в. Из этого графика видно, что выходное напряжение задержано относительно входного сигнала на время, равное примерно 0,5 мкс. Кроме этого, отчетливо заметны искажения выходного сигнала, которые заключаются в изменении длительности фронта импульса и затухающих колебаний на его вершине. Подбором числа звеньев фильтра и изменением параметров элементов можно откорректировать эти искажения.



а)



б)



в)

Рис. 5.44. Моделирование линии (а), форма входного (б) и выходного (в) сигналов к примеру 5.16.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Если работа не идет — не волнуйся.
В случае полной неудачи — работу прервать.

*Из рекомендаций Центрального
института труда (1924 год)*

Предлагаемые ниже задачи предназначены для выполнения тренировочных работ и проведения контрольных занятий. Некоторые из этих задач имеют ответы. В ряде задач ответы не приведены.

Для проверки правильности решения таких задач можно использовать метод моделирования.

Большинство задач составлены авторами учебника. Некоторые из задач заимствованы из различных источников, ссылки на которые имеются в списке литературы. Кроме этого, использованы некоторые задачи, предлагаемые на студенческих олимпиадах по теоретическим основам электротехники, проводимых в Государственном электротехническом университете.

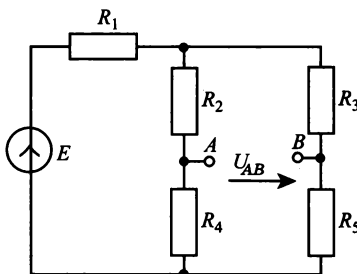
6.1. Цепи постоянного тока

Цепи с одним источником

ЗАДАЧА 6.1

Требуется рассчитать напряжение U_{AB} в схеме. Параметры схемы имеют следующие значения: $E = 60$ В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 6$ Ом; $R_4 = 8$ Ом; $R_5 = 4$ Ом.

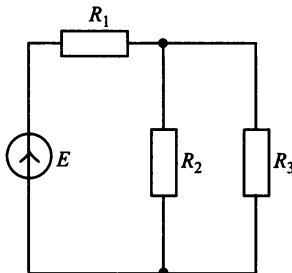
Ответ: $U_{AB} = 8$ В



ЗАДАЧА 6.2

В приведенной схеме требуется найти значение сопротивления R_2 , если известно, что напряжение на сопротивлении R_3 имеет значение $U_{\text{вых}} = E/4$. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 12$ кОм; $R_3 = 8$ кОм.

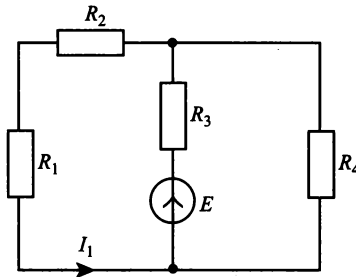
Ответ: $R_2 = 8$ кОм



ЗАДАЧА 6.3

В приведенной схеме известны: напряжение источника $E = 28$ В и сопротивление $R_1 = 4$ Ом. Требуется определить сопротивления остальных элементов, если они имеют одинаковые значения: $R_2 = R_3 = R_4 = R$, а ток в сопротивлении R_1 равен $I_1 = 2$ А.

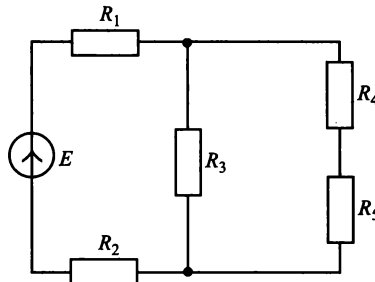
Ответ: $R = 2$ Ом



ЗАДАЧА 6.4

В приведенной схеме известны параметры элементов: $E = 60$ В; $R_1 = R_3 = R_5 = 2$ Ом; $R_2 = 4$ Ом. Требуется определить сопротивление R_4 , если напряжение на нем имеет значение $U_4 = 8$ В.

Ответ: $R_4 = 4$ Ом

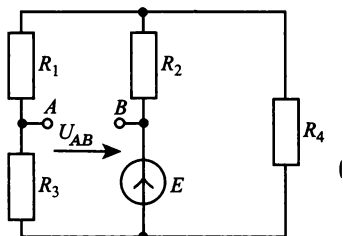


ЗАДАЧА 6.5

В приведенной схеме требуется определить напряжение U_{AB} , если параметры элементов имеют следующие значения: $R_1 = 0$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $R_4 = 5$ Ом; $E = 30$ В.

Ответ: $U_{AB} = 24$ В

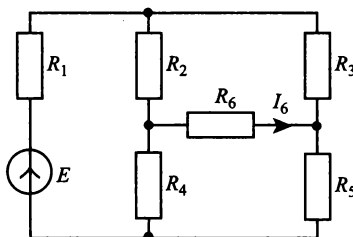
задания для самостоятельной работы



ЗАДАЧА 6.6

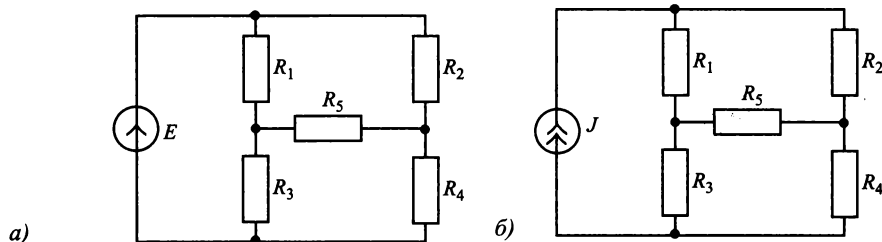
В приведенной схеме требуется найти ток $I_X = I_6$ в сопротивлении R_6 . Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$; $R_5 = R_6 = 10 \text{ Ом}$; $E = 150 \text{ В}$.

Ответ: $I_6 = 1,25 \text{ А}$



ЗАДАЧА 6.7

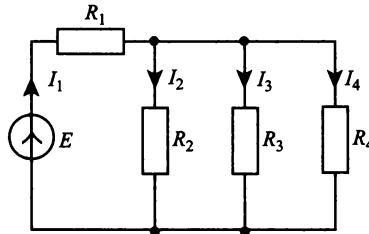
На рис. а приведена схема моста постоянного тока, параметры которой имеют следующие значения: $E = 60 \text{ В}$; $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$; $R_3 = 6 \text{ Ом}$;



$R_4 = 3 \text{ Ом}$; ток в сопротивлении R_5 равен $I_5 = 2 \text{ А}$. Требуется найти ток источника J в схеме рис. б, при котором все токи в ветвях этой схемы имеют те же значения, что и в схеме, приведенной на рис. а.

ЗАДАЧА 6.8

Для приведенной схемы известны токи в ветвях: $I_1 = 3 \text{ А}$; $I_3 = 1 \text{ А}$; $I_4 = 1,5 \text{ А}$; а напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 одинаковые, т. е. $U_1 = U_2$. Требуется найти токи в ветвях схемы при увеличении сопротивления R_4 в три раза.



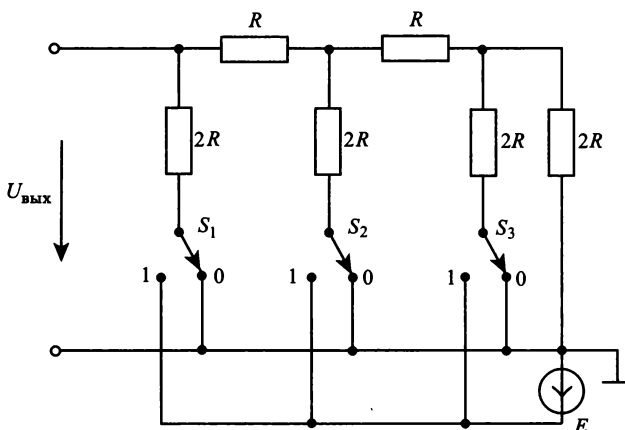
ЗАДАЧА 6.9

В приведенной схеме источник напряжения E с внутренним сопротивлением $R_{\text{и}}$ подключен к нагрузке $R_{\text{н}}$ через некоторую пассивную R -схему. Известны: значение сопротивления нагрузки $R_{\text{н}} = 3 \text{ Ом}$ и мощности, которые в ней расходуются при двух значениях сопротивлений $R_{\text{и}}$. При сопротивлении $R_{\text{и1}} = 5 \text{ Ом}$ мощность, расходуемая нагрузке, имеет значение $P_{\text{н1}} = 5,33 \text{ Вт}$, а при $R_{\text{и2}} = 7,5 \text{ Ом}$ эта мощность равна 3 Вт . Требуется найти мощность в нагрузке, если сопротивление источника имеет значение $R_{\text{и3}} = 2,5 \text{ Ом}$.



ЗАДАЧА 6.10

Выполнить расчет трехразрядного преобразователя двоичного кода в напряжение, схема которого приведена ниже. В результате расчета требуется определить напряжение на выходе преобразователя $U_{\text{вых}}$ и его эквивалентное входное сопротивление $R_{\text{вх}}$. Схема имеет различные варианты, которые устанавливаются с помощью ключей S_1 , S_2 , S_3 , управляемых кодом. Каждый ключ может находиться в двух положениях: 0 или 1. В положении 0 перекидной контакт ключа S соединяется с общим выводом (минусом источника), а в положении 1 — он подключается к плюсу источника E . Номера вариантов, значения кодов и параметры элементов схемы указаны в таблице.

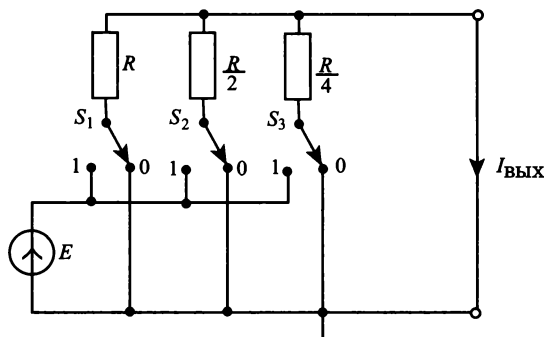


Номера вариантов, параметры элементов схемы и коды ключей

Вариант	S_1	S_2	S_3	E , В	R , Ом
1	1	0	0	24	10
2	0	1	0	16	16
3	1	1	0	8	24
4	0	0	1	4	8
5	1	0	1	32	32
6	0	1	1	16	8
7	1	1	1	24	12

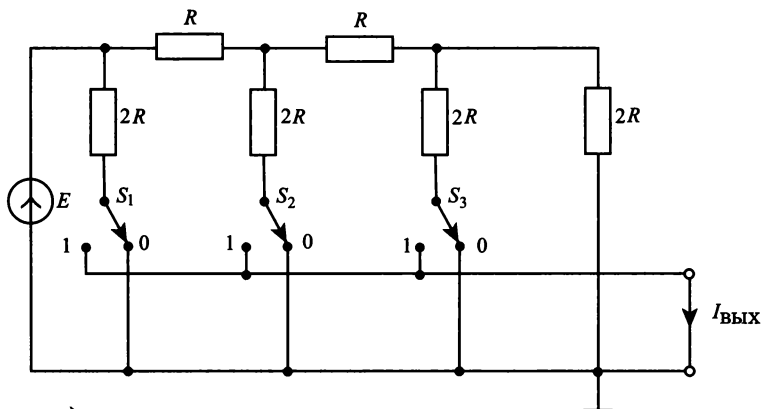
ЗАДАЧА 6.11

Схема, изображенная на рисунке, используется для преобразования двоичного кода в выходной ток $I_{\text{ВЫХ}}$. Требуется рассчитать выходной ток для различных вариантов кода ключей $S_1...S_3$ при значениях параметров схемы, приведенных в табл. 6.1.



ЗАДАЧА 6.12

Требуется рассчитать выходной ток $I_{\text{ВЫХ}}$ для схемы цифро-аналогового преобразователя, приведенной ниже. Номера вариантов и соответствующие им параметры элементов схемы приведены в таблице.

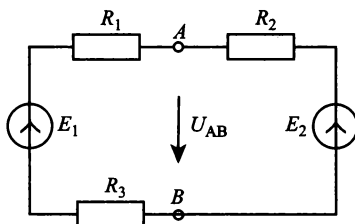


Цепи с двумя источниками

ЗАДАЧА 6.13

В схеме, приведенной ниже, известны напряжения источников $E_1 = 60 \text{ В}$, $E_2 = 180 \text{ В}$ и значения сопротивлений $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 30 \text{ Ом}$. Требуется рассчитать напряжение между выводами А и В.

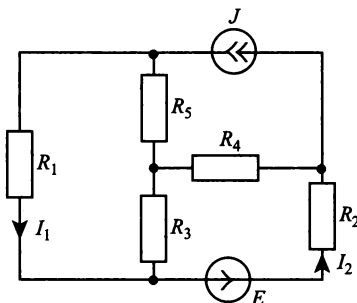
Ответ: $U_{AB} = 140 \text{ В}$



ЗАДАЧА 6.14

В схеме, изображенной ниже, требуется определить токи I_1 , I_2 в сопротивлениях R_1 , R_2 . Известны напряжение $E = 12 \text{ В}$, ток $J = 0,5 \text{ А}$ источников и сопротивления элементов цепи: $R_1 = R_2 = 1 \text{ Ом}$; $R_3 = 6 \text{ Ом}$; $R_4 = 2 \text{ Ом}$; $R_5 = 3 \text{ Ом}$.

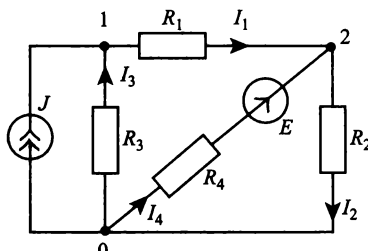
Ответ: $I_1 = 1,694 \text{ А}$; $I_2 = 2,573 \text{ А}$



ЗАДАЧА 6.15

В схеме, которая изображена ниже, требуется определить токи во всех ветвях и напряжения в узлах 1 и 2. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E = 10$ В; $J = 1$ А; $R_1 = 5$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $R_4 = 1$ Ом.

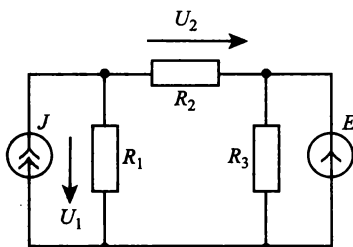
Ответ: $I_1 = -0,423$ А; $I_2 = 3,190$ А; $I_3 = -1,423$ А;
 $I_4 = 3,615$ А; $U_{10} = 4,270$ В; $U_{20} = 6,384$ В



ЗАДАЧА 6.16

В схеме, изображенной ниже, сопротивления R_1 и R_2 имеют одинаковое значение $R_1 = R_2 = 2$ Ом. Требуется определить мощность источника тока J , если при увеличении напряжения E в два раза напряжение U_1 увеличивается на 4 В, а мощность источника тока J изменяется на -40 Вт.

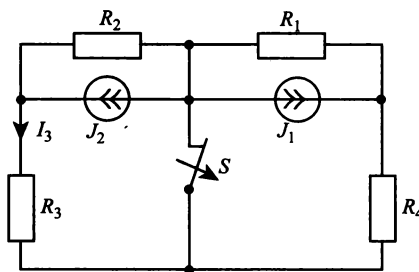
Ответ: -180 Вт



ЗАДАЧА 6.17

В схеме, приведенной ниже, отношение токов источников $J_2/J_1 = 2$, а параметры элементов цепи $R_3 = R_4$ и $R_1 = R_2$. Требуется определить ток I_3 в сопротивлении R_3 при разомкнутом ключе S , если при замкнутом ключе S ток $I_3 = 3$ А.

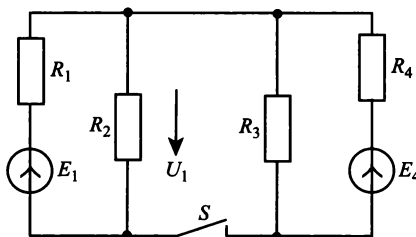
Ответ: 0,75 А



ЗАДАЧА 6.18

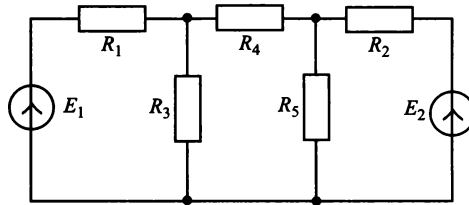
В схеме, изображенной ниже, напряжение $U_1 = 6$ В при условии, что ключ S разомкнут; $E_4 = E_1/2$; $R_1 = R_4$; $R_2 = R_3$. Требуется определить напряжение U_1 при замкнутом ключе S .

Ответ: 4,5 В



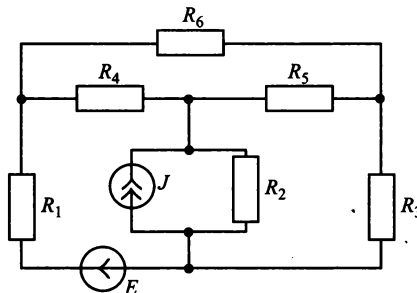
ЗАДАЧА 6.19

Требуется рассчитать токи в цепи, изображенной ниже, если напряжения источников имеют значения $E_1 = 36$ В, $E_2 = 54$ В, а сопротивления имеют значения $R_1 = R_5 = 10$ Ом; $R_2 = R_3 = 20$ Ом; $R_4 = 30$ Ом.



ЗАДАЧА 6.20

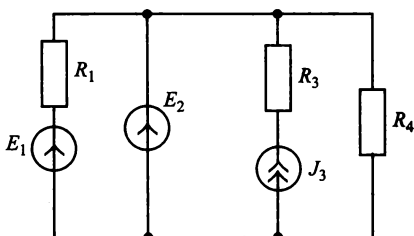
В схеме, изображенной ниже, ток источника $J = 5$ А, а напряжение источника $E = 10$ В. Требуется определить мощности, отдаваемые источниками, если сопротивления имеют значения: $R_1 = 5$ Ом; $R_2 = R_3 = 2$ Ом; $R_4 = R_5 = 1$ Ом; $R_6 = 3$ Ом.



Цепи с тремя источниками

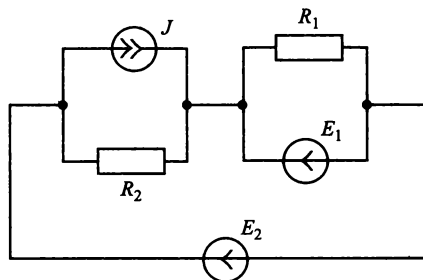
ЗАДАЧА 6.21

Для схемы, которая изображена ниже, требуется найти мощности источников, если известны их значения $E_1 = 10$ В; $E_2 = 20$ В; $J_3 = 2$ А. Сопротивления цепи имеют значения: $R_1 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $R_4 = 5$ Ом.



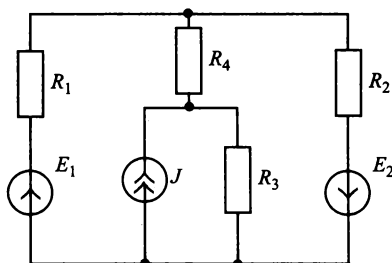
ЗАДАЧА 6.22

Для схемы, которая приведена ниже, требуется рассчитать ток в источнике E_2 , если параметры элементов имеют следующие значения: $E_1 = 4$ В; $E_2 = 2$ В; $J = 2$ А; $R_1 = 5$ Ом; $R_2 = 3$ Ом.



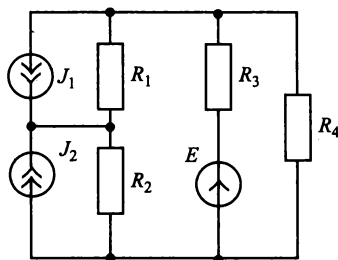
ЗАДАЧА 6.23

Требуется определить мощности источников, которые включены в схему, приведенную ниже, если параметры элементов схемы имеют значения: $E_1 = E_2 = 10$ В; $J = 4$ А; $R_1 = R_4 = 5$ Ом; $R_2 = R_3 = 2$ Ом.



ЗАДАЧА 6.24

Для схемы, которая изображена ниже, требуется рассчитать напряжения на источниках тока J_1 , J_2 и ток в источнике напряжения E , если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E = 10$ В; $J_1 = J_2 = 4$ А; $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $R_4 = 1$ Ом.



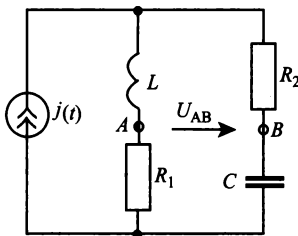
6.2. Цепи синусоидального переменного тока

Цепи с одним гармоническим источником

ЗАДАЧА 6.25

В схеме, изображенной ниже, действует источник синусоидального тока $j(t) = 10 \sin(100t)$ А. Требуется определить действующее значение напряжения U_{AB} между узлами А и В цепи, если параметры ее элементов имеют следующие значения: $R_1 = 15$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $L = 0,1$ Гн; $C = 2000$ мкФ.

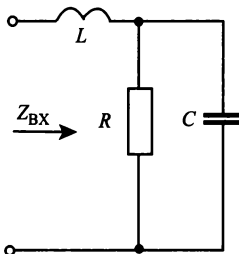
Ответ: 8,58 В



ЗАДАЧА 6.26

Для схемы, приведенной ниже, требуется рассчитать значения индуктивности L и емкости C , если ее входное сопротивление на резонансной частоте $\omega_{\text{рез}} = 10^6$ рад/с имеет значение $R_{\text{вх}} = 1$ Ом, а сопротивление $R = 10$ Ом.

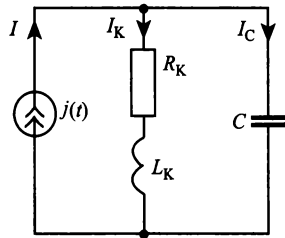
Ответ: $L = 3$ мкГн; $C = 0,3$ мкФ



ЗАДАЧА 6.27

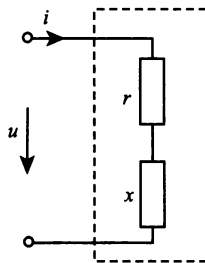
Схема цепи, изображенная ниже, настроена в резонанс с частотой источника тока $j(t)$. Действующие значения токов в ветвях цепи имеют значения: $I_C = 3$ А; $I_K = 5$ А. Требуется определить действующее значение тока I источника.

Ответ: 4 А

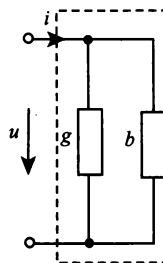


ЗАДАЧА 6.28

Известны мгновенные значения напряжения и тока в схеме пассивного двухполюсника: $u(t) = 14,1 \sin(\omega t + 30^\circ)$ В; $i(t) = 2 \sin(\omega t - 15^\circ)$ А. Требуется определить параметры двух его схем замещения r , x , g , b , которые приведены ниже (а и б).



а)



б)

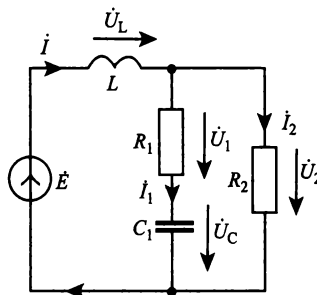
ЗАДАЧА 6.29

Требуется рассчитать и построить в выбранном масштабе векторную диаграмму для действующих значений напряжений и токов всех ветвей цепи, схема которой приведена ниже, при условии, что действующее зна-

задания для самостоятельной работы

чение тока в емкости $I_1 = 5$ А. Определить действующее значение напряжения E источника. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = x_L = x_C = 1$ Ом.

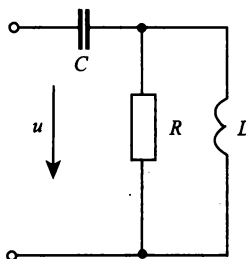
Ответ: $E = 11,2$ В



ЗАДАЧА 6.30

Для схемы, изображенной ниже, требуется рассчитать значение сопротивления R , при котором в цепи будет резонанс напряжений на частоте $f_{\text{рез}} = 2250$ Гц, если известны параметры элементов схемы: $L = 10$ мГн; $C = 1,5$ мкФ.

Ответ: 100 Ом

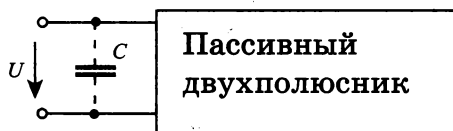


ЗАДАЧА 6.31

Пассивный двухполюсник, имеющий индуктивную реакцию, подключен к источнику с действующим значением напряжения $U = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц, как показано на рисунке. Мощность, потребляемая источником, составляет $P = 1320$ Вт при коэффициенте мощности

$\cos \omega = 0,6$. Для коррекции коэффициента мощности к этому двухполюснику подключили емкость C . Требуется определить значение емкости C , при которой коэффициент мощности увеличится до 0,9.

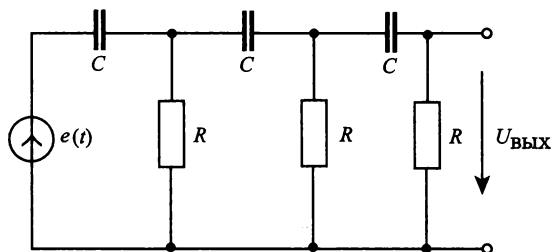
Ответ: 73,7 мкФ



ЗАДАЧА 6.32

Для изменения фазы выходного напряжения по сравнению с входным используется пассивный фазовращатель, схема которого приведена ниже. Требуется рассчитать фазовый сдвиг выходного напряжения, если параметры цепи имеют значение: $R = 10$ Ом; $C = 10$ мкФ; а угловая частота источника питания $e(t)$ равна $\omega = 10^4$ рад/с.

Ответ: 128,6°

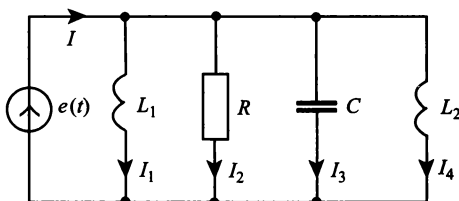


ЗАДАЧА 6.33

Параллельный колебательный контур, схема которого приведена ниже, питается от источника синусоидального напряжения $e(t) = E_m \sin \omega t$. Известно, что действующие значения токов в ветвях цепи имеют значения: $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 10$ А. Требуется определить действующее значение тока I в источнике напряжения. Кроме этого, требуется определить, как изменится значение тока I , если частота источника уменьшится в два раза.

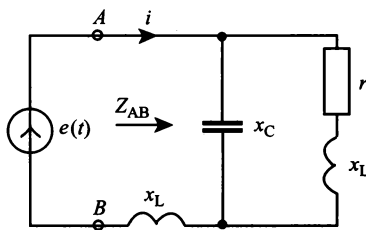
Ответ: 14,1 А

задания для самостоятельной работы



ЗАДАЧА 6.34

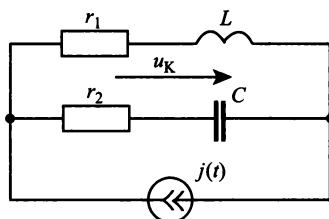
Определить комплексное сопротивление Z_{AB} двухполюсника, изображенного ниже, если сопротивления его элементов имеют следующие значения: $x_L = r = 10 \text{ Ом}$; $x_C = 20 \text{ Ом}$.



ЗАДАЧА 6.35

Схема, приведенная ниже, питается от источника гармонического тока $j(t)$, действующее значение которого равно $J = 10 \text{ А}$. Схема находится в состоянии резонанса токов, при котором в сопротивлениях r_1 и r_2 рассеиваются мощности $P_1 = 40 \text{ Вт}$ и $P_2 = 60 \text{ Вт}$, соответственно. Требуется определить значения сопротивлений r_1 , r_2 , x_C , если известно, что $x_L = 1 \text{ Ом}$; $x_C = 0,5 \text{ Ом}$.

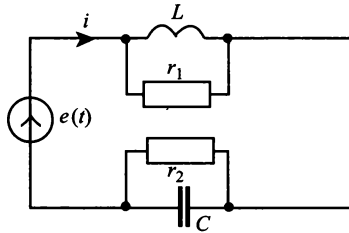
Ответ: $r_1 = 2 \text{ Ом}$; $r_2 = 1,5 \text{ Ом}$



ЗАДАЧА 6.36

Схема, приведенная ниже, питается от источника гармонического напряжения $e(t)$, действующее значение которого равно $E = 30$ В. Схема находится в состоянии резонанса напряжений, при котором в сопротивлениях r_1 и r_2 рассеиваются мощности $P_1 = 60$ Вт и $P_2 = 90$ Вт, соответственно. Требуется определить значения сопротивлений r_1 , r_2 , x_L если известно, что $x_C = 12$ Ом; $x_L = 6$ Ом.

Ответ: $r_1 = 3$ Ом; $r_2 = 4$ Ом



Цепи с двумя гармоническими источниками

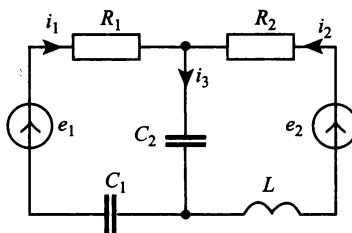
Рекомендации. Цепи, которые содержат два источника с одинаковыми частотами, целесообразно рассчитывать с помощью универсальных методов анализа линейных цепей: узловых напряжений или контурных токов. В этом случае расчет цепей сводится к составлению соответствующих уравнений в комплексной форме и их решению. После расчета цепи полученные значения комплексных величин (токов или напряжений) можно заменить их мгновенными значениями.

ЗАДАЧА 6.37

Для схемы, представленной ниже, требуется определить мгновенные значения токов в ветвях, если параметры элементов имеют следующие значения: $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $C_1 = C_2 = 500$ мкФ; $L = 2,5$ мГн. Мгновенные значения гармонических напряжений источников заданы в виде:

$$e_1(t) = 5 \sin 2000t \text{ В; } e_2(t) = 5 \sin (2000t - 45^\circ) \text{ В.}$$

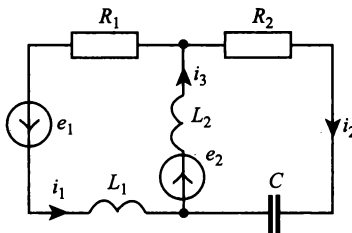
Ответ: $i_1 = 2,650 \sin (2000t + 59,03^\circ) \text{ А;}$
 $i_2 = 1,016 \sin (2000t - 116,6^\circ) \text{ А;}$
 $i_3 = 1,639 \sin (2000t + 56,31^\circ) \text{ А}$



ЗАДАЧА 6.38

Для схемы, изображенной ниже, известны значения параметров элементов: $R_1 = 1 \text{ Ом}$; $R_2 = 2 \text{ Ом}$; $L_1 = L_2 = 1 \text{ мГн}$; $C = 500 \text{ мкФ}$. Напряжения источников имеют значения: $e_1 = \sin 1000t \text{ В}$; $e_2 = \sin (1000t + 45^\circ) \text{ В}$. Требуется определить мгновенные значения токов в ветвях.

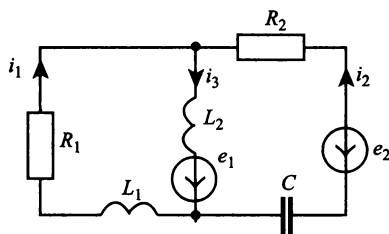
Ответ: $i_1 = 1,043 \sin (1000t - 40,43^\circ) \text{ А}$;
 $i_2 = 0,172 \sin (1000t + 59,04^\circ) \text{ А}$;
 $i_3 = 1,029 \sin (1000t - 30,96^\circ) \text{ А}$.



ЗАДАЧА 6.39

В схеме, приведенной ниже, известны напряжения источников $e_1 = 1,41 \sin (1000t - 45^\circ) \text{ В}$; $e_2 = 1 \sin 1000t \text{ В}$. Требуется определить мгновенные значения токов в ветвях, если известны значения параметров элементов схемы: $R_1 = 1 \text{ Ом}$; $R_2 = 2 \text{ Ом}$; $L_1 = 1 \text{ мГн}$; $L_2 = 2 \text{ мГн}$; $C = 1000 \text{ мкФ}$.

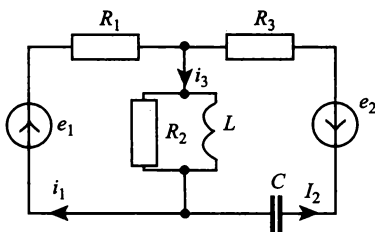
Ответ: $i_1 = 0,1857 \sin (1000t - 111,8^\circ) \text{ А}$;
 $i_2 = 0,4152 \sin (1000t - 138,4^\circ) \text{ А}$;
 $i_3 = 0,5872 \sin (1000t - 130,2^\circ) \text{ А}$



ЗАДАЧА 6.40

В схеме, изображенной ниже, требуется определить мгновенное значение напряжения источника e_1 , если известны параметры элементов $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 1 \text{ Ом}$; $R_3 = 2 \text{ Ом}$; $L = 0,5 \text{ мГн}$; $C = 250 \text{ мкФ}$. Мгновенное значение напряжения источника $e_2 = \sin(2000t - 90^\circ) \text{ В}$, а ток в ветви $i_3 = 0,253 \sin(2000t + 40,4^\circ) \text{ А}$.

Ответ: $e_1 = 2 \sin 2000t \text{ В}$

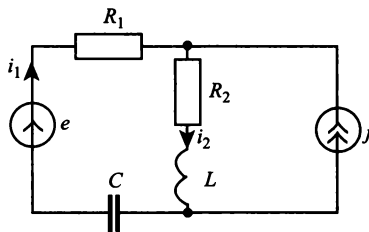


ЗАДАЧА 6.41

В схеме, которая приведена ниже, требуется определить мгновенное значение тока $j(t)$ источника, если известны ток в ветви $i_2 = 3,43 \sin(1000t + 310) \text{ А}$ и напряжение источника $e = 5 \sin(1000t - 90^\circ) \text{ В}$. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$; $L = 2 \text{ мГн}$; $C = 1000 \text{ мкФ}$.

Ответ: $5 \sin(1000t - 90^\circ) \text{ А}$

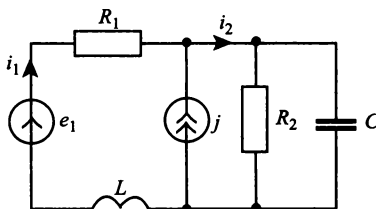
задания для самостоятельной работы



ЗАДАЧА 6.42

В схеме, приведенной ниже, требуется определить токи i_1 и i_2 в ветвях, если известны напряжение источника $e_1 = 2 \sin 2000t$ В и ток источника $j = 2 \sin (2000t - 45^\circ)$ А. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 1$ Ом; $L = 1$ мГн; $C = 500$ мкФ.

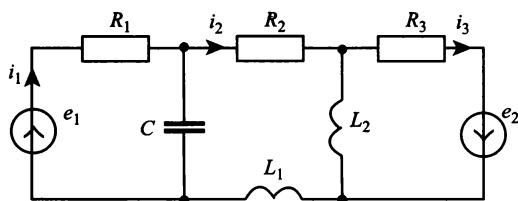
Ответ: $i_1 = 0,97 \sin (2000t + 14^\circ)$ А;
 $i_2 = 3,43 \sin (2000t - 30,36^\circ)$ А



ЗАДАЧА 6.43.

Для схемы, которая изображена ниже, известны напряжения источников $e_1 = 10 \sin 1000t$ В, $e_2 = 10 \sin (1000t + 45^\circ)$ В. Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 1$ Ом; $R_3 = 4$ Ом; $L_1 = 1$ мГн; $L_2 = 2$ мГн; $C = 500$ мкФ. Требуется определить токи i_1 , i_2 , i_3 в ветвях схемы.

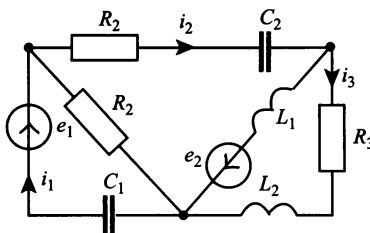
Ответ: $i_1 = 3,467 \sin (1000t + 33,7^\circ)$ А;
 $i_2 = 0,381 \sin (1000t - 11,3^\circ)$ А;
 $i_3 = 3,535 \sin (1000t + 22,38^\circ)$ А



ЗАДАЧА 6.44

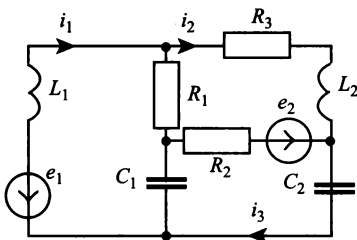
В схеме, приведенной ниже, содержатся два источника напряжения: $e_1 = 5 \sin 2000t$ В; $e_2 = 5 \sin (2000t - 90^\circ)$ В. Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = R_3 = 2$ Ом; $R_2 = 1$ Ом; $C_1 = 250$ мкФ; $C_2 = 500$ мкФ; $L_1 = 2$ мГн; $L_2 = 1$ мГн. Требуется определить токи в ветвях i_1 , i_2 , i_3 .

Ответ: $i_1 = 2,128 \sin 2000t$ А;
 $i_2 = 0,559 \sin (2000t + 26,57^\circ)$ А;
 $i_3 = 1,118 \sin (2000t + 26,57^\circ)$ А



ЗАДАЧА 6.45

В схеме моста переменного тока содержатся два источника, напряжения которых имеют значения: $e_1 = 5 \sin 1000t$ В; $e_2 = 5 \sin (1000t + 90^\circ)$ В. Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $R_3 = 1$ Ом; $L_1 = 2$ мГн; $L_2 = 1$ мГн; $C_1 = 250$ мкФ; $C_2 = 1000$ мкФ.

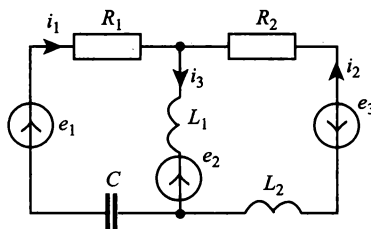


Цепи с тремя гармоническими источниками

ЗАДАЧА 6.46

Схема, изображенная ниже, содержит три источника напряжения, которые имеют значения: $e_1 = 1 \sin 1000t$ В; $e_2 = \sqrt{2} \sin (1000t - 45^\circ)$ В; $e_3 = 2 \sin (1000t - 90^\circ)$ В. Требуется определить токи в ветвях, если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 1$ Ом; $L_1 = 2$ мГн; $L_2 = 1$ мГн; $C = 1000$ мкФ.

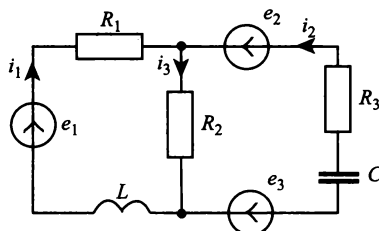
Ответ: $i_1 = 1 \sin (1000t - 43,6^\circ)$ А;
 $i_2 = 0,186 \sin (1000t + 158,2^\circ)$ А;
 $i_3 = 0,830 \sin (1000t - 48,37^\circ)$ А



ЗАДАЧА 6.47

В схеме, которая приведена ниже, действуют три источника напряжения: $e_1 = \sin 1000t$ В; $e_2 = \sqrt{2} \sin (1000t + 45^\circ)$ В; $e_3 = \sin (1000t - 90^\circ)$ В. Требуется определить мгновенные значения токов в ветвях, если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $L = 1$ мн; $C = 1000$ мкФ.

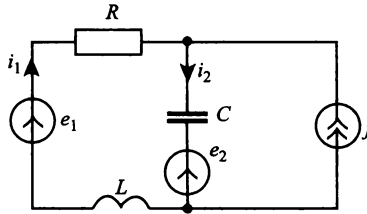
Ответ: $i_1 = 0,605 \sin (1000t - 78,82^\circ)$ А;
 $i_2 = 0,752 \sin (1000t + 91,58^\circ)$ А;
 $i_3 = 0,186 \sin (1000t + 58,67^\circ)$ А



ЗАДАЧА 6.48

В схеме действуют два источника напряжения: $e_1 = 2 \sin 2000t$ В; $e_2 = 2\sqrt{2} \sin (2000t + 45^\circ)$ В и один источник тока j . Требуется определить мгновенное значение тока источника, если известен ток в ветви с источником напряжения $i_1 = 1,612 \sin (2000t - 172,8^\circ)$ А. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R = 2$ Ом; $L = 1$ мГн; $C = 500$ мкФ.

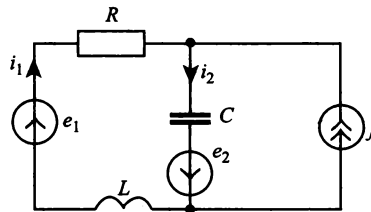
Ответ: $j = 3 \sin (2000t + 90^\circ)$ А



ЗАДАЧА 6.49

Изображенная ниже схема содержит два источника напряжения $e_1 = 5 \sin (1000t + 90^\circ)$ В; $e_2 = 5 \sin 1000t$ В и один источник тока j . Требуется определить мгновенное значение тока источника, если известны параметры элементов схемы: $R = 2$ Ом; $L = 2$ мГн; $C = 1000$ мкФ и мгновенное значение тока в ветви $i_2 = 1,9 \sin (1000t + 18,43^\circ)$ А.

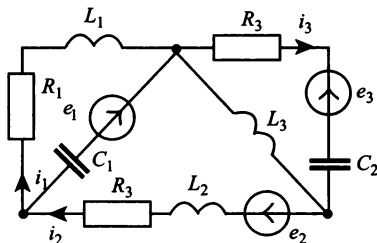
Ответ: $j = \sin 1000t$ А



ЗАДАЧА 6.50

В схеме содержатся три источника напряжения: $e_1 = 2 \sin 1000t$ В; $e_2 = 2\sqrt{2} \sin (1000t + 45^\circ)$ В; $e_3 = 2 \sin (1000t - 90^\circ)$ В. Требуется определить токи в ветвях схемы, если известны параметры ее элементов: $R_1 = 3$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $R_3 = 1$ Ом; $L_1 = 3$ мГн; $L_2 = 1$ мГн; $L_3 = 3$ мГн; $C_1 = 500$ мкФ; $C_2 = 1000$ мкФ.

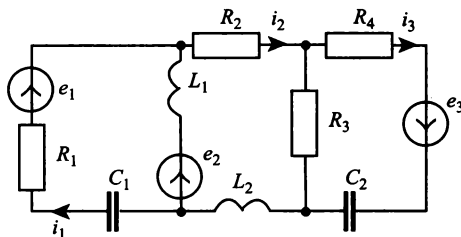
Ответ: $i_1 = 0,160 \sin (1000t - 141,9^\circ)$ А;
 $i_2 = 0,886 \sin (1000t + 76,2^\circ)$ А;
 $i_3 = 1,649 \sin (1000t + 71,0^\circ)$ А



ЗАДАЧА 6.51

Схема содержит три источника напряжения: $e_1 = 4 \sin 2000t$ В; $e_2 = 4\sqrt{2} \sin (2000t - 45^\circ)$ В; $e_3 = 2 \sin (2000t + 90^\circ)$ В. Требуется определить ток в источнике напряжения i_1 , если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$ Ом; $C_1 = 250$ мкФ; $C_2 = 500$ мкФ; $L_1 = 1,5$ мГн; $L_2 = 1$ мГн.

Ответ: $i_1 = 1,566 \sin (2000t + 62,2^\circ)$ А



6.3. Цепи несинусоидального тока

В разделе 3 отмечалось, что расчет цепей несинусоидального периодического тока выполняется в двух случаях. В первом случае в цепи действует один (или несколько) источник периодического несинусоидального напряжения или тока. Во втором случае в цепи действуют несколько источников гармонических сигналов различных, но кратных частот. Основное отличие первого случая от второго состоит в том, что при наличии в цепи источников негармонических сигналов необходимо вначале выполнить их разложение в ряд Фурье с последующим применением принципа наложения.

Таким образом, приводимые ниже задачи на расчет цепей несинусоидального тока также можно разделить на две группы: к первой группе относятся задачи с одним источником несинусоидального напряжения (или тока); ко второй группе относятся задачи с двумя или тремя источниками гармонических сигналов кратных частот. Для обеих групп задач использованы схемы, которые были приведены в разделе 6.2. При этом для задач первой группы формы периодических напряжений и токов и их разложения в ряды Фурье можно заимствовать из табл. 3.1 (рис. 3.3).

Для задач второй группы результаты расчета цепи по первой гармонике можно взять из задач, помещенных в разделе 6.2. Для источников сигналов высших гармоник расчеты необходимо выполнить заново. Результаты расчета должны соответствовать полной реакции цепи, в которой могут присутствовать только те гармоники, которые имеются в спектре входного сигнала.

Цепи с одним негармоническим источником

ЗАДАЧА 6.52

В схеме к задаче 6.25 действует источник негармонического тока $j(t)$, форма которого соответствует варианту 1 табл. 3.1. Полный размах импульсов тока имеет значение $J_m = 10$ А, а частота повторения равна $100/(2\pi)$ Гц. Требуется определить действующее значение напряжения U_{AB} между выводами А и В, если ограничиться в разложении несинусоидального тока $j(t)$ постоянной составляющей J_0 и первыми тремя гармониками ряда Фурье. Параметры элементов схемы такие же, как в задаче 6.25.

Ответ: $U_{AB} = 5,58$ В

ЗАДАЧА 6.53

К схеме к задаче 6.26 подключен источник напряжения $e(t)$, форма которого соответствует варианту 4 табл. 3.1, где $A_m = E_m = 10$ В, а период повторения $T = 2\pi \cdot 10^{-6}$ с. Требуется, ограничиваясь первыми тремя гармониками ряда Фурье, определить действующее значение напряжения $U_{\text{вых}}$ на выходе схемы, если параметры элементов имеют следующие значения: $R = 10$ Ом; $L = 3$ мГн; $C = 0,3$ мкФ.

Ответ: $U_{\text{вых}} = 8,71$ В

ЗАДАЧА 6.54

Цепь на схеме к задаче 6.27 настроена в резонанс с первой гармоникой тока источника $j(e)$, форма которого имеет вид симметричных прямоугольных импульсов (вариант 2 табл. 3.1). Действующее значение тока источника $J = 1$ А. Требуется определить действующие значения токов в ветвях, если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R = 1$ Ом; $L = 1$ мГн; $C = 10$ мкФ.

Ответ: $I_k = 9,3$ А; $I_C = 9,25$ А

ЗАДАЧА 6.55

В цепи, схема которой приведена в задаче 6.29, действует источник напряжения $e(t)$ несинусоидальной формы, соответствующей варианту 5 табл. 3.1. Требуется определить мгновенное значение тока i в индуктивности L , если сопротивления элементов схемы на частоте первой гармоники имеют значения: $R_1 = R_2 = x_{L1} = x_{C1} = 1$ Ом, а максимальный размах импульсов напряжения $A_m = E_m = 10$ В. При расчете следует ограничиться постоянной составляющей и двумя первыми гармониками ряда Фурье.

Ответ: $i_L(t) = [5 - 4,05 \cos(\omega_1 t - 53,1^\circ) - 0,152 \cos(3\omega_1 t - 80^\circ)]$ А

ЗАДАЧА 6.56

В схеме, приведенной в задаче 6.30, действует источник несинусоидального напряжения, форма которого соответствует варианту 6 табл. 3.1. Требуется определить мгновенное значение тока i_L в индуктивности, если параметры элементов схемы имеют значения: $R = 100$ Ом; $L = 10$ мГн;

$C = 1,5$ мкФ. Частота повторения импульсов равна $f_1 = 2250$ Гц, а их максимальный размах имеет значение $E_m = 10$ В. При расчете ограничиться первыми тремя гармониками.

$$\text{Ответ: } i_2(t) = [14,1 \cdot 10^3 t - 54,7^\circ) - \\ - 2,17 \sin(42,3 \cdot 10^3 t - 80,7^\circ) + \\ + 0,462 \sin(10,5 \cdot 10^3 t - 84,5^\circ)] \text{мА}$$

ЗАДАЧА 6.57

В схеме, приведенной в задаче 6.32, действует источник негармонического периодического сигнала $e(t)$, форма которого соответствует варианту 2 табл. 3.1. Ограничиваясь первыми тремя гармониками, требуется рассчитать выходное напряжение $u_{\text{вых}}$, если размах напряжения на входе $E_m = A_m = 10$ В, а частота повторения $f = 10^4/2\pi$ Гц. Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $R = 10$ Ом; $C = 10$ мкФ.

$$\text{Ответ: } u_{\text{вых}}(t) = [2 \sin(10^4 t + 128^\circ) + \\ + 2,1 \sin(3 \cdot 10^4 t + 77^\circ) + \\ + 1,8 \sin(5 \cdot 10^4 t + 56^\circ)] \text{В}$$

ЗАДАЧА 6.58

В схеме параллельного контура, изображенного в задаче 6.35, действует источник периодического негармонического тока $j(t)$, форма которого соответствует варианту 17 табл. 3.1. Размах тока $J_m = 10$ А, а частота повторения $f = 10^4/2\pi$ Гц. Требуется определить напряжение на контуре u_k , ограничиваясь первыми тремя гармониками тока в разложении ряда Фурье, если параметры элементов контура имеют значения: $r_1 = r_2 = 10$ Ом; $C = 10$ мкФ; $L = 10$ мГн.

$$\text{Ответ: } u_k(t) = [98,2 \sin(10^4 t - 38,2^\circ) + \\ + 36,3 \sin(2 \cdot 10^4 t - 23,6^\circ) + \\ + 22,5 \sin(3 \cdot 10^4 t - 16,5^\circ)] \text{В}$$

ЗАДАЧА 6.59

Схема, приведенная в задаче 6.36, питается от источника периодического негармонического напряжения $e(t)$, форма которого соответствует варианту 14 табл. 3.1. Размах напряжения $E_m = 10$ В, а частота повторе-

ния равна $f = 10^4/2\pi$ Гц. Ограничиваясь постоянной составляющей и первыми тремя гармониками напряжения, требуется рассчитать ток i в цепи, если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $r_1 = r_2 = 10$ Ом; $L = 10$ мГн; $C = 10$ мкФ.

$$\text{Ответ: } u_K(t) = [0,25 + 0,262 \sin(10^4 t + 15^\circ) - 0,162 \sin(2 \cdot 10^4 t + 16,3^\circ) - 0,04 \sin(3 \cdot 10^4 t + 13,6^\circ)] \text{А}$$

ЗАДАЧА 6.60

В схеме, которая приведена в задаче 6.34, действует источник периодического негармонического напряжения $e(t)$, форма которого соответствует варианту 4 табл. 3.1. Размах напряжения источника $E_m = 10$ В, а частота повторения $f = 10^4/2\pi$ Гц. Требуется рассчитать мгновенные значения трех первых гармоник тока i , если параметры элементов схемы для первой гармоники имеют значения: $r = x_L = 10$ Ом; $x_C = 20$ Ом.

$$\text{Ответ: } i(t) = [0,5 - 0,142 \sin(10^4 t - 26,5^\circ) - 0,225 \sin(2 \cdot 10^4 t - 45^\circ) - 0,049 \sin(3 \cdot 10^4 t - 88^\circ)] \text{А}$$

Цепи с гармоническими источниками кратных частот

ЗАДАЧА 6.61

Для схемы, приведенной в задаче 6.37, требуется определить мгновенные значения токов i_1 и i_2 , если параметры ее элементов такие же, как в задаче 6.37. Мгновенные значения гармонических источников имеют значения: $e_1 = 5 \sin 2000t$ В; $e_2 = 5\sqrt{2} \sin 6000t$ В.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } i_1(t) &= [2,03 \sin(2 \cdot 10^3 t + 63^\circ) + 0,131 \sin(6 \cdot 10^3 t + 41^\circ)] \text{А}; \\ i_2(t) &= [0,454 \sin(2 \cdot 10^3 t + 90^\circ) + 0,476 \sin(6 \cdot 10^3 t - 82^\circ)] \text{А} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 6.62

Для схемы, которая изображена в задаче 6.38, требуется определить мгновенные значения токов в ветвях, если параметры ее элементов такие

же, как в задаче 6.38. Мгновенные напряжения гармонических источников схемы имеют значения: $e_1 = \sin 1000t$ В; $e_2 = \sin 3000t$ В.

Ответ: $i_1(t) = [0,383 \sin(10^3t - 57^\circ) + 0,144 \sin(3 \cdot 10^3t - 120^\circ)]$ А;
 $i_2(t) = [0,171 \sin(10^3t - 121^\circ) + 0,216 \sin(3 \cdot 10^3t - 30^\circ)]$ А

ЗАДАЧА 6.63

В схеме, которая приведена в задаче 6.39, действуют два источника $e_1 = \sqrt{2} \sin(1000t - 45^\circ)$ В, $e_2 = \sin 3000t$ В. Требуется рассчитать токи в ветвях, если параметры элементов схемы такие же, как в задаче 6.39.

Ответ: $i_1(t) = [0,415 \sin(10^3t - 138^\circ) + 0,222 \sin(3 \cdot 10^3t - 29^\circ)]$ А;
 $i_2(t) = [0,268 \sin(10^3t - 67^\circ) + 0,335 \sin(3 \cdot 10^3t + 145^\circ)]$ А

ЗАДАЧА 6.64

Для схемы, изображенной в задаче 6.41, требуется рассчитать мгновенные значения токов в ветвях, если напряжение источника $e(t) = 5 \sin(1000t - 90^\circ)$ В, а ток источника $j(t) = 5 \sin 3000t$ А. Параметры элементов схемы такие же, как в задаче 6.41.

Ответ: $i_1(t) = [1,21 \sin(10^3t - 104^\circ) + 4,56 \sin(3 \cdot 10^3t + 17^\circ)]$ А;
 $i_2(t) = [1,21 \sin(10^3t - 104^\circ) - 1,46 \sin(3 \cdot 10^3t - 64^\circ)]$ А

ЗАДАЧА 6.65

В схеме, приведенной в задаче 6.42, требуется определить мгновенные значения токов i_1 и i_2 , если ток источника $j(t) = 2\sqrt{2} \sin(2000t - 45^\circ)$ А, а напряжение источника $e(t) = 4 \sin 4000t$ В. Параметры элементов схемы такие же, как в задаче 6.42.

Ответ: $i_1(t) = [-0,686 \sin(2 \cdot 10^3t - 121^\circ) + 0,948 \sin(4 \cdot 10^3t - 58^\circ)]$ А;
 $i_2(t) = [2,74 \sin(2 \cdot 10^3t - 31^\circ) + 0,948 \sin(4 \cdot 10^3t - 58^\circ)]$ А

ЗАДАЧА 6.66

В схеме моста переменного тока, приведенного в задаче 6.45, действуют два источника напряжения с кратными частотами: $e_1 = 5 \sin 1000t$ В; $e_2 = 5 \sin(3000t + 90^\circ)$ В. Требуется рассчитать мгновенные значения токов i_1 и i_2 , если параметры элементов схемы такие же, как в задаче 6.45.

Ответ: $i_1(t) = [2,03 \sin(2 \cdot 10^3 t + 63^\circ) + 0,131 \sin(6 \cdot 10^3 t + 41^\circ)] \text{ A};$
 $i_2(t) = [0,454 \sin(2 \cdot 10^3 t + 90^\circ) + 0,476 \sin(6 \cdot 10^3 t - 82^\circ)] \text{ A}$

ЗАДАЧА 6.67

Схема, изображенная в задаче 6.46, содержит три источника напряжения кратных частот: $e_1 = \sin 1000t \text{ В}; e_2 = \sqrt{2} \sin 2000t; e_3 = 2 \sin 3000t \text{ В}.$ Требуется определить токи в ветвях цепи, если параметры элементов такие же, как в задаче 6.46.

Ответ: $i_1(t) = [0,415 \sin(10^3 t + 4,7^\circ) + \sin(2 \cdot 10^3 t - 37,5^\circ) + 0,44 \sin(3 \cdot 10^3 t - 28,76^\circ)] \text{ A};$
 $i_2(t) = [-0,263 \sin(10^3 t + 23,2^\circ) + \sin(2 \cdot 10^3 t - 115^\circ) - 0,44 \sin(3 \cdot 10^3 t - 48^\circ)] \text{ A};$
 $i_3(t) = [0,185 \sin(10^3 t - 22^\circ) + 0,3 \sin(2 \cdot 10^3 t - 74^\circ) + 0,15 \sin(3 \cdot 10^3 t + 52^\circ)] \text{ A}$

ЗАДАЧА 6.68

В схему, приведенную в задаче 6.47, включены три источника напряжения: $e_1 = \sin 2000t \text{ В}; e_2 = \sin \sqrt{2} 1000t \text{ В}; e_3 = 2 \sin(3000t - 90^\circ) \text{ В}.$ Требуется рассчитать действующие значения токов в ветвях, если параметры элементов схемы такие же, как в задаче 6.47.

Ответ: $I_1 = 0,42 \text{ A}; I_2 = 0,54; I_3 = 0,29 \text{ A}$

ЗАДАЧА 6.69

В схеме, изображенной в задаче 6.48, действуют два источника напряжения и один источник тока с кратными частотами: $e_1 = 2 \sin 1000 t \text{ В}; e_2 = 2\sqrt{2} \sin(2000 t + 450) \text{ В}; j = 3 \sin 3000 t \text{ А}.$ Требуется рассчитать действующие значения токов в ветвях, если параметры элементов такие же, как в задаче 6.48.

Ответ: $I_1 = 1,18 \text{ A}; I_2 = 2,72 \text{ A}$

ЗАДАЧА 6.70

В схеме, приведенной в задаче 6.50, включены три источника напряжения кратных частот: $e_1 = 2 \sin 1000t$ В; $e_2 = 2 \sin 2000t$ В; $e_3 = 2 \sin (3000t - 90^\circ)$ В. Параметры элементов схемы такие же, как в задаче 6.50. Требуется рассчитать мгновенные значения токов i_1 , i_2 , i_3 в ветвях цепи.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } i_1(t) &= [0,415 \sin (10^3 t + 4,7^\circ) + \\ &\quad + \sin (2 \cdot 10^3 t - 37,5^\circ) + \\ &\quad + 0,44 \sin (3 \cdot 10^3 t - 28,76^\circ)] \text{ А;} \\ i_2(t) &= [-0,263 \sin (10^3 t + 23,2^\circ) + \\ &\quad + \sin (2 \cdot 10^3 t - 115^\circ) - \\ &\quad - 0,44 \sin (3 \cdot 10^3 t - 48^\circ)] \text{ А;} \\ i_3(t) &= [0,185 \sin (10^3 t - 22^\circ) + \\ &\quad + 0,3 \sin (2 \cdot 10^3 t - 74^\circ) + \\ &\quad + 0,15 \sin (3 \cdot 10^3 t + 52^\circ)] \text{ А} \end{aligned}$$

6.4. Переходные процессы в электрических цепях

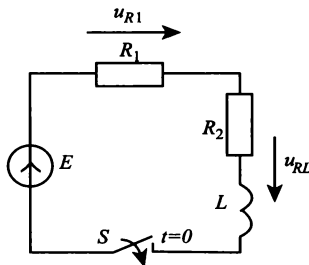
Все задачи по расчету переходных процессов в электрических цепях сгруппированы по порядку характеристических уравнений, который зависит от числа реактивных элементов и способа их включения. Расчет переходных процессов в цепях первого и второго порядков можно выполнять с помощью классического или операторного методов. При наличии воздействий сложной формы можно использовать интеграл Дюамеля или операторный метод.

Расчет переходных процессов в цепях более высокого порядка можно выполнять методом переменных состояния. Для получения графического изображения переходного процесса можно использовать метод моделирования.

Цепи первого порядка

ЗАДАЧА 6.71

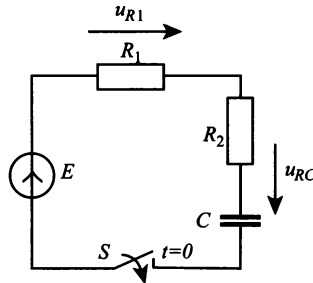
Рассчитать классическим методом переходный процесс в цепи с индуктивностью, приведенной ниже, и определить мгновенные значения напряжений $u_{R1}(t)$ и u_{RL} , показанные на схеме, после замыкания ключа S . Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$. Напряжение источника $E = 100 \text{ В}$. Построить графики временных зависимостей этих напряжений.



ЗАДАЧА 6.72

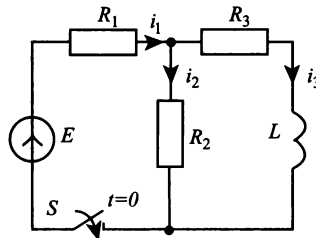
Рассчитать мгновенные значения напряжений $u_{R1}(t)$ и $u_{RC}(t)$ в цепи с емкостью C и построить графики их временных зависимостей после за-

мыкания ключа S в схеме, изображенной ниже. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = 500 \text{ Ом}$; $C = 2 \text{ мкФ}$. Напряжение источника $E = 50 \text{ В}$.



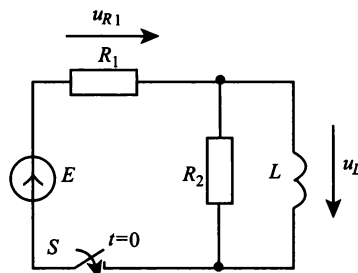
ЗАДАЧА 6.73

Рассчитать мгновенные значения токов $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ в цепи, изображенной ниже, после замыкания ключа S . Построить графики их временных зависимостей. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $E = 150 \text{ В}$.



ЗАДАЧА 6.74

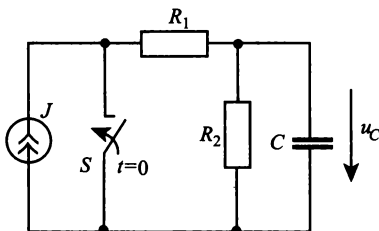
В схеме, изображенной ниже, требуется рассчитать и построить графики напряжений на сопротивлении $u_{R1}(t)$ и индуктивности $u_L(t)$ после замыкания ключа S . Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = R_2 = 200 \text{ Ом}$; $L = 10 \text{ мГн}$; $E = 120 \text{ В}$.



ЗАДАЧА 6.75

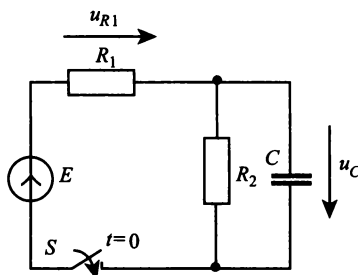
Для схемы с источником тока J , изображенной ниже, требуется определить интервал времени после замыкания ключа S , при котором напряжение на емкости C уменьшится до 50 В. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R = 200 \text{ Ом}$; $C = 10 \text{ мкФ}$; $J = 0,5 \text{ А}$.

Ответ: 0,7 мс



ЗАДАЧА 6.76

В схеме, изображенной ниже, в момент времени $t = 0$ происходит замыкание ключа S . Требуется рассчитать напряжения $u_{R1}(t)$ и $u_C(t)$ после замыкания ключа и построить графики их временных зависимостей. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$; $C = 1 \text{ мкФ}$; $E = 100 \text{ В}$.



ЗАДАЧА 6.77

Для схемы, приведенной ниже, требуется рассчитать и построить графики токов в ветвях $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ после замыкания ключа S . Параметры

элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 1 \text{ кОм}$; $R_2 = R_3 = 2 \text{ кОм}$; $C = 5 \text{ мкФ}$; $E = 200 \text{ В}$.

ЗАДАЧА 6.78.

В схеме, изображенной ниже, имеются два ключа S_1 и S_2 , с помощью которых производится коммутация обмотки реле с параметрами R_K , L_K . Первый ключ S_1 замыкается в момент времени $t_1 = 0$, в результате чего по обмотке реле начинает протекать ток. Второй ключ S_2 замыкается через интервал времени $t_2 = 0,5 \text{ мс}$ после замыкания ключа S_1 . Требуется определить время T_C срабатывания реле, если его ток срабатывания составляет $I_C = 1 \text{ А}$. Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = R_K = 50 \text{ Ом}$; $L = 50 \text{ мГн}$; $E = 100 \text{ В}$.

Ответ: 0,8 мс

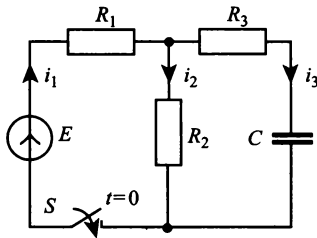


Схема для задачи 6.77

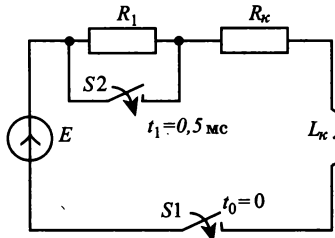
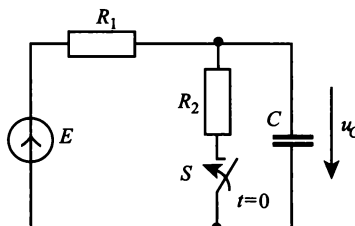


Схема для задачи 6.78

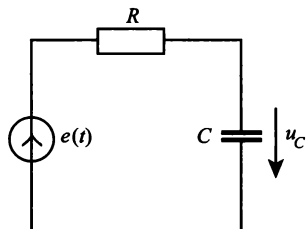
ЗАДАЧА 6.79

В схеме, которая приведена ниже, в момент времени $t = 0$ замыкается ключ S . Требуется рассчитать и построить график изменения напряжения $u_C(t)$ на емкости после замыкания ключа. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = 400 \text{ Ом}$; $C = 0,1 \text{ мкФ}$; $E = 50 \text{ В}$.

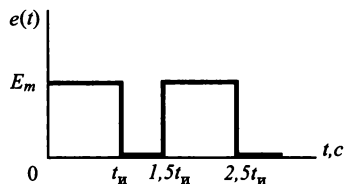


ЗАДАЧА 6.80.

В схеме *a*, изображенной ниже, действует импульсный источник напряжения $e(t)$, форма которого приведена на схеме *б*. Требуется рассчитать и построить графически временную зависимость напряжения $u_C(t)$ на емкости C , если параметры элементов схемы имеют значения: $R = 1$ кОм; $C = 1$ мкФ; $E_m = 100$ В. Длительность интервала времени $t_H = 1$ мс.



a)

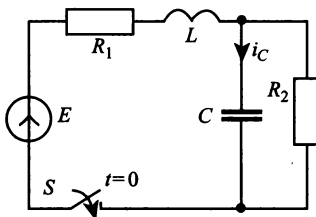


б)

Цепи второго порядка

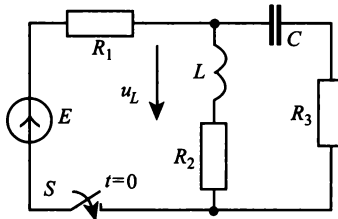
ЗАДАЧА 6.81

В схеме, приведенной ниже, в момент времени $t = 0$ замыкается ключ S . Требуется рассчитать и построить график тока $i_C(t)$ в емкости после замыкания ключа, если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 100$ Ом; $L = 5$ мГн; $C = 0,5$ мкФ; $E = 15$ В.



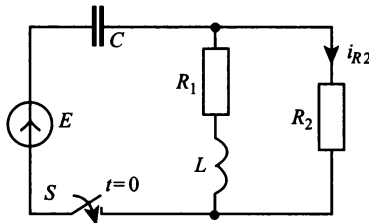
ЗАДАЧА 6.82

В цепи, приведенной ниже, замыкается ключ S . Требуется рассчитать и построить график мгновенного значения напряжения $u_L(t)$ на индуктивности после замыкания ключа, если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 100 \text{ Ом}$; $R_2 = R_3 = 1 \text{ Ом}$; $L = 5 \text{ мГн}$; $C = 0,5 \text{ мкФ}$; $E = 30 \text{ В}$.



ЗАДАЧА 6.83

Требуется рассчитать мгновенное значение тока $i_{R2}(t)$ и построить его график в схеме, приведенной ниже, если в момент времени $t = 0$ замыкается ключ S . Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 100 \text{ Ом}$; $L = 20 \text{ мГн}$; $C = 2 \text{ мкФ}$; $E = 90 \text{ В}$.



ЗАДАЧА 6.84

Требуется рассчитать и построить график переходной характеристики $h_R(t)$ для напряжения на сопротивлении R в схеме последовательного колебательного контура, изображенного ниже, полагая, что на входе действует источник напряжения $e(t) = 1(t)$. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R = 50 \text{ Ом}$; $L = 10 \text{ мГн}$; $C = 1 \text{ мкФ}$.

ЗАДАЧА 6.85

В схеме, приведенной ниже, в момент времени $t = 0$ замыкается ключ S . Требуется рассчитать и построить график зависимости мгновенного значения напряжения $u_C(t)$ после замыкания ключа, если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R = 10 \text{ Ом}$; $L = 0,5 \text{ мГн}$; $C = 20 \text{ мкФ}$; $E = 100 \text{ В}$.

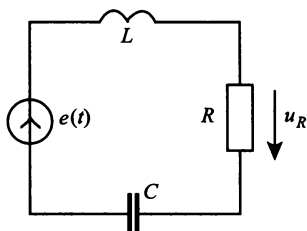


Схема к задаче 6.84

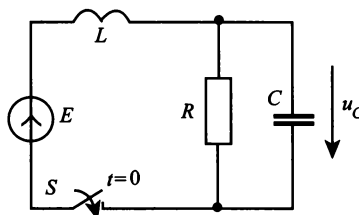
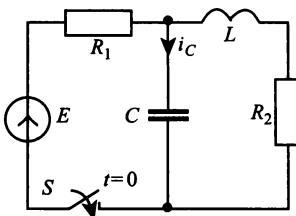


Схема к задаче 6.85

ЗАДАЧА 6.86

Требуется рассчитать и построить график мгновенного значения тока $i_C(t)$ в схеме, изображенной ниже, после замыкания ключа S . Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 1 \text{ Ом}$; $L = 0,5 \text{ мГн}$; $C = 20 \text{ мкФ}$; $E = 200 \text{ В}$.



ЗАДАЧА 6.87

В схеме, изображенной ниже, в момент времени $t = 0$ замыкается ключ S . Требуется рассчитать и построить график мгновенного значения напряжения

$u_L(t)$ на индуктивности, если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R = 10 \text{ Ом}$; $L = 2 \text{ мГн}$; $C = 20 \text{ мкФ}$; $E = 50 \text{ В}$.

ЗАДАЧА 6.88

Требуется рассчитать и построить график мгновенного значения тока $i_L(t)$ после замыкания ключа S в схеме, приведенной ниже. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$; $L = 20 \text{ мГн}$; $C = 20 \text{ мкФ}$; $E = 60 \text{ В}$.

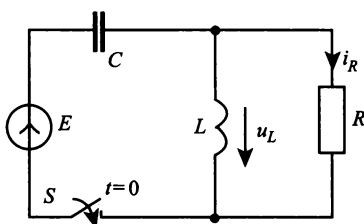


Схема к задаче 6.87

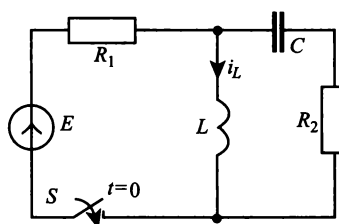
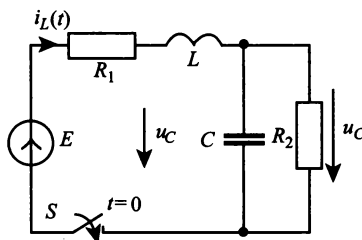


Схема к задаче 6.88

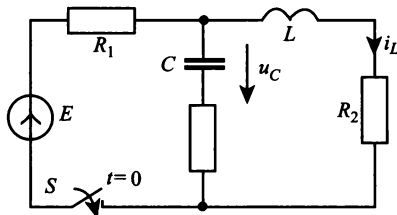
ЗАДАЧА 6.89

Для схемы, приведенной ниже, требуется рассчитать и построить графики временных зависимостей для переменных состояния $u_C(t)$, $i_L(t)$ после замыкания ключа S . Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 100 \text{ Ом}$; $L = 6 \text{ мГн}$; $C = 0,5 \text{ мкФ}$; $E = 15 \text{ В}$.



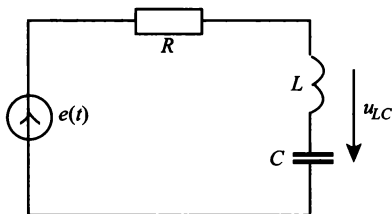
ЗАДАЧА 6.90

Для схемы, изображенной ниже, требуется определить значения переменных состояния $u_C(t)$, $i_L(t)$ и построить их графики после замыкания ключа S . Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = 100 \text{ Ом}$; $R_2 = R_3 = 1 \text{ Ом}$; $L = 6 \text{ мГн}$; $C = 40 \text{ мкФ}$; $E = 16 \text{ В}$.



ЗАДАЧА 6.91

Для схемы последовательного контура, изображенного ниже, требуется рассчитать переходную характеристику $h_{LC}(t)$ для напряжения на последовательном соединении элементов L , C , полагая, что на входе действует источник напряжения $e(t) = 1(t)$. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R = 50 \text{ Ом}$; $L = 10 \text{ мГн}$; $C = 1 \text{ мкФ}$.

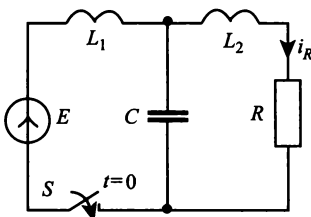


Цепи третьего и четвертого порядков

Расчет этих схем ввиду их сложности можно выполнять методом переменных состояния или с помощью моделирования.

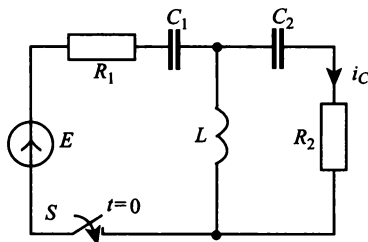
ЗАДАЧА 6.92

Для схемы однозвенного LC -фильтра нижних частот, приведенного ниже, требуется рассчитать и построить график мгновенного значения тока в нагрузке $i_R(t)$ после замыкания ключа S , если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R = 2 \text{ Ом}$; $L_1 = L_2 = 0,5 \text{ мГн}$; $C = 10 \text{ мкФ}$; $E = 300 \text{ В}$.



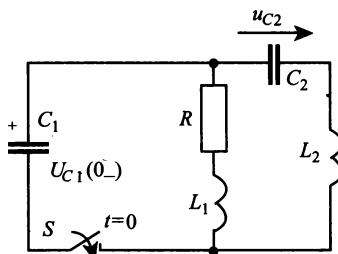
ЗАДАЧА 6.93

Для схемы однозвенного LC -фильтра верхних частот, приведенного ниже, требуется рассчитать и построить график мгновенного значения напряжения $u_R(t)$ на нагрузке R после замыкания ключа S , если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R = 10 \text{ Ом}$; $L = 1 \text{ мГн}$; $C_1 = C_2 = 20 \text{ мкФ}$; $E = 80 \text{ В}$.



ЗАДАЧА 6.94

В схеме, изображенной ниже, предварительно заряженный конденсатор C_1 разряжается на последовательно-параллельный контур. Требуется рассчитать и построить график мгновенного значения напряжения u_{C_2} на емкости C_2 , если параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = 1 \text{ Ом}$; $L_1 = 2 \text{ мГн}$; $L_2 = 0,5 \text{ мГн}$; $C_1 = 5 \text{ мкФ}$; $C_2 = 20 \text{ мкФ}$; $U_{C_1}(0_-) = 10 \text{ В}$.



ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица III

Команды программы OrCAD Capture

Команда	Назначение команды
File>New>Project	Создание нового проекта
File>New>Design	Создание новой схемы
File>New>Library	Создание новой библиотеки
File>New>Text File	Создание нового текста
File>Open>Project	Открытие существующего проекта
File>Open>Design	Открытие существующей схемы
File>Open>Library	Открытие существующей библиотеки
File>Open>Text File	Открытие существующего текста
File>Save (Ctrl + S)	Сохранение внесенных изменений
File>Save As...	Сохранение изменений на носителе
File>Print Preview	Подготовка документов к печати
File>Print (Ctrl + P)	Печать документов
File>Print Setup...	Настройка принтера
File>Import Design...	Импорт схем из PSpice
File>Export Design...	Экспорт схем из PSpice
Edit>Copy (Ctrl + C)	Копирование документа в буфер обмена
Edit>Paste (Ctrl + V)	Размещение документа из буфера обмена
Edit>Find (Ctrl + F)	Поиск различных документов
View Toolbar	Вывод иконок (Icon)
Option>Preferences	Задание параметров при редактировании
Option>Design Template	Задание параметров шаблона схемы
Option>Product Configuration	Выбор конфигурации программ
Window>Cascade	Каскадное расположение окон
Window>Tile Horizontally	Расположение окон по горизонтали
Window>Tile Vertically	Расположение окон по вертикали
Window>Arrange Icons	Упорядочение иконок на экране
Help>Help Topics (F1)	Вывод предметного указателя
Help>Learning Capture	Вывод электронного учебника OrCAD
Help>About Capture	Вывод номера версии программы
Help>OrCAD Express	Информация об OrCAD Express

Команды программы OrCAD PSpice

Команда	Назначение команды
File>New> Simulation Profile	Профайл параметров моделирования
File>New>Text File	Текстовый файл
File>Open Simulation (Ctrl+O)	Открытие моделирования
File>Close Simulation	Закрытие моделирования
File>Printer Setup...	Настройка принтера
File>Log Commands...	Файл команд режима Probe
File>Run Commands...	Выполнение команд режима Probe
File>Recent Simulations	Загрузка последних файлов
File>Recent Files (1, 2, 3)	Загрузка последних файлов для Probe
File>Exit (Alt+F4)	Выход из программы
View>Circuit File	Загрузка файла на моделирование
View>Output File	Файл результатов моделирования
View>Simulation Results	Просмотр результатов моделирования
View>SimulationQueue	Задание на моделирование
View>Output Window	Сообщение результатов моделирования
View>Simulation Status Window	Окно результатов моделирования
View>Toolbars...	Настройка меню инструментов
View>Status Bar	Открытие строки состояний
View>Workbook Mode	Вывод загруженных заданий
Simulation>Run	Выполнение моделирования
Simulation>Pause	Остановка моделирования
Simulation>Stop	Прекращение моделирования
Simulation>Edit Profile	Редактирование моделирования
Tools>Customize	Настройка меню инструментов
Tools>Options	Установка параметров Probe
Window>New Window	Открытие нового окна
Window>Close	Закрытие текущего окна
Window>Close All	Закрытие всех окон
Window>Cascade	Каскадное расположение окон
Window>Tile Horizontally	Горизонтальное расположение окон
Window>Tile Vertically	Вертикальное расположение окон

Команды программы Micro-Cap V

Команда	Назначение команды
File>New (Ctrl+N) File>Open (Ctrl+O) File>Save (Ctrl+S) File>Save As... File>Create SPICE File>Revert File>Close (Ctrl+F4) File>Print Preview File>Print (Ctrl+P) File>Print Setup File>Exit (Alt+F4)	Создание нового файла Открытие существующего файла Сохранение схемы Сохранение схемы на носителе Создание текстового файла Восстановление содержания файла Закрытие текущего окна Просмотр схемы Вывод на печать Настройка принтера Выход из файла
Edit>Undo (Ctrl+Z) Edit>Cut (Ctrl+X) Edit>Copy (Ctrl+C) Edit>Paste (Ctrl+V) Edit>Clear (Del) Edit>Select All (Ctrl+A) Edit>CopyFront Window Edit>Add Page Edit>Delete Page... Edit>Add Model Statements Edit>Box Operations Edit>ChangeAttribute Display Edit>Color... Edit>Font... Edit>Bring to Front Edit>Send to Back Edit> Find... Edit>Repeate Last Find (F3) Edit>Replace	Отмена последней команды Удаление выбранного документа Копирование выбранного документа Копирование содержания буфера Удаление выбранного документа Выбор всех документов окна Копирование содержания окна Добавление новой страницы Удаление страницы Размещение описания моделей Редактирование объектов в боксе Изменение регулировок дисплея Изменение цвета текста Изменение шрифта Перемещение нижнего объекта Перемещение верхнего объекта Поиск схем или текста Поиск следующего объекта Замена фрагмента текста
Component>Analog Primitives Component>Analog Library Component>Digital Primitives Component>Digital Library	Простые аналоговые элементы Библиотека аналоговых элементов Простые цифровые элементы Библиотека цифровых элементов

Таблица ПЗ (продолжение).

Команда	Назначение команды
Windows>Cascade (Shift+F5) Windows>Title Vertical (Shift+F4) Windows>Title Horizontal Windows> Arrange Icons Windows>Maximize Windows>Zoom In (Ctrl++) Windows>Zoom Out(Ctrl+-) Windows>ViewText/Drawing Area (Ctrl+G) Windows>Split Text/Drawing Area Horizontal Windows>Split Text/Drawing Area Vertical Windows> Show Full Window Drawing Windows>Component Editor Windows>Shape Editor Windows>Model Program Windows>Calculator	Каскадное расположение окон Вертикальное расположение окон Горизонтальное расположение окон Упорядочивание иконок Максимизация окна Увеличение масштаба изображения Уменьшение масштаба изображения Переключение схемы и текста Разделение окна и текста по горизонтали Разделение окна и текста по вертикали Расширение окна схем Редактирование библиотеки Редактирование символов элементов Программа идентификации элементов Вызов калькулятора
Option>Tools (Ctrl+O) Option>Help Bar Option>Mode Option>View Option>Show All Digital Paths Option>Preferences (Ctrl+Shift+P) Option>Global Settings (Ctrl+Shift+G) Option>Title Block... Option>Component Palette 1-9 (Ctrl+1/9) Analysis>Transient Analysis (Alt+1) Analysis>AC Analysis... (Alt+2) Analysis>DC Analysis... (Alt+3) Analysis>Probe Transient Analysis... Analysis>Probe AC Analysis... Analysis>Probe DC Analysis...	Строка инструментов Строка текущей команды Выбор режима Выбор информации на схеме Пути цифровых сигналов Изменение параметров схемы Задание глобальных параметров Окно основной надписи Окно панелей элементов Анализ переходных процессов Анализ частотных характеристик Анализ режимов постоянного тока Вывод переходных процессов Вывод частотных характеристик Вывод режима постоянного тока

Таблица ПЗ (окончание).

Команда	Назначение команды
Help>Contents (F1)	Вывод информации по MC-5
Help>Search for Help On...	Вызов справочной системы
Help>Product Support	Техническая поддержка MC-5
Help>About Micro-Cap V...	Информация об MC-5
Help>Demo	Информация об MC-5 Demo

Назначение программ системы Micro-Cap V

Режим работы	Назначение
Select Mode	Выбор объектов
Component Vode	Добавление компонентов
Text mode	Введение текстовых надписей
Wire mode	Ввод ортогональных проводов
Diagonal wire mode	Ввод диагональных проводов
Graphics mode	Рисование графических объектов
Info mode	Вывод информации о параметрах
Help mode	Информация о модели компонента
Point to End Paths	Расчет задержек сигнала по всем путям
Point to Point Paths	Расчет задержек сигнала двух элементов
Grid Text mode	Текстовые надписи
Attribute Text mode	Позиционные надписи
Node Numbers	Номера узлов схемы
Node Voltage/states	Вывод узловых напряжений
Pin connections	Обозначения выводов компонентов
Command Text mode	Обозначения команд
Cross-hair cursor	Изображение курсора крестиком
Grid	Изображение сетки
Border	Изображение рамки
Title	Изображение штампа

Команды программы Electronics Workbench

Команда	Назначение команды
File>New (Ctrl+N) File>Open (Ctrl+O) File>Save (Ctrl+S) File>Save As... File>Revert to Saved... File>Print...(Ctrl+P) File>Print Setup... File>Exit (Alt+F4) File>Install... File>Import from Spice File>Export to Spice File>Export to PCB	Открытие нового документа Открытие существующего документа Сохранение документа Сохранение документа на носителе Стирание всех изменений Подготовка данных к печати Настройка принтера Выход из программы Установка дополнительных программ Импорт файлов из Spice Экспорт файлов в Spice Соединения в печатных платах
Edit>Cut (Ctrl+X) Edit>Copy (Ctrl+C) Edit>Paste (Ctrl+V) Edit>Delete (Delete) Edit>Select All (Ctrl+A) Edit>Copybits (Ctrl+I) Edit>Show Clipboard	Стирание с сохранением в буфере Копирование в буфер Вставка содержимого буфера Стирание выделенной части Выделение всей схемы Копирование выделенной части Показ содержимого буфера
Circuit>Label...(Ctrl+L) Circuit>Value...(Ctrl+U) Circuit>Model...(Ctrl+M) Circuit>Zoom (Ctrl+Z) Circuit>Rotate (Ctrl+R) Circuit>Fault (Ctrl+F) Circuit>Subcircuit...(Ctrl+B) Circuit>Wire Color... Circuit> Preferences...(Ctrl+E)	Ввод позиционного обозначения Ввод значения параметра элемента Выбор модели элемента Масштабирование выделенной части Вращение выделенной части Моделирование неисправности Преобразование выделенной части Изменение цвета проводника Оформление схемы
Analysis>Activate Option...(Ctrl+G) Analysis>Stop (Ctrl+T) Analysis>Pause (F9) Analysis> Options...(Ctrl+Y) Analysis>DC Operating Point	Запуск моделирования Остановка моделирования Прерывание моделирования Вызов команд моделирования Расчет режима постоянного тока

Таблица П5 (продолжение)

Команда	Назначение команды
Analysis>DC Sweep	Развертка на постоянном токе
Analysis>AC Frequency...	Расчет частотных характеристик
Analysis>Transient...	Расчет переходных процессов
Analysis>Fourier...	Спектральный анализ по Фурье
Analysis>Noise...	Анализ спектра шумов
Analysis>Distortion...	Анализ нелинейных искажений
Analysis>Parameter sweep...	Анализ вариации параметров
Analysis>Temperature sweep...	Температурный анализ
Analysis>Pole-Zero...	Нули и полюса характеристики
Analysis>Transfer Function...	Расчет передаточных функций
Analysis>Sensitivity...	Расчет чувствительности
Analysis>Worst Case...	Расчет наихудшего случая
Analysis>Monte Carlo...	Статистический анализ
Window>Arrange (Ctrl+W)	Упорядочивание информации
Window>Circuit	Вывод схемы на передний план
Window>Description (Ctrl+D)	Вывод описания схемы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачник по теоретическим основам электротехники /Под ред. К. М. Поливанова. М.: Энергия, 1973.
2. Бирюков В. Н., Попов В. П., Семенцов В. И. Сборник задач по теории цепей. М.: Высшая школа, 1985.
3. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. М.: Высшая школа, 1987.
4. Рабинович Э. А. Сборник задач и упражнений по общей электротехнике. М.: Энергия, 1972.
5. Константинов В. И., Симонов А. Ф., Федоров-Королев А. А. Сборник задач по теоретической электротехнике. М.: Энергия, 1975.
6. Липатов Д. Н. Вопросы и задачи по электротехнике для программированного обучения. М.: Энергия, 1973.
7. Сборник задач по теории электрических цепей /Под ред. П. Н. Матханова и Л. В. Данилова. М.: Высшая школа, 1980.
8. Сборник задач по теоретическим основам электротехники /Под ред. Л.А. Бессонова. М., 1988.
9. Типовые задачи по теории электрических цепей: Учебное пособие /Под ред. А. Б. Новгородцева. СПб: ГТУ, 1991.
10. Шебес М. Р., Каблукова М. В. Задачник по теории линейных электрических цепей. М.: Высшая школа, 1990.
11. Прянишников В. А. Теоретические основы электротехники. Курс лекций. СПб: КОРОНА принт, 2000.
12. Прянишников В. А. Электроника: Курс лекций. СПб.: КОРОНА принт, 2000.
13. Новгородцев А. Б. 30 лекций по теории электрических цепей. СПб.: Политехника, 1995.
14. Разевиг В. Д. Система схемотехнического моделирования и проектирования печатных плат Design Center PSpice. М.: Родник Софт, 1996.
15. Карлацук В. И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Workbench и ее применение. М.: Солон-Р, 1999.
16. Разевиг В. Д. Система схемотехнического моделирования Micro-Cap V. М.: Солон, 1997.
17. Разевиг В. Д. Система сквозного проектирования электронных устройств Design Lab 8.0. М.: Солон, 1999.
18. Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях. Практикум на Electronics Workbench. Том 1. М.: Додека, 1999.

19. *Разевиг В. Д.* Система проектирования цифровых устройств OrCAD. М.: Солон-Р, 2000.
20. *J. W. Nilsson, S. A. Riedel.* Introduction to PSpice. Manual for Electric Circuits Using OrCAD Release 9.1. Prentice Hall Saddle River, New Jersey, 2000.
21. OrCAD PSpice A/D User's Guide. Release 9, Beaverton, Oregon, 1998.
22. PspiceUser's guide. Micro Sim Corporation. La Cadena Drive, Laguna Hills, 1989.
23. Electronics Workbench Professional Edition. Version 5. Interactive Image Technologies Ltd. Toronto, Ontario, Canada, 1996.
24. Micro-Cap V. Electronic Circuit Analysis User's Guide. Version 1.0. Sunnevale, Spectrum Software, 1995.
25. *Gunter W.* Schalttunden erfolgreich simulieren mit Micro-Cap V. Feldkizchen: Franzis, 1997.
26. *Дьяконов В. П.* Справочник по MathCAD PLUS 6.0 PRO. М.: СК-Пресс, 1997.

Издательство «Корона.Век» предлагает

(812) 969-73-34, (499) 148-35-12

**Посетите наш интернет-магазин
WWW.ULIT.RU**

С. Г. Герман-Галкин.

Виртуальная силовая электроника в среде Matlab – Simulink.

И. Е. Овчинников.

Электромеханические и мехатронные системы. Часть 1.

Полупроводниковые устройства в цепях электрических машин.

Коллекторные и бесконтактные двигатели постоянного тока.

С. Г. Герман-Галкин.

Силовая электроника.

Лабораторные работы на ПК

Силовая электроника относится к числу наиболее быстро развивающихся научных и технических дисциплин. Знания основ силовой электроники необходимы специалистам в области электромеханики, электроэнергетики, электропривода, электротехнологий и др.

С. Г. Герман-Галкин.

Линейные электрические цепи.

Лабораторные работы на ПК

В пособии приводятся описания пакетов расширения программы MatLab, способы построения моделей и методические указания по проведению лабораторных работ. Кроме того, компьютерная лаборатория позволяет решить проблему популярного сегодня дистанционного обучения, когда учащийся практически не имеет возможности работать на реальных установках.

С. Г. Герман-Галкин.

Электрические машины.

Лабораторные работы на ПК

Книга содержит теоретическую и практическую части. Позволяет решить проблему дистанционного обучения. Незаменима в тех случаях, когда учащиеся практически не имеют возможности работать на реальных установках.

В. А. Прянишников.

Теоретические основы электротехники.

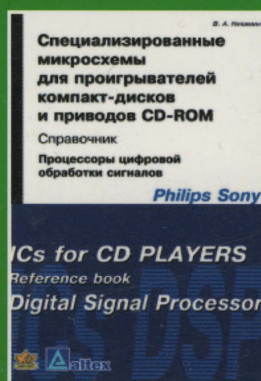
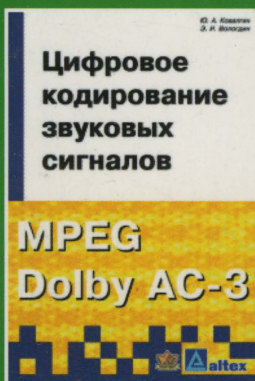
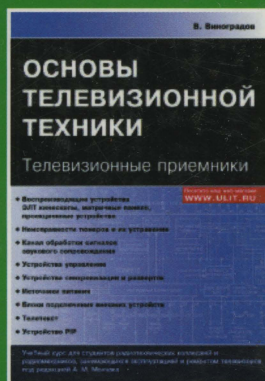
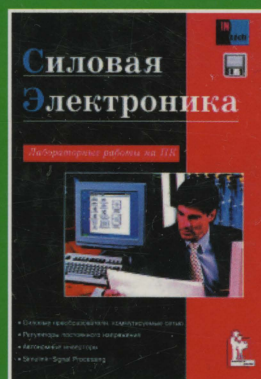
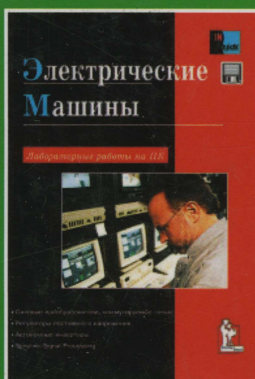
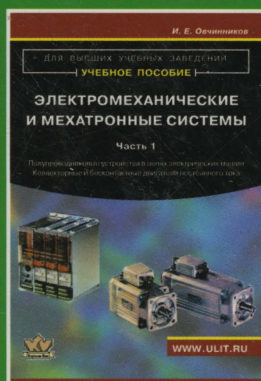
Курс лекций

Курс лекций включает все основные разделы теории электрических цепей. Лекции содержат иллюстрации и таблицы, которые можно использовать как наглядные пособия.

В. А. Прянишников.

Электроника. Полный курс лекций.

Издательство «Корона.Век» предлагает



Книги издательства оптом и в розницу

Интернет-магазин: WWW.ULIT.RU

E-mail: book@ulit.ru

Оптовая торговля: (812) 969-73-34, (499) 148-35

Книга-почтой: 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29 «Корона.Век»

