Т В О Й   К Р У Г О З О Р

Е. И. Игнатьев

В царстве смекалки

Книга II

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

В царстве смекалки • Книга II
Е. И. Игнатьев

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ТВОЙ КРУГОЗОР

Е. И. Игнатьев

В царстве смекалки,
или Арифметика для всех

Книга II

Под редакцией Г. З. Генкина

Иллюстрации С. В. Савилова

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2008

УДК 087.5:51
ББК 22.1
И26

Серия «Твой кругозор» основана в 2007 году

Игнатьев Е. И.

И26 В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. II : [для ст. шк. возраста] / Е. И. Игнатьев; под ред. Г. З. Генкина; ил. С. В. Савилова. — М. : Просвещение, 2008. — 176 с. : ил. — (Твой кругозор). — ISBN 978-5-09-018201-0.

Это новое издание знаменитого трехтомника занимательных задач выходит в год его столетнего юбилея. Как и век назад, он доставит своим читателям много приятных минут, поможет развить логическое мышление и смекалку.

УДК 087.5:51
ББК 22.1

ISBN 978-5-09-018201-0

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

В какой бы области человеческая жизнь ни стремилась к самосовершенствованию, несомненно то, что всюду в основании верных выводов должны лежать «счет и мера», т.е. число в той или иной форме. Явления ли внешнего мира, глубины ли собственного духа желает исследовать человек, всюду и везде прошествует он по верному пути, если великий и строгий дух математики будет им руководить.

Станет ли кто в наше время отрицать настоятельную необходимость самого широкого распространения и популяризации математических знаний? Развитие сообразительности и смекалки — вот что необходимо человеку, если он желает преуспеть и достигнуть гармонии жизни.

Мы с удовлетворением отмечаем тот факт, что вы, уважаемый читатель, продолжили свою прогулку в царстве смекалки. Пытаясь быть вашим проводником, мы, конечно, не обольщаем себя надеждой, что сможем показать в этой книге это царство во всей его прелести и полноте. Для этого понадобилась бы еще не одна такая книга: так велика и обширна область только тех отделов математики, которые можно подвести под общее заглавие «математических игр и развлечений».

Наша книга разбиты на отделы, содержащие каждый однородные задачи в порядке возрастания их трудности. Нет, вообще говоря, никакой надобности читать и разбираться в нашей книге «подряд». Каждый может для начала взять тот отдел, который его наиболее заинтересует, и разобраться сначала в нем, затем перейти к любому другому и т.д. Все же не забывайте: предлагаемая книга не «учебник» и не «задачник» в обыкновенном смысле этих слов. Но всякий, кто захочет, может воспользоваться предлагаемой книгой применительно к своему учебнику. Взрослый, взявший на себя труд познакомиться с нашей книгой, легко убедится, что все почти предлагаемые в ней задачи можно видоизменять и делать предметом беседы даже с маленькими детьми. С другой стороны, смеем надеяться, что книга может быть недурным пособием для математического саморазвития и самодеятельности и притом — не для одного только учащегося юношества, а для всех вообще, чувствующих склонность к работе ума. Предназначая книгу для всех, мы вовсе не желаем сказать, что ее может читать даже едва обучившийся грамоте ребенок. Но думаем, что мать, отец, старший брат или сестра найдут в них достаточно материала, чтобы на легких и занимательных примерах, при помощи предметов, находящихся у них же перед глазами или под руками, ввести ребенка в круг математических понятий. Сближение математики с жизнью, введение ее в повседневный обиход, умение все окружающее нас по возможности переводить на счет, меру и число — вот что главным образом имеют в виду автор и научный редактор. Так как задачи подобраны так, что усвоение и разбор их решений не требует почти никакой математической подготовки, то их смело можно давать, начиная с 10—12 лет и т.д. Возраст не ограничен, каждый найдет здесь кое-что для себя.

Разбирая решения многих задач, читатель может задать вопрос: «Почему надо поступать так?» Особенно часто этот вопрос встает при решении задач на угадывание чисел. Мы предвидели такое, поэтому почти всюду видоизменяли условие, т.е. давали возможность войти в задачу еще раз, и в общем виде поясняли решение. Когда задача будет решена, вы, дорогой читатель, получите истинное удовольствие от своей «работы», так как размышление над условием задачи, поиск решения и его реализация обогатят ваш опыт.

Любая книга является собеседником, спутником человека. Надеемся, что наша книга не покажется вам пустой и скучной.

Г. З. Генкин

Введение

I. Счет, мера и число

(Исторические справки)

Вот я бросаю на стол палочку, или спичку, или камешек, или кубик — словом, какой-нибудь предмет и спрашиваю вас: *сколько* предметов я бросил на стол? Вы смотрите и отвечаете:

— *Один* предмет.

Я беру затем и бросаю перед вами целую горсть камешков, или спичек, или иных каких предметов и опять спрашиваю: *сколько* здесь предметов?

Вы отвечаете: *«Много»*! Но меня этот ответ не удовлетворяет. Я хочу знать *точно*, сколько именно предметов лежит передо мной. И тогда вам приходится предметы *сосчитать.*

Вы берете один предмет и говорите: *один;* прикладываете к нему еще один и говорите: *два*; к этим прикладываете еще один и говорите: *три*; к этим прикладываете еще один и говорите: *четыре,* затем *пять, шесть, семь, восемь, девять* и таким образом добираетесь до *десятка...*

Вы считаете предметы *по одному,* или *единицами,* иначе говоря. Но вы знаете также, что можно считать те же предметы парами (по два), тройками (по три), четверками (по четыре) и т.д. Наконец, если предметов много, то можно считать их и *десятками,* совсем так же, как вы считали единицами, т.е. один десяток, два десятка (или двадцать), три десятка (или тридцать) и т.д. Когда у вас набирается *десять десятков,* вы называете это *сотней* и считаете опять сотни, как единицы: сто, два ста (или двести), триста, четыреста и т.д. Так считаете вы, пока не получите *десять сотен,* или *тысячу,* а затем эти тысячи считаете опять, как простые единицы: одна тысяча, две тысячи и т.д.

Итак, чтобы ответить на вопрос, *сколько* предметов, надо эти предметы *сосчитать*. **Счет** же **состоит в последовательном прибавлении к единице еще единицы, да еще единицы, да еще единицы и т.д. до конца, а затем остается *сказать* словами,** чтó вы получили, **или иначе — *назвать результат счета,*** а этот результат и будет не что иное, как *число*. Итак, **число — это результат счета предметов.**

При первых же шагах нашей более или менее сознательной жизни мы учимся считать предметы и мало-помалу вырабатываем в своем уме *представление* о числе как совокупности единиц, независимо от самих предметов, вырабатываем себе понятие о так называемом *отвлеченном числе*. Первое и основное математическое действие состоит, следовательно, в *прикладывании* к единице еще единицы, да еще и т.д. — *в последовательном* сложении, в счете. Значит, счет — это результат последовательного сложения единиц.

Само по себе, как видим, это действие нетрудное. Вся трудность заключается не в том, чтобы прикладывать единицу за единицей, а чтобы полученные от такого прикладывания числа *назвать* или *написать* и запомнить. Вся трудность в том, чтобы найти такой *способ* или *систему* счета, при которой немногими отдельными знаками можно было бы записывать какие угодно числа.

Человечество счастливо и удачно разрешило этот вопрос. Выработана такая система устного и письменного счисления, которая быстро делается понятной каждому ребенку и усваивается им постепенно с самых ранних пор. Выучиться считать и писать числа по нашей так называемой *десятичной системе счисления,* в основании которой лежит число десять, не стоит почти никакого особого труда. Однако прошли тысячи и тысячи лет раньше, чем люди додумались и дошли до того, чему мы теперь можем так быстро и легко обучиться. История того, как люди научились считать и писать числа, — очень любопытная история.

В глубокой древности, на самой ранней заре своей жизни люди считали только с помощью камешков или же делали царапины и зарубки на дереве или камне. Сколько предметов, столько и делалось зарубок. Такие зарубки, относящиеся к наиболее отдаленным векам жизни человека и имеющие несомненное значение числовых заметок, находят и теперь в различных местностях. Это самый простой способ счета, заключающий в себе понятие об образовании числа прибавлением последовательно единицы за единицей.

Не так еще давно на Руси были распространены «бирки». Это не что иное, как деревянные палочки, на которых черточками и крестиками иные неграмотные люди вели свой незамысловатый счет.

Как считали наши отдаленнейшие предки, можно приблизительно судить и на примерах существующих ныне некоторых племен Африки и Австралии, стоящих на очень низкой ступени развития, находящихся, как говорят, в *диком* состоянии. Так, один путешественник рассказывает, что дикари Андаманских островов считают очень просто, но и очень забавно и странно. Чтобы изобразить счет *по одному,* они просто-напросто трут носом о землю столько раз, сколько надо. Если же им надо считать единицами более высокого порядка, то они столько раз, сколько нужно, тянут себя за уши. Как ни прост и ни смешон этот способ счета, он, однако, уже выше, чем тот, где просто складываются камешки или проводятся черточки. Здесь мы видим уже счет единицами **двух различных порядков:** *простыми единицами* — «носовыми», по способу этих дикарей, и *единицами второго порядка,* или разряда, — «ушными».

Древние татары, когда дело шло о числах, сообщались между собой посредством особых палочек *хе-му,* на которых делались условные нарезки. По этим нарезкам каждая орда знала, в какое время она должна выступить в поход, сколько лошадей и людей должно выставить каждое селение.

Обитатели древнего государства Америки *Перу* во времена своих царей-инков для изображения и запоминания чисел имели особые приборчики — *квиппосы.* Это были кольца, к которым прикреплялись веревочки с узелками и палочками разного цвета. Число узелков, их завязывание и развязывание, а также чередование веревочек с палочками позволяли выражать много чисел. У нас до сих пор сохранился обычай завязывать узелок на память.

Но самым ближайшим и самым естественным пособием человеку для счета были, конечно, его пальцы на руках и ногах. И действительно, есть все данные предполагать, что этот пальцевой счет был самым распространенным с глубокой древности у всех почти сделавшихся потом образованными народов. Каждый палец заменял при этом каждый исчисляемый предмет. Такой способ счета наблюдается у диких народов и в наше время, причем следует заметить, что поднятие пальцев вместо того, чтобы назвать *чис-*

ло, есть едва ли не единственный пример, когда *отвлеченное* понятие выражается *жестом.*

Однако человеческий дух ищет своего выражения в слове. Известное количество, известное число предметов он выражает *одним словом.* Такие слова иногда прямо указывают на приемы счета. Так и теперь еще у некоторых народов число *два* обозначается словом «крылья», число *три* — словом «клевер» (трилистник), число *пять* — словом «рука». У древних индейцев в Америке числа 11, 12 и т.д. считались так: «ноги один», «ноги два» (т.е. десять пальцев на ногах да еще один, десять на ногах да еще два и т.д.), а число 20 обозначалось словами «весь человек». В Африке для обозначения больших чисел у иных народов употребляются такие слова, как «куча», «гора» и т.д. Наконец, и у нас в России, когда хотят выразить «много», говорят «гора» или «уйма»: эку «гору», эку «уйму» вывалил, заграбастал, забрал и т.п., а в иных местах до сих пор еще ведется счет на «копы». Причем «копа» яиц, например, значит 60 штук их.

Подобное образование названий чисел иногда отражается даже на изображении их посредством письменных знаков. Обратите внимание на начертание римской цифры пять. Как известно, она пишется так: V и представляет не что иное, как изображение *руки* человека. Две такие руки, сложенные вместе (одна вверху, другая внизу), дают римское изображение числа десять — X.

Теперь появляется вопрос: не имеют ли каких-либо соответствующих, взятых из природы, значений наши названия чисел (один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять), положенные в основу устной системы счисления?

Трудно, даже невозможно ответить на этот вопрос. Можно сказать только одно, что когда развился человеческий язык, то и первые числовые понятия вылились в известные числовые слова. Если же эти слова и имели какое-либо значение, взятое из названий окружающих человека предметов, то это значение давно забыто и утеряно, так как образование числовых понятий и выражающих их слов у современных образованных народов относится к глубочайшей древности. Чтобы судить, как давно это было, достаточно заметить, что названия числительных имен совпадают в языках: санскритском, зендском, персидском, греческом, латинском, кельтском, германском и славянском. Что же это значит? А это значит, что названия главных чисел образовались еще тогда, когда все эти народы составляли одну семью и говорили одним общим (арийским) языком. Это же было много и много тысяч лет тому назад, в *доисторические* времена, потому что за те тысячи лет, о которых сохранились более или менее достоверные *исторические* свидетельства, все перечисленные выше народы уже жили и развивались, живут и развиваются отдельно.

Итак, если когда-либо, в глубине веков, названия чисел и имели какое-либо иное значение, то оно с течением времени утратилось, а остались только слова, дающие *отвлеченное представление* о числе. А как только человек научился отвлеченному счету, т.е. *просто* счету, независимо от тех или других предметов, то это было и первое истинно *математическое* действие человеческого сознания.

Прибавлять по единице да еще по единице, очевидно, можно сколько угодно. Значит, и чисел есть сколько угодно — их, как говорят, *бесконечно много*. И как только человек дошел до понятия о числе, то явилась тотчас задача, как я уже упомянул выше, самого легкого и простого названия и написания любого сколь угодно большого числа. Немногими словами нужно было уметь называть все числа и немногими знаками их писать.

Мы знаем уже, как просто и легко это делается теперь в нашей *десятичной системе* счисления. Однако, чтобы дойти до этой легкости и простоты, опять понадобился длинный ряд веков и тысячелетий. Медленно и с большими обходами достигало человечество цели. И введение в человеческий обиход ныне принятого устного и письменного счисления можно считать происшедшим уже в несомненно исторические времена. Так, *устное* десятичное счисление было известно древним грекам. Но спрашивается, почему же наиболее привилось и распространилось десятичное счисление? Почему мы имеем девять *простых* единиц, а десять их принимаем за новую, высшую единицу — *десяток* и считаем затем десятки, как простые единицы; десять десятков принимаем опять за еще высшую единицу — *сотню* и считаем сотни, как единицы; десять сотен опять принимаем за еще высшую единицу — *тысячу* и считаем тысячи, как простые единицы и т.д.?

Почему в *основу* нашего счета положено число *десять?* Ведь можно, как мы знаем, считать парами, тройками, четверками, пятерками и т.д. Как вы знаете, существует счет «дюжинами», т.е. такой счет, при котором в основании лежит число 12. Что не всегда и всюду число 10 признавалось за основу счета, этому существует много доказательств. Помимо счета «дюжинами» припомните хотя бы русский счет «сорок сороков» или «копами». У других народов есть несомненные остатки такого счета, при котором в основе лежит число 20. Однако все эти системы счета вымерли и вымирают, а торжествует десятичная. Объясняется это прежде всего и единственно устройством наших рук, имеющих в общей сложности 10 пальцев, которые были первыми и главными помощниками человека в выработке им понятия о числе и в развитии устного счета.

Что касается системы письменного счета, т.е. умения изобразить любое число с помощью немногих знаков, то она усовершенствовалась только сравнительно недавно, именно после введения так называемых *арабских* цифр и прибавления к 9 *значащим* цифрам еще незначащей — *нуля*. Этот последний у арабов назывался цефир (зефир), откуда и получалось самое слово «цифра». Саму же систему письменного счисления арабы, по всей вероятности, позаимствовали у индусов или китайцев.

Так медленно и на протяжении многих веков распространялся и утверждался в понятии человечества тот устный и письменный счет, которому нам столь нетрудно научиться нынче в самое непродолжительное время и в самом раннем возрасте. А научившись считать до десятка, нетрудно пойти и далее. Ведь десятки считаются, как простые единицы, и чтобы добраться до сотни, достаточно всего 11 различных слов. Затем сотни опять считаются, как единицы... Так счетом мы получаем всё новые и новые числа.

Но не только от одного *счета* получаются числа. Они получаются еще путем *сравнения* величины предметов. Глядя на окружающий мир, мы скоро замечаем, что одни предметы в нем *больше*, другие *меньше*. Это понятие о величине предметов, о *большем* и *меньшем*, мы выражаем разными словами: выше, ниже, длиннее, короче, шире, уже, толще, тоньше, легче, тяжелее и т.д. Подобные слова не дают, однако, настоящего, точного понятия о *величине* предмета. Чтобы иметь точное понятие об этой *величине*, необходимо этот предмет *сравнить* с другим одинаковым предметом, величину которого мы хорошо знаем. Чтобы знать *точно* неизвестную нам длину, надо сравнить ее с другой длиной, которую мы точно знаем; чтобы узнать величину неизвестной нам площади, надо сравнить ее с известной площадью. Чтобы узнать вес тела, надо сравнить его с известной тяжестью и т.д.

Как узнать точную длину стола, за которым мы сидим? Мы *сравниваем* эту длину с известной длиной, например метра. Мы берем метр и укладываем его вдоль стола. Вот метр поместился раз, да еще один раз, да еще половина его. Мы и говорим: «стол имеет в длину два с половиной метра». Мы сравнили длину стола с длиною метра, иначе говоря, мы *измерили* метром длину стола. Метр есть *единица меры длины* — такая единица меры, о которой мы *должны иметь точное представление* и с которой мы сравниваем все остальные длины. Если нам надо измерить большие расстояния, то вместо метра удобнее взять другую, бóльшую длину — километр, сажень, версту, милю, но о всякой такой длине *мы должны иметь точное понятие*. Только в таком случае можно точно измерить и иметь *настоящее представление* и о другой неизвестной еще длине и выразить эту длину *числом* в единицах известной *меры*.

Итак, измерить — это значит *сравнить* один предмет с другим, однородным ему, но известным предметом. Этот известный предмет, с которым сравнивают другие предметы, называют *мерой*. Есть много различных мер: пространства, времени, веса, скорости, силы и т.д.

В результате каждого измерения получается ***число***! С развитием понятия о числе развивается понятие о пространстве, об окружающем мире!

Человек считал, вычислял, строил и мерил всегда, когда нужно было сделать что-либо долговечное, даже в то время, когда, считая, вычисляя и строя «по пальцам», он не сознавал и не сознает, что работает в области *математики*.

Учитесь считать, мерить и вносить порядок в свою жизнь, начиная с первых ваших шагов. Все остальное дается легко.

II. Роль памяти в математике

Относительно математики в нашем обществе еще до сих пор существуют самые странные предрассудки. Одни говорят, что заниматься математикой могут только исключительные, одаренные особыми способностями умы, другие утверждают, что для этого необходима особая, так сказать, «математическая память» для запоминания формул и т.д. Все подобные толки являются обыкновенно плодом недоразумения, зависящего в значительной степени от того низкого уровня, на котором находится у нас состояние самых элементарных математических знаний и навыков.

Нельзя, конечно, спорить против того, что существуют умы с резко выраженными склонностями к той или иной стороне умственной деятельности. Но точно так же никоим образом нельзя утверждать, что существуют хотя мало-мальски нормальные умы, которые совсем неспособны к восприятию и полному усвоению необходимых математических знаний, хотя бы, скажем, в размерах так называемого «среднего курса». Говорить противное — значит доказывать, что для различных человеческих наук существуют и различные логики, с чем, конечно, вряд ли кто согласится.

Будем справедливы и признаем наконец, что выражение «неспособен к математике» есть прежде всего горький продукт нашего неумения, а, пожалуй, иногда и легкомысленного нежелания поставить обучение математики на должную высоту.

Еще менее можно говорить о необходимости для математики какой-то особой, специальной памяти для запоминания (зазубривания?) каких-то формул или правил, науку сознательной и последовательной логической мысли обращать в какой-то механический бессознательный процесс.

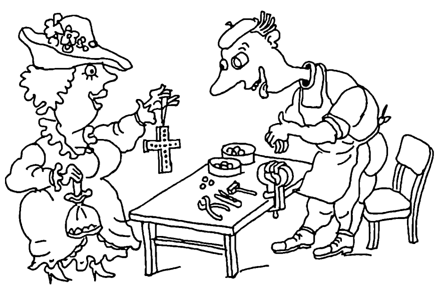
Заучивать в математике никаких формул не следует. Легче припомнить процесс математического мышления, чем голые формулы. **В математике следует помнить не формулы, а процессы мышления.**

Если выражен словами процесс математического мышления, то получение самих формул является уже делом чисто механическим.

Указанный принцип должен в особенности лечь в основание начального образования в области математических знаний. Прежде всего приучайтесь охотно и сознательно *мыслить*. Остальное приложится.

Задачи-шутки и задачи-загадки

Задача 1-я.
Знатная дама
(Счет до девяти)



Одна знатная дама имела крест, составленный из крупных бриллиантов. Сколько всего было этих бриллиантов, она даже не знала, да и не интересовалась этим, потому что занимала ее другая особенность этого креста, а именно: с какого бы из трех верхних концов креста она ни начинала считать камни, когда приходила к основанию креста, всегда получала число девять (рис. 1).

Крест как-то понадобилось отдать в починку. При этом дама рассказала мастеру о чудесной особенности своего креста:

— Видите ли... с какого бы конца я ни начинала счет, всегда получается девять!.. Так я всегда проверяю, все ли камни целы!

— Только так? — спросил мастер.

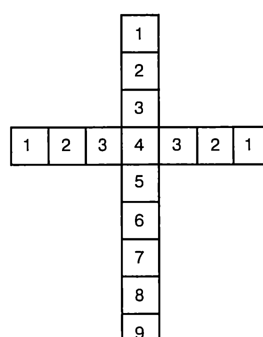


Рис. 1

— Ну да, только так: этого совершенно достаточно. Я и после вашей починки проверю число камней таким же способом.

Мастер оказался недобросовестным: он вынул и оставил у себя два камня, произвел затем починку и возвратил крест даме.

Та пересчитала камни по-своему и нашла, что все камни целы!..

Спрашивается, что сделал мастер, возвративший даме такой крест?

Решение

Нетрудно видеть, что мастер вынул по одному камню из каждой половины поперечной перекладины креста и затем передвинул эту перекладину на один ряд выше. Таким образом, из креста, изображенного на рис. 1, получился крест, изображенный на рис. 2.

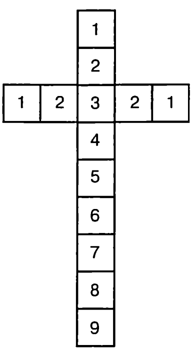


Рис. 2

Дама, пересчитывая в починенном кресте камни «по-своему», т.е. от каждой из трех оконечностей креста, опять насчитала по девять камней и не заметила ошибки.

Совершенно ясно, что проверить ошибку наивной дамы и показать недобросовестность ювелира можно, не имея драгоценных камней. Для этого можете взять или 15 камешков, или 15 кубиков, или 15 карт, или нарезать просто 15 кусочков бумаги. Вы получите фигуры 3, 4, 5 и 6.

Вместо того чтобы стянуть и присвоить себе два камня, мастер мог бы с не меньшим успехом *прибавить* два камня от себя так, чтобы дама этого не заметила при своем способе проверки.

Крест до починки

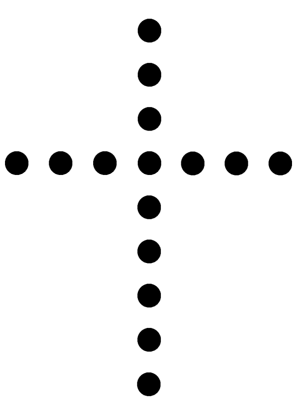


Рис. 3

Крест после починки

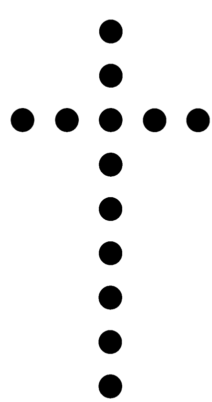


Рис. 4

или то же на картах

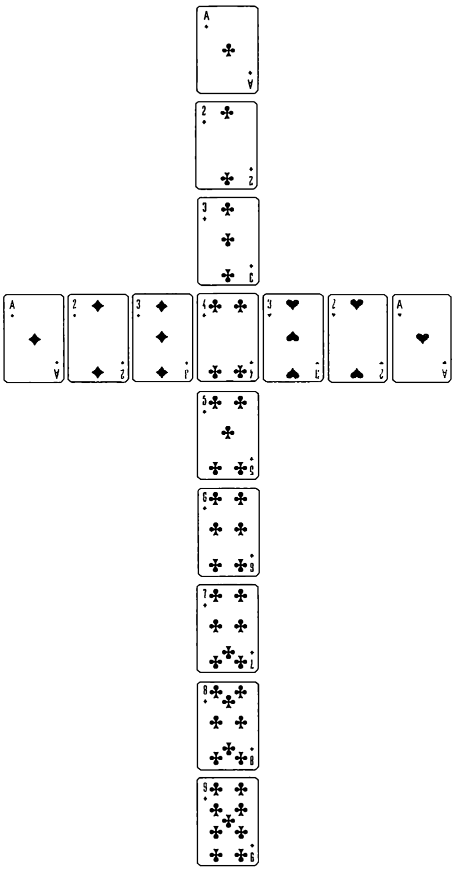


Рис. 5

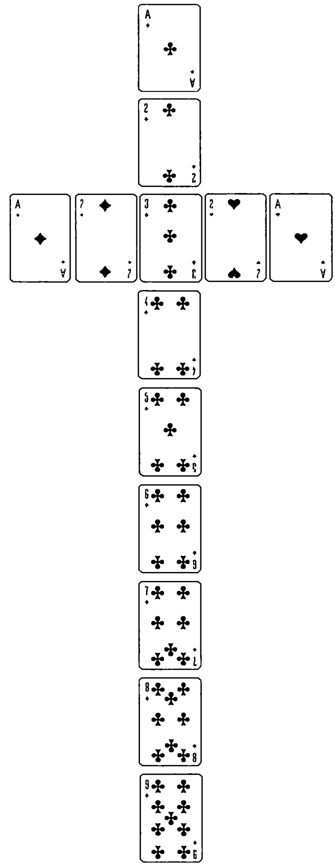


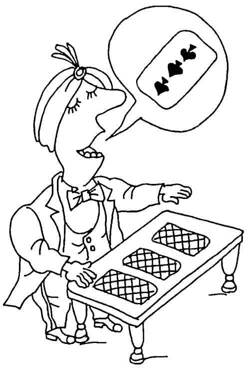
Рис. 6

В таком случае ему пришлось бы поперечник креста, увеличенный двумя камнями, опустить на один ряд вниз.

Мастер-ювелир поступил нехорошо, но слишком наивной оказалась и дама, не сумевшая сделать такой простой проверки.

Задача 2-я. Удивительный отгадчик

Десять карт (или домино) от туза до десяти положены в ряд, начиная справа налево крапом вверх (т.е. вниз «лицом») и положены в последовательном возрастающем порядке, т.е. туз, двойка, тройка и т.д. до десяти. «Отгадчик» объявляет остальным, что он уйдет в



другую комнату или отвернется, а они без него могут переместить справа налево сколько угодно карт, причем единственным условием ставится то, чтобы не изменялось относительное расположение как перемещенных, так и остальных карт. По возвращении отгадчик берется узнать не только число перемещенных карт, но и открыть ту карту, которая укажет (числом очков), сколько перемещено карт.

Решение

Требуемую карту всегда можно открыть. Но для этого не нужно даже «догадки», а достаточно самого простого, не выходящего из предела первого десятка, арифметического расчета.

Разъясним подробно задачу. Для этого перевернем все карты или домино лицом вверх. Справа налево они первоначально лежат в таком порядке, как указано на рис. 7.

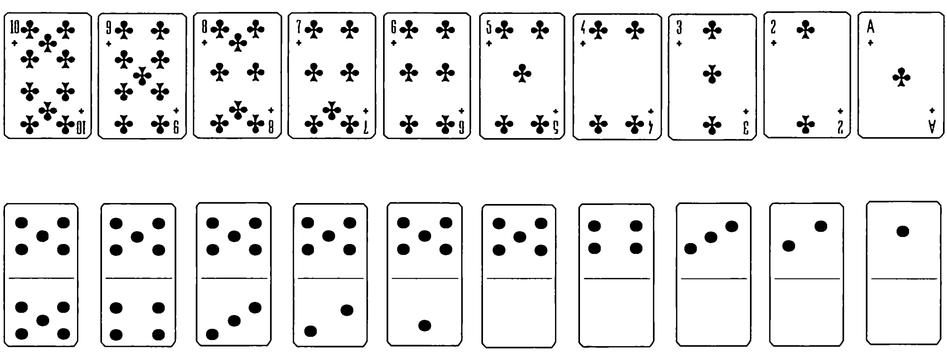


Рис. 7

Воображаемый «маг и чародей» оставляет комнату, а кто желает убедиться «в чудесных» его способностях, перемещает несколько карт справа налево, не изменяя их относительного расположения, а затем двигает все карты в этом новом порядке так, чтобы весь ряд карт занимал прежнее место. Пусть, например, перемещено вначале 4 карты. Тогда новый порядок их будет представлен (рис. 8).

Очевидно, что первая карта (или домино) слева, четверка, — и показывает число перемещенных карт. Поэтому явившийся в комнату «угадчик» открывает первую карту слева, кладет ее на стол и говорит: «Перемещено четыре карты» (или «домино»). Здесь могут быть для большего интереса пущены в ход маленькие невинные хитрости. Хотя дело в том, чтобы посмотреть эту первую карту (или домино) слева, «угадчик» может сделать вид и внушить собеседникам, что он знает число переме-

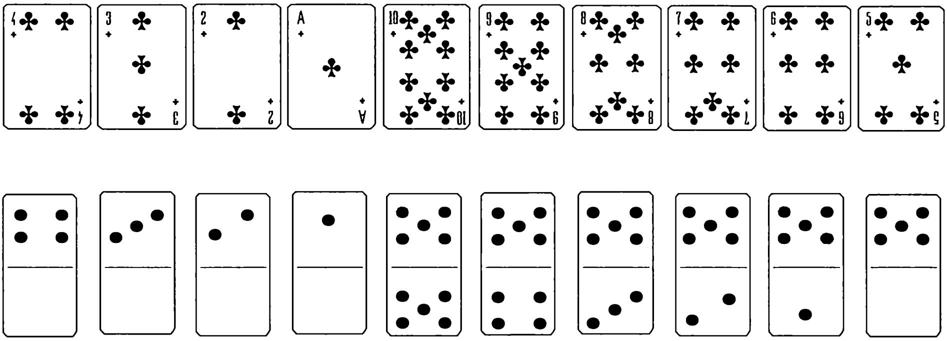


Рис. 8

щенных карт раньше, чем открывает карту, и что открывание четверки есть только добавочное доказательство его всезнания.

Дальше дело пойдет еще удивительнее и занимательнее. Карты остаются в том же порядке, и угадывающий уходит, зная, что последняя карта слева есть четверка. Сколько бы карт в его отсутствие ни переместили (опять справа налево и не изменяя порядка), если он придет и откроет 5-ю карту ($4 + 1 = 5$), считая слева направо, то число очков этой карты покажет ему всегда число перемещенных карт. Так, пусть перемещено во второй его выход справа налево три карты. Тогда получится такой порядок карт (рис. 9):

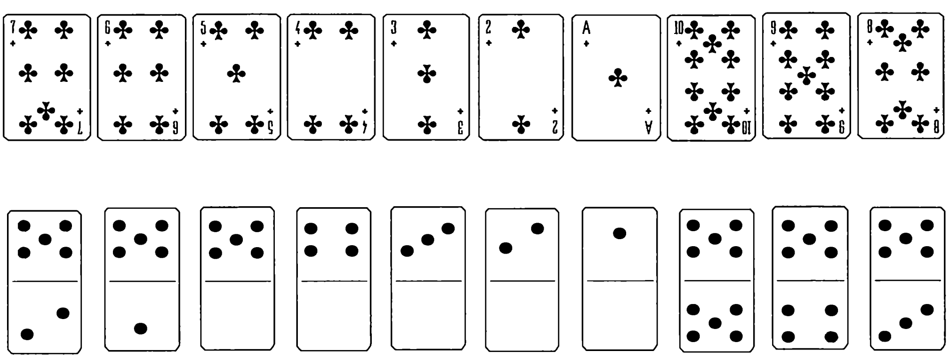


Рис. 9

и пятая карта, считая слева, действительно показывает три очка. Открыв эту тройку и положив ее опять на место, нетрудно уже, не глядя, сообразить, что последняя карта слева теперь будет семерка. Запомнив это, угадывающий опять уходит в другую комнату, предлагая переместить сколько угодно карт справа налево, наперед зная, что при приходе он откроет 8 карту ($7 + 1$), и число очков этой карты ему покажет, сколько карт было перемещено в его отсутствие.

Вообще, если вы знаете число очков последней слева карты (или домино), а это, как видим, нетрудно, то к этому числу надо прибавить единицу, и вы получите то место, считая по порядку слева, на котором лежит карта, указывающая, сколько карт перемещено. Задача эта, как видим, весьма проста, но и весьма эффекта. Разобраться в решении ее не составляет особого труда, и каждый желающий может это сделать с большой пользой для себя.

Задача 3-я. Движением пальца

Один малыш жаловался, что ему очень трудно запомнить таблицу умножения первых десяти чисел на *девять*. Отец его нашел очень легкий способ помочь памяти с помощью пальцев рук. Вот этот способ в пользу и помощь другим:

Положите обе руки рядом на стол и протяните пальцы. Пусть каждый палец по порядку означает соответствующее число: первый слева 1, второй за ним 2, третий 3, четвертый 4 и т.д. до десятого, который означает 10. Требуется теперь умножить любые из первых 10-ти чисел на девять. Для этого вам стоит только, не сдвигая рук со стола, приподнять вверх тот палец, который обозначает множимое. Тогда остальные пальцы, лежащие налево от поднятого пальца, дадут в сумме число десятков, а пальцы направо — число единиц.

Умножить 7 на 9. Кладете обе руки на стол и поднимаете седьмой палец, налево от поднятого пальца лежат 6 пальцев, а направо 3. Значит, результат умножения 7 на 9 равен 63.

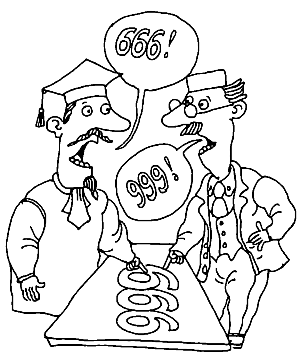
Решение

Это удивительное на первый взгляд механическое умножение тотчас же станет понятным, если рассмотреть столбец таблицы умножения на 9 первых десяти последовательных чисел:

$$1\times9=09$$
$$2\times9=18$$
$$3\times9=27$$
$$4\times9=36$$
$$5\times9=45$$
$$6\times9=54$$
$$7\times9=63$$
$$8\times9=72$$
$$9\times9=81$$
$$10\times9=90$$

Здесь цифры десятков в произведениях идут, последовательно увеличиваясь на единицу: 0, 1, 2, 3, 4, ..., 8, 9, а цифры единиц идут, наоборот, уменьшаясь на единицу: 9, 8, 7, ..., 1, 0. Сумма же цифр единиц и десятков всюду равна 9. Простым поднятием соответствующего пальца мы отмечаем это и... умножаем. Человеческая рука есть одна из первых счетных машин!

Задача 4-я.
Звериное число



Число 666 (звериное) увеличить в полтора раза, не производя над ним никаких арифметических действий.

Решение
Написать это число, а затем повернуть бумажку «вверх ногами» (на 180°). Получится 999 (очевидно, что вместо взятого большого числа можно начать с 6-ти).

Замечание. Подробности о «зверином числе» указаны в нашей первой книге.

Задача 5-я.
Дележ

Разделить 5 яблок между пятью лицами так, чтобы каждый получил по яблоку и одно яблоко осталось в корзине.

Решение
Одно лицо берет яблоко вместе с корзиной.

Задача 6-я. Сколько кошек?

В комнате четыре угла. В каждом углу сидит кошка. Напротив каждой кошки по 3 кошки. На хвосте каждой кошки по одной кошке. Сколько же всего кошек в комнате?

Решение

Иной, пожалуй, начнет вычислять так: 4 кошки в углах, по три кошки против каждой, еще 12 кошек, да на хвосте каждой кошки по кошке, значит, еще 16 кошек. Всего, значит, 32 кошки. Пожалуй, по-своему он будет и прав... Но еще более прав будет тот, кто сразу сообразит, что в комнате есть всего-навсего четыре кошки. Ни более, ни менее.

Задача 7-я. Задача цифр

Написано:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 9 & 9 & 9 \end{array}$$

Из этих 15-ти цифр зачеркните 12 цифр так, чтобы при сложении остальных 3-х незачеркнутых получилось 20.

Решение

Рассматривая написанные числа, как 5 трехзначных слагаемых, для получения требуемого вычеркиваем цифры, как указано ниже. Сложение остальных и дает 20.

$$\begin{array}{rccc} & \cancel{1} & 1 & 1 \\ & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} \\ & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} \\ + & \cancel{7} & \cancel{7} & \cancel{7} \\ & \cancel{9} & \cancel{9} & 9 \\ \hline & & 2 & 0 \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{rccc} & \cancel{1} & 1 & \cancel{1} \\ & \cancel{3} & \cancel{3} & 3 \\ & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} \\ + & \cancel{7} & \cancel{7} & 7 \\ & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} \\ \hline & & 2 & 0 \end{array}$$

Задачу можно всячески видоизменять.

Задача 8-я.
Числовая хитрость

К числу 851 припишите одну, две, три или более цифр, в середину или по краям его — все равно, но так, чтобы получившееся число было меньше 851.

Решение

Цифры, какие вам угодно, приписывайте так, чтобы получить *дробь*, или простую или десятичную — все равно. Видоизменять и решать эту задачу можно всячески.

Задача 9-я.
Урод

Один гражданин написал о себе следующее: «Всех пальцев у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да на обеих ногах десять». Отчего он оказался таким уродом?

Решение

Гражданин просто был или малограмотный, или очень уж рассеянный человек: *в одном месте он не поставил знака препинания* (двух точек). Ему нужно было бы написать так: «Всех пальцев у меня двадцать: пять на одной руке, столько же на другой руке, да на обеих ногах десять». И не было бы никакого недоразумения и вопроса об уродстве.

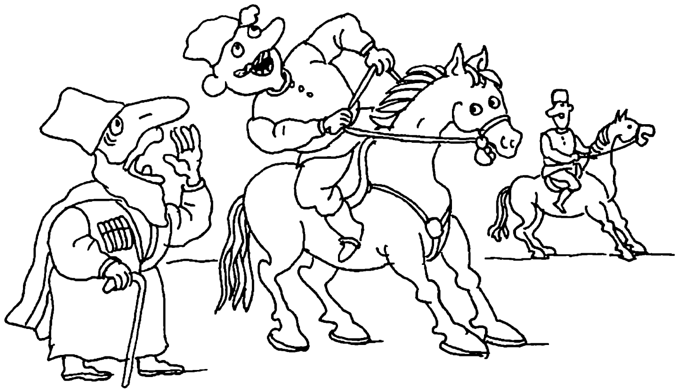
Задача 10-я.
Что сказал старик?

Два молодых казака, оба лихие наездники, часто бились между собой об заклад, кто кого перегонит. Не раз то тот, то другой был победителем — наконец это им надоело.

— Вот что, — сказал Грицко, — давай спорить наоборот. Пусть заклад достанется тому, чей конь придет в назначенное место вторым, а не первым.

— Ладно! — ответил Опанас.

Казаки выехали на своих конях в степь. Зрителей собралось множество: всем хотелось посмотреть на такую диковинку. Один старый казак начал считать, хлопая в ладоши:



— Раз!.. Два!.. Три!..

Спорщики конечно ни с места. Зрители стали смеяться, судить да рядить и порешили, что такой спор невозможен, и что спорщики простоят на месте, как говорится, до скончания века. Тут к толпе подошел седой старик, видавший на своем веку разные виды.

— В чем дело? — спрашивает он.

Ему сказали.

— Эге-ж! — говорит старик. — Вот я им сейчас шепну такое слово, что поскачут, как ошпаренные...

И действительно... Подошел старик к казакам, сказал им что-то, и через полминуты казаки уже неслись по степи во всю прыть, стараясь непременно обогнать друг друга, но заклад все же выигрывал тот, чья лошадь приходила второй.

Что сказал старик?

Решение

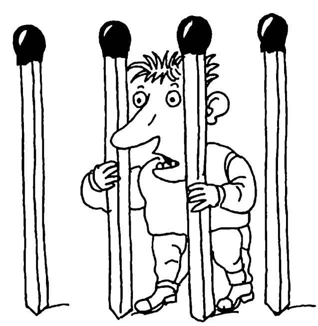
Старик шепнул казакам: «Пересядьте». Те поняли, мигом пересели каждый на лошадь своего противника, и каждый погнал теперь во всю прыть чужую лошадь, на которой он сидел, чтобы собственная его лошадь пришла второй.

Спички и палочки

Запаситесь коробкой спичек или пучком палочек одинаковой длины. С помощью их вы всегда можете придумать ряд самых забавных, остроумных задач, развивающих соображение и смекалку. Вот для примера некоторые из них.

Задача 11-я. Три квадрата

Из 15-ти палочек одинаковой длины (или спичек): 1) построить пять равных прилегающих друг к другу квадратиков; 2) снять три палочки так, чтобы осталось всего три равных квадрата.



Решение

Нижеследующие рисунки вполне выясняют, как решается задача.

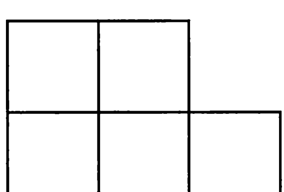


Рис. 10

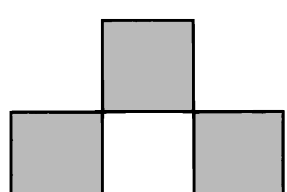


Рис. 11

Задача 12-я.
Два квадрата

Из 24-х равных палочек (или спичек): 1) составить фигуру из 9-ти *соприкасающихся* квадратов; 2) снять затем восемь спичек так, чтобы осталось только два квадрата.

Решение

Как решается первая часть задачи, ясно из приложенного чертежа.

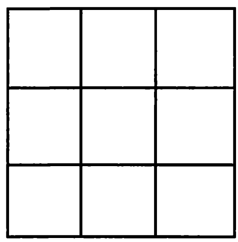


Рис. 12

Как, отняв 8 спичек, получить 2 квадрата, видно из рис. 13 и 14.

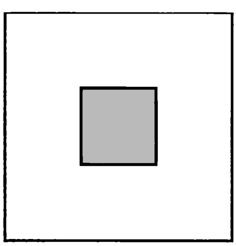


Рис. 13

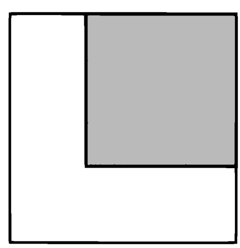


Рис. 14

Задача 13-я.
Четыре треугольника (тетраэдр)

Из 6 спичек или равных палочек составить 4 равных равносторонних треугольника.

В данном случае приходится строить из спичек не плоскую фигуру, а фигуру в *пространстве*.

Решение
Задачу решите, вглядевшись в рис. 15. На ней изображено тело, правильная трехгранная *пирамида*, иначе — тетраэдр, ограниченный равными между собой равносторонними треугольниками.

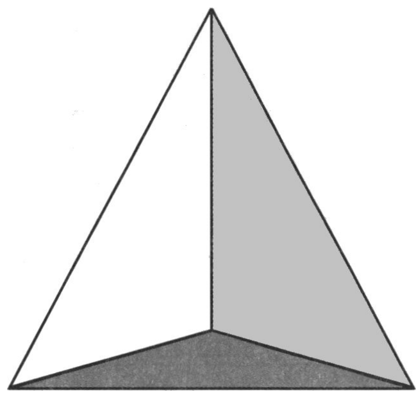
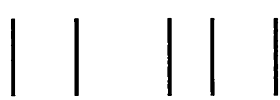


Рис. 15

Положите на стол 3 спички так, чтобы они составили треугольник, затем составьте другие 3 спички так, чтобы они своими концами упирались в углы лежащего на столе треугольника, а верхними концами соединялись вместе над срединой его — и вы исполните то, что требуется задачей.

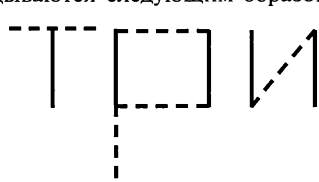
Задача 14-я.
Из пяти сделать три, а из четырех — сто!

Положено пять спичек:



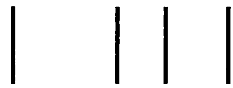
Прибавьте к ним еще пять спичек так, чтобы получилось три!

Решение
Спички прикладываются следующим образом:

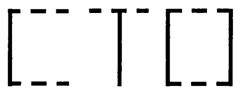


Образуется слово: *три*.

Приложить к 4 спичкам 5 спичек так, чтобы получилось сто!
Четыре спички положены так:



Прибавляя к ним еще 5 положенных поперечно, образуем слово



Подобных задач можно придумать сколько угодно. Полезны они не в математическом, а в общеобразовательном отношении.

Разные задачи

Задача 15-я.
Вместо мелких долей крупные

Разделить поровну 5 пряников между 6 мальчиками, не разрезая ни одного пряника на 6 равных частей.

Решение
Если мы из 5 данных пряников 3 разрежем пополам, то получим 6 равных кусков, каждый из которых и отдадим мальчикам; затем 2 остальных пряника разрежем каждый на 3 равные части и получим опять 6 равных кусков, которые и отдадим мальчикам. Таким образом, задача решена, причем ни одного пряника не пришлось разрезать на 6 частей.

Подобных задач можно, конечно, придумать сколько угодно. Так, например, в данной задаче вместо чисел 5 и 6 могут быть поставлены следующие числа: 7 на 12, 7 на 6, 7 на 10, 9 на 10, 11 на 10, 13 на 10, 5 на 12, 11 на 12, 13 на 12, 9 на 14, 11 на 14, 13 на 14, 15 на 14, 17 на 14 и т.д.

Во всех задачах подобного рода требуется мелкие доли привести в более крупные. Разнообразить их можно всячески, предлагая, например, такие вопросы:

Можно ли 5 листов бумаги разделить между 8-ю учениками, не деля ни одного листа на восьмые доли?

Задача 16-я. Сумма последовательных чисел

Для нижеследующей задачи можно пользоваться обыкновенными игральными или игрушечными картами. Если бы таковых не было, то нетрудно из бумаги нарезать карточки и нарисовать на них карандашом или чернилами черные кружочки. На первой — один кружочек, на второй — 2, на третьей — 3 и т.д. до десяти.

Теперь мы вполне подготовлены для практического решения такой задачи.

Взято 10 карт (или сделанных нами карточек) одной масти от туза до десятки. Вычислить, сколько всего очков будет в этих 10 картах, не прикладывая последовательно очков первой карты ко второй, этих двух — к третьей, этих трех — к четвертой и т.д., т.е. не делая длинного последовательного сложения.

Решение

Дело сводится к тому, чтобы быстро, без последовательного сложения узнать сумму первых 10 чисел (от 1 до 10). Берем 10 карт (например, червей) от туза до десятки и кладем их в ряд (рис. 16): туз, двойка, тройка и т.д. до десятки. Берем затем 10 других карт (например, трефей) и подкладываем их под первым рядом, но только в обратном порядке: десятка, девятка и т.д.

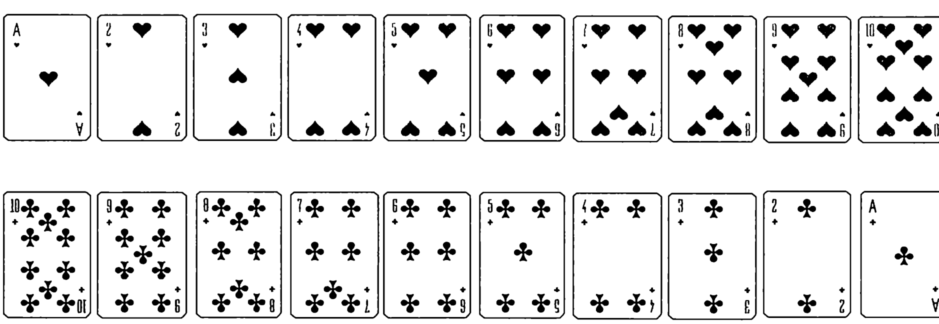


Рис. 16

У нас получается два *ряда* по 10 карт, или 10 *столбцов* по 2 карты. Если сосчитать, сколько очков в каждом столбце, окажется, что в *каждом* столбце по *одиннадцать* очков. А всего в 10 столбцах, или двух рядах карт — десять раз по одиннадцать очков, или 110 очков. Но в обоих длинных рядах, очевидно, по одинаковому числу очков. Значит, сумма всех очков одного ряда равна половине 110, т.е. равна 55. Итак, в десяти картах от туза до десятки 55 очков.

Нетрудно видеть, что подобным же образом, не прибегая к последовательному сложению, мы можем вычислить сумму любого ряда последовательных чисел до любого данного числа. Например, сумма всех чисел от 1 до 100 будет равна половине сто раз взятого числа 101, т.е. 5050.

Задача 17-я. Сбор яблок

На расстоянии аршина одно от другого лежат в ряд 100 яблок, и рядом с первым яблоком стоит корзина. Спрашивается: какой длины путь совершит тот, кто возьмется собрать эти яблоки так, чтобы брать их последовательно одно за другим и каждое отдельно относить в корзину, которая все время стоит на одном и том же месте?

Решение

Нужно подойти к каждому яблоку и возвратиться обратно к корзине. Значит, число пройденных аршинов будет равно удвоенной сумме первых ста чисел, или сто раз взятое число 101, т.е. 10 100 аршинов. Это составляет почти ровно *семь верст!*

Задача 18-я. Бой часов

Сколько ударов в сутки делают часы с боем?

Решение

Наибольшее количество ударов, отбиваемых обыкновенными часами, есть 12. Задача сводится к тому, чтобы узнать сумму всех чисел от 1 до 12. А это будет половина двенадцать раз взятого числа 13. Но в сутках два раза 12 часов, или 24 часа. Значит, часы сделают ровно 12 раз по 13 ударов, т.е. 156 ударов ($12 \times 13 = 156$).

Если же часы отбивают еще и получасы, то сколько всего ударов они делают в сутки?

Задача 19-я. Продажа яблок

Крестьянка принесла на базар для продажи корзину яблок. Первому покупателю она продала половину всех своих яблок и еще пол-яблока; второму — половину остатка и еще пол-яблока, третьему — половину остатка да еще пол-яблока и т.д. Когда же пришел шестой покупатель и купил у нее половину оставшихся яблок и пол-яблока, то оказалось, что у него, как и у остальных покупателей, все яблоки целые и что крестьянка продала все свои яблоки. Сколько яблок она принесла на базар?

Решение

Задача решается тотчас, если сообразить, что последнему (шестому) покупателю досталось одно целое яблоко. Значит, пятому досталось 2 яблока, четвертому — 4, третьему — 8 и т.д. Всего же яблок было

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

Крестьянка принесла на базар 63 яблока.

Задача 20-я. Воришка с яблоками

Воришка залез в чужой сад и набрал яблок. Подкрался сторож, поймал его, сосчитал наворованные яблоки, но ввиду слез и раскаяния воришки говорит:

— Ладно, я отпущу тебя, только с уговором, отдай мне половину всех яблок да еще пол-яблока.

Ни у сторожа, ни у воришки ножа не было, да он и не понадобился. Воришка отдал сторожу столько яблок, сколько тот потребовал, и пустился бежать без оглядки, да на беду наткнулся на другого сторожа. Этот тоже сосчитал яблоки у воришки и говорит:

— Отдай половину да еще пол-яблока.

Пришлось поделиться и с этим сторожем, и опять без ножа.

У самого забора воришку остановил третий сторож. И этот отобрал у него половину яблок да еще пол-яблока. Наконец воришка уже перелез через забор и вздохнул было свободно, как его схватил четвертый сторож.

— Отдавай половину яблок да еще пол-яблока!

Воришка обшарил карманы и нашел только одно яблоко. Нечего делать, — пришлось отдать сторожу последнее яблоко, а самому уйти несолоно хлебавши.

Не сумеете ли узнать, сколько яблок набрал воришка в саду?

Решение

После предыдущей задачи ответить, что воришка набрал 15 яблок, нетрудно.

Задача 21-я.
Каждому свое

Шли два крестьянина, и было у них 3 одинакового веса и стоимости хлеба: у одного 2 хлеба, а у другого 1. Пришло время обедать. Они сели и достали свои хлебы. Тогда к ним подошел еще третий крестьянин и попросил поделиться с ним хлебом, обещая заплатить за свою долю. Ему дали один хлеб, а он уплатил 15 коп. Как должны поделить два первых крестьянина эти деньги?

Решение

Тот, кто отдал свой второй хлеб, очевидно, и берет себе все деньги.

Задача 22-я.
Как поделить?

Два путника сели обедать. У одного было 5 лепешек, а у другого 3. Все лепешки одинаковой стоимости. Подошел к ним третий путник, не имевший чего есть, и предложил пообедать этими лепешками сообща, обещая уплатить им деньгами за ту часть лепешек, которая придется на его долю. Пообедав, он отдал обоим, имевшим лепешки, 8 копеек. Спрашивается: как те два путника должны разделить эти деньги?

Решение

По условию задачи выходит, что все лепешки стоили 24 коп., так как расход каждого путника равен 8 коп. Отсюда следует, что каждая лепешка стоит 3 коп. Итак, тот путник, который дал 5 лепешек, издержал 15 коп., и если вычесть отсюда 8 коп. за лепешки, съеденные им самим, то выходит, что ему нужно из денег третьего путника получить 7 коп. Рассуждая точно так же, находим, что второй путник имел лепешек на 9 коп., и что ему приходится из денег третьего путника получить 1 коп.

Задача 23-я.
За кашу

Два человека варили кашу. Один дал для этого 2 фунта крупы, а другой 3 фунта. Когда каша была готова, подошел третий человек и попросил позволения съесть с ними кашу за плату. После еды он уплатил 5 коп. Как разделили эти деньги варившие кашу?

Решение

Деньги поделены так: один получил 4 коп., а другой 1 коп.

Задача 24-я.
Кто прав?

Два крестьянина, Никита и Павел, работали вместе в лесу и сели завтракать. У Никиты было 4 лепешки, у Павла 7. Тут к крестьянам подошел охотник.

— Вот, братцы, заблудился в лесу, до деревни далеко, а есть смерть хочется: поделитесь со мною хлебом-солью!

— Ну что ж, садись; чем богаты, тем и рады, — сказали Никита и Павел.

11 лепешек были разделены поровну на троих. После завтрака охотник пошарил в карманах, нашел серебряный гривенник и медную копейку и отдал крестьянам:

— Не обессудьте, братцы, больше при себе ничего нет! Поделитесь как знаете!

Охотник ушел, а крестьяне заспорили. Никита говорил:

— По-моему, деньги надо разделить поровну!..

А Павел ему возражал:

— За 11 лепешек 11 копеек. На лепешку приходится по копейке. У тебя было 4 лепешки, тебе 4 копейки, у меня 7 лепешек, мне 7 копеек!..

Кто из них сделал правильный расчет?

Решение

И Никита и Павел делают неправильный расчет. 11 лепешек разделены на троих поровну: значит, каждый съел $^{11}/_3$ (11 третей), т.е. $3\ ^2/_3$ лепешки.

У Павла было 7 лепешек, он съел $3\ ^2/_3$; следовательно, охотнику отдал $3\ ^1/_3$ лепешки, или $^{10}/_3$ (10 третей) лепешки.

Никита из 4-х своих лепешек съел тоже $3\ ^2/_3$; следовательно, охотнику отдал $^1/_3$ (одну треть) лепешки.

Охотник съел 11 третей лепешки и заплатил за них 11 копеек, значит, за каждую треть лепешки он дал по копейке. У Павла он взял 10 третей, у Никиты — одну треть; следовательно, Павел должен взять себе серебряный гривенник, а Никита — медную копейку.

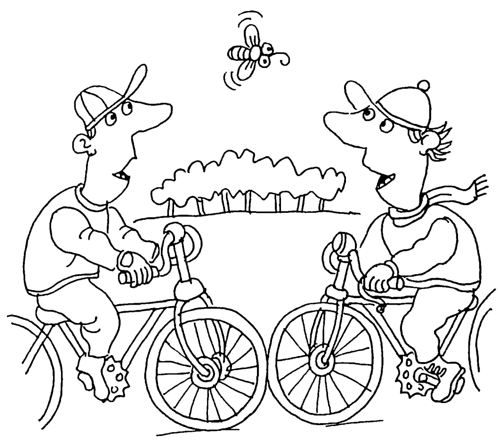
Задача 25-я.
Фальшивая бумажка

Один господин зашел в магазин, чтобы купить себе шляпу. Выбранная им шляпа стоила 10 рублей. Он дал хозяину двадцатипятирублевый кредитный билет и попросил сдачу. У хозяина не было мелких денег. Поэтому он послал данный ему билет для размена в соседний магазин. Там его разменяли. Хозяин, получив мелкие деньги, дал покупателю сдачу, и тот ушел. Спустя некоторое время прибежали из магазина, где производился размен, и заявили, что данный им кредитный билет — фальшивый. Хозяин шляпного магазина взял двадцатипятирублевый фальшивый кредитный билет обратно, уничтожил его и отдал разменявшему магазину 25 рублей настоящими деньгами. Спрашивается: кто сколько потерял при этом денег?

Решение

Потерял только хозяин шляпного магазина, и потерял ровно 25 рублей.

Задача 26-я. Велосипедисты и муха



Два города, *A* и *B*, находятся на расстоянии 300 верст друг от друга. Точно в один день, час, минуту и секунду из этих городов выезжают друг другу навстречу два велосипедиста и мчатся, не останавливаясь, со скоростью 50 верст в час. Но вместе с первым велосипедистом из города *A* вылетает и муха, пролетающая в час 100 верст. Муха обгоняет первого велосипедиста и летит навстречу другому, выехавшему из города *B*. Встретив этого, она тотчас поворачивает назад к велосипедисту *A*. Повстречав его, опять летит обратно навстречу велосипедисту *B* и так повторяет свое летание взад и вперед до той поры, пока велосипедисты не встретились. Тогда она успокоилась и села одному из велосипедистов на шапку. Сколько верст пролетела муха, пока не успокоилась и села?

Решение

Муха, не останавливаясь, летала ровно 3 часа, а следовательно, пролетела ровно 300 верст.

Задача 27-я.
Портной

Портной имеет кусок сукна в 16 аршин, от которого он отрезает ежедневно по 2 аршина. По истечении скольких дней он отрежет последний кусок?

Решение
По истечении 7 дней.

Задача 28-я.
Гусеница

В 6 часов утра в воскресенье гусеница начала всползать на дерево. В течение дня, т.е. до 6 часов вечера, она всползала на высоту 5 аршин, а в течение ночи опускалась на 2 аршина. В какой день и час она поднимется на высоту 9 аршин?

Решение
Часто при решении подобных задач рассуждают так: гусеница в сутки, т.е. в 24 часа, поднимается на 5 аршин без 2. Значит, всего в сутки она поднимается на 3 аршина. Следовательно, на высоту 9 аршин она поднимется по истечении трех суток, т.е. она будет на этой высоте в среду в 6 часов утра.
Но такой ответ очевидно неверен: в конце вторых суток, т.е. во вторник в 6 часов утра, гусеница будет на высоте 6 аршин; но в этот же день, начиная с 6 часов утра, она до 6 часов вечера всползает еще на 5 аршин, т.е. достигает высоты 11 аршин. Следовательно, на высоте 9 аршин она окажется во вторник в 1 час 12 минут пополудни.

Задача 29-я.
Размен

Как разменять один 25-рублевый кредитный билет на 10 кредитных билетов?

Решение
Один 10-рублевый, один 5-рублевый, один 3-рублевый и 7 рублевых:

$$10 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 25.$$

Задача 30-я. То же иными знаками

Написать 100 шестью одинаковыми цифрами.

Решение

$$99\frac{99}{99}.$$

Замечание. Задача, очевидно, может видоизменяться всячески.

Задача 31-я. Шифровка числа «девять»

Написать число 9 посредством десяти различных цифр (девяти значащих и одной незначащей).

Решение

Число 9 может быть представлено в виде сократимой дроби, числитель и знаменатель которой записаны различными цифрами. Дадим 6 таких решений:

$$\frac{97524}{10836},\ \frac{95823}{10647},\ \frac{95742}{10638},\ \frac{75249}{08361},\ \frac{58239}{06471},\ \frac{57429}{06381}.$$

Задача 32-я. Запишем «сто» по-разному

Изобразить число 100 посредством девяти различных значащих цифр.

Решение

Задача имеет много разных решений. Дадим из них такие:

$$91\frac{5742}{638},\ 91\frac{7524}{863},\ 91\frac{5823}{647},\ 91\frac{1578}{263},\ 96\frac{2148}{537},\ 96\frac{1428}{357},\ 96\frac{1752}{438}.$$

Задача 33-я.
Замечательное число

Некоторое число оканчивается на 2. Если же эту его последнюю цифру переставить на первое место, то число это удвоится. Найти это число.

Решение

Так как при перенесении цифры 2 на первое место число удваивается, то предпоследняя цифра его должна быть 4, предшествующая этой должна быть 8, перед этой — 6, перед этой — 3, затем 7, затем 4, затем 9 и т. д. Рассуждая подобным образом, находим, что искомое число есть

105 263 157 894 736 842.

Замечание. Правильнее будет сказать, что искомое число состоит из ряда *«периодов»*, составленных найденным числом.

Дележи при затруднительных обстоятельствах

Задача 34-я.
Дележ между тремя

Три лица должны поделить между собой 21 бочонок, из которых 7 бочонков полных вина, 7 полуполных (полных наполовину) и 7 пустых. Спрашивается: как они могут поделиться так, чтобы каждый имел одинаковое количество вина и одинаковое количество бочонков, причем переливать вино из бочонка в бочонок нельзя?

Решение

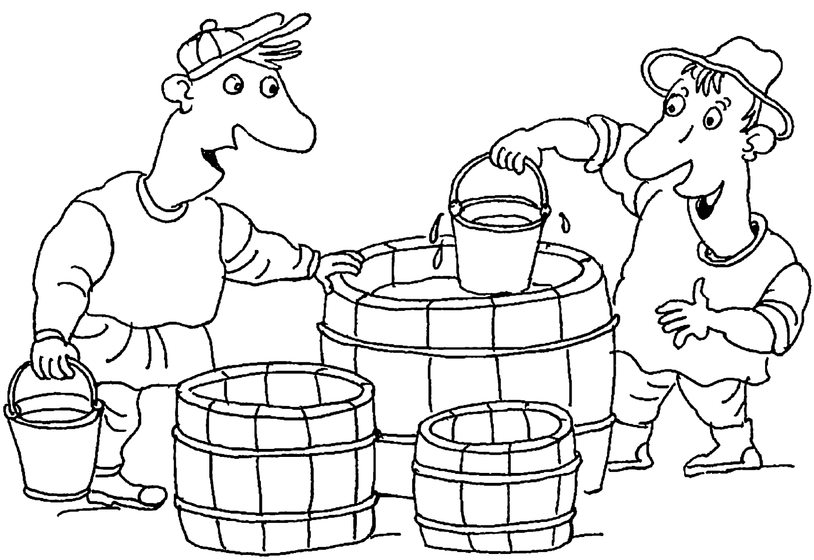
Предполагается, конечно, что все бочонки — полные, полуполные и пустые — равны между собой. Ясно, что каждый должен получить по 7 бочонков. Подсчитаем теперь, сколько же вина должно прийтись на долю каждого. Есть 7 бочонков полных и 7 пустых. Если бы можно было от каждого полного бочонка отлить половину в пустой, то получилось бы 14 полуполных бочонков; прибавляя к ним еще 7 имеющихся полуполных, мы получили бы всего 21 полуполный бочонок. Значит, на долю каждого должно прийтись по *семь* полуполных бочонков вина. Сообразив это, получаем, что, не переливая вина, можно поделить все поровну так:

	Полные бочонки	Полные наполовину бочонки	Пустые бочонки
Первое лицо	2	3	2
Второе	2	3	2
Третье	3	1	3

А вот и другое решение:

Полные бочонки	Полные наполовину бочонки	Пустые бочонки
3	1	3
3	1	3
1	5	1

Задача 35-я.
Дележ между двумя



Двое должны разделить поровну 8 ведер вина, находящегося в восьмиведерном же бочонке. Но у них есть только еще 2 пустых бочонка, в один из которых входит 5 ведер, а в другой — 3 ведра. Спрашивается: как они могут разделить свое вино, пользуясь только этими тремя бочонками?

Решение

Задача эта, как и все ей подобные, имеет 2 решения, и решения эти состоят, очевидно, в том, что из полного восьмиведерного бочонка нужно отливать вино в пустые бочонки, из этих переливать опять и т.д. Дадим эти решения в виде двух таблиц, которые показывают, сколько в каждом бочонке остается вина после каждого переливания.

Решение 1-е

	Бочонки		
	8-ведерн.	5-ведерн.	3-ведерн.
До переливания —	8	0	0
После 1-го пер. —	3	5	0
2-го —	3	2	3
3-го —	6	2	0
4-го —	6	0	2
5-го —	1	5	2
6-го —	1	4	3
7-го —	4	4	0

Решение 2-е

	Бочонки		
	8-ведерн.	5-ведерн.	3-ведерн.
До переливания —	8	0	0
После 1-го пер. —	5	0	3
2-го —	5	3	0
3-го —	2	3	3
4-го —	2	5	1
5-го —	7	0	1
6-го —	7	1	0
7-го —	4	1	3
8-го —	4	4	0

Задача 36-я. На двоих

Полный бочонок содержит 16 ведер, а пустые 11 и 6 ведер.

Решение 1-е

16-вед.	11-вед.	6-вед.
16	0	0
5	11	0
5	5	6
11	5	0
11	0	5
0	11	5
0	10	6
6	10	0
6	4	6
12	4	0
12	0	4
1	11	4
1	9	6

Решение 2-е

16-вед.	11-вед.	6-вед.
16	0	0
10	0	6
10	6	0
4	6	6
4	11	1
15	0	1
15	1	0
9	1	6
9	7	0
3	7	6
3	11	2
14	0	2
14	2	0

7	9	0	8	2	6
7	3	6	8	8	0
13	3	0			
13	0	3			
2	11	3			
2	8	6			
8	8	0			

Задача 37-я.
Опять на двоих

Полный бочонок заключает 42 ведра, а пустые — по 27 и 12 ведер.

Решение 1-е

42-вед.	27-вед.	12-вед.
42	0	0
15	27	0
15	15	12
27	15	0
27	3	12
39	3	0
39	0	3
12	27	3
12	18	12
24	18	0
24	6	12
36	6	0
36	0	6
9	27	6
9	21	12
21	21	0

Решение 2-е

42-вед.	27-вед.	12-вед.
42	0	0
30	0	12
30	12	0
18	12	12
18	24	0
6	24	12
6	27	9
33	0	9
33	9	0
21	9	12
21	21	0

Задача 38-я.
Мужик и черт

Шел мужик и думал: «Эхма! Жизнь моя бедная! Заела нужда совсем! Вон в кармане только несколько грошей медных болтается, да и те сейчас нужно отдать. И как это у других бывает, что на всякие свои деньги они еще деньги получают? Глядишь, на рубль зашибает он два, на два — четыре, на четыре — восемь и все богатеет да богатеет... Вот ежели бы, к примеру, и мне так! Из денег, что у меня в кармане, сделалось бы сейчас вдвое, а через пять минут из этих еще вдвое, да еще через пять минут опять вдвое, и так пошло бы и пошло... Скоро бы богатым сделался... Так нет! Не видать мне такого счастья! Никто не поможет. Эх! Право, хоть бы черт какой помочь захотел, так и то бы я не отказался...»

Только успел это подумать, как глядь, а черт перед ним и стоит.

— Что ж, — говорит, — если хочешь, я тебе помогу. И это совсем нетрудно. Вот видишь этот мост через речку?

— Вижу! — говорит мужик, а сам заробел.

— Ну так стоит тебе перейти только через мост — и у тебя будет вдвое больше денег, чем есть. Перейдешь назад — опять станет вдвое больше, чем было. И каждый раз, как ты будешь переходить мост, у тебя будет ровно вдвое больше денег, чем было до этого перехода.

— Ой ли? — говорит мужик.

— Верное слово! — уверял черт. — Только чур уговор! За то, что я тебе устраиваю такое счастье, ты каждый раз, перейдя через мост, отдавай мне по 24 копейки за добрый совет. Иначе ничего не будет.

— Ну что же, это не беда! — говорит мужик. — Раз деньги все будут удваиваться, так отчего же 24 копейки тебе каждый раз не дать? Ну-ка, попробуем!

Перешел он через мост один раз, сосчитал деньги... Что за диво! Действительно, стало вдвое больше! Бросил он 24 копейки черту и перешел через мост второй раз. Опять денег стало вдвое больше, чем перед этим. Отсчитал он 24 копейки, черту отдал и перешел через мост третий раз. Денег стало снова вдвое больше. Но только и оказалось их ровнехонько 24 копейки, которые по уговору... он должен был отдать черту. Отдал он их и остался без копейки.

Ударил мужик о полы и начал судьбу свою клясть. А черт захохотал и с глаз сгинул.

Сколько же, значит, у мужика сначала денег в кармане было?

Решение

Задача решается очень легко, если только решение ее начать с конца, приняв во внимание, что после третьего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., которые он должен был отдать.

В самом деле, если после последнего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., то, значит, перед этим переходом у него было 12 коп. Но эти 12 коп. получились после того, как он отдал 24 коп.; значит, всего денег у него было 36 коп. Следовательно, второй переход он начал с 18-ю коп., и эти 18 коп. получились у него после того, как он в первый раз перешел мост и отбросил 24 коп. Значит, всего после первого перехода у него было денег 18 да 24 коп., т.е. 42 копейки. Отсюда ясно, что перед тем как первый раз вступить на мост, крестьянин имел 21 копейку собственных денег.

Задача 39-я. Крестьяне и картофель

Шли три крестьянина и зашли на постоялый двор отдохнуть да пообедать. Заказали хозяйке сварить картофель, а сами заснули. Хозяйка сварила картофель, но не стала будить постояльцев, а поставила миску с едой на стол и ушла. Проснулся один крестьянин, увидел картофель и, чтобы не будить товарищей, сосчитал картофель, съел свою долю и снова заснул. Вскоре проснулся другой; ему невдомек было, что один из товарищей уже съел свою долю, поэтому он сосчитал весь оставшийся картофель, съел третью часть и опять заснул. После него проснулся третий; полагая, что он проснулся первый, он сосчитал оставшийся в чашке картофель и съел третью часть. Тут проснулись его товарищи и увидели, что в чашке осталось 8 картофелин. Тогда только объяснилось дело. Разочтите: сколько картофелин подала на стол хозяйка, сколько съел уже и сколько имеет право еще есть каждый, чтобы всем досталось поровну?

Решение

Третий крестьянин оставил для товарищей 8 картофелин, т.е. каждому по 4 штуки. Значит, и сам он съел 4 картофелины. После этого легко сообразить, что второй крестьянин оставил своим товарищам 12 картофелин — по 6 на брата, — значит, и сам съел 6 штук. Отсюда следует, что первый крестьянин оставил товарищам 18 картофелин, — по 9 штук на каждого, значит, и сам съел 9 штук.

Итак, хозяйка подала на стол 27 картофелин, и на долю каждого поэтому приходилось по 9 картофелин. Но первый крестьянин всю свою долю съел. Следовательно, из 8-ми оставшихся картофелин приходится на долю второго 3, а на долю третьего 5 штук.

Задача 40-я. Три игрока

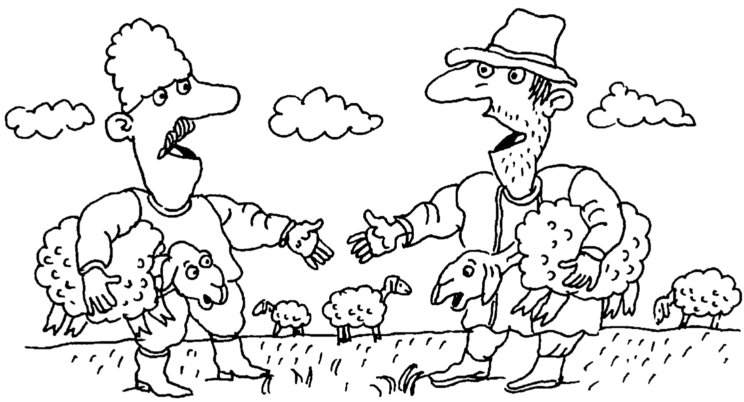
Три игрока условились сыграть три партии так, чтобы проигравший партию додал каждому из остальных двух игроков еще столько денег, сколько у каждого есть. Сыграли три партии, причем оказалось, что проиграл последовательно каждый и после этого у каждого стало по 24 рубля. Сколько рублей было у каждого перед началом игры?

Решение

Третий игрок проиграл третью партию и удвоил количество денег каждого, после чего у всех стало по 24 рубля. Следовательно, после второй игры, проигранной вторым игроком, они имели: первый — 12 руб., второй — 12 руб., третий — 48 руб. Но перед этим первый игрок и третий удвоили свои деньги, так как проиграл второй. Значит, раньше первый имел 6 руб., а третий 24 руб.; второй же игрок отдал из своих денег 30 руб. Итак, после первой игры они имели: первый — 6 руб., второй — 42 руб., третий — 24 руб. Но перед этим проиграл первый, а второй и третий игроки, значит, имели только половины вышеуказанных сумм. Следовательно, первый, проиграв, отдал им из бывших у него денег 33 руб. Итак, перед началом игры игроки имели: первый — 39 руб., второй — 21 руб., третий — 12 руб.

Задача 41-я. Два пастуха

Сошлись два пастуха, Иван и Петр. Иван и говорит Петру: «Отдай-ка ты мне одну овцу, тогда у меня будет овец ровно вдвое больше, чем у тебя!» А Петр ему отвечает: «Нет, лучше ты мне отдай одну овцу, тогда у нас будет овец поровну!» Сколько же было у каждого овец?



Решение

Ясно, что овец больше у первого пастуха, у Ивана. Но на сколько у него больше, чем у Петра? Уясним это.

Если Иван отдаст одну овцу не Петру, а кому-либо другому, то станет ли у обоих пастухов овец поровну? Нет, потому что поровну у них было бы только в том случае, если бы эту овцу получил Петр. Значит, если Иван отдаст одну овцу не Петру, а третьему лицу, то у него все-таки будет больше овец, чем у Петра, но на сколько больше? Ясно, что на одну овцу, потому что, если прибавить теперь к стаду Петра одну овцу, то у обоих станет поровну. Отсюда следует, что пока Иван не отдаст никому одной своей овцы, то у него в стаде будет на *две* овцы больше, чем у Петра.

Теперь примемся за второго пастуха, за Петра. У него, как мы нашли, на две овцы меньше, чем у Ивана. Значит, если Петр отдаст, скажем, одну свою овцу не Ивану, а кому-либо другому, то тогда у Ивана будет на три овцы больше, чем у Петра. Но пусть эту овцу получит именно Иван, а не третье лицо. Ясно, что тогда у него будет на четыре овцы больше, чем осталось у Петра.

Но задача говорит, что у Ивана в этом случае будет ровно *вдвое* больше овец, чем у Петра. Стало быть, *четыре* и есть именно то число овец, которое останется у Петра, если он отдаст одну овцу Ивану, у которого получится *восемь* овец: до предполагаемой отдачи, значит, у Ивана было 7, а у Петра 5 овец.

Задача 42-я. Недоумения торговок

Две торговки сидели на базаре и продавали яблоки. Одна продавала за одну копейку 2 яблока, а другая 3 яблока за 2 копейки.

У каждой в корзине было по 30 яблок, так что первая рассчитывала выручить за свои яблоки 15 копеек, а вторая 20 копеек. Обе вместе, значит, они должны были выручить 35 копеек. Смекнув это, торговки, чтобы не ссориться да не перебивать друг у друга покупателей, решили сложить свои яблоки вместе и продавать их сообща, причем они рассуждали так: «Если я продаю пару яблок за копейку, а ты — 3 яблока за 2 копейки, то, чтобы выручить свои деньги, надо нам, значит, продавать *пять* яблок за *три* копейки!»

Сказано — сделано. Сложили торговки свои яблоки вместе (получилось всего 60 яблок) и начали продавать по 3 копейки 5 яблок.

Распродали и удивились: оказалось, что за свои яблоки они выручили 36 копеек, т.е. на копейку больше, чем думали выручить! Торговки задумались: откуда взялась *«лишняя»* копейка и кому из них следует ее получить? Да и как вообще им поделить теперь все вырученные деньги?

И в самом деле, как это вышло?

Пока эти две торговки разбирались в своей неожиданной прибыли, две другие, прослышав об этом, тоже решили заработать лишнюю копейку.

У каждой из них было тоже по 30 яблок, но продавали они так: первая давала за одну копейку пару яблок, а вторая за копейку же давала 3 яблока. Первая после продажи должна была, значит, выручить 15 копеек, а вторая — 10 копеек; обе же вместе выручали, следовательно, 25 копеек. Они и порешили продавать свои яблоки сообща, рассуждая совсем так, как и те две первые торговки: если, мол, я продаю за одну копейку пару яблок, а ты за копейку продаешь 3 яблока, то значит, чтобы выручить свои деньги, нам нужно каждые *пять* яблок продавать за 2 копейки. Сложили они яблоки вместе, распродали их по 2 копейки за каждые 5 штук, и вдруг оказалось, что они выручили всего 24 копейки, значит недовыручили целую копейку.

Задумались и эти торговки: как же это могло случиться и кому из них придется этой копейкой поплатиться?

Решение

Недоумения торговок разрешаются очень быстро, если сообразить, что, сложив свои яблоки вместе и начав их продавать сообща, они, сами того не замечая, продавали их уже по другой цене, чем раньше.

Возьмем для примера двух последних торговок и рассмотрим, что они в сущности сделали.

Пока первая и вторая думали продавать свои яблоки отдельно, цена одного яблока у первой была полкопейки, а у второй треть копейки. Когда же они сложились и начали продавать каждые 5 яблок по 2 копейки, то цена каждого яблока стала уже $\frac{2}{5}$ копейки.

Значит, первая торговка все свои яблоки продала не по полкопейки за штуку, а по $\frac{1}{10}$ копейки и на каждом яблоке теряла, значит, по $(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10})$, а на всех тридцати яблоках она потеряла 3 коп.

Вторая же торговка, наоборот, вошедши в компанию, выигрывала на каждом яблоке по $\frac{1}{16}$ копейки $(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15})$, а на всех 30 яблоках выиграла, значит, 2 коп.

Первая потеряла 3 копейки, а вторая выиграла всего 2. В общем, все-таки копейка потеряна.

Путем подобных же рассуждений легко узнать, почему у первых двух товарок оказалась «лишняя» копейка.

А как теперь они должны поделить вырученные деньги, рассудите-ка сами на основании предыдущих задач, где говорилось о правильных дележах денег.

Задача 43-я.
Как гусь с аистом задачу решали

Летит стая гусей, а навстречу ей летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» А передний старый гусь ему и отвечает: «Нет, нас не сто гусей! Вот если б нас было еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты, гусь, — то было бы сто гусей, а теперь... Вот и рассчитай-ка, сколько нас».

Полетел одинокий гусь дальше и задумался. В самом деле, сколько же товарищей-гусей он встретил? Думал он, думал и с какой стороны ни принимался — никак не мог этой задачи решить. Вот увидел гусь на берегу пруда аиста — ходит длинноногий и лягушек ищет. Аист птица важная и пользуется среди других птиц славой математика: по целым часам иногда неподвижно на одной ноге стоит и все думает — видно, задачи решает. Обрадовался гусь, слетел в пруд, подплыл к аисту и рассказал ему, как он стаю товарищей встретил и какую ему гусь-поводырь загадку задал, а он никак этой задачи решить не может.

— Гм!.. — откашлялся аист. — Попробуем решить. Только будь внимателен и старайся понять! Слышишь?

— Слушаю и постараюсь! — ответил гусь.

— Ну вот. Как тебе сказали? Если б к встречным гусям прибавить еще столько, да еще полстолько, да четверть столько, да тебя, гуся, то было бы сто? Так?

— Так! — ответил гусь.

— Теперь смотри, — сказал аист. — Вот что я тебе начерчу здесь, на прибрежном песке.

Аист согнул шею и клювом провел черту, рядом такую же черту, потом половину такой черты, затем четверть черты да еще маленькую черточку, почти точку.

Получилось следующее:

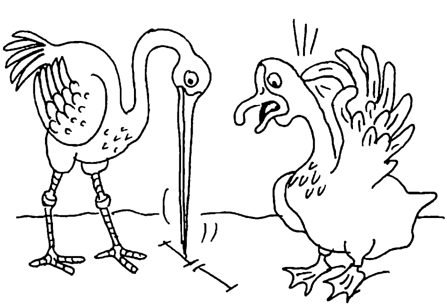
Гусь подплыл к самому берегу, вышел, переваливаясь, на песок, смотрел, но ничего не понимал.

— Понимаешь? — спросил аист.

— Нет еще! — ответил уныло гусь.

— Эх ты! Ну, вот смотри: как тебе сказали, — стая, да еще стая, да половина стаи, да четверть стаи, да ты, гусь, — так я и нарисовал: черту, да еще черту, да полчерты, да четверть этой черты, да еще маленькую черточку, то есть тебя. Понял?

— Понял! — весело проговорил гусь.



— Если к встреченной стае прибавить еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, да тебя, гуся, то сколько получилось?

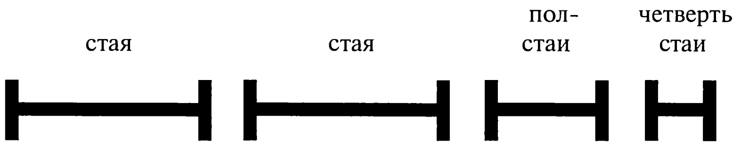
— Сто гусей!

— А без тебя сколько, значит, будет?

— Девяносто девять.

— Хорошо! Откинем на нашем чертеже черточку, изображающую тебя, гуся, и обозначим, что остается 99 гусей.

Аист заклевал носом и изобразил на песке:



— Теперь смекни-ка, — продолжал аист, — четверть стаи да полстаи — сколько это будет четвертей?

Гусь задумался, посмотрел на линии на песке и сказал:

— Линия, изображающая полстаи, вдвое больше, чем линия четверти стаи, то есть в половине заключается две четверти. Значит, половина да четверть стаи — это все равно что три четверти стаи.

— Молодец! — похвалил гуся аист. — Ну а в *целой* стае сколько четвертей?

— Конечно, четыре! — ответил гусь.

— Так! Но мы имеем здесь стаю, да еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, и это составит 99 гусей. Значит, если перевести все на четверти, то сколько всего четвертей будет?

Гусь подумал и ответил:

— Стая — это все равно что 4 четверти стаи, да еще стая — еще 4 четверти стаи, всего 8 четвертей; да в половине стаи 2 четверти, всего 10 четвертей; да еще четверть стаи — всего 11 четвертей стаи, и это составит 99 гусей.

— Так! — сказал аист. — Теперь скажи, что же ты в конце концов получил?

— Я получил, — ответил гусь, — что в 11 четвертях встреченной стаи заключается 99 гусей.

— А значит, в одной четверти стаи сколько гусей?

Гусь поделил 99 на 11 и ответил:

— В четверти стаи — 9 гусей.

— Ну а в целой стае сколько?

— В стае заключается 4 четверти... Я встретил 36 гусей! — радостно воскликнул гусь.

— Вот то-то и оно! — важно промолвил аист. — Сам небось не мог дойти!.. Эх ты... гусь!

Скажем прямо, дорогой читатель, что и аист почти такой же математик, как и гусь.

Без птичьей математики задачу решаем, например, так:

1 — это вся стая,

$\frac{1}{2}$ — это полстаи,

$\frac{1}{4}$ — это четверть стаи,

тогда $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ (сумма в четвертых долях) составляют 100 — 1 гусей. Т.е. 11 четвертых долей стаи приходится на 99 гусей. Значит, четверть стаи это 9 гусей, а всего в стае 36 гусей.

Но еще проще она решается, если число гусей в стае считать через X. Тогда:

$$x+x+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{4}x+1=100.$$

Отсюда:

$$\frac{11}{4}x=99 \text{ и } x=36.$$

Задача 44-я.
Сколько было?

Бедная женщина несла для продажи корзину яиц. Встретившийся прохожий по неосторожности так толкнул ее, что корзина упала на землю и все яйца разбились. Прохожий захотел уплатить женщине стоимость разбитых яиц и спросил, сколько их всего было. «Я не помню этого, — сказала женщина, — знаю хорошо, что когда я перекладывала яйца по 2, то оставалось одно яйцо. Точно так же всегда оставалось по одному яйцу, когда я перекладывала их по 3, по 4, по 5 и по 6. Когда же я перекладывала их по 7, то не оставалось ни одного яйца». Спрашивается: сколько было яиц?

Решение

Задача сводится к нахождению такого числа, которое делится нацело (т.е. *без остатка*) на 7, а при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает в остатке 1. Наименьшее число, которое делится без остатка на числа 2, 3, 4, 5 и 6 (*наименьшее кратное* этих чисел), есть 60. Нужно, значит, найти такое число, которое делилось бы на 7 нацело и было бы вместе с тем на одну единицу больше числа, делящегося на 60. Такое число можно найти путем последовательных попыток: 60, деленное на 7, дает в остатке 4; следовательно, число 2×60 дает в остатке единицу ($2 \times 4 = 8$; $8 - 7 = 1$).

Значит 2×60 = числу кратному $7 + 1$, откуда следует, что $(7 \times 60 - 2 \times 60) + 1$ = числу кратному 7, т.е. $5 \times 60 + 1$ = числу кратному 7. $5 \times 60 + 1 = 301$.

Итак, наименьшее *число яиц, которое было в корзине у женщины, есть 301.*

Задача 45-я. Найти число

Найти число, которое, будучи разделено на 2, дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 6 дает в остатке 5, но на 7 это число делится нацело.

Решение

Решение сводится к предыдущему, если сообразить, что число кратное 6 да еще 5 есть в то же время число кратное 6, без единицы, число кратное 5 да еще 4 есть в то же время число кратное 5 без единицы и т.д.

Итак, нужно для данного случая, чтобы удовлетворялось равенство:

Число кратное 7 = числу кратному 60, без 1; или: число кратное 60 = числу кратному $7 + 1$.

Число *120* есть наименьшее, решающее задачу.

Задача решается подобным же путем и в том случае, когда разница между каждым делителем и соответствующим остатком есть число отличное от единицы.

Задача 46-я. Часы заведены верно!

У меня нет карманных часов, а только стенные, которые остановились. Я отправляюсь к своему знакомому, у которого часы идут верно, просиживаю у него некоторое время и, возвратившись домой, ставлю свои часы верно. Каким образом я мог это сделать, если предварительно мне не было известно, сколько времени занимает дорога от меня до моего знакомого?

Решение

Вопрос сводится к тому, чтобы знать точное время по возвращении домой. Для этой цели я завожу свои часы и перед уходом замечаю их показание, которое, положим, равно a. Придя к знакомому, немедленно справляюсь у него о времени, и пусть его часы показывают b. Перед уходом от знакомого опять замечаю время по его часам, которые на этот раз показывают c. Придя домой, я немедленно замечаю, что мои часы показывают d. По этим данным легко определяется искомое показание часов. Разность d — а покажет время моего отсутствия из дому. Разность $c - b$ есть время, проведенное мною у знакомого. Разность $(d - a) - (c - b)$, полученная от вычитания второго времени из первого, даст время, проведенное мною в дороге. Половина этого времени $\frac{b+d-a-c}{2}$ употреблена мною на обратную дорогу. Прибавив эту половину к c, получим $\frac{b+c+d-a}{2}$; это и будет точное показание часов при моем возвращении домой.

Задача 47-я. Восстановление записи

При проверке памятной книжки умершего фабриканта найдена была следующая запись: «За продажу ... кусков сукна по 49 руб. 36 коп. каждый кусок, получено ... 7 руб. 28 коп.» Эта запись оказалась залитой в некоторых местах чернилами так, что нельзя было разобрать ни числа проданных кусков, ни первых трех цифр полученной суммы. Спрашивается: можно ли по сохранившимся данным узнать число проданных кусков и всю вырученную сумму?

Решение

Задачу можно решить двумя приемами.

1) По условию, вся вырученная сумма, очевидно, не превышает 10 000 руб. Значит, число проданных кусков не более 203.

Последняя цифра неизвестного числа кусков должна быть такова, чтобы она, будучи умножена на 6, давала бы произведение, оканчивающееся на 8; такая цифра может быть 3 или 8.

Положим, что последняя цифра неизвестного числа кусков равна 3. Стоимость трех кусков равна 14 808 коп. Вычитая это число из вырученной суммы, мы должны получить число, оканчивающееся на 920.

Предполагая, что последняя цифра равна 3, вторая от конца цифра может быть или 2, или 7, так как только эти цифры, будучи умножены на 6, дают произведения, оканчивающиеся на 2.

Положим, что неизвестное число оканчивается на 23. Вычитая стоимость 23 кусков из всей вырученной суммы, получим число, оканчивающееся на 200. Третья цифра может быть или 2, или 7; но так как неизвестное число не превосходит 203, то наше предположение невозможно.

Если бы мы предположили, что неизвестное число оканчивается на 73, то третья цифра была бы равна 4 или 9; такое предположение опять невозможно.

Итак, последняя цифра не может быть 3. Остается предположить, что она равна 8. Рассуждения, подобные предыдущим, покажут нам, что вторая цифра может быть или 4, или 9; из этих двух предположений возможно только второе.

Задача имеет одно решение: число проданных кусков равно 98, вся вырученная сумма равна *4837 руб. 28 коп.*

Задача 48-я.
За грибами

Дедушка пошел с четырьмя своими внучатами в лес за грибами. В лесу разошлись в разные стороны и стали искать грибы. Через полчаса дедушка стал под дерево отдохнуть и пересчитал свои грибы: их оказалось 45 штук. Тут прибежали к нему внучата — все с пустыми руками: ни один ничего не нашел.

— Дедушка, — просит один внук, — дай мне своих грибов, чтобы кузовок не был пустой. Авось с твоей легкой руки много грибов наберу.

— И мне, дедушка!

— И мне дай!

Дед дал каждому и раздал таким образом детям свои грибы. Все снова разбрелись в разные стороны, и случилось следующее. Один мальчик нашел еще 2 гриба, другой 2 потерял, третий нашел еще столько, сколько получил от деда, а четвертый потерял половину полученных от деда. Когда дети пришли домой и подсчитали свои грибы, то оказалось у всех поровну.

Сколько каждый получил от дедушки грибов и сколько было у каждого, когда они пришли домой?

Решение

Нетрудно увидеть, что третьему внуку дед дал грибов меньше всего, потому что третий внук должен был набрать еще столько же грибов, чтобы сравняться с братьями. Для простоты скажем, что третьему внуку дед дал грибов одну горсть.

Сколько же он дал таких же горстей четвертому?

Третий внук принес домой 2 горсти, потому что сам еще нашел столько же грибов, сколько дал ему дед. Четвертый внук принес домой ровно столько же грибов, сколько и третий: значит, тоже 2 горсти; но он половину своих грибов растерял по дороге: стало быть, дед дал ему 4 горсти. Первый внук принес домой 2 горсти; но из них 2 гриба он сам нашел; значит, ему дед дал 2 горсти без 2 грибов. Второй внук принес домой 2 горсти, да по дороге он потерял 2 гриба; стало быть, дед дал ему 2 горсти, да еще два гриба.

Итак, дед раздал внукам 1 горсть, да 4 горсти, да 2 горсти без 2-х грибов, да 2 горсти с 2-мя грибами, итого 9 полных горстей (в 2-х горстях не хватало 2-х грибов, зато в 2-х других горстях были лишние 2 гриба). В 9 равных горстях было 45 грибов, значит, в каждой горсти $45 : 9 = 5$ грибов.

Третьему внуку дед дал 1 горсть, т.е. 5 грибов; четвертому 4 горсти, т.е. $5 \times 4 = 20$ грибов; первому 2 горсти без 2-х грибов, т.е. $(5 \times 2) - 2 = 8$ грибов; второму 2 горсти с 2-мя грибами, т.е. $(5 \times 2) + 2 = 12$ грибов.

Задача 49-я. Находка

Четверо крестьян: Сидор, Карп, Пахом и Фока, возвращались из города и говорили, что ничего не заработали.

— Эх, — сказал Сидор, — если бы мне найти кошель с деньгами, я бы взял себе только третью часть, а остальные с кошелем даже отдал бы вам.

— А я, — молвил Карп, — поделил бы между всеми нами поровну.

— Я доволен был бы пятой всего частью, — отозвался Пахом.

— С меня же довольно бы и шестой части, — сказал Фока. — Да что толковать... Статочное ли дело — деньги на дороге найти! Кто это их для нас бросит?

Вдруг и на самом деле видят на дороге кошелек. Подняли его и порешили поделить деньги так, как каждый только что говорил: т.е. Сидор получит треть, Карп — четверть, Пахом — пятую, а Фока — шестую часть найденных денег.

Открыли кошелек и нашли в нем 8 кредитных билетов: один в 3 руб., а остальные рублевые, пятирублевые и десятирублевые. Но ни один крестьянин не мог взять своей части без размена. Поэтому решили ждать, не разменяет ли кто из проезжих. Скачет верховой; крестьяне останавливают его:

— Так и так, — рассказывают они, — нашли кошелек с деньгами, деньги хотим разделить так-то. Будь такой добрый, разменяй нам рубль!

— Рубль я вам не разменяю, а давайте мне кошелек с деньгами: я положу туда свою рублевку и из всех денег выдам каждому его долю, а кошелек мне.

Крестьяне с радостью согласились. Верховой сложил все деньги, выдал первому $^1/_3$, второму $^1/_4$, третьему $^1/_5$, четвертому $^1/_6$ всех денег, а кошелек спрятал к себе за пазуху.

— Ну, спасибо вам, братцы, большое и вам хорошо и мне хорошо! — и ускакал.

Задумались мужики:

— За что же он нас поблагодарил?

— Ребята, сколько у нас всего бумажек? — спросил Карп.

Сосчитали — оказалось 8.

— А где же трехрублевка? У кого она?

— Ни у кого нет!

— Как же так, ребята? Верховой-то, значит, надул нас? Давай считать, на сколько он обидел каждого.

Прикинули в уме.

— Нет, братцы, я получил больше, чем мне следовало! — сказал Сидор.

— И я получил на четвертак больше, — сказал Карп.

— Как же так? Всем дал больше, чем нужно, а трехрублевку увез! Должно быть, это леший! Ишь ты, как ловко нас обошел! — решили крестьяне.

Сколько денег нашли крестьяне? Обманул ли их верховой? Какие бумажки дал он каждому?

Решение

Крестьяне не умели правильно сложить дробей. В самом деле, сложите все части, на которые крестьяне хотели поделить находку:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}.$$

Значит, они все вместе хотели получить меньше, чем нашли (нашли они $\frac{60}{60}$). Найденные деньги вместе с деньгами верхового были разделены на 60 частей, из них $\frac{57}{60}$ отданы крестьянам, а $\frac{3}{60}$ или $\frac{1}{20}$ остались у верхового. Но мы знаем, что у верхового осталось 3 рубля. Значит, $\frac{1}{20}$ всех денег составляет 3 рубля; следовательно, всех денег было $3 \times 20 = 60$ руб. Карп получил из этих денег $^1/_4$ часть, т.е. 15 руб.; но, если бы верховой не приложил своих денег, Карп должен был бы получить на четвертак меньше, т.е. 15 р. — 25 к. = 14 р. 75 к.: такова $^1/_4$ часть найденных денег. Отсюда заключаем, что найдено было 14 р. 75 к. $\times 4 = 59$ р. С деньгами верхового стало 60 р.: значит, верховой приложил 1 рубль. Приложил он рубль, а увез 3 рубля: 2 рубля выгадал себе за умный дележ.

Какие же кредитки были найдены в кошельке?

Пять бумажек по 10 руб., одна в 5 руб., одна в 3 и одна в 1 рубль. Сидору верховой дал 20 руб.: 2 десятирублевки; Карпу — 15 руб., десятирублевку и пятирублевку; Пахому — 12 руб., десятирублевку и две рублевки (одну — найденную, другую — свою); Фоке — последнюю десятирублевку, а трехрублевку взял себе.

Переправы

Задача 50-я.
Через ров

Четырехугольное поле окружено рвом, ширина которого всюду одинакова. Даны две доски, длина которых равна точно ширине рва, и требуется с помощью этих досок устроить переход через ров.

Решение
Стоит взглянуть на прилагаемый ниже рисунок (рис. 17), чтобы понять, как решается задача.

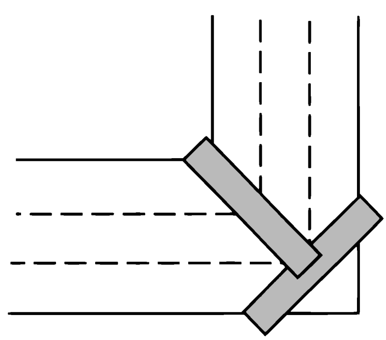


Рис. 17

Что касается математического доказательства возможности подобной переправы, то оно следует из неравенства

$$2\sqrt{2} < 3,$$

и делается очевидным, если принять ширину рва равной трем каким-либо единицам.

Задача 51-я. Отряд солдат

Отряд солдат подходит к реке, через которую необходимо переправиться. Но мост сломан, а река глубока. Как быть? Вдруг капитан замечает у берега двух мальчиков, которые забавляются в лодке. Но эта последняя так мала, что на ней может переправиться только один солдат или только двое мальчиков — не больше! Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке. Как это было сделано?

Решение

Дети переехали реку. Один из мальчиков остался на берегу, а другой пригнал лодку к солдатам и вылез. Тогда сел солдат и переправился на другой берег. Мальчик, бывший там, пригнал обратно лодку к солдатам, взял своего товарища мальчика, отвез на другой берег и снова доставил лодку обратно, после чего вылез, а в нее сел другой солдат и переправился...

Таким образом, после каждых двух перегонов лодки — через реку и обратно — переправлялся один солдат. Так повторялось столько раз, сколько было солдат и офицеров.

Задача 52-я. Волк, коза и капуста

Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или один волк, или одна коза, или только капуста. Но если оставить волка с козой, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как перевез свой груз крестьянин?

Решение

Ясно, что приходится начать с козы. Крестьянин, перевезши козу, возвращается и берет волка, которого перевозит на другой берег, где его и оставляет, но зато берет и везет обратно на первый берег козу. Здесь он оставляет ее и перевозит к волку капусту. Вслед за тем, возвратившись, он перевозит козу.

Задача 53-я. Мужья и жены

Три мужа со своими женами желают переправиться с одного берега реки на другой, но в их распоряжении есть лодка без гребца, поднимающая только двух человек. Дело осложняется еще тем, что ни один муж не желает, чтобы его жена находилась без него в обществе одного или двух других мужей. Как переправились при соблюдении этих условий все 6 человек?

Решение

Задача эта имеет за собой уже почтенную историческую давность, и решение ее для классиков может быть выражено следующими латинскими стихами:

It duplex mulier, redit una vehitque manentem;
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit, redeunt bini; mulierque sororem
Advehit; ad propriam sive maritus vadit.

Обозначим большими буквами *A, B* и *C* мужей, а их жен соответственно малыми буквами *a, в* и *c*. Имеем вначале:

Первый берег			Второй берег		
A	*B*	*C*	.	.	.
a	*b*	*c*	.	.	.

I. — Сначала отправляются две женщины.

C	*B*	*A*	.	.	.
c	.	.	.	*b*	*a*

II. — Возвращается одна из женщин и перевозит третью.

C	*B*	*A*	.	.	.
.	.	.	*c*	*b*	*a*

III. — Возвращается одна из женщин и остается со своим мужем. Два других мужа отправляются к своим женам.

C	.	.	.	*B*	*A*
c	.	.	.	*b*	*a*

IV. — Один из мужей возвращается со своей женой, оставляет ее и забирает с собой мужа.

.	.	.	*C*	*B*	*A*
c	*b*	.	.	.	*a*

V. — Женщина переезжает и забирает одну из жен.

.	.	.	*C*	*B*	*A*
c	.	.	.	*b*	*a*

VI. — Муж (или одна из жен) едет обратно и перевозит оставшуюся.

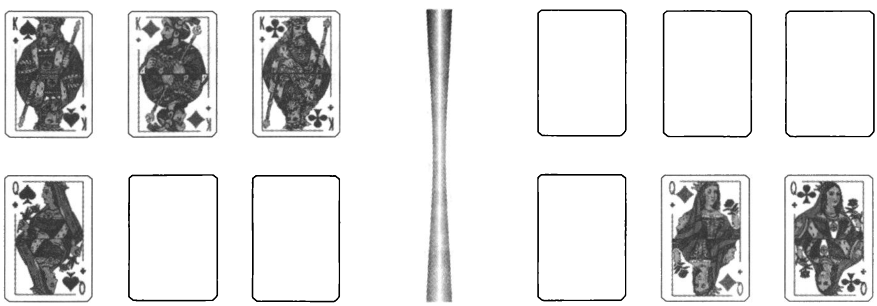
.	.	.	*C*	*B*	*A*
.	.	.	*c*	*b*	*a*

Очень наглядно и весело решается эта же задача при помощи карт.

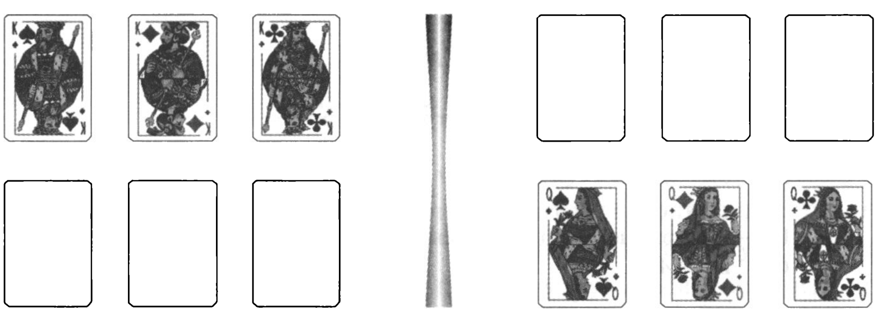
Решение

Пусть три мужа будут короли пик, бубен и треф, а дамы соответствующих мастей будут их жены. Сначала все находятся на одном берегу реки. Но вот начинается переправа.

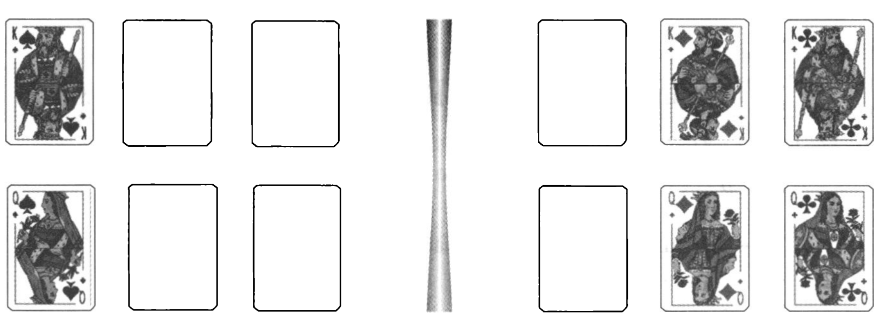
I. Сначала отправляются две дамы.



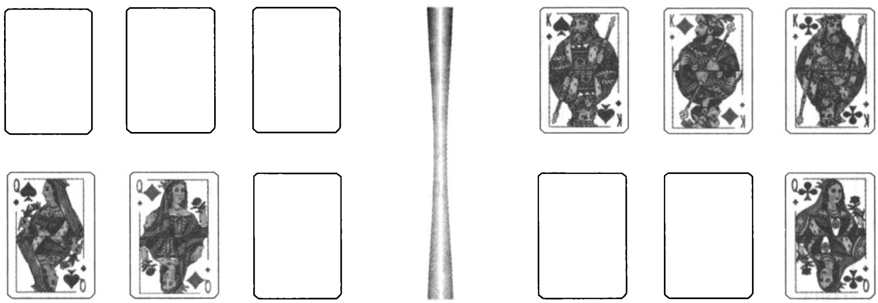
II. Возвращается дама и перевозит третью.



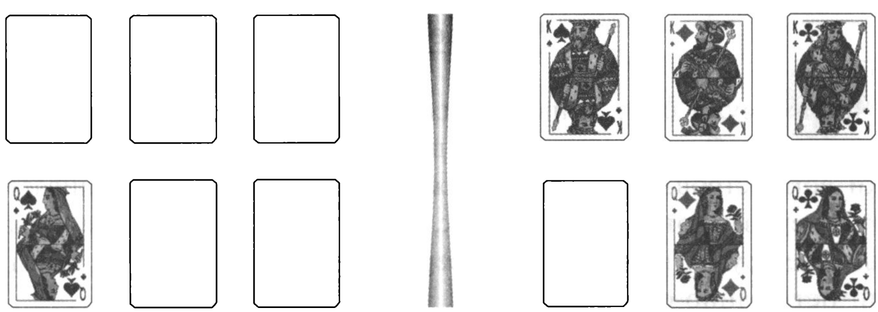
III. Возвращается одна из дам, остается с мужем, а два других мужа переправляются к своим женам.



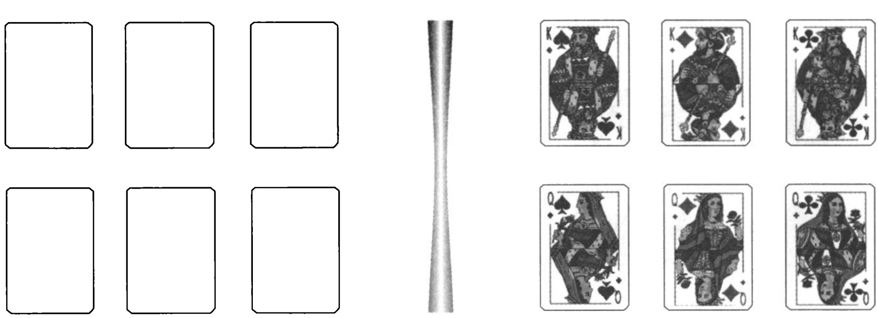
IV. Муж с женой возвращается на первый берег. Оставляет там жену и забирает с собой мужчину.



V. Со второго берега едет на первый дама и перевозит оттуда одну из подруг.



VI. Опять едет на первый берег дама и перевозит оставшуюся там подругу (или может и сам муж съездить за женой). И переправа окончена к общему удовольствию.



Замечание. Попробуйте ту же задачу решить для случая четырех королей и дам. Вы увидите, что если лодка не вмещает более двух лиц, то переправа при соблюдении всех указанных условий невозможна. Но если взять лодку, в которой могут поместиться *три* человека, то переправа может быть совершена при соблюдении указанных условий — т.е. ни одна дама не будет оставаться без своего мужа в присутствии других мужчин.

Подобная переправа совершается в *пять приемов*.

Взяв четыре короля и четыре дамы, попробуйте решить вопрос. Это нетрудно.

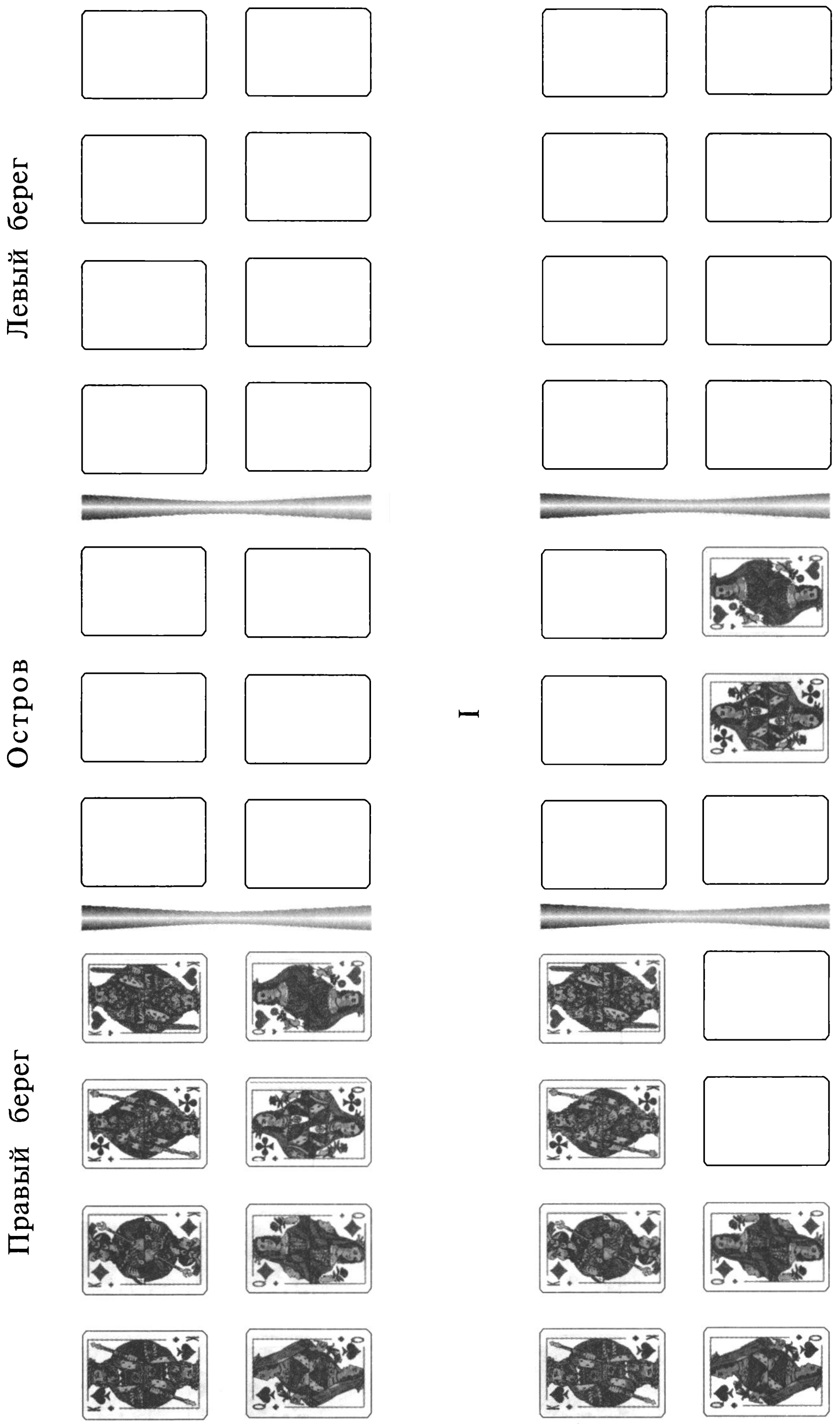
Но и на лодке, поднимающей только двух человек, можно совершить переправу четырех мужей с их женами, если посреди реки есть остров, на котором можно останавливаться. Решим с помощью карт эту любопытную задачу.

Задача 54-я.
Четыре мужа

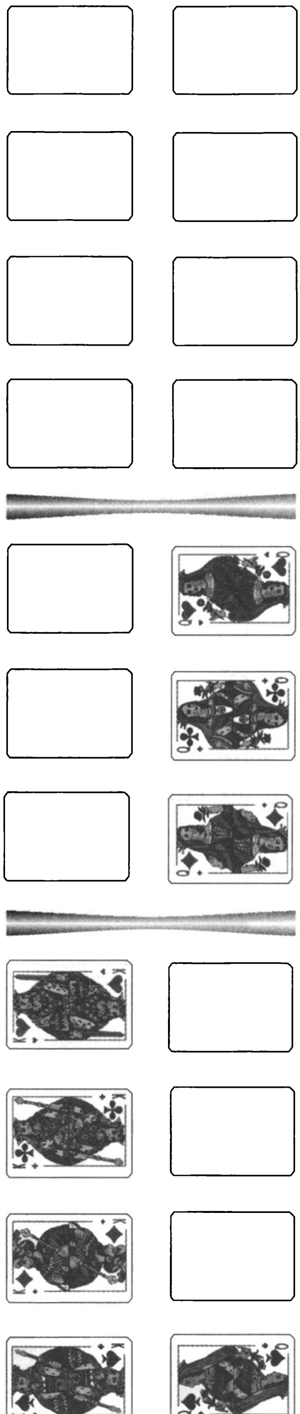
Четыре мужа с их женами должны переправиться через реку на лодке без гребца, которая не вмещает более двух человек. Посреди реки есть остров, на котором можно высаживаться. Спрашивается: как совершить эту переправу так, чтобы ни одна жена не была в обществе других мужчин ни на берегах, ни на острове, ни в лодке, если нет налицо ее мужа?

Решение

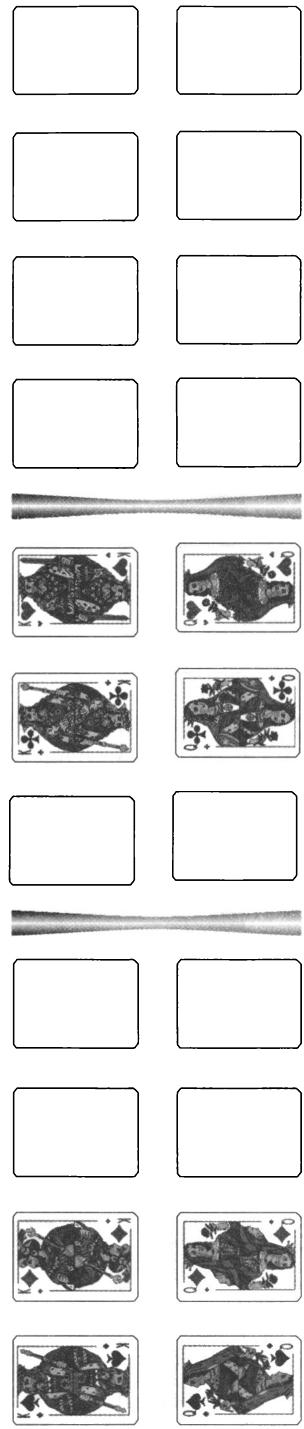
Переправа совершается в 12 переездов, как видим из нижеследующего: Берем четыре короля и четыре дамы. Условимся, где первый берег реки, где второй, а между ними остров:


Левый берег
Остров
Правый берег
I

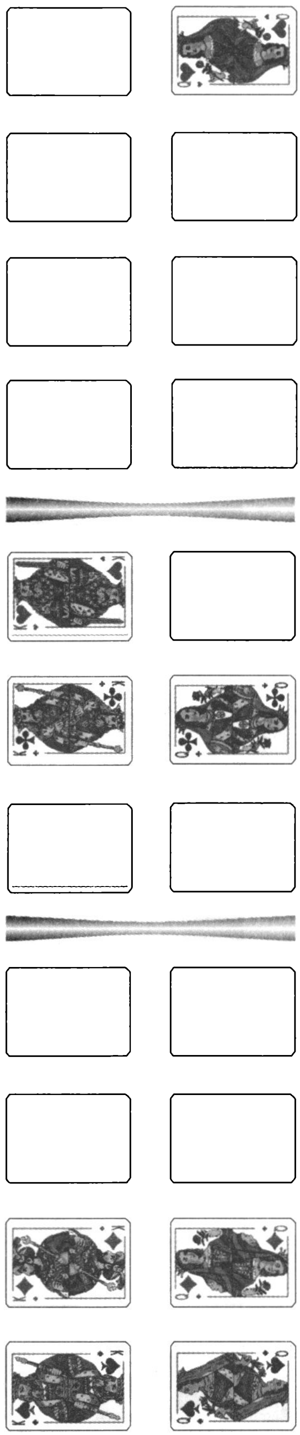
II



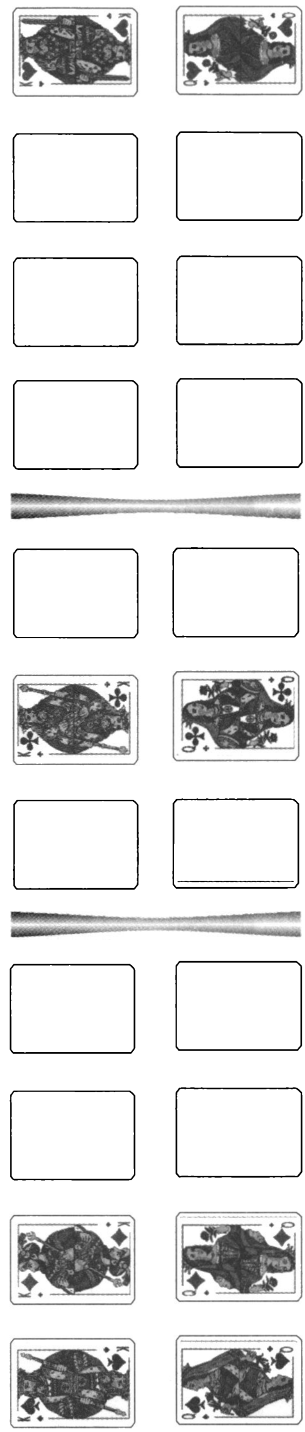
III



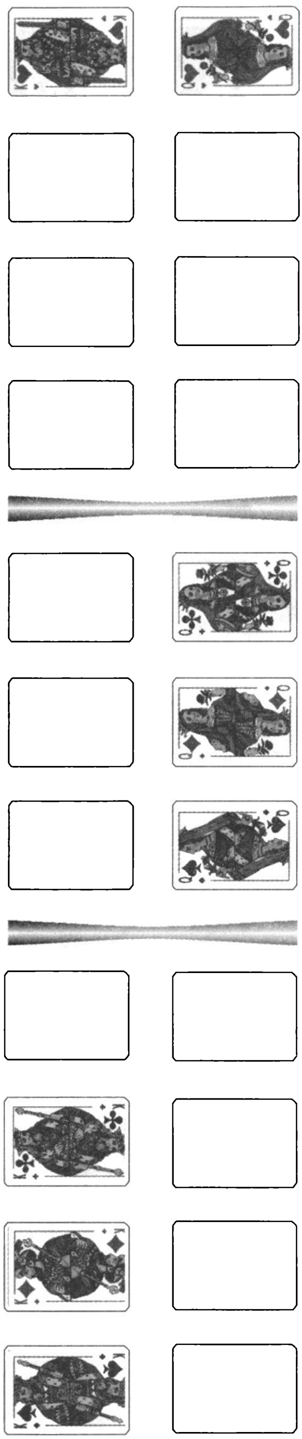
IV



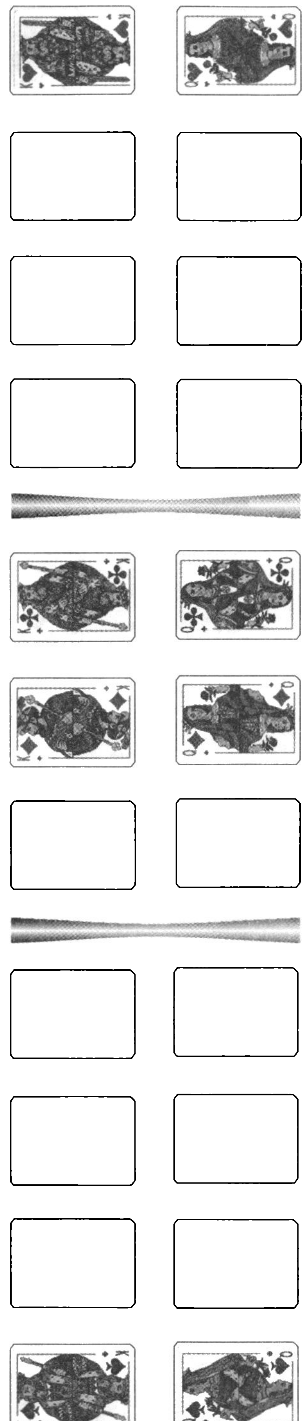
V



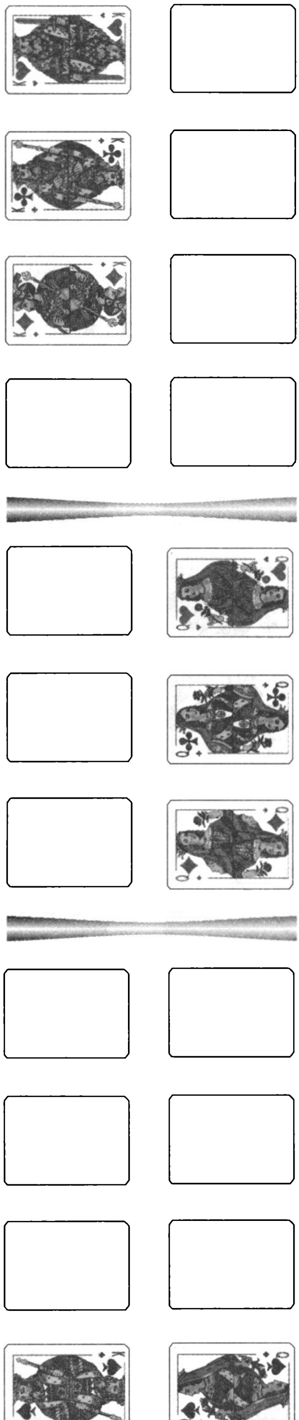
VI



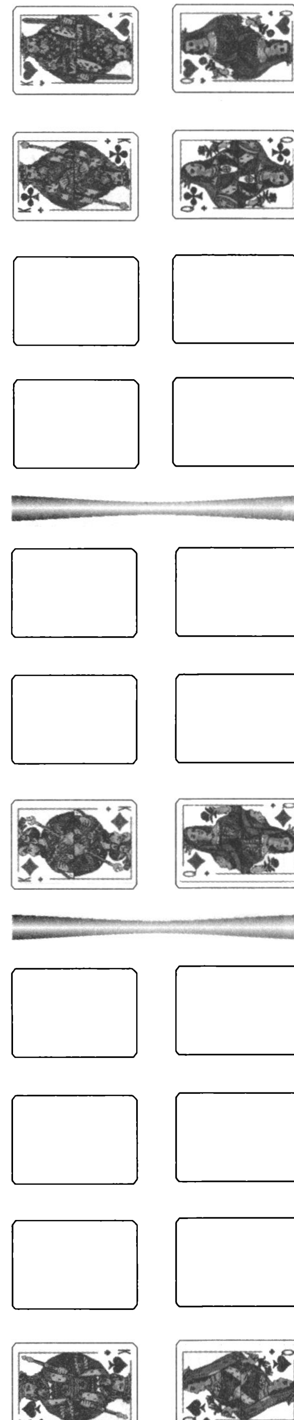
VII



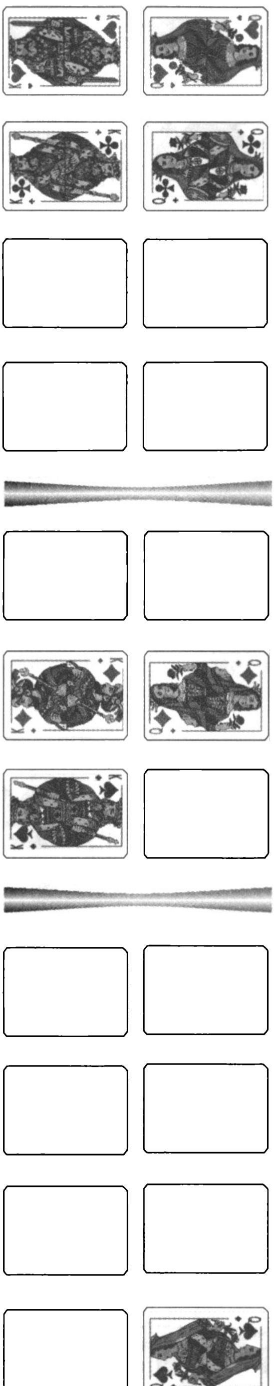
VIII



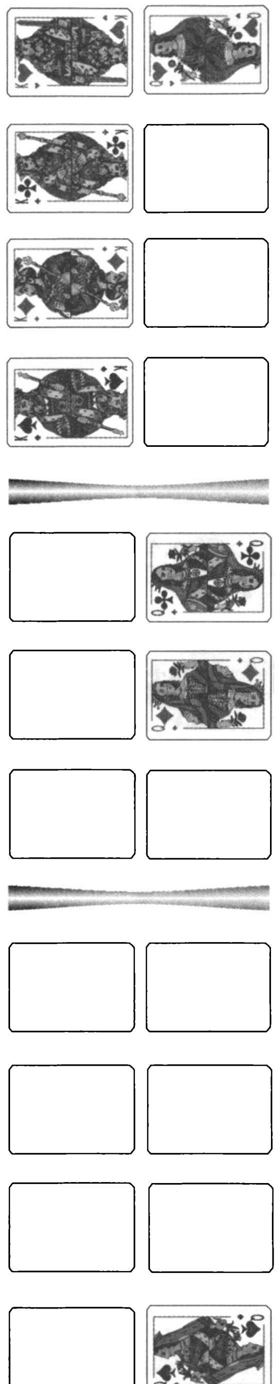
IX



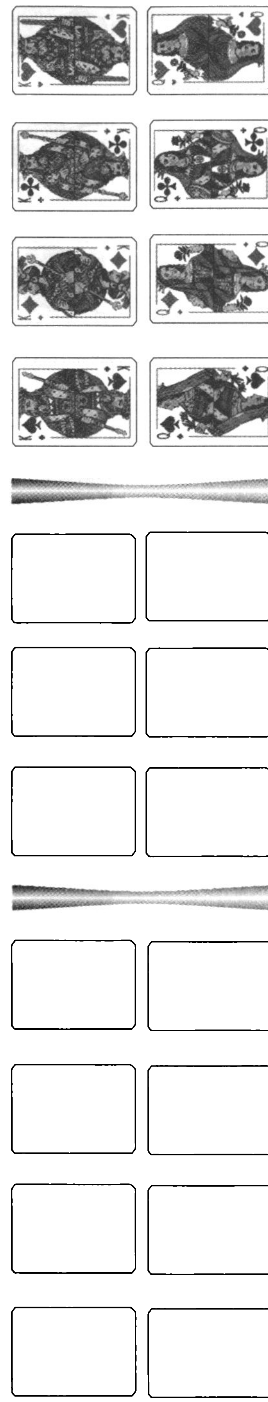
X



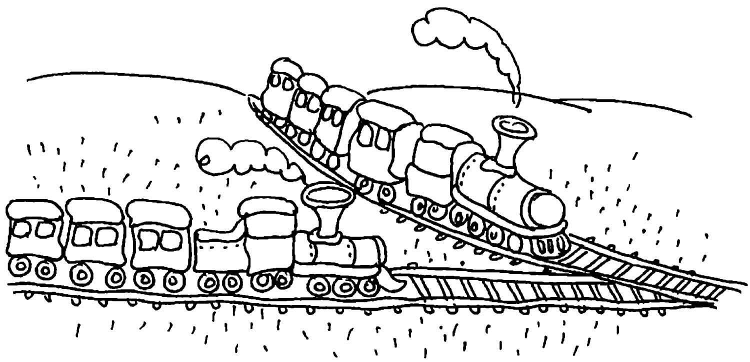
XI



XII



Задача 55-я.
На станции железной дороги



Поезд Б приближается к станции железной дороги, но его нагоняет быстрее идущий поезд А, который необходимо пропустить вперед. У станции от главного пути отходит боковая веточка, куда можно отвести на время вагоны с главного пути, но веточка эта такая короткая, что на ней не вмещается весь поезд Б. Спрашивается: как все-таки пропустить поезд А вперед?

Решение

Железнодорожный путь у станции представляет такой вид:

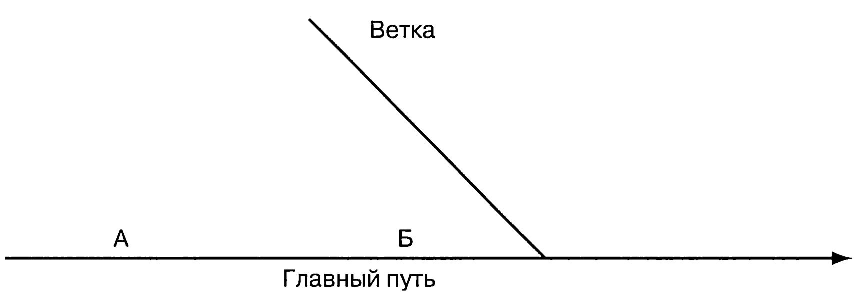


Рис. 18

По главному пути в направлении, означенном стрелкой, идет вперед поезд Б, а за ним поезд А, который надо пропустить вперед, пользуясь боковой веточкой, на которой может поместиться лишь часть вагонов (рис. 18).

Поезд А нагнал поезд Б и должен пройти дальше. Как же быть? А вот как:

Поезд Б идет по главному пути и переходит весь за начало боковой ветки. Затем поезд Б идет задним ходом на это ответвление и оставляет там столько вагонов, сколько умещается, а остальная часть поезда Б вместе с паровозом уходит опять вперед, за начало веточки. Затем пропускают поезд А и, как только он весь пройдет за начало ветки, к последнему его вагону прицепляют оставшиеся на веточке вагоны поезда Б, и поезд А сводит эту часть поезда Б с веточки вперед. Затем поезд А пускают назад — влево от начала веточки, и оставляют там вагоны от поезда Б. Той порою другая часть поезда Б (с паровозом) идет задним ходом и становится на веточку, открывая свободный путь для поезда А. Он мчится дальше, а паровоз поезда Б с несколькими передними вагонами опять выходит на главный путь, прицепляет стоящую влево от начала веточки часть своего поезда и следует за поездом А.

Задача 56-я. Разъезд шести пароходов

По каналу один за другим идут 3 парохода: «Олег», «Владимир» и «Петр». Навстречу им показались еще 3 парохода, которые тоже идут один за другим: «Мария», «Екатерина» и «Россия». Канал такой ширины, что два парохода разъехаться в нем не могут, но в канале с одной его стороны есть залив, в котором может поместиться только один пароход. Могут ли пароходы разъехаться так, чтобы продолжать свой путь по-прежнему?

Решение

Положение судов и канал с заливом изображены на рис. 19.

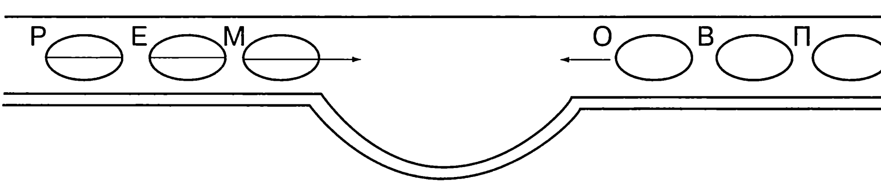


Рис. 19

Пароходы «В.» и «П.». отходят назад (направо), а «Олег» входит в залив; «М.». «Е.» и «Р.» проходят по каналу мимо «Олега»; тогда «Олег» выходит из залива и идет своей дорогой (влево); «Р.», «Е.» и «М.» отступают на прежнее место (налево); тогда с «Владимиром» повторяется все, что делалось с «Олегом». Таком же образом проходит и «Петр», и пароходы плывут своей дорогой.

Задача 57-я. Угадать число

Числа, начиная от 1 и до любого предела, написаны и расположены в последовательном порядке по кругу. Угадать любое из этих чисел, задуманное кем-либо.

Решение

Возьмем, например, числа от 1 до 12 и расположим их по кругу (рис. 20). Можно смело взяться угадать задуманное кем-либо в этом круге число.

1
12 2
11 3
10 4
9 5
8 6
7

Рис. 20

Можно, очевидно, для той же цели взять часы и предложить угадать задуманный кем-либо час.

Можно также взять 12 карт какой-либо масти (от туза до дамы) и, считая валета за 11, а даму за 12, разложить их, как указано на рис. 21, и взяться угадать задуманную кем-либо карту.

Можно также пользоваться домино, лото и т.д. Как же угадать задуманное число?

Пусть кто-либо молча задумает любое из чисел на круге. Затем *укажите* ему сами *любое число* на этом круге и прибавьте про себя к этому числу 12 (т.е. наивысшее число круга). Вы получите некоторое число, и это число вы скажете громко. Пусть потом задумавший считает про себя от задуманного им числа, притрагиваясь сначала к указанному вами числу, а потом к каждому следующему числу по кругу, *идя в обратном порядке,* и считает пусть до сказанного вами громко числа. Когда он досчитает до него, последовательно притрагиваясь к числам, то остановится как раз на задуманном им числе или карте.

Пусть, например, кто-либо задумал на круге 5, а вы указываете, например, 9, прибавляете к нему про себя 12 и получаете 21. Затем говорите громко задумавшему:

— Считайте про себя, начиная от задуманного вами числа до 21, но, начиная счет, притроньтесь сначала к 9, потом к 8, потом к 7 и т.д., идя

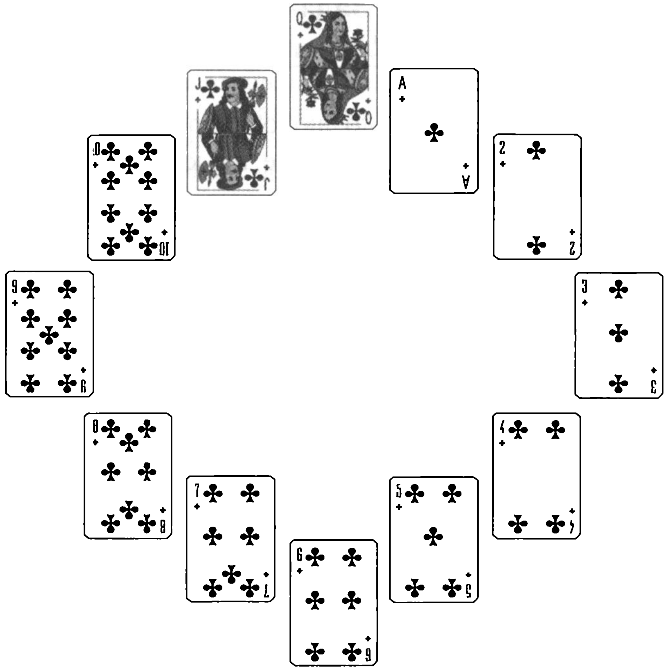


Рис. 20

по кругу в обратном порядке; когда же досчитаете до 21, то скажите это число громко и остановитесь.

Задумавший исполнит сказанное ему и, когда досчитает до 21, то как раз *сам укажет задуманное им число 5.*

Можно обставить эту задачу еще таинственнее; например так: кто-нибудь задумывает какое-нибудь число (например 5). Вы берете, например, число 9, прибавляете к нему мысленно 12, получаете 21 и говорите задумавшему:

— Теперь я буду стучать карандашом (или пальцем), и при каждом стуке вы прибавляйте про себя к задуманному вами числу по единице. Но когда досчитаете до 21, скажите громко: «21».

Затем стучите по 9, по 8, по 7 и т.д. по 12, по 11 и т.д. Задумавший число в это время про себя будет считать: 5, 6, 7 и т.д., но когда скажет громко «двадцать один», то окажется, что вы стучите как раз по задуманному им числу — 5.

— Вы задумали число «пять»! — говорите вы ему.

— Совершенно верно! — ответит вам задумавший, дивясь, как вы могли узнать это, если он сам не знает, в чем разгадка этого будто бы фокуса. Фокуса здесь, конечно, нет, а есть только самый правильный математический расчет, состоящий из следующего.

Чтобы от 5 прийти к 9, нужно считать так: 5, 6, 7, 8, 9. Значит, от 9 до 5 нужно пройти через те же числа 9, 8, 7, 6, 5, только считая их в обратном порядке. Если, указывая на 9, мы скажем «пять», затем, указывая на 8, скажем «шесть» и т.д., то, придя к задуманному числу 5, скажем «девять». Если затем идти по кругу в том же направлении и присчитать к «девяти» еще 12 последовательных чисел круга, то опять приходим к тому же числу 5. Дело сводится, следовательно, к счету по кругу в обратном направлении от указанного числа 9 до 9 + 12, т.е. до 21. Если, наоборот, задумано 9, а указано 5, то от 9 до 5, считая в прямом направлении по кругу (по порядку возрастания чисел), получаем: 9, 10, 11, 12, 12 + 1, 12 + 2, 12 + 3, 12 + 4, 12 + 5, т.е. 17. Следовательно, начиная с 5, можно прийти к задуманному числу 9, идя в обратном направлении и отсчитывая те же 5 + 12 = 17 чисел.

Задача 58-я. Кто первый скажет «сто»

Двое поочередно говорят произвольные числа, но не превышающие 10. Эти числа складываются одно за другим, и выигрывает тот, кто первый достигнет *ста*. Сделать так, чтобы всегда первым сказать *«сто»*.

Замечание. Наперед заданное число есть 100, а числа, которые говорят играющие, не превышают 10, т.е. можно называть 10 и всякое меньшее число. Итак, если первый скажет, например, «7», а второй «10», получится «17»; затем первый говорит, например, «5», получится «22»; второй говорит «8», получится «30» и т.д. Победителем будет тот, кто первый получит число «100».

Решение

Чтобы быть победителем, думайте только о том, чтобы вам пришлось сказать «89». Ясно, что, если вы скажете это число, то какое бы число (десять или меньше) ни прибавил ваш противник, вы тотчас найдете соответственное число, добавив которое к полученному противником, вы получаете *сто* и выигрываете. Но чтобы суметь всегда сказать «89», а потом, значит, и «100», постарайтесь разобраться в следующих очень нетрудных рассуждениях.

Начнем отнимать, сколько возможно, от 100 по 11. Получим ряд таких чисел: 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1.

Или же, если напишем их в порядке возрастания, то получим:

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Запомнить эти числа очень легко — стоит только взять предельное число, т. е. 10, и прибавить к нему единицу — получится 11. Затем берем это число и все числа, составленные умножением 11 на 2, на 3, на 4... на 8, — получим 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88. Увеличим каждое из этих чисел единицей и начнем единицей же ряд. Получим опять-таки предыдущий написанный нами ряд чисел:

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Замечание. Эти числа можно не запоминать, а вычислять легко по формуле $11n - 10$, где $n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$.

Ясно теперь, если вы скажете «1», то какое бы число (по условию, не больше 10) ни сказал другой играющий, он не помешает вам сказать «12»; точно так же далее вы всегда можете сказать «23»; а затем — 34, 45, 56, 67, 78 и 89.

Когда вы скажете «89», то какое бы число (не больше 10) ни сказал ваш соперник, вы говорите *«сто»* и выигрываете!

Отсюда видно также, что если оба играющих знают, в чем дело, то выигрывает всегда тот, кто первый скажет «один», т.е. кто начинает игру.

Замечание. Предыдущую задачу можно предложить и в таком общем виде:

Двое говорят поочередно произвольные числа, не превышающие, однако, какого-либо наперед условленного предела. Эти числа складываются одно за другим, и выигрывает тот, кто первый достигнет какого-либо *наперед заданного числа*. Сделать так, чтобы всегда первым прийти к этому вперед заданному числу.

Если вы хорошо усвоили себе решение первоначальной задачи, то нетрудно видеть, как надо поступать в каждом отдельном случае.

Пусть, например, заданное число будет 120, а предельное, как и выше, равно 10. Тогда, очевидно, нужно иметь в виду числа:

$$109,\ 98,\ 87,\ 76,\ 65,\ 54,\ 43,\ 32,\ 21,\ 10$$

т.е., начиная с 10, все кратные 11, увеличенные на 10. Отсюда также видно, что знающий решение этой задачи выигрывает всегда, если он начинает.

Замечание. Здесь также можно придумать формулу для вычисления этих чисел.

Пусть еще, например, наперед заданное число будет 100, но предельное число есть не 10, а 8. В таком случае нужно иметь в виду числа:

$$91,\ 82,\ 73,\ 64,\ 55,\ 46,\ 37,\ 28,\ 19,\ 10,\ 1$$

т.е., начиная от единицы, все числа, кратные 9 и увеличенные единицей. И в данном случае знающий всегда выигрывает, если он начинает.

Но если принять за предельное число, например, 9, то числа, которые нужно иметь в виду, будут:

90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10.

Замечание. Здесь также можно придумать формулу для вычисления этих чисел.

И ясно, что начинающий здесь может проиграть, если другому известен секрет, ибо какое бы число начинающий ни сказал, он не может помешать другому назвать 10, 20 и т.д. все числа до 100.

Дорогой читатель! Постарайтесь придумать эти формулы, а затем сравните эту задачу с известной исторической задачей Иосифа Флавия — римского писателя во время правления императора Веспасиана (I век).

Иосиф Флавий был правителем одного города во время осады его римлянами. Преследуемый римскими солдатами, Флавий укрылся со своим отрядом (с ним вместе всего 41 человек) в пещере. Но с этой минуты ему начала угрожать чуть ли не худшая опасность от собственных подчиненных: иудеи, ослабевшие от ран и голода, когда он предложил им сдаться римлянам, пришли в ярость и решили лучше перебить друг друга, чем подвергнуться позору плена.

Иосиф пробовал отговаривать их от этого ужасного решения, но напрасно: на все его доводы они отвечали угрозами и хотели с него начать выполнение своего намерения. Тогда он прибегнул к хитрости, чтобы спасти свою жизнь. Делая вид, что он подчиняется их желанию, Иосиф воспользовался последний раз своей властью над ними и предложил следующий план:

Во избежание беспорядка и свалки при убийстве друг друга следует-де стать им всем в круг и, начав счет с первого, убивать каждого третьего по порядку до тех пор, пока останутся только двое, которые и убьют сами себя. Все согласились. Иосиф расставил их, а сам стал таким образом, что остался одним из двух последних и, конечно, себя не убил.

Угадайте, дорогой читатель, какое место в круге занял Флавий.

Приведенный выше рассказ послужил материалом, на котором создалась одна любопытная задача, где дело идет уже о христианах и турках.

Задача 59-я. По жребию

15 турок и 15 христиан плыли по морю на небольшом судне. Вдруг поднялась страшная буря, и кормчий сказал, что для спасения хотя бы половины людей остальных 15 необходимо бросить в воду. Находящиеся на судне предоставили дело жребию — они стали все в ряд и решили, считая по порядку от 1 до 9, бросать в воду каждого девятого до тех пор, пока останется на корабле только 15 человек. Нашелся христианин, который расставил всех так, что в воду попали все 15 турок, а христиане остались на судне. Как он это сделал?

Решение

Для решения задачи нужно пассажиров поставить так: 4 христианина, 5 турок, 2 христианина, 1 турок, 3 христианина, 1 турок, 1 христианин, 2 турка, 2 христианина, 3 турка, 1 христианин, 2 турка, 2 христианина, 1 турок.

Чтобы запомнить эти числа и быстро решать задачу, рекомендуем запомнить такое выражение:

От бурь есть защита, Спасенье, избавленье нам!

И запомнить также порядок (что нетрудно) гласных в азбуке: а, е, и, о, у; из них первая а пусть означает 1, вторая е — 2, третья и — 3, четвертая о — 4 и пятая у — 5.

Ряд *начинается христианами*. Вы говорите про себя «от» — и ставите 4 христиан, «бурь» — и ставите 5 турок, «есть» — и ставите 2 христиан, «за» — и ставите 1 турка, «щи» — и ставите 3 христиан, «та» — и ставите 1 турка, «спа» — и ставите 1 христианина, «се» — и ставите 2 турок, «нье» — и ставите 2 христиан, «из» — и ставите 3 турок, «ба» — и ставите 1 христианина, «вле» — и ставите 2 турок, «нье» — и ставите 2 христиан, «нам» — и ставите 1 турка.

Замечание. Запомнить решение, как видно, нетрудно. А как найти его? Сейчас увидим, что и это не представляет особой трудности.

Поставим в ряд 30 предметов, например, спичек, или палочек, или камешков, или кубиков и т.д.

Считая от 1 до 9, находим, что в первый раз придется выбросить 9-ю, 18-ю и 27-ю палочки. Отбрасываем их и опять начинаем считать далее от 1 до 9; сначала сосчитываем 3 палочки за 27-й, а затем возвращаемся к началу ряда, который содержит теперь только 27 палочек. Из него придется, значит, на этот раз выбросить 6-ю, 15-ю и 24-ю палочки. Отбросим эти палочки и, поступая по-предыдущему, в новом полученном ряду из 24 палочек опять отбрасываем 6-ю, 15-ю и 24-ю палочки. После этого получаем ряд из 21 палочки. Считая от 1 до 9, здесь мы должны отбросить 9-ю и 18-ю. Останется 19 палочек. Считая далее 3 палочки за 18-й и возвращаясь к началу, отбрасываем отсюда 6-ю и 15-ю. Остается ряд из 17 палочек, из которого, считая по-предыдущему от 1 до 9, надо выбросить 5-ю и 14-ю палочки, и останется 15 палочек. Если рассмотреть затем, на каких местах в первоначальном ряду палочки остались (христиане) и на каких выброшены (турки), то, заменяя выброшенные палочки нулями, получим:

| | | | 0 0 0 0 0 | | 0 | | | 0 | 0 0 | | 0 0 0 | 0 0 | | 0

То есть получается данное уже нами решение задачи.

Вместо палочек или спичек можно для данной задачи пользоваться картами, условившись, например, что красные масти обозначают христиан, а черные — турок и т.д.

Задачу, конечно, можно видоизменять всячески. В общем виде ее можно выразить так:

Дано некоторое число различных предметов. Расположить их в таком порядке, чтобы, отбрасывая последовательно пятый, девятый, десятый или какой угодно предмет (до известного предела, конечно), оставались бы наперед заданные предметы.

Игра в красное и черное, или Игра в жетоны

Знаменитый английский ученый и профессор физико-математических наук Тэт, путешествуя по железной дороге, придумал для развлечения преинтересную игру. Он вынул из кармана 4 золотые английские монеты и 4 серебряные, затем положил их в ряд в переменном порядке, т.е. золотую монету и серебряную, золотую и серебряную и т.д., пока не разложил все 8 монет, оставя слева такое свободное место, на котором могли бы уместиться еще 2 монеты — не более. Вслед за тем он задал себе такую задачу:

1) Можно передвигать только две *рядом* лежащие монеты, не изменяя их взаимного расположения.

2) Пользуясь свободным местом для двух монет, сделать всего ***четыре*** таких передвижения, чтобы после этого оказались рядом четыре золотые монеты, а за ними следовали четыре серебряные.

Попробуйте-ка сделать это! Если у вас нет, что очень может быть, золотых и серебряных монет, то, может быть, найдутся серебряные и медные... Сущность задачи ведь от этого не меняется. Или, может быть, у вас совсем нет монет — да еще целых восьми? Тогда ничто не мешает вам воспользоваться черными и белыми шашками, взяв их по четыре. А если нет и шашек, то ничто не помешает вам сделать 4 кружочка (жетона) черных и 4 красных или белых из бумаги, картона или дерева и попытаться решить предложенную задачу. Возьмите, наконец, 4 красные или 4 черные карты.

При всей своей видимой простоте задача эта не так-то легка, особенно если увеличивать число пар монет, жетонов, кружочков или карт, т.е. если вместо 8 взять их 10, 12, 14 и т.д.

У нас чаще всего и почти всюду встречаются карты — настоящие или игрушечные, все равно. Они весьма пригодны для данного развлечения. Назовем это развлечение *игрой в красное и черное* и начнем с такой задачи:

Задача 60-я. Четыре пары

Взяты 4 красные и 4 черные карты (или 4 красных и 4 черных кружка) и положены в ряд в переменном порядке: красная, черная, красная, черная и т.д. Можно пользоваться свободным местом только для двух карт и можно на это свободное место передвигать только две рядом лежащие карты, не меняя порядка, в котором они лежат. Требуется в *четыре* передвижения карт попарно переместить их так, чтобы оказались подряд четыре черные и затем четыре красные карты.

Задача 61-я. Пять пар

Кладется в ряд 5 карт масти «бубна» и 5 карт масти «пика» в переменном порядке: бубна, пика, бубна, пика и т.д.

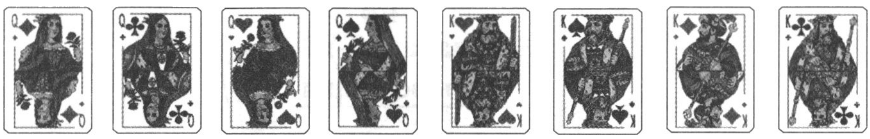
Требуется, пользуясь двумя свободными местами и перемещая на них по две карты без изменения их взаимного положения, в *пять* перемещений расположить их так, чтобы бубны были с бубнами, а пики с пиками.

Задача 62-я. Шесть пар

Положены в ряд в переменном порядке 6 красных и 6 черных карт: красная, черная, красная, черная и т.д. Красные карты — это карты мастей «черви» и «бубны», а черные карты — это карты мастей «пики» и «трефы». Пользуясь двумя свободными местами, требуется, передвигая каждый раз только по две карты без изменения их взаимного положения, в **шесть** перемещений расположить черные карты с черными, а красные с красными.

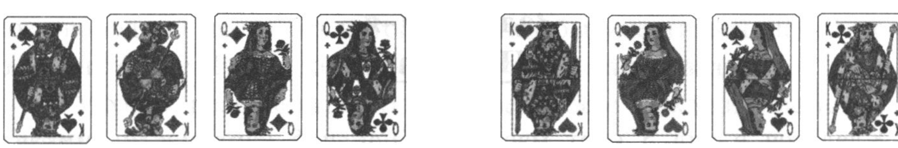
Решение

Возьмем из колоды 4 короля и 4 дамы и расположим их, как требуется, т.е. так:

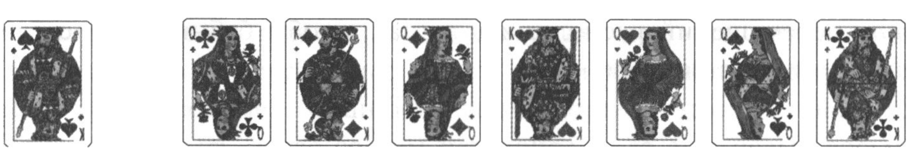


Первое перемещение. Слева имеем два свободных места, передвигаем туда короля пик и бубен. Получается такое расположение:

Второе перемещение. Даму червей и даму пик передвигаем на освободившиеся места и получаем:



Третье перемещение. Короля и даму бубен передвигаем на свободные места, получаем расположение:

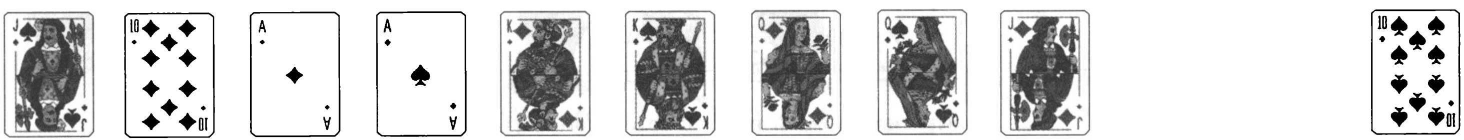


Четвертое перемещение. Наконец, передвигаем на свободные места даму пик с королем треф и получаем требуемое расположение: идут подряд четыре черные и четыре красные карты.

Решение

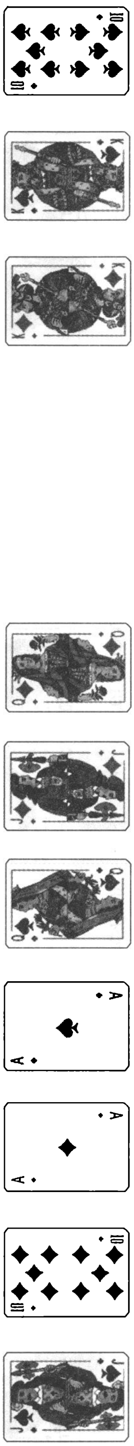
Первоначальное расположение карт.

I. Перемещаются на свободные места валет пик и десятка бубен. Имеем:

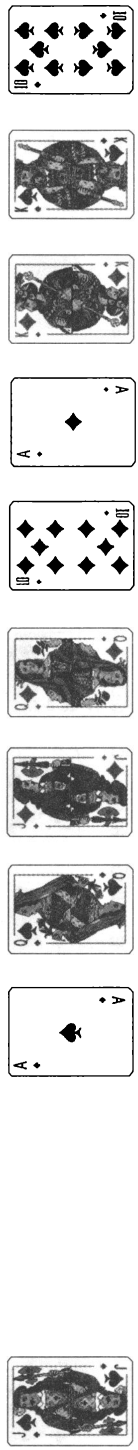


II. Перемещаются на свободные места короли бубен и пики. Имеем:

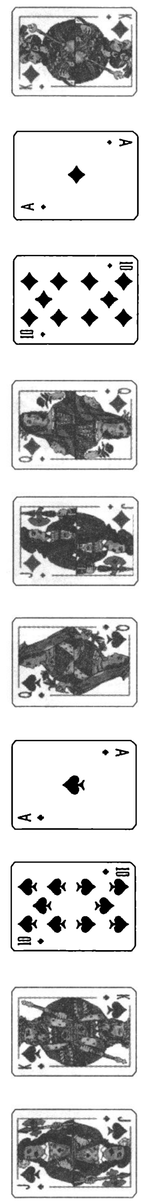
III. Перемещаются дама пик и валет бубен. Имеем:



IV. Перемещаются десятка и туз бубен. Имеем:

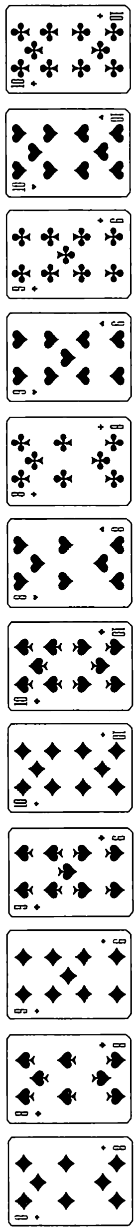


V. Перемещаются король и десятка пик, и получается требуемое.

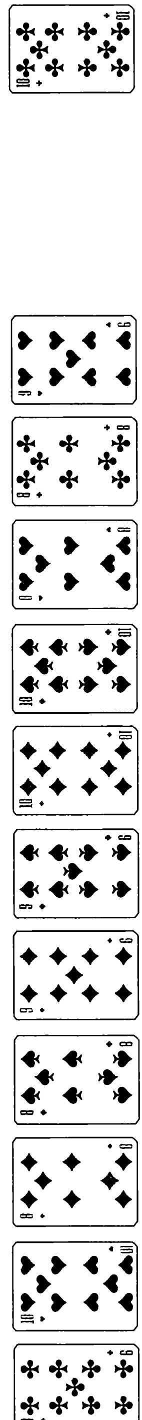


Решение

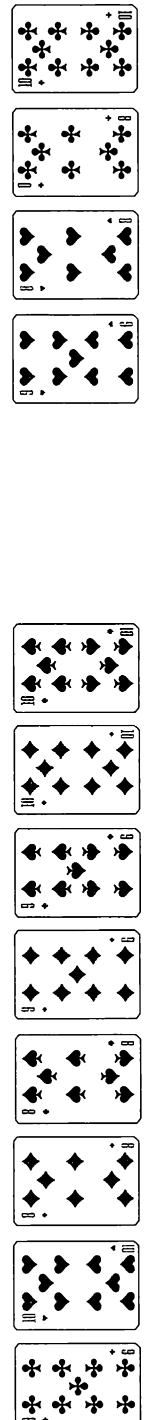
Первоначальное расположение карт:



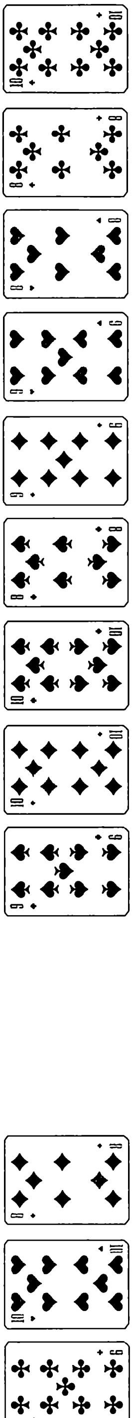
Первое перемещение:



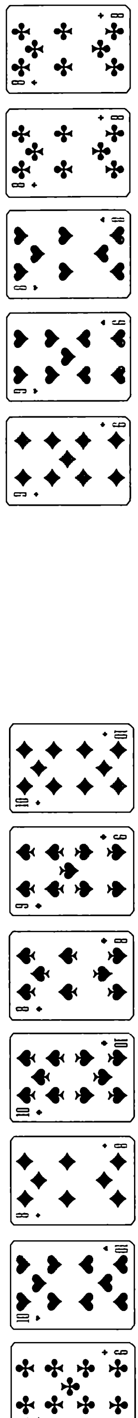
Второе перемещение:



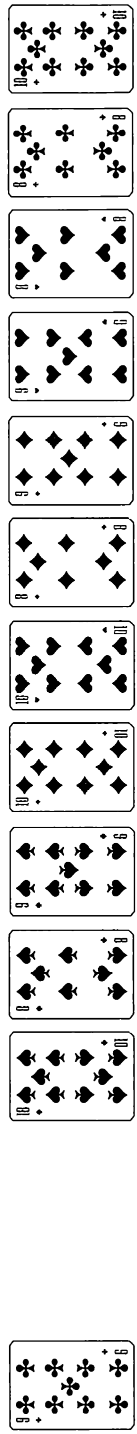
Третье перемещение:



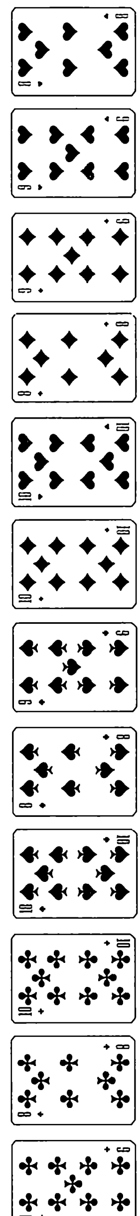
Четвертое перемещение:



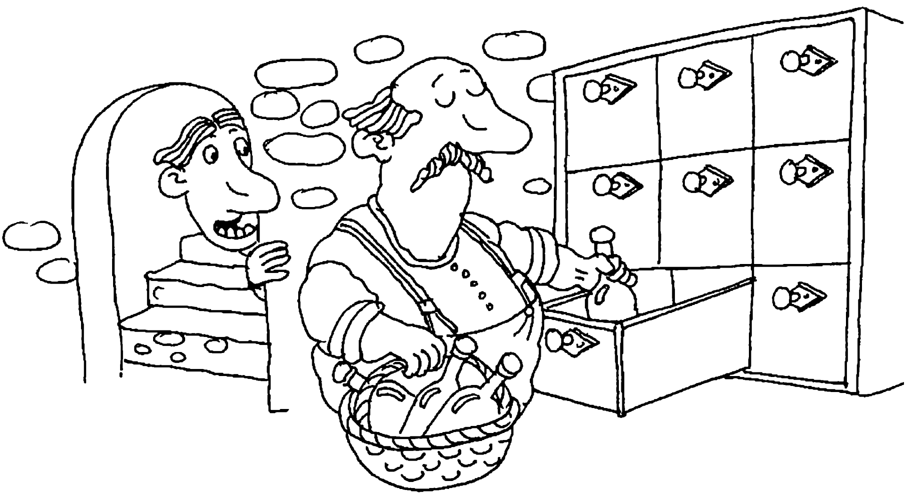
Пятое перемещение:



Шестое и последнее, решающее задачу перемещение:



Задача 63-я.
Обманутый хозяин



Хозяин устроил в своем погребе шкаф в форме квадрата с 9 клетками. Среднюю (внутри) клетку он оставил свободной для пустых бутылок, а в остальных расположил 60 бутылок вина так, что в каждой угловой клетке их было по 6, а в каждой из средних по 9. Таким образом, на каждой стороне квадрата было по 21 бутылке. Слуга подметил, что хозяин проверяет число бутылок только так, что считает бутылки по сторонам квадрата, и наблюдает только за тем, чтобы на каждой стороне квадрата было по 21 бутылке. Тогда слуга унес сначала 4 бутылки, а остальные расставил так, что вновь получилось по 21 на каждой стороне. Хозяин пересчитал бутылки своим обычным способом и подумал, что бутылок остается то же число и что слуга только переставил их. Слуга воспользовался оплошностью хозяина и снова унес 4 бутылки, расставив остальные так, что на каждой стороне квадрата выходило опять по 21 бутылке. Так он повторял, пока было возможно. Спрашивается: сколько раз он брал бутылки и сколько всего бутылок он унес?

Решение

Слуга брал себе по бутылке из каждой средней клетки и из тех же клеток, чтобы обмануть хозяина, после каждого воровства прибавлял по бутылке в угловые клетки. Так он воровал 4 раза по 4 бутылки, а всего, значит, унес 16 бутылок. Все это очевидно из нижеследующего (рис. 22):

Первоначальное расположение бутылок

6	9	6
9		9
6	9	6

1-я кража

7	7	7
7		7
7	7	7

2-я кража

8	5	8
5		5
8	5	8

3-я кража

9	3	9
3		3
9	3	9

4-я кража

10	1	10
1		1
10	1	10

Рис. 22

Замечание. Математически вопрос разъясняется так:

Обозначим через a число бутылок в каждой угловой клетке (в нашем случае $a = 6$) и через b число бутылок в каждой из средних клеток (в нашем случае $b = 9$). Тогда, очевидно, число всех бутылок есть $4\,(a + b)$, или это же число можно написать так:

$$2\,(a + b + a) + 2b.$$

Итак, если сделать так, чтобы $a + b + a$ оставались постоянным, то число бутылок будет уменьшаться с уменьшением b; и если b уменьшится на два, то общее число бутылок уменьшится на 4. Следовательно, всякий раз, как слуга брал по 2 бутылки из каждой средней клетки, что составляло 8 бутылок, он ставил по 1 бутылке в каждую из угловых клеток, а 4 остальные бутылки уносил. В каждой из средних клеток было первоначально 9 бутылок. Следовательно, подобные операции слуга мог произвести 4 раза и унести всего 16 бутылок.

Мы предположили, что, таская бутылки, недобросовестный слуга сохранял все же симметрию первоначального распределения бутылок. Но можно предположить и какое угодно несимметричное распределение бутылок, лишь бы число их S, считая по каждой стороне квадрата, оставалось без изменения. Пусть в самом деле числа бутылок в угловых клетках будут m, n, p, q (рис. 23). Тогда число всех бутылок есть

$$4S - (m + n + p + q).$$

Эта сумма уменьшится, если увеличится $m + n + p + q$, но S остается постоянным. Например, отнимем от f и k по x бутылок,

m	f	n
k		g
p	h	q

Рис. 23

т. е. всего $2x$ бутылок. Если теперь x прибавить к m, то S не изменится и в то же время число всех бутылок будет уменьшено на x. То же самое получится, если взять по x бутылок от f и g и прибавить x бутылок к n и т.д.

Точно так же, если отнять по x от каждого из чисел f, g, h, k и прибавить по x к m и q, или к n и p, или по $\frac{x}{2}$ к каждому из чисел m, n, p и q, то S не изменится и в то же время число всех бутылок уменьшится на $2x$. И так можно по желанию уменьшать число бутылок на 1, 2, 3, 4 и т.д.

Задача 64-я.
Слепая хозяйка

Служанки находятся в 8 комнатках, которые расположены так: 4 комнатки по углам квадратного дортуара, а 4 остальные в середине каждой стороны. Слепая хозяйка проверяет число служанок, находящихся в трех комнатах каждой стороны дортуара, и находит всюду 9 служанок. Через несколько времени она проверяет, все ли в комнатах. Считает опять и находит в каждом ряду комнат опять то же число служанок, несмотря на то что к ним пришли в гости 4 подруги. Через несколько времени опять тем же порядком, что и раньше, хозяйка проверяет число служанок и находит опять по 9 в каждом ряду, хотя 4 служанки вышли вместе с 4 подругами. Каким образом служанки обманывали хозяйку?

Решение

Ответ легко видеть из рассмотрения следующих фигур:

1-е посещение хозяйки

3	3	3
3		3
3	3	3

2-е посещение хозяйки

2	5	2
5		5
2	5	2

3-е посещение хозяйки

4	1	4
1		1
4	1	4

Можно допустить еще, что 4 служанки, возвратившись, каждая привела с собой еще 2-х гостей, а хозяйка, считая по-своему, все же не заметила бы обмана, если бы все расположились так (рис. 24):

1	7	1
7		7
1	7	1

Рис. 24

Задача 65-я. Расстановка букв

В квадрате, состоящем из 16 клеток, расставить 4 буквы так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой диагонали встречалась только одна буква. Как велико число решений этой задачи при одинаковых и разных буквах?

Решение

Прежде всего положим, что буквы одинаковы. Поставим одну букву в какой-нибудь клетке первой диагонали. С этой клеткой во второй диа-

a			
		a	
			a
	a		

Рис. 25

гонали есть одна клетка, стоящая с ней в том же горизонтальном ряду, и одна — в том же вертикальном ряду; в одной из остальных двух клеток второй диагонали можно поставить вторую букву. Далее легко заметить, что двух букв, поставленных на диагоналях, вполне достаточно, чтобы, сообразно условиям задачи, расставить все остальные буквы. Итак, если дано место буквы в одной диагонали, то задача имеет два решения; но так как первую букву можно поставить в какой угодно клетке первой диагонали, то задача имеет $2 \times 4 = 8$ решений. Все 8 решений получаются из одного поворачиванием и переворачиванием квадрата. Так как 4 различных буквы можно перемещать 24 способами, то при 4 различных буквах задача имеет $8 \times 24 = 192$ решения.

Задача 66-я.
Четыре буквы в квадрате

Дан квадрат, состоящий из 16 клеток. Требуется расставить в клетках этого квадрата по 4 раза каждую из 4 букв *a, b, c, d* таким образом, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду и в каждой диагонали не было одинаковых букв. Как велико число решений этой задачи?

Решение

Прежде всего ясно, что буквы, стоящие в угловых клетках, должны быть различны. Поэтому поставим в произвольном порядке 4 буквы по углам. В средних клетках диагонали, содержащей *a* и *d*, должны стоять буквы *b* и *c*, но они могут быть поставлены в одном или в другом порядке:

a			*b*
c			*d*

Рис. 26

a			*b*
	b		
		c	
c			*d*

a			*b*
	c		
		b	
c			*d*

Рис. 27

Легко видеть теперь, что расставленных букв вполне достаточно, чтобы, сообразно данным условиям, расставить буквы в остальных клетках. Прежде всего расставим буквы в крайних горизонтальных и вертикальных рядах, а потом во второй диагонали. Таким образом, получим:

a	*c*	*d*	*b*
d	*b*	*a*	*c*
b	*d*	*c*	*a*
c	*a*	*b*	*d*

a	*d*	*c*	*b*
b	*c*	*d*	*a*
d	*a*	*b*	*c*
c	*b*	*a*	*d*

Рис. 28

Итак, если расставлены буквы в угловых клетках, то задача имеет 2 решения. Но так как 4 буквы можно перемещать 24 способами, то задача имеет $24 \times 2 = 48$ решений.

Заметим здесь, что из одного найденного квадрата поворачиванием и переворачиванием его можно получить еще 7 подобных квадратов. Если мы условимся считать все квадраты, полученные поворачиванием одного квадрата, за одно решение, то при этом условии задача имеет $48 : 8 = 6$ решений.

Задача 67-я. Волшебный квадрат из 9 клеток

Расположить в 3 ряда 9 карт, от туза (принимаемого за 1) до девятки так, чтобы число очков каждого ряда, считая справа налево (горизонтально), сверху вниз (вертикально) и с угла на угол (по диагоналям), было одинаково.

Решение

Расположим сначала карты так (рис. 29):

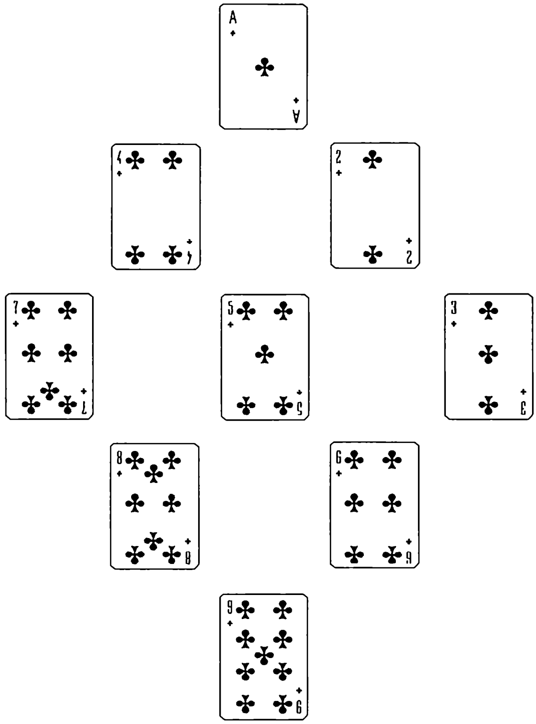


Рис. 29

Вслед за тем кладем на незанятые места: туза — под пятеркой, девятку — над пятеркой, тройку — слева, а семерку — справа от той же пятерки и получим требуемое распределение карт.

Если означить карты соответственными цифрами от 1 до 9, то это решение изобразится так:

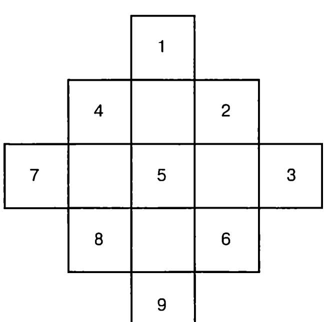


Рис. 30

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 31

Квадрат, полученный на рис. 31, и есть то, что называется *волшебным квадратом* из 9 клеток. В нем сумма чисел каждого ряда, столбца и диагонали равна 15.

Можно также для этой задачи вместо карт взять соответствующие домино. Получим: рис. 32.

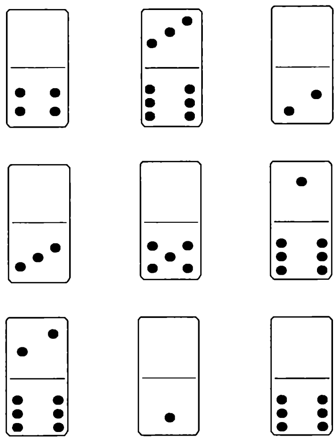


Рис. 32

Если в данном примере с картами заменим туз двойкой, двойку — тройкой, тройку — четверкой и т.д., наконец, девятку — десяткой, то получим тоже волшебный квадрат:

В каждом ряду, столбце и диагонали этого последнего квадрата заключается 18 очков, или единиц.

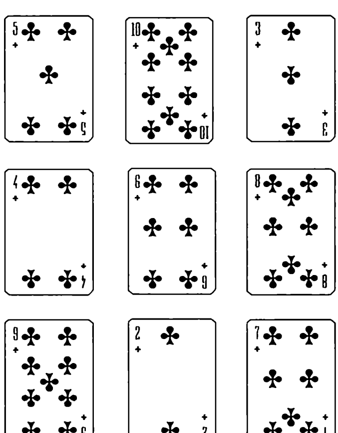


Рис. 33

Или то же числами:

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Рис. 33 а.

Задача 68-я.
В 25 клеток

Расположить 25 чисел, начиная от 1 до 25, в виде квадрата с 25 клетками так, чтобы в каждом вертикальном, в каждом горизонтальном ряду и с угла на угол (по обеим диагоналям) получались одинаковые суммы.

Решение

Строим квадрат с 25 клетками (рис. 35), затем на всех его сторонах строим еще по 4 клетки, чтобы получился рис. 34. Вслед за тем в полученной фигуре располагаем косыми рядами числа в последовательном порядке, как указано на рис. 34. Заполняя затем свободные клетки квадрата числами, находящимися в клетках вне его, как указано на рис. 35, получим требуемое.

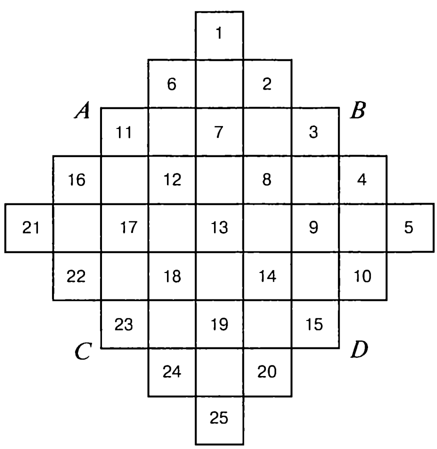


Рис. 34

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Рис. 35

Задача 69-я.
Раскладка карт

Взято по 4 «старших» карты каждой масти (туз, король, дама и валет каждой масти). Требуется эти 16 карт расположить в виде четырехугольника так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой диагонали находились в какомлибо порядке туз, король, дама, валет, и притом разных мастей.

Решение

Решение изобразится такой таблицей:

Туз червей	Король треф	Дама бубен	Валет пик
Валет бубен	Дама пик	Король червей	Туз треф
Король пик	Туз бубен	Валет треф	Дама червей
Дама треф	Валет червей	Туз пик	Король бубен

Рис. 36

Прийти к такому решению можно путем следующих рассуждений:

Обозначим через *A, B, C* и *D* названия карт независимо от их мастей, а через *a, b, c, d* их масти. Задача сводится к тому, чтобы в 16 клетках квадрата разместить 4 большие буквы *A, B, C, D* так, чтобы они все 4 находились в каждом горизонтальном и вертикальном ряду и в каждой диагонали, и то же самое сделать с малыми буквами *a, b, c, d* так, чтобы они комбинировались с большими всеми возможными способами.

Расположим сначала большие буквы, что не представляет затруднений. Расположим их по алфавитному порядку в первой горизонтали и заполним диагональ, идущую слева направо, — это может быть сделано только двумя способами: или *A, C, D, B,* или *A, D, B, C.* Примем первое расположение и заполним затем остальные клетки квадрата, что может быть сделано уже только единственным путем. Получим квадрат (рис. 37).

Чтобы разместить малые буквы, мы сначала приставим к каждой диагональной букве *A, C, D, B* по малой букве того же наименования, а затем

A	*B*	*C*	*D*
D	*C*	*B*	*A*
B	*A*	*D*	*C*
C	*D*	*A*	*B*

Рис. 37

Aa	*Bd*	*Cb*	*Dc*
Db	*Cc*	*Ba*	*Ad*
Bc	*Ab*	*Dd*	*Ca*
Cd	*Da*	*Ac*	*Bb*

Рис. 38

будем брать по 2 клетки, равно отстоящих по обе стороны от этой диагонали, и около каждой большой буквы поставим малую, одноименную с большой буквой другой соответствующей клетки. Получим квадрат, изображенный на рис. 38.

Если заменим теперь *A, B, C, D* соответственно через *туза, короля, даму, валета,* а буквам *a, b, c, d* придадим значение мастей: *черви, бубны, пики, трефы,* — получим вышеприведенное решение задачи (рис. 36).

Большие буквы можно заменить *тузом, королем, дамой* и *валетом* 24 различными способами, точно так же 4 маленькие буквы можно заменить четырьмя мастями 24 способами. Так что можно получить 24 × 24 = = 576 *буквенных* решений этой задачи.

Домино

Предполагают, что игра домино перешла к нам от индусов или греков. Действительно, простота этой игры наводит на мысль, что она придумана еще в очень отдаленные времена, на первых ступенях цивилизации. Что касается названия самой игры, то филологи также находятся в разногласии относительно этого. Иные ищут его корни в древнехананейских наречиях, но вероятнее всего это предположение. Игра в домино в прежние времена была дозволена в монастырях и религиозных общинах. Но всякое дело начинается там, как известно, с восхваления имени Божия. И когда игрок выставлял первую кость, он произносил: «benedicamus Domino» (бенедикамус Домино), т.е. «восхвалим Господа», или иначе: «Domino gratias» (Домино гратиас), т.е. «благодарение Господу». Отсюда и получилось просто в сокращении слово *«домино»*. Делается оно чаще всего из кости или дерева, а также и из металла; нижняя часть домино обыкновенно черная, а верхняя белая и разделена на два квадратика, на которых обозначены точки, или очки, домино. Чаще всего игра состоит из 28 домино, образующих все комбинации по 2 из 7 чисел:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Для удобства и однозначности наших дальнейших рассуждений договоримся так, что домино *ноль* и *ноль* будем обозначать **00,** домино *четыре* и *шесть* обозначим 46 и т.д. Расположим всю игру из 28 домино в таком порядке (рис. 39):

06	16	26	36	46	56	66
05	15	25	35	46	55	
04	14	24	34	44		
03	13	23	33			
02	12	22				
01	11					
00						

Рис. 39

Если взять сумму всех очков, содержащихся в игре домино, то окажется 168 очков. Заметим еще раз, что например **34** это обозначение домино *три* и *четыре*, а не число тридцать четыре!

Возьмем два домино таких, что числа очков квадратиков в одном дополняют числа очков квадратиков в другом до шести. Такие домино называют иногда *дополнительными* друг другу. Так, например, домино **23** и **43** будут дополнительными друг другу, как и домино **12** и **54, 14** и **52** и т.д. ($1 + 5 = 6$, $2 + 4 = 6$).

В рассматриваемой нами игре из 28 костей есть 4 кости **06, 15, 24** и **33**, *которые дополняют сами себя*, т.е. не имеют других дополнительных. Специальное название *двойняшка* или *дупель* имеют семь домино:

66, 55, 44, 33, 22, 11, 00.

Игра проста и состоит в общих чертах в следующем. Два или более игрока делят между собой кости игры. Чаще всего играют с *прикупом*, т.е. берут по известному равному числу костей, а остальные кости лицевой частью вниз лежат в стороне. Первый игрок выкладывает на стол какое-либо свое домино, второй по порядку должен приставить к какому-либо квадратику этого домино такую свою кость, квадратик которой имел бы столько же очков, сколько находится на квадратике выставленной кости. Получается фигура из двух костей, оканчивающаяся двумя квадратиками. К одному из этих квадратиков следующий игрок должен приложить свою соответствующую кость и т.д. по порядку. Если у кого не находится соответствующего домино, он берет кости из *прикупа* до тех пор, пока не найдет там нужного домино, которое и приставляет к образованной на столе фигуре. Выигравшим считается тот, кто первый успеет положить все имеющиеся у него домино. С помощью домино можно получить весьма поучительные и полезные развлечения.

Задача 70-я.
Начало и конец цепи знаем наперед

Переверните лицом вниз все кости игры домино. Одну же из костей тихонько спрячьте, наблюдая только, чтобы эта кость не была двойняшкой. Затем предложите кому-либо взять любую из лежащих на столе костей, посмотреть ее и положить на стол вверх лицевой стороной, а вслед за тем пусть он же раскроет и все остальные домино и расположит их вместе с первой открытой костью по правилам игры, но так, чтобы не замкнуть игры и не брать в расчет двойняшек, или же ввести их в игру вне очереди. Получится некоторое расположение костей всей игры домино, *и вы сможете заранее предсказать числа очков*, которые получатся на концах этого расположения. Эти числа будут как раз те, которые находятся на квадратиках раньше спрятанного вами домино.

В самом деле, если расположить все домино одно за другим в порядке, требуемом правилами игры, т.е. чтобы последовательные кости соприкасались квадратиками с одинаковым числом очков, то игра всегда окончится таким же числом очков, каким она началась. Если, скажем, расположение костей начинается квадратиком с 5 точками, то оно и окончится 5-ю, при условии, конечно, не закрывать игру, пока не будут положены все кости. Итак, все 28 костей игры можно расположить, соблюдая правила игры, по кругу, и если из этого круга отнять, например, кость *три* и *пять*, то ясно, что расположение остальных 27 костей начнется с одной стороны *пятью*, а окончится *тремя*.

Этой небольшой забавой вы можете очень заинтересовать тех, кто не знает, в чем дело, — особенно если показывать вид, что вы будто бы производите в уме самые сложные вычисления. Следует также при повторении забавы по возможности ее разнообразить и видоизменять.

Задача 71-я.
Наибольший удар

Допустим, что играют в домино четверо и что между ними поделены все кости поровну, т.е. при начале игры у каждого игрока есть по семь костей. При этом могут получаться такие интересные расположения костей, при которых первый игрок *обязательно выигрывает*, в то время как второй и третий не смогут положить ни одной кости. Пусть, например, у первого игрока будут такие кости: 00, 01, 02, 03, 14, 15, 16, или по-другому: 00, 10, 20, 30, 41, 51, 61, а у четвертого игрока пусть будут кости: 11, 12, 13, 04, 05, 06 и еще какая-либо кость, или по-другому: 21, 31, 40, 50, 60 и еще две кости 11 и какая-нибудь.

Остальные домино поделены между вторым и третьим игроками. В таком случае первый игрок необходимо выигрывает после того, как будут положены все 13 указанных выше домино, а второй и третий игроки не смогут поставить ни одного из своих домино.

В самом деле, первый игрок начинает игру и ставит 00. Второй и третий досадуют, ибо у них нет подходящей кости. Тогда четвертый игрок может положить любую из трех костей 04, 05 или 06. Но первый приложит в ответ 41, 51 или 61. Второй и третий опять не смогут ничего положить, а четвертый поставит 11, или 12, или 13, на что первый может ответить костями 10, 20, 30 и т.д. Таким образом, он положит все свои кости, в то время как у второго и третьего игроков останутся все их домино, а у четвертого одно. Сколько же выигрывает первый? Сумма очков в положенных 13 домино равна, как легко видеть, 48, а число очков всей игры есть 168. Значит, первый игрок выигрывает 168 — 48 = 120 очков в одну игру. Это *наибольший удар*!

Можно составить и другие партии, подобные предыдущей. Для этого стоит только нули и единицы заменить соответственно домино с иными количествами очков — 2, 3, 4, 5 или 6. Число подобных партий, следовательно, равно числу всех простых комбинаций из семи элементов по 2, т.е. равно 21. Ясно, что вероятность получить такую партию *случайно* — весьма мала. Кроме того, все остальные партии, за исключением приведенной выше, дадут меньшее, чем 120, число выигранных очков.

Задача 72-я. Домино и волшебный квадрат

Расположить семь единиц и еще две кости домино в квадрате с девятью клетками так, чтобы сумма очков домино, считая их по столбцам (вертикально), по строкам (горизонтально) и по диагоналям была постоянно одна и та же.

Решение

К семи костям с единицами прибавляют еще **26** и **36**, и тогда нетрудно составить следующий волшебный квадрат (рис. 40):

26	01	15
12	14	16
13	36	11

Рис. 40

16	00	05
02	04	06
03	26	01

Рис. 41

Сумма очков в его столбцах, строках и диагоналях равна 15. Если здесь единицы заменить соответственно нулями, а **26** и **36** костями **16** и **26**, то получим квадрат (рис. 41) с постоянной суммой, равной 12.

Точно так же, если в квадрате (рис. 40) заменим домино с единицами костями с двойками, а **26** и **36** через **36** и **46**, то получим новый волшебный квадрат, содержащий семь костей с двойками, в котором постоянная сумма равна 18. (Изобразите такой квадрат и самостоятельно подсчитайте сумму.) Можно также построить с помощью домино волшебные квадраты, содержащие все тройки или четверки с двумя другими соответственно подобранными костями. Постоянные суммы этих квадратов будут 20 и 24.

Задача 73-я. Еще два квадрата домино

Взяты все нули и единицы домино и к ним прибавлены еще 3 подходящие кости. Расположить 16 костей на 16 клетках квадрата так, чтобы сумма очков, считаемых вертикально, горизонтально и по обеим диагоналям, была одинакова.

Решение

К нулям и единицам надо прибавить еще **25**, **26** и **36**. Получим квадрат (рис. 42):

26	12	13	03
14	02	36	11
05	15	01	06
00	25	04	16

Рис. 42

Сумма очков каждого столбца, каждой строки и каждой диагонали этого квадрата равна 18. Полученный квадрат отличается тем интересным свойством, что в нем можно первый столбец передвинуть на четвертое место или верхнюю строку перенести вниз, и опять-таки получится волшебный квадрат, отличающийся свойством постоянства суммы.

Если в квадрате рис. 42 вместо нулей и единиц взять все кости, содержащие больше на очко, или два, или три, то опять получим волшебные квадраты с постоянными суммами 22, 26 и 30. Если в полученных квадратах заменить каждую кость ее дополнительной, то опять получим волшебные квадраты.

Из 25 домино можно составить такой волшебный квадрат (рис. 43):

35	03	06	22	51
11	32	61	45	40
62	46	00	21	24
01	31	52	63	33
44	41	34	02	05

Рис. 43

Сумма очков, считая по столбцам, строкам и диагоналям этого квадрата, равна 27.

Переноса в этом квадрате столбцы или строки, мы опять будем получать волшебные квадраты, подобно тому как получали их из квадрата с 16 клетками (рис. 42).

Задача 74-я.
Верная отгадка

Возьмите 25 костей домино, переверните их лицом вниз и положите рядом одна за другой так, чтобы они соприкасались более длинными сторонами. Вслед за тем объявите, что вы отвернетесь или даже уйдете в другую комнату, а кто-либо пусть с правого конца передвинет на левый какое-либо число домино (не более, однако, двенадцати). Возвратившись в комнату, вы тотчас открываете кость, число очков которой непременно укажет числа передвинутых в ваше отсутствие домино.

Решение

Эта задача, очевидно, есть видоизменение задачи 2-й «Удивительный отгадчик». Все дело в том, чтобы, приготовляясь к «угадыванию» и переворачивая домино лицом вниз, 13 из них расположить в таком последовательном порядке (рис. 44):

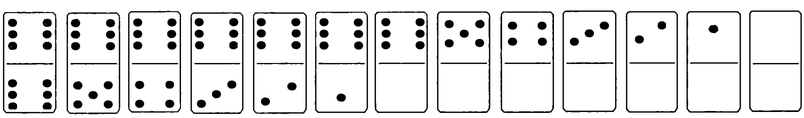


Рис. 44

Ряд этих домино представляет ряд первых 12 чисел да еще ноль:

12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.

Числа эти идут в убывающем порядке. Справа за этим рядом домино вы помещаете (тоже лицом вниз) еще 12 домино в каком угодно порядке. Если теперь вы уйдете в другую комнату, а кто-либо передвинет справа налево несколько (менее 12) домино и приставит их так, чтоб они шли за **66** влево, то, воротясь, вы откроете *среднюю* (т.е. 13 по счету, считая слева) кость в ряду, и на открытом домино будет как раз столько очков, сколько было передвинуто в ваше отсутствие костей.

Почему так, нетрудно разобраться. Когда вы уходите в другую комнату, то вы знаете, что в середине ряда перевернутых изнанкой вверх домино лежит белое домино, т.е. **00**. Представим теперь, что передвинуто в ваше отсутствие с правого конца на левый одно домино. Какое тогда домино придется в середине? Очевидно, **01**, т.е. единица. А если передвинуть 2 кости, то в середине придется домино с двумя очками; если передвинуть 3 кости, то в середине будет кость с тремя очками и т.д. Словом, среднее домино обязательно и верно покажет вам число передвинутых справа на левый конец домино (передвигается всегда не более 12 костей).

Игру можно продолжать. Опять уйти в другую комнату и попросить кого-либо передвинуть с левого конца на правый еще несколько домино. Возвратясь в комнату, вы также откроете домино, указывающее число передвинутых костей. Оно будет теперь вправо от среднего, и, чтобы найти его, надо за этим средним домино отсчитать по порядку столько костей, сколько было передвинуто в предыдущий раз.

Упражнения с куском бумаги

Вряд ли кто из наших читателей не умеет сам из квадратного куска бумаги получить «петушка», лодочку, кораблик, коробочку и т.д. Достигается это путем разнообразного перегибания и складывания бумажного квадрата. Полученные при этом сгибы (складки) позволяют придавать взятому куску бумаги ту или иную желаемую форму. Эти фигурки из бумаги принято называть оригами.

Однако мы не будем заниматься оригами, а убедимся, что с помощью перегибания бумаги можно получить наглядное представление о многих фигурах на плоскости, а также об их свойствах. Кусок обыкновенной белой (а еще лучше — цветной) бумаги да перочинный ножик для разглаживания или удаления ненужных частей могут оказаться прекрасным пособием для усвоения начал геометрии.

Задача 75-я. Прямоугольник

Куску бумаги неправильной формы дать форму прямоугольника.

Решение

Положите кусок бумаги неправильной формы на стол и сделайте сгиб близ края. Пусть полученный при этом сгиб будет XX'. Это прямая линия. Проведите ножом по сгибу и отделите меньшую часть куска. Таким образом вы получили прямолинейный край. Подобно предыдущему, согните бумагу по линии BY так, чтобы прямолинейный край XX' накладывался аккуратно сам на себя. Развернув затем бумагу, мы убедимся, что сгиб BY идет под *прямым углом* к краю XX'; и наложение показывает, что угол YBX' равен углу YBX и что каждый из этих углов равен углам страницы. Как раньше, проведите ножом по второй складке и удалите ненужную часть.

Повторяя указанный прием, вы получите края CD и DA. Наложение докажет, что углы при A, B, C и D прямые и равны друг другу и что стороны BC и CD соответственно равны DA и AB. Итак, полученный кусок бумаги $ABCD$ (рис. 45) имеет форму, подобную странице этой книги. Его можно даже сделать равным этой странице, если взять достаточно большой кусок бумаги и отмерить AB и BC так, чтобы они были равны сторонам страницы.

Полученная фигура называется *прямоугольником*, и наложение доказывает следующие его свойства: 1) четыре его угла все прямые и равны между собой; 2) четыре же стороны не все равны; 3) две более длинные стороны равны между собой, а две более короткие — между собой.

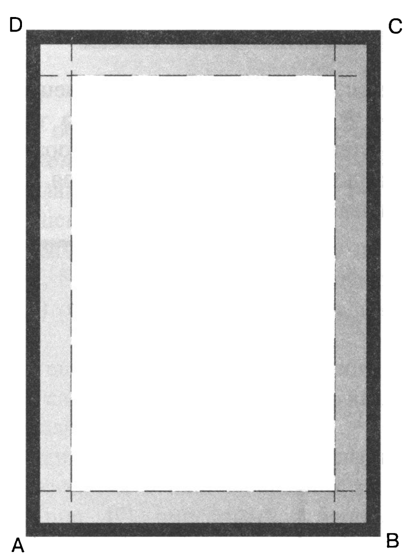


Рис. 45

Задача 76-я.
Квадрат

Из прямоугольника сгибанием получить квадрат.

Решение

Взяв прямоугольный кусок бумаги, $A'B'CD$, складываем его наискосок так, чтобы одна из коротких сторон, например CD, легла на длинную DA', как это показано на рис. 46.

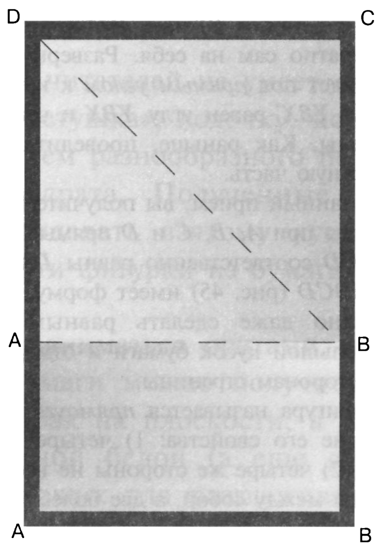


Рис. 46

Угол поместится на краю в точке A, конец перегиба по краю CB' получится в точке B. Сделаем перегиб через точки A и B, затем, отогнув, удалим по линии AB часть $A'B'BA$, которая выдается. Развернув после этого лист, найдем фигуру $ABCD$, которая и есть квадрат. В нем все четыре угла прямые и все стороны равны.

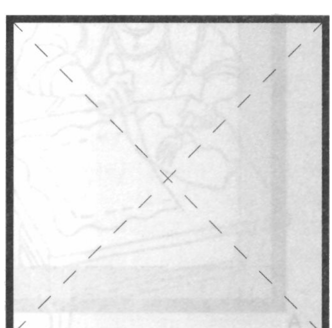


Рис. 47

Линия сгиба, проходящая через два противоположных угла B и D, есть *диагональ* этого квадрата. Другая диагональ получается перегибом квадрата через другую пару противоположных углов, как это видно на рис. 47. Непосредственным наложением убеждаемся, что диагонали квадрата пересекаются друг с другом под прямыми углами и что в точке пересечения они взаимно делятся пополам.

Эта точка пересечения диагоналей квадрата называется *центром* квадрата.

Каждая диагональ делит квадрат на два совпадающих при наложении *треугольника*, вершины которых находятся в противоположных углах квадрата. Каждый из этих треугольников имеет по две равные стороны, т.е. эти треугольники *равнобедренные*. Кроме того, эти треугольники и прямоугольные, так как каждый из них имеет по прямому углу.

Две диагонали, как легко видеть, разделяют квадрат на 4 совпадающих при наложении (т.е. равных) прямоугольных и равнобедренных треугольника, общая вершина которых находится в центре квадрата.

Перегнем теперь наш бумажный квадрат пополам так, чтобы одна сторона совпадала с противоположной ей. Получим сгиб, проходящий через центр квадрата (рис. 48).

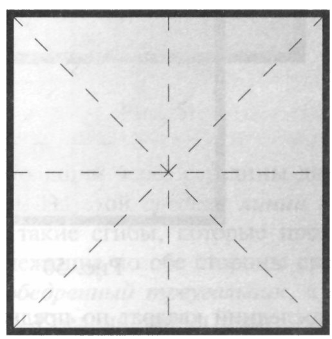


Рис. 48

Линия этого сгиба обладает, как легко убедиться, следующими свойствами: 1) она *перпендикулярна* двум другим сторонам квадрата; 2) делит эти стороны пополам; 3) *параллельна* двум первым сторонам квадрата; 4) сама делится в центре квадрата пополам; 5) делит квадрат на два совпадающих при наложении прямоугольника, из которых каждый равен половине квадрата; 6) каждый из этих прямоугольников *равновелик* (т.е. равен по площади) одному из треугольников, на которые квадрат делится диагональю.

Перегнем квадрат еще раз так, чтобы совпали две другие стороны. Полученный сгиб и сделанный раньше делят квадрат на 4 совпадающих при наложении квадрата (рис. 48)

Перегнем эти 4 меньших квадрата через углы их, лежащие посередине сторон большого квадрата в наш начальный квадрат (по диагоналям) и получим квадрат (рис. 49), вписанный в наш начальный квадрат. Этот вписанный квадрат равен по площади половине большого и имеет тот же центр.

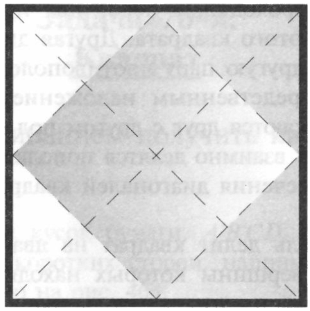


Рис. 49

Соединяя середины сторон этого внутреннего, вписанного квадрата, получим квадрат, равный четверти первоначального (рис. 50).

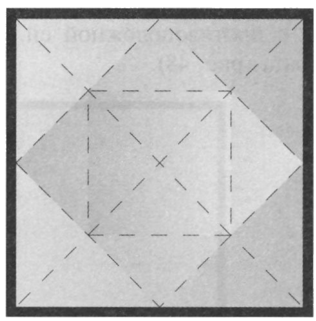


Рис. 50

Если в этот последний квадрат по предыдущему опять впишем квадрат, то он будет равен восьмой доле первоначального. В этот можем вписать квадрат, равный шестнадцатой доле первоначального, и т.д.

Замечание. Если перегнуть наш квадрат как угодно, но так, чтобы сгиб проходил через центр, то квадрат разделится на две совпадающие при наложении *трапеции*.

Задача 77-я.
Равнобедренный и равносторонний треугольники

Из бумажного квадрата сгибанием получить равнобедренный треугольник.

Решение
Возьмем квадратный кусок бумаги и сложим его вдвое так, чтобы противоположные края его совпадали (рис. 51).

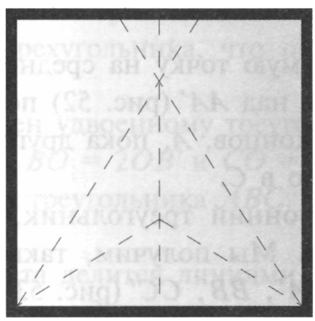


Рис. 51

Получается сгиб, проходящий через середины двух других сторон и перпендикулярный к ним. На этой *средней линии квадрата* берем какую-либо точку и делаем такие сгибы, которые проходят через эту точку и через углы квадрата, лежащие по обе стороны средней линии. Таким образом получаем *равнобедренный треугольник*, в *основании* которого лежит сторона квадрата. Средняя линия делит равнобедренный треугольник на два совпадающих при наложении и прямоугольных треугольника. Она же делит угол при *вершине* равнобедренного треугольника пополам.

Задача 78-я.
Правильный треугольник

Из бумажного квадрата сгибанием получить равносторонний треугольник.

Решение
Возьмем на средней линии квадрата такую точку, чтобы расстояния ее от двух углов квадрата были равны его стороне, и сделаем сгибы, как и в задаче 77-й. В таком случае получим равносторонний треугольник (рис. 52).

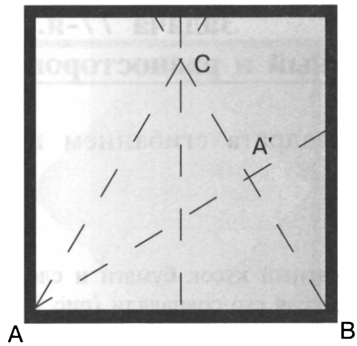


Рис. 52

Замечание. Требуемую точку на средней линии квадрата найти легко. Для этого надо над AA' (рис. 52) повертывать основание AB около одного из его концов, A, пока другой его конец, B, не упадет на среднюю линию в C.

Сложим равносторонний треугольник, накладывая каждую из сторон на основание. Мы получим, таким образом, три высоты этого треугольника: AA', BB', CC' (рис. 53).

Вот некоторые свойства равностороннего треугольника, которые можно вывести из рассмотрения полученного нами рис. 53:

Каждая из высот разделяет треугольник на два совпадающих при наложении прямоугольных треугольника.

Они делят стороны пополам и перпендикулярны к ним.

Они проходят через одну общую точку.

Пусть высоты AA' и CC' встречаются в O. Проведем BO и продолжим ее до встречи с AC в B'. Теперь докажем, что BB' есть третья высота. Из треугольников $C'OB$ и BOA' находим что $OC' = OA'$ и убеждаемся, что $\triangle OBC' = \triangle A'BO$. Затем, из треугольников ABB' и $CB'B$ следует, что $\angle AB'C = \angle BB'C$, т.е. каждый из них

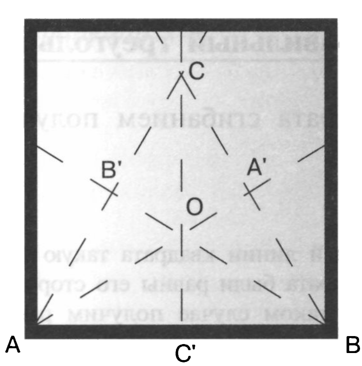


Рис. 53

есть прямой угол. Значит, BOB' есть высота равностороннего треугольника ABC. Она также делит AC пополам в B'.

Можно, сходно с предыдущим, показать, что OA, OB и OC равны и что также равны OA', OB' и OC'.

Поэтому из O, как центра, можно описать окружности, которые пройдут соответственно через A, B, и C и через A', B' и C'. Последний круг касается сторон треугольника.

Равносторонний треугольник ABC делится на шесть совпадающих при наложении прямоугольных треугольников, углы которых при точке O все равны, и на три таких совпадающих при наложении симметричных четырехугольника, что около них можно описать окружности.

Треугольник AOC равен удвоенному треугольнику $A'OC$; отсюда $OA = 2OA'$. Аналогично $BO = 2OB'$ и $CO = 2OC'$. Значит, радиус круга, описанного около треугольника ABC, вдвое больше радиуса вписанного круга.

Прямой угол A квадрата делится линиями AO и AC на три равных части. Угол BAC равен $\frac{2}{3}$ прямого угла. Углы $C'AO$ и OAB'

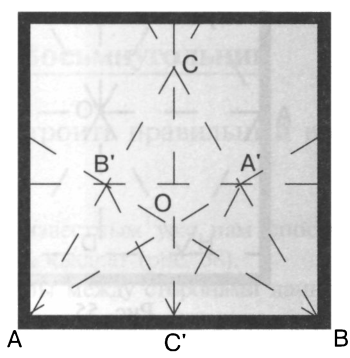


Рис. 54

равны $\frac{1}{3}$ прямого угла каждый. То же относится к углам при B и C.

Шесть углов при O равны $\frac{2}{3}$ прямого каждый.

Перегните бумагу по линиям $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ (рис. 54). В таком случае $A'B'C'$ есть равносторонний треугольник. Он равен по площади четверти треугольника ABC.

$A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ параллельны собственно AB, BC, CA и равны половинам их.

$AC'A'B'$ есть ромб; $C'BA'B'$ и $CB'C'A'$ также.
$A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ делят соответственные высоты пополам.

Замечание. Равносторонний треугольник еще называют *правильным*, так как все его одноименные элементы равны (стороны, углы, высота и т.д.).

Задача 79-я.
Шестиугольник

Из квадрата получить правильный шестиугольник.

Решение
Перегибаем квадрат через середины противоположных сторон (рис. 55). Получаем линии *AOB* и *COD*. На сгибах *OA* и *OB* строим известным нам уже способом равносторонние треугольники *AOE, AOH, BOF, BOG*.

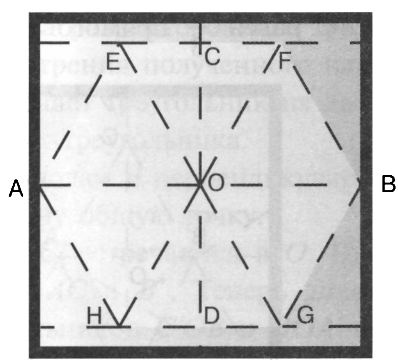


Рис. 55

Делаем сгибы *EF* и *HG*.
Многоугольник *AHGBEF* и будет правильный шестиугольник, в чем каждый без труда убедится сам. Наибольшая ширина многоугольника есть, очевидно, *AB*.
Фигура представляет образец орнамента из равносторонних треугольников и правильных шестиугольников (рис. 56).
Можно, в свою очередь, разделить шестиугольник на равные правильные шестиугольники и равносторонние треугольники (рис. 57), делая перегибы через точки, делящие его стороны на три равные части. Получается красивый симметричный орнамент.
Можно получить шестиугольник еще и следующим путем: возьмем равносторонний треугольник и перегнем его так, чтобы все его вершины сошлись в центре.

Из того, что мы уже узнаем о равностороннем треугольнике, нетрудно вывести, что сторона полученного шестиугольника равна $\frac{1}{3}$ стороны взятого равностороннего треугольника. Площадь же этого шестиугольника равна $\frac{2}{3}$ площади взятого треугольника.

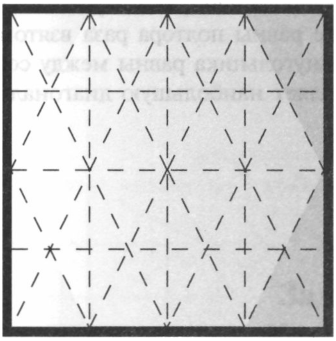


Рис. 56

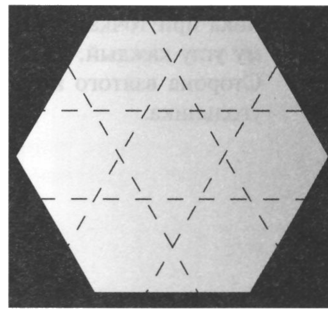


Рис. 57

Задача 80-я. Восьмиугольник

В данном квадрате построить правильный восьмиугольник.

Решение

Возьмем квадрат и известным уже нам способом посредством сгибов впишем в него другой квадрат (рис. 58).

Разделим пополам углы между сторонами данного и вписанного квадратов. Пусть сгибы, равноделящие эти углы, пересекаются в точках *E, F, G* и *H*.

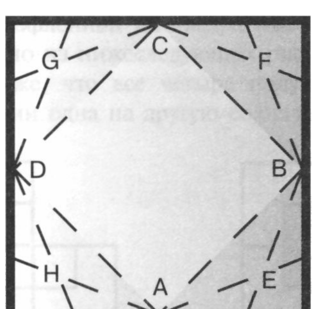


Рис. 58

Многоугольник *AEBFCGDH* и есть искомый правильный восьмиугольник. Действительно, треугольники *ABE, BFC, CGD* и *DHA* в нем равнобедренные и при наложении совпадают. Значит, стороны полученного восьмиугольника равны. Углы его тоже равны. В самом деле, каждый из углов при вершинах *E, F, G, H* тех же треугольников равен полтора раза взятому прямому углу, так как углы при основании этих треугольников равны четверти прямого угла. Отсюда ясно, что и углы восьмиугольника при точках *A, B, C* и *D* также равны полтора раза взятому прямому углу каждый, т.е. все углы восьмиугольника равны между собой.

Сторона взятого квадрата представляет наибольшую диагональ восьмиугольника.

Разрезывание и переложение фигур

Задача 81-я. Как вырезать?

Фигура состоит из трех равных квадратов, расположенных следующим образом:

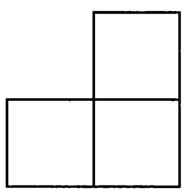


Рис. 59

Вырезать из этой фигуры такую часть, чтобы, приложив ее к оставшейся части, получить внутри полный квадрат.

Решение

При решении этой задачи можно пользоваться листом картона или бумаги (лучше всего графленной на квадратные клетки). Как сделать требуемую вырезку, видно из нижеследующих рисунков.

Нетрудно видеть также, что все четыре полученные из трех квадратов фигуры при наложении одна на другую совпадают.

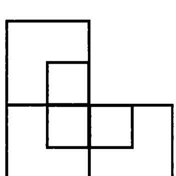


Рис. 60

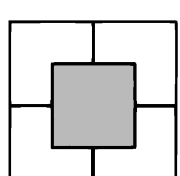


Рис. 61

Задача 82-я.
Из прямоугольника квадрат

Кусок бумаги или картона имеет форму прямоугольника, одна сторона которого равна 4, а другая 9 единицам длины. Требуется разрезать этот прямоугольник на 2 равные части так, чтобы, сложив их известным образом, получить квадрат.

Решение

Решение вопроса видно из следующих рисунков:

Эта задача представляет геометрическое толкование того, что $4 \times 9 = 6 \times 6$.

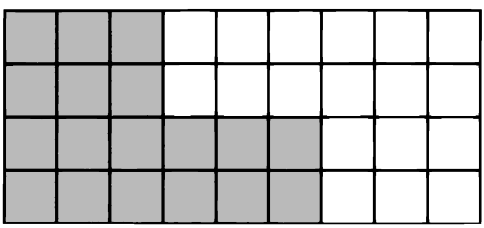


Рис. 62

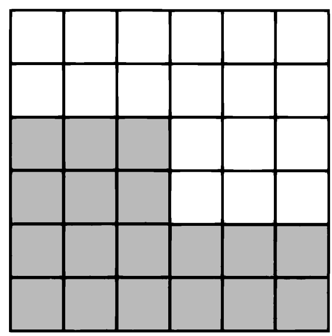


Рис. 63

Задача 83-я.
Квадрат из 20 равных треугольников

Разрезать кусок бумаги, представляющий собой правильный квадрат, на 20 равных треугольников.

Решение

1) Середины сторон квадрата соединим прямыми с противоположными вершинами квадрата; 2) проведем линии, параллельные проведенным линиям соединения; 3) в полученных прямоугольниках проведем диагонали, и тогда данный квадрат будет разбит на 20 *прямоугольных* треугольников, как можно видеть из приложенного рисунка (рис. 64). Нетрудно показать также в полученных треугольниках, что стороны, обнимающие прямой угол, таковы, что одна вдвое больше другой (катет равен половине другого катета).

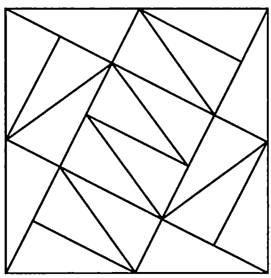


Рис. 64

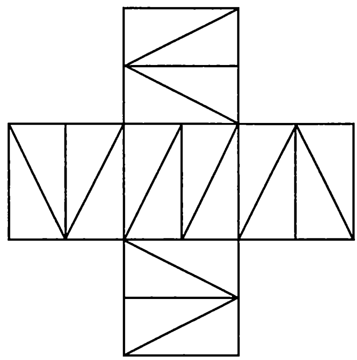


Рис. 65

Полученные 20 треугольников можно расположить в 5 равных квадратах, а эти квадраты расположить в виде креста (рис. 65).

Задача 84-я.
Теорема Пифагора

Показать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равен сумме двух квадратов, построенных на катетах.

Нарисуем 2 равных квадрата (рис. 67 и 68), стороны которых равны сумме обоих катетов данного треугольника (рис. 66).

Вслед за тем в полученных нами квадратах произведем построения, указанные на рис. 67 и 68:

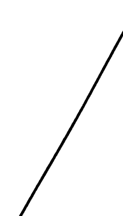


Рис. 66

Здесь от каждого из равных квадратов мы отнимаем по 4 равных треугольника. Если отнимать от равных величин поровну, то и остатки получаются равные. Эти остатки на рис. 67 и 68 заштрихованы; но на рис. 67 получаются два квадрата, построенных на катетах данного треугольника, а на рис. 68 —

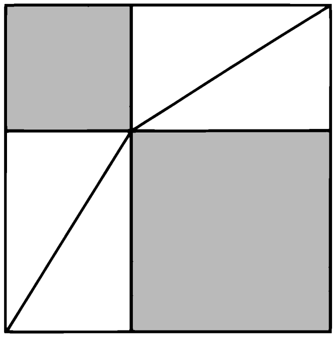


Рис. 67

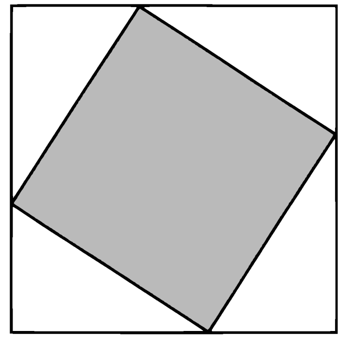


Рис. 68

квадрат, построенный на гипотенузе, и сумма первых двух квадратов равна, следовательно, второму.

Мы доказали, таким образом, знаменитую теорему Пифагора.

Другое доказательство той же знаменитой теоремы найдем, если на взятом бумажном квадрате сделаем сгибы, как указано на рис. 69.

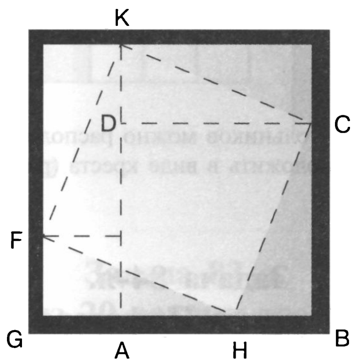


Рис. 69

Здесь *FGH* есть прямоугольный треугольник, и квадрат, построенный на *FH*, равен сумме квадратов, построенных на *FG* и *GH*.

Задача 85-я. Из квадрата три квадрата

Разрезать квадрат на 7 таких частей, чтобы, сложив их надлежащим образом, получить 3 равных квадрата.

Решение

Пусть будет *ABCD* (рис. 70) данный квадрат. Отложим на его стороне линию *AE*, равную половине диагонали этого квадрата. Соединим *D* с *E* и на полученную линию *DE* опустим перпендикуляры *AF* и *CG*. Затем откладываем отрезки *GH, GK, FL,* все равные *AF*, и заканчиваем построение линиями параллельными или перпендикулярными *AF*, как указано на рисунке 70.

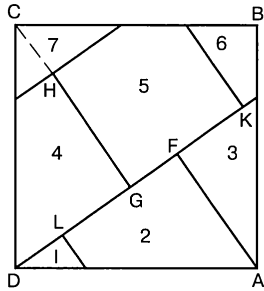


Рис. 70

Если разрезать теперь по проведенным линиям квадрат и сложить затем все полученные части так, как указано на рисунке 71, то и получим 3 искомых квадрата.

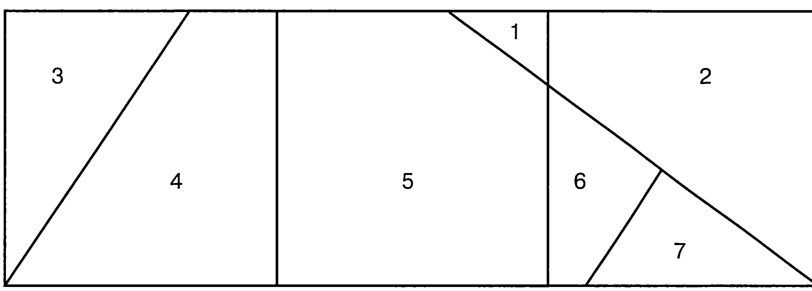


Рис. 71

Замечание. Рассматриваемая задача может быть сведена к таким:

1. Разрезать квадрат на наименьшее число частей, которые, соответственно сложенные, давали бы некоторое число равных между собой квадратов.

2. Разрезать квадрат на такие части, из которых можно было бы составить данное число равных квадратов.

Задача 86-я.
Из квадрата два квадрата

Разрезать квадрат на 8 таких частей, чтобы, сложив их соответственным образом, получить два квадрата, из которых один был бы вдвое больше другого.

Решение

Из прилагаемого чертежа (рис. 72) видно, как нужно разрезать квадрат. Линия *AF, CG* и точка *L* определяются так же, как и в предыдущей задаче. $AE = \frac{1}{2}\,BD$, $AF \perp DE$, $CG \perp DE$.

Затем на сторонах квадрата проводятся *GH* и *GI* (рис. 72) и берется $HK = GH$. Таким образом получается 8 частей, из которых и составляются требуемые квадраты.

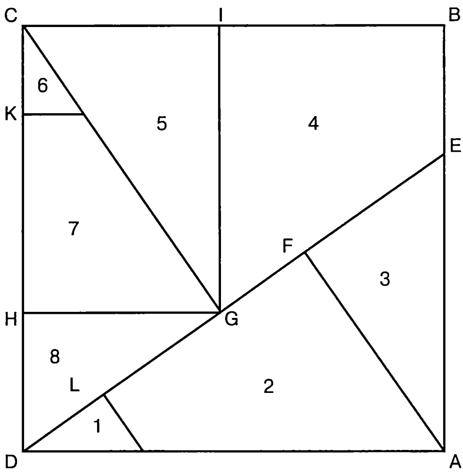


Рис. 72

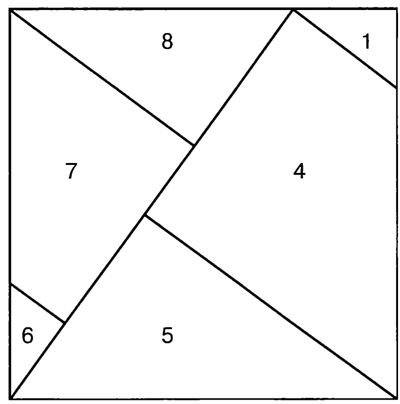


Рис. 73

Один из них представлен на рисунке 73, а другой есть средний на рисунке 74.

Задача 87-я.
Из квадрата три квадрата

Разрезать квадрат на такие 8 частей, чтобы, соответственно сложенные, они составили 3 квадрата, площади которых были бы пропорциональны числам 2, 3 и 4.

Решение

Квадрат разрезается точно так же, как и в предыдущей задаче (рис. 72). Из полученных 8 частей составляются 3 требуемых квадрата так, как на рисунке 74.

По данным решениям-рисункам нетрудно доказать правильность этих построений.

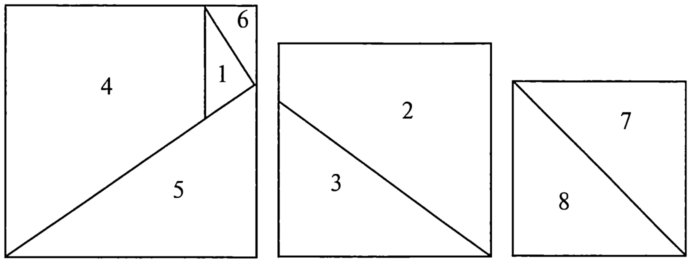


Рис. 74

Задача 88-я. Разрезывание шестиугольника

Разрезать правильный шестиугольник на 5 таких частей, чтобы, соответственно сложенные, они образовали квадрат.

Решение

Разрезаем шестиугольник сначала по диагонали и складываем полученные две половины так, чтобы они образовали параллелограмм *ABFE* (рис. 75). Из точки *A*, как из центра, радиусом, равным средней пропорциональной между длиной *AE* и высотой параллелограмма, проводится окружность, которая пересечет *BF* в точке *G*. Затем из точки *E* опускаем перпендикуляр *EH* на продолжение *AG* и проводим прямую *IK* па-

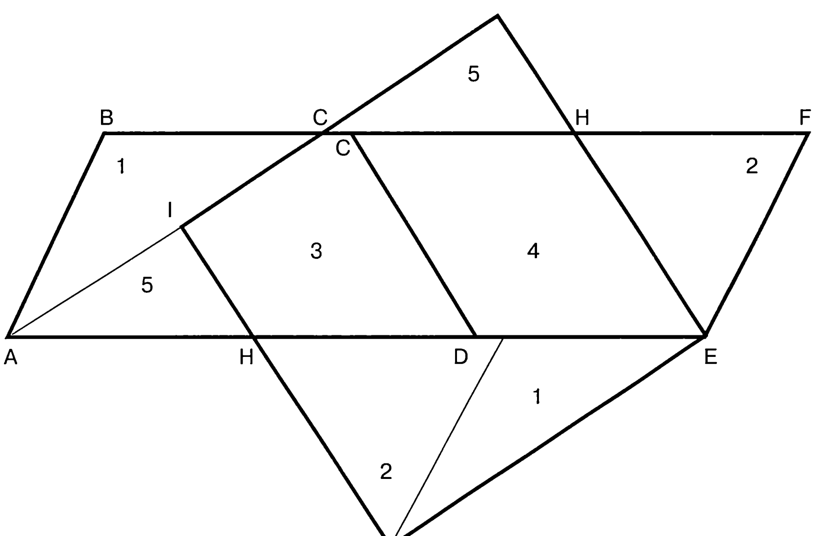


Рис. 75

раллельно *EH* и на расстоянии от нее, равном *AG*. Таким путем шестиугольник оказывается разрезанным на 5 таких частей, из которых можно образовать квадрат. Не разъясняем более этой задачи, так как предназначаем ее для знающих курс элементарной геометрии.

Задача 89-я.
Ханойская башня. — Тонкинский вопрос

Возьмем 8 деревянных, или из толстого картона, кружков уменьшающегося диаметра и 3 вертикально укрепленные на пластинке палочки (стержни). Кружки снабжены в центре отверстиями, и их накладывают, начиная с наибольшего, на одну из палочек *A* так, что получается род усеченного конуса. Это и есть Ханойская башня в 8 этажей (рис. 76).

Требуется всю эту башню с палочки *A* перенести на палочку *B*, пользуясь третьей палочкой (III на нашем рисунке) как вспомогательной и соблюдая следующие условия: 1) не переносить за один раз более одного кружка; 2) класть снятый кружок или на ту палочку, которая свободна, или накладывать его на кружок большего диаметра. Надевать на какую-либо из палочек больший кружок поверх меньшего — нельзя.

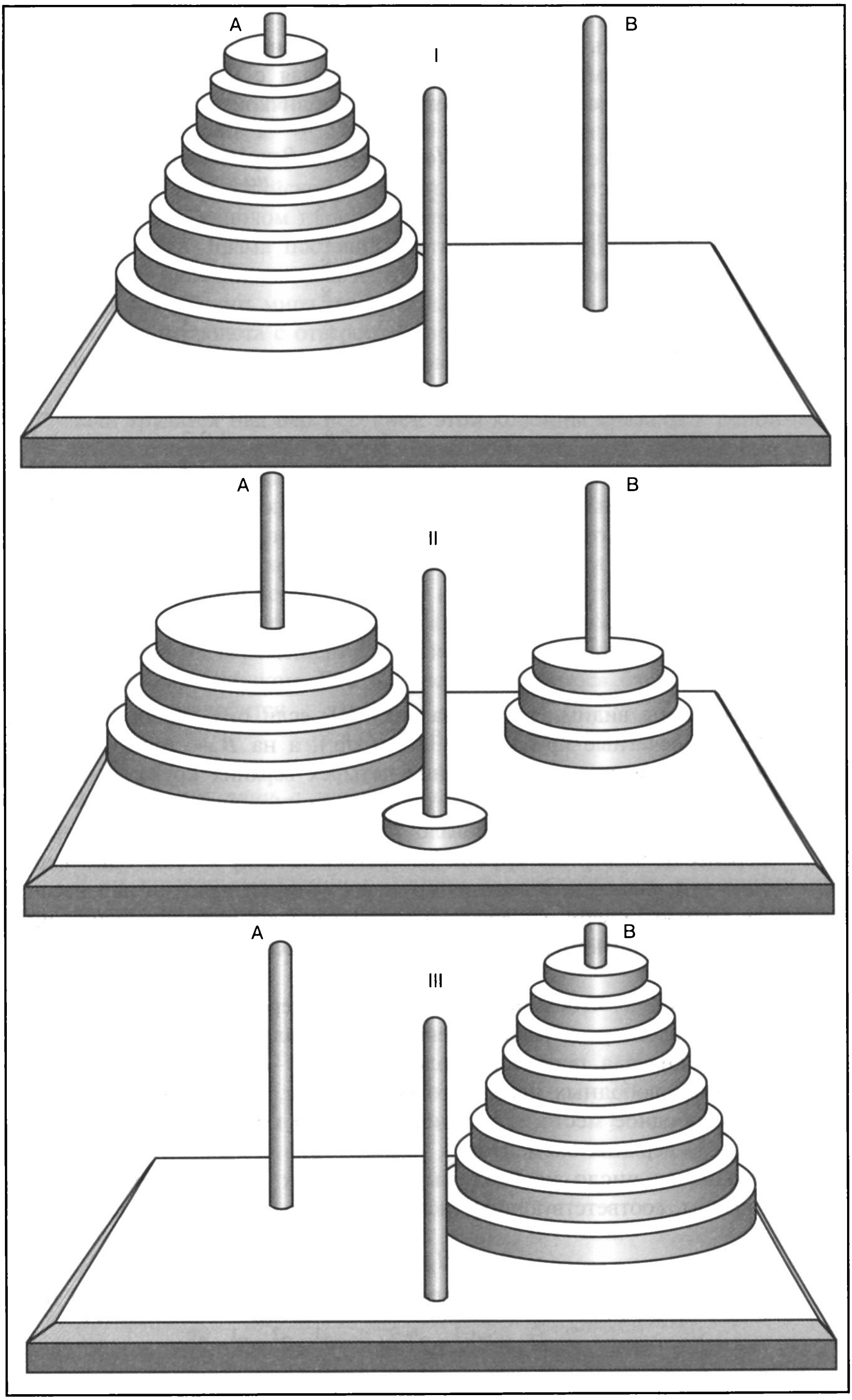


Рис. 76

Решение

Чтобы показать процесс правильного перенесения кружков, обозначим кружки цифрами 1, 2, 3 .... 7, 8, начиная с наименьшего. Изобразим процесс перенесения нижеследующей табличкой:

	Палочка А	*Вспомогательная палочка*	*Палочка В*
до начала	1,2,3,4,5,6,7,8	—	—
после 1-го перенесения:	2,3, ... 8	1	—
2-го	3,4, ... 8	1	2
3-го	3,4, ... 8	—	1,2
4-го	4,5, . . 8	3	1,2
5-го	1,4,5, . . 8	3	2
6-го	1,4,5, . . 8	2,3	—
7-го	4,5, . . 8	1,2,3	—
8-го	5,6,7,8	1,2,3	4
9-го	5,6,7,8	2,3	1,4
10-го	2,5,6,7,8	3	1,4
11-го	1,2,5,6,7,8	3	4
12-го	1,2,5,6,7,8	—	3,4
13-го	2,5,6,7,8	1	3,4
14-го	5,6,7,8	1	2,3,4
15-го	5,6,7,8	—	1,2,3,4

и т.д.

Отсюда мы видим, что на палочку III, если она свободна, надеваются только нечетные кружки (1, 3, 5 и пр.), а на *В* — только четные. Так что, например, для перенесения четырех верхних кружков нужно было сперва перенести 3 верхних на вспомогательную палочку — что, как видно из таблицы, потребовало 7 отдельных переложений, — затем мы перенесли четвертый кружок на третью палочку — еще одно переложение — и, наконец, 3 верхних кружка со второй палочки перенесли на ту же третью поверх четвертого кружка (причем первая палочка играла у нас роль вспомогательной), что опять потребовало 7 отдельных переложений.

Итак, вообще: чтобы при таких условиях перенести колонну из n каких-нибудь элементов, расположенных вертикально в убывающем порядке, нужно сначала перенести колонну из (n — 1) верхних элементов на одно из свободных мест, потом основание, т.е. n-й элемент — на другое свободное место и, наконец, на то же место опять всю колонну из (n — 1) верхних элементов.

Обозначая число необходимых отдельных перенесений буквой $П$ со значком, соответствующим числу элементов, имеем, следовательно:

$$П_n = 2 \cdot П_{n-1} + 1.$$

Понижая значение n до единицы и делая подстановку, легко находим:

$$П_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Получаем, следовательно, сумму n первых членов геометрической прогрессии, которая дает:

$$П_n = 2^n - 1.$$

Таким образом, в случае Ханойской башни, т.е. при 8 *кружках, нужно сделать* 2^8 *— 1, или* 255 *отдельных переложений кружков.*

Если вместо 8 кружков возьмем 64 кружка, то получим задачу, связанную с древнеиндийской легендой. Легенда эта гласит, будто в городе Бенаресе под куполом главного храма, в том месте, где находится середина Земли, бог Брама поставил вертикально на бронзовой площадке 3 алмазные палочки, каждая длиною в локоть и толщиною в корпус пчелы. При сотворении мира на одну из этих палочек были надеты 64 кружка из чистого золота с отверстием посредине — так что они образовали род усеченного конуса, так как диаметры их шли в возрастающем порядке, начиная сверху. Жрецы, сменяемые один другим, днем и ночью без устали трудятся над перенесением этой колонны кружков с одной палочки на третью, пользуясь второй как вспомогательной, причем они обязаны соблюдать уже указанные условия, т.е. первое: не переносить за один раз более одного кружка и второе: класть снятый кружок или на свободную в этот момент палочку, или накладывать его на кружок только большего диаметра. Когда, соблюдая все эти условия, жрецы перенесут все 64 кружка с первой палочки на третью, наступит конец мира...

Допустим, что перенос одного кружка продолжается всего одну секунду, тогда на перемещение Ханойской башни из 8 кружков потребуется 4 минуты с лишком. Что же касается переноса башни в 64 кружка, то на это понадобится

18 446 744 073 709 551 615 сек.

А это значит *пять с лишком миллиардов веков (столетий).* Запомнить это число легче в таком виде: 2^{64} — 1.

Мир Брамы, очевидно, продержится еще очень и очень много лет...

Если кружки и палочки в данной задаче заменить входящими друг в друга колпачками, то получаем старинную восточную игру, называемую *Тонкинским вопросом*, или *Китайскими шляпами.*

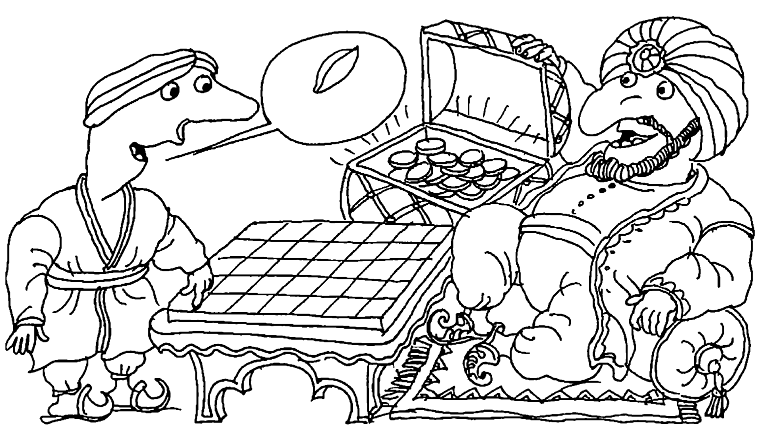
Шахматы

Арабский писатель Асафад рассказывает:

Брамин Сесса, сын Дагера, придумал игру в шахматы, где король, хотя он и самая важная фигура, не может ступить шагу без помощи и защиты своих подданных пешек и других фигур. Изобрел он эту игру в забаву повелителю Индии Шерану. Царь Шеран, восхищенный выдумкой брамина, сказал, что даст ему *все, что только брамин захочет*.

— В таком случае, ваше величество, — сказал Сесса, — прикажите дать мне столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить зерно, на вторую — 2, на третью — 4, на четвертую — 8 и т.д., все удваивая, пока не дойдут до 64-й клетки.

Повелитель Индии не смог этого сделать! Число требуемых зерен выражалось двадцатизначным числом 18 446 744 073 709 551 615, т.е. $2^{64} - 1$.



Чтобы удовлетворить «скромное желание» брамина, нужно было бы *восемь раз засеять всю поверхность земного шара*, в том числе все пустыни и все вечные ледники, и восемь раз собрать жатву. Тогда бы только получилось нужное для Сессы количество зерен.

Обещать «все, что хочешь», легко, но трудно или вообще невозможно выполнить!

Задача 90-я. О восьми королевах

На шахматной доске, состоящей из 64 клеток, расставить 8 королев так, чтобы ни одна из них не могла брать другую. Другими словами, на 8 клетках шахматной доски поставить 8 королев так, чтобы две из них не были расположены ни на одной линии, параллельной какому-либо краю, ни на одной из диагоналей доски.

Решение

На рисунке 77 содержится одно из решений.

Положение I

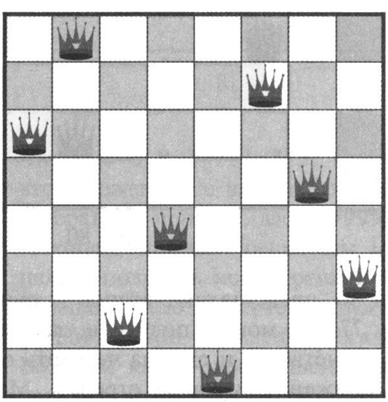


Рис. 77

Положение II

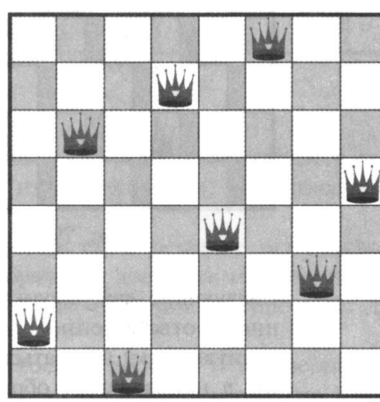


Рис. 78

Обозначим это решение восемью цифрами — **6 8 2 4 1 7 5 3,** где каждая цифра означает высоту королевы в каждой колонне доски, т.е. **6** показывает, что королева находится в первой колонне на шестой клетке, считая снизу; **8** — что королева находится во второй колонне на восьмой клетке, считая снизу и т.д. Мы и впредь вертикальные ряды клеток будем называть **колоннами**, а горизонтальные **линиями**. Линии мы тоже будем обозначать числами от 1 до 8 и считать их от низа к верху. Таким образом, записанное нами выше первое решение с помощью одного ряда чисел было бы правильнее записать так:

Линии	6	8	2	4	1	7	5	3
Колонны	1	2	3	4	5	6	7	8

Если мы повернем доску на четверть окружности в направлении, обратном движению часовой стрелки, то из первого решения получим ему **соответственное**, которое представлено у нас на рисунке 78.

Чтобы получить это соответственное решение численно из первого, достаточно расположить колонки таблички (I) так, чтобы цифры первой строки шли в убывающем порядке. Получим:

Линии	8	7	6	5	4	3	2	1
Колонны	2	6	1	7	4	8	3	5

Сохраняя только цифры второй линии таблички (II), можем сокращенно обозначить это решение числом **2 6 1 7 4 8 3 5.**

Положение III

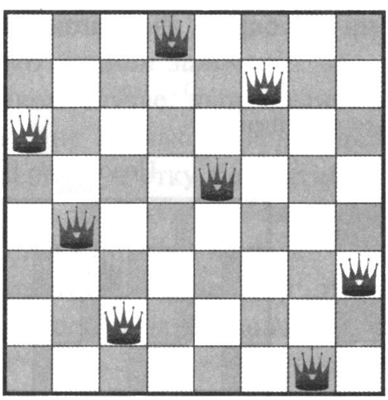


Рис. 79

Положение IV

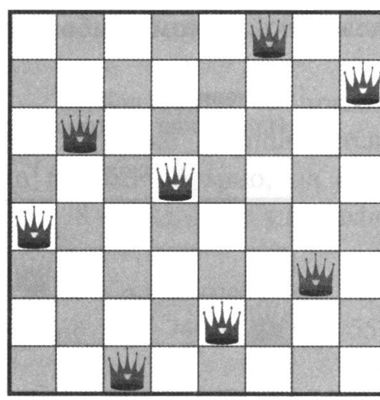


Рис. 80

Следующие два рисунка, 79 и 80, представляют второе и третье решение, соответственное рисунку 77. Их можно получить, заставляя шахматную доску вращаться еще на четверть и еще на четверть окружности, в направлении обратном движению часовой стрелки. Можно вывести также подобно предыдущему (и обозначить численно) положение III (рис. 79) из положения II (рис. 78), а положение IV из положения III.

Но можно и прямо положение III получить из I, а положение IV — из II.

Для этого поступаем так. Решения на рисунках 77 и 78 обозначены у нас числами

6 8 2 4 1 7 5 3 и **2 6 1 7 4 8 3 5.**

Напишем эти числа в обратном порядке:

3 5 7 1 4 2 8 6 и **5 3 8 4 7 1 6 2**

и вычтем каждую цифру этих чисел из 9, получим:

6 4 2 8 5 7 1 3 и **4 6 1 5 2 8 3 7.**

Это и будут численные обозначения решений на рисунках 79 и 80.

Таким образом, в общем случае иные решения задачи о королевах на некоторой доске дают место четырем **соответственным** решениям. Решения эти носят название **непрямых**.

На рисунке 81 дано **полупрямое** решение задачи. Особенность его заключается в том, что из него получается только **одно** соответственное решение (рис. 82). В самом деле, если повернуть шахматную доску на полуокружность, то получаем опять то же расположение.

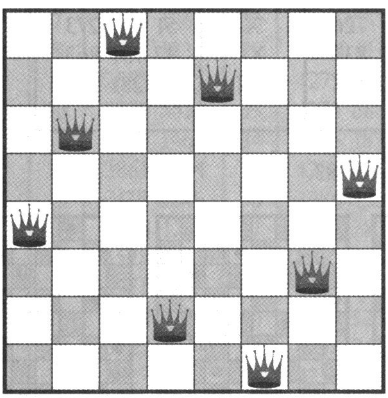


Рис. 81

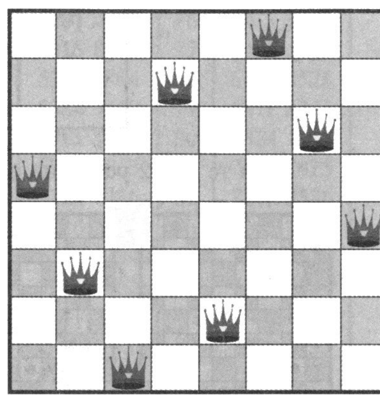


Рис. 82

Число **4 6 8 2 7 1 3 5,** изображающее это решение, отличается тем, что, сложенное с числом, состоящим из трех же цифр, но написанным в обратном порядке, дает **9999999 9.**

Наконец, **прямым** решением мы назовем такое решение, из которого нельзя получить новых решений, поворачивая доску на четверть или на большее число четвертей окружности. Таких решений не существует для обыкновенной шахматной доски.

Возьмем какое-либо решение задачи восьми королев и перевернем на фигуре порядок линий или колонн. Или, что сводится к тому же, напишем числовое обозначение решения в обратном порядке — мы получим **решение, обратное данному,** и легко убедиться, что это решение отличается от какого-либо из соответственных решений. То же решение получается еще геометрически, если поставить шахматную доску с 8 королевами против зеркала и смотреть в это последнее или же вообразить себе доску перевернутой. Из рассмотрения соответственных и обратных решений совместно с простыми следует:

1. Всякое простое непрямое решение дает 4 соответственных решения и 4 обратных — всего *восемь* решений.

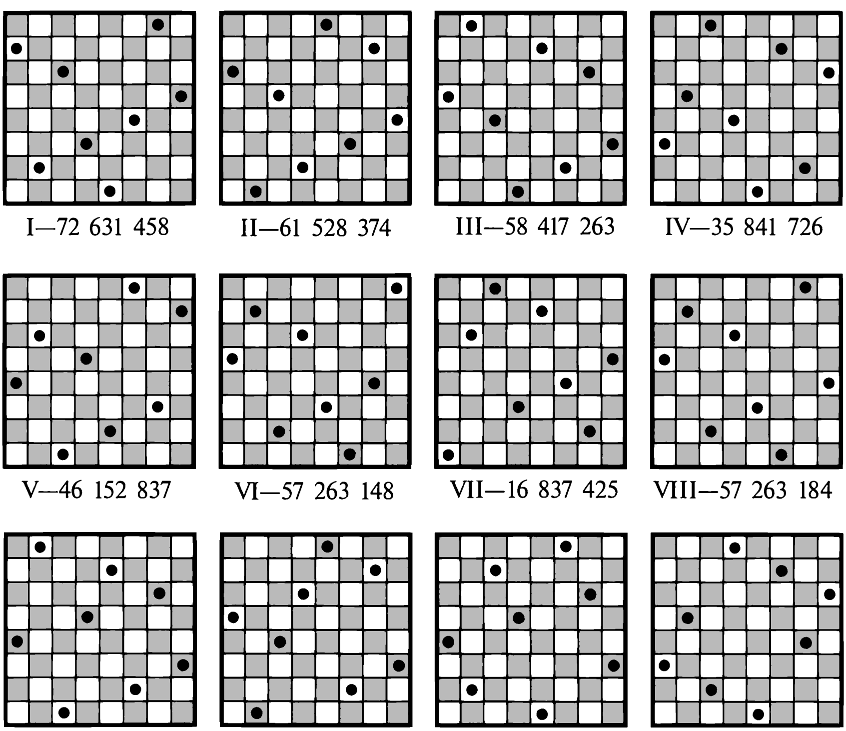
2. Всякое простое полупрямое решение дает 2 соответственных и 2 обратных решения — всего *четыре.*

3. Всякое простое прямое решение дает еще только одно обратное — всего *два.*

Опуская способы отыскания самых простейших решений задачи, дадим эти решения прямо. При этом заметим, что существует **12 простых первоначальных решений,** которые мы располагаем в следующей табличке:

№ по порядку	Обозначения	№ по порядку	Обозначения
I	72 631 485	VII	16 837 425
II	61 528 374	VIII	57 263 184
III	58 417 263	IX	48 157 263
IV	35 841 726	X	51 468 273
V	46 152 837	XI	42 751 863
VI	57 263 148	XII	35 281 746

Или те же 12 решений на рисунке 83.



I—72 631 458 II—61 528 374 III—58 417 263 IV—35 841 726

V—46 152 837 VI—57 263 148 VII—16 837 425 VIII—57 263 184

IX—48 157 263 X—51 468 273 XI—42 751 863 XII—35 281 746

Рис. 83

Все эти простые решения непрямые, и каждое из них дает, как выше объяснено, 8 решений, последнее же XII — полупрямое и дает только четыре решения. Всего, следовательно, получается 92 решения.
Ниже приведена таблица всех этих 92 решений.

Таблица всех 92-х решений задачи о восьми королевах

1	1586 3724	24	3681 5724	47	5146 8273	70	6318 5247
2	1683 7425	25	3682 4175	48	5184 2736	71	6357 1428
3	1746 8253	26	3728 5146	49	5186 3724	72	6358 1427
4	1758 2463	27	3728 6415	50	5246 8317	73	6372 4815
5	2468 3175	28	3847 1625	51	5247 3861	74	6372 8514
6	2571 3864	29	4158 2736	52	5261 7483	75	6374 1825
7	2574 1863	30	4158 6372	53	5281 4736	76	6415 8273
8	2617 4835	31	4258 6137	54	5316 8247	77	6428 5713
9	2683 1475	32	4273 6815	55	5317 2864	78	6471 3528
10	2736 8514	33	4273 6851	56	5384 7162	79	6471 8253
11	2758 1463	34	4275 1836	57	5713 8642	80	6824 1753
12	2861 3574	35	4285 7163	58	5714 2863	81	7138 6425
13	3175 8246	36	4286 1357	59	5724 8136	82	7241 8536
14	3528 1746	37	4615 2837	60	5726 3148	83	7263 1485
15	3528 6471	38	4682 7135	61	5726 3184	84	7316 8524
16	3571 4286	39	4683 1752	62	5741 3862	85	7382 5164
17	3584 1726	40	4718 5263	63	5841 3627	86	74258136
18	3625 8174	41	4738 2516	64	58417263	87	7428 6135
19	3627 1485	42	4752 6138	65	6152 8374	88	7531 6824
20	3627 5184	43	4753 1682	66	6271 3584	89	8241 7536
21	3641 8572	44	4813 6276	67	6275 4853	90	8253 1746
22	3642 8571	45	4815 7263	68	6317 5824	91	8316 2574
23	3681 4752	46	4853 1726	69	6318 4275	92	8418 6275

Заметим, что таблица эта содержит:

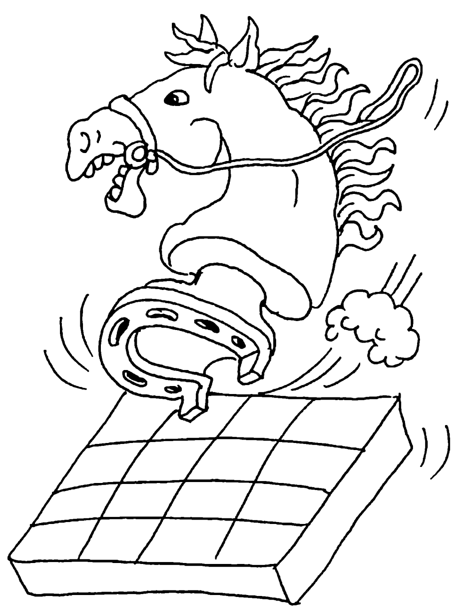
4 решения, начинающиеся или оканчивающиеся цифрами 1 или 8
8 решений, начинающихся » » » » » » 2 или 7
16 » » » » » » » » » » » 3 или 6
18 » » » » » » » » » » » 4 или 5

В приведенной таблице все решения расположены в числовом порядке. Таблицу эту можно построить самому, пользуясь при этом весьма простым систематическим приемом: помещают сначала королеву на самую низкую клетку первой колонны слева, затем ставят королеву во второй колонне опять на самую низкую по возможности клетку и т.д., всегда стремясь поместить в следующей колонне королеву настолько низко, насколько это позволяют королевы, стоящие слева. Когда наступит такой момент, что в колонне нельзя поместить королеву, — подымают королеву в предыдущей колонне на одну, две, три... клетки и продолжают размещать остальных королев, руководствуясь всегда раз принятым правилом не поднимать королеву выше, как только в том случае, если справа нет совсем места для следующей королевы.

Всякий раз, когда решение найдено, его записывают и, таким образом, решения будут следовать одно за другим тоже в постепенном числовом порядке. Таблицу, полученную таким путем, можно проверять, группируя соответственные и обратные решения, которые можно вывести из первого и т.д.

Задача 91-я.
О ходе шахматного коня

Требуется обойти шахматным конем все 64 клетки шахматной доски так, чтобы на каждой клетке он побывал только один раз.



Решение

Существует способ находить сколько угодно таких решений (число их, однако, не бесконечно). Одно из таких решений представлено на рис. 84.

Конь ходит в порядке, указанном числами. Так как из последнего места 64 он может перейти на место 1, то этот полный ход есть возвратный (*in se rediens*).

Таково классическое решение задачи о ходе шахматного коня. Сейчас мы укажем на приемы иных, более симметричных и методических решений.

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Рис. 84

Прием I. Разделим шахматную доску на 2 части: *внутреннюю*, состоящую из 16 клеток, и *краевую*, представляющую собой род бордюра шириною в 2 клетки (рис. 85). Каждые 12 клеток краевой доски, обозначенные у нас одинаковыми буквами, дают один из частных зигзагообразных ходов шахматного коня вокруг доски; точно так же 4 одноименные клетки внутренней части доски дают частный замкнутый ход шахматного коня в виде квадрата или в виде ромба.

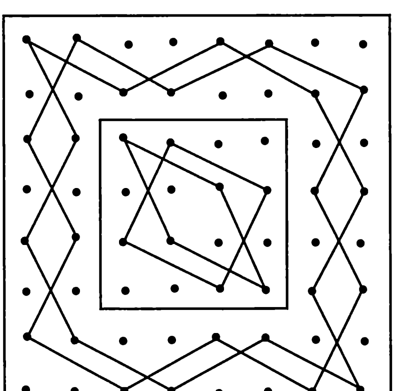


Рис. 85

a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*a'*	*b'*	*c'*	*d'*	*d*	*c*
d	*c*	*c'*	*d'*	*a'*	*b'*	*b*	*a*
a	*b*	*b'*	*a'*	*d'*	*c'*	*c*	*d*
c	*d*	*d'*	*c'*	*b'*	*a'*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*

Рис. 86

Рисунок 86 представляет два зигзагообразных частных хода коня на краевой части доски. Эти ходы обозначим буквами *a* и *b*. Там же начерчены и два хода на *внутренней* части доски. Эти ходы назовем *a'* и *b'* соответственно обозначениям на рис. 86.

Закончив какой-либо частный круговой ход по *краевой* части доски, конь может перескочить на любой из трех ходов *другого* наименования на *внутренней* части доски. Нетрудно в самом деле (стоит лишь взять в руки шахматную доску и коня) найти, и притом различными способами, четыре пути из 16 клеток, таких, как *ab', bc', cd', da'*.

В самом деле, всмотритесь в данные выше рисунки 85 и 86 или поставьте перед собой шахматную доску и вы увидите, что для получения частного хода коня в 16 клеток, надо только *краевой* частный круговой ход из 12 клеток соединить с *внутренним* ходом, но *другого* наименования, прямой чертой, уничтожая при этом в каждом из частных круговых (возвратных) ходов замыкающую линию. Так получим 4 частных круговых хода по 16 клеток. Эти 4 частных хода по 16 клеток опять можно соединить различным образом и таким образом получить полный ход шахматного коня в 64 клетки.

Итак, ставят коня на какую-либо клетку, например, *краевой* части доски и описывают по ней путь из 12 клеток; вслед за тем конь перепрыгивает на клетку одного из трех (*не одноименных*) *внутренних* путей, проходит этот путь в любом направлении и перескакивает опять на краевую часть, где снова делает следующий частный зигзагообразный ход из 12 клеток, вновь перескакивает на один из внутренних, не одноименных с предыдущим, путей, описывает его, переходит опять на новый краевой путь и т.д., пока не обойдет все 64 клетки.

Способ решения задачи настолько прост и легок, что не нуждается в более подробных разъяснениях и указаниях.

Прием II. Можно эту же задачу решить и другим, не менее легким приемом. Здесь для удобства доска делится на 4 части по 16 клеток в каждой, двумя медианами (серединными линиями) (рис. 87). 16 клеток каждой четверти, обозначенных одинаковыми буквами, можно соеди-

a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*
a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*

Рис. 87

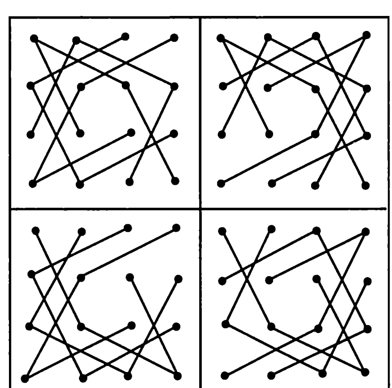


Рис. 88

нить посредством сторон двух квадратов и двух ромбов, не имеющих ни одной общей вершины (рис. 88). Соединяя, в свою очередь, одноименные квадраты и ромбы всех четвертей доски, можно получить 4 частных круговых возвратных хода по 16 клеток. Соединяя затем эти последние ходы, получим полный ход коня в 64 клетки.

Полезно сделать еще следующие замечания. На каждой четверти доски ромбами и квадратами обозначены по 4 хода коня. Если соединить ромбы и квадраты, обозначенные одинаковыми буквами во всех четырех четвертях доски, получим по 4 частных возвратных хода по 16 клеток.

То же самое относится и к тому случаю, когда какая-либо клетка, кроме второй, сообщается ходом коня с первой. Итак, цепь, или ряд, ходов можно видоизменять, не разрывая ее.

Число путей, которыми конь может обойти доску и которые можно найти указанными выше приемами, не бесконечно. Но оно настолько огромно, что трудно его представить. Вот что на этот счет говорят сами математики: «Занимаясь числом решений, которое может дать эта задача, можно утверждать, что, помещая 50 путей на странице, понадобилось бы *не менее десяти тысяч стоп бумаги*, чтобы написать их все!»

Этими беглыми указаниями решений задачи о ходе шахматного коня мы и ограничимся, предоставляя желающим заняться этой задачей подробнее обратиться к специальным сочинениям.

Карты

Кажется, ни одна игра не пользуется бóльшим распространением среди современного человечества, как игра в карты. Очень жаль только, что во многих случаях вместо приятных и развивающих сообразительность игр картами пользуются для игры на деньги, «играют» также в азартные игры, убивающие время, деньги и расстраивающие нервы.

Мы, впрочем, воспользуемся здесь колодой карт, как пользуемся ими и всюду, для другого — для интересных задач и математических развлечений. Во многих случаях карты могут быть незаменимым и дешевым пособием для выяснения многих математических вопросов и комбинаций.

Задача 92-я.
Сколько очков в трех картах

Угадать, сколько очков заключается в трех взятых кем-либо картах.

Решение

Пусть n обозначает число всех карт, a, b, c — числа очков в трех выбранных картах и p — число, которое получается, если к каждому из количеств a, b, c прибавить некоторое число карт, каждая из которых считается за 1. Числа карт, которые прибавляются к a, b и c, суть $p - a$, $p - b$, $p - c$. Если к этим числам прибавить 3 первоначально взятые карты да число оставшихся карт, которое обозначим через r, то и получим все карты, числом n, т.е.

$$(p - a) + (p - b) + (p - c) + 3 + r = n.$$

Откуда, раскрывая скобки и перенося члены, получаем:

$$a + b + c = r + (3p + 3) - n.$$

Для $n = 52$ и $p = 15$ имеем $a + b + c = r - 4$.
Для $n = 32$ и $p = 15$ имеем $a + b + c = r + 16$.

Из этого общего решения можно вывести следующее правило.
Утройте число, которое получается от прибавления ко взятым трем картам еще карт, и прибавьте к этому числу три. Затем возьмите разницу между этой суммой и числом всех карт и прибавьте ее к числу оставшихся карт или вычтите ее из этого числа, смотря по тому, будет ли полученная сумма больше или меньше всего числа карт. Таким образом всегда получите число всех очков взятых кем-либо трех карт.

Замечание 1. Для $n = 36$ и $p = 11$ получается $3p + 3 - n = 0$, а значит $a + b + c = r$.

Замечание 2. Из предыдущего можно заключить, что нет необходимости добавлять к каждой из трех выбранных карт столько именно карт, чтобы получить одно и то же число p. Можно вместо этого предложить добрать к трем картам еще карты так, чтобы получилось 3 каких-либо числа q, s, t, и тогда в выведенную раньше формулу вместо $3p$ нужно поставить сумму $q + s + t$.

Замечание 3. Если вместо трех карт взять четыре, то формула примет вид:

$$a + b + c + d = r + (4p + 4) - n.$$

Если взять пять карт, получится

$$a + b + c + d + e = r + (5p + 5) - n$$

и т.д.

Замечание 4. Может случиться, что не хватит карт для того, чтобы составить число p с каждой из взятых карт. Тогда спрашивают число q, которого недостает, и поступают далее так, как если бы всех карт в колоде было $n + q$ при остатке r, равном нулю.

Приведем пример.

Кто-либо выбрал три карты и оставил их у себя. Каждая карта имеет несколько очков. Так туз — это одно очко, пятерка — пять очков, а король — десять очков. Вообще, любая картинка это десять очков.

Пусть к очкам каждой своей карты играющий добавит из колоды столько карт, чтобы, считая их по единице, получить сумму в 15 очков.

Незаметно сосчитаем оставшиеся в колоде карты и отнимем от этого числа четыре. Получим количество очков в трех выбранных картах играющего.

Так, если были взяты тройка, дама и туз (14 очков), то добавив к ним еще 12, 5 и 14 карт (всего 31), получим, что в колоде осталось 18 карт (было 52, 52 — 3 — 31 = 18). Отнимем из восемнадцати четыре и получим искомую сумму 14 очков.

Задача 93-я. Угадайте карту

Некоторое число карт разложено в ряды. Угадать задуманную кем-либо карту.

Решение

Сначала приведем пример.

Возьмите 15 карт и разложите их в 3 ряда по 5 карт в каждом. Пусть кто-либо задумает одну какую-нибудь из этих карт и укажет только тот *ряд*, в котором находится эта карта. После этого соберите карты каждого ряда и затем сложите все карты вместе так, однако, чтобы *указанный ряд непременно попал в середину* — между картами двух остальных рядов. Потом снова разложите карты в 3 ряда в таком порядке: одну карту положите в первый ряд, вторую — во второй, третью — в третий, четвертую — в первый, пятую — во второй, шестую — в третий, седьмую — в первый и т.д. до тех пор, пока не разложите всех карт.

Разложив карты, спросите опять, в каком ряду находится задуманная карта; опять соберите карты всех трех рядов и сложите их вместе, наблюдая снова, чтобы тот ряд, где находится задуманная карта, *непременно* был посреди между двух рядов, и снова разложите в 3 ряда карты так, как уже указано выше (при второй раскладке).

Спросив теперь, в каком ряду находится задуманная карта, можно тотчас указать ее: *она будет третьей по порядку в этом ряду.*

Чтобы лучше замаскировать задачу, можно совершенно так же, как в двух предыдущих случаях, еще раз разложить карты, и тогда задуманная кем-либо карта непременно будет в среднем ряду третьей, т.е. в середине всех 15 карт. Так что с какого бы угла ни начать считать — она всегда окажется на восьмом месте.

А теперь поясним этот пример.

Чтобы убедиться в верности нашего решения, достаточно показать, что, раскладывая 3 раза карты, как указано, после третьей раскладки задуманная карта будет непременно третьей в том ряду, где она находится. В самом деле, когда мы раскладываем карты в первый раз и нам укажут ряд, в котором находится задуманная карта, то уже известно, что она есть *одна из пяти карт* этого указанного ряда. Помещая тот ряд, где находится задуманная карта, между двумя остальными рядами и раскладывая карты, как указано во второй раз, нетрудно определить, где будут находиться те 5 карт, между которыми находится задуманная карта.

1. Одна	упадет на	2-е место	третьего ряда
2. Другая	» »	3-е »	первого »
3. Третья	» »	3-е »	второго »
4. Четвертая	» »	3-е »	третьего »
5. Пятая	» »	4-е »	первого »

Обозначая через 0 карты тех рядов, где нет задуманной карты, а через 1 карты того ряда, где находится задуманная карта, находим, что после второй раскладки карты расположатся так:

1 ряд	2 ряд	3 ряд
0	0	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0
0	0	0

Следовательно, если задуманная карта находится в первом ряду, то ясно, что это третья или четвертая карта этого ряда. Поэтому после перекладывания карт еще раз так, как указано, задуманная карта упадет на третье место второго или третьего ряда. Если после второй раскладки окажется, что задуманная карта находится во втором ряду, то ясно, что это есть третья карта этого ряда и что после следующей раскладки она опять упадет на то же место. Наконец, если задуманная карта будет в третьем ряду, то ясно, что это одна из двух этого ряда, вторая или третья, и после третьей раскладки она будет третьей в первом или во втором ряду.

Все эти пояснения надо усваивать с картами в руках, хотя они и не очень трудны. Кроме того, всегда необходимо разбираться в том, что общее и что частное. Только что приведенное разъяснение, например, относится, очевидно, только к данному случаю и к данному числу карт (15). Оно не показывает, можно ли вообще при нечетном числе карт, расположенных в нечетное число равных рядов, прийти к тому, чтобы задуманная карта находилась в середине игры.

Поэтому, если захотите, попытайтесь разобраться в следующем более общем рассуждении. Оно тоже нетрудно.

Пусть будет n число карт каждого ряда и t число рядов. Задуманная карта пусть находится сначала в числе n карт *среднего ряда*. При следующей раскладке эти n карт распределятся в t рядах, и если n деленное на t дает целое частное e, то карты, в числе которых находится задуманная, распределятся в t рядах поровну, образуя группу в e карт в середине каждого ряда. Например, при 27 картах:

1-я раскладка карт			2-я раскладка карт		
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0

То же самое получится, если частное e делится также на t, а также если полученное новое частное f тоже делится на t и т.д. Таким образом, задуманная карта всегда находится в группе, занимающей середину взятой раскладки карт, если только она задумана из того ряда, который был средним в первой раскладке.

Итак, если деления на t совершаются без остатка до той поры, пока не получится частное 1, то какая-либо карта, задуманная из среднего ряда в конце концов попадет в *середину* этого среднего ряда. И когда игрок после нескольких раскладок скажет, что задуманная им карта находится опять в среднем ряду, то вы тотчас же можете ее указать.

То же самое, впрочем, относится и к случаю, когда указанные выше деления не совершаются нацело (без остатка). Тогда получаются такие поперечные ряды, в которых встречаются карты двух родов (т.е. из того ряда, в котором задумана карта, и из другого). Так, например, для $t = 5$, и $n = 9$ можем иметь:

1-я раскладка карт					2-я раскладка карт				
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Но очевидно, что и здесь после ряда соответствующих раскладок мы придем к тому, что задуманная карта в конце концов будет в самой середине взятых карт.

Усвоив хорошо общие основания карточной задачи, нетрудно всячески разнообразить ее со всяким числом карт. Все дело заключается только в том, чтобы карты одного какого-либо ряда посредством другого расположения их отделились и разместились в разные ряды. Легко показать и объяснить это на самом простом примере. Взяв, например, 16 карт и расположив их в два ряда по 8 карт, спросите кого-либо, в каком ряду находится задуманная им карта. Тогда вы уже знаете, что задуманная карта есть *одна из восьми*.

Взяв затем каждый ряд отдельно и располагая опять карты в таком порядке: одна — в первом ряду, другая — во втором, третья — в первом, четвертая — во втором и т.д., нетрудно видеть, что из этих 8 карт, где находилась задуманная карта, 4 упадут в один ряд, и 4 в другой.

Итак, если вам укажут, в каком ряду находится задуманная карта, то вы знаете, что она есть *одна из четырех* известных карт. Перекладывая соответственно карты, опять найдете, что задуманная карта будет одной из двух известных карт, и т.д., пока наконец не укажете задуманной карты.

Задача 94-я. Две карты

Угадать задуманную пару карт.

Решение

Предыдущую карточную задачу можно видоизменить следующим интересным образом. Возьмем такое число карт, которое было бы равно произведению множителей, представляющих два последовательных (отличающихся друг от друга на одну единицу) числа.

То есть надо брать или $3 \times 4 = 12$, или $4 \times 5 = 20$, или $5 \times 6 = 30$, или $6 \times 7 = 42$ карты. Разложим затем все эти карты в ряд *по две* и попросим кого-либо заметить какую-либо *пару* рядом лежащих карт. Складываем все взятые карты, наблюдая, чтобы все парные карты лежали друг за другом, а затем раскладываем их в прямоугольник, наблюдая такой порядок: сначала кладем три карты по порядку одна возле другой, четвертую — под первой, пятую — возле третьей, шестую — под четвертой, седьмую — возле пятой, восьмую — под шестой и т.д. до тех пор, пока число карт, которое кладется рядом, одна возле другой, не будет равно большему множителю (или иначе — числу, выражающему большую сторону прямоугольника), а число карт, положенных одна под другой, не будет равно меньшему множителю и т.д. Лучше всего в данном случае способ раскладки карт пояснить на примере. Пусть взято 20 карт (т.е. 4×5). Обозначим эти карты по порядку так: 1, 2, 3, ... 20.

Разложим карты по парам, дадим заметить кому-либо пару, затем сложим и будем раскладывать в прямоугольник. Раскладывание, как объяснено выше, будет происходить в следующем порядке (рис. 89):

A	1	2	3	5	7	*B*
C	4	9	10	11	13	*D*
E	6	12	15	16	17	*F*
G	8	14	18	19	20	*H*

Рис. 89

После этого спросим, в каком ряду или в каких рядах находится задуманная кем-либо пара карт, или по нашему обозначению — пара чисел (причем ряды считаются горизонтально, как указано буквами, т.е. первый ряд есть *AB,* второй — *CD*, третий — *EF*, четвертый — *GH*). Положим, укажут, что оба числа находятся в *одном ряду*, например, третьем. Тогда можно быть уверенным, что оба эти числа (или карты) находятся *рядом* и первое из них занимает третье же место в этом ряду, т.е. в данном случае задуманные числа (карты) будут 15 и 16.

Необходимо для верного решения задачи заметить числа (карты) 1 и 2 первого ряда, 9 и 10 — второго, 15 и 16 — третьего, 19 и 20 — четвертого. Эти числа (или карты) можно назвать *ключом* задачи, и при помощи их определяются числа (карты) не только в том случае, когда они находятся в одном ряду, но и в том, когда они находятся в двух различных рядах. В этом случае, когда указаны ряды, в которых находятся задуманные числа (карты), нужно взять *ключ* указанного высшего ряда, и *под* первым числом этого ключа в указанном нижнем ряду найдем одно задуманное число (карту), а *в стороне* от второго числа (карты) ключа на таком же расстоянии найдем второе задуманное число (карту). Например, пусть задуманные карты будут 7 и 8. Тогда скажут, что одна находится в первом ряду, а другая в четвертом. Берем, значит, ключ первого ряда, 1 и 2. Под 1 в нижнем ряду, т.е. на третьем месте, находится 8, а за вторым числом ключа, 2, находится на третьем месте 7. Следовательно, получаются задуманные числа (карты).

Пусть еще скажут, что задуманные числа находятся во втором и четвертом ряду. Берем первое число ключа второго ряда (т.е. 9), под ним в четвертом ряду число 14 — это и есть одно из задуманных чисел; на таком же расстоянии вправо от второго числа ключа, 10, находится 13 — это и есть другое задуманное число (или карта).

Почему все это так, а не иначе, ясно из предыдущего. Ясно также, что из чисел (карт), взятых по парам, в каждом ряду будет находиться только по одной паре. Из всех же остальных пар, если одно число (или карта) будет в одном ряду, то другое будет в другом, и чтобы угадать их, необходимо только правильно, как указано, разложить карты.

Для 30 карт раскладка имеет следующий вид (рис. 90):

1	2	3	5	7	9
4	11	12	13	15	17
6	14	19	20	21	23
8	16	22	25	26	27
10	18	24	28	29	30

Рис. 90

Для 42 карт имеем (рис. 91):

1	2	3	5	7	9	11
4	13	14	15	17	19	21
6	16	23	24	25	27	29
8	18	26	31	32	33	35
10	20	28	34	37	38	39
12	22	30	36	40	41	42

Рис. 91

Очевидно, что в данной задаче можно предоставить загадывать пары карт не только одному, но нескольким лицам. Затем, разложивши указанным способом карты в прямоугольник, спрашивать каждого, в котором ряду находятся задуманные им карты, и указывать их по соответствующему ключу, который для каждой раскладки легко определить, руководствуясь изложенными выше правилами.

Задача 95-я. Угадать карту

Из нескольких взятых карт или из целой колоды угадать ту, которую кто-либо задумал.

Решение

Возьмите несколько карт или всю игру, если хотите, и показывайте их по порядку тому, кто задумывает карту. Число карт, которым вы пользуетесь при этой задаче, должно быть вам наперед известно. Показав, не смотря сами, все карты и сложив их в том же порядке, вы загадывающего только спрашиваете, *какую по порядку* из показанных карт он заметил (т.е. первую ли, вторую, третью, четвертую и т.д.). Затем объявите, что, считая карты только вам известным образом, вы откроете карту на том числе, которое вам угодно (оно должно быть, однако, равно или числу карт, взятых вами, или большему числу). Чтобы достигнуть этого, вы спрашиваете, какая карта по порядку задумана партнером. Положим, что у вас 20 карт, а он скажет, что задумана им 7-я карта, а вы объявите, что откроете задуманную карту на числе 20. Тогда вы начинаете открывать карты со стороны, противоположной той, с которой показывали карты, и первую карту считаете за семь, вторую — за восемь и т.д. Двадцатая карта и будет задуманная.

Если вы заявите, что откроете задуманную карту на числе большем, чем число взятых карт, то должны соответственно увеличить число задуманной карты, а затем отсчитывать по предыдущему.

Как и в других задачах, поясним решение.

Предположим, что задуманная карта есть 7-я и что взято 20 карт. От задуманной карты приходим к последней, если будем считать по порядку:

$$7, 8, 9, 10, ..., 17, 18, 19, 20.$$

Или, если сюда прибавить еще какое-либо число, например, 3, то получится:

$$10, 11, 12, ..., 20, 21, 22, 23.$$

Следовательно, от последней карты придем к задуманной, считая точно так же, но начиная с этой последней карты, которую теперь называем числом «десять».

Задача 96-я. Карта на место!

В колоде из 32 карт, т.е. в каждой масти нет шестерок, пятерок, четверок, троек и двоек, сделать так, чтобы замеченная кем-либо карта находилась на определенном, сказанном вперед месте.

Решение

Предложите кому-либо заметить в колоде какую-либо карту, а также запомнить про себя, на каком месте, считая от низа колоды, находится его карта, и объявите при этом, что потом, считая сверху, он найдет ее на таком-то заданном наперед, скажем, *двадцатом* месте.

Вслед за тем возьмите карты и переложите с низа на верх колоды 20 карт (нужно сделать это, держа руки за спиной, чтобы заметивший карту не знал числа переложенных вами карт). Отдайте карты обратно заметившему карту и спросите, на каком месте заметил он раньше свою карту. Если он скажет число меньшее 20, например, 15, то, значит, его карта перешла на верх и до нее, считая сверху, будет 20—15 карт, а сама она будет на $20 - 15 + 1$ месте. Значит, вы скажете ему, чтобы он взял с низу колоды $15 - 1$, т.е. 14 карт, переложил их наверх и считал затем по порядку до 20. На этом числе он и найдет свою карту.

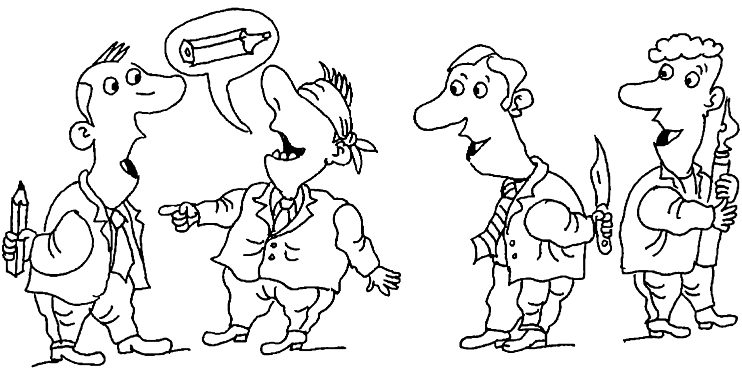
Если, наоборот, замеченное им раньше место карт выражается числом, большим 20, например, числом 25, то рассуждаете так. Сначала, считая сверху, замеченная карта была $32 - 25 + 1$ месте, а затем на месте $20 + 33 - 25$, т.е. на 28-м. Поэтому скажите загадывающему, чтобы он с верха положил на низ колоды 8 ($33 - 25 = 8$) карт и считал карты сверху. На 20 месте он и найдет свою карту.

Поясним и это решение.

Пусть a есть число, показывающее порядок, считая с низа, замеченной карты, а b число, на котором вы желаете, чтобы выпала замеченная кем-либо карта. Переложите с низа на верх b карт и спросите порядок замеченной карты. Вам скажут a. Если a меньше b, то на верх нужно положить a — 1 карту; если a больше b, то нужно положить сверху под низ 33 — a карт.

Считая затем карты сверху, найдем всегда замеченную карту на месте b.

Задача 97-я. Кто что взял — я узнал!



Угадать, не смотря, кем из трех лиц взята каждая из трех вещей.

Решение

Положите на стол три какие-нибудь вещи, например, ножик, карандаш и перо. Положите на стол также 20 карт или других каких-нибудь одинаковых предметов (например, спичек, палочек, кубиков, камешков и т.д.). Пригласите ваших трех товарищей, например, Петра, Павла и Ивана, сесть за стол, а сами оборотитесь к ним спиной или даже уйдите в другую комнату. Предложите этим вашим товарищам разобрать три вещи по одной, как им угодно. После этого вы говорите: «Петр, возьми одну карту (или спичку и т.д.), Павел две, Иван четыре». Когда это ваше желание будет исполнено, говорите далее: «Пусть тот, у кого карандаш, возьмет себе еще столько карт (или спичек и т.д.), сколько имеет; тот же, у кого ножик, пусть положит себе еще два раза столько карт (или спичек и т.д.), сколько имеет». Когда и это второе ваше желание будет исполнено, вы попросите, чтобы вам дали оставшиеся карты. По этому остатку вы можете узнать, у кого какая вещь. Но как?

Здесь вы должны разобраться в некоторых числах и заранее заготовить себе или уметь составить в любой данный момент табличку известных чисел, основываясь на таких соображениях:

Предложив трем лицам сначала взять одну, две и четыре карты, вы в сущности отметили каждое лицо известным числом (Петр — один, Павел — два, Иван — четыре). Затем каждое из этих трех лиц по вашему указанию увеличивает принадлежащее ему число. У кого карандаш, берет еще столько карт, сколько имеет; у кого нож — еще два раза столько, сколько имеет. У каждого образуется свое число. Вся задача в том, чтобы по остатку от 20 карт (или спичек и т.д.), которые передаются в ваши руки, узнать, какое же у кого число. Другими словами, все основывается на том, что если мы числа 1, 2 и 4 будем всячески перемножать на числа 1, 2, 3 и затем брать все полученные суммы этих произведений, то будем всегда получать различные числа.

Составляя суммы произведений из 1, 2, 4 на 1, 2 и 3, получим таблицу:

1	2	4	
3	2	1	**11**
2	3	1	**12**
3	1	2	**13**
1	3	2	**15**
2	1	3	**16**
1	2	3	**17**

Если мы числа 1, 2, 4, стоящие наверху, перемножим соответственно на стоящие под ними числа и сложим полученные произведения, то и получим суммы, написанные в нашей таблице за чертою справа. *Эта-то таблица и дает средство угадать, кем из трех лиц взята каждая из трех данных вещей.*

Пусть, например, из 20 оставленных на столе карт вам возвратили только 5 карт. Следовательно, всего разобрано 15 карт. По приведенной выше табличке мы заметим, что 15 получается, когда мы 1 умножим на 1, 2 умножим на 3, а 4 умножим на 2 и полученные произведения сложим. Отсюда мы заключаем, что тот, кто имел 4 карты (Иван), взял еще столько же карт; следовательно, у Ивана карандаш. Тот, кто имел 2 карты (Павел), взял еще два раза столько: следовательно, у Павла ножик.

Замечание. Эту задачу можно распространить и на большее число лиц, например, на четыре лица. Но для этого нового случая нужна и новая табличка, которую надо составить на основании таких соображений: надо отыскать такие четыре числа (скажем, a, b, c, d), чтобы суммы произведений из этих чисел на 1, 2, 3 и 4, составленные всевозможными способами, были обязательно различны между собой. Такие наименьшие искомые числа суть 1, 2, 5, 13.

Составьте из этих чисел (помножением на 1, 2, 3, 4 и сложением) табличку, подобную предыдущей, и вы можете «угадывать», кем из четырех лиц взята каждая из данных четырех вещей.

Задача 98-я.
Опять карте место

Некто берет 27 карт и раскладывает их последовательно одна за другой на три кучки по 9 карт в каждой (карты в руках раскладывающего повернуты крапом вверх, и раскладывающий поворачивает их лицом вверх при распределении на 3 кучки). Во время этой раскладки кто-либо мысленно замечает карту в любой из кучек и по окончании раскладки говорит, в какой из кучек находится задуманная карта. Раскладывающий складывает все кучки вместе так, чтобы порядок карт в каждой из кучек не был нарушен, и вновь раскладывает их на 3 кучки, как указано выше, а вслед за тем опять узнает, в какой кучке карта теперь. Вслед за тем карты складываются опять-таки так, чтобы порядок карт в каждой кучке не был нарушен. Карты раскладываются и в третий раз точно так же на 3 кучки; узнается, в какой кучке находится задуманная карта, и затем складываются опять без нарушения порядка карт в каждой кучке. Спрашивается: как нужно всякий раз помещать кучку, содержащую задуманную карту, чтобы в конце означенных раскладок карта занимала наперед определенное место?

Решение

Пусть a, b, c означают порядок места, на которое кладется та кучка, где находится задуманная карта. Перед этой кучкой нужно, значит, предварительно распределить $a - 1$ кучек из 9 карт, что при нашем распределении даст по $3(a - 1)$ карты на каждую кучку. Затем та кучка, в которой заключается задуманная карта, добавляет еще 3 карты к каждой кучке, так что если указать кучку, в которой находится теперь задуманная карта, то она будет там в числе трех последних из $3(a - 1) + 3$ карт.

Вслед за тем перед кучкой, где находится задуманная карта, помещается $b - 1$ остальных кучек, так что приходится перед ней распределять $9(b - 1) + 3(a - 1) + 3$ карты. В каждую кучку попадает $3(b - 1) + (a - 1) + 1$ карт, и последняя из карт и есть задуманная карта. Но, раскладывая карты еще раз, мы перед кучкой, где находится задуманная карта, помещаем $c - 1$ кучку, что для места (назовем его R) задуманной карты дает:

$$9(c - 1) + 3(b - 1) + (a - 1) + 1.$$

Итак, для определения места R имеем равенство:

$$R = 9(c - 1) + 3(b - 1) + a.$$

Отсюда, если известно a, b и c, то находим R. Если же R дано наперед, то a, b и c можно определить так:

Взятое число R надо делить на 3, полученное частное — опять на 3, так, чтобы первый остаток не был ноль. Этот остаток будет а, и он указывает, на каком месте нужно поместить ту кучку карт, где находится задуманная карта. Второй остаток, увеличенный единицей, дает место, на котором должно указанную кучку поместить второй раз, а второе частное, увеличенное единицей, даст место, где нужно поместить указанную кучку карт в третий раз.

Например: требуется, чтобы задуманная карта была *одиннадцатой.*

11	3	
2	3	3
	0	1

Отсюда видно, что кучку, содержащую задуманную карту, нужно в первый раз поместить на втором месте, второй — на первом и третий — на втором месте.

Пусть еще требуется задуманную карту показать на *девятом* месте.

9	3	
3	2	3
	2	0

Значит, кучку, где находится задуманная карта, в первый раз нужно поместить на третьем месте, во второй раз тоже на третьем и в третий — на первом месте.

Замечание. Можно разнообразить задачу, показывая ее кому-нибудь. Так, например, в первый раз после всех раскладок задуманную карту можно выбрать из колоды, держа ее за спиной, и положить карту на стол. В другой раз можно вперед, до игры, объявить, на каком месте будет задуманная кем-либо карта, или же попросить любого из зрителей, чтобы он сам назначил место, на котором желает, чтобы очутилась задуманная карта. Наконец, можно отдать карты любому из присутствующих с тем, чтобы он раскладывал их сам и складывал кучки как угодно (не меняя только порядка карт в кучках). Нужно при этом только замечать, на каком месте кладется кучка, содержащая задуманную карту, и применять указанную выше формулу.

Задачи 99-я, 100-я.
Две в одной

Сделать то же, что и в предыдущей задаче, но с 48 картами, которые раскладываются 3 раза на 4 кучки.

Решение

Пусть a будет порядок кучки с задуманной картой после первой раскладки, b — порядок, в котором ее кладут после второй раскладки, и c — порядок, в котором ее кладут после третьей раскладки.

Если кучку, содержащую задуманную карту, положить на месте b, то до этой кучки, значит, находится $12(b - 1)$ карт, и, раскладывая их опять на 4 кучки, мы найдем, что на каждую кучку из этих карт придется по $3(b - 1)$. Значит, задуманная карта находится в своей кучке после этого количества $3(b - 1)$ карт; и если мы обозначим через r место, которое она занимает после этих карт, то ее место во всей кучке определится числом $3(b - 1) + r$. Складываем опять кучки и перед кучкой, где помещается задуманная карта, кладем теперь $12(c - 1)$ карт. Означая затем через R место, которое занимает карта во всей взятой игре, найдем, что

$$R = 12(c - 1) + 3(b - 1) + r.$$

Итак, чтобы узнать место R, надо прежде определить количество r.

Когда складывали кучки в первый раз, то перед кучкой, где находилась задуманная карта, было $12(a - 1)$ карт. Разложив затем карты, мы положили сначала в каждую кучку по $3(a - 1)$ карты и еще 3 карты из кучки, содержащей задуманную карту. При следующей же раскладке эти $6(a - 1) + 3$ карты распределились в четырех кучках после $3(b - 1)$ карт, как указано выше. Это и есть то распределение, которое указывает место r. Но если $a = 1$, то нужно распределить только 3 карты, где находится задуманная карта. Она, следовательно, будет на первом месте после $3(b - 1)$ карт, и значит

$$R = 12(c - 1) + 3(b - 1) + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Если $a = 4$, то количество $3(a - 1) + 3$ равно 12. Эти 12 карт, будучи распределены, разложатся по 3 карты на каждую кучку, и так как задуманная карта находится между тремя последними, то она будет третьей где-то после $3(b - 1)$ карт, как это видно из следующей расстановки, где x означает в кучке задуманную карту:

1-я кучка	2-я кучка	3-я кучка	4-я кучка
c	c	c	c
c	c	c	c
c	x	x	x

В этом случае

$$R = 12\,(c - 1) + 3(b - 1) + 3 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Если $a = 3$, количество $3(a - 1) + 3$ равно 9, и распределение этих 9 карт после $3\,(b - 1)$ карт, положенных до них, будет таково:

1-я кучка	2-я кучка	3-я кучка	4-я кучка
c	c	c	c
c	c	x	x
x			

Итак, если задуманная карта не в первой кучке, то она будет во второй кучке после 3 (6 — 1) первых карт, и получается

$$R = 12\,(c - 1) + 3(b - 1) + 2 \text{.............} (3)$$

Но если задуманная карта находится в первой кучке, то

$$R = 12(c - 1) + 3(b - 1) + 3 \text{..............} (4)$$

Если случится это последнее, то достаточно, сложив кучки, взять одну карту с верха игры и положить ее под низ, чтобы равенство (4) заменилось равенством (3).

Итак, задача решается равенствами (1), (2) и (3). Отсюда вытекает такое правило:

Число R, означающее место, на котором должна находиться задуманная карта, делится на 3, а полученное частное — на 4, и притом так, чтобы первое деление не давало в остатке нуля. Если первый остаток равен 1, то, складывая кучки в первый раз, нужно кучку, содержащую задуманную карту, положить наверх. Если остаток равен 3, то ее нужно положить снизу, а если остаток равен 2, то нужно указанную кучку положить на третьем месте. Второй остаток, увеличенный единицей, покажет место, где нужно положить указанную кучку после второй раскладки, а второе частное, увеличенное единицей, укажет, на каком месте нужно положить кучку с задуманной картой после третьей раскладки. Но, если после первой раскладки приходилось кучку с задуманной картой класть на третьем месте и затем, если после третьей раскладки задуманная карта окажется в первой из четырех кучек, то необходимо, сложив кучки, верхнюю карту переложить вниз.

Пример 1. Требуется, чтобы задуманная карта была 37-й.

37	3	
1	12	4
	0	3

Значит, в первый раз кучка с задуманной картой кладется первой, во второй раз — тоже первой, а в третий раз — четвертой.

Пример 2. Требуется, чтобы задуманная карта была 20-й.

20	3	
2	6	4
	2	1

Значит, кучку с задуманной картой надо положить на третье место, во второй раз тоже на третье и в третий — на второе.

Пример 3. Требуется, чтобы задуманная карта была 24-й.

24	3	
3	7	4
	3	1

В первый раз кучка с задуманной картой кладется на четвертом месте, во второй раз тоже на четвертом и в третий — на втором.

Мосты и острова

Практическая геометрия известна людям с глубокой древности. Здесь мы излагаем несколько известных ее задач в немного упрощенном виде.

Задача 101-я. Кенигсбергские мосты

В городе Кенигсберге, в Померании[1], есть остров по имени Кнейпгоф. Река, окружающая остров, делится на два рукава, через которые переброшено 7 мостов: *a, b, c, d, e, f, g* (рис. 92). Спрашивается: можно ли сделать такую прогулку, чтобы за один раз перейти через все эти мосты, не переходя ни через один два или более раза?

Решение

«Это вполне возможно!» — скажет кто-либо. «Нет, это невозможно!» — скажет иной. Кто прав?

Самый простой путь решения задачи, казалось бы, такой: сделать *все возможные пробы* таких переходов, т.е. перечислить все возможные пути и затем рассмотреть, какой или какие из них удовлетворяют условиям вопроса. Но очевидно, что даже в случае только семи мостов приходится делать слишком много таких проб. А при увеличении числа мостов такой способ решения практически совершенно немыслим. Да кроме того при одном и том же числе мостов задача изменяется в зависимости еще от *расположения* этих мостов. Поэтому изберем иной, более надежный путь решения задачи.

[1]Сейчас этот город называют Калининград в Калининградской области России.

Прежде всего исследуем, *возможен или нет* искомый нами путь для данного расположения семи мостов. Для облегчения рассуждений введем такие условные обозначения:

Пусть A, B, C и D будут разные части суши, разделенной рукавами реки (рис. 92).

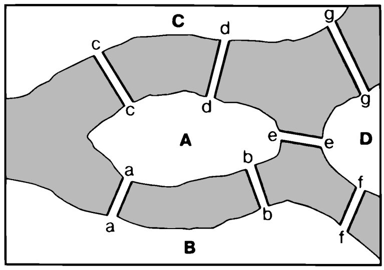


Рис. 92

Затем — переход из места A в место B мы будем обозначать через AB, все равно, по какому бы мосту мы ни шли — по a или по b. Если затем из B мы перейдем в D, то этот путь обозначим через BD, а весь переход или путь из A в D обозначим через ABD, так что здесь B одновременно обозначает и место прибытия, и место отправления.

Если теперь из D перейдем в C, то весь пройденный путь обозначим через $ABDC$. Итак, это *обозначение из четырех* букв показывает, что из места A мы, пройдя места B и D, пришли в С, причем перешли *три* моста.

Если, значит, мы перейдем *четвертый* мост, то для обозначения пути нам понадобится *пять* букв. После перехода следующего, *пятого*, моста понадобится обозначить пройденный путь *шестью* буквами и т.д.

Словом, если бы мы обошли *по одному разу* все 7 данных мостов, то наш *путь должен обозначиться восемью буквами* (вообще, если есть n мостов, то для обозначения искомого нами пути через эти мосты понадобится $n + 1$ буква).

Но как и в каком порядке должны идти буквы в этом обозначении? Между берегами A и B есть два моста. Значит, последовательность букв AB или BA должна быть 2 раза. Точно так же 2 раза должно повторяться соседство букв A и C (между этими местами тоже два моста). Затем по одному разу должно быть соседство букв A и D, B и D, D и C.

Следовательно, если предложенная задача возможна, т.е. возможно кенигсбергские мосты перейти так, как требуется задачей, то *необходимо*:

1) Чтобы весь путь обозначился только восемью буквами — не более;
2) чтобы в расположении этих букв соблюдались указанные условия относительно соседства и повторяемости букв.

Разберемся теперь в следующем весьма важном обстоятельстве:

Возьмем, например, местность A, соединенную с другими местностями несколькими мостами: a, b, c (в данном случае *пятью* мостами).

Если мы перейдем мост *a* (все равно откуда — из *A* или другого места), то в обозначении пути буква *A* появится один раз. Пусть пешеход прошел три моста *a, b* и с, ведущие в *A*. Тогда в обозначении пройденного пути буква *A* появится 2 раза, в чем нетрудно убедиться. Если же на *A* ведут 5 мостов, то в обозначении пути через все эти мосты буква *A* повторится 3 раза. Вообще легко вывести, что, если число мостов, ведущих в *A*, есть нечетное, то, чтобы узнать, сколько раз в обозначении требуемого пути повторится буква *A*, надо к этому нечетному числу мостов прибавить единицу и полученное число разделить пополам. То же, конечно, относится и ко всякой иной местности с нечетным числом мостов, которую для краткости будем называть *нечетной местностью.*

Усвоив все предыдущее, приступим к окончательному исследованию задачи о семи кенигсбергских мостах.

В местность *A* ведет 5 мостов. В каждую из местностей *B, C* и *D* ведет по 3 моста. Значит, все эти местности *нечетные* и на основании только что сказанного в обозначение полного пути через все 7 мостов необходимо, чтобы

$$\begin{array}{lcl} \text{буква } A \text{ вошла} & \dfrac{5+1}{2} & \text{т.е. } 3 \text{ раза} \\ B & \dfrac{3+1}{2} & 2 \\ C & \dfrac{3+1}{2} & 2 \\ D & \dfrac{3+1}{2} & 2 \\ \hline & & \text{Всего } 9 \text{ букв.} \end{array}$$

Получается, таким образом, что в обозначении искомого пути необходимо должно войти 9 букв. Но мы уже доказали выше, что в случае возможности задачи весь путь должен необходимо обозначиться *только восемью буквами.* Итак, *задача для данного расположения семи мостов невозможна.*

Значит ли это, что задача о переходе по одному разу через мосты невозможна всегда, когда имеется один остров, два рукава реки и 7 мостов? Конечно, нет. Доказано только, что задача невозможна для *данного расположения* мостов. При ином расположении этих мостов и решение могло бы быть иное.

Теперь же заметим, что во всех тех случаях, когда число мостов, ведущих в различные места, есть нечетное, можно принять рассуждения, совершенно подобные предыдущим, и таким образом убедиться в возможности или невозможности задачи. И нетрудно вывести для данного случая такое общее правило:

Если число букв, которые должны входить в обозначение полного пути перехода через все мосты по одному разу, не равно числу мостов, увеличенному единицей, то задача невозможна.

Для этого же случая нечетных местностей заметим и то, что правила для нахождения числа повторений какой-либо буквы, например *A*, в обозначении полного пути всегда одинаково приложимо, будут ли идущие через

A мосты вести в одно какое-либо место *B* или же в различные места. Чтобы перейти к более общему решению задачи, необходимо рассмотреть случаи, когда имеем четное число мостов, ведущих откуда-либо в другие места.

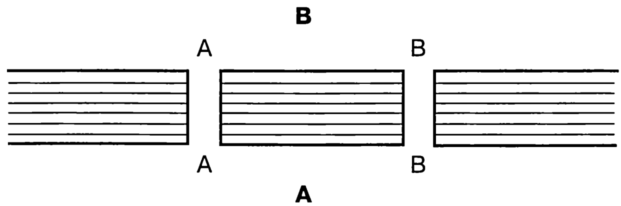


Рис. 93

Пусть, например, из места *A* в другие места переброшено через реку четное число мостов. Тогда при обозначении пути перехода через все мосты по одному разу надо различать два случая: 1) начинается ли путь из *A* или 2) из другого места.

В самом деле, если из *A* в *B*, например, ведут 2 моста, то путник, отправившийся из *A* и прошедший по одному разу оба моста, должен свой путь обозначить так: *ABA*, то есть буква *A* повторяется 2 раза. Если же путник пройдет через те же 2 моста, но из места *B,* то буква *A* появится всего один раз, ибо этот путь обозначится через *BAB*.

Предположим теперь, что в *A* ведут 4 моста — из одной ли какой местности или из разных, это все равно. И пусть путник отправляется в обход по одному разу всех мостов из места *A*. Опять-таки легко видеть, что в таком случае при обозначении пройденного пути буква *A* повторится 3 раза; но если начать обход из другой местности, то буква *A* повторится только 2 раза. Точно так же в случае 6 мостов буква *A* в обозначении всего пути повторится 4 раза или 3, смотря по тому, начался ли переход из *A* или из другой местности. Словом, можно вывести такое правило:

Если число мостов известной местности есть четное (четная местность), то в соответствующем обозначении пути буква, обозначающая местность, появляется число раз, равное половине числа мостов, если переход начался из другой местности. Если же переход начался из самой четной местности, то число появлений этой буквы равно половине числа мостов да еще единица.

Очевидно, однако, что при полном пути переход начинается из одной только какой-либо определенной местности. Поэтому *условимся раз навсегда* для *четной местности* число повторений ее буквы в обозначении пути считать равным *половине* числа мостов, ведущих в эту местность, а для *нечетной* местности число повторений ее буквы получим, если к числу мостов этой местности придадим единицу и полученное число разделим пополам.

Итак, при решении задачи о мостах необходимо различать два случая: 1) *Идущий отправляется из нечетной местности*; 2) *он идет из четной местности.*

В первом случае число повторений букв, обозначающих полный путь, должно быть равным числу мостов, увеличенному единицей. В противном случае *задача невозможна.*

Во втором случае полное число повторений букв должно равняться числу мостов, так как, начиная путь с четной местности, нужно увеличить единицей только для этой одной местности число повторений соответствующей буквы.

Рассмотрим теперь задачу о мостах с более общей точки зрения. Из предыдущих рассуждений мы уже можем вывести общий прием решения каждой подобной задачи о мостах. Во всяком случае, мы можем тотчас же убедиться в невозможности подобного решения. Для этого расположим лишь решение так:

1) отмечаем общее количество мостов и ставим его в заголовке решения;

2) обозначаем различные местности, разделенные рекой, буквами A, B, C, D и пишем их в столбец одна под другой;

3) против каждой из местности пишем во втором столбце число всех ведущих на нее мостов;

4) *четные местности* отмечаем звездочкой при соответствующих буквах первого столбца;

5) в третьем столбце соответственно пишем половины четных чисел второго столбца, а если во втором столбце есть числа нечетные, то прибавляем к ним единицу и пишем в третьем столбце половину полученного числа (каждое число третьего столбца показывает число повторений соответствующей буквы);

6) находим сумму третьего столбца.

Если эта последняя сумма 1) равна числу мостов или 2) больше его всего на одну единицу, то вопрос о полном обходе всех мостов по одному разу *может* быть решен, если только задача вообще возможна. Но при этом надо иметь в виду, что в первом случае обход надо начинать с четной местности, а во втором — с нечетной. Для случая рассмотренной нами задачи о семи кенигсбергских мостах будем иметь, значит, такую схему решения:

Число мостов 7

A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
	Всего	**9**

Так как 9 больше, чем 7 + 1, то, следовательно, задача невозможна.

Задача 102-я.
Переход через 15 мостов

Попробуем теперь решить другую задачу, в которой имеем 2 острова, соединенных между собой и с берегами реки 15 мостами, как это указано на прилагаемом рисунке (рис. 94).

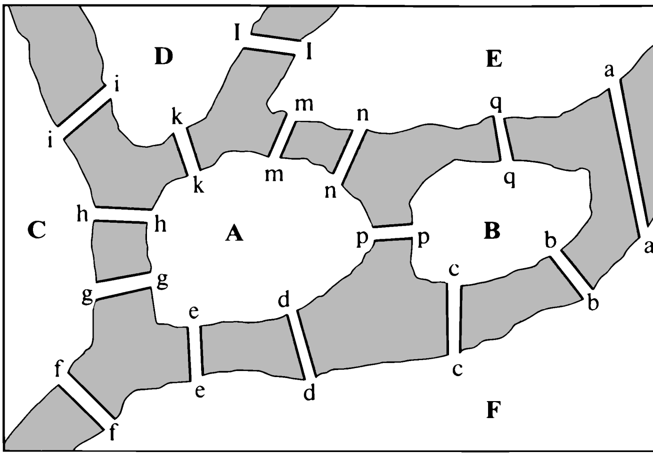


Рис. 94

Спрашивается: можно ли за один раз обойти все эти мосты, не проходя ни через один более одного раза?

Решение

Согласно выведенным нами уже раньше приемам решения обозначаем разными буквами все местности, разделенные различными рукавами реки и соединенные мостами. После этого составляем следующую таблицу:

Число мостов	15	
A	8	4
B	4	2
C	4	2
D	3	2
E	5	3
F	6	3
	Всего	**16**

Отсюда выводим, что задача возможна, ибо число повторений букв на единицу больше числа мостов. Кроме того, по предыдущему знаем, что обход должен начаться из нечетной местности *D* или *E*.

Искомый обход мостов может быть сделан так:

Ea Fb Bc Fd Ae Ff Cg Ah Ci Dk Am En Ap Bq El D

или в обратном порядке. Маленькие буквы среди больших показывают, какие именно переходятся мосты.

Изложенные выше приемы решения задачи прежде всего позволяют судить о ее возможности или невозможности. Сделаем теперь еще несколько выводов, ведущих к более определенному уяснению подобных задач.

Заметим прежде всего, что сумма чисел второй колонны точно равна двойному количеству мостов. Это зависит от того, что в каждом мосте мы считаем обе его оконечности, упирающиеся в различные берега. Отсюда нетрудно вывести следующие правила:

1) Сумма чисел второго столбца всегда должна быть четной, ибо половина ее должна дать число мостов.

2) Значит, если задача возможна, то в ней или нет совсем *нечетных местностей*, или же они есть в числе 2-х, 4-х, 6-ти и т.д., словом, в *четном* количестве. Иначе второй столбец при сложении не давал бы четного числа.

3) Если в задаче все местности четные, то задача всегда возможна, из какой бы местности мы ни отправлялись.

Так, например, в случае кенигсбергских мостов задачу можно было всегда решить, если бы задано было обойти все мосты по 2 раза каждый, что сводится в сущности к удвоению числа мостов, т.е. к обращению всех данных местностей в четные.

4) Если в задаче есть только 2 нечетные местности, а остальные все четные, то сумма цифр третьего столбца на единицу больше числа мостов, и задача возможна, если начать обход мостов с одной из двух нечетных местностей. Но если число нечетных местностей будет 4, 6, 8 и т.д., то задача невозможна, так как сумма чисел третьего столбца будет более числа мостов на 2, на 3, на 4 и т.д. единицы.

При всяком данном расположении мостов тотчас же нетрудно определить случай возможности или невозможности задачи. Задача невозможна, если числа нечетных местностей более двух. Задача возможна, если 1) все местности четные и 2) если нечетных местностей только 2. В последнем случае обход мостов надо начать из одной из этих нечетных местностей.

Исследовав задачу и заключив о ее возможности, остается только совершить самый обход мостов. Но это уже сравнительно легкая часть задачи, при выполнении которой лучше всего придерживаться такого правила: отбрасываем мысленно столько групп мостов, ведущих из одной области в другую, сколько возможно. Уменьшив таким образом число мостов, определяем через них путь. Затем принимаем во внимание отброшенные раньше мосты и заканчиваем обход.

Задача 103-я.
Петербургские мосты

Рассмотрим теперь петербургские мосты, расположенные по Неве и ее рукавам.

Мы возьмем, впрочем, только все мосты, ведущие через Большую Неву, и затем мосты, переброшенные на различные острова через Малую Неву, Большую, Малую и Среднюю Невки, через реки Крестовку и Ждановку. Кронверкский пролив с его Петропавловской крепостью оставим в стороне. Точно так же не берем Фонтанки, Мойки и многочисленных каналов с их мостами, предоставляя читателю потом самому включить их в задачу и разобраться в возможности ее решения, что очень легко.

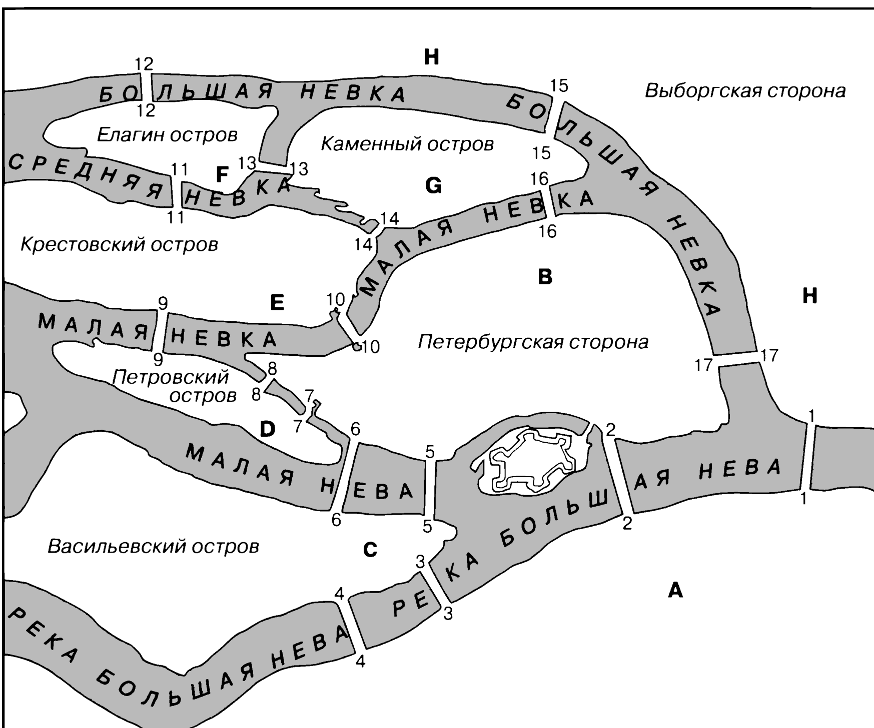


Рис. 95

Итак, мы имеем (рис. 95) 8 различных местностей, соединенных 17 мостами. Приступим к исследованию задачи по выведенной уже выше схеме.

Число мостов 17

Город по левую сторону Больш. Невы	A	4	2
Петербургская сторона	B	8	4
Васильевский остров	C	4	2
Петровский остров	D	3	2
Крестовский остров	E	4	2
Елагин остров	F	3	2
Каменный остров	G	4	2
Выборгская сторона	H	4	2
		Всего	**18**

Мы видим, что число нечетных местностей в данном случае равно 2, а сумма чисел третьего столбца на единицу больше числа мостов.

Итак, задача возможна, причем обход надо начинать из одной из нечетных местностей D или F, т.е. начать с Елагина острова и прийти на Петровский или наоборот. Если начать с Елагина острова, то обойти все мосты можно, например, так:

$$F_{12}H_{15}G_{16}B_{17}H_{1}A_{2}B_{5}C_{3}A_{4}C_{6}B_{7}D_{8}B_{10}E_{14}G_{13}F_{11}E_{9}D.$$

Цифры, поставленные между буквами, указывают, какие переходятся мосты.

Задача 104-я.
Путешествие контрабандиста

Задачу о переходе через мосты можно предлагать в различных видоизменениях. Можно свести ее, например, на путешествие контрабандиста, который решил побывать во всех странах Европы, но так, чтобы через границу каждого государства ему пришлось переходить только один раз.

В данном случае, очевидно, что различные страны и их границы будут соответствовать разным местностям и рукавам реки, через которые переброшено по одному мосту (для каждой границы, общей двум странам).

Исследуя возможность задачи, тотчас видим, что Швеция, Испания и Дания имеют *нечетное* число границ с соседними государствами, т.е. число нечетных местностей более двух. А следовательно, путешествие, которое предполагает совершить контрабандист, невозможно.

О фигурах, вычерчиваемых одним почерком

Задача 105-я. Миллион рублей за фигуру

Шутники уверяют, что англичане тотчас дадут миллион рублей каждому, кто придет к ним и начертит фигуру (рис. 96) одним непрерывным почерком, т.е. не отнимая карандаша от бумаги и не удваивая ни одной линии.

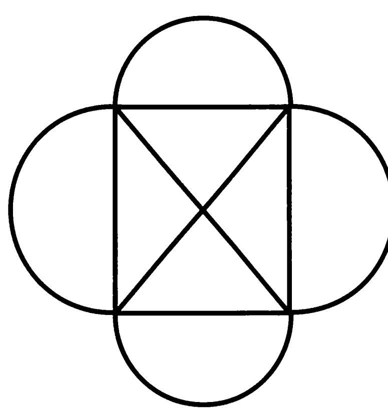


Рис. 96

Решение

Надежда стать миллионером, решив такую легкую задачу, заставила меня испортить много бумаги и потратить много времени на попытки вычертить эту фигуру, как требовалось, одним почерком. Задача, однако, не решалась, и это было тем досаднее, что она не решалась только «чуть-чуть»... Никак не удавалось провести только одной «последней» какой-либо линии. Удалось даже открыть такой секрет, что вся трудность в том, чтобы вычертить сначала одним почерком, не повторяя линии, еще более простую фигуру: четырехугольник с двумя диагоналями (рис. 97). Это, казалось бы, уже совсем просто, и все-таки... не удавалось!..

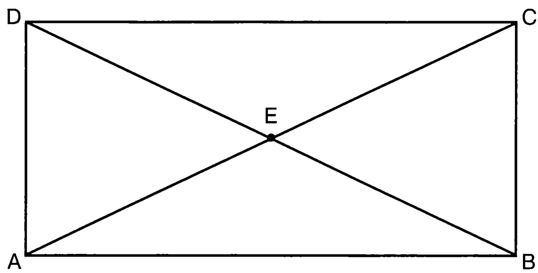


Рис. 97

Интересно, что фигуры гораздо более сложные и трудные с виду легко вычерчиваются одним почерком. Например, выпуклый пятиугольник со всеми его диагоналями легко вычерчивается одним непрерывным движением без повторения линий, причем получается такая фигура (рис. 98).

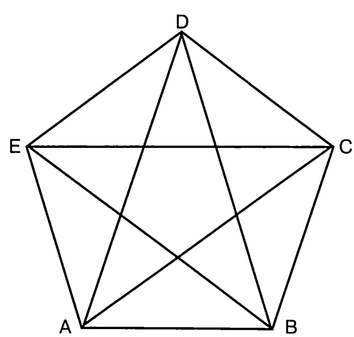


Рис. 98

Так же легко вычертить многоугольник с нечетным числом сторон, но никак не удастся квадрат, шестиугольник и т.д., словом — многоугольник с четным числом сторон.

Теперь нетрудно будет разобраться и доказать, какую из любых данных фигур можно вычертить одним почерком, без повторения линий, а какую нет. Каждую из задач подобного рода можно свести к уже разобранной задаче о мостах.

В самом деле, возьмем, например, четырехугольник *ABCD* с двумя его диагоналями, пересекающимися в точке *E* (рис. 97). Можно ли вычертить его одним непрерывным почерком без повторения линий?

Точки *A, B, C, D* и *E* представим себе как центры некоторых местностей, разделенных рекой, а линии, соединяющие эти точки, как мосты, ведущие в эти местности. Что же в данном случае получаем? Пять местностей, из которых 4 нечетных и одна четная. Мы знаем уже, что в таком случае нельзя за один раз обойти все мосты, не переходя ни через один два раза, или, другими словами, нельзя обойти все данные точки одной непрерывной ломаной линией без повторения хотя бы одного звена.

Случаи возможности и невозможности вычерчивания одним почерком фигур совершенно те же, что и в задачах о мостах. Одна задача, в сущности, сводится к другой.

Всякий нечетный многоугольник со всеми его диагоналями можно вычертить одним почерком без повторения линий потому, что этот случай соответствует тому, когда данные в задаче о мостах местности все четные.

Соображения, изложенные здесь, одинаково прилагаются ко всякой фигуре, образована ли она отрезками или дугами, на плоскости ли или в пространстве. Нетрудно видеть, что возможно описать одним непрерывным движением все ребра правильного октаэдра и нельзя этого сделать для четырех остальных правильных выпуклых многогранников.

Говорят, что Магомет концом своей палки вместо подписи описывал одним почерком состоящий из двух рогов луны знак (рис. 99).

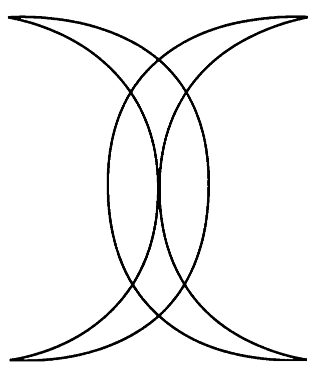


Рис. 99

И это вполне понятно, потому что в данном случае имеем дело только с точками четного порядка, а следовательно, вычертить такую фигуру одним почерком без повторения тех же линий возможно. Возможно также вычертить одним почерком и такую фигуру, где помимо точек четного порядка есть и две точки (но не более) нечетного порядка. Вот весьма красивый и замысловатый образец такой фигуры, заключающей в себе две нечетные точки *A* и *Z* (рис. 100):

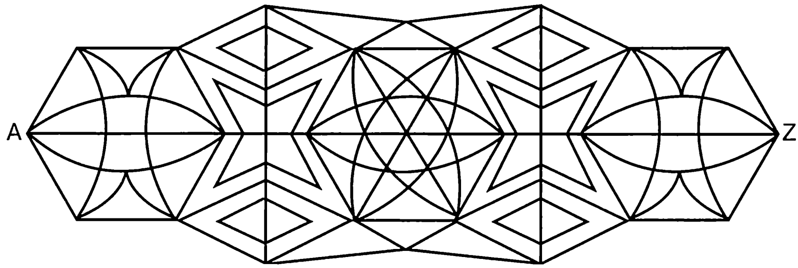


Рис. 100

С какой-либо из этих точек и надо начинать непрерывное вычерчивание фигуры, как мы уже знаем из задачи о мостах.

Также нельзя вычертить одним почерком следующие фигуры (рис. 101 и 102)

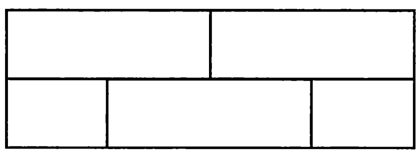


Рис. 101

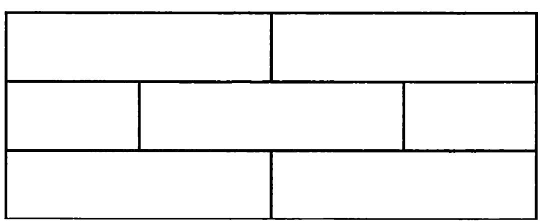


Рис. 102

при всей их видимой простоте, так как в первой 8, а во второй 12 точек нечетного порядка. Первая может быть вычерчена не менее как четырехкратной, а вторая не менее как шестикратной непрерывной линией.

Если взять шахматную доску с 64 клетками, то в ней 28 точек нечетного порядка, и, чтобы вычертить ее, надо чертить 14-кратную линию.

С другой стороны, если взять треугольник, поделить каждую из его сторон на 12 (или сколько угодно) равных частей и провести из этих точек линии, параллельные другим сторонам, то полученная сетчатая фигура может быть вычерчена одним непрерывным движением без повторений. Таких примеров можно подобрать сколько угодно.

Для упражнения предлагаем читателю заняться во время досуга вычерчиванием с одного почерка следующих фигур:

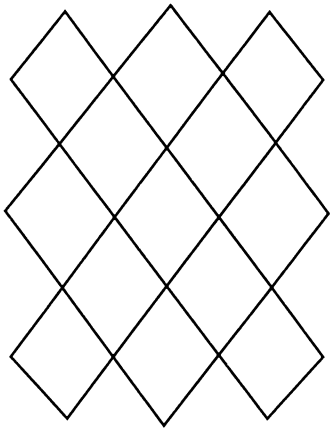


Рис. 103

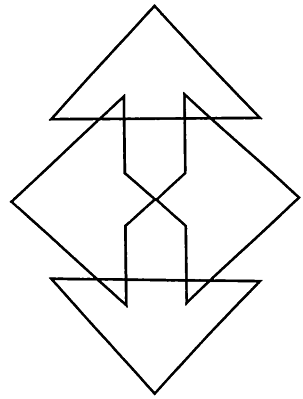


Рис. 104

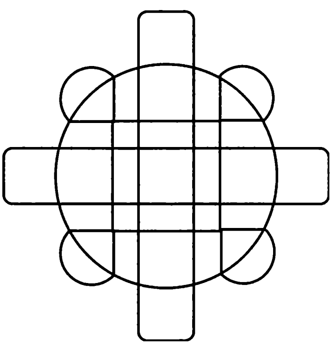


Рис. 105

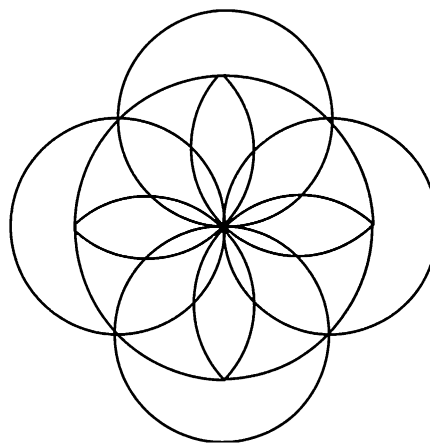


Рис. 106

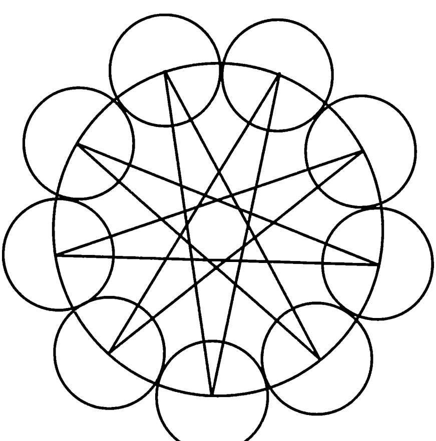


Рис. 107

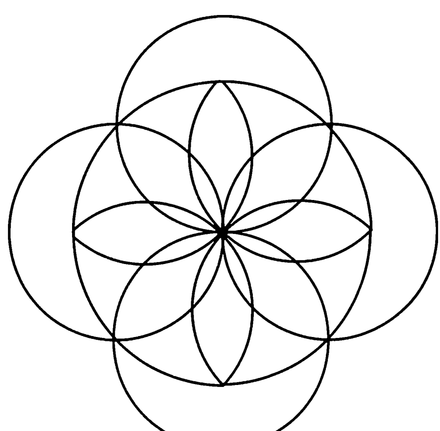


Рис. 108

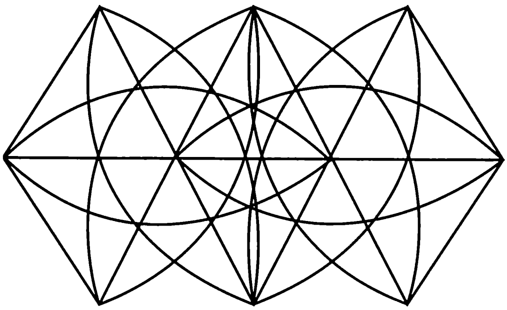


Рис. 109

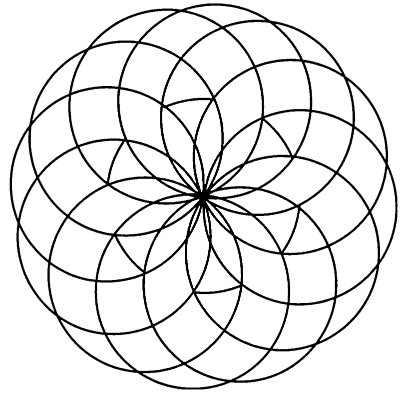


Рис. 110

Следующие фигуры показывают, как наиболее просто делается вычерчивание с одного почерка предыдущих фигур.

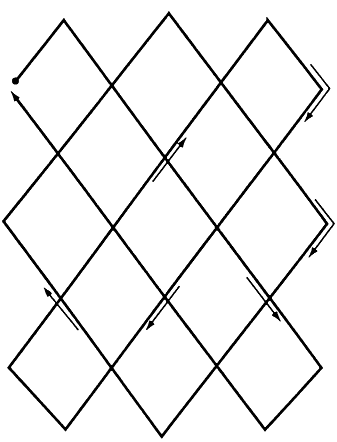


Рис. 111

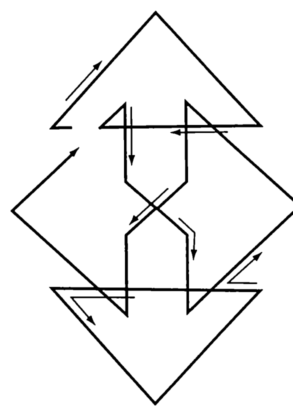


Рис. 112

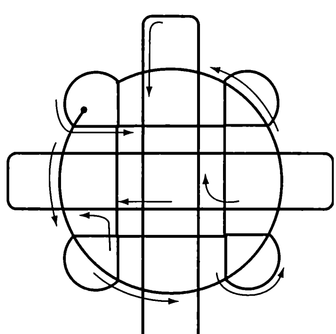


Рис. 113

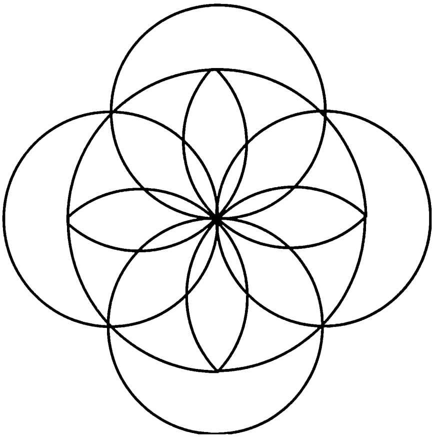


Рис. 114

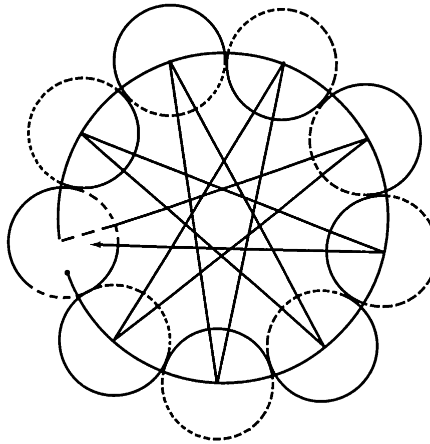


Рис. 115

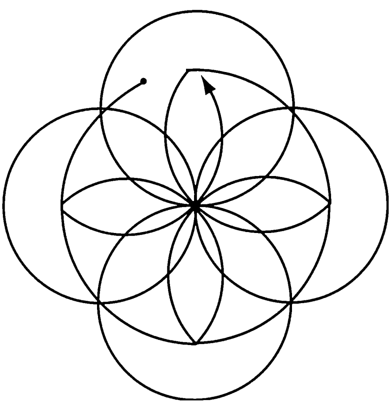


Рис. 116

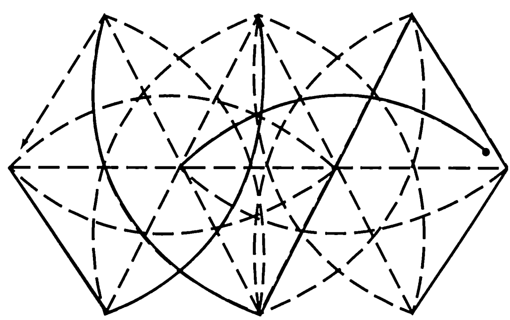


Рис. 117

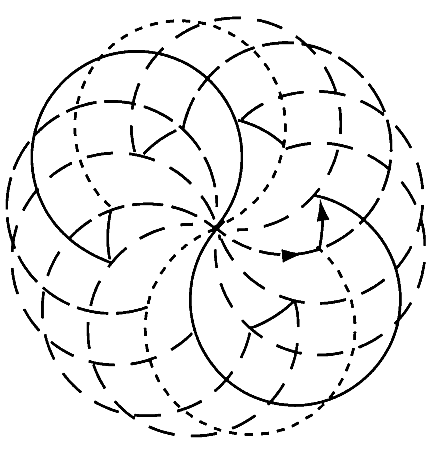


Рис. 118

Задача 106-я.
Пять линий, десять монет

Начертите на бумаге пять прямых линий и разложите на них десять монет так, чтобы на каждой линии лежало по четыре монеты.

Решение

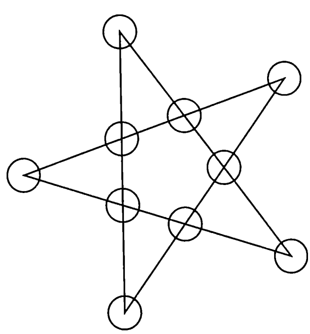


Рис. 119

Можно ли эту фигуру вычертить с одного почерка?

В серии «Твой кругозор» вышли в свет

Л. Кэрролл. Логическая игра
М. В. Гумилевская. Где мороз, а где жара
В. П. Карцев. Приключения великих уравнений
М. В. Панов. Занимательная орфография
Э. А. Вартаньян. Путешествие в слово
О. М. Гурьян. Свидетели
В. А. Хинкис. Жизнь и смерть Роджера Бэкона
М. А. Гершензон. Робин Гуд
А. Н. Томилин. Как люди открывали свою Землю
С. П. Аржанов. Занимательная география
К. М. Моисеева. Караван идет в Пальмиру
Н. Н. Аменицкий, И. П. Сахаров. Забавная арифметика
К. М. Моисеева. Тайна горы Муг
О. М. Гурьян. Один рё и два бу
К. М. Моисеева. В древнем царстве Урарту
М. М. Колтун. Мир физики
А. Н. Томилин. Как люди изучали свою Землю

О. М. Гурьян. Наследство Би Шэна, или Воображаемые истории шестнадцати мудрецов, взятые из подлинных рукописей

С. И. Фингарет. Скифы в остроконечных шапках

Р. М. Смаллиан. Приключения Алисы в Стране Головоломок

М. Н. Ботвиник, М. Б. Рабинович,
Г. А. Стратановский. Жизнеописания древних греков и римлян. Греки

М. Н. Ботвиник, М. Б. Рабинович,
Г. А. Стратановский. Жизнеописания древних греков и римлян. Римляне

Э. А. Вартаньян. Из жизни слов

В. В. Одинцов. Лингвистические парадоксы

А. Б. Мигдал. От догадки до истины

Е. И. Игнатьев. В царстве смекалки. Книга I

Е. И. Игнатьев. В царстве смекалки. Книга II

Е. И. Игнатьев. В царстве смекалки. Книга III

О. П. Мороз. В поисках гармонии

Ю. П. Вронский. Рассказы о древнем Новгороде

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОЕ ИЗДАНИЕ
Серия «Твой кругозор»

***Игнатьев** Емельян Игнатьевич*

В царстве смекалки,
или Арифметика для всех

Книга II

ДЛЯ СТАРШЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА

Зав. редакцией *В. И. Егудин*
Редактор *Е. Г. Таран*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная верстка *Э. Н. Малания*
Технический редактор *Г. В. Субочева*
Корректоры *Е. В. Казакова, Е. Г. Щербакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 26.06.08.
Формат 70×100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Ньютон. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 9,35.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 26906.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва,
3-й проезд Марьиной Рощи, д. 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов,
ул. Чернышевского, д. 59. www.sarpk.ru

ТВОЙ КРУГОЗОР

Е. И. Игнатьев

В царстве смекалки

Книга II

ЭТО НОВОЕ ИЗДАНИЕ ЗНАМЕНИТОГО ТРЕХТОМНИКА ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВЫХОДИТ В ГОД ЕГО СТОЛЕТНЕГО ЮБИЛЕЯ. КАК И ВЕК НАЗАД, ОН ДОСТАВИТ СВОИМ ЧИТАТЕЛЯМ МНОГО ПРИЯТНЫХ МИНУТ, ПОМОЖЕТ РАЗВИТЬ ЛОГИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ И СМЕКАЛКУ.

«Твой кругозор» — это проверенные временем традиции научно-познавательной литературы для детей. В серию вошли лучшие книги по гуманитарным и естественно-научным предметам, написанные российскими и зарубежными авторами. Книги серии позволят вам расширить кругозор, повысить свой образовательный уровень и стать знатоками в различных областях знаний.

МАТЕМАТИКА РУССКИЙ ЯЗЫК ФИЗИКА ГЕОГРАФИЯ ИСТОРИЯ

ISBN 978-5-09-018201-0

9 785090 182010