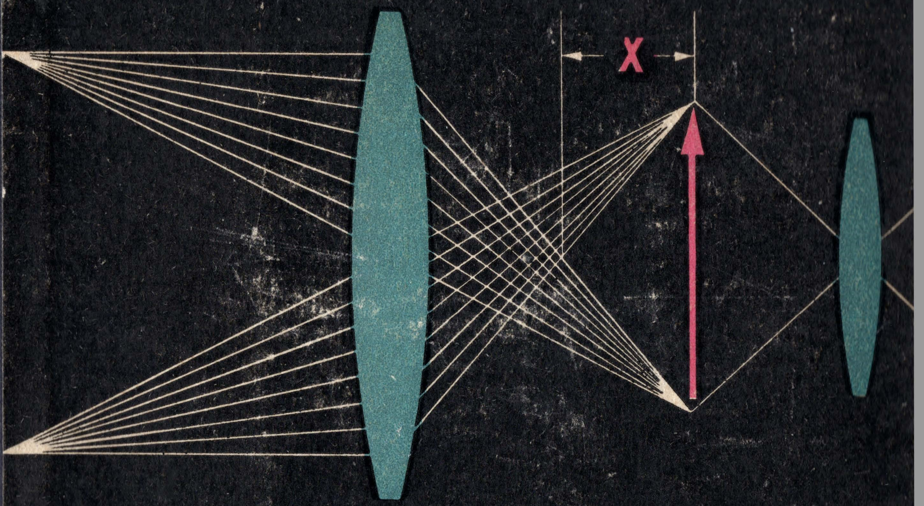


С. У. ГОНЧАРЕНКО

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

С. У. ГОНЧАРЕНКО

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

АВТОРИЗОВАННЫЙ ПЕРЕВОД
С ТРЕТЬЕГО УКРАИНСКОГО ИЗДАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ТЕХНІКА»
КИЕВ — 1966

53
Г65

УДК 53 (076. 1/.2)

В книге собраны наиболее интересные физические задачи, предлагавшиеся на конкурсных экзаменах в вузы различного профиля в последние годы, и значительная часть задач повышенной трудности. Ко всем задачам даны подробные решения или методические указания.

Сборник предназначен для занимающихся самообразованием и готовящихся к поступлению в вузы, а также может быть использован учителями физики средних учебных заведений.

Рецензент доцент *В. Г. Чепуренко*

Редакция литературы по горному делу и металлургии

Зав. редакцией инж. *М. Д. Семененко*

КИЕВСКАЯ КНИЖНАЯ ФАБРИКА

$\frac{6\text{-}6}{589\text{-}66}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

К лицам, сдающим конкурсные экзамены, предъявляются повышенные требования по профилирующим дисциплинам, к числу которых относится и физика. Эти требования предусматривают не только наличие у абитуриента глубоких теоретических знаний школьного курса физики, но и умение прилагать эти знания к решению физических задач. Именно решение задачи часто дает возможность экзаменатору установить, насколько глубоко и сознательно усвоен теоретический материал, умение применять общие теоретические закономерности к решению конкретных задач. Умение быстро решить задачу, как правило, свидетельствует об основательном овладении теоретическим материалом.

На экзамене по физике каждый абитуриент получает билет, содержащий три вопроса из различных разделов курса, и задачу. Задача обычно дается на тот раздел программы, который не нашел своего отражения в вопросах билета.

Хотя задачи, предлагаемые на вступительных экзаменах, по содержанию соответствуют материалу школьного курса физики, однако их решение часто вызывает серьезные затруднения. Это связано как с неумением глубоко проанализировать физическую сущность задачи, так и с определенной не всегда привычной для учащихся формулировкой условий задач.

Целью данного сборника является ознакомление поступающих в вузы с характерными для конкурсных экзаменов задачами, методикой их решения. Большинство задач предлагалось на вступительных экзаменах в вузы в последние годы. Ко всем задачам даны подробные решения и необходимые объяснения, к которым рекомендуется обращаться только в тех случаях, когда возникают трудности при самостоятельном решении.

Перед задачами к наиболее важным темам курса физики приводятся краткие теоретические сведения, которые надо возобновить в памяти для решения задач. Кроме того, приводится решение с анализом двух-трех типичных задач.

В конце книги помещено некоторое количество задач повышенной трудности, предлагаемых на вступительных экзаменах в физико-технические институты и на физические факультеты университетов, а также во время физических олимпиад.

Табличные данные в содержании большинства задач не приводятся, они вынесены в приложение.

Решение задач, как правило, проводится в Международной системе единиц (СИ — системе).

При подготовке этого издания некоторые параграфы книги были переработаны и дополнены с целью сделать изложение более доступным. В этом издании учтены многочисленные пожелания читателей, выраженные ими в письмах, полученных автором. Автор благодарит всех читателей, которые прислали ему свои отзывы о книге, замечания о недостатках и пожелания, относящиеся к ее содержанию.

Замечания и пожелания просим направлять по адресу:
Киев, 4, Пушкинская, 28, издательство «Техніка».

ЗАДАЧИ

МЕХАНИКА

§ 1. КИНЕМАТИКА

В случае прямолинейного равномерного движения путь s, пройденный телом за время t, и скорость тела v связаны соотношением $s = vt$.

При равнопеременном прямолинейном движении скорость v и путь s, соответствующие отрезку времени t, связаны следующими соотношениями:

$$v = v_0 + at; \quad s = v_0 t + \frac{at^2}{2}; \quad v^2 - v_0^2 = 2as,$$

где v_0 — начальная скорость; a — ускорение.

При $a = 0$ получается уравнение равномерного движения: $s = vt$. В этих уравнениях ускорение a положительно при равноускоренном движении и отрицательно при равнозамедленном.

Скорость сложного движения определяется по правилу параллелограмма.

Для равномерного движения тела по окружности

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R n; \quad a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\pi^2 n^2 R,$$

где ω — угловая скорость движения;
R — расстояние данной точки от оси вращения;
T — период вращения;
n — число полных оборотов в единицу времени.

При свободном падении тела под действием силы земного притяжения ускорение направлено вертикально вниз. Кроме особо оговоренных случаев, ускорение падающих тел следует считать равным $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

Ускорение движения тел по наклонной плоскости, если не учитывать трения, $a = g \sin\alpha$, где α — угол наклона плоскости к горизонту.

Если не учитывать сопротивления воздуха, наибольшая высота и дальность полета тел, брошенных под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad \text{и} \quad s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Задача 1. Два тела движутся равномерно навстречу друг другу, и расстояние между ними уменьшается на $s = 16$ *м* за каждые $t = 10$ *сек*. Если эти тела с такими же по величине скоростями движутся в одном направлении, то расстояние между ними увеличивается на $s_1 = 3$ *м* за каждые $t_1 = 5$ *сек*. С какой скоростью движется каждое тело?

Решение. При движении тел навстречу друг другу расстояние s составляет путь, пройденный обоими телами вместе за время t, т. е.

$$s = vt + v_1 t = t(v + v_1). \qquad (1)$$

Поскольку во втором случае расстояние между телами увеличивается за время t_1 на величину s_1, одно из тел имеет большую скорость, и поэтому можно записать

$$s_1 = vt_1 - v_1 t_1 = t_1(v - v_1). \qquad (2)$$

Перепишем уравнения [1] и [2] так:

$$v + v_1 = \frac{s}{t}; \quad v - v_1 = \frac{s_1}{t_1}.$$

Сложив правые и левые части уравнений, получим $2v = \frac{s}{t} + \frac{s_1}{t_1}$ или после подстановки числовых значений $v = 1{,}1$ *м/сек*.

Аналогично определяем значение v_1:

$$2v_1 = \frac{s}{t} - \frac{s_1}{t_1},$$

или после подстановки числовых значений $v_1 = 0{,}5$ *м/сек*.

Задача 2. Поезд движется в восточном направлении со скоростью 27 *км/ч*, и пассажиру, сидящему у окна вагона, кажется, что ветер дует с севера. Сохраняя прежнее направление движения, поезд увеличивает скорость до 54 *км/ч*, и пассажиру уже кажется, что ветер дует с северо-востока. Определить истинное направление ветра и его скорость.

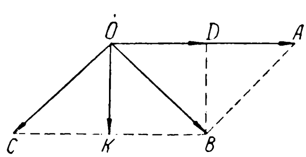


Рис. 1.

Решение. Построим параллелограмм скоростей $OABC$ (рис. 1) для второго случая. Построить его можно приближенно, поскольку известны лишь такие данные: $OA = 54$ *км/ч* $= 15$ *м/сек* и угол между направлением скорости поезда OA и относительной скоростью ветра OC. Диагональ OB и есть абсолютное значение скорости ветра, пока что нам неизвестное.

Теперь построим параллелограмм $OKBD$ для первого случая, в котором сторона OK направлена на юг; OD составляет половину OA, диагональ OB прежняя.

Легко показать, что треугольник OAB равнобедренный. Следовательно, диагональ OB направлена на юго-восток. Угол при вершине B этого треугольника прямой, поэтому по теореме Пифагора

$$2v^2 = 15^2, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ м/сек} \approx 10{,}6 \text{ м/сек}.$$

Таким образом, ветер дует с северо-запада со скоростью 10,6 *м/сек*.

Задача 3. Два автобуса одновременно выехали из пункта A в пункт B. Один из них первую половину пути проехал с постоянной скоростью v_1, а вторую половину пути — с постоянной скоростью v_2.

Второй автобус двигался со скоростью v_1 половину всего времени своего пути от A к B, а вторую половину времени — со скоростью v_2. Определить среднюю скорость движения каждого автобуса, если $v_1 = 30$ *км/ч* и $v_2 = 50$ *км/ч*.

Решение. Довольно часто при решении этой задачи ученики ошибочно считают, что средняя скорость обоих автобусов $v_{ср} = \frac{v_1 + v_2}{2}$. Однако так можно определять среднюю скорость лишь тогда, когда автобус движется в одинаковые промежутки времени с каждой из скоростей, т. е. среднюю скорость второго автобуса. Среднее значение скорости определяется по отношению к прошедшему времени, а не по отношению к пройденному пути.

Поэтому

$$v_{ср} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} \text{ или } v_{ср} = \frac{s}{t},$$

где s — полное расстояние, а t — время, за которое проходится это расстояние.

Для первого автобуса $s = 0{,}5s + 0{,}5s$ и $t = t_1 + t_2 = \frac{0{,}5s}{v_1} + \frac{0{,}5s}{v_2}$; тогда $v_{ср_1} = \frac{s}{0{,}5s\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$ или после подстановки числовых значений $v_{ср_1} = 37{,}5$ *км/ч*.

Для второго автобуса

$$t = 0{,}5t + 0{,}5t \quad \text{и} \quad s = 0{,}5v_1 t + 0{,}5v_2 t = 0{,}5t\,(v_1 + v_2); \quad \text{тогда}$$

$$v_{ср2} = \frac{0{,}5\,(v_1 + v_2)\,t}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

или после подстановки числовых значений $v_{ср2} = 40$ *км/ч*.

Задача 4. Тело, движущееся с определенного момента времени равнозамедленно, проходит за 8 *сек* 180 *м* и после этого имеет еще скорость 5 *м/сек*. Определить начальную скорость и ускорение движения тела.

Решение. Для определения начальной скорости и ускорения воспользуемся формулами:

$$v^2 - v_0^2 = 2as \text{ и } a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Подставив значение a в предыдущую формулу, получим:

$$v^2 - v_0^2 = 2s\,\frac{v - v_0}{t} \quad \text{или} \quad v + v_0 = \frac{2s}{t}, \text{ откуда } v_0 = \frac{2s}{t} - v.$$

Подставим числовое значение величин:

$$v_0 = \frac{2 \cdot 180\ м}{8\ сек} - 5\ м/сек = 40\ м/сек; \quad a = \frac{5\ м/сек - 40\ м/сек}{8\ сек} \approx$$

$$\approx -4{,}37\ м/сек^2.$$

Задача 5. Тело бросают вертикально вверх с высоты H с начальной скоростью v_0. Одновременно с началом движения первого тела с поверхности земли бросают вверх второе тело с начальной скоростью v_0'. Через какой отрезок времени тела встретятся?

Решение. Эту и подобные ей задачи на движение тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, можно решать двумя способами. Первый способ состоит в разбивке всего движения с момента бросания тела и до момента его падения на землю на два этапа: 1) движение тела с момента бросания до достижения максимальной высоты подъема $H_{\text{макс}}$; 2) падение тела с высоты $H_{\text{макс}}$ на землю. Часто бывает удобнее пользоваться вторым способом решения, рассматривая движение брошенного вверх тела как сложное, состоящее из равномерного движения тела вверх со скоростью v_0 и свободного падения тела вниз. В первом движении тело за время t проходит путь s_1 по направлению вверх от земли $s_1 = v_0 t$, а во втором движении за то же время t тело проходит путь s_2 по направлению вниз к земле $s_2 = \frac{gt^2}{2}$.

Следовательно, за время t тело удалится от земли на расстояние $s = s_1 - s_2$ или $s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Таким образом, если в законе пути рассматривать s не как пройденный телом путь за t *сек*, а как расстояние тела от земли в момент времени t после начала движения, то формула закона пути будет описывать все движение, начиная с момента, когда тело было брошено вверх, и до момента, когда оно упало на землю. То же самое можно сказать и о законе скорости $v_t = v_0 - gt$.

Этим способом мы и воспользуемся для решения данной задачи. Первое тело проходит за время t путь $s_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, и, следовательно, через t *сек* от начала движения его расстояние от земли будет $H + s_1 = H + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Через t *сек* от начала движения второе тело будет от земли на расстоянии $s_2 = v_0' t - \frac{gt^2}{2}$.

Если t равно промежутку времени, через который тела встретятся, то

$$H + s_1 = s_2 \text{ или } H + v_0 t - \frac{gt^2}{2} = v_0' t - \frac{gt^2}{2},$$

откуда определяем время $t = \frac{H}{v_0' - v_0}$.

Задача 6. Падающее с вершины башни тело уже пролетело l *м*, когда второе тело начало падать с точки, расположенной на h *м* ниже вершины башни. Доказать, что если оба тела достигают поверхности земли одновременно, то высота башни составляет $H = \frac{(l+h)^2}{4l}$ *м*.

Решение. Пусть первое тело пролетело l *м* за $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$ *сек*, а второе тело падало t_2 *сек*. Тогда время падения первого тела $t = t_2 + \sqrt{\frac{2l}{g}}$. Путь, пройденный телами

$$H = \frac{1}{2} g\left(t_2 + \sqrt{\frac{2l}{g}}\right)^2 \text{ и } H - h = \frac{1}{2} g t_2^2.$$

Определим из второго уравнения $t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$ и подставим в первое:

$$H = \frac{1}{2} g\left(\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2l}{g}}\right)^2 = (\sqrt{H-h} + \sqrt{l})^2 \text{ или}$$

$$h - l = 2\sqrt{l(H-h)}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, получим $H = \frac{(l+h)^2}{4l}$.

Задача 7. На какое максимальное расстояние s можно бросить мяч в спортивном зале высотой $H = 8$ *м*, если начальная скорость мяча $v_0 = 20$ *м/сек*? Какой угол φ с полом зала должен составлять в этом случае вектор начальной скорости мяча? Считать, что высота начальной точки траектории мяча над полом мала по сравнению с высотой зала. Мяч во время полета не должен ударяться о потолок зала. Сопротивлением воздуха полету мяча пренебрегаем.

Решение. Наибольшая высота полета мяча должна быть равна высоте зала

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{2g}, \quad \text{откуда} \quad \sin\varphi = \frac{1}{v_0}\sqrt{2gH} \approx 0{,}6261, \text{ а } \varphi \approx 38^\circ 40'.$$

Теперь по формуле $s = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$ вычисляем максимальную дальность полета мяча. После подстановки числовых значений величин $s \approx 40$ *м*.

Задача 8. С какой скоростью вращается колесо, если при фотографировании его с выдержкой $t = 0{,}04$ *сек* на снимке каждая спица колеса покрывает половину сектора между соседними спицами, а всего в колесе 15 спиц?

Решение. Поскольку в колесе 15 спиц и каждая спица за время $t = 0{,}04$ *сек* покрывает на снимке половину сектора между соседними спицами, то отсюда легко подсчитать, что за время $t = 0{,}04$ *сек* колесо поворачивается на $\frac{360^\circ}{2 \cdot 15} = 12^\circ$. Тогда период вращения колеса

$$T = 0{,}04 \text{ сек} \cdot 30 = 1{,}2 \text{ сек}, \text{ а отсюда } n = \frac{1}{T} = 50 \text{ об/мин}.$$

Задачи

1. Пассажир поезда, движущегося со скоростью 36 *км/ч*, видит на протяжении 60 *сек* соседний поезд длиной 600 *м*, движущийся параллельно первому в том же направлении. Чему равна скорость

второго поезда? Сколько времени пассажир второго поезда видит первый поезд длиной 900 *м*?

Те же поезда движутся навстречу друг другу. Сколько времени каждый из пассажиров будет видеть встречный поезд?

2. Расстояние между двумя лодочными станциями моторная лодка проходит по течению реки за 10 *мин*, а против течения — за 30 *мин*. За какое время это расстояние проплывет по течению упавший в воду спасательный круг?

3. Между двумя пунктами, расположенными на реке на расстоянии $l = 100$ *км* друг от друга, курсирует катер. Катер проходит это расстояние по течению за $t_1 = 4$ *ч*, а против течения — за $t_2 = 10$ *ч*. Определить скорость течения реки v_1 и скорость катера v_2 относительно воды.

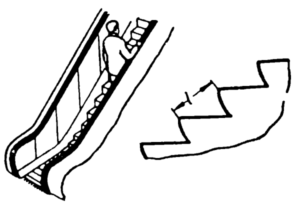


Рис. 2.

4. Расстояние между крайними остановками троллейбуса 6 *км*. Через каждые 5 *мин* с конечной остановки отправляется троллейбус и движется со средней скоростью 18 *км/ч*. Сколько троллейбусов встретит на протяжении всего маршрута пассажир, находящийся во встречном троллейбусе, движущемся с такой же средней скоростью?

5. Человек находится на расстоянии $h = 50$ *м* от прямой дороги, по которой приближается автобус со скоростью $v_1 = 10$ *м/сек*. а) В каком направлении должен бежать человек, чтобы встретиться с автобусом, если автобус находится на расстоянии $l = 200$ *м* от человека и если человек может бежать со скоростью $v_2 = 3$ *м/сек*? б) Какова наименьшая скорость, с которой должен бежать человек, чтобы встретиться с автобусом?

6. Автомобиль двигался от A к B со скоростью $v_1 = 60$ *км/ч*, а назад возвращался со скоростью $v_2 = 20$ *км/ч*. Определить среднюю скорость движения автомобиля.

7. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью 12 *км/ч*. Далее половину оставшегося времени движения он ехал со скоростью 6 *км/ч*, а затем до конца пути шел пешком со скоростью 4 *км/ч*. Определить среднюю скорость движения велосипедиста на всем пути.

8. Эскалатор метро поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение 1 *мин*. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за 3 *мин*. Сколько времени будет подниматься пассажир по движущемуся эскалатору?

9. В часы наибольшего движения пассажиров в Киевском метро на каждой из 120 ступенек одного из эскалаторов стоит по два человека. Навстречу им движется такая же лента эскалатора и на каждой ступеньке стоит также по 2 человека. Скорость движения обоих потоков одинакова и равна $v = 0{,}9$ *м/сек*. Расстояние между ребрами ступенек $l = 450$ *мм* (рис. 2). Сколько пассажиров, поднимающихся вверх, минует за 1 *мин* дежурного метро, стоящего наверху? Сколько встречных пассажиров проезжает мимо человека, стоящего на спускающемся эскалаторе?

10. Рыбак плывет на лодке вверх по реке. Проезжая под мостом, он уронил в воду запасное весло. Через час он обнаружил потерю весла и, повернув назад, догнал весло в 6 *км* ниже моста. Какова скорость течения реки, если рыбак, двигаясь вверх и вниз по реке, греб одинаково?

11. От движущегося поезда отцеплен последний вагон. Поезд продолжает двигаться с той же скоростью. Как будут относиться пути, пройденные поездом и вагоном до момента остановки вагона? Считать, что вагон двигался равнозамедленно.

12. Тело, двигаясь с постоянным ускорением, проходит последовательно два одинаковых отрезка пути длиной $s = 10$ *м*. Найти ускорение тела a и скорость v_0 в начале первого отрезка, если первый отрезок пройден телом за время $t_1 = 1{,}06$ *сек*, а второй — за $t_2 = 2{,}2$ *сек*.

13. Тело, двигаясь равноускоренно, за четвертую секунду проходит 35 *м*. С каким ускорением двигалось тело? Определить скорость тела в конце четвертой и десятой секунд движения. Какой путь проходит тело за вторую и за пятую секунды? Какой путь проходит тело за вторую и третью секунды, вместе взятые?

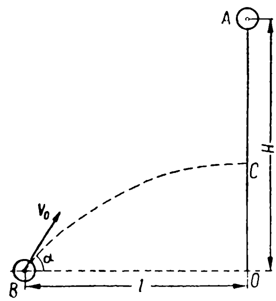


Рис. 3.

14. Для проверки правильности действия затвора у фотоаппарата было сфотографировано падение шарика от нулевого деления сантиметровой шкалы с выдержкой 0,05 *сек*. Обеспечил ли затвор такую выдержку, если на фотографии изображение шарика получилось в виде темной полоски, концы которой совпали с делениями шкалы 4 *см* и 9 *см*?

15. Тело, находящееся в точке B на высоте $H = 45$ *м* от поверхности земли, начинает свободно падать. Одновременно из точки A, расположенной на расстоянии $h = 21$ *м* ниже точки B, бросают второе тело вертикально вверх. Определить начальную скорость v_0 бросания второго тела, если известно, что оба тела упадут на землю одновременно. Сопротивлением воздуха пренебречь.

16. Тело свободно падает с высоты h. В тот же момент другое тело брошено с высоты H $(H > h)$ вертикально вниз. Оба тела упали на землю одновременно. Определить начальную скорость v_0 второго тела. Для вычислений взять $h = 10$ *м* и $H = 20$ *м*.

17. Из точки A свободно падает тело. Одновременно из точки B (рис. 3) под углом α к горизонту бросают другое тело так, чтобы оба тела столкнулись в воздухе. Показать, что угол α не зависит от начальной скорости v_0 тела, брошенного из точки B, и определить этот угол, если $\frac{H}{l} = \sqrt{3}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

18. Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одной и той же начальной скоростью $v_0 = 29{,}4$ *м/сек* с промежутком времени $\Delta t = 0{,}5$ *сек*. Через какой промежуток времени от момента бросания первого тела и на какой высоте они встретятся? Сопротивлением воздуха пренебречь.

19. Дан график зависимости ускорения от времени для тела, движущегося прямолинейно (рис. 4). Как двигалось тело в первую, вторую, третью секунды? В какой момент времени тело двигалось с максимальной скоростью?

20. Два камня падают в шахту. Второй камень начал падать на 1 *сек* позже первого. Определить движение одного камня относительно второго. Сопротивления воздуха не учитывать.

21. Пуля пробивает доску толщиной 2 *см*. Скорость пули до попадания в доску $v = 500$ *м/сек* и после вылета из нее $v_1 = 100$ *м/сек*. Чему равно ускорение пули при прохождении сквозь доску и сколько времени она движется в доске? Движение пули считать равнозамедленным.

22. В вертикальную мишень, находящуюся на расстоянии 50 *м*, произведено два выстрела в горизонтальном направлении при совершенно одинаковой наводке винтовки. Вследствие случайной неодинаковости заряда начальная скорость пули была в одном случае 320 *м/сек*, в другом — 350 *м/сек*. Каково расстояние между точками поражения мишени?

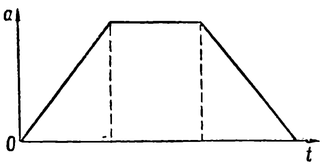


Рис. 4.

23. Пуля, летящая со скоростью 400 *м/сек*, ударяет в земляной вал и проникает в него на глубину 36 *см*. Сколько времени двигалась она внутри вала? С каким ускорением? Какова была ее скорость на глубине 18 *см*? На какой глубине скорость пули уменьшилась в три раза? Движение считать равнопеременным.

24. С вышки одновременно брошены два тела с одинаковой начальной скоростью v_0: одно вертикально вверх, другое вертикально вниз. Как с течением времени будет меняться расстояние между этими телами? Сопротивления воздуха движению тел не учитывать.

25. Камень бросают горизонтально с вершины горы, наклон которой к горизонту составляет $\alpha°$. Определить, с какой скоростью v_0 был брошен камень, если он упал на склон на расстоянии l от вершины.

26. Под углом 60° к горизонту выпущен снаряд с начальной скоростью 240 *м/сек*. Снаряд попал в точку, высота которой над горизонтом 500 *м*. Определить расстояние этой точки до места, откуда был выпущен снаряд, считая по горизонту, а также время полета снаряда.

27. Бомбардировщик пикирует по прямой под углом α к горизонту со скоростью v_0. Если пилот хочет сбросить бомбу на высоте H и попасть точно в цель, то на каком расстоянии от цели он должен это сделать? Сопротивления воздуха не учитывать.

28. Футболист ударяет мяч, который летит со скоростью $v = 16$ *м/сек* и попадает в штангу, находящуюся от футболиста на расстоянии $l = 5$ *м*. После отражения от штанги мяч летит в обратную сторону, причем максимальная высота подъема траектории находится над футболистом. Определить угол, который образует направление начальной скорости мяча с горизонтом, полагая, что мяч отражается от штанги с той же скоростью, с которой ударяется, и что угол отражения мяча равен углу падения.

29. Артиллерийская батарея стоит на горе высотой 1 *км*. Определить дальность полета по горизонтали снарядов, вылетающих из орудия с начальной скоростью $v_0 = 700$ *м/сек* под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Сопротивления воздуха не учитывать.

30. Из двух пунктов отвесного берега, находящихся на некоторой высоте от поверхности воды, одновременно бросают в горизонтальном направлении два тела. Начальные скорости тел соответственно равны

$v_1 = 5$ *м/сек* и $v_2 = 7{,}5$ *м/сек*. Оба тела падают в воду одновременно. Расстояние точки падения первого тела от берега $s_1 = 10$ *м*. Определить: 1) продолжительность полета тел; 2) высоты, с которых были брошены тела; 3) место падения в воду второго тела.

31. Упругий шарик падает вертикально на наклонную плоскость с высоты $h = 2$ *м* и упруго отскакивает. На каком расстоянии от места падения он второй раз ударится о ту же плоскость? Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$.

32. Цель, находящаяся на холме, видна с места расположения орудия под углом $\alpha = 10°$ над горизонтом. Расстояние по горизонтали от орудия до цели $d = 2$ *км*. По цели стреляют при угле возвышения $\beta = 30°$. Определить начальную скорость v снаряда, попадающего в цель. Сопротивления воздуха не учитывать.

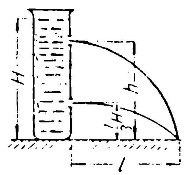


Рис. 5.

33. Какой начальной скоростью v_0 должна обладать сигнальная ракета, выпущенная из ракетницы под углом 30° к горизонту, чтобы она вспыхнула в наивысшей точке своей траектории, если продолжительность горения запала ракеты 5 *сек*? Сопротивления воздуха движению ракеты не учитывать.

34. Из трех труб, расположенных на земле, с одинаковой скоростью бьют струи воды под углом в 60, 45 и 30° к горизонту. Найти отношение наибольших высот подъема струй воды, вытекающих из каждой трубы, и отношение дальностей падения воды на землю. Сопротивления воздуха движению водяных струй не учитывать.

35. Из отверстия, просверленного в боковой стенке сосуда на высоте, втрое меньшей высоты столба воды в сосуде (рис. 5), вытекает струя воды. В каком месте боковой стенки сосуда надо просверлить второе отверстие, чтобы дальность полета обеих струй была одинакова?

36. Из брандспойта бьет струя воды под углом $\alpha = 32°$ к горизонту. Струя падает на расстоянии $l = 12$ *м* от брандспойта. Сколько воды подает брандспойт за 1 *мин*, если площадь отверстия $S = 1$ *см*^{2}?

37. Реактивный самолет летит со скоростью $v = 900$ *км/ч* и несет ракету. Двигатель ракеты включается в момент отделения от самолета и работает $t_1 = 1$ *мин*. За последние $t_2 = 10$ *сек* работы двигателя ракета пролетела расстояние $s = 57{,}5$ *км*. Определить среднее ускорение ракеты за время t_1 и ее скорость в момент прекращения работы двигателя.

38. Пуля летит вертикально вверх, достигает наивысшей точки траектории и вертикально падает вниз. Определить, в каких точках траектории ускорение пули имеет наибольшее и наименьшее значения, если сопротивление воздуха растет с возрастанием скорости.

39. Каким должен быть наименьший наклон крыши, чтобы дождевая вода стекала с него как можно быстрее? Трения не учитывать.

40. Найти среднюю линейную и угловую скорости третьего советского искусственного спутника Земли, если период его обращения по орбите составлял 105 *мин*, а средняя высота полета 1200 *км*? Радиус Земли взять $R = 6400$ *км*.

41. На горизонтальной общей оси вращаются со скоростью 3000 *об/мин* два тонких диска, укрепленных на расстоянии $s = 1$ *м* друг от друга. Пуля, летящая параллельно оси вращения, пробивает оба диска, причем вторая пробоина оказалась смещенной относительно первой на угол 45°. Пробив диски, пуля углубляется в мишень на $d = 60$ *см*. Определить: 1) скорость пули во время движения ее между дисками, считая скорость постоянной; 2) время движения пули в мишени; 3) ускорение пули в мишени.

42. Человек держит один конец доски, другой ее конец лежит на цилиндре (рис. 6). Доска при этом горизонтальна. Затем человек двигает доску вперед, вследствие чего цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Отсутствует также скольжение доски по цилиндру. Какой путь должен пройти человек, чтобы достичь цилиндра, если длина доски l?

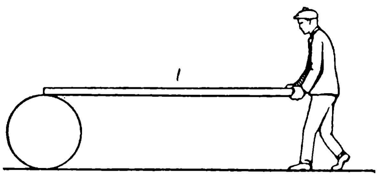


Рис. 6.

43. Автомобиль движется со скоростью 60 *км/ч*. Сколько оборотов в секунду делают его колеса, если они катятся по шоссе без скольжения, а внешний диаметр покрышек колес равен 60 *см*? Определить также величину центростремительного ускорения внешнего слоя резины на покрышках его колес.

44. Для вычисления центростремительного ускорения можно пользоваться выражениями: $a = \frac{v^2}{R}$ и $a = \omega^2 R$. Из первого равенства вытекает, что центростремительное ускорение обратно пропорционально расстоянию движущейся точки до оси вращения, а из второго — зависимость между ускорением и радиусом вращения прямая. В чем здесь дело?

§ 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основной закон динамики (второй закон Ньютона)

$$F = ma \quad \text{или} \quad F\Delta t = m(v_2 - v_1),$$

где F — равнодействующая всех сил, приложенных к телу массой m;
a — ускорение;
Δt — отрезок времени, в течение которого действовала сила F;
mv — количество движения тела.

В изолированной системе тел количество движения всей системы остается неизменным:

$$m_1v_1 + m_2v_2 + \dots + m_nv_n = 0.$$

При относительном движении соприкасающихся тел сила трения

$$F = kN,$$

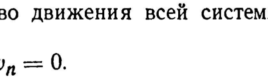


Рис. 7.

где N — сила нормального давления тел друг на друга;
k — коэффициент трения. При решении задач следует считать k не зависящим от скорости.

Задача 1. На гладком горизонтальном столе лежат четыре связанных нитями тела с одинаковыми массами m (рис. 7). На четвертое тело действует сила F, направленная горизонтально. Найти ускорение системы и натяжение всех нитей. Трения не учитывать.

Решение. Обозначим через $f_{3,4}$, $f_{2,3}$ и $f_{1,2}$ силы натяжения нити соответственно между телами 3 и 4; 2 и 3 и 1 и 2. Составим уравнение движения для каждого из тел системы, пользуясь вторым законом Ньютона. На четвертое тело системы действуют две силы: внешняя F и натяжения нити $f_{3,4}$. Поскольку движение системы вызывается приложением внешней силы F, то ускорение, которое она получает, должно быть направлено одинаково с силой F. Следовательно, уравнение движения четвертого тела имеет вид:

$$F - f_{3,4} = ma.$$

На третье тело действуют силы натяжения нитей $f_{3,4}$ и $f_{2,3}$, поэтому уравнение движения для этого тела имеет вид:

$$f_{3,4} - f_{3,2} = ma.$$

На второе тело действуют силы натяжения нитей $f_{3,2}$ и $f_{1,2}$, поэтому уравнение движения будет

$$f_{3,2} - f_{1,2} = ma.$$

Наконец, на первое тело действует лишь одна сила натяжения нити $f_{1,2}$, и его уравнение движения имеет вид:

$$f_{1,2} = ma.$$

Мы получили систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными a, $f_{1,2}$, $f_{2,3}$ и $f_{3,4}$. Решая эту систему, получим:

$$a = \frac{F}{4m}; \quad f_{1,2} = \frac{1}{4}F; \quad f_{2,3} = \frac{1}{2}F; \quad f_{3,4} = \frac{3}{4}F.$$

Задача 2. Два груза массой 5 и 3 *кг* подвешены на концах нити, переброшенной через блок, причем меньший груз находится на 1 *м* ниже большего. Если предоставить грузам двигаться под действием силы тяжести, то через сколько времени они будут на одинаковой высоте?

Решение. Система будет двигаться с ускорением a в сторону большего груза. На каждый груз действуют сила тяжести и сила натяжения нити. Силы и ускорения, направленные вниз, условимся считать положительными, вверх — отрицательными.

Тогда второй закон динамики для обоих тел запишется так:

$$m_1a = m_1g - F_1 \quad \text{и} \quad -m_2a = m_2g - F_2.$$

Поскольку нить и блок невесомы, то $F_1 = F_2$. Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$(m_1 + m_2)\,a = (m_1 - m_2)\,g, \text{ откуда } a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \text{ или } a = 2{,}45\ м/сек^2.$$

Грузы будут на одной высоте, когда каждый пройдет расстояние $s = 0{,}5$ *м*; из уравнения $s = \frac{at^2}{2}$ определим $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ или $t \approx 0{,}64$ *сек*.

Задача 3. Дана система (рис. 8), состоящая из грузов массой $m_1 = 50$ *г* и $m_2 = 30$ *г*, легкой пружинки и невесомой и нерастяжимой нити. Система рассматривается после затухания колебаний пружины.

Каким будет движение этой системы? Какова длина пружины во время движения, если в нерастянутом состоянии пружина имеет длину 10 *см*, а под действием силы в 0,1 *н* удлиняется на 2 *см*? При решении не учитывать массу пружины, блока и трение.

Решение. При решении некоторых задач ускорение системы можно определять сразу, зная результирующую действующих сил и массу системы, что сокращает решение. Так, по условию этой задачи система грузов находится под действием постоянной силы $F = (m_1 - m_2)g$, а поэтому движется равноускоренно. Масса системы $m = m_1 + m_2$, поэтому ускорение системы по второму закону динамики

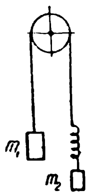


Рис. 8.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad a = \frac{1}{4} g.$$

Если бы пружина висела неподвижно или двигалась равномерно, то она растягивалась бы силой $P_2 = m_2 g$. Когда пружина вместе с подвешенным к ней грузом движется с ускорением $a = \frac{1}{4} g$, то пружину растягивает дополнительно сила F', сообщающая массе m_2 ускорение a, т. е. $F' = \frac{1}{4} m_2 g$. Тогда результирующая сила растяжения

$$F = P_2 + F' = \frac{5}{4} m_2 g \text{ или } F \approx 0{,}37 \text{ н}.$$

Удлинение пружины, обусловленное этой силой,

$$\Delta l = \frac{0{,}37 н}{0{,}1 н} \cdot 2 \text{ см} = 7{,}4 \text{ см}.$$

Тогда длина пружины во время движения $10 + 7{,}4 = 17{,}4$ (*см*).

Задача 4. Котенок, идущий по полу, подпрыгивает и хватается за вертикальный шест, подвешенный с помощью нити к потолку. В этот момент нить обрывается. С каким ускорением падает шест, если котенок взбирается по шесту так, что все время находится на одной и той же высоте от пола? Масса котенка m, масса шеста M.

Решение. Поскольку относительно пола котенок неподвижен, действующие на него силы взаимно уравновешиваются: со стороны шеста на котенка действует направленная вверх сила F, равная весу котенка mg.

В соответствии с третьим законом Ньютона на шест действует сила F', равная F, но направленная вниз. Поэтому второй закон Ньютона для движения шеста запишется так:

$$Mg + mg = Ma,$$

где a — ускорение шеста. Отсюда $a = \frac{m + M}{M} g$.

Задача 5. Ядро атома полония Po^{210} выбрасывает α-частицу со скоростью 1600 *км/сек*. Определить скорость отдачи ядра, образовавшегося вследствие α-распада ядра полония.

Решение. По закону сохранения количества движения $mv = \text{const}$. Считая ядро атома полония до распада неподвижным и обозначая массу вновь образованного ядра M, а массу α-частицы m, можем записать:

$$Mv_1 + mv_2 = 0, \text{ отсюда } v_1 = -\frac{mv_2}{M} \text{ или } v_1 \approx -31 \text{ км/сек.}$$

Задачи

45. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массой M (рис. 9). Другое тело массой m подвешено на нити, перекинутой через блок и привязанной к телу M. Определить ускорение системы и натяжение нити. Трением тела M о плоскость и трением в блоке, а также массами блока и нити пренебречь.

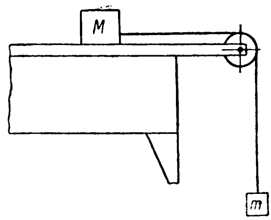


Рис. 9.

46. Два одинаковых груза массой M подвешены на нити, переброшенной через блок с неподвижной осью. На одно из тел положен грузик массой m. Определить: 1) с каким ускорением движутся тела?; 2) натяжение нити; 3) силу давления на ось блока; 4) силу давления грузика m на груз M. Массой блока и нити и сопротивлением воздуха пренебречь.

47. К концам нити, переброшенной через неподвижный блок, подвешены два тела весом $P_1 = 10$ *н* и $P_2 = 20$ *н*. С каким ускорением движутся тела и с какой силой при этом растягивается нить? С каким ускорением будет двигаться тело весом $P_1 = 10$ *н*, если ко второму концу нити вместо тела весом $P_2 = 20$ *н* приложить силу $F = 20$ *н*? Массой блока и трением пренебречь.

48. На нити, выдерживающей натяжение 10 *н*, поднимают груз весом 5 *н* из состояния покоя вертикально вверх. Считая движение равноускоренным и силу сопротивления равной в среднем 1 *н*, найти предельную высоту, на которую можно поднять груз за 1 *сек* так, чтобы нить не порвалась.

49. Два тела массой $m_1 = 50$ *г* и $m_2 = 100$ *г* связаны нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. С какой силой можно тянуть первое тело, чтобы нить не порвалась, если она выдерживает натяжение $F_н = 5$ *н*? Изменится ли результат, если силу приложить ко второму телу?

50. Автодрезина везет две платформы с грузом, развивая при этом силу тяги 800 *н*. Масса первой платформы 12 *т*, второй — 8 *т*. С какой силой натянуто сцепление между платформами?

51. Капля дождя, падая с большой высоты, испаряется. Как влияет это испарение на движение капли?

52. Через блок, ось которого горизонтальна, переброшена веревка длиной l. За концы веревки держатся два мальчика, находящиеся на одинаковых расстояниях $\frac{1}{2}l$ от блока. Мальчики начинают одновременно подниматься вверх, причем один из них движется относительно веревки со скоростью v, а второй со скоростью $2v$. Через сколько времени каждый из мальчиков достигнет блока? Массой блока и веревки пренебречь; массы мальчиков одинаковы.

53. К концу нити, переброшенной через неподвижный блок, прикреплен груз $Q = 20$ *н*, на втором конце нити находится подвижной

блок, к которому подвешен груз $P = 60$ *н*. Определить ускорение каждого тела и натяжение нити. Трением и массой блоков пренебречь.

54. Веревка длиной 12 *м* и весом 60 *н* переброшена через блок и скользит по нему без трения. Чему равно натяжение в середине веревки в тот момент, когда длина веревки по одну сторону блока равна 8 *м*?

55. Через легкий вращающийся без трения блок перекинута нить. На одном конце нити привязан груз массой M. По другому концу нити с постоянным относительно нити ускорением a_2 скользит кольцо массой m. Найти ускорение a_1 груза массой M и силу трения $F_т$ кольца о нить. Массой нити пренебречь.

56. Веревка выдерживает груз 900 *н* при вертикальном подъеме его с некоторым ускорением и груз в 1100 *н* при опускании с таким же ускорением. Какой груз можно поднимать с помощью этой веревки равномерно?

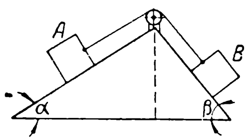


Рис. 10.

57. Парашютист, пролетев расстояние 20 *м* как свободно падающее тело, раскрывает парашют и за 3 *сек* уменьшает скорость в 10 раз. Определить натяжение тросов при замедленном движении парашютиста, если его вес 600 *н*?

58. На тело массой m, находящееся на горизонтальной плоскости, действует сила под углом α к горизонту. Найти величину этой силы, если тело движется горизонтально с ускорением a. Коэффициент трения k.

59. Два связанные между собой нитью груза движутся вниз с ускорением, вдвое большим ускорения свободного падения. Во сколько раз натяжение $F_н$ нити, за которую тянут оба груза, больше натяжения $F'_н$ нити, связывающей грузы? Масса нижнего груза в три раза больше массы верхнего груза.

60. Два одинаковых тела A и B массой m связаны нитью и находятся на разных склонах наклонной плоскости (рис. 10). Коэффициенты

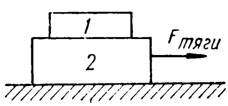


Рис. 11.

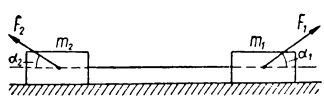


Рис. 12.

трения составляют соответственно k_1 и k_2, углы наклона α и β. Тело B начинает скользить вниз. С каким ускорением движутся тела A и B?

61. На верхнем крае наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить. К одному концу нити привязан груз массой $m_1 = 2$ *кг*, лежащий на наклонной плоскости. На другом конце нити висит груз массой $m_2 = 1$ *кг*. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 20°$. Коэффициент трения между грузом m_1 и наклонной плоскостью $k = 0{,}1$. С каким ускорением движутся грузы и каково натяжение нити?

62. Какую максимальную силу тяги можно приложить к нижнему бруску (рис. 11), чтобы верхний брусок удерживался на поверхности бруска P_2 в равноускоренном движении? Коэффициент трения для верхнего бруска $k_1 = 0{,}1$, для нижнего бруска $k_2 = 0{,}2$. Вес верхнего бруска $P_1 = 10$ *н* и нижнего $P_2 = 20$ *н*.

63. На два бруска массами m_1 и m_2, связанных нерастяжимой нитью, действуют силы F_1 и F_2 под углами α_1 и α_2 к горизонту (рис. 12). Найти ускорение системы, если коэффициент трения между брусками и горизонтальной плоскостью равен k.

64. Груз весом P при помощи нити, перекинутой через невесомый блок, тянет по наклонной плоскости груз такого же веса (рис. 13). Определить ускорение, с которым движутся грузы, если наклонная плоскость образует с горизонтом угол $\alpha=30°$, а коэффициент трения $k=0{,}05$.

65. При условиях движения грузов, описанных в предшествующей задаче, найти силу, действующую на блок, если $m = 1$ *кг*.

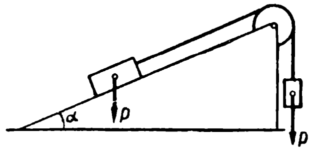


Рис. 13.

66. К грузу A массой 7 *кг* подвешен на веревке груз B массой 5 *кг*. Масса веревки 4 *кг*. К грузу A приложена направленная вверх сила 240 *н*. Определить натяжение в верхнем конце веревки и ее середине.

67. Тело свободно скользит с вершины неподвижной наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту $\alpha = 30°$. Определить его скорость в конце наклонной плоскости и время движения, если высота наклонной плоскости $h = 10$ *м*, а коэффициент трения $k = 0{,}05$.

68. Для равномерного поднимания груза весом $P = 1000$ *н* по наклонной плоскости, образующей угол 60° с вертикалью (рис. 14),

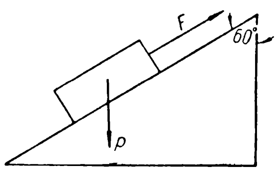


Рис. 14.

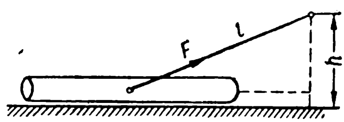


Рис. 15.

надо прилагать силу $F = 600$ *н*. С каким ускорением будет двигаться груз вниз, если его отпустить?

69. Бревно массой 200 *кг* тянут с постоянной скоростью силой 50 *н* при помощи веревки длиной $l = 4$ *м*. Расстояние конца веревки от земли $h = 0{,}75$ *м* (рис. 15). Найти коэффициент трения бревна о поверхность земли, если веревка прикреплена к середине бревна. Изменится ли величина силы трения, если веревка будет прикреплена к концу бревна?

70. Тело плотностью 800 *кг/м*^{3} погрузили в воду на глубину 1 *м* и отпустили. На какую максимальную высоту над поверхностью воды оно поднимется? Трения тела о воздух и воду не учитывать, а также пренебречь плотностью воздуха.

71. К потолку лифта, поднимающегося с ускорением $a_0 = 1{,}2$ *м/сек*^{2}, прикреплен динамометр, к которому подвешен блок, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 200$ *г* и $m_2 = 300$ *г*. Пренебрегая массой блока, определить показание динамометра.

72. Тепловоз весом $P = 5 \cdot 10^5$ *н* тянет состав из $n = 20$ нагруженных вагонов. Вес каждого вагона равен весу тепловоза. Определить время, в течение которого состав, тронувшись с места, приобретет скорость $v = 36$ *км/ч*. Сила тяги тепловоза $F = 6 \cdot 10^4$ *н*; коэффициент трения $k = 0{,}005$.

73. На столе лежит брусок весом 50 *н*. К бруску с помощью нити, переброшенной через блок (рис. 16), привязан груз весом 10 *н*. Коэффициент трения между поверхностями бруска и стола равен 0,4. Поэтому сила трения, приложенная к бруску и направленная влево, равна

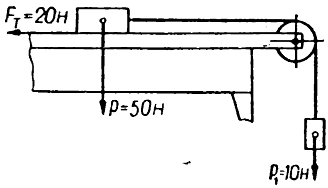


Рис. 16.

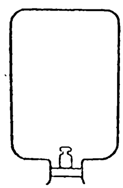


Рис. 17.

$0{,}4 \cdot 50$ *н* $= 20$ *н*. Отсюда следует, что брусок должен начать двигаться влево, так как сила трения на 10 *н* больше веса груза. Отыскать ошибку в рассуждениях.

74. В определенный момент времени t поезд имеет скорость 36 *км/ч*. Сила тяги электровоза составляет $21 \cdot 10^4$ *н*. Вес поезда $5 \cdot 10^6$ *н*. Коэффициент трения 0,002 считать постоянным. Определить скорость, которую будет иметь поезд через 10 *сек* после момента t, и путь, пройденный поездом за эти 10 *сек*.

75. Большой баллон, заполненный газом под давлением, повернут горлом вниз (рис. 17). Если освободить поршень от удерживающих его сил, то поршень выталкивается сжатым газом. Чтобы ускорить вылет поршня из баллона, предлагаются два способа:

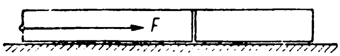


Рис. 18.

а) на поршень положить сверху груз; б) припаять к пробке груз такой же массы. Какой способ лучше? Трения не учитывать.

76. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом $k = 0{,}1$. Какое ускорение в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с нее соскользнуть?

77. Два одинаковых тела связаны нитью и лежат на гладком горизонтальном столе, так что нить представляет собой прямую линию. Нить может выдерживать натяжение с силой не более 20 *н*. Какую горизонтальную силу F следует приложить к одному из тел, чтобы нить оборвалась? Изменится ли сила, необходимая для разрыва нити, если между телами и столом есть трение и коэффициент трения одинаков для обоих тел?

78. Рассмотрим два бруска массой m_1 и m_2, движущиеся под действием силы F по горизонтальной плоскости без трения (рис. 18). Сила F приложена к бруску A и через него передается бруску B. По третьему закону механики брусок B должен с такой же по величине и противоположно направленной силой $(-F)$ действовать на брусок A. Если пренебречь трением, то результирующая сила, действующая на брусок A,

$$F_{\text{рез}} = F + (-F) = 0; \quad \text{тогда } a = \frac{F_{\text{рез}}}{m_1} = 0.$$

Отсюда следует, что какой бы величины силу мы не прикладывали к бруску A, мы никогда его не сдвинем с места. Найти ошибку в рассуждениях.

79. Какое усилие F развивает механизм строгального станка при разгоне стола, если вес стола с обрабатываемой деталью $P = 3920$ *н* и стол приобретает необходимую скорость резания $v = 1{,}5$ *м/сек* за 1 *сек*? Коэффициент трения скольжения стола по направляющим станка $k = 0{,}15$.

80. Грузы массами m и M $(M > m)$ связаны между собой с помощью динамометра и нити, перекинутой через неподвижный блок (рис. 19). Определить показание динамометра при условии, что коэффициент трения груза m о стол равен k. Весом динамометра и нити пренебречь.

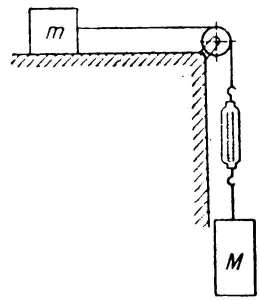


Рис. 19.

81. Есть твердое тело цилиндрической формы длиной l и с площадью основания S. На одно из оснований цилиндра действует постоянная сила F, перпендикулярная основанию (рис. 20). Какая сила действует на противоположное основание цилиндра? Какая сила действует на сечение C, параллельное основанию? Тело движется под действием силы F в среде без сопротивления.

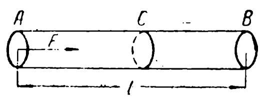


Рис. 20.

√**82.** Какова средняя сила давления на плечо при стрельбе из автоматического ружья, если масса пули $m = 10$ *г*, скорость при вылете $v = 300$ *м/сек* и ружье делает $n = 300$ выстрелов в минуту?

83. С каким ускорением должен ехать автомобиль массой m вниз по доске массой M, лежащей на неподвижном клине с углом наклона α, чтобы доска скользила по клину равномерно вверх (рис. 21)? Коэффициент трения колес автомобиля о доску равен k_1, доски о клин — k_2.

√**84.** По телу весом 98 *н*, находящемуся на высоте $h = 4{,}9$ *м* над горизонтальной поверхностью, производят горизонтальный удар с силой $F = 980$ *н*, действующей в течение очень малого промежутка времени $t = 0{,}01$ *сек*. На каком расстоянии s тело упадет на поверхность? Трения не учитывать.

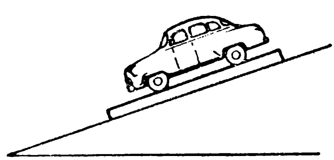


Рис. 21.

85. Шар массой $M = 3$ *кг*, подвешенный на нити длиной $l = 1{,}6$ *м*, отклоняют от вертикали на угол $\varphi = 60°$ и отпускают. В момент прохождения шара через положение равновесия по нем стреляют в горизонтальном направлении против его движения шариком массой $m =$

= 30 *г*. Считая, что удар шарика центральный и шар останавливается сразу же после столкновения, вычислить скорость шарика в момент столкновения.

86. Горизонтальная струя воды поперечным сечением 4 *см*^{2} бьет со скоростью 5 *м/сек* в вертикальную стенку и свободно стекает по ней вниз. Определить горизонтальную силу, с которой струя действует на стенку.

87. Лодка весом $P_1 = 1400$ *н* стоит неподвижно в стоячей воде. Человек весом $P_2 = 600$ *н*, находящийся в лодке, переходит с носа на корму, вследствие чего лодка смещается на 1,2 *м*. Определить длину лодки. Сопротивлением воды пренебречь.

88. Две лодки движутся по инерции в стоячей воде навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $v_1 = 0{,}6$ *м/сек*. Когда лодки находятся одна против другой, из первой лодки во вторую перебросили груз массой $m = 60$ *кг*. После этого вторая лодка продолжала двигаться в том же направлении, но со скоростью $v_2 = 0{,}4$ *м/сек*. Определить массу второй лодки. Сопротивлением воды пренебречь.

89. Три лодки одинакового веса P движутся одна за другой с одинаковой скоростью v. Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью u относительно лодки грузы весом P_1. Каковы будут скорости лодок после переброски грузов?

90. Легкоатлет разбегается в течение времени t и прыгает в длину. Определить максимально возможную дальность прыжка, если коэффициент трения k, а максимальная высота прыжка h.

91. Гимнаст массой 50 *кг*, держа в руках груз массой 5 *кг*, прыгает под углом 60° к горизонту со скоростью 6 *м/сек*. Достигнув максимальной высоты, он бросает груз горизонтально в обратном направлении со скоростью 2 *м/сек* относительно земли. Определить длину прыжка.

92. Человек стоит на платформе, которая может свободно перемещаться вдоль прямолинейного рельсового пути. Сначала человек и платформа неподвижны. Затем человек начинает равномерно двигаться вдоль платформы со скоростью 1 *м/сек*. Определить скорость человека относительно земли, если человек весит в девять раз меньше, чем платформа.

93. Человек вскакивает на движущуюся тележку и останавливается на ней. Какова будет после этого скорость тележки с человеком, если масса человека 70 *кг*, масса тележки 30 *кг*, начальная скорость тележки 1,5 *м/сек*? Решить эту же задачу, приняв, что человек движется навстречу тележке со скоростью 1 *м/сек*, вскакивает на тележку и останавливается на ней.

94. От двухступенчатой ракеты общей массой $M = 1000$ *кг* в момент достижения скорости 171 *м/сек* отделилась ее вторая ступень массой $m = 400$ *кг*, скорость которой при этом увеличилась до 185 *м/сек*. Найти, с какой скоростью стала двигаться первая ступень ракеты. Скорости указаны относительно наблюдателя, находящегося на Земле.

95. Предположим, что продукты сгорания выбрасываются из сопла реактивного двигателя порциями по $m = 200$ *г* каждая с начальной скоростью $v = 1000$ *м/сек*. Какую скорость приобрела бы ракета после выбрасывания третьей порции газа, если в начальный момент ее масса была $M = 300$ *кг*, а скорость равнялась нулю? Действие силы тяжести не учитывать.

96. Ракета летит со скоростью v. После отделения головной части скорость ракеты уменьшилась вдвое, а направление движения ракеты и головной части осталось прежним. Во сколько раз возросла скорость головной части ракеты, если ее масса меньше массы ракеты в шесть раз?

97. Снаряд, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $v = 700$ *м/сек*, разорвался на две части массой $m_1 = 3$ *кг* и $m_2 = 5$ *кг*. Движение большего куска осталось после взрыва горизонтальным и скорость увеличилась до $v_2 = 1200$ *м/сек*. Определить величину скорости и направление меньшего куска.

98. На водопроводном кране с помощью резиновой трубки укреплена стеклянная трубка длиной 1 *м* и внутренним сечением 0,3 *см*^{2} изогнутая внизу (рис. 22). Найти, на какой угол отклонится трубка, если вода вытекает из нее со скоростью 2 *м/сек*, а вес трубки $P = 0{,}8$ *н*.

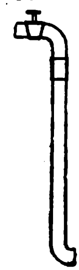


Рис. 22.

99. Огнетушитель выбрасывает каждую секунду $m = 0{,}2$ *кг* пены со скоростью $v = 20$ *м/сек*. Вес полного огнетушителя $P = 20$ *н*. Какую силу должен развивать человек, чтобы удержать огнетушитель неподвижно в руках в вертикальном положении в начальный момент его работы?

100. В автомобиле укреплена герметически закрытая банка с бензином, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, две грани которого перпендикулярны к оси автомобиля и находятся на расстоянии 30 *см* одна от другой. Какая разность давлений бензина на эти грани во время разгона автомобиля, если он набирает скорость 65 *км/ч* за 1 *мин*? Плотность бензина 700 *кг/м*^{3}.

101. Цилиндрический бак диаметром $d = 20$ *см* и высотой $h = 1$ *м* наполнен водой и с помощью стержня длиной $L = 3$ *м*, неподвижно соединенного с баком, подвешен к шарниру. Вода вытекает из бокового отверстия площадью $S = 2$ *см*^{2}, просверленного в баке возле его дна, со скоростью $v = 4{,}4$ *м/сек*. На какой угол от вертикали отклонится бак? Снижением уровня воды в баке вследствие вытекания пренебречь. Угол отклонения считать малым.

102. Горизонтальный винт вертолета может приводиться во вращение с помощью двигателя, установленного внутри фюзеляжа, или реактивной силой газов, вытекающих из специальных насадок на концах лопастей винта. Почему винтомоторному вертолету необходим хвостовой винт, а реактивному вертолету хвостовой винт не нужен?

§ 3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Точечное тело равномерно движется по окружности, если результирующая действующих на него сил направлена к центру окружности и равна

$$F = m\omega^2 R = m\frac{v^2}{R},$$

где m — масса; ω — угловая скорость; v — линейная скорость; R — радиус окружности.

Это же соотношение можно применять и к равномерному вращению твердого тела вокруг оси, если под R понимать расстояние центра массы тела от оси вращения.

Методика решения задач на равномерное движение тела по окружности принципиально ничем не отличается от методики решения задач предыдущего параграфа. Если тело движется по окружности, то ему сообщается центростремительное ускорение, направленное перпендикулярно к траектории движения тела и равное по величине $\frac{v^2}{R}$. Это ускорение сообщает телу нормальная составляющая равнодействующей всех сил, действующих на тело. Эта сила является, как всегда, результатом взаимодействия вращающегося тела с другими телами, способными в условиях опыта влиять на движение данного тела. Поэтому техника составления уравнения движения вращающегося тела сводится к следующему. Нужно учесть реально существующие взаимодействия вращающегося тела с другими телами и определить порождаемые этими взаимодействиями силы, действующие на данное тело. Сумму этих сил или их составляющих, действующих по направлению радиуса, следует написать в одной части уравнения движения данного тела и приравнять ее к произведению массы данного тела на центростремительное ускорение. Полученное уравнение и является уравнением движения данного тела в виде второго закона динамики.

При описанной методике решения задач предполагается инерциальная система отсчета (связанная с Землей); в этом случае нет необходимости вводить «особые» силы, помимо сил, создаваемых взаимодействием тел. Однако решение многих задач упрощается, если систему отсчета связать с вращающимся телом. В этом случае, помимо сил, обусловленных взаимодействием тел, к вращающемуся телу необходимо приложить центробежную силу инерции, которая направлена по радиусу от центра и равна $\frac{mv^2}{R}$ или $m\omega^2 R$.

Задача 1. Автомашина массой 2,5 *т* движется с постоянной скоростью 54 *км/ч* по мосту. С какой силой давит автомобиль на мост, проезжая через его середину, если: а) мост горизонтальный; б) мост выпуклый с радиусом кривизны 50 *м*; в) мост вогнутый с радиусом кривизны 90 *м*?

Решение. На автомашину в вертикальном направлении действует вес автомобиля $P = mg$ и реакция со стороны моста N.

а) В случае движения автомобиля по горизонтальному мосту ускорений в вертикальном направлении нет и равнодействующая сил P и N_1 равна нулю, т. е. $mg - N_1 = 0$ или $N_1 = mg$. Очевидно, что сила давления автомобиля на мост (во всех трех случаях) равна по величине реакции моста. Следовательно, $N_1 = 24\,500$ *н*.

б) В случае движения автомашины по выпуклому мосту те же силы сообщают ему центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$, направленное вниз (к центру кривизны), и закон движения будет иметь вид

$$P - N_2 = \frac{mv^2}{R}, \text{ откуда } N_2 = P - \frac{mv^2}{R} = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) \text{ или}$$

$$N_2 = 13\,250 \text{ н.}$$

в) При движении по вогнутому мосту испытываемое автомобилем центростремительное ускорение направлено вверх, поэтому

$$P - N_3 = -\frac{mv^2}{R_1}, \text{ откуда } N_3 = P + \frac{mv^2}{R_1} = m\left(g + \frac{v^2}{R_1}\right) \text{ или}$$

$$N_3 = 30\,750 \text{ н.}$$

Задача 2. Ведро, наполовину заполненное водой, вращают на вытянутой руке в вертикальной плоскости. Расстояние от оси вращения до центра тяжести воды в ведре равно 1 *м*. С каким наименьшим числом оборотов надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась из него при прохождении через наивысшую точку окружности?

Решение. При вращении ведра с водой в вертикальной плоскости на воду в наивысшей точке окружности давит дно ведра с силой N и действует вес воды P. Обе эти силы направлены вертикально вниз и сообщают воде центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$; поэтому $N + P = \frac{mv^2}{R}$.

Если вода не выливается из ведра при его вращении, то в наивысшей точке окружности вода давит на дно ведра и, значит, $N \neq 0$. Поэтому предельным будет случай, когда $N = 0$. Это условие и определяет минимальную линейную и угловую скорости. Тогда

$$\frac{mv^2}{R} = P \text{ или } m\omega^2 R = mg, \text{ откуда } \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 3{,}14 \frac{1}{сек}.$$

Число оборотов $n = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}5$ *об/сек* $= 30$ *об/мин.*

Задача 3. Самолет делает «мертвую петлю» с радиусом $R = 800$ *м* и движется по ней со скоростью $v = 720$ *км/ч*. С какой силой тело летчика массой 70 *кг* будет давить на сиденье самолета в верхней и нижней точках петли?

Решение. В верхней точке вес летчика mg и реакция сиденья N_1 действуют вертикально вниз и сообщают летчику центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$. Поэтому уравнение движения запишется так:

$$N_1 + mg = \frac{mv^2}{R}, \text{ откуда } N_1 = \frac{mv^2}{R} - mg = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) \text{ или}$$

$$N_1 = 2814 \text{ н.}$$

Поскольку в нижней точке реакция сиденья N_2 направлена вертикально вверх, то уравнение движения в нижней точке запишется так:

$$mg - N_2 = -\frac{mv^2}{R}, \text{ откуда } N_2 = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right) \text{ или } N_2 = 4186 \text{ н.}$$

Задача 4. На нити длиной 1 *м* подвешено тело массой 3 *кг*. На какую высоту надо отвести тело от положения равновесия, чтобы при прохождении этого положения нить испытывала растяжение 50 *н*?

Решение. На тело при прохождении положения равновесия действуют две силы: вертикально вниз вес тела mg и вертикально вверх натяжение нити $F_н$. Равнодействующая этих сил сообщает телу центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$. Поэтому уравнение движения тела при прохождении положения равновесия запишется так:

$$F_н - mg = \frac{mv^2}{R}.$$

Положение равновесия тело проходит со скоростью $v = \sqrt{2gH}$. Тогда

$$F_н - mg = \frac{2mg}{R} H, \text{ откуда } H = \frac{R(F_н - mg)}{2mg} \approx 0{,}35 \text{ м}.$$

Задача 5. С какой максимальной скоростью может ехать мотоциклист по горизонтальной плоскости, описывая дугу радиусом $R = 90$ *м*, если коэффициент трения колес о почву $k = 0{,}4$? На какой угол от вертикали должен отклониться мотоциклист при скорости $v_1 = 15$ *м/сек*?

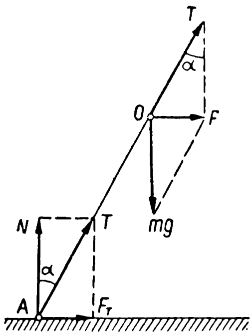


Рис. 23.

Решение. На мотоциклиста действует сила тяжести mg, реакция опоры (земли) N и сила трения $F_т$ (рис. 23). Сила трения $F_т$ принимает такое значение, чтобы, складываясь с реакцией опоры N, дать силу T, направленную вдоль мотоцикла (в противном случае относительно центра тяжести действовал бы момент сил, опрокидывающий мотоцикл).

На центр тяжести мотоцикла O действует результирующая F силы T и его веса, направленная горизонтально и обеспечивающая необходимое центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$, т. е. $F = \frac{mv^2}{R}$. Однако

$$F = T \sin\alpha = F_т \leqslant kmg; \text{ поэтому } kmg = \frac{mv^2_{макс}}{R},$$

$$\text{откуда } v_{макс} = \sqrt{kRg} \text{ или } v_{макс} \approx 18{,}8 \text{ м/сек}.$$

По второму закону динамики

$$F = mg \operatorname{tg}\alpha = \frac{mv_1^2}{R}, \text{ откуда } \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1^2}{gR} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}2551,$$

$$\text{а } \alpha \approx 14°19'.$$

Задачи

103. Автомобиль движется по мосту, имеющему форму дуги окружности радиусом 40 *м*, обращенной выпуклостью вверх. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развивать автомобиль в высшей точке моста, если скорость его в этой точке равна 50,4 *км/ч*? Коэффициент трения колес автомобиля о мост 0,57.

104. Самолет с реактивным двигателем летит со скоростью $v = 1000$ *км/ч*. Считая, что человек может переносить пятикратное увеличение веса, найти, какой наименьший радиус кривизны можно допустить при вираже.

105. Определить, какого радиуса окружность может описать велосипедист, если он едет со скоростью 25 *км/ч*, а предельный угол наклона велосипедиста к земле составляет 60°.

106. Центробежный механизм совершает $n=2$ *об/сек*. На какой угол отклоняются при этом стержни, несущие на своих концах шары массой m? Длина каждого стержня $l = 16$ *см*. Массой всех деталей, кроме шаров, пренебречь.

107. Два тела весом $P_1 = 80$ *н* и $P_2 = 50$ *н* связаны нитью, длина которой $l = 1$ *м*. Тела приводят во вращение в горизонтальной плоскости относительно общего центра тяжести с угловой скоростью $\omega = 20$ *рад/сек*. Определить натяжение нити.

108. С какой скоростью должен двигаться автомобиль по выпуклому мосту радиусом R, чтобы в некоторой точке водитель не давил на сиденье?

109. Шоссе имеет вираж с уклоном в 10° при радиусе закругления дороги 100 *м*. На какую скорость рассчитан вираж?

110. Для устранения бокового давления колес поезда на рельсы при движении по закругленным участкам пути наружный рельс укладывают несколько выше внутреннего. Определить высоту h возвышения внешнего рельса над внутренним, если радиус закругления $R = 800$ *м*, скорость поезда 72 *км/ч* и ширина пути $l = 1{,}5$ *м*.

111. Самолет движется по окружности в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью $v = 720$ *км/ч*. Определить радиус этой окружности R, если корпус самолета повернут вокруг направления полета на угол $\alpha = 10°$.

112. Гимнаст «крутит солнце» на перекладине. Масса гимнаста m, расстояние от перекладины до центра тяжести гимнаста l. Считая, что вся масса гимнаста сосредоточена в его центре тяжести, а скорость его в верхней точке равняется нулю, определить величину силы, действующей на руки гимнаста в нижней точке.

113. На горизонтальном диске, вращающемся вокруг вертикальной оси, укреплен вертикальный стержень на расстоянии $r = 10$ *см* от оси вращения. К концу нити длиной $l = 6$ *см* прикреплен шарик массой m. С какой угловой скоростью вращается диск, если нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 45°$?

114. Груз весом $P = 9{,}8$ *н* прикреплен к одному концу тонкого стержня, который может вращаться без трения в вертикальной плоскости относительно другого конца. Груз отвели от положения равновесия на угол $\alpha = 120°$ и отпустили, вследствие чего он совершает колебательное движение. Определить натяжение стержня в момент прохождения груза через положение равновесия. Весом стержня пренебречь.

115. Лента ленточного конвейера наклонена к горизонту под углом α. Определить минимальную скорость движения ленты, при которой несомая лентой частица руды отделяется от поверхности ленты в месте набегания ленты на барабан, если радиус барабана равен R.

116. Люстра весом 980 *н* подвешена к потолку на металлической цепи, длина которой $l = 5$ *м*. Какова высота h, на которую можно качнуть люстру, чтобы при последующих качаниях цепь не оборвалась? Известно, что разрыв цепи наступает при натяжении $F_н = 1960$ *н*.

117. Каков наименьший радиус круга, по которому может проехать конькобежец, движущийся со скоростью $v = 20$ *км/ч*, если коэффициент трения скольжения между коньками и поверхностью льда $k = 0{,}2$? Каков наибольший угол наклона конькобежца от вертикали, при котором он еще не будет падать на закруглении?

118. Груз, подвешенный на нити длиной l, равномерно вращается по окружности в горизонтальной плоскости. Найти период вращения груза, если нить при вращении отклоняется от вертикали на угол α.

119. Камень массой $m = 0{,}5$ *кг*, привязанный к веревке длиной $l = 50$ *см*, вращается в вертикальной плоскости. Натяжение веревки в низшей точке окружности равно $F_н = 44{,}1$ *н*. На какую высоту поднимается камень, если веревка обрывается в тот момент, когда скорость направлена вертикально вверх?

120. Маятник весом $P = 1$ *н* подвешен на нити длиной $R = 1$ *м* и совершает колебания. При прохождении груза через нижнюю точку нить испытывает растяжение $F_{макс} = 1{,}5$ *н*. Определить наибольшую высоту поднятия груза.

121. Сосуд, имеющий форму расширяющегося усеченного конуса с диаметром дна $D = 20$ *см* и углом наклона стенок $\alpha = 60°$, вращается вокруг вертикальной оси. При какой угловой скорости вращения сосуда шарик, лежащий на его дне, будет выброшен из сосуда? Трение не учитывать.

122. В полом шаре радиусом $R = 50$ *см* лежит шарик радиусом $r = 10$ *см*. Шар приводится во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 7$ $1/сек$. Определить положение равновесия маленького шарика.

123. Горизонтальный диск вращается вокруг вертикальной оси со скоростью $n=30$ *об/мин*. На расстоянии $R = 20$ *см* от оси вращения на диске лежит тело. Каким должен быть коэффициент трения, чтобы тело не соскользнуло с диска?

124. Шарик массой $m = 50$ *г* вращается на резиновом шнуре со скоростью $n = 180$ *об/мин*. На сколько удлиняется шнур при вращении? Растяжение считать пропорциональным приложенной силе; под действием силы 9,8 *н* шнур растягивается на 1 *см*. Длина шнура в нерастянутом состоянии $l = 30$ *см*.

125. Жесткий стержень длиной l, укрепленный под углом φ на вертикальной оси, вращается вместе с осью с угловой скоростью ω. К нижнему концу стержня прикреплен шарик массой m. Определить силу, с которой стержень действует на шарик.

126. Велосипедист должен проехать по треку, имеющему форму «мертвой петли», радиус которой $R = 8$ *м*. С какой высоты он должен начать разгон, чтобы не упасть в верхней точке петли?

127. В вагоне поезда, идущего равномерно по закруглению радиусом $R = 400$ *м* со скоростью $v = 72$ *км/ч*, взвешивают груз на пружинных весах. Масса груза $m = 5$ *кг*. Определить показание пружинных весов. При какой скорости показания пружинных весов возрастут на 0,5% по отношению к истинному весу?

128. Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость движения велосипедиста по наклонному треку с углом наклона α по сравнению с допустимой скоростью по горизонтальному треку при одинаковом радиусе закругления и коэффициенте трения k?

129. Какой должна быть скорость движения мотоциклиста, чтобы он мог ездить на внутренней поверхности вертикального цилиндра по горизонтальному замкнутому кругу, если при езде по горизонтальной поверхности с тем же коэффициентом трения скольжения минимальный радиус поворота на скорости $v_1 = 20$ *км/ч* составляет $R = 5{,}5$ *м*? Радиус цилиндра $r = 6$ *м*.

130. К каждому из концов вертикального стержня, вращающегося с угловой скоростью ω, привязаны нити. К свободным концам нитей привязан шарик массой $m = 500$ *г*. Шарик вращается в горизонтальной плоскости. Нити во время вращения шарика образуют между собой прямой угол. Длина верхней нити составляет $a = 30$ *см*, нижней $b = 40$ *см*. Какая нить разорвется первой и при какой угловой скорости вращения, если нить разрывается при силе натяжения $F_н = 12{,}6$ *н*? Принять, что $g = 10$ $м/сек^2$.

§ 4. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Сила притяжения двух точечных тел или однородных шаров массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии R, определяется законом всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где γ — гравитационная постоянная, равная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *м³/кг*$\times$ $\times$*сек²*.

Планеты вращаются вокруг Солнца по законам Кеплера (приблизительно). Этим же законам подчиняется движение спутников вокруг планет. Третий закон Кеплера имеет вид:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

где T_1 и T_2 — периоды обращения планет; R_1 и R_2 — большие полуоси их орбит. В случае круговой орбиты роль большой полуоси играет радиус орбиты.

Задача 1. Определить период обращения T Луны вокруг Земли, зная ускорение силы земного тяготения на полюсах $g_0 = 9{,}83$ *м/сек²*, радиус Земли $R_з = 6370$ *км* и расстояние между Луной и Землей $R = 3{,}84 \cdot 10^8$ *м*.

Решение. Центростремительной силой, вынуждающей Луну двигаться вокруг Земли по круговой орбите с линейной скоростью $v = \frac{2\pi R}{T}$, выступает сила притяжения Луны Землей $\gamma \frac{m_з m_л}{R^2}$.

Поэтому $\frac{4\pi^2 m_л R}{T^2} = \gamma \frac{m_з m_л}{R^2}$.

Использовав соотношение

$$g_0 = \gamma \frac{m_з}{R_з^2} \left(P_0 = \gamma \frac{m m_з}{R_з^2} \text{ и } P_0 = m g_0, \text{ тогда } g_0 = \gamma \frac{m_з}{R_з^2} \right),$$

$$\text{получим } \frac{4\pi^2 R}{T^2} = g_0 \frac{R_з^2}{R^2}, \text{ откуда } T = 2\pi \frac{R}{R_з} \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

или

$$T = 6{,}28 \frac{3{,}84 \cdot 10^8}{6370 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{384 \cdot 10^8}{9{,}83}} \text{ сек} \approx 27{,}4 \text{ суток.}$$

Примечание. Ускорение силы земного тяготения берем для полюсов, так как на полюсах вес тела равен силе притяжения тела Землей. В любой другой точке поверхности Земли тело участвует в суточном вращении под действием центростремительной силы, равной разности силы притяжения тела к Земле и веса тела. Поэтому вес тела меньше силы притяжения к Земле.

Задача 2. Максимальное удаление от поверхности Земли первого искусственного спутника Земли составляло 947 *км*. Какую скорость должен был иметь спутник на этой высоте, чтобы удерживаться на круговой орбите? Радиус Земли $r = 6370$ *км*.

Решение. Сила притяжения спутника к Земле сообщает ему центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$. Поэтому $\gamma \frac{mM}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$, где $R = r + h$ — расстояние между центрами тяжести Земли и спутника. После преобразований

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}, \text{ но } \gamma M = gr^2, \text{ тогда } v = r\sqrt{\frac{g}{R}} \text{ или } v \approx 7300 \text{ м/сек.}$$

Задача 3. Тело подняли с помощью ракеты на высоту $h = 500$ *км*. Какую скорость v следует сообщить этому телу в направлении, перпендикулярном к земному радиусу, чтобы оно двигалось вокруг Земли по круговой орбите? Каков будет период T обращения этого тела вокруг Земли? Сопротивлением атмосферы движению тела пренебречь. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли принять 9,8 *м/сек*^{2}, а радиус Земли — 6370 *км*.

Решение. Тело будет двигаться вокруг Земли по круговой орбите с линейной скоростью v, если сила притяжения $\gamma \frac{mM_з}{(R_з + h)^2}$ обеспечит необходимую центростремительную силу $\frac{mv^2}{R_з + h}$, т. е.

$$\gamma \frac{mM_з}{(R_з + h)^2} = \frac{mv^2}{R_з + h},$$

где m — масса спутника.

Учитывая, что $\gamma M_з = g_0 R_з^2$, получим

$$v = R_з \sqrt{\frac{g_0}{R_з + h}} \text{ или } v = 637 \cdot 10^4 \text{ м} \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ м/сек}^2}{637 \cdot 10^4 \text{ м} + 50 \cdot 10^4 \text{ м}}} \approx$$

$$\approx 7635 \text{ м/сек.}$$

Период обращения

$$T = \frac{2\pi (R_з + h)}{v} = 2\pi \frac{R_з + h}{R_з} \sqrt{\frac{R_з + h}{g_0}} \text{ или}$$

$$T = 6{,}28 \cdot \frac{687 \cdot 10^4 \text{ м}}{637 \cdot 10^4 \text{ м}} \cdot \sqrt{\frac{687 \cdot 10^4 \text{ м}}{9{,}8 \text{ м/сек}^2}} \approx 1{,}6 \text{ ч.}$$

Задача 4. В каком направлении и с какой горизонтальной скоростью должен лететь вдоль экватора самолет, чтобы скомпенсировать уменьшение веса, обусловленное вращением Земли?

Решение. Чтобы скомпенсировать уменьшение веса, обусловленное вращением Земли, самолет должен двигаться со скоростью, равной линейной скорости точек земной поверхности на экваторе в направлении вращения Земли, т. е. скорость самолета относительно земной поверхности должна быть равной нулю (высотой полета самолета по сравнению с радиусом Земли пренебрегаем). Таким образом, самолет должен лететь с востока на запад со скоростью

$$v = \frac{2\pi R}{T} \text{ или } v = \frac{6{,}28 \cdot 64 \cdot 10^5 \text{ м}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ сек}} \approx 465 \text{ м/сек.}$$

Задача 5. Найти ускорение силы тяжести g_1 на поверхности астероида с диаметром $d = 30$ *км*, считая среднюю плотность вещества астероида такой же, как и Земли. Диаметр Земли считать равным $D = 12\,800$ *км*.

Решение. Вес тела массой m на поверхности астероида

$$mg_1 = \gamma \frac{m \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} d\right)^3 \rho}{\left(\frac{1}{2} d\right)^2};$$

на поверхности Земли

$$mg = \gamma m \frac{\frac{4}{3} \pi\rho \left(\frac{1}{2} D\right)^3}{\left(\frac{1}{2} D\right)^2},$$

где ρ — средняя плотность вещества. Деля второе равенство на первое, получим

$$\frac{g_1}{g} = \frac{d}{D}, \text{ откуда } g_1 = g\frac{d}{D} \text{ или } g_1 \approx 2{,}3 \textit{ см/сек}^2.$$

Задачи

131. Найти ту точку на прямой линии, соединяющей Землю и Луну, находясь в которой тело будет притягиваться Луной и Землей с одинаковой силой. Расстояние между Землей и Луной считать равным 60 земным радиусам, массу Луны в 81 раз меньше массы Земли.

132. Определить период обращения искусственного спутника Земли, если он удален от поверхности Земли на расстояние, равное радиусу Земли?

133. Средняя высота спутника над поверхностью Земли $h = 1700$ *км*. Определить его скорость и период обращения. Принять радиус Земли $R = 6400$ *км*.

134. Вычислить постоянную тяготения, приняв радиус Земли $R = 6370$ *км* и среднюю плотность Земли $\rho = 5{,}5 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}.

135. Определить массу Солнца, зная период обращения Земли вокруг Солнца T и радиус земной орбиты r.

136. Радиус Марса составляет 0,53 радиуса Земли. Масса Марса составляет 0,11 массы Земли. Сравните вес тела одинаковой массы на Земле и Марсе.

137. Найти число оборотов спутника за сутки вокруг Земли, если он движется по круговой орбите с радиусом $R = 7340$ *км*.

138. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты $\rho = 3 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}. Определить период обращения планеты вокруг собственной оси.

139. Определить плотность вещества планеты, сутки на которой составляют 24 *ч*, если на ее экваторе тела невесомы.

140. Определить массу Земли $M_З$, зная период обращения спутника вокруг нее $T_с$ и расстояние между ними $R_с$.

141. Найти ускорение силы тяжести на поверхности Солнца, если известны продолжительность земного года T, расстояние от Земли до Солнца R и угол α, под которым с Земли виден диаметр Солнца.

142. Какую горизонтальную скорость относительно поверхности Земли надо сообщить ракете, летящей на небольшом расстоянии от земной поверхности вдоль ее экватора, чтобы она при выключении двигателей, не падая на Землю, начала двигаться по круговой орбите вокруг Земли (превратилась в ее искусственный спутник)? Сопротивлением атмосферы движению ракеты пренебречь.

143. Определить расстояние x от центра Земли к искусственному спутнику и скорость последнего v, если спутник движется в плоскости земного экватора в сторону вращения Земли с такой скоростью, что остается неподвижным относительно Земли. Радиус Земли принять $R = 6400$ *км*.

144. Предположим, что космонавты, подлетев к планете, придали кораблю горизонтальную скорость $v = 11$ *км/сек*. Эта скорость обеспечила полет корабля по круговой орбите с радиусом 9100 *км*. Каково ускорение силы тяжести на поверхности планеты, если ее радиус равен 8800 *км*?

145. Найти изменение ускорения силы тяготения при опускании тела под поверхность Земли на глубину h. На какой глубине ускорение силы тяготения составляет 0,3 ускорения силы тяготения на поверхности Земли? Плотность Земли считать постоянной. Со стороны шара, лежащего выше тела, тело не испытывает притяжения.

146. Определить отношение веса тел на экваторе и полюсе планеты, радиус которой R, масса M и продолжительность суток T.

147. Известно, что вследствие вращения планеты вес тела на экваторе меньше, чем на полюсе. На какой высоте над поверхностью планеты на полюсе вес тела сравняется с весом этого же тела на поверхности на экваторе? Считать планету шаром радиусом R, время обращения планеты вокруг оси T. Средняя плотность вещества планеты ρ.

148. Диаметр астероида $d = 5$ *км*. Считая, что плотность вещества астероида составляет $\rho = 5{,}5 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}, найти ускорение силы тяжести g_a на его поверхности и определить, на какую высоту поднялся бы человек, находящийся на астероиде, подпрыгнув с усилием, достаточным для прыжка на высоту 0,5 *м* на поверхности Земли.

149. Определить ускорение g силы тяжести на высоте $h = 200$ *км* над поверхностью Земли, приняв ускорение силы тяжести на поверхности Земли $g_0 = 9{,}81$ *м/сек*^{2}. Радиус Земли $R = 6370$ *км*.

150. Время обращения Юпитера в 12 раз больше времени обращения Земли вокруг Солнца. Определить расстояние от Юпитера до Солнца, если расстояние Земли от Солнца равно $15 \cdot 10^{10}$ *м*. Считать орбиты планет круговыми.

151. Определить период обращения Луны вокруг Земли, зная ускорение силы тяжести g_0 на Земле, радиус Земли $r = 6370$ *км* и расстояние от Земли до Луны $R = 3{,}84 \cdot 10^5$ *км*.

152. Считая орбиты Земли и Луны приближенно круговыми, вычислить отношение масс Земли и Солнца. Известно, что Луна совершает 13 оборотов за год и что расстояние Земли от Солнца в 390 раз больше расстояния Луны от Земли.

§ 5. СТАТИКА

Тело находится в равновесии, если действующая на него система сил уравновешена. Для этого она должна удовлетворять таким условиям:

1. Равнодействующая всех действующих сил должна быть равна нулю

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = 0;$$

2. Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой возможной оси вращения должна быть равна нулю

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0.$$

Однако накладываемые на тело связи значительно упрощают условия равновесия тел. Если наложенные связи не допускают вращения тела вокруг оси, то для равновесия тела достаточно, чтобы равнодействующая всех приложенных к нему сил была равна нулю. Однако, если на тело наложена связь в виде оси вращения, так что тело может совершать только вращательное движение, то для равновесия его достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов приложенных к нему сил относительно этой оси была равна нулю.

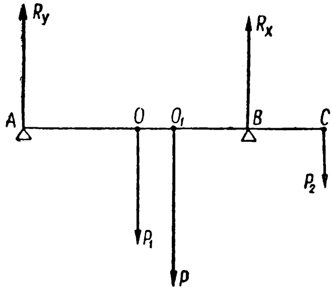


Рис. 24.

Задача 1. Вал весом $P = 25\,000$ *н* лежит в двух подшипниках, расстояние между которыми $AB = 1{,}8$ *м*, и выступает за один подшипник на $BC = 0{,}7$ *м*. Посредине между подшипниками на вал действует сила $P_1 = 15\,000$ *н*, направленная вниз. На выступающий конец вала насажен маховик весом $P_2 = 10\,000$ *н*. Определить силы давления на подшипники.

Решение. Обозначим через R_x и R_y силы реакции подшипников B и A (рис. 24). Предположим, что вал может вращаться вокруг точки A. Тогда условия равновесия запишутся так:

$$P_1 \cdot AO + P \cdot AO_1 + P_2 \cdot AC - R_x \cdot AB = 0 \text{ и } P_1 + P_2 + P = R_x + R_y.$$

Из первого уравнения $R_x = 38\,750$ *н*, тогда $R_y = 11\,250$ *н*.

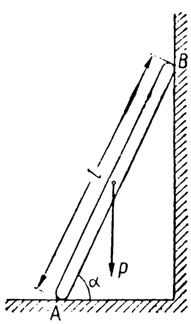


Рис. 25.

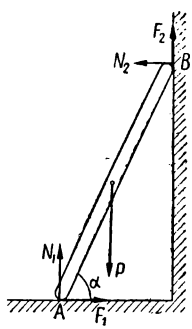


Рис. 26.

Задача 2. Щит AB длиной $l = 3$ *м* и весом $P = 500$ *н* прислонен к стене (рис. 25). Коэффициент трения скольжения между щитом и полом $k = 0{,}4$, а между щитом и стеной — $k_1 = 0{,}5$. Определить наименьший угол α, при котором щит сохраняет равновесие, а также силу давления на пол и стену.

Решение. Изобразим силы, действующие на щит (рис. 26). Запишем уравнения, определяющие условие равновесия щита.

Сумма моментов сил относительно точки A:

$$N_2 l \sin\alpha - P\frac{l}{2}\cos\alpha + F_2 l \cos\alpha = 0. \qquad (1)$$

Сумма горизонтальных составляющих сил:

$$F_1 - N_2 = 0. \tag{2}$$

Сумма вертикальных составляющих:

$$N_1 - P + F_2 = 0. \tag{3}$$

Однако

$$F_1 = kN_1; \tag{4}$$

$$F_2 = k_1 N_2. \tag{5}$$

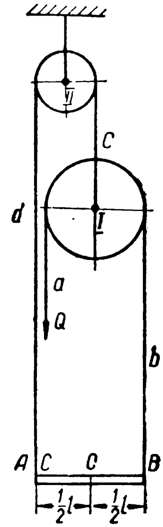


Рис. 27.

Разделим все члены уравнения (1) на $l \cos \alpha$ и решим относительно $\operatorname{tg} \alpha$: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\frac{1}{2}P - F_2}{N_2}$.

Подставив значение F_1 из уравнения (4) в уравнение (2), получим $N_2 = kN_1$. Подставив значение F_2 из уравнения (5) в уравнение (3), получим $N_1 = P - k_1 N_2$.

Решив последние два уравнения, получим

$$N_1 = \frac{P}{1 + kk_1} \approx 416{,}7 \text{ н}; \quad N_2 = P\frac{k}{1 + kk_1} \approx 66{,}7 \text{ н};$$

$$\text{тогда} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - kk_1}{2k} = 1, \quad \text{откуда} \quad \alpha = 45^\circ.$$

Задача 3. Человек весом 588 *н* стоит на доске весом 294 *н*, подвешенной на блоках (рис. 27). Длина доски между точками подвеса l. С какой силой должен человек тянуть веревку и в каком месте доски стоять, чтобы удерживать доску в горизонтальном положении? Весом блоков пренебречь.

Решение. Прежде всего выясним, какие силы действуют на доску кроме ее веса P. Пусть человек должен тянуть за веревку a с силой X. Тогда натяжение веревки b тоже будет X. Как видно из рисунка, натяжение веревки d равно $2X$. Следовательно, на доску действуют две параллельные силы X и $2X$, направленные вверх. С другой стороны, на доску в точке C действует человек с силой $(588 - X)$ *н* и вертикально вниз действует вес доски. Сумма всех сил, действующих на доску, должна быть равна нулю, так как доска находится в равновесии, т. е.

$$2X + X - (Q - X) - P = 0, \quad \text{откуда} \quad X = \frac{P + Q}{4} = 220{,}5 \text{ н}.$$

Предположим, что доска подперта в точке C (легко понять целесообразность такого предположения, повернув рисунок на 180°). Сила $(Q - X)$ играет роль реакции опоры, уравновешивающей равнодействующую сил $2X$, P и X. Сумма моментов сил для случая равновесия должна равняться нулю:

$$2X \cdot AC + P \cdot OC - X \cdot BC = 0.$$

Однако

$$BC = l - AC \quad \text{и} \quad OC = \frac{1}{2}\, l - AC,$$

$$\text{откуда } AC = \frac{Q - P}{3Q - P}\, l = \frac{1}{5}\, l.$$

Задача 4. Определить положение центра тяжести однородного диска радиусом R, из которого вырезано отверстие радиусом r (рис. 28). Центр выреза находится от центра диска на расстоянии $\frac{1}{2} R$.

Решение. Вес диска до выреза отверстия пропорционален πR^2 и приложен в центре диска O. Вес вырезанной части диска пропорционален πr^2. Предположим, что из диска вырезано симметрично первому отверстию такое же второе (рис. 29). Тогда вес оставшейся части будет пропорционален $\pi\,(R^2 - 2r^2)$ и приложен в точке O. Теперь положение центра тяжести найдем как точку приложения равнодействующей сил, пропорциональных $\pi\,(R^2 - 2r^2)$ и πr^2 и приложенных в точках O и O_1.

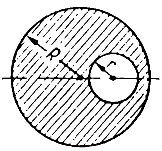


Рис. 28.

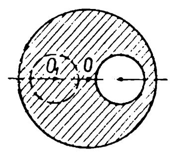


Рис. 29.

Пусть центр тяжести находится в точке B на расстоянии x от O. Тогда можно записать условие равенства моментов сил относительно точки B:

$$\pi\,(R^2 - 2r^2)\, x = \pi r^2 \left(\frac{1}{2} R - x\right), \text{ откуда } x = \frac{r^2 R}{2\,(R^2 - r^2)}.$$

Задачи

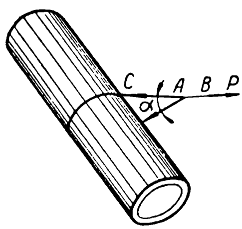


Рис. 30.

153. При взвешивании на неравноплечих рычажных весах вес тела на одной чашке был $P_1 = 60$ *н*, на другой — $P_2 = 64$ *н*. Определить истинный вес тела.

154. Рабочий поднимает за один конец доску весом 400 *н* и длиной 4 *м* так, что доска образует с горизонтом угол 30°. С какой силой удерживает рабочий доску в этом положении, если сила, приложенная им, направлена перпендикулярно к доске?

155. На наклонной плоскости лежит деревянный брусок. Чтобы этот брусок не скользил по плоскости, а находился на ней в равновесии, к нему приложена сила, образующая с наклонной плоскостью угол 90°. Какова минимальная величина этой силы? Вес бруска $P = 20$ *н*, длина наклонной плоскости $l = 1$ *м*, высота $h = 60$ *см*. Коэффициент трения бруска по наклонной плоскости $k = 0{,}4$.

156. На трубу большого диаметра (рис. 30) надета веревочная петля, к которой привязан конец AB, за который тянут с силой P. Где будет большим натяжение веревки: на участке AB или на участке петли AC?

157. На наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту стоит цилиндр радиусом r. Какова наибольшая высота цилиндра, при которой он еще не опрокидывается, если он сделан из однородного материала?

158. Лестница весом P и длиной l прислонена к гладкой вертикальной стене под углом α (рис. 31). Центр тяжести лестницы находится на высоте h от пола. Человек тянет лестницу за ее середину с силой F в горизонтальном направлении. Какова минимальная величина этой силы, необходимая для того, чтобы можно было оторвать верхний конец от стены? Трение о пол настолько велико, что нижний конец лестницы не скользит.

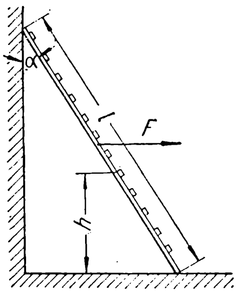


Рис. 31.

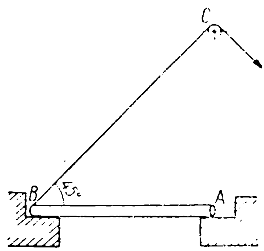


Рис. 32.

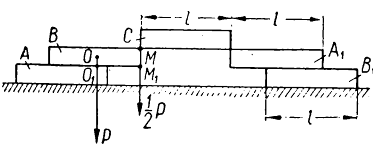


Рис. 33.

159. Фонарь весом $P = 100$ *н* подвешен на канатике над серединой улицы шириной $d = 10$ *м*. Допустимое натяжение канатика $T = 500$ *н*. Какова должна быть высота крепления концов канатика, если точка прикрепления фонаря к канатику должна находиться на высоте $h = 6$ *м*?

160. Дверца горизонтального люка AB, вращающаяся вокруг шарнира A, открывается с помощью шнура BC, огибающего неподвижный блок C. С какой силой надо тянуть за шнур в начале подъема дверцы, если ее вес $P = 800$ *н*, а угол между шнуром BC и рамой AB равен 45° (рис. 32)?

161. Для укрепления крыши постройки каменщик сделал карниз из четырех кирпичей так, что часть каждого кирпича выдвинута над нижним кирпичом. Определить наибольшую длину выдвинутой части кирпича, при которой кирпичи будут находиться в равновесии без цементирования. Длина каждого кирпича l.

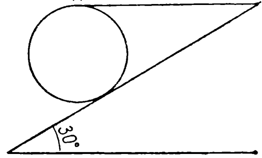


Рис. 34.

162. Какой максимальной длины «мост» можно построить из пяти брусков домино способом, показанным на рис. 33?

163. Диск, диаметр которого 50 *см* и вес 40 *н*, находится на шероховатой наклонной планке, образующей с горизонтом угол 30°(рис. 34). Качение диска предотвращено трением и горизонтально расположенной веревкой, которая одним своим концом прикреплена к самой верхней точке диска A, а другим — к планке. Найти натяжение веревки.

164. Колесо радиусом R и массой m стоит перед ступенькой высотой h. Какую наименьшую горизонтальную силу F надо приложить к оси колеса O, чтобы оно могло подняться на ступеньку? Трения не учитывать.

165. Однородная балка лежит на платформе так, что один конец ее свешивается с платформы. Длина свешивающегося конца равна 0,25 длины балки. На конец балки действует сила P. При $P = 3000$ *н* противоположный конец балки начинает подниматься. Определить вес балки.

166. На горизонтальной плоскости стоит биметаллическая пластинка в положении неустойчивого равновесия. При нагревании пластинка изгибается. Сохранится ли равновесие? Рассмотреть два случая: без учета трения между пластинкой и горизонтальной плоскостью и с учетом трения.

167. Длинный шест постоянного сечения, сделанный из однородного материала, прислонен к стене, так что он образует угол α с горизонтом. Определить соотношение между коэффициентами трения, при которых шест еще не соскользнет вниз?

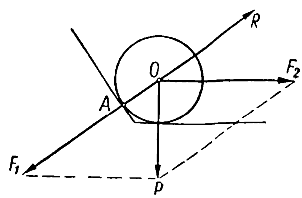


Рис. 35.

168. На горизонтальной плоскости лежит шар, касающийся наклонной плоскости. Разложим силу тяжести шара P по двум направлениям: одно выберем параллельно горизонтальной плоскости, другое — перпендикулярно к наклонной плоскости (рис. 35). Сила давления шара на наклонную плоскость F_1 по третьему закону динамики уравновешивается реакцией плоскости. Следовательно, на шар действует только сила F_2, которая должна была бы привести его в движение по направлению действия этой силы. Однако шар остается в покое. В чем здесь дело?

169. Четыре шара, вес которых соответственно равен 20, 30, 40 и 50 *н*, укреплены на стержне таким образом, что их центры находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Пренебрегая весом стержня, определить центр тяжести системы.

170. В однородном тонком диске радиусом R вырезали круглое отверстие вдвое меньшего радиуса, касающееся края пластинки. Определить положение центра тяжести диска.

171. Определить положение центра тяжести квадратной тонкой пластинки со стороной b, в которой вырезали круглое отверстие радиусом $\frac{b}{4}$ так, что оно касается средины одной из сторон квадрата.

172. На круглом столе, крышка которого имеет радиус R и массу M, лежит, касаясь края крышки, диск радиусом r и массой m. Где должны быть размещены три ножки стола, чтобы они с одинаковой силой давили на пол?

173. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду, причем равновесие достигается, когда палочка расположена наклонно к поверхности воды и в воде находится половина ее длины. Какова плотность материала, из которого сделана палочка?

174. Через блоки A и A_1, оси которых находятся на одинаковой высоте, переброшена нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза p. В точке C, середине AA_1, к нити подвешивают грузик q. На какое расстояние x опустится этот грузик, если $AA_1 = a$? Трение в блоках существует, но очень незначительное.

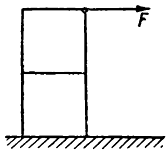


Рис. 36.

175. Два куба с ребром 10 *см* спаяны гранями и образуют призму; вес одного куба 10 *н*, вес другого 30 *н*. Призма стоит на шероховатой горизонтальной плоскости (рис. 36). Какую горизонтальную силу F надо приложить к верхнему основанию призмы перпендикулярно к ее ребру, чтобы опрокинуть призму через ребро? Зависит ли величина силы F от того, какой куб находится наверху — легкий или тяжелый?

§ 6. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

Работа A силы F на пути s равна

$$A = Fs\cos\alpha,$$

где α — угол между линией действия силы и направлением перемещения тела.

Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v,

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Если под действием постоянной силы F скорость тела массой m изменяется от значения v_1 до значения v_2, то работа внешней силы равна изменению кинетической энергии тела

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Формулы для потенциальной энергии имеют разный вид в зависимости от характера действующих сил.

Потенциальная энергия тела массой m у поверхности Земли (точнее, потенциальная энергия системы тело — Земля), если считать поле земного тяготения однородным,

$$E_{\text{п}} = mgh,$$

где h — высота поднятия центра тяжести тела над Землей.

Потенциальная энергия пружины, сжатой на величину s,

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2}ks^2,$$

где k — коэффициент жесткости пружины.

Мощность $N = \frac{A}{t}$, где A — работа, совершаемая за время t.

Мощность механизма можно определить также формулой $N = Fv\cos\alpha$, где F — движущая сила, v — скорость движения, α — угол между линией действия силы и направлением движения.

Задача 1. Автомобиль движется вверх по небольшому подъему с постоянной скоростью $v_1 = 3$ *м/сек*; если он движется в обратном направлении, т. е. под уклон, то при той же мощности двигателя устанавливается скорость $v_2 = 7$ *м/сек*. Какая скорость v_0 установится при той же мощности двигателя во время движения по горизонтальному пути? При указанных скоростях принять, что сила тяги не зависит от скорости.

Решение. Для этих трех случаев движения автомобиля можно записать $F_1 v_1 = F_2 v_2 = F_0 v_0$.

Определим движущую силу для каждого случая движения автомобиля. При движении автомобиля вверх по подъему движущая сила

$$F_1 = mg \sin \alpha + kmg \cos \alpha,$$

где k — коэффициент трения; α — угол подъема дороги.

Очевидно, для движения автомобиля под уклон движущая сила будет

$$F_2 = kmg \cos \alpha - mg \sin \alpha,$$

а при движении по горизонтальному пути

$$F_0 = kmg.$$

Следовательно, можно записать:

$$(mg \sin \alpha + kmg \cos \alpha)\, v_1 = kmgv_0$$

и

$$(kmg \cos \alpha - mg \sin \alpha)\, v_2 = kmgv_0.$$

После упрощений

$$(\sin \alpha + k \cos \alpha)\, v_1 = kv_0; \quad (k \cos \alpha - \sin \alpha)\, v_2 = kv_0,$$

$$\text{откуда} \quad v_0 = 2 \cos \alpha \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Так как угол α подъема очень мал, то $\cos \alpha \approx 1$ и $v_0 \approx 4{,}2$ *м/сек*.

Задача 2. Во время маневров на станции паровоз сообщил вагону массой 4000 *кг* скорость 5 *м/сек*. Вагон, пройдя некоторое расстояние, ударяется о буфера заторможенного вагона. Пружины каждого буфера сжались на 10 *см*. Какое расстояние проходит вагон от момента сообщения ему скорости до столкновения с неподвижным вагоном, если известно, что пружины сжимаются на 1 *см* на каждые 49 000 *н*, а коэффициент сопротивления при движении вагона по рельсам составляет 0,01?

Решение. Исходим из закона сохранения и превращения энергии, по которому приобретенная вагоном кинетическая энергия расходуется на выполнение работы по преодолению сопротивления на пути s и на увеличение потенциальной энергии сжатых буферных пружин. Потенциальная энергия одной сжатой пружины $E_п = \frac{1}{2} k' l^2$, где l — величина сжатия.

Тогда

$$\frac{1}{2} mv^2 = kmgs + 2k' l^2, \quad \text{откуда} \quad s = \frac{mv^2 - 4k' l^2}{2kmg} \approx 100 \text{ м}.$$

Задача 3. Камень брошен под углом 30° к горизонту. Кинетическая энергия камня в начальный момент 60 *дж*.

Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти кинетическую и потенциальную энергию камня в наивысшей точке траектории.

Решение. Для определения потенциальной энергии камня в наивысшей точке траектории определим максимальную высоту подъема камня:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}; \text{ тогда } E_п = mgh = mg \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2}.$$

Учитывая, что $\frac{mv_0^2}{2} = 60$ *дж*, получим $E_п = 15$ *дж*.

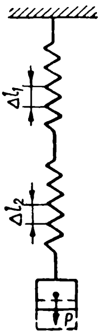


Рис. 37.

По закону сохранения и превращения энергии $E_к = 60$ *дж* $- 15$ *дж* $= 45$ *дж*.

Задача 4. К нижнему концу пружины, подвешенной вертикально, присоединена другая пружина, к концу которой прикреплен груз. Коэффициенты упругости пружин соответственно равны k_1 и k_2. Пренебрегая весом пружин по сравнению с весом груза, найти отношение потенциальных энергий этих пружин.

Решение. Под действием груза P (рис. 37) обе пружины растянутся на Δl_1 и Δl_2 соответственно. Выполненная грузом работа по растяжению пружин за счет изменения своей потенциальной энергии идет на увеличение потенциальной энергии пружин. Работа, совершаемая грузом по растяжению первой пружины, $A_1 = \frac{1}{2} P\Delta l_1 = E_{п1}$, а по растяжению второй пружины — $A_2 = \frac{1}{2} P\Delta l_2 = E_{п2}$. Однако величину растяжений можно определить так:

$$\Delta l_1 = \frac{P}{k_1} \text{ и } \Delta l_2 = \frac{P}{k_2}; \text{ тогда } \frac{E_{п1}}{E_{п2}} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Задача 5. Небольшой по размерам груз массой m_1 прикреплен к веревке длиной l и массой m_2, лежащей на гладком горизонтальном столе. Под тяжестью груза веревка начинает соскальзывать через отверстие в столе без начальной скорости. Какова будет скорость веревки в момент, когда ее конец соскользнет со стола?

Решение. Когда конец веревки соскальзывает со стола, кинетическая энергия центра тяжести системы равна изменению потенциальной энергии системы. Подсчитаем разность потенциальных энергий для двух положений веревки с грузом: веревка полностью лежит на столе и веревка полностью сползла со стола. Однако сначала определим положение центра тяжести системы. Обозначив через x расстояние центра тяжести от груза m_1, можем записать

$$m_1 x = m_2 \left(\frac{l}{2} - x\right), \text{ откуда } x = \frac{m_2}{2(m_1 + m_2)} l.$$

Когда веревка полностью сползет со стола, центр тяжести системы будет находиться на расстоянии $l - x = l \frac{2m_1 + m_2}{2(m_1 + m_2)}$ от поверхности стола, и изменение потенциальной энергии

$$(m_1 + m_2) gl \frac{2m_1 + m_2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{2m_1 + m_2}{2} gl.$$

На основании закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{2m_1 + m_2}{2} gl, \text{ откуда } v = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2}{m_1 + m_2} gl}.$$

Задачи

176. Лифт весом $P = 6000$ *н* поднимают вверх с постоянным ускорением $a = 1,4$ *м/сек*^{2}. Какая работа выполняется, если лифт поднимается на 10 *м*?

177. Для тяговых двигателей электровоза при движении со скоростью $v = 54$ *км/ч* необходима мощность $N = 900$ *квт*. Коэффициент полезного действия электродвигателей и передаточных механизмов $\eta = 0,8$. Определить, какую силу тяги развивает электровоз.

178. Шофер автомобиля, движущегося со скоростью v, внезапно увидел перед собой на расстоянии s широкую стену. Что ему выгоднее: затормозить или свернуть в сторону?

179. Поезд весом $P = 6 \cdot 10^6$ *н* равномерно движется в гору. Уклон горы составляет $h = 5$ *м* на километр пути. Сила трения $F_т = 10^4$ *н*. Скорость движения поезда $v = 72$ *км/ч*. Определить мощность тепловоза.

180. Тепловоз мощностью $N = 1800$ *квт* тянет поезд массой $m = 2000$ *т*. Коэффициент сопротивления $k = 0,005$. Определить максимальную скорость движения поезда. С каким ускорением движется поезд в момент времени, когда его скорость составляет $v_1 = 4$ *м/сек* и $v_2 = 12$ *м/сек*?

181. Лифт весом $P = 2 \cdot 10^4$ *н* поднимают тросом, каждый метр которого весит 20 *н*, из шахты глубиной 200 *м*. Какая при этом выполняется работа? Определить коэффициент полезного действия установки.

182. n однородных плит лежит горизонтально на поверхности земли одна возле другой. Каждая плита весит P и имеет толщину h. Какую наименьшую (теоретически) работу надо выполнить, чтобы сложить плиты одна на другую в виде колонны?

183. Кусок льда один раз бросают под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, а второй раз пускают с такой же скоростью скользить по льду. Определить коэффициент трения, если во втором случае кусок льда переместился на расстояние в 10 раз большее, чем в первом случае.

184. Конькобежец, разогнавшись до скорости $v = 27$ *км/ч*, хочет выехать на ледяную гору. Какой высоты от начального уровня достигнет конькобежец с разгона, если подъем горы составляет $h = 0,5$ *м* на каждые $s = 10$ *м* по горизонтали и коэффициент трения коньков о лед $k = 0,02$?

185. Конькобежец, стоя на коньках, бросает вперед в горизонтальном направлении груз весом 100 *н* со скоростью 3 *м/сек*. Определить коэффициент трения коньков о лед и совершенную конькобежцем работу, если его вес 600 *н* и он откатился после броска на 0,5 *м*.

186. Тело массой $m = 0,5$ *кг*, брошенное под углом 45° к горизонту, упало на горизонтальную поверхность на расстоянии $s = 16$ *м*. Найти работу, выполненную по бросанию тела.

187. Тело брошено в горизонтальном направлении с начальной скоростью $v_0 = 15$ *м/сек*. Через сколько секунд кинетическая энергия тела возрастет вдвое? Принять $g = 10$ *м/сек*^{2}. Сопротивления воздуха не учитывать.

188. Построить график зависимости от времени кинетической, потенциальной и полной энергии камня, брошенного вертикально вверх со скоростью 9,8 *м/сек*^{2}.

189. Винтовка массой 3 *кг* подвешена горизонтально на двух параллельных нитях. При выстреле вследствие отдачи она отклонилась вверх на 19,6 *см*. Масса пули 10 *г*. Определить скорость, с которой вылетела пуля.

190. Самолет массой 1 *т* летит горизонтально на высоте 1200 *м* со скоростью 50 *м/сек*. При выключенном двигателе самолет делает планирующий полет и достигает земли со скоростью 25 *м/сек*. Определить силу сопротивления воздуха при спуске, принимая длину спуска равной 8 *км*.

191. Из артиллерийского орудия массой в 1000 *кг* вылетает в горизонтальном направлении снаряд массой 10 *кг*. Какая часть работы, совершенной пороховыми газами, расходуется на отдачу?

192. От удара копра весом $5 \cdot 10^3$ *н*, свободно падающего с некоторой высоты, свая углубляется в землю на 1 *см*. Определить силу сопротивления почвы, считая ее постоянной, если скорость копра перед ударом 10 *м/сек*. Вес сваи при расчетах не учитывается.

193. Определить кинетическую энергию тела, брошенного в горизонтальном направлении с высоты 100 *м*, в момент приземления, если вес тела 5 *н* и начальная скорость 10 *м/сек*.

194. Поезд массой $m = 800$ *т* со скоростью $v = 30$ *м/сек* выезжает на прямолинейный участок пути, наклоненный к горизонту под углом $\alpha = 1°$, причем двигатель локомотива выключен. Какое расстояние пройдет поезд по уклону до остановки, если коэффициент трения $k = 0{,}004$ (иные сопротивления не учитывать)? Какую минимальную мощность должен развивать двигатель локомотива, чтобы при въезде на уклон движение поезда осталось равномерным?

195. Тело массой m находится в поезде, движущемся со скоростью v. В таком случае оно обладает относительно Земли кинетической энергией $\frac{mv^2}{2}$. Затем тело бросают по направлению движения поезда со скоростью u относительно поезда, сообщая ему таким образом энергию $\frac{mu^2}{2}$. Значит, тело будет обладать энергией $\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2}$. Но можно рассуждать и так: тело движется относительно Земли со скоростью $v + u$, следовательно, обладает энергией $\frac{m(v+u)^2}{2}$. Это выражение больше предыдущего на mvu. Какое из этих рассуждений неверно?

196. С помощью копра забивают в почву сваю весом $P = 3000$ *н*. При одном ударе молотом копра свая углубляется на 5 *см*. Определить среднюю силу сопротивления почвы, если молот весом $P_1 = 10^3$ *н* падает на сваю с высоты $H = 2$ *м*. Какая часть энергии падающего молота используется на выполнение работы по преодолению силы сопротивления почвы? Какая часть энергии идет на нагревание и деформацию тел? Считать, что при падении молота на него действует средняя сила сопротивления воздуха $F = 0{,}1P_1$.

197. Пуля массой $m = 20$ *г* движется со скоростью $v_0 = 400$ *м/сек* и ударяет в деревянный брусок массой $M = 5$ *кг*, подвешенный на нити длиной $l = 4$ *м* (баллистический маятник), и застревает в нем. Определить угол, на который отклонится маятник.

198. Определить к. п. д. транспортера, если он за сутки переносит

$2 \cdot 10^7$ *н* груза с уровня земли на высоту 5 *м*. Мощность двигателя 1,84 *квт*.

199. Груз весом $P = 1000$ *н* привязан к концу веревки, намотанной на вал лебедки. Груз и лебедка находятся на некоторой высоте. Груз начинает падать, причем веревка натягивается, когда груз пролетел $h = 12$ *м*. После этого начинает с трением раскручиваться вал лебедки. Какую минимальную длину веревки пришлось вытравить до полной остановки груза, если прочность веревки 1800 *н*?

200. Автомобиль массой $m = 1000$ *кг* движется под гору при выключенном двигателе с постоянной скоростью $v = 54$ *км/ч*. Уклон горы 4 *м* на каждые 100 *м* пути. Какую мощность должен развивать двигатель этого автомобиля, чтобы автомобиль двигался с той же скоростью в гору с тем же уклоном?

201. При β-распаде атома радиоактивного элемента RaB (атомная масса 214) из атома вылетает электрон с энергией $5 \cdot 10^{-15}$ *дж*. В результате атом RaB превращается в атом нового элемента RaC с той же атомной массой. Определить кинетическую энергию атома RaC.

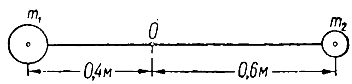


Рис. 38.

202. Атом изотопа урана U^{235} делится по схеме $U^{235} = Ba^{143} + Kr^{92}$, причем кинетическая энергия обоих осколков составляет $4 \cdot 10^{-11}$ *дж*. Найти скорость атома Ba.

203. Горизонтально направленный пучок атомов серебра вылетает из источника с кинетической энергией $9{,}8 \cdot 10^{-11}$ *дж*. Определить снижение полета атомов под действием силы тяжести на расстоянии 5 *м* от источника. Атомная масса серебра 108.

204. Какую механическую работу выполняет маховик радиусом $R = 2$ *м* и весом $6 \cdot 10^4$ *н* при изменении скорости от 10 до 4 *об/мин*?

205. Веревка длиной $l = 20$ *м* переброшена через блок. В начальный момент веревка висит симметрично относительно вертикальной прямой, пересекающей ось блока, и находится в состоянии покоя. Затем, вследствие незначительного толчка, веревка начинает двигаться по блоку. Будет ли движение веревки равноускоренным? Какова будет скорость веревки, когда она сойдет с блока? Массу и размеры блока не учитывать. Рассмотреть аналогичную задачу для веревки, которая лежит на гладком горизонтальном столе и в начальный момент находится в состоянии покоя, а затем под действием небольшого толчка начинает скользить со стола.

206. На концах и посредине невесомого стержня длины l находятся одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально на гладкую горизонтальную поверхность и отпускают. Определить скорость верхнего шарика в момент его удара о горизонтальную плоскость. Какова будет эта скорость, если нижний конец стержня шарнирно укреплен?

207. Невесомый стержень, длина которого 1 *м*, может вращаться вокруг неподвижной точки O (рис. 38). На концах стержня укреплены два груза массами $m_1 = 6$ *кг* и $m_2 = 3$ *кг*. В начальный момент стержень расположен горизонтально. Затем конец стержня, на котором укреплен груз m_1, начинает опускаться. Какую скорость будет иметь этот груз в самом низком положении?

208. Человек стоит на неподвижной тележке и бросает горизонтально камень массой $m = 8$ *кг* со скоростью $v_1 = 5$ *м/сек*. Определить, какую работу при этом выполняет человек, если масса тележки вместе с человеком составляет $M = 160$ *кг*. Проанализировать зависимость величины работы от M.

209. Мальчик растянул пружину на какую-то длину. В этом положении пружину перехватил мужчина и растянул ее еще на столько же. Во сколько раз работа, совершенная мужчиной, больше?

210. Акробат прыгает в сетку с высоты $H = 8$ *м*. На какой предельной высоте h_1 над полом надо натянуть сетку, чтобы акробат не ударился о пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на $h_2 = 0,5$ *м*, если акробат прыгает в нее с высоты $H_2 = 1$ *м*.

211. Спиральная пружина растягивается силой 50 *н*. Когда пружину растягивают дополнительно силой 80 *н*, то она удлиняется на 20 *см*. Какая работа выполняется при этом удлинении?

212. В неподвижное сферическое тело массой M, подвешенное на очень легком жестком стержне, укрепленном в подвесе на шарнире, попадает шарик массой m. Угол между направлением полета шарика и линией стержня составляет $\alpha = 45°$. Удар — центральный. После удара шарик застревает в теле, и тело вместе с шариком, отклонившись, поднимается на высоту h относительно начального положения. Определить скорость шарика ($M = 1$ *кг*; $m = 10$ *г*; $h = 0,2$ *м*).

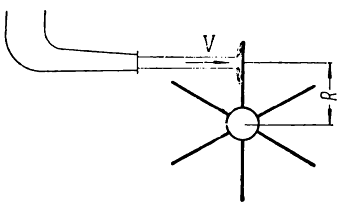


Рис. 39.

213. На гладком горизонтальном столе лежит бильярдный шар весом $P = 8$ *н*. Горизонтальным толчком кия шар сбрасывают со стола, и он падает на пол на расстоянии $l = 1$ *м* от края стола по горизонтали. Высота стола $h = 0,8$ *м*. Определить энергию толчка. Сопротивление воздуха не учитывать.

214. Из винтовки сделали в горизонтальном направлении два выстрела в щит, находящийся на расстоянии $s = 50$ *м*. После первого выстрела перед дулом винтовки поставили доску. Вторая пуля, пробив доску, попала в щит на $d = 0,5$ *м* ниже первой. Какая работа совершена пулей при пробивании доски, если масса пули $m = 5$ *г* и начальная скорость $v_1 = 300$ *м/сек*?

215. Определить кинетическую энергию атомов калия, вылетающих из источника в горизонтальном направлении, если, пролетев расстояние 2 *м*, они под действием силы тяжести снизились на 0,5 *мм*. Атомная масса калия 39.

216. Нейтрон с кинетической энергией 10^{-15} *дж* поглощается покоящимся ядром кадмия. Определить скорость движения вновь образованного ядра. Атомная масса кадмия 112.

217. При распаде атома радиоактивного элемента радона (Rn^{222}) из атома вылетает одна α-частица (атомная масса 4). В результате атом Rn превращается в атом нового элемента RnA. Определить скорость отдачи атома RaA, если кинетическая энергия α-частицы равна $0,83 \times \times 10^{-13}$ *дж*.

218. Атом изотопа урана U^{235} делится по схеме ${}_{92}U^{235} \rightarrow {}_{40}Zr^{95} + {}_{52}Te^{140}$. При распаде освобождается энергия $5 \cdot 10^{-11}$*дж*. Чему равна скорость образованного в результате деления ядра ${}_{40}Zr^{95}$?

219. При бомбардировке атомов лития протонами образуются две α-частицы. Подсчитать их скорости, если выделение энергии при такой реакции составляет $27{,}2 \cdot 10^{-12}$ *дж*. Энергию налетающего протона не учитывать.

220. Насос заполняет бассейн водой за $t = 20$ *сек*. Найти мощность двигателя насоса, если емкость бассейна $V = 100$ *м*^{3}, его центр находится на высоте $h = 18$ *м* над поверхностью воды в озере, а к. п. д. насоса 90%.

221. Какую мощность развивает горизонтальный поток воды сечением S и плотностью ρ, если при торможении он меняет свою скорость от v_0 до v равнозамедленно?

222. Колесо водяной мельницы с плоскими радиальными лопастями приводится во вращательное движение ударом струи воды (рис. 39). При какой угловой скорости вращения колеса к. п. д. его будет максимальным, если скорость воды в струе составляет v и струя попадает в лопасть на расстоянии R от оси вращения колеса?

§ 7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина маятника и g — ускорение силы тяжести. Период и частота колебаний маятника связаны соотношением $T = \frac{1}{\nu}$.

Длина волны λ связана со скоростью распространения волны v и с частотой колебаний ν или их периодом T соотношениями $\lambda = \frac{v}{\nu}$ или $\lambda = vT$.

Задача 1. Два маятника одновременно начинают совершать колебания. За время первых 15 колебаний первого маятника второй маятник совершил только 10 колебаний. Определить отношение длин этих маятников.

Решение. Обозначив через T_1 и T_2 периоды колебаний соответственно первого и второго маятников, запишем условие задачи:

$$15T_1 = 10T_2 \quad \text{или} \quad 3T_1 = 2T_2.$$

Однако

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}},$$

где l_1 и l_2 — длина соответственно первого и второго маятников. Тогда

$$3 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \quad \text{или} \quad 3\sqrt{l_1} = 2\sqrt{l_2},$$

$$\text{откуда} \quad \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

Задача 2. Тележка, на которой укреплен маятник, катится по наклонной плоскости, а затем движется по горизонтальному участку пути (рис. 40). Период колебаний маятника на неподвижной тележке

$T = 0{,}5$ *сек*. Наклонная плоскость образует с горизонталью угол 45°. Какой будет период колебаний маятника, когда: а) тележка катится по наклонной плоскости; б) тележка движется по горизонтальному участку пути? Трение не учитывать.

Решение. Предположим, что маятник колеблется вдоль направления движения тележки.

а) При скатывании тележки с наклонной плоскости маятник вместе с тележкой движется относительно Земли поступательно и равноускоренно и колеблется относительно тележки. Ускорение маятника (и тележки) в поступательном движении обусловливается составляющей силы тяжести $F_1 = mg \sin \alpha$.

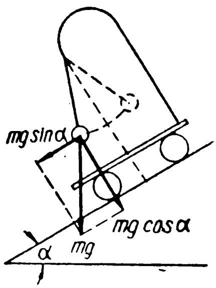


Рис. 40.

Эта составляющая силы тяжести при данных в задаче условиях не может изменить положения маятника относительно тележки, а следовательно, не может влиять на период колебаний маятника. Колебания маятника относительно тележки обусловливаются только действием составляющей силы тяжести $F_2 = mg \cos \alpha$, перпендикулярной к поверхности тележки, т. е. маятник колеблется так, как будто на него действует сила тяжести не mg, а $mg \cos \alpha$. Ускорение свободного падения, отвечающее такому значению силы тяжести, должно составлять $g_1 = g \cos \alpha$.

В связи с этим период колебаний маятника на тележке, скатывающейся по наклонной плоскости,

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}} = \frac{T}{\sqrt{\cos \alpha}} = T \sqrt[4]{2} \approx 0{,}6 \text{ сек.}$$

б) В этом случае на маятник действует перпендикулярная к поверхности пути сила $F = mg$, и период колебаний маятника будет $T = 0{,}5$ *сек*.

Задача 3. Наблюдатель, стоящий на Земле, наблюдает приближение к нему самолета, но не слышит звука работы двигателей. Самолет пролетает над наблюдателем и удаляется. Наблюдатель услышал звук самолета в момент, когда направление, в котором виден самолет, образует с горизонталью угол φ. Самолет летит прямолинейно, параллельно поверхности Земли.

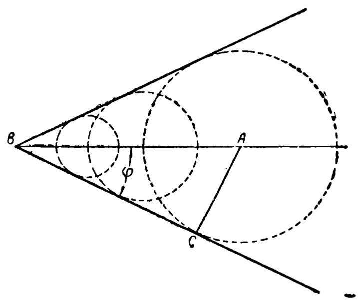


Рис. 41.

Объяснить наблюдаемое явление и вычислить скорость самолета, если угол φ составляет 30°, а скорость звука 340 *м/сек*.

Решение. Самолет в каждой точке пути является центром сферической звуковой волны (рис. 41). Радиус соответствующей сферической поверхности, являющейся фронтом волны, пропорционален времени, в течение которого звук из данной точки распространяется. Общая поверхность элементарных звуковых волн является боковой поверхностью конуса, в вершине которого находится самолет. Звук самолета слышен во всех точках пространства, ограниченного конической поверхностью.

За время, в течение которого звуковая волна дойдет из точки A к наблюдателю, находящемуся в точке C, самолет пролетит расстояние AB. С прямоугольного треугольника ABC имеем: $AB = \frac{AC}{\sin\varphi}$. Обозначив скорость звука через v, а скорость самолета — v_x, получим

$$v_x t = \frac{vt}{\sin\varphi}, \quad \text{откуда} \quad v_x = \frac{v}{\sin\varphi} = 680 \text{ м/сек} = 2448 \text{ км/ч}.$$

Задачи

223. В кабине подъемника висит маятник. Когда кабина неподвижна, его период колебаний $T = 1$ *сек*. Когда кабина движется с постоянным ускорением, то период колебаний $T_1 = 1{,}2$ *сек*. Определить величину ускорения кабины.

224. Какую длину должен иметь подвес маятника Фуко, если представить, что маятник установлен на планете, плотность которой равна плотности Земли, а радиус в два раза меньше? Маятник совершает три колебания в минуту.

225. Колебания мембраны возбуждаются с помощью переменного электрического тока частотой $\nu = 1000$ *гц*. Определить длину излучаемой мембраной звуковой волны в воздухе.

226. Ультразвуковой эхолот излучает волны частотой 40 000 *гц*. Определить длину ультразвуковой волны в воде. Какова глубина моря, если в данном месте ультразвуковой импульс гидролокатора возвращается через 0,2 *сек* после посылки?

227. Определить ускорение силы тяжести в той точке земной поверхности, в которой длина секундного маятника составляет 0,995 *м*.

228. Если часы с секундным маятником перевезти из Ленинграда в Архангельск, то как они будут работать: отставать или спешить? Что надо сделать, чтобы часы шли правильно? Ускорение силы тяжести для Ленинграда $g_Л = 9{,}819$ *м/сек*^{2}; для Архангельска $g_А = 9{,}822$ *м/сек*^{2}.

229. Дерево проводит звук лучше, чем воздух. Почему же разговор, происходящий в соседней комнате, заглушается при закрытых дверях и окнах?

230. Во сколько раз изменяется длина звуковой волны при переходе волны из воздуха в воду? Скорость распространения звука в воздухе $v_1 = 340$ *м/сек* и в воде $v_2 = 1450$ *м/сек*.

231. Пароход, проходящий по озеру, возбудил волну, которая дошла до берега через 1 *мин*. Расстояние между соседними «горбами» волны равно 1,5 *м*, а время между двумя последовательными ударами о берег равно 2 *сек*. Каково расстояние от берега до проходящего парохода?

232. Определить, как изменились бы показания часов за 1 *ч*, если их поднять на высоту 12 *км* над поверхностью Земли и если известно, что маятник таких часов на поверхности Земли колеблется с частотой $\nu = 0{,}5$ *сек*$^{-1}$.

233. Период колебаний маятника часов на Земле составляет 2 *сек*. Вычислить период колебаний маятника на поверхности Луны, если масса Земли в 84 раза больше массы Луны, а радиус Луны составляет 3/11 радиуса Земли.

234. Шарик подвешен на длинной нити. Один раз его поднимают по вертикали до точки подвеса, другой раз отклоняют его, как маятник, на небольшой угол. В каком из этих случаев шарик скорее возвратится к начальному положению, если его отпустить?

235. Каким будет период колебаний математического маятника в кабине ракеты, опускающейся с постоянным ускорением a? Каков будет период маятника при $a = g$? Как будет вести себя маятник при $a > g$?

236. За какую часть периода тело, совершающее гармонические колебания, проходит весь путь от среднего положения до крайнего? Первую половину пути? Вторую его половину?

237. Маятник длиной $l = 50$ *см* колеблется в кабине самолета. Каков период его колебаний: 1) Если самолет движется равномерно? 2) Если самолет движется горизонтально с ускорением $a = 2{,}5$ *м/сек*^{2}? 3) Если самолет планирует вниз под углом $\alpha = 15°$ к горизонту? Лобовым сопротивлением самолета пренебречь.

238. Два цилиндрических шкива одинакового радиуса быстро вращаются в противоположных направлениях. Расстояние между осями шкивов l. На шкивы свободно положили однородный стержень весом P так, что его центр тяжести ближе к одному из шкивов. Коэффициент трения между стержнем и каждым из шкивов k. Показать, что стержень совершает гармонические колебания.

§ 8. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

В неподвижной жидкости (газе) давление передается равномерно по всем направлениям (закон Паскаля):

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1},$$

где F — сила, действующая на площадь S.

Гидростатическое (весовое) давление на глубине h: $p = \rho g h$, где ρ — плотность жидкости.

Закон Архимеда заключается в том, что на всякое тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости или газа в объеме погруженной части тела.

Условие (теорема) непрерывности струи $v_1 S_1 = v_2 S_2$, где v_1 и v_2 — скорости течения жидкости в сечениях S_1 и S_2 соответственно.

Уравнение Бернулли для установившегося течения жидкости:

$$p + \rho g h + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const},$$

где p — статическое давление в сечении S; ρ — плотность жидкости; v — скорость течения в сечении S; h — высота данного сечения трубы над некоторым уровнем.

Из уравнения Бернулли следует, что скорость вытекания жидкости из малого отверстия $v = \sqrt{2gh}$, где h — высота поверхности жидкости над отверстием.

Задача 1. В сосуд налита ртуть, а затем масло. Опущенный в сосуд шар плавает так, что он ровно наполовину погружен в ртуть. Определить плотность материала шара. Плотность ртути $\rho_1 = 13\,600$ *кг/м*^{3}, масла $\rho_2 = 900$ *кг/м*^{3}.

Решение. По условию плавания тел вес шара равен весу вытесненных жидкостей (рис. 42)

$$\rho_ш g V_ш = \rho_1 g \frac{V_ш}{2} + \rho_2 g \frac{V_ш}{2}, \quad \text{откуда} \quad \rho_ш = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 7250 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 2. В горизонтальной трубе диаметром 5 *см* вода течет со скоростью 0,2 *м/сек* при давлении $2 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}. Какое давление будет в узкой части трубы диаметром 2 *см*?

Решение. Скорость течения жидкости в трубе обратно пропорциональна поперечному сечению трубы:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}, \quad \text{откуда}$$

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

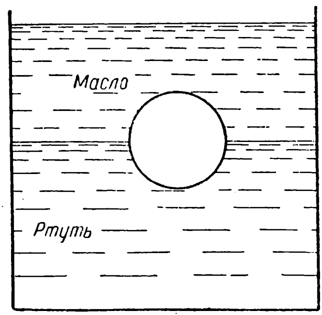


Рис. 42.

По уравнению Бернулли

$$p_1 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v_2^2,$$

где ρ — плотность жидкости.

Отсюда $p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4}\right) \approx 199\,707$ *н/м*^{2}.

Задача 3. Посередине очень большого озера вырубили прорубь, толщина льда оказалась 8 *м*. Какой наименьшей длины нужна веревка, чтобы зачерпнуть воду из проруби?

Решение. В центре большого озера лед плавает в воде (в небольших водоемах лед может удерживаться на весу с помощью береговой кромки). Условие плавания льда $P = F_{выт}$, где $P = Sl\rho_л g$; $F_{выт} = Sl_1\rho_в g$ (здесь l — толщина льда, l_1 — глубина погружения льда в воду). Отсюда $\frac{l_1}{l} = \frac{\rho_л}{\rho_в}$. Наименьшая длина веревки должна равняться разности $l_2 = l - l_1$. Поэтому искомая длина будет $l_2 = l\left(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}\right) = 0,8$ *м*.

Этот же результат можно получить из такого рассуждения: поскольку отношение плотностей льда и воды равно 0,9, то в воде находится 0,9 всей толщины льда и расстояние от поверхности льда до воды равно 0,1 толщины льда, т. е. 0,8 *м*.

Задачи

239. В цилиндрической банке высота воды составляет 15 *см*. Когда в нее опустили плавать пустую латунную чашку, вода в банке поднялась на 2,1 *см*. Какова будет высота уровня воды в банке, если эту чашку утопить?

240. Два тела объемом V и $2V$ уравновешены на весах, затем большее тело погружено в масло, плотность которого $\rho = 900$ *кг/м³*. Какой должна быть плотность жидкости, в которую следует одновременно опустить меньшее тело, чтобы равновесие весов не нарушилось?

241. В цилиндрический сосуд налиты ртуть и вода в одинаковых по весу количествах. Общая высота двух слоев жидкости составляет $h_0 = 29{,}2$ *см*. Определить давление жидкостей на дно сосуда.

242. Тело кубической формы плавает на поверхности ртути так, что в ртуть погружено 0,25 его объема. Какая часть объема тела будет погружена в ртуть, если сверх нее налить слой воды, полностью покрывающий тело?

243. На какую глубину погрузится тело более легкое, нежели вода, если оно упадет с высоты H в воду и как быстро оно потом всплывет на поверхность? Трением тела о воздух и воду пренебречь.

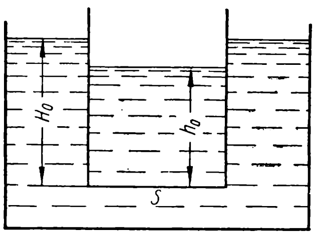


Рис. 43.

244. Полый шар, внешний радиус которого R_1, а внутренний R_2, изготовлен из материала с плотностью ρ_1 и плавает на поверхности жидкости с плотностью ρ_2. Какой должна быть плотность вещества, которым следует заполнить внутреннюю полость шара, чтобы он плавал внутри жидкости?

245. Тело, имеющее форму куба с ребром 1 *м*, плавает в воде, причем глубина погружения нижней грани составляет 25 *см*. На тело положили камень объемом 10 *дм³*, вследствие чего глубина погружения нижней грани увеличилась на 2 *см*. Определить плотность вещества тела и камня.

246. Деревянный прямой цилиндр плавает так, что в воду погружена 0,9 его высоты. Какая часть высоты будет погружена в воду, если поверх воды налить слой масла, полностью покрывающий цилиндр? Плотность масла $\rho_м = 800$ *кг/м³*.

247. Кусок сплава меди и серебра весит в воздухе 2,940 *н*, а в воде — 2,646 *н*. Сколько серебра и меди в куске сплава?

248. Полый шар, отлитый из чугуна, плавает в воде, погрузившись ровно наполовину. Найти объем внутренней полости шара, если вес шара $P = 49$ *н*, а плотность чугуна $\rho = 7800$ *кг/м³*.

249. На поверхности воды плавает цилиндрический сосуд с площадью дна S. В сосуд налита вода до высоты h_0. Высота осадки сосуда при этом равна H_0 (рис. 43). Как изменятся h_0 и H_0, если внутрь сосуда поместить плавающее тело весом Q, имеющее форму куба?

250. Наполненный водородом аэростат имеет подъемную силу 2000 *н*. Какую подъемную силу будет иметь этот же аэростат, если его заполнить гелием? Вес оболочки 700 *н*.

251. Трубка диаметром $D = 8$ *см* опущена одним концом в воду, причем этот конец закрыт стеклянной пластинкой (рис. 44). Какой высоты должен быть столбик керосина, налитый в трубку, чтобы пластинка отпала, если глубина погружения закрытого конца $h_1 = 20$ *см*, а вес пластинки $P_1 = 0{,}5$ *н*?

252. Цилиндр с диаметром основания $d = 1{,}2$ *см* и длиной $l = 30$ *см* плавает в сосуде с водой в вертикальном положении. В сосуд доливают слой керосина высотой $h = 10$ *см*. Какая часть цилиндра была погружена в воду в первом и втором случаях? Вес цилиндра $P =$ $= 0{,}245$ *н*.

253. В сосуде с водой плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды после того, как лед растает, если конечная температура воды останется 0° С?

254. В сосуде с водой плавает кусок льда, к которому примерз кусок пробки. Как изменится уровень воды в сосуде, если лед растает,

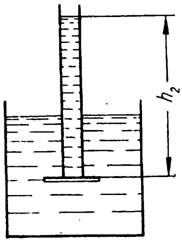


Рис. 44.

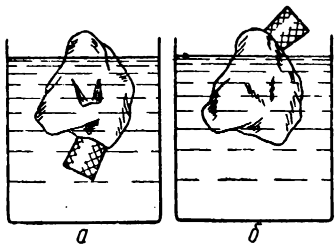


Рис. 45.

в случаях, когда примерзлый кусок пробки полностью будет под водой (рис. 45,*а*), а также тогда, когда примерзлый кусок пробки будет находиться полностью над водой (рис. 45,*б*)?

255. Конус плавает в жидкости вершиной вниз, причем так, что его ось вертикальна. Показать, что если конус погружается в жидкость до половины высоты, то плотность жидкости в восемь раз больше плотности вещества конуса.

256. Сплошной однородный шар объемом V плавает на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей. Плотность верхней жидкости ρ_1, нижней — ρ_2, материала шара — ρ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Какая часть объема шара будет находиться в верхней, а какая часть — в нижней жидкости?

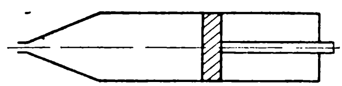


Рис. 46.

257. Аэростат весом P опускается с постоянной скоростью v. Какое количество балласта надо выбросить из гондолы аэростата, чтобы он начал подниматься с той же скоростью v? Подъемную силу Q аэростата считать постоянной. Сопротивление воздуха пропорционально скорости.

258. Льдина поперечным сечением $S = 1$ *м*^{2} и толщиной $H =$ $= 0{,}4$ *м* плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

259. Когда один моряк пытался в трюме судна закрыть доской небольшое отверстие, через которое врывалась струя воды, то это ему не удавалось, так как струя отбрасывала доску. Когда же с помощью товарища ему удалось прижать доску плотно к отверстию, то он мог затем держать ее один. Объяснить, почему давление на доску в обоих случаях различно?

260. Площадь поршня в шприце (рис. 46) $S_1 = 2$ *см*^{2}, а площадь отверстия $S_2 = 1$ *мм*^{2}. На протяжении какого времени будет вытекать вода из шприца, если давить на поршень с силой $F = 8$ *н* и если ход поршня $l = 5$ *см*?

261. Из брандспойта бьет струя воды, дающая $Q = 60$ *л/мин*. Какова площадь поперечного сечения струи S_1 на высоте $h = 2$ *м* над концом брандспойта, если вблизи него она равна $S_0 = 1{,}5$ *см*^{2}?

262. Подводная лодка находится на глубине $h = 100$ *м*. С какой скоростью через отверстие в корпусе лодки будет врываться в лодку струя воды? Сколько воды проникает за 1 *ч*, если диаметр отверстия равен $d = 2$ *см*? Давление воздуха в лодке равно атмосферному.

263. У основания здания давление воды в водопроводе равно $5 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}. Под каким давлением вытекает вода из крана на четвертом этаже здания на высоте 15 *м* от основания здания? С какой силой давит вода в отверстии крана площадью 0,5 *см*^{2}?

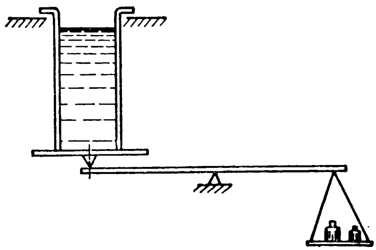


Рис. 47.

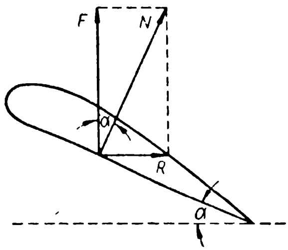


Рис. 48.

264. К динамометру подвешена трубка ртутного барометра. Что показывает динамометр? Будут ли изменяться его показания при изменении атмосферного давления?

265. На приборе для демонстрации давления жидкости на дно сосуда (рис. 47) установлен прямой цилиндр с водой. Высота столба воды в нем $h = 25$ *см*. Как изменится нагрузка, уравновешивающая давление на дно, если через отверстие в дне прибора вытекает струя воды сечением $S = 0{,}25$ *см*^{2}? Понижением уровня воды в цилиндре пренебречь.

266. Аквариум глубиной h наполнен доверху водой. С какой силой давит вода на стенку аквариума, имеющую форму прямоугольника длиной l и составляющую с вертикалью угол α?

267. Раскладывая силу N (рис. 48), действующую на крыло самолета в полете, на составляющие F (подъемная сила) и R (лобовое сопротивление), получим $F = N \cos\alpha$, где α — угол атаки. Отсюда получаем, что наибольшая подъемная сила F достигается при угле атаки $\alpha = 0$ (когда $\cos\alpha = 1$). Объяснить нелепость полученного результата.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

§ 1. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

Число молекул в 1 кмоле вещества (число Авогадро)

$$N = 6{,}025 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}.$$

Объем 1 кмоля любого газа при нормальных условиях (температуре 0° C и давлении $1{,}013 \cdot 10^5$ *н/м²*) $V_0 = 22{,}4$ *м³/кмоль*.

Число молекул в теле массой m:

$$n = \frac{m}{\mu} N,$$

где μ — молекулярная масса вещества, N — число Авогадро.

Число молекул в единице объема:

$$n_1 = \frac{\rho}{\mu} N,$$

где ρ — плотность данного вещества.

Задача 1. В закрытом с обоих концов горизонтальном цилиндре находится поршень, разделяющий цилиндр на две части. В одной части цилиндра находится 3 *г* водорода, в другой — 16 *г* кислорода. Какую часть объема цилиндра занимает водород? Объем поршня считаем очень малым. Поршень перемещается в цилиндре без трения.

Решение. По условию задачи температура и давление обоих газов одинаковы. Если бы эти газы содержали одинаковое количество молекул, то и их объемы были бы одинаковы (закон Авогадро). Однако кислорода имеем $\frac{16}{2 \cdot 16} = 0{,}5$ *моля*, а водорода — $\frac{3}{2 \cdot 1} = 1{,}5$ *моля*, вследствие чего объемы этих газов должны относиться как $0{,}5 : 1{,}5 = 1 : 3$. Значит, водород занимает $\frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}$ объема сосуда, а кислород — $\frac{1}{4}$.

Задача 2. Один киломоль углекислого газа имеет массу 44 *кг*. Определить плотность углекислого газа при нормальных условиях и массу молекулы.

Решение. При нормальных условиях один киломоль углекислого газа (44 *кг*) занимает объем 22,4 *м³*. Тогда плотность газа

$$\rho = \frac{44 \text{ кг}}{22{,}4 \text{ м}^3} \approx 1{,}96 \text{ кг/м}^3.$$

В одном киломоле содержится $N_0 = 6{,}025 \,.\, 10^{26}$ молекул. Значит, на долю одной молекулы приходится масса

$$m_1 = \frac{m}{N_0} = \frac{44 \text{ кг}}{6{,}025 \cdot 10^{26}} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Задача 3. На пути молекулярного пучка стоит стенка. Считая столкновение молекулы со стенкой абсолютно упругим, найти давление, испытываемое этой стенкой, если: а) стенка расположена перпендикулярно скорости пучка и неподвижна; б) стенка движется навстречу молекулам со скоростью v.

Скорость молекул в пучке c, масса одной молекулы m, концентрация молекул $\nu_0 \frac{1}{м^3}$.

Решение. Давление на стенку будет равно изменению количества движения молекул, ударяющих в 1 $м^2$ площади стенки за 1 *сек*. Очевидно, за 1 *сек* в 1$м^2$ стенки ударяется в первом случае $\nu_0 c$ молекул, а во втором $\nu_0 (c + v)$.

В первом случае молекулы имеют количество движения $m\nu_0 c \,.\, c = m\nu_0 c^2$, а во втором — $m\nu_0 (c + v)^2$. Поскольку столкновение молекул со стенкой абсолютно упругое, то в результате удара направление вектора количества движения меняется на противоположное, и поэтому изменения количества движения будут в первом случае

$$m\nu_0 c^2 - (-m\nu_0 c^2) = 2m\nu_0 c^2;$$

во втором случае

$$m\nu_0 (c + v)^2 - [-m\nu_0 (c + v)^2] = 2m\nu_0 (c + v)^2.$$

Поэтому и давление на стенку будет в первом случае $p = 2m\nu_0 c^2$, во втором $p = 2m\nu_0 (c + v)^2$.

Задачи

✓**268.** Сколько молекул содержится в 2 *г* водяного пара?

269. Хорошо откачанная лампа накаливания объемом 100 $см^3$ имеет трещину, в которую ежесекундно проникает миллион частиц газа. Сколько времени понадобится для наполнения лампы до нормального давления, если скорость проникновения газа остается постоянной?

270. Сколько электронов содержится в 1 $см^3$ свинца? Атомная масса свинца 207, номер в периодической системе 82.

271. Какое количество нейтронов, протонов и электронов содержится в 1 *мг* алюминия? Атомная масса алюминия 27, номер в периодической системе 13.

272. Цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. Какое будет положение поршня при равновесии, если в одну часть сосуда поместить некоторое весовое количество кислорода, а в другую — такое же количество водорода? Общая длина сосуда 85 *см*.

273. Отняв от величины веса сосуда с газом вес сосуда, можно найти вес газа. Однако молекулы «летают» по всему сосуду, каким же образом их вес влияет на показания весов?

274. Почему при шлифовании поверхностей трение уменьшается только до определенного предела, а при дальнейшем шлифовании трение увеличивается?

275. Как связать большую среднюю скорость движения молекул газа (сотни метров за секунду) с медленным распространением запаха в спокойном воздухе?

276. Средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул при данной температуре у всех веществ одинакова. Определить отношение средних скоростей хаотического движения молекул водорода и кислорода при одной и той же температуре.

277. Кристаллы поваренной соли (NaCl) кубической системы (рис. 49) состоят из чередующихся атомов (ионов) Na и Cl. Определить

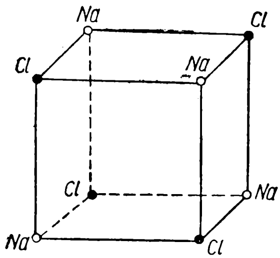


Рис. 49.

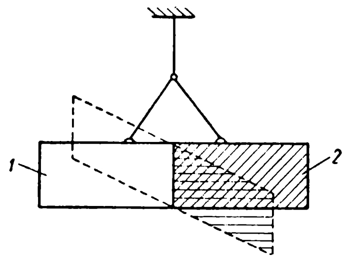


Рис. 50.

среднее расстояние между их центрами. Молекулярная масса соли 58,5 *кг*, а плотность 2200 *кг/м*^{3}.

278. Как изменилось бы давление в сосуде с газом, если бы внезапно исчезли силы притяжения между его молекулами?

√279. Смесь газов состоит из 30 *г* азота и некоторого количества углекислого газа, так что молекулярная масса смеси равна 32 *г*. Определить количество углекислого газа в смеси.

280. Стеклянную пластинку, половина которой с одной стороны покрыта слоем меди, подвешивают на двух нитях (рис. 50). В воздухе такая пластинка неподвижна, а в хлоре она поворачивается на некоторый угол α, двигаясь медной стороной вперед. Объяснить, почему поворачивается пластинка. (Учесть, что молекулы хлора поглощаются медью, а от стекла отражаются).

§ 2. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. ТЕПЛОТА И РАБОТА

Количество теплоты Q, затрачиваемое на нагревание тела массой m от температуры $\overset{\circ}{t}_1$ до температуры $\overset{\circ}{t}_2$

$$Q = cm\,(\overset{\circ}{t}_2 - \overset{\circ}{t}_1),$$

где c — удельная теплоемкость вещества, из которого состоит тело.

Количество теплоты Q, необходимое для плавления твердого тела массой m, взятого при температуре плавления,

$$Q = m\lambda,$$

где λ — удельная теплота плавления.

Количество теплоты Q, необходимое для превращения в пар жидкости массой m,

$$Q = mr,$$

где r — удельная теплота парообразования.

При сгорании m *кг* горючего выделяется количество теплоты

$$Q = qm,$$

где q — теплотворность горючего.

Задача 1. Автомобиль прошел путь $s = 121{,}5$ *км* со скоростью $v = 42$ *км/ч* и истратил при этом 24,3 *кг* бензина ($q = 46 \cdot 10^6$ *дж/кг*). Какую среднюю мощность развивал двигатель автомобиля во время движения, если коэффициент полезного действия двигателя 25%?

Решение. При работе двигателя автомобиля за счет сгорания бензина выделяется количество теплоты, часть которой (25%) расходуется на выполнение механической работы по перемещению автомобиля. Значит, можно записать $A = \eta mq$.

Однако работа $A = Nt$, где N — мощность двигателя, t — время движения автомобиля.

Приравняв правые части уравнений, получим

$$Nt = \eta qm, \quad \text{откуда} \quad N = \frac{\eta mq}{t}.$$

Учитывая, что $t = \frac{s}{v}$, получим окончательную формулу для определения мощности $N = \frac{\eta qmv}{s} = \frac{80\,500}{3}$ *вт* $\approx 26{,}8$ *квт*.

Задача 2. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v_1 = 400$ *м/сек*, пробивает доску, вследствие чего ее скорость уменьшается до $v_2 = 100$ *м/сек*. Температура пули в момент удара $t^\circ = 27^\circ$ С. Какая часть массы пули расплавится, если считать, что на нагрев пули расходуется 60% энергии?

Решение. При пробивании доски уменьшается скорость пули и, значит, уменьшается ее кинетическая энергия на величину

$$\Delta E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2).$$

Эта кинетическая энергия затрачивается на нагревание пули массой m до температуры плавления свинца Θ° и на плавление части пули массой m' (расплавленный свинец вылетает вместе с пулей). Следовательно, можно записать

$$\eta \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) = cm(\Theta^\circ - t^\circ) + \lambda m',$$

где λ — удельная теплота плавления.

Разделив обе части равенства на m, получим

$$\frac{m'}{m} = \frac{\eta(v_1^2 - v_2^2) - 2c(\Theta^\circ - t^\circ)}{2\lambda} \approx 0{,}318,$$

т. е. расплавится около 32% всей массы пули.

Задача 3. В калориметр, содержащий $m_1 = 100$ *г* льда при $t_0^{\circ} = 0°$ С, впускают пар при $t^{\circ} = 100°$ С. Сколько воды окажется в калориметре непосредственно после того, как весь лед растает?

Решение. В момент полного превращения льда в воду в калориметре окажется

$$M = m_1 + m_2 \qquad (1)$$

воды, где m_2 — масса сконденсировавшегося пара. Запишем уравнение теплового баланса для описанного в задаче процесса

$$m_1\lambda = m_2 r + c m_2 (t^{\circ} - t_0^{\circ}),$$

где λ и r — соответственно удельная теплота плавления льда и парообразования воды. Отсюда $m_2 = \dfrac{m_1\lambda}{r + c(t^{\circ} - t_0^{\circ})}$. Подставив это значение m_2 в уравнение (1), получим

$$M = m_1\left[1 + \frac{\lambda}{r + c(t^{\circ} - t_0^{\circ})}\right] \approx 112{,}5 \text{ г}.$$

Задачи

281. В смесь, состоящую из 20 *л* воды и 10 *кг* льда при 0° С, выливают свинец при температуре плавления. Вся смесь приобретает температуру 100° С и 200 *г* воды при этой температуре превращаются в пар. Определить, сколько было вылито свинца. Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ *дж/кг*.

282. Воду при соблюдении необходимых условий можно переохладить до $t^{\circ} = -10°$ С. Какая масса льда m образуется из $M = 1$ *кг* такой воды, если бросить в нее небольшой кусочек льда и вызвать этим замерзание воды? Удельную теплоемкость переохлажденной воды считать $c = 4190$ *дж/кг · град*.

283. Железный шарик радиусом 1 *см*, нагретый до 120° С, положили на лед. На какую глубину погрузится шарик в лед? Плотность льда и воды считать одинаковой. Температура окружающей воды 0° С.

284. До какой температуры надо нагреть алюминиевый куб, чтобы он, будучи положен на лед, полностью в него погрузился? Температура льда 0° С, плотность 920 *кг/м³*.

285. На сколько градусов нагреется медная пластинка размером 2×6 *см* и толщиной 5 *мм* при нарезании в ней резьбы с шагом 0,75 *мм*, если к воротку надо приложить момент силы 5 *н · м*? Вырезаемой массой пренебречь.

286. На сколько температура воды у основания водопада высотой 120 *м* больше, чем у его вершины?

287. При изготовлении льда в комнатном холодильнике требуется 5 *мин* для охлаждения воды от 4 до 0° С и еще 1 *ч* 40 *мин*, чтобы превратить ее в лед. Определить удельную теплоту плавления льда.

288. На сколько градусов охладится воздух в комнате объемом 30 *м³* за 4 *ч* работы холодильной установки, если ее производительность 2 *кг* льда при температуре $-2°$ С в сутки, а охлаждение начинается с температуры 20° С? Удельная теплоемкость воздуха 1005 *дж/кг · град*.

289. На тепловозе имеется 9000 *кг* нефти. При скорости поезда 60 *км/ч* тепловоз развивает среднюю мощность 3000 *квт*. Определить, на какое расстояние хватит имеющегося запаса нефти, если к. п. д. тепловоза 28%.

290. Поезд весом $15 \cdot 10^6$ *н* идет по горизонтальному пути со скоростью 60 *км/ч*. При этом тепловоз сжигает 600 *кг* нефти в час. Какую скорость сможет развить поезд при тех же условиях на пути с подъемом 1 : 100? Теплотворная способность нефти $4{,}6 \cdot 10^7$ *дж/кг*. К. п. д. тепловоза 28%.

291. Автомобиль весом 12 000 *н* на горизонтальном участке пути развивает скорость $v = 72$ *км/ч*, расходуя при этом 80 *г* бензина на $s = 1$ *км* пути. Какую скорость разовьет автомобиль при тех же условиях на пути с уклоном $h = 3{,}5$ *м* на $l = 100$ *м*? К. п. д. двигателя автомобиля $\eta = 28\%$. Теплотворная способность бензина $46 \cdot 10^6$ *дж/кг*.

292. Кожух осветителя, потребляющего 3 *квт* электроэнергии, охлаждается водой с начальной температурой 15° С. На какой высоте надо установить резервуар с водой, чтобы поддерживать кожух при температуре 30° С, если диаметр подводящих трубок 15 *мм*? Сопротивления трубок движению воды не учитывать.

293. Свинцовая пуля массой 20 *г*, летевшая со скоростью 500 *м/сек*, попадает в неподвижный медный шар массой 5 *кг* и застревает в нем. На сколько градусов нагреется шар, если считать, что вся кинетическая энергия пули затрачивается на нагревание?

294. На тележку массой M, движущуюся по горизонтальному пути со скоростью v_0, кладут сверху кирпич массой m, находящийся до этого в состоянии покоя. Определить количество теплоты, которое при этом выделяется.

295. Определить, каким должен быть заряд пороха в винтовке, чтобы пуля весом $P = 0{,}098$ *н* при вылете с дула приобрела скорость $v = 880$ *м/сек*. Коэффициент полезного действия винтовки 30%. Теплотворная способность пороха $q = 3{,}77 \cdot 10^6$ *дж/кг*.

296. Некоторая установка, выделяющая мощность 30 *квт*, охлаждается проточной водой, текущей по спиральной трубке, сечение которой 2 *см*^{2}. При установившемся режиме проточная вода нагревается на 15° С. Определить скорость движения воды, считая, что вся мощность установки затрачивается на нагревание воды.

297. Лампочка накаливания, потребляющая $N = 54$ *вт*, погружена в прозрачный калориметр, содержащий $V = 650$ *см*^{3} воды. За $t =$ $= 3$ *мин* вода нагревается на $t^\circ = 3{,}4^\circ$ С. Какая часть потребляемой лампочкой энергии пропускается калориметром наружу в виде лучистой энергии?

298. С какой минимальной скоростью относительно космического корабля должен двигаться железный метеор, чтобы в результате столкновения с кораблем он мог расплавиться? Температура до столкновения — 100° С. Считать, что количество теплоты, выделившейся в результате столкновения, распределилось поровну между метеором и кораблем.

299. Космическая частица, летящая (относительно корабля) со скоростью v, вследствие столкновения с кораблем нагрелась, расплавилась и испарилась. Начальная температура частицы $\overset{\circ}{t_1}$, температура плавления вещества частицы $\overset{\circ}{t_2}$, а температура парообразования $\overset{\circ}{t_3}$. Удельная теплоемкость вещества частицы в твердом состоянии c_1, в жидком — c_2. Коэффициент преобразования кинетической энергии в теплоту η. Определить удельную теплоту плавления вещества частицы, если она в 10 раз меньше удельной теплоты парообразования.

300. Буксир с караваном барж движется со скоростью 6 *км/ч*, сжигая в час 270 *кг* угля с теплотворной способностью $3 \cdot 10^7$ *дж/кг*. Какого минимального диаметра надо взять буксирный трос, если буксир без барж при той же скорости сжигает в пять раз меньше угля? Коэффициент полезного действия паровой машины буксира 10%. Разрывная прочность троса определяется формулой $T = 30\ C^2$ *н*, где C — длина окружности поперечного сечения троса в миллиметрах.

301. Пневматический молот массой $2 \cdot 10^3$ *кг* кует железную болванку, масса которой 6 *кг*, причем скорость молота перед ударом 3 *м/сек*. На сколько нагреется болванка от одного удара? Удар считать абсолютно неупругим.

302. К воде, переохлажденной до температуры -12° С, бросили маленький кусочек льда. Какая часть массы воды превратится в лед?

303. Железный брусок длиной 40 *см* и сечением 30 *см*^{2} при температуре 0° С погружен в сосуд, содержащий 20 *кг* воды при температуре 90° С. Определить температуру, которую приобретает брусок в воде, и определить объем бруска при этой температуре.

304. Через охладитель (радиатор) компрессора протекает за 1 *ч* 3250 *кг* воды, подогревающейся от 11 до 17° С. Какой мощности двигатель с коэффициентом полезного действия 60% установлен для приведения в действие компрессора?

305. Сосуд, содержащий некоторое количество азота при температуре $\overset{\circ}{t_1} = 15^\circ$ С, движется со скоростью $v = 100$ *м/сек*. Какова будет температура азота $\overset{\circ}{t_2}$ в сосуде, если сосуд внезапно остановится и если передачей теплоты стенкам можно пренебречь? Удельная теплоемкость азота $c = 1050$ *дж/кг · град* (при постоянном объеме).

306. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Каков его коэффициент полезного действия, если при полной мощности $N = 60$ *квт* $m = 40$ *кг* масла в течение $t = 4$ *мин* нагреваются на $t^\circ = 20^\circ$ С? Удельная теплоемкость масла $c = 2095$ *дж/кг · град*. Количество теплоты, идущее на нагревание металла трансформатора и его обмотки не учитывать.

307. Во время токарной обработки стальной заготовки массой 15 *т* в течение 10 *ч* в стружку идет 500 *кг* металла. Промерами установлено, что средняя температура стружки 700° С, а средняя температура нагрева обработанной детали 50° С. Потребляемая электродвигателем главного привода мощность во время обработки 70 *квт*. Какой процент от мощности двигателя составляют расходы на трение резца о металл? Начальная температура заготовки 15° С.

308. Потоком α-частиц, имеющих скорость $2 \cdot 10^7$ *м/сек*, бомбардируется свинцовая пластинка объемом 9 *см*^{3}. До какой температуры нагреется пластинка, если в ней затормозилось 10^{15} α-частиц? Считать, что вся энергия движения α-частиц превращается в теплоту. Температура пластинки до опыта составляла 20° С. Масса α-частицы $6{,}64 \times 10^{-27}$ *кг*. Теплоотдачу пластинки не учитывать.

309. Потоком медленных нейтронов облучается медная пластинка объемом 10 *см*^{3}. На сколько градусов нагреется пластинка, если в ней полностью затормозилось 10^{21} нейтронов, летящих со скоростью $2 \cdot 10^4$ *м/сек*? Масса нейтрона $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*. Считать, что вся энергия движения нейтронов превращается в теплоту. Теплоотдачу пластинки не учитывать.

§ 3. РАСШИРЕНИЕ ПРИ НАГРЕВАНИИ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ ТЕЛ

Изменение длины и объема при изменении температуры на Δt°

$$\Delta l = l - l_0 = \alpha l_0 \Delta t^{\circ}; \quad \Delta V = V - V_0 = \beta V_0 \Delta t^{\circ},$$

где l_0 — начальная длина; V_0 — начальный объем; α и β соответственно коэффициенты линейного и объемного расширения. Для твердых изотропных тел $\beta \approx 3\alpha$.

При температуре t° плотность $\rho = \dfrac{\rho_0}{1 + \beta t^{\circ}}$.

Задача 1. Биметаллическая пластинка, состоящая из стальной и алюминиевой пластинок толщиной 0,2 *мм* каждая, имеет температуру 20° С. Какой будет средний радиус кривизны пластинки при повышении температуры до 100° С?

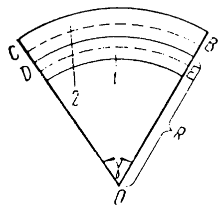


Рис. 51.

Решение. Обозначим средний радиус кривизны пластинки через R, толщину каждой пластинки через d, длину алюминиевой пластинки через CB, а стальной — DE (рис. 51). Тогда

$$\gamma\left(R + \frac{d}{2}\right) = CB; \tag{1}$$

$$\gamma\left(R - \frac{d}{2}\right) = DE. \tag{2}$$

Обозначив длину пластинки при 20° через l_0, можно записать приближенные формулы

$$CB = l_0 (1 + \alpha_a \Delta t^{\circ}); \tag{3}$$

$$DE = l_0 (1 + \alpha_c \Delta t^{\circ}). \tag{4}$$

Разность длин дуг CB и DE составляет

$$\Delta l = CB - DE = \gamma R + \gamma \frac{d}{2} - \gamma R + \gamma \frac{d}{2} = \gamma d. \tag{5}$$

Из формул (3) и (4) получим

$$\Delta l = l_0 + l_0 \alpha_a \Delta t^{\circ} - l_0 - l_0 \alpha_c \Delta t^{\circ} = l_0 (\alpha_a - \alpha_c) \Delta t^{\circ} = \gamma d. \tag{6}$$

Сопоставляя уравнения (5) и (6), получим

$$l_0 (\alpha_a - \alpha_c) \Delta t^{\circ} = \gamma d. \tag{7}$$

Из формулы (1) определим угол $\gamma = \dfrac{CB}{R + \frac{1}{2} d}$. Подставив значение CB в формулу (3), получим

$$\gamma = \frac{l_0 (1 + \alpha_a \Delta t^{\circ})}{R + \frac{1}{2} d}.$$

Это значение γ подставим в формулу (7):

$$l_0 (\alpha_a - \alpha_c) \Delta t^{\circ} = \frac{l_0 (1 + \alpha_a \Delta t)}{R + \frac{1}{2} d}.$$

Решив это уравнение относительно R, получим

$$R = \frac{2 + (\alpha_a + \alpha_c)\,\Delta t^\circ}{2(\alpha_a - \alpha_c)\,\Delta t^\circ} \approx 20{,}86 \text{ см}.$$

Задача 2. Флакон при 0° С имеет емкость 40 *см*^{3}. Можно ли в него налить такое количество ртути, чтобы не заполненный ртутью объем не изменялся при изменении температуры? Сколько надо налить ртути? Коэффициент объемного расширения стекла

$$\beta_c = \frac{1}{45\,000} \text{ град}^{-1}; \text{ ртути } \beta_p = \frac{1}{5500} \text{ град}^{-1}.$$

Решение. Обозначим емкость сосуда при 0° С буквой V, искомый объем ртути — v. Тогда свободный объем в сосуде $V - v$.

При температуре t° емкость сосуда будет $V(1 + \beta_c t^\circ)$; объем ртути $v(1 + \beta_p t^\circ)$. По условию

$$V(1 + \beta_c t^\circ) - v(1 + \beta_p t^\circ) = V - v, \text{ откуда } v = V\frac{\beta_c}{\beta_p}.$$

Очевидно, что задача имеет решение, если $\frac{\beta_c}{\beta_p} < 1$, что и имеет место, так как $\frac{\beta_c}{\beta_p} = \frac{11}{30}$. Следовательно, $v = 40 \text{ см}^3 \cdot \frac{11}{30} \approx 14{,}7 \text{ см}^3$. Ртути надо налить $m = \rho v = 200$ *г*.

Задачи

310. При измерении стальным штангенциркулем длина детали оказалась 180 *мм*. Температура во время измерений была 10° С. Какова ошибка этого измерения, если деления шкалы штангенциркуля наносились при температуре 20° С?

311. Расстояние на земле измеряется разделенной на метры стальной лентой с коэффициентом линейного расширения $11 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$. Деления на ленту наносились при 15° С. Измерение производилось при температуре 25° С. В результате проведенного измерения расстояние оказалось 1000,53 *м*. Каково истинное расстояние?

312. Бронзовый стержень длиной 80 *мм* и диаметром 15 *мм* был охлажден в жидком азоте до температуры — 185,8° С. Охлажденный стержень вставили плотно в обойму, температура которой составляла 20° С. С какой силой действует стержень на обойму после отогревания его до 20° С? Коэффициент температурного расширения бронзы $\alpha = 0{,}0000175$ *град*$^{-1}$. Модуль Юнга $E = 10{,}5 \cdot 10^{10}$ *н/м*^{2}.

313. Латунное кольцо сечением 2×5 *мм*^{2} было нагрето до температуры 300° С и плотно надето на стальной цилиндр диаметром 45 *мм*, имеющий температуру 18° С. Какое усилие на разрыв испытывает кольцо после охлаждения до 18° С? Модуль Юнга для латуни $E = 6{,}5 \cdot 10^{10}$ *н/м*^{2}.

314. Стальной бандаж нагоняют на вагонное колесо при температуре $\overset{\circ}{t_1} = 300°$ С. Определить силу натяжения F в бандаже при температуре $\overset{\circ}{t_0} = 20°$ С, если сечение бандажа $S = 20$ *см*^{2}.

315. Медная проволока, предел прочности которой $1{,}96 \cdot 10^8$ *н/м*^{2}, натянута горячей при температуре 150° С между двумя прочными неподвижными стенками. При какой температуре, остывая, разорвется проволока? Считать, что закон Гука справедлив до момента разрыва проволоки.

316. Доказать, что твердое тело, плотность вещества которого ρ, удельная теплоемкость c и коэффициент объемного расширения β, при сообщении ему количества теплоты Q увеличивает свой объем на величину $\Delta V = \frac{Q\beta}{c\rho}$, не зависящую от первоначального объема тела.

317. Как изменится при нагревании жидкости давление на дно сосуда: а) цилиндрического; б) суживающегося кверху; в) суживающегося книзу?

318. Твердое тело плавает в жидкости, температура которой 0° С, причем в жидкость погружается 0,98 объема всего тела. Затем нагревают жидкость до 25° С и замечают, что тело полностью погрузилось в жидкость. Зная коэффициент объемного расширения вещества твердого тела ($\beta = 0{,}0000026$ *град*$^{-1}$), определить коэффициент объемного расширения жидкости.

319. Латунный стержень длиной 102,44 *см* при температуре $t_1^\circ =$ $= 15°$ С одним концом зажат неподвижно, а другим давит на короткое плечо рычага, отношение плеч которого составляет 1 : 15. При нагревании стержня до 100° С конец длинного плеча рычага переместился на $\Delta l = 2{,}6$ *см*. Определить коэффициент линейного расширения латуни.

320. Линейные размеры тела связаны с его температурой формулой $l_t = l_0(1 + \alpha t)$. Предположим, что температура понизилась до значения $t° = -\frac{1}{\alpha}$. Подставив это значение в первую формулу, получим $l_t = 0$. Если же температуру взять еще ниже, то длина тела станет отрицательной. В чем здесь дело?

321. В железную цилиндрическую цистерну высотой 8 *м* и диаметром основы 20 *м* налито нефти столько, что при температуре 5° С уровень ее ниже верхнего края цистерны на 20 *см*. Определить, при какой температуре нефть начнет переливаться через края цистерны. Коэффициент объемного расширения нефти 0,001 град$^{-1}$.

322. Радиус колеса тепловоза $r_0 = 1$ *м* при $t_0^\circ = 0°$ С. Определить разницу в числах оборотов колеса летом при температуре $t_1^\circ = 25°$ С и зимой при температуре $t_2^\circ = -25°$ С на пути пробега тепловоза $l = 100$ *км* ($\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$).

323. Какую длину должны иметь стальной и медный стержни при 0° С, чтобы при любой температуре стальной стержень был длиннее медного на 5 *см*? Принять, что $\alpha_с = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$; $\alpha_м = 1{,}6 \times$ $\times\ 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

·324. Железный брусок длиной 30 *см*, шириной 20 *см* и высотой 10 *см* и латунный брусок, все линейные размеры которого на 0,1 *мм* меньше, находятся при 0° С. При какой температуре их длины будут одинаковыми? При какой температуре их объемы станут одинаковыми?

325. На сколько отстанут за сутки стенные часы, отрегулированные при $t_1^\circ = 15°$ С, если их поместить в комнату с температурой $t_2^\circ =$ $= 30°$ С? Маятник часов длиной $l = 0{,}5$ *м* (при температуре t_1°) изготовлен из латуни.

326. В стеклянный цилиндр A (рис. 52) налита жидкость при температуре $\overset{\circ}{t_1}$; ее уровень отмечен на стенке цилиндра. Цилиндр погружен в воду, температура которой $\overset{\circ}{t_2} > \overset{\circ}{t_1}$. Как будет изменяться уровень воды относительно метки, если коэффициент объемного расширения жидкости а) равен коэффициенту объемного расширения стекла; б) меньше объемного расширения стекла; в) больше коэффициента расширения стекла?

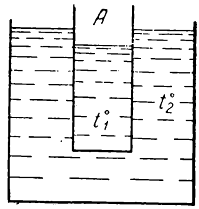


Рис. 52.

327. Две одинаковые трубки образуют сообщающиеся сосуды, заполненные керосином. Одна трубка находится при температуре $\overset{\circ}{t_1} = 10^\circ$ С и высота столба керосина в ней $h_1 = 30$ *см*. Вторая трубка находится при температуре $\overset{\circ}{t_2} = 100^\circ$ С. Определить разность уровней керосина в обеих трубках. Изменением объемов трубок пренебречь.

328. Железная балка с площадью сечения 20 *см*^{2} наглухо закреплена между двумя стенами при 0° С. Определить упругую силу сжатия, возникающую в балке при повышении температуры до 20° С.

329. Стеклянный сосуд весит $P_0 = 0{,}53$ *н*. Тот же сосуд, наполненный ртутью, при 0° С весит $P_1 = 13{,}84$ *н*. Когда этот сосуд нагрели до $t^\circ = 40^\circ$ С, то часть ртути вытекла, и сосуд стал весить $P_2 = 13{,}76$ *н*. Каков коэффициент объемного расширения стекла β?

§ 4. СВОЙСТВА ГАЗОВ И ПАРОВ

Закон Бойля—Мариотта:

$$pV = \text{const (при } T = \text{const и } m = \text{const)}.$$

Закон Гей-Люссака (при $p = \text{const}$):

$$V = V_0(1 + \beta t^\circ),$$

где $\beta = \frac{1}{273}$ — коэффициент объемного расширения, одинаковый для всех газов.

Закон Шарля (при $V = \text{const}$):

$$p = p_0(1 + \beta t^\circ),$$

где $\beta = \frac{1}{273}$ — термический коэффициент давления газов.

Уравнение состояния идеального газа (объединенный газовый закон):

$$\frac{pV}{T} = \text{const (при } m = \text{const)}.$$

Зависимость плотности газа от температуры:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t^\circ},$$

где $\beta = \frac{1}{273}$ — коэффициент объемного расширения газа.

Закон Дальтона: давление смеси химически не взаимодействующих газов равно сумме давлений, создаваемых каждым газом в отдельности

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Относительная влажность: $B = \frac{\rho_a}{\rho_н} \cdot 100\%$,

где ρ_a — абсолютная влажность, т. е. содержание водяного пара в единице объема воздуха; $\beta_н$ — плотность насыщенного водяного пара при данной температуре.

Задача 1. Цилиндрическая пипетка длиной $L = 240$ *мм* погружена в ртуть, которая поднялась в ней на высоту $l = 100$ *мм*. Затем пипетку закрывают сверху пальцем и вытягивают из ртути, причем часть ртути из пипетки вытекает. Какова высота столбика ртути, оставшегося в пипетке, если известно, что атмосферное давление соответствует давлению столбика ртути высотой $H = 760$ *мм*? Поперечное сечение пипетки одинаковое по всей ее длине, и пипетка остается в вертикальном положении.

Решение. Начальное давление воздуха в пипетке составляет $p_0 = H$, а его объем

$$V_0 = (L - l)\, S,$$

где S — поперечное сечение пипетки. Конечное давление этого же воздуха $p_1 = H - x$, а объем $V_1 = (L - x)\, S$. По закону Бойля—Мариотта

$$p_0 V_0 = p_1 V_1, \text{ т. е. } H\,(L - l)\, S = (H - x)\,(L - x)\, S.$$

После упрощений

$$x^2 - (H + L)\, x + Hl = 0, \quad \text{откуда } x = \frac{H - L}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(H+L)^2 - 4Hl}.$$

Подставив числовые значения величин, получим $x_1 \approx 83$ *мм*.

Второй корень $x_2 \approx 917$ *мм* не имеет физического смысла для данной задачи ($x_2 > L$).

Задача 2. Балластный резервуар подводной лодки объемом $V_1 = 5$ *м*^{3} заполнен водой. Какое давление p воздуха должно быть в баллоне емкостью $V_2 = 0{,}2$ *м*^{3}, чтобы при подсоединении баллона к резервуару подводная лодка могла полностью освободиться от балласта на глубине $H = 100$ *м*? Температура воздуха не изменяется. Атмосферное давление $p_a = 1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}; плотность морской воды $\rho = 1030$ *кг/м*^{3}.

Решение. Чтобы лодка полностью освободилась от балласта, воздух должен занять объем $V_1 + V_2$ при давлении $p_a + \rho g H$. Так как масса и температура воздуха не изменяются, то по закону Бойля—Мариотта:

$$pV_2 = (p_a + \rho g H)\,(V_1 + V_2);$$

отсюда $p = (p_a + \rho g H) \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_2} \approx 288{,}7 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}.

Задача 3. В сосуде емкостью 30 *л* находится кислород при температуре 20° С и давлении $2{,}02 \cdot 10^6$ *н/м*^{2}. Привести объем кислорода к нормальным условиям.

Решение. Будем считать заданное состояние кислорода начальным, а состояние при нормальных условиях конечным состоянием газа (V; 1,01 · 10^5 *н/м*²; 0° С). Переход газа из начального состояния в конечное опишем по объединенному газовому закону

$$\frac{0{,}03\ м^3 \cdot 2{,}02 \cdot 10^6}{293} = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 V}{273},$$

откуда искомый объем $V \approx 0{,}56$ *м*³.

Задача 4. В сосуде емкостью 2 *л* содержится углекислый газ под давлением 12,6 · 10^4 *н/м*² при температуре 27° С. Сколько молекул углекислого газа находится в колбе?

Решение. Приведем газ к нормальным условиям ($p_1 = 1{,}01 \times \times 10^5$ *н/м*²; $T_1 = 273°$ К), воспользовавшись объединенным газовым законом

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1},$$

откуда объем газа при нормальных условиях $V_1 = \frac{pVT_1}{p_1 T}$.

Один киломоль любого газа при нормальных условиях занимает объем 22,41 *м*³. Значит, число киломолей рассматриваемого в задаче газа равно $\frac{V_1}{22{,}41}$, если V_1 выражено в *м*³. В одном киломоле газа содержится $N = 6{,}025 \cdot 10^{26}$ молекул (число Авогадро). Значит, в сосуде находится число молекул

$$n = \frac{NV_1}{22{,}41} = \frac{pVT_1 N}{22{,}41 \cdot p_1 T} \approx 6{,}1 \cdot 10^{22}\ \text{молекул.}$$

Задача 5. В помещение надо подать 20 000 *м*³ воздуха при 18° С и относительной влажности 50%, забирая его с улицы при 10° С и 60% относительной влажности. Сколько воды надо дополнительно испарить в подаваемый воздух?

Решение. По таблице находим массу водяного пара, насыщающего 1*м*³ воздуха при 18° С: $m_1 = 15{,}4$ *г*. Тогда в 20 000 *м*³ при 18° С и относительной влажности 50% должно содержаться $M_1 = 15{,}4\ г \times \times 20\,000 \cdot 0{,}5 = 154$ *кг*. По этой же таблице находим массу водяного пара, насыщающего 1 *м*³ воздуха при 10° С: $m_2 = 9{,}4$ *г*. Тогда в объеме 20 000 *м*³ воздуха при 10° С и 60% относительной влажности содержится $M_2 = 9{,}4\ г \cdot 20\,000 \cdot 0{,}6 = 112$ *кг* 800 *г* водяного пара. Следовательно, надо испарить дополнительно $M_1 - M_2 = 41{,}2$ *кг* воды.

Задачи

330. Какое количество кислорода вдыхает при каждом вдохе альпинист, находящийся на высоте, где давление воздуха равно 0,505 × × 10^5 *н/м*²? Известно, что человек на поверхности Земли, где давление 1,01 · 10^5 *н/м*², вдыхает за один раз 1 *г* кислорода. Изменением температуры воздуха с увеличением высоты пренебречь.

331. Два одинаковых баллона, содержащих газ при 0° С, соединены узкой горизонтальной трубкой диаметром 5 *мм*, посредине которой находится капля ртути. Капля делит весь сосуд на две части по 200 *см*³. На какое расстояние переместится капля, если один баллон нагреть на 2° С, а второй на столько же охладить? Расширения сосудов не учитывать.

332. Два стеклянных шара радиусом r и R, наполненные воздухом, соединены тонкой стеклянной трубкой. Посередине трубки находится капля ртути. Можно ли с помощью такого прибора измерять температуру окружающей среды? Рассмотреть случаи горизонтального и вертикального положения прибора.

333. В баллоне находится газ при атмосферном давлении p_0. Открытый баллон нагрели, закрыли краном и охладили до 10° С. Давление при этом упало до $0{,}7\ p_0$. До какой температуры нагревали газ?

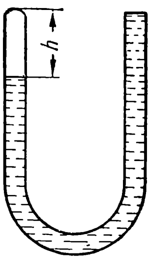


Рис. 53.

334. Для определения плотности газа поступили следующим образом. Стеклянный баллон емкостью $V = 1$ *л* наполнили испытуемым газом до давления $p_1 = 9{,}8 \cdot 10^4$ *н/м*^{2} и взвесили. Его вес оказался $P_1 = 0{,}9898$ *н*. Затем часть газа была удалена и давление в баллоне упало до $p_2 = 5 \cdot 10^4$ *н/м*^{2}. Новый вес баллона оказался 0,98 *н*. Какова плотность испытуемого газа при атмосферном давлении? Температура во время опыта не изменялась.

335. Баллон емкостью 40 *л* содержит 1,97 *кг* углекислого газа (CO_2). Баллон выдерживает давление не более 30 *атм* $= 3{,}039 \cdot 10^6$ *н/м*^{2}. При какой температуре возникает опасность взрыва?

336. В запаянную у одного конца симметрическую U-образную трубку налита вода, причем за счет присутствующего в трубке воздуха разность уровней у ее концов составляет h (рис. 53). Во сколько раз надо изменить температуру воздуха в трубке, чтобы разность уровней воды у ее концов уменьшилась вдвое? Атмосферное давление p_0.

337. Из-за неисправности вентиля из металлического баллона вытекает газ. Какое количество газа утекло, если известно, что давление газа в баллоне понизилось наполовину? Температура все время оставалась постоянной.

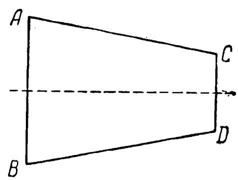


Рис. 54.

338. Из баллона со сжатым водородом емкостью 10 *л* вследствие неисправности вентиля вытекает газ. При температуре 7° С манометр показал $5 \cdot 10^6$ *н/м*^{2}. Через некоторое время при температуре 17°С манометр показал такое же давление. Сколько вытекало газа?

339. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом находится газ под давлением $9{,}8 \cdot 10^4$ *н/м*^{2}; во втором — под $5{,}88 \cdot 10^4$ *н/м*^{2}. Емкость первого баллона 1 *л*, второго 3 *л*. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температура постоянная. Объем трубки не учитывать.

340. Сосуд, имеющий форму усеченного конуса, заполнен сжатым газом (рис. 54). Одинаковая ли сила давления газа на стенки AB и CD? Если силы давления не одинаковы, то почему сосуд не приходит в ускоренное движение в сторону большей силы?

341. В закрытом цилиндрическом сосуде постоянного сечения находится газ при нормальных условиях. Сосуд размещен горизонтально и разделен подвижным поршнем в отношении 1 : 2. В каком отношении поршень будет делить объем сосуда, если меньшую его часть нагреть до $\overset{\circ}{t_1} = 27°$ С, а большую охладить до $\overset{\circ}{t_2} = -123°$ С?

342. Закрытый цилиндрический сосуд высотой h разделен на две равные части невесомым поршнем, скользящим без трения. При застопоренном поршне обе половины заполнены газом, причем в одном из них давление газа в n раз больше, чем в другой. На сколько передвинется поршень, если снять стопор? Температуру считать неизменной.

343. Сколько ходов должен сделать поршень откачивающего насоса, чтобы откачать воздух из сосуда объемом 2 *л* от давления 10^5 *н/м²* до давления 10 *н/м²*, если емкость насоса $V = 40$ *см³*?

344. Сколько качаний надо сделать, чтобы при помощи насоса, захватывающего при каждом качании 40 *см³* воздуха, наполнить пустую камеру шины велосипеда настолько, чтобы площадь ее соприкосновения

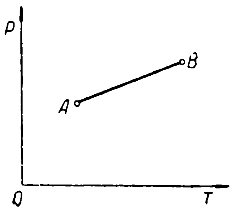


Рис. 55.

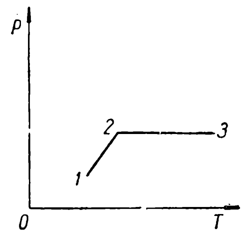


Рис. 56.

с дорогой была $S = 60$ *см²*? Нагрузку на колесо считать равной $P = 360$ *н*. Объем камеры $V_1 = 2000$ *см³*. Атмосферное давление принять равным $p_a = 9{,}81 \cdot 10^4$ *н/м²*. Жесткостью покрышки камеры пренебречь.

345. Нагревается или охлаждается идеальный газ при расширении, если его давление p и объем V связаны формулой $pV^n = \text{const}$, где $n > 1$? Масса газа остается постоянной.

346. В сосуд, снабженный манометром, накачан воздух. Открыв кран, соединяющий сосуд с атмосферой, дают возможность давлению внутри сосуда сравняться с атмосферным и тотчас же закрывают кран. Через некоторое время давление в сосуде вновь повышается. Почему?

347. При нагревании некоторой массы газа получили график перехода от состояния A к состоянию B (рис. 55). Как изменялся объем газа в этом процессе?

348. Начертить изотермы для 0,5 *г* водорода для температур: 1) 0° С и 2) 100° С.

349. Дан график зависимости давления от температуры (рис. 56). Определить, как менялся объем газа при переходе из состояния 1 в состояние 3.

350. В цилиндре, площадь основания которого 100 *см²*, находится воздух при температуре 12° С. Атмосферное давление $1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*. На высоте 60 *см* от основания цилиндра находится поршень. На сколько опустится поршень, если на него поставить гирю весом 980 *н*, а воздух в цилиндре при этом нагреть до 27° С? Трения поршня о стенки цилиндра и веса самого поршня не учитывать.

351. В сосуд объемом $V = 10$ *л*, наполненный сухим воздухом при нормальных условиях ($p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*; $t_0^\circ = 0°$ С), вводят $m = 3$ *г* воды и нагревают сосуд до $t^\circ = 100°$ С. Определить давление влажного воздуха p_x в сосуде при этой температуре.

352. По газопроводу течет углекислый газ при давлении $p = 5 \times 10^5$ *н/м²* и температуре $t° = 17°$ С. Какова средняя скорость движения газа в трубе, если за $t = 5$ *мин* через площадь поперечного сечения трубы $S = 6$ *см²* протекает $m = 2{,}5$ *кг* углекислого газа?

353. В сосуде находится воздух при нормальных условиях (p_0, T_0). Сосуд закрыт клапаном, площадь которого $S = 10$ *см²*, а вес $Q = 13{,}5$ *н*. До какой температуры надо нагреть воздух в сосуде, чтобы он открыл клапан? Расширения сосуда при нагревании не учитывать.

354. В цилиндре под поршнем находится газ. Вес поршня 6 *н*, площадь поршня 20 *см²*, атмосферное давление $9{,}975 \cdot 10^4$ *н/м²*. С какой добавочной силой надо действовать на поршень, чтобы объем газа в цилиндре уменьшился вдвое? Температура газа не изменяется.

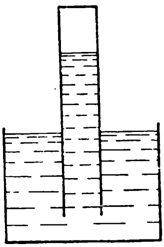


Рис. 57.

355. В двух одинаковых по объему сосудах содержится воздух, в одном при температуре $t_1°$ и давлении p_1, во втором при температуре $t_2°$ и давлении p_2. Сосуды соединяют друг с другом и нагревают до температуры $t°$. Какое давление установится внутри сосуда? Расширения сосудов при нагревании не учитывать.

356. Аэростат объемом V наполнен водородом при температуре $t° = 15°$ С. При неизменном давлении атмосферы под влиянием солнечной радиации его температура повысилась до $t_1° = 37°$ и излишек газа вышел через выпускной вентиль, благодаря чему масса аэростата с газом уменьшилась на 6,05 *кг*. Определить объем аэростата.

357. Давление водяного пара над водой при 0° С $p = 532$ *н/м²*. Во сколько раз среднее расстояние между молекулами воды в паре больше среднего расстояния между молекулами воды в жидкости при той же температуре?

358. Сосуд с небольшим отверстием находится при температуре $t_0° = 76°$ С; атмосферное давление $p_a = 9{,}975 \cdot 10^4$ *н/м²*. В сосуд налито немного воды, давление насыщенного пара которой при этой температуре составляет $p_1 = 4 \cdot 10^4$ *н/м²*. Затем сосуд закрыли и погрузили в жидкий воздух, кипящий при $T = 80°$ К. Какое будет давление в сосуде? Давление насыщенного пара при $T = 80°$ К не учитывать.

359. Стеклянную трубку длиной $L = 100$ *см*, закрытую с одного конца, открытым концом опустили в воду на глубину $l = 50$ *см*. На какую высоту x поднялась вода в трубке? Барометрическое давление $p_1 = 76$ *см рт. ст.* Температура воздуха и воды одинакова.

360. Баллон емкостью $V = 0{,}04$ *м³* наполнен сжатым воздухом при температуре 20° С до давления $1{,}2 \cdot 10^7$ *н/м²*. Какой объем воды можно вытеснить этим воздухом из цистерны подводной лодки в море на глубине 30 *м*, если температура воды 5° С и плотность морской воды $\rho = 1030$ *кг/м³*?

✓**361.** Цилиндрическую пробирку длиной $4h$, содержащую некоторое количество газа, погружают открытым концом до половины длины в жидкость плотностью ρ. При этом оказалось, что поверхность жидкости внутри пробирки отстоит на $3h$ от ее открытого конца (рис. 57). В каком положении будет находиться жидкость в пробирке при полном погружении последней? Температура во время опыта остается неизменной, внешнее давление p.

362. Показания ртутного барометра вследствие присутствия небольшого количества воздуха над столбиком ртути неточные. При давлении 755 *мм рт. ст.* барометр показывает 748 *мм*, а при давлении 740 *мм*—736 *мм рт. ст.* Каково действительное давление воздуха, если этот барометр показывает 760 *мм рт. ст.*?

363. В чашечный ртутный барометр попал пузырек воздуха, вследствие чего барометр показывает давление меньше истинного. При сверке его с точным барометром оказалось, что при давлении 768 *мм рт. ст.* барометр показывает 748 *мм рт. ст.*, причем расстояние от уровня ртути до верхнего основания трубки равно $l_1 = 80$ *мм*. Каково истинное давление, если барометр показывает 734 *мм рт. ст.*? Температура воздуха постоянная.

364. Аэростат наполнен водородом при температуре $t_1^\circ = 20^\circ$ С. Объем аэростата $V_1 = 1000$ *м*^{3}. При неизменном давлении атмосферы температура повысилась до $t_2^\circ = 40^\circ$ С, вследствие чего вышел излишек газа. На сколько уменьшился при этом вес аэростата с газом?

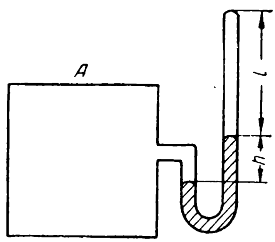


Рис. 58.

365. Имеются три непрозрачных цилиндра, закрытых подвижными поршнями. Известно, что в одном цилиндре находится газ при температуре выше критической, в другом — ненасыщающий, а в третьем — насыщающий пар. Как определить, что находится в каждом из цилиндров?

366. Теплоизолированный сосуд разделен теплопроводящей перегородкой на две камеры, объемы которых соответственно равны V_1 и V_2. Камеры заполняют одинаковым газом, начальные температуры и давления которого в первой камере T_1 и p_1, а во второй — T_2 и p_2. Определить давление в камерах после того, как процесс теплообмена закончится. Теплоемкость стенок сосуда и перегородки не учитывать.

367. Цилиндрический сосуд с газом разделен поршнем на две части. Давление и объем газа в каждой части соответственно равны p_1, V_1 и p_2, V_2. Начальные температуры в обеих частях одинаковы. Затем освобождают поршень и вдвое увеличивают температуру в левой части сосуда. На сколько в результате этого изменится объем газа в левой части сосуда?

368. Сосуд A соединен с манометрической трубкой с запаянным концом (рис. 58). При давлении в сосуде A, равном $p_1 = 10^5$ *н/м*^{2}, разность уровней в коленах манометра $h_1 = 10$ *см*, расстояние от поверхности ртути до запаянного конца трубки $l_0 = 20$ *см*. Какой будет разность уровней в трубке манометра, если в сосуде A довести давление до $p_2 = 13{,}6 \cdot 10^4$ *н/м*^{2}? Температуру считать постоянной. При вычислениях взять $g \approx 10$ *м/сек*^{2}.

369. Три баллона емкостью $V_1 = 3$ *л*, $V_2 = 7$ *л* и $V_3 = 5$ *л* наполнены соответственно кислородом под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}, азотом под давлением $p_2 = 3 \cdot 10^5$ *н/м*^{2} и углекислым газом под давлением $p_3 = 0{,}6 \cdot 10^5$ *н/м*^{2} при одной и той же температуре. Баллоны соединяют между собой трубкой ничтожно малого объема, причем образуется смесь той же температуры. Каково давление смеси?

370. В цилиндрическом сосуде с поршнем, имеющим объем $V = 10$*л* и находящимся в термостате при $t^\circ = -57^\circ$ C, находится $m = 1{,}9$ *г* газообразного аммиака (молекулярная масса 17). Сколько аммиака сконденсируется при сжатии газа поршнем до объема $V_1 = \frac{1}{2}V$? Упругость пара $p_п$ над жидким аммиаком при $t^\circ = -57^\circ$ C равна $2{,}66 \cdot 10^4$ *н/м*^{2}.

371. В комнате объемом 120 *м*^{3} при температуре 15° C относительная влажность составляет 60%. Определить массу водяного пара в воздухе комнаты. Плотность насыщающего водяного пара при 15° C равна 12,8 *г/м*^{3}.

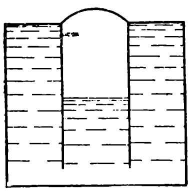


Рис. 59.

372. Запаянная с одного конца цилиндрическая трубка длиной L погружается в воду до тех пор, пока запаянный конец ее не оказался на одном уровне с поверхностью воды. Когда температура воздуха и воды уравнялась, оказалось, что вода в трубке поднялась на высоту 2/3 L. Определить начальную температуру T_0 воздуха в трубке, если температура воды T, а атмосферное давление p_0.

373. Цилиндрическую пробирку длиной L, содержащую газ при температуре T, полностью погрузили в жидкость с плотностью ρ. При этом уровень жидкости внутри пробирки находится на ее середине (рис. 59). Пробирку вынимают из жидкости настолько, что она едва касается поверхности жидкости своим открытым концом. Как следует изменить температуру газа в пробирке, чтобы жидкость внутри нее вновь установилась на расстоянии $\frac{1}{2}L$ от ее концов? Атмосферное давление p_0.

374. К рычажным весам подвешена коническая барометрическая трубка длиной $L = 1$ *м*, нижний конец которой лишь на незначительную глубину погружен в ртуть. Вес трубки $P = 1{,}96$ *н*, внутреннее сечение у нижнего конца $S_1 = 4$ *см*^{2}, у верхнего $S_2 = 1$ *см*^{2}. Атмосферное давление $p_0 = 9{,}8 \cdot 10^4$ *н/м*^{2}. Сил поверхностного натяжения не учитывать. Какой груз Q надо положить на вторую чашу весов для равновесия?

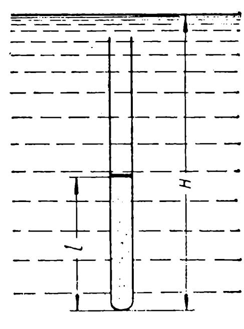


Рис. 60.

375. Пробирку длиной L заполнили водородом под давлением p_0, закрыли легким подвижным поршнем и погрузили в сосуд со ртутью (рис. 60). При какой глубине погружения H поршень окажется всередине пробирки, т. е. $l = \frac{1}{2}L$? Плотность ртути ρ, внешнее давление p_a, температура водорода поддерживается неизменной.

§ 5. СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

Коэффициент поверхностного натяжения жидкости

$$\alpha = \frac{F}{l},$$

где F — сила поверхностного натяжения, l — длина границы поверхностного слоя жидкости.

Высота поднятия жидкости в капиллярной трубке с радиусом внутреннего канала r $h = \frac{2\alpha}{r\rho g}$, где ρ — плотность жидкости.

Задача 1. Капиллярную трубку с очень тонкими стенками прикрепили к коромыслу весов, после чего весы уравновесили. К нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды, и при этом для уравновешивания капилляра потребовалось добавить груз $132 \cdot 10^{-5}$ *н*. Определить радиус капилляра.

Решение. Силы поверхностного натяжения действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Учитывая тонкость стенок, можно считать радиусы кривизны поверхностей жидкости возле стенок капилляра одинаковыми по величине внутри и вне трубки. Значит, одинаковыми можно считать и силы, действующие на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки.

Сила, действующая на внутреннюю поверхность, равна весу воды, поднятой в капилляр силами поверхностного натяжения, а изменение веса капилляра равно двойному весу этой воды. Таким образом,

$$P = \alpha \cdot 4\pi r, \text{ откуда } r = \frac{P}{4\pi\alpha} \approx 1{,}47 \cdot 10^{-3}\ \text{м} = 1{,}47\ \text{мм}.$$

Задача 2. В спирт на незначительную глубину опущена трубка с диаметром внутреннего канала $d = 0{,}5$ *мм*. Определить вес спирта, вошедшего в трубку.

Решение. Вес спирта $P = \rho_c h \frac{\pi d^2}{4} g$, где ρ_c — плотность спирта. Высоту поднятия h можно определить так:

$$h = \frac{2\alpha}{\frac{1}{2} d\rho_c g} = \frac{4\alpha}{dg\rho_c}; \text{ тогда } P = \rho_c g \frac{4\alpha}{d\rho_c g} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \pi d\alpha.$$

Подставляя числовые значения, получим: $P = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 10^4\ \text{м} \times$ $\times\ 23 \cdot 10^{-3}\ \text{н/м} \approx 36 \cdot 10^{-6}$ *н*.

Задачи

376. Какую силу надо приложить к горизонтальному алюминиевому кольцу высотой $h = 10$ *мм*, внутренним диаметром $d_1 = 50$ *мм* и внешним диаметром $d_2 = 52$ *мм*, чтобы оторвать его от поверхности воды? Какую часть от найденной силы составляют силы поверхностного натяжения?

377. Проволочная прямоугольная рамка с одной подвижной стороной длиной l, затянута мыльной пленкой (рис. 61). Какую силу F надо приложить к подвижной стороне, чтобы она была в равновесии? Какая работа будет выполнена, если сторона рамки переместится на $h = 2$ *см*? Длина подвижной стороны 6 *см*, коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки $\alpha = 0{,}041$ *н/м*.

378. Чему равен коэффициент поверхностного натяжения воды, если с помощью пипетки, имеющей кончик диаметром 0,4 *мм*, можно дозировать воду с точностью до 0,01 *г*?

379. Определить внутренний диаметр капиллярной трубки, если спирт в ней поднялся на высоту 11,5 *см*.

380. При определении коэффициента поверхностного натяжения бензола методом отрыва капель 570 капель заняли объем 6 $см^3$. В момент отрыва капель диаметр шейки капли был равен 1 *мм*. Определить коэффициент поверхностного натяжения бензола.

381. При плавлении вертикально подвешенной свинцовой проволоки диаметром 1 *мм* образовалось 20 капель свинца. На сколько укоротилась проволока? Коэффициент поверхностного натяжения жидкого свинца 0,47 *н/м*.

382. Во время первого группового полета А. Николаева и П. Поповича космонавт-4 наблюдал, как воздух в бутылке с водой собирался внутри воды в виде шара. Чем объяснить это явление?

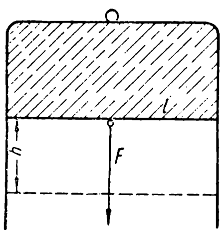


Рис. 61.

383. Вода поднимается в капиллярной трубке на высоту 62 *мм*, сероуглерод — на 21 *мм*. Определить коэффициент поверхностного натяжения сероуглерода, если его плотность равна 1260 $кг/м^3$. Определить также диаметр капиллярной трубки.

384. Каким должен быть наибольший диаметр пор в фитиле керосинки, чтобы керосин поднимался от дна керосинки до горелки (высота $h = 10$ *см*)? Считать поры цилиндрическими трубками.

385. Сообщающиеся капиллярные трубки разного диаметра заполнены водой. Как изменится разность уровней воды в трубках при нагревании?

386. Капля ртути массой 1 *г* разбивается на 100 одинаковых капель. Определить, какую при этом надо совершить работу против сил поверхностного натяжения.

387. Вертикальный проволочный каркас, три стороны которого образуют букву П, а четвертая горизонтальная может скользить по боковым вертикальным сторонам, погружается в смешанную с глицерином мыльную воду, а затем вытягивается из нее. Образовавшаяся мыльная пленка, стремясь сократиться, поднимает нижнюю проволочку в том случае, если ее вес и вес подвешенного к ней грузика не превышает $1{,}1 \cdot 10^{-2}$ *н*. Определить коэффициент поверхностного натяжения пленки. Длина нижней проволочки 75 *мм*.

388. В жидкость, хорошо смачивающую стекло, вертикально опущены две стеклянные трубки — одна с диаметром отверстия $d_1 = 1$ *мм*, а вторая с $d_2 = 1{,}5$ *мм*. Разность поднятия уровней жидкости в трубках $h = 5$ *мм*. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости, если ее плотность $\rho = 800$ $кг/м^3$.

389. Канал в капиллярной трубке имеет коническую форму. Диаметры его $d_1 = 1$ *мм* и $d_2 = 2$ *мм*. Длина трубки 10 *см*. На какую высоту поднимается вода в трубке, если ее опустить на небольшую глубину в воду: а) широким концом? б) узким концом?

390. Вода в стакане замерзает при 0° С. Если ту же воду распылить на маленькие капельки, то ее можно переохладить до — 40°. Например, капли воды, из которых состоят облака, обычно начинают замерзать при температуре ниже — 17° С. Как объяснить это явление?

§ 6. СВОЙСТВА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Разрушающая сила

$$F = \sigma_p S,$$

где σ_p — разрушающее напряжение, S — площадь сечения.

Относительное удлинение или сжатие

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E},$$

где σ — напряжение, E — модуль упругости (модуль Юнга).

Задача 1. Стальная балка зажата между двух стен при температуре 10° С. С какой силой концы балки будут давить на стены при температуре 35° С? Площадь поперечного сечения балки $S = 50$ *см*^{2}.

Решение. Сила F, с которой балка давит на стенку, $F = \sigma S$, где σ — напряжение, развиваемое в балке при ее деформации, вызванной изменением температуры. Величина упругого напряжения в балке по закону Гука $\sigma = E\frac{\Delta l}{l}$, где E — модуль упругости. Однако

$$\frac{\Delta l}{l} \approx \alpha \Delta t^\circ; \quad \text{тогда} \quad F \approx E\alpha\Delta t^\circ \cdot S.$$

Подставляя числовые значения, получим: $F = 19{,}6 \cdot 10^{10}$ *н/м*$^2 \cdot 12 \cdot 10^{-6}$*град*$^{-1} \times 25 \cdot 5 \cdot 10^{-3}$ *м*$^2 = 2{,}94 \cdot 10^5$ *н*.

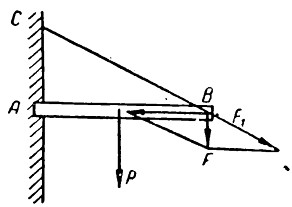


Рис. 62.

Следует заметить, что сила, с которой балка давит на стену, не зависит от длины балки, так как эта сила определяется относительным удлинением, которое согласно формуле зависит только от коэффициента линейного удлинения α и приращения температуры Δt°.

Задача 2. Конец балки весом $9{,}8 \cdot 10^3$ *н* поддерживается железной тягой ВС (рис. 62). Длина балки 4 *м*. Определить, какого сечения надо взять тягу BC, если допустимое напряжение равно $9{,}8 \cdot 10^7$ *н/м*^{2} и расстояние $AC = 3$ *м*.

Решение. На систему балка — тяга действует вес балки P, приложенный в ее центре тяжести. Очевидно, можно считать, что тягу BC растягивает приложенная в точке B и направленная вертикально вниз сила $F = \frac{1}{2}P$. Эта же сила сжимает балку. Чтобы определить величину силы, растягивающей тягу BC, разложим силу F на две составляющие в направлениях CB и BA. Рассматривая подобные треугольники, можно записать:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{BC}{AC}, \quad \text{откуда} \quad F_1 = \frac{1}{2}P\frac{BC}{AC} \approx 8{,}2 \cdot 10^3 \text{ н}.$$

Однако $F_1 = \sigma_д S$, где $\sigma_д$ — допустимое напряжение. Отсюда $S = \frac{F_1}{\sigma_д}$. После подстановки числовых значений

$$S = \frac{8{,}2 \cdot 10^3 \text{ н}}{9{,}8 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2} \approx 83{,}7 \text{ мм}^2.$$

Задачи

391. Железный стержень длиной $l = 1{,}5$ *м* при нагрузке $P = 5000$ *н* не должен удлиняться более, чем на 0,3 *мм*. Какого сечения надо взять стержень?

392. Железный стержень должен нести груз 50 000 *н*. Предел упругости железа $1{,}8 \cdot 10^8$ *н/м²*. Определить сечение стержня, при котором он не давал бы остаточной деформации. На сколько при этом сечении удлиняется стержень (относительно)?

393. Металлический стержень нагрели от 0 до 5° С. При этом его размеры увеличились на некоторую величину. Какую нагрузку надо приложить к стержню, чтобы он при температуре 5° С имел начальную длину, если площадь его поперечного сечения $S = 1{,}5$ *см²*; $E = 10^{11}$ *н/м²*; $\alpha = 1{,}65 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$?

394. Можно ли использовать кабель из тонкой медной проволоки в свинцовой броне для телефонной связи с привязным аэростатом, находящимся на высоте 300 *м*? Предел прочности свинца $2 \cdot 10^7$ *н/м²*.

395. Для измерения глубины моря с парохода опустили гирю на стальном тросе. Пренебрегая весом гири по сравнению с весом троса, найти, какую наибольшую глубину можно измерить таким способом. Плотность морской воды принять равной 1000 *кг/м³*.

396. Стальной канат, выдерживающий вес неподвижной кабины лифта, имеет диаметр 9 *мм*. Какого диаметра должен быть канат, если кабина лифта при внезапной остановке может иметь ускорения до 8 *g*?

397. Рассчитать диаметр железного стержня крюка подъемного крана на 80 000 *н*, если надо обеспечить шестикратный запас прочности. Разрушающее напряжение $\sigma_р = 6 \cdot 10^8$ *н/м²*.

398. Какова наибольшая длина свинцовой проволоки, при которой подвешенная за один конец проволока не оборвется от собственного веса?

399. В лаборатории удается вырастить монокристалл меди. Его пластичность оказывается намного больше пластичности поликристаллической меди. Чем это можно объяснить?

400. Брусок сечением $S = 4$ *см²* под нагрузкой 10 000 *н* удлиняется на 0,025% своей начальной длины. Определить модуль Юнга для материала бруска. Считать, что удлинение бруска происходит в пределах упругой деформации.

401. Из скольких стальных проволок диаметром 2 *мм* должен быть трос, рассчитанный на равномерное поднятие груза $P = 3{,}14 \cdot 10^4$ *н*, если запас прочности $n = 3{,}4$, а предел прочности стали $\sigma = 6{,}8 \times \times 10^4$ *н/м²*?

402. Из резинового шнура длиной 42 *см* и радиусом 3 *мм* сделана рогатка. Мальчик, стреляя из рогатки, растянул резиновый шнур на 20 *см*. Найти, чему равен модуль Юнга для этой резины, если известно, что камень массой 20 *г*, пущенный из рогатки, полетел со скоростью 20 *м/сек*. Изменением сечения шнура при растяжении пренебречь.

§ 7. РАБОТА ГАЗА И ПАРА. ТЕПЛОВЫЕ ДВИГАТЕЛИ

Работа газа при изобарическом расширении

$$A = p\,(V_2 - V_1),$$

где p — давление газа; $(V_2 - V_1)$ — изменение объема газа.

Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — количество теплоты, полученной рабочим телом от нагревателя; Q_2 — количество теплоты, отданное холодильнику.

Коэффициент полезного действия идеальной машины, работающей по циклу Карно,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя, T_2 — температура холодильника.

Задача 1. В цилиндре, закрытом невесомым подвижным поршнем, находится 1 $м^3$ воздуха при нормальном давлении. Какую работу совершит воздух при нагревании его на 1° С?

Решение. Находящийся в цилиндре воздух при нагревании расширяется и выполняет работу по преодолению атмосферного давления: $A = p\Delta V$, где ΔV — изменение объема воздуха при нагревании на ΔT. Это изменение объема можно определить по закону Гей-Люссака (поскольку процесс изобарический):

$$\Delta V = V - V_0 = V_0 \frac{T_1}{T_0} - V_0 = V_0 \frac{\Delta T}{T_0}, \text{ тогда } A = pV_0 \frac{\Delta T}{T_0} \approx 370 \text{ дж.}$$

Задача 2. Четырехтактный бензиновый двигатель с 10 цилиндрами работает при $n = 960$ *об/мин*. Диаметр поршня $d = 400$ *мм*; ход поршня $l = 120$ *мм*. Механический коэффициент полезного действия двигателя $\eta_м = 80\%$. Найти эффективную мощность, если среднее индикаторное давление $p_и = 5 \cdot 10^5$ *н/м²*.

Решение. Для определения эффективной мощности вычислим работу расширения газов за 1 *сек*:

$$A = p_и (V_2 - V_1) \frac{n}{2} k\eta_м^*,$$

где k — число цилиндров. Изменение объема

$$V_2 - V_1 = l \frac{\pi d^2}{4}; \text{ тогда } N_э = p_и l \frac{\pi d^2}{8} nk\eta_м \approx 482 \text{ квт.}$$

Задачи

403. В цилиндре находится 2 *кг* воздуха при 20° С под давлением 10^6 *н/м²*. Какая работа выполняется по расширению воздуха при его изобарном нагревании до 128° С?

404. В цилиндр заключено 1,6 *кг* кислорода при температуре 17° С и давлении $4{,}2 \cdot 10^5$ *н/м²*. До какой температуры надо изобарически нагреть кислород, чтобы работа по расширению была 35 *кдж*?

405. Коэффициент полезного действия некоторой тепловой машины составляет 60% от коэффициента полезного действия идеальной машины, работающей по циклу Карно. Температура нагревателей и холо-

---

* За два оборота совершается один рабочий ход, поэтому берем $\frac{n}{2}$.

дильников этих машин одинакова. Пар поступает в машину при температуре 200° С, а температура конденсатора машины 60° С. Мощность машины 314 *квт*. Сколько угля расходует машина за 1 *ч* работы? Теплотворная способность угля $3{,}14 \cdot 10^7$ *дж/кг*.

406. В котле паровой машины температура $\overset{\circ}{t_1} = 150°$ С. Температура холодильника $\overset{\circ}{t_2} = 10°$ С. Какую теоретически максимальную работу может выполнить машина, если в топке, коэффициент полезного действия которой 80%, сожжено 200 *кг* угля с теплотворной способностью $3{,}1 \cdot 10^7$ *дж/кг*?

407. Температура пара, поступающего из котла в паровую машину, $\overset{\circ}{t_1} = 227°$ С, температура в конденсаторе $\overset{\circ}{t_2} = 27°$ С. Какую теоретически максимальную работу можно получить, израсходовав количество теплоты $Q = 4190$ *дж*?

408. В цилиндре под поршнем находится газ, объем которого $V_1 = 200$ *см*³, а температура $\overset{\circ}{t_1} = 50°$ С. Вес поршня $Q = 6$*н*, площадь $S = 50$ *см*². Определить работу, выполняемую при поднятии поршня вследствие нагревания газа до $\overset{\circ}{t_2} = 150°$ С. Внешнее давление атмосферы $p = 9{,}57 \cdot 10^4$ *н/м*². Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь.

409. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80% тепла, получаемого от нагревателя, передается холодильнику, температура которого 0° С. Определить температуру нагревателя и коэффициент полезного действия машины.

410. Машина, работающая по циклу Карно, получает теплоту от нагревателя при температуре 200° С. Холодильник имеет температуру 100° С. За некоторое время машина получила от нагревателя 10^4 *дж* энергии. Определить выполненную работу, переданное холодильнику количество теплоты и коэффициент полезного действия машины.

411. Сколько оборотов в минуту совершает вал паровой машины при ходе поршня 50 *см* и площади поршня 2000 *см*², если среднее давление пара составляет $8{,}82 \cdot 10^5$ *н/м*², а мощность машины 170 *квт*?

412. Среднее давление в цилиндре паровой машины двойного действия составляет $2 \cdot 10^5$ *н/м*². Определить мощность машины, если диаметр поршня 50 *см*, его ход 1 *м*, механический коэффициент полезного действия машины 80%, скорость вращения вала 150 *об/мин*.

413. Каково среднее давление газа во время рабочего хода в цилиндре двигателя автомобиля «Москвич», если он при $n = 3600$ *об/мин* развивает мощность на валу 17 *квт*? Диаметр цилиндра 67,5 *мм*, ход поршня 75 *мм*, число цилиндров 4, к. п. д. двигателя 27%.

414. Авиационный четырехтактный 18-цилиндровый бензиновый двигатель делает 2400 *об/мин*. Определить ход поршня в цилиндре, если его диаметр равен 14 *см*, механический коэффициент полезного действия двигателя 74,5%, среднее давление в цилиндре $2{,}2 \cdot 10^6$ *н/м*², эффективная мощность двигателя 1582,4 *квт*.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

§ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Сила взаимодействия F между точечными зарядами q_1 и q_2, находящимися на расстоянии r в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε,

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м*.

Напряженность поля $E = \dfrac{F}{q}$.

Напряженность поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда,

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

Напряженность электрического поля от нескольких зарядов находится по правилу геометрического сложения напряженностей, создаваемых в данной точке пространства каждым из заряженных тел.

Работа перемещения заряда q в электрическом поле из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ — разность потенциалов (напряжение).

Заряд конденсатора емкостью C при напряжении U

$$q = CU.$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S — площадь одной из пластин конденсатора; d— расстояние между пластинами.

Емкость уединенного шара радиусом r

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r.$$

Емкость системы конденсаторов при параллельном соединении конденсаторов $C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$; при последовательном соединении $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3} + \ldots$.

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

Задача 1. Два шарика массой по 0,2 *г* подвешены на тонких шелковых нитях длиной 0,5 *м* каждая так, что их поверхности касаются друг друга. После того как шарики зарядили одинаковыми по величине электрическими зарядами, они оттолкнулись друг от друга и разошлись на расстояние $r = 5$ *см* между их центрами. Определить величину заряда каждого шарика. Для воздуха взять $\varepsilon = 1$.

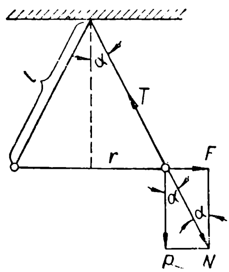


Рис. 63.

Решение. Когда шарики разошлись, на каждый из них действуют две силы: сила веса $P = mg$ и кулоновская сила отталкивания F (рис. 63). Равнодействующая этих двух сил N уравновешивается силой натяжения нити T. Учитывая, что угол α мал, можно записать: $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ или $\frac{F}{P} = \frac{r}{2l}$. Отсюда определим кулоновскую силу отталкивания шариков

$$F = P\frac{r}{2l} = \frac{mgr}{2l} = 9{,}8 \cdot 10^{-5}\ н.$$

По закону Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

откуда $q = 2r\sqrt{\pi F \varepsilon_0} = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}\ м \times$

$$\times \sqrt{3{,}14 \cdot 9{,}8 \cdot 10^{-5}\ н \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ ф/м} \approx 5{,}2 \cdot 10^{-9}\ k.$$

Задача 2. В пространство между пластинами плоского конденсатора влетает электрон со скоростью $3 \cdot 10^7$ *м/сек*. Вектор скорости электрона параллелен пластинам конденсатора. Длина пластин конденсатора 4 *см*, расстояние между пластинами 1 *см*. На конденсатор наложена постоянная разность потенциалов 200 *в*. Определить, на сколько сместится электрон при выходе из пространства между пластинами от прямой, вдоль которой он двигался бы в незаряженном конденсаторе. Смещения электрона под действием силы земного тяготения не учитывать.

Решение. Сила электрического поля в промежутке между пластинами конденсатора действует на электрон в вертикальном направлении и поэтому не может изменить движения электрона в горизонтальном направлении вдоль пластин, следовательно, в этом направлении он будет двигаться равномерно со скоростью v, с которой он влетает в конденсатор. Отсюда определяем время пролета электрона через конденсатор $t = \frac{L}{v}$, где L — длина пластин конденсатора.

В вертикальном направлении на электрон действует сила $F = eE$, где e — заряд электрона, $E = \frac{U}{d}$ — напряженность поля в конденсаторе, d — расстояние между пластинами.

Сила F сообщает электрону ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{e}{m} E = \frac{eU}{md}.$$

Поскольку в вертикальном направлении движение электрона будет равноускоренным (без начальной скорости), то за время t в этом направлении будет пройден путь $s = \frac{at^2}{2}$. После подстановки значений a и t получим

$$s = \frac{e}{2m} \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{L^2}{v^2};$$

$$s = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ k \cdot 200\ в \cdot 0{,}4^2\ м^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ кг \cdot 0{,}01\ м \cdot 9 \cdot 10^{14}\ м^2/сек^2} \approx 0{,}003\ м = 0{,}3\ см.$$

Задача 3. Для сравнения емкостей двух конденсаторов C_1 и C_2 их зарядили соответственно до напряжений $U_1 = 300\ в$ и $U_2 = 100\ в$, после чего соединили параллельно. При этом разность потенциалов между обкладками конденсаторов оказалась равной 250 *в*. Найти отношение емкостей $\frac{C_1}{C_2}$.

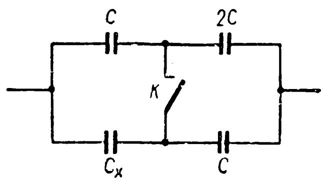


Рис. 64.

Решение. Заряды, сообщенные конденсаторам при зарядке, соответственно равны $q_1 = C_1U_1$ и $q_2 = C_2U_2$. При соединении конденсаторов параллельно общий заряд остается неизменным, а общая емкость будет равна сумме емкостей, т. е. $q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\,U$. Подставив значения q_1 и q_2, получим

$$C_1U_1 + C_2U_2 = (C_1 + C_2)\,U, \text{ откуда } \frac{C_1}{C_2} = \frac{U - U_2}{U_1 - U} = 3.$$

Задача 4. В схеме (рис. 64) емкость батареи конденсаторов не изменяется при замыкании ключа K. Определить величину емкости C_x.

Решение. При разомкнутом ключе емкость батареи конденсаторов равна $\frac{2}{3}C + \frac{C_x C}{C_x + C}$, а при замкнутом ключе $\frac{3C\,(C + C_x)}{3C + C + C_x}$.

Поскольку по условию задачи емкость батареи конденсаторов не изменяется при замыкании ключа K, то можно приравнять полученные выражения:

$$\frac{2}{3}C + \frac{C_x C}{C_x + C} = \frac{3C\,(C + C_x)}{4C + C_x}, \text{ откуда } 4C_x^2 - 4CC_x + C^2 = 0.$$

Решив это уравнение, получим $C_x = \frac{1}{2}C$.

Задача 5. В пространстве между пластинами плоского конденсатора, присоединенного к полюсам батареи на 360 *в*, находится эбонит ($\varepsilon = 2{,}7$); расстояние между пластинами конденсатора 5,4 *см*. Затем эбонитовую пластинку вынимают. Как нужно изменить расстояние между пластинками конденсатора, чтобы энергия конденсатора осталась без изменения? Рассмотреть два случая: 1) если пластины остаются присоединенными к батарее; 2) если пластины отключены от батареи.

Решение. В первом случае разность потенциалов между обкладками остается постоянной и равна $U = 360$ *в*. Емкость же конденсатора меняется от $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ до $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, а энергия изменяется от $W_1 = \frac{CU^2}{2}$ до $W_2 = \frac{C_0 U^2}{2}$. Так как $C_0 < C$, то энергия конденсатора убывает. Чтобы сохранить ее неизменной, нужно увеличить емкость, т. е сдвинуть обкладки на величину x, которую находим из условия $C = C_0'$:

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - x}, \text{ откуда } x = \frac{d(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = 3{,}4 \text{ см}.$$

Если пластины отключены от батареи, то неизменным остается заряд на обкладках конденсатора $q = CU = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} U$. Энергия конденсатора меняется от $W_1 = \frac{q^2}{2C}$ до $W_2 = \frac{q^2}{2C_0}$, т. е. увеличивается, так как $C > C_0$. Чтобы сохранить ее неизменной, нужно увеличить емкость конденсатора, т. е. сдвинуть пластины на величину x; тогда $C = C_0'$ или

$$\frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - x}; \; x = 3{,}4 \text{ см}.$$

Задачи

415. Два одинаковых маленьких шарика массой m каждый подвешены на шелковых нитях длиной l. Нити закреплены в одной точке, и шарики заряжены одинаковыми зарядами. При этом они разошлись на угол α. Определить величины зарядов шариков.

416. Два заряженных шарика одинакового радиуса и веса, подвешенные на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин. Какой должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же?

417. На двух шаровых пылинках находится по одному лишнему электрону. Сила электростатического отталкивания пылинок уравновешивает силу их взаимного тяготения. Объем одной пылинки в 4 раза больше объема другой пылинки, плотность материала пылинок $\rho = 2700$ *кг/м*^{3}. Определить радиусы пылинок.

418. Два одинаковых маленьких проводящих шарика несут заряды q_1 и q_2 одного знака и находятся на расстоянии r друг от друга. Шарики были приведены в соприкосновение и вновь удалены на прежнее расстояние. Доказать, что сила взаимодействия между зарядами во втором случае больше, чем в первом.

419. Три проводящих шарика с массами $m = 0{,}2$ *г* подвешены на нитях одинаковой длины $l = 20$ *см* к одному крюку. Когда шарикам сообщили одинаковые заряды, они разошлись так, что нити образуют между собой углы 60°, а с вертикалью каждая нить составляет угол

$\alpha = 30°$. Определить величины зарядов на шариках. Массой нитей пренебречь.

✓**420.** По оси металлической трубы с сужением на участке AB (рис. 65) движется с постоянной скоростью заряженная частица. Изменится ли скорость частицы при прохождении через сужение?

✓**421.** В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые одноименные заряды q. Какой заряд q' противоположного знака надо поместить в центре квадрата, чтобы действующая на любой из зарядов сила равнялась нулю?

422. Медный шар диаметром 1 *см* помещен в масло. Плотность масла $\rho = 800$ *кг/ м*^{3}, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 5$. Чему равен заряд шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле? Электрическое поле направлено вертикально вверх и его напряженность $E = 4 \cdot 10^6$ *в/м*.

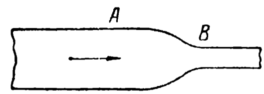


Рис. 65.

✓**423.** В вершинах равностороннего треугольника расположены точечные заряды по 10^{-8} *k* каждый. Длина стороны треугольника $a = 10$ *см*. Определить напряженность электрического поля в центре треугольника и в точке, лежащей на середине стороны треугольника. Окружающей средой является воздух.

424. На каплях ртути радиусом $r = 0,1$ *см* находятся одинаковые заряды $q = \frac{2}{3} \cdot 10^{-13}$ *k*. Десять таких капель сливаются в одну большую. Какой будет потенциал этой капли?

425. Тысяча одинаковых, одинаково наэлектризованных дождевых капель сливаются в одну, причем заряды всех капель сохраняются. Как велика будет энергия заряда большой капли по сравнению с энергией маленьких капель?

426. В каждой вершине квадрата со стороной a находятся одинаковые точечные заряды q. Найдите напряженность и потенциал электрического поля в центре квадрата.

427. Два шара, один диаметром 10 *см* и зарядом $+\frac{2}{3} \cdot 10^{-8}$ *k* и второй диаметром 30 *см* и зарядом $+10^{-8}$ *k*, соединяются проводником. Какой заряд и с какого шара перемещается на второй шар? До какого потенциала будут заряжены шары после перемещения зарядов?

428. Маленький металлический шарик, заряженный до потенциала $+1$ *в*, подносят к внутренней части металлической сферы, заряженной до потенциала $+1000$ *в*, и касаются им внутренней поверхности сферы. Заряд переходит с шарика на сферическую поверхность. Как объяснить кажущееся противоречие? Ведь заряд должен переходить с проводника с высшим потенциалом на проводник с более низким потенциалом.

429. Металлическому шару радиусом $r = 20$ *см* сообщили заряд $q = 2 \cdot 10^{-7}$ *k*, затем к нему присоединили с помощью тонкой проволочки незаряженный шар радиусом $R = 30$ *см*. Как распределится заряд между ними? Электроемкость проволочки не учитывать.

430. Шар диаметром 20 *см* зарядили до потенциала 3000 *в*. Какую работу надо выполнить, чтобы заряд $\frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ *k* переместить с точки, отстоящей от поверхности шара на 55 *см*, в точку, отстоящую от нее на 15 *см*?

431. Два заряда $q_1 = 4 \cdot 10^{-9}$ *k* и $q_2 = 6 \cdot 10^{-9}$ *k* находятся на расстоянии 80 *см* друг от друга. Какую работу нужно выполнить, чтобы сблизить их до расстояния 20 *см*? Окружающей средой является воздух.

432. Маятник с периодом $T = 1$ *сек* представляет собой шарик массой $m = 16$ *г*, подвешенный на нитке с диэлектрика. Шарик заряжают отрицательным зарядом и помещают в электрическое поле, направленное снизу вверх. Период колебания маятника $T_1 = 0{,}8$ *сек*. Вычислить силу электрического действия поля на шарик.

433. Два металлических шара имеют произвольные заряды. Показать, что после соединения шаров тонкой металлической проволокой плотности зарядов на шарах будут обратно пропорциональны их радиусам.

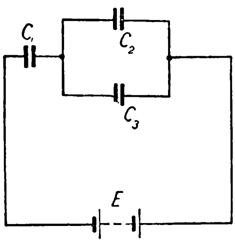


Рис. 66.

434. Металлический шар радиусом $R = 2$ *см* подвесили на диэлектрической нити и сообщили ему заряд $q = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ *k*. Затем на нить нанизали другой шар радиусом $r = 1$ *см* и массой $m = 0{,}1$ *г*. На какую высоту *h* поднимется верхний шар после соприкосновения с нижним шаром? Электростатическую индукцию не учитывать.

435. Определить число электронов на заряженной пылинке, вес которой $5 \cdot 10^{-11}$ *н*, если она уравновешивается в поле плоского конденсатора, разность потенциалов между пластинами которого 3000 *в*, а расстояние между пластинами 2 *см*.

436. Два металлических шара радиусом *R* заряжены одинаковыми по величине, но противоположными по знаку зарядами $+q$ и $-q$. Какова емкость этой системы, если расстояние между шарами значительно больше радиуса?

437. Даны три конденсатора с емкостями $C_1 = 1$ *мкф*, $C_2 = 2$ *мкф* и $C_3 = 3$ *мкф*, соединенных, как показано на рис. 66, и подключенных к источнику напряжения с э. д. с. $E = 12$ *в*. Определить заряды на каждом из конденсаторов.

438. Площадь каждой пластины плоского воздушного конденсатора 0,1 $м^2$, заряд $q = 10^{-6}$ *k*. Пластины расположены вертикально. К положительной пластине на нити подвешен шарик массой 1 *г*, имеющий заряд 10^{-9} *k*. Определить угол, который составляет нить с вертикалью.

439. Плоский конденсатор изготовляют из листов тонкого станиоля, переложенных слюдой. Сколько листов станиоля надо взять, чтобы получить емкость 1 *мкф*, если площадь листов 60 $см^2$, а толщина слюдяных прокладок 0,1 *мм*?

440. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинами $d = 4$ *мм* погружается до половины в керосин. На сколько нужно раздвинуть пластины конденсатора, чтобы его емкость осталась неизменной?

441. Точечный заряд $q = 10^{-8}k$ находится на расстоянии $a_1 = 0{,}5$ *м* от поверхности шара радиусом 5 *см*, заряженного до потенциала $\varphi = 3000$ *в*. Определить работу, которую надо выполнить, чтобы уменьшить расстояние между зарядом и шаром на 30 *см*. Окружающая среда — воздух.

442. Прессшпан пробивается при напряженности поля $E = 1{,}8 \times 10^6$ *в/м*. Два плоских конденсатора с емкостями $C_1 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-9}$ *ф* и $C_2 = \frac{5}{3} \cdot 10^{-9}$ *ф* с изолирующим слоем из прессшпана толщиной 2 *мм* соединены последовательно. При каком напряжении будет пробита эта система?

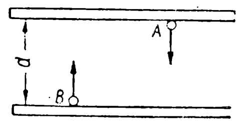


Рис. 67.

443. В вертикальном электрическом поле между пластинами плоского конденсатора находится капля масла, заряженная одним электроном. Напряженность поля подобрали так, что капля находится в состоянии покоя. Определить диаметр капли, если разность потенциалов между пластинами конденсатора 500 *в*, расстояние между пластинами $d = 0{,}5$ *см*, а плотность масла $\rho = 900$ *кг/м*^{3}.

444. От положительной пластины конденсатора под действием электрического поля одновременно начинают двигаться протон и α-частица. На каком расстоянии от отрицательной пластины будет α-частица в тот момент, когда протон достигнет пластины, если расстояние между пластинами 2 *см*? Заряд α -частицы в два раза, а масса в четыре раза больше соответствующих величин, характеризующих протон.

445. Протон и электрон одновременно начинают двигаться из точек *A* и *B* противоположно заряженных пластин (рис. 67). Через какое время они окажутся на одинаковом расстоянии от положительной пластины? Расстояние между пластинами $d = 4$ *см*, а приложенное напряжение 300 *в*.

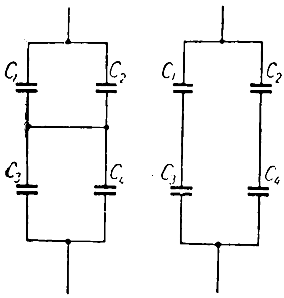


Рис. 68.

446. Какую относительную скорость сближения должны иметь два протона, находящиеся на расстоянии 10 *см*, чтобы они могли приблизиться друг к другу на расстояние 10^{-10} *см*?

447. Каковы емкости батарей конденсаторов, соединенных по схемам, показанным на рис. 68. Показать, что емкости этих батарей одинаковы, если выполняется условие $\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}$.

448. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя параллельными слоями диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость (относительная) этих слоев ε_1 и ε_2, а их толщина d_1 и d_2. Расстояние между пластинами конденсатора $d = d_1 + d_2$. Определить емкость конденсатора.

449. Электрон, имеющий начальную скорость $v_0 = 2 \cdot 10^6$ *м/сек*, движется в однородном поле плоского конденсатора в направлении силовых линий. Какая разность потенциалов на обкладках конденсатора, если электрон теряет всю скорость на пути $s = 3$ *см*, а расстояние между пластинами $d = 5$ *см*? Сколько времени движется электрон до остановки?

450. В плоский конденсатор длиной $s = 5$ *см* влетает электрон под углом $\alpha = 15°$ к пластинам. Электрон обладает энергией $E_к = 1500$ *эв* $= 24 \cdot 10^{-17}$ *дж*. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ *см*. Определить величину напряжения на пластинах конденсатора *U*, при котором электрон при выходе из конденсатора будет двигаться параллельно его пластинам.

451. Доказать, что отклонение заряженных частиц, влетающих в электрическое поле конденсатора параллельно его пластинам, не зависит от массы и заряда частиц, если они были предварительно ускорены электрическим полем с одинаковой разностью потенциалов.

452. Плоский конденсатор с площадью пластин 50 *см*^{2} и расстоянием между пластинами $d = 2$ *мм* заряжается от батареи с напряжением $U = 50$ *в*. Определить величину заряда и напряженность поля в конденсаторе в двух случаях: 1) конденсатор заряжается и отключается от батареи, а затем заливается керосином; 2) конденсатор сначала заливается керосином, а затем заряжается.

453. Плоский воздушный конденсатор присоединен к источнику напряжения и заряжен. После этого расстояние между его обкладками увеличивается вдвое. Как изменяется напряженность поля и разность потенциалов между обкладками, емкость и заряд конденсатора? Рассмотреть два случая: 1) при раздвижении обкладок конденсатор отключен от источника; 2) при раздвижении обкладок конденсатор приключен к источнику.

454. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия при этом равна $2 \cdot 10^{-5}$ *дж*. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить против сил электрического поля, чтобы вынуть диэлектрик, равна $7 \cdot 10^{-5}$ *дж*. Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

455. Электрон вращается по круговой орбите радиусом $r = 10^{-10}$ *м* вокруг ядра с зарядом $+e$. Определить скорость движения электрона по этой орбите.

456. Маленький металлический шарик массой $m = 1$ *г*, которому сообщен заряд $q = \frac{5}{3} \cdot 10^{-7}$ *k*, бросают издали со скоростью $v = 1$ *м/сек* в металлическую сферу, заряженную зарядом $Q = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}$ *k*. При каком наименьшем значении радиуса сферы шарик достигнет ее поверхности?

457. Конденсатор емкостью C изготовлен в виде двух концентрических сфер. Внутренняя сфера эмитирует (испускает) электроны (n электронов в секунду) с начальными скоростями v. Через какое время t после начала эмиссии заряд на конденсаторе перестанет возрастать? Заряд электрона e, масса m.

458. Электрометр, заряженный до потенциала 1200 *в*, соединили тонкой проволокой с конденсатором емкостью $\frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ *ф*, после чего электрометр показал потенциал 400 *в*. Определить емкость электрометра.

459. Узкий пучок электронов в вакууме пролетает через плоский конденсатор параллельно его пластинам и вызывает свечение экрана, расположенного на расстоянии $l = 15$ *см* от края конденсатора. При наложении на конденсатор напряжения 50 *в* светящееся пятно на экране перемещается на $s = 21$ *мм*. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 18$ *мм*, длина конденсатора $b = 6$ *см*. Определить скорость электронов.

§ 2. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Связь между количеством электричества q, проходящим через поперечное сечение проводника за время t, и силой тока I

$$I = \frac{q}{t}.$$

Плотность тока

$$i = \frac{I}{S},$$

где S — площадь поперечного сечения проводника.

Сопротивление проводника длиной l с постоянной площадью поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление вещества.

Зависимость удельного сопротивления от температуры t°

$$\rho_t = \rho_0 (1 + \alpha t^\circ),$$

где α — температурный коэффициент сопротивления.

Закон Ома для участка цепи

$$I = \frac{U}{R};$$

для полной цепи

$$I = \frac{E}{R + r},$$

где U — напряжение на концах проводника, E — э. д. с. источника напряжения, r — его внутреннее сопротивление.

Сопротивление участка цепи при последовательном соединении проводников

$$R = \Sigma R_i;$$

при параллельном соединении проводников

$$\frac{1}{R} = \Sigma \frac{1}{R_i},$$

где Σ — сокращенно обозначает сумму.

Законы Кирхгофа для суммы сил токов, сходящихся в узле,

$$\Sigma I = 0;$$

для суммы падений напряжения и э. д. с. при обводе по контуру

$$\Sigma E = \Sigma IR.$$

Задача 1. Изолированный телеграфный провод с постоянным сопротивлением по всей длине его, имеющий заземленный металлический кожух, соединяет две местности A и B, расстояние между которыми l. Провод поврежден в некоторой точке C, вследствие чего произошел пробой изоляции провода. Как, имея в распоряжении батарею аккумуляторов и микроамперметр, определить расстояние AC? Сопротивление металлического кожуха считать постоянным по всей длине.

Решение. Чтобы определить расстояние $AC = x$, в пункте A включаем последовательно батарею аккумуляторов и микроамперметр между телеграфным проводом и кожухом и определяем силу тока I_A. Это же повторяем в пункте B и находим силу тока I_B. Тогда по закону Ома можно записать два уравнения:

$$I_A = \frac{U}{xR + xr} \quad \text{и} \quad I_B = \frac{U}{(l - x)R + (l - x)r},$$

где U — напряжение аккумуляторов (предполагаем, что $E \approx U$, т. е. пренебрегаем внутренним сопротивлением аккумулятора), R и r — сопротивление единицы длины телеграфного провода и кожуха.

Из этих уравнений $x = \dfrac{I_B}{I_A + I_B}\, l.$

Задача 2. Гальванический элемент замыкают сопротивлением 3,75 *ом* и при этом в цепи устанавливается сила тока 0,5 *а*. Когда внешнее сопротивление цепи увеличилось до 4,75 *ом*, то сила тока уменьшилась до 0,4 *а*. Определить э. д. с. и внутреннее сопротивление элемента.

Решение. Обозначив силу тока и внешнее сопротивление при первом замыкании цепи через I и R, а при втором — через I_1 и R_1, можно по закону Ома записать:

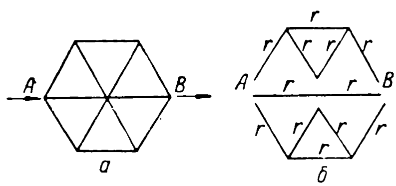


Рис. 69.

$$I = \frac{E}{R + r} \quad \text{и} \quad I_1 = \frac{E}{R_1 + r}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{I}{I_1} = \frac{R_1 + r}{R + r}.$$

Отсюда внутреннее сопротивление $r = \dfrac{I_1 R_1 - IR}{I - I_1} = 0{,}25$ *ом.*

Э. д. с. источника напряжения $E = I(R + r) = 2$ *в*.

Задача 3. Найти сопротивление R разветвления проводников между точками A и B (рис. 69), если каждый из проводников, входящий в разветвление, имеет сопротивление r.

Решение. Данное разветвление можно рассматривать как составленное из трех отдельных ветвей (рис. 69, *б*). Сопротивление центральной части верхней ветви R_1 определяем как сопротивление параллельно соединенных проводников

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} = \frac{3}{2r}, \quad \text{откуда } R_1 = \frac{2}{3} r.$$

Полное сопротивление верхней ветви $2r + \frac{2}{3}r = \frac{8}{3}r$.

Такое же сопротивление имеет и нижняя ветвь. Центральная ветвь имеет сопротивление $2r$.

Все рассмотренные ветви соединены параллельно, поэтому общее сопротивление разветвления

$$\frac{1}{R} = 2\frac{1}{\frac{8}{3}r} + \frac{1}{2r} = \frac{10}{8r}, \text{ откуда } R = 0{,}8r.$$

Задачи

460. Какое количество электричества проходит по проводникам, соединяющим обкладки конденсатора с аккумулятором, при погружении конденсатора в керосин? Площадь пластины конденсатора $S = 150$ *см*^{2}, расстояние между пластинами $d = 5$ *мм*, э. д. с. аккумулятора $E = 9{,}42$ *в*. Диэлектрическая проницаемость (относительная) воздуха $\varepsilon_1 = 1$.

461. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между пластинами 5 *см* и площадью каждой из пластин 50 *см*^{2} подключен к батарее аккумуляторов с э. д. с. 2000 *в*. В зазор между пластинами вводится параллельная им металлическая пластина толщиной $d_1 = 1$ *см*. Какую энергию расходуют при этом аккумуляторы?

462. Плоский конденсатор с пластинами квадратной формы размерами 21×21 *см* и расстоянием между пластинами 2 *мм* присоединен к полюсам источника э. д. с. $E = 750$ *в*. В пространство между пластинами с постоянной скоростью $v = 0{,}08$ *м/сек* вдвигают стеклянную пластинку толщиной 2 *мм*. Какой ток пойдет при этом по цепи? Диэлектрическую проницаемость стекла принять равной $\varepsilon = 7$.

463. Полностью погруженный в нефть плоский конденсатор с площадью пластин 10×15 *см*^{2} и расстоянием между пластинами 2,5 *мм* подключен последовательно с гальванометром к батарее аккумуляторов с э. д. с. 6,28 *в*. Какую силу тока покажет гальванометр во время извлечения конденсатора из нефти? Считать, что одна из длинных сторон пластин конденсатора является горизонтальной, а глубина нефти равна длине этого ребра. Кроме того, считать, что конденсатор вынимали приблизительно равномерно в течение 2 *сек*. Диэлектрическая проницаемость нефти $\varepsilon = 2$.

464. Из вертикально расположенного плоского конденсатора равномерно вытекает керосин, которым был залит конденсатор. При этом в цепи, соединяющей конденсатор с батареей аккумуляторов с $E = 100$ *в*, течет ток $I = 2 \cdot 10^{-11}$ *а*. С какой скоростью понижается уровень керосина? Пластины конденсатора квадратные, площадью $S = 100$ *см*^{2}, расстояние между ними 1 *мм*.

465. Цена деления гальванометра $C = 2 \cdot 10^{-4}$ *а/дел*. Шкала равномерная и имеет $N = 100$ делений. Сопротивление гальванометра $R = 50$ *ом*. Рассчитать добавочные сопротивления, которые надо подключить к гальванометру, чтобы сделать его вольтметром с двумя пределами измерений: 3 и 15 *в*.

466. Цена деления гальванометра $C = 2 \cdot 10^{-4}$ *а/дел*. Шкала равномерная и имеет $N = 150$ делений. Сопротивление гальванометра $R = 72$ *ом*. Рассчитать шунты, которые надо подключить к гальванометру, чтобы сделать его амперметром с двумя пределами измерений: 0,3 и 0,75 *а*.

467. Миллиамперметр сопротивлением 3 *ом* с пределом измерения до 25 *ма* зашунтировали никелиновым проводником длиной 20 *см* и диаметром 2 *мм*. При включении прибора в цепь обнаружилось, что стрелка прибора остановилась на делении 20 *ма*. Какова сила тока в цепи? Каковы новые пределы измерения прибора?

468. Миллиамперметр со шкалой от 0 до 15 *ма* имеет сопротивление 5 *ом*. Как должен быть включен прибор в комбинации с сопротивлением

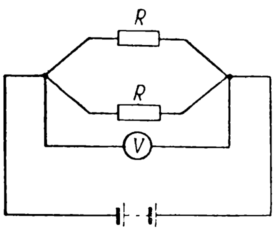


Рис. 70.

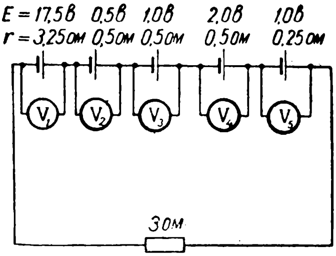


Рис. 71.

(и каким) для измерения: 1) сил токов от 0 до 0,15 *а*; 2) напряжения от 0 до 150 *в*? Какова цена деления прибора в обоих случаях, если шкала имеет 100 делений?

469. Гальванометр с внутренним сопротивлением $r = 100$ *ом*, вся шкала которого рассчитана на силу тока $I_г = 2 \cdot 10^{-5}$ *а*, подключен в качестве измерителя к термопаре с э. д. с. $E = 0{,}02$ *в* и внутренним сопротивлением $r_0 = 1$ *ом*. Каким сопротивлением нужно зашунтировать гальванометр, чтобы стрелка не выходила за пределы шкалы?

470. Для определения сопротивления гальванометра его вводят в цепь последовательно с сопротивлением $R_1 = 350$ *ом* и наблюдают за отклонением стрелки. Затем параллельно с гальванометром вводится шунт с сопротивлением $R_ш = 10$ *ом*. В этом случае, чтобы получить прежнее отклонение стрелки гальванометра, надо вместо R_1 взять меньшее сопротивление $R_2 = 100$ *ом*. Определить сопротивление гальванометра $R_г$, пренебрегая внутренним сопротивлением источника напряжения.

471. Если к амперметру, рассчитанному на максимальную силу тока $I_а = 2 а$, присоединить шунт с сопротивлением $r = 0{,}5$ *ом*, то цена деления шкалы амперметра возрастет в 10 раз. Определить, какое добавочное сопротивление необходимо присоединить к этому же амперметру, чтобы его можно было использовать как вольтметр для измерения напряжений до $U = 220$ *в*.

472. Батарея подключена к внешнему сопротивлению, состоящему из двух параллельно соединенных сопротивлений $R = 4$ *ом* каждое. Вольтметр показывает при этом $U_1 = 6$ *в* (рис. 70). Если одно из сопротивлений выключить, то вольтметр покажет $U_2 = 8$ *в*. Определить э. д. с. и внутреннее сопротивление батареи. Силой тока, проходящего через вольтметр, пренебречь.

473. Определить показания каждого из вольтметров и отметить знаком плюс сторону его более высокого потенциала (рис. 71).

474. В цепь, состоящую из аккумулятора и сопротивления $R = 10$ *ом*, включают вольтметр сначала последовательно, а затем параллельно R. Оба показания вольтметра одинаковые. Сопротивление вольтметра $R_в = 1000$ *ом*. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора.

475. Две одинаковые лампочки подключаются к батарее сначала последовательно, а затем параллельно. При этом оказалось, что в обоих случаях накал лампочек одинаковый. Определить э. д. с. батареи, если

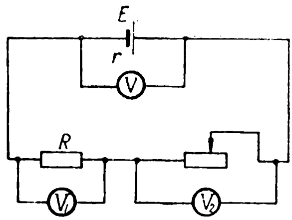


Рис. 72.

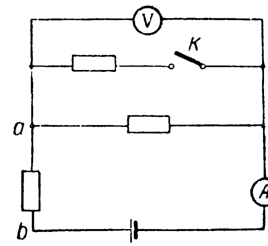


Рис. 73.

сопротивление каждой лампочки 100 *ом*, а сила тока, протекающего в цепи при последовательном включении лампочек, 1 *а*.

476. Как будут изменяться показания вольтметров V_1, V_2 и V при перемещении движка реостата влево (рис. 72)? Сопротивления вольтметров большие.

477. К батарее через переменное сопротивление R подключен вольтметр. Если сопротивление R уменьшить втрое, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если сопротивление R уменьшить до нуля? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

478. Вольтметр, соединенный последовательно с сопротивлением $R = 10\,000$ *ом*, при включении в цепь с напряжением $U = 250$ *в* показывает $U_1 = 50$ *в*, а при соединении с сопротивлением R_x показывает $U_2 = 10$ *в*. Определить внутреннее сопротивление вольтметра r и сопротивление R_x.

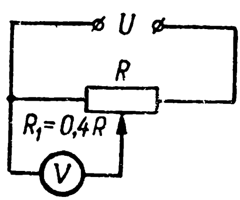


Рис. 74.

479. В схеме (рис. 73) ключ K может быть разомкнут и замкнут. В каком случае приборы покажут бо́льшую силу тока, а в каком — бо́льшее напряжение?

480. Гальванометр сопротивлением $R_г$, зашунтированный сопротивлением $R_ш$ и соединенный последовательно с сопротивлением R, используют как вольтметр. Он дает отклонение стрелки в одно деление на 1 *в*. Как изменить сопротивление R, чтобы гальванометр давал отклонение в одно деление на 10 *в*?

481. К концам некоторого сопротивления R приложена неизменная разность потенциалов $U = 100$ *в*. Вольтметр, включенный параллельно участку R_1 (рис. 74), который имеет сопротивление, составляющее $k = 40\%$ от полного, показывает $U_1 = 18{,}2$ *в*. Найти отношение сил тока, протекающего через вольтметр, и тот участок, параллельно которому он включен.

482. Какой ток проходит через сопротивление 3 R (рис. 75)? Все величины, указанные на схеме, считаются известными.

483. Три одинаковых медных кольца радиусом R соединены между собой так, как показано на рис. 76. Определить сопротивление r электрическому току полученной таким образом фигуры, если внешняя разность потенциалов подведена к точкам A и B. Диаметр проволоки d. Удельное сопротивление меди ρ.

484. Пять одинаковых никелиновых прутьев длиной l соединены между собой в виде звезды (рис. 77). Точками соединения каждый прут делится на три равных части ($AB = BD = DE = \ldots$). Определить сопротивление этой фигуры между точками A и F. Площадь поперечного сечения прута S, удельное сопротивление никелина ρ.

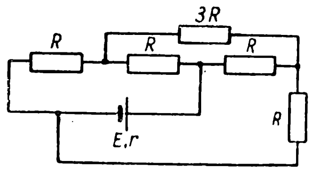


Рис. 75.

485. Определить показание вольтметра в схеме (рис. 78) при замкнутом ключе K, если при разомкнутом ключе он дает показание U_0.

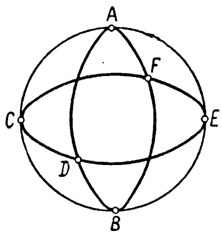


Рис. 76.

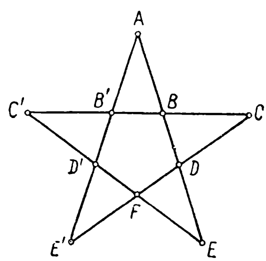


Рис. 77.

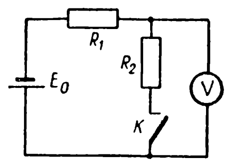


Рис. 78.

Величины э. д. с. E_0 и сопротивлений R_1 и R_2 считать известными. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

486. Из проволоки сопротивлением $R = 100$ *ом* сделано кольцо. Один провод от омметра подключен к одной точке кольца, а второй движется по нему. Начертить график зависимости общего сопротивления кольца от положения второго проводника (не менее, чем по восьми точкам).

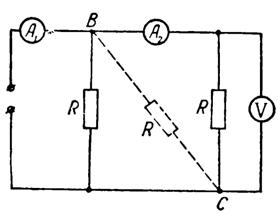


Рис. 79.

487. К источнику постоянного напряжения подключена цепь, состоящая из двух сопротивлений R и R, двух амперметров A_1 и A_2 и вольтметра V (рис. 79). Как изменятся показания всех приборов, если между точками B и C включить еще одно сопротивление также величиной R (на рис. 79 показано штриховой линией)? Сопротивление всех подводящих проводников не учитывать.

488. К потенциометру сопротивлением 4000 *ом* приложена разность потенциалов 110 *в*. Между концом потенциометра и ползунком включен вольтметр сопротивлением 10 000 *ом*. Что покажет вольтметр, если ползунок стоит посередине потенциометра?

489. Два вольтметра, реостат с подвижным контактом и батарея соединены так, как показано на рис. 80. Движок реостата передвигали до тех пор, пока показания вольтметров не сравнялись. При этом дви-

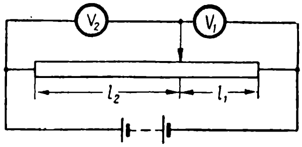


Рис. 80.

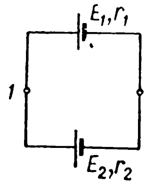


Рис. 81.

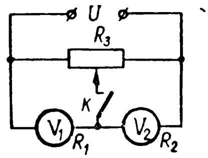


Рис. 82.

жок разделил реостат на части длиной l_1 и l_2. Сопротивление какого из вольтметров больше и во сколько раз, если $\frac{l_1}{l_2} = \frac{2}{3}$?

490. При включении в цепь одного аккумулятора в ней протекал ток силой I. Чтобы увеличить силу тока, к первому аккумулятору подключили второй. Однако как при параллельном, так и при последовательном соединении этих аккумуляторов получался ток меньше I. В каком случае это возможно?

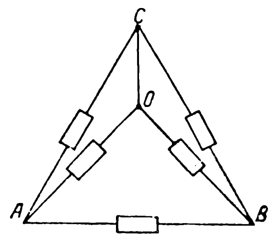


Рис. 83.

491. Два гальванических элемента с э. д. с. $E_1 = 2$ *в* и $E_2 = 1{,}5$ *в* и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}6$ *ом* и $r_2 = 0{,}4$ *ом* соединены параллельно (рис. 81). Определить разность потенциалов между точками *1* и *2*.

492. Два вольтметра с внутренними сопротивлениями $R_1 = 6000$ *ом* и $R_2 = 4000$ *ом* соединены последовательно. Параллельно к ним подключено сопротивление $R_3 = 10\,000$ *ом*. На эту систему подано напряжение $U = 180$ *в* (рис. 82). Что показывают вольтметры при разомкнутом ключе K? Каковы показания вольтметров при замкнутом ключе K и движке, соединенном с серединой сопротивления R_3? Движок перемещают до тех пор, пока оба вольтметра не покажут одинаковое напряжение. На какие части разделит движок сопротивление R_3?

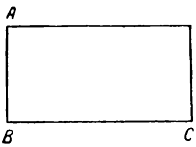


Рис. 84.

493. Определить, в каком случае два различных гальванических элемента, замкнутых последовательно на внешнее сопротивление R, дадут меньший ток, чем один из этих элементов, включенный на то же сопротивление.

494. Определить сопротивление между точками A и B, если сопротивление каждого из проводников, показанных на рис. 83, равно 1 *ом*.

495. При включении однородного проволочного прямоугольного контура (рис. 84) в электрическую цепь в точках A и B его сопротивление составляет R_1, а при включении в точках B и C его сопротивление $R_2 = 1{,}6\ R_1$. Определить отношение сопротивления бо́льшей стороны прямоугольного контура к сопротивлению его меньшей стороны.

496. Найти сопротивление между точками *1* и *2* (рис. 85), если каждое из трех сопротивлений равно 1 *ом*. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

497. Найти общее сопротивление схемы (рис. 86), если $r_1 = r_2 = r_3 = 20$ *ом*, а $r_4 = r_5 = r_6 = r_7 = 10$ *ом*.

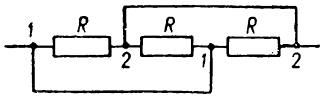


Рис. 85.

498. Доказать, что если n проводников, сопротивления которых выражаются числами, образующими арифметическую прогрессию $n + 1$; $n + 2$; $n + 3$; ...; $2n - 1$; $2n$, соединить параллельно, то, как бы ни было велико количество этих проводников, сопротивление полученного соединения будет меньше, чем 2 *ом*.

499. Два одинаковых каркаса, представляющих собой окружности с диаметрами CE и FD (рис. 87), сделаны из высокоомной проволоки. Оба каркаса в точках E и F касаются хорошо проводящей поверхности (металлической). Что покажет вольтметр, подключенный к точкам C и D, если к точкам A и B подключить источник напряжением 1 *в*? Сопротивление между точками E и F не учитывать.

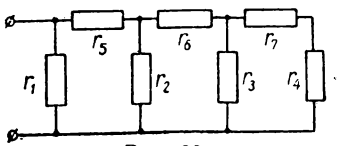


Рис. 86.

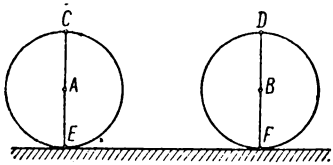


Рис. 87.

500. Определить электрическое сопротивление следующих проволочных сеток: 1) Каркаса в виде квадрата, середины сторон которого соединены между собой и в центре спаяны. Каркас включен в цепь диагональными вершинами. 2) Шестиугольника с диагоналями, выходящими из одной вершины (всего 9 проводников), и включенного диагональными вершинами (одна из вершин — точка, где сходятся диагонали). 3) Каркаса в виде тетраэдра, включенного в цепь двумя вершинами. 4) Шестиугольника с тремя большими диагоналями, спаянными в центре, и включенного в цепь точками, лежащими на середине противоположных сторон. Сопротивление каждого из звеньев r.

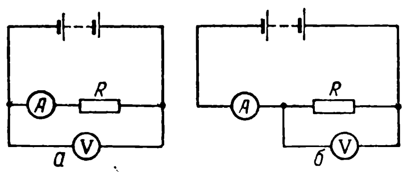


Рис. 88.

501. Как устроить освещение одной лампочкой проходного коридора, чтобы человек, входящий с любого конца коридора, мог включить или выключить лампочку, висящую посередине коридора, независимо от того, в каком положении находится переключатель на другом конце коридора?

502. При включении приборов по схеме рис. 88, *а* амперметр показывает силу тока 1,94 *а*, а вольтметр — напряжение 50 *в*. При включении тех же приборов по схеме рис. 88, *б* амперметр показывает 2,06 *а*, а вольтметр — 49,6 *в*. Определить величину сопротивления R, если напряжение, даваемое батареей, остается постоянным.

503. Величину необходимого напряжения между точками a и b устанавливают, подбирая сопротивление R_1 и контролируя напряжение вольтметром V (рис. 89). Каким должно быть минимальное сопротивление R вольтметра, чтобы при его отключении напряжение между точками a и b изменялось не более, чем на $n = 2\%$? Известно, что $R_1 = 5000$ *ом*, $R_2 = 10\,000$ *ом*. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

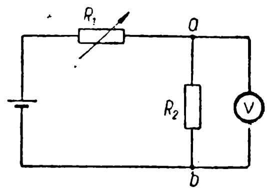


Рис. 89.

504. Для измерения силы тока через сопротивление R_2 в схеме (рис. 90) в разрыв цепи в точке a включили амперметр. При каком максимальном значении сопротивления R_a амперметра его показания отличаются от силы тока, протекающего по R_2 в отсутствии амперметра, не более, чем на $n\%$? Провести вычисления при $r_в = 1$ *ом*, $R_1 = 2$ *ом*, $R_2 = 3$ *ом*, $n = 3$.

505. Определить э. д. с. и внутреннее сопротивление элемента, если при замыкании его на сопротивление $R_1 = 1{,}8$ *ом* в цепи идет ток $I_1 = 0{,}7$ *а*, а при замыкании на сопротивление $R_2 = 2{,}3$ *ом* ток в цепи $I_2 = 0{,}56$ *а*. Чему будет равен ток короткого замыкания?

506. Два аккумулятора с одинаковыми внутренними сопротивлениями $r = 0{,}05$ *ом* и э. д. с. $E_2 = 1{,}8$ *в* и $E_1 = 2$ *в* ошибочно включены параллельно как источник напряжения в цепь, сопротивление которой $R = 2$ *ом*. Определить силу тока во внешней цепи и в каждом из аккумуляторов. Как будут изменяться силы тока при уменьшении сопротивления R до нуля?

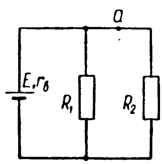


Рис. 90.

507. Под конец зарядки батареи аккумуляторов током $I_1 = 3$ *а* присоединенный к ней вольтметр показывал напряжение $U_1 = 4{,}25$ *в*. В начале разрядки этой же батареи током $I_2 = 4$ *а* тот же вольтметр показывал напряжение $U_2 = 3{,}9$ *в*. Определить э. д. с. и внутреннее сопротивление батареи. Током, проходящим по вольтметру, пренебречь.

508. Генератор постоянного тока с э. д. с. $E_1 = 12$ *в* и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}2$ *ом* заряжает аккумуляторную батарею с э. д. с. $E_2 = 10$ *в* и внутренним сопротивлением $r_2 = 0{,}6$ *ом*. Параллельно батарее включена лампочка сопротивлением $R = 3$ *ом*. Определить силу тока в батарее аккумуляторов и в лампочке.

509. Найти, во сколько раз изменится сила тока, проходящего через платиновую печь, при нагревании печи от 20 до 1200° С, если температурный коэффициент сопротивления платины $\alpha = 0{,}00365$, а напряжение на зажимах печи остается неизменным.

510. Угольный стержень соединен последовательно с железным такой же толщины. При каком соотношении их длин сопротивление такой комбинации не зависит от температуры?

511. Аккумулятор с э. д. с. $E = 6$ *в* замкнут на некоторое сопротивление R. В цепь включают параллельно друг другу два амперметра, которые показывают соответственно $I_1 = 2$ *а* и $I_2 = 3$ *а*. Затем эти амперметры включают в цепь последовательно и они показывают $I_3 = 4$ *а*. Какой ток протекает в цепи, если амперметры не включены в цепь?

512. Величину сопротивления R вычисляют по показаниям вольтметра, включенного параллельно ему, и амперметра, включенного последовательно в цепь с источником напряжения. Какими будут погрешности вычислений, если сопротивление вольтметра $R_0 = 2000$ *ом*, а сопротивление R в первом случае равно 1 *ом*, во втором — 1000 *ом*?

513. Два элемента с э. д. с. $E_1 = 1{,}5$ *в* и $E_2 = 2$ *в* соединены одинаковыми полюсами. Вольтметр, подключенный к клеммам батареи, показал напряжение $U = 1{,}7$ *в*. Определить отношение внутренних сопротивлений элементов.

514. Элемент с э. д. с. $E = 3$ *в* при включении в цепь с внешним сопротивлением R создает на концах этого сопротивления напряжение $U = 1{,}2$ *в*. В цепь включают второй такой же элемент. Определить, как надо включить второй элемент, чтобы напряжение на концах сопротивления R было наибольшим? Чему равно это наибольшее напряжение?

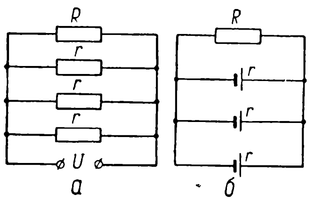


Рис. 91.

515. Определить э. д. с. элемента, если известно, что при увеличении внешнего сопротивления, замыкающего элемент в $n = 3$ раза, напряжение на его зажимах $U = 3$ *в* увеличивается на $k = 20\%$.

516. Батарея имеет э. д. с. $E = 12{,}5$ *в* и внутреннее сопротивление $r = 0{,}2$ *ом*. Какое добавочное сопротивление R надо включить в цепь батареи, чтобы при включении в эту цепь двух сопротивлений $R_1 = 5$ *ом* и $R_2 = 10$ *ом* последовательно и параллельно друг другу напряжение на концах сопротивления R_2 осталось неизменным?

517. Даны две схемы. В одной (рис. 91, *а*) надо подсчитать общее сопротивление участка цепи, на котором падает напряжение U. В другой (рис. 91, *б*), состоящей из трех одинаковых элементов с внутренним сопротивлением r и сопротивления R, надо найти общее сопротивление цепи. В обоих случаях абитуриент написал $\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{3}{r} + \frac{1}{R}$ и $R_{\text{общ}} = \frac{rR}{r+3R}$. Правильно ли решил задачу абитуриент?

518. Имеется n элементов с э. д. с. E и внутренним сопротивлением r. Как надо соединить между собой элементы, чтобы через потребитель с сопротивлением R проходил наибольший ток? Решить задачу, если $n = 24$, $E = 1$ *в*, $r = 2$ *ом*, $R = 3$ *ом*.

519. Имеются две батареи; одна составлена из нескольких одинаковых гальванических элементов, соединенных последовательно, другая — из того же числа таких же элементов, соединенных параллельно. На какие одинаковые сопротивления надо замкнуть каждую из батарей, чтобы токи, которые через них проходят, были равны? Внутреннее сопротивление каждого гальванического элемента батарей r_0. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

520. Надо обеспечить ток $I = 8$ *а* в цепи с сопротивлением $R = 5$ *ом*. Какое наименьшее количество аккумуляторов надо взять и как соединить их в смешанную батарею, если э. д. с. каждого аккумулятора $E = 2$ *в* и внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ *ом*?

§ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ

Задача 1. Сила электрического тока в металлическом проводнике с поперечным сечением $S = 0,5$ *см*^{2} равна $I = 3$ *а*. Определить среднюю скорость направленного движения электронов вдоль проводника, если 1 *см*^{3} металла содержит $n = 4 \cdot 10^{22}$ свободных электронов.

Решение. Выделим участок проводника, длина которого численно равна средней скорости направленного движения электронов. Объем этой части проводника составляет vS. Число свободных электронов в этом объеме nvS, их заряд $q = nvSe$. Все свободные электроны, находящиеся в указанном объеме, за 1 *сек* проходят через данное поперечное сечение проводника. Тогда сила тока в цепи будет

$$I = \frac{q}{t} = nvSe,$$

откуда

$$v = \frac{I}{nSe} = \frac{3a}{4\cdot 10^{28}\cdot 1/\text{м}^3\cdot 0,5\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\ k} \approx 0,94\cdot 10^{-5}\ \text{м/сек}.$$

Задача 2. С целью измерения температуры внутри печи используют никель-нихромовую термопару, дающую э. д. с. $0,5 \cdot 10^{-6}$ *в* на 1° С. Один спай термопары вставляют в печь, второй — в воду при температуре 15° С. Гальванометр с внутренним сопротивлением 2000 *ом*, подключенный последовательно к термопаре, показал ток $25 \cdot 10^{-8}$ *а*. Какова температура печи?

Решение. Разность температур печи и воды составляет (x— —15°), где x — температура в средине печи. Для разности потенциалов между спаем термопары внутри и спаем в воде $U = 0,5 \cdot 10^{-6} (x - 15°)$ *в*. Пренебрегая сопротивлением термопары и подводящих проводов, можно определить U через силу тока $U = IR$. Из этих двух уравнений

$$x = \frac{IR}{0,5\cdot 10^{-6}} + 15° \text{ или } x = 1015°\text{C}.$$

Задачи

521. По медному проводнику сечением 1 *мм*^{2} протекает ток силой $I = 10$ *а*. Определить среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, если считать, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости.

522. Электрический ток в металлических проводниках представляет собой движение свободных электронов, сталкивающихся с ионами (из которых построена кристаллическая решетка металла) и отдающих при этом ионам количество движения, которое они приобрели до соударения. Почему же тогда металлический проводник, по которому идет ток, не испытывает никаких механических воздействий в направлении движения электронов?

523. В цепь гальванометра включена термопара, состоящая из медной и константановой проволок длиной по 1 *м* и диаметром 0,2 *мм*. Чувствительность гальванометра 10^{-6} *а* на одно деление шкалы, его внутреннее сопротивление 50 *ом*. На сколько делений отклонится стрелка гальванометра, если спай термопары перегреть на 50° С по отношению к температуре окружающей среды? Температурный коэффициент изменения термо-э. д. с. (постоянная термопары) $\alpha = 40$ *мкв/град*.

524. Измерительная цепь приемника инфракрасного излучения состоит из термопары, сопротивления и гальванометра. При освещении светом, отраженным от алюминиевого зеркала, гальванометр дает такое же отклонение, как и при освещении прямым светом от того же источника, если в первом случае сопротивление цепи уменьшить на 14 *ом*. Какое сопротивление надо ввести в цепь, чтобы чувствительность схемы уменьшилась вдвое? Коэффициент отражения света для алюминия 84%.

525. Для измерения малых разностей температур применили схему, состоящую из n одинаковых термопар с постоянной α *в/град* и сопротивлением r *ом* каждая. Сила тока через термопары измерялась гальванометром с сопротивлением R *ом*. При каком соотношении между сопротивлением термопар и сопротивлением гальванометра выгоднее включать термопары не все последовательно, а разбить их на две одинаковые группы, включенные параллельно? На сколько делений отклонится стрелка гальванометра в обоих случаях, если $n = 12$, $r = 3{,}5$ *ом*, $\alpha = 120$ *мкв/град*? Сопротивление гальванометра $R = 14{,}7$ *ом*. Чувствительность гальванометра $2 \cdot 10^{-9}$ *а* на одно деление, измеряемая разность температур 10^{-3} *град*.

526. Тонкая металлическая лента свернута в кольцо радиусом R и вращается с угловой скоростью ω относительно оси кольца. При вращении ленты между ее внешней и внутренней поверхностями образуется разность потенциалов. Объяснить механизм возникновения электрического поля и определить его напряженность. Отношение $\frac{e}{m}$ заряда электрона к его массе считать известным.

527. Металлический сплошной цилиндр вращается вокруг своей оси со скоростью $n = 20$ *об/сек*. Определить разность потенциалов между осью и поверхностью цилиндра. Диаметр цилиндра $d = 5$ *см*.

528. Тонкий металлический диск движется поступательно с постоянным ускорением a, направленным перпендикулярно к его поверхности. Определить напряженность электрического поля внутри диска и выяснить причины возникновения поля. Отношение $\frac{e}{m}$ для электрона считать известным.

§ 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Закон Фарадея для массы m вещества, выделяющейся на электроде при прохождении количества электричества q,

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} q,$$

где A — атомная масса вещества;
n — валентность;
F — число Фарадея.

Задача 1. Реакция образования воды из кислорода и водорода происходит в соответствии с уравнением $2H_2 + O_2 = 2H_2O + 5{,}75 \times 10^5$ *дж*. При каком наименьшем напряжении на электродах вольтаметра может начаться электролиз воды?

Р е ш е н и е. Для выделения m *кг* любого вещества во время электролиза при прохождении количества электричества q при напряжении U расходуется энергия $E = Uq$. Определим из закона Фарадея количество электричества q и подставим в формулу

$$E = U \frac{mFn}{A}.$$

Отсюда наименьшее напряжение на электродах вольтаметра должно составлять

$$U = \frac{EA}{mFn}.$$

На разложение 2 *кмоль* воды, а значит, выделение из нее 4 *кг* водорода, надо израсходовать $5{,}75 \cdot 10^8$ *дж* энергии. Таким образом, $m = 4$ *кг*, а $E = 5{,}75 \cdot 10^8$ *дж*. Подставляя числовые значения, получим

$$U = \frac{5{,}75 \cdot 10^8 \ \textit{в} \cdot \textit{а} \cdot \textit{сек} \cdot 1 \ \textit{кг}}{4 \ \textit{кг/кг-атом} \cdot 96{,}5 \cdot 10^6 \ \dfrac{\textit{а} \cdot \textit{сек}}{\textit{кг-экв}}} \approx 1{,}49 \ \textit{в}.$$

Задача 2. Какое количество электроэнергии расходуется на получение 1 *кг* алюминия, если электролиз ведется при напряжении 10 *в*, коэффициент полезного действия всей установки 80%? Атомная масса алюминия 27.

Р е ш е н и е. Электрическая энергия, расходуемая при электролизе на получение 1 *кг* алюминия $E = q \dfrac{U}{\eta}$, где q — количество электричества, при прохождении которого через электролит выделяется 1 *кг* алюминия; U — напряжение, при котором ведут электролиз; η — коэффициент полезного действия установки.

Количество электричества q можно определить из закона Фарадея:

$$m = \frac{A}{n} \cdot \frac{q}{F}, \text{откуда } q = \frac{mnF}{A}.$$

Подставив значение q в предыдущее уравнение, получим

$$E = \frac{mnFU}{\eta A} = 13{,}4 \cdot 10^7 \ \textit{дж} \approx 37{,}2 \ \textit{квт} \cdot \textit{ч}.$$

Задача 3. Найти сопротивление трубки длиной $l = 84$ *см* и площадью поперечного сечения $S = 5$ *мм*^{2}, если она наполнена воздухом так, что в 1 *см*^{3} находятся при равновесии 10^7 пар одновалентных ионов с подвижностью $k_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ *м*^{2}/*в* · *сек* и $k_2 = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ *м*^{2}/*в* · *сек*.

Р е ш е н и е. Сила тока, проходящего по трубке,

$$I = ne(k_1 + k_2) SE,$$

где e — заряд иона; n — число пар ионов в единице объема;

$E = \dfrac{U}{l}$ — напряженность электрического поля. Тогда

$$I = ne(k_1 + k_2) S \frac{U}{l}.$$

Сравнивая это выражение с законом Ома для участка цепи $I = \dfrac{U}{R}$, получим

$$R = \frac{l}{enS(k_1 + k_2)} \approx 3,4 \cdot 10^{14} \text{ ом}.$$

Задачи

529. Выделение вещества на катоде при электролизе осуществляется положительными ионами. Полный ток в электролите состоит из тока положительных ионов I_+ и тока отрицательных ионов I_-, движущихся в противоположных направлениях. Почему же количество вещества, выделяющегося на катоде, рассчитывается по полному току, т. е. по сумме сил токов I_+ и I_-, а не только по силе тока положительных ионов?

530. В растворе медного купороса ($CuSO_4$) анодом служит пластинка из меди, содержащая 12% примесей. При электролизе медь растворяется и в чистом виде выделяется на катоде. Сколько стоит очистка 1 *кг* такой меди, если напряжение на ванне поддерживается 6 *в*, а стоимость 1 *квт · ч* электрической энергии 1 коп.?

531. Электроды помещены в стеклянную трубку, заполненную водным раствором поваренной соли. Под действием сил электрического поля ионы натрия движутся в растворе упорядоченно со скоростью $v_1 = 45 \cdot 10^{-3}$ *см/сек*, ионы хлора — со скоростью $v_2 = 67{,}7 \times \times 10^{-3}$ *см/сек*. Поперечное сечение трубки $S = 0{,}5$ *см*^{2}. Какой силы ток идет через раствор, если 1 *см*^{3} раствора содержит $n = 10^{20}$ пар ионов обоих знаков?

532. Какое количество электричества q проходит через раствор меди за $t = 10$ *сек*, если сила тока за это время равномерно возрастает от нуля до $I = 4a$? Сколько меди при этом выделится? Атомная масса меди $A = 63{,}6$, валентность $n = 2$.

533. Электрохимический эквивалент водорода $k = 0{,}01042$ *мг/к*. Зная, что заряд иона водорода равен $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *k*, определить массу атома водорода.

534. При серебрении пользуются током плотностью $i = 0{,}5$ *а/дм*^{2}. В электрическую цепь с напряжением $U = 120$ *в* включены последовательно $n = 40$ ванн. Поверхность, которую надо покрыть серебром, в каждой ванне 5 *дм*^{2}. Определить расход энергии во всех ваннах за 5 *ч* серебрения и количество серебра, выделяющегося во всех ваннах за это время.

535. Батарея гальванических элементов состоит из $c = 30$ элементов, соединенных в три одинаковые параллельные группы. Какое количество меди m выделится на катоде ванны за $t = 5$ *мин* работы батареи, включенной на нагрузку, сопротивление которой $R = 205$ *ом*? Э.д.с. элемента $E = 0{,}9$ *в*, внутреннее сопротивление $r = 0{,}6$ *ом*. Атомная масса меди $A = 63{,}57$.

536. В настоящее время при работе гальванических ванн широко применяется реверсирование (изменение направления) тока. Какое влияние это оказывает на качество покрытия изделия?

537. Определить отношение заряда иона меди к его массе в растворе медного купороса ($CuSO_4$) в воде.

538. Никелирование металлического изделия с поверхностью $S = = 120$ *см*^{2} продолжалось 5 *ч* при силе тока 0,3 *а*. Валентность никеля $n = = 2$. Определить толщину слоя никеля.

539. В одной электролитической ванне с раствором серной кислоты H_2SO_4 выделилось некоторое количество водорода. Во второй ванне с раствором азотнокислого серебра ($AgNO_3$) выделилось такое же количество серебра. Определить, через какую из ванн прошло большее количество электричества.

540. Две электролитические ванны с растворами азотнокислого серебра и медного купороса соединены последовательно. Сколько меди выделится за время, в течение которого выделилось 0,36 *г* серебра?

541. Через заполненную воздухом газоразрядную трубку протекает ток насыщения 10^{-6} *а*. Какое количество ионов Δn образуется ионизатором за единицу времени в пространстве между электродами?

542. Когда в стенку счетчика Гейгера—Мюллера попадает гамма-квант, то он вызывает электрический разряд в счетчике. За один разряд через счетчик проходит $5 \cdot 10^8$ электронов. Определить силу среднего тока, проходящего через счетчик, если за 5 *мин* он зафиксировал 1500 гамма-квантов.

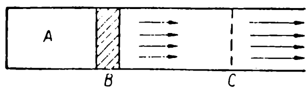


Рис. 92.

543. Схематическое устройство ионного реактивного двигателя показано на рис. 92. Пары цезия из камеры A пропускаются через пористую вольфрамовую перегородку B, в результате чего ионизируются. Образовавшиеся ионы ускоряются электрическим полем на участке BC. Определить реактивную тягу двигателя, если плотность тока ионов цезия i, заряд иона q, масса иона m, площадь поперечного сечения трубы S, а разность потенциалов между перегородкой B и сеткой C равна U.

544. Через двухэлектродную лампу (диод) с плоскими электродами проходит ток I. Напряжение на лампе U. С какой силой действуют на анод лампы ударяющиеся в него электроны, если скорость их вблизи поверхности катода равна нулю? Отношение заряда электрона к его массе равна λ.

545. На пластины плоского конденсатора наложено напряжение, $U = 300$ *в*. Воздушный промежуток между пластинами облучается ультрафиолетовым светом. Гальванометр, включенный в цепь конденсатора показывает $I = 10^{-8}$ *а*, причем насыщения не наблюдается. Определить число пар ионов, находящихся в 1 *см*^{3} воздуха (концентрацию ионов), если площадь каждой пластины $S = 200$ *см*^{2}, а расстояние между ними $d = 4$ *см*. Подвижность положительного иона $k_+ = 1{,}2$ *см*^{2}/*в* · *сек*, отрицательного — $k_- = 1{,}8$ *см*^{2}/*в* · *сек*.

§ 5. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА

Работа, выполняемая электрическими силами на участке цепи, концы которой имеют разность потенциалов U, при силе тока I в течение времени t

$$A = IUt.$$

Мощность тока

$$N = IU.$$

Количество теплоты, выделяющейся на участке цепи с сопротивлением R, по которому течет ток I, за время t

$$Q = I^2Rt.$$

Задача 1. Две спирали из константана и никелина соединены параллельно. Длины проволок спиралей относятся как $l_1 : l_2 = 15 : 14$, площади их сечений относятся как $S_1 : S_2 = 5 : 4$. Спирали опустили в два одинаковых калориметра, содержащих одинаковое количество воды, и после пропускания в течение одинакового времени тока через спирали вода в обоих калориметрах нагрелась на одинаковое число градусов. Вычислить отношение удельных сопротивлений константана и никелина.

Решение. На основе закона Джоуля—Ленца

$$Q_1 = I_1^2 R_1 t \quad \text{и} \quad Q_2 = I_2^2 R_2 t, \quad \text{откуда} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 \frac{R_1}{R_2} = 1.$$

Спирали соединены параллельно, поэтому $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$, тогда $\frac{R_2}{R_1} = 1.$ Поскольку $R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S_1}$ и $R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S_2}$, то $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2} \approx 1{,}16.$

Задача 2. Есть два электрокипятильника с сопротивлениями 10 и 20 *ом*. Второй кипятильник нагревает воду определенного объема до кипения за 20 *мин*. За сколько времени нагреет до кипения воду того же объема первый кипятильник? За какое время вода нагреется до кипения обоими кипятильниками при параллельном и последовательном их соединении? Во всех случаях кипятильники подключаются к одной и той же сети напряжением U.

Решение. Количество теплоты, выделяемое кипятильником с сопротивлением R_1 за время t_1,

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1} t_1, \tag{1}$$

а кипятильником с сопротивлением R_2 за время t_2

$$Q_2 = \frac{U^2}{R_2} t_2.$$

По условию задачи $Q_1 = Q_2$, потому что в обоих случаях теплота расходуется на нагревание воды одного и того же объема до кипения. Таким образом,

$$\frac{U^2}{R_1} t_1 = \frac{U^2}{R_2} t_2, \quad \text{откуда} \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

т. е. время нагревания воды прямо пропорционально сопротивлению кипятильника. Подставляя числовые данные, получим время t_1 нагревания воды первым кипятильником: $t_1 = t_2 \frac{R_1}{R_2} = 10$ *мин*. Сопротивление параллельно соединенных кипятильников $R_{об1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Пусть они выделяют количество теплоты Q_1 за время t_3. Тогда $Q_1 = \frac{U^2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} t_3$. Сопоставив это уравнение с уравнением (1), найдем

$$\frac{t_1}{t_3} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}, \quad \text{откуда} \quad t_3 = t_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 6{,}6 \text{ мин.}$$

Сопротивление последовательно соединенных кипятильников $R_{об2} = R_1 + R_2$. Если они выделяют количество теплоты Q_1 за время t_4, то $Q_1 = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t_4$.

Сопоставив это с уравнением (1), находим $\frac{t_1}{t_4} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, откуда $t_4 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} t_1 = 30$ *мин.*

Задачи

546. Электровоз движется со скоростью 36 *км/ч* и развивает в среднем силу тяги 4500 *н*. Определить, какой силы ток потребляет двигатель электровоза, если напряжение на его зажимах 500 *в*. К. п. д. равен 90%.

547. Элемент замыкают один раз проводником сопротивлением $R_1 = 4$ *ом*, второй — сопротивлением $R_2 = 9$ *ом*. В первом и втором случаях в проводнике за одно и то же время выделяется одинаковое количество теплоты. Найти внутреннее сопротивление элемента.

548. Определить силу тока в каждом из двух одинаковых трамвайных электродвигателей, если при коэффициенте трения $k = 0{,}02$ вагон за $t = 10$ *сек* приобрел скорость $v = 36$ *км/ч*. Масса вагона $m = 10$ *т*, напряжение в трамвайной сети 600 *в*.

549. Электродвигатель питается от источника с э. д. с. $E = 24$ *в*. Чему равна мощность на валу двигателя при протекании по его обмотке тока 8 *а*, если известно, что при полном торможении якоря по цепи проходит ток в 16 *а*?

550. Определить силу тока короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при нагрузке 5 *а* она отдает во внешнюю цепь 9,5 *вт*, а при нагрузке 8 *а* — 14,4 *вт*.

551. Есть две 120-вольтные лампы: одна мощностью 90 *вт*, вторая — 40 *вт*. Какая из этих ламп будет ярче гореть, если их включить последовательно в цепь с напряжением 220 *в*?

552. Имеются три электрические лампы, рассчитанные на напряжение 110 *в* каждая; мощности их соответственно равны 50,50 и 100 *вт*. Как надо включить эти три лампы, чтобы они давали нормальный накал при напряжении в сети 220 *в*? Нарисовать схему включения и подсчитать силу тока, проходящего через лампы при нормальном накале.

553. Четыре проводника, сопротивления которых 1, 2, 3 и 4 *ом*, соединены так, что общее сопротивление цепи оказалось равным 1 *ом*. Какова мощность тока в проводнике сопротивлением 2 *ом*, если в проводнике сопротивлением 3 *ом* сила тока равна 3 *а*?

554. Проволочное кольцо включено в цепь, в которой проходит ток 9 *а*. Контакты делят кольцо по длине в отношении 1 : 2. При этом в кольце выделяется мощность 108 *вт*. Какая мощность выделялась бы при той же силе тока во внешней цепи, если бы контакты были размещены по диаметру кольца?

555. Напряжение на шинах станции $U_0 = 100\,000$ *в*. Расстояние от потребителя к станции 500 *км*. Передаваемая потребителю мощность 100 *квт*. Потери напряжения не должны превышать 5% ($k = 0{,}05$). Вычислить силу тока в цепи, сечение проводов и вес меди, необходимой для устройства проводки.

556. Чему равно сопротивление подводящих проводов r, если два одинаковых чайника при напряжении $U = 220$ *в* закипают за одно и то же время при последовательном и параллельном включениях? Потребляемая каждым чайником мощность $N = 400$ *вт*.

557. Электрический утюг, рассчитанный на напряжение 120 *в*, имеет мощность 300 *вт*. При включении утюга напряжение на розетке падает с 127 до 115 *в*. Определить сопротивление подводящих проводов.

558. В магистраль, состоящую из медного провода сечением $S_1 = 5$ *мм*^{2}, надо включить свинцовый предохранитель. Какое должно быть его сечение, чтобы при повышении температуры провода более чем на 10° С, он плавился? Начальная температура свинца $t^\circ = 27°$ С. Потерь на теплоотдачу не учитывать.

559. Из нихромовой ленты сечением 0,5 *мм*^{2} надо изготовить обмотку электрокипятильника. Какую длину ленты надо взять, если 2 *л* воды должны за 15 *мин* нагреться от 10 до 100° С? Напряжение на зажимах кипятильника 120 *в*, его коэффициент полезного действия 70%.

560. Электрический чайник закипает за $t = 24$ *мин*. Как надо разделить его обмотку, имеющую сопротивление R, на две секции, чтобы при включении одной из них чайник закипал за $t_1 = 8$ *мин*? За какое время закипит чайник, если включить только одну вторую секцию? За какое время закипит чайник при включении обеих секций параллельно?

561. Нагреватель кипятильника состоит из двух секций сопротивлением по 4 *ом* каждая. Кипятильник питают током от аккумуляторной батареи с э. д. с. 12 *в*. Вода в кипятильнике закипает за одно и то же время как при последовательном, так и при параллельном соединении элементов нагревателя. Определить силу тока, проходящую по батарее, если батарею замкнуть накоротко.

562. Нагреватель кипятильника состоит из четырех секций, каждая из которых имеет сопротивление 1 *ом*. Нагреватель питают током от аккумуляторной батареи с э. д. с. 8 *в* и внутренним сопротивлением 1 *ом*. При каком из всех возможных способов включения элементов нагревателя вода в кипятильнике нагреется быстрее? Какова при этом полная мощность, расходуемая батареей? Какова полезная мощность?

563. Электрический аппарат для перегонки воды потребляет от сети мощность 2,5 *квт*. Сколько дистиллированной воды получают при помощи этого аппарата в течение 1 *ч*, если его к. п. д. 80%, а вода поступает из водопровода при температуре 10° С? Удельная теплота испарения воды $22{,}6 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

564. Электрический чайник с 600 *см*^{3} воды при 9° С, сопротивление обмотки которого 16 *ом*, забыли выключить. Через сколько времени после включения вся вода выкипит? Напряжение в сети 120 *в*; к. п. д. чайника 60%.

565. При напряжении $U_1 = 120$ *в* вода в электрическом чайнике закипает за $t_1 = 20$ *мин*, при напряжении $U_2 = 110$ *в* — за $t_2 = 28$ *мин*. Предполагая для упрощения, что потери теплоты чайником в окружающую среду пропорциональны времени нагрева, т. е. $Q = kt$, рассчитать, через какое время t_3 закипит вода в чайнике при напряжении $U_3 = 100$ *в*. Количество воды и начальная температура воды во всех случаях одинаковы.

566. Чему равно внутреннее сопротивление аккумуляторов, если при соединении восьми аккумуляторов в две параллельные группы по четыре на сопротивлении 3 *ом* выделяется такая же мощность, как и в случае последовательного соединения всех аккумуляторов?

567. Два потребителя с сопротивлениями R_1 и R_2 подключены к сети с напряжением U один раз параллельно, а второй — последовательно.

В каком из этих случаев потребляется бо́льшая мощность от сети? Рассмотреть отдельно случай, когда $R_1 = R_2$.

568. Параллельно сопротивлению $R = 9$ *ом*, подключенному к батарее, включили неизвестное сопротивление R_x. Оказалось, что мощность, выделяемая на внешнем участке цепи, не изменилась. Определить величину R_x. Внутреннее сопротивление источника напряжения $r = 1$ *ом*.

569. Генератор с последовательным возбуждением имеет внутреннее сопротивление $r = 0{,}8$ *ом*, а во внешнюю цепь включено параллельно $N = 100$ ламп с сопротивлением $R = 320$ *ом* каждая, находящихся под напряжением $U = 120$ *в*. Каковы э.д.с. и к.п.д. генератора? Сопротивление подводящих проводов не учитывать.

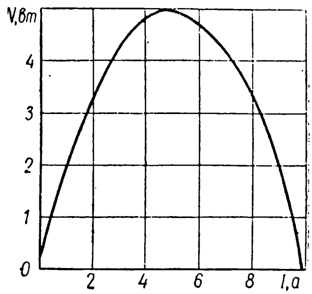


Рис. 93.

570. Батарея аккумуляторов с э.д.с. 12 *в* и внутренним сопротивлением 0,8 *ом* питает поочередно цепи с сопротивлениями 0,4, 0,8 и 2 *ом*. Рассчитать полезную мощность и коэффициент полезного действия батареи. Выяснить их зависимость от сопротивления цепи.

571. Электроэнергия генератора мощностью N передается потребителю по проводам, общее сопротивление которых r, напряжение генератора U. Определить к. п. д. линии передачи, т. е. отношение мощности, выделяемой на полезной нагрузке, к мощности генератора. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

572. Батарея с э.д.с. $E = 40$ *в* и внутренним сопротивлением $r = 5$ *ом* замыкается на внешнее сопротивление R, изменяющееся от 0 до 35 *ом*. Построить на одном чертеже графики зависимости от внешнего сопротивления: а) мощности, развиваемой во внешней цепи; б) мощности, рассеивающейся внутри батареи; в) полной мощности.

573. На рис. 93 дан график зависимости полезной мощности от силы тока в цепи. По этому графику найти внутреннее сопротивление и э.д.с. элемента.

574. Обозначим сопротивление потребителя электроэнергии через R, а сопротивление источника напряжения — через r. Тогда, если пренебречь сопротивлением соединительных проводов, коэффициент полезного действия источника напряжения $\eta = \dfrac{R}{R+r}$. Эту формулу можно записать иначе: $\eta = \dfrac{1}{1+\dfrac{r}{R}}$. Из формулы видно, что чем больше R по сравнению с r, тем к. п. д. выше. Но почему же на практике потребитель и источник напряжения подбираются так, чтобы их сопротивления были по возможности равными, хотя η при этом достигает только 50%?

575. Два источника с э. д. с. E_1 и E_2 соединены последовательно и замкнуты на некоторую внешнюю цепь. Так как э. д. с. источников складываются, то полная мощность, развиваемая батареей, $\dfrac{(E_1+E_2)^2}{R}$, где R — полное сопротивление цепи. Казалось бы, что развиваемую батареей мощность можно подсчитать, сложив мощности, развиваемые каждым источником, если бы он один работал на цепь с тем же сопротивлением. Однако тогда получается $\frac{E_1^2}{R}+\frac{E_2^2}{R}$, т. е. другой результат. Выяснить это недоразумение.

576. Три абитуриента решали следующую задачу. Аккумулятор поставлен на зарядку. Напряжение на клеммах зарядной станции во время зарядки 13 *в*, сила зарядного тока 10 *а*, сопротивление аккумулятора 0,1 *ом*. Определить, какое количество теплоты будет ежесекундно выделяться в аккумуляторе и какая часть работы, совершаемой зарядной станцией, будет полезно расходоваться на зарядку аккумулятора?

Один абитуриент подсчитывал количество выделяющейся теплоты по формуле $Q = I^2Rt$ и получил $Q = 10$ *вт*; второй — по формуле $Q = IUt$ получил $Q = 130$ *вт* и третий — по формуле $Q = \frac{U^2}{R}t$ получил $Q = 1690$ *вт*.

На вторую часть вопроса абитуриенты ответа не дали, поскольку не было дано внутреннее сопротивление самой зарядной станции, в результате чего невозможно было определить всю работу, совершаемую станцией, а следовательно, и полезно затрачиваемую ее долю.

Объяснить, почему полученные абитуриентами результаты разошлись? Какой из результатов верный и можно ли ответить на вторую часть вопроса?

§ 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Сила F, действующая на прямолинейный отрезок l проводника, по которому течет ток силой I, в однородном магнитном поле с магнитной индукцией B,

$$F = BIl \sin(B,\ l).$$

Электродвижущая сила индукции в контуре, пронизываемом потоком Φ,

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Электродвижущая сила индукции в проводнике длиной l, движущемся в магнитном поле со скоростью v,

$$E = Blv \sin(B,\ v).$$

Направления v и l считаются взаимно перпендикулярными.

Электродвижущая сила индукции, возбуждаемая в рамке площадью S при ее вращении в магнитном поле,

$$E = nBS\omega \sin \omega t,$$

где n — число витков; ω — угловая скорость вращения рамки.

Задача 1. Рамка из 50 витков проволоки площадью 150 $см^2$ равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}8$ $вб/м^2$. Рамка совершает $n = 120$ *об/мин*. Определить амплитуду э. д. с индукции.

Решение Э.д.с. определим по формуле

$$E = BSN\omega \sin \varphi,$$

где N — число витков; $\omega = 2\pi n$ — угловая частота; φ — фаза. Поэтому

$$E = 2\pi BSNn \sin \varphi.$$

Амплитуда э.д.с. достигается при $\sin \varphi = 1$:

$$E_m = 6{,}28 \cdot 0{,}8 \text{ вб/м}^2 \cdot 0{,}015 \text{ м}^2 \cdot 50 \cdot 2 \text{ об/сек} \approx 7{,}5 \text{ в}.$$

Задача 2. Скорость самолета $v = 950$ *км/ч*. Вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли $H = 40$ *а/м*. Найти э.д.с. индукции, возникающую на концах крыльев самолета. Размах крыльев $l = 12{,}5$ *м*. Самолет движется горизонтально. Можно ли использовать эту разность потенциалов для измерения скорости полета самолета?

Решение. В данном случае самолет представляет собой проводник, движущийся в магнитном поле напряженностью H в направлении, перпендикулярном вектору напряженности. Поэтому на концах крыльев самолета возникнет э. д. с. индукции

$$E = -\mu_0 H l v,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *гн/м* $\approx 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ *гн/м* — магнитная постоянная.

Подставив числовые значения, получим $|E| \approx 0{,}165$ *в*. Использовать эту разность потенциалов для измерения скорости полета самолета нельзя, так как, замкнув концы крыльев на вольтметр, получим контур, в котором при поступательном движении самолета магнитный поток остается неизменным и э.д.с. индукции равна нулю. Наличие э. д. с. можно обнаружить лишь при поворотах самолета (изменении угла между контуром и магнитным полем).

Задачи

577. Соленоид, состоящий из $n = 80$ витков и имеющий диаметр $d = 8$ *см*, находится в магнитном поле с напряженностью $H = 48\,000$ *а/м*. Соленоид поворачивается на 180° в течение $t = 0{,}2$ *сек*. Найти среднее значение э.д.с., возникающей в соленоиде.

578. Груз массой m подвешен на нити, намотанной на ось динамомашины с постоянным магнитом и замкнутой на сопротивление R, опускается со скоростью v. С какой скоростью v_1 будет подниматься вверх тот же груз, если динамомашину включить как электродвигатель в цепь постоянного тока с э.д.с. E и тем же сопротивлением цепи R?

579. Замкнутая катушка, состоящая из $n = 1000$ витков, помещена в магнитное поле, направленное вдоль оси катушки. Площадь поперечного сечения катушки $S = 4$ *см*^{2}; сопротивление $R = 160$ *ом*. Найти мощность потерь на нагревание проводов, если магнитное поле равномерно изменяется со скоростью 8 *а/м · сек*.

580. По кольцевому проводнику течет индукционный ток. К точкам A и B подключен электрометр. Что он будет показывать? Будут ли изменяться (и как) показания электрометра, если A и B будут размещены на концах одного диаметра кольца (рис. 94)?

581. В магнитное поле индукцией $B = 10^{-2}$ *вб/м*^{2} влетает электрон перпендикулярно силовым линиям со скоростью 10^6 *м/сек*. Определить величину силы, действующей на электрон в магнитном поле.

582. В замкнутую накоротко катушку вставлена другая катушка меньшего диаметра, по которой протекает постоянный ток. Если во вторую катушку вдвигать железный сердечник, то первая катушка нагревается. Почему это происходит? За счет какой энергии осуществляется нагревание?

583. В однородном магнитном поле напряженностью H находится кольцо из сверхпроводника. Силовые линии перпендикулярны к плоскости кольца. Чему будет равен магнитный поток, пронизывающий кольцо, после того как внешнее поле выключат? Радиус кольца R.

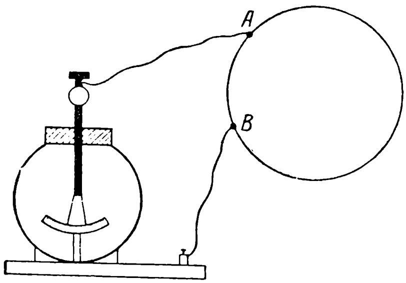


Рис. 94.

584. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}05$ *вб/м*^{2} вращается стержень длиной 1 *м* с постоянной угловой скоростью $\omega = 20 \frac{1}{сек}$. Ось вращения проходит через конец стержня параллельно силовым линиям магнитного поля. Найти э.д.с. индукции, возникающую на концах стержня.

585. Электродвигатель постоянного тока, включенный в цепь батареи с э.д.с. 24 *в* при полном сопротивлении цепи $R = 20$ *ом*, вращается со скоростью $n_1 = 600$ *об/мин* при силе тока в цепи 0,2 *а*. Какую э.д.с. будет развивать этот же двигатель, работая как динамомашина при 1400 *об/мин*?

586. Какое число n *об/сек* разовьет электродвигатель постоянного тока с постоянным магнитом, включенный в цепь источника с э. д. с. E при полном сопротивлении цепи R, если, работая как динамомашина, он развивает э.д.с. E_1 при n_1 *об/сек*, а момент сил трения на оси двигателя составляет M? Какой силы ток проходит по цепи и чему равно число оборотов при $M = 0$?

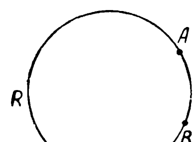


Рис. 95.

587. В однородное магнитное поле напряженностью $H = 8 \cdot 10^4$ *а/м* помещен проводник длиной $l = 20$ *см* и сопротивлением $R = 10$ *ом*. Проводник подключен к источнику напряжения, э. д. с. которого $E_1 = 10$ *в* и внутреннее сопротивление $r = 0{,}001$ *ом*. При взаимодействии магнитного поля тока и внешнего магнитного поля проводник перемещается перпендикулярно к внешнему магнитному полю со скоростью $v = 10$ *м/сек*. Определить силу тока I, проходящего по проводнику.

588. Какую э. д. с. развивает динамомашина постоянного тока, если при сопротивлении $R = 600$ *ом* на ее вращение расходуется мощность 100 *вт*, а потери на трение составляют 4% по мощности? Какую мощность для поддержания того же числа оборотов надо расходовать при сопротивлении цепи 100 *ом*?

589. По кольцевому проводнику (рис. 95) проходит индукционный ток. Пусть сопротивление меньшей части кольца меджу точками A и B равно r, сопротивление бóльшей части между теми же точками равно R и падение напряжения на меньшей части проводника в направлении от A к B, т. е. в направлении тока в рассматриваемый момент времени равно u. По закону Ома сила тока в этот момент $I = \frac{u}{R}$. Поскольку сила тока во всех сечениях проводника должна быть одинаковой, а падение напряжения между теми же точками по длинному пути от B к A должно равняться $-U$, то по закону Ома та же сила тока должна быть $I = -\frac{U}{R}$. Отсюда получаем явно неверный результат $r = -R$. Найти ошибку в рассуждениях.

590. Катушку с очень малым сопротивлением R и индуктивностью $L = 3$ *гн* подключают к источнику с э. д. с. $E_1 = 1{,}5$ *в* и очень малым внутренним сопротивлением r. Через какой промежуток времени t сила тока в цепи будет 50 *а*?

591. Два одинаковых шунтовых электродвигателя включены каждый в цепь с напряжением U. Один двигатель вращается вхолостую, другой приводит в движение станок. Который из них скорее нагреется?

592. Квадратная рамка со стороной $a = 10$ *см*, состоящая из $k = 100$ витков, вращается вокруг вертикальной оси, лежащей в ее плоскости, со скоростью $n = 5$ *об/сек*. На этой же оси находятся два металлических кольца, к которым присоединены концы рамки. Ток отводится от колец с помощью соответствующих контактов к миллиамперметру переменного тока. Сопротивление рамки $r_1 = 3$ *ом*; сопротивление миллиамперметра $r_2 = 2$ *ом*. Вычислить горизонтальную составляющую магнитного поля Земли, если миллиамперметр показывает 0,85 *ма*.

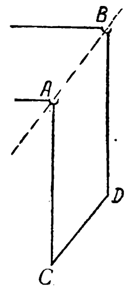


Рис. 96.

593. Через хомутик, который может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси AB (рис. 96), проходит ток $I = 10$ *а*. На какой угол отклонится хомутик, если вокруг него создано однородное магнитное поле напряженностью $H = 16\,000$ *а/м*, направленное вертикально вверх? Части AC и BD хомутика изготовлены из тонкой проволоки с незначительным весом, а сторона $CD = 5$ *см* представляет собой проволоку весом 0,5 *н*.

§ 7. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Электродвижущая сила источника переменного напряжения

$$E = E_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где E_m — амплитудное значение э.д.с. переменного тока;

$\omega = 2\pi\nu$ — угловая, или циклическая, частота вращения.

Эффективные значения силы тока и э. д. с.

$$I_{эфф} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad и \quad E_{эфф} = \frac{E_m}{\sqrt{2}},$$

где I_m и E_m — амплитудные значения соответственно силы тока и э. д. с.

Коэффициент трансформации

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 — числа витков первичной и вторичной обмоток;

U_1 и U_2 — напряжения на обмотках трансформатора.

Задача 1. Эффективное напряжение в цепи переменного тока $U_{эфф} = 120$ *в*. Определить время, в течение которого горит неоновая лампа в каждый полупериод, если лампа зажигается и гаснет при напряжении $U = 84$ *в*.

Решение. График зависимости напряжения переменного тока от времени представляет собой синусоиду (рис. 97). Период переменного тока $T = 0{,}02$ *сек*. Рассмотрим один полупериод.

Неоновая лампа будет гореть в течение такого времени каждого полупериода, когда $U \geqslant 84$ *в* (фактически напряжение зажигания несколько больше напряжения гашения, но для упрощения задачи при-

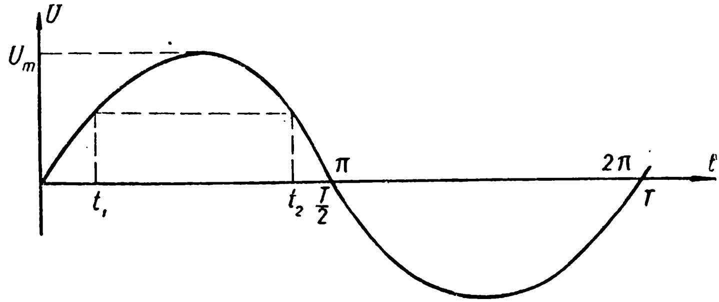


Рис. 97.

нимаем, что они одинаковые). Этот промежуток времени, очевидно, равен $\Delta t = t_2 - t_1$, где t_2 и t_1 можно найти из уравнения переменного тока

$$U = U_m \sin \omega t = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \qquad (1)$$

Максимальное напряжение связано с эффективным зависимостью

$$U_{эфф} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \text{ откуда } \quad U_m = \sqrt{2}\, U_{эфф}.$$

Подставим значение U_m в формулу (1):

$$U = \sqrt{2}\, U_{эфф} \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad \text{откуда} \quad \sin \frac{2\pi}{T} t = \frac{U}{U_{эфф}\sqrt{2}}.$$

Подставив числовые значения $U = U_{заж} = U_{гаш}$ и $U_{эфф}$, найдем $\sin \frac{2\pi}{T} t = \frac{1}{2}$, откуда в пределах одного полупериода:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6}, \ t_1 = \frac{T}{12}; \\ \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{5}{6}\pi, \ t_2 = \frac{5}{12} T. \end{cases}$$

Значит, искомое значение $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{3}$; $\Delta t = \frac{1}{150}$ *сек*.

Задача 2. К точкам A и B приложено постоянное напряжение, заряжающее конденсатор C (рис. 98). На обмотку электромагнита E подают переменное напряжение. Электромагнит приводит в колебание язычок D, по очереди размыкающий цепь питания конденсатора и замыкающий цепь гальванометра $Г$. Какая средняя сила тока проходит через гальванометр, если частота переменного тока 500 *гц*, емкость конденсатора 1 *мкф*, постоянное напряжение 100 *в*?

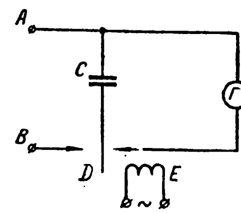


Рис. 98.

Стержень электромагнита и язычок изготовлены из мягкого магнитного материала, т. е. остаточным намагничиванием можно пренебречь. Считать, что конденсатор успевает полностью зарядиться за время, в течение которого цепь зарядки замкнута.

Решение. Сила тока, текущего через гальванометр, $I = nq$, где q — заряд, протекающий при разрядке конденсатора; n — число прерываний за 1 *сек*. Поскольку за период цепь разрядки замыкается через гальванометр дважды, то $n = 1000$. Следовательно, $q = CU = 10^{-6} \cdot 100\ k = 10^{-4}\ k$. Тогда $I = 10^{-4} \cdot 10^3\ a = 0{,}1\ a$.

Задачи

594. Переменный ток возбуждается в рамке из 200 витков с площадью сечения витка 300 *см*^{2} в магнитном поле с $H = 12\,000$ *а/м*. Определить величину э. д. с. индукции через 0,01 *сек* после начала движения рамки из нейтрального положения. Амплитудное значение э.д.с. 7,2 *в*.

595. Мгновенное значение э.д.с. синусоидального тока для фазы $\frac{\pi}{6}$ оказалось равным 155 *в*. Каковы амплитудное и эффективное значения э.д.с. этого тока?

596. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 10$ включена в цепь с напряжением $U_1 = 120$ *в*. Сопротивление вторичной обмотки трансформатора $r_2 = 1{,}2$ *ом*, сила тока во вторичной цепи $I_2 = 5$ *а*. Определить напряжение на зажимах вторичной обмотки трансформатора. Потерь в первичной цепи трансформатора не учитывать.

597. Для электросварки требуется напряжение 4 *в*, которое получают от сети с напряжением 127 *в* с помощью понижающего трансформатора. Можно ли для понижения напряжения пользоваться не трансформатором, а реостатом?

598. Для трансляции радиопередач применяется трансформатор, понижающий напряжение с 480 до 30 *в*. Определить мощность, потребляемую трансформатором, если его к.п.д. равен 95% и к нему подключены 380 репродукторов, через каждый из которых идет ток силой 8 *ма*.

599. На замкнутый железный сердечник надеты две обмотки. Как определить число витков каждой из обмоток, если имеется источник переменного напряжения U и чувствительные вольтметры?

600. Трансформатор, повышающий напряжение с 100 до 3300 *в*, имеет замкнутый сердечник в виде кольца. Через кольцо пропущен провод, концы которого присоединены к вольтметру (рис. 99). Вольтметр показывает 0,5 *в*. Сколько витков имеют обмотки трансформатора?

601. Определить продолжительность одного периода и число полюсов генератора переменного тока, дающего при 250 *об/мин* ток с частотой 50 *гц*.

602. Проволочная рамка, имеющая 250 витков, площадь поперечного сечения которых 0,05 *м*^{2}, равномерно вращается в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной силовым линиям. При скорости вращения 12 *об/сек* максимальная э. д. с. переменного тока 15 *в*. Определить магнитную индукцию поля.

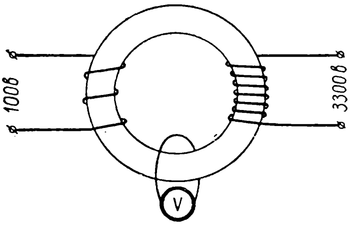


Рис. 99.

603. На замкнутый трансформаторный сердечник надеты две обмотки с одинаковым числом витков и очень малым омическим сопротивлением (рис. 100). Одна обмотка через амперметр соединена с источником переменного напряжения. Изменятся ли показания амперметра, если концы второй обмотки *A* и *B* соединить с точками *C* и *D*?

604. Медицинский прибор для извлечения неферромагнитной металлической стружки из глаза представляет собой мощный электромагнит, питаемый переменным током. Каким должен быть график зависимости силы тока, питающего электромагнит, от времени, чтобы прибор соответствовал своему назначению?

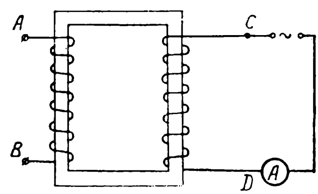


Рис. 100.

605. На цилиндрический железный сердечник намотаны две обмотки. Первая включена в цепь переменного тока; сюда же включен и амперметр. Напряжение на второй обмотке измеряется вольтметром. Как изменятся показания амперметра и вольтметра, если на обмотку извне надеть железный цилиндр с продольным разрезом в следующих случаях: а) Высота цилиндра равна высоте первой обмотки и цилиндр надевается только на нее. б) Высота цилиндра равна высоте сердечника. в) Как изменятся показания амперметра, если на сердечник надеть медный цилиндр без разреза?

§ 8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Период собственных колебаний контура

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где L — индуктивность контура, *гн*;

C — емкость конденсатора, *ф*.

Задача 1. Приемный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 2 \cdot 10^{-6}$ *гн* и конденсатора емкостью $C = 1{,}8 \cdot 10^{-10}$ *ф*. На какую длину волны настроен контур?

Решение. Длина волны связана с периодом колебаний соотношением $\lambda = cT$. Период колебания T контура определяется по формуле $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Значит, $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$.

Подставив числовые значения, получим $\lambda = 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8 \times$ $\times \sqrt{2 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-10}\ м^2} \approx 36\ м.$

Задача 2. Звуковые волны длиной 2 *м* падают на мембрану микрофона. Вследствие колебаний мембраны микрофона в цепи возникают электрические колебания. Определить длину волны этих колебаний.

Решение. Длину волны электрических колебаний можно определить по формуле

$$c = \lambda\nu, \text{ откуда } \lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Здесь $c = 3 \cdot 10^8$ *м/сек* — скорость распространения электромагнитных волн; ν— частота колебаний.

Частота ν электромагнитных колебаний равна в данном случае частоте звуковых колебаний, которую можно определить из формулы

$$v = \lambda_1\nu, \text{ откуда } \nu = \frac{v}{\lambda_1},$$

где v — скорость звука в воздухе.

Подставив значение ν в предыдущую формулу, получим

$$\lambda = \frac{c\lambda_1}{v} = \frac{3 \cdot 10^8\ м/сек \cdot 2\ м}{330\ м/сек} \approx 1{,}8 \cdot 10^6\ м.$$

Задачи

606. Приемный контур состоит из катушки индуктивности $L = 0{,}025$ *мгн* и конденсатора переменной емкости. Какую емкость надо подобрать, чтобы принять радиоволны длиной $\lambda = 300$ *м*?

607. Чему равна длина волны звука, излучаемого громкоговорителем, если провода, подводящие к нему переменный ток, излучают электромагнитные волны длиной 30 *км*? Скорость звука $v = 340$ *м/сек*.

608. Какую емкость надо взять в колебательном контуре, чтобы при индуктивности $L = 250$ *мгн* его можно было настроить на звуковую частоту 500 *гц*? Сопротивление считать равным нулю.

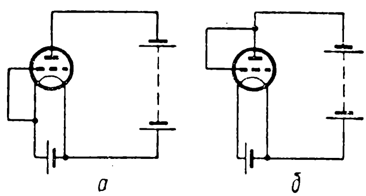


Рис. 101.

609. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 100$ *мкгн* и ёмкость, которая может изменяться от 100 до 500 *пф*. Сопротивление чрезвычайно малое. Определить интервал длин волн, на который может быть настроен контур.

610. Колебательный контур состоит из воздушного конденсатора с двумя пластинами площадью $S = 100\ см^2$ и расстоянием между ними $d = 3$ *мм* и катушки индуктивностью $L = \frac{1}{9} \cdot 10^{-8}$ *гн*. Определить, на какую длину волны резонирует контур.

611. На клеммах прибора постоянного тока поставлены знаки плюс и минус. Как подключается этот прибор к ламповому выпрямителю?

612. На рис. 101 представлены две схемы включения электронной лампы. При какой схеме включения сила анодного тока будет больше?

613. Радиоприемник можно настраивать на прием радиоволн различной длины от 25 до 2000 *м*. Что надо сделать для перехода к приему более длинных волн — сближать или раздвигать пластины конденсатора колебательного контура?

614. Какой должна быть максимальная частота импульсов радиолокатора при разведке целей, находящихся на расстояниях не менее 30 *км* от радиолокатора?

615. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 20$ *см* и дает $n = 5000$ импульсов в секунду, причем длительность каждого импульса $t_1 = 0{,}02$ *мксек*. Сколько колебаний содержится в одном импульсе и какова наибольшая глубина разведки локатора?

616. Почему катушки в телефонных наушниках соединяются последовательно и почему их сопротивление делают большим — порядка нескольких тысяч *ом*?

617. Определить скорость перемещения светового пятна по экрану трубки телевизора КВН-49, если известно, что в течение 1/25 *сек* луч создает на экране одно изображение, прочерчивая 625 горизонтальных строчек по 14 *см* каждая. Обратный ход луча не учитывать.

ОПТИКА. СТРОЕНИЕ АТОМА

§ 1. ЗАКОНЫ ОСВЕЩЕННОСТИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Освещенность E при силе света I на расстоянии r от точечного источника света при угле падения света α

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}.$$

Закон преломления света

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

где α и β — углы падения и преломления; n — показатель преломления среды.

Основная формула линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = D,$$

где d и f — расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения;
F — фокусное расстояние линзы;
D — оптическая сила линзы.

Линейное увеличение линзы

$$k = \frac{f}{d}.$$

Задача 1. На высоте 5 *м* подвешено лампу в 200 *св.* Наибольшая освещенность будет под лампой и равномерно уменьшается во все стороны. Какова будет площадь круга, внутри которого освещенность не меньше 1 *лк*?

Решение. По условию задачи освещенность в точках, лежащих на окружности (рис. 102), должна составлять 1 *лк*. Освещенность вычисляем по формуле $E = \frac{I}{l^2} \cos \alpha$, где $l = \sqrt{5^2 + R^2}$, $\cos \alpha = \frac{5}{l}$.

Подставив эти значения, получим

$$E = \frac{I}{5^2 + R^2} \cdot \frac{5}{\sqrt{5^2 + R^2}} = \frac{5I}{(5^2 + R^2)^{3/2}} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{5I}{(5^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, получим

$$25I^2 = (25 + R^2)^3.$$

После подстановки числовых значений $10^6 = (25 + R^2)^3$. Извлекая из обеих частей кубический корень, получим $100 = 25 + R^2$, откуда $R^2 = 75$. Следовательно, $S = \pi R^2 = 235{,}5$ *м*^{2}.

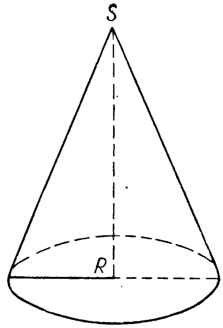


Рис. 102.

Задача 2. Собирающая линза дает четкое изображение предмета, расположенного на оптической оси, на экране, находящемся на некотором расстоянии от линзы. Вставим между линзой и экраном стеклянную пластинку с параллельными гранями толщиной $d = 3$ *см* и показателем преломления $n = 1{,}5$. Пластинка поставлена перпендикулярно к оптической оси. В каком направлении и на сколько надо передвинуть экран, чтобы снова получить на нем четкое изображение предмета?

Решение. Если бы за линзой не стояла плоско-параллельная пластинка, то изображение точки C предмета находилось бы в точке H (рис. 103). При наличии пластинки луч, проходящий через оптический центр линзы, а затем через пластинку, испытывает смещение и пересекается с лучом, проходящим через фокус линзы, в точке C_1. Таким образом, четкое изображение предмета испытывает смещение HC_1 и на такое расстояние надо передвинуть экран. Вычислим величину этого смещения.

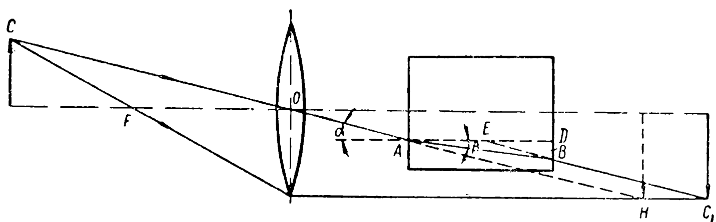


Рис. 103.

Поставим в точке A перпендикуляр к пластинке и введем обозначения, как показано на рисунке. Легко видеть, что $HC_1 = AE = AD - ED$.

На основании рассмотрения соответствующих треугольников можно записать, что $BD = AD \operatorname{tg} \beta$; $ED = BD \operatorname{ctg} \alpha = AD \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha = AD \dfrac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.

Для малых углов α и β можно принять, что $\operatorname{tg} \beta \approx \sin \beta$ и $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$. Тогда $ED = AD \dfrac{\sin \beta}{\sin \alpha} = AD \dfrac{1}{n}$.

Смещение экрана составляет $HC_1 = AD - AD \dfrac{1}{n} = AD \dfrac{n-1}{n} = 1$ *см*. Следовательно, экран надо отодвинуть от линзы на 1 *см*, чтобы снова получить на нем четкое изображение предмета.

Задача 3. Телеобъектив фотоаппарата состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 6$ *см*, обращенной к объекту, и рассеивающей с фокусным расстоянием $F_2 = -2{,}5$ *см*. Расстояние между линзами равно $a = 4$ *см*. На каком расстоянии от рассеивающей линзы должна располагаться фотопленка при фотографировании удаленных предметов?

Решение. Поскольку фотографируются удаленные предметы, будем считать, что они находятся в бесконечности. Построим изображение точки (рис. 104). Расстояние d от изображения S_1, даваемого первой линзой объектива, до второй (рассеивающей) линзы $d = F_1 - a = 2$ *см*.

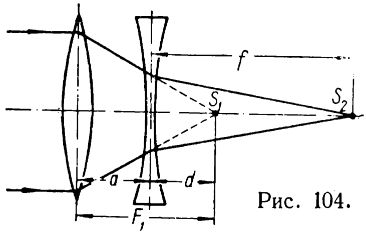


Рис. 104.

Из формулы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F_2}$ следует, что фотопленка должна располагаться на расстоянии $f = -\frac{dF_2}{d + F_2} = \frac{F_2(a - F_1)}{F_1 - a + F_2} = -10$ *см* от этой линзы.

Задачи

618. Два зеркала наклонены друг к другу и образуют двухгранный угол α. На них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к ребру угла. Определить, на какой угол поворачивается отраженный луч после отражения от обоих зеркал.

619. Где и как следует расположить в прямоугольной комнате два небольших плоских зеркала, чтобы человек, находясь в любом месте комнаты, мог видеть в зеркале свое отражение?

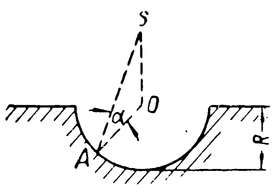


Рис. 105.

620. Проекционный аппарат имеет объектив с фокусным расстоянием $F = 5$ *см*. Квадратный диапозитив площадью $S = 10$ *см*^{2}, находящийся на расстоянии $d = 5{,}1$ *см* от линзы, пропускает световой поток $\Phi = 10$ *лм*. Определить освещенность E' изображения диапозитива на экране. Рассеивания светового потока не учитывать.

621. Над полусферой находится симметрично расположенный точечный источник света силой $I = 100$ *св* на высоте, равной диаметру полусферы. Определить освещенность в той точке поверхности полусферы A, в которую лучи падают под углом $\alpha = 30°$ (рис. 105).

622. Точечный источник света, расположенный на расстоянии r от плоского экрана, создает в центре экрана освещенность E. Как изменится освещенность в центре экрана, если по другую сторону источника света на расстоянии $r/2$ расположить вогнутое зеркало радиусом r?

623. Высоко над поверхностью стола находится точечный источник света 25 *св*. Какова будет освещенность в точке, расположенной под источником, если на пути лучей горизонтально поместить линзу с оптической силой в 1 диоптрию так, чтобы источник находился в ее фокусе?

624. Две одинаковые электрические лампы помещены в шары из матового стекла и подвешены на высоте 4 *м* от земли на расстоянии 6 *м* одна от другой. Где будет больше освещенность земли: под лампами или посредине между ними?

625. Точечный источник S освещает поверхность MN. Как изменится освещенность в точке A, в которую лучи от S падают перпендикулярно, если со стороны источника на таком же расстоянии, как и освещаемая поверхность, установить зеркало Z, отражающее свет в точку A (рис. 106)? Коэффициент отражения принять равным единице.

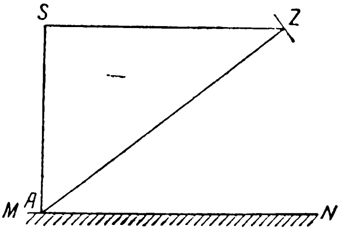


Рис. 106.

626. Точечный источник света находится на расстоянии $d = 20$ *см* от вогнутого сферического зеркала радиусом $R = 50$ *см*. Найти освещенность на расстоянии $x = 60$ *см* от поверхности зеркала, если на расстоянии $x_1 = 100$ *см* освещенность $E_1 = 290$ *лк*.

627. На оси собирающей линзы на расстоянии $d = 25$ *см* от нее находится точечный источник света. По другую сторону линзы один раз на расстоянии $l_1 = 27$ *см*, а второй раз на расстоянии $l_2 = 48$ *см* устанавливают экран. Освещенность светового пятна на экране в обоих случаях оказалась одинаковой. Определить фокусное расстояние линзы.

628. Над центром круглого стола диаметром 2 *м* висит лампа, сила света которой 100 *св*. Считая лампу точечным источником света, вычислить изменение освещенности края стола при постепенном подъеме лампы в интервале $0{,}5 \leqslant h \leqslant 0{,}9$ *м* через каждые 10 *см*. Результат изобразить графически.

629. Кадрик кинофильма (18×24 *мм*²) проектируется на экран, находящийся от объектива на расстоянии $f = 20$ *м*, при этом покрывает площадь 2,75 *м*². Чему равно фокусное расстояние объектива?

630. На оси выпуклого сферического идеально отражающего зеркала радиусом R находится точечный источник света (рис. 107). Расстояние между зеркалом и источником $\frac{1}{2}R$. Определить освещенность E_1 площадки, находящейся на расстоянии R от зеркала, если освещенность площадки, расположенной на расстоянии $2R$ от зеркала, равна E_2.

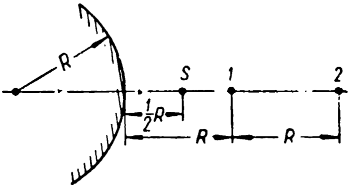


Рис. 107.

631. С какого наибольшего расстояния разведчик может заметить ночью огонек папиросы неприятельского солдата, если сила света при сильном затягивании $I = \frac{1}{400}$ *св*, наименьший световой поток, воспринимаемый глазом, равен $\Phi = 10^{-13}$ *лм* и поверхность зрачка глаза в темноте $S = 0{,}4$ *см*²?

632. Картину фотографируют сначала полностью с большого расстояния, затем отдельные ее детали в натуральную величину. Во сколько раз надо изменить время экспозиции при фотографировании деталей?

633. Экспозиция фотоснимка при печатании равна 2 *сек*, если лампа 40 *св* находится на расстоянии 1 *м* от него. Какова должна быть экспозиция при лампе в 30 *св*, если она находится в 75 *см* от снимка? Предполагается, что общее количество энергии, полученное фотоснимком, в обоих случаях одинаково.

634. Предмет находится на расстоянии $l = 15$ *см* от плоско-параллельной стеклянной пластинки. Наблюдатель рассматривает предмет через пластинку, причем луч зрения перпендикулярен к ней. Определить расстояние изображения предмета x от ближайшей к наблюдателю грани, если толщина пластинки $d = 4{,}5$ *см*. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

635. На поверхности озера находится плот, длина которого $a = 8$ *м*, ширина $b = 6$ *м*. Определить размеры полной тени от плота на дне озера при освещении поверхности воды рассеянным светом. Глубина озера $h = 2$ *м*.

636. На какой глубине h под водой находится водолаз, если он видит отраженными от поверхности воды те части горизонтального дна, которые расположены от него на расстоянии $ED = 15$ *м* и больше? Рост водолаза $AE = 1{,}5$ *м*. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

637. Какова истинная глубина реки, если при определении на глаз в вертикальном направлении глубина ее кажется равной 2 *м*?

638. Почему в хороших микроскопах для прохождения лучей света от препарата в объектив применяют не воздух, а кедровое масло?

639. На дно сосуда, наполненного водой до высоты 10 *см*, помещен точечный источник света. На поверхности воды плавает круглая непрозрачная пластинка таким образом, что ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти через поверхность воды?

640. В парке установлен посеребренный шар диаметром 32 *см*. На каком максимальном расстоянии близорукий человек без очков увидит четко отраженные в шаре далекие предметы, если обычно он пользуется очками с оптической силой $D = -5$ диоптрий? Из какого расстояния он увидит четко свое изображение в шаре?

641. На вогнутое зеркало радиусом $r = 40$ *см* падают лучи от светящейся точки S, расположенной на главной оптической оси на расстоянии $d = 30$ *см*. На каком расстоянии перед вогнутым зеркалом надо поставить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные вогнутым и плоским зеркалами, возвратились в точку S?

642. В горизонтально расположенное вогнутое зеркало радиусом $R = 16$ *см* налит тонкий слой воды (показатель преломления воды $n = \frac{4}{3}$). Определить фокусное расстояние этой системы.

643. Точечный источник света находится на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оптической оси. На каком расстоянии за линзой надо установить плоское зеркало перпендикулярно к оси, чтобы лучи, отразившись от него и повторно пройдя через линзу, стали параллельны оптической оси?

644. В фокусе двояковыпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ *см* перпендикулярно к оптической оси установлено плоское зеркало. С другой стороны линзы на расстоянии 45 *см* от нее находится светящийся предмет. Где и какое получится изображение этого предмета?

645. Прямой солнечный свет освещает белый экран, создавая на нем освещенность E. Как изменится освещенность экрана, если на экран спроектировать изображение Солнца линзой с фокусным расстоянием $F = 1$ *м* и диаметром $d = 40$ *мм*? Угловые размеры диска Солнца $30'$.

Считать, что в место изображения Солнца прямые солнечные лучи не попадают. На сколько надо задиафрагмировать линзу, чтобы освещенность изображения Солнца, полученного с помощью линзы, оказалась меньше освещенности прямыми солнечными лучами? Поглощения света в линзе не учитывать.

646. Человек, сняв очки, читает книгу, держа ее на расстоянии 16 *см* от глаз. Какой оптической силы у него очки?

647. Экран находится на расстоянии D от горящей свечи. Помещая между свечой и экраном собирающую линзу, можно получить на экране четкое изображение свечи при двух положениях линзы, находящихся на расстоянии a друг от друга. Доказать, что в этом случае $F = \frac{D^2 - a^2}{4D}$.

648. Какие наименьшие размеры должно иметь плоское зеркало и как его надо установить, чтобы человек видел в нем себя во весь рост?

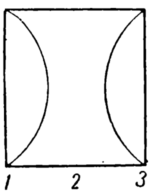


Рис. 108.

649. Две собирающие линзы с одинаковыми фокусными расстояниями $F = 10$ *см* расположены одна в фокусе другой. На расстоянии $a = 20$ *см* от одной из линз на оптической оси находится светящаяся точка. Где будет изображение точки?

650. В стекле с показателем преломления $n_{ст} = 1,52$ есть сферическая полость радиусом $R = 3$ *см*, заполненная водой ($n_в = 1,33$). На полость падает параллельный пучок света. Определить радиус светового пучка, проникающего в полость.

651. Свет от точечного источника, расположенного на оптической оси линзы за ее фокусом, после прохождения линзы отражается назад от вогнутого сферического зеркала с радиусом сферы R и, снова пройдя через линзу, дает изображение. В каких точках оптической оси может быть установлено зеркало, чтобы изображение совпало с самим предметом? Как будет перемещаться изображение, если зеркало перемещать между этими точками?

652. Из плоско-параллельной стеклянной пластинки изготовили три линзы. Оказалось, что фокусное расстояние линз *1* и *2*, составленных вместе, равно $-F$, а фокусное расстояние линз *2* и *3*, тоже приложенных плотно одна к другой, равно $-f$. Предполагая, что линзы тонкие, найти фокусные расстояния каждой из трех линз (рис. 108).

653. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы 100 *см*, вогнутой — 20 *см*. Определить, собирающая или рассеивающая это линза. Найти фокусное расстояние линзы. Показатель преломления материала линзы 1,6.

654. Две тонкие выпуклые линзы с фокусными расстояниями 20 и 30 *см* сложены вместе. Чему равно фокусное расстояние такой сложной линзы?

655. При наибольшем удалении объектива от пленки фотоаппарат дает четкие снимки предметов, находящихся от объектива на расстоянии 1,5 *м*. Какова должна быть оптическая сила линзы, которую надо добавочно насадить на объектив, чтобы получать четкие снимки предметов, расположенных на расстоянии 50 *см* от объектива?

656. К вогнутому сферическому зеркалу, радиус кривизны которого $R = 1$ *м*, приложена вплотную тонкая собирающая линза. На расстоянии $d = 20$ *см* перед этой системой, перпендикулярно к ее оптической оси, расположен плоский предмет. Оказалось, что плоскость предмета совпадает с плоскостью изображения, образованного после прохождения света через линзу, отражения от зеркала и вторичного прохождения через линзу. Определить фокусное расстояние линзы.

657. Требуется сфотографировать конькобежца, пробегающего перед аппаратом со скоростью $v = 10$ *м/сек*. Определить максимально допустимую экспозицию при условии, что размытость изображения не должна превышать $s = 0{,}2$ *мм*. Главное фокусное расстояние объектива $F = 10$ *см*, расстояние от конькобежца до аппарата $d = 5$ *м*.

658. Телескоп имеет объектив с фокусным расстоянием 150 *см* и окуляр с фокусным расстоянием 10 *см*. Под каким углом зрения видна полная Луна в телескоп, если невооруженным глазом она видна под углом $\gamma = 31'$?

659. Из астрономической трубы, в которой фокусное расстояние объектива 3 *м*, вынули окуляр и простым глазом рассматривают изображение, полученное в главном фокусе объектива. Труба наведена на очень далекий предмет. Какое увеличение дает в этом случае труба?

660. В телескоп рассматривают Луну. Изменится ли вид изображения, если закрыть непрозрачной бумагой половину объектива?

661. Телескоп, установленный сначала на бесконечность, направляют затем на предмет, удаленный от объектива (представляющего собой собирающую линзу) на $d = 25$ *м*. При этом окуляр приходится отодвигать на $l = 4$ *см*. Определить фокусное расстояние объектива.

662. Наблюдатель с нормальным зрением рассматривает Луну в телескоп, объектив которого имеет фокусное расстояние $F_1 = 2$ *м*, а окуляр $F_2 = 5$ *см*. На сколько надо передвинуть окуляр, чтобы получить изображение Луны на экране на расстоянии $d = 25$ *см* от окуляра? Чему равны при этом размеры изображения Луны на экране, если ее угловые размеры $\alpha = 30'$?

663. Зрительная труба настроена для наблюдений Луны. На какое расстояние и в какую сторону надо передвинуть окуляр, чтобы можно было рассматривать предметы, удаленные от трубы на 100 *м*? Фокусное расстояние объектива 60 *см*.

664. Фокусное расстояние объектива одного из рефракторов в Пулкове $F_{об} = 14{,}1$ *м*. Каково увеличение этого рефрактора при пользовании окуляром с фокусным расстоянием $F_{ок} = 2{,}5$ *см*?

665. Расстояние между фокусами объектива и окуляра внутри тубуса микроскопа равно $l = 16$ *см*. Фокусное расстояние объектива 0,5 *см*. Каково фокусное расстояние окуляра, если микроскоп дает увеличение в 800 раз?

666. В микроскопе главное фокусное расстояние объектива $F_1 = 5{,}4$ *мм*, а окуляра $F_2 = 2$ *см*. Предмет находится от объектива на расстоянии $d = 5{,}6$ *мм*. Определить увеличение микроскопа для нормального глаза. Какова будет при этом длина тубуса?

§ 2. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

Соотношение для углов отклонения φ от перпендикуляра для главных максимумов, даваемых дифракционной решеткой при перпендикулярном падении света на решетку, находящуюся в пустоте,

$$d \sin \varphi = k\lambda,$$

где k — порядок спектра; d — постоянная решетки.

Задача 1. Определить постоянную дифракционной решетки для случая, когда угол между двумя спектрами третьего порядка для натриевой линии ($\lambda = 0{,}589$ *мк*) равен 4°.

Решение. Постоянную дифракционной решетки определяем из формулы $d \sin\varphi = k\lambda$, откуда $d = \frac{k\lambda}{\sin\varphi} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ *см*.

Задача 2. На сферическую каплю воды в точку A падает луч белого света под углом $i = 30^\circ$ к перпендикуляру в точке A (рис. 109). Часть преломленного света отражается в точке B и в точке C выходит из капли.

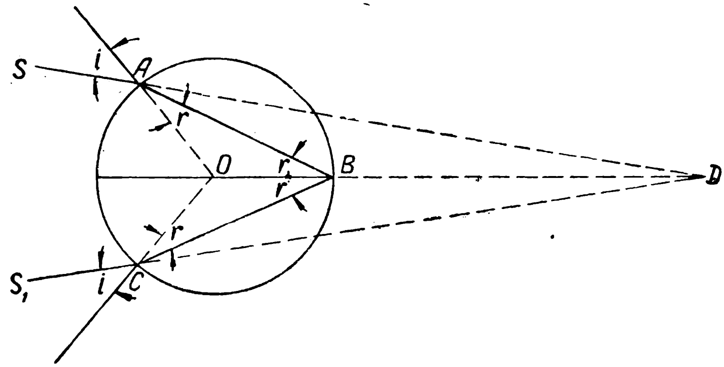


Рис. 109.

Какой угол образуют красный и фиолетовый лучи, выходящие около точки C, с лучом белого света, падающего в точку A? Показатель преломления для красного света $n_к = 1{,}331$, фиолетового — $n_ф = 1{,}344$.

Решение. Падающий луч SA преломляется в точке A, отражается в точке B, преломляется в C и выходит в направлении CS_1 под углом i к поверхности, равным углу падения. Требуется определить угол D. С треугольника AOD легко видеть, что $2r = i + \frac{D}{2}$, откуда $D = 4r - 2i$. Таким образом, задача сводится только к определению угла r для лучей красного и фиолетового света. Из соотношения $\frac{\sin i}{\sin r} = n$ имеем

$$\sin r = \frac{1}{n} \sin i.$$

Для красного света

$$\sin r_к = \frac{1}{n_к} \sin i = \frac{0{,}5}{1{,}331}, \text{ откуда } r_к = 22^\circ 3' 54''.$$

Для фиолетового света

$$\sin r_ф = \frac{1}{n_ф} \sin i = \frac{0{,}5}{1{,}334}, \text{ откуда } r_ф = 21^\circ 50' 25''.$$

Значит, $D_к = 4r_к - 2i = 28^\circ 15' 36''$ и $D_ф = 4r_ф - 2i = 27^\circ 21' 40''$.

Задачи

667. Для определения длины световой волны применили дифракционную решетку с периодом 0,01 *мм*. Первое дифракционное изображение на экране получили на расстоянии $h = 11{,}8$ *см* от центрального изображения и на расстоянии $l = 2$ *м* от решетки. Определить длину световой волны.

668. Определить постоянную дифракционной решетки, если третье дифракционное изображение щели при освещении решетки светом натриевого пламени оказалось расположенным от центрального изображения на расстоянии 16,5 *см*; от решетки оно было на расстоянии 1,5 *м*. Длина волны желтого света равна 0,589 *мк*.

669. Под действием сильного нагревания сталь покрывается ярко окрашенной пленкой (цвета побежалости). Объяснить причину появления этих цветов.

670. Наблюдатель смотрит сквозь трехгранную призму на белую стену, на которой черными линиями нарисован квадрат. Преломляющее ребро призмы параллельно горизонтальным сторонам квадрата. Почему наблюдатель видит спектр от горизонтальных сторон квадрата и не видит его от вертикальных? Как располагаются цвета спектра по отношению к горизонтальным сторонам квадрата? Почему поле между сторонами квадрата кажется наблюдателю не цветным?

671. Если дифракционную решетку осветить белым светом, то дифракционная картина за решеткой представляет собой совокупность чередующихся максимумов волн разной длины, т. е. получаем дифракционный спектр, напоминающий спектр, полученный с помощью призмы. Чем отличается дифракционный спектр от дисперсионного (полученного с помощью призмы)?

672. При переходе света из воздуха в любое твердое тело или жидкость длина световой волны изменяется, но цвет света остается прежним. Почему?

673. Длина волны красного луча в воде равна длине волны зеленого луча в воздухе. Вода освещена красным светом. Какой цвет видит человек, открывающий глаза под водой?

674. Может ли красный свет вызывать люминесценцию?

675. Если смотреть на светящуюся рекламу, сделанную из газосветных трубок, то красные буквы всегда кажутся расположенными ближе к нам, чем синие или зеленые. Чем это можно объяснить?

676. На сколько изменяется длина волны красных лучей при переходе из вакуума в стекло, если показатель преломления стекла $n = 1{,}5$, а частота, отвечающая красным лучам, $\nu = 4 \cdot 10^{14}$ $сек^{-1}$?

677. Почему глаз человека не приспособлен к восприятию ультрафиолетовых лучей с длиной волны 0,4 *мк*?

678. Можно ли наблюдать явление интерференции света, расположив на очень близком расстоянии друг от друга две раскаленные до свечения тонкие проволочки? Почему?

679. При изготовлении искусственных перламутровых пуговиц на их поверхность наносят очень мелкую штриховку. Почему после такой обработки пуговица имеет радужную окраску?

680. Почему при точных определениях коэффициента преломления вещества пользуются не белым, а монохроматическим светом?

681. Почему море обычно бывает синим? Почему в мелких местах море кажется зеленым?

682. Почему для получения рентгеновских лучей, применяемых в медицине и технике, необходимо, чтобы поток электронов, вылетающих из катода, падал в одну точку антикатода, а не широким пучком?

683. Электроны в катодном луче телевизионной трубки, достигая экрана, внезапно останавливаются. Не может ли при этом возникнуть рентгеновское излучение, как в рентгеновской трубке? Не возникает ли опасность облучения при просмотре телевизионных передач?

684. Почему на рентгеновском снимке размеры изображения предмета получаются всегда больше его истинных размеров?

§ 3. КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОПТИКЕ

Энергия кванта света (фотона)

$$\varepsilon = h\nu,$$

где h — постоянная Планка; ν — частота колебания.

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2},$$

где A — работа вырывания электрона из металла; m и v — масса и скорость вылетающего электрона. Если $v = 0$, то $h\nu_0 = A$, где ν_0 — красная граница фотоэффекта.

Задача 1. Кинетическая энергия фотоэлектронов, вылетающих из металла, равна $1{,}6 \cdot 10^{-16}$ *дж*. Определить длину волны света, падающего на металл. Работу выхода не учитывать.

Решение. Из формулы $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ находим $\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$.

Подставляя числовые значения, получим

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \textit{дж}\cdot\textit{сек}\cdot 3\cdot 10^{8}\ \textit{м/сек}}{1{,}6\cdot 10^{-16}\ \textit{дж}} \approx 12{,}4\cdot 10^{-10}\ \textit{м} = 12{,}4 \mathring{A}.$$

Задача 2. Порог чувствительности глаза (минимальный поток света, вызывающий ощущение света) зависит от длины световой волны. Для зеленого света ($\lambda = 5{,}1 \cdot 10^{-7}$ *м*) он равен приближенно $2{,}93 \times \times 10^{-17}$ *дж/сек*. Выразить порог чувствительности через количество фотонов, попадающих в глаз за секунду.

Решение. В соответствии с условием задачи $nh\nu = E$, где n — количество фотонов, E — порог чувствительности.

Отсюда

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{E\lambda}{hc}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$n = \frac{2{,}93\cdot 10^{-17}\ \textit{дж/сек}\cdot 5{,}1\cdot 10^{-7}\ \textit{м}}{6{,}625\cdot 10^{-34}\cdot \textit{дж}\cdot\textit{сек}\cdot 3\cdot 10^{8}\ \textit{м/сек}} \approx 75\ \textit{фот/сек}.$$

Задачи

685. Определить наибольшую длину волны света, при которой может наблюдаться фотоэффект для платины, если работа вырывания электрона из нее равна 6,3 *эв*.

686. Для вырывания электрона из поверхности цезия надо выполнить работу $A = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*. Каковы кинетическая энергия и скорость вылетающих электронов, если цезий освещается желтым светом с длиной волны $\lambda = 0{,}589$ *мк*?

687. Сколько фотонов падает за 1 *сек* на 1 *см*^{2} поверхности, если она облучается с мощностью $N = 0{,}001$ *вт/см*^{2} гамма-лучами с длиной волны $\lambda = 10^{-14}$ *м*?

688. Фотоэлектроны, вырываемые из поверхности металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ *сек*$^{-1}$, полностью задерживаются обратным потенциалом 6,6 *в*, а вырванные светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ *сек*$^{-1}$ — потенциалом 16,5 *в*. Определить постоянную Планка.

689. На пластинку натрия падает свет с длиной волны $4 \cdot 10^{-7}$ *м*. Определить скорость вырванных фотоэлектронов. Для натрия красная граница фотоэффекта определяется длиной волны $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ *м*.

690. Красная граница фотоэффекта для вольфрама $2{,}75 \cdot 10^{-5}$ *см*. Определить работу выхода электрона из вольфрама, максимальную скорость электронов, вырываемых из вольфрама светом с длиной волны $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ *м*, и максимальную энергию этих электронов.

691. С какой скоростью должен лететь электрон, чтобы при ударе о вольфрамовую пластинку вырвать из нее новый электрон, если работа выхода из вольфрама 4,53 *эв*?

692. Средняя длина волны излучения лампочки накаливания с металлической спиралью равна $12 \cdot 10^{-5}$ *см*. Найти число фотонов, испускаемых 200-ваттной лампой в единицу времени.

693. Определить энергию, массу и количество движения фотона рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 10^{-10}$ *м*.

694. Какую энергию должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе электрона?

695. На какую поверхность — черную или белую — при прочих одинаковых условиях лучи света создают бóльшее давление?

696. Какова минимальная длина волны рентгеновского излучения, возникающего в трубке, работающей при напряжении 20 000 *в*?

697. Академик С. И. Вавилов называл люминесцентную лампу световым трансформатором. Почему?

698. Чем более высокое напряжение подают на рентгеновскую трубку, тем более «жесткие» (т. е. меньшей длины волны) лучи она излучает. Почему? Изменится ли «жесткость» излучения рентгеновской трубки, если, не изменяя приложенного к ней высокого напряжения, изменить накал нити. катода?

699. Ученик, объясняя уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, сказал: «Энергия падающего света равна работе выхода электронов и кинетической энергии их движения». В чем неточность такого ответа?

§ 4. СТРОЕНИЕ АТОМА И ЯДРА

Изменение энергии атома при переходе его из одного стационарного состояния в другое

$$E_2 - E_1 = h\nu,$$

где E_2 — энергия атома в новом состоянии, E_1 — энергия атома в исходном состоянии, ν — частота монохроматического света, который при этом переходе излучает или поглощает атом.

Изменение энергии E, отвечающее изменению массы на величину m, $E = mc^2$, где c — скорость света.

Сумма чисел протонов N_p и нейтронов N_n

$$N_p + N_n = A,$$

где A — атомная масса элемента.

Задача 1. При одном из переходов электрона в атоме водорода из одного стационарного уровня на другой произошло излучение кванта света с частотой $\nu = 4{,}57 \cdot 10^{14}$ *сек*$^{-1}$. Определить, на какую величину изменилась энергия электрона в атоме за счет этого излучения.

Решение. Изменение энергии вычисляем по формуле $E_2 - E_1 = h\nu$. Подставляя числовые значения, получим

$$E_2 - E_1 = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{дж} \cdot \text{сек} \cdot 4{,}57 \cdot 10^{14}\ \text{сек}^{-1} \approx 30 \cdot 10^{-20}\ \text{дж}.$$

Задача 2. В соответствии с теорией Бора радиус первой орбиты электрона в атоме водорода $R = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ *м*. Определить линейную и угловую скорости движения электрона по орбите.

Решение. Электрон притягивается к ядру с силой

$$F = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Чтобы радиус орбиты не изменялся, эта сила должна быть равна центростремительной силе

$$F_{\text{ц.с}} = \frac{mv^2}{R}, \text{ т. е. } \frac{mv^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

откуда линейная скорость электрона

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mR}} \approx 2{,}2 \cdot 10^6\ \text{м/сек}.$$

Угловая скорость $\omega = \frac{v}{R} = \frac{e}{R\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mR}} \approx 4{,}1 \cdot 10^{16}\ \text{сек}^{-1}$.

Задачи

700. Ядро бериллия ${}_4Be^9$, поглотив дейтрон ${}_1H^2$, превращается в ядро атома бора ${}_5B^{10}$. Написать уравнение реакции и определить, какая частица при этом выбрасывается.

701. В ядро азота ударяет α-частица и остается в нем, выбивая из ядра протон. Написать уравнение реакции.

702. Почему химический элемент имеет только ему присущий линейчатый спектр?

703. В ядро бериллия ударяет α-частица и застревает в нем, выбивая нейтрон. Написать уравнение ядерной реакции.

704. При захвате нейтрона ядром магния ${}_{12}Mg^{24}$ образуется радиоактивный изотоп ${}_{11}Na^{24}$. Какие частицы излучаются при этом ядерном превращении?

705. Резерфорд наблюдал, что при лобовом соударении с ядрами меди α-частиц с энергией 5 *Мэв* они отлетают назад с энергией 3,9 *Мэв*. Вычислить по этим данным отношение масс ядра меди и α-частицы.

706. Почему при радиоактивном распаде радия α-лучи отклоняются в магнитном поле в виде узкого пучка, а β-лучи — в виде широкого размытого пучка?

707. При бомбардировании ядер железа $_{26}Fe^{56}$ нейтронами образуется β-радиоактивный изотоп марганца с атомной массой 56. Написать уравнение реакции получения радиоактивного марганца и реакцию β-распада.

708. Как объяснить выбрасывание из ядра радиоактивного вещества электрона (β-радиоактивный распад), если в состав ядра входят только протоны и нейтроны?

709. При бомбардировке изотопа азота $_7N^{14}$ нейтронами получается изотоп углерода $_6C^{14}$, который оказывается β-радиоактивным. Написать уравнения обеих реакций.

710. Бомбардируя бор $_5B^{11}$ быстрыми протонами, получили в камере Вильсона три почти одинаковых следа частиц, направленных в разные стороны. Какие это частицы?

711. Имеется фотография следа некоторой частицы, сделанная в камере Вильсона (рис. 110). Камера находилась в магнитном поле, силовые линии которого перпендикулярны к плоскости фотоснимка. Можно ли по этой фотографии определить, где начало траектории частицы?

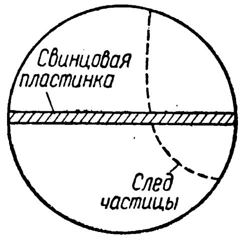


Рис. 110.

712. Почему α-частицы, выбрасываемые радиоактивными веществами, не могут вызвать ядерных реакций в тяжелых элементах, в то время как они их вызывают в легких?

713. Почему в качестве замедлителей нейтронов применяют парафин, воду и другие водородоподобные вещества?

714. Скорость α-частицы в среднем в 15 раз меньше скорости β-частицы. Объяснить, почему α-частицы слабее отклоняются магнитным полем (сравнить радиусы кривизны их траекторий в одном и том же магнитном поле).

715. Если в колбу, наполненную воздухом, поместить α-радиоактивное вещество, то α-частицы не вызывают свечения сернистого цинка, которым покрыты ее стенки. При откачивании воздуха из колбы стенки начинают светиться. Чем это можно объяснить?

716. По нефтепроводу сначала перекачивают бензин, а затем — нефть. Как установить момент, когда через данное сечение трубопровода проходит граница раздела бензина и нефти? Пробы из трубопровода не брать.

717. Вследствие радиоактивного распада $_{92}U^{238}$ превращается в $_{82}Pb^{206}$. Сколько при этом происходит α-и β-распадов?

718. Какое количество урана $_{92}U^{235}$ расходуется в сутки на атомной электростанции мощностью 5000 *квт*? К. п. д. принять равным 17%. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия 200 *Мэв*.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Приступая к решению какой-нибудь задачи, надо прежде всего прочитать внимательно ее условие, выписать (в столбик) обозначения всех величин, о которых идет речь в этой задаче, с их числовыми значениями и наименованием единиц, в которых они измерены. Сюда же следует выписать и те величины и их значения, которые должны быть известны ученику по условию задачи. Так, например:

1. В условии задачи указано, что «поезд двигался до полной остановки 16 *сек*». Из этой фразы вытекает, что конечная скорость поезда $v=0$.

2. В условии дано: «Давление газа возросло вдвое». Это значит, что $p_2 = 2p_1$.

3. В условии указано: «При постоянной температуре». Значит, $\overset{\circ}{t_1} = \overset{\circ}{t_2}$.

Требуется также выписать значения необходимых для решения задачи величин, которые можно взять из справочных таблиц, при условии, что эти величины не являются искомыми в данной задаче. Приведем несколько примеров:

1. В условии задачи говорится: «В баллоне объемом 10 $дм^3$ содержится кислород...». В этом случае из справочника можно взять молекулярную массу кислорода или его плотность при нормальных условиях.

2. В условии дано: «Реостат из железной проволоки нагрелся и его сопротивление увеличилось в два раза ...». Из справочника можно взять значение удельного сопротивления и термического коэффициента сопротивления железа и, кроме того, записать, что $R_2 = 2R_1$.

3. При решении задач из справочных таблиц можно брать значения постоянных величин, как, например, гравитационная постоянная, заряд и масса электрона, постоянная Планка, число Фарадея и т. д.

Внимательно прочитав еще раз условие задачи, надо четко представить себе те физические явления, которые составляют физическую сущность задачи. Например, анализируем такую задачу: «Камень падает в колодец, и через 5 *сек* слышен удар камня о дно колодца. Определить глубину колодца, если скорость звука приблизительно составляет 300 *м/сек* и $g = 9{,}8$ $м/сек^2$». Устанавливаем, что речь идет о двух физических явлениях: равноускоренном движении (падение камня в колодец) и равномерном распространении звука в воздухе (от дна колодца до уха наблюдателя).

Рассмотрим еще такую задачу. Свинцовая пуля при выстреле вертикально вверх достигла высоты 1200 *м*. При обратном падении она, ударившись о землю, нагрелась. Считая, что 50% всей энергии удара идет на нагревание пули, рассчитать, на сколько градусов нагреется пуля. Здесь речь идет о превращении потенциальной энергии в кинетическую и последней частично в теплоту.

Ознакомившись с условием задачи и выписав значения всех данных величин, надо установить законы и формулы, связывающие физические величины и характеризующие явления, которые составляют физическую сущность задачи. При этом следует четко представить себе все те предположения, которые допускаются условием задачи для упрощения решения и которые надо сделать, чтобы решить эту задачу.

Так, рассматривая падение тел в воздухе, можно пользоваться законами свободного падения при незначительной его высоте. В ряде задач по электричеству можно пренебречь силой тока, идущего по вольтметру, или падением напряжения на амперметре и т. д.

Часто такие предположения, упрощающие решение задачи, указываются в ее условии. Например, часто предлагается считать движение равномерным или равноускоренным, газы — идеальными, пренебречь сопротивлением воздуха, поглощением света линзами и т. д.

После установления законов физических явлений, касающихся физического содержания задачи, и формул, которые связывают между собой физические величины, надо просмотреть все данные величины, выписанные из условия задачи. Это необходимо, чтобы выяснить, достаточно ли этих данных для решения задачи.

Иногда в условии задачи могут быть данные, не нужные для ее решения. Эти данные могут быть включены в условие для более полной характеристики рассматриваемого в задаче процесса или даже для проверки критического отношения решающего к содержанию условия задачи.

Для решения задачи надо установить зависимость между искомыми и данными величинами. Значит, из условия каждой задачи надо выделить совокупность данных величин, которыми определяется искомая величина, после чего надо установить совокупность тех действий, которые надо выполнить над числовыми значениями данных величин, чтобы получить значение искомой величины. Иначе говоря, надо составить формулу, в которой бы искомая величина выражалась через известные.

Решать задачу в большинстве случаев удобнее в общем виде, не подставляя числовых значений отдельных величин.

Для примера рассмотрим решение такой задачи. Груз массой $m = 200$ *г*, привязанный к нити длиной $l = 40$ *см*, вращают в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью так, что нить описывает коническую поверхность. При этом угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 36°$. Определить угловую скорость вращения груза и величину натяжения нити.

Выпишем величины и их значения, заданные в условии, обозначив их соответствующими буквами.

Дано:

$$m = 200\ г = 0{,}2\ кг,$$
$$l = 40\ см = 0{,}4\ м,$$
$$\alpha = 36°.$$
$$\omega - ?\quad T - ?$$

Анализ условия. Груз движется по окружности с постоянной скоростью. Таким образом, ускорение его направлено к центру и равно $a = \omega^2 r$, где r — радиус окружности, по которой движется груз.

При этом движении на груз действуют только две силы — вес P и сила натяжения нити T. Равнодействующая этих сил является центростремительной силой.

Решение. Определим сначала натяжение нити T. Как видно из рис. 111,

$$P = T\cos\alpha, \text{ откуда } T = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Для нахождения угловой скорости ω воспользуемся соотношением

$$a_{ц.с} = \omega^2 r, \text{ откуда } \omega = \sqrt{\frac{a_{ц.с}}{r}}.$$

Однако $ma_{ц.с} = T\sin\alpha$, откуда $a_{ц.с} = \frac{T\sin\alpha}{m} = \frac{mg\sin\alpha}{m\cos\alpha} = c\mathrm{tg}\,\alpha.$

Из рис. 111 видно, что $r = l\sin\alpha$. Подставив значения $a_{ц.с}$ и r в формулу для ω, получим $\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}$.

Теперь подставим числовые значения величин

$$T = \frac{0{,}2\ кг\cdot 9{,}8\ м/сек^2}{\cos 36^\circ} = 2{,}45\ н;\quad \omega = \sqrt{\frac{9{,}8\ м/сек^2}{0{,}4\ м\cdot\cos 36^\circ}} = 5{,}6\ сек^{-1}.$$

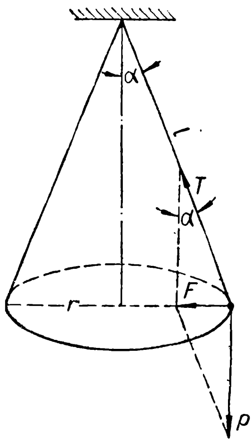


Рис. 111.

Такой метод решения задач, когда искомая величина выражается в общем виде как функция данных величин, позволяет проанализировать полученный результат, чтобы четче выяснить функциональную зависимость между искомой величиной и величинами, данными в условии, установить, как изменяется искомая величина с изменением тех величин, через которые она выражена. Преимущество этого метода состоит в том, что функциональная зависимость, установленная между искомой и данными величинами, остается верной не только в конкретных условиях данной задачи, но и для всех задач, однотипных с данной, т. е. остается верной для любых числовых значений величин, входящих в условие задачи, если только эти числовые значения физически реальны. Это дает возможность применить полученное в общем виде решение ко всем другим характерным случаям, представляющим другие варианты явлений и процессов, описанных в задаче.

В частности, формула $\omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha}$, которую мы установили для вращения привязанного к нити груза в горизонтальной плоскости, будет верной для вращения центробежного регулятора паровой машины и т. д.

После решения задачи в общем виде довольно часто бывает целесообразно проанализировать формулу, выведенную для искомой величины, чтобы выяснить физическую сущность полученного ответа, оценить полученный результат с точки зрения его вероятности. Например, решаем такую задачу. С какой силой давит на пол лифта человек весом $P = 650$ *н*, если лифт опускается вниз с ускорением $a = 1$ *м/сек*^{2}? Находим, что сила, с которой человек давит на пол лифта, равна $F = P\left(1 - \frac{a}{g}\right)$. Из полученной формулы видно, что при $a = 0$, т. е. когда лифт опускается равномерно, $F = P$. Если же лифт опускается с ускорением свободного падения ($a = g$), то $F = 0$, т. е. человек не давит на пол.

Последним этапом решения задачи есть нахождение числового значения результата. При подстановке числовых значений следует следить за тем, чтобы все величины были выражены в единицах одной и той же системы единиц.

Только в отдельных случаях нет необходимости все данные выражать в одной и той же системе. Это касается тех величин, которые повторяются в данной формуле в виде отношения, например $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$, или находятся в левой и правой части уравнения, например, $V_t = V_0(1 + \beta t°)$, или $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$. В этих случаях, поскольку наименования величин, повторяющихся в уравнении, сократятся и отношение их будет абстрактным числом, решать задачу можно и в внесистемных единицах измерения (например, давление оставить в *мм рт. ст.*, объем в *л* и т. д.). Однако в обоих случаях V_1 и V_2 или p_1 и p_2 должны быть выражены в одинаковых единицах.

Числа, входящие в остаточную формулу решения физической задачи, как правило, являются результатами измерений. Все же результаты измерений являются приближенными, и поэтому при действиях с ними надо руководствоваться правилами действий с приближенными числами. При выполнении приближенных расчетов можно пользоваться логарифмическими таблицами и логарифмической линейкой. У числового ответа сразу же, как только вместо буквенных обозначений подставляются числа, нужно писать наименование размерности.

Для контроля правильности решения задачи можно проверить наименование полученного ответа. Например, решаем такую задачу. Электрическая печь, нагреватель которой изготовлен из никелиновой проволоки сечением 1,5 *мм*^{2} и длиной 51 *м*, включается в цепь с напряжением 110 *в*. Какое количество теплоты дает такая печь в течение 1 *ч*? Получаем окончательную формулу $Q = \frac{U^2St}{\rho l}$. Подставим в эту формулу наименование всех величин: $\frac{в^2 \cdot м^2 \cdot сек}{ом \cdot м \cdot м} = \frac{в^2 \cdot сек}{ом}$.

Учитывая, что $\frac{в}{ом} = а$, получим $\frac{в^2 \cdot сек}{ом} = дж$, т. е. правая и левая части формулы имеют наименование теплоты (энергии).

В тех задачах, где требуется начертить график, следует целесообразно выбрать масштаб и начало координат. На графике обязательно указать масштаб.

Ниже приведены примеры решения задач из разных разделов физики.

Задача. В вагоне, движущемся по горизонтальному пути с ускорением $a = 2$ *м/сек*^{2}, висит на нити груз массой $m = 0{,}2$ *кг*. Найти натяжение нити и угол отклонения ее от вертикали.

Дано:

$$a = 2 \text{ м/сек}^2;$$
$$m = 0{,}2 \text{ кг};$$
$$\alpha - ?\ T - ?$$

А н а л и з з а д а ч и. Независимо от состояния вагона (покой или движение) на груз будут действовать только две силы: вес и сила натяжения нити. Когда вагон не движется или движется с постоянной скоростью, обе силы направлены по одной прямой в противоположные стороны и уравновешивают друг друга. При движении вагона с ускорением нить отклоняется от вертикали в сторону, противоположную движению, и обе действующие на груз силы должны сообщить ему относительно Земли ускорение, равное ускорению вагона. Правильнее было бы говорить, что не груз отклоняется, а вагон, значит, и точка прикрепления нити к вагону уходит «из-под» груза. Таким образом, для движения груза согласно второму закону Ньютона

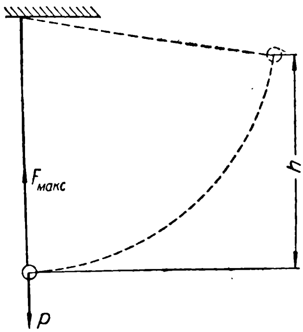


Рис. 112.

$$ma = F,$$

где F — равнодействующая сил P и T.

Р е ш е н и е. Из рис. 111 видно, что $F = T \sin \alpha$ и $T \cos \alpha = P$. Следовательно, получаем два уравнения: $ma = T \sin \alpha$ и $P = T \cos \alpha$.

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{a}{g} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ откуда } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g} = \operatorname{arctg} 0{,}204 = 11{,}5^\circ.$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая, получим:

$$T^2 = m^2 (a^2 + g^2), \text{ откуда } T = m\sqrt{a^2 + g^2} \approx 2 \text{ н}.$$

Задача. Шар, подвешенный на нити, отводят в сторону и отпускают. На какую высоту h был поднят шар, если максимальное натяжение нити оказалось втрое больше, чем вес шара.

А н а л и з з а д а ч и. При отпускании отведенного в сторону шара он движется вниз по дуге окружности радиусом R, причем R — длина нити. На шар со стороны нити должна действовать центростремительная сила $F = \frac{mv^2}{R}$, где m — масса шара, v — скорость его движения. По третьему закону Ньютона с такой же силой $F' = F$ действует шар на нить. В нижней точке (рис. 112) траектории шара сила F' направлена вертикально вниз и, значит, ее направление совпадает с направлением силы веса. В этот момент натяжение нити максимальное и составляет $F_{макс} = P + F'$, где P — вес шара.

Решение. В соответствии с условием задачи

$$F_{\text{макс}} = P + \frac{mv^2}{R} = 3P, \text{ откуда } F = \frac{mv^2}{R} = 3P - P = 2P = 2mg$$

$$\text{или } \frac{v^2}{R} = 2g.$$

Поскольку скорость v при падении шара с высоты h равна $v = \sqrt{2gh}$, то, подставляя значение v, получим

$$\frac{2gh}{R} = 2g \quad \text{или} \quad \frac{h}{R} = 1, \text{ откуда } h = R,$$

т. е. шар был поднят на высоту, равную длине нити. При этом нить находилась бы в горизонтальном направлении.

Задача. Каким должен быть наименьший объем баллона, вмещающего 6,4 *кг* кислорода, если его стенки при температуре 20° С выдерживают давление $1{,}7 \cdot 10^7$ *н/м²*?

Анализ задачи. Искомый наименьший объем баллона должен быть равен объему, занимаемому кислородом, при температуре 20° С и давлении $1{,}7 \cdot 10^7$ *н/м²*. Объем кислорода при нормальных условиях (0° С; $1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*) можно определить по массе кислорода m и его плотности ρ.

Решение. Из уравнения газового состояния

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T_1} \quad \text{находим} \quad V_1 = \frac{p_0V_0T_1}{p_1T_0}.$$

Однако $V_0 = \dfrac{m}{\rho_0}$, поэтому

$$V_1 = \frac{p_0mT_1}{\rho_0p_1T_0} = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2 \cdot 6{,}4 \text{ кг} \cdot 293^\circ}{1{,}429 \text{ кг/м}^3 \cdot 1{,}7 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2 \cdot 273^\circ} \approx 0{,}028 \text{ м}^3 = 28 \text{ л}.$$

Задача. В электрическую цепь с напряжением 110 *в* включена электрическая печь, последовательно с которой включено сопротивление 5 *ом*. Каким должно быть сопротивление печи, чтобы в ней выделялось 200 *вт*?

Дано:

$U = 110$ *в*;
$R = 5$ *ом*;
$N = 200$ *вт*.

R_x — ?

Анализ задачи. Печь включена в электрическую цепь последовательно с сопротивлением R, поэтому ток идет одинаковой силы через печь и сопротивление, и напряжение U падает на сопротивлении печи R_x и на сопротивлении R. Для определения из формулы мощности $N = I^2R_x$ сопротивления R_x надо знать силу тока в цепи, которую можно определить по закону Ома

$$I = \frac{U}{R + R_x}.$$

Решение. В формулу мощности $N = I^2 R_x$ подставим значение $I = \frac{U}{R + R_x}$

$$N = \frac{U^2}{(R + R_x)^2} R_x.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно R_x:

$$N R_x^2 - (U^2 - 2RN) R_x + NR^2 = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$R_x = \frac{U^2 - 2RN \pm \sqrt{U^2 (U^2 - 4RN)}}{2N}.$$

Подставив числовые значения, получим $R_{x_1} = 50$ *ом* и $R_{x_2} = 0,5$ *ом*. Оба решения удовлетворяют условие задачи. Однако при $R_{x_1} = 50$ *ом* в цепи идет ток $I_1 = 2$ *а* и от источника энергии потребляется мощность $N_1 = 2$ *а* $\cdot$ 110 *в* = 220 *вт*, а при $R_{x_2} = 0,5$ *ом* сила тока в цепи $I_2 = 20$ *а* и от источника потребляется мощность $N_2 = 20$ *а* $\times$ $\times$ 110 *в* = 2200 *вт*. Отсюда ясно, что целесообразнее взять печь с сопротивлением 50 *ом*.

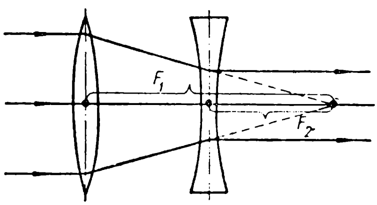


Рис. 113.

Задача. Как надо расположить две линзы, из которых одна собирающая, а другая рассеивающая, чтобы пучок параллельных лучей, пройдя обе линзы, остался параллельным? Какое соотношение должно существовать между фокусными расстояниями линз, чтобы задача имела решение?

Анализ задачи. Пучок лучей после прохождения через рассеивающую линзу будет параллельным в том случае, когда точка пересечения преломленных в собирающей линзе лучей будет находиться в фокусе рассеивающей линзы. Поскольку на собирающую линзу падает параллельный пучок лучей, то отсюда следует, что линзы надо расположить так, чтобы их главные фокусы совпадали.

Решение. Решение задачи дано на рис. 113. Задача не будет иметь решения, если фокусное расстояние собирающей линзы F_c меньше, чем фокусное расстояние рассеивающей линзы F_p.

Задача. На ядро атома урана летит α-частица, масса которой $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$ *кг*, со скоростью $v = 2 \cdot 10^7$ *м/сек*. На какое расстояние α-частица может приблизиться к ядру? Электрический заряд ядра атома урана положительный и равен $92 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}$ *k*; заряд α-частицы тоже положительный и равен $2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}$ *k*.

Дано:

$$m = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг};$$
$$v = 2 \cdot 10^7 \text{ м/сек};$$
$$q_1 = 92 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \; k;$$
$$\underline{q_2 = 2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \; k.}$$
$$r - k$$

Анализ задачи и решение. Вокруг ядра атома урана существует электрическое поле. Кинетическая энергия, которой обладает α-частица, расходуется на выполнение работы против сил взаимодействия электрического поля ядра и заряда α-частицы, т. е.

$$\frac{mv^2}{2} = q_2U, \quad \text{где} \quad U = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}; \quad \text{тогда} \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

$$\text{откуда} \quad r = \frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 mv^2}.$$

После подстановки числовых значений

$$r = \frac{92\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}\ k\cdot 2\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}\ k}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{ф/м}\cdot 6{,}6\cdot 10^{-27}\ \text{кг}\cdot 4\cdot 10^{14}\ \text{м}^2/\text{сек}^2} \approx 3{,}2\cdot 10^{-14}\ \text{м}.$$

МЕХАНИКА

§ 1. КИНЕМАТИКА

1. а) $v_2 = 20$ *м/сек*; $t_2 = 90$ *сек*; б) $t_1 = 20$ *сек*; $t_2 = 30$ *сек*.

Решение. а) Поезда движутся в одном направлении. Скорость второго поезда по отношению к скорости первого (или первого относительно второго) $v = v_2 - v_1$.

С другой стороны, относительную скорость можно определить так:

$$v = \frac{l_2}{t_1} = \frac{l_1}{t_2},$$

где t_1 — время, в течение которого пассажир первого поезда видит второй поезд длиной l_2. Отсюда $v = 10$ *м/сек*. Тогда

$$v_2 = v + v_1 = 10\ м/сек + 10\ м/сек = 20\ м/сек = 72\ км/ч.$$

Время, в течение которого пассажир второго поезда видит первый поезд,

$$t_2 = \frac{l_1}{v} = 90\ сек.$$

б) Для встречных поездов. Относительная скорость поездов $v = v_1 + v_2$. Время, в течение которого пассажиры наблюдают движение соседних поездов,

$$t_1 = \frac{l_2}{v} = 20\ сек; \quad t_2 = \frac{l_1}{v} = 30\ сек,$$

где t_1 — время, в течение которого пассажир первого поезда наблюдает прохождение второго поезда длиной l_2, и t_2 — время, в течение которого пассажир второго поезда видит прохождение первого поезда длиной l_1.

2. $t_3 = 30$ *мин*.

Решение. Обозначим расстояние между лодочными станциями s, скорость движения лодки относительно воды v и скорость течения воды v_0. Тогда движения лодки по течению и против течения реки равномерные и определяются уравнениями $s = (v + v_0)\,t_1$ и $s = (v - v_0)\,t_2$.

Спасательный круг движется со скоростью течения воды v_0, поэтому $s = v_0 t_3$.

Из первых двух уравнений

$$vt_1 + v_0 t_1 = vt_2 - v_0 t_2 \quad или \quad \frac{v}{v_0} = \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1}.$$

Из первого и третьего уравнений

$$vt_1 + v_0 t_1 = v_0 t_3 \quad \text{или} \quad \frac{v}{v_0} = \frac{t_3 - t_1}{t_1}.$$

Приравняем правые части полученных уравнений:

$$\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} = \frac{t_3 - t_1}{t_1}, \quad \text{откуда} \quad t_3 = \frac{2t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 30 \text{ мин.}$$

3. $v_1 = 7{,}5$ *км/ч*; $v_2 = 17{,}5$ *км/ч*.

Решение. Для движения катера вверх и вниз по реке

$$l = t_1(v_1 + v_2) \quad \text{и} \quad l = t_2(v_2 - v_1).$$

Перепишем эти уравнения так:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \dfrac{l}{t_1}; \\ v_2 - v_1 = \dfrac{l}{t_2}. \end{cases}$$

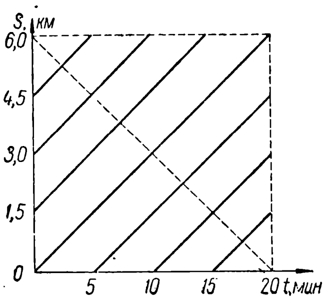


Рис. 114.

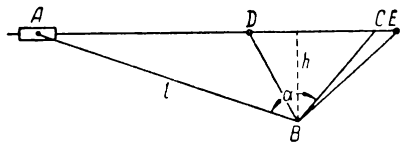


Рис. 115.

Решив эту систему уравнений относительно v_1 и v_2, получим

$$v_1 = l\frac{t_2 - t_1}{2t_1 t_2} = 7{,}5 \text{ км/ч} \quad \text{и} \quad v_2 = l\frac{t_2 + t_1}{2t_1 t_2} = 17{,}5 \text{ км/ч}.$$

4. 7 троллейбусов.

Решение. Построим графики путей встречных троллейбусов и троллейбуса, в котором едет пассажир (рис. 114). Из графика видим, что пассажир встретит 7 троллейбусов.

5. а) $56°24' \leqslant \alpha \leqslant 123°36'$; б) $v_3 = 2{,}5$ *м/сек*.

Решение. Предположим, что автобус находится в точке A, а человек — в точке B (рис. 115). Пусть человек встречается с автобусом в точке C. Обозначим через α угол между направлением, по которому виден автобус, и направлением, по которому должен бежать человек. Пусть человек прибежит в точку C через t_2 *сек*, а автобус придет туда же через t_1 *сек*. Тогда $AC = v_1 t_1$ и $BC = v_2 t_2$.

Из треугольника ABC видим, что $AC = l\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, где $\sin\beta = \dfrac{h}{BC}$.

Таким образом, $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}\cdot\dfrac{v_1}{v_2}\cdot\dfrac{t_1}{t_2}$. По условию задачи $t_1 \geqslant t_2$, поэтому $\sin\alpha \geqslant \dfrac{hv_1}{lv_2} \approx 0{,}8333$. Отсюда $56°24' \leqslant \alpha \leqslant 123°\,36'$.

Таким образом, направления, по которым может бежать человек, лежат в пределах угла DBE. При движении вдоль BD или BE человек достигнет дороги одновременно с автобусом. В любую из точек дороги, находящуюся между точками D и E, человек прибежит раньше автобуса.

б) Наименьшую скорость, с которой должен бежать человек, чтобы встретить автобус, можно определить из условий $t_1 = t_2$ и $\sin\alpha = \frac{hv_1}{lv_2} = 1$. Отсюда $v_2 = \frac{h}{l}v_1 = 2{,}5$ *м/сек.*

6. $v_{ср} = 30$ *км/ч.*

Решение. Средняя скорость движения автомобиля $v_{ср} = \frac{2s}{t_1 + t_2}$, где s — расстояние между пунктами A и B; $t_1 = \frac{s}{v_1}$; $t_2 = \frac{s}{v_2}$. Таким образом, $v_{ср} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_2 + v_1} = 30$ *км/ч.*

7. $v_{ср} \approx 7$ *км/ч.*

Решение. Средняя скорость движения велосипедиста

$$v_{ср} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3},$$

где s_1, s_2 и s_3 — отрезки пути, пройденные соответственно за время t_1, t_2 и t_3 со скоростями v_1, v_2 и v_3.

Однако по условию задачи $s_1 = s_2 + s_3$ и $t_2 = t_3$. Средняя скорость движения велосипедиста на второй половине пути $s_2 + s_3$ будет $\frac{v_2 + v_3}{2}$ (так как $t_2 = t_3$). Поэтому можно записать

$$v_{ср} = \frac{2s_1}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{2s_1}{v_2 + v_3}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} \approx 7 \text{ км/ч}.$$

8. $t_3 = 45$ *сек.*

Решение. Запишем уравнения движения пассажира для указанных в условии задачи случаев:

$$s = v_1t_1; \quad s = v_2t_2; \quad s = (v_1 + v_2)\,t_3,$$

где s — длина эскалатора; v_1 — скорость его движения; v_2 — скорость движения пассажира по неподвижному эскалатору; t_1 — время подъема пассажира, неподвижно стоящего на движущемся эскалаторе; t_2 — время подъема пассажира по неподвижному эскалатору; t_3 — искомое время подъема движущегося пассажира по движущемуся эскалатору.

Определив из первых двух уравнений v_1 и v_2 и подставив в третье уравнение, получим

$$s = s\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)t_3, \text{ откуда } t_3 = \frac{t_1t_2}{t_1 + t_2} = 45 \text{ сек}.$$

9. $n_1 = 240$ и $n_2 = 480$ пассажиров.

Решение. Определим сначала длину эскалатора: $s = 120l = 54$ *м*. Теперь подсчитаем, на какое расстояние переместится определенная точка ленты эскалатора за 1 *мин*: $s = vt = 54$ *м*. Следовательно, $s = s_1$, т. е. мимо дежурного пройдут пассажиры, стоящие на 120 ступеньках эскалатора: $n_1 = 240$ пассажиров.

Во втором случае относительная скорость движения пассажиров, стоящих на эскалаторах, будет в два раза больше, и за 1 *мин* мимо пассажира пройдет 240 ступенек эскалатора с стоящими на них $n_2 = 480$ пассажирами.

10. $v = 3$ *км/ч*.

Решение. Задача решается очень быстро, если рассматривать движение весла и рыбака относительно течения реки, а не относительно ее берегов. Весло, сносимое течением, остается относительно течения в покое. Рыбак сначала удаляется от неподвижного (относительно течения реки) весла, а затем приближается к нему, причем скорость движения рыбака относительно течения реки в обоих случаях (по условию задачи) одинаковая. Если обозначить через t время движения рыбака от момента потери весла до начала погони за ним, то время движения рыбака от момента потери весла до момента его отыскания будет $2t$. Вместе с тем $2t$ есть время движения весла. Таким образом, если обозначить пройденный веслом (а, значит, и течением реки) путь через s, то искомая скорость течения реки (движения весла) составит $v = \frac{s}{2t} = 3$ *км/ч*.

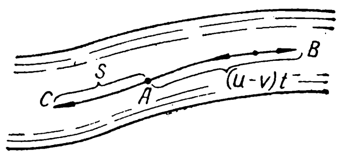


Рис. 116.

Задачу можно также решить, рассматривая движения весла и рыбака относительно берега реки. Сравним время движения весла и движения рыбака. Время погони за веслом (рис. 116)

$$t_{BC} = \frac{s_{BC}}{u+v} = \frac{s_{AB} + s_{AC}}{u+v} = \frac{(u-v)\,t + s}{u+v},$$

где u — скорость движения рыбака; v — скорость течения реки.

Время уплытия весла $t_\text{в} = t_{AB} + t_{BC}$. Поэтому

$$\frac{s}{v} = t + \frac{(u-v)\,t + s}{u+v}, \text{ откуда } v = \frac{s}{2t} = 3 \text{ км/ч}.$$

Обращаем внимание, что в решение скорость движения рыбака не входит.

11. $\frac{s}{s_1} = 2$.

Решение. Пусть время движения вагона от момента отцепления до остановки будет t. Тогда вагон, двигаясь равнозамедленно до полной остановки, пройдет путь $s_1 = \frac{1}{2} v_0 t$. Поезд за это же время пройдет путь $s = v_0 t$, откуда $\frac{s}{s_1} = 2$.

12. $a \approx -3$ *м/сек*^{2}; $v_0 \approx 11$ *м/сек*.

Решение.

В соответствии с условием задачи можно записать:

$$s = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} \text{ и } s = v t_2 + \frac{a t_2^2}{2}, \text{ где } v = v_0 + a t_1.$$

С первого уравнения определим $v_0 = \dfrac{2s - at_1^2}{2t_1}$ и, подставив во второе, решим его относительно a:

$$a = \frac{2s\,(t_1 - t_2)}{t_1 t_2\,(t_1 + t_2)} \approx -3\ м/сек^2.$$

Тогда $v_0 \approx 11$ *м/сек*.

13. $a = 10$ *м/сек²*; $v_4 = 40$ *м/сек*; $v_{10} = 100$ *м/сек*; $s_{\text{II}} = 15$ *м*; $s_{\text{V}} = 45$ *м*; $s_{\text{II}} + s_{\text{III}} = 40$ *м*.

Решение. Путь, пройденный телом за n-ую секунду,

$$s_n - s_{n-1} = \frac{a}{2}\,(t_n^2 - t_{n-1}^2) = \frac{a}{2}\,[t^2 - (t-1)^2] = \frac{a}{2}\,(2t - 1).$$

Отсюда ускорение движения $a = \dfrac{2\,(s_n - s_{n-1})}{2t - 1} = 10$ *м/сек²*. Скорость в конце четвертой и десятой секунд

$$v_4 = at_4 = 40\ м/сек \quad и \quad v_{10} = at_{10} = 100\ м/сек.$$

Путь, пройденный телом за вторую секунду,

$$s_2 - s_1 = \frac{a}{2}\,(2t_2 - 1) = 15\ м;$$

аналогично за пятую секунду

$$s_5 - s_4 = \frac{a}{2}\,(2t_5 - 1) = 45\ м;$$

за третью секунду

$$s_3 - s_2 = \frac{a}{2}\,(2t_3 - 1) = 25\ м.$$

Тогда за вторую и третью секунды, вместе взятые, тело проходит

$$s_{\text{II}} + s_{\text{III}} = 15\ м + 25\ м = 40\ м.$$

14. Нет ($t < 0{,}05$ *сек*).

Решение. Определим время, в течение которого шарик пролетел расстояние от деления 4 *см* до деления 9 *см*. Расстояние $s_2 = 9$ *см* шарик пролетел за время $t_2 = \sqrt{\dfrac{2s_2}{g}}$, а расстояние $s_1 = 4$ *см* — за $t_1 = \sqrt{\dfrac{2s_1}{g}}$.

Тогда время движения от деления 4 до 9 *см* составляет

$$t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2s_2}{g}} - \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}) = 0{,}045\ сек.$$

Поскольку $t < 0{,}05$ *сек*, то затвор не обеспечивает требуемой выдержки.

15. $v_0 \approx 6{,}9$ *м/сек*.

Решение. Поскольку тела начали двигаться одновременно и одновременно упали, то время их движения одинаково, несмотря на то, что первое тело только падало с высоты H, находясь в равноускоренном движении, а второе тело сначала поднималось равнозамедленно, а затем начало падение с высоты $H - h + h_1$ (рис. 117), где h_1 — высота, на которую поднимается тело во время подъема. Следовательно, можно записать

$$t_1 = t_2 + t_3, \qquad (1)$$

где t_1 — время падения первого тела;

t_2 — время поднятия до наивысшей точки C;

t_3 — время падения второго тела от точки C до поверхности Земли.

В соответствии с обозначениями на рис. 117

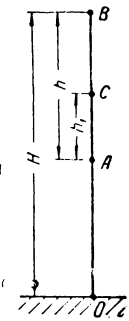


Рис. 117.

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}\ ; \ t_2 = \frac{v_0}{g}\ ; \ t_3 = \sqrt{\frac{2(H - h + h_1)}{g}},$$

где $h_1 = \frac{v_0^2}{2g}$.

Подставив значения t_1, t_2 и t_3 в уравнение (1), получим

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2(H-h)}{g}}$$

или

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2(H-h)}{g}}.$$

Возведя обе части в квадрат $\left(\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2(H-h)}{g}}\right)^2 =$
$= \left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{v_0}{g}\right)^2$, получим $v_0 = h\sqrt{\frac{g}{2H}} \approx 6{,}9$ *м/сек.*

Задачу можно решить и иначе. Приняв за начало отсчета поверхность Земли, запишем уравнения для расстояний тел от поверхности Земли:

$$x_1 = H - \frac{gt^2}{2} \ \text{и} \ x_2 = H - h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения расстояние между телами и поверхностью Земли будет равно нулю. Тогда

$$H - \frac{gt^2}{2} = 0, \quad \text{откуда} \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\text{и} \quad H - h + v_0\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{2Hg}{2g} = 0.$$

Отсюда $v_0 = h\sqrt{\frac{g}{2H}} \approx 6{,}9$ *м/сек.*

16. $v_0 = \frac{H-h}{2h}\sqrt{2gh} = 7$ *м/сек.*

Решение. Напишем уравнения движения обоих тел:

$$h = \frac{1}{2} gt^2 \quad \text{и} \quad H = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2.$$

Из этих уравнений получим

$$H = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} + h, \quad \text{откуда} \quad v_0 = \frac{H-h}{2h} \sqrt{2gh} = 7 \text{ м/сек.}$$

17. $\alpha = 60°$.

Решение. Оба тела могут встретиться на линии AO (рис. 118) в точке C. Разложим начальную скорость v_0 тела, брошенного из точки B, на горизонтальную v_{0_x} и вертикальную v_{0_y} составляющие $v_{0_x} = v_0 \cos \alpha$ и $v_{0_y} = v_0 \sin \alpha$.

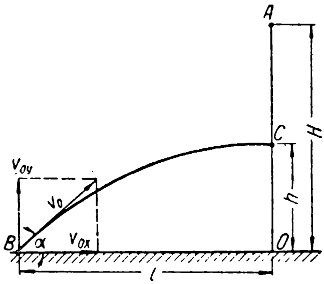


Рис. 118.

Поскольку в горизонтальном направлении на тело не действуют силы, то время, прошедшее от начала движения до момента встречи, можно определить так:

$$t = \frac{l}{v_{0_x}} = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}. \tag{1}$$

За это же время тело A опустится на расстояние

$$H - h = \frac{gt^2}{2}, \tag{2}$$

а тело B поднимется на высоту

$$h = v_{0_y} t - \frac{gt^2}{2}. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), получим

$$H = v_0 t \sin \alpha. \tag{4}$$

Подставив в уравнение (4) значение t из уравнения (1), получим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{l}$, т. е. угол бросания α не зависит от начальной скорости v_0. Если $\frac{H}{l} = \sqrt{3}$, то и $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, а $\alpha = 60°$.

18. $t = 3{,}25$ *сек*; $h \approx 43{,}8$ *м*.

Решение. Выберем за начало отсчета времени момент бросания первого тела. Высота поднятия первого тела в момент времени t будет

$$h_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Высота поднятия второго тела выразится аналогичной формулой, но так как оно брошено на Δt позже, то для того же момента времени будет

$$h_2 = v_0 (t - \Delta t) - g \frac{(t - \Delta t)^2}{2}.$$

Тела встретятся в тот момент времени, когда высоты поднятия первого и второго тел будут одинаковы, т. е. $h_1 = h_2 = h$. Поэтому

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} = v_0 (t - \Delta t) - \frac{gt^2}{2} - \frac{g\Delta t^2}{2} + gt\Delta t,$$

откуда $t = \frac{v_0}{g} + \frac{\Delta t}{2} = 3{,}25$ *сек*; $h = v_0\left(\frac{v_0}{g} + \frac{\Delta t}{2}\right) -$

$$-\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} + \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g\Delta t^2}{8} \approx 43{,}8 \text{ м}.$$

19. Решение. Первую секунду тело движется ускоренно, причем ускорение увеличивается. Вторую секунду тело движется равноускоренно (ускорение постоянно). Третью секунду тело тоже движется ускоренно (величина ускорения уменьшается, но оно остается положительным, следовательно, скорость тела увеличивается). Таким образом, скорость тела будет максимальной в конце третьей секунды.

20. Решение. Приводим наиболее простое решение задачи. В тот момент, когда второй камень начинает падение, первый камень уже падает в течение 1 *сек*. За это время он приобрел скорость, численно равную g. Следовательно, скорость первого камня по отношению ко второму равна $g - 0 = g$. С этого момента времени оба камня падают с одинаковым ускорением. Следовательно, относительное ускорение равно нулю. Относительное движение будет равномерным со скоростью, численно равной g.

21. $a = -6 \cdot 10^6$ *м/сек*^{2}; $t \approx 0{,}66 \cdot 10^{-4}$ *сек*.

Решение. Для движения пули в доске $v_1^2 - v^2 = 2\,as$, откуда $a = \frac{v_1^2 - v^2}{2s} = -6 \cdot 10^6$ *м/сек*^{2}.

Время движения пули в доске $t = \frac{v_1 - v}{a} \approx 0{,}66 \cdot 10^{-4}$ *сек*.

22. $s \approx 1{,}9$ *см*.

Решение. За время движения пуль к мишени они снизятся соответственно на расстояния $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$ и $h_2 = \frac{gt_2^2}{2}$, где $t_1 = \frac{l}{v_1}$ и $t_2 = \frac{l}{v_2}$.

Тогда расстояние между точками попадания пуль в мишень $s = h_1 - h_2 = \frac{g}{2}\left(\frac{l}{v_1}\right)^2 - \frac{g}{2}\left(\frac{l}{v_2}\right)^2 = \frac{gl^2}{2v_1^2 v_2^2}(v_2^2 - v_1^2) \approx 0{,}019$ *м* $= 1{,}9$ *см*.

23. $t = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ *сек*; $a = -\frac{2}{9} \cdot 10^6$ *м/сек*^{2}; $v_1 \approx 282$ *м/сек*; $s_2 = 32$ *см*.

Решение. Из закона пути $s = \frac{at^2}{2}$ и скорости $v = at$ исключим ускорение; тогда $s = \frac{vt}{2}$, откуда $t = \frac{2s}{v}$ или $t = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ *сек*.

Теперь из формулы $v^2 = -2as$ определим ускорение движения пули в земляном вале $a = -\frac{v^2}{2s} = -\frac{2}{9}\cdot 10^6$ *м/сек*^{2}.

Скорость пули на глубине s_1 будет, очевидно, $v_0 = \sqrt{2a(s_1 - s_2)} \approx$ ≈ 282 *м/сек*.

Чтобы определить, на какой глубине скорость пули уменьшилась в три раза, запишем два уравнения:

$$v^2 = -2as \text{ и } \frac{1}{9}v^2 - v^2 = 2as_2,$$

$$\text{откуда } \frac{8}{9}\cdot 2as = 2as_2 \text{ и } s_2 = \frac{8}{9}s \text{ или } s_2 = 32 \text{ см.}$$

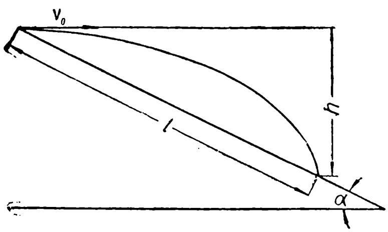


Рис. 119.

24. $s = 2\,v_0 t$.

Решение. Первое тело, двигаясь равноускоренно, пройдет за время t путь, равный $h_1 = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, а второе, двигаясь равнозамедленно, за то же время пройдет путь $h_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Расстояние между телами через время t равно $s = h_1 + h_2 = 2v_0 t$, т. е. будет увеличиваться прямо пропорционально времени движения.

25. $v_0 = \sqrt{\frac{gl\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}}$.

Решение. В горизонтальном направлении камень пролетит расстояние $s = v_0 t$ и одновременно опустится на расстояние $h = \frac{gt^2}{2}$.

Из рис. 119 следует, что $h = l\sin\alpha$ и $s = l\cos\alpha$. Следовательно, $l\cos\alpha = v_0 t$, откуда $t = \frac{l\cos\alpha}{v_0}$.

Подставив это значение t во второе уравнение, получим $l\sin\alpha = \frac{gl^2\cos^2\alpha}{2v_0^2}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{gl\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}}$.

26. $s_{1\,\text{гор}} \approx 312$ *м*; $s_{2\,\text{гор}} \approx 4680$ *м*; $t_1 \approx 39$ *сек*; $t_2 \approx 2{,}6$ *сек*.

Решение. В точку, высота которой над горизонтом составляет 500 *м*, снаряд мог попасть при восходящем и нисходящем полете. Поскольку движение снаряда в вертикальном направлении рассматриваем как равнозамедленное, то для определения времени полета снаряда к данной точке исходим из основного уравнения этого движения

$$h = v_1 t - \frac{gt^2}{2}, \text{ где } v_1 = v_0\sin\alpha.$$

Тогда это уравнение можно переписать

$$h = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$gt^2 - 2v_0t\sin\alpha + 2h = 0; \quad t = \frac{v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}}{g}.$$

Для упрощения расчетов примем, что $g = 10$ *м/сек²*. Тогда

$$t = \frac{120\sqrt{3} \pm \sqrt{43\,200 - 10\,000}}{10} \approx \frac{207{,}8 \pm 182}{10}; \ t_1 \approx 39 \text{ сек};$$

$$t_2 \approx 2{,}6 \text{ сек}.$$

Оба корня удовлетворяют условие задачи, поскольку на высоте 500 *м* снаряд будет при подъеме приблизительно через 2,6 *сек* и при спуске через 39 *сек* от начала движения.

В горизонтальном направлении снаряд (без учета сопротивления воздуха) движется равномерно со скоростью $v_2 = v_0\cos\alpha = 120$ *м/сек*. Тогда

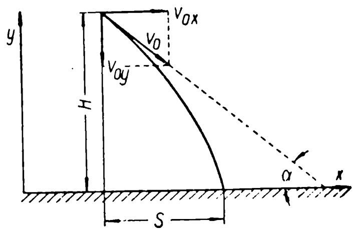


Рис. 120.

$$s_{1\ \text{гор}} = 120\cdot 2{,}6 \text{ м} \approx 312 \text{ м} \quad \text{и} \quad s_{2\ \text{гор}} \approx 120\cdot 39 \text{ м} \approx 4680 \text{ м}.$$

27. $$s = \frac{v_0\cos\alpha\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gH} - v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Решение. Скорость самолета при вхождении в пике разложим на вертикальную и горизонтальную составляющие (рис. 120). Тогда можно записать:

$$s = v_0t\cos\alpha \quad \text{и} \quad H = v_0t\sin\alpha + \frac{gt^2}{2}.$$

Решив эти два уравнения, получим

$$s = \frac{v_0\cos\alpha\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gH} - v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

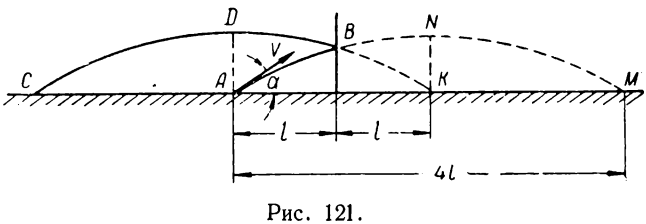


Рис. 121.

28. $\alpha \approx 25°$.

Решение. Так как скорость, с которой отлетел мяч, равна скорости, с которой он ударился, а угол отлета мяча равен углу падения, то траекторией мяча после отражения будет кривая BC (рис. 121), причем точка D будет максимальной высотой подъема мяча от горизонтальной поверхности. Если бы мяч не имел соударения в точке B, то его траекторией была бы кривая BM и максимальной высотой подъема мяча от горизонтальной поверхности явилась бы точка N, находящаяся на расстоянии l от штанги. Исходя из этого, можно утверждать, что траектории BC и BM симметричны относительно штанги. Из-за отсутствия сил трения траектории BC и BM симметричны относительно точки N, следовательно, $AK = KM$. Так как $AK = 2l$, то $AM = 4l$. Однако $AM = 4l$

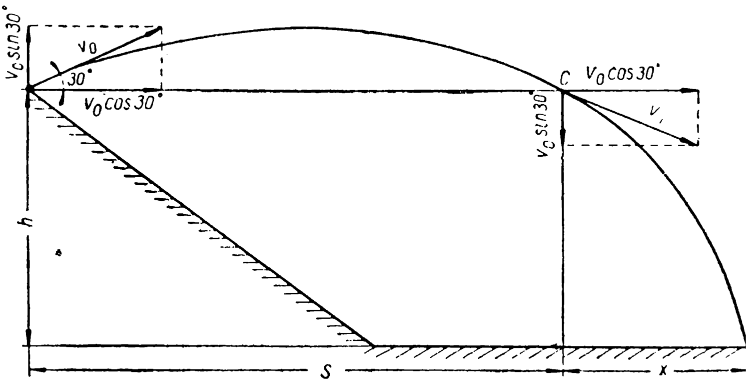


Рис. 122.

можно рассматривать как дальность полета тела, брошенного под углом α к горизонту. Поэтому

$$4l = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g},$$

откуда $\sin 2\alpha = \frac{4lg}{v^2}$ или $\sin 2\alpha \approx 0{,}766$; $2\alpha \approx 50°$; $\alpha \approx 25°$.

29. $L \approx 44{,}9$ *км*.

Решение. Разложим скорость снаряда на две составляющие (рис. 122). Тогда искомая дальность полета снарядов по горизонтали

$$L = s + x, \text{ где } s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(700\ м/сек)^2 \cdot 0{,}866}{9{,}8\ м/сек^2} \approx 4{,}33 \cdot 10^4\ м.$$

В точке C скорость снаряда равна v_0, т. е. равна скорости бросания. Разложим скорость на составляющие $v_в = v_0 \sin 30°$, $v_г = v_0 \cos 30°$. Тогда $x = v_0 t \cos 30°$; определим t из уравнения

$$h = v_0 \sin 30°\, t + \frac{gt^2}{2},$$

откуда $t = \frac{-700 \pm \sqrt{700^2 + 8 \cdot 9{,}8 \cdot 1000}}{2 \cdot 9{,}8}$ *сек*.

Значение корня берем со знаком плюс $t \approx 2{,}7$ *сек*. Тогда $x = 700 \times \times 0{,}866 \cdot 2{,}7$ *м* ≈ 1637 *м*. Таким образом, $L \approx 44{,}9$ *км*.

30. $t = 2$ *сек*; $h_1 = h_2 = 19{,}6$ *м*; $s_2 = 15$ *м*.

Решение. Для движения тел в горизонтальном направлении $s_1 = v_1 t$ и $s_2 = v_2 t$, а по вертикали $h_1 = \frac{gt^2}{2}$ и $h_2 = \frac{gt^2}{2}$.

Поскольку время полета обоих тел по условию одинаково и равно

$$t = \frac{s_1}{v_1} = 2 \text{ сек, то } h_1 = h_2 = 19{,}6 \text{ м и } s_2 = v_2 t = 15 \text{ м}.$$

31. $x = 8$ *м*.

Решение. Шарик после удара будет двигаться по кривой AC. Это движение можно рассматривать как результат сложения двух движений: равномерного прямолинейного движения в направлении AB (рис. 123) и свободного падения в вертикальном направлении. За время полета t шарик переместится по направлению начальной скорости на расстояние $AB = vt$, где $v = \sqrt{2gh}$. За это же время под действием земного притяжения шарик опустится на расстояние $BC = \frac{1}{2}gt^2$. Треугольник ABC — равнобедренный, следовательно, $vt = \frac{gt^2}{2}$ или $\sqrt{2gh} = \frac{gt}{2}$, откуда $t = \sqrt{\frac{8h}{g}}$. Из рис. 123 видим, что $\frac{1}{2}AC = AB \sin\alpha$, откуда $AC = 2\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{8h}{g}} \sin\alpha = 8h \sin\alpha$ или $AC = 8$ *м*.

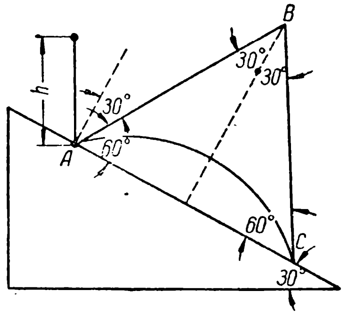


Рис. 123.

32. $v \approx 180$ *м/сек*.

Решение. Движение снаряда по параболе разложим на два прямолинейных движения по горизонтали и вертикали. Перемещение снаряда будем отсчитывать от точки A (рис. 124). Начальные скорости движения $v_г = v\cos\beta$ и $v_в = v\sin\beta$. Уравнение движения снаряда по горизонтали $d = v_г t = vt\cos\beta$, по вертикали $h = v_в t - \frac{gt^2}{2} = vt\sin\beta - \frac{gt^2}{2}$.

Использовав соотношение $h = d\,\mathrm{tg}\,\alpha$, решим эти уравнения:

$$t = \frac{d}{v\cos\beta}; \quad d\,\mathrm{tg}\,\alpha = v\frac{d\sin\beta}{v\cos\beta} - \frac{g}{2}\cdot\frac{d^2}{v^2\cos^2\beta};$$

$$\frac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\cos\beta\cos\alpha} = \frac{gd}{2v^2\cos^2\beta},$$

$$\text{откуда} \quad v = \sqrt{\frac{dg\cos\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}} \approx 180 \text{ м/сек}.$$

33. $v_0 = 98$ *м/сек.*

Решение. Вертикальная составляющая скорости движения ракеты в момент выстрела $v_0 \sin \alpha$. Поэтому можно записать

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

где t — время поднятия ракеты до наивысшей точки траектории. Отсюда $v_0 = \dfrac{gt}{\sin \alpha} = 98$ *м/сек.*

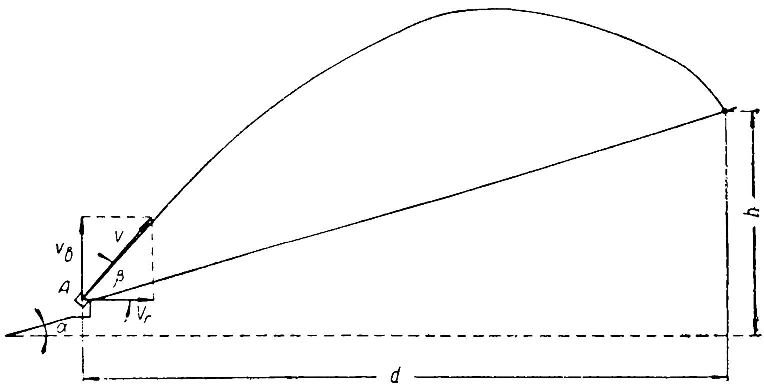


Рис. 124.

34. $H_1 : H_2 : H_3 = 3 : 2 : 1$; $s_1 : s_2 : s_3 = \sqrt{3} : 2 : \sqrt{3}$.

Решение. Если не учитывать сопротивление воздуха, то максимальные высота и дальность полета струи воды равны

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \text{и} \quad s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Тогда можно записать для максимальных высот полета струй воды

$H_1 : H_2 : H_3 = \sin^2 \alpha_1 : \sin^2 \alpha_2 : \sin^2 \alpha_3$ или $H_1 : H_2 : H_3 = 3 : 2 : 1$;

для дальностей полета струй $s_1 : s_2 : s_3 = \sin 2\alpha_1 : \sin 2\alpha_2 : \sin 2\alpha_3$ или $s_1 : s_2 : s_3 = \sqrt{3} : 2 : \sqrt{3}$.

35. Решение. При вытекании из первого отверстия частицы воды приобретают горизонтальную скорость $v = \sqrt{2g\left(H - \frac{1}{3} H\right)} = 2\sqrt{\frac{gH}{3}}$.

Время движения каждой частицы воды в струе можно определить из соотношения $\frac{1}{3} H = \frac{gt^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$. Дальность полета первой струи

$$l = vt = 2\sqrt{\frac{gH}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2H}{3g}} = \frac{2}{3} H \sqrt{2}.$$

Аналогично дальность полета второй струи

$$l = 2\sqrt{(H-h)h}.$$

Струи бьют на одинаковое расстояние, поэтому

$$\frac{2}{3}H\sqrt{2} = 2\sqrt{(H-h)h}.$$

После преобразований получим

$$h^2 - Hh + \frac{2}{9}H^2 = 0.$$

Решив это уравнение, получим $h_1 = \frac{1}{3}H$ и $h_2 = \frac{2}{3}H$. Это значит, что второе отверстие можно просверлить на высоте $\frac{1}{3}H$ (т. е. на той же, что и первое отверстие) или на высоте $\frac{2}{3}H$ от дна сосуда.

36. $V \approx 0{,}069$ *м*^{3}.

Решение. Движение частиц воды можно рассматривать как движение тела, брошенного под углом α к горизонту. Поэтому для дальности падения воды можно записать

$$s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}, \text{ откуда } v = \sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}}.$$

Объем воды, поданной за 1 *мин*,

$$V = Svt = St\sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}} \approx 0{,}069 \text{ м}^3.$$

37. $a = 100$ *м/сек*^{2}; $v_1 = 6250$ *м/сек*.

Решение. Пройденное за последние 10 *сек* расстояние s можно выразить как разность путей, пройденных за время t_1 и $t_1 - t_2$:

$$s = vt_1 + \frac{at_1^2}{2} - v(t_1 - t_2) - \frac{a(t_1 - t_2)^2}{2},$$

откуда $a = \dfrac{s - vt_2}{t_2\left(t_1 - \frac{1}{2}t_2\right)} = 100$ *м/сек*^{2}.

Скорость ракеты в момент прекращения работы двигателя $v_1 = v + at_1 = 6250$ *м/сек*.

38. Решение. Ускорение пули состоит из двух частей: из ускорения силы тяжести и ускорения, сообщаемого силой сопротивления воздуха. Ускорение силы тяжести постоянно и направлено вниз. Ускорение, создаваемое сопротивлением воздуха, тем больше по абсолютному значению, чем больше скорость пули. Оно всегда направлено против движения. Поэтому при движении пули вверх оба ускорения арифметически слагаются, а при движении вниз — арифметически вычитаются. Отсюда ясно, что ускорение пули максимально в начале движения и минимально в конце движения.

39. $\alpha = 45°$.

Решение. Обозначим угол наклона крыши α (рис. 125). Разложим ускорение силы тяжести g, действующее на каплю дождя, на две составляющие: на ускорение a, с которым капля сползает с крыши, а также на ускорение, перпендикулярное крыше. Очевидно, что $a = g \sin \alpha$.

Если с крыши длиной l капля стекает за время t, то $l = \frac{at^2}{2} =$

$$= \frac{g \sin \alpha t^2}{2}, \text{ откуда } t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}.$$

Из рис. 125 видим, что $l = \frac{h}{\cos \alpha}$, тогда

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g \sin \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{4h}{g \sin 2\alpha}}.$$

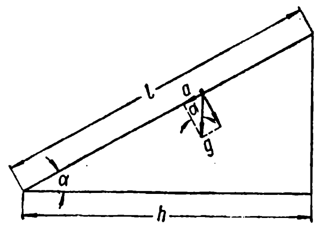


Рис. 125.

Выражение под корнем имеет минимальное значение, когда знаменатель имеет максимальное значение. Поскольку максимальное значение $\sin 2\alpha = 1$, то $2\alpha = 90°$ и $\alpha = 45°$.

40. $v \approx 7{,}57$ *км/сек*; $\omega \approx 9{,}96 \times 10^{-4}$ *рад/сек*.

Решение. Средняя линейная скорость спутника

$$v = \frac{2\pi (R + h)}{T} =$$

$$= \frac{6{,}28 \cdot 7600 \text{ км}}{6300 \text{ сек}} \approx 7{,}57 \text{ км/сек}.$$

Угловая скорость

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28 \text{ рад}}{6300 \text{ сек}} \approx 9{,}96 \cdot 10^{-4} \text{ рад/сек}.$$

41. $v = 400$ *м/сек*; $a \approx -133\,000$ *м/сек²*; $t \approx 0{,}003$ *сек*.

Решение. За время движения пули между дисками они поворачиваются на $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Время движения пули между дисками определится из условия $\omega = 2\pi n = \frac{\varphi}{t}$, откуда $t = \frac{\varphi}{2\pi n}$.

Тогда скорость движения пули $v = \frac{s}{t} = \frac{s\,2\pi n}{\varphi} = 400$ *м/сек*.

Ускорение движения пули в мишени можно определить по формуле

$$v^2 = -2ad, \text{ откуда } a = -\frac{v^2}{2d} \approx -133\,000 \text{ м/сек}^2.$$

Тогда время движения пули в мишени $t_1 = -\frac{v}{a} \approx 0{,}003$ *сек*.

42. Решение. Когда цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости, то его образующая, касающаяся плоскости, неподвижна в данный момент, а цилиндр вращается вокруг этой неподвижной прямой. Очевидно, что в данном случае образующая, касающаяся доски, движется вперед со скоростью, вдвое больше той, с которой движется ось цилиндра. Поэтому, когда человек, толкая доску, пройдет путь, равный длине доски, то цилиндр пройдет вперед на расстояние, равное половине длины доски. Таким образом, чтобы дойти до цилиндра, человеку надо пройти путь, равный $2l$.

Задачу можно решить и другим способом. За один оборот цилиндра его ось сместится на расстояние $2\pi R$. За это же время конец доски сместится относительно оси цилиндра на такое же расстояние, следовательно, по отношению к начальной точке A конец доски (а значит, и человек) переместится на расстояние $2 \cdot 2\pi R$, т. е. пройдет путь в два раза больший, чем путь, пройденный осью цилиндра. Чтобы достичь цилиндра, человек должен пройти путь, равный $2l$.

43. $n \approx 9$ *об/сек*; $a \approx 926$ *м/сек*^{2}.

Решение. Поскольку линейная скорость движения внешних точек покрышек колеса равна поступательной скорости движения автомобиля, то из формул $v = 2\pi Rn = \pi Dn$, $n = \frac{v}{\pi D} \approx 9$ *об/сек* определим величину центростремительного ускорения внешнего слоя резины: $a = \frac{v^2}{R} \approx 926$ *м/сек*^{2}.

44. Решение. Оба утверждения одинаково справедливы, если считать третью из величин, входящих в каждую формулу, постоянной.

В самом деле, рассмотрим на вращающемся диске две точки, расположенные на разных расстояниях от оси вращения. Тогда при одной и той же угловой скорости та из них будет иметь бóльшее центростремительное ускорение, которая дальше удалена от оси вращения. Наоборот, при одинаковой линейной скорости вращающихся точек их центростремительные ускорения будут обратно пропорциональны радиусам вращения.

§ 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

45. $a = \frac{m}{m+M} g$; $F_н = \frac{mM}{m+M} g$.

Решение. Так как длина нити не меняется во время движения грузов, то оба тела движутся с одинаковым по величине ускорением a. На тело M действует по направлению движения только сила натяжения нити $F_н$, поэтому по второму закону динамики

$$F_н = Ma. \qquad (1)$$

На тело массой m вдоль направления движения действуют вес тела mg и сила натяжения нити. Поэтому

$$mg - F_н = ma. \qquad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), получим $a = \frac{m}{m+M} g$ и $F_н = \frac{mM}{m+M} g$.

46. $a = \frac{m}{m+2M} g$; $f = 2\frac{mM}{m+2M} g$; $F_н = \frac{m+M}{m+2M} 2Mg$; $F = 4Mg\frac{m+M}{m+2M}$.

Решение. В соответствии со вторым законом динамики запишем уравнение движения каждого тела, приняв за положительное направление вниз (рис. 126). Тогда для правого тела

$$-Ma = Mg - F'_{\text{н}}; \qquad (1)$$

для левого

$$Ma = Mg + f - F_{\text{н}}; \qquad (2)$$

для грузика

$$ma = mg - f', \qquad (3)$$

где $F_{\text{н}}$ — сила натяжения нити; f — сила давления грузика m на тело M; a — ускорение тела; f' — реакция опоры.

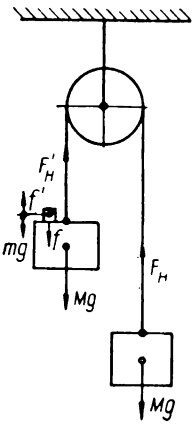


Рис. 126.

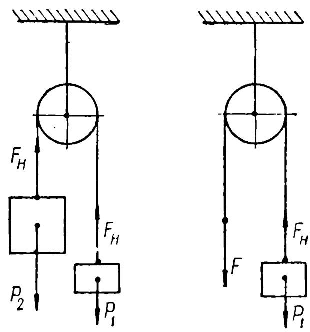


Рис. 127.

Так как нить и блок невесомы и трением пренебрегаем, то $F_{\text{н}} = F'_{\text{н}}$. Кроме того, по третьему закону динамики $f = f'$.

Вычитая из второго уравнения первое, получим $f = 2Ma$. Подставив значение f в формулу (3), найдем ускорение $a = \dfrac{m}{m + 2M} g$. Тогда $f = 2\,\dfrac{mM}{m + 2M}\, g$.

Из уравнения (1) находим силу натяжения нити

$$F_{\text{н}} = 2Mg\,\frac{m + M}{m + 2M}\,.$$

Сила, действующая на ось блока, равна удвоенной силе натяжения нити $F = 2F_{\text{н}} = 4Mg\,\dfrac{m + M}{m + 2M}\,.$

47. $a = \dfrac{1}{3} g$; $F_{\text{н}} = \dfrac{4}{3} P_1$. Во втором случае $a = g$.

Решение. Запишем уравнение движения для обоих тел (рис. 127)

$$F_{\text{н}} - P_1 = \frac{P_1}{g} a \quad \text{и} \quad P_2 - F_{\text{н}} = \frac{P_2}{g} a.$$

Сложив правые и левые части этих уравнений, получим

$$P_2 - P_1 = \frac{P_1 + P_2}{g} a, \text{ откуда } a = \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} g = \frac{1}{3} g.$$

Натяжение нити при движении тел

$$F_н = P_1 + \frac{P_1}{g} a = \frac{4}{3} P_1 \text{ или } F_н = P_2 - \frac{P_2}{g} a = \frac{2}{3} P_2.$$

Если действие груза P_2 заменить силой $F = 20$ *н*, то уравнение движения тела P_1 будет

$$F - P_1 = \frac{P_1}{g} a, \text{ откуда } a = \frac{F - P_1}{P_1} g = g.$$

Если заменить груз P_2 равной ему силой F, то величина ускорения изменится, так как из движения исключится масса $\frac{P_2}{g}$.

48. $h = 3{,}92$ *м*.

Решение. На груз действуют сила натяжения нити $F_н$, вес тела P и сила сопротивления F_c. Условимся считать положительными силы и ускорения, направленные вверх. Согласно второму закону динамики

$$F_н - P - F_c = \frac{P}{g} a, \text{ откуда } a = \frac{F_н - P - F_c}{P} g.$$

Тогда

$$h = \frac{at^2}{2} = \frac{F_н - P - F_c}{P} \cdot \frac{gt^2}{2} = 3{,}92 \text{ м}.$$

49. $F = 7{,}5$ *н*. Если силу приложить ко второму телу, то $F = 15$ *н*.

Решение. Запишем уравнения движения обоих тел

$$F - f = m_1 a \quad \text{и} \quad f = m_2 a,$$

где f — сила натяжения нити. Отсюда $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$. Тело массой m_2 движется с ускорением a вследствие действия на него силы f, обусловленной натяжением нити. Условие разрыва нити $f = F_н$. Однако $f = m_2 a = F \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Из условия разрыва нити

$$F = \frac{m_1 + m_2}{m_2} F_н = F_н \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = 7{,}5 \text{ н}.$$

Если силу F приложить к телу массой m_2, то $F = F_н \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 15$ *н*.

50. $F_2 = 320$ *н*.

Решение. Обозначим силу тяги через F, силу сопротивления движению первой и второй платформ соответственно через $F'_т$ и $F''_т$, ускорение, с которым движутся платформы, через a, силу, с которой растягивается сцепление, через $F_н$. Запишем уравнения движения для первой и второй платформ:

$$F - F'_т - F_н = m_1 a \quad \text{и} \quad F_н - F''_т = m_2 a.$$

Учитывая, что $F'_т = km_1g$ и $F''_т = km_2g$, сложим эти уравнения

$F = (m_1 + m_2) kg + (m_1 + m_2) a$, откуда $a = \frac{F}{m_1 + m_2} - kg$.

Тогда

$$F_н = km_2g + m_2a = km_2g + m_2\left(\frac{F}{m_1 + m_2} - kg\right) =$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2} F = 320\ н.$$

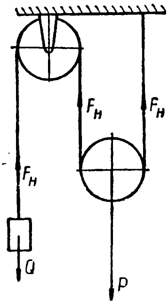


Рис. 128.

51. Решение. При падении капли на нее действуют две силы: вес капли mg и сила сопротивления воздуха F, пропорциональная площади поперечного сечения капли. При испарении капли ее объем и площадь поперечного сечения уменьшаются. Вследствие этого сила сопротивления воздуха, пропорциональная квадрату радиуса капли, уменьшается медленней, чем вес капли, пропорциональный кубу радиуса. В результате скорость падения капли со временем уменьшается.

52. Оба мальчика достигнут блока одновременно через время $t = \frac{l}{3v}$.

Решение. Сила натяжения веревки вдоль всей ее длины одинакова, значит, одинаковы ускорения и скорости движения мальчиков относительно блока. Так как они приближаются друг к другу со скоростью $3v$, то весь путь l они пройдут за время $t = \frac{l}{3v}$.

53. $a_1 \approx 2{,}8\ м/сек^2$; $a_2 \approx 1{,}4\ м/сек^2$; $F_н \approx 25{,}7\ н$.

Решение. За одно и то же время t тело весом P пройдет в два раза меньшее расстояние, нежели тело весом Q, т. е. $\frac{a_1t^2}{2} = 2\frac{a_2t^2}{2}$, откуда $a_2 = \frac{a_1}{2}$.

Так как массой блоков и трением пренебрегаем, то сила натяжения нити во всех точках одинакова (рис. 128). Тогда уравнения движения грузов $P - 2F_н = \frac{P}{g} a_2$ и $F_н - Q = \frac{Q}{g} a_1$. Учитывая, что $a_2 = \frac{a_1}{2}$, сложим правые и левые части равенств:

$$P - 2Q = \frac{P + 4Q}{2g} a_1, \text{ откуда } a_1 = \frac{P - 2Q}{P + 4Q} 2g \approx 2{,}8\ м/сек^2.$$

Тогда $a_2 \approx 1{,}4\ м/сек^2$.

Сила натяжения нити $F_н = Q + \frac{Q}{g} a_1 \approx 25{,}7\ н$.

54. $F_н = 20\ н$.

Решение. Силу натяжения $F_н$ в точке A (середина веревки, рис. 129) определим согласно второму закону динамики для части веревки AB:

$$\frac{P}{2} - F_{\text{н}} = \frac{P}{2g}a, \text{ откуда } F_{\text{н}} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

Ускорение движения a найдем как отношение движущей силы $F_{\text{д}}$ к массе:

$$a = \frac{F_{\text{д}}}{m}, \quad F_{\text{д}} = \frac{P}{l}l_1 - \frac{P}{l}(l - l_1) = \frac{2Pl_1}{l} - P; \quad m = \frac{P}{g}.$$

Тогда $a = \dfrac{P\left(\dfrac{2l_1}{l} - 1\right)g}{P} = g\left(\dfrac{2l_1}{l} - 1\right).$

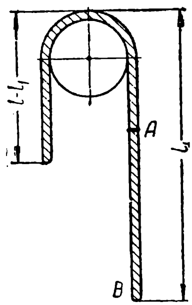


Рис. 129.

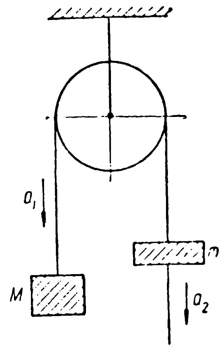


Рис. 130.

Подставив значение a в формулу для $F_{\text{н}}$, получим

$$F_{\text{н}} = \frac{P}{2}\left[1 - \frac{g\left(\frac{2l_1}{l} - 1\right)}{g}\right] = P\frac{l - l_1}{l} = 20\ \text{н}.$$

55. $a_1 = \dfrac{(M - m)g + ma_2}{m + M}$; $F_{\text{т}} = \dfrac{M}{m + M}(2mg - ma_2)$.

Решение. Согласно второму закону динамики для груза массой M (рис. 130) $Mg - F_{\text{т}} = Ma_1$; для кольца

$$mg - F_{\text{т}} = m(a_2 - a_1).$$

Исключим из этих двух уравнений силу трения $F_{\text{т}}$:

$$mg - m(a_2 - a_1) = M(g - a_1), \text{ откуда } a_1 = \frac{(M - m)g + ma_2}{m + M}.$$

Сила трения кольца по нити

$$F_{\text{т}} = M(g - a_1) = M\left[g - \frac{(M - m)g + ma_2}{m + M}\right] =$$

$$= \frac{M}{m + M}(2mg - ma_2).$$

56. $F_н = 990$ *н.*

Решение. Максимальный груз, который можно поднимать на веревке равномерно, должен быть равен силе натяжения, которую выдерживает веревка (предельной силе натяжения), $P_{макс} = F_н$.

Для определения предельной силы натяжения запишем уравнения движения грузов для обоих случаев, указанных в условии. Груз P_1 поднимается вверх с ускорением a

$$F_н - P_1 = \frac{P_1}{g}a.$$

Груз P_2 опускается вниз с тем же ускорением

$$P_2 - F_н = \frac{P_2}{g}a.$$

Разделим первое уравнение на второе

$$\frac{F_н - P_1}{P_2 - F_н} = \frac{P_1}{P_2}, \text{ откуда } F_н = \frac{2P_1P_2}{P_1 + P_2} = 990 \text{ н}.$$

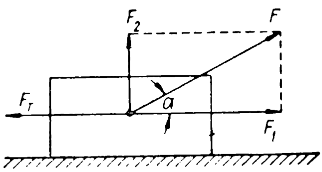


Рис. 131.

57. $F_н \approx 960$ *н.*

Решение. Запишем уравнение движения парашютиста

$$F_н - P = \frac{P}{g}a,$$

$$\text{откуда } F_н = P + \frac{P}{g}a.$$

Однако ускорение

$$a = \frac{v_1 - v_2}{t}, \text{ где } v_1 = \sqrt{2gh};\ v_2 = 0{,}1v_1; \text{ тогда } a = \frac{0{,}9\sqrt{2gh}}{t}.$$

Значит, натяжение тросов $F_н = P + \frac{P}{g} \cdot \frac{0{,}9\sqrt{2gh}}{t} \approx 960$ *н.*

58. $F = \frac{m(a + kg)}{k \sin \alpha + \cos \alpha}$.

Решение. Разложим силу F, действующую на тело, на две составляющие (рис. 131):

$$F_1 = F\cos\alpha \quad \text{и} \quad F_2 = F\sin\alpha.$$

Согласно второму закону динамики

$$F_1 - F_т = ma;$$

однако $F_т = k(P - F_2) = k(P - F\sin\alpha)$;

тогда $F\cos\alpha - k(P - F\sin\alpha) = ma$, откуда $F = \frac{m(a + kg)}{k\sin\alpha + \cos\alpha}$.

59. $\frac{F_н}{F'_н} = 4.$

Решение. Согласно второму закону динамики, для нижнего груза (рис. 132)

$$F_н - F'_н + 3mg = 3ma,$$

для верхнего груза

$$F_{н}' + mg = ma.$$

Так как по условию задачи $a = 2g$, то $F_{н} - F_{н}' + 3mg = 6mg$ и $F_{н}' + mg = 2\ mg$.

Решив эту систему уравнений, получим $\frac{F_{н}}{F_{н}'} = 4$.

60. $a = \frac{1}{2} g (\sin \beta - \sin \alpha - k_2 \cos \beta - k_1 \cos \alpha)$.

Решение. На тела A и B действуют силы: составляющие силы веса $P \sin \alpha$ и $P \sin \beta$, силы трения $k_1 P \cos \alpha$ и $k_2 P \cos \beta$, сила натяжения нити $F_{н}$.

Запишем второй закон динамики для тел A и B

$$P \sin \beta - k_2 P \cos \beta - F_{н} = \frac{P}{g} a$$

и $F_{н} - P \sin \alpha - k_1 P \cos \alpha = \frac{P}{g} a$.

Отсюда $a = \frac{1}{2} g (\sin \beta - \sin \alpha - k_2 \cos \beta - k_1 \cos \alpha)$.

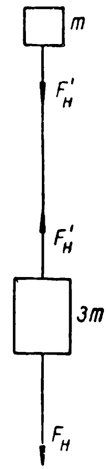


Рис. 132.

61. $a \approx 0{,}418$ *м/сек²*; $F_{н} \approx 9{,}39$ *н*.

Решение. На тело массой m_1 действует составляющая веса тела $m_1 g \sin \alpha$, сила трения $k m_1 g \cos \alpha$ и сила натяжения нити $F_{н}$. На тело массой m_2 действует его вес $m_2 g$ и сила натяжения нити $F_{н}$. Запишем второй закон динамики для обоих тел:

$$F_{н} - m_1 g \sin \alpha - k m_1 g \cos \alpha = m_1 a \quad \text{и} \quad m_2 g - F_{н} = m_2 a.$$

Складывая левые и правые части уравнений, получим

$$m_2 g - m_1 g (\sin \alpha + k \cos \alpha) = (m_1 + m_2) a,$$

откуда $a = g \frac{m_2 - m_1 (\sin \alpha + k \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \approx 0{,}418$ *м/сек²*.

Тогда $F_{н} = m_2 (g - a) = m_2 g \left[1 - \frac{m_2 - m_1 (\sin \alpha + k \cos \alpha)}{m_1 + m_2}\right] =$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha + k \cos \alpha) \approx 9{,}39 \text{ н}.$$

62. $F_{тяги} = 9$ *н*.

Решение. Ускорения движения тел P_1 и P_2 одинаковые. На тело P_2 действует сила тяги $F_{тяги}$, сила трения со стороны поверхности, по которой тело скользит, и сила трения со стороны тела P_1. Запишем второй закон динамики для обоих тел:

$$F_{т}' = \frac{P_1}{g} a; \tag{1}$$

$$F_{тяги} - F_{т}' - F_{т}'' = \frac{P_2}{g} a. \tag{2}$$

Максимальное значение силы трения $F'_т = k_1P_1$. Эта сила вынуждает тело P_1 двигаться с ускорением, если оно удерживается на поверхности бруска P_2. Из уравнения (2)

$$F_{тяги} = \frac{P_2}{g} a + F'_т + F''_т.$$

Подставив значение a из формулы (1) в последнее равенство, получим

$$F_{тяги} = \frac{P_2}{g} \cdot \frac{F'_т}{P_1} g + F''_т + F'_т = \frac{k_1P_1P_2g}{P_1g} + k_2(P_1 + P_2) =$$
$$= (P_1 + P_2)(k_1 + k_2) = 9 \text{ н}.$$

Найдем ускорение системы грузов

$$a = \frac{F_{тяги} - F''_т - F'_т}{P_2} g =$$
$$= \frac{F_{тяги} - k_2(P_1 + P_2) - k_1P_1}{P_2} g = 0{,}98 \text{ м/сек}^2.$$

Для первого тела, чтобы оно могло удерживаться на поверхности второго тела, максимальное значение силы трения покоя должно быть равно силе, сообщающей ему ускорение

$$F = \frac{P_1}{g} a = 1 \text{ н}$$

и

$$F'_т = k_1 P_1 = 1 \text{ н}.$$

Результаты совпадают, следовательно, второй закон динамики для тел P_1 и P_2 записан верно.

63. $a = \dfrac{F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2 - k\,[(m_1+m_2)\,g - F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2]}{m_1 + m_2}$.

Решение. Так как сила натяжения нити нас не интересует, будем рассматривать всю систему как одно тело. Тогда по второму закону динамики

$$a = \frac{F_1 \cos\alpha_1 - F_{тр1} - F_2 \cos\alpha_2 - F_{тр2}}{m_1 + m_2}.$$

Силы трения $F_{тр1} = kQ_1$ и $F_{тр2} = kQ_2$, где Q_1 и Q_2 — силы давления тел на плоскость. Легко видеть, что

$$Q_1 = m_1g - F_1 \sin\alpha_1; \quad Q_2 = m_2g - F_2 \sin\alpha_2.$$

Тогда $a = \dfrac{F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2 - k\,[(m_1+m_2)\,g - F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2]}{m_1 + m_2}$.

64. $a \approx 2{,}2$ м/сек^2.

Решение. Запишем второй закон динамики для движения каждого тела (рис. 133):

$$mg - F_н = ma \quad \text{и} \quad F_н - mg \sin\alpha - kmg \cos\alpha = ma.$$

Тогда

$$2ma = mg - mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha, \quad \text{откуда } a = \frac{1}{2} g (1 - \sin\alpha - k\cos\alpha) \approx 2{,}2 \text{ м/сек}^2.$$

65. $F \approx 13$ *н.*

Решение. Используя решение предыдущей задачи, определим силу натяжения нити

$$F_н = \frac{mg}{2}(1 + \sin\alpha + k\cos\alpha).$$

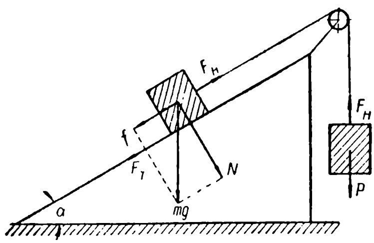


Рис. 133.

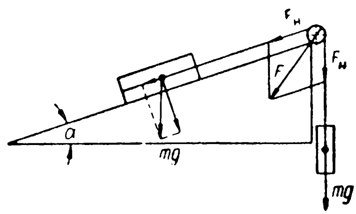


Рис. 134.

Сила давления на ось блока равна диагонали ромба (рис. 134) со сторонами $F_н$. Легко видеть, что $F = 2F_н \cos\frac{90^\circ - \alpha}{2} = mg(1 + \sin\alpha + k\cos\alpha)\cos\frac{90^\circ - \alpha}{2} \approx 13$ *н.*

66. $F_x = 135$ *н*; $F_y = 105$ *н.*

Решение. По второму закону динамики

$$a = \frac{F - (P_1 + P_2 + P_3)}{m_1 + m_2 + m_3} = 5{,}2 \text{ м/сек}^2.$$

Натяжение веревки F_x в точке x (где x — верхний конец веревки) определим из уравнения

$$F_x - (P_2 + P_3) = (m_2 + m_3)a, \text{ откуда } F_x = (m_2 + m_3)a + P_2 + P_3 = 135 \text{ н}.$$

Аналогично находим натяжение F_y по середине веревки:

$$F_y - \left(\frac{P_3}{2} + P_2\right) = \left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)a \quad \text{или} \quad F_y = \left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)a + P_2 + \frac{P_3}{2} = 105 \text{ н}.$$

67. $v \approx 14$ *м/сек*; $t \approx 3$ *сек.*

Решение. Из уравнения движения тела (рис. 135)

$$mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha = ma$$

определим ускорение $a = (\sin\alpha - k\cos\alpha)g$.

Взяв положительные значения корней, определим время движения тела по наклонной плоскости из соотношений

$$l = \frac{at^2}{2} \text{ и } l = \frac{h}{\sin\alpha}; \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{(\sin\alpha - k\cos\alpha)\, g\sin\alpha}} \approx 3 \text{ сек.}$$

Тогда

$$v = at = (\sin\alpha - k\cos\alpha)\, g\sqrt{\frac{2h}{(\sin\alpha - k\cos\alpha)\, g\sin\alpha}} =$$

$$= \sqrt{2gh(1 - k\operatorname{ctg}\alpha)} \approx 14 \text{ м/сек.}$$

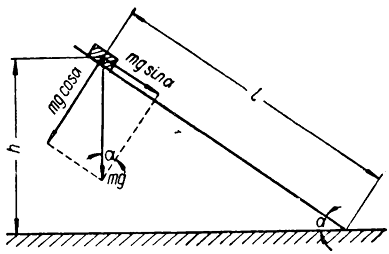


Рис. 135.

Задачу можно также решить исходя из закона сохранения энергии. Потенциальная энергия тела в верхней точке в процессе движения расходуется на выполнение работы по преодолению сил трения и на сообщение телу кинетической энергии, т. е.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + kmg\cos\alpha\,\frac{h}{\sin\alpha},$$

откуда

$$v = \sqrt{2gh(1 - k\operatorname{ctg}\alpha)} \approx 14 \text{ м/сек.}$$

68. $a = 3{,}92$ *м/сек*^{2}.

Решение. При равномерном поднятии груза вдоль наклонной плоскости сила тяги численно равна сумме силы трения $F_т$ и составляющей силы веса $P\cos\alpha$:

$$F = P\cos\alpha + F_т, \text{ откуда } F_т = F - P\cos\alpha.$$

Если груз отпустить, он будет скользить по плоскости вниз. При этом направление силы трения изменится на противоположное. Поэтому уравнение движения груза имеет вид

$$ma = P\cos\alpha - F_т.$$

Подставив значение $F_т$, получим

$$ma = 2P\cos\alpha - F \text{ или } a = g\left(2\cos\alpha - \frac{F}{P}\right) = 3{,}92 \text{ м/сек}^2.$$

69. $k = 0{,}025$; нет.

Решение. Бревно движется с постоянной скоростью, т. е. без ускорения. Поэтому сила трения равна горизонтальной составляющей силы F (рис. 136), т. е. $F_т = F\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$.

Сила нормального давления

$$N = P - F_2 = P - F\frac{h}{l}.$$

Тогда коэффициент трения $k = \frac{F_т}{N} = \frac{F\sqrt{l^2 - h^2}}{l\left(P - F\frac{h}{l}\right)} \approx 0{,}025.$

Перенесение точки приложения силы F (из середины бревна к его концу) не изменяет величины силы нормального давления, поэтому сила трения будет иметь прежнее значение.

70. $h = 0{,}25$ *м*.

Решение. На погруженное в воду тело (рис. 137) действует его вес $P = \rho V g$ и выталкивающая сила $F = \rho_0 V g$, где ρ — плотность вещества тела; V — его объем;

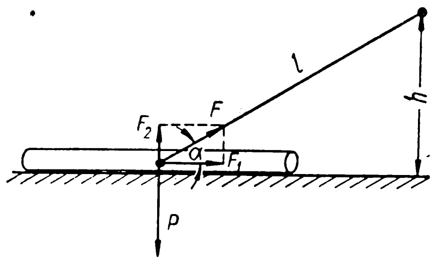


Рис. 136.

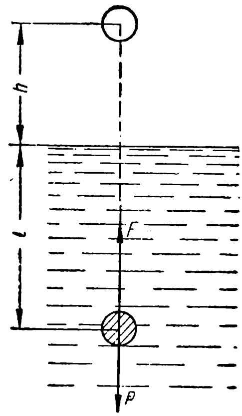


Рис. 137.

ρ_0 — плотность воды. Движение тела в воде будет равноускоренным, и поэтому скорость, с которой вылетает тело из воды, можно определить по формуле

$v^2 = 2al$, где $a = \frac{F - P}{m} = \frac{gV(\rho_0 - \rho)}{\rho V}$, следовательно, $v^2 =$

$$= \frac{2gl(\rho_0 - \rho)}{\rho}.$$

Высота поднятия тела $h = \frac{v^2}{2g}$. Подставив значение v^2, получим $h = \frac{2lg(\rho_0 - \rho)}{2g\rho} =$

$= 0{,}25$ *м*.

Задачу можно решить также исходя из закона сохранения энергии.

71. $F = 5{,}28$ *н*.

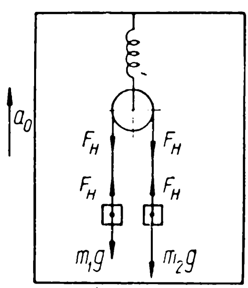


Рис. 138.

Решение. Динамометр (рис. 138) показывает удвоенную силу натяжения нити $F = 2F_н$. Силу натяжения нити определяем из уравнений движения грузов m_1 и m_2 относительно земли:

$$m_1(a + a_0) = F_н - m_1 g \quad и \quad m_2(a_0 - a) = F_н - m_2 g,$$

где a — ускорение грузов относительно лифта.

Решая систему уравнений, получаем

$$F_н = \frac{2m_1m_2(a_0+g)}{m_1+m_2}.$$

Тогда показание динамометра

$$F = 2F_н = \frac{4m_1m_2(a_0+g)}{m_1+m_2} = 5{,}28 \text{ н.}$$

72. $t \approx 18$ *мин.*

Решение. Сила тяги тепловоза равна сумме силы трения и силы, сообщающей ускорение массе всего поезда, т. е.

$$F = knP + (n+1)\frac{P}{g}a,$$

где $\frac{P}{g}$ — масса одного вагона.

Однако

$$a = \frac{v}{t}, \text{ тогда } F = knP + (n+1)\frac{Pv}{gt},$$

откуда

$$t = \frac{(n+1)Pv}{(F-knP)g} \approx 18 \text{ мин.}$$

73. Решение. Когда на тело действует внешняя сила, которая должна была бы вызвать его скольжение по поверхности другого тела, то движения не возникает, пока величина внешней силы не превосходит величины силы трения покоя. Наличие трения покоя не может привести тело в движение. Соотношение, по которому вычисляется величина силы трения, справедливо только для движения.

74. $s = 119{,}6$ *м.*

Решение. Скорость через 10 *сек* определим по формуле

$$v = v_0 + at, \quad \text{где} \quad a = \frac{F_{тяги} - F_т}{m} = \frac{F_{тяги} - kP}{P}g = 0{,}392 \text{ м/сек}^2.$$

Тогда

$$v = v_0 + \frac{F_{тяги} - kP}{P}gt = 13{,}92 \text{ м/сек.}$$

Пройденный путь определим из уравнения $v^2 - v_0^2 = 2as$, откуда

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = 119{,}6 \text{ м.}$$

75. Решение. Когда груз лежит сверху на поршне, время движения поршня не изменяется. После освобождения поршня груз не давит на поршень, поскольку поршень двигается с ускорением бо́льшим, чем ускорение груза. Ускорение, обусловленное давлением сжатого газа, сообщаемое поршню, больше, чем ускорение, сообщаемое грузу, вследствие его формы и объема (груз не прилегает к стенкам цилиндрической части). Поэтому время выталкивания будет таким же, как и без груза. Во втором случае при увеличении массы поршня время выталкивания его больше, поскольку та же сила сжатого газа сообщает ускорение бо́льшей массе.

76. $a > 0{,}98$ *м/сек*^{2}.

Р е ш е н и е. Груз движется вместе с доской, пока силы, действующие на груз, в состоянии сообщить ему ускорение a (рис. 139). Ускорение сообщает грузу сила трения покоя. Максимальная величина силы трения покоя $F_т = kP$, где P — вес груза. Груз соскользнет с доски, если будет выполнено условие $F_т < \frac{P}{g}a$ или $kP < \frac{P}{g}a$, откуда $a > kg$, т. е. ускорение доски должно быть больше, чем 0,98 *м/сек*^{2}.

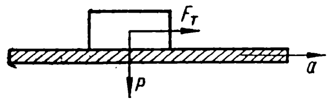


Рис. 139.

77. $F = 40$ *н*.

Р е ш е н и е. Запишем второй закон динамики для движения первого и второго тел:

$$m_1 a_1 = F - F'_н \quad \text{и} \quad m_2 a_2 = F''_н,$$

где F — сила тяги, $F_н$ — натяжение нити.

Однако $a_1 = a_2$, а поскольку нить невесома, то $F'_н = F''_н$. Кроме того, по условию задачи $m_1 = m_2$.

Тогда $ma = F - F_н$ и $ma = F_н$, откуда $F = 2F_н$.

Значит, к телам надо приложить силу не более 40 *н*.

При учете сил трения (когда $k_1 = k_2$) второй закон динамики можно записать так:

$$ma = F - kmg - F_н \quad \text{и} \quad ma = F_н - kmg, \quad \text{откуда } F = 2F_н,$$

т. е. нить оборвется при той же силе натяжения.

78. Р е ш е н и е. Ошибка в рассуждениях состоит в предположении, что сила F передается через брусок A и, значит, приложена также к бруску B. Однако в законах механики нет утверждения, что это должно быть именно так. Поэтому правильнее предположить, что со стороны бруска A на брусок B действует какая-то произвольная сила F_1. В этом случае на брусок B действует результирующая сила F_1, а на брусок A — сила $F - F_1$. Тогда по второму закону динамики $F - F_1 = m_1 a$ и $F_1 = m_2 a$, откуда $F = (m_1 + m_2)\,a$, $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$ и $F_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}F$.

79. $F = 1188$ *н*.

Р е ш е н и е. Механизм станка должен развивать усилие, равное сумме силы трения kP и силы, сообщающей столу вместе с деталью ускорение $a = \frac{v}{t}$. Таким образом, $F = kP + ma = kP + \frac{P}{g}\cdot\frac{v}{t} = 1188$ *н*.

80. $F_н = \frac{mM}{m + M}(k + 1)\,g$.

Р е ш е н и е. Динамометр показывает силу натяжения нити. Оба груза движутся с одинаковым ускорением a. Запишем уравнения движения грузов m и M:

$$F_н - kmg = ma \quad \text{и} \quad Mg - F_н = Ma.$$

Решив эту систему уравнений, получим $F_н = \frac{mM}{m + M}(k + 1)\,g$.

81. $F_B = 0;\quad F_C = \frac{1}{2}F.$

Решение. Сила, действующая на сечение C, должна быть такой, чтобы в случае, когда мы мысленно разрежем цилиндр по C, часть цилиндра CB двигалась бы с тем же ускорением, с каким двигался бы цилиндр под действием силы F.

Следовательно,

$$\frac{F}{m_{AB}} = \frac{F_C}{m_{CB}};\quad F_C = \frac{m_{CB}}{m_{AB}}F,$$

где F_C — сила, действующая на сечение C;

m_{AB} — масса всего тела;

m_{CB} — масса части тела CB.

Если цилиндр однородный, то $F_C = \frac{CB}{AB}F$ и если $CB = \frac{1}{2}AB$, то $F_C = \frac{1}{2}F$. Сила, приложенная к основанию цилиндра B, равна нулю.

82. $F = 15$ *н*.

Решение. Согласно второму закону динамики, импульс силы равен количеству движения, полученного пулями,

$$Ft = nmv,$$

где F — средняя сила давления; t — время, в течение которого пули приобретают количество движения (в задаче $t = 60$ *сек*). Тогда средняя сила давления на плечо $F = \frac{nmv}{t} = 15$ *н*.

83. $a_1 = g\left(1 + \frac{M}{m}\right)(\sin\alpha + k_2\cos\alpha).$

Решение. Согласно второму закону динамики для движения автомобиля

$$mg\sin\alpha + Mg\sin\alpha + k_2 mg\cos\alpha + k_2 Mg\cos\alpha = ma_1,$$

откуда $\quad a_1 = g\left(1 + \frac{M}{m}\right)(\sin\alpha + k_2\cos\alpha).$

Обращаем внимание, что ускорение автомобиля не зависит от k_1, т. е. от трения между автомобилем и доской.

84. $s = 0{,}98$ *м*.

Решение. Из равенства импульса силы и приобретенного телом количества движения $Ft = mv$ определим составляющую вектора скорости тела, параллельную горизонту (рис. 140) $v = \frac{Ft}{m}$.

Зная высоту тела над горизонтом $h = \frac{gt_1^2}{2}$, определим время движения тела $t_1 = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Расстояние, которое пройдет тело в гори-

зонтальном направлении (берем положительное значение корня), $s =$
$= vt_1 = \frac{Ft}{m}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{Ft}{P}\sqrt{2gh} = 0{,}98$ *м.*

85. $v_2 \approx -395$ *м/сек.*

Решение. Высота, на которую отклоняется шар (рис. 141), равна $h = AO - CO = l(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2}l.$

Шар, опускаясь из точки B в точку A приобретает в точке A скорость $v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{gl}.$

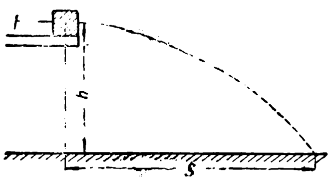


Рис. 140.

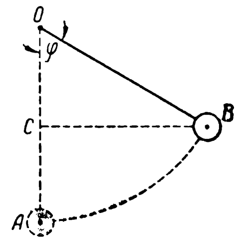


Рис. 141.

После столкновения шаров система остается в покое, следовательно, сумма количеств движения шаров равна нулю

$$Mv_1 + mv_2 = 0, \text{ откуда } v_2 = -\frac{Mv_1}{m} \approx -395 \text{ м/сек.}$$

86. $F = 10$ *н.*

Решение. В соответствии со вторым законом динамики, импульс силы, с которой струя действует на стенку, должен быть равен изменению количества движения струи. Так как вода после удара свободно стекает вниз по стенке, то $Ft = mv$, откуда $F = \frac{mv}{t}$. За время t в стенку ударяет масса воды m, находящаяся в цилиндре длиной $l = vt$ и поперечным сечением S, т. е. $m = \rho Svt$, где ρ — плотность воды. Тогда $F = \frac{\rho Svtv}{t} = \rho Sv^2 = 10$ *н.*

87. $l = 4$ *м.*

Решение. Учитывая, что скорость движения человека относительно берега равна $v_2 - v_1$, где v_2 — скорость движения человека относительно лодки, а v_1 — скорость движения лодки относительно берега, получим

$$\frac{P_2}{g}(v_2 - v_1) - \frac{P_1}{g}v_1 = 0.$$

Однако

$$v_1 = \frac{\Delta s}{t}; \quad v_2 = \frac{l}{t};$$

тогда $\frac{P_2}{g}\left(\frac{l - \Delta s}{t}\right) - \frac{P_1}{g}\cdot\frac{\Delta s}{t} = 0$, откуда $l = \frac{P_1 + P_2}{P_2}\Delta s = 4$ *м.*

88. $M = 300$ *кг.*

Р е ш е н и е. На основании закона сохранения количества движения сумма количеств движения лодки и груза до его перекладывания должна быть равна сумме количеств движения лодки и груза после перекладывания

$$Mv_1 + mv' = (m + M)\,v_2,$$

где v_1 — скорость лодки; v' — скорость груза; v_2 — скорость лодки вместе с грузом. Так как $v' = -v_1$ (движение навстречу друг другу), то

$$Mv_1 - Mv_2 = mv_1 + mv_2, \text{ откуда } M = m\,\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2} = 300 \text{ кг}.$$

89. $v_1 = \dfrac{P_1(v+u) + Pv}{P + P_1}$; $\quad v_2 = v$; $\quad v_3 = \dfrac{P_1(v-u) + Pv}{P + P_1}$.

Р е ш е н и е. Количество движения передней лодки до перебрасывания груза $\dfrac{P}{g}v$; количество движения груза, брошенного в переднюю лодку, $\dfrac{P_1}{g}(v+u)$. Тогда согласно закону сохранения количества движения для передней лодки

$$\frac{P+P_1}{g}v_1 = \frac{P}{g}v + \frac{P_1}{g}(v+u), \text{ откуда } v_1 = \frac{P_1(v+u)+Pv}{P+P_1}.$$

Для средней лодки закон сохранения количества движения имеет вид

$$\frac{P+2P_1}{g}v = \frac{P}{g}v_2 + \frac{P_1}{g}(v-u) + \frac{P_1}{g}(v+u), \text{ откуда } v_2 = v.$$

Для задней лодки

$$\frac{P+P_1}{g}v_3 = \frac{P}{g}v + \frac{P_1}{g}(v-u), \text{ откуда } v_3 = \frac{P_1(v-u)+Pv}{P+P_1}.$$

90. $s = 2k\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\,(gt + \sqrt{2gh})$.

Р е ш е н и е. Определим горизонтальную составляющую скорости легкоатлета в момент начала прыжка $v_{\text{гор}}$ из уравнения для импульса силы

$$mv_{\text{гор}} = kmgt_1 + kNt_2,$$

где t_1 — время разбега; t_2 — время толчка; N — сила нормального давления при толчке. Аналогично запишем уравнение для определения вертикальной составляющей скорости:

$$mv_{\text{верт}} = (N - mg)\,t_2.$$

Учитывая, что $t_1 + t_2 = t$, получим

$$mv_{\text{гор}} = k\,(mgt + mv_{\text{верт}}), \text{ откуда } v_{\text{гор}} = k\,(gt + v_{\text{верт}}).$$

Однако

$$v_{\text{верт}} = \sqrt{2gh}; \text{ поэтому } v_{\text{гор}} = k\,(gt + \sqrt{2gh}).$$

Время прыжка, очевидно, равно $t_з = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Зная горизонтальную составляющую скорости и время прыжка, можно определить и дальность прыжка: $s = v_{\text{гор}} t_з = 2k\sqrt{\frac{2k}{g}}\,(gt + \sqrt{2gh})$.

91. $s \approx 3{,}34$ *м*.

Р е ш е н и е. Если бы гимнаст удерживал груз до конца полета, то длину прыжка можно было бы определить по формуле дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью v под углом α к горизонту:

$$l = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Точки наивысшего подъема он достигнет через $t = \frac{v \sin \alpha}{g}$.

Бросая в точке A (рис. 142) груз в горизонтальном направлении со скоростью v_1, человек приобретает дополнительную скорость, и дальность его полета увеличивается. Скорость полета человека в точке A (т. е. в момент броска груза) равна $v \cos \alpha$.

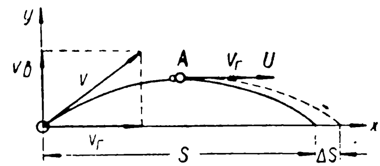


Рис. 142.

Для вычисления величины приращения скорости воспользуемся законом сохранения количества движения. Во время движения на систему гимнаст — груз действует внешняя сила — вес тел. Однако в верхней точке траектории, т. е. в момент броска груза, скорости гимнаста и груза горизонтальны, и поэтому сила веса не изменяет величины этой скорости. Таким образом, если время броска считать очень малым, то количество движения системы до и после броска не изменяется.

Тогда

$$(m + M)\,v \cos \alpha = M v_2 - m v_1,$$

откуда $v_2 = \frac{(m + M)\,v \cos \alpha + m v_1}{M} = v \cos \alpha + \frac{m}{M}(v \cos \alpha + v_1)$.

Это значит, что горизонтальная составляющая скорости увеличится на величину $\frac{m}{M}(v \cos \alpha + v_1)$. Тогда длина прыжка $s + \Delta s =$

$$= \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{m}{M}(v \cos \alpha + v_1)\frac{v \sin \alpha}{g} \text{ или } s + \Delta s \approx 3{,}34 \text{ м}.$$

92. $v_1' = 0{,}9$ *м/сек*.

Р е ш е н и е. В этой задаче систему человек — платформа можно считать изолированной, поскольку никакие внешние силы в горизонтальном направлении не действуют. Поэтому $m_1 v_1' + m_2 v_2 = 0$, где v_1' и v_2 — скорости движения человека и платформы относительно Земли. Человек одновременно принимает участие в двух движениях — со скоростью v_1 относительно платформы и с противоположно направленной скоростью v_2 вместе с платформой, т. е. $v_1' = v_1 + v_2$.

Так как

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1' = -\frac{P_1}{P_2} v_1', \text{ то } v_1' = v_1 - \frac{P_1}{P_2} v_1', \text{ откуда}$$

$$v_1' = \frac{v_1}{1 + \frac{P_1}{P_2}} = 0{,}9 \text{ м/сек.}$$

93. $v_1 = 0{,}45$ *м/сек*; $v'' = -0{,}25$ *м/сек*.

Решение. Закон сохранения количества движения для первого случая запишется так:

$$m_2 v = (m_1 + m_2) v_1,$$

где v — начальная скорость тележки;

v_1 — скорость движения тележки вместе с человеком.

Отсюда $v_1 = \dfrac{m_2 v}{m_1 + m_2} = 0{,}45$ *м/сек*.

Для второго случая

$$m_2 v - m_1 v' = (m_1 + m_2) v'',$$

где v' — скорость движения человека; v'' — скорость движения тележки вместе с человеком. Тогда

$$v'' = \frac{m_2 v - m_1 v'}{m_1 + m_2} = -0{,}25 \text{ м/сек.}$$

94. $v_1 \approx 162$ *м/сек*.

Решение. По закону сохранения количества движения можно написать

$$Mv = mv_2 + (M - m) v_1,$$

где v_1 и v_2 — скорости соответственно первой и второй ступени после отделения второй ступени. Отсюда

$$v_1 = \frac{Mv - mv_2}{M - m} \approx 162 \text{ м/сек.}$$

95. $v_3 \approx -2$ *м/сек*.

Решение. После выброса первой порции

$$mv + (M - m) v_1 = 0, \text{ откуда } v_1 = -\frac{m}{M - m} v.$$

После выброса второй порции

$$(M - m) v_1 = mv + (M - 2m) v_2,$$

$$\text{откуда } v_2 = -\frac{2m}{M - 2m} v.$$

После выброса третьей порции

$$(M-2m)\,v_2 = mv + (M-3m)\,v_3,\ \text{откуда}\ v_3 = -\frac{3m}{M-3m}\,v.$$

Так как $M \gg 3m$, то $v_3 \approx -\frac{3m}{M}\,v \approx -2$ *м/сек.*

96. $v_1 = 4v$.

Решение. Количество движения ракеты-носителя вместе с головной частью $7mv$. После отделения головной части количество движения ракеты-носителя стало $6m\frac{v}{2} = 3\,mv$, а головной части — mv_1, где v_1 — скорость головной части ракеты. По закону сохранения количества движения $7mv = 3mv + mv_1$, откуда $v_1 = 4v$.

97. $v_1 \approx -133{,}3$ *м/сек.*

Решение. Закон сохранения количества движения $(m_1 + m_2)v = m_1v_1 + m_2v_2$, откуда $v_1 = \frac{(m_1+m_2)\,v - m_2v_2}{m_1} \approx -133{,}3$ *м/сек.*

98. $\alpha = 12°38'$.

Решение. Вытекающая из отверстия вода образует силу противодействия F, отклоняющую трубку от вертикали на угол α (рис. 143). Вес трубки с водой разложим на силу N, стремящуюся вернуть трубку в вертикальное положение, и силу T, действующую вдоль трубки. Равновесие сил наступит тогда, когда моменты сил F и N относительно точки O будут одинаковы $Fl = N\frac{1}{2}l$, откуда $F = \frac{1}{2}N$.

С треугольника NCP можно записать $N = P\sin\alpha$, значит,

$$F = \frac{1}{2}P\sin\alpha,\ \text{откуда}$$

$$\sin\alpha = \frac{2F}{P}. \qquad (1)$$

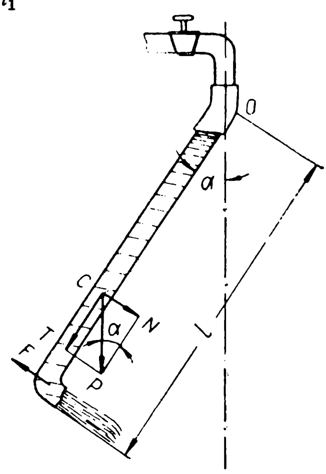


Рис. 143.

Если за время t из трубки вытекает вода массой m, то по третьему закону механики

$$Ft = mv. \qquad (2)$$

Эта масса воды перемещается в трубке сечением S на расстояние vt. Поэтому $m = Sv\rho t$, где ρ — плотность воды. Подставив значение m в уравнение (2), получим

$$Ft = Svt\rho v,\ \text{откуда}\ F = S\rho v^2.$$

Вес трубки с водой

$$P = P_т + P_в = P_т + Sl\rho g.$$

Подставив полученные значения P и F в уравнение (1), получим

$$\sin\alpha = \frac{2S\rho v^2}{P_т + Sl\rho g} \approx 0{,}2185; \quad \alpha \approx 12°38'.$$

99. $F \approx 20{,}4$ *н.*

Решение. При вытекании струи пены на огнетушитель действует сила реакции струи, величину которой можно определить из соотношения $F_р t = mv$, где m — масса пены, выброшенной за время t.

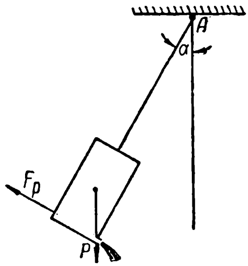


Рис. 144.

Значит, $F_р = \frac{m}{t} v = 4$ *н.*

Равнодействующая начального веса огнетушителя и силы реакции $F = \sqrt{P^2 + F_р^2} \approx$ $\approx 20{,}4$ *н.*

100. $\Delta p \approx 63$ *н/м²*.

Решение. Разность давлений, создаваемых бензином на переднюю и заднюю грани, равна силе, сообщающей ускорение всей массе бензина, деленной на площадь грани:

$$\Delta p = \frac{F}{S} H_0 F = ma,$$

где $m = Sl\rho$ — масса бензина; S — площадь грани; l — расстояние между гранями; ρ — плотность бензина. Тогда

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{Sl\rho a}{S} = \rho al.$$

Однако $a = \frac{v}{t}$, поэтому $\Delta p = \rho \frac{vl}{t} \approx 63$ *н/м²*.

101. $\alpha \approx 49'$.

Решение. Условием равновесия бака в отклоненном положении есть равенство моментов сил реакции и силы веса по отношению к точке A (рис. 144).

Запишем это условие:

$$P\left(L + \frac{h}{2}\right)\sin\alpha = F_р(L+h), \text{ откуда } \sin\alpha = \frac{F_р}{P} \cdot \frac{L+h}{L + \frac{1}{2}h}.$$

Выразим силы P и $F_р$ через известные величины:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} h\rho g; \quad F_р = \frac{mv}{t} = Sv^2\rho.$$

Тогда

$$\sin\alpha = \frac{4Sv^2\rho}{\pi d^2 h\rho g} \cdot \frac{L+h}{L + \frac{1}{2}h} = \frac{4Sv^2}{\pi d^2 hg} \cdot \frac{L+h}{L + \frac{h}{2}} \approx 1{,}43 \cdot 10^{-2};$$

$\alpha \approx 49'$.

102. Решение. Винт обычного вертолета вращается вследствие того, что к нему приложены силы со стороны двигателя, укрепленного в фюзеляже. По третьему закону динамики такие же по величине, но противоположно направленные силы приложены со стороны винта к двигателю. Эти силы создают момент, стремящийся повернуть корпус вертолета в сторону, противоположную направлению вращения винта. Для компенсации вращательного момента и служит хвостовой винт.

В реактивном вертолете силы со стороны винта приложены к вытекающим газам и поэтому не создают вращательного момента.

§ 3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

103. $a_{\text{макс}} \approx 2{,}8$ *м/сек²*.

Решение. На движущийся автомобиль действуют силы: вес автомобиля P, реакция опоры (моста) N и сила трения $F_т$ (рис. 145). При вращении колес автомобиля покрышка отталкивается от поверхности дороги, действуя на нее в сторону, противоположную движению машины. По третьему закону динамики поверхность дороги действует на автомобиль в направлении движения.

Горизонтальное ускорение автомобиля вызывает сила трения, максимальное значение которой равно kN

$$(F_т)_{\text{макс}} = kN = ma_{\text{макс}}, \text{ откуда}$$

$$a_{\text{макс}} = \frac{kN}{m}. \qquad (1)$$

Разность сил P и N сообщает автомобилю центростремительное ускорение, т. е.

$$P - N = \frac{mv^2}{R}, \text{ откуда } N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right).$$

Подставив это значение N в уравнение (1), получим

$$a_{\text{макс}} = k\left(g - \frac{v^2}{R}\right) \approx 2{,}8 \text{ м/сек}^2.$$

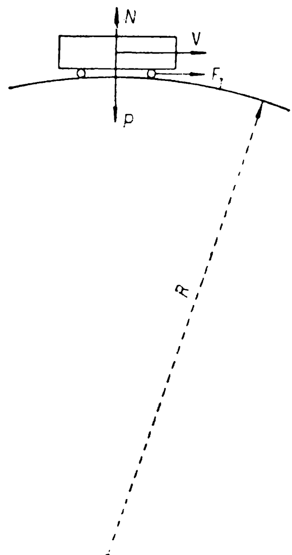


Рис. 145.

104. $R \approx 1570$ *м*.

Решение. При вираже летчику сообщает центростремительное ускорение реакция сиденья N, т. е. $N = \frac{mv^2}{R}$, но по условию задачи $N = 5\,mg$. Тогда $5\,mg = \frac{mv^2}{R}$, откуда $R = \frac{v^2}{5g} \approx 1570$ *м*.

105. $R \approx 8{,}7$ *м*.

Решение. На велосипедиста с велосипедом действуют три силы: сила веса P, сила нормальной реакции дороги N, равная по величине весу P, и сила трения $F_т$ (рис. 146). Сила трения $F_т$ и нормальная реакция в сумме дают результирующую R, проходящую через центр тяжести. Если результирующую R сложить с весом P, получим силу F, которая должна обеспечить необходимое центростремительное ускорение. Указанное соотношение между силами имеет место при определенном значении угла α между вертикалью и осью велосипедиста, проходящей через центр тяжести. Как видно из рисунка, сила F связана с ве-

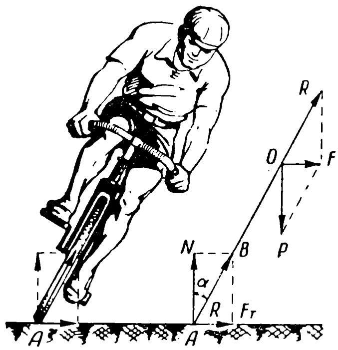


Рис. 146.

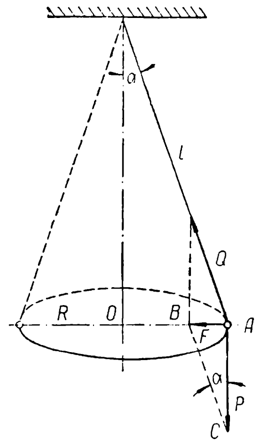


Рис. 147.

сом P и углом α соотношением $F = P \operatorname{tg} \alpha$. Тогда уравнение движения велосипедиста запишется так:

$$P \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{R} \text{ или } mg \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{R}, \text{ откуда } R = \frac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha} \approx 8{,}7 \text{ м}.$$

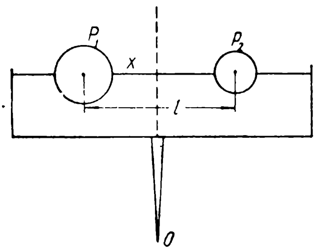


Рис. 148.

106. $\alpha \approx 67°$.

Решение. При вращении центробежного механизма на каждый его шар действуют две силы: вес $P = mg$ и сила натяжения стержня Q (рис. 147). Если шар движется равномерно по окружности, то равнодействующая сил P и Q сообщает шару центростремительное ускорение. Величину равнодействующей можно определить как центростремительную силу $F = 4\pi^2 mRn^2$. Из треугольника ABC следует, что $F = mg \operatorname{tg} \alpha$. Выражая радиус вращения через длину стержня $R = l \sin \alpha$, приравняем полученные результаты для величины равнодействующей:

$$4\pi^2 mln^2 \sin \alpha = mg \operatorname{tg} \alpha, \text{ откуда } \cos \alpha = \frac{g}{4\pi^2 ln^2} \approx$$

$$\approx 0{,}3906; \qquad \alpha \approx 67°.$$

107. $F_н \approx 1256$ *н*.

Решение. Определим положение центра тяжести системы. Поскольку моменты сил веса каждого тела относительно центра тяжести системы тел равны, то можно записать (рис. 148)

$$P_1 x = P_2 (l - x), \text{ откуда } x = \frac{P_2}{P_1 + P_2} l,$$

где x — расстояние центра тяжести системы от тела P_1.

Центростремительное ускорение телам сообщают силы натяжения нити. Силу натяжения нити $F'_н$, сообщающую центростремительное ускорение первому телу, находим по соотношению

$$F'_н = \frac{P_1 v_1^2}{gx} = \frac{P_1 \omega^2 x^2}{gx} = \frac{P_1}{g} \omega^2 x.$$

Подставив значение x, получим

$$F'_н = \frac{P_1}{g} \omega^2 \frac{P_2}{P_1 + P_2} l = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} \cdot \frac{\omega^2 l}{g}.$$

Аналогично определим силу натяжения нити $F''_н$, сообщающую центростремительное ускорение второму телу,

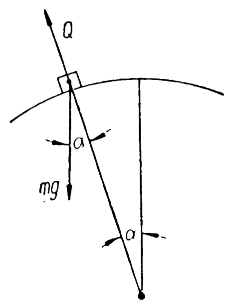


Рис. 149.

$$F''_н = \frac{P_2 v_2^2}{g(l - x)} = \frac{P_2 \omega^2 (l - x)}{g} =$$

$$= \frac{P_2}{g} \omega^2 \left(l - \frac{P_2}{P_1 + P_2} l\right) = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} \cdot \frac{\omega^2}{g} l.$$

Таким образом, $F'_н = F''_н \approx 1256$ *н*.

108. $v = \sqrt{gR \cos \alpha}$.

Решение. На водителя в направлении радиуса вращения действуют две силы: составляющая веса $mg \cos \alpha$ (рис. 149) и реакция сиденья Q. Равнодействующая этих сил сообщает водителю центростремительное ускорение, поэтому

$$mg \cos \alpha - Q = \frac{mv^2}{R}.$$

Однако по условию задачи водитель не давит на сиденье, значит, и сиденье не давит на водителя ($Q = 0$), т. е.

$$mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R}, \text{ откуда } v = \sqrt{gR \cos \alpha}.$$

В этот момент и автомобиль не давит на мост, т. е. и автомобиль и водитель в этот момент «невесомы».

109. $v \approx 13{,}2$ *м/сек*.

Решение. На автомобиль на вираже (рис. 150) действуют две силы: его вес mg и сила давления Q на автомобиль со стороны шоссе, имеющая горизонтальную составляющую, и поэтому направленную под углом к горизонту. Результирующая веса автомобиля mg и реакции шоссе Q направлена горизонтально и сообщает автомобилю центростремительное ускорение, необходимое для движения по окружности. Из рисунка видим, что $\frac{mv^2}{R} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда $v = \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha} \approx 13{,}2$ *м/сек.*

110. $h \approx 76{,}5$ *мм.*

Решение. Разложим вес поезда P на две составляющие так, чтобы одна из них P_1 была направлена по радиусу закругления, а вторая P_2 лежала на одной прямой с нормальной реакцией дороги N (рис. 151). Составляющая веса P_1 и будет обеспечивать необходимое центростремительное ускорение при движении поезда по закруглению.

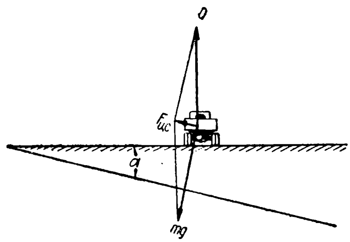


Рис. 150.

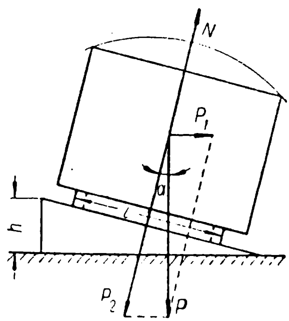


Рис. 151.

Из подобия двух треугольников можно записать $\frac{h}{l} = \frac{mv^2}{Rmg}$, откуда $h = \frac{v^2}{Rg}\, l \approx 76{,}5$ *мм.*

111. $R \approx 23\,100$ *м.*

Решение. При движении по окружности в горизонтальной плоскости горизонтальная составляющая подъемной силы F является центростремительной силой: $F_x = F \sin\alpha = \frac{mv^2}{R}$. Вертикальная составляющая должна быть равна весу самолета $F_y = F\cos\alpha = mg$. Из этих уравнений $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{gR}$, откуда $R = \frac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\,\alpha} \approx 23\,100$ *м.*

112. $F = 5\,mg$.

Решение. На руки гимнаста в нижней точке действует сила, уравновешивающая вес гимнаста и сообщающая ему центростремительное ускорение. Поэтому $F = mg + \frac{mv^2}{l}$,

где v — скорость движения гимнаста в нижней точке. Эта скорость, очевидно, равна скорости, приобретенной телом, свободно падающим с высоты $2l$, т. е. $v = \sqrt{2g \cdot 2l} = 2\sqrt{gl}$.

Подставив это значение скорости, получим $F = mg + \frac{m}{l} \cdot 4\,gl = 5\,mg$.

113. $\omega \approx 0{,}8$ *сек*$^{-1}$.

Решение. Центростремительную силу $m\omega^2 R$, необходимую для движения шарика по окружности (рис. 152), выразим через вес шарика

$$mg \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 R, \text{ где } R = r + l \sin \alpha.$$

Тогда $\omega = \sqrt{\dfrac{g \operatorname{tg} \alpha}{R}} = \sqrt{\dfrac{g \operatorname{tg} \alpha}{r + l \sin \alpha}} \approx 0{,}8$ *сек*$^{-1}$.

114. $F = 39{,}2$ *н*.

Решение. На груз действуют две силы: его вес P и сила натяжения стержня F. В момент прохождения груза через положение равно-

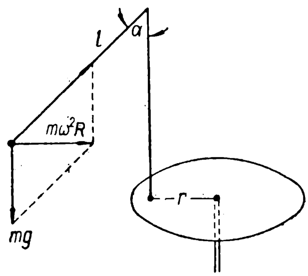


Рис. 152.

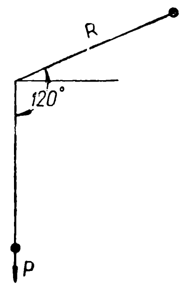


Рис. 153.

весия эти силы направлены по одной прямой в противоположные стороны, и их разность сообщает грузу центростремительное ускорение (рис. 153).

Поэтому $F - P = \dfrac{Pv^2}{gR}$, где v — скорость груза в нижней точке; R — радиус вращения.

Скорость груза v в нижней точке равна скорости, которую будет иметь тело, падая с высоты $H = R + R \sin (\alpha - 90°)$, т. е.

$$v^2 = 2gH = 2g\,[R + R \sin (\alpha - 90°)] = 3Rg.$$

Тогда сила натяжения стержня

$$F = P + \frac{P \cdot 3Rg}{gR} = 4P = 39{,}2 \text{ н}.$$

115. $v = \sqrt{gR \cos \alpha}$.

Решение. На частицы руды действует их вес mg и реакция опоры (ленты конвейера) F. В точке набегания ленты на барабан (рис. 154) по радиусу действует составляющая веса $mg \cos \alpha$. Равнодействующая сил $mg \cos \alpha$ и F сообщает частице руды центростремительное ускорение; поэтому $mg \cos \alpha - F = \dfrac{mv^2}{R}$.

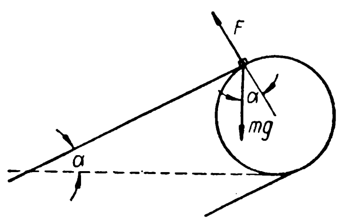


Рис. 154.

Однако по условию в точке набегания ленты на барабан частицы руды отделяются от поверхности ленты, т. е. они не давят на ленту $F = 0$. Поэтому $mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}$, откуда $v = \sqrt{gR\cos\alpha}$.

116. $h < 2{,}5$ *м*.

Решение. На люстру при ее движении в любой точке траектории действуют две силы (рис. 155): ее вес $P = mg$ и сила натяжения цепочки $F_н$. При прохождении люстрой положения равновесия (точка A) силы направлены по одной прямой. Уравнение движения люстры в момент прохождения точки A имеет вид:

$$F_н - P = \frac{mv^2}{l}.$$

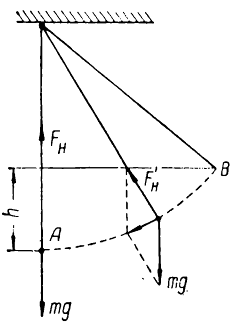


Рис. 155.

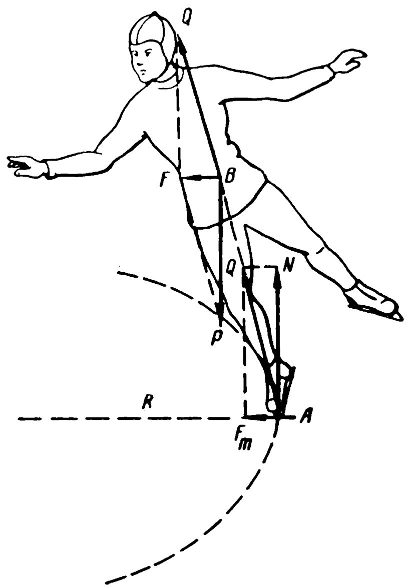


Рис. 156.

Скорость люстры в точке A будет: $v^2 = 2gh$.

Тогда

$$F_н - P = m\frac{2gh}{l}, \text{ откуда } h = \frac{F_н - P}{2mg}l = 2{,}5 \text{ м}.$$

По условию $F_н < 2P$, поэтому $h < 2{,}5$ *м*.

117. $R \approx 15$ *м*; $\alpha \approx 11°17'$.

Решение. На конькобежца действуют три силы: сила тяжести mg, сила нормального давления $N = mg$, направленная вертикально вверх и приложенная в точке A (рис. 156), и сила трения $F_т$, направленная к центру круга, по которому движется конькобежец, также приложенная к точке A.

При движении конькобежец должен наклоняться на такой угол α, чтобы равнодействующая Q силы трения $F_т$ и силы нормального давления N была направлена вдоль прямой, проходящей через центр тяжести.

Тогда точку приложения силы Q можно перенести из точки A в точку B. В результате к центру тяжести (точка B) оказываются приложенными две силы: вес P конькобежца и сила Q. Равнодействующая этих сил направлена по горизонтали и играет роль центростремительной силы. Из рисунка видно, что $F = F_т$.

Тогда уравнение движения конькобежца будет

$$F_т = F = \frac{mv^2}{R}, \text{ откуда } R = \frac{mv^2}{F_т}.$$

Минимальному значению R соответствует максимальное значение силы трения покоя, но максимальное значение силы трения покоя равно kmg. Тогда $R = \frac{mv^2}{kmg} = \frac{v^2}{kg} \approx 15$ *м.*

Наибольший угол отклонения конькобежца от вертикали соответствует наименьшему радиусу. Из рисунка $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_т}{N} = \frac{kmg}{mg} = k$; тогда $\alpha \approx 11° 17'$.

118. $T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\alpha}{g}}$.

Решение. Центростремительное ускорение грузу сообщает равнодействующая веса шарика $P = mg$ и силы натяжения нити $F_н$ (рис. 157). Из рисунка видно, что $F_ц = mg \operatorname{tg}\alpha$; тогда $mg \operatorname{tg}\alpha = \frac{mv^2}{R}$, где R — радиус окружности, описываемой грузом при вращении. Учитывая, что $v = \frac{2\pi R}{T}$ и $R = l \sin\alpha$, можно записать

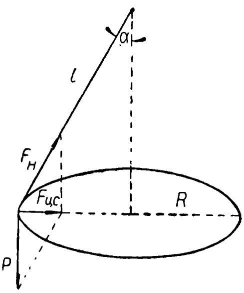


Рис. 157.

$$\frac{4\pi^2 l \sin\alpha}{T^2} = g \operatorname{tg}\alpha, \text{ откуда } T = 2\pi \sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}.$$

119. $h = 2$ *м.*

Решение. Высоту поднятия камня можно определить по формуле $v^2 = 2gh$, но для этого надо сначала определить линейную скорость движения камня. Уравнение движения камня в момент прохождения нижней точки

$$F_н - mg = \frac{mv^2}{l}, \text{ откуда } v^2 = l\,\frac{F_н - mg}{m}.$$

Тогда $h = \frac{F_н - mg}{2mg}\, l = 2$ *м.*

120. $H = 0{,}25$ *м.* Задача решается аналогично задачам 114 и 116.

121. $\omega \approx 13$ *об/сек.*

Решение. В любой точке стенки сосуда на шарик действуют две силы: вес P и реакция стенки F_1 (рис. 158). Результирующая этих сил F в общем случае будет направлена под некоторым углом к горизонту и поэтому будет вызывать движение шарика вверх по наклонной плоскости.

В предельном случае F будет направлена горизонтально и сообщит шарику необходимое центростремительное ускорение, т. е.

$$F = m\omega^2 R = m\omega^2 \frac{D}{2},$$

где ω — наименьшая угловая скорость вращения сосуда.

Из рисунка видно, что

$$F = mg \operatorname{tg} \alpha; \text{ тогда } m\omega^2 \frac{D}{2} = mg \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{откуда } \omega = \sqrt{\frac{2g \operatorname{tg} \alpha}{D}} \approx 13 \text{ об/сек}.$$

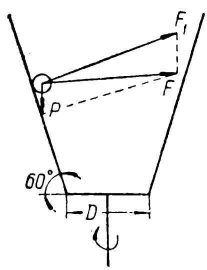


Рис. 158.

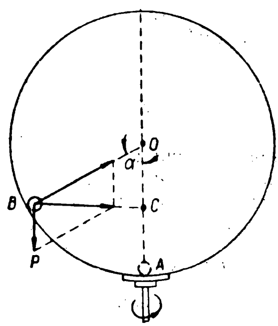


Рис. 159.

122. $\alpha = 60°$; $h = 0{,}3$ *м*.

Решение. Пусть точка B — положение равновесия маленького шарика (рис. 159). Тогда $F_ц = P \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 l$, где $l = BC = (R - r) \sin \alpha$. Подставив значение l в предыдущее соотношение, получим

$$mg \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 (R - r) \sin \alpha,$$

$$\text{откуда } \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 (R - r)} = 0{,}5; \quad \alpha = 60°.$$

Угол α уже определяет положение равновесия маленького шарика. Это же положение можно определить длиной дуги AB, а также расстоянием по вертикальному направлению от точки A к точке C. Дуга $AB = R\alpha$ (где угол α выражен в радианах), или $AB = \frac{0{,}5 \cdot 2 \cdot 3{,}14}{6}$ *см* $\approx 0{,}523$ *м*.

Расстояние $AC = h$ определим из соотношения $R - h = (R - r) \cos \alpha$. После подстановки данных получим: $0{,}5 - h = 0{,}4 \cdot 0{,}5$; $h = 0{,}3$ *м*.

123. $k \geqslant \frac{4\pi^2 R n^2}{g} = 0{,}2.$

Решение. Сила трения должна быть больше или равна центростремительной силе $F_т \geqslant F_{ц.с}$, тогда $kmg \geqslant \frac{mv^2}{R}$ или $kg \geqslant 4\pi^2 R n^2$, откуда $k \geqslant \frac{4\pi^2 R n^2}{g} = 0{,}2.$

124. $\Delta l \approx 0{,}53$ *см*.

Решение. Силу, растягивающую шнур, можно определить двумя способами: 1) как силу упругости шнура $F = k\Delta l$, где $k = 980$ *н/м*, Δl — удлинение шнура; 2) как центростремительную силу $F = 4\pi^2 (l + \Delta l) mn^2$.

Тогда $k\Delta l = 4\pi^2 mn^2 l + 4\pi^2 mn^2 \Delta l$, откуда $\Delta l = \frac{4\pi^2 mn^2 l}{k - 4\pi^2 mn^2} \approx 0{,}0053$ *м* $= 0{,}53$ *см*.

125. $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2\varphi}$.

Решение. Центростремительное ускорение при движении шарика по окружности вызывается равнодействующей искомой силы F и веса шарика mg (рис. 160).

Следовательно, можно записать:

$$m\omega^2 R = \sqrt{F^2 - m^2 g^2},$$

где $R = l\sin\varphi$ — радиус окружности, по которой движется шарик.

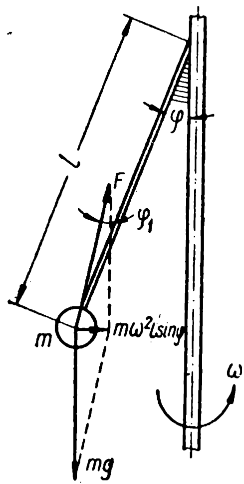


Рис. 160.

Отсюда определяем величину искомой силы:

$$F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2\varphi}.$$

Эта сила образует с вертикалью угол φ_1, величину которого можно определить из уравнения $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\omega^2 l \sin\varphi}{g}$.

Примечание. При решении этой задачи часто ошибочно отождествляют жесткий стержень с традиционной нитью и считают, что искомая сила должна быть направлена вдоль стержня, вследствие чего получают неправильный ответ.

126. $H = 20$ *м*.

Решение. Условием отрыва велосипедиста от поверхности в верхней точке петли является равенство нулю нормальной реакции поверхности $N = \frac{mv^2}{R} - P = 0$.

Отсюда можно определить ту наименьшую линейную скорость $v_{мин}$, которую должен иметь велосипедист в верхней точке петли, чтобы движение происходило без отрыва: $v^2_{мин} = gR$.

Высоту разбега определим из закона сохранения энергии:

$mgH - mg2R = \frac{mv_{\text{мин}}^2}{2}$, откуда $H = \frac{v_{\text{мин}}^2}{2g} + 2R$ или, подставив значение $v_{\text{мин}}^2$, получим $H = \frac{1}{2}R + 2R = 2{,}5R = 20$ *м*.

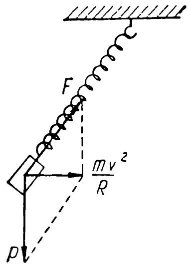


Рис. 161.

127. $F \approx 49{,}25$ *н*; $v_1 \approx 19{,}7$ *м/сек*.

Решение. На груз, подвешенный на пружинных весах в вагоне, движущемся по закруглению, действуют две силы: вес P и сила натяжения пружины F (рис. 161). Равнодействующая этих двух сил представляет собой центростремительную силу $F_{\text{ц}}$, направленную горизонтально. Из рисунка видно, что

$$F^2 = (mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2,$$

откуда $F = \sqrt{m^2g^2 + \frac{m^2v^4}{R^2}} =$

$$= m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}} \approx 49{,}25 \text{ н}.$$

Если показания динамометра возрастут на 0,5%, то $F_{\text{ц. с}} = \sqrt{F^2 - P^2} = \sqrt{(1{,}005P)^2 - P^2} \approx 0{,}1P$. Тогда $0{,}1P = \frac{mv_1^2}{R}$, откуда $v_1 = \sqrt{0{,}1Rg} \approx 19{,}7$ *м/сек*.

128. $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{k\cos\alpha + \sin\alpha}{(\cos\alpha - k\sin\alpha)\,k}}$.

Решение. При движении по горизонтальному треку центростремительной силой, обусловливающей движение велосипедиста по окружности, является сила трения $kmg = \frac{mv_1^2}{R}$, откуда $v_1 = \sqrt{kRg}$.

При движении велосипедиста по наклонному треку с углом наклона α на него действуют три силы: вес mg, сила нормального давления N и сила трения $F_{\text{т}}$ (рис. 162). Для равновесия велосипедиста при движении по наклонному треку необходимо, чтобы сумма проекций на вертикальную ось силы нормального давления и силы трения равнялась весу велосипедиста

$$N\cos\alpha - F_{\text{т}}\sin\alpha = mg.$$

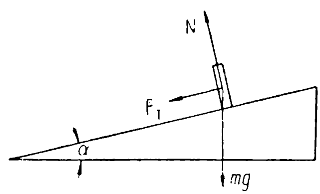


Рис. 162.

Сумма проекций этих сил на горизонтальную ось сообщает велосипедисту центростремительное ускорение:

$$F_{\text{т}}\cos\alpha + N\sin\alpha = \frac{mv_2^2}{R}.$$

Сила трения $F_т = kN$. Подставив это значение $F_т$ в записанные выше уравнения и исключив из этих уравнений N, получим

$$\frac{kmg\cos\alpha}{\cos\alpha - k\sin\alpha} + \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha - k\sin\alpha} = \frac{mv_2^2}{R},$$

$$\text{откуда } v_2 = \sqrt{Rg\frac{k\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - k\sin\alpha}}; \text{ тогда}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{k\cos\alpha + \sin\alpha}{k(\cos\alpha - k\sin\alpha)}}.$$

129. $v \approx 10$ *м/сек.*

Р е ш е н и е. При езде на внутренней поверхности вертикального кругового цилиндра по горизонтальной окружности (рис. 163) вес мо-

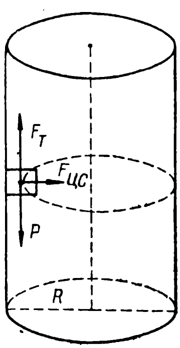


Рис. 163.

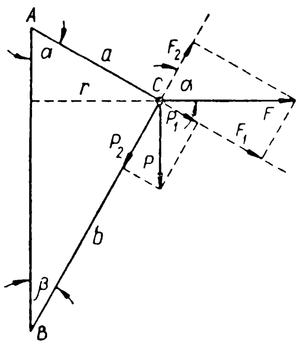


Рис. 164.

тоциклиста должен равняться силе трения $mg = F_т$, а сила трения $F_т = k\frac{mv^2}{r}$.

При езде по горизонтальной поверхности $\frac{mv_1^2}{R} = kmg$.

Определим из этого уравнения k и подставим в первое уравнение

$$k = \frac{v_1^2}{Rg}; \text{ тогда } v^2 = \frac{Rrg^2}{v_1^2}; \quad v = \frac{g}{v_1}\sqrt{Rr} \approx 10 \text{ м/сек.}$$

130. $\omega = 10$ *сек*$^{-1}$.

Р е ш е н и е. Эту задачу решим в системе отсчета, связанной с вращающимся телом, т. е. будем считать, что на вращающееся тело действует вес тела и центробежная сила инерции. Нить a растягивается (рис. 164) составляющими веса тела P и центробежной силы F в направлении AC:

$$F_1 = F\cos\beta \text{ и } P_1 = P\cos\alpha.$$

Равнодействующая этих сил

$$F_{AC} = F_1 + P_1 = F\cos\beta + P\cos\alpha.$$

Нить b растягивается составляющими сил F и P в направлении BC:

$$F_2 = F\cos\alpha \text{ и } P_2 = P\cos\beta.$$

Равнодействующая этих сил $F_{BC} = F_2 - P_2 = F\cos\alpha - P\cos\beta$.

Из треугольника ABC видно, что $AB = \sqrt{a^2+b^2}$; $r = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; тогда центробежная сила $F = m\omega^2\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Кроме того,

$$\cos\alpha = \frac{r}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \cos\beta = \frac{r}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Из рисунка нетрудно видеть, что первой разорвется нить a. На эту нить действует сумма сил F_1 и P_1, тогда как силы, действующие на нить b, направлены в противоположные стороны.

Равнодействующая сил, действующих на нить a,

$$F_{AC} = m\omega^2\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + mg\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

откуда $\omega^2 = \dfrac{F_{AC}(a^2+b^2) - mga\sqrt{a^2+b^2}}{mab^2}$ или $\omega = 10\,сек^{-1}$.

Аналогичные расчеты показывают, что нить b разорвалась бы при угловой скорости, большей $10\,сек^{-1}$.

§ 4. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

131. $x = 6R$.

Решение. Пусть точка находится на расстоянии x от Луны. Сила взаимного притяжения между телом и Луной $F_1 = \gamma\dfrac{mM_Л}{x^2}$, а между телом и Землей $F_2 = \gamma\dfrac{mM_З}{(60R-x)^2}$. По условию задачи $F_1 = F_2$, т. е. $\dfrac{M_Л}{x^2} = \dfrac{M_З}{(60R-x)^2}$, откуда $60R - x = \sqrt{\dfrac{M_З}{M_Л}}\,x$; $x = 6R$.

132. $T \approx 4$ *ч.*

Решение. Ускорение силы земного тяготения обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли: $g = \gamma\dfrac{M}{R^2}$. Поэтому на расстоянии, вдвое большем радиуса Земли, $a = \dfrac{1}{4}g$. По условию обращения спутника по круговой орбите $a = \dfrac{v^2}{2R} = \dfrac{(\omega\cdot 2R)^2}{2R} = \dfrac{8\pi^2R}{T^2}$.

Отсюда время обращения искусственного спутника

$$T=\sqrt{\frac{8\pi^2R}{a}}=4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Принимая $R\approx 6000$ *км*, $g\approx 10$ *м/сек*^{2}, получим $T=4\pi\times\times\sqrt{\frac{2\cdot 6\cdot 10^6}{10}}$ *сек* ≈ 4 *ч*.

133. $v\approx 7{,}2$ *км/сек*; $T\approx 118$ *мин*.

Решение. Принимаем, что спутник движется по круговой орбите, центр которой находится в центре Земли. Необходимое центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R+h}$ спутнику сообщает сила тяготения $\gamma\frac{mM}{(R+h)^2}$, где M — масса Земли; m — масса спутника. Тогда

$$\frac{mv^2}{R+h}=\gamma\frac{mM}{(R+h)^2},\text{ откуда } v^2=\gamma\frac{M}{R+h}.$$

Однако

$$\gamma M=gR^2\left(P=mg=\gamma\frac{mM}{R^2},\text{ откуда } \gamma M=gR^2\right);$$

тогда

$$v=R\sqrt{\frac{g}{R+h}}\approx 7{,}2\text{ км/сек}.$$

Период обращения спутника $T=\frac{2\pi}{\omega}$, где $\omega=\frac{v}{R+h}$. Тогда $T=\frac{2\pi(R+h)}{v}\approx 118$ *мин*.

134. $\gamma\approx 6{,}7\cdot 10^{-11}$ *м*^{3}/*кг*·*сек*^{2}.

Решение. Тело, находящееся на поверхности Земли, притягивается к ее центру с силой $P=\gamma\frac{mM}{R^2}$, где M — масса Земли; m — масса рассматриваемого тела; R — радиус Земли. Однако $P=mg$. Тогда $mg=\gamma\frac{mM}{R^2}$, откуда $\gamma=\frac{gR^2}{M}$. Масса Земли $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$.

Подставив значение M, получим $\gamma=\frac{3g}{4\pi R\rho}\approx 6{,}7\cdot 10^{-11}$ *м*^{3}/*кг*·*сек*^{2}.

135. $M_С=\frac{4\pi^2r^3}{\gamma T^2}$.

Решение. Под действием силы притяжения к Солнцу $\gamma\frac{M_З M_С}{r^2}$ Земля движется с центростремительным ускорением $a=\frac{4\pi^2r}{T^2}$. Тогда по второму закону динамики

$$M_З\frac{4\pi^2r}{T^2}=\gamma\frac{M_ЗM_С}{r^2},\text{ откуда } M_С=\frac{4\pi^2r^3}{\gamma T^2}.$$

136. $\frac{F_З}{F_М} \approx 2{,}55.$

Решение. По закону всемирного тяготения вес тела на Земле $F_З = \gamma \frac{mM_З}{R_З^2}$, а на Марсе $F_М = \gamma \frac{mM_М}{R_М^2}$.

По условию задачи $M_М = 0{,}11\ M_З$; $R_М = 0{,}53\ R_З$. Тогда $F_М = \gamma \frac{0{,}11 \cdot M_З m}{(0{,}53 \cdot R_З)^2}$. Сравнив веса, получим $\frac{F_З}{F_М} = \frac{M_З\,(0{,}53 R_З)^2}{R_З^2 \cdot 0{,}11 M_З} \approx 2{,}55.$

137. $n \approx 14$ оборотов.

Решение. Из формулы $\omega = 2\pi n$ определим число оборотов: $n = \frac{\omega}{2\pi}$. Поскольку условием движения спутника есть $\gamma \frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R$, где m — масса спутника, то $\omega^2 = \gamma \frac{M}{R^3}$. Учитывая, что $\gamma M = gr^2$ (где r — радиус Земли), получим $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gr^2}{R^3}} \approx 14$ оборотов в сутки.

138. $T \approx 9625$ *сек* $= 2$ *ч* 44 *мин* 1 *сек.*

Решение. По условию задачи вес тела на экваторе планеты вдвое меньше, чем на полюсе. Это значит, что центростремительная сила, необходимая для удержания тела на экваторе, при обращении планеты вокруг своей оси составляет половину силы тяготения.

К телам, находящимся в состоянии покоя относительно планеты, приложены две силы: сила тяготения F и реакция опоры P', численно равная весу тела P. Эти силы и сообщают телу необходимое центростремительное ускорение при обращении планеты вокруг своей оси. Указанные силы направлены на полюсе и экваторе по одной прямой (по вертикали). Уравнение движения тела запишется так:

$\frac{mv^2}{R} = F - P'$, где v — скорость движения тела.

На полюсе $v = 0$ и $P_0' = F$. Реакция опоры и, значит, вес тела на полюсе равны силе тяготения.

На экваторе $v = \frac{2\pi R}{T}$, где T — период обращения. Следовательно, $P_э' = F - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$. По условию задачи $P_э = 0{,}5\ P_0 = 0{,}5\,F$, откуда $\frac{4\pi^2 mR}{T^2} = 0{,}5\ F$. Однако по закону всемирного тяготения $F = \gamma \frac{mM}{R^2}$, где $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ — масса планеты, R — ее радиус, m — масса тела.

Поэтому можно записать $0{,}5\gamma \frac{m \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$. После упрощений получим $T = \sqrt{\frac{6\pi}{\gamma\rho}} \approx 9625$ *сек* $= 2$ *ч* 44 *мин* 1 *сек.*

139. $\rho \approx 19$ *кг/м*³.

Решение. Для веса тела на экваторе планеты можно записать (см. решение предыдущей задачи):

$$P_э = \gamma \frac{mM}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

По условию задачи $P_э = 0$, т. е. $\gamma \frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$.

Подставив значение массы планеты $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, где ρ — плотность вещества планеты, получим $\rho = \frac{3\pi}{\gamma T^2} \approx 19$ *кг/м*³.

140. $M_З = \frac{4\pi^2}{\gamma} \cdot \frac{R_С^3}{T_С^2}$.

Решение. Записав условие движения спутника: $M_С \frac{4\pi^2 R_С}{T_С^2} = \gamma \frac{M_С M_З}{R_С^2}$, получим $M_З = \frac{4\pi^2}{\gamma} \cdot \frac{R_С^3}{T_С^2}$.

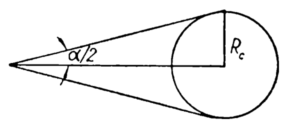


Рис. 165.

141. $g_С = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Решение. Уравнение движения Земли вокруг Солнца запишется так: $\gamma \frac{m_З m_С}{R^2} = \frac{4\pi^2 m_З R}{T^2}$. Отсюда, учитывая, что $g_С = \gamma \frac{m_С}{R_С^2}$, где $R_С$ — радиус Солнца, получим $g_С = 4\pi^2 \frac{R^3}{R_С^2 T^2}$.

Выразим радиус Солнца $R_С$ через угол α и расстояние R Земли от Солнца (рис. 165):

$$R_С = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \text{ тогда } g_С = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

142. $v_{отн} \approx 7430$ *м/сек* или $v_{отн} \approx 8360$ *м/сек*.

Решение. Условие движения ракеты по круговой орбите радиусом $R_З$ при $\gamma \frac{mM_З}{R_З^2} = \frac{mv^2}{R_З}$, учитывая равенство $g_0 = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}$, можно записать: $g_0 = \frac{v^2}{R_З}$, откуда $v = \sqrt{g_0 R_З}$, где v — линейная скорость ракеты.

Чтобы определить скорость ракеты относительно поверхности Земли, надо учесть, что точки земной поверхности, лежащие на экваторе, тоже вращаются с линейной скоростью $v' = \frac{2\pi R_З}{T}$, где T — земные сутки. Если ракета движется с запада на восток, то

$$v_{отн} = \sqrt{g_0 R_З} - \frac{2\pi R_З}{T} \text{ или } v_{отн} = \sqrt{9{,}8\ м/сек^2 \cdot 637 \cdot 10^4\ м} -$$

$$- \frac{6 \cdot 28 \cdot 637 \cdot 10^4\ м}{864 \cdot 10^2\ сек} \approx 7430\ м/сек.$$

При движении ракеты в противоположном направлении

$$v_{отн} = \sqrt{g_0 R_З} + \frac{2\pi R_З}{T} \approx 8360\ м/сек.$$

Таким образом, запустить искусственный спутник Земли в направлении ее вращения гораздо легче, чем против вращения Земли.

143. $x \approx 42\,450$ *км*; $v \approx 3{,}1$ *км/сек*.

Решение. Спутник с поверхности Земли кажется неподвижным. Это значит, что $\omega_С = \omega_З$. На спутник действует сила тяготения Земли

$$F = \gamma \frac{m_С M_З}{x^2}.$$

Учитывая, что $\gamma M_З = g R^2$, $F = m_С g \left(\frac{R}{x}\right)^2$.

Поскольку спутник движется по круговой орбите, то сила F является для него центростремительной, поэтому $F = m_С \omega^2 x = m_С \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$.

Таким образом, $m_С g \left(\frac{R}{x}\right)^2 = m_С \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$, откуда $x = \sqrt[3]{\frac{gT^2R^2}{4\pi^2}} \approx$ $\approx 42\,450$ *км*.

Скорость спутника $v = \frac{2\pi x}{T} \approx 3{,}1$ *км/сек*.

144. $g \approx 14$ *м/сек²*.

Решение. Воспользуемся решением задачи 133: $v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$, откуда $g = \frac{v^2(R+h)}{R^2} \approx 14$ *м/сек²*.

145. $g_1 = g\frac{R-h}{R}$; $h = 0{,}7R$.

Решение. Обозначим массу тела через m, расстояние от центра Земли через R_1, ускорение силы тяжести на глубине h через g_1. Тогда вес тела на глубине h будет $Q = mg_1$. С другой стороны, $Q = F_1 = \gamma\frac{mM_1}{R_1^2}$, где M_1 — масса части Земли в объеме шара радиусом R_1 $\left(M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho\right)$. Тогда $mg_1 = \gamma m \frac{4}{3}\pi R_1 \rho$. На поверхности Земли вес тела $P = mg = \gamma \frac{mM}{R^2} = \gamma m \frac{4}{3} \pi R\rho$. Тогда можно записать $\frac{g_1}{g} = \frac{R_1}{R} = \frac{R-h}{R}$, откуда $g_1 = g\frac{R-h}{R}$ и $h = R\left(1 - \frac{g_1}{g}\right)$.

Если $\frac{g_1}{g} = 0{,}3$, то $h = 0{,}7R$.

146. $\frac{P_э}{P_п} = 1 - \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma M T^2}$.

Решение. Для веса тела на экваторе и полюсе планеты можно записать (см. решение задачи 138):

$$P_э = \gamma \frac{mM}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \text{ и } P_п = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

откуда $\frac{P_э}{P_п} = 1 - \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma M T^2}$.

147. $h = R\left(\sqrt{\frac{\gamma\rho T^2}{\gamma\rho T^2 - 3\pi}} - 1\right)$.

Решение. Сила тяготения на высоте h над поверхностью планеты на полюсе $P'_п = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2}$.

Сила тяготения на поверхности на экваторе планеты $P_э = \gamma \frac{mM}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$. По условию $P'_п = P_э$, т. е. $\gamma \frac{mM}{(R+h)^2} = \gamma \frac{mM}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$.

Подставив значение $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, получим

$$h = R\left(\sqrt{\frac{\gamma\rho T^2}{\gamma\rho T^2 - 3\pi}} - 1\right).$$

148. $g_а \approx 0{,}385 \cdot 10^{-2}$ *м/сек*^{2}; $h_а \approx 127$ *м*.

Решение. По второму закону динамики $mg_а = \gamma m \frac{M_а}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} = \gamma \frac{m\frac{1}{6}\pi d^3\rho}{\frac{1}{4}d^2}$, где $g_а$ — ускорение силы тяжести на поверхности астероида. Отсюда $g_а = \frac{2}{3}\pi\gamma d\rho \approx 0{,}385 \cdot 10^{-2}$ *м/сек*^{2}.

При одинаковом усилии начальные скорости человека будут одинаковыми, следовательно, можно записать $g_a h_a = gh$ (исходим из формулы $v^2 = 2\,gh$). Отсюда $h_a = \frac{g}{g_a}\,h \approx 127$ *м*.

149. $g \approx 9{,}19$ *м/сек²*.

Решение. Ускорение g силы тяжести на высоте h

$$g = \gamma\,\frac{M}{(R+h)^2} = \gamma\,\frac{M}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}.$$

Учитывая, что $g_0 = \gamma\,\frac{M}{R^2}$, получим $g = g_0\,\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \approx g_0 \times$

$\times\left(1-\frac{2h}{R}\right) \approx 9{,}19$ *м/сек²*.

150. $R_{Ю} \approx 7{,}86\cdot 10^{11}$ *м*.

Решение. Воспользуемся решением задачи 140 и соответственно для расстояний Юпитера и Земли от Солнца запишем:

$R_{Ю} = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_С T_{Ю}^2}{4\pi^2}}$; $R_З = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_С T_З^2}{4\pi^2}}$, откуда $R_{Ю} = 2R_З\sqrt[3]{18} \approx$

$\approx 7{,}86\cdot 10^{11}$ *м*.

151. $T \approx 27{,}4$ *суток*.

Решение. Для движения Луны вокруг Земли можно записать

$$\frac{4\pi^2 mR}{T^2} = \gamma\,\frac{mM_З}{R^2}.$$

Учитывая, что $g_0 = \gamma\,\frac{M_З}{r^2}$, получим $T = \frac{2\pi R}{r}\sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 27{,}4$ *суток*.

152. $\frac{M_С}{M_З} \approx 3{,}51\cdot 10^5$.

Решение. Масса Земли $M_З = \frac{4\pi^2 R_Л^3}{\gamma T_Л^2}$; масса Солнца $M_С =$

$= \frac{4\pi^2 R_З^3}{\gamma T_З^2}$, где $R_З$ и $R_Л$ — соответственно радиусы земной и лунной орбит

$T_З$ и $T_Л$ — соответственно периоды обращения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли.

Тогда $\frac{M_С}{M_З} = \left(\frac{R_З}{R_Л}\right)^3\cdot\left(\frac{T_Л}{T_З}\right)^2 = (390)^3\cdot\left(\frac{1}{13}\right)^2 \approx 3{,}51\cdot 10^5$.

Указание. Ход решения и характер упрощений аналогичны решению задачи 135.

§ 5. СТАТИКА

153. $P \approx 61,97$ *н*.

Решение. Обозначим через l_1 и l_2 плечи рычажных весов. Тогда условие равновесия рычага при первом взвешивании $P_1 l_1 = P l_2$; при втором — $P l_1 = P_2 l_2$. Разделив первое равенство на второе, получим $\frac{P_1}{P} = \frac{P}{P_2}$, откуда $P = \sqrt{P_1 P_2}$ или $P \approx 61,97$ *н*.

154. $F \approx 173,2$ *н*.

Решение. Доска находится в равновесии, если равны моменты сил P и F относительно точки опоры O (рис. 166): $P \cdot OC_1 = F \cdot OB$,

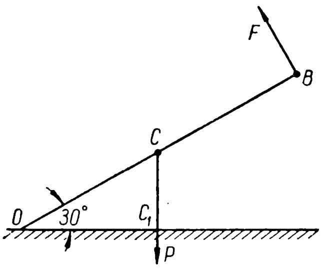


Рис. 166.

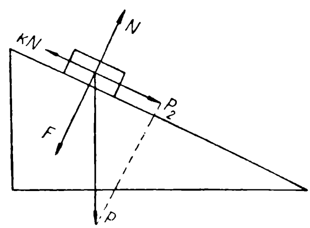


Рис. 167.

откуда $F = P \cdot \frac{OC_1}{OB}$. Однако $OC_1 = \frac{1}{2} OB \cos 30°$. Тогда $F = P \times \times \frac{1}{2} \cos 30°$ или $F \approx 173,2$ *н*. (длина доски является лишним условием).

155. $F = 14$ *н*.

Решение. Брусок будет в равновесии на наклонной плоскости, если сила трения $F_т = kN$ будет равна составляющей силы веса, направленной вдоль наклонной плоскости (рис. 167): $P_2 = P\frac{h}{l} = F_т$.

Сила нормального давления $N = F + P\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$. Подставив значения N, P_2 и $F_т$ в условие равновесия, получим $k\left(F + P\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}\right) = P\frac{h}{l}$, откуда $F = \frac{P}{kl}\left(h - k\sqrt{l^2 - h^2}\right) = 14$ *н*.

156. Решение. Сила P, натягивающая конец веревки AB, уравновешивается натяжением в двух ветвях петли. Сила натяжения в ветвях петли и сила P лежат в одной плоскости, а ветви петли образуют с линией AB одинаковые углы.

Таким образом, в точке A сходятся три силы — сила P и две одинаковые силы F. При заданной величине P величина каждой силы F зависит от величины угла α. Это легко показать, построив параллелограмм сил, из которого $P = 2F \cos\frac{\alpha}{2}$, откуда $F = \frac{P}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Рассматривая это равенство, можно сказать, что величина натяжения ветви F равна усилию P, если знаменатель правой части равенства равен единице, т. е. $2\cos\frac{\alpha}{2} = 1$ или $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. Для последнего равенства угол $\frac{\alpha}{2}$ должен быть равен 60° или $\alpha = 120°$. Следовательно, если угол α меньше 120°, то $F < P$. Если же $\alpha > 120°$, то $F > P$. Таким образом, отвечая на вопрос задачи, надо сказать, что в зависимости от величины угла между ветвями в петле натяжение на участке AB может быть больше или меньше натяжения в ветвях или может равняться ему.

157. $h = 2r \operatorname{ctg} \alpha$.

Решение. Цилиндр не опрокидывается, если проведенная через центр тяжести цилиндра вертикаль проходит через его площадь опоры.

Наибольшая высота цилиндра определится из условия, что проведенная через центр тяжести вертикаль проходит через крайнюю пра-

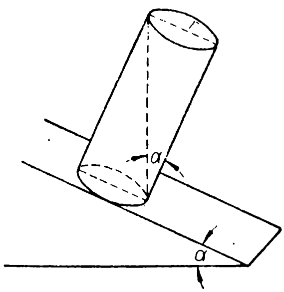


Рис. 168.

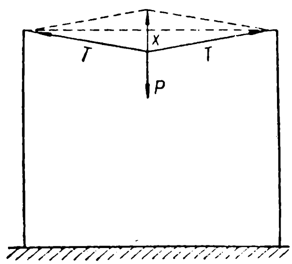


Рис. 169.

вую точку площади опоры цилиндра (рис. 168). Так как центр тяжести цилиндра лежит в его геометрическом центре, то из рисунка видим, что $\frac{1}{2}h = r \operatorname{ctg} \alpha$ или $h = 2r \operatorname{ctg} \alpha$.

158. $F = P\dfrac{2h \sin\alpha}{l\cos^2\alpha}$.

Решение. Величину силы F можно определить из условия равенства моментов сил относительно нижнего края лестницы:

$$Ph \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} Fl\cos\alpha, \text{ откуда } F = P\frac{2h}{l}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

159. $H \approx 6{,}5$ *м*.

Решение. Разность высот крепления канатика и высоты фонаря может быть выражена из прямоугольного треугольника (рис. 169), образованного стрелой прогиба x, канатиком и половиной ширины улицы:

$$x^2 + (0{,}5d)^2 = l^2,$$

где l — длина половины каната.

С другой стороны, стрела прогиба канатика может быть выражена из подобия этого треугольника с другим, образованным силой натяжения каната и половиной веса фонаря:

$$\frac{l}{x}=\frac{T}{0{,}5P},$$

где T — натяжение, P — вес фонаря. Исключим из этих уравнений l и выразим x через известные величины:

$$l=\frac{2T}{P}x;\quad x^2=\frac{d^2P^2}{4(4T^2-P^2)},\ \text{откуда } x=\frac{dP}{2\sqrt{4T^2-P^2}}.$$

Тогда высота крепления концов канатика $H=h+\dfrac{\frac{1}{2}dP}{\sqrt{4T^2-P^2}}\approx$ $\approx 6{,}5$ *м*.

160. $F\approx 570$ *н*.

Решение. Если бы шнур был перпендикулярен к люку, то надо было бы приложить силу, равную половине P, т. е. 400 *н*. Поскольку угол между шнуром и дверцой составляет 45°, то силу надо приложить в $\sqrt{2}$ раз бо́льшую, т. е. около 570 *н*.

161. Решение. Поскольку кирпичи однородны, то центр тяжести каждого из них находится на середине его длины. Тогда верхний кирпич будет находиться еще в равновесии, если его центр тяжести лежит на продолжении среза второго кирпича, т. е. наибольшая длина выступающей части первого кирпича составляет $\frac{1}{2}l$. На второй кирпич действует вес первого кирпича и его собственный вес. Центр тяжести этих двух кирпичей вместе взятых находится от края второго кирпича на расстоянии $\frac{1}{4}l$. На эту длину и может быть сдвинут второй кирпич относительно третьего.

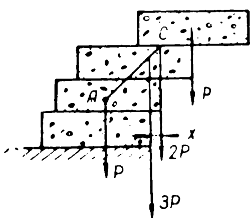


Рис. 170.

Центр тяжести трех кирпичей находится на линии AC (рис. 170), его положение можно определить из равенства $P\left(\frac{1}{2}l-x\right)=2Px$, откуда $x=\frac{1}{6}l$, т. е. третий кирпич может выступать над четвертым не более, чем на $\frac{1}{6}$ своей длины.

162. $L=3\frac{2}{3}l$.

Решение. Максимальной длине «моста» соответствует такое положение бруска C, когда расстояние между его левым концом и центром тяжести бруска B равно $\frac{1}{2}l$. При этом на брусок B действует в точке M сила, равная половине веса каждого из брусков, а в точке O — вес бруска. Чтобы брусок B не перевернулся, должно выполняться условие

$$P \cdot O_1K \geqslant \frac{1}{2} P \cdot KM_1.$$

Учитывая, что $O_1M_1 = \frac{1}{2} l$, условие равновесия бруска B можно переписать так:

$$\frac{1}{2} l - KM_1 \geqslant \frac{1}{2} KM_1 \text{ или } KM_1 \leqslant \frac{1}{3} l.$$

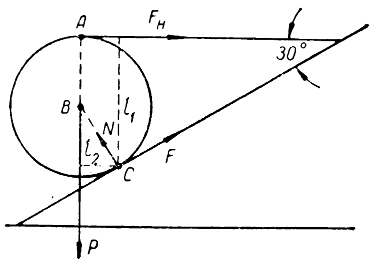


Рис. 171.

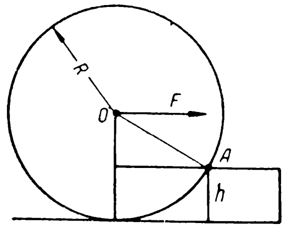


Рис. 172.

Отсюда вытекает, что максимальная длина «моста», который можно построить из пяти брусочков домино, равна $3l + 2 \cdot \frac{1}{3} l = 3\frac{2}{3} l$.

163. $F_н \approx 10{,}7$ *н*.

Решение. На диск действуют четыре силы: сила тяжести P, сила натяжения нити $F_н$, сила нормальной реакции планки N и сила трения $F_т$. Так как диск находится в равновесии, то сумма моментов сил относительно любой точки равна нулю. Напишем уравнение моментов относительно точки C (рис. 171):

$$F_н l_1 = P l_2; \text{ но } l_1 = AB + BC \cos 30^\circ = \frac{d}{2}(1 + \cos 30^\circ);$$

$$l_2 = BC \sin 30^\circ = \frac{d}{2} \sin 30^\circ.$$

$$\text{Тогда } F_н = P\frac{l_2}{l_1} = P\frac{\frac{1}{2} d \sin 30^\circ}{\frac{1}{2} d (1 + \cos 30^\circ)} = P\frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} \approx 10{,}7 \text{ н}.$$

164. $F \geqslant mg \dfrac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$.

Решение. Чтобы колесо могло подняться на ступеньку, момент силы F относительно точки A (рис. 172) должен быть равен или больше момента веса колеса mg относительно этой же точки. Плечо силы F будет $R - h$, а силы веса — $\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)}$.

Тогда условие поднятия колеса на ступеньку запишется так:

$$F(R-h) \geqslant mg\sqrt{h(2R-h)}, \text{ откуда } F \geqslant mg\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}.$$

165. $Q = 3000$ *н.*

Решение. Вес свешивающегося конца балки $\frac{1}{4}Q$ приложен в точке O (рис. 173). Уравнение моментов сил относительно точки C имеет вид:

$$\frac{3}{4}Q\cdot\frac{3}{8}l = P\frac{l}{4} + \frac{Q}{4}\cdot\frac{l}{8},$$

где l — длина балки. Отсюда $Q = 3000$ *н.*

166. Решение. Центр тяжести пластинки может перемещаться только под действием внешних сил. При изгибании же пластинки вследствие нагревания действуют внутренние силы, которые не могут перемещать центра тяжести пластинки.

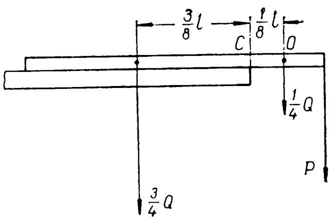


Рис. 173.

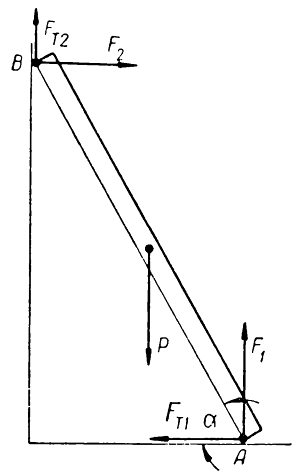


Рис. 174.

Без учета сил трения между пластинкой и опорой точка касания пластинки к плоскости сместится в сторону, противоположную изгибу, и не будет находиться на одной вертикали с центром тяжести. При учете сил трения центр тяжести под действием силы реакции опоры сместится тоже в сторону изгиба. В обоих случаях пластинка упадет в сторону изгиба.

167. $k_1k_2 + 2k_1 \operatorname{tg}\alpha = 1$.

Решение. Рассмотрим действующие на шест силы (рис. 174): вес P приложен посередине шеста; F_1 и F_2 — силы реакции опор в точках A и B; $F_{т1}$ и $F_{т2}$ — силы трения.

Однако

$$F_{т1} = k_1F_1; \tag{1}$$

$$F_{т2} = k_2F_2. \tag{2}$$

Условие равновесия шеста запишется так:

$$P = F_1 + F_{т2}; \tag{3}$$

$$F_2 = F_{т1}. \tag{4}$$

Отсюда сразу видно, что при отсутствии трения в точке A равновесие невозможно, так как если $F_{т1} = 0$, то и F_2 должно равняться нулю, однако тогда из (2) следует, что и $F_{т2} = 0$.

Запишем условие равенства моментов сил относительно точки A:

$$P\frac{l}{2}\cos\alpha = F_2 l\sin\alpha + F_{т2} l\cos\alpha \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}P\cos\alpha = F_2\sin\alpha + F_{т2}\cos\alpha. \quad (5)$$

Выражая с помощью уравнений (1)—(4) все силы, входящие в (5), через P, получим

$$k_1k_2\cos\alpha + 2k_1\sin\alpha = \cos\alpha.$$

Из этого равенства следует, что при $k_1 = 0$ равновесие невозможно, за исключением тривиального случая $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Последнее равенство можно записать: $k_1k_2 + 2k_1\mathrm{tg}\,\alpha = 1$.

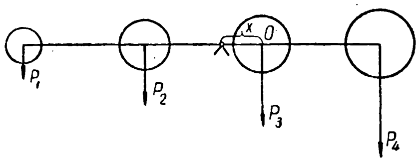


Рис. 175.

168. Решение. Вес шара уравновешен реакцией горизонтальной плоскости. На наклонную плоскость шар не давит, а только касается ее. Теоретически силу можно раскладывать по любым направлениям, но при решении конкретных задач силу можно раскладывать только по таким направлениям, по которым действуют другие силы или могут развиваться реакции.

169. $l_1 = \frac{13}{21}l$; $l_2 = \frac{8}{21}l$.

Решение. Укажем положение центров тяжести шаров на оси и силы, приложенные к этим центрам (рис. 175). Предположим, что центр тяжести системы находится слева от точки O на расстоянии x. Тогда условие равенства моментов относительно этой точки

$$P_1\left(\frac{2}{3}l - x\right) + P_2\left(\frac{l}{3} - x\right) = P_3x + P_4\left(\frac{l}{3} + x\right).$$

Подставив числовые данные, получим $x = \frac{l}{21}$.

Тогда расстояние центра тяжести системы от концов стержня

$$l_1 = \frac{1}{3}l + \frac{1}{3}l - x = \frac{13}{21}l \text{ и } l_2 = \frac{l}{3} + x = \frac{8}{21}l.$$

Задачу можно также решить, складывая попарно параллельные силы и находя точку приложения их равнодействующей.

170. $x = \frac{R}{6}$ от центра.

Решение. Пусть вес диска P; тогда вес вырезанного круга будет $\frac{1}{4}P$. Предположим, что в диске сделано симметрично два таких выреза; тогда вес пластинки был бы равен $\frac{1}{2}P$ и центр тяжести находился бы в точке O (рис. 176). Заполним один вырез; при этом прибавится вес $\frac{1}{4}P$, приложенный в точке O_1. Центр тяжести будет совпадать с точкой

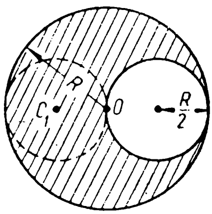


Рис. 176.

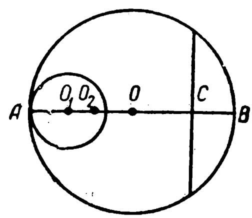


Рис. 177.

приложения равнодействующей сил $\frac{1}{2}P$ и $\frac{1}{4}P$. Эта точка находится между O и O_1 на расстоянии x от O:

$$\frac{P}{2}x = \frac{P}{4}\left(\frac{1}{2}R - x\right), \text{ откуда } x = \frac{K}{6}.$$

171. $x = \frac{\pi b}{4(16 - \pi)}$.

Решение. Вес квадратной пластинки до вырезания отверстия пропорционален площади $S = b^2$ и приложен в центре квадрата. Вес вырезанного диска пропорционален его площади $S_1 = \frac{\pi b^2}{16}$ и приложен в центре диска.

Предположим, что из квадрата слева вырезано круглое отверстие такого же радиуса симметрически относительно центра квадрата. Тогда вес этой пластинки был бы пропорционален площади $S - 2S_1 = b^2\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$ и приложен в центре квадрата. Центр тяжести пластинки с вырезом можно найти как точку приложения параллельных сил, пропорциональных $S - 2S_1$ и S_1. Обозначив расстояние от центра квадрата до искомого центра тяжести через x, можно записать:

$$b^2\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)x = \frac{\pi b^2}{16}\left(\frac{b}{4} - x\right), \text{ откуда } x = \frac{\pi b}{4(16 - \pi)}.$$

172. Решение. Сначала определим положение центра тяжести крышки стола и диска O_2 (рис. 177). Для этого найдем точку приложения равнодействующей сил Mg и mg. Обозначив $OO_2 = x$, можно записать:

$$Mg \cdot x = mg(R - r - x), \quad \text{откуда} \quad x = \frac{m(R-r)}{m+M}.$$

Три ножки стола должны быть размещены в вершинах равнобедренного треугольника, одна из вершин которого лежит в точке A касания диска к краю крышки. Две другие вершины должны находиться на перпендикуляре к диаметру AB. Расстояние $O_2A = R - x = \frac{MR + mr}{m+M}$.

Давление ножек на пол будет одинаковым, если центр тяжести системы O_2 разделит расстояние между вершиной A и точкой C пересечения диаметра с перпендикуляром в отношении 2 : 1. Тогда расстояние $O_2C = \frac{MR + mr}{2(m+M)}$.

173. $\rho = \frac{3}{4}\rho_0$.

Решение. Палочка будет находиться в равновесии при условии равенства моментов: силы веса $l\rho gS$ и выталкивающей силы воды $\frac{1}{2}\rho_0 lgS$ относительно точки подвеса, т. е. $l\rho gS \frac{1}{2} l \sin\varphi = \frac{1}{2} l\rho_0 gS \times \frac{3}{4} l \sin\varphi$, откуда $\rho = \frac{3}{4}\rho_0$.

174. $x = \frac{aq}{2\sqrt{4p^2 - q^2}}$.

Решение. Статическое решение задачи довольно простое (рис. 178):

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}} = \frac{q}{2p}, \quad \text{откуда} \quad px = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}.$$

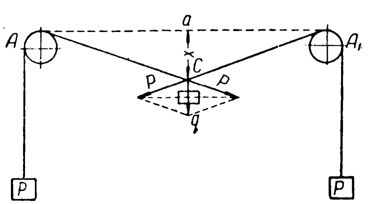


Рис. 178.

Возводя обе части в квадрат, получим

$$p^2x^2 = \frac{q^2}{4}\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right),$$

откуда $(16p^2 - 4q^2)\,x^2 = a^2q^2$ и

$$x = \frac{aq}{2\sqrt{4p^2 - q^2}}.$$

При решении этой задачи можно воспользоваться решением задачи 159.

175. $F = 10$ *н*.

Решение. Условием опрокидывания призмы является равенство моментов сил F и веса призмы относительно крайней правой точки опоры. Поскольку плечом силы F является высота призмы, а плечом веса призмы является половина длины ребра куба, то равенство моментов имеет вид:

$$F \cdot 20\ \text{см} = 40\ \text{н} \cdot 5\ \text{см}, \quad \text{откуда} \quad F = 10\ \text{н}.$$

Величина этой силы не зависит от того, какой куб находится наверху — легкий или тяжелый, так как величина плеч будет одинаковой в обоих случаях.

§ 6. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

176. $A \approx 6{,}86 \cdot 10^4$ *дж.*

Решение. Выполненная работа равна произведению движущей силы на высоту подъема. Движущая сила будет

$$F = P + \frac{P}{g} a; \quad \text{тогда} \quad A = \left(P + \frac{P}{g} a\right) h \approx 6{,}86 \cdot 10^4 \text{ дж}.$$

177. $F = 48\,000$ *н.*

Решение. Для определения силы тяги воспользуемся формулой

$$\eta N = Fv, \text{ откуда } F = \eta \frac{N}{v} = 48\,000 \text{ н}.$$

178. Выгоднее тормозить, чем поворачивать.

Решение. Если шофер затормозит, то автомобиль остановится, когда его кинетическая энергия израсходуется на работу против сил трения. При повороте автомобиля та же сила трения будет играть роль центростремительной силы, заставляющей автомобиль двигаться по дуге окружности.

В случае торможения $\frac{mv^2}{2} = Fx$, где F — сила трения, x — путь, который пройдет автомобиль после включения тормозов. Отсюда $x = \frac{mv^2}{2F}$. Очевидно, чтобы автомобиль не разбился, должно выполняться условие $x \leqslant s$ или $F \geqslant \frac{mv^2}{2s}$.

В случае поворота $F = \frac{mv^2}{R}$ и, чтобы автомобиль не разбился, должно быть $R \leqslant s$ или $F \geqslant \frac{mv^2}{s}$.

Для того чтобы избежать столкновения со стеной, при торможении нужна сила трения, вдвое меньшая, чем при повороте. Следовательно, выгоднее тормозить, чем поворачивать.

179. $N = 800$ *квт.*

Решение. При равномерном движении в гору сила тяги равна сумме силы трения и скачивающей силы

$$F_{\text{тяги}} = F_{\text{т}} + P \frac{h}{l}.$$

Тогда мощность тепловоза $N = \left(F_{\text{т}} + P \frac{h}{l}\right) v = 800$ *квт.*

180. $v_{\text{м}} \approx 18{,}3$ *м/сек*; $a_1 \approx 0{,}176$ *м/сек*^{2}; $a_2 \approx 0{,}026$ *м/сек*^{2}.

Решение. При движении поезда с максимальной скоростью сила тяги равна силе трения $F_{\text{т}} = kmg$. Поэтому можно записать:

$$N = F_{\text{т}} v_{\text{м}} = kmgv_{\text{м}}, \text{ откуда } v_{\text{м}} = \frac{N}{kmg} \text{ или } v_{\text{м}} \approx 18{,}3 \text{ м/сек}.$$

При движении с меньшей скоростью сила тяги равна сумме силы трения и силы, сообщающей ускорение поезду:

$$F_{\text{тяги}} = F_{\text{т}} + ma; \text{ поэтому } N = (F_{\text{т}} + ma_1) v_1,$$

$$\text{откуда } a_1 = \frac{N}{mv_1} - kg \approx 0{,}176 \text{ м/сек}^2.$$

Аналогично $a_2 = \dfrac{N}{mv_2} - kg \approx 0{,}026$ *м/сек*^{2}.

181. $A = 44 \cdot 10^5$ *дж*; $\eta = 0{,}91$.

Решение. При поднятии лифта на высоту H силой $P = 2 \times \times 10^4$ *н* центр тяжести троса переместится на высоту $\frac{1}{2} H$ силой $P_1 = = 20$ *н/м* $\cdot$ 200 *м* $= 4 \cdot 10^3$ *н*.

Работу выполняет сила P на пути H и сила P_1 на пути $\frac{1}{2} H$. Полезная работа $A_{\text{п}} = PH = 4 \cdot 10^6$ *дж*.

Работа поднятия троса $A_1 = P_1 \cdot \frac{1}{2} H = 4 \cdot 10^5$ *дж*. Полная работа $A = 44 \cdot 10^5$ *дж*. Коэффициент полезного действия установки

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A} = \frac{4 \cdot 10^6}{4{,}4 \cdot 10^6} \approx 0{,}91.$$

182. $A = \frac{n}{2}(n-1) Ph$.

Решение. Работу A по складыванию плит в виде колонны можно определить, подсчитав сумму работ по поднятию этих плит. Первая плита не поднимается, вторая поднимается на высоту h, третья — на высоту $2h$, четвертая — на высоту $3h$, n-ая на высоту $(n-1)h$. Следовательно,

$$A = Ph + P \cdot 2h + P \cdot 3h + \ldots + P(n-1)h =$$

$$= Ph[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] = \frac{n}{2}(n-1) Ph.$$

Задачу можно решить также, применив закон сохранения энергии. Искомая наименьшая работа должна равняться приросту потенциальной энергии поднятых плит.

183. $k = 0{,}05$.

Решение. Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, определяется по формуле:

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Для движения тела по льду можно записать

$$kmgs_1 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Однако по условию $s_1 = 10s$; поэтому последнее равенство можно записать так: $kg \cdot 10 \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{2}$, откуда $k = \frac{1}{20 \sin 2\alpha} = 0{,}05$.

184. $h_1 \approx 2$ *м*.

Решение. Кинетическая энергия конькобежца при движении на гору превращается в потенциальную энергию и идет на совершение работы по преодолению силы трения.

Поэтому можно записать $\frac{mv^2}{2} = mgh_1 + kNl$, где $N = mg \cos \alpha$.

Из рис. 179 видим, что $l = \frac{h_1}{\sin \alpha}$.

Кроме того, $\frac{h}{s} = \operatorname{tg} \alpha$. Тогда

$\frac{v^2}{2} = gh_1 + kgh_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, откуда

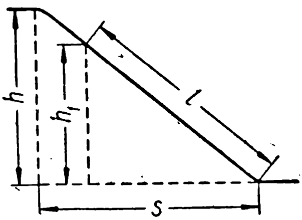


Рис. 179.

$$h_1 = \frac{v^2}{2g\left(1 + \frac{k}{\operatorname{tg} \alpha}\right)} = \frac{v^2 h}{2g(h + ks)} \approx 2 \text{ м}.$$

185. $k \approx 0{,}025$; $A \approx 53{,}6$ *дж*.

Решение. В момент броска на человека и камень действуют только внутренние силы, и поэтому для системы справедлив закон сохранения количества движения. Так как до броска камня количество движения системы равно нулю, то после броска сумма количеств движения человека и камня также равна нулю:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,$$

где m_1 и m_2 — масса соответственно конькобежца и камня, а v_1 и v_2 — соответственно их скорости. Отсюда $v_1 = -v_2 \frac{m_2}{m_1}$. Знак минус показывает, что человек движется в сторону, противоположную движению камня.

После броска на движущегося конькобежца действует сила трения, поэтому систему нельзя считать изолированной. Конькобежец будет двигаться до тех пор, пока запас его кинетической энергии не будет израсходован на работу против силы трения:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = k m_1 g s \text{ или } \frac{m_2^2}{m_1^2} \cdot \frac{v_2^2}{2} = kgs, \text{ откуда } k = \frac{m_2^2 v_2^2}{2 m_1^2 g s} \approx 0{,}025.$$

Работа, совершенная конькобежцем при бросании камня, идет на сообщение кинетической энергии человеку и камню и, следовательно, равна сумме этих кинетических энергий

$$A = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) \approx 53{,}6 \text{ дж}.$$

186. $A = 39{,}2$ *дж.*

Решение. Работа, совершенная при бросании тела, равна его кинетической энергии в начальный момент:

$$A = \frac{mv^2}{2}.$$

Скорость бросания тела определим из формулы дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту,

$$s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}, \text{ откуда } v^2 = \frac{gs}{\sin 2\alpha}.$$

Тогда работа будет равна $A = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgs}{2\sin 2\alpha} = 39{,}2$ *дж.*

187. $t = 1{,}5$ *сек.*

Решение. Вследствие действия силы земного тяготения скорость тела возрастает (рис. 180) и через t *сек* равна $v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$.

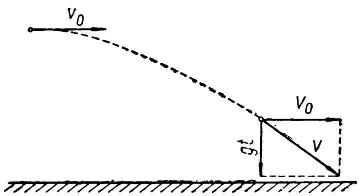


Рис. 180.

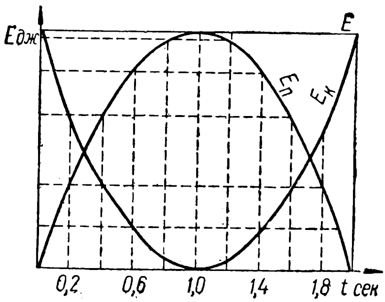


Рис. 181.

По условию задачи $\frac{mv^2}{2} = 2m\frac{v_0^2}{2}$. Подставив значение v, получим

$$\frac{m}{2}(v_0^2 + g^2t^2) = mv_0^2, \text{ откуда } v_0^2 = g^2t^2, \text{ а } t = \frac{v_0}{g} = 1{,}5 \text{ сек.}$$

188. Решение. Чтобы построить графики изменения энергий в зависимости от времени, составим уравнения:

$$E_к = \frac{mv^2}{2}, \text{ но } v = v_0 - gt; \text{ тогда } E_к = \frac{m}{2}(v_0 - gt)^2;$$

$$E_п = mgh, \text{ но } h = v_0t - \frac{gt^2}{2}; \text{ тогда } E_п = mg\left(v_0t - \frac{gt^2}{2}\right);$$

$$E = E_п + E_к = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Придавая t различные значения, строим графики (рис. 181).

189. $v \approx -588$ *м/сек.*

Решение. На основании закона сохранения энергии определяем скорость отдачи v_1 винтовки после выстрела:

$$Mgh = \frac{Mv_1^2}{2}; \quad v_1^2 = 2gh.$$

В момент выстрела на винтовку и пулю действуют только силы давления пороховых газов, являющиеся внутренними для этой системы. Поэтому можно применить закон сохранения количества движения.

До выстрела количество движения системы равнялось нулю, значит, и после выстрела полное количество движения системы тоже должно равняться нулю:

$$Mv_1 + mv = 0.$$

где M — масса винтовки, m — масса пули, v — скорость пули после выстрела.

Отсюда $v = -\frac{Mv_1}{m} = -\frac{M}{m}\sqrt{2gh} \approx -588$ *м/сек* (знак минус означает, что скорость пули направлена в сторону, противоположную скорости отдачи винтовки).

190. $F \approx 1587$ *н.*

Решение. По закону сохранения и превращения энергии полная энергия (сумма потенциальной и кинетической энергий) самолета на высоте 1200 *м* равна сумме совершенной самолетом работы по преодолению сопротивления воздуха и кинетической энергии у поверхности земли, т. е. $mgh + \frac{mv^2}{2} = Fl + \frac{mv_1^2}{2}$.

Отсюда $F = mg\frac{h}{l} + \frac{m}{2l}(v^2 - v_1^2) \approx 1587$ *н.*

191. $\frac{A_0}{A} = \frac{m_c}{m_0} = 1\%$.

Решение. По закону сохранения количества движения можно записать

$$m_c v_c + m_0 v_0 = 0,$$

где m_c и m_0 — масса соответственно снаряда и орудия; v_c и v_0 — скорости снаряда и орудия после выстрела.

Отсюда имеем

$$m_c v_c = -m_0 v_0 \text{ или } m_c^2 v_c^2 = m_0^2 v_0^2.$$

Выделяя из последнего равенства соотношение $\frac{m_c}{m_0}$, получаем

$$\frac{m_c}{m_0} = \frac{m_0 v_0^2}{m_c v_c^2} = \frac{\frac{1}{2} m_0 v_0^2}{\frac{1}{2} m_c v_c^2},$$

т. е. отношение кинетических энергий орудия и снаряда обратно пропорционально отношению их масс.

Подставив числовые значения, получим $\frac{m_c}{m_0} = \frac{10}{1000} \cdot 100\% = 1\%$.

192. $F \approx 2{,}55 \cdot 10^6$ *н.*

Решение. Силу сопротивления почвы можно определить на основании закона сохранения энергии: $P(h + l) = Fl$, где $h = \frac{v^2}{2g}$ — высота поднятия молота копра.

Тогда $F = P\left(\frac{v^2}{2gl} + 1\right) \approx 2{,}55\cdot 10^6$ *н*.

193. $E_к \approx 525{,}5$ *дж*.

Р е ш е н и е. Задачу можно решить двумя способами.

1) Движение тела, брошенного горизонтально, можно рассматривать как состоящее из равномерного движения по горизонтали со скоростью v_0 и свободного падения со скоростью $v_1 = gt$. Скорость в момент приземления $v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2}$. Но скорость $v_1 = \sqrt{2gh}$. Тогда $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Кинетическая энергия тела в момент приземления

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{P}{2}\cdot\frac{v_0^2 + 2gh}{g} \approx 525{,}5 \text{ дж}.$$

2) Тело на высоте h от поверхности земли имело запас потенциальной энергии $E_п = mgh = Ph$. При падении потенциальная энергия тела переходит в кинетическую. Тогда на основе закона сохранения энергии можно записать:

$$E_к = \frac{Pv_0^2}{2g} + Ph = \frac{P}{2}\cdot\frac{v_0^2 + 2gh}{g}.$$

194. $s \approx 2135$ *м*; $N \approx 5057$ *квт*.

Р е ш е н и е. Кинетическая энергия, которую имеет поезд в момент начала подъема, полностью расходуется на выполнение работы по преодолению силы трения $F_т = kmg\cos\alpha$ и скатывающей силы $mg\sin\alpha$. Следовательно, можно записать:

$$\frac{mv^2}{2} = (mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha)\,s,$$

$$\text{откуда } s = \frac{v^2}{2g(\sin\alpha + k\cos\alpha)} \approx 2135 \text{ м}.$$

Движение поезда будет равномерным, если сила тяги тепловоза будет равна сумме силы трения и скатывающей силы $F_{тяги} = kmg\cdot\cos\alpha + mg\sin\alpha$.

Тогда минимальная мощность тепловоза $N = (mg\sin\alpha + kmg \times \cos\alpha)\,v \approx 5057$ *квт*.

195. Р е ш е н и е. Рассуждение, приводящее к результату, что энергия тела равна $\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2}$, неверно. Изменение энергии тела может произойти лишь за счет работы его бросания. Однако эта работа не равна $\frac{mu^2}{2}$. Обозначим массу поезда через M и изменение его скорости через Δv. Тогда работа бросания тела выразится так: $\frac{mu^2}{2} + \frac{M(\Delta v)^2}{2}$.

Из работы бросания тела надо вычесть изменение энергии поезда

$$\frac{M(v - \Delta v)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = -Mv\Delta v + \frac{M(\Delta v)^2}{2}.$$

Таким образом, для изменения энергии тела получим

$$\Delta E = \frac{mu^2}{2} + Mv\Delta v.$$

Однако по третьему закону динамики

$$M\Delta v = mu; \text{ тогда } \Delta E = \frac{mu^2}{2} + muv.$$

Следовательно, полная энергия тела равна $\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + muv = $ $= \frac{m(v+u)^2}{2}$.

196. $F_c \approx 13\,200$ *н.*

Решение. Определим скорость молота к моменту его удара по свае по закону сохранения энергии

$$(P_1 - F)\,H = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \text{ откуда } v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - F)\,Hg}{P_1}} \approx 6 \text{ м/сек.}$$

Удар молота считаем неупругим. Молот и свая после удара будут двигаться как одно целое со скоростью v, которую можно определить из закона сохранения количества движения

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\,v, \text{ откуда } v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \approx 1{,}5 \text{ м/сек.}$$

При движении сваи в почве на нее действуют средняя сила сопротивления почвы и сила веса тела (сваи и молота). Запишем закон сохранения энергии для этого случая:

$$F_c h - (P + P_1)\,h = \frac{mv^2}{2},$$

где $m = m_1 + m_2$ — масса сваи и молота.

Из этого уравнения $F_c = (P + P_1)\left(\frac{v^2}{2gh} + 1\right) \approx 13\,200$ *н.*

Найдем часть энергии, расходуемой на нагревание и деформацию тел. Изменение энергии

$$E_1 - E_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 =$$

$$= \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\,m_1^2}{2\,(m_1 + m_2)^2} v_1^2 =$$

$$= \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

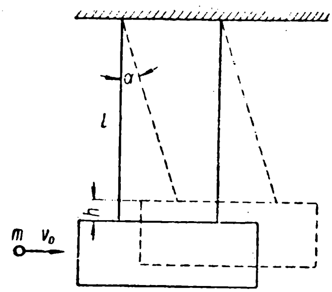


Рис. 182.

Теряемая часть энергии

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0{,}75.$$

Часть энергии, расходуемой на выполнение работы по преодолению силы сопротивления почвы,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} \cdot \frac{2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}25.$$

197. $\alpha \approx 15^\circ$.

Р е ш е н и е. На основании закона сохранения количества движения (рис. 182) можно записать:

$$mv_0 = (m + M)\,v, \text{ откуда } v = \frac{mv_0}{m + M}.$$

Однако $v^2 = 2gh$, где $h = l - l\cos\alpha = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}$; тогда $\sin^2\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{v^2}{4lg};\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{mv_0}{2(m + M)}\sqrt{\frac{1}{lg}};$$

$$\alpha = 2\arcsin\frac{mv_0}{2(m + M)\sqrt{lg}} \approx 15^\circ.$$

198. $\eta \approx 0{,}63$.

Р е ш е н и е. К. п. д. транспортера определим как отношение полезной мощности по перенесению груза $N_1 = \frac{Ph}{t}$ к мощности двигателя N:

$$\eta = \frac{N_1}{N} = \frac{Ph}{Nt} \approx 0{,}63.$$

199. $x = 15$ *м*.

Р е ш е н и е. По закону сохранения энергии разность потенциальных энергий груза в начальный и конечный моменты его движения равна работе, выполненной грузом по вытягиванию веревки (рис. 183), т. е.

$$P(h + x) = xF, \text{ откуда } x = \frac{Ph}{F - P} = 15 \text{ м}.$$

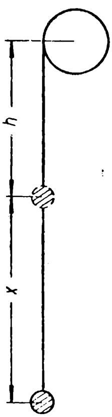


Рис. 183.

200. $N \approx 11{,}8$ *квт*.

Р е ш е н и е. При равномерном спуске с горы (если двигатель выключен) составляющая силы веса вдоль наклонной плоскости $mg\sin\alpha$ по величине равна силе трения $F_т = kmg\cos\alpha$, т. е. $mg\sin\alpha = F_т$.

При подъеме с постоянной скоростью сила тяги двигателя автомобиля должна равняться сумме силы трения и составляющей веса вдоль наклонной плоскости:

$$F_{тяги} = mg\sin\alpha + F_т = 2mg\sin\alpha, \text{ где } \sin\alpha = \frac{h}{l}.$$

Мощность, которую при этом будет развивать двигатель, равна $N = F_{тяги} \cdot v$, где v — скорость равномерного движения. Тогда $N = 2\,mgv\sin\alpha = 2\,mgv\frac{h}{l} \approx 11{,}8$ *квт*.

201. $E_к' \approx 1{,}27 \cdot 10^{-20}$ *дж.*

Решение. Для определения кинетической энергии атома RaC $E_к' = \frac{MV^2}{2}$ надо знать скорость V. Определим эту скорость из закона сохранения количества движения:

$$mv + MV = 0, \text{ откуда } V = -\frac{m}{M} v.$$

Однако $v = \sqrt{\frac{2E_к}{m}}$, следовательно, $V = -\frac{1}{M}\sqrt{2mE_к}$. Тогда

$$E_к' = \frac{MV^2}{2} = \frac{m}{M} E_к \approx 1{,}27 \cdot 10^{-20} \text{ дж.}$$

202. $v_1 \approx 0{,}66 \cdot 10^7$ *м/сек.*

Решение. Скорость атома Ba находим из законов сохранения количества движения и энергии:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2} = E,$$

где M_1 и M_2 — массы соответственно атомов Ba и Kr, а v_1 и v_2 — скорости движения соответственно атомов Ba и Kr.

Определив из первого уравнения v_2 и подставив во второе уравнение, получим

$$v_1 = \sqrt{\frac{2M_2E}{M_1M_2 + M_1^2}} \approx 0{,}66 \cdot 10^7 \text{ м/сек.}$$

203. $h \approx 1{,}12 \cdot 10^{-13}$ *м.*

Решение. Снижение атомов под действием силы тяжести можно определить по формуле $h = \frac{gt^2}{2}$. Для этого надо знать время полета t, которое определяем из формулы $t = \frac{s}{v}$, где $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, следовательно, $h = \frac{gs^2m}{4E} \approx 1{,}12 \cdot 10^{-13}$ *м.*

204. $A \approx 11\,200$ *дж.*

Решение. Работа $A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}$, где $m = \frac{P}{g}$ — масса маховика, $v_1 = 2\pi R n_1$, $v_2 = 2\pi R n_2$. Таким образом,

$$A = \frac{P}{2g} (2\pi R)^2 (n_1^2 - n_2^2) = \frac{2\pi^2 P R^2}{g} (n_1^2 - n_2^2) \approx 11\,200 \text{ дж.}$$

205. $v \approx 10$ *м/сек.*

Решение. Когда веревка висит симметрично относительно блока, ее центр тяжести находится на расстоянии $\frac{1}{4}l$ от ее концов или на $\frac{1}{4}l$

от блока. В момент сползания с блока центр тяжести будет на расстоянии $\frac{1}{2}l$ от блока. В результате движения центр тяжести опустится на $\frac{1}{4}l$ и, следовательно, потенциальная энергия уменьшится на $mg\frac{1}{4}l$. За счет уменьшения потенциальной энергии веревка приобретает кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$.

По закону сохранения энергии $mg\frac{l}{4} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{lg}{2}} \approx$ ≈ 10 *м/сек*.

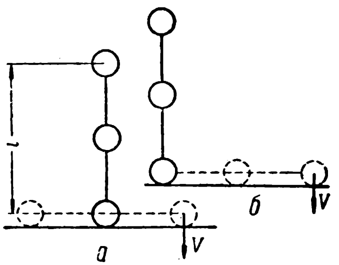


Рис. 184.

Веревка движется под действием силы, образованной разностью веса ее частей, свешивающихся со сторон блока. При движении часть веревки, свешивающаяся с одной стороны блока, все время увеличивается, следовательно, растет и действующая сила. Возрастающая сила при постоянной массе вызывает возрастание ускорения, т. е. движение будет неравномерно ускоренным.

Если веревка лежит на гладком горизонтальном столе, то в результате сползания со стола центр тяжести опускается на $\frac{l}{2}$, поэтому закон сохранения энергии запишется так: $mg\frac{1}{2}l = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{gl} \approx$ ≈ 14 *м/сек*.

206. $v = 2\sqrt{\frac{3}{5}gl}$.

Р е ш е н и е. В обоих случаях в момент касания шариками пола горизонтальная составляющая скорости центра масс системы равна нулю. Крайний правый шарик (рис. 184) в этот момент имеет скорость v, а средний — скорость $\frac{1}{2}v$. Закон сохранения энергии для обоих случаев запишется так:

$$mgl + mg\frac{l}{2} = \frac{mv^2}{8} + \frac{mv^2}{2},$$

где m — масса каждого шарика.

Отсюда $v = 2\sqrt{\frac{3}{5}gl}$.

207. $v_1 \approx 0,96$ *м/сек*.

Р е ш е н и е. Условимся потенциальную энергию отсчитывать от уровня AB (рис. 185). Тогда закон сохранения энергии запишется так:

$$(m_1 + m_2)\,gl_1 = m_2g\,(l_1 + l_2) + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}.$$

Поскольку оба груза вращаются с одинаковой угловой скоростью $\omega_1 = \omega_2$, то

$$\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}, \text{ или } v_2 = v_1 \frac{l_2}{l_1}.$$

Подставив это значение в предыдущее равенство, получим

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gl_1^2(m_1l_1 - m_2l_2)}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}} \approx 0{,}96 \text{ м/сек.}$$

208. $A \approx 105$ *дж.*

Решение. Работа, совершенная человеком при бросании камня из тележки, идет на увеличение кинетической энергии камня и тележки с человеком:

$$A = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2},$$

где v_2 — скорость движения тележки после броска камня.

По закону сохранения количества движения

$$mv_1 = -Mv_2, \text{ откуда } v_2 = -\frac{m}{M}v_1.$$

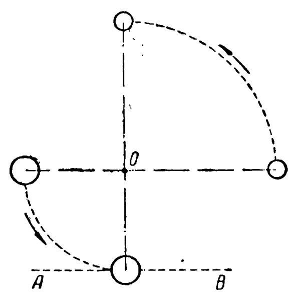


Рис. 185.

Подставив это значение v_2 в предыдущее равенство, получим

$$A = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m^2v_1^2}{2M} = \frac{mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right) = 105 \text{ дж.}$$

Если $M \gg m$, то $A \approx \frac{mv_1^2}{2}$, т. е. вся работа, выполненная человеком, идет на придание камню кинетической энергии. В общем случае кинетические энергии, получаемые взаимодействующими телами, обратно пропорциональны их массам.

209. В три раза.

Решение. Удлинение пружины прямо пропорционально приложенной силе. Поэтому средняя сила действия мальчика на пружину равна $\frac{0 + F}{2} = 0{,}5F$, а мужчины — $\frac{F + 2F}{2} = 1{,}5F$.

Следовательно, мужчина выполнил в три раза бóльшую работу.

210. $h_1 \approx 1{,}23$ *м.*

Решение. Акробат при прыжке совершает работу по растяжению сетки за счет своей потенциальной энергии. Поэтому можно записать:

$$mg(H_2 + h_2) = \frac{kh_2^2}{2} \text{ и } mg(H_1 + h_1) = \frac{kh_1^2}{2}.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{H_1 + h_1}{H_2 + h_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}.$$

Для упрощения расчетов подставим в это равенство числовые значения величин и получим квадратное уравнение: $6h_1^2 - h_1 - 8 = 0$, решив которое, получим $h_1 \approx 1{,}23$ *м* (отрицательное значение корня, как не имеющее физического смысла, отбрасываем).

211. $A = 18$ *дж.*

Решение. Под действием силы $F_1 = 50$ *н* пружина удлиняется на x_1. Дополнительная сила $F_2 = 80$ *н* удлиняет пружину на $l = 20$ *см.* Под действием силы $F = F_1 + F_2$ пружина удлиняется на $x = x_1 + l$.

Работа дополнительного удлинения равна разности работ по удлинению x и работы по удлинению x_1, т. е.

$$A = \frac{1}{2}Fx - \frac{1}{2}F_1x = k\frac{x^2}{2} - k\frac{x_1^2}{2} = \frac{k}{2}(x + x_1)(x - x_1);$$

однако $k(x + x_1) = F + F_1$; тогда $A = \frac{F_1 + F}{2}(x - x_1) = 18$ *дж.*

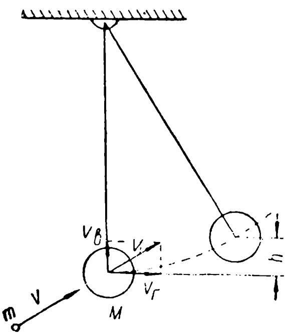


Рис. 186.

212. $v \approx 283$ *м/сек.*

Решение. Поскольку сферическое тело в момент удара может двигаться только в горизонтальном направлении (рис. 186), то, применяя закон сохранения количества движения к системе шарик — сферическое тело, надо учитывать только горизонтальную составляющую количества движения шарика: $(M + m)\,v_{\text{г}} = mv\sin\alpha$.

По закону сохранения механической энергии

$$\frac{(M + m)\,v_{\text{г}}^2}{2} = (M + m)\,gh,$$ следовательно, $v_{\text{г}}^2 = 2gh$.

Подставив значение $v_{\text{г}}$ в предыдущее уравнение, получим

$$v = \frac{m + M}{m\sin\alpha}\sqrt{2gh} \approx 283 \text{ м/сек}.$$

213. $E = 2{,}5$ *дж.*

Решение. Энергия толчка расходуется на создание горизонтальной составляющей скорости шара. Эту скорость подсчитаем по горизонтальной длине полета и времени полета $v = \frac{l}{t}$. Время полета равно времени свободного падения шара с высоты стола:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$ следовательно, $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{Pl^2}{2gt^2} = \frac{Pl^2}{4h} = 2{,}5$ *дж.*

214. $A \approx 163{,}75$ *дж.*

Решение. Работа, выполненная пулей при пробивании доски, равна разности кинетических энергий пули до и после пробивания доски: $A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}$,

где m — масса пули, v_2 — скорость пули после пробивания доски.

Используя формулу равноускоренного движения $d = \frac{gt^2}{2}$, определим время полета пули между доской и щитом: $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$. Скорость пули $v_2 = \frac{s}{t} = \frac{s}{\sqrt{\frac{2d}{g}}}$. Подставив полученное значение v_2 в формулу работы, получим

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{ms^2g}{2\cdot 2d} = \frac{m}{2}\left(v_1^2 - \frac{s^2g}{2d}\right) \approx 163{,}75 \text{ дж.}$$

215. $E = \frac{gs^2m}{4h} \approx 1{,}27\cdot 10^{-21}$ *дж* (см. решение задачи 203).

216. $v_1 \approx 1{,}06 \cdot 10^5$ *м/сек.*

Решение. По закону сохранения количества движения $mv = (m + M)v_1$, где m — масса нейтрона, M — масса ядра кадмия. Кроме того $\frac{mv^2}{2} = E$. Из этих уравнений $v = \frac{\sqrt{2mE}}{m + M} \approx 1{,}06\cdot 10^4$ *м/сек.*

217. $v \approx -10^5$ *м/сек.*

Решение. Скорость отдачи атома RaA определим из закона сохранения количества движения $mv + Mv_1 = 0$, где m — масса α-частицы; $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ — скорость α-частицы; M — масса атома RaA; v_1 — скорость его отдачи. Следовательно, $v_1 = -\frac{1}{M}\sqrt{2mE} \approx$ $\approx -10^5$ *м/сек.*

218. $v_1 \approx 1{,}92 \cdot 10^7$ *м/сек.*

Решение. На основании закона сохранения количества движения и энергии можно записать:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \text{ и } \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = E.$$

Решив эти два уравнения относительно v_1, получим

$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_2E}{m_1^2 + m_1m_2}} \approx 1{,}92\cdot 10^7 \text{ м/сек.}$$

219. $v \approx 6{,}3 \cdot 10^7$ *м/сек.*

Решение. На основании закона сохранения энергии $E = 2\frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{E}{m}} \approx 6{,}3 \cdot 10^7$ *м/сек.*

220. $N = 980$ *квт.*

Решение. Мощность двигателя насоса определим из формулы $\eta N = \frac{Ph}{t}$, где $P = \rho Vg$ — вес воды в заполненном бассейне. Значит,

$$\eta N = \frac{\rho Vgh}{t}, \quad \text{откуда} \quad N = \frac{\rho Vgh}{\eta t} = 980 \text{ квт.}$$

221. $N = \frac{v_0^2 - v^2}{2} \rho S \frac{v + v_0}{2}$.

Решение. Поток совершает работу за счет убыли своей кинетической энергии, поэтому $Nt = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$, откуда $N = \frac{v_0^2 - v^2}{2} \times \frac{m}{t}$, где m — масса той части потока, которая изменила свою скорость за время t. Так как сжимаемость жидкости незначительна, то ρ постоянна по всему потоку и $m = \rho \Delta V$, где ΔV — объем указанной части потока. Однако $\Delta V = S \Delta l$ или $\Delta V = S v_{\text{ср}} t$, поэтому

$$N = \frac{v_0^2 - v^2}{2} \rho \frac{v_{\text{ср}} S t}{t}.$$

Поскольку поток движется равнозамедленно, то $v_{\text{ср}} = \frac{v_0 + v}{2}$, и поэтому $N = \frac{v_0^2 - v^2}{2} \rho S \frac{v + v_0}{2}$.

222. $\omega = \frac{v}{2R}$.

Решение. Струя после удара в лопасть движется со скоростью лопасти. Пусть линейная скорость точки лопасти, в которую ударяет струя, равна u, тогда каждую секунду в лопасть ударяет масса воды $S\rho v$ (где S — площадь поперечного сечения струи, ρ — плотность воды) и скорость этой массы воды уменьшается на $v - u$. Поэтому на колесо со стороны воды действует сила, равная ежесекундному изменению количества движения воды в струе:

$$F = \rho S v (v - u).$$

Полезная работа, выполняемая струей воды за 1 *сек*, равна

$$Fu = \rho S v u (v - u).$$

Эта работа будет максимальной, если максимальное значение будет $(v - u)\, u$. Преобразуем это выражение так:

$$(v - u)\, u = uv - u^2 = \frac{1}{4} v^2 - \left(\frac{1}{4} v^2 - vu + u^2\right) = \frac{1}{4} v^2 - \left(\frac{1}{2} v - u\right)^2.$$

Очевидно, это выражение имеет максимальное значение, если $\frac{1}{2}v - u = 0$ или $u = \frac{1}{2}v$. Однако линейная скорость точки лопасти, в которую попадает струя воды, связана с угловой скоростью вращения колеса соотношением $u = \omega R$. Отсюда вытекает, что к. п. д. колеса будет максимальным при угловой скорости $\omega = \frac{u}{R} = \frac{v}{2R}$.

§ 7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

223. $a \approx 3$ *м/сек*^{2}.

Решение. Период колебаний маятника при опускании кабины с постоянным ускорением увеличивается. Запишем формулу периода колебаний маятника в неподвижной кабине

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

и в кабине, опускающейся с ускорением a,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $\frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{g-a}{g}}$.

После упрощений $a = g\left(1 - \frac{T^2}{T_1^2}\right) \approx 3$ *м/сек*^{2}.

224. $l \approx 50$ *м*.

Решение. Длину подвеса маятника определим из формулы $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}$, откуда $l = \frac{g_1T^2}{4\pi^2}$, где g_1 — ускорение свободного падения на поверхности планеты. Запишем выражения для ускорения свободного падения на поверхности Земли

$$g = \gamma\frac{M_З}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\gamma R\rho$$

и на поверхности планеты

$$g_1 = \gamma\frac{M_п}{R_1^2} = \frac{4}{3}\pi\gamma R_1\rho,$$

где R и R_1 — соответственно радиусы Земли и планеты, ρ — плотность, одинаковая для Земли и планеты. Учитывая, что $R_1 = \frac{1}{2}R$, имеем $g_1 = \frac{1}{2}g$.

Тогда $l = \frac{gt^2}{8\pi^2} \approx 50$ *м*.

225. $\lambda = 0{,}33$ *м*.

Решение. Длина звуковой волны в воздухе будет $\lambda = \frac{v}{\nu}$, где v — скорость звука в воздухе. Подставив числовые данные, получим $\lambda = 0{,}33$ *м*.

226. $\lambda = 0{,}035$ *м*; $h = 140$ *м*.

Решение. Длина ультразвуковой волны в воде $\lambda = \frac{v}{\nu}$, где $v = 1400$ *м/сек* — скорость звука в воде. Подставив числовые данные, получим $\lambda = 0{,}035$ *м*.

Учитывая, что ультразвуковой импульс проходит за $t = 0{,}2$ *сек* расстояние, равное удвоенной глубине моря, для глубины моря можно записать $n = v\frac{t}{2} = 140$ *м*.

227. $g \approx 9{,}81$ *м/сек²*.

Решение. Секундным называется маятник, полупериод колебания которого равен 1 *сек*, т. е. период колебания T такого маятника составляет 2 *сек*.

Из формулы $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ определяем $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \approx 9{,}81$ *м/сек²*.

228. Часы будут спешить.

Решение. Запишем значения периода колебаний соответственно для Ленинграда и Архангельска:

$$T_{Л} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}819}} \text{ и } T_{А} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}822}};$$

$$\text{отсюда } \frac{T_{Л}^2}{T_{А}^2} = \frac{9{,}822}{9{,}819} \text{ или } T_{А} = T_{Л}\sqrt{\frac{9{,}819}{9{,}822}}.$$

Поскольку $T_{Л}$ умножаем на правильную дробь, то $T_{А} < T_{Л}$. Следовательно, часы в Архангельске будут спешить. Чтобы часы шли правильно, надо увеличить длину маятника.

229. При закрытых дверях и окнах происходит частичное отражение звука, поэтому разговор заглушается.

230. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 4{,}3$.

Решение. Частота ν, а следовательно, и период колебаний $T = \frac{1}{\nu}$ при переходе волны из одной среды в другую не изменяются. Скорость распространения волны зависит от свойств среды, поэтому в разных средах скорость распространения разная. Так как длина волны зависит от скорости распространения волны v, то при переходе волны из одной среды в другую длина ее изменяется. Обозначив через λ_1 и λ_2 длину звуковой волны соответственно в воздухе и в воде, можем записать

$$\lambda_1 = v_1 T \text{ и } \lambda_2 = v_2 T; \text{ отсюда } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} \approx 4{,}3.$$

231. $s = 45$ *м.*

Р е ш е н и е. Расстояние между соседними «горбами» является длиной волны λ; время между двумя последовательными ударами о берег является периодом колебаний.

Скорость распространения волны $v = \frac{\lambda}{T}$; тогда расстояние от берега равно пути, пройденному волной за 1 *мин*, $s = vt = \frac{\lambda}{T}t = 45$ *м*.

232. $t \approx 6{,}8$ *сек.*

Р е ш е н и е. Пускай на поверхности Земли маятник за 1 *ч* совершает N колебаний, т. е. в соответствии с условием задачи

$$N = 3600\nu = \frac{3600}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

При поднятии на высоту h над поверхностью Земли период колебаний увеличится вследствие уменьшения величины ускорения свободного падения:

$g_1 = g\frac{R^2}{(R+h)^2}$, где R — радиус Земли.

Изменение периода колебаний маятника

$$\Delta T = T_1 - T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g_1}} - \sqrt{\frac{l}{g}}\right) =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{R+h}{R} - 1\right) = T\frac{h}{R} = \frac{h}{\nu R}.$$

За 1 *ч* изменение хода часов составит

$$t = N\Delta T = 3600\nu\frac{h}{\nu R} = 3600\frac{h}{R} \approx 6{,}8 \text{ сек.}$$

Следовательно, часы отстанут на 6,8 *сек.*

233. $T_Л \approx 4{,}9$ *сек.*

Р е ш е н и е. Период колебаний маятника на поверхности Луны

$$T_Л = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_Л}},$$

где $g_Л$ — ускорение свободного падения на поверхности Луны. Для ускорения свободного падения на поверхности Земли и Луны можно записать:

$$g = \gamma\frac{M}{R^2} \quad \text{и} \quad g_Л = \gamma\frac{M_Л}{R_Л^2},$$

где M и $M_Л$ — соответственно масса Земли и Луны, R и $R_Л$ — соответственно радиусы Земли и Луны. Отсюда

$$g_Л = g\frac{M_Л R^2}{M R_Л^2}.$$

Период колебаний маятника на поверхности Луны

$$T_Л = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cdot\frac{MR_Л^2}{M_Л R^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\frac{MR_Л^2}{M_Л R^2}}.$$

Однако $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T$, поэтому $T_Л = T\sqrt{\frac{MR_Л^2}{M_Л R^2}} \approx 4{,}9$ *сек.*

234. $\frac{t_1}{t_2} \approx 0{,}9.$

Решение. Время t_1 свободного падения шарика с высоты, равной длине l нити, составляет $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$. Время t_2 возвращения шарика с отклоненного положения в положение равновесия составляет $\frac{1}{4}T$, где T — период колебаний.

Однако $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; тогда $t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ и $\frac{t_1}{t_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0{,}9.$

235. Решение. При опускании ракеты с постоянным ускорением a на маятник будет действовать сила $F = mg - ma = m(g - a)$. Эта сила будет возвращать маятник к положению равновесия, и поэтому период колебаний маятника в опускающейся ракете будет $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$.

Если $a = g$, то сила веса, действующая на маятник, сообщает ему ускорение свободного падения и уже не является силой, возвращающей маятник в положение равновесия. Поскольку иных внешних сил нет, то маятник будет сохранять относительно ракеты состояние покоя ($T_2 = \infty$).

Если ракета опускается с ускорением, бóльшим чем ускорение свободного падения ($a > g$), то маятник перевернется относительно точки подвеса и будет колебаться над точкой подвеса с периодом $T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a-g}}$.

236. Решение. Отсчет времени начнем с момента прохождения колеблющимся телом положения равновесия (среднее положение). Тогда смещение x тела из этого положения зависит от времени t по закону $x = A\sin\frac{2\pi t}{T}$, где A — смещение, отвечающее крайнему отклонению тела. Время t, необходимое телу для прохождения пути из среднего положения в крайнее ($x_1 = A$), определим из условия $\sin\frac{2\pi t_1}{T} = 1$, откуда $t_1 = \frac{T}{2\pi}\arcsin 1 = \frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{T}{4}$.

Время, необходимое для прохождения первой половины этого пути $\left(x_2 = \frac{A}{2}\right)$, определим из условия

$$\sin\frac{2\pi t_2}{T} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } t_2 = \frac{T}{2\pi}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{T}{12}.$$

Время t_3, расходуемое телом на прохождение второй половины пути в крайнее положение, равно: $t_3 = t_1 - t_2 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}$.

237. $T_1 \approx 1{,}419$ *сек*; $T_2 \approx 1{,}405$ *сек*; $T_3 \approx 1{,}444$ *сек*.

Решение. 1) Равномерное движение самолета не влияет на период колебаний маятника и поэтому $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 1{,}419$ *сек*.

2) При движении самолета горизонтально с ускорением a на маятник действует сила веса mg и сила ma. Эти силы направлены под прямым углом друг к другу и их равнодействующая

$$R = \sqrt{m^2g^2 + m^2a^2} = m\sqrt{a^2 + g^2}.$$

Поэтому маятник колеблется с периодом, отвечающим ускорению $\sqrt{a^2 + g^2}$, т. е.

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{l^2}{g^2 + a^2}} \approx 1{,}405 \text{ сек.}$$

3) Когда самолет планирует вниз под углом α к горизонту, то колебания маятника относительно кабины вызываются только действием составляющей силы веса $mg\cos\alpha$, перпендикулярной к траектории полета, т. е. колебания маятника происходят с периодом, отвечающим ускорению $g\cos\alpha$. Поэтому $T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}} \approx 1{,}444$ *сек*.

238. Решение. Со стороны каждого шкива на стержень будут действовать силы трения $F_1 = kN_1$ и $F_2 = kN_2$, где N_1 и N_2 — силы давления стержня на соответствующие шкивы. Силы F_1 и F_2 направлены так, как показано на рис. 187.

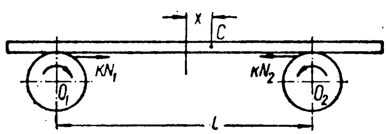


Рис. 187.

Если в начальный момент центр тяжести стержня смещен от средней линии на некоторое расстояние x, то силы давления N_1 и N_2, а следовательно, и силы F_1 и F_2 не равны друг другу. Стержень не может двигаться в вертикальном направлении, поэтому, записав правило моментов сил относительно точек касания стержня и шкивов, получим:

$$N_2 l = P\left(\frac{l}{2} + x\right) \text{ и } N_1 l = P\left(\frac{l}{2} - x\right), \text{ откуда } N_1 = P\,\frac{\frac{l}{2} - x}{l} \text{ и}$$

$$N_2 = P\,\frac{\frac{l}{2} + x}{l}, \text{ т. е. } N_2 > N_1 \text{ и, следовательно, } F_2 > F_1.$$

Равнодействующая сил F_1 и F_2 равняется

$$F = kP\left(\frac{\frac{l}{2} + x}{l} - \frac{\frac{l}{2} - x}{l}\right) = 2kP\,\frac{x}{l}$$

и направлена в сторону положения равновесия.

Таким образом, на стержень действует сила, величина которой пропорциональна смещению x и направлена к положению равновесия, т. е. стержень совершает гармонические колебания.

§ 8. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

239. $h = 15{,}25$ *см.*

Решение. Если чашка плавает, то по закону Архимеда ее вес равен весу вытесненной воды. Определим вес чашки. Вода поднялась на $\Delta h = 2{,}1$ *см* при плавании чашки, следовательно, объем воды, вытесненной погруженной частью чашки, равен $V = \Delta hS$. Тогда вес чашки $P_ч = \Delta hS\rho_в g$.

Если чашку утопить в воде, то она вытеснит объем воды, равный объему латуни, из которой сделана чашка:

$$V_л = \frac{P_ч}{\rho_л g} = \Delta hS\,\frac{\rho_в}{\rho_л}.$$

Таким образом, уровень воды в сосуде поднимется так, что

$$hS = h_0S + \frac{P_ч}{\rho_л g} = h_0S + \Delta hS\,\frac{\rho_в}{\rho_л},$$

$$\text{откуда } h = h_0 + \Delta h\frac{\rho_в}{\rho_л} = 15\ см + 2{,}1\,\frac{1000}{8400}\,см = 15{,}25\ см.$$

240. $\rho_ж = 1800$ *кг/м*^{3}.

Решение. Поскольку тела уравновешены на весах, то

$$\rho_1 gV = \rho_2 g2V,$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности тел. Отсюда $\rho_1 = 2\rho_2$. При погружении тел в жидкости условие равновесия весов запишется так:

$$\rho_2 2Vg - 2V\rho g = \rho_1 gV - \rho_ж Vg, \text{ откуда } 2\rho_2 - 2\rho = \rho_1 - \rho_ж.$$

Учитывая, что $\rho_1 = 2\rho_2$, получим $\rho_ж = 2\rho = 1800$ *кг/м*^{3}.

241. $p = 5331{,}2$ *н/м*^{2}.

Решение. Давление одной жидкости, например, воды, будет $p_1 = \frac{P}{S} = \rho_1 gh_1$, давление ртути $p_2 = \frac{P}{S} = \rho_2 gh_2$. Общее давление $p = p_1 + p_2 = 2\frac{P}{S}$. Общая высота жидкостей

$$h_0 = h_1 + h_2 = \frac{P}{\rho_1 gS} + \frac{P}{\rho_2 gS} = \frac{P}{gS}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right),$$

$$\text{откуда } \frac{P}{S} = \frac{h_0}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}\,g;$$

$$p = 2\,\frac{P}{S} = 2\,\frac{h_0}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}\,g = 5331{,}2\ н/м^2.$$

242. $X \approx 0{,}19V$.

Р е ш е н и е. В соответствии с законом Архимеда вес тела $P = 0{,}25\rho Vg$, где V — объем тела, ρ — плотность ртути. Обозначим через X часть объема тела, остающуюся в ртути после заливания водой. Тогда условие равновесия тела запишется так:

$$X\rho g + (V - X)\rho_0 g = 0{,}25\rho Vg,$$

где ρ_0 — плотность воды.

Следовательно, $X = \dfrac{0{,}25\rho - \rho_0}{\rho - \rho_0} V = 0{,}19V$.

243. $l = \dfrac{\rho H}{\rho_1 - \rho}$; $t = \dfrac{\rho}{\rho_1 - \rho}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Р е ш е н и е. Обозначим плотность вещества тела через ρ, массу тела — m, объем — V, плотность воды — ρ_1. Вес вытесненной телом воды $P_1 = \rho_1 gV$. Тогда выталкивающая сила воды составляет $F = \rho_1 gV - mg$.

Приобретенная телом при падении кинетическая энергия расходуется на выполнение работы по преодолению выталкивающей силы воды, следовательно, кинетическая энергия тела вблизи поверхности воды mgH равна работе выталкивающей силы воды:

$$mgH = (\rho_1 gV - mg)\, l; \text{ однако } m = \rho V, \text{ тогда } \rho VgH = (\rho_1 gV -$$

$$- \rho gV)\, l, \text{ откуда } l = \frac{\rho H}{\rho_1 - \rho}.$$

Время всплывания тела на поверхность воды определим из формулы

$l = \dfrac{at^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{\dfrac{2l}{a}}$, где $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{\rho_1 gV - \rho gV}{\rho V} = \dfrac{\rho_1 - \rho}{\rho}\cdot g$.

Подставив значения a и l, получим $t = \dfrac{\rho}{\rho_1 - \rho}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

244. $\rho_3 = \dfrac{R_1^3(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 R_2^3}{R_2^3}$.

Р е ш е н и е. Условием плавания шара внутри жидкости является равенство

$$\frac{4}{3}\pi R_1^3\rho_2 = \frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3)\rho_1 + \frac{4}{3}\pi R_2^3\rho_3,$$

$$\text{откуда } \rho_3 = \frac{R_1^3(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 R_2^3}{R_2^3}.$$

245. $\rho = 250$ *кг/м*^{3}; $\rho_к = 2000$ *кг/м*^{3}.

Р е ш е н и е. Объем погруженной в воду части куба (рис. 188) равен $V_1 = hS = 0{,}25$ *м*^{3}, следовательно, и объем вытесненной воды тоже будет $0{,}25$ *м*^{3}, а ее вес $P = V_1\rho_в g = 2450$ *н*. Тогда плотность вещества куба $\rho = \dfrac{P}{gV} = 250$ *кг/м*^{3}.

Вместе с камнем куб вытеснит объем воды $V_2 = (0,25 + 0,02) \times \times 1\ м^3 = 0,27\ м^3$. Вес вытесненной воды составляет $P_1 = \rho_в V_2 g = 2646\ н$, следовательно, вес камня $P_к = 2646\ н - 2450\ н = 196\ н$, а плотность камня $\rho_к = \frac{P_к}{gV_к} = 2000\ кг/м^3$.

246. Половина цилиндра погружена в воду, а вторая половина находится в масле.

Р е ш е н и е. Если цилиндр плавает в воде так, что 0,9 его высоты находится под водой, то на него действует выталкивающая сила $0,9\, V\rho_в g$. Следовательно, условие равновесия запишется так:

$$V\rho_т g = 0,9 V\rho_в g,$$

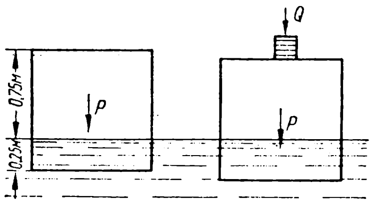


Рис. 188.

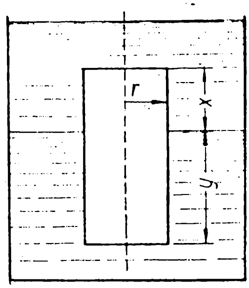


Рис. 189.

где V — объем цилиндра, $\rho_т$ — плотность вещества цилиндра, $\rho_в$ — плотность воды. Отсюда $\rho_т = 0,9\, \rho_в$.

Если сверх воды налить слой масла, то условие равновесия цилиндра запишется так:

$$V\rho_т g = V_1\rho_в g + V_2\rho_м g,$$

где V_1 — объем части цилиндра, погруженной в воду; V_2 — объем части цилиндра, находящейся в масле. Это уравнение можно переписать так (рис. 189):

$$\pi r^2 (x + y)\, \rho_т = \pi r^2 y\rho_в + \pi r^2 x\rho_м,$$

где x — часть высоты цилиндра, находящаяся в масле; y — часть высоты цилиндра, находящаяся в воде. Решая это уравнение, найдем отношение части высоты, находящейся в масле, до части высоты, погруженной в воду:

$$(x + y)\, \rho_т = x\rho_м + y\rho_в, \text{ откуда } \frac{x}{y} = \frac{\rho_в - \rho_т}{\rho_т - \rho_м} = 1,$$

т. е. половина цилиндра будет погружена в воду, а половина будет находиться в масле.

247. В сплаве приблизительно 0,818 *н* меди и 2,112 *н* серебра.

Р е ш е н и е. Потеря в весе при погружении в воду составляет 0,294 *н*. Значит, объем куска сплава $V = \frac{P}{g\rho_в} = 3 \cdot 10^{-5}\ м^3$.

Обозначим через x объем меди в куске; тогда объем серебра равен $(3 \cdot 10^{-5}\ м^3 - x)$. Вес куска сплава можно выразить так:

$$2{,}94\ н = 8900\ кг/м^3 \cdot 9{,}8\ м/сек^2 \cdot x + 10\,500\ кг/м^3 \cdot 9{,}8\ м/сек^2 \times$$

$$\times (3 \cdot 10^{-5}\ м^3 - x), \text{ откуда } x = \frac{15}{16} \cdot 10^{-5}\ м^3.$$

Вес меди в сплаве

$$P_м = 8900\ кг/м^3 \cdot 9{,}8\ м/сек^2 \cdot \frac{15}{16} \cdot 10^{-5}\ м^3 \approx 0{,}818\ н.$$

Вес серебра в сплаве

$$P_с = 2{,}94\ н - 0{,}818\ н = 2{,}112\ н.$$

248. $V_п \approx 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ м^3$.

Решение. Обозначим через V объем шара; тогда по закону Архимеда $\frac{1}{2} V \rho_в g = P$. Однако $V = V_п + \frac{P}{\rho g}$. Значит, можно записать

$$\frac{1}{2} \rho_в g \left(V_п + \frac{P}{\rho g}\right) = P.$$

$$\text{Отсюда } V_п = \frac{P}{g}\left(\frac{2}{\rho_в} - \frac{1}{\rho}\right) \approx 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ м^3.$$

249. $H = H_0 + \frac{Q}{\rho g S}$; $h = h_0 + \frac{Q}{\rho g S}$.

Решение. Изменение веса плавающего в воде цилиндра должно равняться изменению выталкивающей силы при большем погружении его в воду. При погружении в цилиндрический сосуд тела весом Q (рис. 190) сосуд опустится. Можно записать:

$$(H - H_0)\rho g S = Q \text{ или } H - H_0 = \frac{Q}{\rho g S},$$

$$\text{откуда } H = H_0 + \frac{Q}{\rho g S}.$$

В свою очередь, $(h - h_0)\rho g S = Q$ и $h = h_0 + \frac{Q}{\rho g S}$. Это правильно в том случае, если не учитывать толщины стенок сосуда.

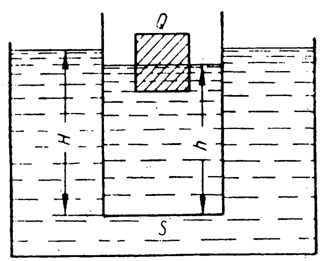


Рис. 190.

250. $F'_п \approx 1800\ н$.

Решение. При заполнении аэростата гелием подъемная сила будет равна разности между выталкивающей силой $F'_в = V(\rho_{возд} - \rho_г) g$ и весом оболочки P_0:

$$F'_п = V(\rho_{возд} - \rho_г) g - P_0.$$

Объем аэростата определим через выталкивающую силу при заполнении оболочки водородом:

$$F_{\text{в}} = V(\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{в}})\,g, \text{ откуда } V = \frac{F_{\text{в}}}{(\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{в}})\,g}, \text{ где } F_{\text{в}} = F_{\text{п}} + P_0.$$

Следовательно,

$$F'_{\text{п}} = \frac{F_{\text{п}} + P_0}{\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{в}}}(\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{г}}) - P_0 =$$

$$= \frac{F_{\text{п}}(\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{г}}) - P_0(\rho_{\text{г}} - \rho_{\text{в}})}{\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{в}}} \approx 1800\ \text{н}.$$

251. $h_2 \approx 23{,}7$ *см.*

Р е ш е н и е. Пластинка отпадает тогда, когда вес керосина P_2, налитого в трубку, и вес пластинки P_1 в сумме равны силе давления воды на пластинку:

$$P_1 + P_2 = P, \text{ где } P = h_1 S\rho_1 g = \frac{\pi D^2}{4} h_1\rho_1 g; \quad P_2 = Sh_2\rho_2 g.$$

Следовательно,

$$P_1 + \frac{\pi D^2}{4}\rho_2 g h_2 = \frac{\pi D^2}{4} h_1\rho_1 g,$$

$$\text{откуда } h_2 = \frac{\pi D^2 h_1\rho_1 g - 4P_1}{\pi D^2\rho_2 g} \approx 23{,}7\ \text{см}.$$

252. $l_1 \approx 22{,}1$ *см*; $l_2 \approx 14{,}1$ *см.*

Р е ш е н и е. Объем вытесненной воды в первом случае равен 25 $см^3$ $\left(V = \dfrac{P}{g\rho_{\text{в}}}\right)$. Следовательно, в воде находится длина $l_1 = \dfrac{4V}{\pi d^2} \approx 22{,}1$ *см.*

Объем керосина, вытесняемого цилиндром, $V_1 = h\dfrac{\pi d^2}{4} \approx 1{,}13\ см^3$, а его вес $P = \rho_2 V_1 g \approx 0{,}0886$ *н.* Поскольку цилиндр весит 0,245 *н*, то вытесненная им вода весит теперь 0,245 *н* — 0,0886 *н* = 0,1564 *н* и занимает объем $V_2 \approx 16\ см^3$. Тогда в воду будет погружена часть $l_2 = \dfrac{V_2}{S} \approx 14{,}1$ *см.*

253. Р е ш е н и е. По закону плавания тел вес P воды, вытесненной плавающим в ней куском льда, равен весу льда, а ее объем $V_1 = \dfrac{P}{\rho_0 g}$, где ρ_0 — плотность воды при 0° С. Вес воды, образующейся при полном таянии льда, тоже равен P. Поскольку температура и плотность воды остаются неизменными, то объем образующейся воды будет равен $V_2 = \dfrac{P}{\rho_0 g} = V_1$. Следовательно, уровень воды в сосуде не изменится.

254. Высота уровня воды в сосуде не изменится.

Решение. В обоих случаях уровень воды после таяния льда не изменится. Суммарный вес воды, льда и куска пробки будет равен суммарному весу воды и куска пробки после таяния льда. Давление на дно сосуда не изменится, а следовательно, не изменится и высота уровня воды в сосуде.

255. Решение. Пусть V — объем конуса, V_1 — объем погруженной части, ρ — плотность вещества конуса, ρ_1 — плотность жидкости. Если конус плавает в равновесии, то

$$V\rho g = V_1\rho_1 g, \quad \text{откуда} \quad \frac{V}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho};$$

$$\text{однако} \quad \frac{V}{V_1} = \frac{H^3}{h^3} \quad \text{(рис. 191)},$$

$$\text{откуда} \quad \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{H^3}{h^3}.$$

Учитывая, что $h = \frac{1}{2}H$, получим $\rho_1 = 8\rho$.

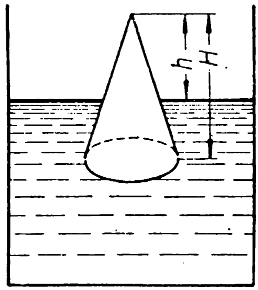


Рис. 191.

256. $V_1 = V\frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}$; $V_2 = V\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$.

Решение. На каждую из частей шара действуют две силы — сила веса $V_1\rho g$ и $V_2\rho g$ и выталкивающая $V_1\rho_1 g$ и $V_2\rho_2 g$, где V_1 — объем части шара, находящейся в верхней жидкости, V_2 — объем части шара, находящейся в нижней части (рис. 192). Таким образом, $V = V_1 + V_2$.

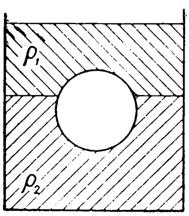


Рис. 192.

Шар будет плавать в равновесии при условии

$$(V_1 + V_2)\rho g = V_1\rho_1 g + V_2\rho_2 g,$$

откуда $\rho V = \rho_1 V_1 + \rho_2 (V - V_1)$ или

$$V_1 = V\frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}; \quad V_2 = V\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

257. $\Delta P = 2(P - Q)$.

Решение. При постоянной скорости опускания аэростата его вес уравновешивается подъемной силой Q и сопротивлением воздуха F_1: $P = Q + F_1$. Пусть из гондолы выбросили груз весом ΔP, тогда $P - \Delta P + F_2 = Q$. Поскольку в обоих случаях скорости движения одинаковы, то одинаковы и величины сил сопротивления воздуха, действующие на аэростат ($F_1 = F_2$). Тогда $P - Q = Q - P + \Delta P$, откуда $\Delta P = 2(P - Q)$.

258. $A = 7{,}84$ *дж*.

Решение. При плавании льдины ее вес равен выталкивающей силе воды. При погружении льдины выталкивающая сила возрастает и работа выполняется по преодолению силы, равной разности выталкивающей силы и веса льдины. Величина этой силы изменяется от нуля до значения $F = (\rho_в - \rho_л)gSH$ равномерно. Поэтому искомую работу вычислим как работу средней силы $\frac{1}{2}F$ на пути, равном толщине льдины, выступающей из воды. Обозначим толщину выступающей льдины через x. Определим x из условия плавания льдины:

$$\rho_л g S H = \rho_в S g (H - x), \quad \text{откуда } x = H \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_в}$$

Тогда искомая работа $A = \frac{1}{2} Fx = \frac{(\rho_в - \rho_л)^2 g S H^2}{2\rho_в} = 7{,}84$ *дж.*

259. Решение. Когда моряк подносил доску к отверстию, то струя воды, врывающейся в отверстие, действует с силой F, величину которой определим по второму закону динамики $F = \frac{m}{t} v$. Однако $\frac{m}{t} = \frac{\rho S l}{t} = \rho S v$, где S — площадь отверстия. Тогда $F = \rho S v^2$. Поскольку $v = \sqrt{2gh}$, то $F = 2\rho g h S$, где h — высота столба воды над отверстием.

Когда доска закрыла отверстие, на нее будет действовать сила $\rho g h S$, т. е. вдвое меньшая.

260. $t \approx 1{,}12$ *сек*,

Решение. Объем жидкости, вытекшей из шприца, равен объему шприца, т. е. $S_1 l = S_2 v_2 t$, где v_2 — скорость вытекания струи.

Запишем уравнение Бернулли:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Если шприц размещен горизонтально, то $h_1 = h_2$, $p_1 = \frac{F}{S_1} + p_{ат}$, $p_2 = p_{ат}$, где $p_{ат}$ — атмосферное давление. Поэтому уравнение можно переписать так:

$$\frac{F}{S_1} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2. \tag{1}$$

В соответствии с условием неразрывности струи жидкости

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) имеем

$$\frac{F}{S_1} + \frac{1}{2} \rho \frac{S_2^2}{S_1^2} v_2^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2, \quad \text{откуда} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2FS_1}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Подставив значение v_2 в формулу $t = \frac{S_1 l}{S_2 v_2}$, получим

$$t = \frac{S_1 l}{S_2} \sqrt{\frac{\rho (S_1^2 - S_2^2)}{2FS_1}} = \frac{S_1 l}{S_2} \sqrt{\frac{\rho S_1 (S_1^2 - S_2^2)}{2FS_1^2}} = \frac{S_1 l}{S_2} \sqrt{\frac{\rho S_1}{2F} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]}.$$

Поскольку $S_2 \ll S_1$, то дробью $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2$ можно пренебречь, и тогда $t \approx \frac{S_1 l}{S_2} \sqrt{\frac{\rho S_1}{2F}} \approx 1{,}12$ *сек.*

261. $S_1 \approx 4{,}37$ *см²*.

Решение. Запишем уравнение Бернулли для движения струи воды:

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h.$$

Однако $Q = S_0 v_0 = S_1 v_1$. Отсюда определим v_0 и v_1 и подставим в уравнение Бернулли:

$$\frac{Q^2}{S_0^2} = \frac{Q^2}{S_1^2} + 2gh, \text{ откуда } S_1 = \frac{QS_0}{\sqrt{Q^2 - 2ghS_0^2}} \approx 4{,}37 \text{ см}^2.$$

262. $v \approx 44{,}3$ *м/сек*; $V \approx 50$ *м³*.

Решение. Запишем уравнение Бернулли для струи воды, врывающейся в лодку:

$$\rho g h + p_{ат} = p_{ат} + \rho \frac{v^2}{2}, \text{ откуда } v = \sqrt{2gh} \approx 44{,}3 \text{ м/сек}.$$

Объем воды, проникающей за 1 *сек* в лодку, $V_1 = vS = v\frac{\pi d^2}{4}$, а за 1 *ч* в лодку проникает $V = v\frac{\pi d^2}{4} \cdot 3600 \text{ сек} \approx 50 \text{ м}^3$.

263. $p_1 \approx 3{,}53 \cdot 10^5$ *н/м²*; $F = 17{,}65$ *н*.

Решение. Давление воды на четвертом этаже будет меньше давления в водопроводе у основания здания на величину давления, создаваемого столбом воды высотой h,

$$p_1 = p - \rho g h = 3{,}53 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2.$$

Тогда сила, действующая на кран, $F = p_1 S = 17{,}65$ *н*.

264. Решение. Динамометр показывает сумму веса трубки и силы атмосферного давления на трубку, равную весу ртути в трубке.

При изменении атмосферного давления изменяется высота столбика ртути в трубке (а следовательно, и вес) и соответственно будут изменяться показания динамометра.

265. Показания весов уменьшаются на 0,1225 *н*.

Решение. Вытекающая из отверстия вода приобретает каждую секунду количество движения (см. решение задачи 259) $\rho v^2 S = 2\rho g h S$. Следовательно, с такой же силой вода в цилиндре действует на воду в струе. Значит, струя действует вверх на воду в цилиндре с силой $2\rho g h S$. Поэтому со стороны сосуда, стоящего на весах, к покоящейся воде в цилиндре должна быть приложена сила, меньшая веса воды на величину $2\rho g h S = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9{,}8 \text{ м/сек}^2 \cdot 0{,}25 \text{ м} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0{,}1225$ *н*.

266. $F = \frac{hl}{\cos\alpha}\left(p_{ат} + \rho\frac{gh}{2}\right)$.

Решение. При решении этой задачи надо учесть, что давление по высоте стенки распределено неравномерно. Возле верхнего края стенки давление равно атмосферному $p_{ат}$, а около нижнего края давление $p_н$ состоит из атмосферного и давления, создаваемого столбом жидкости высотой h,

$$p_н = p_{ат} + \rho g h.$$

Это переменное давление можно заменить средним давлением

$$p_{\text{с}} = \frac{p_{\text{ат}} + p_{\text{н}}}{2} = p_{\text{ат}} + \rho \frac{gh}{2}$$

и считать, что среднее давление распределено уже равномерно по всей высоте стенки. Поскольку площадь стенки $S = l \frac{h}{\cos\alpha}$, то сила давления F на стенку будет равна

$$F = p_{\text{с}} S = \frac{hl}{\cos\alpha}\left(p_{\text{ат}} + \rho \frac{gh}{2}\right).$$

267. Решение. Приведенное рассуждение было бы справедливо, если бы полная сила N, действующая на крыло, не зависела от угла атаки α.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

§ 1. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

268. $N \approx 6{,}7 \cdot 10^{22}$ молекул.

Решение. Число молекул газа в 1 *кмоль* равно числу Авогадро: $N_0 = 6{,}025 \cdot 10^{26}$ *кмоль*$^{-1}$.

Если μ — молекулярная масса газа, то масса его киломоля $\mu\ \frac{кг}{кмоль}$.

Тогда число молекул в 1 *кг* газа будет $\frac{N_0}{\mu}$, а в m килограммах его $N = \frac{mN_0}{\mu} \approx 6{,}7 \cdot 10^{22}$ молекул.

269. $t \approx 90$ млн. лет.

Решение. В 1 киломоле (22,4 $м^3$) газа при нормальных условиях содержится $N_0 = 6{,}025 \cdot 10^{26}$ молекул. Тогда в объеме 100 $см^3$ при нормальных условиях будет содержаться число молекул $N = \frac{6{,}025 \cdot 10^{26}}{22{,}4} \times 10^{-4}$. Если каждую секунду проникает в лампу 10^6 молекул, то время заполнения лампы будет $t = \frac{6{,}025 \cdot 10^{22}}{22{,}4}$ *сек*, или $t \approx 90$ млн. лет.

270. $n \approx 27 \cdot 10^{23}$ электронов.

Решение. Если номер свинца в периодической системе Менделеева 82, то это означает, что вокруг ядра атома свинца вращается 82 электрона. Следовательно, чтобы определить число электронов в 1 $см^3$ свинца, надо сначала определить число атомов свинца в 1 $см^3$. На основании закона Авогадро $\mu = 207$ *кг* свинца содержат $N_0 = 6{,}025 \times 10^{26}$ атомов. Тогда 1 $м^3$ свинца содержит $N = \frac{N_0\rho}{\mu}$ атомов, а 1 $см^3$ $N_1 = \frac{N_0\rho}{10^6\mu}$, где ρ — плотность свинца. Подставив числовые значения, получим $N_1 \approx 0{,}329 \cdot 10^{23}$ $см^{-3}$. Тогда в объеме 1 $см^3$ свинца будет

$$n = 0{,}329 \cdot 10^{23} \cdot 82 \approx 27 \cdot 10^{23} \text{ электронов.}$$

271. $n_1 = n_2 \approx 2{,}9 \cdot 10^{20}$ электронов и протонов; $n_3 \approx 3{,}1 \cdot 10^{20}$ нейтронов.

Решение. Аналогично решению предыдущей задачи определяем число атомов алюминия в 1 *мг*: $N \approx 2{,}23 \cdot 10^{19}$ атомов.

Порядковый номер алюминия 13, следовательно, один атом алюминия содержит 13 протонов, 13 электронов и $27 - 13 = 14$ нейтронов. Тогда 1 *мг* алюминия содержит $13 \cdot 2{,}23 \cdot 10^{19} \approx 2{,}9 \cdot 10^{20}$ протонов, столько же электронов и $14 \cdot 2{,}23 \cdot 10^{19} \approx 3{,}1 \cdot 10^{20}$ нейтронов.

272. $l_1 \approx 5$ *см*; $l_2 \approx 80$ *см*.

Решение. Выразим массы газов через их плотности и объемы: $m_1 = \rho_1 S l_1$ и $m_2 = \rho_2 S l_2$. По условию задачи $m_1 = m_2$, т. е. $\rho_1 l_1 = \rho_2 l_2$ или $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{l_2}{l_1}$. Подставив числовые данные, получим $\frac{l_2}{l_1} \approx 16$, или $l_2 \approx 16\ l_1$. Однако $l_1 + l_2 = 85$ *см*. Тогда $17\ l_1 = 85$ *см*, $l_1 \approx 5$ *см* и $l_2 \approx 80$ *см*.

273. Решение. При отсутствии силы тяжести молекулы двигались бы вовсе хаотически и их удары по основанию и крышке сосуда уравновешивались бы. В поле силы тяжести вертикальные составляющие скоростей молекул, движущихся вниз, увеличиваются, а молекул, движущихся вверх,— уменьшаются. В результате сила давления на дно сосуда больше силы давления на его крышку как раз на величину веса газа.

274. Решение. При скольжении тел с очень гладкими поверхностями проявляются силы молекулярного сцепления, действующие лишь на очень малых расстояниях, и сила трения увеличивается.

275. Решение. Вследствие столкновений молекул пахнущего вещества с молекулами воздуха изменяются направление их движения и величина скорости. Таким образом, скорость поступательного перемещения молекул пахнущего вещества будет небольшой.

276. $\frac{v_в}{v_к} = 4.$

Решение. По условию задачи $\frac{m_в v_в^2}{2} = \frac{m_к v_к^2}{2}$ или $\frac{v_в}{v_к} = \sqrt{\frac{m_к}{m_в}}$, где $m_к$ и $m_в$ — массы соответственно молекул кислорода и водорода, $v_к$ и $v_в$ — их средние скорости. Однако $m_к = \frac{\mu_к}{N_0}$ и $m_в = \frac{\mu_в}{N_0}$, где $\mu_к$ и $\mu_в$ — молекулярные массы соответственно кислорода и водорода, N_0 — число Авогадро. Тогда $\frac{v_в}{v_к} = \sqrt{\frac{\mu_к}{\mu_в}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$.

277. $d \approx 2{,}81 \cdot 10^{-8}$ *см*.

Решение. Молекулярная масса поваренной соли $NaCl$ равна 58,46, следовательно, в 58,46 *кг* соли содержится $N = 6{,}025 \cdot 10^{26}$ молекул. Число молекул в 1 *см*^{3} соли

$$n = \frac{\rho}{10^6 \mu} N = \frac{6{,}025 \cdot 10^{26} \cdot 2200}{58{,}46 \cdot 10^6} \approx 2{,}25 \cdot 10^{22} \text{ молекул.}$$

Рассмотрим теперь в решетке один элементарный кубик, образованный соседними атомами (рис. 193,*а*). Изобразим каждый атом в виде шара (рис. 193,*б*), центр которого совпадает с узлом кристаллической решетки, т. е. с одной из вершин элементарного кубика. Если считать объем каждого шара за объем атома, то каждые три грани куба, пересекающиеся в центре шара, вырезают из его объема одну восьмую часть.

Таким образом, от каждого атома, размещенного в той или иной вершине элементарного кубика, внутри кубика находится одна восьмая часть, остальные семь восьмых лежат в соседних элементарных кубиках. Всего в вершинах элементарного кубика находятся четыре атома хлора, следовательно, внутри кубика находится всего четыре восьмых или половина атома хлора. Четыре атома натрия дают таким же образом внутри элементарного кубика половину атома натрия. Значит, на каждый элементарный кубик приходится по половине атома хлора и натрия, т. е. по половине молекулы NaCl. Таким образом, если в 1 *см*^{3} поваренной соли находится $2{,}25 \cdot 10^{22}$ молекул, то число элементарных кубиков в этом же количестве соли должно быть вдвое больше, т. е. $2 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{22} = 4{,}5 \cdot 10^{22}$.

Тогда объем одного элементарного кубика будет $\frac{1\ см^3}{4{,}5 \cdot 10^{22}}$, а длина ребра, т. е. расстояние между соседними атомами,

$$d = \sqrt[3]{\frac{1\ см^3}{4{,}5 \cdot 10^{22}}} \approx 2{,}81 \cdot 10^{-8}\ см.$$

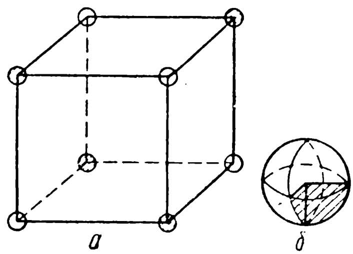


Рис. 193.

278. Р е ш е н и е. В газах между молекулами действуют силы взаимного притяжения, стремящиеся уменьшить объем газа. Значит, к внешнему давлению, сжимающему газ, добавляется еще внутреннее молекулярное давление, возникающее вследствие взаимного притяжения молекул. Нетрудно сообразить, что при исчезновении сил взаимного притяжения давление газа увеличилось бы.

279. $m_2 = 10$ *г*.

Р е ш е н и е. Обозначим через m массу смеси обоих газов, через m_1 — массу азота, через m_2 — массу углекислого газа. Тогда $m = m_1 + m_2$. Разделим почленно последнее равенство на m и обозначим массовую часть одного газа через $x = \frac{m_1}{m}$, а массовую часть второго газа — через $y = \frac{m_2}{m}$. Тогда

$$x + y = 1. \qquad (1)$$

Для получения 1 *моля* смеси газов надо взять x-вую часть моля одного газа и y-вую часть второго газа. Таким образом, получим

$$x\mu_1 + y\mu_2 = \mu, \qquad (2)$$

где μ_1 — молекулярная масса первого газа, μ_2 — молекулярная масса второго газа и μ — молекулярная масса смеси. Решив уравнения (1) и (2), получим

$$x = \frac{\mu_2 - \mu}{\mu_2 - \mu_1}; \quad y = \frac{\mu - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}.$$

В нашей задаче $\mu = 32$, $\mu_1 = 28$, $\mu_2 = 44$. Тогда $x = 0{,}75 = \frac{m_1}{m_2}$; $m = \frac{m_1}{0{,}75} = 40$ *г*; $y = 0{,}25 = \frac{m_2}{m}$; $m_2 = 0{,}25\, m = 10$ *г*.

280. Решение. Когда пластинка находится в воздухе, то удары молекул на обе половины одинаковые и пластинка находится в равновесии. В хлоре равновесие нарушается, поскольку молекулы хлора поглощаются медью и каждая молекула при этом передает пластинке импульс mv. При упругом же отражении от стекла импульс молекулы меняется на $mv - (-mv) = 2\,mv$ и, значит, при ударе каждая молекула передает пластинке импульс $2\,mv$. Поэтому общее давление на часть пластинки, покрытую медью, будет приблизительно в два раза меньше, чем на соответствующую стеклянную поверхность, и пластинка будет поворачиваться в хлоре медной стороной вперед.

§ 2. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. ТЕПЛОТА И РАБОТА

281. $m_с \approx 315$ *кг*.

Решение. Расплавленный свинец, соприкасаясь с холодной водой, отвердевает, отдавая количество теплоты $Q_1 = m_с\lambda_с$; затем, охлаждаясь от температуры 327 до 100° С, отдает еще количество теплоты

$$Q_2 = m_с c_с\,(t^\circ_с - \theta^\circ).$$

С другой стороны, находящийся в воде при 0° С лед плавится, поглощая количество теплоты $Q_3 = m_л\lambda_л$. Полученная при плавлении вода, а также 20 *кг* воды, составляющей смесь, нагреваются от 0 до 100° С и при этом поглощают $Q_4 = (m_в + m_л)\,c_в\,(\theta^\circ - t^\circ_в)$.

На испарение 200 *г* расходуется количество теплоты $Q_5 = m_п r_п$. Составляем уравнение теплового баланса

$$m_с\lambda_с + m_с c_с\,(t^\circ_с - \theta^\circ) = m_л\lambda_л + (m_л + m_в)\,c_в\,(\theta^\circ - t^\circ_в) + m_п r_п,$$

откуда $$m_с = \frac{m_л\lambda_л + (m_л + m_в)\,c_в\,(\theta^\circ - t^\circ_в) + m_п r_п}{\lambda_с + c_с\,(t^\circ_с - \theta^\circ)} \approx 315 \text{ кг}.$$

282. $m_л \approx 122$ *г*.

Решение. Так как взаимодействием переохлажденной воды с окружающей средой пренебрегаем, то количество теплоты, выделяющейся при кристаллизации воды, равно количеству теплоты, поглощаемой водой при нагревании ее от $t^\circ = -10^\circ$ С до $t^\circ_1 = 0^\circ$ С:

$$m_в c_в\,(t^\circ_1 - t^\circ) = m_л\lambda_л,$$

где $\lambda_л$ — удельная теплота плавления льда.
Отсюда

$$m_л = \frac{m_в c_в\,(t^\circ_1 - t^\circ)}{\lambda_л} \approx 122 \text{ г}.$$

283. $H \approx 2{,}2$ *см*.

Решение. Объем расплавленного льда равняется сумме объемов цилиндра $\pi R^2 h$ и полушара $\frac{2}{3}\pi R^3$:

$$V_л = \pi R^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3.$$

По закону сохранения энергии

$$\left(\pi R^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3\right)\rho\lambda = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 c\,(t_2^\circ - t_1^\circ),$$

откуда $h = \frac{4}{3}\frac{c}{\lambda}R\cdot\frac{\rho_1}{\rho}(t_2^\circ - t_1^\circ) - \frac{2}{3}R$, или $h \approx 1{,}2$ *см.*

Следовательно, шарик погрузится в лед на глубину $h + R \approx 2{,}2$ *см.*

284. $t_1^\circ \approx 124{,}6^\circ$C.

Решение. Алюминиевый куб полностью погрузится в лед, если количество теплоты, выделяемое им при охлаждении до 0° С, будет равно количеству теплоты, необходимой для плавления льда в объеме куба. Значит, $\rho V c\,(t_1^\circ - t_0^\circ) = \rho_1 V\lambda$, где ρ — плотность алюминия, ρ_1 — плотность льда, c — удельная теплоемкость алюминия, λ — удельная теплота плавления льда, $t^{\circ 1}$ — температура, до которой надо нагреть куб, t_0° — температура плавления льда, V — объем куба. Отсюда $t_1^\circ - t_0^\circ = \frac{\rho_1\lambda}{\rho c} \approx 124{,}6^\circ$ С.

Так как $t_0^\circ = 0^\circ$ С, то куб надо нагреть до температуры $t_1^\circ \approx 124{,}6^\circ$ С.

285. $\Delta t^\circ \approx 10^\circ$ С.

Решение. Работа, выполненная по нарезанию резьбы, идет на нагревание медной пластинки. Определим величину выполненной работы:

$$A = F2\pi Rk,$$

где $FR = M$, k — количество оборотов воротка, которые надо сделать, чтобы нарезать резьбу. Очевидно, $k = \frac{d}{h}$.

Следовательно, $A = 2\pi M\frac{d}{h}$. В соответствии с законом сохранения и превращения энергии

$$2\pi M\frac{d}{h} = \rho l d S c \Delta t^\circ, \text{ откуда } \Delta t^\circ = \frac{2\pi M}{\rho l S c h} \approx 10^\circ\text{C}.$$

286. $\Delta t^\circ \approx 0{,}28^\circ$ С.

Решение. Применяя закон сохранения энергии, получим $mgh = cm\Delta t^\circ$, откуда $\Delta t^\circ = \frac{gh}{c} \approx 0{,}28^\circ$ С.

287. $\lambda \approx 3{,}35\cdot 10^5$ *дж/кг.*

Решение. Количество теплоты, отданное водой при охлаждении и замерзании, пропорционально времени охлаждения. Поэтому можно записать:

$$cm\,(t_2^\circ - t_1^\circ) = kt_1 \text{ и } \lambda m = kt_2,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Из этих уравнений получаем:

$$\lambda = c\,(t_2^\circ - t_1^\circ)\frac{t_2}{t_1} \approx 3{,}35\cdot 10^5 \text{ дж/кг}.$$

288. $\Delta t^\circ \approx 3{,}6^\circ$ С.

Решение. Количество теплоты, отбираемое холодильной установкой от охлаждаемого тела, пропорционально времени охлаждения. Поэтому для изготовления льда можно написать:

$$cm(\overset{\circ}{t}_2 - \overset{\circ}{t}_0) + \lambda m + cm(\overset{\circ}{t}_0 - \overset{\circ}{t}_1) = kt_1.$$

Аналогично для охлаждения воздуха в комнате можно записать:

$$c_1\rho V\Delta t^\circ = kt_2,$$

где c_1 — удельная теплоемкость воздуха, ρ — плотность воздуха.

Решая эти два уравнения, получим:

$$\Delta t^\circ = \frac{cm(\overset{\circ}{t}_2 - \overset{\circ}{t}_0) + \lambda m + cm(\overset{\circ}{t}_0 - \overset{\circ}{t}_1)}{c_1\rho V} \cdot \frac{t_2}{t_1} \approx 3{,}6^\circ \text{ C}.$$

289. $s \approx 644$ *км*.

Решение. Применяя закон сохранения энергии, можно записать:

$$N = 0{,}28qm_1,$$

где m_1 — масса нефти, сгорающей ежесекундно. Отсюда $m_1 = \dfrac{N}{0{,}28q}$.

Тогда за 1 *ч* сгорает нефти $m_2 = \dfrac{3600N}{0{,}28q}$.

Теперь можно определить, на сколько часов работы хватит запаса нефти:

$$t = \frac{m}{m_2} = \frac{0{,}28mq}{3600N}.$$

Тогда искомое расстояние $s = vt = \dfrac{0{,}28mq}{3600N}v \approx 644$ *км*.

290. $v \approx 27{,}7$ *км/ч*.

Решение. Двигатели тепловоза в обоих случаях развивают одинаковую мощность:

$$F_{\text{тяги}}v = F'_{\text{тяги}}v_1, \text{ где } F'_{\text{тяги}} = F_{\text{тяги}} + 0{,}01P.$$

Силу тяги определим из закона сохранения и превращения энергии. Мощность двигателей $F_{\text{тяги}}v$ должна быть равна количеству теплоты, выделяемой при сгорании топлива за 1 *ч*, и идет на выполнение полезной работы $qm\eta$. Значит,

$$F_{\text{тяги}}v = \eta qm, \text{ откуда } F_{\text{тяги}} = \frac{\eta mq}{v}.$$

Тогда $v_1 = \dfrac{F_{\text{тяги}}v}{F'_{\text{тяги}}} = \dfrac{\eta qm}{\eta qm + 0{,}01Pv}v \approx 27{,}7$ *км/ч*.

291. $v_1 \approx 51$ *км/ч*.

Решение. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, можно записать:

$$v_1 = \frac{\eta qm}{\eta qm + P\dfrac{h}{l}v}v,$$

где m — масса бензина, сжигаемая за 1 *сек*. Если на пути $s = 1$ *км* сжигается 80 *г* бензина, то за 1 *ч* сжигается $72 \cdot 80$ *г* $= 5760$ *г*, а за 1 *сек* $m = 16$ *г*.

Подставив числовые данные, получим $v_1 \approx 51$ *км/ч*.

292. $h \approx 1{,}58$ *м*.

Решение. Учитывая, что световой коэффициент полезного действия ламп накаливания очень низкий (1,5—4%), будем считать, что вся энергия идет на нагревание воды. Тогда условие поддержания кожуха при определенной температуре можно записать так:

$$N = c\,\frac{m}{t}\,(t_2^{\circ} - t_1^{\circ}),$$

где $\frac{m}{t}$ — масса воды, протекающей за 1 *сек*. Однако

$$\frac{m}{t} = \rho v S = \rho v\,\frac{\pi d^2}{4},$$

где ρ — плотность воды, v — скорость движения воды, d — диаметр подводящих трубок.

Подставив значение $\frac{m}{t}$, получим

$$N = c\rho v\,\frac{\pi d^2}{4}\,(t_2^{\circ} - t_1^{\circ}), \text{ откуда } v = \frac{4N}{c\rho\pi d^2\,(t_2^{\circ} - t_1^{\circ})}.$$

Однако $v = \sqrt{2gh}$, откуда $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{8N^2}{gc^2\rho^2\pi^2 d^4\,(t_2^{\circ} - t_1^{\circ})^2} \approx 1{,}58$ *м*.

293. $\Delta t^{\circ} \approx 1{,}2^{\circ}$ C.

Решение. Кинетическая энергия свинцовой пули идет на нагревание медного шара и свинцовой пули. Поэтому согласно закону сохранения энергии можно записать:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = c_1 m_1 \Delta t^{\circ} + c_2 m_2 \Delta t^{\circ},$$

где c_1 и c_2 — соответственно удельные теплоемкости свинца и меди. Отсюда

$$\Delta t^{\circ} = \frac{m_1 v^2}{2\,(c_1 m_1 + c_2 m_2)} \approx 1{,}2^{\circ} \text{ C}.$$

294. $Q = \dfrac{m v_0^2}{2\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}$.

Решение. Для определения количества теплоты применим закон сохранения энергии:

$$\frac{M v_0^2}{2} = \frac{m + M}{2}\,v^2 + Q, \text{ откуда } Q = \frac{M v_0^2}{2} - \frac{m + M}{2}\,v^2,$$

где v — скорость тележки после того, как на нее опустили кирпич.

Скорость v определяем из закона сохранения количества движения:

$$Mv_0 = (m+M)\,v, \text{ откуда } v = \frac{Mv_0}{m+M}.$$

Подставив это значение v в предыдущее равенство, получим:

$$Q = \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{m+M}{2}\left(\frac{Mv_0^2}{m+M}\right)^2 =$$

$$= \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{M^2v_0^2}{2(m+M)} = \frac{mv_0^2}{2\left(1+\frac{m}{M}\right)}.$$

295. $m \approx 3{,}4$ *г.*

Решение. Энергия пули в момент вылета из дула равна работе пороховых газов $A = \frac{mv^2}{2} = \frac{Pv^2}{2g}$, отвечающей количеству теплоты Q_1. Полное количество теплоты, получаемое при сгорании пороха, можно определить из условия

$$\eta = \frac{Q_1}{Q}, \text{ откуда } Q = \frac{Q_1}{\eta} = \frac{Pv^2}{2g\eta}.$$

Заряд пороха $m = \frac{Q}{q} = \frac{Pv^2}{2q\eta g} \approx 0{,}0034$ *кг.*

296. $v \approx 2{,}7$ *м/сек.*

Решение. Условие установившегося режима, когда вся выделяемая мощность идет на нагревание проточной воды, охлаждающей установку, можно записать так:

$$N = c\,\frac{m}{t}\,\Delta t^\circ,$$

где $\frac{m}{t}$ — масса воды, протекающая за 1 *сек*. Однако $\frac{m}{t} = \rho v S$, где ρ — плотность воды, v — скорость движения воды, S — площадь сечения трубки.

Подставив значение $\frac{m}{t}$, получим

$$N = c\rho v S \Delta t^\circ, \text{ откуда } v = \frac{N}{c\rho S \Delta t^\circ} \approx 2{,}7 \text{ м/сек}.$$

297. $\eta \approx 5\%$.

Решение. По закону сохранения энергии мощность, затрачиваемая на нагревание воды в калориметре, $N_1 = \frac{\rho V c t^\circ}{t}$, где ρ — плотность воды, c — удельная теплоемкость воды. Пропускается наружу калориметром часть энергии

$$\eta = \frac{N - N_1}{N} = 1 - \frac{\rho V c t^\circ}{Nt} \approx 0{,}05.$$

298. $v \approx 1{,}94$ *км/сек.*

Решение. Кинетическая энергия метеора $\frac{mv^2}{2}$ во время удара превращается в теплоту и идет на нагревание и плавление метеора и на нагревание корабля. Поскольку выделяемое количество теплоты делится поровну между метеором и кораблем, то

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{mv^2}{2} = cm\Delta t^\circ + \lambda m,$$

где c и λ — удельная теплоемкость и теплота плавления железа; Δt° — разность температур между температурой плавления железа (1530° С) и начальной температурой метеора (— 100° С).

Отсюда $v = \sqrt{c\Delta t^\circ + \lambda} \approx 1{,}94$ *км/сек.*

299. $\lambda = \frac{\eta v^2 - 2\,[c_1\,(\overset{\circ}{t}_2 - \overset{\circ}{t}_1) + c_2\,(\overset{\circ}{t}_3 - \overset{\circ}{t}_2)]}{22}$.

Решение. Аналогично решению предыдущей задачи можно записать (учтя, что по условию задачи $r = 10\lambda$):

$$\eta\,\frac{mv^2}{2} = c_1 m\,(\overset{\circ}{t}_2 - \overset{\circ}{t}_1) + \lambda m + c_2 m\,(\overset{\circ}{t}_3 - \overset{\circ}{t}_2) + rm.$$

Отсюда удельная теплота плавления вещества частицы

$$\lambda = \frac{\eta v^2 - 2\,[c_1\,(\overset{\circ}{t}_2 - \overset{\circ}{t}_1) + c_2\,(\overset{\circ}{t}_3 - \overset{\circ}{t}_2)]}{22}.$$

300. $d \approx 19$ *мм.*

Решение. Мощность, развиваемая буксиром при движении с баржами, $Fv = qm\eta$, где F — сила тяги буксира, равная сумме силы F_1, которая идет на приведение в движение только буксира, и силы F_2, приводящей в движение баржи. Нам надо определить силу F_2, потому что диаметр троса надо выбирать, исходя из величины этой силы, $F_2 = F - F_1$. Силу F_1 определим из условия движения буксира без барж: $F_1 v = \frac{1}{5}\,qm\eta$. Тогда $F_2 = \frac{qm\eta}{v} - \frac{1}{5}\cdot\frac{qm\eta}{v} = \frac{4qm\eta}{5v}$.

Приравняв силу F_2 к разрывной прочности троса T, определим диаметр троса в *мм*:

$$\frac{4qm\eta}{5v} = 30C^2 = 30\pi^2 d^2, \text{ откуда } d = \sqrt{\frac{2qm\eta}{75\pi^2 v}} \approx 19 \text{ мм.}$$

301. $\Delta t^\circ = 3^\circ$ С.

Решение. Считая, что вся кинетическая энергия молота превращается в тепловую энергию и идет на нагревание железной болванки, можем записать $\frac{mv^2}{2} = cm_1\Delta t^\circ$, откуда $\Delta t^\circ = \frac{mv^2}{2cm_1} = 3^\circ$ С.

302. $\alpha = 0{,}15$.

Решение. Обозначив через m массу воды и через αm массу образованного льда, можем записать

$$\alpha m\lambda = cm\,(\overset{\circ}{t}_2 - \overset{\circ}{t}_1), \text{ откуда } \alpha = \frac{c\,(\overset{\circ}{t}_2 - \overset{\circ}{t}_1)}{\lambda} = 0{,}15.$$

303. $\Theta^\circ \approx 85^\circ C$; $V_\Theta \approx 1{,}24 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3}.

Решение. Масса железного бруска $m = lS\rho_0$. Запишем уравнение теплового баланса

$$lS\rho_0 c\Theta^\circ = c_1 m_1 (t_1^\circ - \Theta^\circ), \text{ откуда } \Theta^\circ = \frac{c_1 m_1 t_1^\circ}{lS\rho_0 c + c_1 m_1} \approx 85^\circ C.$$

Объем бруска при температуре Θ° С будет $V_\Theta = lS(1 + \beta\Theta^\circ) \approx$ $\approx 1{,}24 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3}.

304. $N \approx 37{,}8$ *квт*.

Решение. Обозначим через m количество воды, протекающее за 1 *ч* через компрессор, а через Δt° — приращение ее температуры за 1 *ч*. Тогда количество теплоты, идущее на нагревание воды за 1 *ч*, равно $Q = cm\Delta t^\circ$, а за 1 *сек* $q = \frac{Q}{3600} = \frac{cm\Delta t^\circ}{3600} \approx 22\,700$ *вт*.

Соответственно мощность $N_1 \approx 22{,}7$ *квт*, а полная мощность

$$N = \frac{N_1}{0{,}6} = \frac{22{,}7}{0{,}6} \text{ квт} \approx 37{,}8 \text{ квт}.$$

305. $t_2^\circ \approx 19{,}8^\circ C$.

Решение. При внезапной остановке сосуда кинетическая энергия движущейся массы азота превращается в тепловую и идет на нагревание азота. Поэтому согласно закону сохранения и превращения энергии можно записать

$$\frac{mv^2}{2} = cm(t_2^\circ - t_1^\circ), \text{ откуда } t_2^\circ = t_1^\circ + \frac{v^2}{2c} \approx 19{,}8^\circ C.$$

306. $\eta \approx 88{,}5\%$.

Решение. Потери мощности на нагревание $\Delta N = \frac{Q}{t}$, где $Q = cmt^\circ$ — количество теплоты, выделяемое при работе трансформатора за 4 *мин*.

Коэффициент полезного действия трансформатора

$$\eta = \frac{N - \Delta N}{N} = \frac{Nt - cmt^\circ}{Nt} \approx 0{,}885 \approx 88{,}5\%.$$

307. $\eta \approx 16\%$.

Решение. Количество теплоты, затрачиваемое на нагревание заготовки и стружки,

$$Q = c_1 m_1 (t_2^\circ - t_0^\circ) + c_1 (m - m_1)(t_1^\circ - t_0^\circ),$$

где m_1 — масса стружки, $m - m_1$ — масса заготовки после обработки. Процент потерь мощности на трение

$$\eta = \frac{Q}{Nt} = \frac{c_1 m_1 (t_2^\circ - t_0^\circ) + c_1 (m - m_1)(t_1^\circ - t_0^\circ)}{Nt} \approx 0{,}16 = 16\%.$$

308. $\overset{\circ}{t}_2 \approx 120{,}4°C$.

Решение. Кинетическая энергия n затормозившихся α-частиц превращается в тепловую энергию, которая идет на нагревание свинцовой пластинки. На основании закона сохранения энергии можно записать

$$\frac{nmv^2}{2} = \rho Vc\,(\overset{\circ}{t}_2 - \overset{\circ}{t}_1),$$

где ρ — плотность свинца, c — его удельная теплоемкость, V — объем, $\overset{\circ}{t}_1$ и $\overset{\circ}{t}_2$ — соответственно начальная и конечная температура пластинки.

Отсюда $\overset{\circ}{t}_2 = \overset{\circ}{t}_1 + \frac{nmv^2}{2\rho Vc} \approx 120{,}4°\ C$.

309. $\Delta t° = \frac{nmv^2}{2\rho Vc} \approx 9{,}7°C$.

Указание. Задача решается аналогично предыдущей.

§ 3. РАСШИРЕНИЕ ПРИ НАГРЕВАНИИ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ ТЕЛ

310. $x \approx 0{,}02$ *мм*.

Решение. При температуре 20° C длина 180 делений штангенциркуля равна 180 *мм*: $l_{20} = l_0\,(1 + \alpha \overset{\circ}{t}_{20}) = 180$ *мм*.

При температуре измерения 180 делениям шкалы штангенциркуля соответствует длина $l_{10} = l_0\,(1 + \alpha \overset{\circ}{t}_{10})$, т. е. истинная длина детали меньше 180 *мм* на $x = l_{20} - l_{10} = l_0 \alpha\,(\overset{\circ}{t}_{20} - \overset{\circ}{t}_{10})$. Учитывая, что $l_0 = \frac{l_{20}}{1 + \alpha \overset{\circ}{t}_{20}}$, получим $x = \frac{l_{20}}{1 + \alpha \overset{\circ}{t}_{20}} \approx 0{,}02$ *мм*.

Задачу можно решить по приближенной формуле

$$l_{10} \approx l_{20}\,(1 + \alpha \Delta t°),$$

где $\Delta t°$ — разность температур.

Тогда погрешность измерения будет $x \approx l_{20} \alpha \Delta t° \approx 0{,}02$ *мм*.

311. $l_и \approx 999{,}42$ *м*.

Решение. Аналогично решению предыдущей задачи можно записать

$$l_{25} = l_0\,(1 + \alpha \overset{\circ}{t}_{25}) \text{ и } l_{15} = l_0\,(1 + \alpha \overset{\circ}{t}_{15}), \text{ откуда } l_и = \frac{l_{25}}{1 + \alpha \overset{\circ}{t}_{25}}\,(1 + \alpha \overset{\circ}{t}_{15}) \approx 999{,}42 \text{ м}.$$

312. $F \approx 14{,}2 \cdot 10^5$ *н*.

Решение. При охлаждении стержня до $\overset{\circ}{t}_1 = -185{,}8°\ C$ его диаметр был $d_1 = d_0\,(1 + \alpha \overset{\circ}{t}_1)$. После отогрева стержень имел бы диаметр $d_2 = d_0(1+\alpha \overset{\circ}{t_2})$, т. е. вследствие нагревания стержень должен расширяться, но этому препятствует обойма. Сила, с которой обойма действует на стержень, должна быть равна силе, которую надо приложить к стержню, чтобы уменьшить его диаметр на величину

$$d_2 - d_1 = d_0\alpha(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1}), \text{ т.е. } \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{F}{SE} = \alpha(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1}).$$

Отсюда $F = SE\alpha(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1})$, где $S = \pi d_0 l$.

После подстановки числовых данных $F \approx 14{,}2 \cdot 10^5$ *н*.

313. $F \approx 3{,}48 \cdot 10^3$ *н*.

Решение. При нагревании до 300° С длина кольца увеличивается:

$$l_{300} = l_0(1 + \alpha \overset{\circ}{t_1}).$$

При охлаждении кольцо стремится сократиться, поскольку этому мешает стальной цилиндр, то кольцо испытывает такое усилие на разрыв, какое надо было бы приложить, чтобы растянуть его на величину

$$l_{300} - l_{18} = l_0\alpha(\overset{\circ}{t_1} - \overset{\circ}{t_2}), \text{ причем } l_0 = \frac{l_{18}}{1 + \alpha \overset{\circ}{t_2}}.$$

Тогда можно записать:

$$\frac{l_{300} - l_{18}}{l_{18}} = \frac{\alpha(\overset{\circ}{t_1} - \overset{\circ}{t_2})}{1 + \alpha \overset{\circ}{t_2}} = \frac{F}{SE},$$

$$\text{откуда } F = SE\frac{\alpha(\overset{\circ}{t_1} - \overset{\circ}{t_2})}{1 + \alpha \overset{\circ}{t_2}} \approx 3{,}48 \cdot 10^3 \text{ н}.$$

314. $F = E\alpha(\overset{\circ}{t_1} - \overset{\circ}{t_0})S \approx 4{,}32 \cdot 10^6$ *н* (задача решается аналогично предыдущим).

315. $t^\circ \approx 50^\circ$ С.

Решение. Аналогично решению предыдущих задач можно записать:

$$\Delta l = l_0\alpha(\overset{\circ}{t_1} - \overset{\circ}{t}). \text{ Однако, по закону Гука}$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{p}{E}; \text{ тогда } \frac{p}{E} = \alpha(\overset{\circ}{t_1} - \overset{\circ}{t}), \text{ откуда } \overset{\circ}{t} = \overset{\circ}{t_1} - \frac{p}{E\alpha} \approx 50^\circ \text{ С}.$$

316. Решение. При нагревании тела на Δt° его объем увеличивается на $\Delta V = V_0\beta\Delta t^\circ$. Здесь $V_0 = \frac{m}{\rho}$, а температура тела повысится на Δt° при сообщении ему количества теплоты Q, т. е. $\Delta t^\circ = \frac{Q}{cm}$. Подставив значения V_0 и Δt° в предыдущее равенство, получим $\Delta V = \frac{\beta Q}{c\rho}$, т. е. изменение объема не зависит от первоначального объема тела.

317. Решение. При нагревании уменьшается плотность жидкости, но увеличивается высота ее уровня. В случае цилиндрического сосуда оба эффекта в точности компенсируют друг друга, и давление на дно не изменяется, так как оно равно весу жидкости, деленному на площадь дна.

Если сосуд сверху суживается, то при том же нагревании, а значит, и при том же изменении плотности жидкости, ее уровень поднимается выше, чем в сосуде цилиндрической формы. Поэтому эффект повышения уровня доминирует над эффектом уменьшения плотности и давление на дно повышается.

В случае сосуда, суживающегося книзу, давление на дно при нагревании, наоборот, уменьшается.

318. $\beta_1 \approx 0{,}00085$ *град*$^{-1}$.

Решение. Пусть при 0° С объем тела был V_0, плотность жидкости ρ_0. Объем жидкости, вытесняемой при 0° С телом, равен $0{,}98V_0$. При этой температуре вес тела P равен весу вытесненной жидкости:

$$P = 0{,}98V_0\rho_0 g.$$

При $t^\circ = 25^\circ$ С объем тела равен $V_0(1 + \beta t_0^\circ)$, а плотность жидкости $\frac{\rho_0}{1 + \beta_1 t^\circ}$. Вес тела равен весу вытесненной жидкости:

$$P = V_0(1 + \beta t^\circ)\frac{\rho_0}{1 + \beta_1 t^\circ}g.$$

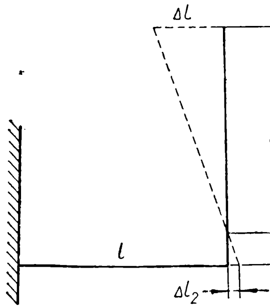


Рис. 194.

Приравнивая выражения для веса тела, получим $\beta_1 = \frac{2 + 100\beta t^\circ}{98t^\circ} \approx$

$\approx 0{,}00085$ *град*$^{-1}$.

319. $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

Решение. Стержень был нагрет до 15° С, значит, он удлинился на величину $\Delta l_1 = l_0\alpha t_1^\circ$.

При нагревании от 15 до 100° С этот стержень удлинится на Δl_2, что легко определить из пропорции (рис. 194):

$$\frac{\Delta l}{\Delta l_2} = \frac{a_2}{a_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{\Delta l}{15}.$$

Очевидно,

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \alpha l_0 t_2^\circ.$$

Однако $l_0 = \frac{l}{1 + \alpha t_1^\circ}$; тогда $\alpha = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{l_0 t_2^\circ} = \frac{l_0\alpha t_1^\circ + \frac{\Delta l}{15}}{\frac{l t_2^\circ}{1 + \alpha t_1^\circ}} \approx$

$$\approx \frac{15l\alpha t_1^\circ + \Delta l + \Delta l\alpha t_1^\circ}{15lt_2^\circ},$$

откуда $\alpha = \frac{\Delta l}{15l(t_2^\circ - t_1^\circ) - \Delta l t_1^\circ} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

320. Р е ш е н и е. Если даже взять вещество с большим коэффициентом теплового расширения, то величина $-\frac{1}{\alpha}$ все равно будет намного меньше -273° С, т. е. абсолютного нуля. Например, для свинца $\alpha = 3 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$ и тогда $-\frac{1}{\alpha} \approx -3 \cdot 10^6$ *град*. Температуры ниже абсолютного нуля принципиально недостижимы. Кроме того, следует учесть, что коэффициент теплового расширения зависит от температуры.

321. $t_2^\circ \approx 31{,}7^\circ$ C.

Р е ш е н и е. Объем нефти в баке при 5° С

$V_1 = hS$, где $h = h_1 - h_2$, $S = \frac{\pi d^2}{4}$; тогда $V_1 = (h_1 - h_2)\frac{\pi d^2}{4}$.

Объем бака при 5° С $V' = h_1 S = h_1 \frac{\pi d^2}{4}$.

Обозначив объем нефти при 35° С через V_2, можно записать

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + \beta_1 t_1^\circ}{1 + \beta_1 t_2^\circ},$$

где β_1 — коэффициент объемного расширения нефти.

Отсюда $V_2 = V_1 \frac{1 + \beta_2 t_2^\circ}{1 + \beta_1 t_2^\circ}$.

Обозначив объем бака при 35° С через V'', аналогично можно записать:

$$V'' = V' \frac{1 + \beta_2 t_2^\circ}{1 + \beta_2 t_1^\circ},$$

где β_2 — коэффициент объемного расширения железа.

Нефть начнет выливаться, если $V_2 \geqslant V''$, т. е.

$$V_1 \frac{1 + \beta_1 t_2^\circ}{1 + \beta_1 t_1^\circ} = V' \frac{1 + \beta_2 t_2^\circ}{1 + \beta_2 t_1^\circ} \text{ или } (h_1 - h_2)\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1 + \beta_1 t_2^\circ}{1 + \beta_1 t_1^\circ} =$$

$$= h_1 \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1 + \beta_2 t_2^\circ}{1 + \beta_2 t_1^\circ},$$

откуда $$t_2^\circ = \frac{h_1 t_1^\circ (\beta_1 - \beta_2) + h_2 (1 + \beta_2 t_1^\circ)}{h_1 (\beta_1 - \beta_2) - h_2 (\beta_1 + \beta_1 \beta_2 t_1^\circ)} \approx$$

$$\approx \frac{h_1 t_1^\circ (\beta_1 - \beta_2) + h_2 (1 + \beta_2 t_1^\circ)}{h_1 (\beta_1 - \beta_2) - h_2 \beta_1} \approx 31{,}7^\circ \text{ C}.$$

322. $\Delta n \approx 9{,}5$ оборота.

Решение. Число оборотов колеса на пути l летом $n_1 = \dfrac{l}{2\pi r_0 (1+\alpha t_1^\circ)}$, а зимой $n_2 = \dfrac{l}{2\pi r_0 (1+\alpha t_2^\circ)}$. Тогда разница в числах оборотов будет составлять $n_2 - n_1 = \dfrac{l}{2\pi r_0}\left(\dfrac{1}{1+\alpha t_2^\circ} - \dfrac{1}{1+\alpha t_1^\circ}\right) \approx 9{,}5$ оборота.

323. $l_{01} = 16$ *см*; $l_{02} = 11$ *см*.

Решение. Для стального стержня

$$l_1 = l_{01}(1+\alpha_c t^\circ); \qquad (1)$$

для медного стержня

$$l_2 = l_{02}(1+\alpha_м t^\circ). \qquad (2)$$

По условию

$$l_1 - l_2 = \Delta l \quad \text{и} \quad l_{01} - l_{02} = \Delta l, \qquad (3)\ (4)$$

где $\Delta l = 5$ *см*.

Вычитая (2) из (1) и учитывая условия (3) и (4), получим

$$\alpha_c l_{01} = \alpha_м l_{02}. \qquad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) найдем длину стержней при 0° С:

$$l_{02} = \frac{\Delta l \alpha_c}{\alpha_м - \alpha_c} = 11 \text{ см} \quad \text{и} \quad l_{01} = \frac{\Delta l \alpha_м}{\alpha_м - \alpha_c} = 16 \text{ см}.$$

324. $t_1^\circ \approx 47{,}7^\circ$C; $t_2^\circ \approx 87{,}7^\circ$C.

Решение. По условию задачи можно записать:

$$300(1+\alpha_ж t_1^\circ) = 299.9(1+\alpha_л t_1^\circ); \text{ отсюда}$$

$$t_1^\circ = \frac{0{,}1}{299{,}9\alpha_л - 300\alpha_ж} \approx 47{,}7^\circ \text{ C}.$$

Аналогично для объема брусков:

$$300 \cdot 200 \cdot 100(1+\beta_ж t_2^\circ) = 299{,}9 \cdot 199{,}9 \times$$

$$\times 99{,}9(1+\beta_л t_2^\circ), \text{ отсюда } t_2 \approx 87{,}7^\circ \text{ C}.$$

325. $t \approx 12$ *сек*.

Решение. Пусть при правильной работе часов за сутки осуществляется N колебаний, т. е. по условию задачи

$$N = \frac{24 \cdot 3600}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}.$$

При изменении температуры длина маятника изменяется: $l_1 = l[1 + \alpha(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1})]$, а поэтому изменится и период колебаний маятника на величину

$$\Delta T = T_1 - T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l_1}{g}} - \sqrt{\frac{l}{g}}\right) = \frac{2\pi}{g}\cdot\frac{l_1 - l}{\sqrt{\frac{l_1}{g}} + \sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

Учитывая, что $l_1 \approx l$, можно записать

$$\Delta T = \frac{2\pi}{g}\cdot\frac{l_1 - l}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{\pi}{g}\cdot\frac{\alpha l(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1})}{\sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

За сутки изменение хода часов составит

$$t = N\Delta T = \frac{24\cdot 3600\cdot \pi\alpha l(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1})}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot g\sqrt{\frac{l}{g}}} = 12\cdot 3600\cdot\alpha(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1}) \approx 12 \textit{ сек.}$$

326. Решение. а) $\beta_ж = \beta_c$. В этом случае сначала начнет охлаждаться стеклянный цилиндр, а жидкость в нем будет сохранять прежнюю температуру $\overset{\circ}{t_1}$. Охлаждение стекла вызывает уменьшение размеров цилиндра, и жидкость поднимается выше метки. Когда температура жидкости сравняется с температурой воды $\overset{\circ}{t_2}$, то уровень ее станет прежним, т. е. совпадет с меткой.

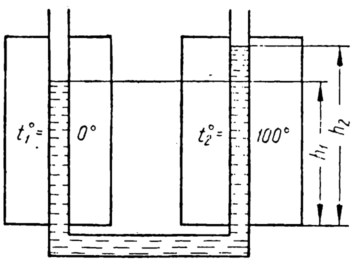


Рис. 195.

б) $\beta_ж < \beta_c$. Поскольку коэффициент расширения стекла больше, уровень жидкости в цилиндре после выравнивания температур будет выше метки.

в) $\beta_ж > \beta_c$. После выравнивания температур уровень жидкости будет ниже метки.

327. $h_2 - h_1 \approx 2{,}7$ *см.*

Решение. Давление на одном уровне в обоих коленах одинаково (рис. 195):

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2. \text{ Однако } \rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta\overset{\circ}{t_1}} \text{ и } \rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \beta\overset{\circ}{t_2}};$$

$$\text{тогда } \frac{h_2}{h_1} = \frac{1 + \beta\overset{\circ}{t_2}}{1 + \beta\overset{\circ}{t_1}}.$$

Запишем производную пропорцию:

$$\frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{\beta(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1})}{1 + \beta\overset{\circ}{t_1}}, \text{ откуда } h_2 - h_1 = \frac{\beta(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1})}{1 + \beta\overset{\circ}{t_1}}h_1 \approx 2{,}7 \textit{ см.}$$

328. $F \approx 9{,}4 \cdot 10^4$ *н.*

Решение. Если бы балка была свободна, то при нагревании от температуры $\overset{\circ}{t_1}$ до $\overset{\circ}{t_2}$ она удлинилась бы на величину

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l_0 (1 + \alpha \overset{\circ}{t_2}) - l_0 (1 + \alpha \overset{\circ}{t_1}) = l_0 \alpha (\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1}),$$

где l_0 — длина балки при 0° С.

Стены препятствуют изменению длины балки, поэтому силы взаимодействия концов балки со стенами должны вызвать сокращение длины балки от l_2 до l_1. По закону Гука

$$F = ES \frac{\Delta l}{l_2} = ES \frac{l_0 \alpha (\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1})}{l_0 (1 + \alpha \overset{\circ}{t_2})}.$$

Поскольку $\alpha \overset{\circ}{t_2} \ll 1$, то $F \approx ES\alpha (\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1}) \approx 9{,}4 \cdot 10^4$ *н.*

329. $\beta \approx 2{,}86 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

Решение. Коэффициент объемного расширения стекла $\beta = \frac{V_t - V_0}{V_0 t^\circ}$, где V_0 — объем стеклянного сосуда при 0° С; V_t — объем при температуре t°.

Если стенки сосуда достаточно тонки, то объем сосуда равен объему ртути, его наполняющей, при соответствующих температурах. Объем ртути при температуре 0° С

$$V_0 = \frac{P_1 - P_0}{\rho_0 g}, \text{ а при температуре } t^\circ \ V_t = \frac{P_2 - P_0}{\rho_t g} = \frac{P_2 - P_0}{\rho_0 g} (1 + \beta_1 t^\circ),$$

где ρ_0 — плотность ртути при 0° С; β_1 — коэффициент объемного расширения ртути.

$$\text{Тогда } \beta = \frac{(P_2 - P_0)(1 + \beta_1 t^\circ) - (P_1 - P_0)}{(P_1 - P_0) t^\circ} = \frac{P_2 - P_1 + \beta_1 t^\circ (P_2 - P_0)}{(P_1 - P_0) t^\circ} \approx 2{,}86 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}.$$

§ 4. СВОЙСТВА ГАЗОВ И ПАРОВ

330. $m_2 = 0{,}5$ *г.*

Решение. Из закона Бойля — Мариотта следует, что при изотермическом процессе давление газа изменяется прямо пропорционально его плотности: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$. Эта формула справедлива и в том случае, если масса газа в течение опыта меняется (как в данной задаче). Считая объем легких постоянным, можно переписать предыдущую формулу иначе, учитывая, что $\rho_1 = \frac{m_1}{V}$ и $\rho_2 = \frac{m_2}{V}$. Тогда $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}$, отсюда $m_2 = m_1 \frac{p_2}{p_1} = 0{,}5$ *г.*

331. $x \approx 7{,}4$ *см.*

Решение. Обозначим через V_1, p_1, T_1 и V_2, p_2, T_2 объем, давление и температуру воздуха в каждой из половин сосуда после нагревания первого баллона на ΔT и такого же охлаждения второго баллона. Поскольку масса воздуха в обеих половинах сосуда одинакова, то по уравнению газового состояния можно записать:

$$\frac{V_1 p_1}{T_1} = \frac{V_2 p_2}{T_2}. \qquad (1)$$

Капля ртути будет перемещаться до тех пор, пока не сравняются давления в обоих баллонах (т. е. $p_1 = p_2$). Тогда уравнение (1) перепишется так:

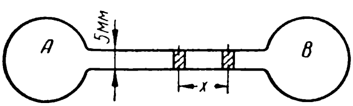


Рис. 196.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \qquad (2)$$

Обозначив через x смещение капли (рис. 196) и через S площадь сечения трубки, получим

$$V_1 = V + Sx \text{ и } V_2 = V - Sx.$$

Подставив значения V_1 и V_2 в уравнение (2), получим

$$\frac{V + Sx}{V - Sx} = \frac{T + \Delta T}{T - \Delta T}, \text{ откуда } x = \frac{V}{S} \cdot \frac{\Delta T}{T}.$$

Учитывая, что $S = \frac{\pi d^2}{4}$, получим $x = \frac{4V}{\pi d^2} \cdot \frac{\Delta T}{T} \approx 7{,}4$ *см.*

332. Решение. При горизонтальном положении прибора капля ртути устанавливается так, что давление одинаково в обоих сосудах. При нагревании этих сосудов на одинаковое число градусов давление увеличивается на одну и ту же величину в обоих сосудах и равновесие капельки ртути не нарушится. Значит, при горизонтальном положении измерять температуру данным прибором нельзя. Если прибор расположить вертикально, то давление в верхнем сосуде будет меньше, чем в нижнем, поэтому при нагревании на одинаковое число градусов давление в верхнем сосуде увеличится на меньшую величину, чем давление в нижнем. Равновесие нарушится, и капелька ртути поднимется вверх. При охлаждении капелька ртути будет опускаться вниз. Если снабдить прибор шкалой, то можно измерять температуру.

333. $T \approx 404{,}3°$ К или $t° \approx 131°$ С.

Решение. При нагревании открытого баллона давление газа не изменяется. Охлаждение же газа является изохорическим процессом. Поэтому по закону Шарля можно записать $\frac{p_0}{T} = \frac{p_1}{T_1}$, где p_0 — давление газа в открытом баллоне; T — температура, до которой нагревали газ; p_1 — давление в закрытом баллоне после охлаждения газа до температуры T_1.

Отсюда $T = \frac{p_0 T_1}{p_1} = \frac{p_0 T_1}{0{,}7 p_0} = \frac{T_1}{0{,}7} \approx 404{,}3°$ К или $t° \approx 131°$ С.

334. $\rho \approx 2{,}1$ *кг/м³*.

Решение. Для массы газа, находящегося в баллоне до откачки, в соответствии с законом Бойля—Мариотта можно записать $p_1 V =$

$= p_a V_0'$, откуда объем газа при нормальных условиях $V_0' = \frac{p_1 V}{p_a}$.

Аналогично найдем объем газа, оставшегося после откачки, приведя его к нормальным условиям:

$$V_0'' = \frac{p_2 V}{p_a}.$$

Изменение объема газа $V_0' - V_0'' = \frac{V}{p_a}(p_1 - p_2)$, изменение массы газа в баллоне $\Delta m = \frac{P_1 - P_2}{g}$.

Тогда плотность газа при нормальных условиях $\rho = \frac{(P_1 - P_2)\, p_a}{gV(p_1 - p_2)} \approx$ $\approx 2{,}1$ *кг/м*^{3}.

335. $t_1^{\circ} \approx 54{,}6^{\circ}$ C.

Решение. Температуру, при которой возникает опасность взрыва, найдем из уравнения газового состояния:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}, \text{ где } p_0 = 1 \text{ } ат = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ } н/м^2;$$

$$T_0 = 273^{\circ} \text{ C, откуда } T_1 = \frac{p_1 V_1 T_0}{p_0 V_0}.$$

Объем углекислого газа при нормальных условиях $V_0 = \frac{m}{\rho}$, где ρ — его плотность. Тогда $T_1 = \frac{p_1 V_1 T_0 \rho}{p_0 m} \approx 54{,}6^{\circ}$ C.

336. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{p_0 + \rho g h}{p_0 + \rho g \frac{h}{2}}$.

Решение. Определим сначала длину столбика воздуха, когда разность уровней воды в коленах трубки уменьшится вдвое. Если в правом колене уровень воды опустится на x, то в левом колене поднимется на ту же величину x. По условию задачи $h - 2x = \frac{h}{2}$, откуда $x = \frac{h}{4}$, т. е. столбик воздуха уменьшится на $\frac{h}{4}$. Обозначив плотность воды через ρ, запишем уравнение газового состояния для столбика воздуха:

$$\frac{(p_0 + \rho g h) V}{T_1} = \frac{\left(p_0 + \rho g \frac{h}{2}\right) \frac{3}{4} V}{T_2}, \text{ откуда } \frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{p_0 + \rho g h}{p_0 + \rho g \frac{h}{2}}.$$

337. $\Delta m = \frac{1}{2} m_1$.

Решение. Так как температура газа не изменилась, то можно записать (см. решение задачи 330): $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}$. По условию задачи $p_2 =$

$= \frac{1}{2}p_1$; тогда $m_2 = \frac{1}{2}m_1$. Масса вытекшего газа $\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{1}{2}m_1$, т. е. масса вытекшего газа равна половине его первоначальной массы.

338. $m \approx 1{,}48$ *г.*

Решение. Для массы водорода в баллоне до утечки в соответствии с уравнением газового состояния можно записать $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_0V_0'}{T_0}$, откуда объем водорода при нормальных условиях $V_0' = \frac{p_1V_1T_0}{p_0T_1}$.

Аналогично для объема водорода, оставшегося после утечки, запишем: $V_0'' = \frac{p_1V_1T_0}{p_0T_2}$.

Объем водорода, утекшего из баллона, при нормальных условиях $\Delta V = V_0' - V_0'' = \frac{p_1V_1T_0}{p_0}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$.

Тогда масса утекшего водорода $m \approx \rho\Delta V = \rho \frac{p_1}{p_0} V_1T_0\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \approx$ $\approx 1{,}48$ *г.*

339. $p = 6{,}86 \cdot 10^4$ *н/м²*.

Решение. После открывания крана каждый газ заполнит весь объем баллонов $V = V_1 + V_2$ и при этом в них установится давление $p = p_1' + p_2'$, где p_1' и p_2' — частные давления газа 1 и 2 соответственно после заполнения всего объема. По закону Бойля—Мариотта $p_1' = \frac{p_1V_1}{V_1 + V_2}$ и $p_2' = \frac{p_2V_2}{V_1 + V_2}$. Следовательно, давление в баллонах $p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 6{,}86 \cdot 10^4$ *н/м²*.

340. Решение. Давление на стенки сосуда (рис. 197) AB и CD одинаково. Силы давления F_{AB} и F_{CD} не равны. Они пропорциональны площади стенок сосуда AB и CD. Сосуд не получает ускоренного движения, потому что сила давления на стенку AB уравновешивается силами давления на стенку CD и горизонтальной составляющей силы давления на боковую поверхность сосуда. Как видно из чертежа, силу давления F на боковую стенку можно разложить на две составляющие F_1 и F_2. Вертикальные составляющие силы давления на противоположные части стенки уравновешиваются между собой, а горизонтальные вместе с силой давления на стенку CD уравновешиваются силой давления на стенку AB.

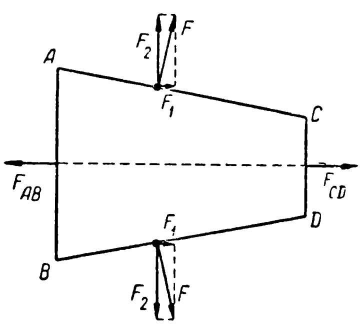


Рис. 197.

341. $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

Решение. Запишем уравнение газового состояния для обеих частей сосуда:

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T_1} \text{ и } \frac{p_02V_0}{T_0} = \frac{p_2V_2}{T_2}, \text{ откуда } \frac{2p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

В соответствии с условием задачи $p_1 = p_2$, тогда $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{T_1}{T_2}$.

Подставив значения T_1 и T_2, получим $\frac{V_1}{V_2} = 1$, т. е. поршень будет разделять цилиндр на две равные части.

342. $d = \frac{h}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1}$.

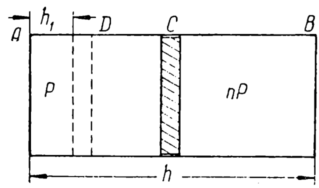


Рис. 198.

Решение. Поршень будет перемещаться до тех пор, пока давление в обеих частях цилиндра не станет одинаковым и равным p_1. При этом поршень переместится из положения C в положение D, находящееся на некотором расстоянии h_1 от конца A цилиндра (рис. 198).

Применим закон Бойля—Мариотта к газу, находящемуся в каждой части цилиндра. Для первой части $pS\frac{h}{2} = p_1Sh_1$, для второй части $npS\frac{h}{2} = p_1S(h - h_1)$. Из этих двух уравнений определим $h_1 = \frac{h}{n+1}$.

Следовательно, поршень переместится на расстояние $d = \frac{h(n-1)}{2(n+1)}$.

343. $n \approx 465$.

Решение. Так как начальное и конечное состояния газа в сосуде различны (масса газа изменяется), то к ним не применим закон Бойля—Мариотта. Для решения будем рассматривать последовательные ходы поршня разрежающего насоса. Если откачивание осуществляется довольно медленно, то процесс можно считать изотермическим, и к газу, заполняющему баллон и цилиндр насоса, применим закон Бойля—Мариотта. При первом ходе поршня воздух, находящийся в баллоне V под давлением p_0, заполнит объем $V + V_0$, и в баллоне установится некоторое давление p_1. Очевидно,

$$p_0V = p_1(V + V_0), \text{ откуда } p_1 = p_0\frac{V}{V + V_0}.$$

При втором ходе поршня начальный объем снова V, конечный — $V + V_0$, начальное давление p_1, конечное давление p_2. Поэтому

$$p_1V = p_2(V + V_0) \text{ или } p_2 = p_1\frac{V}{V + V_0}.$$

Подставив значение p_1 из предыдущего уравнения, получим

$$p_2 = p_0\left(\frac{V}{V+V_0}\right)^2.$$

Для третьего хода можно записать

$$p_2V = p_3(V+V_0), \text{ откуда } p_3 = p_0\left(\frac{V}{V+V_0}\right)^3.$$

Можно сделать вывод, что после n-го хода поршня в баллоне установится давление $p_n = p_0\left(\frac{V}{V+V_0}\right)^n$, откуда $n = \frac{\lg \frac{p_n}{p_0}}{\lg \frac{V}{V+V_0}}$ или $n =$

$$= \frac{\lg \frac{p_0}{p_n}}{\lg \frac{V+V_0}{V}} \approx 465.$$

344. $n \approx 80$.

Решение. На основании закона Бойля — Мариотта можно записать

$$p_aVn = (p_a + p)V_1,$$

где p_a — атмосферное давление; $p = \frac{P}{S}$ — давление, создаваемое нагрузкой на колеса; V — объем воздуха, захватываемый насосом при каждом качании; n — число качаний. Отсюда $n = \frac{V_1\left(p_a + \frac{P}{S}\right)}{p_aV} \approx 80$.

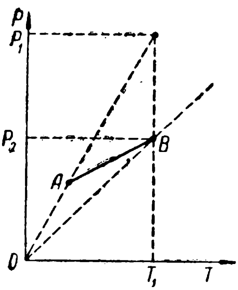


Рис. 199.

345. Газ охлаждается.

Решение. Если бы температура газа оставалась постоянной, то при увеличении его объема, например в два раза, давление газа уменьшилось бы тоже в два раза. В рассматриваемой задаче при увеличении объема в два раза давление уменьшается больше, чем в два раза. Большее падение давления, чем это следует из закона Бойля — Мариотта, показывает, что газ охлаждается.

346. Решение. Во время вытекания воздух в сосуде расширяется и, следовательно, охлаждается. Затем воздух нагревается за счет теплопроводности, и давление его увеличивается.

347. Решение. Для определения характера изменений объема газа во время нагревания проведем изохоры через начало координат O и через точки A и B (рис. 199). Прямая AB не проходит через начало координат, вследствие чего при переходе газа из состояния A в состояние B его объем не остается постоянным. Если бы изменение состояния газа происходило по изохоре 1, то при температуре T_1 газ имел бы давление p_1. Однако в действительности давление газа в состоянии

B равно p_2. Так как $p_2 < p_1$, то отсюда следует, что при переходе газа из состояния A в состояние B объем газа возрастает.

Задачу можно решить и иначе. Из уравнения газового состояния следует, что тангенс угла наклона изохоры пропорционален $\frac{1}{V}$. Тогда из рис. 199 видим, что объем газа возрастает при переходе из состояния A в состояние B.

348. Решение. Для построения изотерм надо знать объем газа V_0 при 0° С и объем газа V_1 при 100° С (при давлении $1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*):

$$V_0 = \frac{m}{\rho}; \quad V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0} = \frac{m}{\rho} \cdot \frac{T_1}{T_0},$$

где ρ — плотность водорода при нормальных условиях.

Запишем для обоих случаев закон Бойля — Мариотта:

$$Vp = V_0 p_0 = \frac{m}{\rho} p_0 \approx 567 \text{ дж (при } T_0 = 273° \text{ К)}; \tag{1}$$

$$Vp = V_1 p_0 = \frac{m}{\rho} \cdot \frac{T_1}{T_0} p_0 \approx 775 \text{ дж (при } T_1 = 373° \text{ К)}. \tag{2}$$

Задавая различные значения V (или p), по уравнениям (1) и (2) будем получать соответствующие им значения p (или V). На основании полученных данных строим изотермы (рис. 200).

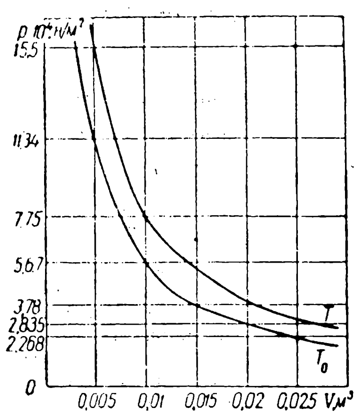


Рис. 200.

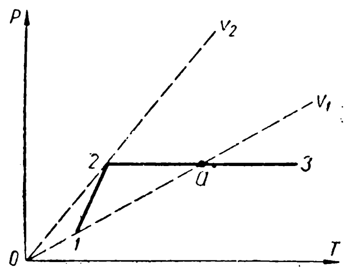


Рис. 201.

349. Решение. Через точки *1* и *2* проведем две изохоры (рис. 201). Пусть одна из них соответствует объему V_1, а другая — V_2. При любой одинаковой температуре давление на изохоре, соответствующей объему V_1, меньше, чем на другой изохоре, следовательно, $V_1 > V_2$. Таким образом, на участке *1—2* объем газа уменьшался, а на участке *2—3* увеличивался. В точке *a* газ достиг первоначального объема V_1.

350. $\Delta h \approx 7{,}8$ *см*.

Решение. Изменение объема воздуха, находящегося под поршнем, происходит вследствие увеличения давления воздуха и изменения его температуры. Состояние воздуха в цилиндре при положениях поршня *1* и *2* (рис. 202) связано уравнением газового состояния $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$, где $p_2 = p_1 + \frac{F}{S}$ (F —вес гири, S — площадь поршня).

Перепишем это уравнение так: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2T_1}{p_1T_2}$. Отношение объемов можно заменить отношением высот $\frac{h_1}{h_2} = \frac{p_2T_1}{p_1T_2}$. Запишем производную пропорцию

$$\frac{h_1 - h_2}{h_1} = \frac{p_2T_1 - p_1T_2}{p_2T_1}, \text{ откуда}$$

$$\Delta h = h_1 - h_2 = h_1\left(1 - \frac{p_1T_2}{p_2T_1}\right) \approx 7{,}8 \text{ см}.$$

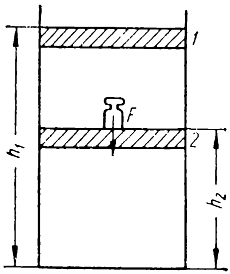


Рис. 202.

351. $p_x \approx 1{,}89 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}.

Решение. Давление влажного воздуха в сосуде слагается (закон Дальтона) из давления пара при 100° С и давления сухого воздуха при 100° С: $p_x = p_1 + p_2$, где p_1 — давление сухого воздуха, p_2 — давление пара.

Давление сухого воздуха при 100° С определим из закона Шарля:

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T}; \quad p_1 = p_0\frac{T}{T_0} \approx 1{,}38 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2.$$

Определим давление водяного пара в сосуде, считая пар идеальным газом. При нормальных условиях 1 *моль* занимает объем 22,4 *л*. Отсюда следует, что 3 *г* водяного пара займут объем $V_0 = 22{,}4 \text{ л} \cdot \frac{3}{18} \approx 3{,}7$ *л*.

Из уравнения газового состояния $\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_2V}{T}$ определим давление пара при $T = 373°$ С и $V = 10$ *л*:

$$p_2 = \frac{p_0V_0T}{VT_0} \approx 5{,}1 \cdot 10^4 \text{ н/м}^2.$$

Давление пара p_2 оказалось меньше $1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}. Значит, пар ненасыщенный и поэтому можно было бы воспользоваться для пара уравнением газового состояния. Общее давление в сосуде

$$p_x = 1{,}38 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2 + 5{,}1 \cdot 10^4 \text{ н/м}^2 = 1{,}89 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2.$$

352. $v \approx 1{,}5$ *м/сек*.

Решение. Напишем уравнение газового состояния для протекшей массы газа $\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}$; но $V_0 = \frac{m}{\rho}$, а $V = vSt$, где v — скорость течения газа, S — площадь сечения трубы, ρ — плотность углекислого газа при 0° С. Тогда $p\frac{vSt}{T} = \frac{p_0}{T_0} \cdot \frac{m}{\rho}$, откуда $v = \frac{p_0mT}{p\rho StT_0} \approx 1{,}5$ *м/сек*.

353. $T_1 \approx 648{,}7^\circ$ К или $t_1^\circ \approx 375{,}7^\circ$ С.

Решение. Согласно закону Шарля $\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}$, откуда $T_1 = T_0 \frac{p_1}{p_0}$. Воздух поднимет клапан, если давление воздуха в сосуде (рис. 203) после нагрева будет равно сумме внешнего (атмосферного) давления и давления поршня $\frac{Q}{S}$. Поэтому температура воздуха в сосуде

$$T_1 = T_0 \frac{p_0 + \frac{Q}{S}}{p_0} \approx 648{,}7^\circ \text{ К или } t_1^\circ \approx 375{,}7^\circ \text{ С}.$$

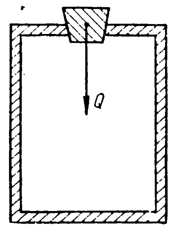


Рис. 203.

354. $F = 205{,}5$ *н*.

Решение. Так как масса газа под поршнем не изменяется и температура газа постоянная, состояние газа можно описать законом Бойля — Мариотта

$p_1V_1 = p_2V_2$, где p_2 и V_2 — соответственно давление и объем газа в цилиндре при действии на поршень силы F.

Давление p_1 является суммой атмосферного давления p_a и давления поршня $\frac{P}{S}$:

$$p_1 = p_a + \frac{P}{S}.$$

Давление p_2 больше p_1 на величину давления, создаваемого силой F, т. е. на $\frac{F}{S}$:

$$p_2 = p_a + \frac{P}{S} + \frac{F}{S}.$$

Подставив значения p_1 и p_2 в формулу закона Бойля — Мариотта, получим

$$\left(p_a + \frac{P}{S}\right) V_1 = \left(p_a + \frac{P}{S} + \frac{F}{S}\right) V_2, \text{ откуда } F = \left(p_a + \frac{P}{S}\right)\frac{V_1 - V_2}{V_2} \times$$

$$\times S = \left(p_a + \frac{P}{S}\right)\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)S = 205{,}5 \text{ н}.$$

355. $p = \frac{T}{2}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}\right)$.

Решение. Запишем уравнение газового состояния для обоих сосудов (рис. 204) до их соединения и нагревания. Для сосуда *1* $\frac{p_1V}{T_1} = \text{const}$, для сосуда *2* $\frac{p_2V}{T_2} = \text{const}$.

Для всего газа после соединения сосудов и нагревания газа уравнение газового состояния запишется так:

$$\frac{p_1V}{T_1} + \frac{p_2V}{T_2} = p \cdot \frac{2V}{T}, \text{ откуда } p = \frac{T}{2}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}\right).$$

356. $V \approx 1010$ *м³*.

Р е ш е н и е. Объем аэростата V равен объему водорода при температуре $t^\circ = 15^\circ$ С. Выразим объем водорода при температуре t° и t_1° через объем водорода V^0 при температуре 0° С:

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} \text{ и } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_0}{T_0}; \text{ тогда } V_1 = V\frac{T_1}{T}.$$

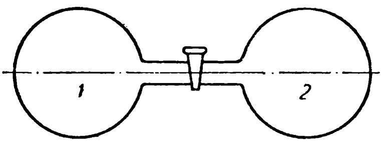


Рис. 204.

Объем вышедшего водорода есть приращение начального объема при изменении температуры от t° до t_1°:

$$\Delta V = V_1 - V = V\left(\frac{T_1}{T} - 1\right).$$

Объем вышедшего водорода при температуре t_1° можно выразить так:

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho_0}(1 + \beta t_1^\circ) = \frac{\Delta m}{\rho_0}\cdot\frac{T_1}{T_0},$$

где ρ_0 — плотность водорода при 0° С.

Тогда $V\left(\frac{T_1}{T} - 1\right) = \frac{\Delta m}{\rho_0}\cdot\frac{T_1}{T_0}$, откуда $V = \frac{\Delta m T_1 T}{\rho_0(T_1 - T)T_0} \approx 1010$ *м³*.

357. $n \approx 62$.

Р е ш е н и е. Найдем объем V_1, занимаемый 1 *молем* водяного пара при температуре 0° С и давлении $p = 532$ *н/м²*. Согласно закону Бойля — Мариотта $pV_1 = p_0V_0$, где p_0 — нормальное атмосферное давление; V_0 — объем 1 *моля* пара (газа) при нормальных условиях ($V_0 = 22{,}4$ *л*). Отсюда $V_1 = \frac{p_0V_0}{p}$.

Молекулярная масса воды 18 и 1 *моль* воды занимает объем $V_в = 18$ *см³*. Обозначив отношение средних расстояний между молекулами водяного пара и воды в жидкости через n, получим $n = \sqrt[3]{\frac{V_1}{V_в}} = \sqrt[3]{\frac{p_0V_0}{p_1V}} \approx 62$.

358. $p \approx 1{,}37\cdot10^4$ *н/ ²*.

Р е ш е н и е. Парциальное давление воздуха в сосуде $p_0 = p_a - p_1 = 5{,}975$ *н/м²*. Из закона Шарля $p = p_0\frac{T}{T_0} \approx 1{,}37\cdot10^4$ *н/м²*.

359. $x_1 \approx 4{,}3$ *см*.

Р е ш е н и е. Считая процесс изотермическим, можно записать: $p_1V_1 = p_2V_2$, где p_1 — барометрическое давление; V_1 — объем воздуха в трубке до погружения в воду; p_2 — давление воздуха в трубке после погружения в воду; V_2 — объем воздуха в трубке после погружения в воду.

Учитывая силу, действующую на воздух в трубке со стороны воды, давление p_2 можно выразить (рис. 205) так: $p_2 = p_1 + (l - x)\frac{\rho_1}{\rho_2}$ *см рт. ст.*, где ρ_1 — плотность воды, ρ_2 — плотность ртути. Объем воздуха в трубке $V_2 = (L - x)\,S$, где S — площадь поперечного сечения трубки. Подставив полученные значения p_2 и V_2 в формулу закона Бойля — Мариотта и учтя, что $V_1 = LS$, получим

$$p_1 LS = \left[p_1 + (l - x)\,\frac{\rho_1}{\rho_2}\right](L - x)\,S.$$

После преобразования получим квадратное уравнение

$$x^2 - \left(p_1\,\frac{\rho_2}{\rho_1} + l + L\right)x + lL = 0.$$

Подставив числовые значения величин и решив уравнение, получим $x_1 \approx 4{,}3$ *см* и $x_2 \approx 1180$ *см*. Корень x_2 не имеет физического содержания ($x_2 > L$). Значит, вода поднялась в трубку на высоту $x \approx 4{,}3$ *см*.

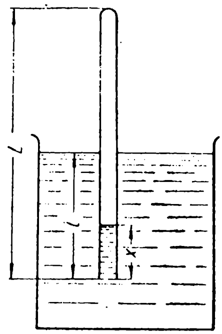


Рис. 205.

360. $\Delta V \approx 36{,}4$ *м*^{3}.

Решение. Сжатый воздух вытеснит такой объем воды, чтобы давление расширившегося воздуха уравновесило давление воды и атмосферное давление: $p_1 = p_0 + \rho g h$.

Запишем уравнение газового состояния для воздуха в баллоне до и после расширения: $\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$.

Объем вытесненной воды равен разности объемов воздуха $\Delta V = V_1 - V$. Из уравнения газового состояния

$$\frac{V_1}{V} = \frac{pT_1}{p_1 T} \quad \text{или} \quad \frac{V_1 - V}{V} = \frac{pT_1 - p_1 T}{p_1 T},$$

откуда $\Delta V = V\,\frac{pT_1 - p_1 T}{p_1 T} \approx 36{,}4$ *м*^{3}.

361. $x = -\frac{p}{2\rho g} + \sqrt{\frac{p^2}{4\rho^2 g^2} + \frac{ph - \rho g h^2}{\rho g}}$.

Решение. При погружении пробирки до половины длины газ занимает столбик высотой h. Очевидно, что газ находится под давлением $p - \rho g h$, так как жидкость поднялась в пробирке на высоту h. Пусть при полном погружении пробирки высота столбика газа будет x, тогда он будет находиться под давлением $p + \rho g x$.

Поскольку температура во время опыта не изменяется и учитывая, что объем газа пропорционален высоте столбика, в соответствии с законом Бойля — Мариотта можно записать:

$$(p - \rho g h)\,h = (p + \rho g x)\,x, \text{ откуда } x^2 + \frac{p}{\rho g}\,x - \frac{(p - \rho g h)\,h}{\rho g} = 0.$$

Решив уравнение, получим $x = -\frac{p}{2\rho g} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4\rho^2 g^2} + \frac{ph - \rho g h^2}{\rho g}}$.

По условию задачи $p > \rho g h$; значит, в решении надо взять знак плюс.

362. $p' = 788$ *мм рт. ст.*

Р е ш е н и е. С возрастанием атмосферного давления уменьшается объем воздуха над ртутью, вследствие чего возрастает его упругость, что приводит к увеличению погрешности в показаниях барометра ($755 - 748 = 7$ и $740 - 736 = 4$).

Введем такие обозначения:

$$p_0 = 755 \text{ мм рт. ст.}; \quad H_0 = 748 \text{ мм};$$
$$p = 740 \text{ мм рт. ст.}; \quad H = 736 \text{ мм};$$
$$p' = ? \quad H' = 760 \text{ мм};$$

$$\left.\begin{array}{ll} p_0 - H_0 = h_0; & V_0 \\ p - H = h; & V \\ p' - H' = h'; & V' \end{array}\right\} \text{соответственно объемы воздуха над ртутью.}$$

Воспользуемся законом Бойля — Мариотта:

$$h_0 V_0 = hV; \quad hV = h'V'.$$

Можно также записать:

$$V - V_0 = S(H_0 - H); \quad V_0 - V' = S(H' - H_0),$$

где S — площадь поперечного сечения барометрической трубки.

Отсюда $h' = \dfrac{hh_0(H_0 - H)}{h(H_0 - H) - (h_0 - h)(H' - H_0)} \approx 28$ *мм рт. ст.*

тогда $p' = H' + h' = 788$ *мм рт. ст.*

363. $p \approx 751$ *мм рт. ст.*

Р е ш е н и е. При истинном давлении 768 *мм рт. ст.* длина столбика воздуха над ртутью 80 *мм*. Этот столбик воздуха находится под давлением $p_1 = 768$ *мм* — 748 *мм* = 20 *мм рт. ст.* Так как общая длина барометрической трубки составляет $l = 748 + 80$ *мм* = 828 *мм*, то можно определить длину столбика воздуха во втором случае $l_2 = 828$ *мм* — 734 *мм* = 94 *мм*. Обозначив через p_2 давление столбика воздуха во втором случае, в соответствии с законом Бойля — Мариотта для столбика воздуха можно записать:

$$p_1 l_1 = p_2 l_2, \text{ откуда } p_2 = p_1 \frac{l_1}{l_2} \approx 17 \text{ мм рт. ст.}$$

Тогда истинное давление $p \approx 734$ *мм* + 17 *мм* = 751 *мм рт. ст*

364. $P \approx 51{,}9$ *н.*

Р е ш е н и е. Поскольку объем аэростата практически не изменяется, то при нагревании из аэростата выйдет объем газа $\Delta V = V_2 - V_1$. На основании закона Гей-Люссака можно записать

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}, \text{ откуда } \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \text{ или } \Delta V = V_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1}.$$

Масса вышедшего газа $m = \Delta V \dfrac{\rho}{1 + \beta t_2^\circ}$, а вес аэростата изменится

на $P = mg = \Delta V \dfrac{\rho}{1 + \beta t_2^\circ} g = V_1 \dfrac{T_2 - T_1}{T_1} \cdot \dfrac{\rho g}{1 + \beta t_2^\circ} \approx 51{,}9$ *н.*

365. Р е ш е н и е. Нужно сжимать газ. Если при этом давление будет все время возрастать, то в цилиндре находится пар при температуре выше критической. Если сначала при сжатии давление возрастает, а затем остается неизменным, то в цилиндре пар ненасыщающий, а если давление все время постоянно, то в цилиндре насыщающий пар.

366. $p_1' = p_1 \dfrac{T}{T_1}$; $p_2' = p_2 \dfrac{T}{T_2}$.

Р е ш е н и е. Поскольку объемы камер не изменяются и в обеих камерах одинаковый газ, то в соответствии с законом Шарля можно записать:

$$\frac{p_1'}{T} = \frac{p_1}{T_1} \text{ и } \frac{p_2'}{T} = \frac{p_2}{T_2}, \text{ откуда } p_1' = p_1 \frac{T}{T_1}; \quad p_2' = p_2 \frac{T}{T_2}.$$

367. $\Delta V = \dfrac{(2p_1 - p_2) V_1 V_2}{2p_1 V_1 + p_2 V_2}$.

Р е ш е н и е. Изменение состояния газа в левой части цилиндра при нагревании может быть описано объединенным газовым законом

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p' V_1'}{T_1'}, \text{ где } T_1' = 2T_1, \text{ тогда } 2p_1 V_1 = p' V_1'. \qquad (1)$$

При освобождении поршень перемещается до тех пор, пока давление в обеих частях цилиндра не сравняется. Изменение состояния газа в правой части цилиндра можно описать посредством закона Бойля — Мариотта, так как температура газа в этой части цилиндра не изменяется:

$$p_2 V_2 = p' [V_2 - (V_1' - V_1)]. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) относительно p', получим

$$p' = \frac{2p_1 V_1}{V_1'} \text{ и } p' = \frac{p_2 V_2}{V_2 - (V_1' - V_1)} \text{ или } \frac{2p_1 V_1}{V_1'} = \frac{p_2 V_2}{V_2 - (V_1' - V_1)}.$$

Учитывая, что $V_1' = V_1 + \Delta V$, последнее равенство можно переписать:

$$\frac{2p_1 V_1}{V_1 + \Delta V} = \frac{p_2 V_2}{V_2 - \Delta V}, \text{ откуда } \Delta V = \frac{(2p_1 - p_2) V_1 V_2}{2p_1 V_1 + p_2 V_2}.$$

368. $h_2'' \approx 19$ *см*.

Р е ш е н и е. На основании закона Бойля — Мариотта для воздуха, находящегося в запаянном конце трубки, можно записать: $V_0 p_0 = Vp$. В этом соотношении объемы можно заменить соответствующими расстояниями от поверхности ртути до запаянного конца. Тогда

$$l_0 p_0 = lp, \text{ где } l_0 = 20 \text{ см}; \quad l = l_0 - \frac{h_2 - h_1}{2}; \ p_0 = p_1 - \rho g h_1;$$

$$p = p_2 - \rho g h_2,$$

откуда

$$l_0 (p_1 - \rho g h_1) = \left(l_0 - \frac{h_2 - h_1}{2}\right) (p_2 - \rho g h_2).$$

Дальнейшее решение математически упрощается, если в это равенство подставить числовые значения известных величин, а не решать в общем виде. Сделав такую подстановку, после упрощений получим квадратное уравнение:

$$6{,}8h_2^2 - 1020h_2 + 16720 = 0.$$

Решение этого уравнения дает один корень $h_2' \approx 131$ *см*, не удовлетворяющий условие задачи, а второй корень $h_2'' \approx 19$ *см* дает ответ на вопрос задачи.

369. $p = 2 \cdot 10^5$ *н/м²*.

Решение. По закону Дальтона давление смеси газов

$$p = p_1' + p_2' + p_3',$$

где p_1', p_2' и p_3' — парциальные давления газов, т. е. давления, которые создавали бы газы порознь, заполняя объем $V = V_1 + V_2 + V_3$.

Парциальные давления газов можно определить, считая, что каждый газ порознь изотермически расширяется, заполняя весь объем V, т. е.

$$p_1V_1 = p_1'(V_1 + V_2 + V_3);$$
$$p_2V_2 = p_2'(V_1 + V_2 + V_3);$$
$$p_3V_3 = p_3'(V_1 + V_2 + V_3).$$

Определяя из этих уравнений p_1', p_2' и p_3' и складывая их, получим

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = 2 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2.$$

370. $m \approx 0{,}63$ *г*.

Решение. После сжатия газа до $V_1 = \frac{1}{2}V$ некоторая часть аммиака сконденсируется и над жидким аммиаком останется насыщенный пар. По уравнению газового состояния $\frac{V_1p_1}{T_1} = \frac{V_0p_0}{T_0}$ определим объем этой части газа при нормальных условиях:

$$V_0 = \frac{V_1p_1T_0}{p_0T_1} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \approx 1{,}67 \text{ л}.$$

Определим массу аммиака, занимающего объем $V_0 = 1{,}67$ *л* при нормальных условиях. Для этого составим пропорцию $\frac{17}{22{,}4 \text{ л}} = \frac{x}{1{,}67 \text{ л}}$ и найдем $x = \frac{17 \cdot 1{,}67 \text{ г}}{22{,}4} \approx 1{,}27$ *г*. Остальная часть аммиака сконденсировалась: $m = 1{,}9$ *г* $- 1{,}27$ *г* $= 0{,}63$ *г*.

371. $m = 921{,}6$ *г*.

Решение. По таблице определяем плотность насыщающего водяного пара при 15° С: $\rho = 12{,}8$ *г/м³*. Тогда при относительной влажности 60% в 1 *м³* находится $0{,}6 \cdot 12{,}8$ *г/м³*, а в комнате $m = 120 \text{ м}^3 \cdot 0{,}6 \cdot 12{,}8 \text{ г/м}^3 = 921{,}6$ *г*.

372. $T_0 = \dfrac{3p_0T}{p_0 + \frac{1}{3}\rho gL}$.

Решение. До погружения трубки в воду столбик воздуха высотой L находится под атмосферным давлением p_0 и при температуре T_0. После погружения, когда температуры воды и воздуха уравняются, столбик воздуха высотой $\frac{1}{3}L$ будет находиться под давлением $p_0 + \frac{1}{3}\rho gL$ при температуре T. Запишем уравнение газового состояния считая объем воздуха пропорциональным высоте столба воздуха:

$$\frac{p_0L}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \frac{1}{3}\rho gL\right)\frac{1}{3}L}{T}, \text{ откуда } T_0 = \frac{3p_0}{p_0 + \frac{1}{3}\rho gL}T.$$

373. $T_1 = \dfrac{p_0 - \frac{1}{2}\rho gL}{p_0 + \frac{1}{2}\rho gL} \cdot T$.

Решение. При полном погружении пробирки газ при температуре T занимает половину объема пробирки, пропорциональную длине $\frac{1}{2}L$, и находится под давлением $p_0 + \frac{1}{2}\rho gL$. Если во втором случае жидкость снова установится на расстоянии $\frac{1}{2}L$ от концов пробирки, то та же масса газа займет тот же объем, пропорциональный $\frac{1}{2}L$, при температуре T_1, но будет находиться под давлением $p_0 - \frac{1}{2}\rho gL$.

В соответствии с уравнением газового состояния

$$\frac{\left(p_0 + \frac{1}{2}\rho gL\right)\frac{1}{2}L}{T} = \frac{\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho gL\right)\frac{1}{2}L}{T_1},$$

$$\text{откуда } T_1 = \frac{p_0 - \frac{1}{2}\rho gL}{p_0 + \frac{1}{2}\rho gL}T.$$

Так как T_1 — абсолютная температура воздуха — не может быть меньше или равна 0° К, то добиться установления уровня жидкости посредине пробирки, поднятой над уровнем жидкости, можно только при условии $p_0 > \frac{1}{2}\rho gL$.

374. $Q \approx 28{,}22$ *н.*

Решение. Вес груза Q должен быть равен весу трубки и весу ртути, вошедшей в трубку. Ртуть поднимается в трубку на высоту $h = \frac{9{,}8 \cdot 10^4}{133}$ *мм* ≈ 736 *мм* $= 73{,}6$ *см.* Для определения веса ртути, вошедшей в трубку, надо определить ее объем, а для этого надо знать внутренний радиус трубки ρ в том месте, до которого ртуть поднялась. Из рис. 206 видим, что

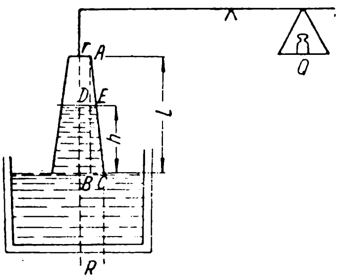


Рис. 206.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \text{ или } \frac{L}{R - r} = \frac{L - h}{DE},$$

$$\text{откуда } DE = \frac{L - h}{L}(R - r);$$

$$\rho = r + DE = r + \frac{(R - r)(L - h)}{L} \approx 1{,}92 \text{ см.}$$

Величину радиусов R и r определим, зная площадь внутренних сечений трубки у нижнего и верхнего концов: $R = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}}$ и $r = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}}$.

Объем усеченного конуса $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + \rho r + \rho^2) \approx 1{,}97 \cdot 10^{-4}$ *м*^{3}, тогда $Q = P + \rho_1 g V \approx 28{,}22$ *н.*

375. $H = \frac{1}{2} L + \frac{2p_0 - p_a}{\rho g}$.

Решение. Если объем водорода уменьшился вдвое $\left(l = \frac{1}{2} L\right)$, то в соответствии с законом Бойля—Мариотта давление водорода увеличилось в два раза ($T = \mathrm{const}$ по условию задачи). Давление водорода в пробирке должно уравновешивать внешнее давление p_a и давление столба ртути высотой $H - \frac{1}{2} L$, т. е.

$$2p_0 = p_a + \left(H - \frac{1}{2} L\right)\rho g, \text{ откуда } H = \frac{1}{2} L + \frac{2p_0 - p_a}{\rho g}.$$

Из условия задачи ясно, что она имеет решение при условии

$$\frac{2p_0 - p_a}{\rho g} \geqslant \frac{1}{2} L \text{ или } p_0 \geqslant \rho g \frac{L}{4} + \frac{1}{2} p_a.$$

§ 5. СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

376. $F \approx 67{,}3 \cdot 10^{-3}$ *н*; $x \approx 35\%$.

Решение. Сила, необходимая для отрыва кольца от поверхности воды, складывается из веса кольца и силы поверхностного натяжения, т. е. $F = F_1 + F_2$. Вес кольца $F_1 = \rho g h \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)$.

При отрыве кольца поверхностная пленка разрывается по внешней и внутренней окружностям кольца. Поэтому сила поверхностного натяжения

$$F_2 = \pi\alpha (d_1 + d_2) \approx 23{,}4 \cdot 10^{-3} \ н.$$

Тогда $F = \rho g h \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) + \pi\alpha (d_1 + d_2) \approx 67{,}3 \cdot 10^{-3} \ н.$

Силы поверхностного натяжения составляют $x = \frac{F_2}{F} \approx 0{,}35.$

377. $F = 4{,}92 \cdot 10^{-3}$ *н*; $A = 9{,}84 \cdot 10^{-5}$ *дж*.

Решение. На подвижную сторону рамки действует сила поверхностного натяжения $F = 2\alpha l$. Значит, для удержания подвижной стороны в равновесии к ней надо приложить силу, по величине равную $F = 2\alpha l = 4{,}92 \cdot 10^{-3}$ *н*. При перемещении стороны рамки выполняется работа $A = Fh = 9{,}84 \cdot 10^{-5}$ *дж*.

378. $\alpha \approx 0{,}078$ *н/м*.

Решение. Капли воды отрываются тогда, когда их вес P становится больше силы поверхностного натяжения $F = \alpha \cdot 2\pi r$, где r — радиус шейки капли, приблизительно равный внутреннему радиусу кончика пипетки. Поскольку непосредственно перед отрывом $F = P$, то можно записать $\alpha = \frac{mg}{2\pi r} = \frac{mg}{\pi d} \approx 0{,}078$ *н/м*.

379. $d \approx 0{,}1$ *мм*.

Решение. Высота капиллярного поднятия жидкости в трубке

$$h = \frac{2\alpha}{r\rho g} = \frac{4\alpha}{d\rho g}, \text{ откуда } d = \frac{4\alpha}{\rho g h} \approx 0{,}1 \ мм.$$

380. $\alpha \approx 29 \cdot 10^{-3}$ *н/м*.

Решение. Для коэффициента поверхностного натяжения бензола можно записать $\alpha = \frac{mg}{\pi d}$ (см. решение задачи 378).

Однако $m = \rho V = \rho \frac{V_1}{n}$, где V — объем одной капли. Тогда

$$\alpha = \rho \frac{V_1 g}{\pi d n} \approx 29 \cdot 10^{-3} \ н/м.$$

381. $l \approx 34$ *см*.

Решение. Длину расплавившейся свинцовой проволоки найдем как отношение объема расплавившегося свинца к площади поперечного сечения проволоки

$$l = \frac{V}{S} = \frac{4V}{\pi d^2}.$$

Объем расплавившегося свинца $V = \frac{m}{\rho} = \frac{P_0}{\rho g}$, где P_0 — вес двадцати капель. Вес одной капли в момент отрыва равен силе поверхностного натяжения $P = \alpha 2\pi r = \alpha\pi d$, а вес двадцати капель $P_0 = n\alpha\pi d$. Тогда $V = \frac{\pi n \alpha d}{\rho g}$, $l = \frac{4n\alpha}{\rho g d} \approx 0{,}34$ *м*.

382. Решение. Космический корабль находился в условиях невесомости. Поэтому на жидкость действовали лишь силы поверхностного натяжения, и под действием этих сил произошло полное смачивание стенок сосуда. Воздух оказался заключенным внутри воды в виде шара, потому что данная форма обеспечивает наименьшую поверхность раздела.

383. $\alpha_c \approx 0{,}031$ *н/м*; $d \approx 0{,}29$ *мм*.

Решение. По высоте поднятия воды в капиллярной трубке определим ее диаметр:

$$h_1 = \frac{4\alpha}{d\rho g}\text{, откуда } d = \frac{4\alpha}{\rho g h_1} \approx 0{,}29 \text{ мм.}$$

Из формулы для высоты капиллярного поднятия $\alpha_c = \frac{d\rho_c g h_2}{4}$ или, подставив значение d, получим $\alpha_c = \alpha\frac{\rho_c}{\rho}\cdot\frac{h_2}{h_1} \approx 0{,}031$ *н/м*.

384. $d \approx 0{,}15$ *мм* (задача решается аналогично предыдущей).

385. Разность уровней не изменится.

Решение. Высоты поднятия одной и той же жидкости в трубках разного диаметра равны $h_1 = \frac{4\alpha}{\rho g d_1}$ и $h_2 = \frac{4\alpha}{\rho g d_2}$; тогда $\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_2}{d_1}$, т. е. отношение высот для одной и той же жидкости не зависит от ее плотности, а поэтому разность уровней при нагревании не изменится.

386. $\Delta E = 1{,}44\cdot 10^{-8}$ *дж*.

Решение. Изменение энергии поверхностного натяжения слоя ртути равно $\Delta E = \alpha(S_2 - S_1)$, причем $S_1 = 4\pi r_1^2$ и $S_2 = 4\pi r_2^2$, где S_1 — поверхность исходной капли, S_2 — суммарная площадь поверхностей образовавшихся капель.

Радиусы капель r_1 и r_2 можно определить из соотношения

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r_1^3 \text{ и } m = \frac{4}{3}\pi\rho r_2^3 n\text{, откуда } r_1 = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}$$

$$\text{и } r_2 = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho n}}.$$

$$\text{Тогда } \Delta E = 4\pi\alpha\sqrt[3]{\frac{9m^2}{16\pi^2\rho^2}}\left(n\sqrt[3]{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$\text{или } \Delta E = \alpha\sqrt[3]{\frac{36\pi m^2}{\rho^2}}\left(\sqrt[3]{n} - 1\right) = 1{,}44\cdot 10^{-8} \text{ дж.}$$

387. $\alpha \approx 7{,}3\cdot 10^{-2}$ *н/м*.

Решение. Поскольку мыльная пленка имеет две поверхности, то коэффициент поверхностного натяжения определим по формуле $\alpha = \frac{P}{2l} \approx 7{,}3\cdot 10^{-2}$ *н/м*.

388. $\alpha \approx 0{,}0294$ *н/м.*

Решение. Разность высот поднятия смачивающей жидкости в капиллярах

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r_1} - \frac{2\alpha}{\rho g r_2} = \frac{2\alpha (r_2 - r_1)}{\rho g r_1 r_2},$$

$$\text{откуда } \alpha = \frac{\rho g r_1 r_2 h}{2 (r_2 - r_1)} \approx 0{,}0294 \text{ н/м}.$$

389. *а)* $h_1 \approx 1{,}6$ *см*; *б)* $h_2 \approx 2{,}4$ *см.*

Решение. а) Когда конический капилляр погружен в жидкость широким концом (рис. 207, *а*), то высота поднятия воды $h_1 = \frac{2\alpha}{\rho g r}$, где r — радиус капилляра на уровне жидкости в капилляре. Выразим r через h_1. Для этого достроим усеченный конус до полного конуса. Тогда $\frac{H_1}{r_1} = \frac{H_1 + H}{r_2}$, откуда $H_1 = \frac{H r_1}{r_2 - r_1} = 10$ *см.*

Рассматривая подобные треугольники, можно написать еще одно соотношение:

$$\frac{H_1}{r_1} = \frac{H_1 + H - h_1}{r}, \text{ откуда } r = \frac{H_1 + H - h_1}{H_1} r_1 = 0{,}01 - 0{,}005 h_1.$$

Тогда

$$h_1 = \frac{2\alpha}{\rho g (0{,}01 - 0{,}005 h_1)}.$$

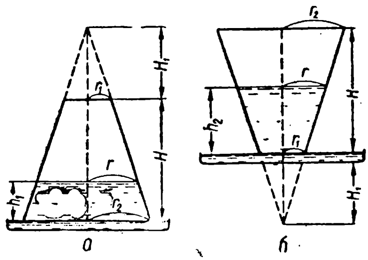


Рис. 207.

Решив это уравнение, получим два значения для h_1 : $h_1' \approx 18{,}4$ *см* и $h_1'' \approx 1{,}6$ *см.* Первый ответ не соответствует условию задачи, значит, высота подъема воды $h_1 \approx 1{,}6$ *см.*

б) Аналогично решаем задачу в случае, когда капилляр опущен в жидкость узким концом (рис. 207,*б*):

$$H_1 = \frac{H r_1}{r_2 - r_1} = 10 \text{ см}; \quad h_2 = \frac{2\alpha}{\rho g r}; \quad \frac{H_1}{r_1} = \frac{H_1 + h_2}{r},$$

$$\text{откуда } r = \frac{H_1 + h_2}{H_1} r_1 \text{ или } r = 0{,}05 + 0{,}005 h_2.$$

$$\text{Тогда } h_2 = \frac{2\alpha}{\rho g (0{,}05 + 0{,}005 h_2)}.$$

Решив это уравнение, получим два значения для $h_2 : h_2' \approx -12{,}4$ *см* и $h_2 \approx 2{,}4$ *см.* Значит, вода поднимается на высоту $h_2 \approx 2{,}4$ *см.*

390. Решение. Замерзание воды при 0° С происходит только при наличии центров кристаллизации. Ими могут служить любые нерастворимые частицы. Когда масса воды большая, в ней всегда найдется хотя бы один центр кристаллизации, а этого уже достаточно, чтобы замерзла вся вода. Если же масса воды разбита на мелкие капельки, то только небольшое их количество имеет центры кристаллизации и замерзают только эти капельки.

§ 6. СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

391. $S \approx 127$ *мм²*.

Решение. Из закона Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{ES}$ определим сечение стержня $S = \frac{P}{E} \cdot \frac{l}{\Delta l} \approx 127$ *мм²*.

392. $S \approx 278$ *мм²*; $\frac{\Delta l}{l} \approx 9{,}18 \cdot 10^{-4}$.

Решение. Из формулы для предела прочности $\sigma_п = \frac{F}{S}$ определим сечение стержня $S = \frac{F}{\sigma_п} \approx 278$ *мм²*. По закону Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{S} \cdot \frac{1}{E} = \sigma_п \frac{1}{E} \approx 0{,}000918$.

393. $F \approx 1238$ *н*.

Решение. Удлинение стержня вследствие повышения температуры

$$\Delta l = l_t - l = l\alpha\Delta t^\circ,$$

где l — начальная длина (при $t^\circ = 0^\circ$ С).

Сжатие вследствие действия сил давления, приложенных к торцам стержня, $\Delta l = l\frac{F}{SE}$, где F — нагрузка.

По условию задачи $l\alpha\Delta t^\circ = l\frac{F}{SE}$, откуда $F = ES\alpha\Delta t^\circ \approx 1238$ *н*.

394. Решение. Кабель можно использовать тогда, когда напряжение при растяжении, вызываемое собственным весом кабеля, не будет превышать предела прочности свинца. Найдем это напряжение

$$\sigma = \frac{P}{S} = \rho\frac{glS}{S} = \rho gl \approx 3{,}3 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2.$$

Поскольку $\sigma > \sigma_п$, то использовать для связи такой кабель нельзя.

395. $l \leqslant 10\,400$ *м*.

Решение. На трос действуют две силы: вес троса ρglS и выталкивающая сила воды $\rho_1 glS$. Трос может быть опущен на такую глубину l, чтобы напряжение результирующей силы $\frac{\rho glS - \rho_1 glS}{S}$ было меньше предела прочности стали $\sigma_п$, т. е.

$$\sigma_п \geqslant \rho gl - \rho_1 gl = (\rho - \rho_1)gl, \text{ откуда } l \leqslant \frac{\sigma_п}{g(\rho - \rho_1)} = 10\,400 \text{ м}.$$

396. $D = 27$ *мм.*

Решение. В обоих случаях напряжение $\sigma = \frac{F}{S}$ должно быть одинаковым. Для случая неподвижного лифта

$$\sigma = \frac{F_2}{S_1} = \frac{4mg}{\pi d^2}.$$

При внезапной остановке наибольшая сила будет действовать при поднятии лифта вверх; в этом случае $F_2 = mg + ma$, где a — ускорение лифта. По условию задачи $a = 8g$. Значит, $F_2 = 9mg$ и $\sigma = \frac{F_2}{S_2} = \frac{36mg}{\pi D^2}$.

Тогда $\frac{4mg}{\pi d^2} = \frac{36mg}{\pi D^2}$, откуда $D = d\sqrt{9} = 27$ *мм.*

397. $d \approx 3{,}2$ *см.*

Решение. Диаметр стержня должен быть таким, чтобы при поднятии груза $8 \cdot 10^4$ *н* допустимое напряжение $\sigma_д$ не превышало величины $\sigma_д = \frac{\sigma_р}{n}$. Значит, $P = \sigma_д \cdot S = \frac{\sigma_р}{n} S = \frac{\sigma_р}{n} \cdot \frac{\pi d^2}{4}$,

$$\text{откуда } d = \sqrt{\frac{4nP}{\sigma_р \pi}} \approx 3{,}2 \text{ см.}$$

398. $l \approx 180$ *м.*

Решение. Проволока оборвется тогда, когда напряжение, создаваемое собственным весом проволоки, будет равно или больше разрушающего напряжения для свинца, т. е. $\rho \frac{glS}{S} = \sigma_р$, откуда $l = \frac{\sigma_р}{\rho g} \approx 180$ *м.*

399. Решение. Поликристаллы состоят из множества сросшихся между собой зерен (кристаллов). При пластической деформации в этих зернах происходит скольжение атомных плоскостей, а сами кристаллы перемещаются друг относительно друга. Наличие вокруг каждого зерна множества других зерен затрудняет скольжение атомных плоскостей в зернах и перемещение самих зерен.

400. $E = 10^{11}$ *н/м²*.

Решение. Из закона Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S}$ определяем $E = \frac{F}{S} \times \frac{l}{\Delta l}$, где $\frac{\Delta l}{l} = 0{,}00025$. Тогда $E = 10^{11}$ $н/м^2$.

401. $k = 50$.

Решение. Проволок надо взять столько, чтобы напряжение, создаваемое грузом P, не превышало допустимого $\frac{\sigma}{n}$, т. е. $\frac{\sigma}{n} = \frac{4P}{k\pi d^2}$, откуда $k = \frac{4Pn}{\pi d^2 \sigma} = 50$.

402. $E \approx 2{,}97 \cdot 10^6$ *н/м²*.

Решение. Потенциальная энергия растянутого шнура равна кинетической энергии камня $\frac{mv^2}{2}$. Для определения величины потенциальной энергии шнура вычислим работу, выполняемую мальчиком по деформации шнура.

При растяжении шнура Δl выполняется работа $A = \frac{F\Delta l}{2}$, где F — сила упругости при удлинении Δl. Но для упругих сил $F = k\Delta l$. Тогда $A = \frac{k\Delta l^2}{2}$.

В то же время силу упругости можно определить из закона Гука:

$$F = \frac{SE}{l}\Delta l.$$

Сравнив это выражение с $F = k\Delta l$, видим, что $k = \frac{SE}{l}$.

Тогда $A = \frac{SE\Delta l^2}{2l}$; однако $A = \frac{mv^2}{2}$ или $\frac{SE\Delta l^2}{2l} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $E = \frac{mv^2 l}{S\Delta l^2} = \frac{mv^2 l}{\pi R^2 \Delta l^2} \approx 2{,}97 \cdot 10^6$ *н/м²*.

§ 7. РАБОТА ГАЗА И ПАРА. ТЕПЛОВЫЕ ДВИГАТЕЛИ

403. $A \approx 6{,}12 \cdot 10^5$ *дж*.

Решение. Совершаемая воздухом при нагревании работа равна $A = p(V_2 - V_1)$, где V_2 — объем воздуха при температуре 128° С, V_1 — объем воздуха при 20° С. По закону Гей-Люссака

$$V_2 = V_0 \frac{T_2}{T_0} \quad \text{и} \quad V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0},$$

где $V_0 = \frac{m}{\rho_0}$ — объем воздуха при нормальных условиях и ρ_0 — плотность воздуха при нормальных условиях.

Тогда $A = p\frac{m}{\rho_0 T_0}(T_2 - T_1) \approx 6{,}12 \cdot 10^5$ *дж*.

404. $T_2 \approx 310{,}3°$ К.

Решение. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, можно записать:

$$T_2 = T_1 + \frac{A\rho_0 T_0}{mp} \approx 310{,}3° \text{ К}.$$

405. $m \approx 202{,}7$ *кг*.

Решение. Если η_0 и η — коэффициенты полезного действия идеальной и реальной тепловых машин, работающих при одинаковых значениях температур нагревателя T_1 и холодильника T_2, то $\eta = k\eta_0$ и $\eta = k\frac{T_1 - T_2}{T_1}$, где $k = 0,6$ по условию задачи. Для определения коэффициента полезного действия имеем

$$\eta = \frac{N_{\text{полез}}}{N_{\text{расх}}}; \quad N_{\text{расх}} = \frac{N_{\text{полез}}}{\eta}.$$

Подставив сюда значение η, получим

$$N_{\text{расх}} = \frac{N_{\text{полез}} T_1}{k(T_1 - T_2)}.$$

Энергия, расходуемая при работе машины за время t, равна

$$E = N_{\text{расх}} t = \frac{N_{\text{полез}} T_1 t}{k(T_1 - T_2)}.$$

Эта энергия равна количеству теплоты, полученной при сгорании m *кг* топлива. Определим количество топлива:

$$m = \frac{Q}{q} = \frac{N_{\text{полез}} T_1 t}{k(T_1 - T_2)q} \approx 202{,}7 \text{ кг}.$$

406. $A \approx 1{,}6 \cdot 10^9$ *дж*.

Решение. Коэффициент полезного действия тепловой машины $\eta = \frac{A}{Q}$, где A — совершенная машиной работа, Q — количество теплоты, полученное машиной от нагревателя. Максимально возможный к. п. д. тепловой машины равен $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$, если машина работает по циклу Карно. Максимальную работу можно получить лишь с помощью машины, работающей по этому циклу. Значит

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{A}{Q},$$

где T_1 и T_2 — температуры нагревателя и холодильника.

Количество теплоты Q по условию задачи составляет лишь часть теплоты, выделившейся при сгорании топлива, поэтому

$$Q = \eta_1 Q_{\text{полн}} = \eta_1 q m,$$

где η_1 — коэффициент полезного действия топки.

Тогда $\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{A}{\eta_1 q m}$, откуда $A = \eta_1 m q \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \approx$ $\approx 1{,}6 \cdot 10^9$ *дж*.

407. $A = 1676$ *дж*.

Решение. Аналогично решению предыдущей задачи можно записать

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{A}{Q}, \text{ откуда } A = Q\,\frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1676 \text{ дж}.$$

408. $A = 6$ *дж.*

Решение. Давление на газ, находящийся под поршнем (рис. 208), равно сумме внешнего давления воздуха и давления поршня: $p + \frac{Q}{S}$. Общая сила давления $F = \left(p + \frac{Q}{S}\right)S$.

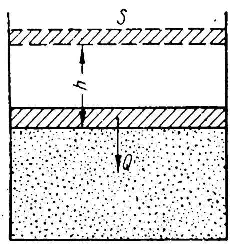


Рис. 208.

Определим перемещение поршня h при повышении температуры от t_1° до t_2°. Поскольку процесс изобарический, то можно записать:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \text{ откуда } V_2 = V_1\frac{T_2}{T_1}.$$

Зная объемы V_1 и V_2, находим

$$h = \frac{V_2 - V_1}{S} = \frac{V_1}{S}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

Работа, выполняемая поршнем при нагревании газа,

$$A = \left(p + \frac{Q}{S}\right)Sh = \left(p + \frac{Q}{S}\right)V_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 6 \text{ дж.}$$

409. $T_1 \approx 341°$ К; $\eta \approx 0,2$.

Решение. Коэффициент полезного действия любой тепловой машины $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$. Для идеальной машины, работающей по циклу Карно, коэффициент полезного действия $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, поэтому

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \text{ или } \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}, \text{ откуда } T_1 = T_2\frac{Q_1}{Q_2}.$$

Так как $Q_2 = 0,8\,Q_1$, то $T_1 = T_2 \cdot \frac{1}{0,8} \approx 341°$ К и $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx$

$\approx 0,2$.

410. $A \approx 2,1 \cdot 10^3$ *дж*; $Q_1 = 7,9 \cdot 10^3$ *дж*; $\eta = 21\%$.

Решение. Определим сначала коэффициент полезного действия машины:

$$\eta = \frac{T_1 - T_0}{T_1} \approx 0,21 = 21\%.$$

Выполненная работа за счет полученного количества теплоты

$$A = \eta Q = Q\,\frac{T_1 - T_0}{T_1} \approx 2,1 \cdot 10^3 \text{ дж.}$$

Холодильнику передается количество теплоты $Q_1 = (1 - \eta)\,Q \approx$ $\approx 7,9 \cdot 10^3$ *дж.*

411. $n \approx 116$ *об/мин.*

Решение. Работа, совершаемая за один ход поршня, численно равна произведению среднего давления на изменение объема, производимого поршнем за рабочий ход: $A_0 = p\Delta V = phS$.

Работа, совершаемая машиной за 1 *мин*, численно равна произведению величины развиваемой мощности на время работы: $A = Nt$. Тогда число оборотов, совершаемых валом паровой машины за 1 *мин*,

$$n = \frac{A}{A_0} = \frac{Nt}{phS} \approx 116 \text{ об/мин}.$$

412. $N \approx 157$ *квт*.

Решение. Мощность паровой машины можно определить по формуле

$$N = Fv\eta, \text{ где } F = pS = p\frac{\pi d^2}{4}; \quad v = 2ln.$$

Тогда $N = p\frac{\pi d^2}{4} 2ln\,\eta \approx 157$ *квт*.

413. $p \approx 2 \cdot 10^6$ *н/м²*.

Решение. Работа, совершаемая газом за один рабочий ход, равна $A_1 = pSh = p\frac{\pi d^2}{4}h$.

За 1 *сек* совершается работа $A_2 = p\frac{\pi d^2}{4} h \frac{n}{2} k$. Тогда полезная мощность

$$N = p\frac{\pi d^2}{4} h \frac{n}{2} k\eta, \text{ откуда } p = \frac{8N}{\pi d^2 hnk\eta} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2.$$

414. $l \approx 174$ *мм*.

Решение. Для мощности двигателя можно записать:

$$N = p\frac{\pi d^2}{4} k \frac{n}{2} l\eta,$$

где $k = 18$ — число цилиндров, n — число оборотов в секунду.

Отсюда $l = \dfrac{8N}{p\pi d^2 kn\eta} \approx 174$ *мм*.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

§ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

415. $q = 4l \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon mg \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Решение. На каждый шарик (рис. 209) действуют две силы: вес шарика $P = mg$ и сила кулоновского отталкивания

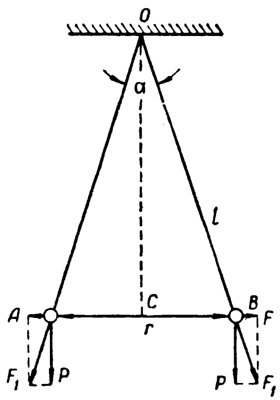


Рис. 209.

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, \text{ где } \frac{1}{2}r = l\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Из рисунка видим, что $F = mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, можно записать

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

откуда $q = 4l\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

416. $\rho = 1600$ *кг/м³*.

Решение. На шарик, находящийся в воздухе в отклоненном состоянии, действуют три силы: сила веса шарика $mg = \rho Vg$, где V — его объем; сила электрического отталкивания между шариками $F = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, находящимися на расстоянии r; сила натяжения нити. Условием равновесия шарика в воздухе является равенство равнодействующей сил F и mg силе натяжения нити. Угол отклонения шарика от положения равновесия зависит от соотношения сил F и mg:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{F}{mg} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 mg} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2\rho Vg}.$$

При погружении в керосин на шарик будет действовать еще выталкивающая сила $\rho_{\text{к}}gV$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2(\rho gV - \rho_{\text{к}}gV)}.$$

По условию углы отклонения α_1 и α_2 должны быть равны. На основании этого можно записать:

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2\rho V g} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 gV(\rho - \rho_к)}, \text{ откуда } \rho = \frac{\varepsilon\rho_к}{\varepsilon - 1} = 1600\ кг/м^3.$$

417. $r_1 \approx 0{,}4 \cdot 10^{-2}$ *см*; $r_2 \approx 0{,}9 \cdot 10^{-2}$ *см*.

Решение. Согласно условию задачи сила электростатического отталкивания $F_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ равняется силе взаимного тяготения $F_2 = \gamma\frac{m_1m_2}{R^2}$, где R — расстояние между пылинками, m_1 и m_2 — массы пылинок, q — заряд каждой из них. Поэтому

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \gamma\frac{m_1m_2}{R^2}, \text{ откуда } q^2 = 4\pi\varepsilon_0\gamma m_1m_2; \text{ однако } m_1 = \rho V_1 =$$

$$= \rho\frac{4}{3}\pi r_1^3; \quad m_2 = \rho V_2 = \rho\frac{4}{3}\pi r_2^3,$$

где r_1 и r_2 — соответственно радиусы первой и второй пылинок.

Согласно условию задачи,

$$V_2 = 4V_1 = 4\frac{4}{3}\pi r_1^3; \text{ тогда } q^2 = 4\pi\varepsilon_0\gamma\rho\frac{4}{3}\pi r_1^3\rho \cdot 4 \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 =$$

$$= \frac{256}{9}\pi^3\varepsilon_0\gamma\rho^2 r_1^6, \text{ откуда } r_1 = \sqrt[6]{\frac{9q^2}{256\pi^3\varepsilon_0\gamma\rho^2}} \approx 4 \cdot 10^{-3}\ см.$$

Из условия $V_2 = 4V_1$ получаем $r_2 = \sqrt[3]{4}\, r_1 \approx 9 \cdot 10^{-3}$ *см*.

418. Решение. Сила взаимодействия шариков до соприкосновения $F_1 = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. После соприкосновения каждый шарик будет иметь заряд $\frac{q_1 + q_2}{2}$ и сила взаимодействия $F_2 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0 r^2}$. Докажем, что $F_2 > F_1$, т. е. $\frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0 r^2} > \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ или $\frac{(q_1 + q_2)^2}{4} > q_1q_2$.

В самом деле, $(q_1 - q_2)^2 > 0$; тогда $q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2 > 0$ или $q_1^2 + q_2^2 > 2q_1q_2$. К обеим частям неравенства прибавим $2q_1q_2$; тогда $q_1^2 + q_2^2 + 2q_1q_2 > 4q_1q_2$ или $\frac{(q_1 + q_2)^2}{4} > q_1q_2$ и $F_2 > F_1$.

419. $q \approx 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ *k*.

Решение. На каждый заряд действуют силы отталкивания со стороны двух других зарядов (рис. 210) $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$. Равнодействующая этих сил $R = 2F\cos 30° = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\cos 30°$.

Заряды будут находиться в равновесии, если $R = P_1$ для каждого заряда, где $P_1 = mg \operatorname{tg} \alpha$. Приравнивая значения R и P_1, получим

$$\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 l^2} \cos 30^\circ = mg \operatorname{tg} \alpha, \text{ откуда } q = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mg \operatorname{tg} \alpha}{\cos 30^\circ}} \approx 5{,}4 \cdot 10^{-8} k.$$

420. Р е ш е н и е. При движении заряженной частицы на внутренней поверхности трубы по индукции возникают заряды противоположного знака. В цилиндрической части трубы эти заряды не создают сил, действующих на частицы вдоль трубы. В сужении трубы эти силы

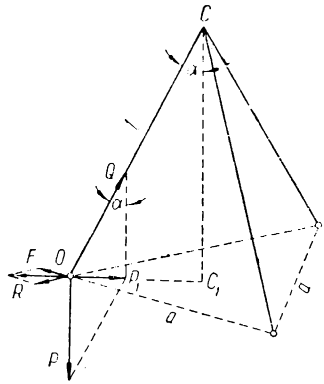


Рис. 210.

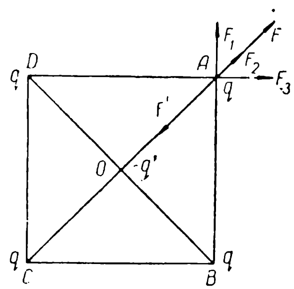


Рис. 211.

направлены так, что дают составляющую в сторону сужения, и скорость частицы возрастает.

421. $q' \approx 0{,}96\ q$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим силы, действующие на любой из зарядов q, расположенных в одной из вершин квадрата со стороны остальных одноименных зарядов q. Обозначим эти силы соответственно через F_1, F_2 и F_3. Направления этих сил показаны на рис. 211. Очевидно, что

$$F_1 = F_3 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2a^2}.$$

Равнодействующая F этих трех сил $F = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$. Она должна уравновешиваться силой $F' = \frac{2qq'}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$, действующей на рассматриваемый заряд со стороны центрального заряда q'.

Приравнивая правые части последних равенств, получим $q' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) q \approx 0{,}96\ q$, т. е. величина заряда q' зависит только от величины заряда q и вовсе не зависит от размеров стороны квадрата.

422. $q \approx 10^{-8}\ k$.

Р е ш е н и е. На шар действуют три силы: сила электрического поля $F_1 = Eq$, направленная вверх; сила тяжести $P = mg = \rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3 g$

(где ρ_1 — плотность меди), направленная вниз; выталкивающая сила масла $F_2 = \rho_2 \frac{4}{3} \pi r^3 g$ (где ρ_2 — плотность масла), направленная вверх. В равновесии

$$P = F_1 + F_2 \quad \text{или} \quad \rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3 g = Eq + \rho_2 \frac{4}{3} \pi r^3 g,$$

$$\text{откуда } q = \frac{4\pi r^3 g (\rho_1 - \rho_2)}{3E} \approx 10^{-8} \text{ k}.$$

423. $E' = 0$; $E'' \approx 1{,}2 \cdot 10^4$ *в/м*.

Решение. Электрическое поле в центре треугольника создается тремя зарядами. Векторы напряженностей полей E_1, E_2 и E_3, созданных каждым зарядом, показаны на рис. 212, *а*. Так как $q_1 = q_2 = q_3 = q$, то $E_1 = E_2 = E_3$. Напряженность результирующего поля E' в точке 0 равна геометрической сумме векторов E_1, E_2 и E_3. Для определения E' сложим сначала векторы E_1 и E_2 по правилу параллелограмма. Геометрическая сумма векторов E_1 и E_2 — вектор $E_{1,2}$ — показан на рисунке. Так как $E_1 = E_2$ и угол $\alpha = 60°$, то $E_{1,2} = E_1 = E_2$.

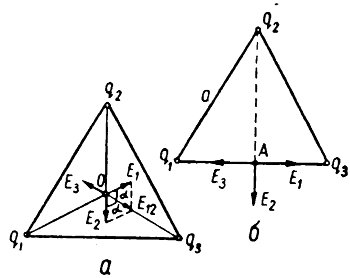


Рис. 212.

Направления векторов E_3 и $E_{1,2}$ противоположны, а величины равны, следовательно, их геометрическая сумма равна нулю: $E' = 0$.

Определим теперь напряженность поля E'' в точке, лежащей на середине одной из сторон (точка A на рис. 212, *б*). Направления векторов E_1, E_2 и E_3 показаны на рисунке. Так как $q_1 = q_3$ и расстояния от этих зарядов до точки A одинаковы, то $E_1 = E_2$, но поскольку эти векторы направлены по одной прямой в противоположные стороны, то их геометрическая сумма равна нулю. Значит, напряженность поля E'' в точке A равна E_2:

$$E'' = E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где r — расстояние от заряда q_2 до точки A. Из рисунка видим, что $r^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$; тогда $E'' = \frac{q_2}{3\pi\varepsilon_0 a^2} \approx 1{,}2 \cdot 10^4$ *в/м*.

424. $\varphi \approx 2{,}7$ *в*.

Решение. Обозначим радиус большой капли через R. Если сливается n капель, то заряд Q большой капли будет равен nq, значит, ее потенциал, учитывая, что $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, равен $\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{nq}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

Радиус большой капли легко можно определить, исходя из того, что объем V большой капли $\left(V = \frac{4}{3}\pi R^3\right)$ равен n объемам малых капель $V = nV_0 = n\frac{4}{3}\pi r^3$. Значит, $R = r\sqrt[3]{n}$; тогда $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sqrt[3]{n^2} \approx 2{,}7$ *в*.

425. Энергия увеличивается в 100 раз.

Решение. До сливания имелось n одинаковых капель радиусом r, заряженных до потенциала φ каждая. Тогда полная энергия системы (без учета энергии взаимодействия капель между собой) определялась суммой энергий отдельных капель, т. е.

$$E_1 = n\frac{C\varphi^2}{2} = n2\pi\varepsilon_0 r\varphi^2.$$

При слиянии n капель в одну ее заряд равняется сумме зарядов всех капель

$$Q = nq = n4\pi\varepsilon_0 r\varphi,$$

энергия

$$E_2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

где $R = r\sqrt[3]{n}$ — радиус большой капли.

Тогда $E_2 = \dfrac{16n^2\pi^2\varepsilon_0^2 r^2\varphi^2}{8\pi\varepsilon_0 r\sqrt[3]{n}} = 2\pi\varepsilon_0 r\varphi^2 n^{\frac{5}{3}}.$

Составляя отношение, получаем

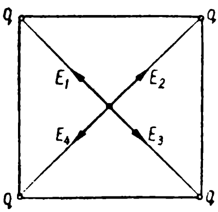


Рис. 213.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{n^{\frac{5}{3}}}{n} = n^{\frac{2}{3}} = 100,$$

т. е. энергия увеличивается в 100 раз.

426. $E = 0$; $\varphi = \dfrac{q\sqrt{2}}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$.

Решение. Легко видеть (рис. 213), что напряженность в центре квадрата равна нулю, так как напряженности, создаваемые зарядами, которые находятся в противоположных вершинах квадрата, равны по величине, но направлены противоположно.

Потенциал, созданный одним зарядом, $\varphi_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, где $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Потенциал — величина скалярная, поэтому потенциал, созданный всеми зарядами, будет в четыре раза больше, т. е. $\varphi = \dfrac{\sqrt{2}q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$.

427. С меньшего шара на больший переместится заряд $q = 0{,}25 \cdot 10^{-8}$ *к*; $\varphi \approx 750$ *в*.

Решение. Определим потенциалы шаров до их соединения. Потенциал первого шара $\varphi_1 = \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \approx 1200$ *в*. Потенциал второго шара $\varphi_2 = \dfrac{Q_2}{C_2} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \approx 600$ *в*. При соединении шаров проводником на его концах будет разность потенциалов, причем конец, соединенный с меньшим шаром, будет находиться под более высоким потенциалом, и поэтому заряды будут перемещаться от меньшего шара к большему до тех пор, пока потенциалы шаров не сравняются. Обозначим через q заряд, перешедший от меньшего шара к большему до выравнивания потенциалов шаров. Тогда потенциал малого шара будет $\varphi_1' = \frac{Q_1 - q}{C_1}$, а потенциал большого шара $\varphi_2' = \frac{Q_2 + q}{C_2}$. Поскольку эти потенциалы одинаковы, то

$$\frac{Q_1 - q}{C_1} = \frac{Q_2 + q}{C_2} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{2}{3} \cdot 10^{-8} - q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0{,}05} = \frac{10^{-8} + q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0{,}15},$$

$$\text{откуда} \quad q = 0{,}25 \cdot 10^{-8}\ k.$$

Общий потенциал шаров будет $\varphi \approx 750$ *в*.

428. Решение. В пространстве внутри сферической поверхности, заряженной до потенциала $+ 1000$ *в*, все точки имеют один и тот же потенциал ($+ 1000$ *в*). Шарик, подносимый к внутренней поверхности сферы, будет иметь потенциал $+ 1001$ *в*, поскольку при перенесении шарика была выполнена работа, увеличившая ее потенциал на 1000 *в*.

429. $q_1 = 0{,}8 \cdot 10^{-7}\ k$; $q_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-7}\ k$.

Решение. После соединения шаров проволокой их потенциалы выравниваются. Часть заряда с шара радиусом r перейдет на шар радиусом R. Обозначив через q_1 заряд, оставшийся на шаре радиусом r, а через q_2 — заряд, полученный шаром, радиусом R, можно записать:

$$q_1 = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 r \text{ и } q_2 = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 R, \text{ откуда } \frac{q_1}{q_2} = \frac{r}{R} \text{ или}$$

$$\frac{q_1}{q_1 + q_2} = \frac{r}{r + R}.$$

Отсюда $q_1 = \frac{r}{r + R}(q_1 + q_2) = 0{,}8 \cdot 10^{-7}\ k$.

Поскольку $q_1 + q_2 = q$, то $q_2 = q - q_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-7}\ k$.

430. $A \approx 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ *дж*.

Решение. Работу определим по формуле $A = q(\varphi_2 - \varphi_1)$, где q — данный заряд, φ_2 — потенциал в точке, находящейся на расстоянии 15 *см* от шара, φ_1 — потенциал в точке, находящейся от шара на расстоянии 55 *см*. Для определения потенциалов φ_1 и φ_2 надо найти заряд шара $Q = C\varphi = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi$.

Считая заряд шара расположенным в его центре, находим работу

$$A = q\left(\frac{R\varphi}{R + l_2} - \frac{R\varphi}{R + l_1}\right) = qR\varphi\left(\frac{1}{R + l_2} - \frac{1}{R + l_1}\right) \approx 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{дж}.$$

431. $A \approx -8{,}1 \cdot 10^{-7}$ *дж*.

Решение. Предположим, что заряд q_1 неподвижен, а заряд q_2 перемещается (рис. 214). Тогда $A = q_2(\varphi_1 - \varphi_2)$, где φ_1 — потенциал той точки поля, где вначале был заряд q_2; φ_2 — потенциал той точки, в которой заряд q_2 оказался.

Однако

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}\ ;\ \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}, \text{ тогда } A = q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}\right) =$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \approx -8{,}1\cdot 10^{-7}\ \textit{дж.}$$

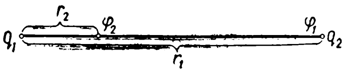


Рис. 214.

Знак минус показывает, что работа совершена внешними силами против сил электрического поля, в результате чего потенциальная энергия электрического поля увеличилась.

432. $F \approx 0{,}09$ *н.*

Решение. Из формулы периода колебаний маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ определим ускорение свободного падения $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Если шар поместили в электрическое поле, то период колебаний и величина ускорения изменились:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}\ ;\quad g_1 = \frac{4\pi^2 l}{T_1^2}.$$

Сопоставив полученные значения g и g_1, получим $g_1 = \frac{T^2}{T_1^2}g$, а изменение ускорения составит $\Delta g = g_1 - g = g\left(\frac{T^2}{T_1^2} - 1\right)$. Тогда сила электрического действия поля на шар $F = m\Delta g = mg\left(\frac{T^2}{T_1^2} - 1\right) \approx$ $\approx 0{,}09$ *н*.

433. Решение. При соединении двух заряженных шаров проволокой заряды перемещаются от шара с большим потенциалом до шара с меньшим потенциалом до тех пор, пока потенциалы шаров не будут одинаковыми. Обозначим потенциал шаров через $\varphi = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)}$.

Заряды на шарах после их соединения будут

$$q_1' = C_1\varphi = 4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi;\quad q_2'' = C_2\varphi = 4\pi\varepsilon_0 R_2\varphi.$$

Считаем, что шары находятся друг от друга на большом расстоянии и их емкости равны:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \text{ и } C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2.$$

Плотности зарядов на шарах будут

$$\sigma_1 = \frac{q_1'}{S_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi}{4\pi R_1^2}\ ;\quad \sigma_2 = \frac{q_2''}{S_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2\varphi}{4\pi R_2^2}, \text{ откуда}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \text{ или } \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2,$$

т. е. плотности зарядов на шарах обратно пропорциональны их радиусам.

434. $h \approx 21$ *см.*

Решение. Поскольку после соприкосновения потенциалы шаров одинаковые, то, обозначая через φ общий потенциал, а через q_1 и q_2 соответственно заряды на шарах радиусами r и R, получим

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}, \text{ откуда } q_1 = \frac{r}{R} q_2.$$

Общий заряд шаров $q = q_1 + q_2$. Подставив значение q_1, получим

$$q = \frac{r}{R} q_2 + q_2 = q_2\left(\frac{r}{R} + 1\right), \text{ откуда } q_2 = \frac{R}{R+r} q = 10^{-7} \ k.$$

Значит, $q_1 = q - q_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-7}$ k.

Теперь определим высоту, на которой находится верхний шар. Для этого приравниваем вес этого шара и силу Кулона:

$$mg = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 h^2}, \text{ откуда } h = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 mg}} \approx 0{,}21 \ \text{м} = 21 \ \text{см}.$$

435. $n \approx 2062$ электрона.

Решение. Поскольку пылинка находится в состоянии покоя в пространстве между пластинами конденсатора, то сумма всех действующих на нее сил должна быть равна нулю. На пылинку действуют две силы: сила веса P и сила электрического поля, так что $F = P$. Обозначив заряд пылинки через q, можно записать $F = qE$, где $E = \frac{\varphi}{d}$ — напряженность поля конденсатора. Тогда $q \frac{\varphi}{d} = P$, откуда $q = \frac{Pd}{\varphi} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-16} k$. Число электронов на пылинке $n = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-16}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \approx$ ≈ 2062.

436. $C_1 = 2\pi\varepsilon_0 R$.

Решение. Поскольку расстояние между шарами значительно больше радиуса, то можно считать, что присутствие одного шара не влияет на заряд и потенциал второго. Потенциалы шаров:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}; \quad \varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Емкость шаров одинакова и равна $C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R$. Разность потенциалов между шарами $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Тогда емкость системы двух шаров $C_1 = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 2\pi\varepsilon_0 R$, т. е. емкость этой системы вдвое меньше емкости одного шара.

437. $q_1 = 10^{-5}$ k; $q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ k; $q_3 = 6 \cdot 10^{-6}$ k.

Решение. Так как тока в цепи нет, то сумма напряжений на конденсаторах $U_1 + U_2$ равна э.д.с. E, где U_1 — напряжение на конденсаторе C_1, U_2 — напряжение на конденсаторах C_2 и C_3. Выразим напряжения на конденсаторах через их заряды и емкости:

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1}; \quad U_2 = \frac{q_2 + q_3}{C_2 + C_3}$$

(так как конденсаторы C_2 и C_3 соединены параллельно). Общее напряжение

$$U_1 + U_2 = E, \text{ тогда } E = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2 + q_3}{C_2 + C_3}; \text{ однако } q_1 = q_2 + q_3,$$

$$\text{поэтому } E = q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} \right), \text{ откуда } q_1 = \frac{EC_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 10^{-5}\, k;$$

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = 10\ в; \quad U_2 = E - U_1 = 2\ в; \quad q_2 = C_2 U_2 = 4 \cdot 10^{-6}\ k;$$

$$q_3 = C_3 U_2 = 6 \cdot 10^{-6}\ k.$$

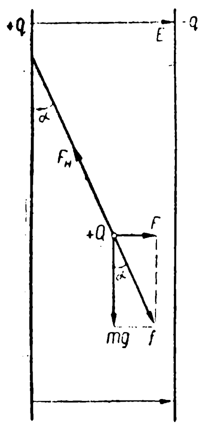


Рис. 215.

438. $\alpha \approx 6°36'$.

Решение. На заряженный шарик, помещенный между обкладками конденсатора (рис. 215), действуют три силы: сила тяжести mg, сила натяжения нити $F_н$ и сила $F = QE$ со стороны электрического поля. Шарик будет в равновесии, если равнодействующая всех приложенных к нему сил равна нулю. Для этого необходимо, чтобы равнодействующая сил F и mg была направлена вдоль нити и уравновешивалась силой натяжения нити $F_н$. При этом условии

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg} = \frac{QE}{mg}.$$

В поле плоского конденсатора

$$E = \frac{U}{d}, \text{ но } U = \frac{q}{C},$$

$$\text{где } C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}; \text{ тогда } E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

(т. е. напряженность поля между обкладками плоского конденсатора не зависит от расстояния между обкладками; величина напряженности определяется только зарядом обкладок и их площадью).

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{qQ}{\varepsilon_0 S m g} \approx 0{,}1153; \quad \alpha \approx 6°36'.$$

Следует подчеркнуть, что угол отклонения нити зависит от заряда, приходящегося на единицу площади обкладки $\left(\frac{q}{S}\right)$, т. е. от поверхностной плотности заряда на обкладках.

439. $n \approx 315$.

Р е ш е н и е. Листы станиоля соединяются друг с другом (рис. 216) так, что все нечетные представляют собой одну обкладку конденсатора, а все четные — другую. Поскольку при этом все листы станиоля, кроме внешних, заряжаются с обеих сторон, емкость системы n листов равняется емкости $(n-1)$ параллельно соединенных конденсаторов:

$$C = (n-1)\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \text{ откуда } n = \frac{dC}{\varepsilon_0 \varepsilon S} + 1 \approx 315.$$

440. $\Delta d = 2$ *мм*.

Р е ш е н и е. До погружения в керосин емкость конденсатора была $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$. Погруженный до половины в керосин конденсатор можно рассматривать как два параллельно соединенных конденсатора с площадью пластин $\frac{1}{2}S$. Пусть после погружения конденсатора до половины в керосин пришлось раздвинуть пластины до некоторой величины d_1, чтобы емкость осталась неизменной. Тогда емкость конденсатора после погружения в керосин будет $\frac{\varepsilon_0 S}{2d_1} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2d_1}$, где ε — диэлектрическая проницаемость керосина. По условию задачи емкость после погружения не изменилась, т. е.

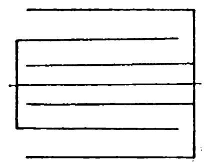


Рис. 216.

$$\frac{\varepsilon_0 S}{2d_1} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2d_1} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \text{ откуда } d = \frac{2d_1}{\varepsilon + 1} \text{ или } d_1 = \frac{d}{2}(\varepsilon + 1) = 6 \text{ мм}.$$

Значит, пластины надо раздвинуть на $\Delta d = d_1 - d = 2$ *мм*.

441. $A_{1,2} \approx 32{,}7 \cdot 10^{-7}$ *дж*.

Р е ш е н и е. Пусть шар неподвижен, а заряд q перемещается в поле шара из положения *1* в положение *2*. Работа перемещения заряда $A_{1,2} = q(\varphi_2 - \varphi_1)$, где φ_1 и φ_2 — потенциалы в точках *1* и *2* поля, созданного заряженным шаром.

Поскольку точка *1* отстоит от центра шара на расстоянии $r_1 = a_1 + R$, а точка *2* — на расстоянии $r_2 = a_2 + R$, то

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (a_1 + R)} \text{ и } \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (a_2 + R)}.$$

Заряд Q можно определить по известному потенциалу шара φ и емкости $C = 4\pi\varepsilon_0 R$:

$$Q = C\varphi = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 R, \text{ тогда } A_{1,2} = qR\varphi\left(\frac{1}{a_2 + R} - \frac{1}{a_1 + R}\right) \approx$$

$$\approx 32{,}7 \cdot 10^{-7} \text{ дж}.$$

442. $U = 5040$ *в*.

Р е ш е н и е. Напряжение, приложенное к батарее последовательно соединенных конденсаторов, равно сумме напряжений на конденсаторах $U = U_1 + U_2$. При этом напряжения распределяются обратно пропорционально емкости, так как $C_1U_1 = C_2U_2 = q$, где q — заряд одной из обкладок. Отсюда

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}; \quad U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2}.$$

При одинаковой изолирующей прокладке между обкладками конденсатора большая напряженность поля возникает в конденсаторе с меньшей емкостью и он пробивается первым. Пробой происходит при $U_1 = Ed = 1{,}8 \cdot 10^6$ *в/м* $\cdot\ 2 \cdot 10^{-3}$ *м* $= 3600$ *в*.

Тогда искомое значение U будет

$$U = U_1 + \frac{C_1}{C_2} U_1 = U_1 \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) = 5040 \text{ в}.$$

443. $D \approx 1{,}53 \cdot 10^{-6}$ *м*.

Решение. Чтобы заряженная капля масла находилась в равновесии, необходимо, чтобы сила $F = eE$, действующая на каплю со стороны электрического поля вертикально вверх, была равна весу капли $P = mg$, т. е.

$$mg = eE, \text{ где } m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \rho \frac{1}{6} \pi D^3; \quad E = \frac{U}{d}.$$

Следовательно, $\frac{1}{6} \pi\rho D^3 g = e \frac{U}{d}$, откуда $D = \sqrt[3]{\frac{6eU}{\pi\rho g d}} \approx$ $\approx 1{,}53 \cdot 10^{-6}$ *м*.

444. $s_2 = 1$ *см*.

Решение. Сила, с которой электрическое поле действует на заряженное тело, равна $F = qE$. Эта сила создает ускорение согласно второму закону динамики: $F = ma$. Значит, $ma = qE$ и $a = \frac{qE}{m}$. Поэтому ускорение, с которым движется протон в однородном поле, созданном между пластинами конденсатора, равно $a_1 = \frac{q_1E}{m_1}$, а для α-частицы $a_2 = \frac{q_2E}{m_2}$, где m_1 и m_2 — массы соответственно протона и α-частицы, а q_1 и q_2 — их заряды. Однако $m_2 = 4m_1$ и $q_2 = 2q_1$. Тогда $a_2 = \frac{2q_1E}{4m_1} = \frac{q_1E}{2m_1}$, т. е. $a_2 = \frac{1}{2} a_1$. Пути, пройденные протоном и α-частицей за время t, соответственно

$$s_1 = \frac{a_1t^2}{2} \quad \text{и} \quad s_2 = \frac{a_2t^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1t^2}{2}, \text{ т. е. } s_2 = \frac{1}{2} s_1.$$

Таким образом, когда протон достигнет отрицательной пластины конденсатора, α-частица пройдет только половину расстояния между пластинами, т. е. будет находиться на расстоянии 1 *см* от каждой из пластин.

445. $t \approx 7{,}8 \cdot 10^{-9}$ *сек*.

Решение. Так как заряды электрона и протона по величине одинаковы, то на них со стороны поля действуют одинаковые силы

$F = eE = e\dfrac{U}{d}$. Под действием сил частицы движутся в противоположных направлениях с ускорениями, обратно пропорциональными массам частиц, в результате чего до встречи они пройдут расстояния

$$s_п = \frac{a_п t^2}{2} \text{ и } s_э = \frac{a_э t^2}{2}, \text{ где } a_п = \frac{e}{m_п} \cdot \frac{U}{d} \text{ и } a_э = \frac{e}{m_э} \cdot \frac{U}{d}.$$

Поэтому $s_п = \dfrac{e}{m_п} \cdot \dfrac{U}{d} \cdot \dfrac{t^2}{2}$ и $s_э = \dfrac{e}{m_э} \cdot \dfrac{U}{d} \cdot \dfrac{t^2}{2}$.

По условию

$$s_п + s_э = d \text{ или } t^2 \cdot \left(\frac{e}{m_п} \cdot \frac{U}{2d} + \frac{e}{m_э} \cdot \frac{U}{2d}\right) = d, \text{ откуда}$$

$$t = d\sqrt{\frac{2m_п m_э}{eU(m_п + m_э)}} \approx 7{,}8 \cdot 10^{-9} \text{ сек.}$$

446. $v \approx 5{,}25 \cdot 10^5$ *м/сек.*

Решение. Будем рассматривать один протон как неподвижный, а второй — движущийся к первому. Силы отталкивания между протонами вызывают замедленное движение второго протона. Его скорость будет меняться от искомой величины v до нуля. Кинетическая энергия протона в момент остановки также станет равной нулю. Работа против сил поля будет производиться за счет кинетической энергии протона, поэтому $\dfrac{mv^2}{2} = e(\varphi_2 - \varphi_1)$, где e — заряд протона, а φ_2 и φ_1 — потенциалы точек поля, создаваемого неподвижным протоном, в которых находился второй протон соответственно в конце и начале пути, рассматриваемого в задаче.

Однако $\varphi_1 = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$, $\varphi_2 = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$.

Тогда $\dfrac{mv^2}{2} = e\left(\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_1}\right)$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{e^2(r_1 - r_2)}{2\pi m\varepsilon_0 r_1 r_2}} \approx 5{,}25 \cdot 10^5 \text{ м/сек.}$$

447. Решение. Согласно первой схеме конденсаторы C_1 и C_2, а также C_3 и C_4 соединены между собой параллельно, поэтому их емкость $C' = C_1 + C_2$ и $C'' = C_3 + C_4$.

Емкости же C' и C'' соединены между собой последовательно, поэтому можно записать:

$$\frac{1}{C_I} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4}, \text{ откуда } C_I = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Согласно второй схеме $C' = \dfrac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}$ и $C'' = \dfrac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}$.

Тогда

$$C_{II} = \frac{C_1C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2C_4}{C_2 + C_4} = \frac{(C_2 + C_4)\,C_1C_3 + (C_1 + C_3)\,C_2C_4}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}.$$

Если $\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}$ и $C_3 = kC_1$ и $C_4 = kC_2$, то

$$C_I = \frac{(C_1 + C_2)^2 k}{(C_1 + C_2)(1 + k)} = \frac{(C_1 + C_2)\,k}{1 + k};$$

$$C_{II} = \frac{kC_1^2}{C_1(1 + k)} + \frac{kC_2^2}{C_2(1 + k)} = \frac{(C_1 + C_2)\,k}{1 + k}.$$

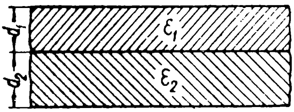


Рис. 217.

Следовательно, в этом случае $C_I = C_{II}$.

448. $C = \varepsilon_0 S \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}$.

Решение. Конденсатор, заполненный двумя слоями различных диэлектриков (рис. 217), можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора. Значит

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_2 S} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right),$$

$$\text{откуда } C = \varepsilon_0 S \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}.$$

449. $U_к \approx 19$ *в*; $t = 3 \cdot 10^{-8}$ *сек*.

Решение. Электрон, двигаясь в направлении силовых линий поля, должен выполнять работу против силы поля, тормозящей его движение. Электрон будет двигаться до тех пор, пока полностью не израсходуется запас кинетической энергии. Поэтому, приравнивая кинетическую энергию электрона к величине той работы, какую он выполнит против сил поля, $\frac{mv^2}{2} = eU$, определим разность потенциалов U, которую электрон пройдет в поле конденсатора:

$$U = \frac{m}{e} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

По условию задачи известна длина пути s, на которой происходит торможение электрона до его полной остановки. Отсюда можно определить напряженность поля конденсатора:

$$E = \frac{U}{s} = \frac{m}{e} \cdot \frac{v^2}{2s}.$$

Зная напряженность однородного поля конденсатора E и расстояние между пластинами d, найдем разность потенциалов на пластинах конденсатора $U_к = dE = \frac{m}{e} \cdot \frac{v^2 d}{2s} \approx 19$ *в*.

Время движения электрона до остановки определим из закона пути и скорости:

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} \text{ и } v_t = v_0 - at = 0, \text{ откуда } s = \frac{v_0 t}{2},$$

$$\text{а } t = \frac{2s}{v_0} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ сек.}$$

450. $U = 150$ *в*.

Р е ш е н и е. Разложим начальную скорость электрона на две составляющие: v_{0x} — скорость вдоль пластин и v_{0y} — скорость, перпендикулярную к пластинам (рис. 218). Очевидно, v_x при движении электрона внутри конденсатора не изменяется (в этом направлении силы не действуют); v_y изменяется и может стать равной нулю (при соответствующем значении напряженности поля между пластинами) за время пролета электрона в конденсаторе. Тогда электрон после выхода из конденсатора будет двигаться со скоростью $v_x = v_{0x}$, т. е. параллельно пластинам. Можно записать: $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$; $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$; $v_y = v_{0y} - at$; $v_x = v_{0x}$. Скорость v_y будет равна нулю при

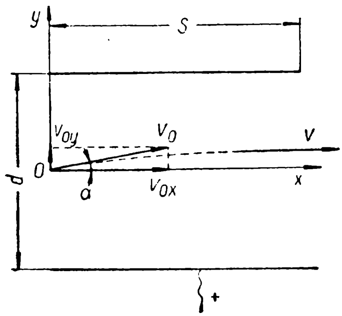


Рис. 218.

$$a = \frac{v_{0y}}{t} = \frac{v_0 \sin\alpha}{t}, \tag{1}$$

где t — время движения электрона между пластинами. При этом

$$t = \frac{s}{v_x} = \frac{s}{v_0 \cos\alpha}. \tag{2}$$

Согласно второму закону динамики

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}, \tag{3}$$

где E — напряженность поля, e — заряд электрона; U — разность потенциалов между пластинами. Подставим в уравнение (1) значение t из уравнения (2) и приравняем (1) и (3):

$$\frac{eU}{md} = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{s}, \text{ откуда } U = \frac{mv_0^2 \sin 2\alpha d}{2es}. \tag{4}$$

Подставив значение $\frac{mv_0^2}{2} = E_к$ в формулу (4), получим

$$U = \frac{E_к d \sin 2\alpha}{es}.$$

Расчет проведем, приняв за единицу энергии 1 *эв*; тогда $e = 1$ электрон, $U = 150$ *в*.

451. Решение. Отклонение частиц будет зависеть от ускорения, сообщаемого электростатической силой взаимодействия, и времени движения частиц в поле конденсатора:

$$s = \frac{at^2}{2}; \quad a_1 = \frac{q_1 E}{m_1}; \quad a_2 = \frac{q_2 E}{m_2},$$

где q_1 и q_2 — заряды частиц, m_1 и m_2 —массы частиц.

Время движения частиц в поле $t = \frac{l}{v}$, где l — длина пластин, v — скорость частицы, полученная в ускоряющем поле с разностью потенциалов U. Скорость частиц определяем из условия, что работа поля, совершенная при ускорении частиц, равна кинетической энергии, приобретенной частицами, т. е.

$$qU = \frac{mv^2}{2}, \text{ откуда } v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}; \text{ тогда } t = \frac{l}{\sqrt{\frac{2qU}{m}}}.$$

Отклонение первой частицы $s_1 = \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{El^2}{4U}$, отклонение второй частицы $s_2 = \frac{El^2}{4U}$. Тогда $\frac{s_1}{s_2} = 1$, т. е. при данных условиях величина отклонения частицы не зависит от ее заряда и массы.

452. $Q \approx 1{,}1 \cdot 10^{-9}$ k; $E = 12\,500$ *в/м*;
$Q_1 \approx 2{,}2 \cdot 10^{-9}$ k; $E_2 = 25\,000$ *в/м*.

Решение. Заряд, сообщаемый конденсатору при зарядке, $Q = CU$, где $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ — емкость плоского конденсатора. Тогда $Q = \frac{\varepsilon_0 SU}{d} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-9}$ k. Напряженность поля конденсатора равняется $E = \frac{U}{d} = 25\,000$ *в/м*. Когда конденсатор залили керосином, его емкость увеличилась $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon s}{d}$, а поскольку заряд конденсатора после отключения батареи остается прежний, то разность потенциалов должна измениться и равна

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{U}{\varepsilon} = 25 \text{ в}.$$

Напряженность поля в конденсаторе тоже уменьшается в два раза:

$$E_1 = \frac{U_1}{d} = 12\,500 \text{ в/м}.$$

Во втором случае емкость конденсатора равна C_1 и его заряд

$$Q_1 = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} U \approx 2{,}2 \cdot 10^{-9} \ k.$$

Разность потенциалов не изменится ($U = 50$ *в*), и напряженность поля будет $E_2 = 25\,000$ *в/м*.

453. Решение. 1. Если конденсатор заряжен и отключен от источника, то заряд на его обкладках q не изменяется. Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$. Так как площадь пластин и диэлектрическая проницаемость не меняются, а d возрастает вдвое ($d_2 = 2d_1$), емкость конденсатора уменьшается вдвое $\left(C_2 = \frac{1}{2} C_1\right)$.

Разность потенциалов U между обкладками зависит от заряда на обкладках q и емкости конденсатора $C: U = \frac{q}{C}$. Так как после раздвижения обкладок емкость уменьшилась вдвое, а заряд остался прежним, то разность потенциалов между обкладками возросла вдвое ($U_2 = 2U_1$). В поле плоского конденсатора $E = \frac{U}{d}$. Поскольку разность потенциалов U между обкладками и расстояние между ними увеличились в одинаковое число раз, то напряженность поля между обкладками не изменилась ($E_1 = E_2$).

2. Если конденсатор подключен к источнику напряжения, разность потенциалов между его обкладками не изменяется. После раздвижения обкладок емкость конденсатора уменьшается вдвое $\left(C_2 = \frac{1}{2} C_1\right)$. Поскольку разность потенциалов не изменяется, а емкость конденсатора уменьшилась вдвое, то и заряд на обкладках уменьшится вдвое $\left(q_2 = \frac{1}{2} q_1\right)$.

Напряженность электрического поля тоже уменьшится вдвое:

$$E_2 = \frac{U}{d_2} = \frac{U}{2d_1} = \frac{1}{2} E_1.$$

454. $\varepsilon = 4{,}5$.

Решение. Поскольку конденсатор после зарядки отключен от источника напряжения, то заряд конденсатора не изменяется и энергию конденсатора удобно записать так: $E = \frac{q^2}{2C}$. При вытягивании диэлектрика емкость конденсатора уменьшается, а его энергия увеличивается за счет работы по вытягиванию диэлектрика. Поэтому величина выполненной работы будет

$$A = E_1 - E = \frac{q^2}{2C_1} - \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C}\left(\frac{C}{C_1} - 1\right).$$

Однако $\frac{q^2}{2C} = E$, $\frac{C}{C_1} = \varepsilon$; тогда $A = E(\varepsilon - 1)$, откуда

$$\varepsilon = 1 + \frac{A}{E} = 4{,}5.$$

455. $v \approx 1{,}6 \cdot 10^6$ *м/сек.*

Решение. Сила электрического взаимодействия электрона с ядром должна обеспечить необходимую центростремительную силу, т. е.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \text{ откуда } v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi m \varepsilon_0 r}} \approx 1{,}6 \cdot 10^6 \text{ м/сек}.$$

456. $R \approx 1$ *м.*

Решение. Вокруг заряженной сферы существует электрическое поле. Кинетическая энергия, которой обладает металлический шарик, расходуется на выполнение работы против сил взаимодействия электрического поля сферы и заряда шарика:

$$\frac{mv^2}{2} = q\varphi, \text{ где } \varphi = \frac{Q}{C}.$$

Емкость заряженной сферы $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, где R — радиус сферы. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}, \text{ откуда } R = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mv^2} \approx 1 \text{ м.}$$

457. $t = \dfrac{mv^2C}{2ne^2}$.

Решение. Вследствие эмиссии электронов с внутренней сферы растет заряд внешней сферы и соответственно увеличивается напряженность электрического поля между сферами. Сила электрического поля между сферами действует против направления движения электронов и тормозит их движение. Условием прекращения увеличения заряда на сфере есть равенство кинетической энергии электрона работе по перемещению электрона в электрическом поле:

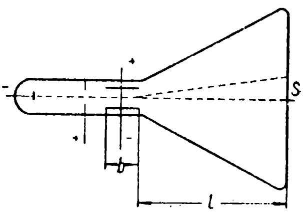


Рис. 219.

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Однако $U = \dfrac{Q}{C}$, где $Q = net$ — величина заряда сферы.

$$\text{Тогда } \frac{mv^2}{2} = e\frac{net}{C} = \frac{ne^2t}{C}, \text{ откуда } t = \frac{mv^2C}{2ne^2}.$$

458. $C \approx 5{,}5 \cdot 10^{-11}$ *ф.*

Решение. Поскольку заряд электрометра не изменяется, то можно записать:

$$Q = C\varphi \text{ и } Q = (C + C_1)\varphi_1,$$

где C — емкость электрометра, C_1 — емкость конденсатора.

$$\text{Отсюда } C\varphi = (C + C_1)\varphi_1 \text{ или } C = \frac{C_1\varphi_1}{\varphi - \varphi_1} \approx 5{,}5 \cdot 10^{-11} \text{ ф.}$$

459. $v \approx 1{,}58 \cdot 10^7$ *м/сек.*

Решение. Электрическое поле между пластинами конденсатора (рис. 219) действует в вертикальном направлении и, значит, не может изменить движение электрона в горизонтальном направлении вдоль пластин. В горизонтальном направлении на электрон не действует сила, поэтому он будет двигаться равномерно со скоростью v, с которой он влетает в конденсатор. Отсюда можно определить эту скорость $v = \dfrac{b}{t}$, где t — время пролета электрона через конденсатор.

В вертикальном направлении на электрон действует сила $F = eE = e\frac{U}{d}$, сообщающая электрону ускорение $a = \frac{F}{m} = \frac{eU}{md}$.

Поскольку в вертикальном направлении движение будет равноускоренным без начальной скорости, то за время t в этом направлении будет пройден путь

$$x = \frac{at^2}{2} = \frac{eUt^2}{2md}, \text{ откуда } t = \sqrt{\frac{2mdx}{eU}}.$$

Из рисунка видим, что

$$\frac{x}{s} = \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b + l} \quad \text{или} \quad x = \frac{\frac{1}{2}bs}{\frac{1}{2}b + l};$$

$$\text{тогда } t = \sqrt{\frac{mdbs}{eU\left(\frac{1}{2}b + l\right)}}.$$

Подставив значение t в формулу $v = \frac{b}{t}$, получим

$$v = \sqrt{\frac{eUb\left(\frac{1}{2}b + l\right)}{mds}} \approx 1{,}58 \cdot 10^7 \text{ м/сек.}$$

§ 2. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

460. $q \approx 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ *k*.

Решение. Если конденсатор находится в воздухе ($\varepsilon_1 = 1$), его заряд

$$q_1 = EC = E\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}{d}.$$

При погружении конденсатора в керосин его заряд изменился:

$$q_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 ES}{d}.$$

Изменение заряда $q_2 - q_1 = \frac{\varepsilon_0 ES}{d}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \approx 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ *k*.

Значит, по проводникам пройдет $2{,}5 \cdot 10^{-10}$ *k*.

461. $A \approx 8{,}85 \cdot 10^{-7}$ *дж*.

Решение. Если при внесении металлической пластины по цепи проходит заряд Q, то энергия, расходуемая аккумулятором, равна $A = QE$. Заряд Q определим по изменению емкости конденсатора:

$$Q = E(C_1 - C_0).$$

После внесения металлической пластины образуется два конденсатора, соединенных последовательно. Их общую емкость C_1 определим по формуле

$$\frac{1}{C_1}=\frac{1}{C'}+\frac{1}{C''}=\frac{d'}{\varepsilon_0 S}+\frac{d''}{\varepsilon_0 S}=\frac{d-d_1}{\varepsilon_0 S}, \text{ откуда } C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{d-d_1}.$$

Тогда $Q=E\varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d-d_1}-\frac{1}{d}\right)=\frac{ESd_1\varepsilon_0}{d(d-d_1)}$;

$$A=\frac{E^2Sd_1\varepsilon_0}{d(d-d_1)}\approx 8{,}85\cdot 10^{-7}\ \text{дж}.$$

462. $I\approx 3{,}34\cdot 10^{-7}$ *а*.

Решение. Для определения силы тока $I=\frac{\Delta Q}{t}$ надо вычислить изменение заряда ΔQ, происходящее при вдвижении стеклянной пластинки. Изменение заряда конденсатора определим из изменения его емкости:

$$\Delta Q=E(C_1-C_0)=E\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}-\frac{\varepsilon_0 S}{d}\right)=\frac{\varepsilon_0 SE}{d}(\varepsilon-1),$$

где $S=a^2$ — площадь пластины.

Тогда $I=\frac{\varepsilon_0 a^2 E}{dt}(\varepsilon-1)$. Однако $\frac{a}{t}=v$ — скорость вдвижения пластинки. Значит,

$$I=\frac{\varepsilon_0 avE}{d}(\varepsilon-1)\approx 3{,}34\cdot 10^{-7}\ a.$$

463. $I\approx 1{,}67\cdot 10^{-10}$ *а*.

Решение. Сила тока $I=\frac{\Delta Q}{t}$, но $\Delta Q=E(C-C')=$

$$=E\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}-\frac{\varepsilon_0 S}{d}\right)=\frac{\varepsilon_0 SE(\varepsilon-1)}{d};$$

тогда $I=\frac{\varepsilon_0 SE(\varepsilon-1)}{dt}\approx 1{,}67\cdot 10^{-10}$ *а*.

464. $v\approx 0{,}0226$ *см/сек*.

Решение. Искомая скорость вытекания керосина $v=\frac{l}{t}$, где l — длина пластины, t — время вытекания керосина. С целью определения времени вытекания керосина запишем выражение для силы тока в цепи через количество электричества ΔQ, прошедшее при этом по цепи:

$$I=\frac{\Delta Q}{t}, \text{ откуда } t=\frac{\Delta Q}{I}.$$

Количество электричества ΔQ равно разности зарядов на конденсаторе до и после вытекания керосина:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = E\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} - E\frac{\varepsilon_0 S}{d} = E\frac{\varepsilon_0 S}{d}(\varepsilon - 1).$$

Подставив значение ΔQ в формулу для t, получим

$$t = \frac{ES\varepsilon_0}{dI}(\varepsilon - 1).$$

Теперь искомая скорость вытекания $v = \frac{dIl}{ES(\varepsilon - 1)\varepsilon_0} \approx 0{,}0226$ *см/сек.*

465. $R'_x = 100$ *ом*; $R''_x = 700$ *ом.*

Решение. Определим силу тока I, отвечающую наибольшему отклонению стрелки гальванометра: $I = CN = 0{,}02$ *а*. Напряжение U на клеммах гальванометра (между точками C и D, рис. 220) $U = IR = 0{,}02$ *а* $\cdot$ 50 *ом* $= 1$ *в*.

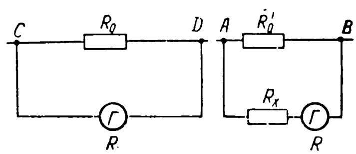


Рис. 220.

Значит, гальванометр без добавочного сопротивления может служить вольтметром с пределом измерения $U = 1$ *в* (цена его деления $C_1 = 10^{-2}$ *в/дел*).

Рассчитаем такое добавочное сопротивление R_x, при наличии которого гальванометр может служить вольтметром для измерения напряжений до U_1, которые в n раз больше U (между точками A и B). Напряжение $U_1 = nU$ имеет значение $U_1 = I(R + R_x)$. Предельная сила тока через гальванометр должна быть прежней; тогда

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R + R_x}{R} \quad \text{или} \quad n = \frac{R + R_x}{R}, \text{ откуда } R_x = (n - 1)R.$$

Находим n_1 для первого предела измерений ($U'_1 = 3$ *в*): $n_1 = \frac{U_1}{U} = 3$. Тогда $R'_x = (3 - 1)\,50$ *ом* $= 100$ *ом.*

Находим n_2 и R''_x для второго предела измерений ($U''_1 = 15$ *в*): $n_2 = 15$ и $R''_x = 700$ *ом.*

466. $R'_{ш} = 8$ *ом*; $R''_{ш} = 3$ *ом.*

Решение. При подключении к гальванометру шунта для токов, проходящих по гальванометру и шунту, можно записать:

$$\frac{I_г}{I_ш} = \frac{R_ш}{R_г} \quad \text{или} \quad \frac{I_г}{I_г + I_ш} = \frac{R_ш}{R_ш + R_г}, \text{ где } I_г + I_ш = I.$$

Максимальный ток, который может проходить по гальванометру, $I_т = CN = 3 \cdot 10^{-2}$ *а*.

Для измерения силы тока до 0,3 *а* надо подключить шунт сопротивлением $R'_ш$, величину которого определим из уравнения $\frac{0{,}03}{0{,}3} = \frac{R'_ш}{72 + R'_ш}$, откуда $R'_ш = 8$ *ом*.

Аналогично для предела измерения 0,75 *а* определим $R''_ш = 3$ *ом*.

467. $I = 2{,}375$ *а*; пределы измерения от 0 до 2,97 *а*.

Решение. Силы токов, текущих через миллиамперметр и шунтирующий проводник, обратно пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{I - I_а}{I_а} = \frac{R_а}{R_ш},$$

где I — общий ток, $I_а$ — ток, текущий через амперметр, $R_а$ — сопротивление амперметра, $R_ш = \rho \frac{l}{S}$ — сопротивление проводника.

Отсюда

$$I = I_а\left(1 + \frac{R_а}{\rho l} S\right) = 2{,}375 \ а.$$

Наибольшую силу, которую можно измерить миллиамперметром с шунтом, определим из условия, что при этом по миллиамперметру проходит максимальный ток $I'_а = 25$ *ма*. Тогда

$$I = I'_а\left(1 + \frac{R_а}{\rho l} S\right) \approx 2{,}97 \ а.$$

Значит, миллиамперметром с шунтом можно измерять токи от 0 до 2,97 *а*.

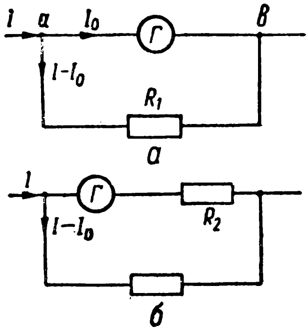


Рис. 221.

468. 1) $R_1 \approx 0{,}555$ *ом*; $C_1 = 1{,}5$ *ма/дел*; 2) $R_2 = 9995$ *ом*; $C_2 = 1{,}5$ *в/дел*.

Решение. 1. По условию при любом включении максимальный ток, проходящий через прибор, не должен превышать $I_0 = 15$ *ма*. Чтобы миллиамперметром с пределом измерения $I_0 = 15$ *ма* можно было измерять токи до $I = 0{,}15$ *а*, параллельно миллиамперметру нужно включить шунт R_1 (рис. 221,*а*). При этом

$$U_{ав} = I_0 r = (I - I_0) R_1; \text{ отсюда } R_1 = \frac{I_0 r}{I - I_0} \approx 0{,}555 \ ом.$$

Цена деления шунтированного прибора $C_1 = \frac{0{,}15 \ а}{100 \ дел} = 1{,}5$ *ма/дел*.

2. При силе тока I_0 падение напряжения на миллиамперметре $U_0 = I_0 r$. Для измерения напряжений U последовательно с прибором необходимо включить добавочное сопротивление R_2 (рис. 221,*б*), падение напряжения на котором $I_0 R_2$. Измеряемое напряжение

$$U = I_0 r + I_0 R_2, \text{ откуда } R_2 = \frac{U - I_0 r}{I_0} = 9995 \ ом.$$

Легко убедиться, что ток, проходящий через прибор, будет

$$I_0 = \frac{U}{R_2 + r} = 15 \text{ } ма,$$

т. е. не превысит максимально допустимого.

Цена деления прибора после включения добавочного сопротивления $C_2 = \frac{150 \text{ } в}{100 \text{ } дел} = 1,5$ *в/дел.*

469. $R_ш \approx 0,11$ *ом.*

Решение. Сопротивление шунта $R_ш = \frac{U_г}{I - I_г}$, где $U_г = I_г r$ — падение напряжения на гальванометре (и шунте), I — общий ток в термопаре, $I_г$ — ток, проходящий по гальванометру.

Ток в термопаре $I = \frac{E - I_г r}{r_0}$, где $E - I_г r$ — падение напряжения на термопаре. Подставив значения $U_г$ и I, получим

$$R_ш = \frac{I_г r_0 r}{E - I_г (r + r_0)} \approx 0,11 \text{ } ом.$$

470. $R_г = 25$ *ом.*

Решение. В первом случае сила тока через гальванометр (рис. 222) определяется по закону Ома для полной цепи:

$$I_г = \frac{E}{R_1 + R_г}. \qquad (1)$$

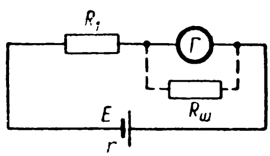


Рис. 222.

Во втором случае

$$\frac{I_г}{I_ш} = \frac{R_ш}{R_г},$$

а полный ток в цепи

$$I = I_г + I_ш = I_г \left(1 + \frac{R_г}{R_ш}\right).$$

Однако, по закону Ома

$$I = \frac{E}{R_2 + \frac{R_г R_ш}{R_г + R_ш}}; \text{ отсюда } I_г =$$

$$= \frac{E}{R_2 + \frac{R_г R_ш}{R_г + R_ш}} \cdot \frac{R_ш}{R_г + R_ш}.$$

Сопоставляя (1) и (2), получим

$$R_г = \frac{R_1 - R_2}{R_2} R_ш = 25 \text{ } ом.$$

471. $R_{доб} = 105,5$ *ом.*

Р е ш е н ие. Определим сначала внутреннее сопротивление амперметра. При подключении шунта

$$\frac{I_а}{I_ш} = \frac{R_ш}{R_а} \quad \text{или} \quad \frac{I_а}{I_а + I_ш} = \frac{R_ш'}{R_а + R_ш}.$$

По условию задачи, если $I_а = 2а$, то общий ток в цепи $I_ш + I_а = 20$ *а.* Тогда $R_а = 4,5$ *ом.*

Чтобы использовать амперметр в качестве вольтметра, измеряющего напряжение до $U = 220$ *в*, к нему надо подключить такое добавочное сопротивление $R_{доб}$, чтобы падение напряжения на амперметре и этом сопротивлении составило 220 *в*. При этом по амперметру будет проходить максимальный ток 2 *а*. Поэтому можно записать:

$$U = I_а\,(r + R_{доб}), \text{ откуда } R_{доб} = \frac{U}{I_а} - r = 105,5 \text{ ом.}$$

472. $E = 12$ *в*; $r = 2$ *ом.*

Р е ш е н и е. По закону Ома в первом случае имеем $U_1 = I_1R_1$, где U_1, I_1 и $R_1 = \frac{R}{2}$ соответственно показания вольтметра, сила тока в цепи и сопротивление разветвления. Для второго случая $U_2 = I_2R$.

Запишем выражение для э. д. с. батареи в первом и втором случаях:

$$E = U_1 + \frac{2U_1}{R}\,r \text{ и } E = U_2 + \frac{U_2}{R}\,r.$$

Поскольку э. д. с. является постоянной величиной, то, приравняв правые части равенств, получим

$$U_1 + \frac{2U_1}{R}\,r = U_2 + \frac{U_2}{R}\,r, \text{ откуда } r = \frac{U_2 - U_1}{2U_1 - U_2}\,R = 2 \text{ ом;}$$

$$\text{тогда } E = 12 \text{ в.}$$

473. $U_1 = 8,5625$ *в*; $U_2 = -0,875$ *в*; $U_3 = -0,375$ *в*; $U_4 = 0,625$ *в*; $U_5 = 0,3125$ *в*.

Р е ш е н и е. Вольтметр, подключенный к полюсам замкнутого источника напряжения, показывает напряжение на его зажимах $U = E - Ir$, где E — э. д. с. источника, I — сила тока в цепи, r — внутреннее сопротивление источника.

Сила тока в цепи $I = \frac{\Sigma E}{R + \Sigma r} = 2,75$ *а.*

Тогда показания каждого вольтметра будут такие:

1) $U_1 = E_1 - Ir_1 = 17,5 \text{ в} - 8,9375 \text{ в} = 8,5625 \text{ в};$
2) $U_2 = E_2 - Ir_2 = 0,5 \text{ в} - 1,375 \text{ в} = -0,875 \text{ в};$
3) $U_3 = E_3 - Ir_3 = 1 \text{ в} - 1,375 \text{ в} = -0,375 \text{ в};$
4) $U_4 = E_4 - Ir_4 = 2 \text{ в} - 1,375 \text{ в} = 0,625 \text{ в};$
5) $U_5 = E_5 - Ir_5 = 1 \text{ в} - 0,6875 \text{ в} = 0,3125 \text{ в}.$

Для второго и третьего элементов ответ получили отрицательный; это значит, что падение напряжения внутри источника больше его э. д. с., т. е. источник не отдает энергии во внешнюю цепь, а сам получает ее. В этом случае потенциал отрицательного полюса источника будет выше положительного, значит, «плюс» вольтметра надо подключить к отрицательному полюсу источника.

474. $r = 0{,}1$ *ом*.

Решение. Поскольку показания вольтметра одинаковые, то падение напряжения на вольтметре в первом случае (последовательное включение) равно падению напряжения на вольтметре и параллельно включенном сопротивлении во втором случае.

Вычислим силу тока и падение напряжения на вольтметре в обоих случаях. Пусть E — э. д. с. аккумулятора, r — его внутреннее сопротивление. Тогда при последовательном включении вольтметра сила тока в цепи

$$I = \frac{E}{R + R_в + r},$$

и падение напряжения на вольтметре

$$U_1 = \frac{E}{R + R_в + r} R_в.$$

При параллельном включении вольтметра сила тока в цепи

$$I = \frac{E}{\dfrac{RR_в}{R + R_в} + r};$$

падение напряжения на вольтметре

$$U_2 = \frac{E}{RR_в + Rr + R_в r} \cdot RR_в.$$

По условию задачи $U_1 = U_2$, т. е.

$$\frac{ER_в}{R + R_в + r} = \frac{ERR_в}{RR_в + Rr + R_в r}, \text{ откуда } R^2 + RR_в + Rr =$$

$$= RR_в + Rr \text{ и } r = \frac{R^2}{R_в} = 0{,}1 \text{ ом}.$$

475. $E = 300$ *в*.

Решение. Накал лампочек будет одинаковым, если через их нити накала будет проходить в обоих случаях одинаковой силы ток. А это значит, что при параллельном включении сила тока в неразветвленной части цепи будет вдвое больше, чем при последовательном включении. Запишем закон Ома для последовательного и параллельного включения лампочек:

$$I = \frac{E}{2R + r} \text{ и } 2I = \frac{E}{\frac{1}{2} R + r}.$$

Решив эти два уравнения, получим $E = 3IR = 300$ *в*.

476. Решение. Ток в цепи будет $I = \dfrac{E}{R_1 + R_2 + r}$. Напряжения, показываемые вольтметрами, будут соответственно $U = E - Ir$;

$U_1 = IR_1$ и $U_2 = IR_2$. При передвижении ползунка влево уменьшается величина сопротивления R_2, а значит, и полное сопротивление цепи. Вследствие этого увеличивается сила тока в цепи. Это ведет к уменьшению показаний вольтметра V и увеличению показаний V_1. Так как $U = U_1 + U_2$, то величина напряжения U_2 должна уменьшаться с такой скоростью, чтобы обеспечить уменьшение U, несмотря на рост U_1.

При решении задачи предполагалось, что сопротивления r, R_1 и R_2 не зависят от силы тока в цепи.

477. $E = 4U_1$.

Решение. Поскольку э. д. с. батареи есть величина постоянная, то, пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, можно записать для первых двух случаев:

$$I_1R + U_1 = E \text{ и } I_2\frac{R}{3} + 2U_1 = E.$$

Если сопротивление R уменьшить до нуля, то вольтметр покажет э. д. с. E батареи. Значит, надо определить E.

Возрастание показаний вольтметра в два раза означает, что через него проходит вдвое большая сила тока. Действительно, можно записать:

$$U_1 = I_1R_\text{в} \text{ и } 2U_1 = I_2R_\text{в},$$

где $R_\text{в}$ — сопротивление вольтметра. Отсюда $I_2 = 2I_1$. Подставив это значение в предыдущие уравнения, получим

$$I_1R + U_1 = E; \quad \frac{2}{3}I_1R + 2U_1 = E.$$

Из этих двух уравнений получим: $E = 4U_1$.

478. $r = 2500$ *ом*; $R_x = 60\,000$ *ом*.

Решение. При соединении вольтметра с источником напряжения через сопротивление R по закону Ома имеем $U = I(R + r)$. Поскольку в этом случае вольтметр показывает напряжение U_1, то сила тока, проходящая по нему, $I = \frac{U_1}{r}$. Подставив это значение I в предыдущую формулу, получим

$$U = \frac{U_1}{r}(R + r) \text{ или } Ur = U_1(R + r).$$

Если вольтметр соединить с сопротивлением R_x, то, выполнив аналогичный расчет, получим

$$Ur = U_2(R_x + r).$$

Решив систему уравнений

$$Ur = U_1(R + r) \text{ и } Ur = U_2(R_x + r),$$

получим

$$r = \frac{U_1R}{U - U_1} = 2500 \text{ ом}; \; R_x = \frac{(U - U_2)U_1R}{U_2(U - U_1)} = 60\,000 \text{ ом}.$$

479. Решение. При размыкании ключа K сопротивление цепи увеличивается, и сила тока, проходящего через амперметр, уменьшается: $I_2 < I_1$. Вследствие уменьшения силы тока, падение напряжения на участке *abc* тоже уменьшится. Значит, на участке *ac* падение напряжения больше, поскольку сумма падений напряжений во всей цепи постоянная и равна э. д. с. Поэтому $U_2 > U_1$.

480. $R' = \dfrac{10R(R_ш + R_г) + 9R_шR_г}{R_ш + R_г}$.

Решение. Находим общее сопротивление системы

$$R_{об} = R + \frac{R_шR_г}{R_ш + R_г}.$$

Значит, когда к зажимам подают напряжение U, то в цепи проходит ток

$$I = \frac{U}{R + \dfrac{R_шR_г}{R_ш + R_г}}.$$

Этот ток разветвляется между гальванометром и шунтом в отношении, обратно пропорциональном их сопротивлениям. Значит, ток в гальванометре

$$I_г = I\frac{R_ш}{R_ш + R_г} = \frac{UR_ш}{R(R_ш + R_г) + R_шR_г}. \qquad (1)$$

По условию задачи эта сила тока дает отклонение стрелки на одно деление, что соответствует 1 *в*. Чтобы отклонение стрелки не изменилось при напряжении U', надо, чтобы сила тока, проходящего через гальванометр, не изменялась. Обозначив величину нового сопротивления, необходимого для этой цели, через R', можно записать:

$$I_г = \frac{U'R_ш}{R'(R_ш + R_г) + R_шR_г}. \qquad (2)$$

Сравнив (1) и (2), получим

$$R' = \frac{RU'(R_ш + R_г) + R_шR_г(U' - U)}{U(R_ш + R_г)}.$$

Если $U = 1$ *в*, $U' = 10$ *в*, то получим

$$R' = \frac{10R(R_ш + R_г) + 9R_гR_ш}{R_ш + R_г}.$$

Задачу можно решить иным способом. Чтобы отклонение стрелки гальванометра не изменилось при увеличении напряжения в n раз (или, иначе, чтобы увеличить цену деления), надо ввести добавочное сопротивление $R_{доб}$ в $(n - 1)$ раз большее, чем сопротивление системы. По условию задачи $n = 10$; тогда

$$R_{доб} = \left(R + \frac{R_шR_г}{R_ш + R_г}\right)9,$$

а измененное сопротивление R' будет равно

$$R' = R_{\text{доб}} + R \text{ или } R' = 10R + \frac{9R_{\text{ш}}R_{\text{г}}}{R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}} =$$

$$= \frac{10R(R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}) + 9R_{\text{ш}}R_{\text{г}}}{R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}}.$$

481. $\frac{I_{\text{в}}}{I} \approx 2.$

Решение. Силу тока, текущего по участку, параллельно которому включен вольтметр, можно определить на основании закона Ома

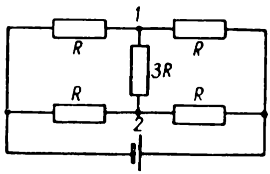


Рис. 223.

$$I = \frac{U_1}{kR}.$$

Аналогично для I_1 запишем

$$I_1 = \frac{U - U_1}{R(1-k)}.$$

Тогда $I_{\text{в}} = I_1 - I = \frac{1}{R}\left(\frac{U - U_1}{1-k} - \frac{U_1}{k}\right)$, а $\frac{I_{\text{в}}}{I} =$

$$= \frac{kU - U_1}{U_1(1-k)} \approx 2.$$

482. Решение. Данную схему удобно представить следующим образом (рис. 223). Вследствие симметрии потенциалы точек 1 и 2 равны, следовательно, ток через сопротивление $3R$ не проходит.

483. $r = \rho\frac{R}{d^2}.$

Решение. Вследствие симметрии фигуры, потенциалы точек C, F, D и E равны между собой, и поэтому кольцо $CDEFC$ не влияет на сопротивление фигуры. Если это кольцо выбросить, то определение сопротивления фигуры сводится к нахождению сопротивления параллельного соединения четырех проводников, длина которых πR, т. е.

$$r = \frac{1}{4}\cdot\rho\cdot\frac{\pi R}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \rho\frac{R}{d^2}.$$

484. $R = \frac{7}{18}\cdot\rho\cdot\frac{l}{S}.$

Решение. Потенциалы точек B и B' равны, поэтому по проводнику BB' ток не проходит и проводник не влияет на сопротивление фигуры. Если проводник BB' выбросить, то полученную фигуру можно рассматривать как параллельное соединение двух одинаковых электрических цепей: $ABCDEF$ и $AB'C'D'E'F$. Определим сопротивление ветви $ABCDEF$. Обозначим сопротивление прута через $r = \rho\frac{l}{S}$;

тогда сопротивление каждой части прута $\frac{1}{3}r$. Сопротивление треугольника BCD будет $\frac{2}{9}r\left(\frac{3}{2r}+\frac{3}{r}=\frac{9}{2r}\right)$. Сопротивление ветви $ABCDEF$:

$$R'=2\cdot\frac{2}{9}r+\frac{1}{3}r=\frac{7}{9}r.$$

Тогда сопротивление всей фигуры $R=\frac{7}{18}r=\frac{7}{18}\rho\frac{l}{S}$.

485. $U=\frac{E_0U_0R_2}{E_0R_2+U_0R_1}$.

Решение. При разомкнутом ключе K вольтметр включен в цепь последовательно и показывает падение напряжения на самом вольтметре:

$$U_0=I_1r_в,$$

где $r_в$ — внутреннее сопротивление вольтметра, I_1 — сила тока в цепи. Однако

$$I_1=\frac{E_0}{R_1+r_в};\ \text{тогда}\ U_0=\frac{E_0r_в}{R_1+r_в}. \qquad (1)$$

При замкнутом ключе K вольтметр будет включен параллельно сопротивлению R_2 и будет показывать падение напряжения на разветвлении, образуемом сопротивлением R_2 и вольтметром:

$$U=I_2\frac{R_2r_в}{R_2+r_в},$$

где $I_2=\dfrac{E_0}{R_1+\dfrac{r_вR_2}{R_2+r_в}}$ — сила тока в неразветвленной части цепи (U является, естественно, падением напряжения на сопротивлении R_2 или на $r_в$, но в этом случае его надо было бы выражать через силу тока, идущего по данному сопротивлению, что несколько усложняет решение).

Тогда

$$U=\frac{E_0R_2r_в}{R_1R_2+r_в(R_1+R_2)}. \qquad (2)$$

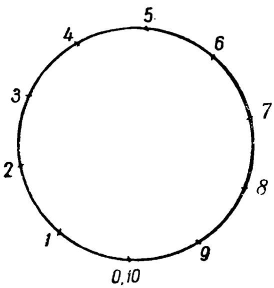
Из (1) определим $r_в=\frac{U_0R_1}{E_0-U_0}$ и подставим в (2), и после преобразований получим

$$U=\frac{E_0U_0R_2}{E_0R_2+U_0R_1}.$$

486. Решение. Возьмем на кольце десять точек на одинаковых расстояниях. Точку O примем за постоянную, к ней присоединим один проводник от омметра. Второй проводник от омметра будем передвигать по кольцу от точки к точке. Во всех случаях будем иметь параллельное соединение двух ветвей цепи. Вычислим его для ряда точек, например:

$$R_{0,1}=\frac{10\cdot 90}{10+90}\ ом=9\ ом;\ R_{0,2}=\frac{20\cdot 80}{20+80}\ ом=16\ ом.$$

Передвигая второй проводник от первой точки к пятой, увеличиваем общее сопротивление параллельного соединения. В положении



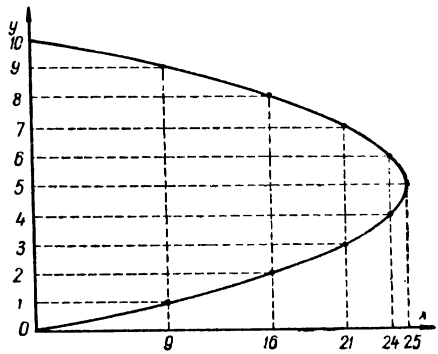


Рис. 224.

проводников O—5 общее сопротивление параллельного соединения $R_{0,5}=25$ *ом*.

Двигая второй проводник дальше от пятой точки к точке O, уменьшаем сопротивление цепи до нуля. По полученным данным строим график (рис. 224).

487. Решение. Включение сопротивления R между точками B и C ведет к уменьшению сопротивления разветвления в 1,5 раза, а поэтому амперметр A_1 показывает силу тока в 1,5 раза большую. Показания же амперметра A_2 и вольтметра V не изменяются. Амперметр A_2 измеряет силу тока, проходящего через одно из сопротивлений R, а сила этого тока не изменяется при включении еще одного сопротивления. Не изменяется и падение напряжения на одном сопротивлении, измеряемое вольтметром V.

488. $U_2 = 50$ *в*.

Решение. Вольтметр покажет напряжение между точками, между которыми включены параллельно половина сопротивления потенциометра и сопротивление вольтметра. Сопротивление этой части цепи

$$R_2=\frac{\frac{1}{2}RR_в}{\frac{1}{2}R+R_в}=\frac{RR_в}{R+2R_в}.$$

Общее сопротивление цепи

$$R_{об}=\frac{1}{2}R+\frac{RR_в}{R+2R_в}=\frac{R(R+4R_в)}{2(R+2R_в)}.$$

На основании законов последовательного соединения проводников можно записать:

$$\frac{U}{U_2}=\frac{R_{\text{об}}}{R_2}, \text{ откуда } U_2=\frac{2UR_{\text{в}}}{R+4R_{\text{в}}}=50 \text{ в}.$$

489. Сопротивление первого вольтметра в 1,5 раза больше чем второго.

Решение. Сопротивление частей реостата прямо пропорционально их длинам, т. е. $\frac{R_1}{R_2}=\frac{2}{3}$. Данная цепь состоит из двух параллельных участков, падения напряжения на которых равны. Сами участки соединены последовательно, значит, по ним проходит ток одинаковой силы. Отсюда видно, что сопротивления этих участков равны. Тогда сопротивление первого вольтметра в 3/2 раза больше, чем второго.

490. Решение. Это возможно в том случае, если внутреннее сопротивление второго аккумулятора велико, а э. д. с. мала.

491. $\varphi_1-\varphi_2=1{,}7$ *в.*

Решение. Предположим, что ток в рассматриваемой цепи проходит против направления движения стрелки часов. Будем обходить цепь от точки *2* к точке *1* через батарею E_1 и запишем закон Ома для этого участка: $\varphi_2-Ir_1+E_1=\varphi_1$ (э. д. с. E_1 берем положительной, так как ток внутри элемента совпадает с направлением обхода). Так как э. д. с. действуют в цепи навстречу друг другу, то

$$I=\frac{E_1-E_2}{r_1+r_2}; \text{ тогда } \varphi_1-\varphi_2=E_1-\frac{E_1-E_2}{r_1+r_2}r_1=$$

$$=\frac{E_1r_2+E_2r_1}{r_1+r_2}=1{,}7 \text{ в}.$$

492. 1) $U_1=108$ *в*; $U_2=72$ *в*; 2) $U_1'\approx 99$ *в*; $U_2'\approx 81$ *в*; 3) $x=\frac{2}{3}$.

Решение. 1. Если ключ K не замкнут, то напряжения на вольтметрах пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{R_1}{R_2}.$$

Сумма напряжений

$$U_1+U_2=U, \text{ откуда } U_1=U\frac{R_1}{R_1+R_2}=108 \text{ в}; \; U_2=U-U_1=72 \text{ в}.$$

2. При замкнутом ключе и движке, соединенном с серединой сопротивления R_3, общее напряжение U делится пропорционально сопротивлениям двух последовательно соединенных участков R_1' и R_2', каждый из которых состоит из вольтметра и соответствующего ему участка сопротивления R_3. В этом случае

$$\frac{U_1'}{U_2'}=\frac{R_1'}{R_2'} \text{ и } U_1'+U_2'=U.$$

Однако $R_1' = \dfrac{R_1 \cdot \frac{1}{2} R_3}{R_1 + \frac{1}{2} R_3}$, $R_2'' = \dfrac{R_2 \cdot \frac{1}{2} R_3}{R_2 + \frac{1}{2} R_3} = \dfrac{R_2 R_3}{2R_2 + R_3}$,

тогда $U_1' = U \dfrac{R_1'}{R_1' + R_2'} = U \dfrac{R_1 (R_3 + 2R_2)}{4R_1R_2 + R_3 (R_1 + R_2)} \approx 99$ *в* и $U_2' \approx 81$ *в*.

3. Если показания вольтметров одинаковы, то и сопротивления соответствующих им участков цепи R_1'' и R_2'' должны быть равны между собой:

$$\frac{U_1''}{U_2''} = \frac{R_1''}{R_2''} = 1, \text{ где } R_1'' = \frac{R_1 R_3'}{R_1 + R_3'} \text{ и } R_2'' = \frac{R_2 R_3''}{R_2 + R_3''}.$$

Через R_3' и R_3'' мы обозначили сопротивление соответствующих частей реостата:

$$R_3' + R_3'' = R_3.$$

Рассматривая эти уравнения, можно сделать вывод, что они возможны при $R_3' = R_2 = 4000$ *ом*; $R_3'' = R_1 = 6000$ *ом*, т. е. сопротивление реостата R_3 делится движком в отношении 2 : 3.

К этому же выводу можно прийти и иным путем. Обозначим через $x = R_3'$ и $R_3 - x = R_3''$. Тогда

$$\frac{R_1 x}{R_1 + x} = \frac{R_2 (R_3 - x)}{R_2 + R_3 - x}.$$

Решив это уравнение относительно x, найдем, что $x \approx 4000$ *ом* и $R_3 - x \approx 6000$ *ом*.

493. $\dfrac{E_2}{r_2} < \dfrac{E_1}{R + r_1}$.

Решение. При последовательном включении двух различных элементов на внешнее сопротивление R сила тока в цепи $I_1 = \dfrac{E_1 + E_2}{R + r_1 + r_2}$, где r_1 и r_2 — внутренние сопротивления элементов. При включении одного элемента сила тока $I_2 = \dfrac{E_1}{R + r_1}$. По условию задачи $I_1 < I_2$, т. е. $\dfrac{E_1 + E_2}{R + r_1 + r_2} < \dfrac{E_1}{R + r_1}$. После упрощений получим $\dfrac{E_2}{r_2} < \dfrac{E_1}{R + r_1}$.

494. $R_{AB} = 0{,}5$ *ом*.

Решение. Поскольку ветви AOB и ACB имеют одинаковые сопротивления, то потенциалы точек O и C одинаковые и по ветке OC ток не идет.

Тогда $\dfrac{1}{R_{AB}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 1 = 2$, откуда $R_{AB} = 0{,}5$ *ом*.

495. $x = 2$.

Решение. Обозначим отношение сопротивления большей стороны контура r_2 к сопротивлению его меньшей стороны r_1 через $x = \frac{r_2}{r_1}$. При включении прямоугольного контура в точках A и B имеем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1 + 2xr_1} = \frac{2(x+1)}{r_1(2x+1)},$$

где R_1 — сопротивление контура.

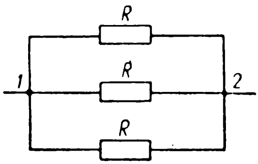


Рис. 225.

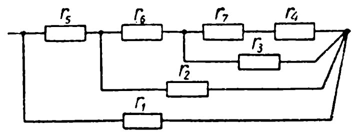


Рис. 226.

При включении прямоугольного контура в точках B и C получим

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{xr_1} + \frac{1}{2r_1 + xr_1} = \frac{2(x+1)}{xr_1(x+2)},$$

где R_2 — сопротивление контура. Отношение сопротивлений

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(x+2)x}{2x+1} = 1{,}6, \text{ откуда } x^2 - 1{,}2x - 1{,}6 = 0.$$

Решив это уравнение и отбросив отрицательное значение корня, как не имеющее физического смысла, получим $x = 2$.

496. $R = \frac{1}{3}$ *ом.*

Решение. Потенциалы точек, отмеченных одинаковыми цифрами, равны. Поэтому данную схему можно представить так, как показано на рис. 225. Тогда $R = \frac{1}{3}$ *ом.*

497. $R = 10$ *ом.*

Решение. Данную схему удобно представить так, как показано на рис. 226. Тогда общее сопротивление схемы находим следующим образом. Сопротивления $r_7 + r_4 = 20$ *ом* включены параллельно сопротивлению r_3 и их общее сопротивление равно 10 *ом*. Эта часть цепи соединена последовательно с r_6 и ее сопротивление 20 *ом*. В свою очередь, часть цепи, содержащая сопротивления r_7, r_4, r_3 и r_6, соединена параллельно сопротивлению r_2 и т. д. После расчета $R = 10$ *ом.*

498. Решение. Так как сопротивления соединены параллельно, то можно написать:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Это неравенство очевидно, потому что если даже предположить, что сопротивление всех проводников равно $2n$, то $n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

499. $U_{CD} = \frac{\pi}{2+\pi}\ в \approx 0{,}61\ в.$

Р е ш е н и е. Обозначим сопротивление проволоки длиной в один радиус через R. Составим эквивалентную схему (рис. 227,*а*). Вследствие симметрии схемы перемычку в центре схемы можно выбросить и рассматривать только нижнюю часть цепи (рис. 227,*б*), так как потенциалы точек, которые перемычка соединяла на эквивалентной схеме, равны.

Тогда вольтметр, подключенный к точкам C и D, покажет напряжение

$$U = U_{AB}\frac{R_{CD}}{R_{AB}} = 1\ в \cdot \frac{\pi R}{(2+\pi)R} = \frac{\pi}{2+\pi}\ в \approx 0{,}61\ в.$$

Задачу можно решить и иначе. Рассматривая поочередно каждую половину эквивалентной схемы (рис. 227,*в*) между точками A и E, F и E, F и B, находим напряжение между точками C и E, F, а затем — между E, F и D и складываем.

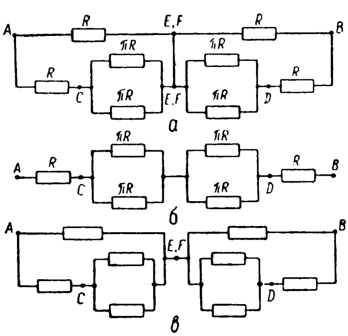


Рис. 227.

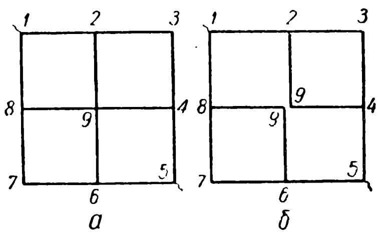


Рис. 228.

500. 1) $R = \frac{3}{2}r$; 2) $R = \frac{5}{11}r$; 3) $R = \frac{1}{2}r$; 4) $R = r$.

Р е ш е н и е. 1. Вследствие симметрии очевидно, что сила тока в проводнике *1—2* равна силе тока в проводнике *1—8*, сила тока в *2—9* — силе тока в *8—9*, сила тока в *5—4* — силе тока в *5—6* и т. д. (рис. 228). Поэтому распределение токов и, следовательно, сопротивление сетки не изменятся, если отсоединить проводники *2—9*, *8—9*, *9—6* и *9—4* от центра (рис. 228,*б*). Сопротивление этой схемы, эквивалентной исходной, легко вычислить. Сопротивление верхней части схемы равно $r + r + \frac{2r}{2} = 3r$. Такое же сопротивление нижней части. Тогда полное сопротивление $R = \frac{3}{2}r$.

2. Аналогично рассуждая, находим сопротивление верхней и нижней частей (рис. 229): $\frac{2}{3}r + r = \frac{5}{3}r$. Тогда полное сопротивление

$$\frac{1}{R} = \frac{3}{5r} + \frac{3}{5r} + \frac{1}{r} = \frac{11}{5r};\quad R = \frac{5}{11}r.$$

3. Сопротивление каркаса в виде тетраэдра можно представить в виде эквивалентной схемы, представленной на рис. 230. Вследствие симметрии нижней части схемы проводник $1—2$ не влияет на сопротивление схемы и его можно выбросить. Тогда $R = \frac{1}{2}r$.

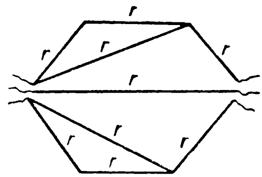


Рис. 229.

4. Точки 7 и 3 имеют одинаковые потенциалы (рис. 231, *а*), и проводник *7—9—3* не влияет на сопротивление схемы. Вследствие симметрии каркаса можно проводники отсоединить от точки *9*. Сопротивление этой схемы (рис. 231,*б*), эквивалентной данной, легко вычислить. Сопротивление левой (или правой) части схемы равно $2r$. Полное сопротивление схемы $R = r$.

501. Р е ш е н и е. Схема освещения приведена на рис. 232, где L — лампа, A — один конец коридора, B — другой конец коридора.

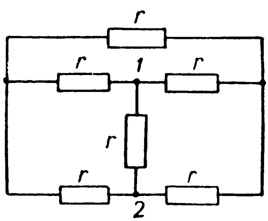


Рис. 230.

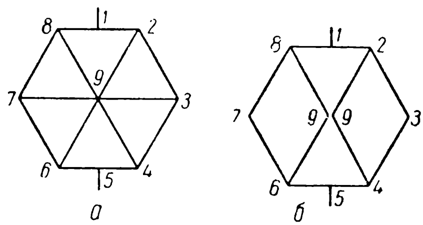


Рис. 231.

502. $R \approx 25{,}6$ *ом*.

Р е ш е н и е. Из схемы рис. 88,*б* видим, что разность $U_1 - U_2$ представляет собой падение напряжения на зажимах амперметра

$$U_1 - U_2 = I_2 R_a,$$

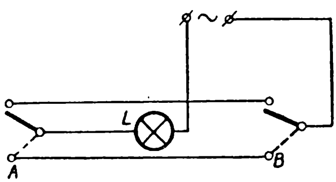


Рис. 232.

где R_a — сопротивление амперметра. В то же время, по схеме рис. 88,*а* напряжение U_1 состоит из падения напряжения на амперметре и сопротивлении R:

$$U_1 = I_1 R_a + I_1 R.$$

Из этих двух уравнений получаем

$$R = \frac{U_1}{I_1} - \frac{U_1 - U_2}{I_2} \approx 25{,}6 \text{ ом}.$$

503. $R_{мин} \approx 166\,700$ *ом*.

Р е ш е н и е. Напряжение между точками *а* и *b* при отключении вольтметра равно

$$U_2 = I_2 R_2,$$

где $I_2 = \dfrac{E}{R_1 + R_2}$ — сила тока в цепи.

При включении вольтметра напряжение между этими же точками

$$U_1 = I_1 \frac{RR_2}{R+R_2}, \text{ где } I_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}}.$$

По условию задачи

$$U_2 - U_1 = \frac{n}{100} U_1 \text{ или } \frac{E}{R_1+R_2} R_2 - \frac{E}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}} \times$$

$$\times \frac{RR_2}{R+R_2} = \frac{n}{100} \cdot \frac{E}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}} \cdot \frac{RR_2}{R_2+R}.$$

После упрощений

$$\frac{1}{R_1+R_2} = \frac{R}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2} \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right).$$

Решив это уравнение относительно R, получим $R_{\text{мин}} = \frac{100R_1R_2}{n(R_1+R_2)} \approx$ $\approx 166\,700$ *ом*.

504. $(R_а)_{\text{макс}} \approx 0{,}113$ *ом*.

Решение. При включении амперметр измеряет силу тока, текущего по сопротивлению R_2. Определим силу тока, текущего по R_2, до и после включения амперметра.

До включения амперметра сила тока в цепи $I = \frac{E}{r_в + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$.

Надо определить силу тока I_2, текущего по R_2. Обозначим через I_1 силу тока, текущего по R_1. Тогда

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \text{ или } \frac{I_1+I_2}{I_2} = \frac{R_1+R_2}{R_1}, \text{ но } I_1 + I_2 = I; \text{ поэтому}$$

$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{E}{r_в + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} =$$

$$= \frac{ER_1}{r_в(R_1+R_2) + R_1R_2}.$$

Аналогично находим силу тока в цепи после включения амперметра

$$I' = \frac{E}{r_в + \frac{R_1(R_2+R_а)}{R_1+R_2+R_а}}$$

и силу тока I'_2, текущего по R_2 после включения амперметра

$$I'_2=\frac{E}{\frac{R_1(R_2+R_a)}{R_1+R_2+R_a}+r_в}\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2+R_a}=$$

$$=\frac{ER_1}{R_1(R_2+R_a)+r_в(R_1+R_2+R_a)}.$$

По условию задачи

$$\frac{ER_1}{R_1R_2+r_в(R_1+R_2)}\left(1-\frac{n}{100}\right)=$$

$$=\frac{ER_1}{R_1(R_2+R_a)+r_в(R_1+R_2+R_a)}.$$

После упрощений получим

$$n[R_1R_2+r_в(R_1+R_2)]=(100-n)(R_1+r_в)R_a, \text{ откуда}$$

$$(R_a)_{макс}=\frac{n}{100-n}\cdot\frac{r_в(R_1+R_2)+R_1R_2}{R_1+r_в}\approx 0{,}113\ ом.$$

505. $E=1{,}4$ *в*; $r=0{,}2$ *ом*; $I_{к.з}=7$ *а*.

Решение. Запишем закон Ома для этих случаев:

$$I_1=\frac{E}{R_1+r} \text{ и } I_2=\frac{E}{R_2+r}.$$

Поскольку э. д. с. есть величина постоянная, то из этих двух равенств определяем внутреннее сопротивление элемента

$$I_1(R_1+r)=I_2(R_2+r), \text{ откуда } r=\frac{I_2R_2-I_1R_1}{I_1-I_2}=0{,}2\ ом.$$

Тогда э. д. с. элемента $E=I_1(R_1+r)=1{,}4$ *в*. Ток короткого замыкания $I_{к.з}=\frac{E}{R}=7a$.

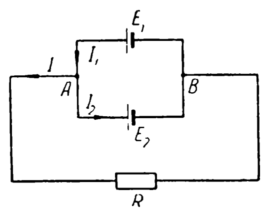


Рис. 233.

506. $I_1\approx 2{,}47$ *а*; $I_2\approx 1{,}53$ *а*; $I\approx 0{,}94$ *в*. При уменьшении сопротивления R до нуля I_1 приближается к 40 *а*, I_2 — к 36 *а* и I — к 76 *а*.

Решение. Решение задачи фактически можно свести к вспомогательному заданию — определить величину напряжения U на зажимах батареи аккумуляторов. В соответствии с первым законом Кирхгофа для узла A (рис. 233) $I_1=I+I_2$. Обозначим на рисунке направление токов, приняв во внимание, что $E_1>E_2$. Это значит, что второй аккумулятор не только не дает тока во внешнюю цепь, но и сам дозаряжается от первого аккумулятора.

Применяя закон Ома к протеканию тока в отдельных аккумуляторах и во внешней цепи, можно записать:

$$I_1=\frac{E_1-U}{r};\quad I_2=\frac{U-E_2}{r};\quad I=\frac{U}{R}.$$

Из этих уравнений определим напряжение:

$$\frac{E_1 - U}{r} = \frac{U - E_2}{r} + \frac{U}{R}, \text{ откуда } U = \frac{(E_1 + E_2) R}{2R + r}.$$

Учитывая предыдущие формулы, получим

$$I_1 = \frac{(E_1 - E_2) R + E_1 r}{r(2R + r)} \approx 2{,}47 \ a; \ I_2 = \frac{(E_1 - E_2) R - E_2 r}{r(2R + r)} \approx 1{,}53 \ a;$$

$$I = \frac{E_1 + E_2}{2R + r} \approx 0{,}94 \ a.$$

Если $R \to 0$, то $I_1 \to \frac{E_1}{r} = 40 \ a$; $I_2 \to -\frac{E_2}{r} = -36 \ a$; $I \to \frac{E_1 + E_2}{r} = 76 \ a$. Знак минус при I_2 указывает на изменение направления этого тока; теперь второй аккумулятор дает ток во внешнюю цепь.

507. $E \approx 4{,}1$ *в*; $r = 0{,}05$ *ом*.

Решение. Закон Ома для конца зарядки запишется так:

$$U_1 - E = I_1 r,$$

где E — э. д. с. и r — внутреннее сопротивление батареи.

Для начала разрядки закон Ома запишется так:

$$E - I_2 r = U_2.$$

Складывая эти два уравнения, получим

$$U_1 - I_2 r = U_2 + I_1 r, \text{ откуда } r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2} = 0{,}05 \text{ ом}.$$

Подставив значение r, получим

$$E = U_2 + I_2 r = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1}{I_1 + I_2} \approx 4{,}1 \ в.$$

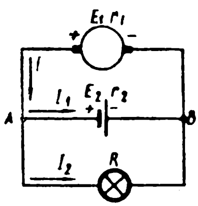


Рис. 234.

508. $I_1 \approx 1{,}58 \ a$; $I_2 \approx 3{,}65 \ a$.

Решение. Обозначим напряжение между точками A и B (рис. 234) через U. Согласно закону Ома для участка цепи, содержащего лампочку,

$$U = I_2 R.$$

По закону Ома для участка цепи, содержащего аккумуляторную батарею,

$$U - E_2 = I_1 r_2.$$

Выражение для падения напряжения внутри работающего генератора

$$E_1 - U = I r_1.$$

Из этих уравнений

$$I_1 = \frac{U - E_2}{r_2}; \ I_2 = \frac{U}{R} \text{ и } I = \frac{E_1 - U}{r_1}.$$

Однако

$$I_1 + I_2 = I, \text{ тогда } \frac{U - E_2}{r_2} + \frac{U}{R} = \frac{E_1 - U}{r_1}, \text{ откуда}$$

$$U = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} R.$$

Тогда

$$I_2 = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \approx 3{,}65 \ a;$$

$$I_1 = \frac{(E_1 - E_2) R - E_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \approx 1{,}58 \ a.$$

Задачу можно легко решить, применив закон Кирхгофа:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2, \\ I r_1 + I_1 r_2 = E_1 - E_2, \\ I r_1 + I_2 R = E_1. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим те же значения для I_1 и I_2.

509. $\frac{I_2}{I_1} \approx \frac{1}{5}$.

Решение. Поскольку напряжение на зажимах печи остается постоянным, можно записать:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2, \text{ где } R_1 = R_0 (1 + \alpha t_1^\circ) \text{ и } R_2 = R_0 (1 + \alpha t_2^\circ);$$

тогда $$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \alpha t_1^\circ}{1 + \alpha t_2^\circ} \approx \frac{1}{5},$$

т. е. сила тока уменьшится в пять раз.

510. $\frac{l_2}{l_1} = -\frac{\rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2} \approx 60$.

Решение. Обозначим сопротивления угольного и железного стержней при 0° С через R_1 и R_2. Для того чтобы общее сопротивление не зависело от температуры, необходимо, чтобы $\Delta R_2 = -\Delta R_1$. Однако

$$\Delta R_1 = R_1 \alpha_1 \Delta t^\circ \text{ и } \Delta R_2 = R_2 \alpha_2 \Delta t^\circ; \text{ тогда } R_2 \alpha_2 \Delta t^\circ =$$

$$= -R_1 \alpha_1 \Delta t^\circ \text{ и } \frac{R_2}{R_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Учитывая, что

$$R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S} \text{ и } R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S}, \text{ получим } \frac{\rho_2 l_2}{\rho_1 l_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \text{ откуда}$$

$$\frac{l_2}{l_1} = -\frac{\rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2} \approx 60.$$

511. $I \approx 5{,}43$ *а*.

Решение. В первом случае (рис. 235, *а*), применив закон Ома для всей цепи, можно записать:

$$I_1 + I_2 = \frac{E}{R + r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}},$$

где R — неизвестное внешнее сопротивление, r — внутреннее сопротивление батареи, r_1 и r_2 — сопротивления амперметров.

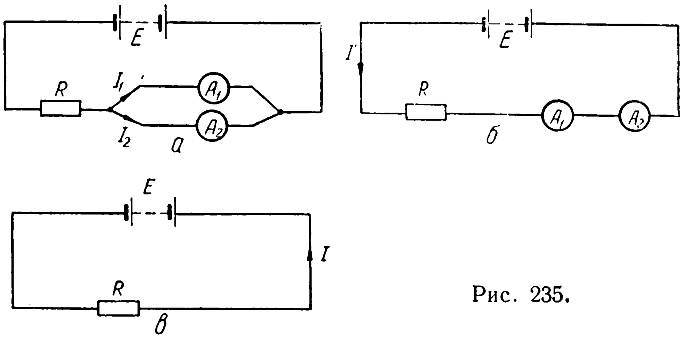


Рис. 235.

Во втором случае (рис. 235, *б*)

$$I_3 = \frac{E}{R + r + r_1 + r_2}.$$

Кроме того, при параллельном соединении отношение сопротивлений амперметров обратно пропорционально силам токов:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{I_2}{I_1}.$$

Решая совместно эти три уравнения, получаем

$$R + r = \frac{E\,[I_3\,(I_1 + I_2) - I_1 I_2]}{I_3\,(I_1^2 + I_1 I_2 + I_2^2)}.$$

Искомую силу тока I (рис. 235, *в*) находим по закону Ома для всей цепи

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Подставив сюда значение $R + r$, получим

$$I = \frac{I_3\,(I_1^2 + I_1 I_2 + I_2^2)}{I_3\,(I_1 + I_2) - I_1 I_2} \approx 5{,}43\ a.$$

512. Решение. В первом случае через вольтметр проходит незначительный ток по сравнению с током, идущим через измеряемое сопротивление (в 2000 раз меньший), а во втором — только вдвое меньший. Значит, абсолютные погрешности составляют 0,005 *ом* и 333 *ом*, а относительные — 0,05 и 33,3%.

513. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$.

Решение. Рассмотрим участки цепи AE_1B или AE_2B (рис. 236). Если внутри участка цепи включен источник с э. д. с., равной E, то сила тока на этом участке определяется совместным действием этой э. д. с. и разности потенциалов, приложенной к концам участка. Обозначим силу тока в цепи через I.

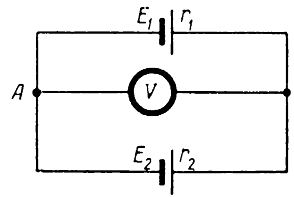


Рис. 236.

На участке AE_1B ток идет в направлении, противоположном действию E_1. Тогда закон Ома для участка цепи AE_1B запишется так:

$$Ir_1 = U - E_1. \qquad (1)$$

На участке AE_2B ток идет в направлении действия э. д. с., и падение напряжения на внутреннем сопротивлении равно разности э. д. с. и напряжения:

$$Ir_2 = E_2 - U. \qquad (2)$$

Разделив уравнение (1) на (2), получим $\frac{r_1}{r_2} = \frac{U - E_1}{E_2 - U} = \frac{2}{3}$.

514. Решение. Определим по закону Ома для полной цепи силу тока при последовательном и параллельном соединениях элементов:

$$I_1 = \frac{2E}{R + 2r} \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{E}{R + \frac{1}{2}r}.$$

Тогда для напряжений на концах сопротивления R при последовательном и параллельном включениях элементов можно записать:

$$U_1 = \frac{2ER}{R + 2r} \quad \text{и} \quad U_2 = \frac{ER}{R + \frac{1}{2}r}.$$

Внутреннее сопротивление r элемента выразим через падение напряжения U на сопротивлении R при включении одного элемента:

$$r = \frac{E - U}{U} R.$$

Подставив это значение в предыдущие формулы и выполнив упрощения, получим

$$U_1 = \frac{2EU}{2E - U}; \quad U_2 = \frac{2EU}{E + U}, \quad \text{откуда} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{E + U}{2E - U} = \frac{7}{8}.$$

Следовательно, напряжение при параллельном соединении элементов будет больше: $U_2 \approx 1{,}71$ *в*.

515. $E = 4$ *в.*

Решение. Использовав закон Ома для участка и для полной цепи, можно для напряжения записать в первом случае

$$U = IR = \frac{E}{R + r} R$$

и во втором

$$U_1 = (1 + k) U = I_1 R_1 = \frac{E}{R_1 + r} R_1 = \frac{E}{nR + r} nR, \text{ так как } R_1 = nR.$$

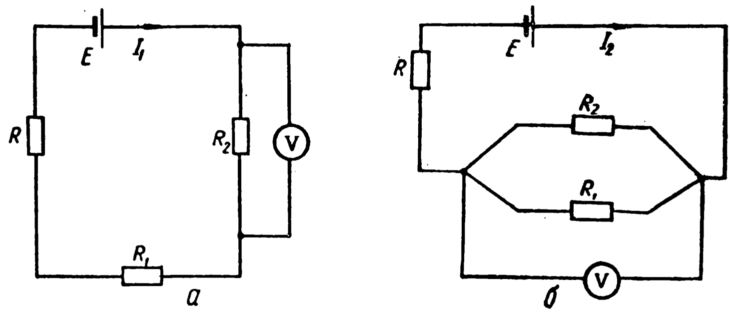


Рис. 237.

Решая эти два уравнения как систему, получим

$$E = \frac{U(1 + k)(n - 1)}{n - k - 1} = 4 \text{ в.}$$

516. $R = 2{,}3$ *ом.*

Решение. Запишем закон Ома для полной цепи для обоих случаев (рис. 237, *а* и *б*):

$$I_1 = \frac{E}{R + R_1 + R_2 + r} \text{ и } I_2 = \frac{E}{R + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r}.$$

По условию задачи разность потенциалов на концах сопротивления R_2 должна не изменяться, т. е.

$$I_1 R_2 = I_2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Для упрощения подсчетов подставим в эти три уравнения числовые значения известных величин:

$$I_1 = \frac{12{,}5}{R + 15{,}2}; \quad I_2 = \frac{12{,}5}{R + \dfrac{10}{3} + 0{,}2}; \quad I_2 = 3I_1.$$

Решив эту систему, получим $R = 2{,}3$ *ом.*

517. Решение. Если n элементов соединены параллельно, то общее сопротивление батареи в n раз меньше. Поэтому сопротивление второй цепи равно $\frac{1}{3}r + R$. Значит, ответ, полученный абитуриентом, верен только для первого случая.

518. Решение. Задачу можно решить несколькими способами. Приводим один из них. Составим батарею из p одинаковых групп аккумуляторов, в каждой из которых находится m аккумуляторов, соединенных последовательно (рис. 238). Тогда по закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{mE}{R + \frac{m}{p} r} = \frac{mpE}{pR + rm}.$$

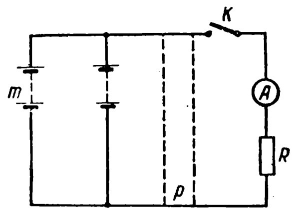


Рис. 238.

Из условия задачи видно, что $pm = n$. Следовательно, $I = \frac{nE}{pR + mr}$. Из этого уравнения видим, что I достигает максимального значения, когда $pR + mr$ приближается к нулю, т. е.

$$mr + pR = 0; \text{ отсюда } |mr| = |pR| \text{ или } R = r\frac{m}{p}.$$

Выражение $\frac{m}{p}r$ является внутренним сопротивлением батареи. Отсюда следует, что сила тока в цепи достигает максимального значения, когда сопротивление потребителя, включенного в цепь, равно внутреннему сопротивлению батареи.

Из равенства $\frac{m}{p}r = R$, учитывая, что $mp = n$, получим

$$\frac{m^2}{n} r = R, \text{ откуда } m = \sqrt{\frac{nR}{r}}.$$

Таким образом, зная величины R, n и r, можно вычислить количество аккумуляторов, соединенных последовательно.

Для данной задачи $m = \sqrt{\frac{24 \cdot 3}{2}} = 6$, т. е. в группе соединены последовательно шесть аккумуляторов. Таких групп есть четыре. Максимальная сила тока $I_{\text{макс}} = 1$ *а*.

519. $R = r_0$.

Решение. Запишем формулы для силы тока при последовательном $I_1 = \frac{nE}{R + nr_0}$ и параллельном $I_2 = \frac{E}{R + \frac{r_0}{n}}$ соединении n элементов в батарею. По условию задачи

$$I_1 = I_2 \text{ или } \frac{nE}{R + nr_0} = \frac{E}{R + \frac{r_0}{n}}, \text{ откуда } nR + r_0 = R + nr_0 \text{ или}$$

$R = r_0$.

520. $N = 160$ аккумуляторов надо соединить в четыре параллельных группы.

Решение. Обозначим через N общее количество аккумуляторов и m — число групп, соединенных параллельно. Тогда сила тока в цепи

$$I = \frac{NE}{mR + \frac{rN}{m}}$$

(см. решение задачи 518).

Наибольшую полезную мощность батарея развивает при равенстве внешнего и внутреннего сопротивлений, т. е. $m^2R = rN$. Мы получили систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив эту систему, получим: $N = 160$ и $m = 4$, т. е. надо взять 160 аккумуляторов и соединить в четыре параллельных группы.

§ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ

521. $v \approx 0{,}77 \cdot 10^{-3}$ *м/сек.*

Решение. Сила тока характеризуется электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника за 1 *сек*;

$$I = \frac{q}{t} = nevS,$$

где q — электрический заряд, n — число электронов в 1 *см*^{3} проводника, e — заряд электрона. Отсюда $v = \frac{I}{nSe}$. Поскольку число электронов в 1 *см*^{3} меди n равняется количеству атомов меди, то определим это число атомов. Очевидно, что $n = \frac{\rho}{m}$, где ρ — плотность меди, m — масса одного атома. Однако $m = \frac{\mu}{N}$, где μ — атомная масса меди и $N = 6{,}025 \cdot 10^{26}$ 1/*кмоль* — число Авогадро. Тогда

$$n = \rho\frac{N}{\mu}, \quad \text{а} \quad v = \frac{I\mu}{\rho NSe} \approx 0{,}77 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек.}$$

522. Решение. Средняя сила, с которой электроны действуют на ионы кристаллической решетки, равна силе, с которой действует на ионы электрическое поле в противоположном направлении. Поэтому проводник не испытывает никаких механических воздействий в направлении движения электронов.

523. Стрелка гальванометра отклонится на 30 делений.

Решение. Чтобы определить, на сколько делений отклонится стрелка гальванометра, надо определить силу тока в цепи, а для этого надо определить э. д. с. и сопротивление цепи. Э. д. с. термопары $E = 40$ *мкв/град* $\cdot$ 50 *град* $= 0{,}002$ *в*. Полное сопротивление цепи

$$R = r + \rho_1\frac{l}{S} + \rho_2\frac{l}{S} \approx 66{,}4 \text{ ом.}$$

Сила тока в цепи $I = \frac{E}{R} \approx 30 \cdot 10^{-6}$ *а*. Значит, стрелка гальванометра отклонится на $n = 30$ делений.

524. $R = 87{,}5$ *ом.*

Решение. Считая отклонение стрелки гальванометра пропорциональным количеству световой энергии, падающей на приемник, можно записать для случая освещения прямым светом $I_1 = \frac{E}{R}$ и для освещения отраженным светом $I_2 = \frac{0{,}84E}{R - 14}$. В соответствии с условием задачи отклонения в обоих случаях одинаковые, т. е.

$$I_1 = I_2 \text{ или } \frac{E}{R} = \frac{0{,}84E}{R - 14}, \text{ откуда } R = 87{,}5 \text{ ом.}$$

Если чувствительность схемы уменьшилась вдвое, то это значит, что по гальванометру проходит вдвое меньший ток. Значит,

$$\frac{I}{2} = \frac{E}{R + x}, \text{ но } I = \frac{E}{r}, \text{ тогда } \frac{E}{2R} = \frac{E}{R + x}, \text{ откуда}$$

$$x = R = 87{,}5 \text{ ом.}$$

525. $r > \frac{2R}{n}$; $n_1 \approx 12{,}7$ делений; $n_2 \approx 14{,}3$ делений.

Решение. Запишем формулы для определения силы тока при последовательном $I_1 = \frac{nE}{R + nr}$ и смешанном $I_2 = \frac{\frac{1}{2}nE}{R + \frac{1}{4}rn}$ соединениях.

Выгоднее включать термопары смешанно, когда сила тока I_2 больше I_1, т. е.

$$\frac{\frac{1}{2}nE}{R + \frac{1}{4}rn} > \frac{nE}{R + nr}.$$

Поскольку все величины положительны, то можно записать

$$R + nr > 2R + \frac{rn}{2}, \text{ откуда } r > \frac{2R}{n}.$$

В первом случае стрелка гальванометра отклонится на

$$n_1 = \frac{I_1}{k} = \frac{nE}{k(R + nr)} \approx 12{,}7 \text{ деления,}$$

а во втором на

$$n_2 = \frac{I_2}{k} = \frac{nE}{2k\left(R + \frac{1}{4}rn\right)} \approx 14{,}3 \text{ деления.}$$

526. $E = \frac{m}{e}\omega^2 R.$

Решение. При вращении металлической ленты свободные электроны вращаются вместе с металлом с центростремительным ускорением

$a=\omega^2 R$. Это ускорение может возникнуть только под действием электрического поля, направленного вдоль радиуса к центру кольца. Рассмотрим механизм возникновения этого электрического поля. Благодаря инерции свободные электроны в металле переходят на окружность большего радиуса, и внешняя поверхность кольца при этом заряжается отрицательно, а внутренняя — положительно. Электрон перестает перемещаться от оси вращения к периферии тогда, когда действующая на него вдоль радиуса электрическая сила $F = eE$ станет достаточной, чтобы удержать его на окружности радиусом R. Так как электрическая сила играет роль центростремительной, то $eE = m\omega^2 R$, откуда $E = \frac{m}{e}\omega^2 R$.

527. $U \approx 2{,}8 \cdot 10^{-11}$ *в.*

Решение. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, можно записать, что на электрон, находящийся на поверхности цилиндра, действует электрическая сила $eE = m\omega^2 \frac{d}{2}$, где $\omega = 2\pi n$. Так как на электрон, находящийся на оси цилиндра, действует электрическая сила, равная нулю, то средняя сила, действующая на единичный заряд при перемещении его от оси до поверхности цилиндра, равна $F_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{e} \cdot \omega^2 \frac{d}{2}$. Тогда разность потенциалов $U = F_c \cdot \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{e}\omega^2 \frac{d}{2} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-11}$*в.*

528. $E = \frac{m}{e} a.$

Решение. При движении диска с ускорением свободные электроны, двигаясь внутри кристаллической решетки, в течение некоторого времени сохраняют по инерции прежнюю скорость, и в результате произойдет смещение электронов внутри проводника. Это смещение электронов будет происходить до тех пор, пока не возникнет внутри диска электрическое поле такой напряженности E, что действующая на каждый электрон электрическая сила eE сможет сообщить ему ускорение a. Тогда по второму закону динамики $eE = ma$, откуда

$$E = \frac{m}{e} a.$$

§ 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

529. Решение. Предположим, что за единицу времени от катода в направлении к аноду уходит n_- отрицательных ионов. Так как электролит в целом электрически нейтрален, то оставшиеся в том же количестве положительные ионы вместе с прибывшими к катоду за это же время n_+ положительными ионами и выделяются на катоде. То же самое происходит и вблизи анода. Поэтому количество вещества, выделяющегося на катоде, рассчитывается по полному току.

530. $k = 4{,}4$ коп.

Решение. При очистке 1 *кг* меди на катоде выделяется 0,88 *кг* чистой меди. Для получения этой массы меди путем электролиза надо затратить количество электричества $q = \frac{mnF}{A}$ (по закону Фарадея $m =$

$= \frac{A}{nF} q)$, где A—атомная масса меди, n—ее валентность в данном соединении ($CuSO_4$); F — число Фарадея.

Энергия, расходуемая при электролизе, определяется соотношением $E = qU$. Подставив в это соотношение значение q, получим $E = \frac{mnFU}{A} \approx$ $\approx 4{,}42$ *квт·ч*. Тогда стоимость работы $k = 4{,}4$ коп.

531. $I = 0{,}9$ *а*.

Решение. Положительные ионы переносят каждую секунду через поперечное сечение электролита количество электричества $I_1 = nv_1Se_1$, а отрицательные ионы переносят в противоположном направлении количество электричества $I_2 = nv_2Se_2$, где e_1 — заряд одновалентного иона натрия, e_2 — заряд одновалентного иона хлора.

Очевидно, что $I = I_1 + I_2 = nS(v_1e_1 + v_2e_2) = 0{,}9$ *а*.

532. $q = 20$ *k*; $m \approx 6{,}6$ *мг*.

Решение. Количество электричества, проходящее через раствор соли меди, $q = I_{\text{ср}}t = \frac{It}{2} = 20$ *k*.

При этом выделяется масса меди $m = \frac{Aq}{nF} = \frac{AIt}{2nF} \approx 0{,}66 \cdot 10^{-5}$ *кг*.

533. $m \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*.

Решение. Масса водорода, выделившегося при электролизе при прохождении через электролит количества электричества q, равна $M = kq$.

Однако количество электричества q можно выразить через число ионов водорода N и заряд e иона: $q = Ne$, а массу выделившегося водорода через массу иона m и число N ионов: $M = mN$. Тогда

$$mN = kNe, \text{ откуда } m = ke \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

534. $E = 1{,}5$ *квт·ч*; $m_1 \approx 2{,}012$ *кг*.

Решение. Расход энергии равен выполненной работе $A = IUt$.

Количество серебра, выделяющегося в одной ванне, равно $m = kIt$, а в 40 ваннах — $m_1 = 40\,kIt$, где $I = iS$.

Тогда $A = iSUt = 1500$ *вт·ч* $= 1{,}5$ *квт·ч*; $m_1 \approx 2{,}012$ *кг*.

535. $m \approx 4{,}3$ *мг*.

Решение. Количество выделившейся на катоде меди можно определить по закону Фарадея: $m = \frac{AIt}{nF}$.

Однако для этого надо определить силу тока, протекающего через электролит.

Обозначив через p количество последовательно соединенных элементов в группе и через k число групп, можно записать:

$$I = \frac{pE}{R + \frac{pr}{k}} = \frac{kpE}{kR + pr}.$$

Учитывая, что $pk = c$, получим

$$I = \frac{cE}{kR + pr}, \text{ тогда } m = \frac{AcEt}{(kR + pr)\,nF} \approx 4{,}7 \text{ мг}.$$

536. Р е ш е н и е. Применение при электроосаждении металлов реверсирования позволяет получить хорошие по качеству покрытия при повышенных плотностях тока и ускоряет процесс покрытия. Осаждаемый металл при этом имеет бóльшую плотность, меньшую пористость, поверхность получается гладкой и блестящей. Металл осаждается на изделии во время прохождения тока прямого направления. Во время кратковременного прохождения тока обратного направления осажденный металл частично растворяется, особенно на микровыступах, образовавшихся на отдельных участках катода вследствие преимущественного роста кристаллов на них. Прикатодный слой электролита при этом обогащается катионами осаждаемого металла.

537. $\frac{e}{m} \approx 3036 \cdot 10^3$ *к/кг.*

Р е ш е н и е. Массу меди m_0, выделившуюся на катоде, определяем по закону Фарадея: $m_0 = \frac{Aq}{nF}$. Обозначив через m массу каждого иона, e — его заряд и N — число ионов, выделившихся на катоде, получим:

$$m_0 = Nm \text{ и } q = eN.$$

Подставив эти значения m_0 и q в первое уравнение, получим $\frac{e}{m} = \frac{Fn}{A} \approx 3036 \cdot 10^3$ *к/кг.*

538. $d \approx 1{,}55 \cdot 10^{-3}$ *см.*

Р е ш е н и е. Масса никеля, выделившегося на изделии при никелировании, равна $m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot It$.

С другой стороны, $m = \rho Sd$, где ρ — плотность никеля; S — площадь поверхности изделия; d — толщина слоя никеля. Из этих двух уравнений определяем толщину слоя никеля:

$$d = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot \frac{It}{\rho S} \approx 1{,}55 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

539. $\frac{Q_1}{Q_2} = 108.$

Р е ш е н и е. В соответствии с условием задачи $m_1 = m_2$, т. е.

$$\frac{1}{F} \cdot \frac{A_1}{n_1} Q_1 = \frac{1}{F} \cdot \frac{A_2}{n_2} Q_2, \text{ откуда } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} = 108.$$

540. $m_2 = 0{,}106$ *г.*

Р е ш е н и е. Поскольку ванны соединены последовательно, то через них проходит одинаковое количество электричества. Поэтому для выделившихся масс серебра и меди можно записать $m_1 = \frac{1}{F} \cdot \frac{A_1}{n_1} q$ и $m_2 = \frac{1}{F} \cdot \frac{A_2}{n_2} q$.

Из первого уравнения определим

$$\frac{q}{F} = m_1 \frac{n_1}{A_1}$$

и, подставив во второе уравнение, получим

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} = 0{,}106 \text{ г}.$$

541. $\Delta n \approx 625 \cdot 10^{10}$ *сек*$^{-1}$.

Решение. Наличие тока насыщения означает, что количество ионов, образующихся в пространстве между электродами за единицу времени, равно количеству ионов, нейтрализующихся за единицу времени на электродах. Поскольку заряд всех ионов, достигающих за единицу времени электродов, равен I, то число ионов Δn можно найти, разделив эту величину на заряд иона q:

$$\Delta n = \frac{I}{q} \approx 6{,}25 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}.$$

542. $I_c \approx 4 \cdot 10^{-10}$ *а*.

Решение. Силу среднего тока определим по формуле $I_c = \frac{q}{t}$. Однако $q = nke$, где n — число зафиксированных гамма-квантов, k — число электронов, проходящих через счетчик при одном разряде, e — заряд электрона. Тогда $I_c = \frac{nke}{t} \approx 4 \cdot 10^{-10}$ *а*.

543. $F = iS\sqrt{\frac{2mU}{q}}$.

Решение. На каждый ион в электрическом поле действует сила $F_1 = qE = q\frac{U}{d}$. Пусть число ионов в единице объема равно n. Тогда на все ионы действует сила

$$F = F_1 nSd = qUnS.$$

По третьему закону динамики такая же сила действует на трубу в противоположную сторону. Эта сила и есть реактивная сила тяги. Для ее определения надо выразить через известные величины число ионов в единице объема n. Ионы движутся с постоянным ускорением

$$a = \frac{F_1}{m} = \frac{qU}{md},$$

а скорость их меняется от нуля до максимальной величины

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Поэтому средняя скорость ионов

$$v_c = \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{qU}{2m}}.$$

За 1 *сек* через любое сечение трубы пройдут все ионы, находящиеся в объеме $v_c S$. Поэтому заряд, который пройдет через поперечное сечение цепи в 1 *сек*, или, говоря иначе, сила тока будет

$$I = nqv_c S, \text{ откуда } n = \frac{I}{qv_c S} = \frac{i}{qv_c} = \frac{i}{q}\sqrt{\frac{2m}{qU}}.$$

Следовательно, реактивная сила $F = iS\sqrt{\frac{2mU}{q}}$.

544. $F = I\sqrt{\frac{2U}{\lambda}}$.

Решение. Сила F, с которой электроны действуют на анод, равна изменению в единицу времени количества движения электронов при их столкновении с анодом. Поскольку заряд, переносимый электронами в единицу времени, равен I, то масса электронов, попадающих в единицу времени на анод, равна: $I\frac{m}{e} = \frac{I}{\lambda}$. Количество движения этих электронов будет $F = \frac{I}{\lambda}v$, где v — скорость электронов вблизи анода.

Из соотношения $\frac{mv^2}{2} = eU$, где m — масса электрона, а e — его заряд, находим

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}U} = \sqrt{2\lambda U}; \quad \text{тогда } F = I\sqrt{\frac{2U}{\lambda}}.$$

545. $n \approx 1{,}4 \cdot 10^6$ $см^{-3}$.

Решение. Плотность тока i связана с концентрацией ионов и их подвижностью зависимостью

$$i = ne(k_+ + k_-)E,$$

где e — заряд одного иона (принимаем его равным заряду электрона); n — число пар ионов в 1 $см^3$; E — напряженность поля.

Если насыщения нет, то поле можно считать однородным. Следовательно, $E = \frac{U}{d}$, где U — напряжение на пластинах конденсатора; d — расстояние между пластинами.

Тогда для плотности тока получим $i = \frac{ne(k_+ + k_-)U}{d}$.

С другой стороны, плотность тока $i = \frac{I}{S}$. Из этих двух уравнений получаем $n = \frac{Id}{Se(k_+ + k_-)} \approx 1{,}4 \cdot 10$ $см^{-3}$.

§ 5. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА

546. $I = 100$ $а$.

Решение. Силу тока определим из формулы мощности тока

$$N = IU, \text{ откуда } I = \frac{N}{U}.$$

Однако по условию задачи $\eta N = Fv$, тогда $I = \frac{Fv}{\eta U} = 100$ $а$.

547. $r = 6$ $ом$.

Решение. По условию задачи количества теплоты, выделившиеся за одинаковые промежутки времени при замыкании на сопротивления R_1

и R_2, равны, следовательно,

$$I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2, \text{ где } I_1 = \frac{E}{R_1 + r}; \; I_2 = \frac{E}{R_2 + r}.$$

Подставив значения I_1 и I_2, получим

$$\frac{E^2}{(R_1 + r)^2} R_1 = \frac{E^2}{(R_2 + r)^2} R_2.$$

Решив это уравнение, получим $r = \sqrt{R_1 R_2} = 6$ *ом*.

548. $I \approx 50$ *а*.

Решение. Энергия электрического тока идет на сообщение вагону кинетической энергии и преодоления силы трения, т. е.

$$2UIt = F_т s + \frac{mv^2}{2}, \text{ где } F_т = kP = kmg.$$

Определим пройденный путь

$$s = \frac{at^2}{2}, \text{ но } a = \frac{v}{t}; \text{ тогда } s = \frac{vt^2}{2t} = \frac{vt}{2}.$$

Подставив значение s, решим относительно $I = \dfrac{kmgvt + mv^2}{4Ut} \approx 50$ *а*.

549. $N = 96$ *вт*.

Решение. Мощность на валу двигателя равняется разности между потребляемой мощностью тока $N = IE$ и мощностью, идущей на нагревание обмоток двигателя $N_{тепл} = I^2R$.

Тогда $N_{мех} = N - N_{тепл} = I(E - IR)$.

Для определения $N_{мех}$ надо найти сопротивление электродвигателя. Это можно сделать, исходя из условия, что при полном торможении напряжение, приложенное к двигателю, равно произведению силы тока на сопротивление (в этом случае не возникает противоэлектродвижущая сила индукции):

$$E = I_0 R, \text{ откуда } R = \frac{E}{I_0}.$$

Подставим полученные значения в формулу для $N_{мех}$:

$$N_{мех} = I\left(E - I\frac{E}{I_0}\right) = EI\left(1 - \frac{I}{I_0}\right) = 96 \text{ вт}.$$

550. $I_0 = 62$ *а*.

Решение. Мощность, отдаваемая во внешней части цепи, равна разности мощностей, отдаваемых во всей цепи, и мощности во внутренней части цепи:

$$N = I^2R = EI - I^2r.$$

По условию задачи запишем два уравнения:

$$N_1 = EI_1 - I_1^2 r \text{ и } N_2 = EI_2 - I_2^2 r.$$

Нам надо определить силу тока короткого замыкания $I_0 = \frac{E}{r}$. Разделив почленно правую и левую части каждого уравнения на r, получим

$$\frac{N_1}{r} = \frac{E}{r} I_1 - I_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{N_2}{r} = \frac{E}{r} I_2 - I_2^2.$$

Решая эти два уравнения относительно $\frac{E}{r}$, находим

$$I_0 = \frac{E}{r} = \frac{I_2^2 N_1 - I_1^2 N_2}{I_2 N_1 - I_1 N_2} = 62 \ a.$$

551. Решение. Из формулы мощности $N = \frac{U^2}{R}$ найдем сопротивление ламп:

$$R_1 = \frac{U_1^2}{N_1} = 160 \ ом \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{U_1^2}{N_2} = 360 \ ом.$$

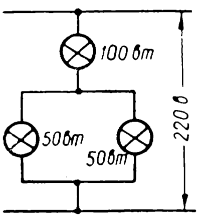


Рис. 239.

При последовательном включении ламп напряжение 220 *в* распределится на лампах пропорционально их сопротивлениям, т. е. $\frac{U'}{U''} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{4}{9}$. Кроме того, $U' + U'' = 220$ *в*.

Отсюда находим, что напряжение на первой лампе 67,7 *в*, а на второй — 152,3 *в*. Поэтому свечение первой лампы почти незаметно, а вторая лампа светит очень ярко и быстро перегорает.

552. $I_1 \approx I_2 \approx 0{,}495$ *а*; $I_3 \approx 0{,}99$ *а*.

Решение. Так как сопротивление 50-ваттных ламп вдвое больше, чем 100-ваттной, то надо 50-ваттные лампы соединить между собой параллельно и включить последовательно с 100-ваттной лампой в сеть с напряжением 220 *в* (рис. 239). Обозначим сопротивление 50-ваттных ламп через R_1 и R_2, а 100-ваттной — через R_3, тогда $R_1 = R_2 = \frac{U_1^2}{N_1}$, а $R_3 = \frac{U_1^2}{N_2}$.

Сила тока, идущего через 100-ваттную лампу,

$$I_3 = \frac{U}{\frac{1}{2} R_1 + R_3} = \frac{2N_1 N_2 U}{U_1^2 (N_2 + 2N_1)} \approx 0{,}99 \ a.$$

Сила тока $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3 \approx 0{,}495$ *а*.

553. $N = 72$ *вт*.

Решение. Для того чтобы общее сопротивление цепи равнялось 1 *ом*, проводники надо соединить так, как показано на рис. 240. Падение напряжения на каждой из параллельных ветвей равно $U = 3 \ a \ (3 \ ом + 1 \ ом) = 12$ *в*, а мощность тока в проводнике сопротивлением 2 *ом* составит $N = \frac{U^2}{R} = 72$ *вт*.

554. $N_2 = 121{,}5$ *вт.*

Решение. Пусть R — полное сопротивление проволоки, образующей кольцо. По законам параллельного соединения проводников можно записать, что силы токов в ветвях $I_1 = 6$ *а* и $I_2 = 3$ *а*. Мощность, выделяемая в кольце,

$$N_1 = \frac{R}{3} I_1^2 + \frac{2}{3} R I_2^2 = 108 \text{ вт, откуда } R = 6 \text{ ом.}$$

Если контакты расположить по диаметру, то в кольце выделится мощность $N_2 = \frac{R}{4} I^2$, где $I = I_1 + I_2 = 9$ *а*.

Подставляя числовые значения, получим $N_2 = 121{,}5$ *вт.*

555. $I \approx 1{,}05$ *а*; $S \approx 0{,}036$ *см*^{2}; $P \approx 303\ 400$ *н.*

Решение. Найдем сначала силу тока в проводах. Полная полезная мощность, вырабатываемая станцией, $N_0 = IU_0$. Потери мощности

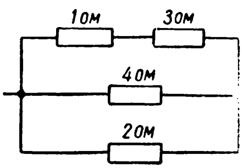


Рис. 240.

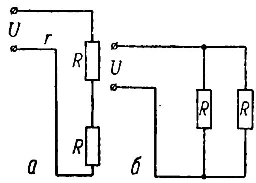


Рис. 241.

составляют IkU_0, где kU_0 — потеря напряжения на подводящих проводах. Следовательно, для мощности N у потребителя будем иметь:

$$N = IU_0 - IkU_0 = IU_0(1 - k), \text{ откуда } I = \frac{N}{U_0(1-k)} \approx 1{,}05 \text{ а.}$$

Сопротивление проводов по закону Ома $R = \frac{kU_0}{I}$. Подставив сюда значение I, получим $R = \frac{kU_0^2(1-k)}{N}$. Однако сопротивление проводника $R = \rho \frac{l}{S}$. С последних двух равенств получаем

$$S = \frac{N\rho l}{kU_0^2(1-k)} \approx 0{,}036 \text{ см}^2.$$

Вес меди $P = \rho l S g \approx 303\ 400$ *н*, где ρ — плотность меди.

556. $R \approx 13{,}4$ *ом.*

Решение. При последовательном включении (рис. 241,*а*) сила тока в нагревателях чайников $I_1 = \frac{U}{2R + r}$, где R — сопротивление подводящих проводников. Потребляемая чайником в этом случае мощность

$$N_1 = I_1^2 R = \frac{U^2 R}{(2R + r)^2}.$$

При параллельном включении (рис. 241, *б*) общее сопротивление нагревателей чайников и подводящих проводов

$$R_{об} = \frac{1}{2}R + r.$$

Общая сила тока, проходящего в цепи,

$$I_3 = \frac{U}{\frac{1}{2}R + r} = \frac{2U}{R + 2r}.$$

Следовательно, через нагреватель каждого чайника идет ток

$$I_2 = \frac{I_3}{2} = \frac{U}{R + 2r},$$

а мощность, потребляемая каждым чайником,

$$N_2 = I_2^2 R = \frac{U^2 R}{(R + 2r)^2}.$$

Поскольку чайники закипают за одно и то же время, то потребляемые ими мощности должны быть одинаковыми:

$$N_1 = N_2 \text{ или } \frac{U^2R}{(2R + r)^2} = \frac{U^2R}{(R + 2r)^2}, \text{ откуда } 2R + r = R + 2r.$$

Значит, сопротивление подводящих проводников равно сопротивлению нагревателя чайника, т. е. $R = r$.

Сопротивление подводящих проводников определим по формуле

$$N = \frac{U^2R}{(2R + r)^2} = \frac{U^2R}{(3R)^2} = \frac{U^2}{9R}, \text{ откуда } R = \frac{U^2}{9N} \text{ или}$$

$$r = R \approx 13{,}4 \text{ ом}.$$

557. $R \approx 5$ *ом*.

Решение. Поскольку подводящие провода соединены с обмоткой утюга последовательно, то их сопротивления должны быть пропорциональны падениям напряжения на соответствующих сопротивлениях:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{U'}{U_1},$$

где $R_1 = \frac{U^2}{N}$ — сопротивление утюга, $U' = 127$ *в* — 115 *в* — падение напряжения на подводящих проводах, U_1 — падение напряжения на утюге.

Тогда $R = R_1 \frac{U'}{U_1} = \frac{U^2}{N} \cdot \frac{U'}{U_1} \approx 5$ *ом*.

558. $S_2 \approx 4{,}7$ *мм*^{2}.

Решение. На основании закона Джоуля — Ленца найдем количества теплоты, выделяющиеся в медном проводе и свинцовом предохранителе:

$$Q_1 = I^2R_1t \text{ и } Q_2 = I^2R_2t, \text{ откуда } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

С другой стороны, количества теплоты

$$Q_1 = c_1 m_1 \Delta \overset{\circ}{t_1} = c_1 D_1 S_1 l_1 \Delta \overset{\circ}{t_1} \quad \text{и} \quad Q_2 = [c_2 (\overset{\circ}{t}_{\text{пл}} - t^\circ) + \lambda_2] D_2 S_2 l_2,$$

где D_1 и D_2 — плотности соответственно меди и свинца.

Сопротивления проводников

$$R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S_1} \quad \text{и} \quad R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S_2}\ ; \ \text{тогда} \ \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1 l_1 S_2}{\rho_2 l_2 S_1}.$$

Подставив эти значения Q_1, Q_2, R_1 и R_2 в предыдущее соотношение, получим

$$\frac{c_1 D_1 S_1 l_1 \Delta \overset{\circ}{t_1}}{[c_2 (\overset{\circ}{t}_{\text{пл}} - t^\circ) + \lambda_2] D_2 S_2 l_2} = \frac{\rho_1 l_1 S_2}{\rho_2 l_2 S_1}, \ \text{откуда}$$

$$S = \sqrt{\frac{S_1^2 \rho_2 c_1 D_1 \Delta \overset{\circ}{t_1}}{\rho_1 D_2\ [c_2 (\overset{\circ}{t}_{\text{пл}} - t^\circ) + \lambda_2]}} \approx 4{,}7\ \text{мм}^2.$$

559. $l \approx 6$ *м*.

Решение. По условию задачи можно записать

$$\frac{U^2}{R} t\eta = cm(\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1}) \ \text{или} \ U^2 t\eta = cm\rho \frac{l}{S} (\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1}), \ \text{откуда}$$

$$l = \frac{U^2 t\eta S}{cm\rho (\overset{\circ}{t_2} - \overset{\circ}{t_1})} \approx 6\ \text{м}.$$

560. $R_1 = \frac{1}{3} R$; $t_2 = 16$ *мин*; $t_3 = 5\frac{1}{3}$ *мин*.

Решение. Количество теплоты, выделяющейся при прохождении электрического тока, по закону Джоуля —Ленца $Q = \frac{U^2}{R} t$.

Если то же количество воды нагреть до той же температуры, использовав только часть обмотки (секцию), то $Q = \frac{U^2}{R_1} t_1$, где R_1 — сопротивление секции, t_1 — время, необходимое для нагревания.

Приравняв правые части равенств, получим $\frac{t}{R} = \frac{t_1}{R_1}$, откуда $R_1 = R\frac{t_1}{t}$. Подставив числовые значения, получим $R_1 = \frac{1}{3} R$. Сопротивление второй секции $R_2 = \frac{2}{3} R$. Аналогично предыдущему имеем

$$\frac{t}{R} = \frac{t_2}{R_2}; \ t_2 = t\frac{R_2}{R}.$$

Подставив сюда значение R_2, получим $t_2 = \frac{2}{3} t = 16$ *мин*.

Сопротивление R_3 параллельно соединенных секций

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{9} R; \text{ тогда } \frac{t}{R} = \frac{t_3}{R_3};$$

$$t_3 = t \frac{R_3}{R} = \frac{2}{9} t \text{ или } t_3 = 5\frac{1}{3} \text{ мин.}$$

561. $I = 3$ *а.*

Решение. При последовательном соединении секций сила тока в цепи $I_1 = \frac{E}{2R + r}$, а при параллельном $I_2 = \frac{E}{\frac{1}{2}R + r}$.

В соответствии с условием задачи в обоих случаях в нагревателе за одинаковое время выделяется одинаковое количество теплоты. Следовательно, можно записать:

$$I_1^2 (2R) = I_2^2 \frac{R}{2} \text{ или } \left(\frac{E}{2R + r}\right)^2 2R = \left(\frac{E}{\frac{1}{2}R + r}\right)^2 \frac{R}{2}.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень и решая уравнение относительно r, получим $r = R = 4$ *ом.*

Тогда сила тока короткого замыкания $I = \frac{E}{R} = 3$ *а.*

562. Если соединить две секции последовательно, а затем эти группы соединить параллельно, то $N = 32$ *вт*; $N_{\text{полез}} = 16$ *вт.*

Решение. Вода в нагревателе нагреется быстрее при том способе соединения элементов нагревателя, при котором будет наибольшая сила тока в цепи, а это, как известно, будет тогда, когда сопротивление внешнего участка цепи будет равно внутреннему сопротивлению батареи. Значит, надо соединить по две секции последовательно, а затем эти группы соединить параллельно. Тогда сила тока в цепи будет $I = \frac{E}{2 \cdot \frac{R}{2} + r} = 4$ *а.*

Полная мощность, развиваемая аккумуляторной батареей, $N = \frac{E^2}{\frac{2R}{2} + r} = 32$ *вт.* Полезная мощность $N_{\text{полез}} = I^2 \frac{2R}{2} = 16$ *вт.*

563. $m \approx 2{,}73$ *кг.*

Решение. Энергия электрического тока идет на нагревание воды и превращение ее в пар, поэтому

$$\eta N t = cm\left(t_2^\circ - t_1^\circ\right) + rm.$$

Тогда количество дистиллированной воды, полученное за время t,

$$m = \frac{Nt\eta}{c\left(t_2^\circ - t_1^\circ\right) + r} \approx 2{,}73 \text{ кг.}$$

564. $t \approx 49$ *мин.*

Решение. Аналогично решению предыдущей задачи можно записать:

$$\eta \frac{U^2}{R} t = m \left[c \left(t_2^{\circ} - t_1^{\circ}\right) + r\right],$$

где $m = \rho V$ — масса воды в чайнике.

Тогда

$$t = \frac{\rho V \left[c \left(t_2^{\circ} - t_1^{\circ}\right) + r\right]}{U^2 \eta} \cdot R \approx 49 \text{ мин.}$$

565. $t_3 \approx 44$ *мин.*

Решение. Количество теплоты, выделяющейся в спирали, идет на нагревание воды и на потери, т. е.

$$\frac{U^2}{R} t = cm \left(t^{\circ} - t_0^{\circ}\right) + kt.$$

Поскольку во всех случаях $cm \left(t^{\circ} - t_0^{\circ}\right)$ одинаковое, можно записать:

$$\frac{U_1^2}{R} t_1 - kt_1 = \frac{U_2^2}{R} t_2 - kt_2 = \frac{U_3^2}{R} - kt_3.$$

Таким образом, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{U_1^2}{R} t_1 - kt_1 = \frac{U_2^2}{R} t_2 - kt_2;$$

$$\frac{U_1^2}{R} t_1 - kt_1 = \frac{U_3^2}{R} t_3 - kt_3.$$

Определив из первого уравнения $k = \dfrac{U_1^2 t_1 - U_2^2 t_2}{R (t - t_2)}$ и подставив во второе уравнение, после упрощений получим

$$t_3 = t_1 t_2 \frac{U_1^2 - U_2^2}{U_3^2 (t_2 - t_1) + U_1^2 t_1 - U_2^2 t_2} \approx 44 \text{ мин.}$$

566. $r = 0{,}75$ *ом.*

Решение. Условием выделения одинаковой мощности на сопротивлении 3 *ом* будет, очевидно, одинаковая сила тока, протекающего во внешней части цепи при обоих способах соединения аккумуляторов в батарею:

$$I_1^2 R = I_2^2 R \text{ или } I_1 = I_2.$$

Сила тока в цепи при смешанном $I_1 = \dfrac{4E}{3 + \dfrac{4r}{2}}$ и при последовательном соединении аккумуляторов в батарею $I_2 = \dfrac{8E}{3 + 8r}$. Тогда $\dfrac{4E}{3 + 2r} = \dfrac{8E}{3 + 8r}$, откуда $r = 0{,}75$ *ом.*

567. При параллельном включении потребляется большая мощность; $\frac{N_1}{N_2} = 4$.

Решение. При параллельном включении общее сопротивление потребителей

$$R'_{об} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

и потребляемая от сети мощность

$$N_1 = \frac{U^2}{R'_{об}} = \frac{U^2}{R_1 R_2}(R_1 + R_2).$$

При последовательном включении общее сопротивление потребителей

$$R''_{об} = R_1 + R_2$$

и потребляемая от сети мощность

$$N_2 = \frac{U^2}{R''_{об}} = \frac{U^2}{R_1 + R_2}.$$

Найдем отношение мощностей, потребляемых в первом и втором случаях:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1 R_2} = \frac{R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2}{R_1 R_2} > 1.$$

Как видим, мощность, потребляемая при параллельном включении потребителей, больше, нежели при последовательном их включении. Если $R_1 = R_2 = R$, то отношение мощностей $\frac{N_1}{N_2} = \frac{4R^2}{R^2} = 4$, т. е. параллельно включенные одинаковые нагрузки потребляют от сети в четыре раза большую мощность, чем последовательно включенные.

568. $R_x = 0{,}1125$ *ом*.

Решение. Мощность N_1, выделяемая на сопротивлении R, в первом случае равна $N_1 = I^2 R = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$, где E — э. д. с. батареи. Мощность N_2, выделяемая на двух параллельно соединенных сопротивлениях,

$$N_2 = I_2^2 R_{общ} = \frac{E^2 R_{общ}}{(R_{общ} + r)^2}, \text{ где } R_{общ} = \frac{RR_x}{R + R_x}.$$

По условию задачи

$$N_1 = N_2 \quad \text{или} \quad \frac{E^2 R}{(R + r)^2} = \frac{E^2 RR_x (R + R_x)}{[RR_x + r(R_x + R)]^2}.$$

Решая это уравнение относительно R_x, получим $R_x = R\frac{r^2}{R^2 - r^2} = 0{,}1125$ *ом*.

569. $E = 150$ *в*; $\eta = 80\%$.

Решение. Э. д. с. генератора

$$E = U + Ir,$$

где I — сила тока в цепи. Однако

$$I = \frac{U}{R_1} = \frac{U}{R} N,$$

где R — сопротивление одной лампы.

Тогда $E = U + \frac{U}{R} Nr = U\left(1 + \frac{r}{R} N\right) = 150$ *в*.

Коэффициент полезного действия генератора $\eta = \frac{UIt}{EIt} = \frac{U}{E} = $ $= \frac{R}{R + Nr} = 80\%$.

570. $N_{\text{полезн } 1} = 40$ *вт*; $N_{\text{полезн } 2} = 45$ *вт*, $N_{\text{полезн } 3} \approx 36{,}7$ *вт*; $\eta_1 \approx 33\%$; $\eta_2 = 50\%$; $\eta_3 \approx 71\%$.

Решение. Полезная мощность, развиваемая батареей, равна

$$N_{\text{полезн}} = I^2R, \text{ где } I = \frac{E}{R + r}\text{; следовательно,}$$

$$N_{\text{полезн}} = \frac{E^2R}{(R + r)^2}.$$

Подставляя значение сопротивления внешней части цепи R, получим значения полезной мощности: $N_{\text{полезн } 1} = 40$ *вт*; $N_{\text{полезн } 2} = 45$ *вт* и $N_{\text{полезн } 3} \approx 36{,}7$ *вт*.

Изменяя величину внешнего сопротивления при постоянных E и r, убеждаемся, что наибольшая полезная мощность будет при $R = r$:

$$N_{\text{полезн}} = \frac{E^2}{4r} = 45 \text{ вт}.$$

Полная мощность, развиваемая батареей, $N = \frac{E^2}{R + r}$. Тогда коэффициент полезного действия батареи

$$\eta = \frac{N_{\text{полезн}}}{N} = \frac{R}{R + r}.$$

Подставляя числовые значения, получим $\eta_1 \approx 33\%$; $\eta_2 = 50\%$ и $\eta_3 \approx 71\%$. Как видим, коэффициент полезного действия батареи растет с увеличением сопротивления внешней части цепи и стремится к 100% при $R \gg r$.

571. $\eta = \frac{N}{U^2}\left(\frac{U^2}{N} - r\right) = 1 - \frac{Nr}{U^2}$.

Решение. Мощность N, развиваемая генератором, равна

$$N = \frac{U^2}{r + R} \text{ или } R = \frac{U^2}{N} - r,$$

где R — сопротивление нагрузки.

Полезную мощность $N_{\text{полезн}}$ можно определить так:

$$N_{\text{полезн}} = I^2R = \left(\frac{N}{U}\right)^2 \left(\frac{U^2}{N} - r\right).$$

Тогда коэффициент полезного действия линии передачи

$$\eta = \frac{N_{\text{полезн}}}{N} = \frac{N}{U^2}\left(\frac{U^2}{N} - r\right) = 1 - \frac{Nr}{U^2}.$$

572. Р е ш е н и е. Обозначим мощность, развиваемую во внешней цепи, через $N_а$, рассеиваемую внутри батареи, через $N_б$ и полную мощность через $N_в$. Тогда $N_а = \dfrac{E^2}{(R+r)^2} R$; $N_б = \dfrac{E^2}{(R+r)^2} r$; $N_в = \dfrac{E^2}{R+r}$. Придавая R различные значения, составим таблицу.

R	0	5	10	15	20	25	30	35
$N_а$	0	80	≈ 71	60	≈ 51	$\approx 44{,}4$	≈ 39	35
$N_б$	320	80	$\approx 35{,}5$	20	≈ 13	≈ 9	$\approx 6{,}5$	5
$N_в$	320	160	≈ 107	80	64	≈ 53	$\approx 45{,}7$	40

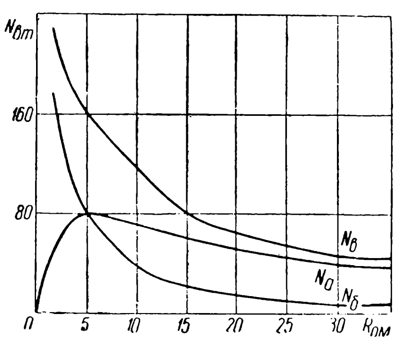


Рис. 242.

По данным таблицы построим графики (рис. 242).

573. $E = 2$ *в*; $r = 0{,}2$ *ом*.

Р е ш е н и е. Мощность, выделяемая во внешней цепи (полезная мощность), достигает максимума при внешнем сопротивлении, равном внутреннему сопротивлению генератора. При этом падение напряжения во внешней цепи $U = \frac{1}{2} E$, где E — э. д. с. генератора. Из графика видим, что $N_{\text{макс}} = IU = 5$ *вт*. Следовательно, $U = \dfrac{N_{\text{макс}}}{I} = 1$ *в*.

Отсюда искомая э. д. с. элемента $E = 2U = 2$ *в*. Так как при этом $I = \dfrac{E}{2r}$, то искомое внутреннее сопротивление элемента $r = \dfrac{E}{2I} = 0{,}2$ *ом*.

574. Р е ш е н и е. Коэффициент использования электроэнергии, действительно, тем больше, чем больше R и достигает значения, равного единице, при $R \gg r$. Однако делать сопротивление подключенного к источнику напряжения потребителя слишком большим нецелесообразно, так как, хотя напряжение на нем возрастает, но больше э. д. с. источника оно стать не может, тогда как сила тока при неограниченном увеличении сопротивления уменьшается также неограниченно. Поэтому в формуле мощности $N = IU$ первый множитель при неограниченном росте сопротивления потребителя стремится к нулю, а второй не превышает некоторого конечного значения. Таким образом, потребляемая мощность тоже будет стремиться к нулю.

Если взять потребитель со слишком малым сопротивлением, то сила тока возрастает, но не может стать больше $\frac{E}{r}$, а напряжение на потребителе при неограниченном уменьшении его сопротивления стремится к нулю. В результате, как и в первом случае, потребляемая мощность также стремится к нулю.

Покажем, что максимальное значение потребляемой мощности достигается при равенстве сопротивлений источника напряжения r и потребителя R. Мощность, потребляемая во внешней части цепи,

$$N = \frac{E^2}{(R+r)^2} R.$$

Умножим числитель и знаменатель на $4r$:

$$N = \frac{E^2 4Rr}{4r(R+r)^2}, \text{ но } 4Rr = (R+r)^2 - (R-r)^2;$$

тогда

$$N = \frac{E^2}{4r}\left[1 - \frac{(R-r)^2}{(R+r)^2}\right].$$

Из этой формулы видно, что при $R = 0$ и $R = \infty$ $N = 0$. При $R = r$ величина мощности достигает максимума (поскольку и числитель и знаменатель дроби в квадратных скобках положительные, ее наименьшее значение равно нулю, что достигается при $R = r$).

575. Решение. Мощность, развиваемая каждым источником напряжения, равна EI, где I — сила тока, идущего через данный источник. Для нахождения же силы тока в последовательной цепи нужно учитывать все действующие там э. д. с. Поэтому $I = \frac{E_1 + E_2}{R}$. Вычисляя теперь полную мощность как сумму мощностей, развиваемых каждым источником, получим

$$N = N_1 + N_2 = E_1 I + E_2 I = (E_1 + E_2)\frac{E_1 + E_2}{R} = \frac{(E_1 + E_2)^2}{R}.$$

576. Решение. Использованные абитуриентами три записи закона Джоуля — Ленца имеют разный физический смысл и сохраняют свою равноценность только в некоторых частных случаях. Всегда и без всяких оговорок количество выделяемой током теплоты правильно определяется формулой $Q = I^2Rt$. Формулой $A = IUt$ всегда определяется полная работа электрических сил, а формула $Q = \frac{U^2}{R}t$ не имеет самостоятельного физического значения, является вспомогательной и справедлива лишь для тех случаев, когда $A = Q$.

Чтобы лучше в этом разобраться, рассмотрим процессы, которые происходят в схеме, предложенной в условии задачи.

Когда электрический ток проходит по металлическому проводнику, то упорядоченное движение электронов обеспечивается только действием электрических сил. Если напряжение на проводнике U, а сила тока в проводнике I, то за время t через проводник будет перенесен заряд $q = It$, и электрические силы выполнят работу $A = qU = IUt$. В это же время за счет беспорядочных соударений с ионами кристаллической решетки кинетическая энергия электронов превратится в теплоту. Количество выделившейся теплоты $Q = I^2Rt$. Так как кроме работы электрических сил и расходования энергии при соударениях никаких других процессов в проводнике не происходит, то на основании закона сохранения энергии можно написать: $Q = A$.

Перемещение электрических зарядов внутри аккумулятора в отличие от обычного проводника происходит при одновременном действии сил электрического поля $F_{эл}$, создаваемых зарядной станцией, и химических сил $F_{хим}$, имеющих противоположное направление (рис. 243).

Так как направление зарядного тока совпадает с направлением электрических сил, то эти силы будут совершать положительную работу, равную по-прежнему $A = IUt$. Это и будет полная работа, выполняемая станцией по зарядке данного аккумулятора. Однако теперь эта работа уже не превращается полностью в теплоту. Часть ее расходуется на преодоление химических сил и превращается в запас энергии аккумулятора. Поэтому равенство $Q = A$ в этом случае писать уже нельзя, и закон Джоуля—Ленца для данного случая можно применять лишь в форме $Q = I^2Rt$.

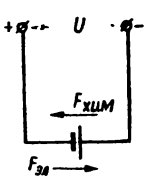


Рис. 243.

Из этих рассуждений непосредственно вытекает полное решение задачи. На зарядку аккумулятора станция совершает работу $A = IUt = 130$ *дж* ($t = 1$ *сек*). За время $t = 1$ *сек* в аккумуляторе выделится количество теплоты $Q = I^2Rt = 10$ *дж*.

В запас химической энергии аккумулятора превратится количество энергии $E = A - Q = 120$ *дж*, т. е. доля полезно затраченной энергии составит $\eta = \frac{E}{A} \approx 92\%$.

§ 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

577. $E \approx -0{,}24$ *в*.

Решение. Э. д. с. определим из соотношения $E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Площадь сечения соленоида (рис. 244) $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Магнитный поток при повороте соленоида на 180° изменяется на $\Delta\Phi = 2\mu_0 HSn$. Подставив значение S и $\Delta\Phi$ в формулу э. д. с., получим

$$E = -\frac{2\mu_0 HSn}{t} = -\frac{\mu_0 H\pi d^2 n}{2t} \approx -0{,}24 \text{ в}.$$

578. $v_1 = \dfrac{E - \sqrt{mgRv}}{\sqrt{\dfrac{mgR}{v}}}$.

Решение. Груз, опускаясь со скоростью v, приводит во вращение якорь динамомашины. Витки обмотки якоря при вращении пересекают магнитные силовые линии, и в цепи якоря возникает э. д. с. индукции E'.

Цепь якоря замкнута на сопротивление R; следовательно, в этой цепи возникает ток $I = \frac{E'}{R}$.

Согласно закону сохранения энергии, мощность, развиваемая динамомашиной, должна быть равна мощности, отдаваемой грузом при его опускании:

$$\frac{E'^2}{R} = mgv, \text{ откуда } E' = \sqrt{mgvR}. \qquad (1)$$

Если динамомашина будет работать как двигатель, то при той же скорости вращения якоря э. д. с. индукции будет равна э. д. с. динамомашины. Поскольку э. д. с. индукции пропорциональна скорости вращения якоря, то, возникая в двигателе, она будет

$$E_1 = E' \frac{v_1}{v} \text{ и } E - E_1 = IR. \qquad (2)$$

Согласно закону сохранения энергии, мощность, потребляемая электродвигателем, равна мощности, расходуемой на омическом сопротивлении R, и мощности, расходуемой на поднятие груза:

$$EI = I^2R + mgv_1, \qquad (3)$$

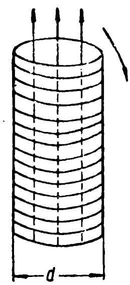


Рис. 244.

откуда, решая систему уравнений (2) и (3) и выражая E' в соответствии с (1), получим

$$v_1 = \frac{E - \sqrt{mgRv}}{\sqrt{\frac{mgR}{v}}}.$$

579. $N \approx 1{,}02 \cdot 10^{-13}$ *вт*.

Решение. Определим сначала э. д. с. индукции:

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 HSn}{t}.$$

Мощность, расходуемая на нагревание проводников катушки,

$$N = \frac{E^2}{R} = \frac{(-\mu_0 HSn)^2}{Rt^2} \approx 1{,}02 \cdot 10^{-13} \text{ вт}.$$

580. Решение. Электрометр будет показывать нуль при подключении проводников от прибора к любым двум точкам кольцевого проводника, потому что разность потенциалов между любыми двумя точками равна нулю. Имеется в виду, что электрометр имеет бесконечно большое сопротивление и бесконечно малую емкость.

581. $f \approx 1{,}6 \cdot 10^{-15}$ *н*.

Решение. На участок l провода с током I, расположенный перпендикулярно силовым линиям магнитного поля с индукцией B, действует сила $F = BIl$. Однако ток в проводнике — это упорядоченное перемещение электронов. Следовательно, на движущийся внутри провода электрон со стороны магнитного поля действует сила f. Определим ее величину. Если на участке l провода с током движутся N электронов и на этот участок действует сила F, то на один электрон действует сила $f = \frac{F}{N} = \frac{BIl}{N}$.

Но сила тока $I = nevS$, где e — заряд электрона, n—концентрация электронов в проводе; v — скорость упорядоченного движения электронов; S — площадь сечения провода, а $N = nlS$. Тогда $f = evB \approx$ $\approx 1{,}602 \cdot 10^{-15}$ *н*.

Сила f перпендикулярна силовым линиям магнитного поля и направлению движения электрона.

582. Решение. При перемещении железного сердечника в катушке меняется магнитный поток $\Phi = BS$, так как величина магнитной индукции увеличивается от значения B_0 до $B = \mu B_0$, где μ— относительная магнитная проницаемость.

Поскольку магнитный поток, пронизывающий контур первой катушки, изменяется, то в этой катушке будет индуцироваться ток, при протекании которого катушка нагревается. Нагревание катушки происходит за счет энергии источника постоянного напряжения, в цепь которого включена вторая катушка.

583. $\Phi = \pi R^2 H \mu_0$.

Решение. В кольце возникает индукционный ток, магнитное поле которого по величине и направлению будет равно выключенному внешнему полю: $\Phi = \pi R^2 H \mu_0$.

584. $E = 0{,}5$ *в*.

Решение. При вращении стержень пересекает за 1 *сек* магнитный поток $\Phi = B\pi r^2 n$, где r — длина стержня, $n = \frac{\omega}{2\pi}$ — число оборотов в секунду, ω — угловая скорость.

Э. д. с. индукции прямо пропорциональна скорости пересечения магнитного потока, т. е. $E = B\pi r^2 \frac{\omega}{2\pi} = Br^2 \frac{\omega}{2} = 0{,}5$ *в*.

585. $E'_{инд} \approx 46{,}6$ *в*.

Решение. Падение напряжения на всей цепи равно IR, значит, э. д. с. индукции $E_{инд} = E - IR$.

Если двигатель будет работать как динамомашина, то при той же скорости вращения якоря э. д. с. динамомашины будет равна $E_{инд}$. Поскольку $E_{инд}$ пропорциональна скорости вращения якоря, то

$$\frac{E'_{инд}}{E_{инд}} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{или} \quad E'_{инд} = E_{инд} \frac{n_2}{n_1} = (E - IR) \frac{n_2}{n_1} \approx 46{,}6 \text{ в}.$$

586. $n = \frac{E}{E_1} n_1 - \frac{2\pi M n_1^2}{E_1^2} R$. При $M = 0$ $n = \frac{E}{E_1} n_1$;

$$I_1 = 0; \; I_2 = \frac{E}{R}.$$

Решение. Поскольку э. д. с. индукции, возникающая в якоре, пропорциональна скорости его вращения

$$\frac{E_{инд}}{E_1} = \frac{n}{n_1}, \text{ откуда } E_{инд} = E_1 \frac{n}{n_1}. \tag{1}$$

В соответствии с законом сохранения энергии при работе машины в режиме двигателя имеет место уравнение

$$EI = I^2R + E_{\text{инд}}I, \tag{2}$$

где EI — полная электрическая мощность источника напряжения, I^2R — тепловая часть мощности в цепи, $E_{\text{инд}}I$ — механическая мощность двигателя. Однако механическую мощность двигателя можно выразить через механический момент нагрузки и угловую скорость вращения якоря $E_{\text{инд}}I = F_{\text{т}}v$, где $F_{\text{т}}$ — сила трения, $v = 2\pi rn$ — линейная скорость точек на оси вала.

Тогда равенство $E_{\text{инд}}I = F_{\text{т}} \cdot 2\pi rn$ можно переписать так:

$$E_{\text{инд}}I = 2\pi nM, \tag{3}$$

где $M = F_{\text{т}}r$ — механический момент нагрузки (момент сил трения на оси якоря). Из уравнений (1) и (3) найдем

$$I = \frac{2\pi Mn_1}{E_1}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2) и решая полученное уравнение относительно n, окончательно получим

$$n = \frac{E}{E_1}n_1 - \frac{2\pi Mn_1^2}{E_1^2}R.$$

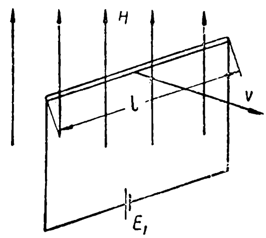


Рис. 245.

Если механическая нагрузка на валу якоря отсутствует ($M = 0$), то $n = \frac{E}{E_1}n_1$. Кроме того, $E_{\text{инд}}I = 0$ и уравнение (2) принимает вид: $EI = I^2R$. Это уравнение имеет два корня: $I_1 = 0$ — сила тока холостого хода и $I_2 = \frac{E}{R}$ — сила тока в цепи при полностью заторможенном якоре.

587. $I \approx 0{,}98$ *а*.

Р е ш е н и е. При перемещении проводника (рис. 245) в нем возбуждается э. д. с., направленная против э. д. с. источника напряжения, величину которой определяем по закону Фарадея:

$$E_2 = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\mu_0 Hlv.$$

Напряжение на концах проводника

$$U = E_1 + E_2 = E_1 - \mu_0 Hlv.$$

Силу тока в проводнике определим по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R+r} = \frac{E_1 - \mu_0 Hlv}{R+r} \approx 0{,}98 \text{ а}.$$

588. $E = 240$ *в*; $N' = 580$ *вт*.

Р е ш е н и е. Закон сохранения энергии для работы динамомашины можно записать так:

$$\frac{E^2}{R} = N(1 - \alpha),$$

где E — э. д. с. динамомашины, α — коэффициент потерь, N — расходуемая мощность. Отсюда $E = \sqrt{NR(1-\alpha)} = 240$ *в*.

Поскольку при сопротивлении цепи R' число оборотов остается прежним, то э. д. с. динамомашины и потери на трение тоже не изменятся. Тогда на основании закона сохранения энергии $N' = \frac{E^2}{R'} + \alpha N = 580$ *вт*.

589. Решение. В условии задачи сделано неправильное предположение, что между точками A и B существует разность потенциалов, отличная от нуля. В формуле $I = \frac{U}{r}$ величина U является не разностью потенциалов, а частью э. д. с. индукции E, приходящейся на участок цепи с сопротивлением r. На участок с сопротивлением R приходится большая часть э. д. с. индукции (в случае электромагнитной индукции э. д. с. равномерно распределена по контуру). Закон Ома в этом случае надо записать так: $I = \frac{E}{R+r} = \frac{U+u}{R+r}$.

590. $t = 100$ *сек*.

Решение. При возрастании силы тока после присоединения катушки к источнику энергии в катушке возникает э. д. с. самоиндукции $E = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$, которую должна преодолевать приложенная внешняя э. д. с. источника E_1. По закону Ома для полной цепи можно записать:

$$I = \frac{E_1 + E}{R+r} \quad \text{или} \quad I = \frac{E_1 - L\frac{\Delta I}{\Delta t}}{R+r}.$$

Поскольку сопротивления R и r очень маленькие, то

$$I(R+r) = 0; \quad \text{тогда } E_1 = L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \text{ откуда } \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{E_1}{L} = 0{,}5 \ a/сек.$$

Таким образом, $t = \frac{I}{\frac{E_1}{L}} = 100$ *сек*.

591. Решение. Скорее нагревается работающий электродвигатель, так как его якорь вращается с меньшим числом оборотов, вследствие чего противо-э. д. с. индукции в якоре работающего двигателя будет меньше и сила тока больше, чем у двигателя, вращающегося вхолостую. Разность приложенного напряжения U и противо-э. д. с. индукции определяет количество теплоты, выделяющейся при прохождении электрического тока по якорю.

592. $H \approx 152{,}3$ *а/м*.

Решение. Ограничимся горизонтальной составляющей напряженности магнитного поля, т. е. рассмотрим однородное магнитное поле, силовые линии которого идут горизонтально. Вычислим максимальное значение э. д. с., соответствующее той фазе вращения, когда стороны a и b движутся перпендикулярно силовым линиям магнитного поля. Электродвижущая сила, возбуждаемая в сторонах рамки a и b (общей длиной $2a$),

$$E = \frac{\mu_0 H l s}{t},$$

где H — напряженность магнитного поля;

l — длина проволоки, пересекающая магнитные силовые линии;

s — смещение проволоки; t — время этого смещения.

Однако $\frac{s}{t} = v$ и $v = 2\pi Rn$,

где n — число оборотов в единицу времени;

$R = \frac{a}{2}$ — радиус вращения.

Тогда $E = 2\mu_0 \pi nkHa^2$, где коэффициент k введен для учета того, что рамка состоит из k витков. Эффективное значение силы тока в рамке

$$I_{эфф} = \frac{E_{эфф}}{r_1 + r_2}.$$

Однако $E_{эфф} = \frac{E}{\sqrt{2}}$; тогда $I_{эфф} =$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi nkHa^2\mu_0}{r_1 + r_2}, \text{ откуда } H = \frac{I_{эфф}(r_1 + r_2)}{\sqrt{2}\pi nka^2\mu_0} \approx$$

$\approx 152{,}3$ *а/м* ($I_{эфф} = 0{,}85$ *ма*).

593. $\alpha \approx 11°24'$.

Решение. Электродинамическая сила, действующая на хомутик,

$$F = \mu_0 HIl.$$

Хомутик отклоняется на угол α и устанавливается в направлении равнодействующей R сил P и F (рис. 246). Из треугольника KMN можно записать

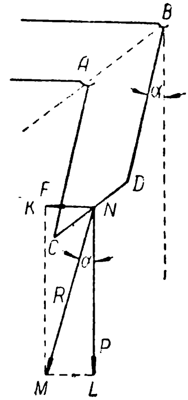


Рис. 246.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{P} = \frac{\mu_0 HIl}{mg} \approx 0{,}2016, \text{ откуда } \alpha \approx 11°24'.$$

§ 7. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

594. $E \approx 5{,}04$ *в*.

Решение. Э. д. с. индукции, возникающая в рамке при вращении в магнитном поле напряженностью H с угловой скоростью ω, равна $E = \mu_0 HSn\,\omega\sin\omega t$, где S — площадь одного витка рамки, n — число витков.

Как видим из формулы, э. д. с. индукции является синусоидальной функцией угла поворота ωt. Множитель, стоящий перед функцией $\sin\omega t$, называется амплитудой э. д. с. $E_0 = \mu_0 HSn\omega$.

Из амплитудного значения электродвижущей силы определим величину угловой скорости вращения рамки $\omega = \frac{E_0}{\mu_0 HSn}$ *рад/сек* $\approx$ ≈ 79 *рад/сек*. Через 0,01 *сек* после начала движения рамки из нейтрального положения э. д. с. равна $E = E_0 \sin\omega t_1$.

Выражая $\omega t_1 = 0{,}79$ *рад* в градусах, находим

$$E = 7{,}2 \text{ в.} \sin 45°15' \approx 5{,}04 \text{ в.}$$

595. $E_0 \approx 310$ *в*; $E_{эфф} \approx 220$ *в*.

Решение. Электродвижущая сила переменного тока в данный момент равна $E = E_0 \sin\omega t$, где E_0 — амплитудное значение э. д. с., $\omega t = \frac{\pi}{6}$ — фаза переменного тока. Отсюда $E_0 = \frac{E}{\sin\omega t} \approx 310$ *в*.

Эффективное значение э. д. с. $E_{эфф} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \approx 220$ *в*.

596. $U_2 = 6$ *в*.

Решение. Коэффициент трансформации

$$k = \frac{U_1}{U_2} = \frac{E_1}{E_2},$$

где E_1 и E_2 — э. д. с., индуктированные соответственно в первичной и вторичной обмотках. По условию задачи потерями энергии в первичной цепи можно пренебречь, поэтому $E_1 = U_1$. Напряжение на зажимах вторичной обмотки $U_2 = E_2 - I_2 r_2$, где $I_2 r_2$ — падение напряжения на вторичной обмотке. Из первого уравнения, учитывая, что $E_1 = U_1$, находим

$$E_2 = \frac{U_1}{k}; \text{ тогда } U_2 = \frac{U_1}{k} - I_2 r_2 = 6 \text{ в}.$$

597. Решение. Сила тока, проходящего по участку, где выполняется сварка, равна $I = \frac{4в}{R}$, где R— сопротивление участка. Если пользоваться реостатом, то такой же силы ток будет проходить по проводникам, с помощью которых подключен реостат.

Поскольку сопротивление R малое, то по цепи проходит ток больше допустимого. Если же пользоваться трансформатором, то сила тока, проходящего по подводящим проводникам, будет $I = \frac{4}{127}$, т. е. почти в 32 раза меньше.

598. $N_1 \approx 96$ *вт*.

Решение. Репродукторы подключены параллельно, поэтому по вторичной обмотке идет ток силой $I_2 = I\ n = 3{,}04$ *а*. Тогда на этой обмотке выделяется мощность $N_2 = I_2 U_2 = 91{,}2$ *вт*. При этом первичная обмотка потребляет мощность $N_1 = \frac{N_2}{\eta} = 96$ *вт*.

599. Решение. Надо подключить одну из обмоток трансформатора к источнику переменного тока и измерить напряжение на концах обеих обмоток. Пусть напряжения будут соответственно U_1 и U_2. Тогда можно записать: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$, где n_1 и n_2 надо определить.

Намотаем на вторую обмотку дополнительно n витков и измерим напряжение U_3. Тогда

$$\frac{U_1}{U_3} = \frac{n_1}{n + n_2}.$$

Решая эти два уравнения как систему, получим

$$n_1 = \frac{nU_1}{U_3 - U_2}; \quad n_2 = \frac{nU_2}{U_3 - U_2}.$$

600. $n_1 = 200$; $n_2 = 6600$ витков.

Р е ш е н и е. Э. д. с., индуктируемая в одном витке, одинакова во всех обмотках трансформатора и равна 0,5 *в*. Тогда первичная обмотка имеет $n_1 = \dfrac{100\,в}{0{,}5\,в} = 200$ витков, а вторичная — $n_2 = \dfrac{3300\,в}{0{,}5\,в} = 6600$ витков.

601. $T = 0{,}02$ *сек*; $k = 12$ пар полюсов.

Р е ш е н и е. Частота тока ν связана с числом оборотов якоря генератора n и числом пар полюсов k зависимостью $\nu = nk$, откуда $k = \dfrac{\nu}{n} = 12$ пар полюсов.

Период $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$ *сек*.

602. $B \approx 0{,}0159$ тесла (*вб/м*²).

Р е ш е н и е. Максимальная э. д. с. индукции связана с максимальным магнитным потоком Φ_0, пронизывающим контур рамки, соотношением $E_0 = N\omega\Phi_0$. Подставим сюда значения $\omega = 2\pi n$ и $\Phi_0 = BS$. Тогда

$$E_0 = N\cdot 2\pi nBS,\ \text{откуда}\ B = \frac{E_0}{2\pi nNS} \approx 0{,}0159\ \text{тесла}\ (вб/м^2).$$

603. Р е ш е н и е. Магнитные потоки двух полностью одинаковых обмоток, намотанных в одном и том же направлении на общий сердечник и соединенных параллельно, совпадают, а это равносильно увеличению поперечного сечения провода первичной обмотки вдвое. Однако при увеличении сечения провода уменьшается его омическое сопротивление; индуктивность же практически не изменяется. Поскольку омическое сопротивление и так мало по сравнению с индуктивным, то общее сопротивление двух катушек не изменяется, поэтому и показания амперметра не изменяются.

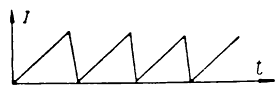


Рис. 247.

604. Р е ш е н и е. Силы, действующие на металлические опилки, возникают вследствие появления в опилках индукционных токов при изменении магнитного поля электромагнита. При нарастании силы тока в электромагните опилки в соответствии с законом Ленца выталкиваются из поля, а при уменьшении тока — втягиваются. Эти силы пропорциональны скорости изменения магнитного поля и, соответственно, силе тока. Поэтому сила тока в электромагните должна медленно нарастать, а затем очень быстро падать до нуля. Примерная зависимость силы тока от времени представлена на рис. 247.

605. Р е ш е н и е. 1. При надевании железного цилиндра на первую обмотку часть магнитных силовых линий, которые раньше проходили через весь сердечник, замкнутся через цилиндр. Вследствие увеличения магнитного потока индуктивное сопротивление обмотки увеличится. Амперметр покажет уменьшение силы тока, вольтметр тоже обнаружит уменьшение напряжения на второй обмотке.

2. Если высота цилиндра равна высоте сердечника, то при надевании его на сердечник сила тока в первой обмотке уменьшится, а напряжение на второй обмотке увеличится.

3. При надевании медного цилиндра показания амперметра увеличатся, потому что часть энергии тока будет расходоваться на создание индукционных токов в цилиндре.

§ 8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

606. $C \approx 10^{-9}$ *ф*.

Решение. Длина электромагнитной волны λ связана со скоростью распространения этих волн c и частотой колебаний ν соотношением $\lambda = \frac{c}{\nu} = cT$, где T — период колебаний.

В свою очередь, период колебаний контура связан с параметрами контура (индуктивностью L и емкостью C) зависимостью $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Из приведенных формул следует, что $T = \frac{\lambda}{c}$ и емкость $C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}$. Возведя первое выражение в квадрат, получим $T^2 = \frac{\lambda^2}{c^2}$. Подставим значение T^2 во второе выражение и получим $C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c L^2} \approx 10^{-9}$ *ф*.

607. $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ *м*.

Решение. Длину звуковой волны определим по формуле $\lambda = vT = \frac{v}{\nu}$, где v — скорость звука, ν — частота колебаний. Частоту колебаний определим по формуле $\nu = \frac{c}{\lambda_0}$, где c — скорость электромагнитных волн. Тогда $\lambda = \frac{v\lambda_0}{c} \approx 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ *м*.

608. $C \approx 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ *ф*.

Решение. Из формулы периода колебаний контура $T = 2\pi\sqrt{LC}$ определяем емкость $C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}$.

Однако $T = \frac{1}{\nu}$; тогда $C = \frac{1}{4\pi^2 L \nu^2} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ *ф*.

609. $\lambda_1 = 188{,}4$ *м*; $\lambda_2 \approx 421{,}3$ *м*.

Решение. Длина волны, на которую можно настроить контур, $\lambda = cT$, но $T = 2\pi\sqrt{LC}$, тогда $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$. Подставив числовые значения величин, получим $\lambda_1 = 188{,}4$ *м* и $\lambda_2 \approx 421{,}3$ *м*.

610. $\lambda \approx 0{,}34$ *м*.

Решение. Условием резонанса является равенство собственного периода колебаний контура с периодом возбуждаемых в контуре колебаний, т. е. с периодом той волны, которую принимает контур. Длина волны $\lambda = cT$, где $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Поскольку емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad \text{то } T = 2\pi\sqrt{\frac{L\varepsilon_0 S}{d}} \quad \text{и } \lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{L\varepsilon_0 S}{d}} \approx 0{,}34 \text{ м}.$$

611. Решение. На рис. 248 показана схема лампового выпрямителя с правильно подключенным прибором постоянного тока. Рассуждать можно, например, так: электроны движутся в лампе снизу вверх, следовательно, ток (техническое направление) идет в схеме против часовой стрелки. Надо иметь в виду, что знаки на приборе ставят в соответствии с техническим направлением тока.

612. Р е ш е н и е . В лампе, включенной по схеме *б*, анодный ток будет больше, так как сетка в этом случае имеет положительный потенциал. Благодаря этому напряженность электрического поля между сеткой и катодом большая и скорость движения электронов также большая. В случае схемы *а* сетка экранирует анод от катода, что уменьшает величину анодного тока, так как около катода напряженность поля будет малой.

613. Пластины надо сближать.

Р е ш е н и е. При переходе к приему более длинных волн надо увеличивать собственный период колебаний контура ($\lambda = cT = 2\pi c \cdot \sqrt{LC}$), следовательно, надо увеличивать емкость конденсатора колебательного контура. Поскольку же емкость плоского конденсатора пропорциональна площади пластин и обратно пропорциональна расстоянию между ними, то для увеличения емкости пластины надо сблизить.

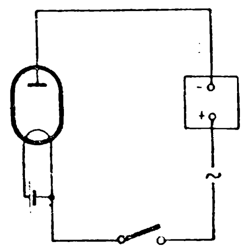


Рис. 248.

614. $n = 5000$ импульсов в секунду.

Р е ш е н и е. Максимальная частота импульсов должна быть такой, чтобы время распространения электромагнитных волн было в два раза меньше времени одного импульса. Поскольку время распространения волн на расстояние 30 *км* составляет $t = 10^{-4}$ *сек*, то максимальная частота должна быть 5000 импульсов в секунду.

615. $N = 30$ колебаний; $l = 30$ *км*.

Р е ш е н и е. Частота колебаний $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Тогда число колебаний в одном импульсе $N = \nu t_1 = \frac{c}{\lambda} t_1 = 30$ колебаний.

Глубина разведки $l = c\frac{t}{2}$, где $t = \frac{1}{n}$ — промежуток времени между двумя последующими импульсами. Тогда $l = c\frac{1}{2n} = 30\,000$ *м* $= 30$ *км*.

616. Р е ш е н и е. Наушники включаются как нагрузочное сопротивление в анодную цепь. Их сопротивление должно быть соизмеримо с внутренним сопротивлением лампы. В этом случае будет наибольший коэффициент отдачи мощности. Электронные лампы имеют обычно большое внутреннее сопротивление, поэтому и сопротивление катушек должно быть большим.

617. $v \approx 2{,}2$ *км/сек*.

Р е ш е н и е. В течение 1/25 *сек* световое пятно пройдет путь $625 \cdot 14$ *см* $= 87{,}5$ *м*. Тогда скорость перемещения светового пятна составит $v \approx 2{,}2$ *км/сек*.

ОПТИКА. СТРОЕНИЕ АТОМА

§ 1. ЗАКОНЫ ОСВЕЩЕННОСТИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

618. $\varphi = 2\alpha$.

Р е ш е н и е. Угол поворота отраженного луча относительно падающего равен φ (рис. 249). Из закона отражения света $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2'$. Из геометрических рассуждений следует, что $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

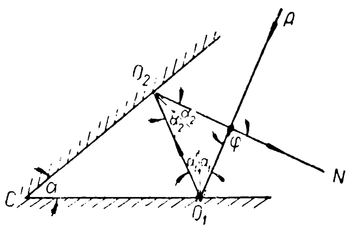


Рис. 249.

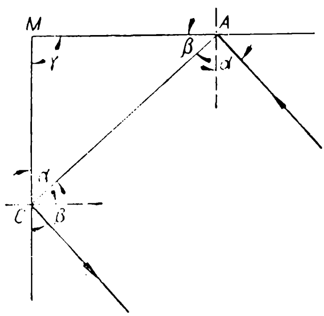


Рис. 250.

Угол φ является внешним углом треугольника и равен $\varphi = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Следовательно, $\varphi = 2\alpha$.

619. Р е ш е н и е. Человек может видеть свое изображение в зеркале в том случае, если лучи, идущие от освещенного человека и падающие на одно из зеркал и отраженные им или последовательно обоими зеркалами, возвращаются назад к человеку, т. е. когда лучи падающий и отраженный будут параллельны. Это может быть в том случае (рис. 250), когда сумма углов падения и отражения в точках A и C составляет 180°, т. е. $2\alpha + 2\beta = 180°$ или $\alpha + \beta = 90°$. Треугольник AMC должен быть прямоугольным, т. е. $\gamma = 90°$.

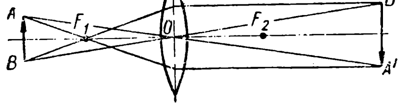


Рис. 251.

Таким образом, зеркала надо расположить в углу комнаты на уровне глаз человека, чтобы они касались друг друга и образовали между собой угол 90°.

620. $E' = 4$ *лк*.

Р е ш е н и е. Проекционный аппарат дает действительное обратное и увеличенное изображение (рис. 251). Если диапозитив AB имеет площадь S, то его изображение имеет площадь S', бо́льшую по сравнению с площадью S. Весь световой поток Φ, освещающий диапозитив площадью S, теперь распределится на площадь S'. Освещенность диапозитива составляет $E = \frac{\Phi}{S}$, а изображения $E' = \frac{\Phi}{S'}$.

Из подобия треугольников ABO и A_1B_1O следует, что каждая сторона изображения диапозитива увеличивается в $\frac{f}{d}$ раз, а вся площадь — в $\frac{f^2}{d^2}$ раз, т. е.

$$\frac{S'}{S} = \frac{f^2}{d^2}; \text{ тогда } E' = \frac{\Phi}{\frac{f^2}{d^2}S} = \frac{\Phi}{S} \cdot \frac{d^2}{f^2}.$$

Из формулы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ находим $f = \frac{dF}{d - F}$. Следовательно,

$$E' = \frac{\Phi}{S} \cdot \frac{(d - F)^2}{F^2} = 4 \text{ лк}.$$

621. $E \approx 7{,}2$ *лк*.

Решение. Освещенность в точке A будет $E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}$, где $r = SA$. Поскольку $\angle ASO = \alpha$, то $r = 2R \cos \alpha$; тогда $E = \frac{I}{4R^2 \cos \alpha} \approx 7{,}2$ *лк*.

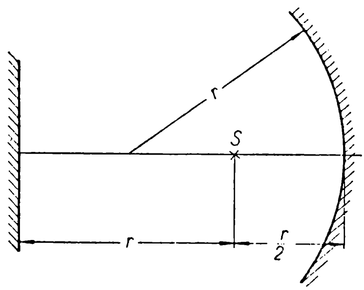


Рис. 252.

622. Освещенность увеличится в 5 раз.

Решение. Освещенность поверхности точечным источником света обратно пропорциональна квадрату расстояния этой поверхности от источника света. Поскольку экран находится от источника света на расстоянии r, а зеркало — на расстоянии $\frac{1}{2}r$ (рис. 252), то отношение освещенности экрана к освещенности зеркала $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^2}{r^2} = \frac{1}{4}$, т. е. центр зеркала освещен в 4 раза сильнее, чем центр экрана: $E_2 = 4E_1$.

Источник света находится в фокусе вогнутого зеркала, поэтому лучи после отражения от зеркала пойдут параллельным пучком и, попадая на экран, увеличат его освещенность на $4E_1$. Следовательно, общая освещенность центра экрана будет $5E_1$, т. е. увеличится в пять раз по сравнению с освещенностью, создаваемой источником света при отсутствии вогнутого зеркала.

623. $E_A = 25$ *лк*.

Решение. Из рис. 253 видно, что освещенность в точке A, расположенной под источником, равна освещенности линзы в точке O, потому что источник находится в фокусе линзы (поглощением света линзой пренебрегаем).

Так как оптическая сила линзы равна одной диоптрии, то фокусное расстояние линзы $F = 1$ *м*.

Освещенность в точке O равна $E_0 = \frac{I}{r^2} = \frac{I}{F^2} = 25$ *лк*; тогда $E_A = E_0 = 25$ *лк*.

624. Освещенность под лампами будет больше.

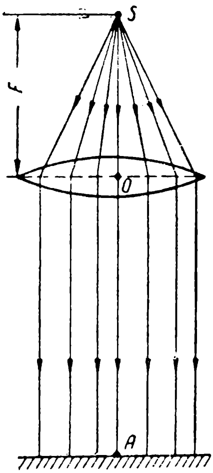


Рис. 253.

Решение. Освещенность под лампами (рис. 254) будет $E_1 = \frac{I}{h^2} + \frac{I\cos\alpha}{r^2}$, где $r = \sqrt{h^2 + l^2} \approx 7{,}2$ *м* и $\cos\alpha = \frac{h}{r}$, т. е.

$$E_1 = \frac{I}{16} + \frac{I \cdot 4}{374{,}4} \approx 0{,}073\ I.$$

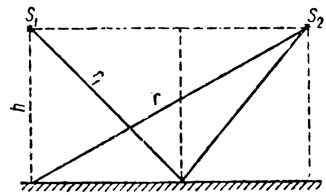


Рис. 254.

Освещенность посредине между лампами $E_2 = 2\frac{I\cos\alpha_1}{r_1^2}$, где $r_1 = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = 5$ *м* и $\cos\alpha_1 = \frac{4}{5} = 0{,}8$; тогда $E_2 = 2\frac{I \cdot 0{,}8}{25} = 0{,}064\ I$.

Следовательно, освещенность под лампами будет больше.

625. Освещенность в точке A возрастает в 1,12 раза.

Решение. Освещенность в точке A создается источником света S и его мнимым изображением в плоском зеркале. Освещенность в первом случае

$$E_1 = \frac{I}{a^2}, \text{ во втором} — E_2 = \frac{I}{a^2} + \frac{I\cos\alpha}{b^2},$$

где

$$b = S'L + LA.$$

Однако $LA = a\sqrt{2}$ и $LS' = a$; $\alpha = 45°$; тогда $E_2 = \frac{I}{a^2} + \frac{I\cos 45°}{(a\sqrt{2} + a)^2} = \frac{I}{a^2}\left(1 + \frac{\cos 45°}{3 + 2\sqrt{2}}\right) \approx 1{,}12\frac{I}{a^2}$.

Значит, освещенность в точке A возрастает в 1,12 раза.

626. $E_x \approx 450$ *лк.*

Р е ш е н и е. Предположим, что освещенность создается только отраженными от вогнутого зеркала лучами, т. е. непосредственно от источника лучи не попадают на экран.

По формуле $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}=\frac{2}{R}$ найдем положение изображения точечного источника $f=\frac{d\cdot\frac{1}{2}R}{d-\frac{1}{2}R}=-100$ *см.*

Это изображение и будет создавать освещенность. Тогда для первого случая

$$E_1=\frac{I}{r_1^2},$$

где I — сила света, а $r_1=|f|+x_1=2$ *м.*

Для второго случая

$$E_x=\frac{I}{r^2},\ \text{где } r=|f|+x=1{,}6\ м.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{E_x}{E_1}=\frac{r_1^2}{r^2},\ \text{откуда}\ E_x=E_1\frac{r_1^2}{r^2}\approx 450\ лк.$$

627. $F=15$ *см.*

Р е ш е н и е. Согласно условию, освещенность светового пятна при обоих положениях экрана одинакова. Поскольку в обоих случаях на экран падает один и тот же световой поток, можно сделать вывод, что площадь освещенных пятен тоже одинакова. В самом деле:

$$E_1=\frac{\Phi}{S_1}\quad \text{и}\quad E_2=\frac{\Phi}{S_2}.$$

Однако $E_1=E_2$, то и $S_1=S_2$. Следовательно, очевидно, что изображение светящейся точки будет находиться посредине между положениями экранов или на расстоянии $l_1+\frac{l_2-l_1}{2}$ от линзы. Значит, $\frac{l_1+l_2}{2}=f$ есть расстояние от линзы до изображения светящейся точки. Тогда по формуле линзы $F=\frac{df}{d+f}=\frac{d(l_1+l_2)}{2d+l_1+l_2}=15$ *см.*

628. Р е ш е н и е. Воспользовавшись решением задачи 1, для освещенности края стола получим $E=\frac{Ih}{(h^2+R^2)\sqrt{h^2+R^2}}$,

где R — радиус стола, h — высота, на которой находится лампа от стола. Подставляя в эту формулу различные значения h ($0{,}5 \leqslant h \leqslant 0{,}9$ *м*), получим таблицу:

h	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
E	≈35,8	≈38	≈38,8	≈38	≈37

По данным таблицы строим график (рис. 255).

629. $F \approx 24{,}8$ *см*.

Решение. Из соотношения размеров кадра и изображения $\left(\frac{d}{f}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2}$ вычисляем расстояние от объектива до кадра: $d \approx 25$ *см*. Затем по формуле линзы $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$ вычисляем фокусное расстояние объектива $F = \frac{df}{d+f} \approx 24{,}8$ *см*.

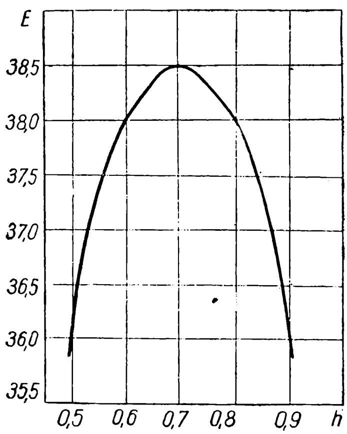


Рис. 255.

630. $E_1 \approx 7{,}2\ E_2$.

Решение. Площадки *1* и *2* освещаются лучами, идущими непосредственно от источника, и лучами, отраженными от зеркала. Отраженные лучи создают такую же освещенность, какую создавал бы источник S' (рис. 107). Иначе говоря, мнимое изображение S' рассматриваем как второй источник света. По формуле выпуклого зеркала

$$\frac{2}{R} + \frac{1}{f} = -\frac{2}{R},$$

откуда $f = -\frac{1}{4}R$,

т. е. источник S' расположен на расстоянии $\frac{1}{4}R$ за зеркалом. Следовательно,

$$E_1 = \frac{I}{\left(\frac{1}{2}R\right)^2} + \frac{I}{\left(\frac{5R}{4}\right)^2} = \frac{116}{25}\cdot\frac{I}{R^2},\quad E_2 = \frac{I}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2} + \frac{I}{\left(\frac{9R}{4}\right)^2} = \frac{52}{81}\cdot\frac{I}{R^2}.$$

Тогда $E_1 = E_2 \frac{116}{25}\cdot\frac{81}{52} \approx 7{,}2\ E_2$.

631. $r = 1$ *км*.

Решение. Освещенность поверхности зрачка светом папиросы $E = \frac{I}{r^2}$ по условию задачи должна быть равна освещенности, создаваемой наименьшим световым потоком, воспринимаемым глазом, т. е.

$$E = \frac{\Phi}{S};\ \text{тогда}\ \frac{I}{r^2} = \frac{\Phi}{S},\ \text{откуда}\ r = \sqrt{\frac{IS}{\Phi}} = 1000\ \text{м}.$$

632. Время экспозиции надо увеличить в четыре раза.

Р е ш е н и е. При фотографировании всего чертежа, размеры которого гораздо больше фотопластинки, изображение получается приблизительно в главном фокусе объектива. При фотографировании деталей изображение в натуральную величину получается при помещении предмета на двойном фокусном расстоянии от объектива (на таком же расстоянии получается и изображении на фотопластинке). Площадь изображения при этом увеличится в $\left(\frac{2F}{F}\right)^2 = 4$ раза. Во столько же раз уменьшится освещенность фотопластинки. Следовательно, экспозицию надо увеличить в четыре раза.

633. $t_2 = 1{,}5$ *сек.*

Р е ш е н и е. По условию задачи $\Phi_1 t_1 = \Phi_2 t_2$, где Φ — падающий на фотоснимок световой поток, а t — время экспозиции. Поскольку световой поток падает на одну и ту же площадь, то

$$\frac{\Phi_1}{S} t_1 = \frac{\Phi_2}{S} t_2 \text{ или } E_1 t_1 = E_2 t_2.$$

Однако $E_1 = \frac{I_1}{r_1^2}$ и $E_2 = \frac{I_2}{r_2^2}$.

Тогда $\frac{I_1}{r_1^2} t_1 = \frac{I_2}{r_2^2} t_2$, откуда $t_2 = \frac{I_1 r_2^2}{I_2 r_1^2} t_1 = 1{,}5$ *сек.*

634. $s = 18$ *см.*

Р е ш е н и е. При рассматривании предмета через пластинку (рис. 256) его изображение приближается к верхней грани пластинки на расстояние $DE = AC$, где $AC = d - BC$. Определим BC из треугольников OBC и OAB: $\frac{BC}{AB} = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i}$.

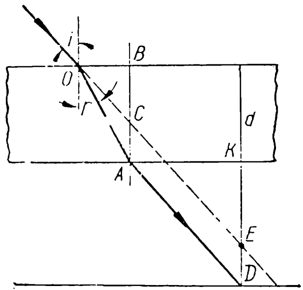


Рис. 256.

Поскольку угол i очень мал, то и угол r тоже мал, поэтому $\operatorname{tg} i \approx \sin i$ и $\operatorname{tg} r \approx \sin r$. Следовательно, $BC = BA\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} = d\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{d}{n}$.

Расстояние изображения предмета до верхней грани пластинки

$$s = d + KE, \text{ где } KE = l - ED = l - \left(d - \frac{d}{n}\right).$$

Тогда $s = d + l - d + \frac{d}{n} = l + \frac{d}{n} = 18$ *см.*

635. $a_1 \approx 3{,}4$ *м* и $b_1 \approx 1{,}4$ *м.*

Р е ш е н и е. Лучи рассеянного света падают на поверхность озера под всевозможными углами. При этом лучи *I* (рис. 257), падающие вблизи краев *A* и *B* плота под углом, близким к 90°, дадут максимальный угол преломления β. Они попадут на дно озера в точках A_1 и B_1. Вертикальные лучи II, проходящие также вблизи краев плота, пройдут, не преломляясь, к точкам A_2 и B_2. Очевидно, что все лучи, идущие вблизи точки A из воздуха в воду слева направо, расположены между лучами I и II и попадают на дно между точками A_1 и A_2. Аналогично все лучи, попада-

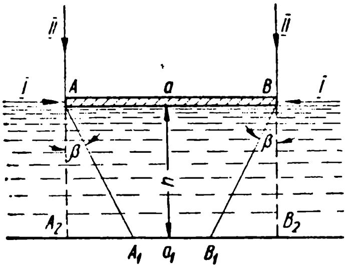


Рис. 257.

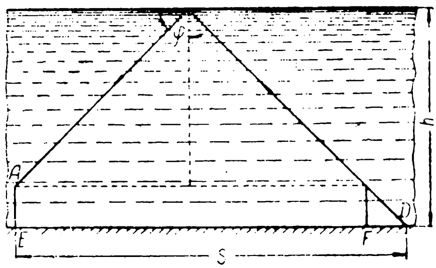


Рис. 258.

ющие на дно в результате преломления вблизи точки B, расположатся между лучами I и II. Если AB есть длина плота a, то A_1B_1 есть длина его тени a_1. Из рисунка видно, что

$$a_1 = a - 2h\,\mathrm{tg}\,\beta. \qquad (1)$$

Так как углу преломления β соответствует угол падения $\alpha = 90°$, то из соотношения $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ следует $\sin\beta = \frac{1}{n}$.

Выражая тангенс угла через его синус, получим $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$.

Подставив этот результат в уравнение (1), получим

$$a_1 = a - \frac{2h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 3{,}4 \text{ м}.$$

Аналогично получаем выражение для ширины тени плота:

$$b_1 = b - \frac{2h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 1{,}4 \text{ м}.$$

636. $h \approx 7{,}3$ *м*.

Решение. Отраженное от поверхности воды дно водолаз будет видеть при условии полного внутреннего отражения, т. е. когда угол падения φ (рис. 258) светового пучка от крайней видимой точки (точки D) будет равен предельному углу преломления. Расстояние ED равно расстоянию от водолаза до ближайших к нему предметов, которые он видит отраженными от поверхности воды: $ED = s = 15$ *м*;

$AE = a = 1{,}5$ *м* — рост водолаза.

Предельный угол φ определим из условия полного отражения: $\sin\varphi_{пр} = \frac{1}{n}$. Как видно из рис. 258,

$$\frac{s - FD}{2} = (h - a)\,\mathrm{tg}\,\varphi_{пр}; \quad FD = a\,\mathrm{tg}\,\varphi_{пр}.$$

Решая совместно последние два уравнения, находим искомую глубину:

$$h = \frac{a}{2} + \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_{пр}}.$$

Однако $\operatorname{tg} \varphi_{пр} = \frac{\sin \varphi_{пр}}{\cos \varphi_{пр}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$.

Подставив значение $\operatorname{tg} \varphi_{пр}$ в последнее уравнение, получим

$$h = \frac{a}{2} + \sqrt{n^2-1} \cdot \frac{s}{2} \approx 7{,}3 \text{ м}.$$

637. $h = 2{,}66$ *мм*.

Решение. Если рассматривается точка S на дне реки в направлении OS (рис. 259), то в глаз попадает не только луч OS, но и луч SA (вследствие конечных размеров зеницы). Глаз будет видеть изображение точки S в точке S', которая является точкой пересечения преломленных лучей $1'$ и $2'$ (лучи 1 и $1'$ совпадают). Из рис. 259 следует:

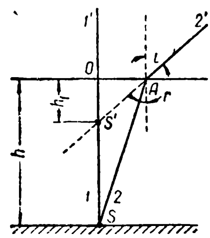


Рис. 259.

$$OA = h \operatorname{tg} r = h_1 \operatorname{tg} i \text{ или } \frac{h}{h_1} = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r}.$$

Поскольку углы r и i малы, то $\operatorname{tg} i \approx \sin i$ и $\operatorname{tg} r \approx \sin r$.

Тогда $\frac{h}{h_1} = \frac{\sin i}{\sin r} = n$, где n — показатель преломления воды. Следовательно, истинная глубина реки равна $h = nh_1 = 2{,}66$ *м*.

638. Решение. На границе линза — воздух частично наблюдается полное отражение, уменьшающее освещенность предмета. Если между линзой объектива и препаратом будет кедровое масло, потери будут значительно меньшими, так как показатели преломления стекла и кедрового масла одинаковые.

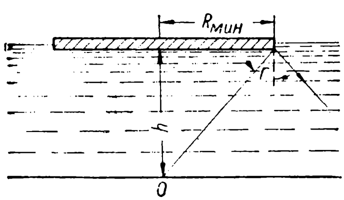


Рис. 260.

639. $R_{мин} \approx 13$ *см*.

Решение. Лучи света, идущие от точечного источника, падают на границу раздела вода — воздух расходящимся пучком, переходя из оптически более плотной среды в менее плотную. Вследствие этого те лучи, которые падают на границу раздела под углом, равным или больше предельного, испытывают полное внутреннее отражение, и в воздух выходят лишь лучи, заключенные внутри конуса с диаметром основания $2R_{мин}$ и вершиной в точке O (рис. 260). Из рисунка видно, что

$$R_{мин} = h \operatorname{tg} r; \text{ однако } \sin r = \frac{1}{n}.$$

Тогда $\operatorname{tg} r = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$; $R_{мин} = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 13$ *см*.

640. $d = 12$ *см*; $d' \approx 15$ *см*.

Р е ш е н и е. Шар представляет собой выпуклое зеркало с фокусным расстоянием $F = -\frac{R}{2} = -8$ *см*. Изображение далеких предметов в шаре будет находиться в фокальной плоскости (на расстоянии $\frac{R}{2}$ от поверхности). Максимальное расстояние, на котором близорукий человек еще четко видит мелкие предметы, равно фокусному расстоянию его очков (со знаком минус, потому что $F_{оч} < 0$). Следовательно, $d = -F_{оч} - \frac{R}{2} = -\frac{1}{D} - \frac{R}{2} = 12$ *см*.

Чтобы ответить на второй вопрос, воспользуемся формулой выпуклого зеркала $\frac{1}{F} = \frac{1}{d'} - \frac{1}{f}$.

Сумма двух расстояний d' — лица человека до сферического зеркала и f — зеркала до мнимого изображения лица равна фокусному расстоянию очков (с обратным знаком), т. е. $f + d' = -F_{оч}$ (рис. 261). Выражая f через d' и подставляя в формулу выпуклого зеркала, получим уравнение

$$d'^2 + d'(F_{оч} - 2F) - F_{оч}F = 0.$$

Подставив числовые значения, получим

$$d'^2 - 4d' - 160 = 0;\ d'_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 160}.$$

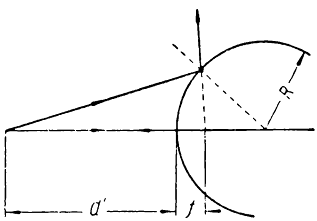


Рис. 261.

Корень квадратного уравнения со знаком минус не имеет физического смысла. Следовательно, $d' = 2 + \sqrt{164} \approx 15$ *см*.

641. $x = 45$ *см*.

Р е ш е н и е. Из рис. 262 видно, что плоское зеркало надо поставить на одинаковых расстояниях между светящейся точкой S и ее изображением S'. Найдем расстояние от вогнутого зеркала до изображения светящейся точки по формуле

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{r}, \text{ откуда } f = \frac{rd}{2d - r}.$$

Расстояние плоского зеркала от вогнутого $x = d + \frac{f - d}{2}$.

Подставляя полученное значение f, находим $x = \frac{d^2}{2d - r} = 45$ *см*.

642. $f_1 = 6$ *см*.

Р е ш е н и е. Обозначим $f = OF$ — фокусное расстояние вогнутого зеркала (рис. 263): $OF = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}$; $f_1 = OF_1$ — фокусное расстояние вогнутого зеркала с водой; α — угол падения луча из воды в воздух; β — угол преломления луча в воздухе. Тогда $DE = EF \operatorname{tg}\alpha = EF_1 \operatorname{tg}\beta$. Размером OE по сравнению с OF и OF_1 можно пренебречь, потому что слой налитой воды по условию задачи тонкий. Следовательно, $EF \approx OF$; $EF_1 \approx OF_1$.

Отсюда $\frac{OF}{OF_1} = \frac{f}{f_1} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n$ (при малых углах $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta$).

Тогда $f_1 = \frac{f}{n} = \frac{R}{2n} = 6$ *см.*

643. Зеркало надо установить на равных расстояниях между фокусом и двойным фокусом линзы.

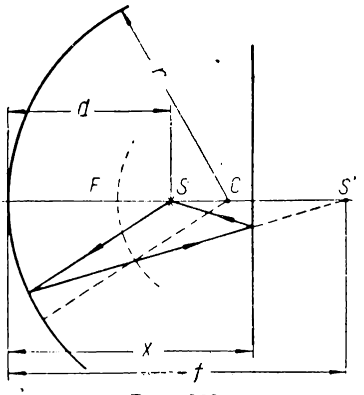


Рис. 262.

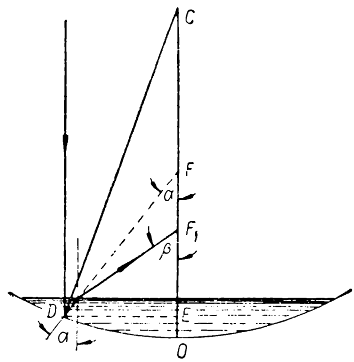


Рис. 263.

Решение. Поскольку источник света находится на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы, то лучи, идущие от источника через линзу, собираются по другую сторону линзы тоже на двойном фокусном расстоянии (рис. 264). Лучи после отражения от зеркала и повторного прохождения через линзу будут параллельными оптической оси в том случае, если, отразившись, они пройдут через главный фокус

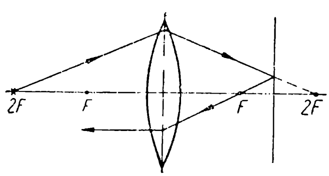


Рис. 264.

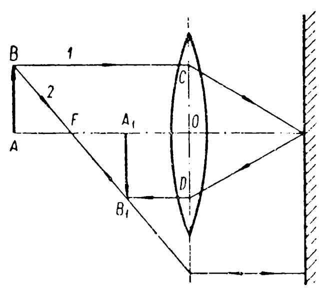


Рис. 265.

линзы. Исходя из этих рассуждений, плоское зеркало надо поставить на одинаковом расстоянии между фокусом и двойным фокусом линзы.

644. $A_1O = 15$ *см.*

Решение. Задача просто решается графически (рис. 265). Луч *1*, параллельный главной оптической оси, пройдя линзу, отражается от зеркала в точке F_1, падает на линзу и выходит параллельно главной оптической оси. Луч 2, который идет через фокус F, после прохождения через линзу и отражения от плоского зеркала пересекается с лучом 1 в точке B_1, являющейся изображением точки B предмета. Из рисунка видно, что ΔOCF_1 и ODF_1 равны. Следовательно, $OD = OC$, $A_1B_1 = OD$ и $OC = AB$.

Отсюда $A_1B_1 = AB$, т. е. изображение будет такой же величины, как и предмет. Кроме того, оно будет действительным и обратным.

Треугольники ABF и A_1B_1F равны. Из рисунка видно, что

$$A_1O = FO - FA_1 = OA - (AF + FA_1) = OA - 2AF = OA - 2(OA - OF) = 2 \cdot OF - OA.$$

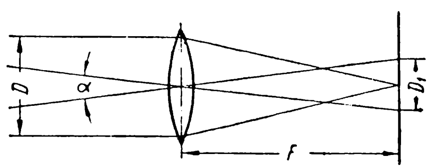


Рис. 266.

Подставляя числовые значения, получим: $A_1O = 60\ см - 45\ см = 15\ см$.

645. $E_1 \approx 21E$.

Решение. Обозначим через F — фокусное расстояние линзы; D — ее диаметр; α — угловые размеры диска Солнца; Φ — световой поток, падающий на линзу; $S_л$ — площадь линзы и S_1 — площадь изображения Солнца на экране.

Поскольку освещенность линзы равна освещенности экрана без линзы, то

$$E = \frac{\Phi}{S_л};\ E_1 = \frac{\Phi}{S_1},\ откуда\ E_1 = E\frac{S_л}{S_1} = E\frac{D^2}{D_1^2}.$$

Учитывая, что угол α мал, из рис. 266 имеем $D_1 = \alpha F$.

Тогда $E_1 = E\dfrac{D^2}{\alpha^2F^2} \approx 21\ E$.

Чтобы освещенность изображения Солнца, полученного с помощью линзы, оказалась меньше освещенности прямым солнечным светом, надо поставить перед линзой диафрагму с диаметром отверстия, меньшим диаметра изображения Солнца. Действительно, в результате диафрагмирования размеры изображения Солнца не изменяются, освещенность же уменьшается (потому что через линзу проходит меньший световой поток). Когда размер диафрагмы равен размеру изображения, то освещенность изображения равна освещенности прямыми солнечными лучами.

646. $D = -2{,}25$ диоптрии.

Решение. Расстояние наилучшего зрения для таких глаз равно 16 *см*, тогда как для нормальных глаз соответствующее расстояние составляет 25 *см*. Для устранения недостатка близоруких глаз человек носит очки́ такой оптической силы, чтобы лучи, падающие от точек, удаленных на 25 *см*, фокусировались бы оптической системой очки — глаза на сетчатке, т. е. в том же месте, где фокусируются лучи, падающие от точек предмета, удаленного в данном случае на 16 *см* и рассматриваемого невооруженным глазом.

Напишем формулу линзы для невооруженного и вооруженного глаза:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}\ \text{ и }\ \frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F_1},$$

где $d_1 = 16$ *см*; $d_0 = 25$ *см*; $\frac{1}{F_1}$ — оптическая сила очков; f — глубина глаза; $\frac{1}{F}$ — оптическая сила глаза. При этом мы делаем упрощение, считая, что оптическая сила системы очки — глаза равна сумме оптической силы очков и глаз.

Вычитая из второго уравнения первое и выражая d_0 и d_1 в метрах, найдем оптическую силу очков:

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1} = -2{,}25 \text{ диоптрии.}$$

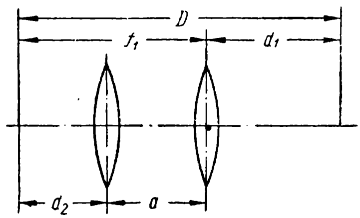


Рис. 267.

647. Решение. Запишем формулу линзы для обоих положений (рис. 267):

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}.$$

Однако $d_2 = f_1 - a$ и $f_2 = d_1 + a$: $f_1 = D - d_1$.

Тогда $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{D - d_1} = \frac{1}{D - d_1 - a} + \frac{1}{d_1 + a}$, откуда $d_1 = \frac{D - a}{2}$.

Подставив в формулу линзы значения d_1 и f_1, после простых преобразований получим $F = \frac{D^2 - a^2}{4D}$.

648. Высота зеркала должна быть равна половине роста человека, а расстояние его от пола также должно быть равно половине роста человека.

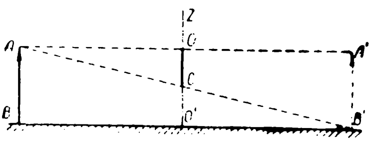


Рис. 268.

Решение. Возьмем большое плоское зеркало Z (рис. 268) и построим в нем изображение $A'B'$ человека. Изображение $A'B'$ будет симметричным с самим человеком AB относительно плоскости зеркала Z. Лучи AA' и AB' являются лучами, ограничивающими угол зрения, под которым человек видит свое изображение $A'B'$ в зеркале. Стороны угла $A'AB'$ вырезают из зеркала Z участок OC, который и будет наименьшим зеркалом, дающим возможность человеку видеть свое изображение во весь рост. Треугольники $A'AB'$ и OAC подобные, поэтому

$$\frac{A'A}{OA} = \frac{A'B'}{OC}.$$

Однако $A'B' = AB$, $OA = OA'$ и $AA' = 2\,OA$, а поэтому $\frac{2\,OA}{OA} = \frac{AB}{OC}$, откуда получаем вертикальный размер зеркала ОС:

$$OC = \frac{1}{2} AB,$$

т. е. зеркало по высоте должно быть равно половине роста человека. Поскольку $OC = CO'$, то нижний край зеркала должен находиться от пола на высоте, равной половине роста человека.

649. $x = 5$ *см*.

Решение. Построим ход луча, выходящего из точки S в направлении точки A (рис. 269). Для этого воспользуемся подобными оптическими осями. Одну из них проведем через центр левой линзы параллельно лучу SA. Луч SA должен пересечь побочную ось в фокальной плоскости первой линзы, т. е. в точке C. Следовательно, ход луча между линзами изобразится прямой AC. Аналогично проведем побочную ось через вторую линзу параллельно лучу AC. Поскольку рассматриваемый луч пересечет эту побочную ось тоже в фокальной плоскости, найдем точку пересечения луча с главной оптической осью, т. е. изображение S' точки S. Из подобия треугольников можно записать

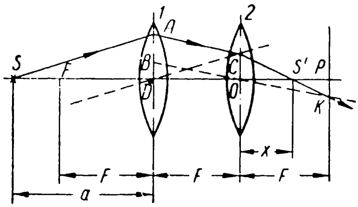


Рис. 269.

$$\frac{x}{F} = \frac{OC}{OC + PK}; \quad \frac{F}{a} = \frac{OC}{AD} = \frac{OC}{AB + PK} = \frac{OC}{OC + PK}.$$

Приравняв левые части уравнений, получим $\frac{x}{F} = \frac{F}{a}$, откуда $x = \frac{F^2}{a} = 5$ *см*.

650. $r \approx 2{,}6$ *см*.

Решение. По условию задачи параллельные лучи света падают на сферическую полость (рис. 270), заполненную водой. Если лучи света идут из оптически более плотного вещества в оптически менее плотное, то на границе раздела может наблюдаться явление полного отражения. Предельный угол i определим из условия, что угол преломления при этом равен 90°:

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_{\text{вод}}}{n_{\text{ст}}}.$$

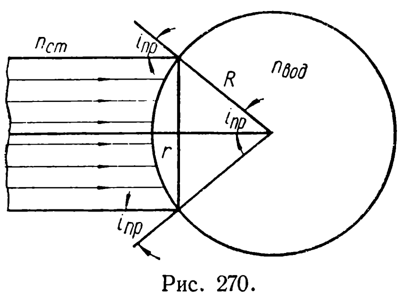


Рис. 270.

Угол падения параллельных лучей на сферическую поверхность изменяется от 0 до 90°. Следовательно, на некотором расстоянии r угол падения равен предельному $i_{\text{пр}}$, и лучи света не проникают в полость. Расстояние r, очевидно, служит радиусом светового пучка, проникающего в полость. Из рисунка видим, что $r = R \sin i_{\text{пр}} = R\frac{n_{\text{вод}}}{n_{\text{ст}}} \approx 2{,}6$ *см*.

651. Решение. Зеркало можно расположить на расстоянии R за изображением источника линзой, тогда все лучи проходят назад тем же путем, или в месте изображения, тогда лучи при отражении меняются местами, но выходят с той же точки (рис. 271). При перемещении зеркала вправо от S' изображение начинает перемещаться тоже вправо от S и отходит в $+\infty$; затем изображение возникает при $x = -\infty$ и стремится к S (при смещении зеркала на R).

652. $f_1 = f$; $f_2 = -\dfrac{fF}{f+F}$; $f_3 = F$.

Решение. Обозначим фокусные расстояния линз соответственно f_1, f_2 и f_3. Если линзы тонкие, то для фокусного расстояния сложенных вместе линз *1* и *2*, а также *2* и *3* можно записать

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F} \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = -\frac{1}{f}.$$

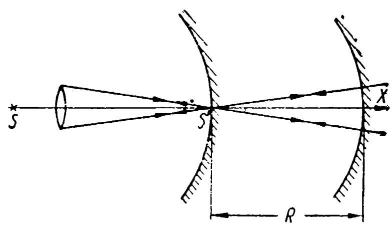


Рис. 271.

Рассматривая стеклянную пластинку как плотно сложенные линзы *1*, *2* и *3*, можно написать:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = 0.$$

Складывая первые два равенства и учитывая третье, получим

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F} - \frac{1}{f}, \text{ откуда } f_2 = -\frac{fF}{F+f}; \text{ тогда } f_1 = f \text{ и } f_3 = F.$$

653. Линза рассеивающая с $F \approx -41{,}6$ *см*.

Решение. Чтобы решить вопрос о том, рассеивающая или собирающая данная линза, нужно определить значение оптической силы линзы: если $D > 0$, то линза собирающая, а если $D < 0$, то линза рассеивающая.

Однако

$$D = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где n — показатель преломления материала, из которого изготовлена линза, R_1 и R_2 — радиусы сферических поверхностей. Подставляя в эту формулу $n = 1{,}6$; $R_1 = 1$ *м* и $R_2 = -0{,}2$ *м*, получим $D \approx -2{,}4$ диоптрии, т. е. линза рассеивающая. Однако $D = \dfrac{1}{F}$; тогда $F = \dfrac{1}{D} \approx$ $\approx -41{,}6$ *см*.

654. $F = 12$ *см*.

Решение. Если точечный источник света поместить в фокусе первой линзы, то на вторую линзу упадет параллельный пучок, который затем соберется в фокусе второй линзы. Тогда, рассматривая систему линз как одну сложную линзу, по формуле линзы получим:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30}, \text{ откуда } F = 12 \text{ см}.$$

655. $D_{д} \approx 4/3$ диоптрии.

Решение. В обоих случаях расстояние от линзы до пленки f одинаковое. Запишем формулы линзы для обоих случаев

$$D_1 = \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{f} \quad \text{и} \quad D_2 = \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{f}.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим $D_2 - D_1 = \frac{4}{3}$ диоптрии. Здесь D_2 — оптическая сила сложной линзы, составленной из двух линз, а D_1 — оптическая сила первой линзы. Разность между ними, равная 4/3 диоптрии, и дает оптическую силу добавочной линзы.

656. $F = 25$ *см*.

Решение. Так как собирающая линза приложена вплотную к вогнутому зеркалу, то для оптической силы D полученной системы можно записать:

$$D = \frac{2}{R} + \frac{2}{F},$$

где R — радиус кривизны зеркала, F — фокусное расстояние линзы.

Кроме того, можно написать такое уравнение:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D,$$

где d — расстояние от предмета до системы, f — расстояние от системы до изображения. Учитывая, что по условию задачи $f = d$, из приведенных уравнений получаем

$$F = \frac{dR}{R - d} = 25 \text{ см}.$$

657. $t_{макс} = 0{,}001$ *сек*.

Решение. При фотографировании движущейся точки ее изображение на пластинке может получиться размытым — в виде линии длины s.

Чтобы определить максимально допустимую экспозицию $t = \frac{s}{v_{и}}$, надо сначала вычислить скорость перемещения изображения $v_{и}$ на фотопластинке. Поскольку расстояние до фотографируемых предметов d обычно намного больше фокусного расстояния объектива F, можно считать, что изображение получается на пленке, помещенной вблизи главного фокуса объектива, т. е. $f \approx F$. Тогда для скоростей движения конькобежца и его изображения можно записать:

$$\frac{v_{и}}{v} = \frac{F}{d}, \text{ откуда } v_{и} = \frac{F}{d} v; \text{ тогда } t_{макс} = \frac{s}{v_{и}} = \frac{sd}{Fv} \parallel 0{,}001 \text{ сек.}$$

658. $\varphi \approx 7°45'$.

Решение. Угол зрения, под которым видна в телескоп полная Луна, можно определить, исходя из углового увеличения телескопа:

$$k = \frac{\varphi}{\gamma} = \frac{F_{об}}{F_{ок}}, \text{ откуда } \varphi = \gamma \frac{F_{об}}{F_{ок}} \approx 7°45'.$$

659. $k = 12$.

Решение. В этом случае изображение, которое дает объектив в его фокальной плоскости, будет рассматриваться глазом из расстояния наилучшего зрения D (рис. 272). Как видно из рисунка, угол зрения φ', под которым будет рассматриваться изображение, больше угла φ, под которым виден предмет.

Вследствие увеличения угла зрения изображение предмета на сетчатке увеличивается по сравнению с величиной изображения при не-

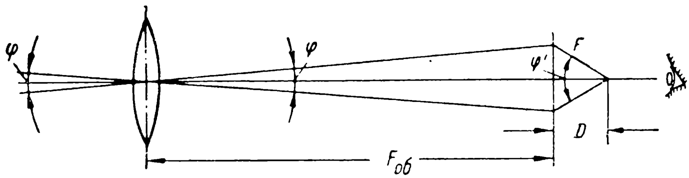


Рис. 272.

посредственном рассматривании далекого предмета. Угловое увеличение $k = \frac{\varphi'}{\varphi}$. Малые углы, измеренные в радианах, можно заменить их тангенсами. Из рисунка видно, что $k = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{F_{об}}{D} = 12$.

660. Решение. Величина изображения и его вид не изменяется, только уменьшится яркость изображения.

661. $F \approx 17$ *см*.

Решение. Если труба настроена на бесконечность, то фокусы объектива и окуляра совпадают. При приближении рассматриваемого предмета на расстояние, соизмеримое с фокусным расстоянием объектива, изображение, даваемое объективом, будет удаляться от него, следовательно, необходимо на столько же удалить и окуляр:

$$l = f_1 - F,$$

где F — фокусное расстояние объектива (рис. 273). Тогда фокусное расстояние объектива определяем по формуле линзы:

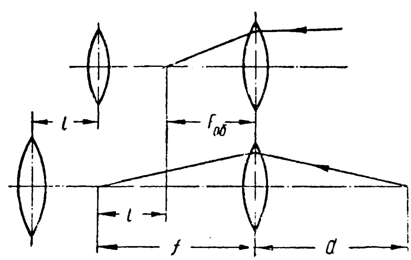


Рис. 273.

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \text{или} \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{F+l} = \frac{1}{F},$$

$$\text{откуда } F = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - 4ld}}{2}.$$

Взяв положительное значение корня, получим $F \approx 17$ *см*.

662. $x \approx 2{,}1$ *см*; $h_1 \approx 7{,}2$ *см*.

Решение. Как видно из рис. 274 и 275, искомое расстояние x, на которое надо переместить окуляр, $x = f_2 - f_1$.

Значения f_1 и f_2 найдем по формуле линзы:

$$f_1 = \frac{d_1 F_2}{d_1 + F_2} \approx 4{,}16\ см;\quad f_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 - F_2} = 6{,}25\ см;$$

тогда $x = 6{,}25\ см - 4{,}16\ см = 2{,}1\ см$.

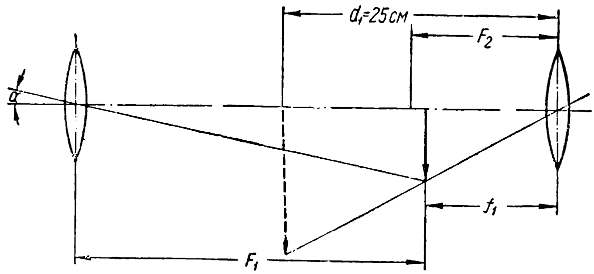


Рис. 274.

Линейные размеры изображения Луны на экране можно определить, рассмотрев подобные треугольники ABO и A_1B_1O:

$$h_1 = h\frac{d_2}{f_2};\ \text{однако}\ h = F_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

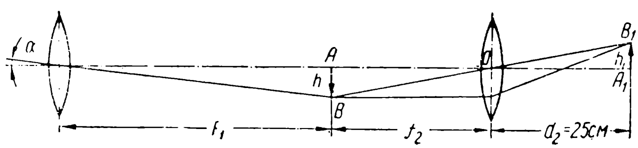


Рис. 275.

Поскольку угол α очень мал, то $h = F_1\alpha$; тогда $h_1 = \alpha F_1 \frac{d_2}{f_2} \approx$ $\approx 7{,}2\ см$.

663. Окуляр и объектив надо раздвинуть на 3,6 *мм*.

Решение. Для наблюдения бесконечно удаленных предметов зрительную трубу настраивают так, чтобы в нее входили и из нее выходили параллельные лучи.

Это возможно в том случае, если второй фокус объектива совмещается с первым фокусом окуляра (рис. 276, *а*).

Если предмет находится не на бесконечности, а на расстоянии d от объектива, то окуляр надо установить так, чтобы изображение, даваемое объективом, тоже попало в первый фокус окуляра (рис. 276, *б*). При этом окуляр и объектив должны быть дополнительно раздвинуты на расстояние $x = F_1F_2'$.

По формуле линзы $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$, где $f=F+x$ — расстояние от объектива до изображения, а F — фокусное расстояние объектива, найдем $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{F+x}$, откуда $x=\frac{F^2}{d-F}\approx 3{,}6$ *мм.*

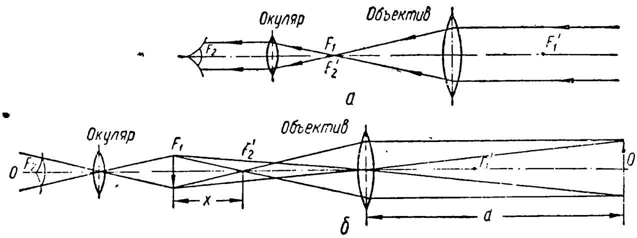


Рис. 276.

664. $k=574$.

Решение. Увеличение телескопа равно $k=\frac{F_{об}}{F_{ок}}=574$.

665. $F_2=1{,}1$ *см.*

Решение. Воспользуемся приближенной формулой увеличения микроскопа $k=\frac{\delta D}{F_1F_2}$, где $\delta=25$ *см* — расстояние наилучшего зрения, D — расстояние между окуляром и объективом, F_1 и F_2 — фокусные расстояния соответственно объектива и окуляра. Тогда

$$F_2=\frac{\delta D}{F_1 k}\text{; однако } D=F_1+F_2+l.$$

Отсюда

$$F_2=\frac{\delta(F_1+F_2+l)}{F_1k}\quad\text{или}\quad F_2=\frac{\delta(F_1+l)}{F_1k-\delta}\approx 1{,}1\ см.$$

666. $k=364$; $l\approx 17$ *см.*

Решение. Полное увеличение оптической системы, состоящей из двух линз, равно произведению увеличений, даваемых каждой линзой в отдельности. Поэтому увеличение микроскопа равно произведению увеличений окуляра и объектива:

$$k=k_1k_2,\ \text{где } k_1=\frac{f}{d}\ \text{ и } k_2=\frac{f_1}{d_1}\ \text{(рис. 277).}$$

Значения f и d_1 найдем, применяя формулу собирающей линзы. Для объектива

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{d}=\frac{1}{F_1},\ \text{откуда } f=\frac{F_1d}{d-F_1};$$

для окуляра

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F_2},\ \text{откуда } d_1=\frac{f_1F_2}{f_1+F_2}$$

($f_1=25$ *см* — расстояние наилучшего зрения).

Следовательно, увеличение микроскопа $k = k_1 k_2 = \frac{f}{d} \cdot \frac{f_1}{d_1} = \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{f_1 + F_2}{d - F_1} \approx 364.$

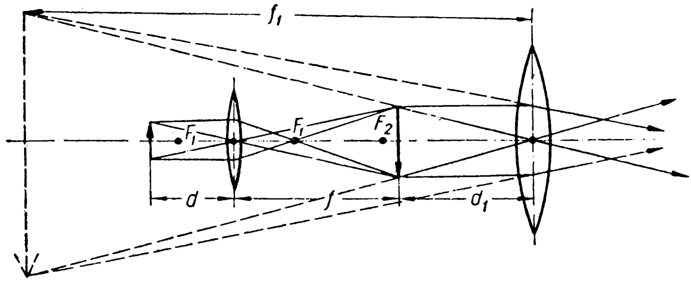


Рис. 277.

Из рисунка видно, что длина тубуса (расстояние между линзами) равна $l = f + d_1 = \frac{F_1 d}{d - F_1} + \frac{f_1 F_2}{f_1 + F_2} \approx 17$ *см.*

§ 2. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

667. $\lambda = 0{,}59$ *мк.*

Решение. Длина световой волны $\lambda = d \sin \alpha$, где d — период решетки; $\sin\alpha = \frac{h}{l}$; тогда $\lambda = d\,\frac{h}{l} = 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ *м* $= 0{,}59$ *мк.*

668. $d \approx 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ *см.*

Решение. Из соотношения $d \sin\varphi = k\lambda$ получаем $d = \frac{k\lambda}{\sin\varphi}$. Однако $\sin\varphi = \frac{h}{l}$; тогда $d = \frac{k\lambda l}{h} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ *см.*

669. Решение. Радужные полосы в тонких пленках возникают в результате интерференции световых волн, отраженных от верхней и нижней границы пленки окислов железа на поверхности стали. Волна, отраженная от нижней границы, отстает по фазе от волны, отраженной от верхней границы. Величина этого отставания зависит от толщины пленки и от длины световых волн в пленке. Вследствие интерференции происходит гашение одних цветов спектра и усиление других. Поэтому места пленки, имеющие разную толщину, окрашены в разные цвета.

670. Решение. Разобьем все наблюдаемое поле на стене на узкие горизонтальные полоски. Свет от каждой полоски будет разлагаться призмой в спектр.

Спектры от каждой из следующих полосок будут немного сдвинуты и наложатся друг на друга. Это приведет к тому, что пространство между горизонтальными сторонами квадрата будет казаться нецветным. Спектр будет наблюдаться только в непосредственной близости от горизонтальных сторон квадрата, где наложение и смешение цветов неполное.

Цвета расположатся так: красный, оранжевый, желтый (верхняя сторона квадрата). Остальную часть спектра вследствие наложения не видно. Возле нижней стороны квадрата, наоборот, будет видна коротковолновая часть спектра: голубой, синий, фиолетовый цвета. Возле вертикальных сторон квадрата спектр не наблюдается, потому что отклонения лучей и дисперсии в горизонтальном направлении не происходит.

671. Решение. Дифракционный спектр отличается от дисперсионного тем, что в первом на большие углы отклоняются волны бо́льшей длины ($k\lambda = d \sin\varphi$), а во втором более отклоненными от направления падающего света оказываются волны меньшей длины, поэтому порядок цветов в этих спектрах будет обратным.

672. Решение. Цвет света связан с частотой, которая в данном случае не изменяется, потому что с изменением скорости распространения волн в данной среде во столько же раз изменяется и длина световых волн $\left(\nu = \frac{c}{\lambda}\right)$.

673. Решение. Ощущение света связано с частотой, которая в данном случае не изменяется (см. решение предыдущей задачи). Поэтому человек будет видеть красный цвет.

674. Решение. В соответствии с основным законом люминесценции длина волны излучаемого света всегда больше длины волн света, который поглощается.

Следовательно, красные лучи не могут вызвать видимую люминесценцию, так как они являются крайними в видимой части спектра.

675. Решение. Лучи разного цвета, например, красного и синего, по-разному преломляются в глазном хрусталике: синие лучи преломляются сильнее, чем красные. Если на одинаковом расстоянии находятся две светящиеся трубки — красная и синяя, то при рассматривании красной трубки хрусталик более выпуклый, чем при рассматривании синей. Когда мы смотрим на близкие предметы, хрусталик более выпуклый, чем тогда, когда мы смотрим на далекие. Поэтому у нас и возникает впечатление, что красные буквы ближе к нам, чем синие или зеленые.

676. $\lambda_1 - \lambda_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ *м.*

Решение. При переходе монохроматического света из одной среды в другую частота колебаний сохраняется. Однако поскольку при этом изменяется скорость распространения света (изменяется, следовательно, показатель преломления), а скорость света связана с частотой и длиной волны формулой $v = \lambda\nu$, то с уменьшением скорости распространения света (т. е. с увеличением показателя преломления) длина волны соответственно уменьшается.

В вакууме $\lambda_1 = \frac{c}{\nu}$, в стекле — $\lambda_2 = \frac{v}{\nu}$. Однако $v = \frac{c}{n}$, поэтому $\lambda_2 = \frac{c}{n\nu}$.

$$\text{Тогда}\quad \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{n\nu} = \frac{c}{\nu}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{c\,(n-1)}{\nu n} =$$

$$= 2{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

677. Решение. Сетчатка глаз чувствительна к ультрафиолетовым волнам, но они поглощаются хрусталиком и поэтому не достигают сетчатки.

678. Р е ш е н и е. Нельзя, потому что источники света не являются когерентными.

679. Р е ш е н и е. Это объясняется явлением дифракции света в отраженном свете. Поверхность пуговицы играет роль дифракционной решетки, дающей спектр в отраженных лучах.

680. Р е ш е н и е. Потому что коэффициенты преломления лучей разного цвета для одной и той же среды неодинаковы.

681. Р е ш е н и е. Потому что коротковолновые синие лучи рассеиваются разными мелкими частицами, взвешенными в воде. В мелких местах свет рассеивается большими частицами (песок, ил, пузырьки воздуха и т. д.), способными рассеивать и более длинные зеленые волны.

682. Р е ш е н и е. Чтобы получить точечный источник рентгеновских лучей, дающих на экране четкие очертания просвечиваемых тел.

683. Р е ш е н и е. Рентгеновское излучение возникает, но оно слабое и поглощается стеклом трубки.

684. Р е ш е н и е. Источник рентгеновских лучей — точечный, а поэтому пучок лучей является расходящимся, и теневое изображение всегда будет больше предмета.

§ 3. КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОПТИКЕ

685. $\lambda_0 \approx 1{,}97 \cdot 10^{-7}$ *м*.

Р е ш е н и е. Энергия фотона $h\nu$ идет на выполнение работы по вырыванию электрона и на сообщение ему кинетической энергии:

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}.$$

Наибольшую длину волны света, при которой начинается фотоэффект, определим из условия, что энергия фотона равна работе выхода, т. е. $h\nu = A$, но $\nu = \frac{c}{\lambda_0}$, поэтому $h\frac{c}{\lambda_0} = A$, откуда $\lambda_0 = \frac{hc}{A} \approx 1{,}97 \cdot 10^{-7}$ *м*.

686. $E_к \approx 1{,}8 \cdot 10^{-19}$ *дж*; $v \approx 0{,}63 \cdot 10^6$ *м/сек*.

Р е ш е н и е. Из уравнения Эйнштейна $\frac{mv^2}{2} = h\frac{c}{\lambda} - A \approx 1{,}8 \times 10^{-19}$ *дж*, а $v = \sqrt{\frac{2\left(h\frac{c}{\lambda} - A\right)}{m}} \approx 0{,}63 \cdot 10^6$ *м/сек*.

687. $n \approx 5 \cdot 10^7 \frac{1}{см^2 \cdot сек}$

Р е ш е н и е. Мощность лучистой энергии зависит от числа фотонов в пучке лучей и измеряется суммарной энергией фотонов, падающих на поверхность за 1 *сек*. Поскольку энергия фотона $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, то мощность облучения $N = h\frac{c}{\lambda}n$, где n — число фотонов, падающих на поверхность за 1 *сек*. Отсюда $n = \frac{N\lambda}{hc} \approx 5 \cdot 10^7 \frac{1}{см^2 \cdot сек}$.

688. $h \approx 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек.*

Решение. Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + A.$$

Чтобы задержать электроны, надо приложить задерживающее поле. При этом кинетическая энергия электронов $\frac{mv^2}{2}$ должна быть равна eU. Следовательно,

$$h\nu_1 = A + eU_1 \text{ и } h\nu_2 = A + eU_2,$$

откуда $h = \frac{e(U_2 - U_1)}{\nu_2 - \nu_1} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ *дж · сек.*

689. $v \approx 4{,}68 \cdot 10^5$ *м/сек.*

Решение. Учитывая соотношение между частотой света ν и длиной волны λ $\left(\nu = \frac{c}{\lambda}\right)$, формулу Эйнштейна можно записать $\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A.$

Определим работу выхода электрона. Если бы на пластинку падал свет с длиной волны, равной длине волны красной границы фотоэффекта λ_0, то вся энергия шла бы полностью на выполнение работы выхода, т. е. $\frac{hc}{\lambda_0} = A.$

Вычитая это равенство из предыдущего, получим

$$hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = \frac{mv^2}{2},$$

откуда скорость электрона

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)} \approx 4{,}68 \cdot 10^5 \text{ м/сек.}$$

690. $A \approx 2{,}4 \cdot 10^{-19}$ *дж*; $v \approx 0{,}91 \cdot 10^6$ *м/сек*; $E \approx 3{,}8 \cdot 10^{-19}$ *дж.*

Решение. Энергия кванта, соответствующего длинноволновой границе фотоэффекта, равна работе выхода электрона:

$$A = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-19} \text{ дж.}$$

По формуле Эйнштейна энергия кванта, поглощаемая электроном,

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}, \text{ откуда } \frac{mv^2}{2} = h\nu - A; \text{ но } A = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}.$$

Тогда $\frac{mv^2}{2} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) \approx 3{,}8 \cdot 10^{-19}$ *дж.*

Зная кинетическую энергию электрона, найдем его скорость вылета

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)} \approx 0{,}91 \cdot 10^6 \text{ м/сек.}$$

691. $v \approx 1{,}26 \cdot 10^6$ *м/сек.*

Решение. Чтобы электрон смог выбить при ударе о платину вторичный электрон, его кинетическая энергия должна быть равна или больше работы выхода электрона из платины

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant A.$$

Отсюда наименьшая скорость электрона, при которой будет выбиваться вторичный электрон из платины, $v = \sqrt{\frac{2A}{m}} \approx 1{,}26 \cdot 10^6$ *м/сек.*

692. $n \approx 1{,}2 \cdot 10^{21}$ фотонов.

Решение. Мощность лампочки равна суммарной энергии всех фотонов, испускаемых в единицу времени, т. е.

$$N = nh\nu = n\frac{hc}{\lambda},$$

откуда $n = \frac{N\lambda}{hc} \approx 1{,}2 \cdot 10^{21}$ фотонов.

693. $\varepsilon \approx 1{,}987 \cdot 10^{-15}$ *дж*; $m \approx 2{,}2 \cdot 10^{-32}$ *кг*; $mc \approx 6{,}625 \times \times 10^{-24}$ *кг·м/сек.*

Решение. Энергия фотона $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \approx 1{,}987 \cdot 10^{-15}$ *дж.* Массу фотона определяем по формуле Эйнштейна:

$$\varepsilon = mc^2, \text{ откуда } m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-32} \text{ кг.}$$

Количество движения фотона находим по формуле $mc = \frac{\varepsilon}{c}$, т. е. как произведение массы фотона на его скорость, или разделив энергию фотона на его скорость. Подставим числовые значения: $mc \approx 6{,}625 \times \times 10^{-24}$ *кг·м/сек.*

694. $E \approx 0{,}51$ *Мэв* $\approx 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ *дж.*

Решение. Из соотношения $E = mc^2$ определяем энергию фотона, где m — масса фотона, равная массе электрона. Подставив числовые значения, получим: $E \approx 0{,}51$ *Мэв* $\approx 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ *дж.*

695. Решение. Давление на белую поверхность будет вдвое больше. От белой поверхности свет отражается и импульс при падении света mv складывается с равным ему импульсом отдачи mv. При падении же на черную поверхность происходит поглощение света, и импульс силы равен mv.

696. $\lambda \approx 0{,}62 \cdot 10^{-10}$ *м.*

Решение. Электрон, пройдя разность потенциалов U, приобретает энергию eU. Кванты, отвечающие наиболее малой длине волны, возникают в том случае, когда вся энергия заторможенного электрона полностью превратится в квант рентгеновских лучей, т. е.

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = eU, \text{ откуда } \lambda = \frac{hc}{eU} \approx 0{,}62 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

697. Решение. В люминесцентной лампе трансформируется ультрафиолетовое излучение в видимое излучение (частотная трансформация).

698. Решение. Электроны приобретают в трубке большую кинетическую энергию, вследствие чего при их ударе об антикатод возникают кванты рентгеновского излучения с большой энергией.

При изменении накала нити катода изменится число квантов рентгеновского излучения, а его «жесткость», определяемая величиной кванта энергии, останется неизменной.

699. Решение. Уравнение Эйнштейна записывается для одного поглощенного фотона. Не каждый квант света, падающий на поверхность, имеет достаточную энергию для выполнения работы выхода и сообщения электрону кинетической энергии. Поэтому говорить об энергии света в целом нельзя.

§ 4. СТРОЕНИЕ АТОМА И ЯДРА

700. Решение. В уравнении ядерной реакции должно сохраняться равенство суммы зарядовых чисел в левой части равенства сумме зарядовых чисел в правой части и суммы массовых чисел в левой части сумме массовых чисел в правой части. Поэтому записываем ${}_4Be^9 + {}_1H^2 \rightarrow {}_5B^{10} + {}_0n^1$, т. е. при этой реакции выбрасывается нейтрон.

701. Решение. Учитывая, что α-частица — это ядро гелия, уравнение ядерной реакции можно записать так: ${}_7N^{14} + {}_2He^4 \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1$.

702. Решение. Каждая спектральная линия получается в результате испускания фотона атомом при переходе атома из одного энергетического состояния в другое (переход электрона из более далекой орбиты на более близкую к ядру). Энергия электрона зависит от радиуса орбиты и от величины заряда ядра, которые в атомах различных химических элементов различны. Поэтому число и размещение спектральных линий в спектрах различных элементов будут различными, но для данного атома вполне определенными.

703. Решение. Поскольку выбивается нейтрон, то заряд образовавшегося ядра должен быть равен сумме зарядов ядер бериллия и гелия: ${}_4Be^9 + {}_2He^4 \rightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1$.

704. Решение. Поскольку заряд вновь образованного ядра меньше на единицу заряда исходного ядра, а массовое число не изменяется, то при этом преобразовании испускаются протоны: ${}_{12}Mg^{24} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{11}Na^{24} + {}_1H^1$.

705. $\frac{m}{M} \approx 0{,}062$ или $M \approx 16\ m$.

Решение. Обозначим массы α-частицы и ядра меди соответственно через m и M. Пусть v будет начальной, а v' — конечной скоростью α-частицы, V — конечной скоростью ядра. Используя законы сохранения энергии и импульса, можно получить систему двух совместных уравнений, содержащих эти величины. В соответствии с законом сохранения энергии, передаваемая ядру меди энергия

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^2 \text{ или } V^2 = \frac{m}{M}(v^2 - v'^2). \qquad (1)$$

Поскольку v' и V направлены в противоположные стороны, конечный импульс равен $MV - mv'$. Согласно закону сохранения импульса, эта величина должна быть равна начальному импульсу mv:

$$MV - mv' = mv \text{ или } V = \frac{m}{M}(v + v').$$

Возводя правую часть в квадрат и приравнивая ее правой части уравнения (1), получаем:

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 (v + v')^2 = \frac{m}{M}(v + v')(v - v'),$$

$$\text{откуда } \frac{m}{M} = \frac{v - v'}{v + v'} = \frac{1 - \frac{v'}{v}}{1 + \frac{v'}{v}}.$$

Поскольку отношение $\frac{v'}{v}$ равно корню квадратному из отношения конечной и начальной кинетических энергий, т. е.

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{E'}{E}} \approx 0{,}883, \text{ то } \frac{m}{M} = \frac{1 - 0{,}883}{1 + 0{,}883} \approx 0{,}062 \text{ или } M \approx 16\ m.$$

706. Решение. α-частицы имеют одинаковую энергию, а β-лучи представляют собой поток электронов с различной энергией.

707. Решение. Реакция получения радиоактивного марганца: ${}_{26}Fe^{56} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{25}Mn^{56} + {}_1H^1$.

Реакция β-распада: ${}_{25}Mn^{56} \rightarrow {}_{26}Fe^{56} + {}_{-1}e^0$.

708. Решение. При β-распаде один из нейтронов в ядре превращается в протон; последний при этом выбрасывается из ядра.

709. Решение. ${}_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{14} + {}_1H^1$. Реакция β-распада: ${}_6C^{14} \rightarrow {}_7N^{14} + {}_{-1}e_0$.

710. Решение. Этими частицами являются ядра гелия (α-частицы): ${}_5B^{11} + {}_1H^1 \rightarrow 3{}_2He^4$.

711. Решение. Пересекая пластинку, частица теряет часть своей энергии, вследствие чего скорость частицы уменьшается. Поэтому траектория частицы сильнее искривляется магнитным полем. Следовательно, начало траектории — вверху фотографии.

712. Решение. Силы отталкивания между ядром с большим зарядом и α-частицей большие, и поэтому α-частица не может проникнуть в ядро. Запаса кинетической энергии α-частицы недостаточно, чтобы выполнить работу против сил отталкивания.

713. Решение. При столкновении нейтрона с ядром атома нейтрон отдает ему часть своей кинетической энергии. Особенно большим будет уменьшение энергии нейтрона при столкновении с ядрами атомов, масса которых близка к массе нейтрона (водорода и водородоподобных).

714. Решение. Частица тем сильнее отклоняется в одном и том же магнитном поле, чем меньше ее скорость и масса и чем больше заряд. Хотя скорость β-частицы больше, но α-частица имеет более чем в 7000 раз бо́льшую массу, и ее заряд (абсолютное значение) превышает заряд β-частицы в четыре раза. Поэтому α-частица имеет больший радиус кривизны при отклонении в магнитном поле.

715. Решение. α-частицы в колбе с воздухом испытывают много столкновений с атомами и молекулами газа и длина их свободного пробега небольшая; α-частица быстро расходует кинетическую энергию, и вероятность попадания ее на стенки колбы в этом случае незначительна. При откачивании газа длина свободного пробега α-частиц увеличивается, и они начинают попадать на стенки колбы, вызывая свечение.

716. Решение. Одним из способов может быть введение радиоактивного препарата в момент подачи нефти и размещение вблизи того места, где надо установить границу раздела бензин-нефть счетчика Гейгера.

Можно также воспользоваться радиоактивным индикатором уровня жидкости, который отметит границу раздела жидкостей по изменению их плотности.

717. Решение. Радиоактивный распад урана можно записать так:

$$_{92}U^{238} \to {}_{82}Pb^{206} + x\,{}_2He^4 + y\,{}_{-1}e^0.$$

Для зарядовых и массовых чисел можно записать такие два уравнения: $92 = 82 + x \cdot 2 - y \cdot 1$ и $238 = 206 + x \cdot 4$.

Решив как систему эти уравнения, получаем $x = 8$ и $y = 6$, т. е. происходит восемь α- и шесть β-превращений.

718. $m \approx 31$ *г.*

Решение. При каждом делении ядра атома $_{92}U^{235}$ выделяется $E_0 = 200$ *Мэв* энергии. При делении за сутки m *кг* урана выделится энергия $E = \frac{mN_0}{M} E_0$, где M — массовое число $_{92}U^{235}$, N_0 — число Авогадро. Полезная энергия

$$E_1 = \eta E; \text{ однако } E_1 = Nt,$$

где N — развиваемая станцией мощность, $t = 1$ сутки $= 24 \cdot 60 \times \times 60$ *сек.*

$$\text{Тогда } Nt = \eta \frac{mN_0}{M} E_0, \text{ откуда } m = \frac{MNt}{\eta N_0 E_0} \approx 0{,}031 \text{ кг} = 31 \text{ г}.$$

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

§ 1. МЕХАНИКА

1. С высоты H падал шар. Когда он пролетал мимо окна, находящегося на высоте $\frac{1}{2}H$, в него в горизонтальном направлении выстрелили из ружья. Пуля застряла в центре шара. С какой скоростью шар упал на землю? Пуля легче шара в 10 раз, ее скорость v_0.

2. Вертикально вверх произведен выстрел из пушки. Начальная скорость снаряда равна v_0. В точке максимального подъема снаряд разорвался на две одинаковые части. Первая из них упала на землю вблизи точки выстрела, имея скорость $2v_0$. Через какое время после выстрела упала на землю вторая половина? Какую скорость она имела в момент падения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

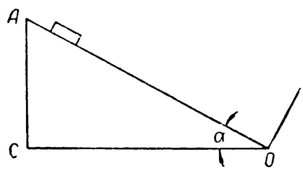


Рис. 278.

3. На гладкой горизонтальной поверхности, на некотором расстоянии от вертикальной стенки, находится шар массой M. Другой шар массой m скользит с некоторой скоростью по направлению от стенки к первому шару. Между шарами происходит центральный упругий удар (при упругом ударе суммарная кинетическая энергия сохраняется). При каком соотношении масс M и m второй шар после удара достигнет стенки и, упруго оттолкнувшись от нее, догонит первый шар?

4. Тележка массой M движется без трения по горизонтальной плоскости со скоростью v_0. На передний край тележки кладут тело массой m, начальная скорость которого равна нулю. Размерами тела можно пренебречь по сравнению с длиной тележки l. При какой длине тележки тело не сползет с нее, если коэффициент трения между телом и тележкой равен k?

5. Поезд весом $P = 5 \cdot 10^6$ *н* движется по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью. В определенный момент времени от поезда отрывается несколько последних вагонов, вес которых $Q = 10^6$*н*. Машинист перекрыл поступление пара в машину в момент, когда заметил изменение в составе поезда. Как позже выяснилось, поезд прошел 240 *м* за время, прошедшее от момента отрыва вагонов до момента перекрытия пара. На каком расстоянии от оторвавшихся вагонов находился поезд в момент остановки? Принять, что сопротивление движению поезда пропорционально весу движущихся тел.

6. С наклонной плоскости соскальзывает небольшая шайба и в конце спуска ударяется о стенку OB (рис. 278). Считая удар абсолютно

упругим, определить, на какую высоту поднимется шайба. Известно, что $\angle AOC = \alpha$, $BO \perp OA$, $AC = h$. Коэффициент трения шайбы о плоскость равен k.

7. Две пластинки массами m_1 и m_2 соединены пружиной (рис. 279). С какой силой надо нажать на верхнюю пластинку, чтобы после прекращения действия этой силы верхняя пластинка, подпрыгнув, подняла бы и нижнюю пластинку? Массу пружины не учитывать.

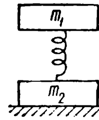


Рис. 279.

8. Два игрока в мяч стоят на горизонтальной плоскости на расстоянии l *м* друг от друга. Один из них бросает со скоростью, параллельной горизонту, мяч массой m, второй подхватывает его через t *сек*. Считая, что мяч движется с постоянной скоростью, подсчитать, на сколько откатится игрок, бросивший мяч, если его масса M и коэффициент трения роликов, на которых он стоит, о горизонтальную плоскость, равен k. Подсчитать для случая: $l = 10$ *м*; $m = 0{,}5$ *кг*; $t = 1$ *сек*; $M = 60$ *кг*; $k = 0{,}01$.

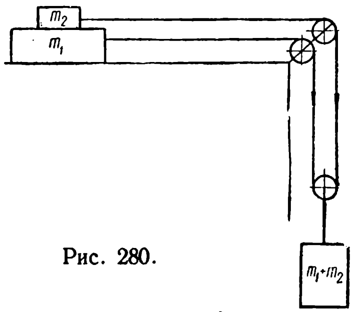


Рис. 280.

9. На горизонтальной плоскости лежит брусок массой m_1, а на нем — брусок массой m_2. Через систему блоков (рис. 280) на бруски действует груз массой m_1+m_2. При каком соотношении между m_1 и m_2 бруски не будут скользить друг по другу, если коэффициент трения между брусками равен k, а коэффициент трения нижнего бруска по плоскости равен нулю? Нить считать невесомой и нерастяжимой, трением в блоках и массой блоков пренебречь.

10. Лыжник свободно съезжает с горы и в момент, когда он уже прошел путь l, стреляет сигнальной ракетой вверх. Определить скорость лыжника непосредственно после выстрела. Масса лыжника с ракетницей M, наклон горы α, масса ракеты m, скорость ракеты v. Трения не учитывать.

11. Имеется подвеска, состоящая из однородных стержней, соединенных шарнирно (рис. 281). Стержни AE, CD, BC и EH — сплошные, OM — нить. Вес всей системы P. Определить силу натяжения нити OM.

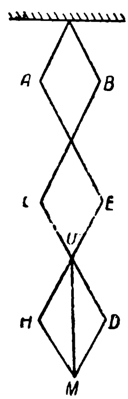


Рис. 281.

12. Шесть бочек весом 1500 *н* и диаметром 800 *мм* каждая уложены при погрузке пирамидой. Под две крайние бочки подложены подкладки высотой $h = 10$ *мм*, закрепленные колышками, выступающими на такую же высоту. Определить, будет ли высота каждой подпорки достаточной для предупреждения перекачивания через нее бочек, а если нет, то определить необходимую высоту подкладки.

13. Деревянный шар массой M лежит на тонкой подставке. Снизу в шар попадает пуля массой m, летящая вертикально вверх, и пробивает его. При этом шар подскакивает на высоту h. На какую высоту поднимется пуля над подставкой с шаром, если ее скорость перед ударом о шар была v?

14. На невесомом стержне закреплены тела массами m и M (рис. 282). Стержень шарнирно связан с вертикальной осью OO', вращающейся с угловой скоростью ω. Определить угол φ.

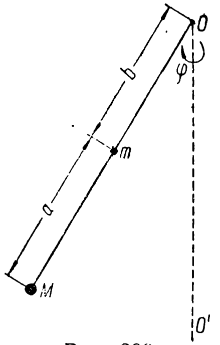


Рис. 282.

15. Широко известен цирковой аттракцион: мотоциклист едет по вертикальной цилиндрической стене (рис. 283). Определить минимальную скорость, с которой должен ехать по вертикальной стене мотоциклист, если ее диаметр $d = 18$ *м*, центр тяжести системы мотоцикла и человека удален на $h = 1$ *м* от места стыка колес со стенкой; коэффициент трения шин о стенки равен $k = 0,4$.

Определить также, под каким углом α к горизонту едет мотоциклист, если его скорость равна $v = 20$ *м/сек*.

16. В шаре радиусом R и массой M сделали шарообразный вырез радиусом $\frac{1}{2}R$, центр которого лежит на середине радиуса шара. На прямой, проходящей через центр шара и центр вырезанной части, на расстоянии d от центра шара находится точечная масса m. Определить силу взаимного притяжения между шаром с вырезом и точечной массой m.

17. Какую работу надо выполнить, чтобы тело массой 1 *кг* поднять с поверхности Земли на высоту 400 *км*?

18. Шарику, подвешенному на нити длиной 1 *м*, толчком сообщили скорость $v_0 = 6$ *м/сек* (рис. 284).

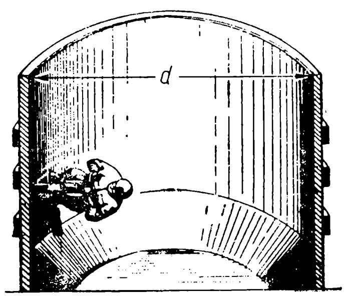


Рис. 283.

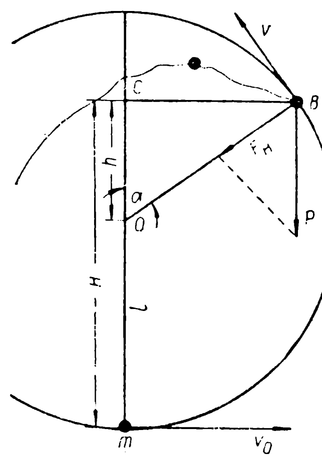


Рис. 284.

На какой высоте H нить ослабнет и шарик перестанет двигаться по окружности? Какую скорость будет иметь шарик в этот момент?

19. Шарик подвешен на нити, второй конец которой прикреплен к висящей вертикально рамке (рис. 285). Шарик отклонили на угол α от положения равновесия и отпустили. В момент, когда шарик проходил через положение равновесия (точку B), рамка начала свободно падать. Когда шарик достигал точки C (угол отклонения шарика от положения равновесия равен 90°), рамку внезапно остановили. На какой угол α надо отклонить маятник, чтобы в момент задержания рамки скорость шарика была равна нулю?

20. На высоте h над поверхностью земли на нити длиной l подвешен шарик массой m. Шарик отклонили на угол 90° от положения равновесия и отпустили. В некоторый момент, во время возвращения шарика к положению равновесия, нить оборвалась. На какой высоте находился в этот момент шарик и в какой точке он упал на землю, если нить рвется при действии силы F? Для расчетов взять: $h = 10$ *м*; $l = 1$ *м*; $m = 1$ *кг*; $F = 21$ *н* и $g = 10$ *м/сек*^{2}.

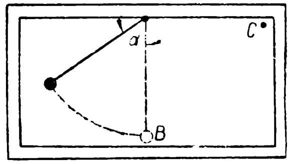


Рис. 285.

21. Два груза массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) связаны нитью, переброшенной через очень легкий блок радиусом r, ось которого горизонтальна. На одной оси с блоком укреплены по радиусам четыре тонкие спицы длиной l, на концах которых закреплены тяжелые шарики массой m. Если массы m_1 и m_2 оставить на самих себя, система начинает двигаться ускоренно. Определить ускорения грузов m_1 и m_2, считая, что трение в оси блока отсутствует, нить не проскальзывает по блоку и массами нити, блока и спиц можно пренебречь.

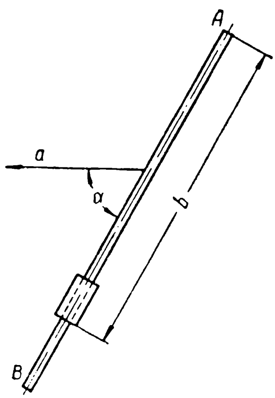


Рис. 286.

22. На горизонтально расположенный стержень AB надет цилиндр, который может перемещаться по стержню без трения. На рис. 286 показан вид стержня сверху. В начальный момент цилиндр находится на расстоянии b от точки A. Стержень движется поступательно с ускорением a по горизонтали в направлении, образующем со стержнем угол α. Через сколько времени цилиндр покинет стержень?

23. Найти ускорения, с которыми будут двигаться грузы массами m_1 и m_2 в системе, состоящей из одного неподвижного и трех подвижных блоков (рис. 287). При каком соотношении между массами грузов система будет находиться в равновесии? Трением и массой блоков пренебречь.

24. С какой поступательной скоростью будет катиться тяжелый обруч массой M и радиусом R по горизонтальной поверхности, если он скатился с наклонной плоскости высотой h? Проскальзывание обруча по поверхности отсутствует.

25. Тело массой m удерживается на наклонной плоскости с углом наклона β силами трения. Как изменятся сила трения и сила нормального давления, если наклонная плоскость начнет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением a? При каком ускорении a тело начнет скользить по наклонной плоскости, если угол скольжения, т. е. угол неподвижной наклонной плоскости, при котором начинается скольжение, равен α? При каких углах скольжения не будет, каким бы большим не было ускорение?

26. Нейтрон испытывает упругое соударение с ядром гелия и затем, отразившись, упруго соударяется с другим ядром гелия (при упругих соударениях суммарная кинетическая энергия сохраняется). Ядра гелия до соударения были неподвижны. Считая оба соударения центральными (т. е. скорости до и после соударений направлены вдоль линии центров соударяющихся частиц), определить, во сколько раз изменится энергия нейтрона после двух соударений.

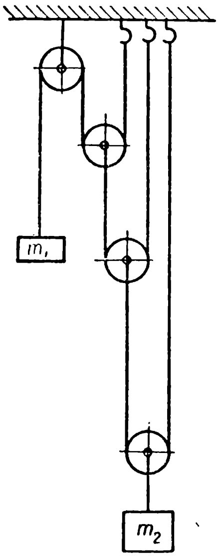


Рис. 287.

27. Стол весом $P_1 = 150$ *н*, оборудованный системой блоков (рис. 288), может перемещаться без трения по горизонтальному полу. На столе лежит груз весом $P_2 = 100$ *н*. Коэффициент трения между столом и грузом $k = 0{,}6$. С каким ускорением будет двигаться стол, если потянуть с силой $F = 80$ *н* за веревку, прикрепленную к грузу и переброшенную через блоки, в случае, когда сила направлена горизонтально, и в случае, когда она направлена вертикально?

28. В клин массой M попадает горизонтально летящая пуля массой m и после абсолютно упругого удара о поверхность клина отскакивает вертикально вверх. На какую высоту поднимается пуля, если скорость клина после удара равна v? Трения не учитывать.

29. Обруч массой m и радиусом R скатывается с наклонной плоскости на горизонтальную плоскость. На какую высоту подпрыгнет обруч, если он скатится с высоты h? Обруч и плоскость считать абсолютно упругими. Угол наклона плоскости к горизонту α.

30. Маховик, состоящий из тяжелого обода массой M и радиусом R и легкой маточины, соединенной с ободом с помощью тонких спиц, вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью ω. К ободу

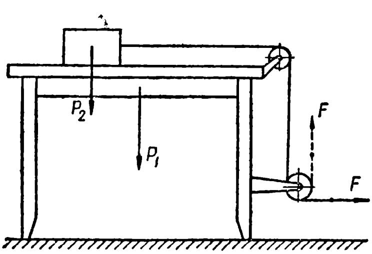


Рис. 288.

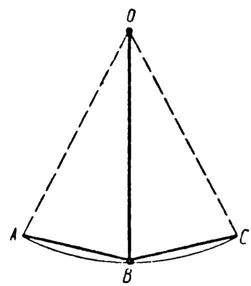


Рис. 289.

маховика прижимается с силой F тормозная колодка. Коэффициент трения между колодкой и ободом составляет k. Чему равно время торможения и сколько оборотов сделает маховик до полной остановки? Массой маточины и спиц можно пренебречь по сравнению с массой обода.

31. На тонкой и невесомой нити длиной l подвешен небольшой груз. Определить приближенно период колебаний груза, заменив истинное движение по дуге окружности ABC (рис. 289) движением по хордам AB и BC.

32. Определить период колебания маятника (рис. 290). Длина нити $l = 150$ *см*, расстояние между точкой подвеса A и упором B равно $d = 54$ *см*.

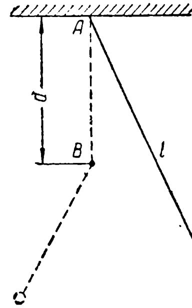


Рис. 290.

33. В один из сообщающихся сосудов (рис. 291) налита вода, в другой — масло плотностью $\rho = 850$ *кг/м*^{3}. На какое расстояние сместится граница раздела жидкостей по горизонтальной трубке, если на поверхность воды налить слой того же масла толщиной $l = 0{,}5$ *см*? Отношение площади поперечного сечения сосудов к площади поперечного сечения горизонтальной трубки равно 10.

34. В бак с водой опущена длинная трубка диаметром d, к которой снизу плотно прилегает цилиндрический диск толщиной h и диаметром D (рис. 292). Плотность материала диска ρ

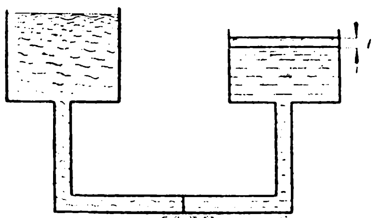


Рис. 291.

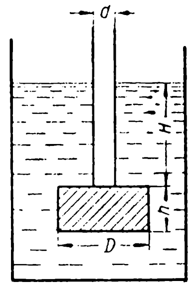


Рис. 292.

больше плотности воды $\rho_в$. Трубку медленно поднимают вверх. Определить, на каком уровне H диск оторвется от трубки.

§ 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

35. Вертикальный цилиндр объемом V и площадью основания S разделен на две части тонким теплонепроницаемым поршнем. В нижней части цилиндра находится m *г* водорода при температуре T_1, в верхней — $2\,m$ *г* гелия при температуре T_2. Найти массу поршня, если при равновесии объемы газов равны.

36. U-образный ртутный манометр (рис. 293), разность уровней ртути в коленах которого при атмосферном давлении p_0 равна h, установлен в кабине высотной ракеты. Ракета взлетает с ускорением $0{,}5\,g$. Какие показания даст манометр во время взлета? Температура в кабине ракеты поддерживается постоянной, давление воздуха в кабине равно p_0. До взлета ракеты ртуть находилась на расстоянии $2h$ от запаянного конца манометра.

37. В цилиндре, наполненном газом, перемещается поршень со скоростью u (рис. 294). Определить часть энергии, теряемой молекулой при столкновении с поршнем, если скорость молекулы перпендикулярна к поверхности поршня и равна v ($v \gg u$). Столкновение молекулы с поршнем считать абсолютно упругим.

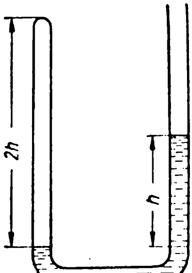


Рис. 293.

38. Закрытый цилиндр, заполненный газом, разделен непроницаемой перегородкой A (рис. 295), которая может передвигаться по цилиндру без трения. Давление в каждом из отсеков равно p. Цилиндр начинает двигаться в направлении, указанном стрелкой, с ускорением a. Насколько сместится перегородка, если движение цилиндра происходит так, что цилиндр и газ внутри находятся все время при одной и той же температуре? Объем цилиндра V, длина l, масса перегородки M.

39. В сосуде Дьюара хранится 2 *л* жидкого азота при температуре — 195° С. За одни сутки испаряется половина данного количества азота. Определить удельную теплоту испарения азота, если известно, что при температуре 0° С в этом же сосуде в течение 22,5 *ч* растает 40 *г* льда. Температура окружающего воздуха 20° С. Плотность жидкого азота составляет 800 *кг/м*^{3}. Считать, что скорость подвода теплоты внутрь сосуда пропорциональна разности температур снаружи и внутри сосуда.

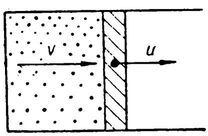


Рис. 294.

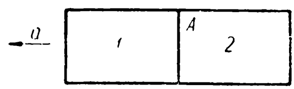


Рис. 295.

40. В колбе находилась вода при 0° С. Откачивая из колбы воздух, заморозили всю воду посредством собственного испарения. Какая часть воды при этом испарилась, если притока тепла извне нет? Удельная теплота испарения при 0° С составляет $2{,}54 \cdot 10^6$ *дж/кг*.

41. 50 *г* льда при температуре 0° С помещено в теплонепроницаемую оболочку и подвержено давлению $6{,}06 \cdot 10^7$ *н/м*^{2}. Какая часть льда расплавится, если при повышении давления на $1{,}39 \cdot 10^7$ *н/м*^{2} температура плавления льда понижается на 1°С? Считать снижение температуры плавления пропорциональным повышению давления.

42. Поверхностное натяжение на границе вода — масло можно считать равным $\alpha = 18 \cdot 10^{-3}$ *н/м*. Какую работу надо выполнить, чтобы каплю масла массой $m = 1$ *г* раздробить в воде на капли радиусом $r = 10^{-4}$ *см*. Процесс дробления считать изотермическим. Плотность масла $\rho = 900$ *кг/м*^{3}.

43. Капля воды массой $m = 0{,}1$ *г* введена между двумя плоскими и параллельными стеклянными пластинками, полностью смачиваемыми водой. Как велика сила притяжения между пластинками, если они находятся друг от друга на расстоянии $d = 10^{-4}$ *см*?.

44. Грамм ртути помещен между двумя плоскими стеклянными пластинками. Какую силу надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть имела форму круглой лепешки однородной толщины радиусом $R = 5$ *см*? Считать, что ртуть совершенно не смачивает стекло, так что угол между краем ртути и стеклянной пластинкой равен нулю.

45. Для определения давления насыщенных паров жидкости при температуре T ее поместили в закрытый сосуд (рис. 296). Через крышку сосуда проходит трубка сечением S_1, нижний конец которой опущен в жидкость, а верхний сообщается с атмосферой. Над жидкостью находится воздух. В первоначальном состоянии температура системы равна T_0, а уровни жидкости в сосуде и в трубке одинаковы и расположены на расстоянии H от крышки сосуда. Затем температуру увеличивают до T. При этой температуре уровень жидкости в трубке выше уровня жидкости в сосуде на величину h. Определить по этим данным давление насыщенных паров при температуре T. Плотность жидкости ρ, атмосферное давление p_0, сечение сосуда S. Давлением паров жидкости при температуре T_0 и ее тепловым расширением пренебречь.

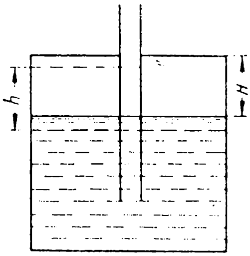


Рис. 296.

§ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

46. Два плоских конденсатора с размерами обкладок $S = 400$ *см*^{2} и расстоянием между обкладками $d_1 = 0{,}6$ *мм* соединены параллельно через сопротивление $R = 25\,000$ *ом*. Пластины конденсаторов раздвигаются на расстояние $d_2 = 1{,}8$ *мм* за время $t = 3$ *сек* один раз одновременно, а второй раз по очереди. Чему равна разность механических работ, выполняемых в обоих случаях, если разность потенциалов между обкладками сначала составляла $U = 500$ *в*?

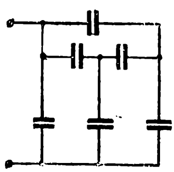


Рис. 297.

47. По окружности радиусом R могут свободно перемещаться три шарика, имеющие заряды q_1 на одном шарике и q_2 на каждом из двух других. Чему равно отношение зарядов q_1 и q_2, если при равновесии дуга между шариками и зарядами q_2 составляет 60°?

48. Два одинаковых плоских конденсатора с площадью пластин S соединены параллельно, заряжены до разности потенциалов U_0 от батареи и затем отключены от нее. Пластины одного из конденсаторов начинают сближать так, что расстояние между ними изменяется во времени по закону $d = d_0\dfrac{t_0 - t}{t_0 + t}$, где d_0 — первоначальное расстояние между пластинами, t — время, t_0 — некоторая постоянная величина. Определить силу тока в проводах, соединяющих конденсаторы.

49. Определить емкость показанной на рис. 297 системы одинаковых конденсаторов.

50. Из 12 одинаковых конденсаторов емкостью C каждый спаян восьмигранник (рис. 298). Какова его емкость между точками A и B?

51. Одна пластина плоского конденсатора закреплена неподвижно, вторая подвешена на пружине с коэффициентом жесткости k. Площадь каждой пластины равна S. Насколько удлинится пружина, если пластинам сообщить равные, но противоположные по знаку заряды Q? Поле между пластинами считать однородным.

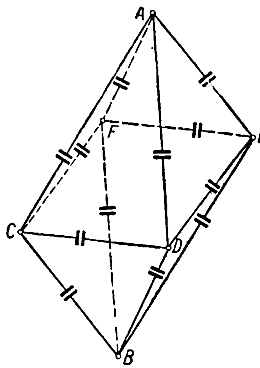


Рис. 298.

52. На дне широкого сосуда с жидким диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε закреплена пластина конденсатора площадью S. Другая пластина, имеющая вид бруска высотой H и площадью S, плавает над ней в диэлектрике. На какую глубину погрузится нижняя плоскость бруска, если на пластины подать одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды Q? Плотность жидкости ρ_0, плотность бруска ρ ($\rho_0 > \rho$). Поле между пластинами считать однородным.

53. В схеме (рис. 299) сопротивления R_1 и R_2 подобраны так, что напряжение на нагрузке R_0 в α раз меньше напряжения, падающего на той же нагрузке при непосредственном подключении к клеммам батареи, а мощность, расходуемая батареей, равна мощности, расходуемой при непосредственном подключении. Чему будет равна мощность, расходуемая батареей, если отключить нагрузку R_0? $E = 2{,}7$ *в*; $\alpha = 10$ и $R_0 = 3$ *ом*.

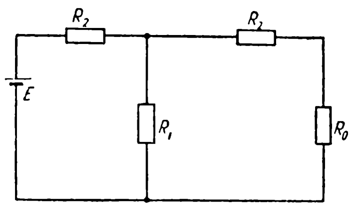


Рис. 299.

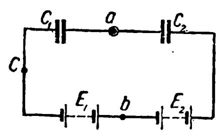


Рис. 300.

54. Определить разность потенциалов между точками a и b (рис. 300).

55. Определить разность потенциалов между точками a и b (рис. 301). Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

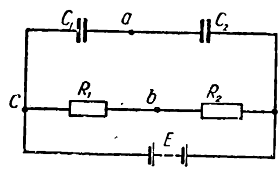


Рис. 301.

56. Воздух в пространстве между пластинами плоского конденсатора, площадь пластин которого 250 *см*^{2}, ионизируется рентгеновскими лучами так, что в 1 *см*^{3} образуется 10^9 пар ионов в секунду. К пластинам конденсатора через сопротивление 10^{10} *ом* приложено напряжение 1300 *в*. Такое же сопротивление 10^{10} *ом* включено параллельно конденсатору. Какой силы ток проходит в цепи батареи? Можно считать, что ионы достигают пластин, не успев рекомбинировать, и что заряд каждого иона равен заряду одного электрона.

57. Дан проволочный квадрат (рис. 302). Сопротивление стороны квадрата $R = 1$ *ом*. Контакты M и N перемещаются одновременно по

сторонам AB и CD. В каких пределах изменяется сопротивление квадрата?

58. Электродвигатель, включенный в цепь постоянного тока с напряжением 120 *в*, при полном сопротивлении цепи передает при опре-

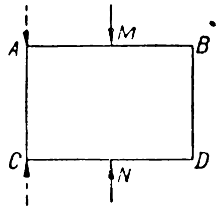


Рис. 302.

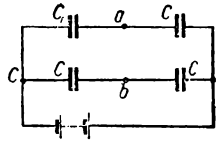


Рис. 303.

деленной нагрузке привода мощность 160 *вт*. Какую э. д. с. разовьет этот двигатель, если его использовать как динамомашину, вращая якорь с той же угловой скоростью, которую он имел, работая как двигатель? Какой смысл имеет неоднозначность полученного результата?

59. Определить разность потенциалов между точками a и b (рис. 303).

60. Какую максимальную работу за единицу времени может выполнить электродвигатель, включенный в цепь постоянного тока напряжением 120 *в*, если полное сопротивление цепи равно 20 *ом*? Какой силы ток проходит при этом по цепи?

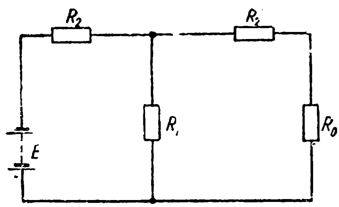


Рис. 304.

61. Какими должны быть взяты сопротивления R_1 и R_2 в схеме (рис. 304), чтобы напряжение на сопротивлении R_0 было в α раз меньше напряжения на этом же сопротивлении при непосредственном подключении его к зажимам батареи, а мощность, отдаваемая батареей, равнялась мощности, отдаваемой при непосредственном включении?

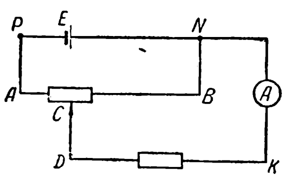


Рис. 305.

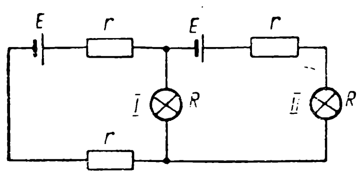


Рис. 306.

62. Элемент с э. д. с. $E = 2$ *в* замкнут на потенциометр сопротивлением 10 *ом* (рис. 305). Ползунок потенциометра, установленный посредине, соединен через сопротивление 2 *ом* и амперметр с одним из полюсов элемента. Какую силу тока показывает амперметр?

63. В цепь (рис. 306) включены два одинаковых источника напряжения с э. д. с. E, три одинаковых сопротивления r и две одинаковых лампы сопротивлением R каждая. Как будет изменяться сила тока, проходящего через лампы, в зависимости от изменений сопротивления r при неизменных E и R? Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

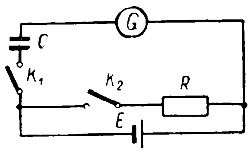


Рис. 307.

64. К полюсам батареи с э. д. с. E и внутренним сопротивлением r через ключ K_1 и конденсатор емкости C (рис. 307) присоединен баллистический гальванометр G. К зажимам источника ключом K_2 может быть присоединено сопротивление R. При замыкании ключа K_1 (ключ K_2 разомкнут) стрелка гальванометра отклоняется вправо на угол α. На какой угол β и в какую сторону отклонится стрелка гальванометра, если затем замкнуть ключ K_2? Считать, что угол отклонения пропорционален прошедшему через гальванометр заряду.

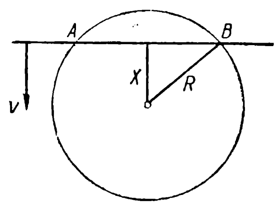


Рис. 308.

65. В постоянном и однородном магнитном поле напряженностью H перпендикулярно его силовым линиям с постоянной скоростью v движется металлический стержень. Определить временную зависимость э. д. с. индукции E, которая возникает на участке AB стержня, лежащем внутри окружности радиусом R (рис. 308), если в начальный момент времени стержень касался окружности. Линии напряженности перпендикулярны плоскости окружности.

66. Из изолированной проволоки сделана замкнутая петля (рис. 309, *а*). В месте перекрещивания расположены одна над другой точки M и N провода. Радиус контура I равен r_1, а контура II — r_2.

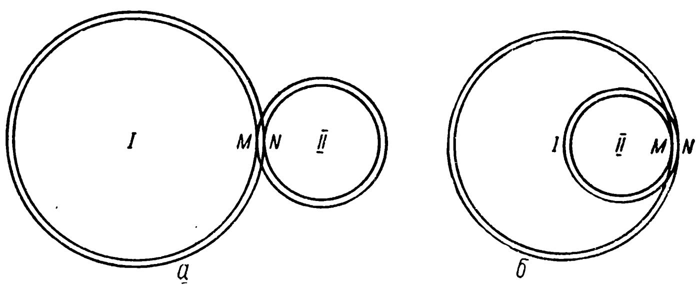


Рис. 309.

1. Определить разность потенциалов между точками M и N, когда этот контур пронизывает магнитное поле, перпендикулярное плоскости рисунка, индукция которого меняется по закону $B = B_0 t$.

2. Какова будет разность потенциалов между этими точками, если петля имеет форму, показанную на рис. 309, *б*?

§ 4. ОПТИКА

67. Объектив кинопроекционного аппарата имеет фокусное расстояние $F = 5$ *см*. Размер кадра на пленке 18×24 *мм*. Изображение проектируется на экран размером 100×120 *см*. На каком расстоянии от экрана следует расположить аппарат, чтобы получить максимальный размер изображения? Какая часть экрана (по площади) будет при этом занята изображением?

68. На расстоянии $2F$ от равномерно светящейся плоскости большого размера находится собирающая линза с фокусным расстоянием F и диаметром D. Чему равна освещенность в центре светового пятна на экране, находящемся на расстоянии a от линзы, при условии $2F > a \gg D$, если светящаяся плоскость излучает за 1 *сек* с 1 *см*^{2} поверхности в единицу телесного угла энергию Φ?

69. На дне сосуда находится небольшой предмет, прикрытый стеклянной лейкой в форме конуса с углом раствора 2α. Лейка плотно прилегает ко дну сосуда. Предмет находится в центре основания цилиндра. Сосуд наполняют прозрачной жидкостью с показателем преломления n, которая полностью покрывает коническую лейку (рис. 310). При каком условии наблюдатель, который смотрит через поверхность жидкости, будет видеть данный предмет?

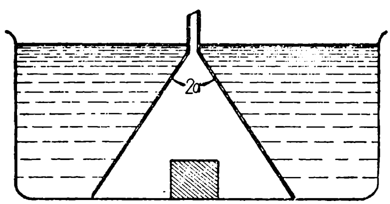


Рис. 310.

70. Протяженный источник находится на расстоянии d от линзы с фокусным расстоянием F. Во сколько раз изменится освещенность изображения, если расстояние между источником и линзой увеличить в два раза? Рассмотреть случай $d = 2F$.

71. Действительное изображение протяженного источника света получено с помощью линзы, находящейся на расстоянии d от источника. Определить фокусное расстояние F линзы, если при увеличении расстояния d вдвое освещенность изображения уменьшается в четыре раза.

72. Проекционный аппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние F_1, установлен на расстоянии L от экрана. Во сколько раз изменится размер изображения, если на объектив надеть насадочную собирающую линзу с фокусным расстоянием F_2?

73. Какую экспозицию надо взять при фотографировании чертежа с увеличением k, если при фотографировании с увеличением, равным единице, экспозиция равна t?

74. Два одинаковых сферических вогнутых зеркала поставлены друг против друга на расстоянии, равном четырем фокусным расстояниям. В фокусе одного зеркала помещен источник света. Определить положение изображения.

75. Два плоских зеркала, образующих между собой постоянный двугранный угол φ_0, вращаются относительно оси, параллельной ребру двугранного угла. Свет от далекого источника после отражения от обоих зеркал попадает в зрительную трубу. Как будет двигаться изображение источника света в поле зрения трубы при вращении зеркал?

76. Плоская поверхность плоско-выпуклой линзы с фокусным расстоянием F покрыта слоем, очень хорошо отражающим свет. На расстоянии d от линзы со стороны выпуклой поверхности расположен точечный источник света. Определить положение изображения. При каких значениях d изображение будет действительным и при каких мнимым?

77. Две одинаковых тонких собирающих линзы с фокусным расстоянием F расположены на расстоянии F друг от друга так, что их оптические оси совпадают. На расстоянии d от одной из них находится источник света. Найти положение изображения источника.

78. С помощью объектива, состоящего из тонких, плотно прижатых рассеивающей и собирающей линз, предмет проектируют на экран. Расстояние от объектива до предмета $d = 25$ *см*, а до изображения $f = 4$ *м*. Определить главное фокусное расстояние рассеивающей линзы, если ее оптическая сила в два раза больше (по абсолютной величине) оптической силы собирающей линзы.

79. Между источником света и зрительной трубой помещена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ *см* на расстоянии $l = 85$ *см* от источника. Где надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_2 = 16$ *см*, чтобы источник света был отчетливо виден в трубу, установленную на бесконечность? При каком из возможных положений линзы изображение в трубе будет иметь наибольшие угловые размеры?

80. На тонкую рассеивающую линзу падает параллельный пучок лучей от удаленного источника, расположенного на оптической оси. На расстоянии a за линзой перпендикулярно ее оптической оси расположено плоское зеркало. После прохождения лучей через линзу, отражения от зеркала и вторичного прохождения через линзу образуется мнимое изображение, расположенное между линзой и зеркалом на расстоянии $\frac{3}{4}a$ от линзы. Определить фокусное расстояние линзы.

81. Объектив зрительной трубы имеет фокусное расстояние $F_1 = 34$ *см*, а окуляр — фокусное расстояние $F_2 = 4$ *см*. Труба установлена на бесконечность, после чего удаленные предметы наблюдаются ненапряженным глазом, аккомодированным на бесконечность. В каком месте надо поставить диафрагму поля зрения, чтобы поле зрения было четко ограничено? Какова величина угла поля зрения, если диаметр диафрагмы 12 *мм*?

82. Черный шарик, поглощающий все световые лучи, помещен в фокусе линзы с фокусным расстоянием F и диаметром D, оптическая ось которой направлена на Солнце. Угловой диаметр Солнца равен α; освещенность, создаваемая Солнцем на Земле равна E. Определить, до какой температуры нагреется шарик, если известно, что скорость теплообмена шарика (т. е. энергия, теряемая в единицу времени) равна $ar^2(t^\circ - t_0^\circ)$, где a — некоторая постоянная, r — радиус шарика, t_0° — температура воздуха. Рассмотреть случай, когда диаметр шарика меньше диаметра изображения Солнца. Будет ли в этом случае результат зависеть от радиуса шарика?

83. Призма спектроскопа прямого зрения представляет собой стеклянный параллелепипед, часть которого в виде прямой призмы с равнобедренным треугольником в основании удалена. Получившаяся полость заполняется жидкостью (рис. 311), подобранной так, что зеленый луч проходит через призму, не отклоняясь, а красный и синий отклоняются соответственно к вершине и основанию треугольника. Как сместится спектр при повышении температуры, если показатель преломления жидкости уменьшается с ростом температуры? Температурным изменением показателя преломления стекла пренебречь.

84. Свет от удаленного источника, представляющий совокупность двух волн длиной λ_1 и λ_2, параллельным пучком падает перпендикулярно на одну из преломляющих граней призмы, имеющей малый угол преломления α. За призмой установлена линза с фокусным расстоянием F так, что ее оптическая ось совпадает по направлению с падающим на призму пучком света. Полагая, что коэффициент преломления материала призмы зависит от длины волны λ по закону $n = \frac{a}{\lambda}$, где a — некоторая постоянная, определить расстояние между изображениями источника в фокальной плоскости линзы, образованными световыми лучами с длиной волны λ_1 и λ_2. Для простоты расчетов углы отклонения лучей от оптической оси линзы считать малыми, так что синусы и тангенсы этих углов можно приближенно заменять самими углами.

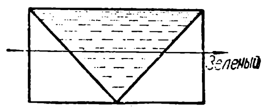


Рис. 311.

85. Объектив зрительной трубы имеет фокусное расстояние $F_1 = 34$ *см* и диаметр 40 *мм*, а окуляр — фокусное расстояние $F_2 = 4$ *см*. Труба установлена на бесконечность так, что удаленные предметы наблюдаются в трубу глазом, аккомодированным на бесконечность. Если за окуляром поместить матовое стекло, то при некотором положении освещенный кружок на матовом стекле имеет наименьшие размеры и четко ограниченные края. Чему равно при этом расстояние от матового стекла до окуляра и чему равен диаметр кружка?

86. Исходя из законов сохранения энергии и количества движения, показать, что свободный электрон не может поглотить фотон.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

§ 1. МЕХАНИКА

1. $v = \dfrac{\sqrt{v_0^2 + 221gH}}{11}$.

Решение. Обозначим массу шара через M, массу пули через m. По условию задачи $M = 10\ m$. В точке B (рис. 312) шар имеет скорость $v_в' = \sqrt{gH}$. После попадания пули в шар согласно закону сохранения количества движения можно записать:

$$Mv_в' = (m + M)\, v_в \quad и \quad mv_0 = (m + M)\, v_{гор},$$

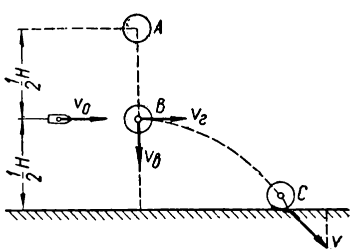


Рис. 312.

где $v_в$ и $v_{гор}$ — составляющие скорости шара после попадания пули. Отсюда

$$v_в = \frac{Mv_в'}{m + M} = \frac{10m}{m + 10m}\sqrt{gH} = \frac{10}{11}\sqrt{gH} \quad и$$

$$v_{гор} = \frac{mv_0}{m + M} = \frac{m}{m + 10m}\, v_0 = \frac{v_0}{11}.$$

Скорость шара v в точке C может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$(m + M)\frac{v_{гор}^2 + v_в^2}{2} = (m + M)\frac{v^2}{2} - (m + M)\, g\frac{H}{2}.$$

Подставляя сюда значения для $v_{гор}$ и $v_в$, получим для скорости шара v в момент падения на землю $v = \dfrac{\sqrt{v_0^2 + 221gH}}{11}$.

2. $t_2 = \dfrac{v_0}{g}(3 + \sqrt{3})$; $v_2 = 2v_0$.

Решение. Из закона сохранения количества движения следует, что при взрыве обе части снаряда приобрели одинаковые по величине и противоположные по направлению скорости v_x. Падение одной половины снаряда вблизи точки выстрела показывает, что эта половина получила при разрыве начальную скорость v_x вниз, следовательно, и вторая половина получила такое же количество движения вверх. Скорость v_x определим из равенств

$$2v_0 = v_x + gt_1 \text{ и } \frac{v_0^2}{2g} = v_x t_1 + \frac{gt_1^2}{2},$$

где $\frac{v_0^2}{2g}$ — высота максимального подъема снаряда, t_1 — время падения первого осколка. Определив из первого равенства $t_1 = \frac{2v_0 - v_x}{g}$ и подставив во второе, получим $v_x = v_0 \sqrt{3}$.

Время, которое прошло от момента выстрела до падения второй половины снаряда на землю, можно определить как сумму трех времен: t' — времени поднятия снаряда до точки максимального подъема, $t'' = \frac{v_0\sqrt{3}}{g}$ — времени поднятия второй половины снаряда после разрыва на максимальную высоту, t''' — времени падения с высоты $\frac{v_0^2}{2g} + \frac{3v_0^2}{2g} = \frac{2v_0^2}{g}$ на землю. Из формулы $\frac{2v_0^2}{g} = \frac{gt'''^2}{2}$ получаем $t''' = \frac{2v_0}{g}$.

Тогда $t_2 = t' + t'' + t''' = \frac{v_0}{g} + \frac{v_0\sqrt{3}}{g} + \frac{2v_0}{g} = \frac{v_0}{g}(3 + \sqrt{3})$.

Скорость второй половины снаряда в момент падения найдем по формуле $v_2 = \sqrt{2gH}$, где $H = \frac{2v_0^2}{g}$ — суммарная высота подъема второй половины снаряда. Тогда $v_2 = 2v_0$.

3. $M > 3m$.

Решение. Для определения скоростей шаров после удара воспользуемся законами сохранения энергии и количества движения:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \text{ и } mv_0 = Mv_1 - mv_2,$$

где v_0 — скорость шара массой m до удара, v_1 и v_2 — скорости шаров после удара.

Решив эти уравнения, получим

$$v_1 = \frac{2m}{m+M} v_0 \text{ и } v_2 = \frac{M-m}{m+M} v_0.$$

Чтобы второй шар после упругого отражения от стенки мог догнать первый шар, необходимо, чтобы $v_2 > v_1$, т. е.

$$\frac{M-m}{m+M} v_0 > \frac{2m}{m+M} v_0, \text{ откуда } M > 3m.$$

4. $l \geqslant \dfrac{Mv_0^2}{2kg\,(m+M)}$.

Решение. Под действием силы трения $F_т = kmg$ тело движется с ускорением $a = kg$. Если длина тележки достаточно большая, чтобы тело не сползло с нее, то скорости тележки и тела сравняются через $t = \dfrac{v}{kg}$, где $v = \dfrac{M}{m+M}\,v_0$ — скорость тележки и тела в конце процесса. За это время тело пройдет путь

$$s_1 = \frac{v^2}{2kg}.$$

Путь, пройденный за это же время тележкой,

$$s_2 = \frac{v_0 + v}{2}\,t = \frac{v_0 + v}{2}\cdot\frac{v}{kg}.$$

Чтобы тело не соскользнуло с тележки, его длина должна быть не меньше разности пути, пройденного тележкой, и пути, пройденного телом:

$$l \geqslant s_2 - s_1;\quad l \geqslant \frac{v_0 + v}{2}\cdot\frac{v}{kg} - \frac{v^2}{2kg},\ \text{откуда}\ l \geqslant \frac{v_0 v}{2kg}.$$

Подставив значение v, получим $l \geqslant \dfrac{Mv_0^2}{2kg\,(m+M)}$.

5. $x = 300$ *м*.

Решение. Обозначим через s_1 путь, пройденный до остановки оторвавшимися вагонами; s_2 — путь, пройденный остальными вагонами поезда после прекращения подачи пара в машину до остановки; $s = 240$ *м*: x — расстояние между оторвавшимися вагонами и поездом после остановки. Тогда (рис. 313)

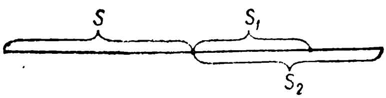


Рис. 313.

$$x = s + s_2 - s_1. \qquad (1)$$

Если бы после отрывания задних вагонов прекратилось поступление пара в машину, то поезд и эти вагоны двигались бы одинаково и прошли бы путь, который может быть определен по формулам

$$\frac{m_1 v^2}{2} = km_1 g s_1 \quad \text{или} \quad \frac{(m - m_1)\,v^2}{2} = k\,(m - m_1)\,g s_1. \qquad (2)$$

При равномерном движении поезда сила тяги паровоза уравновешивается силой сопротивления всего поезда $F_{тяги} = kmg$. Когда несколько вагонов оторвалось, то сила сопротивления уменьшилась, а сила тяги, по условию задачи, не изменилась. На поезд начала действовать, сообщающая ему ускорение, сила F:

$$F = kmg - k\,(m - m_1)g = km_1 g.$$

Поезд после отрывания вагонов начал двигаться под действием этой силы ускоренно, и его кинетическая энергия на пути s возросла на величину $\Delta E_к$. Изменение кинетической энергии можно определить по работе силы F на пути s:

$$\Delta E_к = km_1gs.$$

Когда машинист прекратил подачу пара в машину, поезд уже имел кинетическую энергию $E_к = \frac{(m - m_1) v^2}{2} + \Delta E_к = \frac{(m - m_1) v^2}{2} + km_1gs.$

Подставив в эту формулу вместо $\frac{(m - m_1)v^2}{2}$ в соответствии с формулой (2) $k(m - m_1)gs_1$, получим

$$E_к = k(m - m_1)gs_1 + km_1gs.$$

Кинетическая энергия $E_к$ поезда расходуется на выполнение работы по преодолению сопротивления на пути s_2:

$$k(m - m_1)gs_2 = k(m - m_1)gs_1 + km_1gs.$$

Отсюда находим, что

$$s_2 - s_1 = \frac{m_1 s}{m - m_1}.$$

Подставив это значение $s_2 - s_1$ в формулу (1), получим

$$x = \frac{ms}{m - m_1} = 300\ м.$$

6. $h_1 = h\frac{1 - k\operatorname{ctg}\alpha}{1 + k\operatorname{ctg}\alpha}$.

Решение. При скольжении вниз выполняется работа по преодолению силы трения:

$$A_т = kmg\cos\alpha\, l = kmg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha} = kmgh\operatorname{ctg}\alpha.$$

При поднятии вверх работа по преодолению силы трения

$$A'_т = kmg\cos\alpha\, l' = kmg\cos\alpha\frac{h_1}{\sin\alpha} = kmgh_1\operatorname{ctg}\alpha.$$

В соответствии с законом сохранения и превращения энергии можно записать:

$$mgh - kmgh\operatorname{ctg}\alpha = mgh_1 + kmgh_1\operatorname{ctg}\alpha,\ \text{откуда}\ h_1 = h\frac{1 - k\operatorname{ctg}\alpha}{1 + k\operatorname{ctg}\alpha}.$$

7. $F > (m_1 + m_2)g$.

Решение. После прекращения действия силы на верхнюю пластинку пружина растянется. Пусть x — наибольшее удлинение пружины относительно ее недеформированного состояния. При этом к концам пружины приложены одинаковые по величине и противоположно направленные силы, растягивающие пружину, $f = kx$, где k — коэффициент упругости. К нижнему концу пружины эта сила приложена со стороны пластинки m. Согласно третьему закону механики, сила, одинаковая по величине, направлена вверх и приложена к массе m_2 со стороны пружины. Если эта сила больше веса нижней пластинки, то пластинка подпрыгнет, т. е.

$$kx > m_2 g. \qquad (1)$$

Пусть на верхнюю пластинку подействовала сила F. Она вызвала сжатие пружины на $x_0 = \frac{F}{k}$. После прекращения действия силы верхняя пластинка придет в колебательное движение с амплитудой x_0. Следовательно, максимальное удлинение пружины относительно начального положения будет x_0. Однако начальное положение пружины (до действия силы F) является деформированным: пружина сжата весом верхней пластинки и поэтому короче недеформированной пружины на $x_1 = \frac{m_1 g}{k}$. После прекращения действия силы F пружина растянется относительно недеформированного состояния на величину

$$x = x_0 - x_1 = \frac{F - m_1 g}{k}.$$

Подставим это значение x в неравенство (1):

$$k\frac{F - m_1 g}{k} > m_2 g, \text{ откуда } F > (m_1 + m_2) g.$$

8. $s \approx 3{,}5$ *см*.

Р е ш е н и е. Расстояние, на которое откатится игрок, бросивший мяч, определим по формуле

$$v_0^2 = 2as, \text{ откуда } s = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Здесь $v_0 = \frac{m}{M} v$ —скорость «откатывания» игрока; a — отрицательное ускорение, сообщаемое силой трения; $v = \frac{l}{t}$ — скорость мяча. Ускорение определим из второго закона механики:

$$F = ma = kmg, \text{ откуда } a = kg.$$

Подставив полученные значения v_0 и a в формулу для s, получим

$$s = \frac{m^2 l^2}{2M^2 kgt^2} \approx 0{,}035 \text{ м} = 3{,}5 \text{ см}.$$

9. $-4k \leqslant 1 - \frac{m_1}{m_2} \leqslant 4k.$

Р е ш е н и е. Поскольку обе нити растягиваются одинаковой силой $F_н$, то второй закон механики для трех грузов $(m_1 + m_2)$, m_1 и m_2 запишется так:

$$(m_1 + m_2) g - 2F_н = (m_1 + m_2) a;$$
$$F_н - F_т = m_1 a_1;$$
$$F_н + F_т = m_2 a_2.$$

Эти уравнения справедливы как в случае отсутствия скольжения, так и в случае его наличия. Направление силы $F_т$ не предопределено, важно только, что в последних уравнениях знаки перед $F_т$ различны в соответствии с третьим законом Ньютона. Если скольжение отсутствует, то $a = a_1 = a_2$ и $F_т$ есть сила трения покоя, которая определяется из этой системы уравнений и может принимать значения от 0 до km_2g.

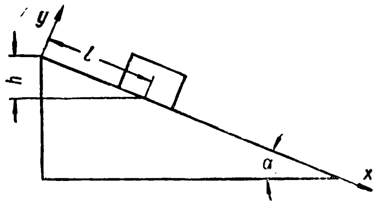


Рис. 314.

При заданном соотношении масс $F_т$ определяется однозначно. Очевидно, что скольжение начнется, как только сила $F_т$ будет равна km_2g (нижний груз имеет меньшее ускорение, чем верхний, при данном выборе знаков в уравнениях) или $F_т = -km_2g$ (нижний груз имеет бо́льшее ускорение, чем верхний). Таким образом, скольжения не будет при условии: $-km_2g \leqslant F_т \leqslant km_2g$.

Силу трения $F_т$ найдем из системы трех уравнений: для этого сначала сложим все три уравнения:

$$(m_1 + m_2) g = 2(m_1 + m_2) a, \text{ откуда } a = \frac{1}{2} g.$$

Теперь из третьего уравнения вычтем второе:

$$2F_т = (m_2 - m_1) a = (m_2 - m_1) \frac{g}{2}; \text{ тогда } F_т = (m_2 - m_1) \frac{g}{4}.$$

Подставим теперь полученное значение $F_т$ в неравенство и получим

$$-km_2g \leqslant (m_2 - m_1) \frac{g}{4} \leqslant km_2g, \text{ откуда} -4k \leqslant 1 - \frac{m_1}{m_2} \leqslant 4k.$$

10. $v_2 = \sqrt{2gl \sin\alpha} \left(\frac{m+M}{M} + \frac{mv}{M} \sqrt{\frac{\sin\alpha}{2gl}} \right)$.

Решение. В момент выстрела лыжник и ракета имели количество движения $(m + M)v_1$, направленное вдоль оси x (рис. 314). Скорость лыжника до выстрела можно определить по закону сохранения энергии:

$$\frac{(m+M) v_1^2}{2} = (m + M) gh, \text{ где } h = l \sin\alpha, \text{ откуда } v_1 = \sqrt{2gl \sin\alpha}.$$

Обозначим через v_2 скорость лыжника непосредственно после выстрела. Тогда по закону сохранения количества движения получим

$$(m + M) v_1 = -mv \sin\alpha + Mv_2,$$

где $(-mv \sin\alpha)$ — проекция на ось x-ов количества движения, полученного ракетой.

Подставив значение v_1, получим:

$$(m + M) \sqrt{2gl \sin\alpha} = -mv \sin\alpha + Mv_2, \text{ откуда}$$

$$v_2 = \sqrt{2gl \sin\alpha} \left(\frac{m+M}{M} + \frac{mv}{M} \sqrt{\frac{\sin\alpha}{2gl}} \right).$$

11. $F_{\text{нат}} = 1{,}5P$.

Решение. Предположим, что нить удлинилась на Δl. Тогда вся система опустится на $3\Delta l$, а центр тяжести сместится на $1{,}5\ \Delta l$. Тогда работа по перемещению центра тяжести равна работе по растяжению нити:

$$1{,}5\,P\Delta l = F_{\text{нат}}\Delta l, \text{ откуда } F_{\text{нат}} = 1{,}5P.$$

12. $h_{\text{мин}} = 16$ *мм*.

Решение. Силу веса бочки P раскладываем на две одинаковые силы F, как показано на рис. 315, *а* и *б*. Эти силы направлены по линиям, соединяющим центры верхней и двух средних бочек, потому что на этих линиях лежат точки касания бочек.

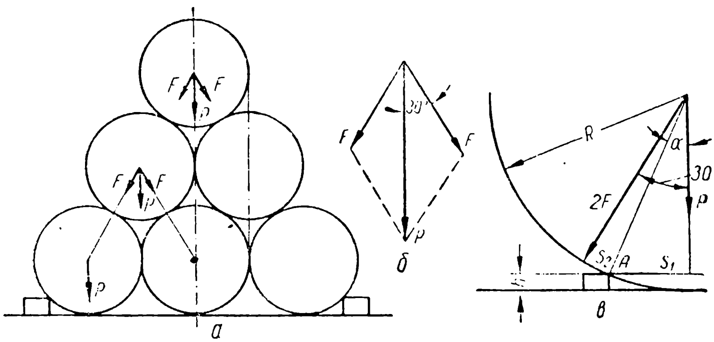


Рис. 315.

Линии, соединяющие центры трех бочек, образуют равносторонний треугольник с углами по 60°. Отсюда угол, образованный силами F, составляет 60°, а угол между силой F и силой P составляет 30°. Следовательно, величина силы F определится из уравнения

$$F = \frac{P}{2\cos 30^\circ} = \frac{P}{\sqrt{3}}.$$

Верхняя бочка как бы стремится своим весом раздвинуть две бочки среднего ряда. Каждая из двух бочек среднего ряда действует на две бочки нижнего ряда (на которые она опирается) так же, как и верхняя бочка на средние. Значит, каждая из крайних бочек нижнего ряда под действием лежащих сверху бочек стремится откатиться от центральной бочки нижнего ряда, причем на каждую крайнюю бочку нижнего ряда действует сила, направленная по линии, соединяющей центры верхней и соответствующей нижней бочки, но по величине равная $2F$ (рис. 315, *в*). Из этого рисунка видно, что под действием момента, создаваемого силой $2F$, бочка стремится перекатиться через точку A, а момент силы P относительно этой же точки A препятствует перекатыванию бочки. Для сохранения равновесия пирамиды необходимо, чтобы восстанавливающий момент M_1 силы P был больше момента M_2 силы $2F$ или равен ему:

$$M_1 \geqslant M_2;\ Ps_1 \geqslant \frac{2F}{\sqrt{3}} s_2.$$

Из рис. 315, *в* следует, что

$$s_1 = R\sin\alpha; \quad s_2 = R\sin(30^\circ - \alpha),$$

где R — радиус бочки. Подставив значения s_1 и s_2 в уравнение моментов, получим после упрощений:

$$R\sin\alpha \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} R\sin(30^\circ - \alpha).$$

Сократив на R и преобразовав $\sin(30^\circ - \alpha)$, получим:

$$\sin\alpha \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 30^\circ \cos\alpha - \sin\alpha\cos 30^\circ) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos\alpha - \sin\alpha,$$

$$\text{или } 2\sin\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha.$$

Разделив правую и левую части на $2\cos\alpha$, получим $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Из рис. 315, *в* $h = R(1 - \cos\alpha)$. Неизвестную величину $\cos\alpha$ определим из условия равновесия, когда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$; отсюда $\cos\alpha \approx 0{,}96$.

Тогда наименьшее значение высоты подкладки будет $h_{мин} = 400$ *мм* $\times (1 - 0{,}96) = 16$ *мм*.

Очевидно, что высота каждого упора, принятая по условию 10 *мм*, будет недостаточная.

13. $h' = \dfrac{\left(v - \dfrac{M}{m}\sqrt{2gh}\right)^2}{2g}$.

Р е ш е н и е. Высоту поднятия пули над подставкой можно определить по формуле $h' = \frac{v'^2}{2g}$, где v' — скорость пули после пробивания определим по закону сохранения количества движения:

$$mv' = mv - Mv_2 = mv - M\sqrt{2gh}, \text{ откуда } v' = v - \frac{M}{m}\sqrt{2gh}.$$

$$\text{Тогда } h' = \frac{\left(v - \dfrac{M}{m}\sqrt{2gh}\right)^2}{2g}.$$

14. $\cos\varphi = \dfrac{g}{\omega^2}\cdot\dfrac{mb + M(a+b)}{mb^2 + M(a+b)^2}$.

Р е ш е н и е. Величины центростремительных сил, действующих на шарики при их вращении,

$$F_1 = m\omega^2 b\sin\varphi \text{ и } F_2 = M\omega^2(a+b)\sin\varphi.$$

Сумма моментов составляющих сил веса шариков равна сумме моментов центростремительных сил, т. е.

$$mgb\sin\varphi + Mg(a+b)\sin\varphi = m\omega^2 b\sin\varphi\, b\cos\varphi + M\omega^2 \times$$

$$\times (a+b)^2 \sin\varphi\cos\varphi, \text{ откуда } \cos\varphi = \frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{mb+M(a+b)}{mb^2+M(a+b)^2}.$$

15. $v_{\text{мин}} \approx 14$ *м/сек*; $\alpha \approx 11^\circ$.

Р-е ш е н и е. Рассмотрим движение мотоциклиста в системе координат, связанной с движущимся телом. Тогда на мотоциклиста действуют силы: его вес $P = mg$, приложенный в центре тяжести и направленный вертикально вниз; сила давления N со стороны стенки, приложенная в точках касания колес и стенки и направленная перпендикулярно к поверхности стенки; равнодействующая сил трения $F_{\text{т}}$, приложенных в точках касания колес и стенки, направленная по образующей цилиндрической поверхности стенки вертикально вверх (максимальное значение силы трения $F_{\text{т}} = kN$); центробежная сила инерции $F_{\text{ц}} = m\omega^2 R$, приложенная в центре тяжести и направленная по радиусу окружности $R = \frac{d}{2} - h$ от центра вращения (по нормали к цилиндрической поверхности). Под действием всех этих сил мотоциклист находится в равновесии. Следовательно, равнодействующая всех этих сил равна нулю, или, если рассматривать проекции сил на вертикальное и горизонтальное направления, то

$$F_{\text{т}} = mg \text{ и } F_{\text{ц}} = N.$$

Учитывая, что $F_{\text{т}} = mg$ и $F_{\text{ц}} = \frac{mv^2}{R}$, получим

$$\frac{mv^2}{\frac{1}{2}d - h} = \frac{mg}{k}, \text{ откуда } v_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{d-2h}{2k}g} \approx 14 \text{ м/сек}.$$

Вращающий момент относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести системы мотоциклист-мотоцикл, должен быть равен нулю. Согласно этому условию

$$Ny - F_{\text{т}}x = 0, \text{ где } y = l\sin\alpha \text{ и } x = l\cos\alpha.$$

Отсюда $Nl\sin\alpha - F_{\text{т}}l\cos\alpha = 0$ или $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{\text{т}}}{N} =$

$$= \frac{0{,}5d - h}{v^2} g \approx 0{,}196; \ \alpha \approx 11^\circ.$$

16. 1) $F = \gamma mM\left[\frac{7d^2 - 8dR + 2R^2}{8d^2\left(d - \frac{1}{2}R\right)^2}\right]$; 2) $F = \gamma mM \times$

$$\times\left[\frac{7d^2 + 8dR + 2R^2}{8d^2\left(d + \frac{1}{2}R\right)^2}\right].$$

Р е ш е н и е. Силу взаимного притяжения между шаром с вырезом и массой m, расположенной на расстоянии $d > R$, можно определить как разность сил притяжения между полным шаром и массой m

и притяжения между массой в объеме вырезанной части с данной массой m.

1) Рассмотрим случай, когда масса m находится со стороны выреза (рис. 316). Сила взаимодействия между полным шаром и массой m запишется так: $F_1 = \gamma \frac{mM}{d^2}$.

Массу тела в объеме вырезанного шара вычислим по формуле

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \frac{1}{8} = \frac{M}{8},$$

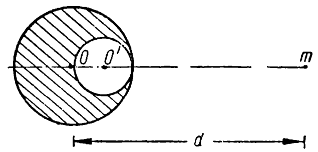


Рис. 316.

где ρ — плотность вещества шара. Расстояние центра массы M_1 от массы m составляет $d - \frac{1}{2}R$. Сила притяжения между массами M_1 и m

$$F_2 = \gamma \frac{mM_1}{\left(d - \frac{1}{2}R\right)^2} = \gamma \frac{mM}{8\left(d - \frac{1}{2}R\right)^2}.$$

Следовательно, сила взаимного притяжения F между шаром с вырезом и массой m

$$F = F_1 - F_2 = \gamma \frac{mM}{d^2} - \gamma \frac{mM}{8\left(d - \frac{1}{2}R\right)^2} =$$

$$= \gamma mM \left[\frac{7d^2 - 8dR + 2R^2}{8d^2\left(d - \frac{1}{2}R\right)^2}\right].$$

2) Рассмотрим случай, когда масса m находится с противоположной от выреза стороны. Расстояние центра массы выреза от массы m составляет теперь $d + \frac{1}{2}R$, и сила взаимного притяжения между массой выреза M_1 и массой m

$$F_3 = \gamma \frac{mM_1}{\left(d + \frac{1}{2}R\right)^2} = \gamma \frac{mM}{8\left(d + \frac{1}{2}R\right)^2}.$$

Сила взаимного притяжения F между шаром с вырезом и массой m равна

$$F = F_1 - F_3 = \gamma \frac{mM}{d^2} - \gamma \frac{mM}{8\left(d + \frac{1}{2}R\right)^2} =$$

$$= \gamma mM \left[\frac{7d^2 + 8dR + 2R^2}{8d^2\left(d + \frac{1}{2}R\right)^2}\right].$$

17. $A \approx 3{,}76 \cdot 10^6$ *дж.*

Решение. Работу, выполняемую при поднятии тела на высоту h, нельзя подсчитать по формуле $A = mgh$, так как сила взаимного притяжения между телом и Землей зависит от расстояния между ними. В связи с этим изменяется и ускорение силы земного тяготения g.

Разобьем высоту h на n маленьких отрезков AB, BC, ..., MN (рис. 317). Приближенно можно считать, что на отрезке AB действовала сила, составляющая среднее геометрическое сил, действующих в точках A и B, т. е. $F = \gamma \frac{mM}{r_0 r_1}$. Работа, выполненная при перемещении тела из точки A в точку B, составляет

$$A_1 = \gamma \frac{mM}{r_0 r_1}(r_1 - r_0).$$

Работа на пути BC составляет

$$A_2 = \gamma \frac{mM}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) \text{ и т. д.}$$

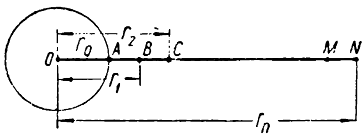


Рис. 317.

Тогда работа по поднятию тела на высоту h равна сумме работ, выполняемых на отрезках AB, BC, ..., MN, т. е.

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \gamma \frac{mM}{r_0 r_1}(r_1 - r_0) + \gamma \frac{mM}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) +$$

$$+ \ldots + \gamma \frac{mM}{r_{n-1} r_n}(r_n - r_{n-1}) = \gamma mM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}\right).$$

$$\text{Однако } \gamma \frac{mM}{r_0^2} = mg_0, \text{ откуда } \gamma M = g_0 r_0^2.$$

Подставив это значение в формулу работы, получим

$$A = mg_0 r_0^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}\right) = mg_0 r_0^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + h}\right) =$$

$$= mg_0 r_0 \frac{h}{r_0 + h} \approx 3{,}76 \cdot 10^6 \text{ дж.}$$

18. Решение. При движении шарика по окружности в любой точке центростремительная сила является суммой двух сил: силы натяжения нити $F_н$ и составляющей веса $P \cos \alpha$ (рис. 284). Следовательно,

$$F_н + P \cos \alpha = \frac{mv^2}{l},$$

где l — длина нити; v — скорость движения шарика. Отсюда находим $F_н = \frac{mv^2}{l} - P \cos \alpha$.

В правой части последнего равенства обе составляющие — переменные величины. По мере поднятия шарика $P \cos \alpha$ увеличивается, а $\frac{mv^2}{l}$ уменьшается вследствие уменьшения скорости. Наступит такой момент, когда обе составляющие будут равны друг другу и сила натяжения будет равна нулю. Шарик не будет натягивать нити. С этого момента шарик перестанет двигаться по окружности и полетит, как тело, брошенное со скоростью v под углом α к горизонту. Значит, условие ослабления нити ($F_н = 0$)

$$\frac{mv^2}{l} = P\cos\alpha \text{ или } \frac{v^2}{l} = g\cos\alpha. \qquad (1)$$

Скорость v в момент ослабления нити определим, использовав закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg(h+l) + \frac{mv^2}{2}; \qquad v^2 = v_0^2 - 2g(h+l), \qquad (2)$$

где $h = OC$.

Из треугольника OBC находим $\cos\alpha = \frac{h}{l}$. Подставляя значения v^2 и $\cos\alpha$ в формулу (1), получим

$$\frac{v_0^2 - 2g(h+l)}{l} = g\frac{h}{l}, \quad h = \frac{v_0^2 - 2gl}{3g} \approx 0{,}56 \text{ м}.$$

Подставив это значение в формулу (2), получим

$$v = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gl}{3}} \approx 2{,}34 \text{ м/сек}.$$

Высота, на которой ослабнет нить, $H = h + l \approx 1{,}56$ *м*.

19. $\alpha \approx 77°37'$.

Решение. Шарик, поднятый на высоту h (рис. 318), имеет потенциальную энергию

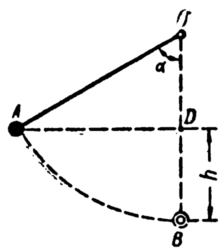


Рис. 318.

$$E_п = mgh, \text{ где } h = l - OD = l(1 - \cos\alpha),$$

$$\text{а поэтому } E_п = mgl(1 - \cos\alpha). \qquad (1)$$

В точке B шарик имеет кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos\alpha), \text{ откуда } v = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}. \qquad (2)$$

Когда шарик в точке B приобрел эту скорость, рамка начинает свободно падать. При этом сила тяжести сообщает одинаковое ускорение шарику и рамке. Никаких деформаций за счет тяготения при свободном падении в системе не возникает. Поэтому относительно рамки маятник будет двигаться так, как если бы тяготения не было. Он будет вращаться с постоянной угловой скоростью по окружности радиусом l с центром в точке O до тех пор, пока длится падение рамки.

Для неподвижного наблюдателя движущийся по окружности шарик, кроме того, падает равноускоренно с ускорением g. За время движения шарика по окружности от точки B до точки C скорость падения шарика и рамки будет $v_1 = gt$. Однако за время t шарик, равномерно вращаясь, проходит путь, равный четверти длины окружности $s = \frac{\pi l}{2}$. Следовательно,

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\pi l}{2\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}};$$

$$\text{тогда } v_1 = gt = \frac{\pi g l}{2\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}}.$$

Когда шарик достигает точки C, то результирующая скорости движения по окружности и скорости падения равна нулю, т. е.

$$v = v_1 \quad \text{или} \quad \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = \frac{\pi g l}{2\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}}, \text{ откуда}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\pi}{4} = 0{,}2146; \quad \alpha \approx 77°37'.$$

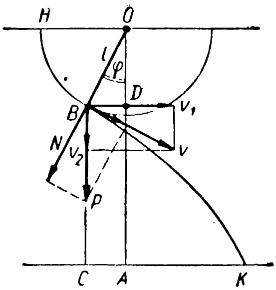


Рис. 319.

20. $BC = b = 9{,}3$ *м*; $CK \approx 2{,}91$ *м*.

Р е ш е н и е. Введем обозначения (рис. 319): $OA = h$; $BC = b$; $\cos\varphi = \frac{h-b}{l}$; $OD = l\cos\varphi = h - b$. Если через v обозначим скорость шарика в точке B (в точке разрыва нити), то

$$OD = \frac{v^2}{2g}; \quad h - b = \frac{v^2}{2g},$$

$$\text{откуда } v^2 = 2g(h-b).$$

Сила N является составляющей веса шарика, а поэтому

$$N = P\cos\varphi = \frac{mg(h-b)}{l}.$$

Нить, кроме того, растягивается центробежной силой инерции

$$F_ц = \frac{mv^2}{l} = \frac{2mg(h-b)}{l}.$$

Сила натяжения нити

$$F = F_ц + N = \frac{mg(h-b)}{l} + \frac{2mg(h-b)}{l} = \frac{3mg(h-b)}{l}$$

или $F = 3mg\cos\varphi$.

Отсюда $\cos\varphi = \frac{F}{3mg} = 0{,}70$; $\varphi = 45°40'$.

Тогда высота

$$BC = b = h - l\cos\varphi = h - \frac{Fl}{3mg} \approx 9{,}3 \text{ м}.$$

Горизонтальная составляющая скорости шарика в момент разрыва нити

$$v_1 = v\cos\varphi = \sqrt{2g(h-b)}\cos\varphi = \sqrt{2g(h-b)}\,\frac{h-b}{l} \approx 2{,}62\ м/сек.$$

Вертикальная составляющая $v_2 = v\sin\varphi = \sqrt{2g(h-b)}\sin\varphi \approx$ $\approx 2{,}67$ *м/сек.*

Из формулы пути равноускоренного движения

$$BC = b = v_2 t + \frac{gt^2}{2}$$

определяем время падения шарика $t \approx 1{,}11$ *сек.*

Тогда $CK = s = v_1 t \approx 2{,}91$ *м.*

21. $a_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 4m\dfrac{l^2}{r^2}}$.

Решение. Поскольку $m_1 > m_2$, то система грузов m_1 и m_2 будет двигаться с каким-то ускорением a_1 в сторону большего груза. Шарики массой m вращаются с линейным ускорением $a_2 = a_1\dfrac{l}{r}$ (рис. 320).

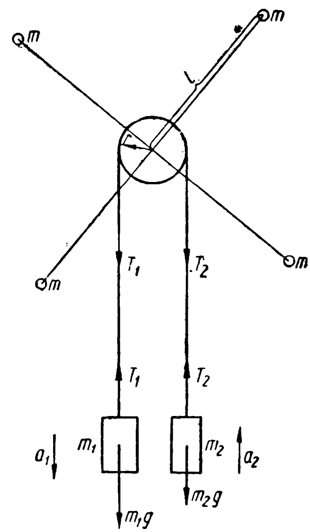


Рис. 320.

Рассмотрим, под действием каких сил массы m_1, m_2 и $4\,m$ получают эти ускорения. На тело массой m_1 действуют вес тела m_1g (вниз) и сила натяжения нити T_1 (вверх). Под действием этих сил масса m_1 движется вниз с ускорением a_1. Следовательно, $m_1a_1 = m_1g - T_1$.

На тело массой m_2 действуют вес тела m_2g (вниз) и сила натяжения нити T_2 (вверх). Под действием этих сил масса m_2 движется вверх с ускорением a_1. Значит, $m_2a_1 = T_2 - m_2g$.

Четыре массы m на концах спиц вращаются по окружности с линейным ускорением $a_2 = \dfrac{a_1 l}{r}$ под действием некоторой силы F, момент которой относительно оси блока должен быть равен разности моментов сил, создаваемых натяжением нити, т. е.

$$4ma_2 = F.$$

Следовательно, можно записать

$$(T_1 - T_2)r = Fl \text{ или } T_1 - T_2 = 4m\frac{a_1 l^2}{r^2}.$$

Следовательно, имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$m_1a_1 = m_1g - T_1;$$

$$m_2 a_1 = T_2 - m_2 g;$$

$$4 m a_1 \frac{l^2}{r^2} = T_1 - T_2.$$

Решив эту систему, получим $a_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2 + 4m \dfrac{l^2}{r^2}}$.

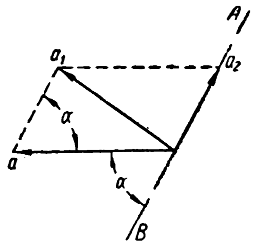


Рис. 321.

22. $t = \sqrt{\dfrac{2b}{a \cos \alpha}}$.

Решение. Поскольку трение между цилиндром и стержнем отсутствует, ускорение a_1, которое сообщает стержень цилиндру, будет направлено перпендикулярно к стержню (рис. 321). Это ускорение состоит из ускорения a, с которым движется стержень, и ускорения a_2, с которым цилиндр движется относительно стержня. Из параллелограмма ускорений следует, что $a_2 = a \cos \alpha$. Тогда из формулы пути $b = \dfrac{a \cos \alpha}{2} t^2$ определяем время $t = \sqrt{\dfrac{2b}{a \cos \alpha}}$.

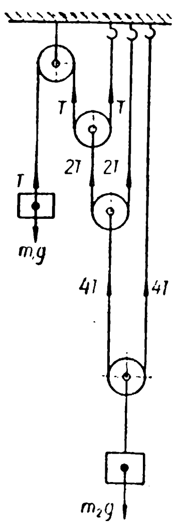


Рис. 322.

23. $a_1 = \dfrac{8m_1 - m_2}{64m_1 + m_2} 8g; \quad a_2 = \dfrac{8m_1 - m_2}{64m_1 + m_2} g.$

Решение. Если натяжение нити обозначить через T, а ускорения грузов — через a_1 и a_2 (рис. 322), то, предположив, что первый груз движется вниз, а второй вверх, запишем для каждого из тел уравнение второго закона динамики:

$$\begin{aligned} m_1 g - T &= m_1 a_1; \\ 8T - m_2 g &= m_2 a_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Поскольку время движения обоих грузов одинаково, то $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{s_1}{s_2} = 8$, где s_1 и s_2 — пути, проходимые грузами. Решая систему (1) и учитывая, что $\dfrac{a_1}{a_2} = 8$, получаем:

$$a_1 = \frac{8m_1 - m_2}{64m_1 + m_2} 8g \text{ и } a_2 = \frac{8m_1 - m_2}{64m_1 + m_2} g.$$

Система находится в равновесии, когда $a_1 = a_2 = 0$. Это возможно при условии, что $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{8}$.

24. $v = \sqrt{gh}$.

Решение. Кинетическая энергия скатывающегося обруча состоит из кинетической энергии поступательного движения центра тяжести и кинетической энергии вращательного движения. Если обруч катится без проскальзывания, линейная скорость точек обода при вращении совпадает со скоростью поступательного движения центра тяжести. Когда обруч скатится с наклонной плоскости, вся его потенциальная энергия mgh переходит в кинетическую энергию поступательного движения центра тяжести и вращательного движения точек обода, т. е.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2, \text{ откуда } v = \sqrt{gh}.$$

25. Р е ш е н и е. Пусть наклонная плоскость сначала неподвижна. Тогда величина силы трения и силы нормального давления определится из условия равновесия тела на плоскости (рис. 323). На тело действуют сила веса mg, сила трения $F_т$, направленная против направления возможного проскальзывания, и сила реакции наклонной плоскости, направленная перпендикулярно к наклонной плоскости. Выберем координатные оси. Ось x направим вдоль наклонной плоскости, а ось y — перпендикулярно к ней. Условие равновесия тела на наклонной плоскости запишется так:

$$F_т = mg \sin\beta \text{ и } N = mg\cos\beta.$$

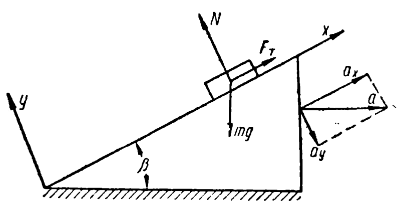


Рис. 323.

Если теперь сообщить наклонной плоскости ускорение a, то для того, чтобы тело оставалось на наклонной плоскости в равновесии, необходимо, чтобы силы $F_т$ и N изменились так, чтобы сообщить телу ускорение a. Их величины определятся из второго закона Ньютона, который запишем для проекций сил по направлениям x и y:

$$ma_x = F_т - mg\sin\beta; \quad a_x = a\cos\beta;$$

$$ma_y = mg\cos\beta - N; \quad a_y = a\sin\beta.$$

Отсюда

$$N = mg\cos\beta - ma\sin\beta; \quad F_т = mg\sin\beta + ma\cos\beta. \tag{1}$$

Сила трения может приобретать значение не больше максимальной силы трения покоя:

$$F_{т.макс} = kN. \tag{2}$$

Величину коэффициента трения k определим из условия, что на неподвижной наклонной плоскости предельный угол, при котором еще не начинается скольжение, равен α. Тогда

$$F_{т.макс} = kmg\cos\alpha.$$

С другой стороны,

$$F_{т.макс} = mg\sin\alpha, \text{ следовательно, } k = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{3}$$

Максимальную величину ускорения, при которой еще не будет скольжения, определим из уравнений (1), (2) и (3):

$$mg\sin\beta + ma\cos\beta = \operatorname{tg}\alpha\,(mg\cos\beta - ma\sin\beta), \text{ откуда}$$

$$a = \frac{g(\operatorname{tg}\alpha\cos\beta - \sin\beta)}{\operatorname{tg}\alpha\sin\beta + \cos\beta} = \frac{g(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 1} = g\operatorname{tg}(\alpha - \beta).$$

Это же равенство определяет тот угол β, при котором еще не будет скольжения, если считать заданным ускорение. Пусть ускорение увеличивается до сколь угодно большого значения. Тогда $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ стремится к бесконечности и

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Поскольку α всегда положительно и не может быть больше $\frac{\pi}{4}(k=\operatorname{tg}\alpha\leqslant 1)$, то β является отрицательной величиной. Это значит, что ускорение должно быть направлено в противоположную сторону по сравнению со случаем, рассмотренным выше. Равенство (4) определяет то минимальное значение угла β, при котором скольжение не наступит, даже если ускорение a будет сколь угодно большим.

26. $\frac{E_{к1}}{E_{к2}}=\frac{625}{81}\approx 7{,}7$ раза.

Решение. Скорость нейтрона после соударения с первым ядром гелия найдем из законов сохранения энергии и количества движения:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mu^2}{2} \text{ и } mv=Mu-mv_1,$$

где m — масса нейтрона, M — масса ядра гелия, v — скорость нейтрона до соударения, v_1 — скорость нейтрона после соударения с ядром гелия, u — скорость ядра гелия после соударения.

Решая эти уравнения относительно v_1 и учитывая, что $M=4\,m$, получим $v_1=\frac{3}{5}v$.

Следовательно, при однократном соударении нейтрона с неподвижным ядром гелия кинетическая энергия нейтрона изменяется в k раз:

$$k=\frac{E_к}{E_{к1}}=\left(\frac{v}{v_1}\right)^2=\frac{25}{9},$$

где $E_к$ и $E_{к1}$ — кинетические энергии нейтрона до и после соударения соответственно. При втором соударении энергия нейтрона также изменится в k раз и, следовательно,

$$\frac{E_к}{E_{к2}}=k^2=\frac{625}{81}\approx 7{,}7 \text{ раза.}$$

27. 1) $a\approx 3{,}14$ *м/сек*^{2}; 2) $a\approx 1{,}31$ *м/сек*^{2}.

Решение. 1) В случае, когда сила F направлена горизонтально, на стол в горизонтальном же направлении действуют две одинаковые и противоположно направленные силы со стороны веревки (на верхний и нижний блоки, закрепленные на столе) и сила трения $F_т$ со стороны лежащего на столе груза, направленная вправо. Ускорение, с которым будет двигаться стол, определим из уравнения

$$F-F+F_т=\frac{P_1}{g}a_1.$$

Аналогично ускорение, с которым будет двигаться груз, определяется из уравнения

$$F - F_т = \frac{P_2}{g} a_2.$$

Пусть сила F настолько мала, что проскальзывания груза по столу нет, т. е. стол и груз движутся с одинаковым ускорением. В этом случае совместное решение уравнений дает

$$F = F_т \frac{P_1 + P_2}{P_1}.$$

Проскальзывание груза по столу начнется при максимальном значении силы трения kP_2, т. е. при значении приложенной к веревке силы

$$F_{крит} = kP_2 \frac{P_1 + P_2}{P_1} = 100 \text{ н}.$$

При данном в условии задачи значении приложенной к веревке силы 80 *н* проскальзывания груза по столу не будет, стол и груз будут двигаться с одинаковым ускорением, которое можно определить из уравнения

$$F = \frac{P_1 + P_2}{g} a, \text{ откуда } a = \frac{F}{P_1 + P_2} g \approx 3{,}14 \text{ м/сек}^2.$$

2) Когда сила F, действующая на веревку, направлена вертикально, движение стола по горизонтали возможно только при наличии проскальзывания по нему груза P_2. Для этого необходимо, чтобы действующая на веревку сила была не меньше максимальной силы трения между этим грузом и поверхностью стола. В рассматриваемом случае это условие выполняется.

На стол действуют две горизонтальные силы: сила F (со стороны веревки на верхний блок), направленная влево, и сила трения (со стороны груза P_2), направленная вправо.

Поскольку $F > F_т$, то стол будет двигаться влево с ускорением

$$a = \frac{F - kP_2}{P_1} g \approx 1{,}31 \text{ м/сек}^2.$$

28. $h = \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{M}{m} \left(\frac{M}{m} - 1 \right).$

Р е ш е н и е. В соответствии с законом сохранения энергии можно записать:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} - \frac{MV^2}{2}, \text{ откуда } h = \frac{mv^2 - MV^2}{2mg}.$$

Скорость пули до столкновения с клином v можно определить из закона сохранения количества движения:

$$mv - MV = 0, \text{ откуда } v = \frac{M}{m} V.$$

Подставив значение v в выражение для h, получим

$$h = \frac{m\dfrac{M^2}{m^2}V^2 - MV^2}{2mg} = \frac{V^2}{2g}\cdot\frac{M}{m}\left(\frac{M}{m} - 1\right).$$

29. $H = \dfrac{h}{2}\sin^2\alpha.$

Решение. Прежде всего рассмотрим, чему равна кинетическая энергия обруча, катящегося по горизонтальной поверхности со скоростью v. Поскольку обруч в целом перемещается со скоростью $v_{пост}$, то энергия его поступательного движения

$$E_{пост} = \frac{mv^2_{пост}}{2}.$$

Кроме того, обруч вращается вокруг своего центра тяжести со скоростью $v_{вр}$ и, очевидно, имеет еще кинетическую энергию вращательного движения

$$E_{вр} = \frac{mv^2_{вр}}{2}.$$

Полная энергия катящегося обруча

$$E = E_{пост} + E_{вр} = \frac{mv^2_{пост}}{2} + \frac{mv^2_{вр}}{2}.$$

Если обруч катится без проскальзывания, то

$$v_{пост} = v_в = v \text{ и поэтому } E = mv^2.$$

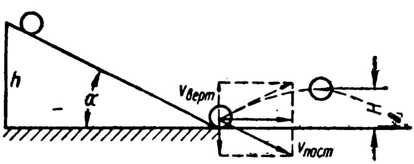


Рис. 324.

При скатывании обруча с наклонной плоскости его потенциальная энергия mgh переходит в кинетическую:

$$mgh = mv^2.$$

При ударе о горизонтальную плоскость горизонтальная составляющая скорости и скорость вращения не изменяются, так как никакие силы не действуют в горизонтальном направлении. Вертикальная же составляющая меняет свое направление на противоположное (рис. 324). Она и определяет, на какую высоту подпрыгнет обруч:

$$\frac{mv^2_{верт}}{2} = mgH; \text{ однако } v_{верт} = \sqrt{gh}\sin\alpha, \text{ поэтому } H = \frac{h}{2}\sin^2\alpha.$$

30. $t = \dfrac{M\omega R}{kF}$; $n = \dfrac{M\omega^2 R}{4\pi kF}$.

Решение. Сила трения $F_т = kF$; с другой стороны, $F_т = Ma$, где a — линейное ускорение точек обода. Однако $a = \dfrac{v}{t}$, поскольку конечная скорость равна нулю и $v = \omega R$. Следовательно, $a = \frac{\omega R}{t}$. Тогда можно записать:

$$kF = M\frac{\omega R}{t}, \text{ откуда } t = \frac{M\omega R}{kF}.$$

Для определения числа оборотов n можно воспользоваться соотношением $s = \frac{at^2}{2}$, где $s = 2\pi Rn$ — путь, пройденный точками обода до остановки. Следовательно, $2\pi Rn = \frac{at^2}{2}$. После подстановки t и a получим:

$$n = \frac{at^2}{4\pi R} = \frac{\omega Rt^2}{4\pi Rt} = \frac{M\omega^2 R}{4\pi kF}.$$

31. $T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Решение. При малых углах отклонения дугу AB (см. рис. 289) можно заменить хордой AB. Из равнобедренного треугольника AOB для длины хорды AB можно записать:

$$AB = 2\cdot OB\cos\alpha = 2l\cos\alpha.$$

Движение маятника по этому пути можно рассматривать как равноускоренное, так как на маятник в направлении движения, т. е. в направлении хорды AB, действует составляющая силы тяжести

$$P_1 = P\cos\alpha = mg\cos\alpha,$$

сообщающая ему ускорение $a = g\cos\alpha$.

При равноускоренном движении путь, время и ускорение связаны зависимостью

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Подставляя сюда значения ускорения при движении по хорде AB и ее длину, а также учитывая, что период в четыре раза больше времени, необходимого для прохождения пути AB, получим $T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}$.

32. $T \approx 2{,}2$ *сек.*

Решение. Период колебания такого маятника надо рассматривать как сумму двух полупериодов колебания маятника с разной длиной нити: один полупериод колебания с длиной нити l, а второй полупериод с длиной нити $l - d$. Следовательно,

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \pi\sqrt{\frac{l-d}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{d}{l}}\right) \approx 2{,}2 \text{ сек.}$$

33. $x \approx 2{,}3$ *см.*

Решение. Обозначим высоту уровней масла и воды в первом случае через h_{10} и h_{20}, а во втором случае — через h_1 и h_2 соответственно. Тогда условия равновесия могут быть записаны в виде

$$\rho_м g h_{10} = \rho_в g h_{20} \text{ и } \rho_м g h_1 = \rho_в g h_2 + \rho_м g l.$$

Из этих соотношений получим

$$\rho_м (h_1 - h_{10}) = \rho_м l - \rho_в (h_{20} - h_2). \qquad (1)$$

Смещение x границы раздела масла и воды в горизонтальной части трубки можно определить из условия постоянства объемов масла и воды:

$$S (h_{10} - h_1) = S (h_2 - h_{20}) = S_1 x,$$

где S_1 — площадь поперечного сечения горизонтальной трубки. Отсюда

$$h_{10} - h_1 = h_2 - h_{20} = \frac{S_1}{S} x.$$

Подставив эти значения в уравнение (1), получим

$$\rho_м \frac{S_1}{S} x = \rho_м l - \rho_в \frac{S_1}{S} x, \text{ откуда } x = \frac{\rho_м l}{\frac{S_1}{S}(\rho_в + \rho_м)} \approx 2{,}3 \textit{ см}.$$

34. $H = h \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{\rho - \rho_в}{\rho_в}$.

Р е ш е н и е. Диск оторвется от трубки на таком уровне H, когда будут равны силы, действующие на диск сверху и снизу. Сверху вниз на диск действуют две силы — давления воды $\rho_в g H \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ и тяжести диска $\rho g \frac{\pi D^2}{4} h$. Снизу вверх действует только сила давления воды $\rho_в g \frac{\pi D^2}{4}(H + h)$.

Таким образом,

$$\rho_в g H \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) + \rho g \frac{\pi D^2}{4} h = \rho_в g \frac{\pi D^2}{4}(H + h),$$

$$\text{откуда } H = h \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{\rho - \rho_в}{\rho_в}.$$

§ 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

35. $M = \frac{m S p_0 V_0}{g V T_0}(T_1 - T_2)$.

Р е ш е н и е. Обозначим давление водорода в нижней части цилиндра через p_1, а давление гелия в верхней части цилиндра через p_2, число грамм-молекул водорода и гелия обозначим соответственно через n_H и n_{He}. Тогда на основании объединенного газового закона можно записать:

$$\frac{p_1 \frac{1}{2} V}{T_1} = n_H \frac{p_0 V_0}{T_0}, \text{ где } n_H = \frac{m}{\mu_H} = \frac{m}{2} \text{ и } \frac{p_2 \frac{V}{2}}{T_2} = n_{He} \frac{p_0 V_0}{T_0},$$

$$\text{где } n_{He} = \frac{2m}{\mu_{He}} = \frac{m}{2}.$$

Здесь V_0— объем грамм-молекулы любого газа при нормальных условиях (p_0, T_0); $\mu_H = 2$ и $\mu_{He} = 4$ — молекулярная масса водорода и гелия соответственно.

Условие равновесия поршня массой M запишется так:

$$p_2S + Mg = p_1S, \text{ откуда } M = \frac{p_1 - p_2}{g} S;$$

однако

$$p_1 = \frac{2m}{\mu_H} \cdot \frac{p_0V_0T_1}{T_0V} = \frac{mp_0V_0T_1}{T_0V} \text{ и}$$

$$p_2 = \frac{4m}{\mu_{He}} \cdot \frac{p_0V_0T_2}{T_0V} = \frac{mp_0V_0T_2}{T_0V}.$$

Тогда $M \equiv \dfrac{2mp_0V_0S}{T_0Vg}\left(\dfrac{T_1}{\mu_H} - \dfrac{2T_2}{\mu_{He}}\right) = \dfrac{mS}{gV} \cdot \dfrac{p_0V_0}{T_0}(T_1 - T_2).$

36. Решение. В неподвижной ракете столбик воздуха длиной $2h$ находится под давлением $p_0 + \rho gh$. Во время движения ракеты с ускорением разность уровней ртути в коленах уменьшится; пусть эта разность равна x. Тогда в открытом колене манометра ртуть опустится на $\dfrac{h-x}{2}$, а в закрытом колене поднимется на $\dfrac{h-x}{2}$. Длина столбика воздуха при взлете будет $2h + \dfrac{h-x}{2} = \dfrac{3h+x}{2}$. Так как температура остается постоянной, то, применив закон Бойля-Мариотта, можно записать:

$$(p_0 + \rho gh)\, 2h = (p_0 + 1{,}5\rho gx)\frac{3h+x}{2},$$

откуда получим

$$x^2 \cdot 3\rho g + x(2p_0 + 9\rho gh) - (2p_0h + 8\rho gh^2) = 0.$$

Искомое показание манометра есть положительный корень этого квадратного уравнения.

37. $\dfrac{\Delta E}{E_к} \approx 4\dfrac{u}{v}$.

Решение. Скорость молекулы относительно поршня равна $(v - u)$ и направлена вправо. После абсолютно упругого удара молекула движется влево с такой же скоростью по отношению к поршню. Относительно цилиндра скорость молекулы на u меньше, так как поршень сам движется со скоростью u. Скорость молекулы была v, а после удара стала $(v - 2u)$. Таким образом, теряется энергия

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m(v-2u)^2}{2} = \frac{4mvu - 4mu^2}{2}.$$

Поскольку $v \gg u$, то членом $4mu^2$ можно пренебречь, и $\Delta E \approx 2\,mvu$. Это составляет часть $\dfrac{\Delta E}{E_к} = \dfrac{2\,muv}{\frac{1}{2}\,mv^2} \approx 4\dfrac{u}{v}$.

38. $x = \dfrac{-pV + \sqrt{(pV)^2 + l^2 (Ma)^2}}{2Ma}$.

Р е ш е н и е. Для перемещения перегородки по второму закону динамики можно записать:

$$(p_1 - p_2)\, S = Ma.$$

Так как температура по условию задачи не изменяется, то

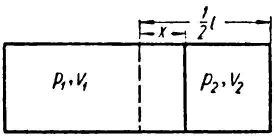


Рис. 325.

$$p_1V_1 = p_2V_2 = \frac{1}{2}\, pV.$$

Из рис. 325 видно, что

$$V_1 = \left(\frac{1}{2}\, l + x\right) S \text{ и } V_2 = \left(\frac{1}{2}\, l - x\right) S,$$

где x — величина смещения перегородки.

Тогда уравнение второго закона динамики можно переписать так:

$$\left(\frac{pV}{2V_1} - \frac{pV}{2V_2}\right) S = Ma \text{ или } pV\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\, l + x\right)} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\, l - x\right)}\right] = 2Ma.$$

После упрощений получаем квадратное уравнение

$$Max^2 - pVx - \frac{1}{4}\, Mal^2 = 0, \text{ откуда } x = \frac{-pV \pm \sqrt{(pV)^2 + (Mal)^2}}{2Ma}.$$

Перед корнем надо взять знак плюс, так как иначе при $a \to 0$ получим, что $x \to -\infty$, т. е. перегородка выйдет за пределы цилиндра, а это невозможно.

39. $\lambda_{аз} = 192\,740$ *дж/кг*.

Р е ш е н и е. Количества теплоты, поглощаемые льдом и азотом, соответственно равны:

$$Q_л = \lambda_л m_л \text{ и } Q_{аз} = \lambda_{аз} m_{аз}.$$

Исходя из условия, что скорость подведения теплоты пропорциональна разности температур внутри и снаружи сосуда, можно записать:

$$\frac{Q_л}{t_л} = k\Delta t^\circ_л \text{ и } \frac{Q_{аз}}{t_{аз}} = k\Delta t^\circ_{аз}.$$

Разделив эти уравнения друг на друга и учитывая предыдущие соотношения, получим

$$\frac{\lambda_л m_л}{\lambda_{аз} m_{аз}} = \frac{\Delta t^\circ_л t_л}{\Delta t^\circ_{аз} t_{аз}}, \text{ откуда } \lambda_{аз} = \frac{\Delta t^\circ_{аз} t_{аз}}{\Delta t^\circ_л t_л}\, \lambda_л\, \frac{m_л}{m_{аз}}.$$

Однако $m_{аз} = \rho_{аз} V_{исп.\,аз}$, где $\rho_{аз} =$

$= 800$ *кг/м*³. Тогда $\lambda_{аз} = 192\,740$ *дж/кг*.

40. $m_2 = 0{,}123m$.

Р е ш е н и е. Необходимая для образования пара теплота может быть получена только за счет теплоты отвердевания, выделяющейся при замерзании воды.

При замерзании m_1 *кг* воды выделяется λm_1 *дж* теплоты, где λ — теплота плавления льда, равная $3,35 \cdot 10^5$ *дж/кг*. За счет этой теплоты образуется количество пара m_2. Если теплота испарения воды при 0° С равна $r = 2,54 \cdot 10^6$ *дж/кг*, то можно записать равенство: $\lambda m_1 = rm_2$.

Масса всей воды до откачивания $m = m_1 + m_2$. Из этих двух уравнений находим, что

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda}{\lambda + r}; \qquad m_2 = m\frac{\lambda}{\lambda + r} = 0,123m.$$

41. $m_1 \approx 1,36$ *г*.

Если снижение температуры плавления льда пропорционально давлению, то при давлении $6,06 \cdot 10^7$ *н/м*^{2} температура плавления снизится на $\Delta t^\circ \approx 4,35^\circ$. Лед будет таять до тех пор, пока вся его масса не охладится до $-4,35^\circ$. При охлаждении льда выделяется теплота $Q = cm\Delta t^\circ$, идущая на его плавление, т. е. $Q = m_1\lambda$ (m_1 — масса расплавившегося льда), тогда.

$$m_1 = \frac{cm\Delta t^\circ}{\lambda} \approx 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 1,36 \text{ г}.$$

42. $A = 0,06$ *дж*.

Решение. При изотермическом дроблении одной большой капли на большое количество мелких расходуется энергия только на образование дополнительной поверхности. Внутренняя энергия капель не изменяется. Значит, $A = \alpha\Delta S$, где ΔS — добавочная поверхность, которую можно вычислить по формуле $\Delta S = 4\pi \cdot (Nr^2 - R^2)$, где R — радиус большой капли, N — число мелких капель.

Масса масла не изменяется. Следовательно,

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho = N\frac{4}{3}\pi r^3\rho, \text{ откуда } \sqrt[3]{N} = \frac{R}{r}.$$

Определив отсюда R, подставим его значение в формулу для ΔS:

$$\Delta S = 4\pi\sqrt[3]{N^2}r^2(\sqrt[3]{N} - 1).$$

Число мелких капель можно определить из формулы

$$m = N\frac{4}{3}\pi R^3\rho, \text{ откуда } N = \frac{3m}{4\pi r^3\rho}.$$

Пренебрегая единицей по сравнению с $\sqrt[3]{N}$ и подставляя значения ΔS и N в формулу работы, получаем

$$A = \frac{3m\alpha}{\rho r} = 0,06 \text{ дж}.$$

Следовательно, работа, выполняемая при дроблении капли любой жидкости, всегда обратно пропорциональна радиусу капель, т. е. тем больше, чем меньше размеры капель, которые мы хотим получить.

43. $F = \dfrac{2\alpha m}{\rho d^2} = 14\,600$ *н*.

Решение. Слой воды между пластинками (рис. 326) ограничен по бокам цилиндрическими поверхностями с радиусом кривизны, равным половине толщины слоя $R = \frac{1}{2}d$. Поэтому поверхностное натяжение оказывает отрицательное давление (жидкость растягивается) под цилиндрической вогнутой поверхностью

$$p = \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{d}.$$

Величина p — избыток внешнего давления, действующего на площадь пластинок S. Следовательно, сила, которую надо приложить, чтобы оторвать пластинки друг от друга,

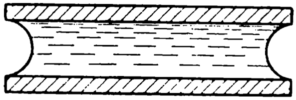


Рис. 326.

$$F = pS = \frac{2\alpha}{d}S, \text{ но } S = \frac{V}{d} = \frac{m}{\rho d};$$

$$\text{тогда } F = \frac{2\alpha m}{\rho d^2} = 14\,600 \text{ н}.$$

44. $F = \frac{2\pi^2 R^4 \rho\alpha}{m} \approx 838$ *н.*

Решение. Решая эту задачу аналогично предыдущей, получим

$$F = pS = \frac{2\alpha}{d}S,$$

где d — толщина лепешки, $S = \pi R^2$ — площадь лепешки. Однако

$$d = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho\pi R^2}, \text{ тогда } F = \frac{2\pi^2 R^4 \rho\alpha}{m} \approx 838 \text{ н}.$$

45. $p_{нас} = \rho g h + p_0 \left[1 - \frac{h}{H + h\frac{S_1}{S}} \cdot \frac{T}{T_0}\right].$

Решение. Применим объединенный газовый закон к воздуху, находящемуся над жидкостью:

$$pV = p_0 V_0 \frac{T}{T_0} = p_0 h (S - S_1) \frac{T}{T_0}.$$

Условие равновесия столба жидкости в трубке запишется в виде

$$p + p_{нас} = \rho g h + p_0 \text{ или } p = \rho g h + p_0 - p_{нас},$$

где $p_{нас}$ — искомое давление насыщенных паров жидкости.

Объем газа во втором случае

$$V = (S - S_1)(H + x),$$

где $x = \frac{S_1}{S}h$ — смещение уровня жидкости в сосуде. Подставляя значения p и V в первое уравнение, получим

$$(\rho g h + p_0 - p_{нас})(S - S_1)\left(H + h\frac{S_1}{S}\right) = p_0 h (S - S_1)\frac{T}{T_0},$$

$$\text{откуда } p_{нас} = \rho g h + p_0 \left[1 - \frac{h}{H + h\frac{S_1}{S}} \cdot \frac{T}{T_0}\right].$$

§ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

46. $A_{\text{мех}} \approx 36{,}25 \cdot 10^{-12}$ *дж.*

Решение. Если обкладки обоих конденсаторов раздвигать одновременно, тока в цепи, соединяющей конденсаторы, не будет, и вся выполненная работа пойдет на увеличение энергии конденсаторов. Если же обкладки раздвигать поочередно, то заряды будут перераспределяться между конденсаторами, и в цепи будет протекать ток. За счет выполняемой механической работы не только увеличивается энергия конденсатора, но и нагреваются проводники. Поскольку конечная емкость и заряд конденсаторов в обоих случаях одинаковы, то разность работ в одном и втором случаях равна полным потерям на нагревание проводников. Подсчитаем силу тока, проходящего по цепи при раздвигании одного из конденсаторов. Полный заряд не изменится, поскольку цепь замкнута, а перераспределение зарядов прекратится, когда сравняются потенциалы на обоих конденсаторах. Если обозначим через Q заряд на каждом конденсаторе вначале до раздвигания пластин, а через Q_1 и Q_2 — заряды на первом и втором конденсаторах, когда пластины одного из них раздвинуты на расстояние d_2, то можно записать, что $2Q = Q_1 + Q_2$.

Условие того, что разности потенциалов на конденсаторах после раздвигания пластин одного из них должны сравняться, запишется так

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}, \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}; \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}.$$

Из этих двух уравнений находим

$$Q_1 = 2Q\,\frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Для определения силы тока надо знать количество электричества ΔQ, проходящее через сопротивление R при раздвигании пластин одного из конденсаторов. Очевидно, оно равно

$$\Delta Q = Q - Q_1 = Q\,\frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}.$$

Сила тока $I = \frac{\Delta Q}{t}$. Такая же сила тока будет проходить через сопротивление R при раздвигании пластин второго конденсатора. Следовательно, работа

$$A_{\text{мех}} = 2\left(\frac{\Delta Q}{t}\right)^2 Rt = 2\,\frac{\Delta Q^2}{t}\,R.$$

Подставив сюда значение ΔQ, получим

$$A_{\text{мех}} = 2Q^2\left(\frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 \frac{R}{t}.$$

Подставив значения C_1 и C_2 и учитывая, что $Q = C_1 U$, окончательно получим

$$A_{\text{мех}} = \frac{2\,(\varepsilon_0 S U)^2\,(d_2 - d_1)^2}{d_1^2\,(d_1 + d_2)^2} \cdot \frac{R}{t} \approx 36{,}25 \cdot 10^{-12} \text{ дж.}$$

47. $\frac{q_1}{q_2} \approx 12{,}9$.

Р е ш е н и е. Очевидно, что заряды q_1 и q_2 — одного знака, иначе они притягивались бы друг к другу. Для равновесия зарядов необходимо, чтобы равнодействующие силы, приложенные к каждому заряду были нормальны к окружности или, иначе говоря, сумма проекций всех сил, приложенных к данному заряду, на направление касательной к окружности должна быть равна нулю (рис. 327).

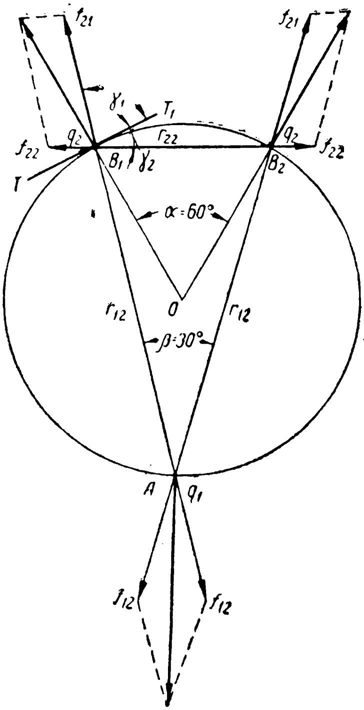


Рис. 327.

Поскольку заряды в точках B_1 и B_2 равны друг другу, то заряд q_1 может находиться только в точке A_1, расположенной на одинаковых расстояниях от точек B_1 и B_2. В соответствии с приведенными выше рассуждениями, проекции сил f_{21} и f_{22} (действующих на заряд q_2 в точке B_1 со стороны двух других зарядов) на направление касательной к окружности TT_1 в точке B_1 должны быть равны друг другу, т. е. $f_{21}\cos\gamma_1 = f_{22}\cos\gamma_2$;

однако $f_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}$, где $r_{12} = 2R\cos\frac{\beta}{2}$ (из треугольника AB_1B_2).

Тогда

$$f_{21} = \frac{q_1 q_2}{16\pi\varepsilon_0 R^2 \cos^2\frac{\beta}{2}}; \quad f_{22} = \frac{q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{22}^2}, \text{ где } r_{22} = R; \ f_{22} = \frac{q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Рассматривая углы при вершине B_1, можем записать:

$$\frac{\beta}{2} + 90° + \gamma_1 = 180°; \quad \gamma_1 = \alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma_2 = 180°.$$

Поскольку $\beta = \frac{\alpha}{2} = 30°$, то из последних двух равенств

$$\gamma_1 = 180° - 90° - 15° = 75°; \quad \gamma_2 = 180° - 75° - 60° - 15° = 30°.$$

Подставляя в равенство $f_{21}\cos\gamma_1 = f_{22}\cos\gamma_2$ значения f_{21}, f_{22}, $\cos\gamma_1$ и $\cos\gamma_2$, получим

$$\frac{q_1q_2}{16\pi\varepsilon_0R^2\cos^2 45^\circ}\cdot\cos 75^\circ = \frac{q_2^2}{4\pi\varepsilon_0R^2}\cos 30^\circ, \text{ откуда}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{4\cos 15^\circ\cdot\cos 30^\circ}{\cos 75^\circ} \approx 12{,}9.$$

48. $I = \dfrac{\varepsilon_0SU_0}{d_0t_0}$.

Решение. Обозначим через C_0 и C — емкости конденсаторов в некоторый момент времени, q_0 — полный заряд на конденсаторах. Поскольку полный заряд на конденсаторах не изменяется со временем, можно записать

$$\frac{q_0-q}{C_0} = \frac{q}{C}$$

или, учитывая, что $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0S}{d_0}$ и $C = \dfrac{\varepsilon_0S}{d}$, получаем $(q_0 - q)d_0 = qd$, где q и d — соответственно заряд и расстояние между пластинами переменного конденсатора в некоторый момент времени. Отсюда

$$q = \frac{q_0d_0}{d_0+d} = \frac{d_0q_0}{d_0 + d_0\dfrac{t_0-t}{t_0+t}} = \frac{q_0(t_0+t)}{2t_0}.$$

В начальный момент времени $C = C_0$ и, следовательно, $q = \dfrac{q_0}{2}$. Таким образом, заряд на переменном конденсаторе изменился за время t от значения $\dfrac{1}{2}q_0$ до значения $\dfrac{q_0(t_0+t)}{2t_0}$. Изменение заряда за время t, очевидно, равно $\dfrac{q_0t}{2t_0}$.

Изменение заряда обусловлено протеканием тока I по соединительным проводам, поэтому

$$It = \frac{q_0t}{2t_0} \text{ или } I = \frac{q_0}{2t_0}.$$

Теперь определим начальный заряд конденсаторов q_0:

$$q_0 = 2C_0U_0 = \frac{2\varepsilon_0SU_0}{d_0}.$$

Подставляя значение q_0 в выражение для силы тока, получим окончательно $I = \dfrac{\varepsilon_0SU_0}{d_0t_0}$.

49. $C_{общ} = 2C$.

Решение. Изобразим предложенную схему несколько иначе (рис. 328). Вследствие симметричности $\varphi_A = \varphi_B$, и конденсатор, включенный между этими точками, не влияет на емкость системы и поэтому может быть изъят. Тогда четыре конденсатора на схеме справа соединены по два последовательно в параллельную цепь, и емкость этих конденсаторов будет $\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = C$, а общая емкость системы $C_{\text{общ}} = 2C$.

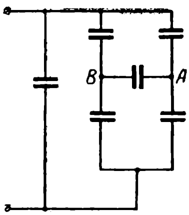


Рис. 328.

50. $C_{\text{общ}} = 2C$.

Решение. Потенциалы точек D, E, F и C равны, поэтому конденсаторы, впаянные между этими точками, не будут влиять на емкость фигуры, и их можно выбросить. Тогда нахождение емкости фигуры сведется к нахождению параллельного соединения двух одинаковых фигур (рис. 329): $ACBDA$ и $AFBEA$. Емкость одной фигуры будет C, тогда емкость восьмигранника будет $C_{\text{общ}} = 2C$.

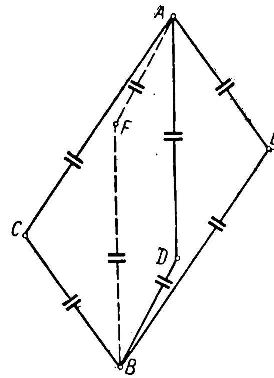


Рис. 329.

51. $x = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S k}$.

Решение. В плоском конденсаторе можно рассматривать одну пластину как тело с зарядом Q, помещенное в электрическое поле с напряженностью E_1, созданное другой пластиной. Тогда со стороны первой пластины на вторую (и наоборот) будет действовать сила $F = QE_1$.

Напряженность электрического поля между пластинами плоского конденсатора, на которых находится заряд Q, определяется по формуле $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$, где S— площадь пластины. Эта формула легко получается из известных уравнений:

$$E = \frac{U}{d}, \text{ но } U = \frac{Q}{C} \text{ и } C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \text{ откуда } E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Однако электрическое поле конденсатора получается в результате наложения двух полей, созданных каждой из пластин конденсатора. Если пластинки одинаковы, то напряженность поля от одной пластины вдвое меньше и равна

$$E_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}; \text{ тогда } F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Однако, эта сила должна быть равна силе упругости, т. е.

$$F = kx; \text{ отсюда } x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon k S}.$$

52. $h = \dfrac{\rho}{\rho_0} H + \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S^2 g}$.

Решение. При подаче на пластины заряда Q плавающая пластина погрузится в жидкость на такую глубину h, чтобы выталкивающая сила жидкости $\rho_0 gSh$ уравновесила вес верхней пластины ρgSH и силу электрического поля $\frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$, действующую на верхнюю пластину, т. е.

$$\rho_0 gSh = \rho gSH + \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}, \text{ откуда } h = \frac{\rho}{\rho_0}H + \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S^2 g}.$$

53. $N \approx 2{,}38$ *вт.*

Решение. Из равенства расходуемых батареей мощностей следует

$$N = \frac{U^2}{R_0} = \frac{U^2}{R_{общ}}; \quad R_2 + \frac{R_1(R_2+R_0)}{R_1+R_2+R_0} = R_0.$$

Сила тока в цепи батареи

$$I = \frac{U}{R_2 + \frac{R_1(R_2+R_0)}{R_1+R_2+R_0}}.$$

Определим падение напряжения на R_0:

$$U_{R_0} = I_0 R_0.$$

Однако по закону Кирхгофа $I_0 = I - I_1$; поэтому

$$I_1 R_1 = I_0(R_2+R_0); \quad I_1 = \frac{I_0(R_2+R_0)}{R_1};$$

$$\text{отсюда } I_0 = I - \frac{I_0(R_2+R_0)}{R_1};$$

$$I_0 = \frac{IR_1}{R_1+R_2+R_0}; \quad U_{R_0} = \frac{IR_1R_0}{R_0+R_1+R_2}.$$

По условию $\frac{U}{U_{R_0}} = \alpha = \frac{IR_0(R_0+R_1+R_2)}{IR_1R_0}$; $\alpha R_1 = R_1 + R_2 + R_0$;

Следовательно, получаем уравнения:

$$\begin{cases} R_2 + \frac{R_1(R_2+R_0)}{R_1+R_2+R_0} = R_0; \\ \alpha R_1 = R_1 + R_2 + R_0. \end{cases}$$

Решив эти два уравнения, находим $R_1 = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}R_0$ и $R_2 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}R_0$.

Если выключить R_0, то общее сопротивление цепи будет

$$R_{общ} = R_1 + R_2 = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}R_0 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1}R_0 = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}R_0.$$

Искомая мощность $N = \frac{E^2}{R_{общ}} = \frac{E^2}{R_0}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} \approx 2{,}38$ *вт.*

54. $\varphi_a - \varphi_b = \dfrac{E_1C_1 - E_2C_2}{C_1 + C_2}$.

Решение. Введем такие обозначения: φ_a, φ_b и φ_c— потенциалы в точках a, b и c; U_1 и U_2 — напряжение на конденсаторах, C_1 и C_2 — их емкости; E_1 и E_2 — э. д. с. батарей. Тогда для потенциала точки c можно записать:

$$\varphi_c = \varphi_b + E_1 \text{ и } \varphi_c = \varphi_a + U_1, \text{ откуда } \varphi_a - \varphi_b = E_1 - U_1 .$$

Поскольку заряды на конденсаторах по величине одинаковы, то $C_1U_1 = C_2U_2$. Сумма падений напряжений на конденсаторах равна сумме э. д. с. в цепи

$$U_1 + U_2 = E_1 + E_2.$$

Подставляя в это равенство $U_2 = \dfrac{C_1}{C_2} U_1$, получим $U_1 + \dfrac{C_1}{C_2} U_1 =$

$$= E_1 + E_2 \text{ или } U_1 = \frac{(E_1 + E_2)\, C_2}{C_1 + C_2}; \text{ тогда } \varphi_a - \varphi_b = E_1 -$$

$$- \frac{(E_1 + E_2)\, C_2}{C_1 + C_2} = \frac{E_1C_1 - E_2C_2}{C_1 + C_2} .$$

55. $\varphi_a - \varphi_b = E\left(\dfrac{C_2}{C_1 + C_2} - \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right)$.

Решение. Введем обозначения: φ_a, φ_b и φ_c — потенциалы в точках a, b и c; U_1 и U_2—напряжение на конденсаторах; U' и U''—падение напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2. Тогда для потенциала точек a и b можно записать:

$$\varphi_a = \varphi_c + U_1 \text{ и } \varphi_b = \varphi_c + U'; \text{ откуда } \varphi_a - \varphi_b = U_1 - U'.$$

Поскольку заряды на конденсаторах одинаковы, то $C_1U_1 = C_2U_2$. Сумма напряжений на конденсаторах равна э. д. с. батареи:

$$U_1 + U_2 = E.$$

Подставляя в это равенство значение

$$U_2 = \frac{C_1}{C_2} U_1, \text{ получим } U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} E.$$

Для падений напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 можно записать:

$$\frac{U'}{R_1} = \frac{U''}{R_2}.$$

Поскольку внутренним сопротивлением батареи пренебрегаем, то сумма падений напряжений равна э. д. с.: $U' + U'' = E$.

Подставив в это равенство значение $U'' = U'\dfrac{R_2}{R_1}$, получим

$$U' = E\frac{R_1}{R_1 + R_2}; \text{ тогда } \varphi_a - \varphi_b = E\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right).$$

56. $I_1 = 8{,}5 \cdot 10^{-8}$ *а*.

Решение. Ионы, возникающие под действием рентгеновского излучения в объеме конденсатора, начинают двигаться к обкладкам конденсатора под действием приложенного к нему напряжения. Ток, который проходит через конденсатор, равен $I_c = q_e V n$, где n — число пар ионов, образующихся в секунду в 1 $см^3$ объема конденсатора, q_e — заряд одного иона (равный заряду электрона), V — объем конденсатора. Поскольку в замкнутой цепи сумма падений напряжения на последовательно включенных участках (рис. 330) равна падению напряжения на концах всей цепи, то

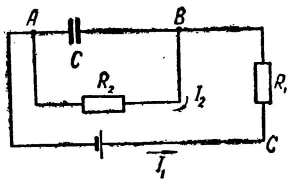


Рис. 330.

$$U = U_{AB} + U_{BC} = I_2 R_2 + I_1 R_1 .$$

Кроме того, сумма сил токов в разветвлении AB должна быть равна силе тока в неразветвленной части цепи: $I_1 = I_c + I_2$.

Получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} U = I_2 R_2 + I_1 R_1; \\ I_1 = I_c + I_2 ; \\ I_c = n q_e V. \end{cases}$$

Из этой системы

$$I = \frac{U + I_c R_2}{R_1 + R_2}.$$

Поскольку $R_1 = R_2 = R = 10^{10}$ *ом*, то

$$I_1 = \frac{U + n q_e V R}{2R} = 8{,}5 \cdot 10^{-8} a.$$

57. От R до $0{,}75R$.

Решение. Определим сопротивление R' квадрата, когда контакты M и N находятся посредине сторон AB и CD. В этом случае имеем две одинаковые ветки: $MACN$ и $MBDN$, включенные параллельно.

Следовательно, $\frac{1}{R'} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R}$,

откуда $R' = R$, т. е. общее сопротивление квадрата при подключении контактов посредине сторон AB и CD равно R.

Найдем сопротивление R'' квадрата, когда контакты находятся в точках A и C (или в точках B и D). Аналогично предыдущему имеем две параллельных ветки: AC и $ABCD$; их сопротивления соответственно R и $3R$. Общее сопротивление R'' контура в этом случае находим из соотношения

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R},$$

откуда $R'' = 0{,}75\ R$.

Следовательно, общее сопротивление при одновременном перемещении контактов по сторонам AB и CD изменяется от R до $0{,}75R$, где $R = 1$ *ом* — сопротивление стороны квадрата.

58. 1) $E_{инд} = 80$ *в*; 2) $E_{инд} = 40$ *в*.

Решение. Полный ток, проходящий через электродвигатель,

$$I = \frac{E - E_{инд}}{R},$$

где $E = 120$ *в* — внешняя э. д. с. или напряжение в сети; $E_{инд}$ — э. д. с. индукции, возникающей в якоре электродвигателя при его вращении. Мощность, передаваемая электродвигателем приводу, равна $N = EI - I^2R$, где I^2R — количество теплоты, выделяющееся за 1 *сек*. Подставляя в эту формулу значение I, получим

$$N = I(E - IR) = IE_{инд} = \frac{E_{инд}(E - E_{инд})}{R}.$$

Если двигатель заставить работать как динамомашину при той же скорости вращения якоря, то он будет развивать э. д. с. $E_{инд}$. Следовательно, ее можно определить из квадратного уравнения

$$E_{инд}^2 - EE_{инд} + RN = 0, \text{ откуда } E_{инд} = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4NR}}{2}.$$

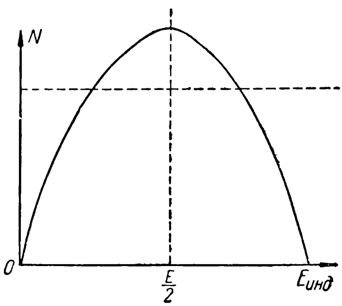


Рис. 331.

Подставляя сюда значения для E, R и N, получим два возможных значения для $E_{инд}$: 1) $E_{инд} = 80$ *в* и 2) $E_{инд} = 40$ *в*.

Физическое содержание двухзначного решения следующее. Максимальная мощность отдается двигателем приводу тогда, когда в якоре двигателя развивается э. д. с. $E_{инд} = \frac{E}{2}$. Будем откладывать по оси абсцисс $E_{инд}$, а по оси ординат — отдаваемую мощность N (рис. 331). Тогда кривая будет иметь максимум при $E_{инд} = \frac{E}{2}$. Если задать N, то $E_{инд}$ найдем по пересечению рассматриваемой кривой с прямой $N = \text{const}$, показанной на рисунке штриховой линией. Следовательно, одному и тому же значению N соответствуют два значения $E_{инд}$. Исключение представляет только тот случай, когда N максимальная, и соответствующая прямая касается кривой в ее вершине.

59. $\varphi_a - \varphi_b = E\frac{C_1 - C}{2(C_1 + C)}$.

Указание. Задача решается аналогично задачам 54 и 55.

60. $A_{макс} = 180$ *вт*; $I = 3$ *а*.

Решение. Полный ток, проходящий через электродвигатель,

$$I = \frac{E - E_{инд}}{R},$$

где $E = 120$ *в* — внешняя э. д. с. или напряжение в сети, $E_{\text{инд}}$ — э. д. с. индукции, возникающая в якоре двигателя при его вращении.

Работа внешней э. д. с. за 1 *сек* равна $A_{\text{полная}} = E\,I$. Часть этой работы идет на нагревание проводников $Q = I^2R$; остальная является работой электродвигателя:

$$A = EI - I^2R = I\,(E - IR) = IE_{\text{инд}};\quad A = \frac{E_{\text{инд}}\,(E - E_{\text{инд}})}{R}.$$

Это выражение при заданном E достигает максимума, если $E_{\text{инд}} = \frac{E}{2}$. В самом деле, произведение $E_{\text{инд}}(E - E_{\text{инд}})$ геометрически можно трактовать как площадь прямоугольника с длиной сторон $E_{\text{инд}}$ и $E - E_{\text{инд}}$ и периметром $2E$. При заданном же периметре изо всех прямоугольников квадрат имеет наибольшую площадь. Поэтому максимальная работа двигателя равна

$$A_{\text{макс}} = \frac{E^2}{4R} = 180\ \textit{вт}.$$

При этом через двигатель проходит ток $I = \frac{E - E_{\text{инд}}}{R} = \frac{E}{2R} = 3a$.

61. $R_1 = \frac{2R_0}{\alpha^2 - 1};\quad R_2 = R_0\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}.$

Решение. Поскольку по условию задачи мощность, развиваемая батареей, в обоих случаях одинакова, то сопротивления внешних цепей должны быть одинаковые:

$$R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0 + R_2}} = R_0;\quad R_2 + \frac{R_1\,(R_2 + R_0)}{R_0 + R_1 + R_2} = R_0,$$

$$\text{откуда}\quad R_2^2 + 2R_1R_2 = R_0^2.$$

По второму условию падение напряжения U_1 на R_0 в первом случае в α раз меньше падения напряжения U_2 на R_0 при непосредственном включении, т. е. $U_1 = \frac{U_2}{\alpha}$. Это можно записать так:

$$IR_0 = \alpha R_0\frac{R_1\,(R_0 + R_2)\,I}{(R_0 + R_1 + R_2)\,(R_0 + R_2)},\ \text{откуда}\ R_0 + R_1 + R_2 = \alpha R_1.$$

Мы получили систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$R_2^2 + 2R_1R_2 = R_0^2\ \text{и}\ R_0 + R_1 + R_2 = \alpha R_1.$$

Решая эту систему, получим $R_1 = \frac{2R_0}{\alpha^2 - 1};\quad R_2 = R_0\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}.$

62. $I_3 \approx 0{,}22\ a.$

Решение. Расставим произвольно с помощью стрелок направления токов на отдельных участках цепи (рис. 332). Если выбранное направление тока окажется неверным, то при решении результат для силы тока будет иметь знак минус. Направление стрелки на схеме при этом надо изменить на противоположное; абсолютное же значение силы тока будет вычислено верно.

Выделим на схеме два замкнутых контура: $PACBNP$ и $NBCDKN$. Сделаем обход каждого контура в направлении против движения часовой стрелки. Для первого контура можно записать:

$$E = I_1 r_1 + I_2 r_2.$$

При обходе второго контура источников э. д. с. нет, поэтому

$$0 = -I_2 r_2 + I_3 r_3.$$

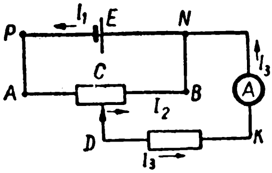


Рис. 332.

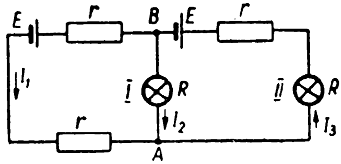


Рис. 333.

В полученных двух уравнениях три неизвестных: I_1, I_2 и I_3. Чтобы определить силу тока, проходящего по амперметру, т. е. I_3, необходимо записать еще одно уравнение.

Рассмотрим точку C, где установлен ползунок потенциометра. К этой точке подходит ток I_1 и дальше разветвляется на токи I_2 и I_3. Следовательно, можно записать:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Решаем полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными. Подставляя в первое уравнение значение I_1, получаем

$$E = I_2 r_1 + I_3 r_1 + I_2 r_2.$$

Заменим в этом уравнении I_2 его значением, полученным из второго уравнения $I_2 = I_3 \frac{r_3}{r_2}$. Тогда

$$E = I_3 \frac{r_1 r_3}{r_2} + I_3 r_1 + I_3 \frac{r_3 r_2}{r_2} = I_3 \left(\frac{r_1 r_3}{r_2} + r_1 + r_3 \right),$$

$$I_3 = \frac{E}{\frac{r_1 r_3}{r_2} + r_1 + r_3} \approx 0{,}22\ a.$$

Значение I_3 получили положительное, следовательно, направление тока, проходящего по амперметру, выбрано правильно.

63. Решение. Предположим, что потенциал точки A выше потенциала точки B. Обозначим на рис. 333 направления токов. Тогда можно записать:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2; \\ I_2 R + I_3 (r + R) = E; \\ 2 I_1 r - I_2 R = E. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$I_2 = \frac{E(r-R)}{R^2+5rR+2r^2} \text{ и } I_3 = \frac{2E(r+R)}{R^2+5rR+2r^2}.$$

Тогда $I_1 = \dfrac{E(r+3R)}{R^2+5rR+2r^2}$.

Из формулы для I_2 следует, что при возрастании r от 0 до значения R сила тока I_2 быстро уменьшается до 0. При дальнейшем возрастании r изменяется направление тока и сначала несколько возрастает значение I_2, а затем снова уменьшается. Сила тока I_3, проходящего по лампе II, будет всегда больше, чем сила тока I_2, проходящего по лампе I. Поэтому лампа II будет светить ярче лампы I.

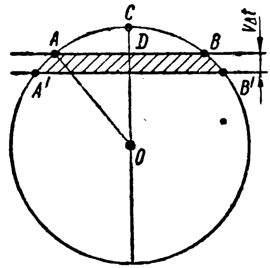


Рис. 334.

64. $\beta = \alpha\dfrac{r}{R+r}$; стрелка отклонится влево.

Решение. При замыкании ключа K_1 конденсатор полностью зарядится. При этом через гальванометр пройдет заряд

$$Q_1 = CE = k\alpha.$$

После подключения сопротивления разность потенциалов на зажимах источника упадет до величины $U = E\dfrac{R}{R+r}$, а заряд конденсатора станет

$$Q_2 = CE\frac{R}{R+r}.$$

При этом через гальванометр пройдет заряд

$$Q_1 - Q_2 = CE\frac{r}{R+r} = k\beta.$$

Стрелка гальванометра отклонится влево на угол

$$\beta = \frac{CE}{k}\cdot\frac{r}{R+r} = \alpha\frac{r}{R+r}.$$

65. $|E(t)| = 2\mu_0 Hv\sqrt{vt(2R-vt)}$.

Решение. Величину э. д. с. индукции определим из закона Фарадея

$$|E| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

где $\Delta\Phi$ — количество магнитных силовых линий, пересекаемых частью стержня (находящейся внутри окружности) за отрезок времени Δt.

По условию задачи в начальный момент времени $t_0 = 0$ стержень касался окружности, поэтому до определенного момента стержень проходит расстояние $CD = vt$ (рис. 334), и размеры интересующего нас участка стержня (находящегося внутри окружности) можно легко найти:

$$AB = 2AD = 2\sqrt{AO^2 - OD^2} = 2\sqrt{R^2-(R-vt)^2} = 2\sqrt{vt(2R-vt)}.$$

К моменту времени $t+\Delta t$ стержень смещается на $v\Delta t$ и из положения AB переходит в положение $A'B'$. Поскольку поле однородное, то $\Delta \Phi = \mu_0 H \Delta S$, где ΔS — площадь криволинейной трапеции $A'ABB'$, которую при небольших Δt с достаточной точностью можно заменить площадью прямоугольника со сторонами AB и $v\Delta t$. Поэтому

$$\Delta S = 2v\Delta t \sqrt{vt\,(2R - vt)}, \text{ а } |E(t)| = 2\mu_0 H v \sqrt{vt\,(2R - vt)}.$$

При $t = 0$ и $t = \frac{2R}{v}$ э. д. с. индукции в указанном участке равна нулю, так как его длина обращается в нуль.

66. а) $U = \pi r_1 r_2 B_0$; б) $U = \pi r_1 r_2 \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} B_0$.

Решение. а) Обозначим через E_1 и E_2 э. д. с., наводимые в данный момент в контурах I и II, а через R_1 и R_2 — сопротивление этих контуров. Тогда силу тока в петле, представленной на рис. 309, a, можно вычислить по формуле

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}, \tag{1}$$

а разность потенциалов между точками M и N — по формуле

$$U = E_1 - I_1 R_1$$

или по формуле

$$U = E_2 + IR_2.$$

Учитывая формулу (1), получаем

$$U = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

Подставляя в эту формулу выражения

$$E_1 = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B \pi r_1^2}{\Delta t} = \frac{\pi r_1^2 B_0 \Delta t}{\Delta t} = \pi r_1^2 B_0;$$

$$E_2 = \pi r_2^2 B_0; \quad R_1 = \rho \frac{2\pi r_1}{S'} \text{ и } R_2 = \rho \frac{2\pi r_2}{S}, \text{ получаем } U = \pi r_1 r_2 B_0.$$

б) Если контур имеет форму, представленную на рис. 309, $б$, то э. д. с. E_1 и E_2 складываются. Поэтому

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2}, \quad U = E_1 - IR_1 = IR_2 - E_2 = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 + R_2} =$$

$$= \pi r_1 r_2 \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} B_0.$$

§ 4. ОПТИКА

67. $f = 51F = 225$ *см*; $\frac{S_{из}}{S_{эк}} = 0{,}9$.

Решение. Из сопоставления размеров кадра на пленке и экране видно, что максимальный размер изображения получим при увеличении $k = \frac{1200\ мм}{24\ мм} = 50$, причем изображение не полностью покроет экран, так как во втором измерении размер изображения будет 1,8 *см* $\times$ $\times 50 = 90$ *см*. Для определения f воспользуемся формулой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ и увеличения $k = \frac{f}{d}$. Решив совместно эти два уравнения, получим $f = 51\ F = 225$ *см*. Площадь, занятая изображением, будет равна $S_{из} = 120\ см \cdot 90\ см$; поэтому

$$\frac{S_{из}}{S_{эк}} = \frac{120\ см \cdot 90\ см}{120\ см \cdot 100\ см} = 0{,}9.$$

68. $E_1 = \frac{\pi D^2 \Phi}{4a^2}$.

Решение. Для решения задачи сделаем рисунок (рис. 335), где AA_1 — светящаяся плоскость, BB_1 — экран. Возьмем на светящейся

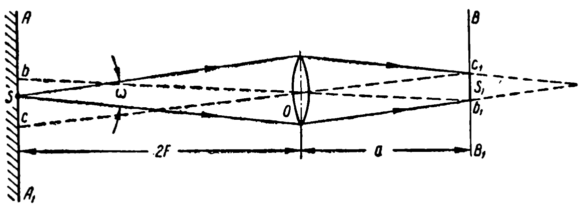


Рис. 335.

поверхности единичную площадку S. Лучи, падающие из этой площадки на линзу, должны дать изображение площадки в натуральную величину тоже на расстоянии $2F$ по другую сторону линзы. Поскольку же экран находится на расстоянии $a < 2F$ от линзы, то эти лучи дадут на экране светлое пятно площадью $S_1 > S$. Для того чтобы определить, из какой площади S светящейся плоскости AA_1 будут попадать лучи на эту же площадку, проведем из крайних точек площадки S_1 лучи через центр линзы. Эти лучи определят на плоскости AA_1 площадку S. Поскольку диаметр линзы $D \ll a < 2F$, то можно считать, что центральные лучи b_1b и c_1c определят всю площадь S, из которой лучи попадают на площадку экрана. Освещенность в центре площадки S_1 будет

$$E_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}.$$

Здесь Φ_1 — полный световой поток, падающий из площадки S плоскости AA_1 на линзу

$$\Phi_1 = \Phi\omega S = \Phi \frac{\pi D^2}{4\,(2F)^2} S; \text{ тогда } E_1 = \frac{\pi \Phi D^2 S}{4\,(2F)^2 S_1}.$$

Из рисунка видно, что треугольники bOc и b_1Oc_1 подобные. Поэтому $\frac{S}{S_1} = \frac{(2F)^2}{a^2}$. Подставляя это отношение в выражение для E_1, получим $E_1 = \frac{\pi D^2 \Phi}{4a^2}$.

69. $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \sqrt{n^2-1}-1$.

Решение. Пусть из точки P (рис. 336) выходит луч света PA, падающий на боковую поверхность лейки под углом φ. В точке A луч преломляется под углом β, проходит дальше, падает на поверхность жидкости под углом γ и преломляется под углом δ. В соответствии с законом преломления можно записать

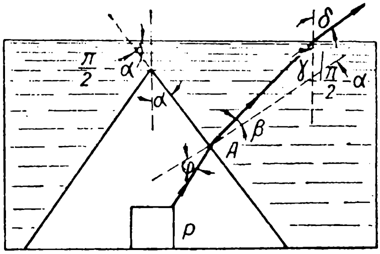


Рис. 336.

$$\sin\varphi = n\sin\beta = n\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\gamma\right) = n\cos(\alpha+\gamma) = n(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma).$$

Условием видимости предмета P является существование такого угла $\varphi_{пр}$, для которого луч падения на поверхность жидкости $\gamma_{пр}$ будет предельным. Все лучи, выходящие от точек предмета и падающие под углом $\varphi \geqslant \varphi_{пр}$ и под углом $\gamma \leqslant \gamma_{пр}$, будут видимые для наблюдения. Следовательно,

$$\sin\varphi_{пр} = n(\cos\alpha\cos\gamma_{пр}-\sin\alpha\sin\gamma_{пр}).$$

Однако $\sin\gamma_{пр} = \frac{1}{n}$; тогда $\sin\varphi_{пр} = n\left(\cos\alpha\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-\sin\alpha\cdot\frac{1}{n}\right)$

$$\text{или } \sin\varphi_{пр} = \sqrt{n^2-1}\cos\alpha-\sin\alpha.$$

Максимально возможный угол падения на боковую поверхность конуса $\varphi_{пр} = \frac{\pi}{2}-\alpha$; тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sqrt{n^2-1}\cos\alpha-\sin\alpha \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{n^2-1}-1. \qquad (1)$$

Последнее условие видимости предмета можно записать так: $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \sqrt{n^2-1}-1$. Это условие удовлетворяет каждое значение α, если $n^2 < 2$. Тогда выражение в правой части неравенства будет отрицательное, в то время как $\operatorname{tg}\alpha$ является всегда положительным $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. Если $n^2 > 2$, тогда для углов развертки конуса α больше, чем определяемые уравнением (1), предмет будет видимый, а для углов α, меньше угла, определяемого уравнением (1), предмет не будет видимым.

70. $\frac{E_1}{E_2} = 4\frac{(d-F)^2}{(2d-F)^2}$.

Решение. Найдем расстояние изображения f, протяженного источника света от линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}; \text{ отсюда } f=\frac{dF}{d-F}.$$

Увеличение изображения

$$k = \frac{f}{d} = \frac{F}{d - F}.$$

Освещенность этого изображения будет, очевидно, обратно пропорциональна k^2, т. е.

$$E_1 \sim \frac{(d - F)^2}{F^2}.$$

Расстояние изображения f_1 источника от линзы

$$f_1 = \frac{2dF}{2d - F}, \text{ а увеличение } k_1 = \frac{2F}{2d - F}.$$

Тогда освещенность изображения во втором случае

$$E_2 \sim \left(\frac{2d - F}{2F}\right)^2.$$

Следовательно, освещенность изменится в

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{(d - F)^2 \cdot 4F^2}{F^2 (2d - F)^2} = 4\frac{(d - F)^2}{(2d - F)^2} \text{ раз.}$$

Если $d = 2F$, то $\frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{9}$.

71. $F = \frac{3}{2} d$.

Решение. По условию задачи $\frac{E_1}{E_2} = 4$. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, можно записать:

$$4\frac{(d - F)^2}{(2d - F)^2} = 4, \text{ откуда } d^2 - 2dF + F^2 = 4d^2 - 4dF + F^2 \text{ и}$$

$$3d^2 - 2dF = 0.$$

Решив это уравнение, получим $F = \frac{3}{2} d$.

72. $\frac{k_2}{k_1} = 1 + \frac{LF_1}{F_2 (L - F_1)}$.

Решение. Чтобы определить, во сколько раз изменится размер изображения при насадке линзы на объектив, найдем увеличение изображения в первом и втором случаях, и их отношение и даст искомую величину. Увеличение в первом случае

$$k_1 = \frac{L}{d_1}, \text{ где } d_1 = \frac{LF_1}{L - F_1}$$

— расстояние от кадра до объектива. Тогда $k_1 = \frac{L - F_1}{F_1}$. Увеличение во втором случае будет $k_2 = \frac{L}{d_2}$, где d_2— расстояние от кадра до объектива, которое определим по формуле линзы

$$\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}=\frac{1}{L}+\frac{1}{d_2};\ \text{отсюда}\ d_2=\frac{F_1F_2L}{L(F_1+F_2)-F_1F_2}.$$

Тогда $k_2=\dfrac{L(F_1+F_2)-F_1F_2}{F_1F_2}$.

Размер изображения изменится в $\dfrac{k_2}{k_1}=\dfrac{L(F_1+F_2)-F_1F_2}{F_2(L-F_1)}=$

$$=1+\frac{LF_1}{F_2(L-F_1)}\ \text{раз.}$$

73. $t_1=t\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^2$.

Решение. Произведение освещенности на время экспозиции в обоих случаях должно оставаться постоянным, т. е.

$$Et=E_1t_1\ \text{или}\ \frac{t_1}{t}=\frac{E}{E_1},$$

где E — освещенность изображения при увеличении $k_0=1$;
E_1 — освещенность изображения при увеличении k;
t — время экспозиции при увеличении $k_0=1$.
t_1 — время экспозиции при увеличении k.

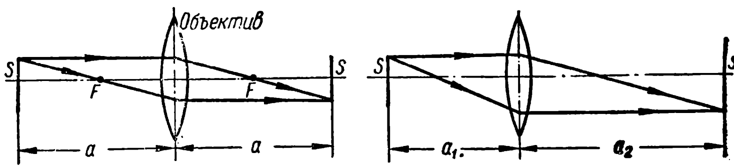


Рис. 337.

Обозначим через $S_{\text{об}}$ — площадь объектива; S — площадь изображения; a — расстояние предмета до объектива при увеличении $k_0=1$; a_1 — расстояние предмета до объектива при увеличении k; a_2 — расстояние изображения до объектива при увеличении k (рис. 337).

При увеличении $k_0=1$ можно записать:

$$E\sim\frac{\Phi S}{S_1}=\Phi,$$

где $\Phi\sim\dfrac{S_{\text{об}}}{a^2}$ — поток, падающий на объектив с единичной площади предмета. Поскольку при увеличении $k_0=1, a=2F$, то

$$\Phi\sim\frac{S_{\text{об}}}{4F^2}\ \text{и}\ E\sim\frac{S_{\text{об}}}{4F^2}.$$

Аналогично при увеличении k

$$E_1\sim\frac{\Phi_1S}{S_1};\quad \Phi_1\sim\frac{S_{\text{об}}}{a_1^2};\quad \frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^2};\quad E_1\sim\frac{S_{\text{об}}}{a_1^2}\cdot\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{S_{\text{об}}}{a_2^2}.$$

Расстояние a_2 определим из формулы линзы

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=\frac{1}{F};\quad \frac{a_2}{a_1}=k;\quad a_1=\frac{a_2}{k};$$

$$\frac{k}{a_2}+\frac{1}{a_2}=\frac{1}{F},\ \text{откуда}\ a_2=F(k+1)$$

Тогда $E_1\sim\dfrac{S_{об}}{F^2(k+1)^2};\quad t_1=t\dfrac{E}{E_1}=t\dfrac{S_{об}}{4F^2}\cdot\dfrac{F^2(k+1)^2}{S_{об}};$

$$t_1=t\left(\frac{k+1}{2}\right)^2.$$

74. Решение. 1) Найдем изображение источника S во втором зеркале II (рис. 338):

$$a_1=3F;\quad \frac{1}{F}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1};\quad b_1=\frac{Fa_1}{a_1-F}=\frac{3}{2}F.$$

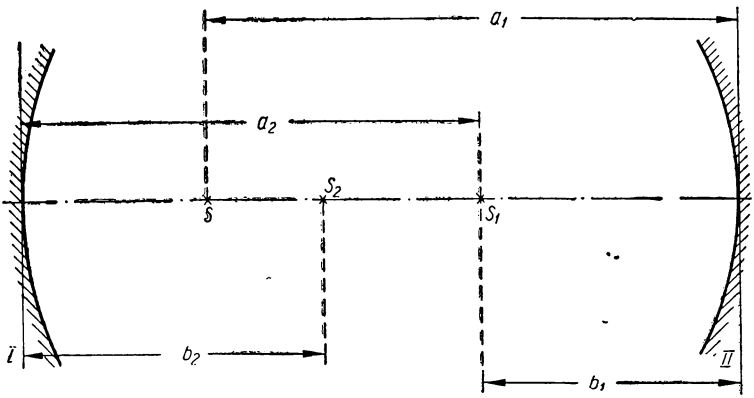


Рис. 338.

2) Найдем изображение S_1 в первом зеркале I:

$$a_2=4F-\frac{3}{2}F=\frac{5}{2}F;\quad b_2=\frac{Fa_2}{a_2-F}=\frac{5}{3}F.$$

3) Ищем изображение S_2 в зеркале II:

$$a_3=4F-\frac{5}{3}F=\frac{7}{3}F;\quad b_3=\frac{F\cdot\frac{7}{3}F}{-F+\frac{7}{3}F}=\frac{7}{4}F.$$

Продолжая так и далее, получим $b_n=\dfrac{2n+1}{n+1}F.$

75. Р е ш е н и е. Чтобы определить, как будет двигаться изображение источника в поле зрения трубы, найдем, как изменяется угол γ (рис. 339) с изменением углов α и β. Пусть φ_0— угол между зеркалами, γ — угол между падающим и отраженным лучами; α —угол падения луча на первое зеркало; β — угол падения луча на второе зеркало.

По свойствам внешнего угла для треугольника ABC можно написать: $\gamma = 2\alpha + 2\beta$. В треугольнике AOC углы соответственно равны: $\angle O = \varphi_0$; $\angle A = \frac{\pi}{2} - \beta$; $\angle C = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Отсюда $\varphi_0 + \frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$ или $\varphi_0 = \alpha + \beta$. Тогда $\gamma = 2\varphi_0$, т. е. отраженный луч при любых α и β образует один и тот же угол с падающим лучом. Следовательно, изображение источника в поле зрения трубы не будет перемещаться. Однако зеркала могут повернуться так вокруг оси параллельно ребру двухгранного угла, что падающий луч вообще не попадет на отражающие поверхности зеркала I и II. В этом случае изображение в поле зрения трубы исчезнет.

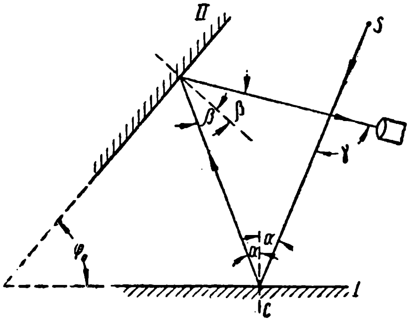


Рис. 339.

Если зеркала вращаются с постоянной скоростью, то изображение источника периодически появляется и исчезает в поле зрения трубы.

76. $f = \frac{dF}{2d - F}$.

Р е ш е н и е. Если плоская поверхность плоско-выпуклой линзы покрыта слоем, хорошо отражающим свет, то это эквивалентно двояковыпуклой линзе с фокусным расстоянием $\frac{1}{2}F$. Тогда, применив формулу линзы $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{2}{F}$, получим $f = \frac{dF}{2d - F}$.

Изображение источника света находится с той же стороны, что и предмет, и действительно при условии $2a - F > 0$ или $a > \frac{F}{2}$ (так как $F > 0$).

77. Р е ш е н и е. Источник света расположен в точке S_0 на расстоянии d перед линзой (рис. 340). Его изображение, даваемое первой линзой, находится в точке S_1. Из формулы для собирающей линзы следует, что $f = \frac{dF}{d - F}$. Для второй линзы это изображение служит источником, находящимся на расстоянии $d_1 = f - F$ от этой линзы. Искомое изображение S_2 находится на расстоянии f_1 от второй линзы. Это расстояние можно определить из формулы: $\frac{1}{F} = -\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}$. Подставляя сюда выражение для d_1, получаем $f_1 = \frac{F^2}{d}$.

Легко сообразить, что возможны два случая. Ход лучей в первом случае показан на рис. 340. В этом случае предполагается, что $d > F$. Ход лучей во втором случае при $d < F$ можно получить из этого же рисунка, если источник поместить в точку S_2 и обратить ход лучей.

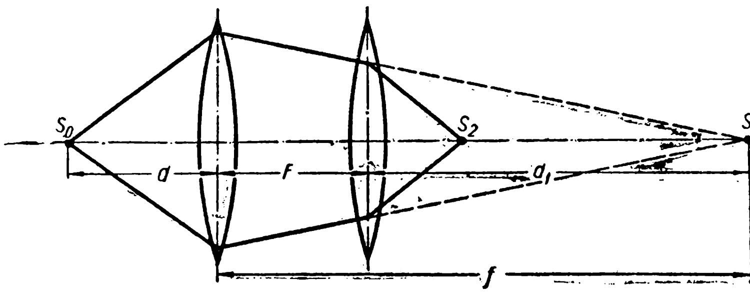


Рис. 340.

78. $F_p \approx -12$ *см.*

Решение. Оптическая сила объектива равна сумме оптических сил собирающей и рассеивающей линз: $D_0 = D_c - D_p$. Кроме того, оптическая сила объектива

$$D_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{d+f}{df},$$

где F_0 — главное фокусное расстояние объектива; d — расстояние от объектива до предмета; f — расстояние от объектива до изображения.

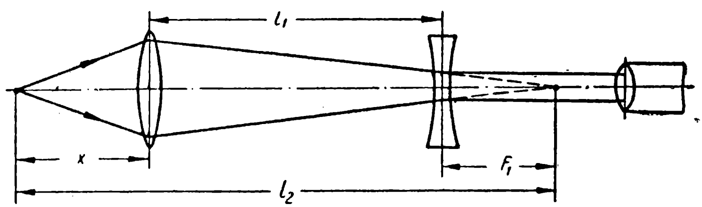


Рис. 341.

Поскольку по условию задачи абсолютная величина оптической силы рассеивающей линзы в два раза больше абсолютной величины собирающей линзы, то

$$D_0 = \frac{D_p}{2} - D_p = -\frac{1}{2} D_p, \text{ откуда } D_p = -2D_0,$$

и главное фокусное расстояние рассеивающей линзы

$$F_p = \frac{1}{D_p} = -\frac{1}{2D_0} = -\frac{df}{2(f+d)} \approx -12 \text{ см.}$$

79. $x_1 = 20$ *см*; $x_2 = 80$ *см.*

Решение. Предмет будет четко виден в трубу, если его изображение, создаваемое собирающей линзой, будет находиться в том фокусе рассеивающей линзы, который лежит по другую сторону от нее (рис. 341). В этом случае расстояние l_2 между предметом и этим изображением $l_2 = l_1 + F_1 = 100$ *см*.

Расстояние x между предметом и собирающей линзой определим из уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{l_2 - x} = \frac{1}{F_2} \text{ или } x^2 - l_2 x + l_2 F_2 = 0,$$

$$\text{откуда } x = \frac{l_2}{2} \pm \sqrt{\frac{l_2^2}{4} - l_2 F_2}; \quad x_1 = 20 \text{ см}; \quad x_2 = 80 \text{ см}.$$

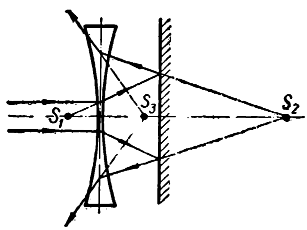


Рис. 342.

В положении $x_1 = 20$ *см* изображение, даваемое собирающей линзой в фокусе рассеивающей, будет иметь большие размеры. Значит, при этом положении собирающей линзы угловые размеры изображения, видимого в трубу, будут также большими.

80. $F = a$.

Решение. Параллельный пучок лучей от удаленного источника при прохождении через рассеивающую линзу дает мнимое изображение S_1 источника в фокусе линзы (рис. 342). В плоском зеркале получается второе изображение S_2, находящееся на расстоянии $2a + F$ от линзы. При вторичном прохождении лучей через линзу получается изображение S_3. Можно записать:

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{2a + F} - \frac{1}{\frac{3}{4}a}, \text{ откуда } F = a.$$

Второе решение $F = -\frac{3}{2}a$ для нашей задачи смысла не имеет.

81. Диафрагму надо поставить в фокальной плоскости объектива (и окуляра); $\gamma \approx 2°$.

Решение. В трубе, установленной на бесконечность, расстояние между окуляром и объективом равно сумме их фокусных расстояний $F_{ок} + F_{об}$.

Параллельный пучок лучей, образующий угол α с главной оптической осью, пройдя через объектив, собирается в фокальной плоскости объектива (рис. 343). Из окуляра выходит тоже параллельный пучок, но уже под иным углом β к главной оптической оси. Для ограничения поля зрения в фокальной плоскости объектива (и окуляра) ставят диафрагму. Размеры диафрагмы ограничивают угол поля зрения. Если угол между направлением параллельного пучка лучей и главной оптической осью больше, чем угол поля зрения, то, пройдя через объектив, параллельный пучок лучей пересечется в фокальной плоскости объектива за диафрагмой и, следовательно, будет вне поля зрения. Обозначая через D диаметр диафрагмы, получим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{D}{2F} \approx 0{,}0188$, а $\alpha \approx 1°4'$. Угол поля зрения $\gamma = 2\alpha \approx 2°8'$.

82. $t^\circ = t_0 + \dfrac{\pi D^2 E}{\alpha^2 F^2 a}$.

Решение. При установившейся температуре шарика энергия, получаемая им за счет поглощения световых лучей, равна энергии, рассеиваемой вследствие теплообмена, т. е.

$$E_1 \pi r^2 = a r^2 (t^\circ - t_0^\circ),$$

где E_1 — освещенность поверхности шарика.

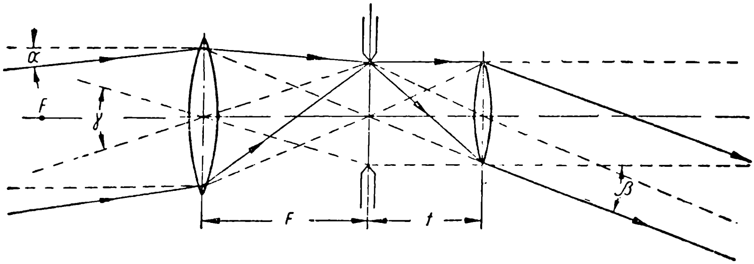


Рис. 343.

Если на шарик спроектировано изображение Солнца, то освещенность E_1 можно найти из следующих соображений. Вся световая энергия лучей, проходящих через линзу, распределяется по площади изображения Солнца. Диаметр изображения Солнца равен αF. Таким образом, $ED^2 = E_1(\alpha F)^2$ или $E_1 = \dfrac{ED^2}{\alpha^2 F^2}$.

Подставляя это выражение в уравнение теплового баланса, получим $t^\circ = t_0^\circ + \dfrac{\pi D^2 E}{\alpha^2 F^2 a}$.

83. Решение. Из хода лучей, указанного в условии задачи, можно сделать вывод, что для синего луча $n_ж > n_{ст}$; для зеленого — $n_ж = n_{ст}$, для красного — $n_ж < n_{ст}$. В условиях нормальной дисперсии показатель преломления n уменьшается при увеличении длины волны (рис. 344). Поскольку показатель преломления, кроме того, уменьшается с возрастанием температуры, то верхняя кривая на рис. 344 соответствует некоторой температуре T_1, а нижняя — $T_2 > T_1$.

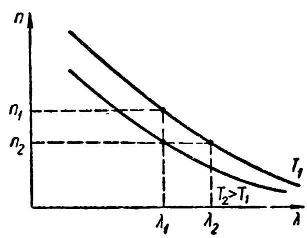


Рис. 344.

При температуре T_1 длине волны λ_1 отвечал бы некоторый показатель преломления n_1, а при температуре T_2 показатель преломления для волн с длиной λ_1 равен n_2. Из рис. 345 видно, что при температуре T_1 показатель преломления n_2 соответствовал бы длине волны $\lambda_2 > \lambda_1$, т. е. волны длиной λ_1 при температуре T_2 в отношении преломления ведут себя так, как при температуре T_1 вели себя более длинные волны λ_2, т. е. весь спектр смещается в длинноволновую сторону — к вершине призмы, заполненной водой. Через призму могут проходить, не отклоняясь, синие лучи.

84. $l = \alpha F a \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$.

Решение. Рассмотрим сначала ход лучей с длиной волны λ_1 (рис. 345). На передней грани лучи не преломляются. Для преломления на задней грани можно записать:

$$n_1 \sin \alpha = \sin (\varphi + \alpha),$$

где α — угол падения лучей на эту грань, $(\varphi + \alpha)$ — угол преломления, $AB \perp CE$.

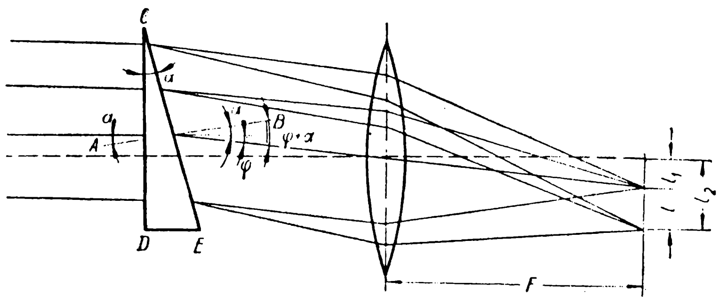


Рис. 345.

Учитывая малость углов, можно приближенно написать: $n_1\alpha = \varphi + \alpha$. Отсюда определяем угол отклонения лучей от первоначального направления:

$$\varphi = \alpha (n_1 - 1).$$

Очевидно, что φ есть угол между направлением преломленных лучей и оптической осью линзы. На экране лучи соберутся в точке, отстоящей от оптической оси на расстоянии

$$l_1 \varphi F = \alpha (n_1 - 1) F = \alpha \left(\frac{a}{\lambda_1} - 1\right) F.$$

Повторяя те же рассуждения для лучей с длиной волны λ_2 и сравнивая отклонения на экране, получаем

$$l = l_1 - l_2 = \alpha F a \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right).$$

85. $b \approx 4{,}47$ *см*; $D' \approx 0{,}47$ *см*.

Решение. На матовом стекле, поставленном за окуляром, возникает изображение оправы объективной линзы. Расстояние от окуляра до экрана (матового стекла) определится из формулы линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_2}$ (рис. 346), где F_2 — фокусное расстояние объектива.

Расстояние между объективом и окуляром равно сумме фокусных расстояний этих линз, поскольку по условию зрительная труба установлена на бесконечность:

$$a = F_1 + F_2,$$

где F_1 — фокусное расстояние объектива.
Тогда

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_1 + F_2} = \frac{F_1 + F_2 - F_2}{F_2(F_1 + F_2)} = \frac{F_1}{F_2(F_1 + F_2)};$$

$$b = \frac{F_2(F_1 + F_2)}{F_1} \approx 4{,}47 \text{ см}.$$

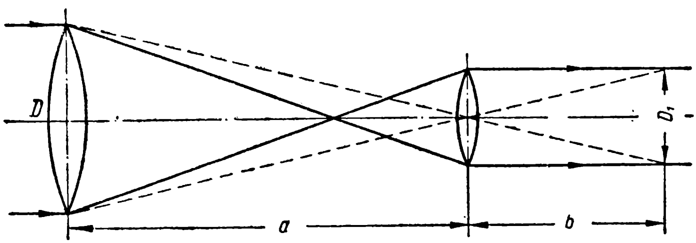


Рис. 346.

Диаметр изображения оправы объектива определим из формулы увеличения линзы

$$\frac{D'}{D} = \frac{b}{F_1 + F_2},$$

где D — диаметр объектива, D' — диаметр изображения.

Отсюда $D' = \dfrac{Db}{F_1 + F_2} \approx 0{,}47$ *см.*

86. Решение. Предположим, что поглощение произошло. Тогда энергия фотона и его количество движения полностью перейдут к электрону. Следовательно, должны выполняться соотношения

$$h\nu = \frac{1}{2} mv^2; \tag{1}$$

$$\frac{h\nu}{c} = mv, \tag{2}$$

выражающие закон сохранения энергии (1) и количества движения (2). Поскольку скорость света c больше скорости электрона v, то очевидно, что оба соотношения (1) и (2) одновременно выполняться не могут. В самом деле, совместное решение уравнений (1) и (2) дает $v = 2c$, но скорость движения любой частицы не может превышать скорости света c. Это значит, что предположение о том, что фотон поглощается свободным электроном, противоречит законам сохранения энергии и количества движения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Международная система единиц (СИ) по ГОСТ 9867—61

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенные обозначения единиц измерения: Русские	Сокращенные обозначения единиц измерения: Латинские или греческие	Размер производных единиц
		Основные единицы		
Длина	метр	*м*	m	—
Масса	килограмм	*кг*	kg	—
Время	секунда	*сек*	s	—
Сила электрического тока	ампер	*а*	A	—
Термодинамическая температура	градус Кельвина	°*K*	°K	—
Сила света	свеча	*св*	cd	—
		Дополнительные единицы		
Плоский угол	радиан	*рад*	rad	—
Телесный угол	стерадиан	*стер*	sr	—
		Производные единицы		
Площадь	квадратный метр	*м*^{2}	m^2	(1 *м*)^2
Объем	кубический метр	*м*^{3}	m^3	(1 *м*)^3
Частота	герц	*гц*	Hz	1 : (1 *сек*)
Плотность (объемная масса)	килограмм на кубический метр	*кг/м*^{3}	kg/m^3	(1 *кг*) : (1 *м*)^3
Скорость	метр в секунду	*м/сек*	m/s	(1 *м*) : (1 *сек*)
Угловая скорость	радиан в секунду	*рад/сек*	rad/s	(1 *рад*) : : (1 *сек*)
Ускорение	метр на секунду в квадрате	*м/сек*^{2}	m/s^2	(1 *м*) : (1 *сек*)^2
Угловое ускорение	радиан на секунду в квадрате	*рад/сек*^{2}	rad/s^2	(1 *рад*) : : (1 *сек*)^2

Продолжение

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенные обозначения единиц измерения		Размер производных единиц
		Русские	Латинские или греческие	
Сила	ньютон	*н*	N	(1 *кг*)·(1 *м*) : (1 *сек*)^2
Давление (механическое напряжение)	ньютон на квадратный метр	*н/м*^{2}	N/m^2	(1 *н*) : (1 *м*)^2
Динамическая вязкость	ньютон-секунда на квадратный метр	*н·сек/м*^{2}	N·s/m^2	(1 *н*)·(1 *сек*) : (1 *м*)^2
Кинематическая вязкость	квадратный метр на секунду	*м*^{2}*/сек*	m^2/s	(1 *м*)^2 : (1 *сек*)
Работа, энергия, количество теплоты	джоуль	*дж*	J	(1 *н*)·(1 *м*)
Мощность	ватт	*вт*	W	(1 *дж*) : (1 *сек*)
Количество электричества (электрический заряд)	кулон	*к*	C	(1 *а*)·(1 *сек*)
Электрическое напряжение, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	вольт	*в*	V	(1 *вт*) : (1 *а*)
Напряженность электрического поля	вольт на метр	*в/м*	V/m	(1 *в*) : (1 *м*)
Электрическое сопротивление	ом	*ом*	Ω	(1 *в*) : (1 *а*)
Электрическая емкость	фарада	*ф*	F	(1 *к*) : (1 *в*)
Поток магнитной индукции	вебер	*вб*	Wb	(1 *к*)·(1 *ом*)
Индуктивность	генри	*гн*	H	(1 *вб*) : (1 *а*)
Магнитная индукция	тесла	*тл*	T	(1 *вб*) : (1 *м*)^2
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	*а/м*	A/m	(1 *а*) : (1 *м*)
Магнитодвижущая сила	ампер	*а*	A	1 *а*
Световой поток	люмен	*лм*	lm	(1 *св*)·(1 *стер*)
Яркость	свеча на квадратный метр, или нит	*св/м*^{2}	cd/m^2 или nt	(1 *св*) : (1 *м*)^2
Освещенность	люкс	*лк*	lx	(1 *лм*) : (1 *м*)^2

Рекомендуемые обозначения некоторых величин

Длина	l, L
Ширина	b
Глубина, высота	h, H
Диаметр	d, D
Радиус	r, R
Площадь	S
Объем	V
Время	t
Путь, смещение	s
Скорость	v, u
Ускорение	a
Угловое перемещение	φ
Угловая скорость	ω
Масса	m, M
Плотность	ρ
Сила	F, Q, R
Вес (в воздухе)	P
Давление	p
Момент силы	M
Количество движения	K
Работа	A
Мощность	N
Коэффициент трения	k
Энергия	E, W
Период	T
Частота колебаний	ν, f
Число оборотов в минуту	n
Разность фаз	φ, δ
Длина волны	λ
Модуль Юнга	E
Коэффициент линейного расширения	α
Коэффициент объемного расширения	β
Молекулярная масса	μ
Коэффициент полезного действия	η
Коэффициент поверхностного натяжения	α
Температура по шкале Цельсия	t°
Абсолютная температура	T
Количество теплоты	Q
Удельная теплоемкость	c
Теплота испарения	r
Заряд (количество электричества)	q, Q
Заряд электрона	e
Поверхностная плотность заряда	σ
Диэлектрическая проницаемость	ε
Напряженность электрического поля	E
Напряжение (разность потенциалов)	U
Электродвижущая сила	E
Сила тока	I
Плотность тока	i, ρ
Сопротивление	R, r
Удельное сопротивление	ρ
Напряженность магнитного поля	H
Индукция магнитного поля	B
Магнитная проницаемость	μ
Число витков катушки	n, N
Индуктивность	L
Световой поток	Φ
Освещенность	E
Сила света	I
Фокусное расстояние линзы, зеркала	F, f
Оптическая сила	D
Коэффициент преломления	n

Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Числовое значение постоянной
Постоянная тяготения γ	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *м³/кг·сек²*
Ускорение падающих тел g	$9{,}81$ *м/сек²*
Число молекул в 1 *кмоле* (число Авогадро) N_0	$6{,}025 \cdot 10^{26}$ *кмоль*$^{-1}$

Продолжение

Физическая постоянная	Числовое значение постоянной
Объем 1 *кмоля* идеального газа при нормальных условиях V_0	22,41 $м^3/кмоль$
Число Фарадея F	$9,65 \cdot 10^7$ *к/кг-экв*
Постоянная Планка h	$6,625 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек*
Заряд электрона e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ *к*
Масса покоя электрона $m_э$	$9,11 \cdot 10^{-31}$ *кг*
Скорость распространения света в вакууме c	$3 \cdot 10^8$ *м/сек*

Некоторые астрономические величины

Средний радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6$ *м*
Средняя плотность Земли	5500 $кг/м^3$
Масса Земли	$5,96 \cdot 10^{24}$ *кг*
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8$ *м*
Масса Солнца	$1,97 \cdot 10^{30}$ *кг*
Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6$ *м*
Масса Луны	$7,3 \cdot 10^{22}$ *кг*
Среднее расстояние от Луны до Земли	$3,84 \cdot 10^8$ *м*
Период обращения Луны вокруг Земли	27 *суток* 7 *ч* 43 *мин*
Средняя плотность Солнца	1400 $кг/м^3$

Плотность

Газы при нормальных условиях

Газ	Числовое значение плотности, $кг/м^3$
Воздух	1,293
Водород	0,089
Кислород	1,429
Углекислый газ	1,977
Гелий	0,1785

Жидкости

Жидкость	Числовое значение плотности, $кг/м^3$
Бензол	880
Вода	1000
Керосин	800
Ртуть	13 600
Спирт	790

Твердые вещества

Твердое тело	Числовое значение плотности, *кг/м³*
Алюминий	2700
Железо	7900
Латунь	8400
Лед	900
Медь	8600
Никель	8800
Олово	7100
Платина	21 400
Пробка	200
Свинец	11 300
Серебро	10 500
Сталь	7700
Цинк	7000

Прочность и упругость тел

Тела	Разрушающее напряжение при растяжении, *н/м²*	Модуль Юнга, *н/м²*
Сталь	$6{,}86 \cdot 10^8$	$19{,}6 \cdot 10^{10}$
Железо	$5{,}88 \cdot 10^8$	$19{,}6 \cdot 10^{10}$
Медь	$2{,}35 \cdot 10^8$	$11{,}76 \cdot 10^{10}$
Свинец	$0{,}2 \cdot 10^8$	$0{,}167 \cdot 10^{10}$

Коэффициенты теплового расширения

Линейное расширение

Алюминий	$24 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$
Железо (сталь)	$12 \cdot 10^{-6}$ »
Латунь	$19 \cdot 10^{-6}$ »
Медь	$17 \cdot 10^{-6}$ »
Стекло	$10 \cdot 10^{-6}$ »
Цинк	$29 \cdot 10^{-6}$ »

Объемное расширение

Керосин	10^{-3} *град*$^{-1}$
Ртуть	$18 \cdot 10^{-5}$ »

Свойства некоторых жидкостей

Жидкость	Удельная теплоемкость при 20° С, *дж/кг·град*	Коэффициент поверхностного натяжения при 20° С, *н/м*
Бензол	1720	0,03
Вода	4190	0,073
Глицерин	2430	0,064
Керосин	2140	0,03
Ртуть	138	0,5
Спирт	2510	0,023

Свойства некоторых твердых тел

Твердое тело	Температура плавления, °С	Удельная теплоемкость, *дж/кг·град*	Удельная теплота плавления при температуре плавления, *дж/кг*
Алюминий	659	896	$3{,}22\cdot10^5$
Железо	1530	500	$1{,}25\cdot10^5$
Латунь	900	386	—
Лед	0	2100	$3{,}35\cdot10^5$
Медь	1100	400	$1{,}76\cdot10^5$
Олово	232	230	$0{,}586\cdot10^5$
Платина	1770	117	$1{,}137\cdot10^5$
Свинец	327	130	$0{,}226\cdot10^5$
Серебро	960	234	$0{,}88\cdot10^5$
Сталь	1300	460	—
Цинк	420	391	$1{,}17\cdot10^5$

Диэлектрическая проницаемость диэлектриков (относительная)

Вода	81	Слюда	6
Керосин	2	Стекло	5,5—7
Масло	4—5	Фарфор	5,7 — 6,3
Парафин	2	Эбонит	2,6

Удельное сопротивление проводников (при °С) и температурные коэффициенты

Проводник	Удельное сопротивление, *ом·м*	Температурный коэффициент, *град*$^{-1}$
Алюминий	$2{,}5\cdot10^{-8}$	$4{,}2\cdot10^{-3}$
Железо	$8{,}7\cdot10^{-8}$	$6{,}2\cdot10^{-3}$
Константан	$50\cdot10^{-8}$	—
Медь	$1{,}71\cdot10^{-8}$	$5\cdot10^{-3}$
Никелин	$40{,}0\cdot10^{-8}$	—
Нихром	$100\cdot10^{-8}$	—
Свинец	$22\cdot10^{-8}$	$4{,}2\cdot10^{-3}$
Уголь	$4000\cdot10^{-8}$	$-0{,}8\cdot10^{-3}$

Работа выхода электронов из металлов

	дж	*эв*
Платина	$8{,}48\cdot10^{-19}$	5,3
Цезий	$3{,}152\cdot10^{-19}$	1,97
Серебро	$7{,}584\cdot10^{-19}$	4,74
Вольфрам	$7{,}264\cdot10^{-19}$	4,54

Соотношение единиц Международной системы с единицами других систем и внесистемными единицами

Механические единицы

Единицы массы

1 *г* = 10^{-3} *кг*	1 *кг* = 10^{3} *г*
1 т. е. м. = 9,81 *кг*	1 *кг* = 0,102 т. е. м.
1 а. е. м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *кг*	1 кг = $6{,}02 \cdot 10^{26}$ а. е. м.

Единицы силы

1 *дина* = 10^{-5} *н*	1 *н* = 10^{5} *дин*
1 *кГ* = 9,81 *н*	1 *н* = 0,102 *кГ*

Единицы работы, энергии, теплоты

1 *эрг* = 10^{-7} *дж*	1 *дж* = 10^{7} *эрг*
1 *кГм* = 9,81 *дж*	1 *дж* = 0,102 *кГм*
1 *кал* = 4,19 *дж*	1 *дж* = 0,239 *кал*
1 *вт. ч* = $3{,}6 \cdot 10^{3}$ *дж*	1 *дж* = $2{,}78 \cdot 10^{-4}$ *вт·ч*
1 *эв* = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ *дж*	1 дж = $6{,}25 \cdot 10^{18}$ *эв*

Единицы мощности

1 *эрг/сек* = 10^{-7} *вт*	1 *вт* = 10^{7} *эрг/сек*
1 *кГм/сек* = 9,81 *вт*	1 *вт* = 0,102 *кГм/сек*
1 *л. с.* = 736 *вт*	1 *вт* = $1{,}36 \cdot 10^{-3}$ *л. с.*

Единицы давления

1 *дн/см*^{2} = 0,1 *н/м*^{2}	1 *н/м*^{2} = 10 *дн/см*^{2}
1 *кГ/м*^{2} = 9,81 *н/м*^{2}	1 *н/м*^{2} = 0,102 *кГ/м*^{2}
1 *ат* (1 *кГ/см*^{2}) = $9{,}81 \cdot 10^{4}$ *н/м*^{2}	1 *н/м*^{2} = $1{,}02 \cdot 10^{-5}$ *ат*
1 *атм* = $1{,}01 \cdot 10^{5}$ *н/м*^{2}	1 *н/м*^{2} = $9{,}87 \cdot 10^{-6}$ *атм*
1 *мм рт.ст.* = 133 *н/м*^{2}	1 *н/м*^{2} = $7{,}50 \cdot 10^{-3}$ *мм рт.ст.*

Электромагнитные единицы

Единицы заряда

$$1\ СГСЕ_q = \frac{1}{3 \cdot 10^9}\ к \qquad 1\ к = 3 \cdot 10^9\ СГСЕ_q$$

Единицы разности потенциалов, напряжения электродвижущей силы

$$1\ СГСЕ_U = 300\ в \qquad 1в = \frac{1}{300}\ СГСЕ_U$$

Единицы напряженности электрического поля

$$1\ СГСЕ_E = 3\cdot 10^4\ в/м \qquad 1\ в/м = \frac{1}{3}\cdot 10^{-4}\ СГСЕ_E$$

$$1\ в/см = 100\ в/м \qquad 1\ в/м = 10^{-2}\ в/см$$

Единицы электрической емкости

$$1\ см = \frac{1}{9}\cdot 10^{-11}\ ф \qquad 1\ ф = 9\cdot 10^{11}\ см$$

Единицы магнитного потока

$$1\ мкс = 10^{-8}\ вб \qquad 1\ вб = 10^{8}\ мкс$$

Единицы магнитной индукции

$$1\ гс = 10^{-4}\ тл \qquad 1\ тл = 10^{4}\ гс$$

Единицы индуктивности

$$1\ см = 10^{-9}\ гн \qquad 1\ гн = 10^{9}\ см$$

Единицы напряженности магнитного поля

$$1\ э = \frac{1}{4\pi}\cdot 10^{3}\ а/м \qquad 1\ а/м = 4\pi\cdot 10^{-3}\ э$$

СОДЕРЖАНИЕ

Методические указания к решению задач

Механика

Молекулярная физика и теплота

Электричество

Оптика. Строение атома

Задачи повышенной трудности

Решение задач повышенной трудности

Семен Устимович Гончаренко,
канд. пед. наук

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Редактор издательства *Т. И. Чумаченко*
Переплет художника *В. В. Руденка*
Художественные редакторы *Б. В. Валуенко, Ю. Б. Бабаков*
Технический редактор *Н. И. Возный*
Корректоры *А. С. Хурсина, Т. Е. Царинская*

Сдано в набор 4.IV-1966 г. Подписано к печати 23.IX-1966 г. Формат бумаги $84 \times 108^1/_{32}$. Объем: 13,5 физ. л.; 22,68 усл. л.; 23,58 уч.-изд. л. Тираж 60 000. БФ 00829. Зак. № 569.
Цена 98 коп.

Издательство «Техніка», Киев, 4, Пушкинская, 28.

Отпечатано с матриц Киевской фабрики набора на Киевской книжной фабрике Комитета по печати при Совете Министров УССР, ул. Воровского, 24.

98 коп.

ТЕХНІКА