А. Д. ПОЛЯНИН, А. В. ВЯЗЬМИН, А. И. ЖУРОВ, Д. А. КАЗЕНИН

СПРАВОЧНИК
ПО ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

МОСКВА
«ФАКТОРИАЛ»
1998

ББК 31.31
П-54
УДК 536+532

П-54 Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. **Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса.** — М.: Факториал, 1998. — 368 с. — ISBN 5-88688-023-2.

Книга представляет собой справочник по точным решениям линейных и нелинейных уравнений тепло- и массопереноса. Приводятся точные решения стационарных и нестационарных уравнений теплопроводности как с постоянными, так и с переменными коэффициентами для различных начальных и граничных условий. Подробно представлены решения одномерных, двумерных и трехмерных задач теплопроводности твердых тел различной формы. Описаны точные аналитические решения задач конвективной теплопроводности в каналах, трубах и др. Рассматривается тепло- и массоперенос в областях различной формы при наличии объемной или поверхностной химической реакции. Указаны новые точные решения нелинейных уравнений тепло- и массопереноса и теории горения.

Справочник предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в области тепло- и массообмена, теплофизики, математической физики, гидродинамики, механики дисперсных систем, химической технологии, метеорологии и биомеханики.

Табл. 3. Библиогр. 95 назв.

РФФИ

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 97-0230029

ISBN 5-88688-023-2

Оглавление

Предисловие

В справочнике в систематизированном виде представлены точные решения стационарных и нестационарных уравнений тепло- и массопереноса с постоянными и переменными коэффициентами. Рассматриваются как линейные, так и нелинейные уравнения. Приведены решения одномерных, двумерных и трехмерных задач теплопроводности твердых тел различной формы. Описаны некоторые точные решения внутренних и внешних задач конвективного тепло- и массопереноса. Рассмотрены задачи с объемной и поверхностной химической реакцией.

Во введении формулируются основные уравнения и граничные условия теории тепло- и массопереноса. В последующих главах книги даются краткие математические формулировки соответствующих задач тепло- и массопереноса, после которых сразу приводятся их решения (при этом метод решения, как правило, не излагается, а даются необходимые ссылки). Такой подход упрощает восприятие текста и приводит к расширению возможного круга читателей. В некоторых случаях формулируются только уравнения тепло- и массопереноса, после чего выписываются их точные решения. Рассмотрен также ряд вспомогательных уравнений, к которым приводятся уравнения теплопроводности. В справочник включено много новых точных решений нелинейных уравнений тепло- и массопереноса и теории горения.

В книге рассматриваются только те задачи тепло- и массопереноса, которые могут быть описаны одним уравнением (кроме разд. 1.1.11). В случае задач конвективного тепло- и массопереноса это означает, что распределение скоростей жидкости считается известным из решения соответствующей гидродинамической задачи. Уравнения стационарного теплового (диффузионного) пограничного слоя, которые относятся к уравнениям параболического типа, рассмотрены в разд. 1.1.8, 1.1.10 и 3.1.4.

В конце книги имеется приложение, в котором описан аналитический метод решения дифференциальных уравнений с помощью специализированного программного пакета CONVODE (читатели могут использовать возможности этого пакета по электронной почте).

Расположение разделов книги отвечает принципу «от простого к сложному». Такой подход существенным образом облегчает работу с материалом. Достаточно подробное оглавление поможет читателю находить нужную информацию. При ссылках в тексте на конкретные уравнения запись вида «3.1.4.5» означает «уравнение 5 из раздела 3.1.4».

Следует подчеркнуть, что точные решения играют огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей различных тепловых и диффузионных процессов. Точные решения нелинейных уравнений позволяют разобраться в механизме таких важных и сложных физических явлений, как пространственная локализация процессов теплопереноса, режимы с обострением, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях. Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи тепло- и массопереноса, не имеющие точного аналитического решения.

Отметим, что работа по поиску и построению новых точных решений линейных и нелинейных уравнений тепло- и массопереноса частично финансировалась в рамках исследовательских грантов РФФИ 96-03-33574 и 97-02-17648.

Авторы благодарны проф. А. Мусьё, который написал приложение о системе CONVODE, и признательны О. А. Васильевой за полезные замечания по рукописи книги.

Авторы надеются, что справочник окажется полезным для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в области тепло- и массообмена, теплофизики, математической физики, геофизики, гидродинамики, механики дисперсных систем, химической технологии, метеорологии и биомеханики.

Авторы

Некоторые обозначения

1. В книге при записи исходных уравнений тепло- и массопереноса температура обозначается через T, время — через t, а пространственные декартовы координаты — через x, y, z (или x_1, x_2, x_3).

2. Обозначения для обыкновенных производных функции $f = f(x)$:

$$f'_x \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''_{xx} \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f'''_{xxx} \equiv \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad \text{а далее} \quad f_x^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{при } n \geqslant 4.$$

3. Для частных производных в ряде случаев используются краткие обозначения типа $\partial_t T \equiv \dfrac{\partial T}{\partial t}$ и $\partial_{xx} T \equiv \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

4. Дифференциальные операторы (в декартовых координатах):

$\nabla T = \vec{e}_x \dfrac{\partial T}{\partial x} + \vec{e}_y \dfrac{\partial T}{\partial y} + \vec{e}_z \dfrac{\partial T}{\partial z}$ — градиент температуры,

$\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$ — дивергенция вектора $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$,

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа (см. также приложение 1).

5. В ряде случаев используется операторное обозначение $\left(f \dfrac{d}{dx}\right)^n g$, которое действует следующим образом:

$$\left(f(x)\frac{d}{dx}\right)^n g(x) = f(x)\frac{d}{dx}\left[\left(f(x)\frac{d}{dx}\right)^{n-1} g(x)\right].$$

6. Используются следующие обозначения специальных функций:

$\operatorname{erf} x = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp(-\xi^2)\, d\xi$ — интеграл вероятностей,

$\operatorname{erfc} x = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_x^\infty \exp(-\xi^2)\, d\xi$ — дополнительный интеграл вероятностей,

$I_\nu(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода,

$J_\nu(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$ — функция Бесселя 1-го рода,

$K_\nu(x) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\pi\nu)}$ — модифицированная функция Бесселя 2-го рода,

$Y_\nu(x) = \dfrac{J_\nu(x)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$ — функция Бесселя 2-го рода,

$\gamma(\alpha, x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\xi} \xi^{\alpha-1}\, d\xi$ — неполная гамма-функция,

$\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\alpha-1}\, d\xi$ — гамма-функция,

$\Phi(\alpha, \beta; x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)} \frac{x^n}{n!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Введение

В1. Уравнения теории тепло- и массопереноса

В этом разделе дан краткий перечень основных уравнений, которые используются при математической постановке задач теории тепло- и массопереноса. Более детальное изложение вопросов, связанных с выводом и установлением области применимости этих уравнений, физические модели различных явлений и процессов, а также прикладные аспекты использования результатов решения соответствующих задач, содержатся в книгах, указанных в конце разд. В1.

В1.1. Теплопроводность твердых тел

1. Уравнения с постоянным коэффициентом температуропроводности. Перенос тепла в твердом теле (неподвижной среде) в прямоугольной декартовой системе координат описывается дифференциальным уравнением с частными производными вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

где T — температура, t — время, a — коэффициент температуропроводности; x, y, z — пространственные координаты. При наличии разности температур в твердом теле или неподвижной жидкости (газе) это уравнение описывает процесс выравнивания температуры в соответствующей среде за счет молекулярной теплопроводности.

Коэффициент температуропроводности определяется по формуле $a = \dfrac{\lambda}{\rho c_p}$, где λ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, а c_p — удельная теплоемкость тела. При записи уравнения (1) предполагалось, что коэффициент λ и произведение ρc_p — постоянные величины, что соответствует $a = \text{const}$.

Простейшее одномерное нестационарное уравнение теплопроводности соответствует частному случаю, когда температура не зависит от координат y и z (т. е. теплоперенос происходит лишь вдоль координаты x); при этом в правой части уравнения (1) остается только первое слагаемое в круглых скобках.

Плоская нестационарная задача теплопроводности соответствует случаю, когда температура не зависит только от одной координаты, например, z. При этом в правой части уравнения (1) следует опустить последнее слагаемое в круглых скобках.

В цилиндрической и сферической системах координат нестационарное уравнение теплопроводности (1) соответственно принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right], \tag{3}$$

где ϱ, φ, z — цилиндрические, а r, θ, φ — сферические координаты; $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Для краткости часто уравнение теплопроводности записывают следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \tag{4}$$

где Δ — оператор Лапласа, вид которого для прямоугольных, цилиндрических и сферических координат определяется из сопоставления уравнения (4) с уравнениями (1)–(3).

Аналогичным образом выглядит уравнение массопереноса

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\Delta C, \tag{5}$$

которое используется для описания нестационарной диффузии растворенного вещества в неподвижной жидкости (среде). В уравнение (5) входит концентрация примеси C и коэффициент диффузии D.

Дифференциальные уравнения (4) и (5) совпадают с точностью до очевидных переобозначений. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только уравнение (4) и называть его уравнением тепло- и массопереноса. (Сказанное распространяется и на соответствующие более сложные уравнения с источниковыми или конвективными членами.)

Если процесс тепло- и массопереноса является установившимся (стационарным) и температура T не зависит от времени t, то в левой части соответствующих уравнений (1)–(4) следует положить $\partial T/\partial t \equiv 0$. В этом случае процесс переноса будет описываться стационарным дифференциальным уравнением в частных производных

$$\Delta T = 0,$$

которое называют уравнением Лапласа.

2. Уравнения с переменным коэффициентом температуропроводности. В практических приложениях могут возникать ситуации, когда коэффициент температуропроводности a не является постоянной величиной. В этом случае вместо уравнения (1) следует использовать более общее уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{6}$$

Если $a = a(x, y, z)$, то уравнение (6) будет линейным уравнением в частных производных с переменными коэффициентами. Если коэффициент температуропроводности зависит от температуры, т. е. $a = a(T)$, то уравнение (6) является нелинейным уравнением в частных производных.

Для произвольной ортогональной системы координат уравнение (6) можно представить в операторной форме

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(a \nabla T).$$

Операторы дивергенции и градиента в некоторых системах координат приведены в приложении 1.

3. Уравнение для анизотропных твердых тел. В случае анизотропных твердых тел, когда коэффициенты температуропроводности различаются в разных направлениях, соответствующее уравнение тепло- и массопереноса в декартовой системе координат (связанной с главными осями теплопроводности) может быть записано в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2 \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a_3 \frac{\partial T}{\partial z}\right), \tag{7}$$

где a_1, a_2, a_3 — главные коэффициенты температуропроводности. Если $a_n = a_n(x, y, z)$, $n = 1, 2, 3$, то уравнение (7) будет линейным уравнением в частных производных с переменными коэффициентами.

В стационарных задачах тепло- и массопереноса в уравнениях (6) и (7) следует положить $\partial T / \partial t \equiv 0$.

В1.2. Уравнение тепло- и массопереноса при наличии источников (стоков) тепла

Перенос тепла в неподвижной среде (твердом теле) может осложняться наличием объемных источников или стоков тепла; возникновение последних может быть обусловлено различными физико-химическими механизмами поглощения или выделения тепла. Линейное уравнение тепло- и массопереноса в этом случае записывается в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \Phi(x, y, z, t), \tag{8}$$

где функция источника $\Phi(x, y, z, t)$ пропорциональна количеству тепла, выделяемого или поглощаемого в единицу времени в рассматриваемом объеме. При $\Phi > 0$ говорят о наличии объемных источников тепла, а при $\Phi < 0$ — о стоках тепла.

Стационарное распределение температуры при наличии источников (стоков) тепла в рассматриваемой области описывается уравнением Пуассона

$$a \Delta T + \Phi(x, y, z) = 0. \tag{9}$$

В теории горения и неизотермической макрокинетике сложных химических реакций часто встречаются ситуации, когда мощность источников (стоков) тепла зависит от температуры. В этих случаях уравнение тепло- и массопереноса является нелинейным и имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \Phi(T). \tag{10}$$

В теории горения кинетическая функция $\Phi(T)$ часто имеет экспоненциальный вид. В макрокинетике сложных реакций используются степенные, логарифмические и другие зависимости.

В общем случае вместо $\Phi(T)$ в правой части уравнения (10) может стоять функция $\Phi(x, y, z, t, T)$.

Значительный интерес представляет случай массопереноса, когда мощность источников или стоков вещества пропорциональна концентрации, что соответствует процессам переноса массы при наличии объемной химической реакции первого порядка. В этом случае в терминах массопереноса уравнение (10) переписывается в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\Delta C + KC, \tag{11}$$

где K — константа скорости химической реакции. Случай $K > 0$ соответствует выделению вещества в процессе реакции, а $K < 0$ — поглощению.

Стационарный массоперенос при наличии объемной химической реакции первого порядка описывается уравнением Гельмгольца

$$D\Delta C + KC = 0. \tag{12}$$

В общем случае произвольной зависимости скорости объемной химической реакции от концентрации в уравнениях (11) и (12) вместо произведения KC должна стоять функция $F(C)$.

Следует отметить, что при наличии физических предпосылок правые части уравнений с переменными коэффициентами температуропроводности (6) и (7) также могут содержать дополнительный источниковый член. Например, обобщение уравнения (7) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2 \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a_3 \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \Phi(T).$$

В одномерном случае, когда температура не зависит от координат y и z, в правой части уравнения остаются только первое и последнее слагаемое.

В1.3. Уравнение конвективного тепло- и массопереноса

При рассмотрении уравнения конвективного тепло- и массопереноса считаем, что плотность и вязкость среды не зависят от температуры и, следовательно, распределение температуры не оказывает влияния на поле течения. Это приводит к возможности независимого анализа тепловой задачи, а необходимая для ее решения информация о поле скоростей жидкости предполагается известной из решения соответствующей гидродинамической задачи. Примем, что коэффициент температуропроводности не зависит от температуры.

В декартовой системе координат x, y, z перенос тепла в жидкости при отсутствии источников и стоков обычно описывают уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{13}$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости жидкости, которые считаются заданными.

Уравнение (13) отражает тот факт, что перенос тепла в движущейся среде обусловлен двумя различными физическими механизмами. Во-первых, при наличии разности температур в жидкости или газе идет процесс молекулярного теплопереноса, способствующий выравниванию температуры; во-вторых, тепло переносится самой движущейся средой. Совокупность обоих процессов обычно называют конвективной теплопроводностью.

Уравнение (13) для краткости часто записывают в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = a \Delta T, \tag{14}$$

где ∇ — оператор Гамильтона, Δ — оператор Лапласа, явный вид которых в декартовой системе координат x, y, z определяется путем сопоставления (13) и (14).

Для решения многих конкретных задач вместо декартовых координат x, y, z часто используют цилиндрические ϱ, φ, z или сферические r, θ, φ координаты. Дифференциальный оператор, описывающий конвективный перенос тепла в этих системах координат, имеет вид:
в цилиндрической системе координат:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) T = v_\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho} + \frac{v_\varphi}{\varrho} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z},$$

в сферической системе координат:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) T = v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi}.$$

Еще раз отметим, что уравнение конвективного массопереноса (иначе, уравнение конвективной диффузии) с точностью до очевидных переобозначений совпадает с уравнением конвективного теплопереноса (14).

Полагая в (14) $\partial T/\partial t \equiv 0$ получаем уравнение стационарного конвективного тепло- и массопереноса

$$(\vec{v} \cdot \nabla) T = a \Delta T.$$

Для анализа уравнений конвективного тепло- и массопереноса часто используют безразмерные величины

$$\tau = \frac{at}{l^2}, \quad X = \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{l}, \quad Z = \frac{z}{l}, \quad T_* = \frac{T}{T_\mathrm{i}},$$
$$V_x = \frac{v_x}{U}, \quad V_y = \frac{v_y}{U}, \quad V_z = \frac{v_z}{U}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{lU}{a},$$

где l, U, T_i — характерные масштабы длины, скорости жидкости и температуры. Это позволяет представить уравнение (14) в безразмерном виде

$$\frac{\partial T_*}{\partial \tau} + \mathrm{Pe}\,(\vec{V} \cdot \nabla_*)T_* = \Delta_* T_*, \tag{15}$$

где операторы ∇_*, Δ_* предполагают дифференцирование по безразмерным координатам.

Важно отметить, что в приложениях при расчете тепло- и массопереноса вблизи межфазных границ при больших значениях чисел Пекле Pe уравнение (15) часто используют в приближении теплового (а уравнение массопереноса — диффузионного) пограничного слоя. В этом случае основное сопротивление теплопереносу (массопереносу) сосредоточено в тонком тепловом (диффузионном) пограничном слое вблизи межфазной границы. Это означает, что в этой области можно пренебречь молекулярным переносом тепла (массы) по сравнению с конвективным в направлении течения, но тем не менее необходимо учитывать молекулярный перенос тепла (массы) в направлении, ортогональном направлению течения жидкости.

Уравнение конвективной теплопроводности может быть обобщено на случай, когда коэффициент температуропроводности зависит от пространственных координат и температуры, а также на случай, когда в объеме движущейся среды имеются источники (стоки) тепла. Такое обобщение проводится аналогично тому, как это делалось в случае неподвижной среды (твердого тела) в разд. В1.1, В1.2.

В1.4. Гиперболические уравнения тепло- и массопереноса

Все рассмотренные ранее уравнения нестационарного тепло- и массопереноса (1)–(8), (10), (11), (13), (14) являются дифференциальными уравнениями с частными производными параболического типа. Эти уравнения обычно выводятся в предположении о мгновенной релаксации теплового (диффузионного) потока. Для тепловых и диффузионных волн такое допущение не всегда выполняется, поэтому, в таких случаях в неподвижной среде (твердом теле) перенос тепла надо описывать уже не уравнением (4), а дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a\Delta T, \tag{16}$$

где $\varepsilon > 0$ — характерное время релаксации теплового потока. Наличие второй производной по времени позволяет описать волновой характер распространения тепла в твердом теле и избежать физического парадокса (бесконечная скорость распространения тепла), связанного с описанием процессов тепло- и массопереноса линейными уравнениями параболического типа.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (16) переходит в уравнение (4). При $\varepsilon > 0$ преобразование

$$T(x,y,z,t) = \exp\Bigl(-\frac{1}{2\varepsilon}t\Bigr)w(x,y,z,t) \tag{17}$$

приводит (16) к уравнению гиперболического типа, не содержащему первую производную:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{a}{\varepsilon}\Delta w + \frac{1}{4\varepsilon^2}w. \tag{18}$$

Уравнение (16) допускает те же обобщения, что и все рассмотренные ранее уравнения нестационарного тепло- и массопереноса параболического типа. При этом в левой части уравнений (6)–(8), (10), (13), (14) производная $\frac{\partial T}{\partial t}$ заменяется суммой $\frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$. В полученных таким образом уравнениях тепло- и массопереноса гиперболического типа преобразование (17) позволяет исключить первую производную по времени.

Отметим, что уравнения гиперболического типа достаточно редко встречаются при моделировании процессов тепло- и массопереноса. Точные решения уравнений гиперболического типа можно найти, например, в книгах В. М. Бабича, М. Б. Капилевича, С. Г. Михлина и др. (1964), А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1996). В данном справочнике приведены только некоторые новые нелинейные уравнения гиперболического типа (см. разд. 3.1.5), которые дополняют результаты вышеупомянутых книг.

⊙ Литература к разд. В1.1–В1.4: В. Г. Левич (1959), Г. Карслоу, Д. Егер (1964), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. В. Лыков (1967), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), Р. Берд, В. Стьюарт, Е. Лайтфут (1974), А. В. Лыков, Б. М. Берковский (1974), Г. А. Аксельруд, А. Д. Молчанов (1977), С. С. Кутателадзе (1979), С. И. Исаев, И. А. Кожинов, В. И. Кофанов и др. (1979), Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе (1980), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), Д. А. Франк-Каменецкий (1987), Р. И. Нигматулин (1987), В. В. Дильман, А. Д. Полянин (1988), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

В2. Начальное и граничные условия

В2.1. Начальное условие

Любое из уравнений тепло- и массопереноса, которые приведены в разд. В1, описывает некоторый класс качественно аналогичных физических явлений (процессов). В каждый такой класс входит бесконечное множество различных явлений. Это обстоятельство является следствием того, что дифференциальные уравнения в частных производных имеют бесконечное множество частных решений. Конкретное решение, описывающее рассматриваемое физическое явление, выделяется из множества частных решений данного уравнения тепло- и массопереноса с помощью начального и граничных условий.

Будем считать, что имеется конкретное уравнение тепло- и массопереноса параболического типа, которое рассматривается в (открытой) пространственной области V. Обозначим через S границу области V.

Начальное условие имеет вид

$$T = f(\vec{x}) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad (\vec{x} \in V) \tag{1}$$

и задает распределение температуры в области V в начальный момент времени $t = 0$. В начальном условии $f(\vec{x})$ считается известной функцией точки физического пространства, характеризуемой радиус-вектором $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Для стационарных (установившихся) процессов, т. е. таких процессов, когда распределение температуры не меняется во времени, начальные условия не задаются (в этом нет необходимости).

Замечание. Для гиперболического уравнения теплопроводности (см. разд. В1.4) помимо условия (1) требуется выставлять второе начальное условие — для первой производной температуры по времени.

В2.2. Граничные условия

Граничные условия определяют особенности протекания процесса тепло- и массопереноса на границе S области V.

В этом разделе дан краткий перечень граничных условий, которые используются при математической постановке задач теории тепло- и массопереноса. Детальное изложение вопросов, связанных с выводом и установлением области применимости указанных ниже граничных условий, физические модели различных явлений и процессов и прикладные аспекты решения соответствующих задач содержатся в книгах, указанных в конце разд. В2. В литературе принято выделять пять основных типов граничных условий, которые описаны ниже.

1. Граничные условия первого рода. Требуется найти решение рассматриваемого уравнения, когда температура $T = T(\vec{x}, t)$ принимает заданные значения на границе области S:

$$T = g(\vec{x}, t) \quad \text{для} \quad \vec{x} \in S. \tag{2}$$

В условии (2) функция $g(\vec{x}, t)$ считается известной для каждого момента времени $t > 0$.

В частном случае, когда температура поверхности тела не изменяется во времени и одинакова во всех точках S, в формуле (2) имеем $g = \text{const}$. Это условие часто встречается в задачах конвективного массообмена твердых частиц, капель и пузырей с потоком.

Уравнение тепло- и массопереноса вместе с начальным условием (1) и граничными условиями первого рода (2) называют *первой краевой задачей*.

Отметим, что в задачах массопереноса граничное условие (2) при $g \equiv 0$ соответствует условию полного поглощения растворенного в жидкости вещества на поверхности S (т. е. бесконечной скорости поверхностной химической реакции).

2. Граничные условия второго рода. На границе S задается локальный тепловой поток q в виде равенства $q = G(\vec{x}, t)$, где $G(\vec{x}, t)$ — известная функция. Выражая локальный тепловой поток через градиент температуры с помощью закона Фурье $q = -\lambda \partial T/\partial n$, получим граничные условия второго рода

$$\frac{\partial T}{\partial n} = g(\vec{x}, t) \quad \text{для} \quad \vec{x} \in S. \tag{3}$$

Здесь $\partial/\partial n$ — производная по (внешней) нормали к поверхности S, функция $g(\vec{x}, t) = -G/\lambda$ считается известной для каждого момента времени $t > 0$.

В частном случае, при нагревании металлических изделий в высокотемпературных печах, в формуле (3) имеем $g = \text{const}$.

Уравнение тепло- и массопереноса вместе с начальным условием (1) и граничными условиями второго рода (3) называют *второй краевой задачей*.

3. Граничные условия третьего рода. На границе области S задана линейная связь между температурой и ее производной по нормали:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -k\bigl[T - g(\vec{x}, t)\bigr] \quad \text{для} \quad \vec{x} \in S. \tag{4}$$

Граничные условия третьего рода характеризуют теплообмен по закону Ньютона между телом (которое занимает область V) и окружающей средой. При записи выражения (4) предполагалось, что температура внешней (окружающей) среды $T_{\rm i} = g(\vec{x}, t)$ известна в каждой точке поверхности S. Коэффициент пропорциональности $k = \alpha/\lambda$, где α — коэффициент теплоотдачи, называется относительным коэффициентом теплоотдачи.

В предельном случае $k \to \infty$ (для высокоинтенсивной теплоотдачи) граничные условия третьего рода (4) переходят в граничные условия первого рода (2).

Уравнение тепло- и массопереноса вместе с начальным условием (1) и граничными условиями третьего рода (4) называют *третьей краевой задачей*.

Отметим, что в задачах массопереноса граничное условие (4) при $g \equiv 0$ соответствует поверхностной химической реакции первого порядка.

Замечание. При $g \equiv 0$ соответствующие граничные условия (2)–(4) называются однородными.

4. Смешанные граничные условия. В этом случае на разных участках границы S задаются условия различных типов, перечисленные выше в пп. 1, 2 и 3. В качестве смешанных граничных условий могут, например, рассматриваться условия, когда на одной части поверхности тела задается температура, а на другой — тепловой поток.

Уравнение тепло- и массопереноса вместе с начальным условием (1) и смешанными граничными условиями называют *смешанной краевой задачей*.

5. Сопряженные граничные условия. Рассмотрим две области V_1 и V_2 с общей границей S, заполненные разными средами. Каждая среда характеризуется своими коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_2 и описывается соответствующими (различными) уравнениями тепло- и массопереноса. Условия теплового равновесия на границе раздела имеют вид

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 && \text{при} \quad \vec{x} \in S, \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} && \text{при} \quad \vec{x} \in S. \end{aligned} \tag{5}$$

Сопряженные граничные условия (5) состоят из двух независимых граничных условий, первое из которых выражает равенство температур, а второе — равенство тепловых потоков на границе раздела фаз. Сопряженные граничные условия иногда называют граничными условиями четвертого рода. Они характеризуют тепловое взаимодействие на границе раздела двух фаз (например, на границе двух твердых тел, двух жидкостей или твердого тела и жидкости) без изменения агрегатного состояния.

Замечание. Задачи стефановского типа, требующие формулировки специальных условий на подвижной границе, в книге не рассматриваются.

⊙ Литература к разд. В2: В. Г. Левич (1959), Г. Карслоу, Д. Егер (1964), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. В. Лыков (1967), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), Р. Берд, В. Стьюарт, Е. Лайтфут (1974), А. А. Гухман (1974), С. С. Кутателадзе (1979), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), Э. М. Карташов (1985), Д. А. Франк-Каменецкий (1987), В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев, И. Р. Шрейбер (1990), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

В3. Структура решений линейных нестационарных задач тепло- и массопереноса

В3.1. Свойства решений линейных уравнений

1. Линейные однородные уравнения. Для краткости в данном разделе линейные однородные уравнения тепло- и массопереноса будем записывать в виде

$$\mathbf{L}[T] = 0. \tag{1}$$

Линейный дифференциальный оператор с частными производными $\mathbf{L}$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{L}[T] \equiv \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(\vec{x}, t) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{3} b_i(\vec{x}, t) \frac{\partial T}{\partial x_i} - c(\vec{x}, t) T, \tag{2}$$

где $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Линейный оператор $\mathbf{L}$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}[T_1 + T_2] = \mathbf{L}[T_1] + \mathbf{L}[T_2], \\ &\mathbf{L}[AT] = A\,\mathbf{L}[T], \quad A = \text{const}. \end{aligned}$$

Произвольное линейное однородное уравнение (1) имеет тривиальное решение $T \equiv 0$.

Отметим теперь некоторые свойства частных решений однородного уравнения (1).

1°. Если $T_1 = T_1(\vec{x}, t)$, $T_2 = T_2(\vec{x}, t)$, …, $T_n = T_n(\vec{x}, t)$ — любые частные решения однородного уравнения (1), то линейная комбинация

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + \cdots + A_n T_n$$

с произвольными постоянными $A_1, A_2, \ldots, A_n$ также является решением данного уравнения (в физике это свойство называют *принципом линейной суперпозиции*).

2°. Пусть коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ не зависят от времени t, т. е. $a_{ij} = a_{ij}(\vec{x})$, $b_i = b_i(\vec{x})$, $c = c(\vec{x})$, и уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{T} = \tilde{T}(\vec{x}, t)$. Тогда другими решениями уравнения (1) будут являться также частные производные этой функции по времени*

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n \tilde{T}}{\partial t^n}, \quad \ldots$$

Замечание. В рассматриваемом случае уравнение (1) имеет частные решения с разделяющимися переменными вида $\tilde{T}_*(\vec{x}, t) = e^{\mu t} F(\vec{x}, \mu)$, где μ — некоторый параметр. Значению $\mu = 0$ соответствует стационарное решение.

3°. Пусть коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ не зависят от пространственных координат x_1, x_2, x_3, т. е. $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $b_i = b_i(t)$, $c = c(t)$, и уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{T} = \tilde{T}(\vec{x}, t)$. Тогда другими решениями уравнения (1) будут являться также любые частные производные от этого решения по пространственным координатам, например:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n+m} \tilde{T}}{\partial x_2^n \partial x_3^m}, \quad \ldots$$

Если коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ не зависят только от одной пространственной координаты, например, x_1, и уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{T} = \tilde{T}(\vec{x}, t)$, то другими решениями этого уравнения будут частные производные от функции $\tilde{T}$ по координате x_1:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_1^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n \tilde{T}}{\partial x_1^n}, \quad \ldots$$

4°. Пусть коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ постоянны, т. е. $a_{ij} = \mathrm{const}$, $b_i = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$, и уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{T} = \tilde{T}(\vec{x}, t)$. Тогда другими решениями данного уравнения будут являться любые частные производные от этого решения по времени и пространственным координатам (включая и смешанные производные), например:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t \partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n \tilde{T}}{\partial x_3^n}, \quad \ldots$$

5°. Пусть частное решение уравнения (1) зависит от параметра μ, т. е. $\tilde{T} = \tilde{T}(\vec{x}, t; \mu)$, а коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ не зависят от этого параметра (но могут зависеть от времени и пространственных координат). Тогда другие решения уравнения (1) будут являться частными производными данного решения по параметру μ:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \mu^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n \tilde{T}}{\partial \mu^n}, \quad \ldots$$

---

* Здесь и далее предполагается, что частное решение $\tilde{T}$ достаточное число раз дифференцируемо по соответствующим временной или пространственным переменным (или параметрам).

Пусть постоянные $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ принадлежат области допустимых значений параметра μ. Тогда сумма

$$A_1\tilde{T}(\vec{x},t;\mu_1) + A_2\tilde{T}(\vec{x},t;\mu_2) + \cdots + A_n\tilde{T}(\vec{x},t;\mu_n),$$

где A_1, A_2, $\ldots$, A_n — произвольные постоянные, также является решением линейного однородного уравнения (1). Указанная сумма может содержать как конечное, так и бесконечное число слагаемых.

Другой более эффективный способ построения точных решений заключается в следующем. Частное решение $\tilde{T}(\vec{x},t;\mu)$, зависящее от параметра μ (как и ранее, считается, что коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ не зависят от μ) сначала умножается на произвольную функцию $\varphi(\mu)$, а затем полученное произведение интегрируется по параметру μ по некоторому отрезку $[\alpha,\beta]$. В результате получают функцию

$$\int_\alpha^\beta \tilde{T}(\vec{x},t;\mu)\varphi(\mu)\,d\mu,$$

которая также является точным решением исходного линейного однородного уравнения.

Свойства, описанные в пп. 1°–5°, позволяют получать с помощью известных частных решений другие новые точные решения линейных однородных уравнений тепло- и массопереноса.

Замечание. Уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{M}\,[T],$$

где $\mathbf{M}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (любого) порядка, зависящий только от пространственных переменных, имеет решение в виде ряда

$$T(\vec{x},t) = f(\vec{x}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathbf{M}^n[f(\vec{x})], \qquad \mathbf{M}^n[f] = \mathbf{M}\left[\mathbf{M}^{n-1}[f]\right].$$

Это решение удовлетворяет начальному условию $T(\vec{x},0) = f(\vec{x})$.

2. Линейные неоднородные уравнения. Линейные неоднородные уравнения тепло- и массопереноса имеют вид

$$\mathbf{L}[T] = \Phi(\vec{x},t), \tag{3}$$

где линейный дифференциальный оператор $\mathbf{L}$ определен выражением (2).

Если известно частное решение $\tilde{T}_\Phi(\vec{x},t)$ неоднородного уравнения (3) и частное решение $\tilde{T}_0(\vec{x},t)$ соответствующего однородного уравнения (1), то сумма $A\tilde{T}_0(\vec{x},t) + \tilde{T}_\Phi(\vec{x},t)$, где A — произвольная постоянная, также будет решением неоднородного уравнения (3). Справедливо более общее утверждение: общее решение неоднородного уравнения (3) является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (1) и любого частного решения неоднородного уравнения (3).

Отметим теперь некоторые свойства частных решений неоднородного уравнения (3).

1°. Пусть T_1 и T_2 — решения неоднородных линейных уравнений тепло- и массопереноса с одинаковой левой и разными правыми частями, т. е.

$$\mathbf{L}[T_1] = \Phi_1(\vec{x},t), \qquad \mathbf{L}[T_2] = \Phi_2(\vec{x},t).$$

Тогда функция $T = T_1 + T_2$ будет решением уравнения

$$\mathbf{L}[T] = \Phi_1(\vec{x},t) + \Phi_2(\vec{x},t).$$

2°. Пусть коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ не зависят от пространственных координат x_1, x_2, x_3, а правая часть неоднородного уравнения (3) зависит только от времени, т. е. $\Phi = \Phi(t)$. В этом случае частное решение уравнения (3) имеет вид $\tilde{T} = \tilde{T}(t)$. При $c \equiv 0$ это решение дается формулой

$$\tilde{T}(t) = A + \int \Phi(t)\,dt,$$

где A — произвольная постоянная.

3°. Пусть коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ не зависят от времени t, а правая часть неоднородного уравнения (3) зависит только от пространственных координат, т. е. $\Phi = \Phi(\vec{x})$. В этом случае частное решение уравнения (3) имеет вид $\tilde{T} = \tilde{T}(\vec{x})$.

Указанные свойства 1°–3° позволяют строить решения неоднородных уравнений тепло- и массопереноса.

В3.2. Однородное уравнение с неоднородным граничным условием. Интеграл Дюамеля

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения тепло- и массопереноса

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial T}{\partial x} + c(x)T \tag{4}$$

при следующих начальном и граничных условиях:

$$T = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)} \tag{5}$$

$$T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)} \tag{6}$$

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)} \tag{7}$$

Решение задачи (4)–(7) с нестационарным граничным условием (6) при $x = 0$ может быть выражено по формуле (первый интеграл Дюамеля)

$$T(x,t) = \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x, t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

через решение $W(x,t)$ вспомогательной задачи для уравнения (4) с начальным и граничным условиями (5) и (7) (в уравнении, начальном и граничном условиях следует заменить T на W) и более простым стационарным граничным условием при $x = 0$:

$$W = 1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)} \tag{8}$$

Указанную формулу можно использовать и при $l = \infty$.

Аналогичная формула будет справедлива для однородного граничного условия при $x = 0$ и неоднородного нестационарного граничного условия при $x = l$.

Замечание. В виде (4) может быть записано, например, одномерное нестационарное уравнение теплопроводности в различных системах координат при наличии объемного тепловыделения, линейно зависящего от температуры. Аналогичным образом выглядит также одномерное нестационарное уравнение конвективной диффузии с объемной химической реакцией первого порядка.

В3.3. Неоднородное уравнение с однородными начальным и граничными условиями. Функция Грина

1. Интеграл Дюамеля. Решение линейного неоднородного уравнения тепло- и массопереноса

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial T}{\partial x} + c(x)T + \Phi(x,t) \tag{9}$$

с однородными начальным и граничными условиями

$$T = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)} \tag{10}$$

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)} \tag{11}$$

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)} \tag{12}$$

может быть выражено по формуле (второй интеграл Дюамеля)

$$T(x,t)=\int_0^t U(x,\,t-\tau;\,\tau)\,d\tau \tag{13}$$

через решение $U(x,t;\tau)$ вспомогательной задачи для однородного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial U}{\partial x}+c(x)U$$

с граничными условиями (11) и (12) (в которых следует заменить T на U) и неоднородным начальным условием, зависящим от параметра τ:

$$U=\Phi(x,\tau)\quad \text{при}\quad t=0 \qquad \text{(начальное условие)} \tag{14}$$

Формулу (13) можно использовать и при $l=\infty$. Эта формула также будет справедлива для однородных граничных условий второго и третьего рода с однородным начальным условием (10). В этих случаях вспомогательная функция U должна удовлетворять начальному условию (14) и соответствующим однородным граничным условиям второго и третьего рода.

2. Функция Грина. Решение линейного неоднородного уравнения тепло- и массопереноса (9) в области $0<x<l$ с однородным начальным условием (10) и однородными граничными условиями (первого, второго и третьего рода) можно записать в виде

$$T(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{15}$$

где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина.

Физический смысл функции Грина. Для уравнения теплопроводности функция $G(x,\xi,t)$ представляет собой температуру, которая создана в точке x в момент времени t тепловым источником единичной интенсивности, сосредоточенным в точке ξ в момент времени $t=0$. Граничным условиям первого, второго и третьего рода отвечает своя функция Грина.

Методы построения и конкретный вид функций Грина для различных задач тепло- и массопереноса описаны в книгах, указанных в конце разд. В3.

В3.4. Линейные задачи массопереноса с объемной реакцией

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial T}{\partial x}-kT \tag{16}$$

с начальным и граничными условиями

$$T=0\quad \text{при}\quad t=0 \qquad \text{(начальное условие)} \tag{17}$$

$$T=T_0\quad \text{при}\quad x=0 \qquad \text{(граничное условие)} \tag{18}$$

$$T=T_l\quad \text{при}\quad x=l \qquad \text{(граничное условие)} \tag{19}$$

где k, T_0, T_l — некоторые постоянные.

Уравнение (16) часто встречается в задачах химической технологии, где параметр k играет роль константы скорости объемной химической реакции.

Решение задачи с объемной реакцией (16)–(19) можно выразить по формуле

$$T(x,t)=k\int_0^t e^{-k\tau}\tilde T(x,\tau)\,d\tau+e^{-kt}\tilde T(x,t)$$

через решение $\tilde T(x,t)$ более простого вспомогательного уравнения без объемной химической реакции

$$\frac{\partial \tilde T}{\partial t}=a(x)\frac{\partial^2 \tilde T}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial \tilde T}{\partial x} \tag{20}$$

с теми же начальным и граничными условиями (17)–(19) (в которых следует заменить T на $\tilde T$).

Указанную формулу можно использовать и при $l=\infty$.

В3.5. Преобразования, приводящие к однородным начальным и граничным условиям

1. Общие замечания. Линейную задачу тепло- и массопереноса с неоднородными начальными и граничными условиями можно свести к линейной задаче с однородными начальным и граничными условиями. Для этого следует ввести новую зависимую переменную по формуле

$$u(x,t) = T(x,t) - \psi(x,t), \tag{21}$$

где функция ψ должна удовлетворять неоднородным начальному и граничным условиям (выбор функции ψ носит чисто алгебраический характер и не связан с рассматриваемым уравнением). В результате для функции $u(x,t)$ получим неоднородное уравнение с измененной правой частью $\overline{\Phi}(x,t)$ с однородными начальным и граничными условиями. Решение этой задачи теперь можно представить с помощью функции Грина по формуле (15), в которой следует заменить T и Φ на u и $\overline{\Phi}$.

Следует отметить, что выбор функции ψ в преобразовании (21) не является однозначным.

Укажем теперь функцию ψ, которую можно использовать в преобразовании (21) для получения краевых задач с однородными начальным и граничными условиями.

2. Первая краевая задача:

$$\begin{array}{llll} T = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f(0) = g(0)$, $f(l) = h(0)$. Тогда в качестве функции ψ можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + g(t) - g(0) + \frac{x}{l}\big[h(t) - g(t) + g(0) - h(0)\big].$$

3. Вторая краевая задача:

$$\begin{array}{rlll} T = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T = g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T = h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f'(0) = g(0)$, $f'(l) = h(0)$. Тогда в качестве функции ψ можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + x\big[g(t) - g(0)\big] + \frac{x^2}{2l}\big[h(t) - g(t) + g(0) - h(0)\big].$$

Отметим, что в разд. 1.1.3 и 1.1.10 (см. уравнение 32) будут указаны другие полезные формулы, позволяющие с помощью функции Грина решать неоднородные уравнения с неоднородным начальным условием.

⊙ Литература к разд. В3: И. Г. Петровский (1961), Г. Карслоу, Д. Егер (1964), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. В. Лыков (1967), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), А. Г. Бутковский (1979), В. С. Владимиров (1988), Г. Корн, Т. Корн (1984), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996), D. Zwillinger (1989).

1. Линейные нестационарные уравнения тепло- и массопереноса

1.1. Уравнения с одной пространственной переменной

1.1.1. Уравнение $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Уравнение этого вида часто встречается в теории тепло- и массопереноса. Оно описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

1. **Точные решения** (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$T(x) = Ax + B,$$
$$T(x,t) = A(x^2 + 2at) + B,$$
$$T(x,t) = A(x^3 + 6atx) + B,$$
$$T(x,t) = A(x^4 + 12atx^2 + 12a^2t^2) + B,$$
$$T(x,t) = A(x^5 + 20atx^3 + 60a^2t^2x) + B,$$
$$T(x,t) = A(x^6 + 30atx^4 + 180a^2t^2x^2 + 120a^3t^3) + B,$$
$$T(x,t) = x^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)(2n-1)\ldots(2n-2k+1)}{k!}(at)^k x^{2n-2k},$$
$$T(x,t) = x^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)(2n)\ldots(2n-2k+2)}{k!}(at)^k x^{2n-2k+1},$$
$$T(x,t) = A\exp(a\mu^2 t \pm \mu x) + B,$$
$$T(x,t) = A\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) + B,$$
$$T(x,t) = A\frac{x}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) + B,$$
$$T(x,t) = A\exp(-a\mu^2 t)\cos(\mu x) + B,$$
$$T(x,t) = A\exp(-a\mu^2 t)\sin(\mu x) + B,$$
$$T(x,t) = A\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + B,$$
$$T(x,t) = A\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + B,$$
$$T(x,t) = A\left[\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \frac{x}{2\sqrt{a}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right] + B,$$

где n — целое положительное число, $\operatorname{erf} z \equiv \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \exp(-\xi^2)\,d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок), $\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$ — дополнительный интеграл вероятностей.

Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$T(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} f_x^{(2n)}(x),$$

где $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $T(x,0) = f(x)$. Сумма будет конечной, если $f(x)$ является полиномом.

Решения, содержащие произвольные функции времени:

$$T(x,t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n(2n)!} x^{2n} g_t^{(n)}(t),$$

$$T(x,t) = xh(t) + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n(2n+1)!} x^{2n} h_t^{(n)}(t),$$

где $g(t)$ и $h(t)$ — любые бесконечно дифференцируемые функции. Первое решение удовлетворяет граничному условию первого рода $T(0,t) = g(t)$, а второе — граничному условию второго рода $\partial_x T(0,t) = h(t)$.

2. Область: $-\infty < x < \infty$.

В каждой точке бесконечного твердого тела задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$T = f(x) \qquad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] f(\xi)\, d\xi.$$

Частный случай 1. Начальная температура тела в области $|x| < x_0$ постоянна и равна T_1, а в области $|x| > x_0$ — соответственно T_2, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} T_1 & \text{при } |x| < x_0, \\ T_2 & \text{при } |x| > x_0. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2}(T_1 - T_2)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{at}}\right)\right] + T_2.$$

Частный случай 2. В начальный момент времени температура тела в области $|x| \geqslant x_0$ равна нулю, а в области $|x| < x_0$ температура имеет симметричный треугольный профиль с максимальным значением T_0, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geqslant x_0, \\ T_0(1 - |x/x_0|) & \text{при } |x| < x_0. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \frac{T_0}{2x_0}\left[(x_0 - x)\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}}\right) + (x_0 + x)\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{at}}\right) - 2x\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right] +$$
$$+ \frac{T_0}{x_0}\sqrt{\frac{at}{\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right] - 2\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)\right\}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 60).

3. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

3.1. В каждой точке полубесконечного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела $x = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] \right\} f(\xi)\, d\xi.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 65).

Частный случай 1. Начальная температура одинакова во всех точках тела и равна T_0, т. е.

$$f(x) = T_0.$$

Решение:

$$T = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right).$$

Частный случай 2. Начальная температура тела линейно возрастает с увеличением координаты x, т. е.

$$f(x) = T_0 + Bx.$$

Решение:

$$T = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + Bx.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 67).

Частный случай 3. Начальная температура тела в области $0 < x < x_0$ постоянна и равна T_0, а в области $x_0 < x$ равна нулю, т. е. начальный профиль имеет вид «ступеньки»:

$$f(x) = \begin{cases} T_0 & \text{при } 0 < x < x_0, \\ 0 & \text{при } x_0 < x. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2} T_0 \left[2\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_0}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x + x_0}{2\sqrt{at}}\right) \right].$$

Частный случай 4. Начальная температура тела в области $x_0 < x < x_1$ постоянна и равна T_0, а в областях $0 < x < x_0$ и $x_1 < x$ равна нулю, т. е. начальный профиль имеет вид «прямоугольного уступа»:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < x_0, \\ T_0 & \text{при } x_0 < x < x_1, \\ 0 & \text{при } x_1 < x. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2} T_0 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_0}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x + x_0}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x + x_1}{2\sqrt{at}}\right) \right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 67).

3.2. В начальный момент времени $t = 0$ все точки тела имеют одинаковую температуру (равную нулю), и задан произвольный закон изменения температуры от времени на границе тела $x = 0$:

$$T = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Частный случай 1. Сначала на интервале времени $0 < t < t_0$ температура поверхности $x = 0$ была постоянна и равна T_0, а затем при $t_0 < t$ стала равна T_1, т. е.

$$g(t) = \begin{cases} T_0 & \text{при } 0 < t < t_0, \\ T_1 & \text{при } t_0 < t. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \begin{cases} T_0 \operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{at}}\right) & \text{при } 0 < t < t_0, \\ T_0 \operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{at}}\right) + (T_1 - T_0) \operatorname{erfc}\left[\dfrac{x}{2\sqrt{a(t-t_0)}}\right] & \text{при } t_0 < t. \end{cases}$$

Частный случай 2. Температура на границе $x = 0$ возрастает по линейному закону от времени, т. е.

$$g(t) = At.$$

Решение:

$$T = At\left[\left(1 + \frac{x^2}{2at}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \frac{x}{\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)\right].$$

Частный случай 3. Температура на границе $x = 0$ возрастает как корень квадратный от времени, т. е.

$$g(t) = A\sqrt{t}.$$

Решение:

$$T = A\sqrt{t}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \frac{x\sqrt{\pi}}{2\sqrt{at}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right].$$

Частный случай 4. Температура на границе $x = 0$ возрастает как целая или полуцелая степень времени, т. е.

$$g(t) = At^{n/2},$$

где n — любое целое положительное число.

Решение:

$$T = A\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}n + 1\right)(4t)^{n/2} I^{(n)}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, а функция $I^{(n)}$ вводится соотношением $I^{(n)}(z) = \int_z^\infty I^{(n-1)}(\xi)\,d\xi$, причем $I^{(0)}(z) = \operatorname{erfc} z$. Часто для функции $I^{(n)}(z)$ используется более длинное обозначение $i^n \operatorname{erfc}(z)$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 69).

Частный случай 5. Температура на границе $x = 0$ возрастает по экспоненциальному закону от времени, т. е.

$$g(t) = \exp(\mu t).$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2}\exp(\mu t)\left[\exp\left(-x\sqrt{\frac{\mu}{a}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} - \sqrt{\mu t}\right) + \exp\left(x\sqrt{\frac{\mu}{a}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \sqrt{\mu t}\right)\right].$$

Частный случай 6. Температура на границе $x = 0$ периодически изменяется во времени по закону косинуса:

$$g(t) = T_0\cos(\omega t - \mu).$$

Решение:

$$T = T_0\exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)\cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}} - \mu\right) - \\ - \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x^2}{4a\tau^2}\right) - \mu\right]\exp(-\tau)\,d\tau.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 70).

Частный случай 7. Температура на границе $x = 0$ имеет постоянное значение T_0 на интервалах времени $2nt_0 < t < (2n+1)t_0$ и постоянное значение $-T_0$ на интервалах времени $(2n+1)t_0 < t < (2n+2)t_0$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае для функции $g(t)$ можно использовать следующее разложение в ряд Фурье:

$$g(t) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi t}{t_0}\right].$$

Решение:

$$T = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\exp\left(-x\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2at_0}}\right)\sin\left[\frac{(2n+1)\pi t}{t_0} - x\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2at_0}}\right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 74), А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).

3.3. В каждой точке полубесконечного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, и задан закон изменения температуры от времени на границе тела $x = 0$:

$$\begin{aligned} T &= f(x) \quad &&\text{при} \quad t = 0 \quad &&\text{(начальное условие)} \\ T &= g(t) \quad &&\text{при} \quad x = 0 \quad &&\text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\int_0^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}f(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{x}{2\sqrt{\pi a}}\int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right]\frac{g(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 351), А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).

4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

4.1. В каждой точке полубесконечного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а граница тела $x = 0$ теплоизолирована (отсутствует поток тепла через поверхность тела):

$$\begin{aligned} &T = f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &\partial_x T = 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] \right\} f(\xi)\, d\xi.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

4.2. В начальный момент времени $t = 0$ все точки тела имеют одинаковую температуру (равную нулю), и задан произвольный закон изменения теплового потока от времени на границе тела $x = 0$:

$$\begin{aligned} &T = 0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &\partial_x T = g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = -\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 80).

Частный случай 1. На границе тела $x = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянный тепловой поток, т. е.

$$g(t) = -Q.$$

Решение:

$$T = 2Q\sqrt{\frac{at}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - Qx \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 79).

Частный случай 2. На поверхности $x = 0$ поддерживается постоянный тепловой поток в течение времени $0 < t < t_0$, затем поверхность теплоизолируется:

$$g(t) = \begin{cases} -Q, & \text{если } 0 < t < t_0, \\ 0, & \text{если } t_0 < t. \end{cases}$$

Решение:

$$T = 2Q\left\{ \sqrt{at}\, I^{(1)}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \sqrt{a(t-t_0)}\, I^{(1)}\left[\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_0)}}\right] \right\},$$

где $I^{(1)}(z) = \displaystyle\int_z^\infty \operatorname{erfc}\xi\, d\xi$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 80).

Частный случай 3. На поверхности $x = 0$ задан закон изменения теплового потока, обеспечивающий постоянство температуры этой поверхности:

$$g(t) = -\frac{T_0}{\sqrt{\pi a t}}.$$

Решение:

$$T = T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right).$$

Видно, что $T(0,t) = T_0$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 81).

Частный случай 4. Тепловой поток на поверхности $x = 0$ периодически меняется со временем по закону синуса:

$$g(t) = -Q\sin(\omega t + \mu).$$

Решение:

$$T = Q\sqrt{\frac{a}{\omega}}\exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)\sin\left(\omega t + \mu - \frac{1}{4}\pi - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) - \\ - \frac{2}{\pi}Qa\int_0^\infty \frac{(a\tau^2\sin\mu - \omega\cos\mu)\cos\tau x}{\omega^2 + a^2\tau^4}\exp(-a\tau^2 t)\,d\tau.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 81).

4.3. В каждой точке полубесконечного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, и задан закон изменения теплового потока от времени на границе тела $x = 0$:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T &= g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\int_0^\infty \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\} f(\xi)\,d\xi - \\ - \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right]\frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

5. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

5.1. В каждой точке полубесконечного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела $x = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\int_0^\infty G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - 2k\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - k\eta\right]d\eta.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

Частный случай. Первоначальная температура всех точек тела одинакова и равна T_0, т. е.

$$f(x) = T_0.$$

Решение:

$$T = T_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(kx + ak^2t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right)\right].$$

5.2. В начальный момент времени $t = 0$ все точки тела имеют одинаковую температуру (равную нулю), а на границе тела $x = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей температуру $g(t)$:

$$\begin{aligned} T &= 0 && \text{при} \quad t = 0 \quad && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT &= -kg(t) && \text{при} \quad x = 0 \quad && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = k\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} H(x, t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$H(x,t) = \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - k\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\eta)^2}{4at} - k\eta\right] d\eta.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

Частный случай 1. Сначала на интервале времени $0 < t < t_0$ температура внешней среды была постоянна и равна $-T_0$, а затем при $t_0 < t$ стала равна $-T_1$:

$$g(t) = \begin{cases} -T_0 & \text{при } \ 0 < t < t_0, \\ -T_1 & \text{при } \ t_0 < t. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \begin{cases} T_0 W(x,t) & \text{при } \ 0 < t < t_0, \\ T_0 W(x,t) + (T_1 - T_0) W(x, t - t_0) & \text{при } \ t_0 < t, \end{cases}$$

где

$$W(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \exp(kx + ak^2t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 78).

Частный случай 2. Температура окружающей среды периодически изменяется во времени по закону синуса:

$$g(t) = -A\sin(\omega t + \mu).$$

Решение:

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{Ak}{\sqrt{(k+\bar\omega)^2 + \bar\omega^2}} \exp(-\bar\omega x)\sin(\omega t + \mu - \bar\omega x - \delta) + \\ & + \frac{2Aak}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\omega\cos\mu - a\tau^2\sin\mu)(\tau\cos\tau x + k\sin\tau x)}{(a^2\tau^4 + \omega^2)(k^2 + \tau^2)} \exp(-a\tau^2 t)\tau\,d\tau, \end{aligned}$$

где $\bar\omega = \sqrt{\dfrac{\omega}{2a}}$, $\delta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\bar\omega}{k+\bar\omega}\right)$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 79).

5.3. В каждой точке полубесконечного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела $x = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей температуру $g(t)$:

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT = -kg(t) & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_0^\infty G(x,\xi,t) f(\xi)\, d\xi + \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} H(x, t-\tau)\, d\tau,$$

где функции $G(x,\xi,t)$ и $H(x,t)$ указаны в пп. 5.1 и 5.2.

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

6.1. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на обеих границах тела в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 98).

Частный случай 1. Начальная температура одинакова во всех точках тела и равна T_0, т. е.

$$f(x) = T_0.$$

Решение:

$$T = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \exp\left[-\frac{a(2n+1)^2\pi^2 t}{l^2}\right] \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 101).

Частный случай 2. Начальная температура тела линейно возрастает с увеличением координаты x, т. е.

$$f(x) = Ax.$$

Решение:

$$T = \frac{2Al}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 101).

6.2. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой границе тела задан свой закон изменения температуры от времени:

$$\begin{aligned} &T = f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &T = g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ &T = h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = g(t) + \frac{x}{l}\bigl[h(t) - g(t)\bigr] + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} M_n(t)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr),$$

где

$$M_n(t) = \int_0^l f(\xi)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\,d\xi - \frac{l}{n\pi}\exp\Bigl(\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr)\bigl[g(t) - (-1)^n h(t)\bigr] + \\ + \frac{an\pi}{l}\int_0^t \exp\Bigl(\frac{an^2\pi^2\tau}{l^2}\Bigr)\bigl[g(\tau) - (-1)^n h(\tau)\bigr]\,d\tau.$$

Замечание. Чтобы показать, что решение удовлетворяет начальному условию и уравнению, следует воспользоваться следующими соотношениями для сумм бесконечных рядов (А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, 1981, стр. 726):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\xi}{n} = \frac{\pi - \xi}{2} \quad (0 < \xi < 2\pi); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\xi}{n} = \frac{\xi}{2} \quad (-\pi < \xi < \pi).$$

В итоге получится выражение, которое приведено в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 106).

7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

7.1. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а обе границы тела теплоизолированы (отсутствует поток тепла через границы):

$$\begin{aligned} &T = f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &\partial_x T = 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ &\partial_x T = 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr),$$

где

$$b_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\,dx; \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 117).

7.2. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, и задан свой закон изменения теплового потока от времени на каждой границе тела:

$$
\begin{aligned}
T &= f(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_x T &= g(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)}\\
\partial_x T &= h(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

О решении этой задачи см. п. 6 в разд. 1.1.2 при $\Phi \equiv 0$.

8. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

8.1. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на обеих границах тела происходит теплообмен (по закону Ньютона, $k > 0$) с окружающей средой, имеющей нулевую температуру:

$$
\begin{aligned}
T &= f(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_x T - kT &= 0 && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)}\\
\partial_x T + kT &= 0 && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \frac{y_n(x) y_n(\xi)}{\|y_n\|^2} \exp(-a\mu_n^2 t) f(\xi)\, d\xi,
$$

где

$$
y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \quad \|y_n\|^2 = \frac{k}{\mu_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k^2}{\mu_n^2}\right),
$$

а μ_n — положительные корни следующего трансцендентного уравнения: $\dfrac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \dfrac{2k}{\mu^2 - k^2}$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 120), А. Г. Бутковский (1979, стр. 53).

8.2. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на обеих границах тела происходит теплообмен (по закону Ньютона) с контактирующими средами, каждая из которых имеет свою температуру ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$):

$$
\begin{aligned}
T &= f(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_x T - k_1 T &= -k_1 g(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)}\\
\partial_x T + k_2 T &= k_2 h(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

О решении этой задачи см. п. 7 в разд. 1.1.2 при $\Phi \equiv 0$.

9. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

9.1а. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на одной границе тела в течение всего времени поддерживается постоянная (нулевая температура), а другая граница теплоизолирована (отсутствует поток тепла через эту границу):

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \vartheta\Bigl(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{at}{l^2}\Bigr) - \vartheta\Bigl(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{at}{l^2}\Bigr) + \vartheta\Bigl(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{at}{l^2}\Bigr) - \vartheta\Bigl(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{at}{l^2}\Bigr).$$

Здесь $\vartheta(x,t)$ — тэта-функция Якоби:

$$\vartheta(x,t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 n^2 t)\cos(2\pi n x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\Bigl[-\frac{(x+n)^2}{t}\Bigr].$$

Первый ряд быстро сходится при больших t, а второй — при малых t.

⊙ Литература: Г. Деч (1971, стр. 286).

9.1б. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на одной границе тела задан закон изменения температуры от времени, а на другой границе задается закон изменения теплового потока:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T &= h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

О решении этой задачи см. п. 8.1б в разд. 1.1.2 при $\Phi \equiv 0$.

9.2а. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, одна граница тела теплоизолирована (отсутствует поток тепла через эту границу), а на другой границе в течение всего времени поддерживается постоянная (нулевая температура):

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \vartheta\Big(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{at}{l^2}\Big) + \vartheta\Big(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{at}{l^2}\Big) - \vartheta\Big(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{at}{l^2}\Big) - \vartheta\Big(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{at}{l^2}\Big).$$

Здесь $\vartheta(x,t)$ — тэта-функция Якоби (см. п. 9.1а).

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 286).

9.2б. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на одной границе тела задан закон изменения теплового потока от времени, а на другой границе задается закон изменения температуры:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T &= g(t) && \text{при}\quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= h(t) && \text{при}\quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

О решении этой задачи см. п. 8.2б в разд. 1.1.2 при $\Phi \equiv 0$.

10. Задачи без начальных условий.

В приложениях часто встречаются задачи, когда тепло- и массоперенос рассматривается в моменты времени достаточно удаленные от начального, и когда влияние начальных условий практически не сказывается на распределении температуры в момент наблюдения. В этом случае начальное условие не формулируется, а граничные условия считаются заданными для всех моментов времени $-\infty < t$. Дополнительным требованием является ограниченность решения во всей области. Рассмотрим в качестве примера первую краевую задачу для полупространства $0 \leqslant x < \infty$:

$$\begin{aligned} T &= g(t) \quad \text{при}\quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ |T(x,t)| &< \infty && \text{(условие ограниченности)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{t} \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\Big[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\Big]\, d\tau.$$

Частный случай. Температура на границе является гармонической функцией времени, т. е.

$$g(t) = T_0 \cos(\omega t + \beta).$$

Решение:

$$T = T_0 \exp\Big(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\, x\Big) \cos\Big(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\, x + \omega t + \beta\Big).$$

⊙ Литература к разд. 1.1.1: Г. Карслоу, Д. Егер (1964), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. В. Лыков (1967), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), А. Г. Бутковский (1979), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980).

1.1.2. Уравнение $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Phi(x,t)$

Уравнение этого вида описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности при наличии объемного тепловыделения, когда источниковый член зависит от пространственной координаты и времени.

1. Область: $-\infty < x < \infty$.

В каждой точке среды задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 49).

2. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

В каждой точке полубесконечной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, и задан закон изменения температуры от времени на границе $x = 0$:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^{\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \int_0^t \int_0^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).

3. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

В каждой точке полубесконечной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, и задан закон изменения теплового потока от времени на границе $x = 0$:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_x T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi -$$
$$-\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t \exp\Bigl[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\Bigr] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

В каждой точке полубесконечного тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его границе $x = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей температуру $g(t)$:

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT = -kg(t) & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} H(x,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Bigr] -$$
$$- 2k \int_0^\infty \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - k\eta\Bigr]\,d\eta\Bigr\},$$
$$H(x,t) = \exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at}\Bigr) - k \int_0^\infty \exp\Bigl[-\frac{(x+\eta)^2}{4at} - k\eta\Bigr]\,d\eta.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

5.1. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на обеих границах тела в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Bigr).$$

5.2. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на каждой границе тела задан свой закон изменения температуры от времени:

$$\begin{array}{llll} T=f(x) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)}\\ T=g(t) & \text{при} & x=0 & \text{(граничное условие)}\\ T=h(t) & \text{при} & x=l & \text{(граничное условие)}\end{array}$$

Решение:

$$T(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+$$
$$+g(t)+\frac{x}{l}\bigl[h(t)-g(t)\bigr]+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}M_n(t)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr),$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Bigr),$$

$$M_n(t)=\int_0^l f(\xi)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)d\xi-\frac{l}{n\pi}\exp\Bigl(\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Bigr)\bigl[g(t)-(-1)^nh(t)\bigr]+$$
$$+\frac{an\pi}{l}\int_0^t\exp\Bigl(\frac{an^2\pi^2\tau}{l^2}\Bigr)\bigl[g(\tau)-(-1)^nh(\tau)\bigr]\,d\tau.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).

6. Область: $0\leqslant x\leqslant l$. Вторая краевая задача.

6.1. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а обе границы тела теплоизолированы (отсутствует поток тепла через границы):

$$\begin{array}{llll} T=f(x) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)}\\ \partial_x T=0 & \text{при} & x=0 & \text{(граничное условие)}\\ \partial_x T=0 & \text{при} & x=l & \text{(граничное условие)}\end{array}$$

Решение:

$$T(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+\int_0^l G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Bigr).$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).

6.2. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, и задан свой закон изменения теплового потока от времени на каждой границе тела:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T &= g(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T &= h(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$T(x,t) = xg(t) + \frac{x^2}{2l}[h(t) - g(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 6.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

7.1. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на обеих границах тела происходит теплообмен (по закону Ньютона) с окружающей средой, имеющей нулевую температуру ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$):

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - k_1 T &= 0 && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T + k_2 T &= 0 && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi) \exp(-a\mu_n^2 t),$$

$$y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x),$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2}\right).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \frac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 53).

7.2. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на обеих границах тела происходит теплообмен (по закону Ньютона) с контактирующими средами, каждая из которых имеет свою температуру, зависящую от времени ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$):

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - k_1 T &= -k_1 g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T + k_2 T &= k_2 h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$T(x,t) = \frac{k_1(1+k_2 l)g(t) + k_2 h(t)}{k_1 + k_2 + k_1 k_2 l} + x\frac{k_1 k_2 [h(t) - g(t)]}{k_1 + k_2 + k_1 k_2 l} + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 7.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

8. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

8.1а. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на одной границе тела в течение всего времени поддерживается постоянная (нулевая) температура, а другая граница теплоизолирована (отсутствует поток тепла через эту границу):

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\, \Phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

$$G(x,\xi,t) = \vartheta\Big(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{at}{l^2}\Big) - \vartheta\Big(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{at}{l^2}\Big) + \vartheta\Big(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{at}{l^2}\Big) - \vartheta\Big(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{at}{l^2}\Big),$$

где $\vartheta(x,t)$ — тэта-функция Якоби (см. п. 9.1а в разд. 1.1.1).

8.1б. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на одной границе тела задан закон изменения температуры от времени, а на другой границе задается закон изменения теплового потока:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T &= h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$T(x,t) = g(t) + xh(t) + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 8.1а (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

8.2а. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, одна граница тела теплоизолирована (отсутствует поток тепла через эту границу), а на другой границе в течение всего времени поддерживается постоянная (нулевая) температура:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\, \Phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

$$G(x,\xi,t) = \vartheta\Bigl(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{at}{l^2}\Bigr) + \vartheta\Bigl(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{at}{l^2}\Bigr) - \vartheta\Bigl(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{at}{l^2}\Bigr) - \vartheta\Bigl(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{at}{l^2}\Bigr),$$

где $\vartheta(x,t)$ — тэта-функция Якоби (см. п. 9.1а в разд. 1.1.1).

8.2б. В каждой точке ограниченного твердого тела известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на одной границе тела задан закон изменения теплового потока от времени, а на другой границе задается закон изменения температуры:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T &= g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$T(x,t) = (x-l)g(t) + h(t) + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 8.2а (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

⊙ Литература к разд. 1.1.2: Г. Карслоу, Д. Егер (1964), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. В. Лыков (1967), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), А. Г. Бутковский (1979), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980), Т. Шервуд Т., Р. Пигфорд, Ч. Уилки (1982).

1.1.3. Уравнение $\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\frac{\partial T}{\partial x} + cT + \Phi(x,t)$

Предварительные замечания. В данном разделе часто будут приводиться только выражения для функции Грина, а решения соответствующих задач с однородными граничными условиями определяется по формуле (1), которая приведена ниже в п. 1. Для решения задач с неоднородными граничными условиями сначала следует использовать подходящее преобразование (2)–(6) из п. 2, после чего решение преобразованной задачи определяется по формуле (1).

1. Задачи с однородными граничными условиями. Решения задач тепло- и массопереноса (рассматриваемых в данном разделе) в области $0 \leqslant x \leqslant l$ с однородными граничными условиями и общим начальным условием

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$

можно записать в виде

$$T(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (1)$$

где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина.

2. Задачи с неоднородными граничными условиями. Задачи тепло- и массопереноса с неоднородными граничными условиями различных типов с помощью подходящих линейных преобразований вида $T(x,t) = \psi(x,t) + u(x,t)$, где u — новая искомая величина, сводятся к задачам с однородными граничными условиями, решение которых можно получить по формуле (1) (где будут стоять преобразованные функции f и Φ). Укажем конкретный вид таких преобразований для основных краевых задач в области $0 \leqslant x \leqslant l$.

Первая краевая задача:

$$T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{(граничное условие)}$$
$$T = h(t) \quad \text{при} \quad x = l \qquad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$T(x,t) = g(t) + \frac{x}{l}[h(t) - g(t)] + u(x,t). \qquad (2)$$

Вторая краевая задача:

$$\partial_x T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x T = h(t) \quad \text{при} \quad x = l \qquad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$T(x,t) = xg(t) + \frac{x^2}{2l}[h(t) - g(t)] + u(x,t). \qquad (3)$$

Третья краевая задача:

$$\partial_x T - k_1 T = -k_1 g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x T + k_2 T = k_2 h(t) \quad \text{при} \quad x = l \qquad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$T(x,t) = \frac{k_1(1 + k_2 l)g(t) + k_2 h(t)}{k_1 + k_2 + k_1 k_2 l} + x\frac{k_1 k_2 [h(t) - g(t)]}{k_1 + k_2 + k_1 k_2 l} + u(x,t). \qquad (4)$$

Смешанные краевые задачи.

Случай 1:

$$T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x T = h(t) \quad \text{при} \quad x = l \qquad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$T(x,t) = g(t) + xh(t) + u(x,t). \qquad (5)$$

Случай 2:

$$\begin{aligned} \partial_x T &= g(t) \quad &\text{при} \quad x = 0 \quad &\text{(граничное условие)} \\ T &= h(t) \quad &\text{при} \quad x = l \quad &\text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Преобразование:

$$T(x,t) = (x-l)g(t) + h(t) + u(x,t). \qquad (6)$$

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT.$

Это уравнение встречается в одномерных нестационарных задачах массопереноса в неподвижной среде с объемной химической реакцией первого порядка ($b < 0$ соответствует поглощению вещества, а $b > 0$ — выделению вещества). Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных тепловых процессов, когда в среде происходит объемное тепловыделение ($b > 0$), пропорциональное температуре. Кроме того, это уравнение описывает теплоперенос в одномерном стержне, боковая поверхность которого обменивается теплом с окружающей средой постоянной температуры ($b > 0$ соответствует случаю, когда температура среды выше температуры стержня, а $b < 0$ — ниже).

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 135).

1. Некоторые точные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned} T(x,t) &= (Ax+B)e^{bt}, \\ T(x,t) &= A\exp\bigl[(a\mu^2+b)t \pm \mu x\bigr] + B, \\ T(x,t) &= A\exp\bigl[(b-a\mu^2)t\bigr]\cos(\mu x) + B, \\ T(x,t) &= A\exp\bigl[(b-a\mu^2)t\bigr]\sin(\mu x) + B, \\ T(x,t) &= A\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at} + bt\Bigr) + B, \\ T(x,t) &= A\frac{x}{t^{3/2}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at} + bt\Bigr) + B, \\ T(x,t) &= Ae^{bt}\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Bigr) + B. \end{aligned}$$

2. Упрощающее преобразование. Замена $T(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к классическому уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, которое рассматривается в разд. 1.1.1. Начальное условие для новой переменной u не меняется, а неоднородная часть в граничных условиях умножается на функцию e^{-bt}. Учитывая сказанное, нетрудно получить решение исходного уравнения с начальными и граничными условиями, которые рассматривались в разд. 1.1.1. Для примера ниже приведены решения двух типичных задач.

3. Область: $-\infty < x < \infty$.

В каждой точке бесконечной среды задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at} + bt\right] f(\xi)\, d\xi.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 54).

4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

В каждой точке полубесконечной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, и задан закон изменения температуры от времени на границе $x = 0$:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = \frac{e^{bt}}{2\sqrt{\pi a t}} \int_0^{\infty} \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\} f(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] \exp[b(t-\tau)] \frac{g(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

См. также уравнение 1.1.3.2 при $\Phi \equiv 0$.

2. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT + \Phi(x,t)$.

Это уравнение может моделировать одномерные нестационарные тепловые процессы в неподвижной среде с комбинированным объемным тепловыделением или процесс в стержне с тепловыделением и теплообменом со средой через боковую поверхность.

Замена $T(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к уравнению $\partial_t u = a\partial_{xx}u + e^{-bt}\Phi(x,t)$, которое подробно рассматривается в разд. 1.1.2.

1. Область: $-\infty < x < \infty$.

В каждой точке бесконечной среды задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где функция Грина определяется формулой

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at} + bt\right].$$

2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$; на границах области в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{llll} T = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2} t + bt\right).$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).

3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$; обе границы области теплоизолированы (отсутствует поток тепла через границы):

$$\begin{array}{llll} T = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{\exp(bt)}{l} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l^2}\right)\right].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).

4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$; на обеих границах происходит теплообмен (по закону Ньютона) с другими средами, имеющими нулевую температуру ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$):

$$\begin{array}{llll} T = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - k_1 T = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T + k_2 T = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\exp\left[(b-a\mu_n^2)t\right]}{\|y_n\|^2},$$

$$y_n(x)=\cos(\mu_n x)+\frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x),\quad \|y_n\|^2=\frac{k_2}{2\mu_n^2}\frac{\mu_n^2+k_1^2}{\mu_n^2+k_2^2}+\frac{k_1}{2\mu_n^2}+\frac{l}{2}\left(1+\frac{k_1^2}{\mu_n^2}\right),$$

где μ_n — положительные корни уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu}=\dfrac{k_1+k_2}{\mu^2-k_1k_2}$.

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 56).

5. Область: $0\leqslant x\leqslant l$. Смешанная краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$; на одной границе в течение всего времени поддерживается постоянная (нулевая) температура, а другая граница теплоизолирована (отсутствует поток тепла через эту границу):

$$\begin{aligned}
T&=f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_x T&=0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\
T&=0 &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\mu_n x)\cos(\mu_n\xi)\exp(-a\mu_n^2t+bt),\qquad \mu_n=\frac{\pi}{2l}(2n+1).$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 54).

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial T}{\partial x}+\Phi(x,t)$.

Это уравнение встречается в одномерных нестационарных задачах конвективного массопереноса в сплошной среде, движущейся с постоянной скоростью (случай $\Phi\equiv 0$ отвечает отсутствию поглощения или выделения вещества).

Замена $T(x,t)=\exp(\beta t+\mu x)u(x,t)$, где $\beta=-\frac{1}{4}b^2/a$, $\mu=-\frac{1}{2}b/a$, приводит к уравнению $\partial_t u=a\partial_{xx}u+\exp(-\beta t-\mu x)\Phi(x,t)$, которое подробно рассматривается в разд. 1.1.2.

1. Область: $0\leqslant x\leqslant l$. Первая краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$; на границах области в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned}
T&=f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
T&=0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\
T&=0 &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\exp\left[\frac{b}{2a}(\xi-x)-\frac{b^2}{4a}t\right]\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n\xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{a\pi^2n^2}{l^2}t\right).$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 57).

2. Область: $0\leqslant x\leqslant l$. Вторая краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$; обе границы области теплоизолированы (отсутствует поток тепла через границы):

$$\begin{aligned}
T&=f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_x T&=0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\
\partial_x T&=0 &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t)=-\frac{b}{a}\exp\left(\frac{b\xi}{a}\right)\left[1-\exp\left(\frac{bl}{a}\right)\right]^{-1}+\\
+\frac{2}{l}\exp\left[\frac{b}{2a}(\xi-x)-\frac{b^2}{4a}t\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{1+\mu_n^2}\exp\left(-\frac{a\pi^2n^2}{l^2}t\right),$$

$$y_n(x)=\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)+\mu_n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),\qquad \mu_n=\frac{bl}{2a\pi n}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 58).

3. Область: $0\leqslant x\leqslant l$. Третья краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$; на обеих границах происходит теплообмен (по закону Ньютона) с другими средами, имеющими нулевую температуру ($k_1>0$, $k_2>0$):

$$\begin{aligned}
T&=f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_x T-k_1T&=0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\
\partial_x T+k_2T&=0 &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t)=\exp\left(\frac{b}{a}\xi-\frac{b^2}{4a}t\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\exp(-a\mu_n^2t)}{\|y_n\|^2},$$

$$y_n(x)=\exp\left(\frac{b}{2a}x\right)\left[\cos(\mu_n x)+\frac{1}{\mu_n}\left(k_1+\frac{b}{2a}\right)\sin(\mu_n x)\right],$$

$$\|y_n\|^2=\frac{1}{2\mu_n^2}\left[\left(k_2-\frac{b}{2a}\right)\frac{\mu_n^2+\frac{b^2}{4a^2}+k_1^2+k_1\frac{b}{a}}{\mu_n^2+\frac{b^2}{4a^2}+k_2^2-k_2\frac{b}{a}}+k_1+\frac{b}{2a}+l\left(\mu_n^2+\frac{b^2}{4a^2}+k_1^2+k_1\frac{b}{a}\right)\right],$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = (k_1 + k_2)\left[\mu^2 + \frac{b^2}{4a^2} - k_1 k_2 + \frac{b}{2a}(k_1 - k_2)\right]^{-1}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 61).

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial T}{\partial x} + cT + \Phi(x,t)$.

При $\Phi \equiv 0$ это уравнение описывает одномерный нестационарный конвективный массоперенос с объемной химической реакцией первого порядка в движущейся с однородной постоянной скоростью сплошной среде. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных тепловых процессов в движущейся среде с объемным тепловыделением, пропорциональным температуре.

Замена $T(x,t) = \exp(\beta t + \mu x)u(x,t)$, где $\beta = c - \dfrac{b^2}{4a}$, $\mu = -\dfrac{b}{2a}$, приводит к уравнению $\partial_t u = a\partial_{xx} u + \exp(-\beta t - \mu x)\Phi(x,t)$, которое подробно рассматривается в разд. 1.1.2.

1. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$; на границах области в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned}
&T = f(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\
&T = 0 &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)}\\
&T = 0 &&\text{при}\quad x = l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\bigl[\mu(x-\xi)+\beta t\bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2}t\Bigr),$$

где $\mu = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = c - \dfrac{b^2}{4a}$.

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 59).

2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t=0$; обе границы области теплоизолированы (отсутствует поток тепла через границы):

$$\begin{aligned}
&T = f(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\
&\partial_x T = 0 &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)}\\
&\partial_x T = 0 &&\text{при}\quad x = l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = -\frac{b}{a}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{a}+ct\Bigr)\Bigl[1-\exp\Bigl(\frac{bl}{a}\Bigr)\Bigr]^{-1}+$$
$$+\frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b}{2a}(\xi-x)+\Bigl(c-\frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{1+\mu_n^2}\exp\Bigl(-\frac{a\pi^2n^2}{l^2}t\Bigr),$$

$$y_n(x) = \cos\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)+\mu_n\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr), \qquad \mu_n = \frac{bl}{2a\pi n}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 60).

3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

В каждой точке среды, занимающей конечную область, известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$; на обеих границах происходит теплообмен (по закону Ньютона) с другими средами, имеющими нулевую температуру ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$):

$$\begin{aligned}
T &= f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_x T - k_1 T &= 0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\
\partial_x T + k_2 T &= 0 &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t)=\exp\Bigl[\frac{b}{a}\xi+\Bigl(c-\frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\exp(-a\mu_n^2t)}{\|y_n\|^2},$$

$$y_n(x)=\exp\Bigl(\frac{b}{2a}x\Bigr)\Bigl[\cos(\mu_n x)+\frac{1}{\mu_n}\Bigl(k_1+\frac{b}{2a}\Bigr)\sin(\mu_n x)\Bigr],$$

$$\|y_n\|^2=\frac{1}{2\mu_n^2}\left[\Bigl(k_2-\frac{b}{2a}\Bigr)\frac{\mu_n^2+\frac{b^2}{4a^2}+k_1^2+k_1\frac{b}{a}}{\mu_n^2+\frac{b^2}{4a^2}+k_2^2-k_2\frac{b}{a}}+k_1+\frac{b}{2a}+l\Bigl(\mu_n^2+\frac{b^2}{4a^2}+k_1^2+k_1\frac{b}{a}\Bigr)\right],$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu}=(k_1+k_2)\Bigl[\mu^2+\frac{b^2}{4a^2}-k_1k_2+\frac{b}{2a}(k_1-k_2)\Bigr]^{-1}.$$

⊙ Литература к разд. 1.1.3: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Г. Карслоу, Д. Егер (1964), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), А. Г. Бутковский (1979).

1.1.4. Уравнение $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Bigl(\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r}\Bigr)$

Это уравнение встречается в плоских задачах тепло- и массопереноса с круговой симметрией. Здесь $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — радиальная координата. Его часто записывают в эквивалентном виде

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial T}{\partial r}\Bigr).$$

Уравнение описывает развитие одномерных (не зависящих от угловой координаты) нестационарных тепловых процессов в твердом теле, имеющем форму кругового цилиндра или полого цилиндра. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных нестационарных диффузионных процессов.

1. Точные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$T(r) = A + B\ln r,$$
$$T(r,t) = A + B(r^2 + 4at),$$
$$T(r,t) = A + B(r^4 + 16atr^2 + 32a^2t^2),$$
$$T(r,t) = A + B\left(r^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k\bigl[n(n-1)\dots(n-k+1)\bigr]^2}{k!}(at)^k r^{2n-2k}\right),$$
$$T(r,t) = A + B\bigl(4at\ln r + r^2\ln r - r^2\bigr),$$
$$T(r,t) = A + \frac{B}{t}\exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right),$$
$$T(r,t) = A + B\int_1^{\zeta} e^{-z}\,\frac{dz}{z}, \quad \zeta = \frac{r^2}{4at},$$
$$T(r,t) = A\exp(-a\mu^2 t)J_0(\mu r),$$
$$T(r,t) = A\exp(-a\mu^2 t)Y_0(\mu r),$$

где n — произвольное положительное целое число, $J_0(z)$ и $Y_0(z)$ — функции Бесселя.

Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$T(r,t) = f(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}\boldsymbol{L}^n\bigl[f(r)\bigr], \qquad \boldsymbol{L} \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr},$$

где $f(r)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $T(r,0) = f(r)$. Сумма будет конечной, если $f(r)$ является полиномом, который содержит только четные степени.

Решение, содержащее произвольную функцию времени:

$$T(r,t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4a)^n(n!)^2} r^{2n} g_t^{(n)}(t),$$

где $g(t)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение ограничено при $r = 0$ и обладает следующими свойствами:

$$T(0,t) = g(t), \qquad \partial_r T(0,t) = 0.$$

2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

2.1. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура одинакова в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная T_R):

$$\begin{array}{llll} T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = T_R & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

где $T_0 = \text{const}$, $T_R = \text{const}$.

Решение:

$$\frac{T(r,t) - T_R}{T_0 - T_R} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)} \exp\Big(-\mu_n^2 \frac{at}{R^2}\Big) J_0\Big(\mu_n \frac{r}{R}\Big),$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\mu_n) = 0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой): $\mu_1 = 2.4048$, $\mu_2 = 5.5201$, $\mu_3 = 8.6537$, $\mu_4 = 11.7915$, $\mu_5 = 14.9309$. При $n \to \infty$ имеем $\mu_{n+1} - \mu_n \to \pi$.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 122), Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 197).

2.2. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{llll} T = f(r) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big) J_0\Big(\mu_n \frac{r}{R}\Big), \quad A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r f(r) J_0\Big(\mu_n \frac{r}{R}\Big)\, dr,$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\mu_n) = 0$.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 121), Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 197).

2.3. Круговой цилиндр радиуса R в начальный момент времени $t = 0$ имеет однородную нулевую температуру, а на границе температура меняется по известному закону:

$$\begin{array}{llll} T = 0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = g(t) & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{J_1(\mu_n)} H_n(t) \exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big) J_0\Big(\mu_n \frac{r}{R}\Big),$$

$$H_n(t) = \frac{2a}{R^2} \int_0^t \exp\Big(\frac{a\mu_n^2 \tau}{R^2}\Big) g(\tau)\, d\tau,$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\mu_n) = 0$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 198).

3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

3.1. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура одинакова в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела поддерживается постоянный тепловой поток:

$$
\begin{aligned}
T &= T_0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\
\partial_r T &= g_R && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)} \\
T &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

где $T_0 = \text{const}$, $g_R = \text{const}$.

Решение:

$$
T(r,t) = T_0 + g_R R\left[2\frac{at}{R^2} - \frac{1}{4} + \frac{r^2}{2R^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{at}{R^2}\right) J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)\right],
$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_1(\mu_n) = 0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой): $\mu_1 = 3.8317$, $\mu_2 = 7.0156$, $\mu_3 = 10.1735$, $\mu_4 = 13.3237$, $\mu_5 = 16.4706$. При $n \to \infty$ имеем $\mu_{n+1} - \mu_n \to \pi$.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 176), Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 201).

3.2. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его границе задана зависимость теплового потока от времени:

$$
\begin{aligned}
T &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\
\partial_r T &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)} \\
T &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
T(r,t) = \frac{2}{R^2}\int_0^R r f(r)\,dr + \frac{2a}{R}\int_0^t g(\tau)\,d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) H_n(t),
$$

$$
H_n(t) = \frac{1}{J_0^2(\mu_n)}\left[\frac{2}{R^2}\int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr + \frac{2a}{R}\int_0^t g(\tau) \exp\left(\frac{a\mu_n^2 \tau}{R^2}\right) d\tau\right],
$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_1(\mu_n) = 0$.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 176).

4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура одинакова в начальный момент времени $t = 0$, а на его границе происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную T_R):

$$
\begin{aligned}
T &= T_0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\
\partial_r T &= k(T_R - T) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)} \\
T &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Считается, что $k = \text{const}$, $T_0 = \text{const}$, $T_R = \text{const}$.

Решение:

$$\frac{T(r,t)-T_0}{T_R-T_0}=1-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp\left(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),\quad A_n=\frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n[J_0^2(\mu_n)+J_1^2(\mu_n)]},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu_n J_1(\mu_n)-kRJ_0(\mu_n)=0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егер (1964) на стр. 482.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 164), Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 200).

5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2. В каждой точке этой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на внутренней и внешней границах области в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная соответственно T_1 и T_2):

$$\begin{array}{lll} T=f(r) & \text{при}\quad t=0 & \text{(начальное условие)} \\ T=T_1 & \text{при}\quad r=R_1 & \text{(граничное условие)} \\ T=T_2 & \text{при}\quad r=R_2 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Считается, что $T_1=\mathrm{const}$, $T_2=\mathrm{const}$.

Решение:

$$T(r,t)=\frac{1}{\ln s}\left(T_1\ln\frac{R_2}{r}+T_2\ln\frac{r}{R_1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp\left(-\frac{a\mu_n^2 t}{R_1^2}\right)\Psi_n(r),$$

$$\Psi_n(r)=Y_0(\mu_n)J_0\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)-J_0(\mu_n)Y_0\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right),\quad s=\frac{R_2}{R_1},$$

$$A_n=\frac{\pi^2\mu_n^2J_0(\mu_n)}{2R_1^2[J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)]}\int_{R_1}^{R_2}rf(r)\Psi_n(r)\,dr-\frac{\pi J_0(\mu_n)[T_2J_0(\mu_n)-T_1J_0(s\mu_n)]}{J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)},$$

где $J_0(z)$, $Y_0(z)$ — функции Бесселя; μ_n — корни характеристического уравнения

$$J_0(\mu)Y_0(s\mu)-J_0(s\mu)Y_0(\mu)=0.$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n=\mu_n(s)$ в диапазоне $1.4\leqslant s\leqslant 4.0$ приведены в книге А. В. Лыкова (1967) на стр. 135, а также в книге Г. Карслоу, Д. Егер (1964), стр. 482.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 204).

6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2. В каждой точке этой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на внутренней и внешней границах области задана своя зависимость теплового потока от времени:

$$\begin{array}{lll} T = f(r) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T = g_1(t) & \text{при} \quad r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_r T = g_2(t) & \text{при} \quad r = R_2 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,t) = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} r f(r)\, dr + a \int_0^t \left[R_2 g_2(\tau) - R_1 g_1(\tau) \right] d\tau \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\beta_n t) G_n(t) \Psi_n(r), \quad A_n = \pi \frac{\mu_n^2}{R_1^2} \frac{J_1^2(\mu_n) J_1^2(s\mu_n)}{J_1^2(\mu_n) - J_1^2(s\mu_n)},$$

$$\Psi_n(r) = J_0\Big(\mu_n \frac{r}{R_1}\Big) \frac{Y_1(\mu_n)}{J_1(\mu_n)} - Y_0\Big(\mu_n \frac{r}{R_1}\Big), \quad s = \frac{R_2}{R_1}, \quad \beta_n = \frac{a\mu_n^2}{R_1^2},$$

$$G_n(t) = \frac{\pi}{2} \int_{R_1}^{R_2} r f(r) \Psi_n(r)\, dr - \frac{aR_1}{\mu_n} \int_0^t \exp(\beta_n \tau) \left[\frac{g_2(\tau)}{J_1(s\mu_n)} - \frac{g_1(\tau)}{J_1(\mu_n)} \right] d\tau,$$

где $J_k(z)$, $Y_k(z)$ — функции Бесселя ($k = 0,\, 1$); μ_n — корни характеристического уравнения

$$J_1(\mu) Y_1(s\mu) - J_1(s\mu) Y_1(\mu) = 0.$$

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 178).

7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается кольцевая область с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2. В каждой точке этой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на внутренней и внешней границах области происходит теплообмен (по закону Ньютона) с контактирующими средами, имеющими постоянную температуру (равную T_s):

$$\begin{array}{lll} T = f(r) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T = -k_1(T_s - T) & \text{при} \quad r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_r T = k_2(T_s - T) & \text{при} \quad r = R_2 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Считается, что $T_s = \text{const}$.

Решение:

$$T(r,t) = T_s - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{B_n} \exp(-a\mu_n^2 t) F_n(r),$$

$$A_n = \pi^2 \mu_n^2 \left[k_2 J_0(\mu_n R_2) - \mu_n J_1(\mu_n R_2) \right]^2 \int_{R_1}^{R_2} r \left[T_s - f(r) \right] F_n(r)\, dr,$$

$$B_n = (\mu_n^2 + k_2^2) \left[k_1 J_0(\mu_n R_1) + \mu_n J_1(\mu_n R_1) \right]^2 -$$
$$- (\mu_n^2 + k_1^2) \left[k_2 J_0(\mu_n R_2) - \mu_n J_1(\mu_n R_2) \right]^2,$$

$$F_n(r) = -\left[k_1 Y_0(\mu_n R_1) + \mu_n Y_1(\mu_n R_1) \right] J_0(\mu_n r) +$$
$$+ \left[k_1 J_0(\mu_n R_1) + \mu_n J_1(\mu_n R_1) \right] Y_0(\mu_n r),$$

где μ_n — корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned}\left[k_1 J_0(\mu R_1) + \mu J_1(\mu R_1)\right]\left[k_2 Y_0(\mu R_2) - \mu Y_1(\mu R_2)\right] - \\ - \left[k_2 J_0(\mu R_2) - \mu J_1(\mu R_2)\right]\left[k_1 Y_0(\mu R_1) + \mu Y_1(\mu R_1)\right] = 0.\end{aligned}$$

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 255).

8. Область: $0 \leqslant r < \infty$. Вторая краевая задача.

Эта задача встречается в теории диффузионного следа за каплей и твердой частицей.

$$\begin{aligned} T &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T &= 0 && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,t) = \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{\xi}{t}\exp\left(-\frac{\xi^2 + r^2}{4at}\right) I_0\left(\frac{\xi r}{2at}\right) f(\xi)\,d\xi,$$

где $I_0(\xi)$ — модифицированная функция Бесселя.

⊙ Литература: W. G. L. Sutton (1943), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985, стр. 29).

1.1.5. Уравнение $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) + \Phi(r,t)$

Это уравнение встречается в плоских задачах теплопроводности с тепловыделением (функция Φ пропорциональна количеству тепла, выделяемому в единицу времени в рассматриваемом объеме). Оно описывает развитие одномерных (не зависящих от угловой координаты) нестационарных тепловых процессов в твердом теле, имеющем форму кругового цилиндра или цилиндрического слоя.

1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

1.1. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned} T &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)} \\ T &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,t) = \int_0^R G(r,\xi,t)\,f(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_0^R G(r,\xi,t-\tau)\,\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2\xi}{R^2 J_1^2(\mu_n)} J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) J_0\left(\mu_n \frac{\xi}{R}\right)\exp\left(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\right).$$

Здесь μ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\mu_n) = 0$ (численные значения первых пяти корней μ_n указаны в разд. 1.1.4, п. 2.1).

1.2. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела задан закон изменения температуры от времени:

$$
\begin{aligned}
&T = f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\
&T = g(t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)}\\
&T \neq \infty &&\text{при}\quad r = 0 &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Замена $T(r,t) = u(r,t) + g(t)$ приводит к задаче из п. 1.1 для величины u, в которой вместо функции $\Phi(r,t)$ будет стоять $\Phi(r,t) - g'_t(t)$, а вместо $f(r)$ — функция $f(r) - g(0)$.

2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

В каждой точке кругового цилиндра радиуса R известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его границе задана зависимость теплового потока от времени:

$$
\begin{aligned}
&T = f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\
&\partial_r T = g(t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)}\\
&T \neq \infty &&\text{при}\quad r = 0 &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение:

$$T(r,t) = \frac{2}{R^2} H(0,t) + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n r)}{J_0^2(\beta_n R)} \exp\bigl(-a\beta_n^2 t\bigr)\, H(\beta_n, t).$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
H(\beta,t) = \int_0^R \xi f(\xi) J_0(\beta\xi)\, d\xi + aRJ_0(\beta R) \int_0^t g(\tau) \exp\bigl(a\beta^2\tau\bigr)\, d\tau\, + \\
+ \int_0^t \int_0^R \xi J_0(\beta\xi) \exp\bigl(a\beta^2\tau\bigr)\, \Phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,
\end{aligned}
$$

где β_n — корень характеристического уравнения $J_0'(\beta R) = 0$, штрих обозначает производную.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 341).

1.1.6. Уравнение $\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)$

Это уравнение встречается в сферически-симметричных задачах нестационарного тепло- и массопереноса (теплообмен шара с окружающей средой, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — радиальная координата). Его часто записывают в эквивалентном виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных сферически-симметричных диффузионных процессов.

Замена $u(r,t) = rT(r,t)$ приводит исходное уравнение с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$, которое подробно рассматривается в разд. 1.1.1.

1. Точные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$T(r) = A + B\frac{1}{r},$$

$$T(r,t) = A + B(r^2 + 6at),$$

$$T(r,t) = A + B(r^4 + 20atr^2 + 60a^2t^2),$$

$$T(r,t) = A + B\left[r^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)(2n)\ldots(2n-2k+2)}{k!}(at)^k r^{2n-2k}\right],$$

$$T(r,t) = A + 2aB\frac{t}{r} + Br,$$

$$T(r,t) = A + \frac{B}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right),$$

$$T(r,t) = A + \frac{B}{r\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right),$$

$$T(r,t) = Ar^{-1}\exp(a\mu^2 t \pm \mu r) + B,$$

$$T(r,t) = Ar^{-1}\exp(-a\mu^2 t)\cos(\mu r) + B,$$

$$T(r,t) = Ar^{-1}\exp(-a\mu^2 t)\sin(\mu r) + B,$$

где n — произвольное положительное целое число.

Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$T(r,t) = f(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}\boldsymbol{L}^n\big[f(r)\big], \qquad \boldsymbol{L} \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr},$$

где $f(r)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $T(r,0) = f(r)$. Сумма будет конечной, если $f(r)$ является полиномом, который содержит только четные степени.

Решение, содержащее произвольную функцию времени:

$$T(r,t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n(2n+1)!} r^{2n} g_t^{(n)}(t),$$

где $g(t)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция времени. Это решение ограничено при $r = 0$ и обладает следующими свойствами:

$$T(0,t) = g(t), \qquad \partial_r T(0,t) = 0.$$

2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

2.1. В каждой точке твердого сферического тела радиуса R температура одинакова в начальный момент времени $t=0$, а на его границе в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная T_R):

$$\begin{array}{llll} T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = T_R & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Считается, что $T_0 = \text{const}$, $T_R = \text{const}$.

Решение:

$$\frac{T(r,t)-T_R}{T_0-T_R}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}R}{\pi nr}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)\exp\left(-\frac{a\pi^2n^2t}{R^2}\right).$$

Зависимость средней температуры $\overline{T}$ от времени t:

$$\frac{\overline{T}-T_R}{T_0-T_R}=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{a\pi^2n^2t}{R^2}\right),\qquad \overline{T}=\frac{1}{V}\int_v T\,dv,$$

где V — объем шара радиуса R.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 107).

2.2. В каждой точке твердого сферического тела радиуса R известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на его границе в течение всего времени задан закон изменения температуры от времени:

$$\begin{aligned}
&T=f(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
&T=g(t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}\\
&T\neq\infty &&\text{при}\quad r=0 &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,t)=g(t)+\frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)\exp\left(-\frac{a\pi^2n^2t}{R^2}\right)F_n(t),$$

$$F_n(t)=\int_0^R\xi f(\xi)\sin\left(\frac{\pi n\xi}{R}\right)d\xi+\frac{(-1)^nR^2}{\pi n}g(t)-$$
$$-(-1)^n\pi na\int_0^t g(\tau)\exp\left(\frac{a\pi^2n^2\tau}{R^2}\right)d\tau.$$

3. Область: $0\leqslant r\leqslant R$. Вторая краевая задача.

3.1. В каждой точке твердого сферического тела радиуса R температура одинакова в начальный момент времени $t=0$, а на его границе в течение всего времени поддерживается постоянный тепловой поток:

$$\begin{aligned}
&T=T_0 &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
&\partial_rT=g_R &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}\\
&T\neq\infty &&\text{при}\quad r=0 &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Считается, что $T_0=\text{const}$, $g_R=\text{const}$.

Решение:

$$T(r,t)=T_0+g_RR\left[\frac{3at}{R^2}+\frac{5r^2-3R^2}{10R^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2R}{\mu_n^3\cos(\mu_n)r}\sin\left(\frac{\mu_nr}{R}\right)\exp\left(-\frac{a\mu_n^2t}{R^2}\right)\right],$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu_n-\mu_n=0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой): $\mu_1=4.4934$, $\mu_2=7.7253$, $\mu_3=10.9041$, $\mu_4=14.0662$, $\mu_5=17.2208$.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 164).

3.2. В каждой точке твердого сферического тела радиуса R известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела задана зависимость теплового потока от времени:

$$
\begin{array}{lll}
T = f(r) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_r T = g(t) & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\
T \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
T(r,t) = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 f(r)\,dr + \\
+ \frac{3a}{R}\int_0^t g(\tau)\,d\tau + \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)H_n(t),
$$

$$
H_n(t) = \frac{2}{\mu_n^2\cos\mu_n}\left[\frac{1}{R\mu_n}\int_0^R r f(r)\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\,dr + a\int_0^t g(\tau)\exp\Bigl(\frac{a\mu_n^2\tau}{R^2}\Bigr)\,d\tau\right].
$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения: $\operatorname{tg}\mu_n - \mu_n = 0$.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 169).

4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

В каждой точке сферического твердого тела радиуса R температура одинакова в начальный момент времени $t = 0$, а на его границе происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную T_R):

$$
\begin{array}{lll}
T = T_0 & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_r T = k(T_R - T) & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\
T \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

где $k = \text{const}$, $T_0 = \text{const}$, $T_R = \text{const}$.

Решение:

$$
\frac{T(r,t) - T_0}{T_R - T_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R}{r}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr), \quad A_n = \frac{2}{\mu_n}\,\frac{\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n}{\mu_n - \sin\mu_n\cos\mu_n},
$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
(kR - 1)\operatorname{tg}(\mu_n) + \mu_n = 0.
$$

Первые шесть корней этого уравнения приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егер (1964) на стр. 481.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 226).

5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

5.1. Рассматривается концентрическая область между двумя сферами с радиусами R_1 и R_2. В каждой точке этой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на внутренней и внешней границах области в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная соответственно T_1 и T_2):

$$T = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$T = T_1 \quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$T = T_2 \quad \text{при} \quad r = R_2 \quad \text{(граничное условие)}$$

Считается, что $T_1 = \text{const}$, $T_2 = \text{const}$.

Решение:

$$T(r,t) = \frac{R_1 T_1}{r} + \frac{(r-R_1)(R_2T_2 - R_1T_1)}{r(R_2-R_1)} + \\ + \frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi n(r-R_1)}{R_2-R_1}\right] \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 at}{(R_2-R_1)^2}\right] \times \\ \times \left\{\frac{R_2T_2\cos\pi n - R_1T_1}{\pi n} + \frac{1}{R_2-R_1}\int_{R_1}^{R_2} rf(r)\sin\left[\frac{\pi n(r-R_1)}{R_2-R_1}\right]dr\right\}.$$

⊙ Литература: К. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

5.2. Рассматривается концентрическая область между двумя сферами с радиусами R_1 и R_2. Известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на внутренней и внешней границах области заданы законы изменения температуры от времени

$$T = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$T = g(t) \quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$T = h(t) \quad \text{при} \quad r = R_2 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(r,t) = \frac{R_1 g(t)}{r} + \frac{(r-R_1)[R_2h(t) - R_1g(t)]}{r(R_2-R_1)} + \\ + \frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty} M_n(t)\exp\left[-\frac{\pi^2n^2at}{(R_2-R_1)^2}\right]\sin\left[\frac{\pi n(r-R_1)}{R_2-R_1}\right],$$

$$M_n(t) = \frac{1}{R_2-R_1}\int_{R_1}^{R_2}\xi f(\xi)\sin\left[\frac{n\pi(\xi-R_1)}{R_2-R_1}\right]d\xi - \\ - \frac{1}{n\pi}\exp\left[\frac{an^2\pi^2t}{(R_2-R_1)^2}\right]\left[R_1g(t) - (-1)^nR_2h(t)\right] + \\ + \frac{an\pi}{(R_2-R_1)^2}\int_0^t \exp\left[\frac{an^2\pi^2\tau}{(R_2-R_1)^2}\right]\left[R_1g(\tau) - (-1)^nR_2h(\tau)\right]d\tau.$$

6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается концентрическая область между двумя сферами с радиусами R_1 и R_2. В каждой точке этой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а внутренняя

($r = R_1$) и внешняя ($r = R_2$) границы области теплоизолированы:

$$\begin{array}{llll} T = f(r) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T = 0 & \text{при} & r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_r T = 0 & \text{при} & r = R_2 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,t) = \frac{3}{R_2^3 - R_1^3} \int_{R_1}^{R_2} r^2 f(r)\,dr + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\bigl(-a\mu_n^2 t\bigr) F_n(r),$$

$$A_n = \frac{2}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} r f(r) F_n(r)\,dr,$$

$$F_n(r) = \frac{(1 + R_2^2\mu_n^2)^{1/2}\{\sin[\mu_n(r - R_1)] + R_1\mu_n \cos[\mu_n(r - R_1)]\}}{(R_2 - R_1)^{1/2}\bigl[(1 + R_1^2\mu_n^2)(1 + R_2^2\mu_n^2) + (R_1 R_2 \mu_n^2 - 1)\bigr]^{1/2}}.$$

Здесь μ_n — корни характеристического уравнения

$$(\mu^2 R_1 R_2 + 1)\,\mathrm{tg}[\mu(R_2 - R_1)] - \mu(R_2 - R_1) = 0.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается концентрическая область между двумя сферами с радиусами R_1 и R_2. В каждой точке этой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на внутренней и внешней границах области происходит теплообмен (по закону Ньютона) с контактирующими средами, имеющими постоянную температуру (равную нулю):

$$\begin{array}{llll} T = f(r) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T = k_1 T & \text{при} & r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_r T = -k_2 T & \text{при} & r = R_2 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Считается, что $|k_1| + |k_2| \neq 0$.

Решение:

$$T(r,t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\bigl(-a\mu_n^2 t\bigr) F_n(r), \quad A_n = \frac{2}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} r f(r) F_n(r)\,dr,$$

где

$$F_n(r) = \frac{(H^2 + R_2^2\mu_n^2)^{1/2}\{G \sin[\mu_n(r - R_1)] + R_1\mu_n \cos[\mu_n(r - R_1)]\}}{\bigl[(R_2 - R_1)(G^2 + R_1^2\mu_n^2)(H^2 + R_2^2\mu_n^2) + (GR_2 + HR_1)(GH + R_1 R_2 \mu_n^2)\bigr]^{1/2}},$$

$$G = k_1 R_1 + 1, \qquad H = k_2 R_2 - 1,$$

а μ_n — корни характеристического уравнения

$$(GH - R_1 R_2 \mu^2) \sin[\mu(R_2 - R_1)] + \mu(R_1 H + R_2 G) \cos[\mu(R_2 - R_1)] = 0.$$

Предельным случаям $k_1 = 0$, $k_2 \to \infty$ и $k_2 = 0$, $k_1 \to \infty$ соответствуют смешанные краевые задачи.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

8. Область: $R \leqslant r < \infty$. Первая краевая задача.

Известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$ в каждой точке среды, окружающей сферическое тело радиуса R; на поверхности сферы задан закон изменения температуры от времени:

$$T = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$
$$T = g(t) \quad \text{при} \quad r = R \qquad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(r,t) = \frac{1}{2r\sqrt{\pi a t}} \int_R^\infty \xi f(\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(r-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(r+\xi-2R)^2}{4at}\right] \right\} d\xi + \\ + \frac{2R}{r\sqrt{\pi}} \int_z^\infty g\left(t - \frac{(r-R)^2}{4a\tau^2}\right) \exp(-\tau^2)\, d\tau, \qquad z = \frac{r-R}{2\sqrt{at}}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 243).

Частный случай. Температура окружающей среды одинакова в начальный момент времени $t = 0$, на поверхности сферы поддерживается постоянная температура:

$$f(r) = T_0, \quad g(t) = T_R, \qquad \text{где} \quad T_R, T_0 = \text{const}.$$

Решение:

$$\frac{T - T_0}{T_R - T_0} = \frac{R}{r} \operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{at}}\right),$$

где $\operatorname{erfc} z \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-\xi^2)\, d\xi$ — интеграл вероятностей.

1.1.7. Уравнение $\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \Phi(r,t)$

Это уравнение встречается в сферически симметричных задачах теплопроводности с тепловыделением (функция Φ пропорциональна количеству тепла, выделяемому в единицу времени в рассматриваемом объеме). Оно описывает развитие одномерных (не зависящих от угловых координат) нестационарных тепловых процессов в твердом теле, имеющем форму шара или сферического слоя.

1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

В каждой точке шара радиуса R известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела $r = R$ в течение всего времени задан закон изменения температуры от времени:

$$T = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$
$$T = g(t) \quad \text{при} \quad r = R \qquad \text{(граничное условие)}$$
$$T \neq \infty \quad \text{при} \quad r = 0 \qquad \text{(граничное условие)}$$

Замена $U(r,t) = rT(r,t)$ приводит к неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r\Phi(r,t),$$

которое рассматривается в разд. 1.1.2. Начальные и граничные условия принимают вид

$$
\begin{array}{llll}
U = rf(r) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
U = Rg(t) & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)}\\
U = 0 & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Используя результаты решения задачи для функции U (см. п. 5.2 в разд. 1.1.2), в итоге получим

$$
T(r,t) = \frac{1}{r}\int_0^t\int_0^R \xi G(r,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau +
$$

$$
+ g(t) + \frac{2}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty} M_n(t)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{R^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right),
$$

где

$$
G(r,\xi,t) = \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{R}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{R^2}\right),
$$

$$
M_n(t) = \int_0^R \xi f(\xi)\sin\left(\frac{\pi n\xi}{R}\right)d\xi + \frac{(-1)^n R^2}{\pi n}g(t) -
$$

$$
-(-1)^n\pi n a\int_0^t g(\tau)\exp\left(\frac{a\pi^2 n^2\tau}{R^2}\right)d\tau.
$$

2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

В каждой точке шара радиуса R известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его границе $r = R$ задана зависимость теплового потока от времени:

$$
\begin{array}{llll}
T = f(r) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_r T = g(t) & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)}\\
T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
T(r,t) = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 f(r)\,dr + \frac{3a}{R}\int_0^t g(\tau)\,d\tau + \frac{3}{R^3}\int_0^t\int_0^R r^2\Phi(r,\tau)\,dr\,d\tau +
$$

$$
+ \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\mu_n r)}{r\sin^2(\mu_n R)}\exp(-a\mu_n^2 t)\int_0^R rf(r)\sin(\mu_n r)\,dr +
$$

$$
+ 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\mu_n r)}{r\sin(\mu_n R)}\exp(-a\mu_n^2 t)\int_0^t g(\tau)\exp(a\mu_n^2\tau)\,d\tau +
$$

$$
+ \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\mu_n r)}{\sin^2(\mu_n R)}\int_0^t\int_0^R \Phi(r,\tau)r\sin(\mu_n r)\exp(a\mu_n^2\tau)\,dr\,d\tau,
$$

где μ_n — корни характеристического уравнения $\operatorname{tg}(\mu_n R) - \mu_n R = 0$.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 337).

1.1.8. Другие уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, содержащие степенные функции

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bt + c)T.$

Это уравнение описывает массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда коэффициент химической реакции зависит от времени по линейному закону. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.1 при $f(t) = bt + c$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = (Ax + B)\exp\left(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\right),$$
$$T(x,t) = A(x^2 + 2at)\exp\left(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\right),$$
$$T(x,t) = A\exp\left(\mu x + \mu^2 at + \tfrac{1}{2}bt^2 + ct\right).$$

2. Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\left(\frac{1}{2}bt^2 + ct\right)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx} u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bx + c)T.$

Это уравнение описывает массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда коэффициент химической реакции зависит от координаты по линейному закону. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.2 при $f(x) = bx + c$ и, кроме того, частным случаем уравнения 1.1.10.6 при $f(t) = b$, $g(t) = c$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\left(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + ct\right),$$
$$T(x,t) = A(x + abt^2)\exp\left(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + ct\right),$$
$$T(x,t) = A\exp\left[x(bt + \mu) + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + ab\mu t^2 + (a\mu^2 + c)t\right],$$
$$T(x,t) = A\exp(-\mu t)\sqrt{\xi}\,J_{1/3}\left(\frac{2}{3b\sqrt{a}}\xi^{3/2}\right), \quad \xi = bx + c + \mu,$$
$$T(x,t) = A\exp(-\mu t)\sqrt{\xi}\,Y_{1/3}\left(\frac{2}{3b\sqrt{a}}\xi^{3/2}\right), \quad \xi = bx + c + \mu,$$

где $J_{1/3}(z)$ и $Y_{1/3}(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\exp\left(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + ct\right), \quad z = x + abt^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz} u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bx + ct + d)T.$

Это уравнение описывает массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда ее коэффициент скорости является линейной функцией времени и температуры. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.6 при $f(t) = b$, $g(t) = ct + d$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + \tfrac{1}{2}ct^2 + dt\bigr),$$
$$T(x,t) = A(x + abt^2)\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + \tfrac{1}{2}ct^2 + dt\bigr),$$
$$T(x,t) = A\exp(\tfrac{1}{2}ct^2 - \mu t)\sqrt{\xi}\,J_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3b\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = bx + d + \mu,$$
$$T(x,t) = A\exp(\tfrac{1}{2}ct^2 - \mu t)\sqrt{\xi}\,Y_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3b\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = bx + d + \mu,$$

где $J_{1/3}(\xi)$ и $Y_{1/3}(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + \tfrac{1}{2}ct^2 + dt\bigr), \quad z = x + abt^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (bx^2 + c)T.$

Это уравнение описывает массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда ее коэффициент скорости является квадратичной функцией координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.2 при $f(x) = -bx^2 - c$ и, кроме того, частным случаем уравнения 1.1.10.7 при $f(t) = -c$ (поэтому может быть сведено к уравнению с постоянными коэффициентами).

Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\Bigl[\bigl(\sqrt{ab} - c\bigr)t + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\Bigr],$$
$$T(x,t) = A\exp\Bigl[-\bigl(\sqrt{ab} + c\bigr)t - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\Bigr],$$
$$T(x,t) = A\exp\Bigl(-\mu t - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\Bigr)\Phi\Bigl(\frac{c+\mu}{4\sqrt{ab}} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \sqrt{\frac{b}{a}}x^2\Bigr),$$
$$T(x,t) = A\exp\Bigl(-\mu t - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\Bigr)x\Phi\Bigl(\frac{c+\mu}{4\sqrt{ab}} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; \sqrt{\frac{b}{a}}x^2\Bigr),$$

где $\Phi(\alpha,\,\beta;\,z) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}\,\dfrac{z^m}{m!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x(bt+c)T.$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда коэффициент скорости реакции является функцией времени и координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.3 при $f(t) = bt + c$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3)\bigr],$$
$$T(x,t) = A\bigl[x + a(\tfrac{1}{3}bt^3 + ct^2)\bigr]\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a\phi(t)\bigr],$$
$$T(x,t) = A\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct + \mu) + a\mu(\tfrac{1}{3}bt^3 + ct^2 + \mu t) + a\phi(t)\bigr],$$

где $\phi(t) = \frac{1}{20}b^2t^5 + \frac{1}{4}bct^4 + \frac{1}{3}c^2t^3$.

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3)\bigr],$$
$$z = x + a\bigl(\tfrac{1}{3}bt^3 + ct^2\bigr)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

6. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bxt + cx + dt + e)T.$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда коэффициент скорости реакции является функцией времени и координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.6 при $f(t) = bt + c$, $g(t) = dt + e$.

1. Точное решение:

$$T(x,t) = \exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3) + \tfrac{1}{2}dt^2 + et\bigr].$$

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2+ct)+a(\tfrac{1}{20}b^2t^5+\tfrac{1}{4}bct^4+\tfrac{1}{3}c^2t^3)+\tfrac{1}{2}dt^2+et\bigr],$$
$$z = x+a(bt^2+2ct)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

7. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (-bx^2 + ct + d)T.$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда коэффициент скорости реакции является линейной функцией времени и квадратичной функцией координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.7 при $f(t) = ct + d$.

1. Точные решения (A — любое):

$$T(x,t) = A\exp\Big[\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2 + \frac{1}{2}ct^2 + (\sqrt{ab}+d)t\Big],$$
$$T(x,t) = Ax\exp\Big[\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2 + \frac{1}{2}ct^2 + (3\sqrt{ab}+d)t\Big].$$

2. Преобразование (A — произвольная постоянная)

$$T(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big[\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2 + \frac{1}{2}ct^2 + (\sqrt{ab}+d)t\Big],$$
$$z = x\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big), \quad \tau = \frac{\sqrt{a}}{4\sqrt{b}}\exp\big(4\sqrt{ab}\,t\big) + A$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

8. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x(-bx+ct+d)T.$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда коэффициент скорости реакции является функцией времени и координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.8 при $f(t) = ct + d$.

9. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bx^2t^n + cxt^m + dt^k)T.$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда коэффициент скорости реакции является степенной функцией времени и координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.9 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = dt^k$.

10. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bt+c)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это уравнение описывает нестационарный конвективный теплоперенос в движущейся среде, когда скорость движения является линейной функцией времени. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.10 при $f(t) = bt + c$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = 2Ax + A(bt^2 + 2ct) + B,$$
$$T(x,t) = A\big(x + \tfrac{1}{2}bt^2 + ct\big)^2 + 2aAt,$$
$$T(x,t) = A\exp\big[\mu x + \tfrac{1}{2}\mu bt^2 + (a\mu^2 + \mu c)t\big].$$

2. Замена $z = x + \frac{1}{2}bt^2 + ct$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

11. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это уравнение описывает нестационарный конвективный теплоперенос в движущейся среде, когда скорость движения является линейной функцией координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.11 при $f(x) = bx$ и, кроме того, частным случаем уравнения 1.1.10.12 при $f(t) = b$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$
\begin{aligned}
T(x) &= A\int \exp\Bigl(-\tfrac{b}{2a}x^2\Bigr)\,dx + B,\\
T(x,t) &= Axe^{bt} + B,\\
T(x,t) &= Abx^2e^{2bt} + Aae^{2bt} + B,\\
T(x,t) &= A\exp\bigl(2b\mu xe^{bt} + 2ab\mu^2e^{2bt}\bigr) + B.
\end{aligned}
$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \frac{A^2}{2b}e^{2bt} + B, \quad z = Axe^{bt},$$

для функции $T(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

12. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bt^2 + c)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это уравнение описывает нестационарный конвективный теплоперенос в движущейся среде, когда скорость является квадратичной функцией времени. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.10 при $f(t) = bt^2 + c$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$
\begin{aligned}
T(x,t) &= A\bigl(x + \tfrac{1}{3}bt^3 + ct\bigr) + B,\\
T(x,t) &= A\bigl(x + \tfrac{1}{3}bt^3 + ct\bigr)^2 + 2aAt,\\
T(x,t) &= A\exp\bigl[\mu x + \tfrac{1}{3}\mu bt^3 + \mu(a\mu + c)t\bigr].
\end{aligned}
$$

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \frac{1}{3}bt^3 + ct$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

13. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x(bt + c)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это уравнение описывает нестационарный конвективный теплоперенос в движущейся среде, когда скорость является функцией времени и координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.12 при $f(t) = bt + c$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = Ax\exp\bigl(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\bigr) + B,$$

$$T(x,t) = Ax^2\exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr) + 2Aa\int\exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr)\,dt + B,$$

$$T(x,t) = A\exp\Bigl[\mu x\exp\bigl(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\bigr) + a\mu^2\int\exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr)\,dt\Bigr] + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = A\int\exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr)\,dt + B, \quad z = x\exp\bigl(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\bigr),$$

для функции $T(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

14. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial T}{\partial x} + (cx + d)T.$

Это уравнение описывает конвективный массоперенос в движущейся с постоянной скоростью среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, коэффициент скорости которой является линейной функцией координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.36 при $n(t) = a$, $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c$, $s(t) = d$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\Bigl[ctx - \frac{b}{2a}x + \frac{1}{3}ac^2t^3 + \Bigl(d - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr],$$

$$T(x,t) = A(x + act^2)\exp\Bigl[ctx - \frac{b}{2a}x + \frac{1}{3}ac^2t^3 + \Bigl(d - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr],$$

$$T(x,t) = A\exp\Bigl[x\Bigl(ct + \mu - \frac{b}{2a}\Bigr) + \frac{1}{3}ac^2t^3 + ac\mu t^2 + \Bigl(a\mu^2 + d - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr],$$

$$T(x,t) = A\exp\Bigl(-\mu t - \frac{b}{2a}x\Bigr)\sqrt{\xi}\,J_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3c\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = cx + \mu + d - \frac{b^2}{4a},$$

$$T(x,t) = A\exp\Bigl(-\mu t - \frac{b}{2a}x\Bigr)\sqrt{\xi}\,Y_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3c\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = cx + \mu + d - \frac{b^2}{4a},$$

где $J_{1/3}(\xi)$ и $Y_{1/3}(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\Bigl[ctx - \frac{b}{2a}x + \frac{1}{3}ac^2t^3 + \Bigl(d - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr], \quad z = x + act^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

15. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial T}{\partial x} + (cx + d)T.$

Это уравнение описывает конвективный массоперенос в движущейся среде с объемной химической реакцией первого порядка, когда скорость движения и коэффициент скорости химической реакции являются линейными функциями координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.36 при $n(t)=a$, $f(t)=b$, $g(t)=0$, $h(t)=c$, $s(t)=d$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t)=A\exp\Bigl[-\frac{c}{b}x+\Bigl(d+\frac{ac^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$T(x,t)=A\Bigl(x-\frac{2ac}{b^2}\Bigr)\exp\Bigl[-\frac{c}{b}x+\Bigl(b+d+\frac{ac^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$T(x,t)=A\exp\Bigl[\frac{a\mu^2}{2b}e^{2bt}+\mu e^{bt}\Bigl(x-\frac{2ac}{b^2}\Bigr)-\frac{c}{b}x+\Bigl(d+\frac{ac^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr].$$

Более сложные решения см. в 1.1.8.31.

2. Преобразование

$$T(x,t)=u(z,\tau)\exp\Bigl[-\frac{c}{b}x+\Bigl(d+\frac{ac^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$\tau=\frac{a}{2b}e^{2bt},\quad z=e^{bt}\Bigl(x-\frac{2ac}{b^2}\Bigr)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u=\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

16. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+(bx+c)\dfrac{\partial T}{\partial x}+(dx+e)T.$

Это уравнение описывает конвективный массоперенос в движущейся среде с объемной химической реакцией первого порядка, когда скорость движения среды и коэффициент скорости химической реакции являются линейными функциями координаты. При $b=0$ см. уравнение 1.1.8.14. При $b\neq 0$ замена $z=x+c/b$ приводит к уравнению вида 1.1.8.15:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+bz\frac{\partial T}{\partial z}+(dz+e-cd/b)T.$$

17. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+2(ax+b)\dfrac{\partial T}{\partial x}+(ax^2+2abx+c)T.$

Это безразмерное уравнение, которое описывает конвективный массоперенос в движущейся среде с объемной химической реакцией первого порядка, когда скорость движения среды является линейной, а коэффициент скорости химической реакции — квадратичной функцией координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.33 и частным случаем уравнения 1.1.10.37. Замена $T(x,t)=u(x,t)\exp\bigl(-\frac{1}{2}ax^2-bx\bigr)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u=a^2\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

18. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+(ax+b)\dfrac{\partial T}{\partial x}+(cx^2+dx+e)T.$

Это уравнение является частным случаем уравнения 1.1.10.33 и частным случаем уравнения 1.1.10.37.

1. Замена

$$T(x,t) = u(x,t)\exp\left(\tfrac{1}{2}Ax^2\right),$$

где A — корень квадратного уравнения $A^2+aA+c=0$, дает уравнение вида 1.1.8.16:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[(2A+a)x+b\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \left[(bA+d)x+e\right]u,$$

которое сводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

2. Замена

$$T(x,t) = u(x,t)\exp\left(\tfrac{1}{2}Ax^2 + Bx + Ct\right)$$

приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &+ \left[(2A+a)x+2B+b\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ \left[(A^2+aA+c)x^2+(2AB+aB+bA+d)x+B^2+bB+A+e-C\right]u.\end{aligned}$$

Подходящим выбором коэффициентов A, B, C можно различным образом упростить исходное уравнение.

19. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (ax+bt+c)\frac{\partial T}{\partial x} + (sx^2+ptx+qt^2+kx+lt+m)T.$

Это безразмерное уравнение описывает нестационарный конвективный массоперенос в движущейся среде с химической реакцией первого порядка, когда скорость среды и коэффициент скорости химической реакции являются функциями времени и координаты. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.37.

20. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\frac{x}{t}\frac{\partial T}{\partial x}.$

Уравнение Ильковича. Оно описывает теплоперенос к поверхности растущей капли, которая вытекает из тонкого капилляра в раствор жидкости (массовый расход движущейся по капилляру жидкости считается постоянным).

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$\begin{aligned}T(x,t) &= Axt^b + B,\\ T(x,t) &= A(2b+1)x^2t^{2b} + 2Aat^{2b+1} + B,\\ T(x,t) &= A\exp\left(\mu xt^b + \frac{a\mu^2}{2b+1}t^{2b+1}\right) + B.\end{aligned}$$

2. Переходя от t, x к новым переменным

$$\tau = \frac{1}{2b+1}t^{2b+1}, \quad z = xt^b,$$

для функции $T(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

3. Решение исходного уравнения в важном частном случае, когда поверхность капли имеет постоянную во времени температуру T_s, а теплоперенос происходит в бесконечную среду, имеющую первоначальную температуру T_0:

$$\begin{aligned} &T = T_0 \quad &\text{при} \quad t = 0 \quad &\text{(начальное условие)} \\ &T = T_s \quad &\text{при} \quad x = 0 \quad &\text{(граничное условие)} \\ &T \to T_0 \quad &\text{при} \quad x \to \infty \quad &\text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

(T_0, T_s считаются постоянными), выражается через функцию вероятностей:

$$\frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2b+1}}{2\sqrt{a}} \frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad \operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi.$$

⊙ Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985, стр. 303).

21. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bt^k x + ct^m) \dfrac{\partial T}{\partial x} + st^n T.$

Это уравнение описывает нестационарный конвективный массоперенос в движущейся среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда скорость среды является степенной функцией времени и координаты, а коэффициент скорости химической реакции является степенной функцией времени. Оно является частным случаем уравнения 1.1.10.17 при $f(t) = bt^k$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = st^n$.

22. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{1 - 2\beta}{x} \dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это безразмерное уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя. При $\beta = 0$ см. уравнение из разд. 1.1.4, при $\beta = \frac{1}{2}$ — уравнение из разд. 1.1.1, а при $\beta = -\frac{1}{2}$ — уравнение из разд. 1.1.6.

1. Точные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$T(x) = A + Bx^{2\beta},$$

$$T(x,t) = A + 4(1-\beta)Bt + Bx^2,$$

$$T(x,t) = x^{2n} + \sum_{p=1}^{n} \frac{4^p}{p!} s_{n,p} s_{n-\beta,p} t^p x^{2(n-p)}, \quad s_{n,p} = n(n-1)\dots(n-p+1),$$

$$T(x,t) = A + 4(1+\beta)Btx^{2\beta} + Bx^{2\beta+2},$$

$$T(x,t) = A + Bt^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

$$T(x,t) = A + B\frac{x^{2\beta}}{t^{\beta+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

$$T(x,t) = A + B\int_0^{\zeta} z^{\beta-1} e^{-z} dz, \quad \zeta = \frac{x^2}{4t},$$

$$T(x,t) = A + B\frac{x^\beta}{t}\exp\Bigl(-\frac{x^2+\mu^2}{4t}\Bigr)I_\beta\Bigl(\frac{\mu x}{2t}\Bigr),$$
$$T(x,t) = A + B\frac{x^\beta}{t}\exp\Bigl(-\frac{x^2+\mu^2}{4t}\Bigr)I_{-\beta}\Bigl(\frac{\mu x}{2t}\Bigr),$$

где n — произвольное положительное целое число, $I_\beta(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$T(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\,\mathbf{L}^n[f(x)], \qquad \mathbf{L} \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1-2\beta}{x}\frac{d}{dx},$$

где $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $T(x,0) = f(x)$. Сумма будет конечной, если $f(x)$ является полиномом, который содержит только четные степени.

Решение, содержащее произвольную функцию времени:

$$T(x,t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n n!\,(1-\beta)(2-\beta)\ldots(n-\beta)}x^{2n}g_t^{(n)}(t),$$

где $g(t)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение ограничено при $x = 0$ и обладает следующими свойствами:

$$T(0,t) = g(t), \qquad \partial_x T(0,t) = 0.$$

2. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

В каждой точке полубесконечной среды известно начальное распределение температуры в момент времени $t = 0$, и задан закон изменения температуры от времени на границе $x = 0$:

$$\begin{aligned} &T = f(x) \quad &&\text{при} \quad t = 0 \quad &&\text{(начальное условие)}\\ &T = g(t) \quad &&\text{при} \quad x = 0 \quad &&\text{(граничное условие)}\end{aligned}$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$T(x,t) = \frac{x^\beta}{2t}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta}\exp\Bigl(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\Bigr)I_\beta\Bigl(\frac{\xi x}{2t}\Bigr)\,d\xi + {}$$
$$+ \frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta}\Gamma(\beta)}\int_0^t g(\tau)\exp\Bigl[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Bigr]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}}.$$

Частный случай. Начальная температура во всех точках среды одинакова и равна T_0, а на границе в течение всего времени поддерживается постоянная температура T_1:

$$f(x) = T_0, \qquad g(t) = T_1.$$

Решение:

$$T = \frac{(T_0 - T_1)}{\Gamma(\beta)}\gamma\Bigl(\beta, \frac{x^2}{4t}\Bigr) + T_1, \qquad \gamma(\beta,z) = \int_0^z \xi^{\beta-1}e^{-\xi}\,d\xi,$$

где $\gamma(\beta,z)$ — неполная гамма-функция, $\Gamma(\beta) = \gamma(\beta,\infty)$ — гамма-функция.

3. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

В каждой точке полубесконечной среды известно начальное распределение температуры в момент времени $t = 0$, и задан закон изменения теплового потока от времени на границе $x = 0$:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\left(x^{1-2\beta}\partial_x T\right) = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$T = \frac{x^\beta}{2t}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta}\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\right)I_{-\beta}\left(\frac{\xi x}{2t}\right)d\xi - \\ - \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t g(\tau)\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}.$$

4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

В начальный момент времени $t = 0$ все точки тела имеют одинаковую температуру (равную нулю), а на границе тела $x = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру T_0:

$$T = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\left[x^{1-2\beta}\partial_x T + k(T_0 - T)\right] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$T = T_0\frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \varphi(\tau)\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}},$$

где функция $\varphi(t)$ задается в виде степенного ряда

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\mu t^\beta)^n}{\Gamma(n\beta+1)}, \qquad \mu = \frac{2^{2\beta-1}k\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)},$$

который сходится для всех x.

⊙ Литература: W. G. L. Sutton (1943), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 273).

23. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{1-2\beta}{x}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \Phi(x,t).$

Это безразмерное уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя при наличии источников или стоков вещества. При $\beta = 0$ см. уравнение из разд. 1.1.5, при $\beta = \frac{1}{2}$ — уравнение из разд. 1.1.2, а при $\beta = -\frac{1}{2}$ — уравнение из разд. 1.1.7.

1. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

В каждой точке полубесконечной среды известно начальное распределение температуры в момент времени $t = 0$, и задан закон изменения температуры от времени на границе $x = 0$:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$T = \frac{x^\beta}{2t} \int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta} \exp\Bigl(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\Bigr) I_\beta\Bigl(\frac{\xi x}{2t}\Bigr)\,d\xi + \\ + \frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta}\Gamma(\beta)} \int_0^t g(\tau) \exp\Bigl[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Bigr] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi,\tau) \frac{\xi^\beta x^\beta}{t-\tau} \exp\Bigl[-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\Bigr] I_\beta\Bigl(\frac{\xi x}{2(t-\tau)}\Bigr)\,d\xi\,d\tau.$$

2. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

В каждой точке полубесконечной среды известно начальное распределение температуры в момент времени $t = 0$, и задан закон изменения теплового потока от времени на границе $x = 0$:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\Bigl(x^{1-2\beta}\frac{\partial T}{\partial x}\Bigr) = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$T = \frac{x^\beta}{2t} \int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta} \exp\Bigl(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\Bigr) I_{-\beta}\Bigl(\frac{\xi x}{2t}\Bigr)\,d\xi - \\ - \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t g(\tau) \exp\Bigl[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Bigr] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi,\tau) \frac{\xi^\beta x^\beta}{t-\tau} \exp\Bigl[-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\Bigr] I_{-\beta}\Bigl(\frac{\xi x}{2(t-\tau)}\Bigr)\,d\xi\,d\tau.$$

⊙ Литература: W. G. L. Sutton (1943).

24. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Bigl(cx + \frac{b}{x}\Bigr)\frac{\partial T}{\partial x}.$

Переходя от x, t к новым переменным z, τ по формулам

$$z = xe^{ct}, \quad \tau = \frac{a}{2c}e^{2ct} + \text{const},$$

получим более простое уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\mu}{z}\frac{\partial T}{\partial z}, \qquad \mu = \frac{b}{a}.$$

При разных значениях μ см. уравнения из разд. 1.1.4, 1.1.6.

25. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Bigl(ct^n x + \frac{b}{x}\Bigr)\frac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.15 при $f(t) = ct^n$.

26. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = ax\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.26 при $f(x) = ax$, $\Phi \equiv 0$.

Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x) = Ax + B,$$
$$T(x,t) = Aat + A(x\ln x - x) + B,$$
$$T(x,t) = 2Aatx + Ax^2 + B,$$
$$T(x,t) = Aa^2t^2 + 2Aat(x\ln x - x) + A(x^2\ln x - \tfrac{5}{2}x^2) + B,$$
$$T(x,t) = Aa^2t^2x + Aatx^2 + \tfrac{1}{6}Ax^3 + B,$$
$$T(x,t) = 2Aa^3t^3x + 3Aa^2t^2x^2 + Aatx^3 + \tfrac{1}{12}Ax^4 + B,$$
$$T(x,t) = x^n + \sum_{p=1}^{n} \frac{[n(n-1)\dots(n-p)]^2}{n(n-p)p!}(at)^p x^{n-p},$$
$$T(x,t) = e^{\mu t}\sqrt{x}\left[AJ_1\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{-\mu x}\right) + BY_1\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{-\mu x}\right)\right] \quad \text{при } \mu < 0,$$
$$T(x,t) = e^{\mu t}\sqrt{x}\left[AI_1\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{\mu x}\right) + BK_1\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{\mu x}\right)\right] \quad \text{при } \mu > 0,$$

где $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ — функции Бесселя, $I_1(z)$ и $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$T(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}\mathbf{L}^n[f(x)], \qquad \mathbf{L} \equiv x\frac{d^2}{dx^2},$$

где $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $T(x,0) = f(x)$. Сумма будет конечной, если $f(x)$ является полиномом.

Решение, содержащее произвольную функцию времени:

$$T(x,t) = A + xg(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[(n-1)!]^2 a^{n-1}} x^n g_t^{(n-1)}(t),$$

где $g(t)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция, A — произвольная постоянная. Это решение обладает свойствами

$$T(0,t) = A, \qquad \partial_x T(0,t) = g(t).$$

27. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = ax\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (-bx + c)T.$

Преобразование

$$T(x,t) = u(z,\tau)\exp\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x + ct\right),\ z = x\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr),\ \tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr)$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.8.26:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

28. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bt^n x + ct^m)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.18 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^m$.

29. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bxt^n T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.39 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = bt^n$, $s(t) = 0$.

30. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Big[(x+b)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big].$

Это уравнение описывает теплоперенос в неподвижной среде (твердом теле), когда коэффициент температуропроводности является линейной функцией координаты.

1. Исходное уравнение можно записать в более привычном для приложений виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big[(x+b)\frac{\partial T}{\partial x}\Big].$$

2. Замена $x = \frac{1}{4}z^2 - b$ приводит к уравнению вида 1.1.4:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial T}{\partial z}\Big).$$

31. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = (b_2 x + c_2)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (b_1 x + c_1)\dfrac{\partial T}{\partial x} + (b_0 x + c_0)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.33 при $f(x) = b_2 x + c_2$, $g(x) = b_1 x + c_1$, $h(x) = b_0 x + c_0$, $\Phi \equiv 0$.

Пусть

$$\mathcal{J}(b,c;x) = C_1\Phi(b,c;x) + C_2\Psi(b,c;x), \qquad C_1,\, C_2 \text{ — любые},$$

является произвольным решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$xy''_{xx} + (c-x)y'_x - by = 0,$$

а функция

$$Z_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \qquad C_1,\, C_2 \text{ — любые},$$

является произвольным решением уравнения Бесселя

$$x^2 y''_{xx} + xy'_x + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Результаты решения исходного уравнения приведены в итоговой табл. 1.

О вырожденных гипергеометрических функциях Φ и Ψ см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1973). О функциях Бесселя J_ν и Y_ν см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1974).

ТАБЛИЦА 1

Точные решения уравнения 1.1.8.31 при различных значениях определяющих параметров (μ — произвольный параметр).

Частное решение: $T(x,t)=\exp(hx-\mu t)F(\xi)$, где $\xi=\dfrac{x-\gamma}{p}$					
Условия	h	p	γ	F	Параметры
$b_2\neq 0$, $D\neq 0$	$\dfrac{D-b_1}{2b_2}$	$-\dfrac{b_2}{A(h)}$	$-\dfrac{c_2}{b_2}$	$\mathcal{J}(b,c;\xi)$	$b=B(h)/A(h)$, $c=(b_2c_1-b_1c_2)b_2^{-2}$
$b_2=0$, $b_1\neq 0$	$-\dfrac{b_0}{b_1}$	1	$-\dfrac{2c_2h+c_1}{b_1}$	$\mathcal{J}\bigl(b,\frac{1}{2};n\xi^2\bigr)$	$b=B(h)/(2b_1)$, $n=-b_1/(2c_2)$
$b_2\neq 0$, $b_1^2=4b_0b_2$	$-\dfrac{b_1}{2b_2}$	b_2	$-\dfrac{c_2}{b_2}$	$\xi^\alpha Z_{2\alpha}\bigl(\beta\sqrt{\xi}\bigr)$	$\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2c_2h+c_1}{2b_2}$, $\beta=2\sqrt{B(h)}$
$b_2=b_1=0$, $b_0\neq 0$	$-\dfrac{c_1}{2c_2}$	1	$\dfrac{4(c_0+\mu)c_2-c_1^2}{4b_0c_2}$	$\xi^{1/2}Z_{1/3}\bigl(n\xi^{3/2}\bigr)$	$n=\dfrac{2}{3}\Bigl(\dfrac{b_0}{c_2}\Bigr)^{1/2}$
Обозначения: $D^2=b_1^2-4b_0b_2$, $A(h)=2b_2h+b_1$, $B(h)=c_2h^2+c_1h+c_0+\mu$					

32. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=axt\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}+(bx+ct^n)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.39 при $f(t)=at$, $g(t)=0$, $h(t)=b$, $s(t)=ct^n$.

33. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=axt^l\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}+bxt^m\dfrac{\partial T}{\partial x}+ct^nT.$

Частный случай уравнения 1.1.10.39 при $f(t)=at^l$, $g(t)=bt^m$, $h(t)=0$, $s(t)=ct^n$.

34. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=x\Bigl(at^l\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}+bt^m\dfrac{\partial T}{\partial x}+ct^nT\Bigr).$

Частный случай уравнения 1.1.10.39 при $f(t)=at^l$, $g(t)=bt^m$, $h(t)=ct^n$, $s(t)=0$.

35. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=ax^2\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}+bx\dfrac{\partial T}{\partial x}+cT.$

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t)=\bigl(A\ln|x|+B\bigr)|x|^n\exp\bigl[(c-an^2)t\bigr],$$
$$T(x,t)=A\bigl(2at+\ln^2|x|\bigr)|x|^n\exp\bigl[(c-an^2)t\bigr],$$
$$T(x,t)=A|x|^\mu\exp\bigl[(c+a\mu^2-2an\mu)t\bigr],$$

где $n=\dfrac{a-b}{2a}$.

2. Преобразование

$$T(x,t) = |x|^n \exp\big[(c - an^2)t\big]u(z,t), \quad z = \ln|x|, \qquad n = \frac{a-b}{2a},$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

36. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bt^n + c)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.19 при $f(t) = bt^n + c$.

Преобразование

$$T(x,t) = \exp\Big(\frac{b}{n+1}t^{n+1} + ct\Big)u(z,\tau), \quad z = \ln|x|, \quad \tau = at$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 1.1.3.3:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z}.$$

37. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial T}{\partial x} + (cx^n + s)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.33 при $f(x) = ax^2$, $g(x) = bx$, $h(x) = cx^n + s$, $\Phi \equiv 0$, n — любое.

При $c = 0$ см. уравнение 1.1.8.35.

Точные решения при $c \neq 0$:

$$T(x,t) = Ae^{-\mu t}x^{\frac{a-b}{2a}}J_\nu\Big(\frac{2}{n}\sqrt{\frac{c}{a}}\,x^{\frac{n}{2}}\Big), \quad \nu = \frac{1}{an}\sqrt{(a-b)^2 - 4a(s+\mu)},$$
$$T(x,t) = Ae^{-\mu t}x^{\frac{a-b}{2a}}Y_\nu\Big(\frac{2}{n}\sqrt{\frac{c}{a}}\,x^{\frac{n}{2}}\Big), \quad \nu = \frac{1}{an}\sqrt{(a-b)^2 - 4a(s+\mu)},$$

где A, μ — произвольные постоянные; $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя.

38. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a_2x^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (a_1x^2 + b_1x)\dfrac{\partial T}{\partial x} + (a_0x^2 + b_0x + c_0)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.33 при $f(x) = a_2x^2$, $g(x) = a_1x^2 + b_1x$, $h(x) = a_0x^2 + b_0x + c_0$, $\Phi \equiv 0$, n — любое.

1. Точные решения при $a_1^2 \neq 4a_0a_2$:

$$\begin{aligned} T(x,t) &= A\exp(-\nu t + \mu x)x^n\Phi\Big(\alpha,\ 2n + \frac{b_1}{a_2};\ -\gamma x\Big),\\ T(x,t) &= A\exp(-\nu t + \mu x)x^n\Psi\Big(\alpha,\ 2n + \frac{b_1}{a_2};\ -\gamma x\Big), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, ν — произвольные постоянные, $n = n(\nu)$ — корень квадратного уравнения $a_2n^2 + (b_1 - a_2)n + c_0 + \nu = 0$,

$$\mu = \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} - a_1}{2a_2}, \quad \alpha = \frac{(b_1 + 2a_2n)\mu + b_0 + a_1n}{2a_2\mu + a_1}, \quad \gamma = 2\mu + \frac{a_1}{a_2},$$

$\Phi(\alpha,\beta;z)$ и $\Psi(\alpha,\beta;z)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

О вырожденных гипергеометрических функциях см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1973).

2. Точные решения при $a_1^2 = 4a_0a_2$:

$$T(x,t) = A\exp\Big(-\nu t - \frac{a_1}{2a_2}x\Big)x^n\xi^m J_{2m}\big(2\sqrt{p\xi}\,\big), \quad \xi = \frac{x}{a_2},$$
$$T(x,t) = A\exp\Big(-\nu t - \frac{a_1}{2a_2}x\Big)x^n\xi^m Y_{2m}\big(2\sqrt{p\xi}\,\big), \quad \xi = \frac{x}{a_2}, \tag{2}$$

где A, ν — произвольные постоянные, $n = n(\nu)$ — корень квадратного уравнения $a_2n^2 + (b_1 - a_2)n + c_0 + \nu = 0$,

$$m = \frac{1}{2} - n - \frac{b_1}{2a_2}, \quad p = -\frac{a_1}{2a_2}(b_1 + 2a_2n) + b_0 + a_1n = 0,$$

$J_m(z)$ и $Y_m(z)$ — функции Бесселя.

О функциях Бесселя см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1974).

Замечание. В решениях (1), (2) параметр n можно считать произвольным, а параметр $\nu = -a_2n^2 - (b_1 - a_2)n - c_0$.

39. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a_2x^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (a_1x^{n+1} + b_1x)\frac{\partial T}{\partial x} + (a_0x^{2n} + b_0x^n + c_0)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.33 в случае $f(x) = a_2x^2$, $g(x) = a_1x^{n+1} + b_1x$, $h(x) = a_0x^{2n} + b_0x^n + c_0$, $\Phi \equiv 0$ где n — любое.

Замена $z = \xi^n$ приводит к уравнению вида 1.1.8.38:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_2n^2\xi^2\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + n\big(a_1\xi^2 + \beta\xi\big)\frac{\partial T}{\partial \xi} + (a_0\xi^2 + b_0\xi + c_0)T,$$

где $\beta = b_1 + a_2(n-1)$.

40. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = ax^2t^l\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bt^mx\frac{\partial T}{\partial x} + ct^nT.$

Частный случай уравнения 1.1.10.40 при $f(t) = at^l$, $g(t) = bt^m$, $h(t) = ct^n$.

41. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = ax^3t^m\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bxt^k\frac{\partial T}{\partial x} + ct^lT.$

Частный случай уравнения 1.1.10.45 при $n = 3$, $f(t) = at^m$, $g(t) = bt^k$, $h(t) = ct^l$.

42. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = ax^4\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT.$

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = e^{bt}(Ax + B),$$
$$T(x,t) = Ae^{bt}\Big(2atx + \frac{1}{x}\Big),$$
$$T(x,t) = Ax\exp\Big[(b + a\mu^2)t + \frac{\mu}{x}\Big].$$

2. Преобразование $T(x,t) = xe^{bt}u(\xi,t)$, $\xi = 1/x$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{\xi\xi}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

43. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^4t^n\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bt^mT.$

Частный случай уравнения 1.1.10.42 при $f(t) = at^n$, $g(t) = bt^m$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = (Ax+B)\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\Bigr),$$
$$T(x,t) = A\Bigl(\frac{2a}{n+1}t^{n+1}x + \frac{1}{x}\Bigr)\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\Bigr),$$
$$T(x,t) = Ax\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}t^{m+1} + \frac{a\mu^2}{n+1}t^{n+1} + \frac{\mu}{x}\Bigr).$$

2. Преобразование

$$T(x,t) = x\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\Bigr)u(\xi,\tau), \quad \xi = \frac{1}{x}, \quad \tau = \frac{a}{n+1}t^{n+1}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{\xi\xi}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

44. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = (x^2+b^2)^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Phi(x,t).$

Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

1. Однородные граничные условия.

В каждой точке ограниченной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на ее обеих границах в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi d\tau + \int_0^l G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\exp(-\mu_n^2t)}{\|y_n\|^2(\xi^2+b^2)^2}, \quad \mu_n^2 = \Bigl[\frac{\pi nb}{\operatorname{arctg}(l/b)}\Bigr]^2 - b^2,$$
$$y_n(x) = \sqrt{x^2+b^2}\sin\Bigl[\pi n\frac{\operatorname{arctg}(x/b)}{\operatorname{arctg}(l/b)}\Bigr], \qquad \|y_n\|^2 = \frac{\operatorname{arctg}(l/b)}{2b},$$
$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 69).

2. Неоднородные граничные условия.

В каждой точке ограниченной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой ее границе задан свой закон изменения температуры от времени:

$$\begin{array}{llll} T = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$T(x,t) = g(t) + \frac{x}{l}[h(t) - g(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

45. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = (x - b_0)^2(x - b_1)^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - cT, \qquad b_0 \neq b_1.$

Преобразование

$$T(x,t) = (x - b_1)e^{-ct}u(\xi,\tau), \quad \xi = \ln\frac{x - b_0}{x - b_1}, \quad \tau = (b_0 - b_1)^2 t$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

которое рассматривается в разд. 1.1.3.

46. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = (b_0x^2 + b_1x + b_2)^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + cT.$

Преобразование

$$T(x,t) = \exp\bigl[(b_0b_2 - \tfrac{1}{4}b_1^2 + c)t\bigr]\sqrt{b_0x^2 + b_1x + b_2}\,u(\xi,t), \quad \xi = \int\frac{dx}{b_0x^2 + b_1x + b_2}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{\xi\xi}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

47. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = ax^{1-n}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя (см. уравнение 1.1.10.50) и является частным случаем 1.1.10.26 при $f(x) = ax^{1-n}$ и $\Phi \equiv 0$.

1. При $n = -1$ это частный случай уравнения 1.1.8.35, а при $n = -3$ это уравнение вида 1.1.8.42 (в этих случаях уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами).

Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x) = Ax + B,$$

$$T(x,t) = Aan(n+1)t + Ax^{n+1} + B,$$

$$T(x,t) = Aa(n+1)(n+2)tx + Ax^{n+2} + B,$$

$$T(x,t) = A\Big[an(n+1)t^2 + 2tx^{n+1} + \frac{x^{2n+2}}{a(n+1)(2n+1)}\Big] + B,$$

$$T(x,t) = A\Big[a(n+1)(n+2)t^2x + 2tx^{n+2} + \frac{x^{2n+3}}{a(n+1)(2n+3)}\Big] + B,$$

$$T(x,t) = e^{\mu t}\sqrt{x}\left[AJ_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{-\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right) + BY_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{-\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right)\right] \qquad \text{при } \mu < 0,$$

$$T(x,t) = e^{\mu t}\sqrt{x}\left[AI_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right) + BK_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right)\right] \qquad \text{при } \mu > 0,$$

где $q = \frac{1}{2}(n+1)$, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Пусть $2/(n+1) = 2m+1$, где m — целое число. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = e^{\mu t}x\big(x^{1-2q}D\big)^{m+1}\left[A\exp\Big(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\Big) + B\exp\Big(-\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\Big)\right] \quad m \geqslant 0,$$

$$T(x,t) = e^{\mu t}x\big(x^{1-2q}D\big)^{-m}\left[A\exp\Big(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\Big) + B\exp\Big(-\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\Big)\right] \quad m < 0,$$

где $D = \dfrac{d}{dx}$, $q = \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{1}{2m+1}$.

2. **Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.**

В каждой точке полубесконечной среды (твердого тела) задана начальная температура T_0 в момент времени $t=0$, которая считается постоянной, а на границе среды $x = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура, равная T_1:

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

$$T = T_1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\gamma\Big(\nu,\ \frac{\nu^2}{a}\frac{x^{n+1}}{t}\Big), \qquad \nu = \frac{1}{n+1}.$$

Здесь $\Gamma(\nu) = \gamma(\nu,\infty)$ — гамма-функция, $\gamma(\nu,\zeta) = \int_0^\zeta \zeta^{\nu-1}e^{-\zeta}d\zeta$ — неполная гамма-функция.

3. Преобразование

$$\tau = \tfrac{1}{4}a(n+1)^2 t, \qquad \xi = x^{\frac{n+1}{2}}$$

приводит к уравнению вида 1.1.8.22:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{1-2\beta}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}, \qquad \text{где} \quad \beta = \frac{1}{n+1}.$$

4. Укажем два дискретных преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения (при которых меняется параметр n).

4.1. Точечное преобразование

$$z = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{T}{x} \qquad (\text{преобразование } \mathcal{F})$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = az^{n+3}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Преобразование $\mathcal{F}$ меняет параметры уравнения по схеме

$$n \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} -n-2.$$

Повторное действие преобразования $\mathcal{F}$ приводит к исходному уравнению.

4.2. Используя преобразование Беклунда (см. 1.1.10.26, п. 6.2)

$$\xi = x^n, \quad T = \frac{\partial v}{\partial \xi} \qquad (\text{преобразование } \mathcal{H})$$

и интегрируя полученное уравнение по переменной ξ, получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = an^2\xi^{\frac{n-1}{n}}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}. \tag{2}$$

Преобразование $\mathcal{H}$ меняет параметры уравнения по схеме

$$n \overset{\mathcal{H}}{\Longrightarrow} \frac{1}{n}.$$

Повторное действие преобразования $\mathcal{H}$ приводит к исходному уравнению.

Комбинация преобразований $\mathcal{G} = \mathcal{H} \circ \mathcal{F}$ меняет параметры уравнения по схеме

$$n \overset{\mathcal{G}}{\Longrightarrow} -\frac{1}{n+2}.$$

Исходное уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами при $n = -3$ (см. 1.1.8.42). Подставляя это значение в (2), получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A\xi^{4/3}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \tag{3}$$

которое также приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Используя преобразования $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, аналогичным образом можно найти и некоторые другие уравнения рассматриваемого типа, которые приводятся к уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами.

48. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^n \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bx \dfrac{\partial T}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.1.10.22 при $f(t) = b$. Переходя от x, t к новым переменным z, τ по формулам

$$z = xe^{bt}, \quad \tau = \frac{a}{b(2-n)} e^{b(2-n)t} + \text{const},$$

получим уравнение вида 1.1.8.47:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = z^n \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

49. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Big(x^m \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + mx^{m-1} \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)$.

Это уравнение описывает теплоперенос в неподвижной среде (твердом теле), когда коэффициент температуропроводности является степенной функцией координаты.

1. Исходное уравнение можно записать в более привычном для приложений виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^m \frac{\partial T}{\partial x}\Big).$$

2. При $m = 2$ см. уравнение 1.1.8.35. При $m \neq 2$, переходя от t, x к новым переменным $\tau = \frac{1}{4}a(2-m)^2 t$, $z = x^{\frac{2-m}{2}}$, получим уравнение вида 1.1.8.22:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{m}{2-m} \frac{1}{z} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

50. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Big(x^{2m} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + mx^{2m-1} \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)$.

Частный случай уравнения 1.1.10.30 при $f(x) = \sqrt{a}\, x^m$, $g(t) = 0$, $h(t) = 0$. При $m = 1$ см. уравнение 1.1.8.35.

Замена

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{1}{1-m} x^{1-m} & \text{при } m \neq 1, \\ \ln|x| & \text{при } m = 1 \end{cases}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t T = a \partial_{\xi\xi} T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

51. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^n \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x(bt^m + c) \dfrac{\partial T}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.1.10.22 при $f(t) = bt^m + c$.

52. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = at^n \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bt^m x + ct^i) \dfrac{\partial T}{\partial x} + (dt^l x + et^p)T$.

Частный случай уравнения 1.1.10.36 (поэтому оно может быть сведено к уравнению с постоянными коэффициентами, которое рассматривается в разд. 1.1.1).

53. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = at^n \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bt^m x + ct^i)\dfrac{\partial T}{\partial x} + (dt^l x^2 + et^p x + st^q)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.37.

54. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^l t^m \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bxt^n \dfrac{\partial T}{\partial x} + ct^p T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.45 при $f(t) = at^m$, $g(t) = bt^n$, $h(t) = ct^p$.

55. $(1 - y^2)\dfrac{\partial T}{\partial x} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$

Это уравнение стационарного тепло- и массопереноса в пленке жидкости с параболическим профилем скорости.

1. Точные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$T(y) = A + By,$$
$$T(x,y) = A\exp\bigl(-a\mu^2 x\bigr)\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\mu y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\mu,\ \tfrac{1}{2};\ \mu y^2\bigr),$$
$$T(x,y) = A\exp\bigl(-a\mu^2 x\bigr)y\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\mu y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\mu,\ \tfrac{3}{2};\ \mu y^2\bigr),$$

где $\Phi(\alpha,\,\beta;\,z) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}\,\dfrac{z^m}{m!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

В практических приложениях наиболее часто встречаются смешанные граничные условия, которые рассмотрены ниже. Физический смысл переменных: T — температура (концентрация); x и y — безразмерные координаты, отсчитываемые соответственно вдоль и поперек пленки (значение $y = 0$ соответствует свободной поверхности пленки, а $y = 1$ — твердой поверхности, по которой она стекает), $\mathrm{Pe} = 1/a$ — число Пекле.

2. Массообмен между газом и пленкой жидкости, когда концентрация примеси на поверхности пленки постоянна и отсутствует массоперенос через твердую поверхность, описывается граничными условиями

$$\begin{aligned} T &= 0 \quad &&\text{при}\quad x = 0 \quad &&(0 \leqslant y \leqslant 1),\\ T &= 1 \quad &&\text{при}\quad y = 0 \quad &&(x > 0),\\ \partial_y T &= 0 \quad &&\text{при}\quad y = 1 \quad &&(x > 0). \end{aligned}$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями имеет вид

$$\begin{gathered} T(x,y) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\bigl(-a\mu_m^2 x\bigr) F_m(y),\\ F_m(y) = y\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\mu_m y^2\bigr)\Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\mu_m,\ \tfrac{3}{2};\ \mu_m y^2\bigr), \end{gathered} \qquad (1)$$

где функции F_m и коэффициенты A_m и μ_m не зависят от параметра a.

ТАБЛИЦА 2

Собственные значения μ_m и коэффициенты разложения A_m в решении (1).

m	μ_m	A_m	m	μ_m	A_m
1	2,2631	1,3382	6	22,3181	−0,1873
2	6,2977	−0,5455	7	26,3197	0,1631
3	10,3077	0,3589	8	30,3209	−0,1449
4	14,3128	−0,2721	9	34,3219	0,1306
5	18,3159	0,2211	10	38,3227	−0,1191

Собственные значения μ_m являются решениями трансцендентного уравнения

$$\mu_m\Phi\bigl(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{4}\mu_m,\ \tfrac{3}{2};\ \mu_m\bigr)-\Phi\bigl(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{4}\mu_m,\ \tfrac{1}{2};\ \mu_m\bigr)=0.$$

Коэффициенты ряда A_m вычисляются по формулам

$$A_m=\frac{\displaystyle\int_0^1(1-y^2)F_m(y)\,dy}{\displaystyle\int_0^1(1-y^2)\bigl[F_m(y)\bigr]^2\,dy},\qquad \text{где}\quad m=1,\ 2,\ \ldots$$

В табл. 2 указаны 10 первых собственных значений μ_m и коэффициентов A_m, вычисленных в работе Z. Rotem, J. E. Neilson (1966).

Асимптотика решения при $ax\to 0$ определяется формулой

$$T=\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{y}{2\sqrt{ax}}\Bigr),$$

где $\operatorname{erfc}z=\displaystyle\int_z^\infty\exp\bigl(-\xi^2\bigr)\,d\xi$ — дополнительный интеграл вероятностей.

3. Растворение пластины ламинарной пленкой жидкости, когда концентрация на твердой поверхности постоянна и отсутствует поток вещества из пленки в газ, описывается граничными условиями

$$\begin{aligned}
T&=0 &&\text{при}\quad x=0 &&(0\leqslant y\leqslant 1);\\
\partial_y T&=0 &&\text{при}\quad y=0 &&(x>0);\\
T&=1 &&\text{при}\quad y=1 &&(x>0).
\end{aligned}$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями имеет вид

$$\begin{gathered}
T(x,y)=1-\sum_{m=0}^{\infty}A_m\exp\bigl(-a\mu_m^2x\bigr)G_m(y),\\
G_m(y)=\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\mu_my^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\mu_m,\ \tfrac{1}{2};\ \mu_my^2\bigr),
\end{gathered}\tag{2}$$

где функции G_m и коэффициенты A_m и μ_m не зависят от параметра a.

Собственные значения μ_m являются решениями трансцендентного уравнения

$$\Phi\bigl(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\mu_m,\ \tfrac{1}{2};\ \mu_m\bigr)=0.$$

Для определения μ_m удобно использовать приближенную зависимость

$$\mu_m = 4m + 1{,}68 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

максимальная погрешность которой меньше 0,2%.

Численные значения коэффициентов A_m хорошо аппроксимируются формулами

$$A_0 = 1{,}2; \quad A_m = 2{,}27 \times (-1)^m \mu_m^{-7/6} \qquad \text{при} \quad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где собственные значения μ_m приведены в (3). Максимальная погрешность выражений для A_m составляет меньше 0,1%.

Асимптотика решения при $ax \to 0$ определяется формулой

$$T = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\Gamma\left(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{9}\zeta\right), \quad \zeta = \frac{(1-y)^3}{ax}.$$

Здесь $\Gamma(\alpha, z) = \int_z^\infty e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\,d\xi$ — неполная гамма-функция, а $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, 0)$ — гамма-функция, $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2{,}679$.

⊙ Литература: А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996, стр. 114).

1.1.9. Уравнения с переменными коэффициентами, содержащие экспоненциальные функции

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(be^{\beta t} + c\right)T.$

Уравнения такого типа могут встречаться при решении нестационарных задач горения или при описании макрокинетики сложных химических реакций.

Частный случай уравнения 1.1.10.1 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = (Ax + B)\exp\left(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\right),$$
$$T(x,t) = A(x^2 + 2at)\exp\left(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\right),$$
$$T(x,t) = A\exp\left(\mu x + a\mu^2 t + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\right).$$

2. Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\left(\dfrac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\right)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + cx)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.6 при $f(t) = c$, $g(t) = be^{\beta t}$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\Bigl(cxt + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{1}{3}ac^2t^3\Bigr),$$

$$T(x,t) = A(x + act^2)\exp\Bigl(cxt + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{1}{3}ac^2t^3\Bigr),$$

$$T(x,t) = A\exp\Bigl[x(ct+\mu) + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{1}{3}ac^2t^3 + ac\mu t^2 + a\mu^2 t\Bigr].$$

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\exp\Bigl(cxt + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{1}{3}ac^2t^3\Bigr), \quad z = x + act^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta x} - c)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.2 при $f(x) = be^{\beta x} - c$.

Точные решения (A, μ — произвольные постоянные):

$$T(x,t) = A\exp(-\mu t)J_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}\,\beta}e^{\beta x/2}\Bigr), \quad \nu = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{c-\mu}{a}},$$

$$T(x,t) = A\exp(-\mu t)Y_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}\,\beta}e^{\beta x/2}\Bigr), \quad \nu = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{c-\mu}{a}},$$

где $J_\nu(\xi)$ и $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bxe^{\beta t} + c)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.6 при $f(t) = be^{\beta t}$, $g(t) = c$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}xe^{\beta t} + \frac{ab^2}{2\beta^3}e^{2\beta t} + ct\Bigr),$$

$$T(x,t) = A\Bigl(x + \frac{2ab}{\beta^2}e^{\beta t}\Bigr)\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}xe^{\beta t} + \frac{ab^2}{2\beta^3}e^{2\beta t} + ct\Bigr),$$

$$T(x,t) = A\exp\Bigl[x\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \mu\Bigr) + \frac{ab^2}{2\beta^3}e^{2\beta t} + \frac{2ab\mu}{\beta^2}e^{\beta t} + (a\mu^2 + c)t\Bigr].$$

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}xe^{\beta t} + \frac{ab^2}{2\beta^3}e^{2\beta t} + ct\Bigr), \quad z = x + \frac{2ab}{\beta^2}e^{\beta t}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x(be^{\beta t} + c)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.3 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\Bigl[x\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Bigr) + a\phi(t)\Bigr],$$
$$T(x,t) = A\Bigl[x + a\Bigl(\frac{2b}{\beta^2}e^{\beta t} + ct^2\Bigr)\Bigr]\exp\Bigl[x\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Bigr) + a\phi(t)\Bigr],$$
$$T(x,t) = A\exp\Bigl[x\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct + \mu\Bigr) + a\mu\Bigl(\frac{2b}{\beta^2}e^{\beta t} + ct^2 + \mu t\Bigr) + a\phi(t)\Bigr],$$

где $\phi(t) = \frac{1}{2}b^2\beta^{-3}e^{2\beta t} + 2bc\beta^{-3}(\beta t - 1)e^{\beta t} + \frac{1}{3}c^2t^3$.

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\exp\Bigl[x\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Bigr) + a\phi(t)\Bigr], \quad z = x + a\Bigl(\frac{2b}{\beta^2}e^{\beta t} + ct^2\Bigr)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

6. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x^2(be^{\beta t} + c)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.4 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

7. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + ce^{\mu t})T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.1 при $f(t) = be^{\beta t} + ce^{\mu t}$.

1. Точные решения (A, B, ν — любые):

$$T(x,t) = (Ax + B)\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr),$$
$$T(x,t) = A(x^2 + 2at)\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr),$$
$$T(x,t) = A\exp\Bigl(\nu x + a\nu^2 t + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr).$$

2. Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl(\dfrac{b}{\beta}e^{\beta t} + \dfrac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

8. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta x} + ce^{\mu t} + d)T.$

Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl(\dfrac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr)$ приводит к уравнению вида 1.1.9.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (be^{\beta x} + d)u.$$

9. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta x+\mu t} + c)T.$

При $\beta = 0$ см. уравнение 1.1.9.1, а при $\mu = 0$ — уравнение 1.1.9.3. При $\beta \neq 0$ преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)e^{nx}, \quad z = x + \frac{\mu}{\beta}t, \qquad \text{где} \quad n = \frac{\mu}{2a\beta},$$

приводит к уравнению вида 1.1.9.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (be^{\beta z} + c + an^2)u.$$

10. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + c)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = Ax + A\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Big) + B,$$

$$T(x,t) = A\Big(x + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Big)^2 + 2aAt,$$

$$T(x,t) = A\exp\Big[\mu x + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + (c + a\mu^2)t\Big].$$

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t T = a\partial_{zz} T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

11. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta x} + c)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.11 при $f(x) = be^{\beta x} + c$.

1. Точные решения:

$$\begin{aligned} T(x,t) &= A\exp(-\mu t + n\beta x)\Phi\Big(n,\, 2n + 1 + \frac{c}{a\beta};\, -\frac{b}{a\beta}e^{\beta x}\Big),\\ T(x,t) &= A\exp(-\mu t + n\beta x)\Psi\Big(n,\, 2n + 1 + \frac{c}{a\beta};\, -\frac{b}{a\beta}e^{\beta x}\Big), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, μ — произвольные постоянные; $n = n(\mu)$ — корень квадратного уравнения $a\beta^2n^2 + c\beta n + \mu = 0$; $\Phi(\alpha,\nu;z)$ и $\Psi(\alpha,\nu;z)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

О вырожденных гипергеометрических функциях см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1973).

Замечание. В решениях (1) параметр n можно считать произвольным, а параметр $\mu = -a\beta^2n^2 - c\beta n$.

2. Другие частные решения (A, B — любые):

$$T(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Big(-\frac{b}{a\beta}e^{\beta x} - \frac{c}{a}x\Big),$$

$$T(x,t) = Aat + A\int F(x)\Big(\int\frac{dx}{F(x)}\Big)dx,$$

$$T(x,t) = AatG(x) + A\int F(x)\Big(\int\frac{G(x)\,dx}{F(x)}\Big)dx, \quad G(x) = \int F(x)\,dx.$$

3. Замена $z = e^{\beta x}$ приводит к уравнению вида 1.1.8.38:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\beta^2 z^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \beta z(bz + c + a\beta)\frac{\partial T}{\partial z}.$$

12. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x(be^{\beta t} + c)\dfrac{\partial T}{\partial x}.}$

Частный случай уравнения 1.1.10.12 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = AxF(t) + B, \quad F(t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Bigr),$$

$$T(x,t) = Ax^2F^2(t) + 2A\int F^2(t)\,dt,$$

$$T(x,t) = A\exp\Bigl[\mu xF(t) + a\mu^2\int F^2(t)\,dt\Bigr] + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Bigr),$$

для функции $T(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

13. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + ce^{\mu t})\dfrac{\partial T}{\partial x}.}$

1. Точные решения (A, B, ν — любые):

$$T(x,t) = Ax + A\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr) + B,$$

$$T(x,t) = A\Bigl(x + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr)^2 + 2aAt,$$

$$T(x,t) = A\exp\Bigl(\nu x + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t} + a\nu^2 t\Bigr).$$

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{b}{\beta}e^{\beta t} + \dfrac{c}{\mu}e^{\mu t}$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

14. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta t + \mu x} + c)\dfrac{\partial T}{\partial x}.}$

При $\beta = 0$ см. уравнение 1.1.9.11, а при $\mu = 0$ — уравнение 1.1.9.10. При $\mu \neq 0$ замена $z = x + (\beta/\mu)t$ приводит к уравнению вида 1.1.9.11:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \Bigl(be^z + c - \frac{\beta}{\mu}\Bigr)\frac{\partial T}{\partial z}.$$

15. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + cx)\dfrac{\partial T}{\partial x}.}$

Частный случай уравнения 1.1.10.36 при $n(t) = a$, $f(t) = c$, $g(t) = be^{\beta t}$, $h(t) = s(t) = 0$.

16. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bxe^{\beta t} + c)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.36 при $n(t) = a$, $f(t) = be^{\beta t}$, $g(t) = c$, $h(t) = s(t) = 0$.

17. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bxe^{\beta t} + ce^{\mu t})\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.36 при $n(t) = a$, $f(t) = be^{\beta t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$, $h(t) = s(t) = 0$.

18. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x(be^{\beta t} + ce^{\mu t})\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.12 при $f(t) = be^{\beta t} + ce^{\mu t}$.

1. Точные решения (A, B, ν — произвольны):

$$T(x,t) = AxF(t) + B, \quad F(t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr),$$
$$T(x,t) = Ax^2F^2(t) + 2A\int F^2(t)\,dt,$$
$$T(x,t) = A\exp\Bigl[\nu xF(t) + a\nu^2\int F^2(t)\,dt\Bigr] + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr),$$

для функции $T(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

19. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial T}{\partial x} + (ce^{\beta t} + s)T.$

Замена

$$T(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl[-\frac{b}{2a}x + \frac{c}{\beta}e^{\beta t} + \Bigl(s - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr]$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

20. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial T}{\partial x} + (ce^{\beta x} + s)T.$

Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl(-\dfrac{b}{2a}x\Bigr)$ приводит к уравнению вида 1.1.9.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Bigl(ce^{\beta x} + s - \frac{b^2}{4a}\Bigr)u.$$

21. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial T}{\partial x} + (ce^{\beta t} + se^{\mu t})T.$

Замена

$$T(x,t) = u(x,t)\exp\Big(-\frac{b}{2a}x + \frac{c}{\beta}e^{\beta t} + \frac{s}{\mu}e^{\mu t} - \frac{b^2}{4a}t\Big)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

22. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial T}{\partial x} + (ce^{\beta x} + se^{\mu t})T.$

Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\Big(\dfrac{s}{\mu}e^{\mu t}\Big)$ приводит к уравнению вида 1.1.9.20:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + ce^{\beta x}u.$$

23. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta x\dfrac{\partial T}{\partial x} + ce^{2\beta t}T.$

Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \frac{A^2}{2\beta}e^{2\beta t} + B, \quad z = Axe^{\beta t},$$

для функции $T(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами вида 1.1.3.1:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + cA^{-2}T.$$

24. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a_2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (a_1e^{\beta x} + b_1)\dfrac{\partial T}{\partial x} + (a_0e^{2\beta x} + b_0e^{\beta x} + c_0)T.$

Замена $z = e^{\beta x}$ приводит к уравнению вида 1.1.8.38:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_2\beta^2 z^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \beta z(a_1 z + b_1 + a_2^2\beta)\frac{\partial T}{\partial z} + (a_0z^2 + b_0z + c_0)T.$$

25. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Big(bxe^{\beta t} + \dfrac{c}{x}\Big)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.15 при $f(t) = be^{\beta t}$.

26. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + cx)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.18 при $f(t) = c$, $g(t) = be^{\beta t}$.

27. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bxe^{\beta t} + c)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.18 при $f(t) = be^{\beta t}$, $g(t) = c$.

28. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bxe^{\beta t} + ce^{\mu t})T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.18 при $f(t) = be^{\beta t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$.

29. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + c)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.19 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

30. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + ce^{\mu t})T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.19 при $f(t) = be^{\beta t} + ce^{\mu t}$.

31. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x(be^{\beta t} + c)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.22 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

32. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x(be^{\beta t} + ce^{\mu t})\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.22 при $f(t) = be^{\beta t} + ce^{\mu t}$.

33. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 1.1.10.26 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $\Phi \equiv 0$.
Точные решения (A, B, μ — любые):

$$
\begin{aligned}
T(x) &= Ax + B,\\
T(x,t) &= A\bigl(a\beta^2 t + e^{-\beta x}\bigr),\\
T(x,t) &= A\bigl(a\beta^3 tx + \beta x e^{-\beta x} + 2e^{-\beta x}\bigr),\\
T(x,t) &= A\bigl(2a^2\beta^4 t^2 + 4a^2\beta^2 te^{-\beta x} + e^{-2\beta x}\bigr),\\
T(x,t) &= A\exp(-\mu t) J_0\Bigl(\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\Bigr),\\
T(x,t) &= A\exp(-\mu t) Y_0\Bigl(\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\Bigr),
\end{aligned}
$$

где $J_0(\xi)$, $Y_0(\xi)$ — функции Бесселя.

34. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT.$

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$
\begin{aligned}
T(x,t) &= e^{bt}(Ax + B),\\
T(x,t) &= Ae^{bt}\bigl(a\beta^2 t + e^{-\beta x}\bigr),\\
T(x,t) &= Ae^{bt}\bigl(a\beta^3 tx + \beta x e^{-\beta x} + 2e^{-\beta x}\bigr),\\
T(x,t) &= Ae^{bt}\bigl(2a^2\beta^4 t^2 + 4a\beta^2 te^{-\beta x} + e^{-2\beta x}\bigr),
\end{aligned}
$$

$$T(x,t) = A\exp(-\mu t) J_0\Bigl(\tfrac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\mu+b}{a}}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\Bigr),$$
$$T(x,t) = A\exp(-\mu t) Y_0\Bigl(\tfrac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\mu+b}{a}}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\Bigr),$$

где $J_0(\xi)$, $Y_0(\xi)$ — функции Бесселя.

2. Замена $T(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к уравнению вида 1.1.9.33: $\partial_t u = ae^{\beta x}\partial_{xx}u$.

35. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (be^{\mu t} + c)T.}$

Замена $T(x,t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\mu}e^{\mu t} + ct\Bigr)u(x,t)$ приводит к уравнению вида 1.1.9.33: $\partial_t u = ae^{\beta x}\partial_{xx}u$.

36. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Bigl(e^{\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta e^{\beta x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr).}$

Это уравнение описывает теплоперенос в неподвижной среде (твердом теле), когда коэффициент температуропроводности является экспоненциальной функцией координаты.

1. Исходное уравнение можно записать в более привычном для приложений виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^{\beta x}\frac{\partial T}{\partial x}\Bigr).$$

2. Переходя к новой переменной $z = e^{-\beta x}$, приходим к уравнению вида 1.1.8.26:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\beta^2 z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Точное решение исходного уравнения (при постоянных значениях функции T на границе и в начальный момент времени) приведено в книге А. В. Лыкова (1967).

37. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = ae^{2\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sqrt{a}\,e^{\beta x}\bigl(\sqrt{a}\,\beta e^{\beta x} + b\bigr)\dfrac{\partial T}{\partial x}.}$

Частный случай уравнения 1.1.10.25 при $f(t) = b$, $g(t) = 0$.

Замена $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{a}\,\beta}(1 - e^{-\beta x})$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t T = a\partial_{\xi\xi}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

38. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = ae^{2\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sqrt{a}\,e^{\beta x}\bigl(\sqrt{a}\,\beta e^{\beta x} + be^{\mu t}\bigr)\dfrac{\partial T}{\partial x} + ce^{\nu t}T.}$

Частный случай уравнения 1.1.10.25 при $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = ce^{\nu t}$.

39. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = ae^{\beta t}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\mu t}\dfrac{\partial T}{\partial x} + ce^{\nu t}T.}$

Частный случай уравнения 1.1.10.35 при $f(t) = ae^{\beta t}$, $g(t) = be^{\mu t}$, $h(t) = ce^{\nu t}$.

40. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ae^{\beta t}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bxe^{\mu t}\dfrac{\partial T}{\partial x} + cxe^{\nu t}T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.36 при $n(t) = ae^{\beta t}$, $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = 0$, $h(t) = ce^{\nu t}$, $s(t) = 0$.

41. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ae^{\beta x+\mu t}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\nu t}T.$

Преобразование

$$T(x,t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\nu}e^{\nu t}\Bigr)u(x,\tau), \quad \tau = \frac{a}{\mu}e^{\mu t}$$

приводит к уравнению вида 1.1.9.33: $\partial_\tau u = e^{\beta x}\partial_{xx}u$.

1.1.10. Уравнения, содержащие произвольные функции*

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t)T.$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос в неподвижной среде при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда коэффициент ее скорости является произвольной функцией времени.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = (Ax+B)\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$
$$T(x,t) = A(x^2+2at)\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$
$$T(x,t) = A\exp\Bigl[\mu x + \mu^2 at + \int f(t)\,dt\Bigr].$$

2. Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x)T.$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос в неподвижной среде при наличии химической реакции первого порядка, когда коэффициент ее скорости является произвольной функцией координаты.

Частный случай уравнения 1.1.10.32 при $s(x) \equiv 1$, $p(x) = a = \mathrm{const}$, $q(x) = -f(x)$, $\Phi \equiv 0$.

---

* В конце этого раздела рассмотрены уравнения стационарного диффузионного (теплового) пограничного слоя, которые также относятся к уравнениям параболического типа.

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + xf(t)T.$

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt\Big], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$
$$T(x,t) = A\Big[x + 2a\int F(t)\,dt\Big]\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt\Big],$$
$$T(x,t) = A\exp\Big[xF(t) + \mu x + a\mu^2 t + a\int F^2(t)\,dt + 2a\mu\int F(t)\,dt\Big].$$

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt\Big], \quad z = x + 2a\int F(t)\,dt,$$

где $F(t) = \int f(t)\,dt$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz} u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x^2 f(t)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.37.

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + [f(x) + g(t)]T.$

Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big]$ приводит к уравнению вида 1.1.10.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)u.$$

6. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + [xf(t) + g(t)]T.$

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$T(x,t) = A\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$
$$T(x,t) = A\Big[x + 2a\int F(t)\,dt\Big]\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big],$$
$$T(x,t) = \exp\Big[xF(t) + \mu x + a\mu^2 t + 2a\mu\int F(t)\,dt + a\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big].$$

2. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big], \quad z = x + 2a\int F(t)\,dt,$$

где $F(t) = \int f(t)\,dt$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz} u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

7. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left[-bx^2 + f(t)\right]T.$

1. Точные решения (A — любое):

$$T(x,t) = A\exp\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}x^2 + \sqrt{ab}\,t + \int f(t)\,dt\right],$$
$$T(x,t) = Ax\exp\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}x^2 + 3\sqrt{ab}\,t + \int f(t)\,dt\right].$$

2. Преобразование (C — произвольная постоянная)

$$T(x,t) = u(z,\tau)\exp\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}x^2 + \sqrt{ab}\,t + \int f(t)\,dt\right],$$
$$z = x\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr), \quad \tau = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b}}\exp\bigl(4\sqrt{ab}\,t\bigr) + C$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

8. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x\left[-bx + f(t)\right]T.$

1. Точное решение (A, B — произвольные постоянные):

$$T(x,t) = \exp\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^2 + xF(t) + \sqrt{ab}\,t + a\int_A^t F^2(t)\,dt\right],$$
$$F(t) = \exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr)\int_B^t f(\tau)\exp\bigl(-2\sqrt{ab}\,\tau\bigr)\,d\tau.$$

2. Преобразование

$$T(x,t) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^2\right)u(z,\tau),\ z = x\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr),\ \tau = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\exp\bigl(4\sqrt{ab}\,t\bigr)$$

приводит к уравнению вида 1.1.10.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left[z\Phi(\tau) + \frac{1}{4\tau}\right]u,$$

где $\Phi(\tau) = \dfrac{1}{n\tau}f\left(\dfrac{\ln\tau + \ln n}{n}\right)$, $n = 4\sqrt{ab}$.

9. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left[x^2 f(t) + xg(t) + h(t)\right]T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.37.

10. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это уравнение описывает теплоперенос в движущейся среде, когда скорость движения среды является произвольной функцией времени.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$T(x,t) = Ax + A\int f(t)\,dt + B,$$
$$T(x,t) = A\Big[x + \int f(t)\,dt\Big]^2 + 2aAt,$$
$$T(x,t) = A\exp\Big[\mu x + a\mu^2 t + \mu\int f(t)\,dt\Big].$$

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int f(t)\,dt$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

11. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это уравнение описывает теплоперенос в движущейся среде, когда скорость движения среды является произвольной функцией координаты.

1. Частный случай уравнения 1.1.10.29. Имеет точные решения вида

$$T(x,t) = e^{-\mu t}u(x),$$

где функция $u = u(x)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения с параметром μ:

$$au''_{xx} + f(x)u'_x + \mu u = 0.$$

Другие точные решения (A, B — любые):

$$T(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Big[-\tfrac{1}{a}\int f(x)\,dx\Big],$$
$$T(x,t) = Aat + A\int\Big(\int\frac{dx}{F(x)}\Big)F(x)\,dx,$$
$$T(x,t) = Aat\Phi(x) + A\int\Big(\int\frac{\Phi(x)\,dx}{F(x)}\Big)F(x)\,dx, \quad \Phi(x) = \int F(x)\,dx.$$

Более сложные решения указаны далее в п. 2.

2. Исходное уравнение для любой функции $f(x)$ допускает точные аналитические решения вида

$$T_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} t^i\varphi_{n,i}(x). \qquad (1)$$

Подставляя выражение (1) в исходное уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях t, для определения функций $\varphi_{n,i} = \varphi_{n,i}(x)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по x)

$$a\varphi''_{n,n} + f(x)\varphi'_{n,n} = 0,$$
$$a\varphi''_{n,i} + f(x)\varphi'_{n,i} = (i+1)\varphi_{n,i+1}; \quad i = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1.$$

Интегрируя эти уравнения последовательно в порядке убывания номера i, находим решение (A, B — любые):

$$\begin{aligned} &\varphi_{n,n}(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\left[-\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\right],\\ &\varphi_{n,i}(x) = n(n-1)\dots(i+1)\,\mathbf{L}_f^{n-i}\left[\varphi_{n,n}(x)\right]; \quad i = 0,\,1,\,\dots,\,n-1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь интегральный оператор $\mathbf{L}_f$ вводится следующим образом:

$$\mathbf{L}_f[y(x)] \equiv \frac{1}{a}\int F(x)\left(\int \frac{y(x)\,dx}{F(x)}\right)dx. \qquad (3)$$

Степени оператора определяются так: $\mathbf{L}_f^i[y(x)] = \mathbf{L}_f\left[\mathbf{L}_f^{i-1}[y(x)]\right]$.

Формулы (1)–(3) дают точное аналитическое решение исходного уравнения для произвольной функции $f(x)$.

Линейная комбинация частных решений

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{N} C_n T_n(x,t) \qquad (C_n \text{ — произвольны})$$

также является точным решением однородного уравнения.

12. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial T}{\partial x}$.

Обобщенное уравнение Ильковича. Оно описывает массоперенос к поверхности растущей капли, которая вытекает из тонкого капилляра в раствор жидкости (массовый расход движущейся по капилляру жидкости произвольным образом зависит от времени).

1. Точные решения (A, B, μ — произвольны):

$$T(x,t) = Ax\exp\left[\int f(t)\,dt\right] + B,$$

$$T(x,t) = Ax^2F^2(t) + 2Aa\int F^2(t)\,dt, \quad F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

$$T(x,t) = A\exp\left[\mu xF(t) + a\mu^2\int F^2(t)\,dt\right] + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = B\exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

для функции $T(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau T = a\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

3. В частном случае, когда происходит теплоперенос в полубесконечную среду, имеющую в момент времени $t = 0$ первоначальную постоянную температуру T_0, а температура границы $x = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянной и равной T_1, решение указанного выше уравнения с начальным и граничными условиями

$$\begin{aligned} &T = T_0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\ &T = T_1 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\ &T \to T_0 && \text{при} \quad x \to \infty && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

имеет вид

$$\frac{T-T_1}{T_0-T_1}=\operatorname{erf}\Bigl(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}}\Bigr),\quad \operatorname{erf}\xi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \exp\bigl(-\xi^2\bigr)\,d\xi,$$
$$\tau=\int_0^t F^2(t)\,dt,\quad z=xF(t),\quad F(t)=\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$

где $\operatorname{erf}\xi$ — функция вероятностей.

13. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+f(x-bt)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B — любые):

$$T(x,t)=A+B\int F(z)\,dz,\quad F(z)=\exp\Bigl[-\tfrac{1}{a}\int f(z)\,dz-\tfrac{b}{a}z\Bigr],$$
$$T(x,t)=Aat+A\int\Bigl(\int\frac{dz}{F(z)}\Bigr)F(z)\,dz,$$
$$T(x,t)=Aat\Phi(z)+A\int\Bigl(\int\frac{\Phi(z)\,dz}{F(z)}\Bigr)F(z)\,dx,\quad \Phi(z)=\int F(z)\,dz,$$

где $z=x-bt$.

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z=x-bt$, получим уравнение с разделяющимися переменными вида 1.1.10.11:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\bigl[f(z)+b\bigr]\frac{\partial T}{\partial z}.$$

14. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}f\Bigl(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\Bigr)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Переходя от t, x к новым переменным $\tau=\ln t$, $\xi=\dfrac{x}{\sqrt{t}}$, получим уравнение с разделяющимися переменными вида 1.1.10.11:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+\bigl[f(\xi)+\tfrac{1}{2}\xi\bigr]\frac{\partial T}{\partial \xi}.$$

2. В частном случае, когда происходит теплоперенос в полубесконечную среду, имеющую в момент времени $t=0$ первоначальную постоянную температуру T_0, а температура границы $x=0$ в течение всего времени поддерживается постоянной и равной T_1, решение указанного выше уравнения с начальным и граничными условиями

$T=T_0$	при	$t=0$	(начальное условие)
$T=T_1$	при	$x=0$	(граничное условие)
$T\to T_0$	при	$x\to\infty$	(граничное условие)

имеет вид

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0}=\frac{\int_\xi^\infty \exp\bigl[-\Phi(\xi)\bigr]\,d\xi}{\int_0^\infty \exp\bigl[-\Phi(\xi)\bigr]\,d\xi},\qquad \Phi(\xi)=\frac{1}{4a}\xi^2+\frac{1}{a}\int_0^\xi f(\xi)\,d\xi,$$

где $\xi=x/\sqrt{t}$.

15. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left[xf(t) + \dfrac{b}{x}\right]\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B — любые):

$$T(x,t) = Ax^n \exp\Bigl[n\int f(t)\,dt\Bigr] + B, \quad n = 1 - \tfrac{b}{a},$$

$$T(x,t) = Ax^2F(t) + 2A(a+b)\int F(t)\,dt + B, \quad F(t) = \exp\Bigl[2\int f(t)\,dt\Bigr].$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = B\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$

для функции $T(\tau, z)$ получим более простое уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{b}{z}\frac{\partial T}{\partial z},$$

которое рассматривается в разд. 1.1.4, 1.1.6 и 1.1.8 (уравнение 22).

16. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left[xf(t) + \dfrac{b}{x}\right]\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(t)T.$

Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению вида 1.1.10.15:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[xf(t) + \frac{b}{x}\right]\frac{\partial u}{\partial x}.$$

В частном случае $b = 0$ см. уравнение 1.1.10.12.

17. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + [xf(t) + g(t)]\dfrac{\partial T}{\partial x} + h(t)T.$

Преобразование (A, B, C — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad F(t) = B\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$

$$z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt + C,$$

$$T(t,x) = u(\tau, z)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr]$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

18. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + [xf(t) + g(t)]T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.39.

19. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.40.

20. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \ln x f(t)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.41.

21. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \ln^2 x f(t)T.$

Частный случай уравнения 1.1.10.41.

22. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B — любые):

$$T(x,t) = Ax\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr] + B,$$
$$T(x,t) = Ax^{2-n}F(t) + Aa(n-1)(n-2)\int F(t)\,dt,$$

где $F(t) = \exp\Bigl[(2-n)\int f(t)\,dt\Bigr]$.

2. Переходя от x, t к новым переменным z, τ по формулам

$$z = xF(t), \quad \tau = a\int F^{2-n}(t)\,dt, \quad F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$

получим уравнение вида 1.1.8.47:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = z^n\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

23. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial T}{\partial x} + bT.$

Замена $T(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к уравнению вида 1.1.10.22:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ax^n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xf(t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

24. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^{2n}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sqrt{a}\,x^n\bigl[\sqrt{a}\,nx^{n-1} + f(t)\bigr]\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(t)T.$

Замена

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{a}}\begin{cases} \dfrac{x^{1-n}}{1-n} & \text{при } n \neq 1, \\ \ln|x| & \text{при } n = 1 \end{cases}$$

приводит к частному случаю уравнения 1.1.10.35:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + f(t)\frac{\partial T}{\partial \xi} + g(t)T.$$

25. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ae^{2\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sqrt{a}\,e^{\beta x}\bigl[\sqrt{a}\,\beta e^{\beta x} + f(t)\bigr]\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(t)T.$

Замена $\xi = \dfrac{1}{\beta\sqrt{a}}\bigl(1-e^{-\beta x}\bigr)$ приводит к частному случаю уравнения 1.1.10.35:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + f(t)\frac{\partial T}{\partial \xi} + g(t)T.$$

26. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Phi(x,t).$

1. Это уравнение вида 1.1.10.32 при $s(x)=1/f(x)$, $p(x)\equiv 1$, $q(x)\equiv 0$. Частные решения однородного уравнения ($\Phi\equiv 0$) имеют вид

$$T(x,t) = e^{-\mu t}u(x), \qquad (1)$$

где функция $u(x)$ ищется путем решения следующего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с параметром μ:

$$f(x)u''_{xx} + \mu u = 0. \qquad (2)$$

Процедура построения решений конкретных краевых задач для исходного уравнения с помощью частных решений вида (1) подробно описана в 1.1.10.32.

Основная проблема здесь состоит в исследовании вспомогательного уравнения (2), которое далеко не всегда допускает аналитическое решение (поэтому часто приходится прибегать к численным методам решения). Значительное число конкретных разрешимых уравнений вида (2) приведено в следующих справочниках: Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

2. Точные решения однородного уравнения (A, B, x_0 — любые):

$$\begin{aligned}
&T(x) = Ax + B,\\
&T(x,t) = At + AF(x), \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,d\xi,\\
&T(x,t) = Atx + AG(x), \quad G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\xi\,d\xi,\\
&T(x,t) = At^2 + 2AtF(x) + 2A\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}F(\xi)\,d\xi,\\
&T(x,t) = At^2x + 2AtG(x) + 2A\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}G(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}$$

Более сложные решения указаны далее в п. 3.

3. Однородное уравнение ($\Phi\equiv 0$) для любой функции $f(x)$ допускает точные аналитические решения вида

$$T_n(x,t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} t^i \varphi_{n,i}(x). \qquad (3)$$

Подставляя выражение (3) в исходное уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях t, для определения функций $\varphi_{n,i}=\varphi_{n,i}(x)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по x):

$$\begin{aligned}
&f(x)\varphi''_{n,i} = (i+1)\varphi_{n,i+1},\\
&i = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1; \quad \varphi_{n,n}\equiv 1.
\end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения последовательно в порядке убывания номера i, находим

$$\varphi_{n,i}(x) = n(n-1)\dots(i+1)\,\mathbf{L}_f^{n-i}[1]. \qquad (4)$$

Здесь интегральный оператор $\mathbf{L}_f$ вводится следующим образом:

$$\mathbf{L}_f[y(x)] \equiv \int\left(\int \frac{y(x)}{f(x)}\,dx\right)dx = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,y(\xi)\,d\xi + Ax + B, \qquad (5)$$

где x_0, A, B — любые. Степени оператора определяются, как обычно: $\mathbf{L}_f^i[y(x)] = \mathbf{L}_f\left[\mathbf{L}_f^{i-1}[y(x)]\right]$, а константы A, B при повторных действиях оператора $\mathbf{L}_f$ в этой формуле, вообще говоря, могут быть различными.

Формулы (3), (4) определяют точное аналитическое решение исходного уравнения для произвольной функции $f(x)$.

Линейная комбинация частных решений (3):

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{N} C_n T_n(x,t) \qquad (C_n \text{ — произвольны})$$

также является точным решением однородного уравнения.

Укажем также другие точные аналитические решения однородного уравнения (n — натуральное число):

$$T_n(x,t) = t^n x + \sum_{i=0}^{n-1} t^i \phi_{n,i}(x), \quad \phi_{n,i}(x) = n(n-1)\dots(i+1)\,\mathbf{L}_f^{n-i}[x],$$

где оператор $\mathbf{L}_f$ описывается формулой (5). Произвольная линейная комбинация этих решений с линейной комбинацией решений вида (3) также будет решением исходного уравнения.

4. Решение однородного уравнения в виде бесконечного ряда, содержащее произвольную функцию координаты:

$$T(x,t) = \Theta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n\,\mathbf{L}^n[\Theta(x)], \qquad \mathbf{L} \equiv f(x)\frac{d^2}{dx^2},$$

где $\Theta(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $T(x,0) = \Theta(x)$.

5. Неоднородное уравнение при

$$\Phi(x,t) = g_n(x)t^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots) \qquad (6)$$

для произвольных функций $f(x)$, $g_n(x)$ имеет частное аналитическое решение вида

$$\bar{T}_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \psi_{n,i}(x), \qquad (7)$$

где функции $\psi_{n,i} = \psi_{n,i}(x)$ вычисляются по формулам

$$\psi_{n,i}(x) = \begin{cases} -\mathbf{L}_f\left[g_n(x)\right] & \text{при } i = n, \\ -n(n-1)\dots(i+1)\,\mathbf{L}_f^{n-i+1}\left[g_n(x)\right] & \text{при } i = 0,\,1,\,\dots,\,n-1 \end{cases} \tag{8}$$

с помощью интегрального оператора $\mathbf{L}_f$ (5).

Если неоднородная часть уравнения представима в виде суммы

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{N} g_n(x)t^n,$$

то одно из решений является суммой частных решений вида (7):

$$\bar{T}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \bar{T}_n(x,t).$$

Например, при

$$\Phi(x,t) = g(x)t + h(x),$$

где $g(x)$, $h(x)$ — произвольные функции, исходное уравнение имеет частное решение вида

$$\bar{T}(x,t) = -t\psi(x) - \int_{x_0}^{x} \frac{\psi(\xi)+h(\xi)}{f(\xi)}(x-\xi)\,d\xi,$$

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{g(\xi)}{f(\xi)}(x-\xi)\,d\xi, \quad x_0 \text{ — любое.}$$

Суммируя различные решения однородного уравнения (см. п. 3) с любым частным решением неоднородного уравнения, можно получить широкий класс частных решений неоднородного уравнения.

6. Укажем два дискретных преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения (при которых меняется функция f). Пусть $\Phi \equiv 0$.

6.1. Преобразование

$$z = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{T}{x} \qquad \text{(точечное преобразование)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = z^4 f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

6.2. Сначала сделаем замену

$$\xi = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

В результате имеем уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[F(\xi)\frac{\partial T}{\partial \xi}\right],$$

где функция $F = F(\xi)$ задается параметрически:

$$F = \frac{1}{f(x)}, \quad \xi = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

Вводя новую неизвестную функцию $v = v(\xi, t)$ по формуле

$$T = \frac{\partial v}{\partial \xi} \qquad \text{(преобразование Беклунда)}$$

и интегрируя полученное уравнение по переменной ξ, приходим к искомому уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F(\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

Для степенных и экспоненциальных функций указанное преобразование действует по схеме

$$\begin{aligned} f(x) &= bx^n &&\implies F(\xi) = A\xi^{\frac{n}{n-1}},\\ f(x) &= be^{-\beta x} &&\implies F(\xi) = \beta\xi, \end{aligned}$$

где $A = \frac{1}{b}\big[b(1-n)\big]^{\frac{n}{n-1}}$.

27. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(t)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$\begin{aligned} T(x,t) &= Ax + A\int g(t)\,dt + B,\\ T(x,t) &= A\Big[x + \int g(t)\,dt\Big]^2 + 2A\int f(t)\,dt + B,\\ T(x,t) &= A\exp\Big[\mu x + \mu^2\int f(t)\,dt + \mu\int g(t)\,dt\Big]. \end{aligned}$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int f(t)\,dt + A, \qquad z = x + \int g(t)\,dt + B,$$

получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau T = \partial_{zz} T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

28. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$\begin{aligned} T(x,t) &= AxG(t) + B, \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],\\ T(x,t) &= Ax^2G^2(t) + 2A\int f(t)G^2(t)\,dt + B,\\ T(x,t) &= A\exp\Big[\mu xG(t) + \mu^2\int f(t)G^2(t)\,dt\Big]. \end{aligned}$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int f(t)G^2(t)\,dt + A, \quad z = xG(t), \qquad \text{где} \quad G(t) = B\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

для функции $T(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau T = \partial_{zz} T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

29. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Это уравнение можно представить в виде уравнения 1.1.10.32:

$$s(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl[p(x)\frac{\partial T}{\partial x}\Bigr],$$

где

$$s(x) = \frac{1}{f(x)}\exp\Bigl[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr], \quad p(x) = \exp\Bigl[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr], \quad q(x) \equiv 0.$$

2. Точные решения имеют вид

$$T(x,t) = e^{-\mu t}u(x), \tag{1}$$

где функция $u(x)$ ищется путем решения следующего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с параметром μ:

$$f(x)u''_{xx} + g(x)u'_x + \mu u = 0. \tag{2}$$

Процедура построения решений конкретных краевых задач для исходного уравнения с помощью частных решений вида (1) подробно описана в 1.1.10.32. Значительное число конкретных разрешимых уравнений вида (2) приведено в следующих справочниках: Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

3. Другие частные решения (A, B — любые):

$$T(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr],$$

$$T(x,t) = At + A\int F(x)\Bigl(\int \frac{dx}{f(x)F(x)}\Bigr)dx,$$

$$T(x,t) = At\Phi(x) + A\int F(x)\Bigl(\int \frac{\Phi(x)\,dx}{f(x)F(x)}\Bigr)dx, \quad \Phi(x) = \int F(x)\,dx.$$

Более сложные решения указаны далее в п. 4.

4. Исходное уравнение для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ допускает точные аналитические решения вида

$$T_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \varphi_{n,i}(x). \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в исходное уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях t, для определения функций

$\varphi_{n,i} = \varphi_{n,i}(x)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по x):

$$f(x)\varphi''_{n,n} + g(x)\varphi'_{n,n} = 0,$$
$$f(x)\varphi''_{n,i} + g(x)\varphi'_{n,i} = (i+1)\varphi_{n,i+1}; \quad i = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1.$$

Интегрируя эти уравнения последовательно в порядке убывания номера i, находим решение (A, B — любые):

$$\begin{aligned}\varphi_{n,n}(x) &= A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr],\\ \varphi_{n,i}(x) &= n(n-1)\ldots(i+1)\,\mathbf{L}_f^{n-i}\bigl[\varphi_{n,n}(x)\bigr]; \quad i = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1.\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь интегральный оператор $\mathbf{L}_f$ вводится следующим образом:

$$\mathbf{L}_f[y(x)] \equiv \int F(x)\Bigl(\int \frac{y(x)\,dx}{f(x)F(x)}\Bigr)\,dx. \tag{5}$$

Степени оператора определяются так: $\mathbf{L}_f^i[y(x)] = \mathbf{L}_f\bigl[\mathbf{L}_f^{i-1}[y(x)]\bigr]$.

Формулы (3), (4) дают точное аналитическое решение исходного уравнения для произвольной функции $f(x)$.

Линейная комбинация частных решений (3):

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{N} C_n T_n(x,t) \qquad (C_n \text{ — произвольны})$$

также является точным решением однородного уравнения.

5. Замена

$$\xi = \int \varphi(x)\,d\xi, \quad \varphi(x) = \exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr]$$

приводит к уравнению вида 1.1.10.26:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F(\xi)\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2},$$

где функция $F = F(\xi)$ определяется путем исключения переменной x из выражений

$$F = f(x)\varphi^2(x), \quad \xi = \int \varphi(x)\,dx.$$

6. Решение уравнения в виде бесконечного ряда, содержащее произвольную функцию координаты:

$$T(x,t) = \Theta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n\,\mathbf{L}^n[\Theta(x)], \qquad \mathbf{L} \equiv f(x)\frac{d^2}{dx^2} + g(x)\frac{d}{dx},$$

где $\Theta(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $T(x,0) = \Theta(x)$.

30. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f^2(x)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x)\big[f'_x(x) + g(t)\big]\dfrac{\partial T}{\partial x} + h(t)T.$

Замена $\xi = \displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ приводит к частному случаю уравнения 1.1.10.35:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + g(t)\frac{\partial T}{\partial \xi} + h(t)T.$$

31. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f\big(f'_x + 2g + \varphi\big)\dfrac{\partial T}{\partial x} + (fg'_x + g^2 + g\varphi + \psi)T,$
где $f = f(x),\ g = g(x),\ \varphi = \varphi(t),\ \psi = \psi(t).$

Преобразование

$$T(x,t) = u(\xi,t)\exp\Bigl(-\int \tfrac{g}{f}\,dx\Bigr), \quad \xi = \int \frac{dx}{f(x)}$$

приводит к частному случаю уравнения 1.1.10.35:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \varphi(t)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \psi(t)u.$$

32. $s(x)\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[p(x)\dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr] - q(x)T + \Phi(x,t).$

Считается, что функции s, p, p'_x, q — непрерывны. В частном случае $s(x)\equiv 1$ это уравнение используется для описания массопереноса в неподвижной среде (твердом теле), когда коэффициент диффузии является произвольной функцией координаты, имеются источники или стоки вещества, если их интенсивность зависит от координаты и времени, а также при наличии объемной химической реакции первого порядка, когда ее константа скорости является произвольной функцией координаты.

1. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

1.1. В каждой точке ограниченной неподвижной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на обеих границах среды в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$T = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$T = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$T = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение:

$$T(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)s(\xi)f(\xi)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \quad (1)$$

Здесь

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\mu_n t)\frac{y_n(\xi)y_n(x)}{\|y_n\|^2}, \qquad \|y_n\|^2 = \int_0^l s(x)y_n^2(x)\,dx, \quad (2)$$

где μ_n и $y_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$[p(x)y'_x]'_x + [\mu s(x) - q(x)]y = 0; \qquad (3)$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \qquad (4)$$

При $s(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$ все собственные значения μ_n положительны. Если μ_n расположены в порядке возрастания: $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \mu_{n+1} < \cdots$, то при $n \to \infty$ для собственных значений и собственных функций справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\mu_n = \frac{\pi^2 n^2}{\delta^2} + O(1), \qquad \delta = \int_0^l \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx,$$

$$\frac{y_n(x)}{\|y_n\|} = \left[\frac{4}{\delta^2 s(x)p(x)}\right]^{1/4} \sin\left[\frac{\pi n}{\delta}\int_0^x \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx\right] + O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr).$$

1.2. В каждой точке ограниченной неподвижной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой границе среды задан свой закон изменения температуры от времени:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

$$T = h(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие})$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$T(x,t) = g(t) + \frac{x}{l}[h(t) - g(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 1.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

2.1. В каждой точке ограниченной неподвижной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а обе границы среды теплоизолированы (отсутствует поток тепла через границы):

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$\partial_x T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

$$\partial_x T = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие})$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции μ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

2.2. В каждой точке ограниченной неподвижной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, и задан свой закон изменения теплового потока от времени на каждой границе среды:

$$\begin{array}{llll} T = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T = g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T = h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$T(x,t) = xg(t) + \frac{x^2}{2l}[h(t) - g(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 2.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

3.1. В каждой точке ограниченной неподвижной среды известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на обеих границах тела происходит теплообмен (по закону Ньютона) с окружающей средой, имеющей нулевую температуру ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$):

$$\begin{array}{llll} T = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - k_1 T = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T + k_2 T = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции μ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y'_x - k_1 y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x + k_2 y = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

3.2. В каждой точке ограниченной неподвижной среды (твердого тела) известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на обеих границах тела происходит теплообмен (по законам Ньютона) с контактирующими средами, каждая из которых имеет свою температуру ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$):

$$\begin{array}{llll} T = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - k_1 T = -k_1 g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T + k_2 T = k_2 h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$T(x,t) = \frac{k_2 h(t) + k_1(1 + k_2 l)g(t)}{k_1 + k_2 + k_1 k_2 l} + x\frac{k_1 k_2[h(t) - g(t)]}{k_1 + k_2 + k_1 k_2 l} + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 3.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

4.1а. В каждой точке ограниченной неподвижной среды (твердого тела) известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на одной границе тела в течение всего времени поддерживается постоянная (нулевая) температура, а другая граница теплоизолирована (отсутствует поток тепла через эту границу):

$$
\begin{aligned}
T &= f(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\
T &= 0 &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)}\\
\partial_x T &= 0 &&\text{при}\quad x = l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции μ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$
y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.
$$

4.1б. В каждой точке ограниченной неподвижной среды (твердого тела) известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на одной границе тела задан закон изменения температуры от времени, а на другой границе задается закон изменения теплового потока:

$$
\begin{aligned}
T &= f(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\
T &= g(t) &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)}\\
\partial_x T &= h(t) &&\text{при}\quad x = l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x, t)$ по формуле

$$
T(x, t) = g(t) + xh(t) + u(x, t),
$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 4.1а (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

4.2а. В каждой точке ограниченной неподвижной среды (твердого тела) известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, одна граница тела теплоизолирована (отсутствует поток тепла через эту границу), а на другой границе в течение всего времени поддерживается постоянная (нулевая) температура:

$$
\begin{aligned}
T &= f(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_x T &= 0 &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)}\\
T &= 0 &&\text{при}\quad x = l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции μ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

4.2б. В каждой точке области известно пространственное распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на одной границе области задан закон изменения теплового потока от времени, а на другой границе задается закон изменения температуры:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T &= g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$T(x,t) = (x-l)g(t) + h(t) + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 4.2а (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964).

33. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial T}{\partial x} + h(x)T + \Phi(x,t).$

1. Это уравнение можно представить в виде уравнения 1.1.10.32:

$$s(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right] - q(x)T + s(x)\Phi(x,t),$$

где

$$s(x) = \frac{1}{f(x)}\exp\Big[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Big], \quad p(x) = \exp\Big[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Big],$$
$$q(x) = -\frac{h(x)}{f(x)}\exp\Big[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Big].$$

2. Рассмотрим однородное уравнение при $\Phi(x,t) \equiv 0$. Пусть известно нетривиальное частное решение $T_0 = T_0(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(x)T_0'' + g(x)T_0' + h(x)T_0 = 0, \tag{1}$$

соответствующего стационарному случаю ($\partial_t T \equiv 0$). Тогда другими частными решениями исходного уравнения будут функции

$$T(x) = AT_0 + BT_0\int \frac{F}{T_0^2}dx, \quad F = \exp\Big(-\int \frac{g}{f}dx\Big),$$
$$T(x,t) = AtT_0 + AT_0\int \frac{F}{T_0^2}\Big(\int \frac{T_0^2}{fF}\,dx\Big)\,dx,$$
$$T(x,t) = AtT_0\Psi + AT_0\int \frac{F}{T_0^2}\Big(\int \frac{T_0^2\Psi}{fF}dx\Big)\,dx, \quad \Psi = \int \frac{F}{T_0^2}dx,$$

где A, B — произвольные постоянные.

Широкий класс более сложных точных аналитических решений исходного уравнения можно указать, сделав предварительно замену $T(x,t) = T_0(x)u(x,t)$, которая приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[2f(x)\frac{T_0'(x)}{T_0(x)} + g(x)\right]\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (2)$$

Отсюда с помощью результатов п. 4 из 1.1.10.29 следует, что любое нетривиальное частное решение вспомогательного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (1) порождает бесконечное множество точных аналитических решений исходного уравнения в частных производных.

3. Пусть известно частное нестационарное решение $T_0 = T_0(x,t)$ $(\partial_t T_0 \not\equiv 0)$ однородного уравнения при $\Phi \equiv 0$. Тогда функции

$$T_n(x,t) = \frac{\partial^n T_0}{\partial t^n}(x,t),$$

полученные дифференцированием этого решения по переменной t, также будут частными решениями рассматриваемого уравнения.

Кроме того, новое частное решение можно искать в виде

$$\bar{T}(x,t) = \int_{t_0}^{t} T_0(x,\tau)\,d\tau + \phi(x), \qquad (3)$$

где неизвестная функция $\phi(x)$ находится после подстановки выражения (3) в исходное уравнение. Построив решение (3), можно указанным способом строить следующее решение и т. д.

4. Случай $\Phi \equiv 0$, $h(x) = h = \mathrm{const}$.

Точные решения (A, B — любые):

$$T(x,t) = e^{ht}\left[A + B\int F(x)\,dx\right], \quad F(x) = \exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right],$$

$$T(x,t) = Ae^{ht}\left[t + \int F(x)\left(\int \frac{dx}{f(x)F(x)}\right)dx\right],$$

$$T(x,t) = Ae^{ht}\left[t\Psi(x) + \int F(x)\left(\int \frac{\Psi(x)\,dx}{f(x)F(x)}\right)dx\right], \quad \Psi(x) = \int F(x)\,dx.$$

Замена $T(x,t) = e^{ht}v(x,t)$ приводит к уравнению вида 1.1.10.29:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

34. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial T}{\partial x} + h(t)T.}$

1. Точные решения (A, B — любые):

$$T(x,t) = \left[A + B\int F(x)\,dx\right]H(t),$$

$$T(x,t) = A\left[t + \int F(x)\left(\int \frac{dx}{f(x)F(x)}\right)dx\right]H(t),$$

$$T(x,t) = A\left[t\Psi(x) + \int F(x)\left(\int \frac{\Psi(x)\,dx}{f(x)F(x)}\right)dx\right]H(t).$$

При записи этих формул использованы следующие обозначения:

$$H(t)=\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],\quad F(x)=\exp\Bigl[-\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Bigr],\quad \Psi(x)=\int F(x)\,dx.$$

2. Замена $T(x,t)=u(x,t)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению вида 1.1.10.29:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

35. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t}=f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+g(t)\dfrac{\partial T}{\partial x}+h(t)T.}$

Частный случай уравнения 1.1.10.36.

Преобразование

$$T(x,t)=u(z,\tau)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],\quad z=x+\int g(t)\,dt,\quad \tau=\int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u=\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

36. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t}=n(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\bigl[xf(t)+g(t)\bigr]\dfrac{\partial T}{\partial x}+\bigl[xh(t)+s(t)\bigr]T.}$

Сделаем преобразование

$$T(x,t)=\exp\bigl[x\alpha(t)+\beta(t)\bigr]u(z,\tau),\quad \tau=\varphi(t),\quad z=x\psi(t)+\chi(t),\quad (1)$$

где неизвестные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ находятся далее из условия максимального упрощения полученного уравнения. Для новой зависимой переменной $u(z,\tau)$ имеем

$$\varphi'_t\frac{\partial u}{\partial\tau}=n\psi^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\bigl[x(f\psi-\psi'_t)+2n\psi\alpha+g\psi-\chi'_t\bigr]\frac{\partial u}{\partial z}+\\ +\bigl[x(f\alpha+h-\alpha'_t)+n\alpha^2+g\alpha+s-\beta'_t\bigr]u.$$

Пусть неизвестные функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t=n\psi^2,\qquad (2)$$
$$\psi'_t=f\psi,\qquad (3)$$
$$\chi'_t=2n\alpha\psi+g\psi,\qquad (4)$$
$$\alpha'_t=f\alpha+h,\qquad (5)$$
$$\beta'_t=n\alpha^2+g\alpha+s.\qquad (6)$$

Тогда исходное уравнение преобразованием (1)–(6) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

которое подробно рассматривается в разд. 1.1.1.

Систему (2)–(6) можно решить последовательно, начиная, например, с уравнения (3), в следующем порядке: (3) → (2) → (5) → (6) → (4). В результате получим искомые функции

$$\psi = C_1 \exp\Bigl(\int f\,dt\Bigr), \quad C_1 \neq 0,$$

$$\varphi = \int n\psi^2\,dt + C_2,$$

$$\alpha = \psi \int \frac{h}{\psi} dt + C_3\psi,$$

$$\beta = \int \bigl(n\alpha^2 + g\alpha + s\bigr)\,dt + C_4,$$

$$\chi = \int (2n\alpha + g)\psi\,dt + C_5,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

Замечание. Аналогичным образом можно упростить неоднородное уравнение с дополнительным слагаемым $\Phi(x,t)$ в правой части.

37. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = n(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \bigl[xf(t) + g(t)\bigr]\dfrac{\partial T}{\partial x} + \bigl[x^2 h(t) + xs(t) + p(t)\bigr]T.$

Замена $T(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2\bigr]u(x,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl[x(4n\varphi + f) + g\bigr]\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \bigl[x^2(h + 2f\varphi + 4n\varphi^2 - \varphi'_t) + x(s + 2g\varphi) + p + 2n\varphi\bigr]u. \quad (1)$$

Выбираем функцию $\varphi = \varphi(t)$ так, чтобы она была решением (частным) обыкновенного дифференциального уравнения Риккати

$$\varphi'_t = 4n\varphi^2 + 2f\varphi + h. \quad (2)$$

Тогда преобразованное уравнение (1) становится уравнением вида 1.1.10.36:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl[x(4n\varphi + f) + g\bigr]\frac{\partial u}{\partial x} + \bigl[x(s + 2g\varphi) + p + 2n\varphi\bigr]u.$$

Большое число конкретных разрешимых уравнений Риккати (2) приведено в следующих справочниках: Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

В частном случае, при выполнении условий

$$n = af, \quad h = bf, \qquad \text{где} \quad a, b = \text{const}, \quad f = f(t),$$

частными решениями уравнения (2) являются корни квадратного уравнения $4a\varphi^2 + 2\varphi + b = 0$ $(\varphi = \text{const})$.

38. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial T}{\partial x} + \bigl[h_1(x) + h_2(t)\bigr]T.$

Замена $T(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl[\int h_2(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению вида 1.1.10.33:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial u}{\partial x} + h_1(x)u.$$

39. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = xf(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial T}{\partial x} + \bigl[xh(t) + s(t)\bigr]T.$

Сделаем преобразование

$$\tau = \varphi(t), \quad z = x\psi(t), \quad T(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[x\alpha(t) + \int s(t)\,dt\Bigr], \qquad (1)$$

где неизвестные функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\alpha(t)$ находятся далее из условия максимального упрощения полученного уравнения. Для новой зависимой переменной $u(z,\tau)$ имеем

$$\varphi'_t\frac{\partial u}{\partial \tau} = zf\psi\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{z}{\psi}\bigl(2f\psi\alpha + g\psi - \psi'_t\bigr)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{z}{\psi}\bigl(f\alpha^2 + g\alpha + h - \alpha'_t\bigr)u.$$

Пусть неизвестные функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = f\psi, \qquad (2)$$
$$\psi'_t = 2f\alpha\psi + g\psi, \qquad (3)$$
$$\alpha'_t = f\alpha^2 + g\alpha + h. \qquad (4)$$

Тогда исходное уравнение преобразованием (1)–(4) приводится к уравнению вида 1.1.8.26:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Систему (2)–(4) будем решать последовательно, начиная с уравнения (4) в следующем порядке: (4) $\to$ (3) $\to$ (2).

Уравнение Риккати (4) можно решать отдельно. Большое число конкретных разрешимых уравнений этого вида приведено в следующих справочниках: Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (1995).

Считая, что решение $\alpha = \alpha(t)$ уравнения (4) получено, находим решения уравнений (2), (3) в виде (C_1, C_2 — любые):

$$\psi(t) = C_1\exp\Bigl[\int(2f\alpha + g)\,dt\Bigr], \quad \varphi(t) = \int f\psi\,dt + C_2.$$

Замечание. Преобразованием (1)–(4) можно упростить неоднородное уравнение с дополнительным слагаемым $\Phi(x,t)$ в правой части.

40. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = x^2 f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial T}{\partial x} + h(t)T.$

Замена $x = \pm e^\xi$ приводит к уравнению вида 1.1.10.35:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \bigl[g(t) - f(t)\bigr]\frac{\partial T}{\partial \xi} + h(t)T.$$

41. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = x^2 n(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x\bigl[f(t)\ln x + g(t)\bigr]\dfrac{\partial T}{\partial x} + \bigl[h(t)\ln^2 x + s(t)\ln x + p(t)\bigr]T.$

Замена $z = \ln x$ приводит к уравнению вида 1.1.10.37:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = n(t)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \bigl[zf(t) + g(t) - n(t)\bigr]\frac{\partial T}{\partial z} + \bigl[z^2 h(t) + zs(t) + p(t)\bigr]T.$$

42. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = x^4 f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(t)T.$

Преобразование

$$T(x,t) = x\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(\xi,\tau), \quad \xi = \frac{1}{x}, \quad \tau = \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{\xi\xi}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

43. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = (x-b_1)^2(x-b_2)^2 f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(t)T, \qquad b_1 \neq b_2.$

Преобразование

$$T(x,t) = (x-b_2)\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(\xi,\tau), \quad \xi = \ln\frac{x-b_1}{x-b_2}, \quad \tau = (b_1-b_2)^2\int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

которое рассматривается в разд. 1.1.3.

44. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = (bx^2+cx+s)^2 f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(t)T.$

Преобразование

$$T(x,t) = (bx^2+cx+s)^{1/2}\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(\xi,\tau),$$
$$\xi = \int\frac{dx}{bx^2+cx+s}, \qquad \tau = \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \bigl(bs - \tfrac{1}{4}c^2\bigr)u,$$

которое рассматривается в разд. 1.1.3.

45. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = x^n f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial T}{\partial x} + h(t)T.$

Преобразование

$$T(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr], \quad z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{2-n}(t)\,dt,$$

где $G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]$, приводит к уравнению вида 1.1.8.47:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z^n\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

46. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=e^{\beta x}f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+g(t)T.$

Преобразование

$$T(x,t)=\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(x,\tau),\qquad \tau=\int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению вида 1.1.9.33:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=e^{\beta x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

47. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=f(x)g(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+h(t)T.$

1. Точные решения (A, B, x_0 — любые):

$$T(x,t)=(Ax+B)H(t),$$
$$T(x,t)=A\bigl[M(t)+F(x)\bigr]H(t),$$
$$T(x,t)=A\bigl[M(t)x+\Psi(x)\bigr]H(t),$$
$$T(x,t)=A\Bigl[M^2(t)+2M(t)F(x)+2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}F(\xi)\,d\xi\Bigr]H(t),$$
$$T(x,t)=A\Bigl[M^2(t)x+2M(t)\Psi(x)+2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\Psi(\xi)\,d\xi\Bigr]H(t).$$

Здесь использованы краткие обозначения:

$$H(t)=\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],\quad M(t)=\int g(t)\,dt,$$
$$F(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}d\xi,\qquad \Psi(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\xi\,d\xi.$$

2. Преобразование

$$T(x,t)=\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr]u(x,\tau),\qquad \tau=\int g(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Широкий класс точных аналитических решений этого уравнения описан в 1.1.10.26.

48. $f(x)\dfrac{\partial T}{\partial x}+g(x)y\dfrac{\partial T}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен капель и пузырей с потоком).

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t=\int\frac{h^2(x)}{f(x)}dx+A,\quad z=yh(x),\qquad \text{где}\quad h(x)=B\exp\Bigl[-\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr],$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t T=\partial_{zz}T$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

⊙ Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), В. В. Дильман, А. Д. Полянин (1988), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

49. $\boldsymbol{f(x)\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} - K(x)T.}$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя с объемной химической реакцией первого порядка (обычно $K \equiv \text{const}$).

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$T(x,y) = u(t,z)\exp\Bigl[-\int \frac{K(x)}{f(x)}dx\Bigr], \quad t = \int \frac{\varphi^2(x)}{f(x)}dx + A, \quad z = y\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = B\exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr]$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{zz} u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

⊙ Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985).

50. $\boldsymbol{f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(x)y^n\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}.}$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен твердых частиц и капель), x — координата, направленная вдоль поверхности тела, y — координата, направленная по нормали к поверхности тела.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.8.47:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = z^{1-n}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

⊙ Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), В. В. Дильман, А. Д. Полянин (1988), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

51. $\boldsymbol{f\Bigl(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\Bigr)\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}g\Bigl(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\Bigr)\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}.}$

Это уравнение является обобщением уравнения теплового пограничного слоя на плоской пластине.

1. Переходя от x, y к новым переменным $t = \ln x$, $\xi = \frac{y}{\sqrt{x}}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$f(\xi)\frac{\partial T}{\partial t} + \bigl[g(\xi) - \tfrac{1}{2}\xi f(\xi)\bigr]\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}. \tag{1}$$

Частные решения этого уравнения имеют вид

$$T(t,\xi) = Ae^{\beta t}\phi(\xi),$$

где функции $\phi(\xi)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\phi''_{\xi\xi} = \bigl[g(\xi) - \tfrac{1}{2}\xi f(\xi)\bigr]\phi'_\xi + \beta f(\xi)\phi.$$

2. Решение исходного уравнения с граничными условиями

$$x = 0,\ \ T = T_0; \quad y = 0,\ \ T = T_1; \quad y \to \infty,\ \ T \to T_0$$

(T_0, T_1 — некоторые постоянные) имеет вид

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{\int_\xi^\infty \exp\left[-\Psi(\xi)\right] d\xi}{\int_0^\infty \exp\left[-\Psi(\xi)\right] d\xi}, \qquad \Psi(\xi) = \int_0^\xi \left[\tfrac{1}{2}\xi f(\xi) - g(\xi)\right] d\xi,$$

где $\xi = y/\sqrt{x}$. Считается, что при $\xi > 0$ справедливо неравенство $\xi f(\xi) > 2g(\xi)$.

3. Уравнение теплового пограничного слоя на плоской пластине задается соотношениями

$$f(\xi) = \Pr F'_\xi(\xi), \qquad g(\xi) = \tfrac{1}{2}\Pr\left[\xi F'_\xi(\xi) - F(\xi)\right],$$

где $F(\xi)$ — решение Блазиуса в задаче о продольном обтекании плоской пластины поступательным потоком, $\Pr$ — число Прандтля (x — координата, направленная вдоль пластины, а y — координата, направленная по нормали к поверхности пластины). Формулы п. 2 в этом случае переходят в решение Э. Польгаузена. Подробности см. в книге А. М. Кутепова, А. Д. Полянина, З. Д. Запрянова и др. (1996, стр. 111).

52. $\boldsymbol{f(x)\dfrac{\partial T}{\partial x} + \left[g(x)y - \dfrac{b}{y}\right]\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}.}$

При $b = 1$ уравнения этого вида описывают распределение концентрации во внутренней области диффузионного следа за движущейся частицей и каплей.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^2(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right],$$

приводит к уравнению вида 1.1.8.23:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{b}{z}\frac{\partial T}{\partial z}.$$

⊙ Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985, стр. 29).

53. $\boldsymbol{f(x)\dfrac{\partial T}{\partial x} + \left[g(x)y - \dfrac{b}{y}\right]\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + h(x)T.}$

Замена $T(x,y) = u(x,y)\exp\left[\int \dfrac{h(x)}{f(x)}\,dx\right]$ приводит к уравнению вида 1.1.10.52:

$$f(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \left[g(x)y - \frac{b}{y}\right]\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

54. $f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial T}{\partial x}+\left[g(x)y^n-\dfrac{b}{y}\right]\dfrac{\partial T}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$

Преобразование

$$t=\int\frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}dx+A,\quad \xi=\frac{2}{n+1}\big[yh(x)\big]^{\frac{n+1}{2}},$$

где $h(x)=B\exp\Bigl[-\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr]$; A, B — произвольные постоянные, приводит к уравнению вида 1.1.8.22:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial\xi^2}+\frac{1-2\beta}{\xi}\frac{\partial T}{\partial\xi},\qquad \beta=\frac{1-b}{n+1}$$

(см. также уравнения в разд. 1.1.4, 1.1.6).

1.1.11. Сопряженные задачи теплопроводности

1. Предварительные замечания. В таких задачах рассматриваются две (или более) области V_1 и V_2 с общей границей S, заполненные разными средами. Каждая среда характеризуется своими коэффициентами теплопроводности λ_1, λ_2 и температуропроводности a_1, a_2 и описывается соответствующими (различными) уравнениями тепло- и массопереноса. Граничные условия теплового равновесия выражают равенство температур и равенство тепловых потоков на границе раздела фаз.

Сопряженные задачи теплопроводности математически описываются системой двух или более уравнений (в том числе различного вида) с соответствующими граничными условиями. Эти задачи достаточно подробно рассматриваются в книгах А. В. Лыкова (1967), Г. Карслоу, Д. Егера (1964). Ниже приведено несколько примеров точных решений сопряженных задач (более детальный анализ этих задач выходит за рамки данного справочника).

2. Система двух полуограниченных тел. Рассматриваются два полуограниченных твердых тела (две полуограниченные неподвижные среды), распределения температур в которых $T_1=T_1(x,t)$, $T_2=T_2(x,t)$ описываются уравнениями:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}=a_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}\qquad (\text{в области } 0\leqslant x<\infty)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}=a_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}\qquad (\text{в области } -\infty<x\leqslant 0)$$

В каждом из тел задано свое распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границе $x=0$ заданы сопряженные граничные условия, кроме того, считается, что на бесконечности температура не зависит от координаты x, тогда:

$T_1=f_1(x)$	при	$t=0$	(начальное условие)
$T_2=f_2(x)$	при	$t=0$	(начальное условие)
$T_1=T_2$	при	$x=0$	(граничное условие)
$\lambda_1\partial_x T_1=\lambda_2\partial_x T_2$	при	$x=0$	(граничное условие)
$\partial_x T_1\to 0$	при	$x\to\infty$	(условие на бесконечности)
$\partial_x T_2\to 0$	при	$x\to-\infty$	(условие на бесконечности)

Решение:

$$T_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a_1 t}} \int_0^\infty f_1(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_1 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1 t}\right]\right\} d\xi - \\ - \sqrt{\frac{a_1}{\pi\lambda_1^2}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a_1(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$T_2(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a_2 t}} \int_0^\infty f_2(-\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_2 t}\right]\right\} d\xi - \\ - \sqrt{\frac{a_2}{\pi\lambda_2^2}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a_2(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Здесь функция $g(t)$ определяется по формуле

$$g(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi(\lambda_1\sqrt{a_2} + \lambda_2\sqrt{a_1})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{F(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}},$$

где

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int_0^\infty f_1(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a_1 t}\right) d\xi - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_0^\infty f_2(-\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a_2 t}\right) d\xi.$$

Частный случай. Начальные температуры тел постоянны и равны T_{01} и T_{02}:

$$f_1(x) = T_{01}, \qquad f_2(x) = T_{02}.$$

Решение:

$$\frac{T_1(x,t) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{K}{1+K}\left[1 + \frac{1}{K}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)\right],$$

$$\frac{T_2(x,t) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{K}{1+K}\operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{a_1 t}}\right),$$

где $K = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\dfrac{a_2}{a_1}}$ — величина, характеризующая тепловую активность первой среды по отношению ко второй. Из этих формул следует, что на границе раздела температура устанавливается сразу после соприкосновения тел и остается постоянной на протяжении всего процесса теплопереноса.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 365).

3. Система ограниченного и полуограниченного тел. Рассматриваются два соприкасающихся твердых тела (неподвижные среды) — ограниченное и полуограниченное, — распределения температур в которых $T_1 = T_1(x,t)$ в области $0 \leqslant x \leqslant l$ и $T_2 = T_2(x,t)$ в области $l \leqslant x < \infty$ описываются соответствующими уравнениями, рассмотренными в разд. 1.1.1. Ограниченное тело имеет в начальный момент времени $t = 0$ температуру T_0, а неограниченное — нулевую температуру, на границе $x = l$ заданы сопряженные граничные условия, кроме того, считается, что на бесконечности температура остается нулевой. Температура свободной границы (при $x = 0$) в течение всего времени поддерживается постоянной и равной T_s, тогда:

$T_1 = T_0$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$T_2 = 0$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$T_1 = T_2$	при	$x = l$	(граничное условие)
$\lambda_1\partial_x T_1 = \lambda_2\partial_x T_2$	при	$x = l$	(граничное условие)
$T_1 = T_s$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$T_2 \to 0$	при	$x \to \infty$	(условие на бесконечности)

Решение:

$$\frac{T_1(x,t)-T_0}{T_s-T_0}=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1t}}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}h^n\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2nl+x}{2\sqrt{a_1t}}\right)-\operatorname{erfc}\left(\frac{2nl-x}{2\sqrt{a_1t}}\right)\right]+$$
$$+\frac{T_0}{(1+K)(T_s-T_0)}\sum_{n=1}^{\infty}h^{n-1}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2nl-l+x}{2\sqrt{a_1t}}\right)-\operatorname{erfc}\left(\frac{2nl-l-x}{2\sqrt{a_1t}}\right)\right],$$
$$\frac{T_2(x,t)}{T_s-T_0}=\frac{K}{1+K}\left[\frac{T_0}{T_s-T_0}\operatorname{erfc}\left(\frac{x-l}{2\sqrt{a_2t}}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}h^{n-1}\operatorname{erfc}\left(\frac{x-l+(2n-1)M}{2\sqrt{a_2t}}\right)\right]+$$
$$+\frac{2KT_0}{(1+K)^2(T_s-T_0)}\sum_{n=1}^{\infty}h^{n-1}\operatorname{erfc}\left(\frac{x-l+2nM}{2\sqrt{a_2t}}\right),$$

где введены следующие обозначения:

$$h=\frac{1-K}{1+K},\qquad K=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}},\qquad M=l\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}.$$

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 369).

В случае, когда температура свободной поверхности $x=0$ является линейной функцией времени

$$T_s=T_0+Bt,$$

решение задачи имеет вид

$$T_1(x,t)=Bt\varphi_1(x),\quad \varphi_1(x)=4\sum_{n=1}^{\infty}\left[h^{n-1}I^{(2)}\left(\frac{2nl-l+x}{2\sqrt{a_1t}}\right)-h^nI^{(2)}\left(\frac{2nl-x}{2\sqrt{a_1t}}\right)\right],$$
$$T_2(x,t)=Bt\varphi_2(x),\quad \varphi_2(x)=4(1-h)\sum_{n=1}^{\infty}h^{n-1}I^{(2)}\left(\frac{2nl-l}{2\sqrt{a_1t}}-\frac{l-x}{2\sqrt{a_2t}}\right),$$

где функция $I^{(2)}(z)$ вводится в п. 3.2 разд. 1.1.1.

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 369).

1.2. Двумерное уравнение $\frac{\partial T}{\partial t}=a\Delta T$

1.2.1. Плоские задачи теплопроводности

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\right)$$

и описывает развитие двумерных нестационарных процессов теплопереноса в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих двумерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

1. Область: $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$.

В каждой точке бесконечного твердого тела задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$T=f(x,y)\qquad\text{при}\quad t=0\qquad\text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = \frac{1}{4\pi at}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\zeta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right]d\xi\,d\zeta.$$

Частный случай. Начальная температура тела в области $|x| < x_0$, $|y| < y_0$ постоянна и равна T_1, а в области $|x| > x_0$, $|y| > y_0$ — соответственно T_2, т. е.

$$f(x,y) = \begin{cases} T_1 & \text{при } |x| < x_0,\ |y| < y_0, \\ T_2 & \text{при } |x| > x_0,\ |y| > y_0. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{4}(T_1 - T_2)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{at}}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_0 - y}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y_0 + y}{2\sqrt{at}}\right)\right] + T_2.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 62), А. Г. Бутковский (1979, стр. 134).

Если начальное распределение $f(x,y)$ является бесконечно дифференцируемой по обоим аргументам функцией, то решение можно представить в виде ряда:

$$T(x,y,t) = f(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}\mathbf{L}^n\big[f(x,y)\big], \quad \mathbf{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Такое представление полезно использовать при малых значениях t.

2. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Первая краевая задача.

2.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечную полуплоскость, известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела $x = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{llll} T = f(x,y) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = \frac{1}{4\pi at}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right]\right\} f(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 271).

2.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечную полуплоскость, известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела $x = 0$ задан закон изменения температуры от времени и координаты y:

$$\begin{array}{llll} T = f(x,y) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = g(y,t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

О решении этой задачи см. п. 2.2 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

3. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

3.1. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границах $x = 0$ и $y = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$
\begin{array}{llll}
T = f(x, y) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & y = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

О решении этой задачи см. п. 3.1 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

Частный случай. Начальная температура тела однородна и равна T_0:

$$f(x, y) = T_0.$$

Решение:

$$T = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 172).

3.2. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой из границ задан свой закон изменения температуры от времени и координат:

$$
\begin{array}{llll}
T = f(x, y) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = g_1(y, t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
T = g_2(x, t) & \text{при} & y = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

О решении этой задачи см. п. 3.2 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

Частный случай. Начальная температура тела постоянна (равна нулю), а на обеих границах в течение всего времени также поддерживается постоянная температура T_0:

$$f(x, y) = 0, \quad g_1(y, t) = g_2(x, t) = T_0.$$

Решение:

$$T = T_0\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right)\right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 172).

4. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Третья краевая задача.

4.1. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границах $x = 0$ и $y = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$
\begin{array}{llll}
T = f(x, y) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x T - k_1 T = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T - k_2 T = 0 & \text{при} & y = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

О решении этой задачи см. п. 4.1 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

Частный случай. Начальная температура тела однородна и равна T_0:
$$f(x,y) = T_0.$$

Решение:
$$T = T_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_1 x + ak_1^2 t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k_1\sqrt{at}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_2 y + ak_2^2 t)\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\right)\right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 173).

4.2. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах $x=0$ и $y=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средами, имеющими температуру $g_1(y,t)$ и $g_2(x,t)$ соответственно:

$$\begin{aligned} &T = f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\ &\partial_x T - k_1 T = -k_1 g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\ &\partial_y T - k_2 T = -k_2 g_2(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}\end{aligned}$$

О решении этой задачи см. п. 4.2 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

5. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Смешанные задачи.

5.1. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, на границе $x=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру, а на границе $y=0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned} &T = f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\ &\partial_x T - kT = 0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\ &T = 0 &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}\end{aligned}$$

О решении этой задачи см. п. 5.1 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

Частный случай. Начальная температура тела однородна и равна T_0:
$$f(x,y) = T_0.$$

Решение:
$$T = T_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(kx + ak^2 t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right)\right]\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 75).

5.2. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, на границе $x=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей температуру $g_1(y,t)$, а на границе $y=0$ поддерживается температура $g_2(x,t)$:

$$\begin{aligned} &T = f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\ &\partial_x T - kT = -kg_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\ &T = g_2(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}\end{aligned}$$

О решении этой задачи см. п. 5.2 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой полубесконечную полосу, задана постоянная начальная температура (равная нулю), такая же температура поддерживается в течение всего времени на границах $x = 0$ и $y = 0$, а на границе $x = l$ поддерживается температура T_0:

$$
\begin{array}{llll}
T = 0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
T = T_0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & y = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
T(x,y,t) = T_0 \biggl\{ \frac{x}{l} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \times
$$

$$
\times \biggl[2\exp\Bigl(-\frac{n^2\pi^2 at}{l^2}\Bigr) + \exp\Bigl(\frac{n\pi y}{l}\Bigr) \operatorname{erfc}\Bigl(\frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{n\pi\sqrt{at}}{l}\Bigr) +
$$

$$
+ \exp\Bigl(-\frac{n\pi y}{l}\Bigr) \operatorname{erfc}\Bigl(\frac{y}{2\sqrt{at}} - \frac{n\pi\sqrt{at}}{l}\Bigr) - 2\exp\Bigl(-\frac{n^2\pi^2 at}{l^2}\Bigr) \operatorname{erfc}\Bigl(\frac{y}{2\sqrt{at}}\Bigr) \biggr] \biggr\}.
$$

⊙ Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 406).

7. Область: $-l \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой полубесконечную полосу, задана постоянная начальная температура T_0 при $t = 0$, в течение всего времени на границах $x = -l$, $x = l$ и $y = 0$ также поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$
\begin{array}{llll}
T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & x = -l & \text{(граничное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & y = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
T(x,y,t) = \frac{4T_0}{\pi} \operatorname{erf}\Bigl(\frac{y}{2\sqrt{at}}\Bigr) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\Bigl[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 at}{4l^2}\Bigr] \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.
$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 173).

8. Область: $-l \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Третья краевая задача.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой полубесконечную полосу, задана постоянная начальная температура T_0 при $t = 0$, а в течение всего времени на границах $x = -l$, $x = l$ и $y = 0$

происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{array}{llll} T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - k_1 T = 0 & \text{при} & x = -l & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T + k_1 T = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \\ \partial_y T - k_2 T = 0 & \text{при} & y = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = T_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_1 \cos \mu_n x}{[(k_1^2 + \mu_n^2)l + k_1] \cos \mu_n l} \exp(-\mu_n^2 at) \right\} \times \\ \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}} \right) + \exp(k_2 y + k_2^2 at) \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at} \right) \right],$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\mu \operatorname{tg}(\mu l) = k_1.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 174).

9. Область: $-l \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Смешанные задачи.

9.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой полубесконечную полосу, задана постоянная начальная температура T_0 при $t = 0$, в течение всего времени на границах $x = -l$, $x = l$ поддерживается постоянная температура (равная нулю), а на границе $y = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{array}{llll} T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & x = -l & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \\ \partial_y T - kT = 0 & \text{при} & y = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = T_0 \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 at}{4l^2} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right\} \times \\ \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}} \right) + \exp(ky + k^2 at) \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at} \right) \right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 173).

9.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой полубесконечную полосу, задана постоянная начальная температура T_0 при $t = 0$, в течение всего времени на границах $x = -l$ и $x = l$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру, а на границе $y = 0$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned} T &= T_0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT &= 0 && \text{при} \quad x = -l && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T + kT &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x, y, t) = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k \cos \mu_n x}{[(k^2 + \mu_n^2)l + k] \cos \mu_n l} \exp(-\mu_n^2 at),$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\mu \operatorname{tg}(\mu l) = k.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 173).

10. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Первая краевая задача.

10.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой прямоугольник, известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его границах в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned} T &= f(x, y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

О решении этой задачи см. п. 6.1 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

10.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой прямоугольник, известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой границе задан свой закон изменения температуры от времени и координат:

$$\begin{aligned} T &= f(x, y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= g_1(y, t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= g_2(y, t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)} \\ T &= g_3(x, t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= g_4(x, t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

О решении этой задачи см. п. 6.2 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

11. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Вторая краевая задача.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой прямоугольник, известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а границы тела теплоизолированы (отсутствует поток тепла через поверхность тела):

$$
\begin{array}{lll}
T = f(x,y) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x T = 0 & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x T = 0 & \text{при} \quad x = l_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T = 0 & \text{при} \quad y = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T = 0 & \text{при} \quad y = l_2 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

О решении этой задачи см. п. 7 в разд. 1.3.1 при $\Phi \equiv 0$.

12. Область: $-l_1 \leqslant x \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$. Первая краевая задача.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой прямоугольник, в начальный момент времени $t = 0$ задана постоянная температура T_0, а на его границах в течение всего времени поддерживается температура, равная нулю:

$$
\begin{array}{lll}
T = T_0 & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = 0 & \text{при} \quad x = -l_1 & \text{(граничное условие)} \\
T = 0 & \text{при} \quad x = l_1 & \text{(граничное условие)} \\
T = 0 & \text{при} \quad y = -l_2 & \text{(граничное условие)} \\
T = 0 & \text{при} \quad y = l_2 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
T(x,y,t) = \frac{16T_0}{\pi^2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 at}{4l_1^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l_1}\right\}\times
$$
$$
\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 at}{4l_2^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2l_2}\right\}.
$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 173).

13. Область: $-l_1 \leqslant x \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$. Третья краевая задача.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой прямоугольник, в начальный момент времени $t = 0$ задана постоянная температура T_0, а на его границах в течение всего времени происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$
\begin{array}{rll}
T = T_0 & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x T - k_1 T = 0 & \text{при} \quad x = -l_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x T + k_1 T = 0 & \text{при} \quad x = l_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T - k_2 T = 0 & \text{при} \quad y = -l_2 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T + k_2 T = 0 & \text{при} \quad y = l_2 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$T(x,y,t) = 4T_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1 \cos \mu_n x}{[(k_1^2+\mu_n^2)l_1 + k_1]\cos \mu_n l_1} \exp(-\mu_n^2 at) \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_2 \cos \nu_n y}{[(k_2^2+\nu_n^2)l_2 + k_2]\cos \nu_n l_2} \exp(-\nu_n^2 at) \right\},$$

где μ_n и ν_n — положительные корни уравнений

$$\mu \operatorname{tg}(\mu l_1) = k_1, \qquad \nu \operatorname{tg}(\nu l_2) = k_2.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 173).

14. Область: $-l_1 \leqslant x \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$. Смешанная задача. В каждой точке твердого тела, представляющего собой прямоугольник, в начальный момент времени $t=0$ задана постоянная температура T_0, на его границах $x=-l_1$ и $x=l_1$ поддерживается постоянная температура (равная нулю), а на границах $y=-l_2$ и $y=l_2$ в течение всего времени происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{aligned} T &= T_0 & &\text{при} \quad t=0 & &\text{(начальное условие)}\\ T &= 0 & &\text{при} \quad x=-l_1 & &\text{(граничное условие)}\\ T &= 0 & &\text{при} \quad x=l_1 & &\text{(граничное условие)}\\ \partial_y T - kT &= 0 & &\text{при} \quad y=-l_2 & &\text{(граничное условие)}\\ \partial_y T + kT &= 0 & &\text{при} \quad y=l_2 & &\text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = \frac{8T_0}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 at}{4l_1^2}\right] \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l_1} \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k \cos \mu_n y}{[(k^2+\mu_n^2)l_2 + k]\cos \mu_n l_2} \exp(-\mu_n^2 at) \right\},$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\mu \operatorname{tg}(\mu l_2) = k.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 173).

1.2.2. Задачи с угловой симметрией

Задачи с угловой симметрией часто встречается в теории тепло- и массопереноса. Они описывают развитие двумерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах (ограниченных координатными поверхностями цилиндрической системы) с постоянным коэффициентом температуропроводности, когда начальные и граничные условия не зависят от угловой координаты и тепло распространяется в плоскостях, проходящих через ось цилиндра.

С учетом угловой симметрии двумерное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих двумерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

Точные решения вида $T = T(r,t)$, встречающиеся в задачах с цилиндрической симметрией, приводятся в разд. 1.1.4.

1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

1.1. В каждой точке твердого тела задана постоянная температура в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела $r=R$ и $z=0$ в течение всего времени поддерживается температура, равная нулю:

$$\begin{array}{lll} T = T_0 & \text{при} \quad t=0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad r=R & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad z=0 & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} \quad r=0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,z,t) = \frac{2T_0}{R}\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n R)}\exp(-\mu_n^2 at),$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu R) = 0.$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 224).

1.2. В каждой точке твердого тела задана нулевая температура в начальный момент времени $t = 0$, на границе тела $r = R$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура T_0, а на границе $z = 0$ — нулевая температура:

$$\begin{array}{lll} T = 0 & \text{при} \quad t=0 & \text{(начальное условие)} \\ T = T_0 & \text{при} \quad r=R & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad z=0 & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} \quad r=0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,z,t) = T_0 - \frac{T_0}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n R)}\Big[2\exp(-\mu_n^2 at)\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) +$$
$$+ \exp(\mu_n z)\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}} + \mu_n\sqrt{at}\right) + \exp(-\mu_n z)\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}} - \mu_n\sqrt{at}\right)\Big],$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu R) = 0.$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 412).

2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$. Третья краевая задача. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура одинакова в начальный момент времени $t = 0$ и равна T_0, а на его границах $r = R$ и $z = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную нулю):

$$\begin{aligned}
T &= T_0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_r T + k_1 T &= 0 && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}\\
\partial_z T - k_2 T &= 0 && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}\\
T &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,z,t) = \frac{2T_0 k_1}{R}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_2 z + k_2^2 at)\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\right)\right] \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{(k_1^2 + \mu_n^2) J_0(\mu_n R)} \exp(-\mu_n^2 at),$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\mu J_1(\mu R) - k_1 J_0(\mu R) = 0.$$

Здесь J_0, J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 224).

3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$. Смешанные задачи.

3.1. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура одинакова в начальный момент времени $t = 0$ и равна T_0, на его границе $r = R$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру, а на границе $z = 0$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned}
T &= T_0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_r T + kT &= 0 && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}\\
T &= 0 && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}\\
T &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,z,t) = \frac{2T_0 k}{R}\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{(k^2 + \mu_n^2) J_0(\mu_n R)} \exp(-\mu_n^2 at),$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\mu J_1(\mu R) - kJ_0(\mu R) = 0.$$

Здесь J_0 — функция Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 224).

3.2. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура в начальный момент времени $t = 0$ одинакова и равна нулю, на границе $r = R$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную нулю), а на границе $z = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура T_0:

$$
\begin{array}{rlll}
T = 0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_r T + kT = 0 & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\
T = T_0 & \text{при} & z = 0 & \text{(граничное условие)} \\
T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
T(r,z,t) = \frac{2kT_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{(\mu_n^2 + k^2) J_0(\mu_n R)} \exp(-\mu_n z) + \\
+ \frac{kT_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{(\mu_n^2 + k^2) J_0(\mu_n R)} \Big[\exp(\mu_n z) \operatorname{erfc}\Big(\mu_n \sqrt{at} + \frac{z}{2\sqrt{at}}\Big) - \\
- \exp(-\mu_n z) \operatorname{erfc}\Big(\mu_n \sqrt{at} - \frac{z}{2\sqrt{at}}\Big)\Big],
$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\mu J_1(\mu R) - k J_0(\mu R) = 0.$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 411).

3.3. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура одинакова в начальный момент времени $t = 0$ и равна T_0, на его границе $z = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру, а температура границы $r = R$ в течение всего времени постоянна (равна нулю):

$$
\begin{array}{rlll}
T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\
\partial_z T - kT = 0 & \text{при} & z = 0 & \text{(граничное условие)} \\
T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
T(r,z,t) = \frac{2T_0}{R} \Big[\operatorname{erf}\Big(\frac{z}{2\sqrt{at}}\Big) + \exp(kz + k^2 at) \operatorname{erfc}\Big(\frac{z}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\Big)\Big] \times \\
\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n R)} \exp(-\mu_n^2 at),
$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu R) = 0.$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 224).

4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $-l \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

4.1. В каждой точке твердого тела задана одинаковая температура в начальный момент времени $t = 0$, а на границах тела в течение всего времени поддерживается температура, равная нулю:

$$
\begin{array}{llll}
T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & z = -l & \text{(граничное условие)} \\
T = 0 & \text{при} & z = l & \text{(граничное условие)} \\
T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
T(r,z,t) = \frac{8T_0}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_0(\mu_m r)}{(2n+1)\mu_m J_1(\mu_m R)} \times \\
\times \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \exp\bigl\{-at[\mu_m^2 + \tfrac{1}{4}(2n+1)^2\pi^2 l^{-2}]\bigr\},
$$

где μ_m — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu R) = 0.$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 222).

4.2. В каждой точке твердого тела задана нулевая температура в начальный момент времени $t = 0$, а на границах тела $r = R$, $z = -l$ и $z = l$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура T_0:

$$
\begin{array}{llll}
T = 0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = T_0 & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\
T = T_0 & \text{при} & z = -l & \text{(граничное условие)} \\
T = T_0 & \text{при} & z = l & \text{(граничное условие)} \\
T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
T(r,z,t) = T_0 - \frac{8T_0}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_0(\mu_m r)}{(2n+1)\mu_m J_1(\mu_m R)} \times \\
\times \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \exp\bigl\{-at[\mu_m^2 + \tfrac{1}{4}(2n+1)^2\pi^2 l^{-2}]\bigr\},
$$

где μ_m — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu R) = 0.$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 223).

5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $-l \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура в начальный момент времени $t = 0$ одинакова и равна T_0, а на его поверхности происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную нулю):

$$\begin{array}{rlll} T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T + k_1 T = 0 & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\ \partial_z T - k_2 T = 0 & \text{при} & z = -l & \text{(граничное условие)} \\ \partial_z T + k_2 T = 0 & \text{при} & z = l & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,z,t) = \frac{4T_0 k_1 k_2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n z) J_0(\nu_m r) \exp[-at(\mu_n^2 + \nu_m^2)]}{[(k_2^2 + \mu_n^2)l + k_2](k_1^2 + \nu_m^2)\cos(\mu_n l) J_0(\nu_m R)},$$

где μ_n и ν_m — соответственно положительные корни уравнений

$$\mu \operatorname{tg}(\mu l) = k_2,$$
$$\nu J_1(\nu R) - k_1 J_0(\nu R) = 0.$$

Здесь J_0, J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 224).

6. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $-l \leqslant z \leqslant l$. Смешанные задачи.

6.1. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура в начальный момент времени $t = 0$ одинакова и равна T_0, на его поверхностях $z = -l$ и $z = l$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную нулю), а на поверхности $r = R$ поддерживается нулевая температура:

$$\begin{array}{rlll} T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\ \partial_z T - kT = 0 & \text{при} & z = -l & \text{(граничное условие)} \\ \partial_z T + kT = 0 & \text{при} & z = l & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,z,t) = \frac{4T_0 k}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n z) J_0(\nu_m r) \exp[-at(\mu_n^2 + \nu_m^2)]}{[(k^2 + \mu_n^2)l + k]\nu_m \cos(\mu_n l) J_1(\nu_m R)}.$$

Здесь μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu \operatorname{tg}(\mu l) - k = 0 \quad \text{и} \quad J_0(\nu R) = 0,$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 223).

6.2. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура в начальный момент времени $t = 0$ одинакова и равна T_0, на его поверхности $r = R$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную нулю), а на поверхностях $z = -l$ и $z = l$ поддерживается нулевая температура:

$$\begin{aligned} T &= T_0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T + kT &= 0 && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad z = -l && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)} \\ T &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,z,t) = \frac{8T_0 k}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_0(\mu_m r)}{(2n+1)(k^2+\mu_m^2) J_0(\mu_m R)} \times$$
$$\times \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \exp\bigl\{-at[\mu_m^2 + \tfrac{1}{4}(2n+1)^2 \pi^2 l^{-2}]\bigr\}.$$

Здесь μ_m — положительные корни уравнения

$$\mu J_1(\mu R) - k J_0(\mu R) = 0,$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя.

7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

7.1. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура в начальный момент времени $t = 0$ одинакова и равна нулю, на его поверхности $r = R$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную нулю), на поверхности $z = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура, равная T_0, а на поверхности $z = l$ — равная нулю:

$$\begin{aligned} T &= 0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T + kT &= 0 && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)} \\ T &= T_0 && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)} \\ T &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,z,t) = \frac{2kT_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r) \operatorname{sh}[(l-z)\mu_n]}{(k^2+\mu_n^2) J_0(\mu_n R) \operatorname{sh} l\mu_n} -$$
$$- \frac{4\pi k T_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m J_0(\mu_n r) \sin(m\pi z/l) \exp[-at(\mu_n^2 + m^2\pi^2/l^2)]}{(\mu_n^2 l^2 + m^2\pi^2)(k^2+\mu_n^2) J_0(\mu_n R)}.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu R) - kJ_0(\mu R) = 0,$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 411).

7.2. В каждой точке кругового цилиндра радиуса R температура в начальный момент времени $t = 0$ одинакова и равна нулю, на его поверхностях $r = R$ и $z = l$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную нулю), на поверхности $z = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура, равная T_0:

$$\begin{array}{rlll} T = 0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T + kT = 0 & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \\ T = T_0 & \text{при} & z = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_z T + kT = 0 & \text{при} & z = l & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} & r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,z,t) = \frac{2kT_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)\{\mu_n \operatorname{ch}[\mu_n(l-z)] + k \operatorname{sh}[\mu_n(l-z)]\}}{(\mu_n^2 + k^2) J_0(\mu_n R)[\mu_n \operatorname{ch}(\mu_n l) + k \operatorname{sh}(\mu_n l)]} -$$
$$- \frac{4kT_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_m(\nu_m^2 + k^2) J_0(\mu_n r)\sin(\nu_m z)\exp\left[-at(\mu_n^2 + \nu_m^2)\right]}{(\mu_n^2 + k^2)[(\nu_m^2 + k^2)l + k](\mu_n^2 + \nu_m^2) J_0(\mu_n R)}.$$

Здесь μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu J_1(\mu R) - kJ_0(\mu R) = 0,$$
$$\nu \operatorname{ctg}(\nu l) + k = 0,$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 411).

8. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача. В каждой точке кольцевого цилиндра задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его поверхностях происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную нулю):

$$\begin{array}{rlll} T = f(r,z) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T - k_1 T = 0 & \text{при} & r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_r T + k_2 T = 0 & \text{при} & r = R_2 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_z T - k_3 T = 0 & \text{при} & z = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_z T + k_4 T = 0 & \text{при} & z = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

О решении этой задачи см. п. 1. в разд. 1.3.2 при $\Phi \equiv 0$.

9. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанная задача.

В каждой точке кольцевого цилиндра задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на его поверхностях $r = R_1$ и $r = R_2$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру, а на поверхностях $z = 0$ и $z = l$ в течение всего времени также поддерживается нулевая температура:

$$
\begin{aligned}
T &= f(r,z) &&\text{при} \quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_r T - k_1 T &= 0 &&\text{при} \quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)}\\
\partial_r T + k_2 T &= 0 &&\text{при} \quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}\\
T &= 0 &&\text{при} \quad z=0 &&\text{(граничное условие)}\\
T &= 0 &&\text{при} \quad z=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

О решении этой задачи см. п. 2. в разд. 1.3.2 при $\Phi \equiv 0$.

1.2.3. Задачи с осевой симметрией

Плоские задачи с осевой симметрией часто встречаются в теории тепло- и массопереноса. Они описывают развитие двумерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности, когда начальные и граничные условия не зависят от продольной координаты и тепло распространяется в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра.

Уравнение теплопроводности в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right).$$

Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих двумерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

Точные решения вида $T = T(r,t)$, встречающиеся в задачах с цилиндрической симметрией, приводятся в разд. 1.1.4.

1. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

В каждой точке бесконечного твердого тела задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$
\begin{aligned}
T &= f(r,\theta) &&\text{при} \quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
T &\neq \infty &&\text{при} \quad r=0 &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

О решении этой задачи см. п. 1 в разд. 1.3.3 при $\Phi \equiv 0$.

2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Первая краевая задача.

В каждой точке неподвижной среды внутри круга задано распределение температуры в начальный момент времени, а на границе

$r = R$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(r,\theta) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n,m}\cos n\theta + B_{n,m}\sin n\theta)J_n(\mu_m r)\exp(-\mu_m^2 at).$$

Здесь

$$A_{0,m} = \frac{1}{\pi R^2[J_0'(\mu_m R)]^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi,\zeta)J_0(\mu_m\xi)\xi\,d\xi\,d\zeta,$$

$$A_{n,m} = \frac{2}{\pi R^2[J_n'(\mu_m R)]^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi,\zeta)\cos n\zeta J_n(\mu_m\xi)\xi\,d\xi\,d\zeta,$$

$$B_{n,m} = \frac{2}{\pi R^2[J_n'(\mu_m R)]^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi,\zeta)\sin n\zeta J_n(\mu_m\xi)\xi\,d\xi\,d\zeta,$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих обозначает производную по аргументу), а μ_m — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R) = 0.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 207).

3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Третья краевая задача.

В каждой точке неподвижной среды внутри круга задано распределение температуры в начальный момент времени, а на границе $r = R$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{array}{rll} T = f(r,\theta) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T + kT = 0 & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n,m}\cos n\theta + B_{n,m}\sin n\theta)J_n(\mu_m r)\exp(-\mu_m^2 at).$$

Здесь

$$A_{0,m} = \frac{\mu_m^2}{\pi R^2(\mu_m^2+k^2)[J_0(\mu_m R)]^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi,\zeta)J_0(\mu_m\xi)\,\xi\,d\xi\,d\zeta,$$

$$A_{n,m} = \frac{2\mu_m^2}{\pi(\mu_m^2 R^2+k^2R^2-n^2)[J_n(\mu_m R)]^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi,\zeta)\cos n\zeta\, J_n(\mu_m\xi)\,\xi\,d\xi\,d\zeta,$$

$$B_{n,m} = \frac{2\mu_m^2}{\pi(\mu_m^2 R^2+k^2R^2-n^2)[J_n(\mu_m R)]^2}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi,\zeta)\sin n\zeta\, J_n(\mu_m\xi)\,\xi\,d\xi\,d\zeta,$$

где J_n — функции Бесселя, а μ_m — положительные корни уравнения

$$\mu J_n'(\mu R) + kJ_n(\mu R) = 0.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 208).

4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$. Первая краевая задача.

В каждой точке неподвижной среды внутри сектора задано распределение температуры в начальный момент времени, а на границах поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(r,\theta) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad \theta = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad \theta = \theta_0 & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,\theta,t) = \sum_{\mu}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{\mu,n} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\theta_0}\right) J_{n\pi/\theta_0}(\mu r) \exp(-\mu^2 at),$$

где

$$A_{\mu,n} = \frac{4}{R^2\theta_0[J'_{n\pi/\theta_0}(\mu R)]^2} \int_0^R \int_0^{\theta_0} f(\xi,\zeta) \sin\left(\frac{n\pi\zeta}{\theta_0}\right) J_{n\pi/\theta_0}(\mu\xi)\xi \, d\xi \, d\zeta.$$

Здесь суммирование по μ производится по положительным корням трансцендентного уравнения

$$J_{n\pi/\theta_0}(\mu R) = 0,$$

где $J_{n\pi/\theta_0}$ — функции Бесселя, n — положительное целое число.

Частный случай. Начальная температура постоянна и равна T_0, тогда

$$f(r,\theta) = T_0.$$

Решение:

$$T = \frac{8T_0}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\frac{(2n+1)\pi\theta}{\theta_0} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\mu_m^2 at) \frac{J_{(2n+1)\pi/\theta_0}(\mu_m r)}{[J'_{(2n+1)\pi/\theta_0}(\mu_m R)]^2} \int_0^R J_{(2n+1)\pi/\theta_0}(\mu_m \xi)\xi \, d\xi.$$

Здесь μ_m — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_{(2n+1)\pi/\theta_0}(\mu R) = 0.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 209).

5. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$. Первая краевая задача.

5.1. В каждой точке неподвижной среды внутри клина задана нулевая температура в начальный момент времени, на границе $\theta = 0$ поддерживается постоянная температура T_0, а на границе $\theta = \theta_0$ температура равна нулю:

$$\begin{array}{lll} T = 0 & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = T_0 & \text{при} \quad \theta = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad \theta = \theta_0 & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,\theta,t) = T_0\left[1 - \frac{\theta}{\theta_0} + \frac{2}{\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{n\pi\theta}{\theta_0}\int_0^{\infty}\exp\left(-at\xi^2\right)\frac{J_{n\pi/\theta_0}(r\xi)}{\xi}\,d\xi\right],$$

где $J_{n\pi/\theta_0}$ — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 412).

5.2. В каждой точке неподвижной среды внутри клина задана нулевая температура в начальный момент времени, на границах клина поддерживается постоянная температура, равная T_0:

$$\begin{aligned}
&T = 0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
&T = T_0 && \text{при} \quad \theta = 0 && \text{(граничное условие)}\\
&T = T_0 && \text{при} \quad \theta = \theta_0 && \text{(граничное условие)}\\
&T \neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,\theta,t) = T_0\left[1 - \frac{4}{\theta_0}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{(2n+1)\pi\theta}{\theta_0}\int_0^{\infty}\exp\left(-at\xi^2\right)\frac{J_{(2n+1)\pi/\theta_0}(r\xi)}{\xi}\,d\xi\right],$$

где $J_{(2n+1)\pi/\theta_0}$ — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 413).

6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача. В каждой точке неподвижной среды внутри кольца задано распределение температуры в начальный момент времени, а на границах происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{aligned}
T &= f(r,\theta) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_r T - k_1 T &= 0 && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)}\\
\partial_r T + k_2 T &= 0 && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

О решении этой задачи см. п. 2 в разд. 1.3.3 при $\Phi \equiv 0$.

1.3. Двумерное уравнение $\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \Phi(\mathbf{x}, t)$

1.3.1. Плоские задачи теплопроводности с источником

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \Phi(x,y,t)$$

и описывает развитие двумерных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности при наличии объемных источников или стоков тепла.

1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

В каждой точке бесконечного твердого тела задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$T = f(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,t) f(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta + \\ + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi a t}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 134).

2. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Первая краевая задача.

2.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечную полуплоскость, известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела $x = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = f(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,t) f(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta + \\ + \int_0^t \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi a t}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

2.2. В каждой точке полуплоскости известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе $x = 0$ задан закон изменения температуры от времени и координаты y:

$$T = f(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$T = g(y,t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,t) f(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta + \\ + a\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\zeta\,d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,t)$ приведена в п. 2.1.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 350).

3. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

3.1. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границах $x = 0$ и $y = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(x,y) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad y = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,y,\zeta,t) f(\xi,\zeta)\, d\xi\, d\zeta + \\ + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\, \Phi(\xi,\zeta,\tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi a t}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\} \times \\ \times \left\{\exp\left[-\frac{(y-\zeta)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(y+\zeta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355), А. Г. Бутковский (1979, стр. 134).

3.2. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой границе $x = 0$ и $y = 0$ задан свой закон изменения температуры от времени и координат:

$$\begin{array}{lll} T = f(x,y) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = g_1(y,t) & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_2(x,t) & \text{при} \quad y = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,y,\zeta,t) f(\xi,\zeta)\, d\xi\, d\zeta + \\ + a\int_0^t \int_0^\infty g_1(\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\zeta\, d\tau + \\ + a\int_0^t \int_0^\infty g_2(\xi,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=0} d\xi\, d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\, \Phi(\xi,\zeta,\tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,t)$ приведена в п. 3.1.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 350), А. Г. Бутковский (1979, стр. 134).

4. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Третья краевая задача.

4.1. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах $x=0$ и $y=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{aligned} T &= f(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - k_1 T &= 0 && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_y T - k_2 T &= 0 && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение задается выражением для $T(x,y,t)$ из п. 3.1, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,t)$ описывается формулой

$$\begin{aligned} G(x,\xi,y,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi at}\biggl\{&\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Bigr] - \\ &- k_1 \exp\bigl[ak_1^2 t + k_1(x+\xi)\bigr] \operatorname{erfc}\Bigl(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k_1\sqrt{at}\Bigr)\biggr\} \times \\ \times \biggl\{&\exp\Bigl[-\frac{(y-\zeta)^2}{4at}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(y+\zeta)^2}{4at}\Bigr] - \\ &- k_2 \exp\bigl[ak_2^2 t + k_2(y+\zeta)\bigr] \operatorname{erfc}\Bigl(\frac{y+\zeta}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\Bigr)\biggr\}. \end{aligned}$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 352).

4.2. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах $x=0$ и $y=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средами, имеющими температуру $g_1(y,t)$ и $g_2(x,t)$ соответственно:

$$\begin{aligned} T &= f(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - k_1 T &= -k_1 g_1(y,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_y T - k_2 T &= -k_2 g_2(x,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение задается выражением для $T(x,y,t)$ из п. 3.2, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,t)$ приведена в п. 4.1.

5. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Смешанные задачи.

5.1. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, на границе $x=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру, а на границе $y=0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned} T &= f(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT &= 0 && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение задается выражением для $T(x, y, t)$ из п. 3.1, где функция $G(x, \xi, y, \zeta, t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi a t}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - \right.$$
$$\left. - k\exp\left[ak^2t + k(x+\xi)\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right)\right\} \times$$
$$\times \left\{\exp\left[\frac{(y-\zeta)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(y+\zeta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 351).

5.2. В каждой точке рассматриваемой области известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на границе $x = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей температуру $g_1(y, t)$, а на границе $y = 0$ поддерживается температура $g_2(x, t)$:

$$\begin{array}{rlll} T = f(x,y) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT = -kg_1(y,t) & \text{при} & x=0 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_2(x,t) & \text{при} & y=0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение задается выражением для $T(x, y, t)$ из п. 3.2, где функция $G(x, \xi, y, \zeta, t)$ приведена в п. 5.1.

6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Первая краевая задача.

6.1. В прямоугольной области задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его границах в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{llll} T = f(x,y) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & x=0 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & x=l_1 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & y=0 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} & y=l_2 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,y,t) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,\xi,y,\zeta,t) f(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta +$$
$$+ \int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau,$$

где функция $G(x, \xi, y, \zeta, t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-\pi^2 at\left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi\xi}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{m\pi\zeta}{l_2}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355).

6.2. В прямоугольной области задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой границе задан свой закон изменения температуры от времени и координат:

$$
\begin{array}{llll}
T = f(x,y) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = g_1(y,t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
T = g_2(y,t) & \text{при} & x = l_1 & \text{(граничное условие)} \\
T = g_3(x,t) & \text{при} & y = 0 & \text{(граничное условие)} \\
T = g_4(x,t) & \text{при} & y = l_2 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
T(x,y,t) = \int_0^{l_1}\!\int_0^{l_2} & G(x,\xi,y,\zeta,t) f(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta + \\
&+ a\int_0^t\!\int_0^{l_2} g_1(\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0} d\zeta\,d\tau - \\
&- a\int_0^t\!\int_0^{l_2} g_2(\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=l_1} d\zeta\,d\tau + \\
&+ a\int_0^t\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0} d\xi\,d\tau - \\
&- a\int_0^t\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l_2} d\xi\,d\tau + \\
&+ \int_0^t\!\int_0^{l_1}\!\int_0^{l_2} G(x,\xi,y,\zeta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,t)$ приведена в п. 6.1.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 350).

7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Вторая краевая задача.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой прямоугольник, известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а границы тела теплоизолированы (отсутствует поток тепла через поверхность тела):

$$
\begin{array}{llll}
T = f(x,y) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x T = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x T = 0 & \text{при} & x = l_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T = 0 & \text{при} & y = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T = 0 & \text{при} & y = l_2 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение задается выражением для $T(x,y,t)$ из п. 6.1, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,t)$ описывается формулой

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi,y,\zeta,t) = \frac{1}{l_1 l_2}&\Big[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 at}{l_1^2}\Big)\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi\xi}{l_1}\Big] \times \\
&\times \Big[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 at}{l_2^2}\Big)\cos\frac{n\pi y}{l_2}\cos\frac{n\pi\zeta}{l_2}\Big].
\end{aligned}
$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355).

1.3.2. Задачи с угловой симметрией

Задачи с угловой симметрией часто встречаются в теории тепло- и массопереноса. Они описывают развитие двумерных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности, когда начальные и граничные условия не зависят от угловой координаты и тепло распространяется в плоскостях, проходящих через ось цилиндра.

С учетом угловой симметрии двумерное уравнение теплопроводности при наличии объемных источников выделения или поглощения тепла в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \Phi(r, z, t).$$

Точные решения вида $T = T(r, t)$, встречающиеся в задачах с цилиндрической симметрией, приводятся в разд. 1.1.5.

1. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача*.

В каждой точке кольцевого цилиндра задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его поверхности происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей постоянную температуру (равную нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(r, z) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T - k_1 T = 0 & \text{при} \quad r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_r T + k_2 T = 0 & \text{при} \quad r = R_2 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_z T - k_3 T = 0 & \text{при} \quad z = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_z T + k_4 T = 0 & \text{при} \quad z = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r, z, t) = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^l G(r, \xi, z, \zeta, t) f(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta + \\ + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2}\int_0^l G(r, \xi, z, \zeta, t-\tau)\, \Phi(\xi, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\tau.$$

Функция $G(r, \xi, z, \zeta, t)$ описывается формулой

$$G(r, \xi, z, \zeta, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_z(\mu_m, z)\varphi_z(\mu_m, \zeta)\varphi_r(\nu_n r)\varphi_r(\nu_n \xi)\exp\left[-(\mu_m^2 + \nu_n^2)at\right]}{\|\varphi_z(\mu_m, z)\|^2 \|\varphi_r(\nu_n r)\|^2},$$

где μ_m — положительные корни уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}\mu l}{\mu} = \frac{k_3 + k_4}{\mu^2 - k_3 k_4},$$

а ν_n — положительные корни уравнения

$$\left[\nu J_1(\nu R_1) + k_1 J_0(\nu R_1)\right]\left[\nu Y_1(\nu R_2) - k_2 Y_0(\nu R_2)\right] - \\ - \left[\nu Y_1(\nu R_1) + k_1 Y_0(\nu R_1)\right]\left[\nu J_1(\nu R_2) - k_2 J_0(\nu R_2)\right] = 0.$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$\varphi_z(\mu_m, z) = \cos\mu_m z + k_3 \frac{\sin\mu_m z}{\mu_m},$$

$$\varphi_r(\nu_n r) = \left[k_1 J_0(\nu_n R_1) + \nu_n J_1(\nu_n R_1)\right] Y_0(\nu_n r) - \\ - \left[k_1 Y_0(\nu_n R_1) + \nu_n Y_1(\nu_n R_1)\right] J_0(\nu_n r),$$

$$\|\varphi_z(\mu_m, z)\|^2 = \frac{k_4}{2\mu_m^2}\,\frac{\mu_m^2 + k_3^2}{\mu_m^2 + k_4^2} + \frac{k_3}{2\mu_m^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_3^2}{\mu_m^2}\right),$$

$$\|\varphi_r(\nu_n r)\|^2 = \frac{2}{\pi^2 \nu_n^2}\left\{\tfrac{1}{4}\pi^2 R_2^2(\nu_n^2 + k_2^2)\left[\varphi_r(\nu_n R_2)\right]^2 - (\nu_n^2 + k_1^2)\right\},$$

где J_0, J_1, Y_0, Y_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 137).

* Решения других (трехмерных) краевых задач приведены в разд. 1.5.2.

2. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

В каждой точке кольцевого цилиндра задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, на его поверхностях $r=R_1$ и $r=R_2$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру, а на поверхностях $z=0$ и $z=l$ в течение всего времени также поддерживается нулевая температура:

$$\begin{aligned}
T &= f(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)} \\
\partial_r T - k_1 T &= 0 && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)} \\
\partial_r T + k_2 T &= 0 && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)} \\
T &= 0 && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)} \\
T &= 0 && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение для $T(r,z,t)$ приведено в п. 1 настоящего раздела, где функция $G(r,\xi,z,\zeta,t)$ описывается формулой

$$G(r,\xi,z,\zeta,t) = \\
= \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi m z}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m \zeta}{l}\right) \frac{\varphi_r(\nu_n r)\varphi_r(\nu_n \xi)}{\|\varphi_r(\nu_n r)\|^2} \exp\left[-\left(\nu_n^2 + \frac{\pi^2 m^2}{l^2}\right)at\right].$$

Здесь ν_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned}
&[\nu J_1(\nu R_1) + k_1 J_0(\nu R_1)]\,[\nu Y_1(\nu R_2) - k_2 Y_0(\nu R_2)] - \\
&\qquad - [\nu Y_1(\nu R_1) + k_1 Y_0(\nu R_1)]\,[\nu J_1(\nu R_2) - k_2 J_0(\nu R_2)] = 0,
\end{aligned}$$

и были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\varphi_r(\nu_n r) &= [k_1 J_0(\nu_n R_1) + \nu_n J_1(\nu_n R_1)]\,Y_0(\nu_n r) - \\
&\quad - [k_1 Y_0(\nu_n R_1) + \nu_n Y_1(\nu_n R_1)]\,J_0(\nu_n r), \\
\|\varphi_r(\nu_n r)\|^2 &= \frac{2}{\pi^2 \nu_n^2} \left\{ \frac{\pi^2 R_2^2}{4} (\nu_n^2 + k_2^2)\left[\varphi_r(\nu_n R_2)\right]^2 - (\nu_n^2 + k_1^2) \right\},
\end{aligned}$$

где J_0, J_1, Y_0, Y_1 — функции Бесселя.

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 136).

1.3.3. Задачи с осевой симметрией

Плоские задачи с осевой симметрией часто встречаются в теории тепло- и массопереноса. Они описывают развитие двумерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности, когда начальные и граничные условия не зависят от продольной координаты и тепло распространяется в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра.

Уравнение теплопроводности с объемным источником в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right) + \Phi(r,\theta,t).$$

Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих двумерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

Точные решения вида $T=T(r,t)$, встречающиеся в задачах с цилиндрической симметрией, приводятся в разд. 1.1.5.

1. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

В каждой точке бесконечного твердого тела задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$\begin{aligned} &T = f(r,\theta) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\ &T \neq \infty &&\text{при}\quad r=0 &&\text{(граничное условие)}\end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,\theta,t) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} G(r,\xi,\theta,\zeta,t) f(\xi,\zeta)\,\xi\,d\xi\,d\zeta + \\ + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} G(r,\xi,\theta,\zeta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\tau)\,\xi\,d\xi\,d\zeta\,d\tau,$$

где функция $G(r,\xi,\theta,\zeta,t)$ описывается формулой

$$G(r,\xi,\theta,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi a t}\exp\left[-\frac{r^2-\xi^2+2r\xi\cos(\theta-\zeta)}{4at}\right].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 135).

2. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

В каждой точке неподвижной среды в виде кольца задано распределение температуры в начальный момент времени, а на границах происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{aligned} &T = f(r,\theta) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\ &\partial_r T - k_1 T = 0 &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)}\\ &\partial_r T + k_2 T = 0 &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}\end{aligned}$$

Решение:

$$T(r,\theta,t) = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} G(r,\xi,\theta,\zeta,t) f(\xi,\zeta)\,\xi\,d\xi\,d\zeta + \\ + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} G(r,\xi,\theta,\zeta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\tau)\,\xi\,d\xi\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь функция $G(r,\xi,\theta,\zeta,t)$ описывается формулами

$$G(r,\xi,\theta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp[-in(\theta-\zeta)]\,\varphi_r(\mu_{pn}r)\varphi_r(\mu_{pn}\xi)\exp(-\mu_{pn}^2 at)}{\|\varphi_r(\mu_{pn}r)\|^2},$$

$$\varphi_r(\mu_{pn}r) = \left[\left(k_1 - \frac{n}{R_1}\right)J_n(\mu_{pn}R_1) + \mu_{pn}J_{n+1}(\mu_{pn}R_1)\right]Y_n(\mu_{pn}r) - \\ - \left[\left(k_1 - \frac{n}{R_1}\right)Y_n(\mu_{pn}R_1) + \mu_{pn}Y_{n+1}(\mu_{pn}R_1)\right]J_n(\mu_{pn}r),$$

$$\|\varphi_r(\mu_{pn}r)\|^2 = \frac{2}{\pi^2\mu_{pn}^2R_1^2}\Big\{\tfrac{1}{4}\pi^2R_1^2(\mu_{pn}^2R_2^2 + k_2^2R_2^2 - n^2)[\varphi_r(\mu_{pn}R_2)]^2 - \\ - \mu_{pn}^2R_1^2 - k_1^2R_1^2 + n^2\Big\},$$

где $i^2 = -1$, а μ_{pn} — положительные корни уравнения

$$\frac{\mu R_1 J_{n+1}(\mu R_1) + (k_1R_1 - n)J_n(\mu R_1)}{\mu R_2 J_{n+1}(\mu R_2) - (k_2R_2 + n)J_n(\mu R_2)} = \frac{\mu R_1 Y_{n+1}(\mu R_1) + (k_1R_1 - n)Y_n(\mu R_1)}{\mu R_2 Y_{n+1}(\mu R_2) - (k_2R_2 + n)Y_n(\mu R_2)}.$$

Здесь J_n и Y_n — функции Бесселя.

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 135).

1.4. Трехмерное уравнение $\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T$

1.4.1. Задачи в декартовой системе координат

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

и описывает развитие трехмерных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих трехмерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

В каждой точке бесконечного твердого тела задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$T = f(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \zeta, \eta) \times \\ \times \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-\eta)^2}{4at}\right] d\xi\, d\zeta\, d\eta.$$

Частный случай. Начальная температура тела в области $|x| < x_0$, $|y| < y_0$, $|z| < z_0$ постоянна и равна T_1, а в области $|x| > x_0$, $|y| > y_0$, $|z| > z_0$ — соответственно T_2, т. е.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} T_1 & \text{при } |x| < x_0,\ |y| < y_0,\ |z| < z_0, \\ T_2 & \text{при } |x| > x_0,\ |y| > y_0,\ |z| > z_0. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{8}(T_1 - T_2)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{at}}\right)\right] \times \\ \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_0 - y}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y_0 + y}{2\sqrt{at}}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{z_0 - z}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{z_0 + z}{2\sqrt{at}}\right)\right] + T_2.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 62).

2. *Первая краевая задача для полупространства.*

2.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство ($0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе $x = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = f(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t})^3} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4at}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2+(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4at}\right] \right\} f(\xi,\zeta,\eta)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 271).

2.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство, температура в начальный момент времени $t = 0$ постоянна (равна нулю), а на границе тела $x = 0$ задано распределение температуры:

$$\begin{aligned} &T = 0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &T = g(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \frac{x}{(2\sqrt{\pi a})^3} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta,\eta,\tau)}{(t-\tau)^{5/2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{x^2+(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\zeta\, d\eta\, d\tau.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 364).

2.3. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство, задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а также задано распределение температуры на границе тела $x = 0$:

$$\begin{aligned} &T = f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &T = g(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t}\,)^3} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4at}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2+(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4at}\right] \right\} f(\xi,\zeta,\eta)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta +$$

$$+ \frac{x}{(2\sqrt{\pi a}\,)^3} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta,\eta,\tau)}{(t-\tau)^{5/2}} \exp\left[-\frac{x^2+(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\zeta\, d\eta\, d\tau.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 364).

3. Вторая краевая задача для полупространства.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство ($0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а граница тела $x = 0$ теплоизолирована.

О решении этой задачи см. п. 3 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

4. Третья краевая задача для полупространства.

4.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство ($0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границе $x=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру.

О решении этой задачи см. п. 4.1 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

4.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство, известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границе тела $x=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой с заданным распределением температуры.

О решении этой задачи см. п. 4.2 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

5. Первая краевая задача для бесконечного слоя.

5.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах слоя $z=0$ и $z=l$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю).

О решении этой задачи см. п. 5.1 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

5.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой, задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на каждой границе $z=0$ и $z=l$ задано свое распределение температуры.

О решении этой задачи см. п. 5.2 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

6. Вторая краевая задача для бесконечного слоя.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой ($-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, $0\leqslant z\leqslant l$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а границы тела $z=0$ и $z=l$ теплоизолированы.

О решении этой задачи см. п. 6 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

7. Третья краевая задача для бесконечного слоя.

7.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела $z=0$ и $z=l$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру.

О решении этой задачи см. п. 7.1 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

7.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой, известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела $z=0$ и $z=l$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средами с заданными распределениями температуры.

О решении этой задачи см. п. 7.2 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

8. Смешанная краевая задача для бесконечного слоя.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, граница $z = 0$ — теплоизолирована, а на границе $z = l$ поддерживается постоянная температура.

О решении этой задачи см. п. 8 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

9. Первая краевая задача в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

9.1. В каждой точке твердого тела, занимающего область $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$, известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела $x=0$, $y=0$ и $z=0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$
\begin{aligned}
&T = f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
&T = 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\
&T = 0 && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)}\\
&T = 0 && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

О решении этой задачи см. п. 9.1 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

Частный случай. Начальная температура тела однородна:

$$f(x,y,z) = T_0.$$

Решение:

$$T = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 183).

9.2. В каждой точке области $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$, известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на каждой границе $x=0$, $y=0$ и $z=0$ задано свое распределение температуры.

О решении этой задачи см. п. 9.2 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

10. Третья краевая задача в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

10.1. В каждой точке твердого тела, занимающего область $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$, известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границах тела $x = 0$, $y = 0$ и $z=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$
\begin{aligned}
&T = f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
&\partial_x T - k_1 T = 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\
&\partial_y T - k_2 T = 0 && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)}\\
&\partial_z T - k_3 T = 0 && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

О решении этой задачи см. п. 10.1 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

Частный случай. Начальная температура тела однородна:

$$f(x,y,z) = T_0.$$

Решение:

$$T = T_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_1x + k_1^2at)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k_1\sqrt{at}\right)\right] \times$$
$$\times\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_2y + k_2^2at)\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\right)\right] \times$$
$$\times\left[\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_3z + k_3^2at)\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}} + k_3\sqrt{at}\right)\right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 183).

10.2. В каждой точке твердого тела известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела $x=0$, $y=0$ и $z=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средами с заданными распределениями температуры.

О решении этой задачи см. п. 10.2 в разд. 1.5.1 при $\Phi\equiv 0$.

11. Смешанные краевые задачи в области $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

11.1. В начальный момент времени $t=0$ температура всех точек твердого тела одинакова и равна T_0, на границах тела $x=0$ и $y=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру, а граница $z=0$ поддерживается при нулевой температуре:

$$\begin{aligned} T &= T_0 &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\ \partial_x T - k_1T &= 0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\ \partial_y T - k_2T &= 0 &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}\\ T &= 0 &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}\end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = T_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_1x + k_1^2at)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k_1\sqrt{at}\right)\right] \times$$
$$\times\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_2y + k_2^2at)\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\right)\right]\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right).$$

11.2. В начальный момент времени $t=0$ температура всех точек твердого тела одинакова и равна T_0, на границе тела $x=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой с нулевой температурой, а на границах $y=0$ и $z=0$ поддерживается нулевая температура:

$$\begin{aligned} T &= T_0 &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\ \partial_x T - kT &= 0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\ T &= 0 &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}\\ T &= 0 &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}\end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = T_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(kx + k^2at)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right)\right] \times \\ \times \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right).$$

12. Первая краевая задача в прямоугольной области.

12.1. В неограниченной прямоугольной области ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < \infty$) известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границах $x = 0$, $x = l_1$, $y = 0$ и $y = l_2$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю).

О решении этой задачи см. п. 11.1 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

12.2. В неограниченной прямоугольной области ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < \infty$) известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой границе $x = 0$, $x = l_1$, $y = 0$ и $y = l_2$ задано свое распределение температуры.

О решении этой задачи см. п. 11.2 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

12.3. В полуограниченной прямоугольной области ($-l_1 \leqslant x \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z < \infty$) задана постоянная температура в начальный момент времени $t = 0$, а на границах области в течение всего времени поддерживается также постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = T_0 & \text{при}\quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при}\quad x = -l_1 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при}\quad x = l_1 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при}\quad y = -l_2 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при}\quad y = l_2 & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при}\quad z = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = T_0F(x,t)G(y,t)\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$F(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2at}{4l_1^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l_1},$$

$$G(y,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2at}{4l_2^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2l_2}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 183).

13. Первая краевая задача для параллелепипеда.

13.1. В каждой точке твердого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$
\begin{array}{lll}
T = f(x,y,z) & \text{при} \quad t=0 & \text{(начальное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad x=0 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad x=l_1 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad y=0 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad y=l_2 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad z=0 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad z=l_3 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} A_{n,m,p} \sin\frac{n\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2} \sin\frac{p\pi z}{l_3} \exp(-\beta^2_{n,m,p} a t),$$

где

$$A_{n,m,p} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} f(\xi,\zeta,\eta) \sin\frac{n\pi\xi}{l_1} \sin\frac{m\pi\zeta}{l_2} \sin\frac{p\pi\eta}{l_3}\, d\xi\, d\zeta\, d\eta,$$

$$\beta^2_{n,m,p} = \pi^2\left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{p^2}{l_3^2}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 186), А. Г. Бутковский (1979, стр. 157).

13.2. В каждой точке твердого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$), задана нулевая температура в начальный момент времени $t=0$, на границе $x=0$ поддерживается заданное распределение температуры, а на остальных границах в течение всего времени температура постоянна (равна нулю):

$$
\begin{array}{lll}
T = 0 & \text{при} \quad t=0 & \text{(начальное условие)}\\
T = g(y,z,t) & \text{при} \quad x=0 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad x=l_1 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad y=0 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad y=l_2 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad z=0 & \text{(граничное условие)}\\
T = 0 & \text{при} \quad z=l_3 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \frac{8a\pi}{l_1^2 l_2 l_3} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} n \sin\frac{n\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2} \sin\frac{p\pi z}{l_3} \times$$

$$\times \int_0^t \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} \sin\frac{m\pi\zeta}{l_2} \sin\frac{p\pi\eta}{l_3}\, g(\zeta,\eta,\tau) \exp\Bigl[-\beta_{n,m,p}^2 a(t-\tau)\Bigr]\, d\zeta\, d\eta\, d\tau,$$

где $\beta_{n,m,p}^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{p^2}{l_3^2}\right)$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 356).

Частный случай. На границе $x=0$ поддерживается постоянная температура:

$$g(y,z,t) = T_0.$$

Решение:

$$T = \frac{16T_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left[(l_1 - x)\sqrt{\mu_{n,m,0}}\right]}{\operatorname{sh}\left[l_1\sqrt{\mu_{n,m,0}}\right]}\, \frac{\sin[(2n+1)\pi y/l_2]\sin[(2m+1)\pi z/l_3]}{(2n+1)(2m+1)} -$$

$$- \frac{32T_0}{\pi l_1^2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\sin(p\pi x/l_1)\sin[(2n+1)\pi y/l_2]\sin[(2m+1)\pi z/l_3]}{(2n+1)(2m+1)\mu_{n,m,p}\exp(\mu_{n,m,p}at)},$$

где $\mu_{n,m,p} = \dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{l_2^2} + \dfrac{(2m+1)^2\pi^2}{l_3^2} + \dfrac{p^2\pi^2}{l_1^2}$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 409).

13.3. В каждой точке твердого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на каждой границе задано свое распределение температуры.

О решении этой задачи см. п. 12.2 в разд. 1.5.1 при $\Phi \equiv 0$.

Ниже приведены некоторые точные решения первой краевой задачи для прямоугольного параллелепипеда, занимающего область $-l_1 \leqslant x \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$, $-l_3 \leqslant z \leqslant l_3$.

13.4. Все точки твердого тела имеют одинаковую температуру T_0 в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = T_0 & \text{при}\quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при}\quad x = \pm l_1 & \text{(граничные условия)} \\ T = 0 & \text{при}\quad y = \pm l_2 & \text{(граничные условия)} \\ T = 0 & \text{при}\quad z = \pm l_3 & \text{(граничные условия)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \frac{64T_0}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m+p}}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l_1} \times$$

$$\times \cos\frac{(2m+1)\pi y}{2l_2} \cos\frac{(2p+1)\pi z}{2l_3} \exp(-\beta_{n,m,p} t),$$

где

$$\beta_{n,m,p} = \frac{a\pi^2}{4}\left[\frac{(2n+1)^2}{l_1^2} + \frac{(2m+1)^2}{l_2^2} + \frac{(2p+1)^2}{l_3^2}\right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 184).

13.5. Все точки твердого тела имеют постоянную температуру (равную нулю) в начальный момент времени $t = 0$, на границах поддерживается одинаковое распределение температуры, зависящее только от времени:

$$\begin{aligned} &T = 0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &T = g(t) && \text{при} \quad x = \pm l_1 && \text{(граничные условия)} \\ &T = g(t) && \text{при} \quad y = \pm l_2 && \text{(граничные условия)} \\ &T = g(t) && \text{при} \quad z = \pm l_3 && \text{(граничные условия)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \frac{64}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\beta_{n,m,p}(-1)^{n+m+p}}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l_1}\times$$
$$\times\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2l_2}\cos\frac{(2p+1)\pi z}{2l_3}\exp(-\beta_{n,m,p}t)\int_0^t \exp(\beta_{n,m,p}\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

где

$$\beta_{n,m,p} = \frac{a\pi^2}{4}\left[\frac{(2n+1)^2}{l_1^2} + \frac{(2m+1)^2}{l_2^2} + \frac{(2p+1)^2}{l_3^2}\right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 184).

Частный случай 1. На поверхности тела поддерживается постоянная температура:

$$g(t) = T_0.$$

Решение:

$$T = T_0\left[1 - \frac{64}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m+p}}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l_1}\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2l_2}\cos\frac{(2p+1)\pi z}{2l_3}\exp(-\beta_{n,m,p}t)\right].$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 184).

Частный случай 2. Температура на всех границах тела линейно возрастает со временем:

$$g(t) = At.$$

Решение:

$$T = A\left\{t - \frac{64}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m+p}}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)\beta_{n,m,p}}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l_1}\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2l_2}\cos\frac{(2p+1)\pi z}{2l_3}[1-\exp(-\beta_{n,m,p}t)]\right\}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 185).

14. Третья краевая задача для параллелепипеда.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда ($-l_1 \leqslant x \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$, $-l_3 \leqslant z \leqslant l_3$), задана постоянная температура в начальный момент времени $t = 0$, а на его границах происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$
\begin{array}{rlll}
T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x T - k_1 T = 0 & \text{при} & x = -l_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x T + k_1 T = 0 & \text{при} & x = l_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T - k_2 T = 0 & \text{при} & y = -l_2 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T + k_2 T = 0 & \text{при} & y = l_2 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_z T - k_3 T = 0 & \text{при} & z = -l_3 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_z T + k_3 T = 0 & \text{при} & z = l_3 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
T(x, y, z, t) = T_0 &\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_1 \cos \alpha_n x}{[(k_1^2 + \alpha_n^2) l_1 + k_1] \cos \alpha_n l_1} \exp(-\alpha_n^2 a t)\right] \times \\
&\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_2 \cos \beta_n y}{[(k_2^2 + \beta_n^2) l_2 + k_2] \cos \beta_n l_2} \exp(-\beta_n^2 a t)\right] \times \\
&\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_3 \cos \gamma_n z}{[(k_3^2 + \gamma_n^2) l_3 + k_3] \cos \gamma_n l_3} \exp(-\gamma_n^2 a t)\right],
\end{aligned}
$$

где α_n, β_n и γ_n — положительные корни уравнений

$$
\alpha \operatorname{tg}(\alpha l_1) = k_1, \qquad \beta \operatorname{tg}(\beta l_2) = k_2, \qquad \gamma \operatorname{tg}(\gamma l_3) = k_3.
$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 184).

15. Смешанная краевая задача для параллелепипеда.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$, $-l_3 \leqslant z \leqslant l_3$), задана постоянная (равная нулю) температура в начальный момент времени $t = 0$, на его границах $x = 0$ и $x = l_1$ в течение всего времени поддерживаются постоянные температуры T_0 и T_1, соответственно, а на других границах происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$
\begin{array}{rlll}
T = 0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
T = T_0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
T = T_1 & \text{при} & x = l_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T - kT = 0 & \text{при} & y = -l_2 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_y T + kT = 0 & \text{при} & y = l_2 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_z T - kT = 0 & \text{при} & z = -l_3 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_z T + kT = 0 & \text{при} & z = l_3 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$T(x,y,z,t)=4k^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Bigl\{T_0\,\mathrm{sh}\bigl[(l_1-x)\sqrt{\mu_n^2+\nu_m^2}\,\bigr]+T_1\,\mathrm{sh}\bigl[x\sqrt{\mu_n^2+\nu_m^2}\,\bigr]\Bigr\}\times$$
$$\times\frac{[(\mu_n^2+k^2)l_2+k][(\nu_m^2+k^2)l_3+k]\cos(\mu_n y)\cos(\nu_m z)}{\mathrm{sh}\bigl(l_1\sqrt{\mu_n^2+\nu_m^2}\,\bigr)\cos(\mu_n l_2)\cos(\nu_m l_3)}+$$
$$+\frac{8\pi k^2}{l_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\exp\Bigl[-at\Bigl(\mu_n^2+\nu_m^2+\frac{p^2\pi^2}{l_1^2}\Bigr)\Bigr]\times$$
$$\times\frac{p[(-1)^pT_1-T_0]\cos(\mu_n y)\cos(\nu_m z)\sin(p\pi x/l_1)}{(\mu_n^2+\nu_m^2+p^2\pi^2/l_1^2)[(\mu_n^2+k^2)l_2+k][(\nu_m^2+k^2)l_3+k]\cos(\mu_n l_2)\cos(\nu_m l_3)},$$

где μ_n, ν_m — положительные корни уравнений

$$\mu\,\mathrm{tg}(\mu l_2)=k,\qquad \nu\,\mathrm{tg}(\nu l_3)=k.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 410).

1.4.2. Задачи в цилиндрической системе координат

Уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right].$$

Оно используется для описания несимметричных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с цилиндрическими и плоскими границами.

Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих трехмерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

Точные решения вида $T=T(r,t)$, встречающиеся в задачах с цилиндрической симметрией, приводятся в разд. 1.1.4.

1. Первая краевая задача для бесконечного цилиндра.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму бесконечного кругового цилиндра ($0\leqslant r\leqslant R$, $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, $-\infty<z<\infty$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на его боковой поверхности в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$T=f(r,\theta,z)$	при	$t=0$	(начальное условие)
$T=0$	при	$r=R$	(граничное условие)
$T\neq\infty$	при	$r=0$	(граничное условие)

Предварительные замечания. Разложим функцию $f(r,\theta,z)$ в ряд Фурье

$$f(r,\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}[F_n(r,z)\cos n\theta+G_n(r,z)\sin n\theta],$$

а коэффициенты $F_n(r,z)$ и $G_n(r,z)$ в свою очередь разложим в ряд по функциям Бесселя, определяемым положительными корнями трансцендентного уравнения $J_n(\mu R)=0$. В результате получим

$$F_n(r,z)=\sum_{\mu}\varphi_n(z)J_n(\mu r),\qquad G_n(r,z)=\sum_{\mu}\psi_n(z)J_n(\mu r).$$

Решение:

$$T(r,\theta,z,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu}^{\infty} \exp(-\mu^2 a t) J_n(\mu r) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\zeta - z)^2}{4at}\right] [\varphi_n(\zeta) \cos n\theta + \psi_n(\zeta) \sin n\theta]\, d\zeta,$$

где суммирование по μ производится по положительным корням уравнения $J_n(\mu R) = 0$ (J_n — функция Бесселя).

Решение неоднородного уравнения ищется с помощью выражения (2) из п. 1 в разд. 1.5.2 при $\Phi \equiv 0$ с использованием функции Грина из п. 2 разд. 1.5.2.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 209), А. Г. Бутковский (1979, стр. 164).

2. Первая краевая задача для цилиндра конечной длины.

2.1. В каждой точке твердого тела, имеющего форму кругового цилиндра конечной длины ($0 \leqslant r \leqslant R$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, $-l \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его боковой и торцевых поверхностях в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(r,\theta,z) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad z = -l & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad z = l & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array} .$$

Решение:

$$T(r,\theta,z,t) = \sum_{\mu}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left[-at\left(\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{4l^2}\right)\right] \times \\ \times J_m(\mu r) \sin\frac{n\pi(z+l)}{2l} (A_{\mu,n,m} \cos m\theta + B_{\mu,n,m} \sin m\theta),$$

где коэффициенты $A_{\mu,n,m}$ и $B_{\mu,n,m}$ вычисляются по формулам

$$A_{\mu,n,m} = \frac{2}{\pi R^2 l [J'_m(\mu R)]^2} \int_0^R \xi J_m(\mu\xi)\, d\xi \int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi(\zeta+l)}{2l}\, d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\eta\, f(\xi,\zeta,\eta)\, d\eta,$$

$$B_{\mu,n,m} = \frac{2}{\pi R^2 l [J'_m(\mu R)]^2} \int_0^R \xi J_m(\mu\xi)\, d\xi \int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi(\zeta+l)}{2l}\, d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\eta\, f(\xi,\zeta,\eta)\, d\eta.$$

Здесь суммирование по μ производится по положительным корням уравнения

$$J_m(\mu R) = 0,$$

где J_m — функции Бесселя.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 225).

2.2. В каждой точке твердого тела, имеющего форму кругового цилиндра конечной длины ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его боковой и торцевых поверхностях также задано свое распределение температуры, причем эти распределения периодичны по θ.

Решение этой задачи можно получить с помощью формулы (2) из п. 1 разд. 1.5.2 при $\Phi \equiv 0$, в которые следует подставить функцию Грина из п. 3 разд. 1.5.2.

3. Третья краевая задача для полого цилиндра.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано периодическое по θ распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на его боковых и торцевых поверхностях происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры.

Решение этой задачи можно получить с помощью формул (1) и (2) из п. 1 разд. 1.5.2 при $\Phi \equiv 0$, в которые следует подставить функцию Грина из п. 4 разд. 1.5.2.

4. Смешанная краевая задача для полого цилиндра.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано периодическое по θ распределение температуры в момент времени $t=0$, на его боковых поверхностях происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой с заданным распределением температуры, а на торцевых поверхностях поддерживается заданное распределение температуры.

Решение этой задачи можно получить с помощью формул (1) и (2) из п. 1 разд. 1.5.2 при $\Phi \equiv 0$, в которые следует подставить функцию Грина из п. 5 разд. 1.5.2.

5. Третья краевая задача для части полого цилиндра.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму части полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на его боковых и торцевых поверхностях происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры.

Решение этой задачи можно получить с помощью формул (1) и (2) из п. 1 разд. 1.5.2 при $\Phi \equiv 0$, в которые следует подставить функцию Грина из п. 6 разд. 1.5.2.

6. Смешанные краевые задачи для части полого цилиндра.

6.1. В каждой точке твердого тела, имеющего форму части полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, на его поверхностях $r=R_1$ и $r=R_2$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры, а на каждой из остальных поверхностей поддерживается свое заданное распределение температуры.

Решение этой задачи можно получить с помощью формул (1) и (2) из п. 1 разд. 1.5.2 при $\Phi \equiv 0$, в которые следует подставить функцию Грина из п. 7.1 разд. 1.5.2.

6.2. В каждой точке твердого тела, имеющего форму части полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, на его поверхностях $r=R_1$, $r=R_2$, $z=0$ и $z=l$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры, а на каждой из остальных поверхностей поддерживается свое заданное распределение температуры.

Решение этой задачи можно получить с помощью формул (1) и (2) из п. 1 разд. 1.5.2 при $\Phi \equiv 0$, в которые следует подставить функцию Грина из п. 7.2 разд. 1.5.2.

6.3. В каждой точке твердого тела, имеющего форму части полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, на его поверхностях $r=R_1$, $r=R_2$, $\theta=0$ и $\theta=\theta_0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры, а на каждой из остальных поверхностей поддерживается свое заданное распределение температуры.

Решение этой задачи можно получить с помощью формул (1) и (2) из п. 1 разд. 1.5.2 при $\Phi \equiv 0$, в которые следует подставить функцию Грина из п. 7.3 разд. 1.5.2.

1.4.3. Задачи в сферической системе координат

Уравнение теплопроводности в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}\right].$$

Его удобно использовать для описания трехмерных нестационарных процессов тепло- и массообмена в областях, ограниченных координатными поверхностями сферической системы.

Точные решения вида $T = T(r,t)$, встречающиеся в задачах со сферической симметрией, приводятся в разд. 1.1.6.

1. Первая краевая задача для сферического тела.

В каждой точке сферического твердого тела ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе $r = R$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(r,\theta,\varphi) & \text{при}\quad t = 0 & \text{(начальное условие)}\\ T = 0 & \text{при}\quad r = R & \text{(граничное условие)}\\ T \neq \infty & \text{при}\quad r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,\theta,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(\mu r)^{-1/2}J_{n+1/2}(\mu r)P_n^m(\cos\theta)\times$$
$$\times(A_{n,m,\mu}\cos m\varphi + B_{n,m,\mu}\sin m\varphi)\exp(-\mu^2 at),$$

где

$$A_{n,m,\mu} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{\pi R^2\mu^{-1/2}[J'_{n+1/2}(\mu R)]^2(n+m)!}\times$$
$$\times\int_0^R \xi^{3/2}J_{n+1/2}(\mu\xi)\,d\xi\int_{-1}^{1}P_n^m(\zeta)\,d\zeta\int_0^{2\pi}\cos m\eta\, f(\xi,\zeta,\eta)\,d\eta,$$
$$B_{n,m,\mu} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{\pi R^2\mu^{-1/2}[J'_{n+1/2}(\mu R)]^2(n+m)!}\times$$
$$\times\int_0^R \xi^{3/2}J_{n+1/2}(\mu\xi)\,d\xi\int_{-1}^{1}P_n^m(\zeta)\,d\zeta\int_0^{2\pi}\sin m\eta\, f(\xi,\zeta,\eta)\,d\eta.$$

Если $m = 0$, то в знаменателях этих формул π следует заменить на 2π. Суммирование по μ производится по положительным корням уравнения

$$J_{n+1/2}(\mu R) = 0,$$

где $J_{n+1/2}$ — функции Бесселя, а $P_n^m(\zeta)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\zeta)$ по формулам

$$P_n^m(\zeta) = (1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{d\zeta^m}P_n(\zeta), \qquad P_n(\zeta) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\zeta^n}(\zeta^2-1)^n.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 244).

2. Первая краевая задача для конуса конечной длины.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой часть шара, вырезаемую конусом $\theta = \theta_0$ (область $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границах в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{array}{lll} T = f(r,\theta,\varphi) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\ T = 0 & \text{при} \quad \theta = \theta_0 & \text{(граничное условие)} \\ T \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(r,\theta,\varphi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu}\sum_{n}(\mu r)^{-1/2}J_{n+1/2}(\mu r)P_n^{-m}(\nu)\times$$
$$\times\left(A_{m,\mu,n}\cos m\varphi + B_{m,\mu,n}\sin m\varphi\right)\exp(-\mu^2 at),$$

где

$$A_{m,\mu,n} = -\frac{2(2n+1)\mu^{1/2}}{\pi R^2(1-\nu_0^2)[J'_{n+1/2}(\mu R)]^2}\left[\frac{d}{dn}P_n^{-m}(\nu_0)\frac{d}{d\nu_0}P_n^{-m}(\nu_0)\right]^{-1}\times$$
$$\times\int_0^R \xi^{3/2}J_{n+1/2}(\mu\xi)\,d\xi\int_{\nu_0}^1 P_n^{-m}(\zeta)\,d\zeta\int_0^{2\pi}\cos m\eta\, f(\xi,\zeta,\eta)\,d\eta,$$

$$B_{m,\mu,n} = -\frac{2(2n+1)\mu^{1/2}}{\pi R^2(1-\nu_0^2)[J'_{n+1/2}(\mu R)]^2}\left[\frac{d}{dn}P_n^{-m}(\nu_0)\frac{d}{d\nu_0}P_n^{-m}(\nu_0)\right]^{-1}\times$$
$$\times\int_0^R \xi^{3/2}J_{n+1/2}(\mu\xi)\,d\xi\int_{\nu_0}^1 P_n^{-m}(\zeta)\,d\zeta\int_0^{2\pi}\sin m\eta\, f(\xi,\zeta,\eta)\,d\eta.$$

Если $m = 0$, то в знаменателях этих формул π следует заменить на 2π. Суммирование по μ производится по положительным корням уравнения

$$J_{n+1/2}(\mu R) = 0,$$

где $J_{n+1/2}$ — функции Бесселя, а суммирование по n выполняется по всем корням уравнения

$$P_n^{-m}(\nu_0) = 0,$$

превышающим $-1/2$.

Здесь $P_n^{-m}(\nu)$ — обобщенная функция Лежандра, которая определяется формулой

$$P_n^{-m}(\nu) = \frac{1}{\Gamma(1+m)}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\, n+1;\, 1+m;\, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu\right),$$

где F — гипергеометрическая функция Гаусса, а Γ — гамма-функция.

Выше везде было введено обозначение $\nu = \cos\theta$, причем $\nu_0 = \cos\theta_0$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 246).

1.5. Трехмерное уравнение $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \Phi(\mathrm{x}, t)$

1.5.1. Задачи в декартовой системе координат

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение теплопроводности с объемным источником имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \Phi(x,y,z,t)$$

и описывает развитие трехмерных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих трехмерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

В каждой точке бесконечного твердого тела задано распределение температуры в начальный момент времени:

$$T = f(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)\, f(\xi,\zeta,\eta)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta + \\ + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\, \Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta\, d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-\eta)^2}{4at}\right].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 160).

2. Первая краевая задача для полупространства.

2.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство ($0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе $x = 0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = f(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) f(\xi,\zeta,\eta)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta + \\ + \int_0^t \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta\, d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}} \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-\eta)^2}{4at}\right] - \\ - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-\eta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 155).

2.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство ($0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, и задан закон изменения температуры от времени и координат на границе тела $x = 0$:

$$T = f(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$
$$T = g(y, z, t) \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)\, f(\xi,\zeta,\eta)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta + \\ + a\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\zeta\, d\eta\, d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\, \Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta\, d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ приведена в п. 2.1.

3. Вторая краевая задача для полупространства.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство ($0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а граница тела $x = 0$ теплоизолирована:

$$\begin{aligned} &T = f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &\partial_x T = 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение дается выражением для $T(x,y,z,t)$ из п. 2.1, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4at}\right] + \right. \\ \left. + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2+(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 155).

4. Третья краевая задача для полупространства.

4.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство ($0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границе тела $x = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{aligned} &T = f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &\partial_x T - kT = 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение дается выражением для $T(x,y,z,t)$ из п. 2.1, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \\ = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}\exp\left[-\frac{(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4at}\right] - \\ - \frac{k}{4\pi a t}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right)\exp\left[k(x+\xi)+k^2at - \frac{(y-\zeta)^2+(z-\eta)^2}{4at}\right].$$

4.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечное полупространство, известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границе тела $x=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой с заданным распределением температуры:

$$\begin{aligned} &T = f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &\partial_x T - kT = -kg(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение дается выражением для $T(x,y,z,t)$ из п. 2.2, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ приведена в п. 4.1.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 364).

5. Первая краевая задача для бесконечного слоя.

5.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границах тела $z = 0$ и $z = l$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned} &T = f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ &T = 0 && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)} \\ &T = 0 && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^l G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)\,f(\xi,\zeta,\eta)\,d\xi\,d\zeta\,d\eta + \\ + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^l G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right]\times \\ \times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(2nl+z-\eta)^2}{4at}\right]-\exp\left[-\frac{(2nl+z+\eta)^2}{4at}\right]\right\}$$

или

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{2\pi l a t}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right]\times \\ \times\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a t}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{n\pi\eta}{l}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 366), А. Г. Бутковский (1979, стр. 156).

5.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой, задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой границе $z = 0$ и $z = l$ задано свое распределение температуры:

$T = f(x,y,z)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$T = g_1(x,y,t)$	при	$z = 0$	(граничное условие)
$T = g_2(x,y,t)$	при	$z = l$	(граничное условие)

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^l G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)f(\xi,\zeta,\eta)\,d\xi\,d\zeta\,d\eta + \\ + a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta\,d\tau - \\ - a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(\xi,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=l} d\xi\,d\zeta\,d\tau + \\ + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^l G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\tau,$$

где функции $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ приведены в п. 5.1.

6. Вторая краевая задача для бесконечного слоя.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а границы тела $z = 0$ и $z = l$ теплоизолированы:

$T = f(x,y,z)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_z T = 0$	при	$z = 0$	(граничное условие)
$\partial_z T = 0$	при	$z = l$	(граничное условие)

Решение дается выражением для $T(x,y,z,t)$ из п. 5.1, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t}\,)^3}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right]\times \\ \times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\eta+2nl)^2}{4at}\right]+\exp\left[-\frac{(z+\eta+2nl)^2}{4at}\right]\right\}$$

или

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)=\frac{1}{4\pi lat}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right]\times\\ \times\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi z}{l}\cos\frac{n\pi\eta}{l}\exp\left[-\frac{n^2\pi^2at}{l^2}\right]\right\}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 367), А. Г. Бутковский (1979, стр. 159).

7. Третья краевая задача для бесконечного слоя.

7.1. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой ($-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, $0\leqslant z\leqslant l$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела $z=0$ и $z=l$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{aligned}
T&=f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_z T-kT&=0 &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}\\
\partial_z T+kT&=0 &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение дается выражением для $T(x,y,z,t)$ из п. 5.1, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)=\frac{1}{2\pi at}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right]\times\\ \times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_n\cos\mu_n z+k\sin\mu_n z)(\mu_n\cos\mu_n\eta+k\sin\mu_n\eta)}{l(\mu_n^2+k^2)+2k}\exp(-\mu_n^2at).$$

Здесь μ_n — *положительные корни уравнения*

$$\operatorname{tg}\mu l=\frac{2\mu k}{\mu^2-k^2}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 366).

7.2. В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой ($-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, $0\leqslant z\leqslant l$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела $z=0$ и $z=l$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средами с заданными распределениями температуры:

$$\begin{aligned}
T&=f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_z T-kT&=-kg_1(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}\\
\partial_z T+kT&=kg_2(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение дается выражением для $T(x,y,z,t)$ из п. 5.2, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ приведена в п. 7.1.

8. Смешанная краевая задача для бесконечного слоя.

В каждой точке твердого тела, представляющего собой бесконечный слой ($-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, $0\leqslant z\leqslant l$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, граница $z=0$ теплоизолирована, а граница $z=l$ поддерживается при постоянной температуре (равной нулю):

$$\begin{aligned}
T&=f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_z T&=0 &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}\\
T&=0 &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение дается выражением для $T(x,y,z,t)$ из п. 5.1, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ описывается формулами

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t}\,)^3} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right] \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left\{\exp\left[-\frac{(z-\eta+2nl)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(z+\eta+2nl)^2}{4at}\right]\right\}$$

или

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{2\pi l a t} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{4at}\right] \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l} \cos\frac{(2n+1)\pi\eta}{2l} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a t}{4l^2}\right].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 158).

9. Первая краевая задача в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

9.1. В каждой точке твердого тела, занимающего область $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$, известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела $x=0$, $y=0$ и $z=0$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$T = f(x,y,z)$	при	$t=0$	(начальное условие)
$T = 0$	при	$x=0$	(граничное условие)
$T = 0$	при	$y=0$	(граничное условие)
$T = 0$	при	$z=0$	(граничное условие)

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) f(\xi,\zeta,\eta)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta + \\ + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\, \Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta\, d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t}\,)^3} \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\} \times \\ \times \left\{\exp\left[-\frac{(y-\zeta)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(y+\zeta)^2}{4at}\right]\right\} \left\{\exp\left[-\frac{(z-\eta)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(z+\eta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355).

9.2. В каждой точке твердого тела, занимающего область $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$, известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на каждой границе $x=0$, $y=0$ и $z=0$ задано свое распределение температуры:

$T = f(x,y,z)$	при	$t=0$	(начальное условие)
$T = g_1(y,z,t)$	при	$x=0$	(граничное условие)
$T = g_2(x,z,t)$	при	$y=0$	(граничное условие)
$T = g_3(x,y,t)$	при	$z=0$	(граничное условие)

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) f(\xi,\zeta,\eta)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta +$$

$$+ a\int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty g_1(\zeta,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\zeta\, d\eta\, d\tau +$$

$$+ a\int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty g_2(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\zeta=0} d\xi\, d\eta\, d\tau +$$

$$+ a\int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty g_3(\xi,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=0} d\xi\, d\zeta\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta\, d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ приведена в п. 9.1.

10. Третья краевая задача в области $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$.

10.1. В каждой точке твердого тела, занимающего область $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$, известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на границах тела $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$T = f(x,y,z)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_x T - k_1 T = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$\partial_y T - k_2 T = 0$	при	$y = 0$	(граничное условие)
$\partial_z T - k_3 T = 0$	при	$z = 0$	(граничное условие)

Решение дается выражением для $T(x,y,z,t)$ из п. 9.1, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\} - \right.$$
$$\left. - k_1 \exp\left[k_1^2 a t + k_1(x+\xi)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k_1\sqrt{at}\right)\right\} \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\left\{\exp\left[-\frac{(y-\zeta)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(y+\zeta)^2}{4at}\right]\right\} - \right.$$
$$\left. - k_2 \exp\left[k_2^2 a t + k_2(y+\zeta)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{y+\zeta}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\right)\right\} \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\eta)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(z+\eta)^2}{4at}\right]\right\} - \right.$$
$$\left. - k_3 \exp\left[k_3^2 a t + k_3(z+\eta)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{z+\eta}{2\sqrt{at}} + k_3\sqrt{at}\right)\right\}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355).

10.2. В каждой точке твердого тела известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на границах тела $x=0$, $y=0$ и $z=0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средами с заданными распределениями температуры:

$T = f(x,y,z)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_x T - k_1 T = -k_1 g_1(y,z,t)$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$\partial_y T - k_2 T = -k_2 g_2(x,z,t)$	при	$y = 0$	(граничное условие)
$\partial_z T - k_3 T = -k_3 g_3(x,y,t)$	при	$z = 0$	(граничное условие)

Решение дается выражением для $T(x,y,z,t)$ из п. 9.2, где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ приведена в п. 10.1.

11. Первая краевая задача в прямоугольной области.

11.1. В неограниченной прямоугольной области ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < \infty$) известно распределение температуры в начальный момент времени:

$$T = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$

а на границах $x = 0$, $x = l_1$, $y = 0$ и $y = l_2$ в течение всего времени поддерживается постоянная температура, равная нулю.

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) f(\xi,\zeta,\eta)\,d\xi\,d\zeta\,d\eta + \\ + \int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t}\,)^3}\exp\left[-\frac{(z-\eta)^2}{4at}\right] \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2nl_1)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2nl_1)^2}{4at}\right]\right\} \times \\ \times \left\{\exp\left[-\frac{(y-\zeta+2ml_2)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(y+\zeta+2ml_2)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 157).

11.2. В неограниченной прямоугольной области ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < \infty$) известно распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на каждой границе $x = 0$, $x = l_1$, $y = 0$ и $y = l_2$ задано свое распределение температуры:

$$\begin{array}{lll} T = f(x,y,z) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = g_1(y,z,t) & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_2(y,z,t) & \text{при} \quad x = l_1 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_3(x,z,t) & \text{при} \quad y = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_4(x,z,t) & \text{при} \quad y = l_2 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) f(\xi,\zeta,\eta)\,d\xi\,d\zeta\,d\eta + \\ + a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\zeta,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\zeta\,d\eta\,d\tau - \\ - a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(\zeta,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=l_1} d\zeta\,d\eta\,d\tau + \\ + a\int_0^t\int_0^{l_1}\int_{-\infty}^{\infty} g_3(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta\,d\tau - \\ - a\int_0^t\int_0^{l_1}\int_{-\infty}^{\infty} g_4(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\zeta=l_2} d\xi\,d\eta\,d\tau + \\ + \int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ приведена в п. 11.1.

12. Первая краевая задача для параллелепипеда.

12.1. В каждой точке твердого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$), известно распределение температуры в начальный момент времени:

$$T = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},$$

а на границах тела в течение всего времени поддерживается постоянная температура, равная нулю.

Решение:

$$T(x,y,z,t) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) f(\xi,\zeta,\eta)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta + \\ + \int_0^t \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta\, d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) = \frac{8}{l_1 l_2 l_3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \exp\left[-\pi^2 at\left(\frac{n^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}+\frac{p^2}{l_3^2}\right)\right] \times \\ \times \sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi\xi}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{m\pi\zeta}{l_2}\sin\frac{p\pi z}{l_3}\sin\frac{p\pi\eta}{l_3}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355), А. Г. Бутковский (1979, стр. 157).

12.2. В каждой точке прямоугольного параллелепипеда ($0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$), известно распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на каждой границе задано свое распределение температуры:

$$\begin{array}{llll} T = f(x,y,z) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)} \\ T = g_1(y,z,t) & \text{при} & x=0 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_2(y,z,t) & \text{при} & x=l_1 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_3(x,z,t) & \text{при} & y=0 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_4(x,z,t) & \text{при} & y=l_2 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_5(x,y,t) & \text{при} & z=0 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_6(x,y,t) & \text{при} & z=l_3 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$\begin{aligned} T(x,y,z,t) &= \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t) f(\xi,\zeta,\eta)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta + \\ &+ a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} g_1(\zeta,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\zeta\, d\eta\, d\tau - \\ &- a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} g_2(\zeta,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=l_1} d\zeta\, d\eta\, d\tau + \\ &+ a\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_3} g_3(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\zeta=0} d\xi\, d\eta\, d\tau - \\ &- a\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_3} g_4(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\zeta=l_2} d\xi\, d\eta\, d\tau + \\ &+ a\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} g_5(\xi,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=0} d\xi\, d\zeta\, d\tau - \\ &- a\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} g_6(\xi,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=l_3} d\xi\, d\zeta\, d\tau + \\ &+ \int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t-\tau)\,\Phi(\xi,\zeta,\eta,\tau)\, d\xi\, d\zeta\, d\eta\, d\tau, \end{aligned}$$

где функция $G(x,\xi,y,\zeta,z,\eta,t)$ приведена в п. 12.1.

1.5.2. Задачи в цилиндрической системе координат

Уравнение теплопроводности с объемным источником в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \Phi(r, \theta, z, t).$$

Оно используется для описания несимметричных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с цилиндрическими и плоскими границами.

1. Предварительные замечания.

Решение этого уравнения в области V с неоднородным начальным и однородными граничными условиями на границе S можно записать в виде

$$T(\mathbf{x}, t) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t) f(\mathbf{x}_0)\, dV_0 + \int_0^t \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t-\tau)\, \Phi(\mathbf{x}_0, \tau)\, dV_0\, d\tau, \qquad (1)$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t)$ — функция Грина, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathbf{x}_0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$. Интегрирование в формуле (1) ведется по переменным x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Решение уравнения с неоднородным граничным условием, которое задается на границе S функцией $g(\mathbf{x}, t)$, можно записать в виде

$$T(\mathbf{x}, t) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t) f(\mathbf{x}_0)\, dV_0 - a\int_0^t \int_S g(\mathbf{x}_0, \tau) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_0}\, dS_0\, d\tau + {}$$
$$+ \int_0^t \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t-\tau)\, \Phi(\mathbf{x}_0, \tau)\, dV_0\, d\tau, \qquad (2)$$

где $\dfrac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_0}$ — производная функции Грина, взятая по направлению внешней нормали $\mathbf{n}_0$ к поверхности S (в цилиндрической системе координат $dV_0 = r\, dr\, d\theta\, dz$).

Далее в этом разделе будут приведены только функции Грина, которые позволяют находить решение по формулам (1) или (2).

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 350).

2. Первая краевая задача для бесконечного цилиндра.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму бесконечного кругового цилиндра ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его боковой поверхности в течение всего времени поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$T = f(r, \theta, z)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$T = 0$	при	$r = R$	(граничное условие)
$T \neq \infty$	при	$r = 0$	(граничное условие)

Функция Грина:

$$G(r, \xi, \theta, \zeta, z, \eta, t) = \frac{1}{2(\pi a t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4at}\right) \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos[n(\theta - \zeta)] \sum_{\mu} \frac{J_n(\mu r) J_n(\mu \xi)}{[J_n'(\mu R)]^2} \exp(-\mu^2 a t),$$

где суммирование по μ ведется по корням уравнения

$$J_n(\mu R) = 0.$$

Здесь J_n — функция Бесселя.

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 164).

3. Первая краевая задача для цилиндра конечной длины.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму кругового цилиндра конечной длины ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на его боковой и торцевых поверхностях задано свое распределение температуры, причем эти распределения периодичны по θ:

$$
\begin{array}{lll}
T = f(r,\theta,z) & \text{при} \quad t=0 & \text{(начальное условие)} \\
T = g_1(\theta,z,t) & \text{при} \quad r=R & \text{(граничное условие)} \\
T = g_2(r,\theta,t) & \text{при} \quad z=0 & \text{(граничное условие)} \\
T = g_3(r,\theta,t) & \text{при} \quad z=l & \text{(граничное условие)} \\
T \neq \infty & \text{при} \quad r=0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Функция Грина:

$$
G(r,\xi,\theta,\zeta,z,\eta,t) = \frac{2}{\pi R^2 l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 at}{l^2}\right) \sin\frac{n\pi z}{l} \sin\frac{n\pi\eta}{l} \times
$$
$$
\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos[m(\theta-\zeta)] \sum_{\mu} \left\{ \frac{J_m(\mu r) J_m(\mu\xi)}{[J'_m(\mu R)]^2} \exp(-\mu^2 at) \right\}.
$$

Здесь μ — положительные корни уравнения

$$
J_m(\mu R) = 0,
$$

где J_m — функция Бесселя. Суммирование по μ ведется по всем положительным корням этого уравнения.

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 165).

4. Третья краевая задача для полого цилиндра.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано периодическое по θ распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на его боковых и торцевых поверхностях происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой имеющей заданное распределение температуры:

$$
\begin{array}{rll}
T = f(r,\theta,z) & \text{при} \quad t=0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_r T - k_1 T = -k_1 g_1(\theta,z,t) & \text{при} \quad r=R_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_r T + k_2 T = k_2 g_2(\theta,z,t) & \text{при} \quad r=R_2 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_z T - k_3 T = -k_3 g_3(r,\theta,t) & \text{при} \quad z=0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_z T + k_4 T = k_4 g_4(r,\theta,t) & \text{при} \quad z=l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Функция Грина:

$$
G(r,\xi,\theta,\zeta,z,\eta,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m,p}^{\infty} \frac{\varphi_r(\mu_{mp}r)\varphi_r(\mu_{mp}\xi)\varphi_z(\nu_n,z)\varphi_z(\nu_n,\eta)}{\|\varphi_r(\mu_{mp}r)\|^2 \|\varphi_z(\nu_n,z)\|^2 \exp[im(\theta-\zeta)+(\nu_n^2+\mu_{mp}^2)at]}.
$$

Здесь $i^2 = -1$ и использованы следующие обозначения:

$$
\varphi_r(\mu_{mp}r) = \left[\mu_{mp}J_{m+1}(\mu_{mp}R_1) + \left(k_1 - \frac{m}{R_1}\right) J_m(\mu_{mp}R_1)\right] Y_m(\mu_{mp}r) -
$$
$$
- \left[\mu_{mp}Y_{m+1}(\mu_{mp}R_1) + \left(k_1 - \frac{m}{R_1}\right) Y_m(\mu_{mp}R_1)\right] J_m(\mu_{mp}r),
$$
$$
\varphi_z(\nu_n,z) = \cos\nu_n z + k_3 \frac{\sin\nu_n z}{\nu_n},
$$

$$\|\varphi_r(\mu_{mp}r)\|^2 = \frac{2}{\pi^2\mu_{mp}^2 R_1^2}\Big\{\tfrac{1}{4}\pi^2 R_1^2(\mu_{mp}^2 R_2^2 + k_2^2 R_2^2 - m^2)[\varphi_r(\mu_{mp}R_2)]^2 - {} - (\mu_{mp}^2 R_1^2 + k_1^2 R_1^2 - m^2)\Big\},$$

$$\|\varphi_z(\nu_n, z)\|^2 = \frac{k_4}{2\nu_n^2}\,\frac{\nu_n^2 + k_3^2}{\nu_n^2 + k_4^2} + \frac{k_3}{2\nu_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_3^2}{\nu_n^2}\right),$$

где $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{mp} — положительные корни уравнения

$$\frac{\mu R_1 J_{m+1}(\mu R_1) + (k_1 R_1 - m)J_m(\mu R_1)}{\mu R_2 J_{m+1}(\mu R_2) - (k_2 R_2 + m)J_m(\mu R_2)} = \frac{\mu R_1 Y_{m+1}(\mu R_1) + (k_1 R_1 - m)Y_m(\mu R_1)}{\mu R_2 Y_{m+1}(\mu R_2) - (k_2 R_2 + m)Y_m(\mu R_2)},$$

а ν_n — положительные корни тригонометрического уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}\nu l}{\nu} = \frac{k_3 + k_4}{\nu^2 - k_3 k_4}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 163).

5. Смешанная краевая задача для полого цилиндра.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано периодическое по θ распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на его боковых поверхностях происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой с заданным распределением температуры, а на торцевых поверхностях поддерживается заданное распределение температуры:

$$\begin{array}{rlll}
T = f(r,\theta,z) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_r T - k_1 T = -k_1 g_1(\theta,z,t) & \text{при} & r = R_1 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_r T + k_2 T = k_2 g_2(\theta,z,t) & \text{при} & r = R_2 & \text{(граничное условие)}\\
T = g_3(r,\theta,t) & \text{при} & z = 0 & \text{(граничное условие)}\\
T = g_4(r,\theta,t) & \text{при} & z = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}$$

Функция Грина:

$$G(r,\xi,\theta,\zeta,z,\eta,t) = {} = \frac{1}{\pi l}\sum_{n,m,p}^{\infty} \sin\frac{\pi n z}{l}\,\sin\frac{\pi n\eta}{l}\,\frac{\varphi_r(\mu_{mp}r)\varphi_r(\mu_{mp}\xi)}{\|\varphi_r(\mu_{mp}r)\|^2}\,\frac{\exp\bigl[im(\zeta-\theta)\bigr]}{\exp\bigl[(\mu_{mp}^2 + \pi^2 n^2/l^2)at\bigr]}.$$

Здесь $i^2 = -1$; $n = 1, 2, \ldots$ и использованы следующие обозначения:

$$\varphi_r(\mu_{mp}r) = \left[\mu_{mp}J_{m+1}(\mu_{mp}R_1) + \left(k_1 - \frac{m}{R_1}\right)J_m(\mu_{mp}R_1)\right]Y_m(\mu_{mp}r) - {} - \left[\mu_{mp}Y_{m+1}(\mu_{mp}R_1) + \left(k_1 - \frac{m}{R_1}\right)Y_m(\mu_{mp}R_1)\right]J_m(\mu_{mp}r),$$

$$\|\varphi_r(\mu_{mp}r)\|^2 = \frac{2}{\pi^2\mu_{mp}^2 R_1^2}\Big\{\tfrac{1}{4}\pi^2 R_1^2(\mu_{mp}^2 R_2^2 + k_2^2 R_2^2 - m^2)[\varphi_r(\mu_{mp}R_2)]^2 - {} - (\mu_{mp}^2 R_1^2 + k_1^2 R_1^2 - m^2)\Big\},$$

где $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{mp} — положительные корни уравнения

$$\frac{\mu R_1 J_{m+1}(\mu R_1) + (k_1 R_1 - m)J_m(\mu R_1)}{\mu R_2 J_{m+1}(\mu R_2) - (k_2 R_2 + m)J_m(\mu R_2)} = \frac{\mu R_1 Y_{m+1}(\mu R_1) + (k_1 R_1 - m)Y_m(\mu R_1)}{\mu R_2 Y_{m+1}(\mu R_2) - (k_2 R_2 + m)Y_m(\mu R_2)}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 161).

6. Третья краевая задача для части полого цилиндра.

В каждой точке твердого тела, имеющего форму части полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, а на его боковых и торцевых поверхностях происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры:

$$
\begin{array}{lll}
T = f(r,\theta,z) & \text{при} \quad t=0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_r T - k_1 T = -k_1 g_1(\theta,z,t) & \text{при} \quad r=R_1 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_r T + k_2 T = k_2 g_2(\theta,z,t) & \text{при} \quad r=R_2 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_z T - k_3 T = -k_3 g_3(r,\theta,t) & \text{при} \quad z=0 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_z T + k_4 T = k_4 g_4(r,\theta,t) & \text{при} \quad z=l & \text{(граничное условие)}\\
\partial_\theta T - k_5 T = -k_5 g_5(r,z,t) & \text{при} \quad \theta=0 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_\theta T + k_6 T = k_6 g_6(r,z,t) & \text{при} \quad \theta=\theta_0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Функция Грина:

$$
G(r,\xi,\theta,\zeta,z,\eta,t) = \sum_{p,m,n}^{\infty} \frac{\varphi_z(\beta_p,z)\varphi_z(\beta_p,\eta)\varphi_\theta(\gamma_m,\theta)\varphi_\theta(\gamma_m,\zeta)}{\|\varphi_z(\beta_p,z)\|^2\|\varphi_\theta(\gamma_m,\theta)\|^2\|\varphi_r(\mu_{nm}r)\|^2} \times
$$
$$
\times \varphi_r(\mu_{nm}r)\varphi_r(\mu_{nm}\xi)\exp[-(\beta_p^2+\mu_{mn}^2)at].
$$

Здесь использованы обозначения

$$
\varphi_r(\mu_{nm}r) = \left[\mu_{nm}J_{\gamma_m+1}(\mu_{nm}R_1) + \left(k_1 - \frac{\gamma_m}{R_1}\right)J_{\gamma_m}(\mu_{nm}R_1)\right]Y_{\gamma_m}(\mu_{nm}r) -
$$
$$
- \left[\mu_{nm}Y_{\gamma_m+1}(\mu_{nm}R_1) + \left(k_1 - \frac{\gamma_m}{R_1}\right)Y_{\gamma_m}(\mu_{nm}R_1)\right]J_{\gamma_m}(\mu_{nm}r),
$$

$$
\varphi_z(\beta_p,z) = \cos\beta_p z + k_3\frac{\sin\beta_p z}{\beta_p},
$$

$$
\varphi_\theta(\gamma_m,\theta) = \cos\gamma_m\theta + k_5\frac{\sin\gamma_m\theta}{\gamma_m};
$$

$$
\|\varphi_r(\mu_{nm}r)\|^2 = \frac{2}{\pi^2\mu_{nm}^2R_1^2}\left\{\tfrac{1}{4}\pi^2R_1^2(\mu_{nm}^2R_2^2 + k_2^2R_2^2 - \gamma_m^2)[\varphi_r(\mu_{nm}R_2)]^2 - \right.
$$
$$
\left. - (\mu_{nm}^2R_1^2 + k_1^2R_1^2 - \gamma_m^2)\right\},
$$

$$
\|\varphi_z(\beta_p,z)\|^2 = \frac{k_4}{2\beta_p^2}\frac{\beta_p^2+k_3^2}{\beta_p^2+k_4^2} + \frac{k_3}{2\beta_p^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_3^2}{\beta_p^2}\right),
$$

$$
\|\varphi_\theta(\gamma_m,\theta)\|^2 = \frac{k_6}{2\gamma_m^2}\frac{\gamma_m^2+k_5^2}{\gamma_m^2+k_6^2} + \frac{k_5}{2\gamma_m^2} + \frac{\theta_0}{2}\left(1 + \frac{k_5^2}{\gamma_m^2}\right),
$$

где $J_\nu(\xi)$ и $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя; β_p и γ_m — корни тригонометрических уравнений

$$
\frac{\operatorname{tg}(\beta_p l)}{\beta_p} = \frac{k_3+k_4}{\beta_p^2 - k_3k_4}, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\gamma_m\theta_0)}{\gamma_m} = \frac{k_5+k_6}{\gamma_m^2 - k_5k_6},
$$

а μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения

$$
\frac{\mu_{nm}R_1J_{\gamma_m+1}(\mu_{nm}R_1) + (k_1R_1 - \gamma_m)J_{\gamma_m}(\mu_{nm}R_1)}{\mu_{nm}R_2J_{\gamma_m+1}(\mu_{nm}R_2) - (k_2R_2 + \gamma_m)J_{\gamma_m}(\mu_{nm}R_2)} =
$$
$$
= \frac{\mu_{nm}R_1Y_{\gamma_m+1}(\mu_{nm}R_1) + (k_1R_1 - \gamma_m)Y_{\gamma_m}(\mu_{nm}R_1)}{\mu_{nm}R_2Y_{\gamma_m+1}(\mu_{nm}R_2) - (k_2R_2 + \gamma_m)Y_{\gamma_m}(\mu_{nm}R_2)}.
$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 171).

7. Смешанные краевые задачи для части полого цилиндра.

7.1. В каждой точке твердого тела, имеющего форму части полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, на его поверхностях $r = R_1$ и $r = R_2$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры, а на каждой из остальных поверхностей поддерживается свое заданное распределение температуры:

$$\begin{array}{rlll} T = f(r,\theta,z) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T - k_1 T = -k_1 g_1(\theta,z,t) & \text{при} & r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_r T + k_2 T = k_2 g_2(\theta,z,t) & \text{при} & r = R_2 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_3(r,\theta,t) & \text{при} & z = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_4(r,\theta,t) & \text{при} & z = l & \text{(граничное условие)} \\ T = g_5(r,z,t) & \text{при} & \theta = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = g_6(r,z,t) & \text{при} & \theta = \theta_0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(r,\xi,\theta,\zeta,z,\eta,t,) = \frac{4}{\theta_0 l} \sum_{n,m,p}^{\infty} \frac{\varphi_r(\mu_{mp} r)\varphi_r(\mu_{mp}\xi)}{\|\varphi_r(\mu_{mp} r)\|^2} \exp\bigl[-(\beta_n^2 + \mu_{mp}^2)at\bigr] \times \\ \times \sin\frac{\pi n z}{l} \sin\frac{\pi n \eta}{l} \sin\frac{\pi m \theta}{\theta_0} \sin\frac{\pi m \zeta}{\theta_0}.$$

Здесь введены обозначения

$$\beta_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n = 1, 2\ldots; \qquad \nu_m^2 = \frac{\pi^2 m^2}{\theta_0^2}, \quad m = 1, 2, \ldots;$$

$$\varphi_r(\mu_{mp} r) = \left[\mu_{mp} J_{\nu_m+1}(\mu_{mp} R_1) + \left(k_1 - \frac{\nu_m}{R_1}\right) J_{\nu_m}(\mu_{mp} R_1)\right] Y_{\nu_m}(\mu_{mp} r) - \\ - \left[\mu_{mp} Y_{\nu_m+1}(\mu_{mp} R_1) + \left(k_1 - \frac{\nu_m}{R_1}\right) Y_{\nu_m}(\mu_{mp} R_1)\right] J_{\nu_m}(\mu_{mp} r),$$

$$\|\varphi_r(\mu_{mp} r)\|^2 = \frac{2}{\pi^2 \mu_{mp}^2 R_1^2} \Bigl\{\nu_m^2 - \mu_{mp}^2 R_1^2 - k_1^2 R_1^2 + \\ + \tfrac{1}{4}\pi^2 R_1^2(\mu_{mp}^2 R_2^2 + k_2^2 R_2^2 - \nu_m^2)[\varphi_r(\mu_{mp} R_2)]^2\Bigr\},$$

где $J_\nu(\xi)$ и $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя, а μ_{mp} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\mu J_{\nu_m+1}(\mu R_1) + \left(k_1 - \frac{\nu_m}{R_1}\right) J_{\nu_m}(\mu R_1)}{\mu J_{\nu_m+1}(\mu R_2) - \left(k_2 + \frac{\nu_m}{R_2}\right) J_{\nu_m}(\mu R_2)} = \frac{\mu Y_{\nu_m+1}(\mu R_1) + \left(k_1 - \frac{\nu_m}{R_1}\right) Y_{\nu_m}(\mu R_1)}{\mu Y_{\nu_m+1}(\mu R_2) - \left(k_2 + \frac{\nu_m}{R_2}\right) Y_{\nu_m}(\mu R_2)}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 166).

7.2. В каждой точке твердого тела, имеющего форму части полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, на его поверхностях $r=R_1$, $r=R_2$, $z = 0$ и $z = l$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры, а на каждой из остальных поверхностей поддерживается свое заданное распределение температуры:

$$
\begin{array}{rlll}
T = f(r,\theta,z) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_r T - k_1 T = -k_1 g_1(\theta,z,t) & \text{при} & r=R_1 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_r T + k_2 T = k_2 g_2(\theta,z,t) & \text{при} & r=R_2 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_z T - k_3 T = -k_3 g_3(r,\theta,t) & \text{при} & z=0 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_z T + k_4 T = k_4 g_4(r,\theta,t) & \text{при} & z=l & \text{(граничное условие)}\\
T = g_5(r,z,t) & \text{при} & \theta=0 & \text{(граничное условие)}\\
T = g_6(r,z,t) & \text{при} & \theta=\theta_0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Функция Грина:

$$
G(r,\xi,\theta,\zeta,z,\eta,t) = \frac{2}{\theta_0}\sum_{n,m,p}^{\infty} \frac{\varphi_r(\mu_{mp}r)\varphi_r(\mu_{mp}\xi)\varphi_z(\beta_n,z)\varphi_z(\beta_n,\eta)}{\|\varphi_r(\mu_{mp}r)\|^2\|\varphi_z(\beta_n,z)\|^2}\times
$$
$$
\times\sin\frac{\pi m\theta}{\theta_0}\sin\frac{\pi m\zeta}{\theta_0}\exp[-(\beta_n^2+\mu_{mp}^2)at].
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
\varphi_r(\mu_{mp}r) = \left[\mu_{mp}J_{\nu_m+1}(\mu_{mp}R_1) + \left(k_1 - \frac{\nu_m}{R_1}\right)J_{\nu_m}(\mu_{mp}R_1)\right]Y_{\nu_m}(\mu_{mp}r) -
$$
$$
- \left[\mu_{mp}Y_{\nu_m+1}(\mu_{mp}R_1) + \left(k_1 - \frac{\nu_m}{R_1}\right)Y_{\nu_m}(\mu_{mp}R_1)\right]J_{\nu_m}(\mu_{mp}r),
$$
$$
\varphi_z(\beta_n,z) = \cos\beta_n z + k_3\frac{\sin\beta_n z}{\beta_n};
$$
$$
\|\varphi_r(\mu_{mp}r)\|^2 = \frac{2}{\pi^2\mu_{mp}^2R_1^2}\left\{\tfrac{1}{4}\pi^2R_1^2(\mu_{mp}^2R_2^2 + k_2^2R_2^2 - \nu_m^2)[\varphi_r(\mu_{mp}R_2)]^2 -\right.
$$
$$
\left. - (\mu_{mp}^2R_1^2 + k_1^2R_1^2 - \nu_m^2)\right\},
$$
$$
\|\varphi_z(\beta_n,z)\|^2 = \frac{k_4}{2\beta_n^2}\,\frac{\beta_n^2+k_3^2}{\beta_n^2+k_4^2} + \frac{k_3}{2\beta_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_3^2}{\beta_n^2}\right),
$$

где $J_\nu(\xi)$ и $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя; $\nu_m^2 = \pi^2m^2/\theta_0^2$ $(m = 1, 2, \ldots)$; β_n — положительные корни тригонометрического уравнения

$$
\frac{\operatorname{tg}\beta l}{\beta} = \frac{k_3+k_4}{\beta^2 - k_3k_4},
$$

а μ_{mp} — положительные корни уравнения

$$
\frac{\mu J_{\nu_m+1}(\mu R_1) + \left(k_1 - \dfrac{\nu_m}{R_1}\right)J_{\nu_m}(\mu R_1)}{\mu J_{\nu_m+1}(\mu R_2) - \left(k_2 + \dfrac{\nu_m}{R_2}\right)J_{\nu_m}(\mu R_2)} = \frac{\mu Y_{\nu_m+1}(\mu R_1) + \left(k_1 - \dfrac{\nu_m}{R_1}\right)Y_{\nu_m}(\mu R_1)}{\mu Y_{\nu_m+1}(\mu R_2) - \left(k_2 + \dfrac{\nu_m}{R_2}\right)Y_{\nu_m}(\mu R_2)}.
$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 168).

7.3. В каждой точке твердого тела, имеющего форму части полого кругового цилиндра конечной длины ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$), задано распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, на его поверхностях $r=R_1$, $r=R_2$, $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры, а на каждой из остальных поверхностей поддерживается свое заданное распределение температуры:

$$
\begin{array}{lll}
T = f(r,\theta,z) & \text{при}\quad t=0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_r T - k_1 T = -k_1 g_1(\theta,z,t) & \text{при}\quad r=R_1 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_r T + k_2 T = k_2 g_2(\theta,z,t) & \text{при}\quad r=R_2 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_\theta T - k_3 T = -k_3 g_3(r,z,t) & \text{при}\quad \theta=0 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_\theta T + k_4 T = k_4 g_4(r,z,t) & \text{при}\quad \theta=\theta_0 & \text{(граничное условие)}\\
T = g_5(r,\theta,t) & \text{при}\quad z=0 & \text{(граничное условие)}\\
T = g_6(r,\theta,t) & \text{при}\quad z=l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Функция Грина:

$$
G(r,\xi,\theta,\zeta,z,\eta,t) = \frac{2}{l}\sum_{n,m,p}^{\infty}\frac{\varphi_r(\mu_{mp}r)\varphi_r(\mu_{mp}\xi)\varphi_\theta(\nu_m,\theta)\varphi_\theta(\nu_m,\zeta)}{\|\varphi_r(\mu_{mp}r)\|^2\|\varphi_\theta(\nu_m,\theta)\|^2}\times
$$
$$
\times\sin\frac{\pi n z}{l}\sin\frac{\pi n\eta}{l}\exp[-(\mu_{mp}^2+\pi^2 n^2/l^2)at].
$$

Здесь $n = 1,\ 2,\ \ldots$ и введены следующие обозначения:

$$
\varphi_r(\mu_{mp}r) = \left[\mu_{mp}J_{\nu_m+1}(\mu_{mp}R_1)+\left(k_1-\frac{\nu_m}{R_1}\right)J_{\nu_m}(\mu_{mp}R_1)\right]Y_{\nu_m}(\mu_{mp}r)-
$$
$$
-\left[\mu_{mp}Y_{\nu_m+1}(\mu_{mp}R_1)+\left(k_1-\frac{\nu_m}{R_1}\right)Y_{\nu_m}(\mu_{mp}R_1)\right]J_{\nu_m}(\mu_{mp}r),
$$
$$
\varphi_\theta(\nu_m,\theta) = \cos\nu_m\theta + k_3\frac{\sin\nu_m\theta}{\nu_m};
$$
$$
\|\varphi_r(\mu_{mp}r)\|^2 = \frac{2}{\pi^2\mu_{mp}^2R_1^2}\left\{\tfrac{1}{4}\pi^2R_1^2(\mu_{mp}^2R_2^2+k_2^2R_2^2-\nu_m^2)[\varphi_r(\mu_{mp}R_2)]^2-\right.
$$
$$
\left.-(\mu_{mp}^2R_1^2+k_1^2R_1^2-\nu_m^2)\right\},
$$
$$
\|\varphi_\theta(\nu_m,\theta)\|^2 = \frac{k_4}{2\nu_m^2}\frac{\nu_m^2+k_3^2}{\nu_m^2+k_4^2}+\frac{k_3}{2\nu_m^2}+\frac{\theta_0}{2}\left(1+\frac{k_3^2}{\nu_m^2}\right),
$$

где $J_\nu(\xi)$ и $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя; ν_m — положительные корни тригонометрического уравнения

$$
\frac{\operatorname{tg}\nu_m\theta_0}{\nu_m} = \frac{k_3+k_4}{\nu_m^2-k_3k_4},
$$

а μ_{mp} — положительные корни уравнения

$$
\frac{\mu J_{\nu_m+1}(\mu R_1)+\left(k_1-\frac{\nu_m}{R_1}\right)J_{\nu_m}(\mu R_1)}{\mu J_{\nu_m+1}(\mu R_2)-\left(k_2+\frac{\nu_m}{R_2}\right)J_{\nu_m}(\mu R_2)} = \frac{\mu Y_{\nu_m+1}(\mu R_1)+\left(k_1-\frac{\nu_m}{R_1}\right)Y_{\nu_m}(\mu R_1)}{\mu Y_{\nu_m+1}(\mu R_2)-\left(k_2+\frac{\nu_m}{R_2}\right)Y_{\nu_m}(\mu R_2)}.
$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 169).

1.6. Другие трехмерные нестационарные уравнения

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+f(t)T.$

Это уравнение описывает развитие трехмерных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности при наличии нестационарного объемного тепловыделения, которое пропорционально температуре.

Замена $T(x,y,z,t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr] U(x,y,z,t)$ приводит к обычному уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial U}{\partial t} = a\Delta U$, которое рассматривалось в разд. 1.4.1.

2. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + b_1\frac{\partial T}{\partial x} + b_2\frac{\partial T}{\partial y} + b_3\frac{\partial T}{\partial z} + cT.$

Это уравнение описывает нестационарное поле температуры (концентрации) в движущейся с постоянной скоростью среде при наличии объемного выделения (поглощения) тепла, которое пропорционально температуре.

Замена

$$T(x,y,z,t) = \exp\bigl(A_1x + A_2y + A_3z + Bt\bigr)U(x,y,z,t),$$

где

$$A_1 = -\frac{b_1}{2a},\quad A_2 = -\frac{b_2}{2a},\quad A_3 = -\frac{b_3}{2a},\quad B = c - \frac{1}{4a}\bigl(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\bigr),$$

приводит к обычному уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial U}{\partial t} = a\Delta U$, которое рассматривалось в разд. 1.4.1.

3. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(cz^n\frac{\partial T}{\partial z}\right).$

Это уравнение описывает нестационарные процессы тепло- и массопереноса в неоднородных (анизотропных) средах.

1. При $m \neq 2$, $n \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi,t),\qquad \xi^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{4y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{4z^{2-n}}{c(2-n)^2},$$

где функция $T(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi},\qquad A = \frac{2(4-m-n)}{(2-m)(2-n)}.$$

О решении этого уравнения при различных значения параметра A см. в разд. 1.1.4, 1.1.6, 1.1.8.

2. При $m \neq 2$, $n \neq 2$ существуют решения вида

$$T = T(x,\xi,t),\qquad \xi^2 = \frac{4y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{4z^{2-n}}{c(2-n)^2},$$

где функция $T(x,\xi,t)$ определяется двумерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi},\qquad A = \frac{4-mn}{(2-m)(2-n)}.$$

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial T}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(cz^l \dfrac{\partial T}{\partial z}\right).$

Это уравнение описывает нестационарные процессы тепло- и массопереноса в неоднородных (анизотропных) средах.

При $n \neq 2$, $m \neq 2$, $l \neq 2$ существуют точные решения вида
$$T = T(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-l}}{c(2-l)^2}\right],$$
где функция $T(\xi, t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}, \qquad A = 2\left(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-l}\right) - 1.$$
О решении этого уравнения см. разд. 1.1.4, 1.1.6, 1.1.8.

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x} \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \dfrac{\partial T}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z} \dfrac{\partial T}{\partial z}\right).$

Это уравнение описывает нестационарные процессы тепло- и массопереноса в неоднородных (анизотропных) средах.

При $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ существуют точные решения вида
$$T = T(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left(\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right),$$
где функция $T(\xi, t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}.$$
О решении этого уравнения см. разд. 1.1.8.

6. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial T}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z} \dfrac{\partial T}{\partial z}\right).$

При $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\nu \neq 0$ существуют точные решения вида
$$T = T(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],$$
где функция $T(\xi, t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}, \qquad A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}.$$
О решении этого уравнения см. разд. 1.1.4, 1.1.6, 1.1.8.

7. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \dfrac{\partial T}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z} \dfrac{\partial T}{\partial z}\right).$

При $n \neq 2$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ существуют точные решения вида
$$T = T(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],$$
где функция $T(\xi, t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{n}{2-n}\frac{1}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}.$$
О решении этого уравнения см. разд. 1.1.4, 1.1.6, 1.1.8.

2. Линейные стационарные уравнения тепло- и массопереноса

2.1. Уравнение Лапласа $\Delta T = 0$

Уравнение Лапласа часто встречается в гидро- и аэромеханике, теории упругости, электростатике и других областях механики и физики. В теории тепло- и массопереноса оно описывает стационарное распределение температуры при отсутствии источников тепла в рассматриваемой области.

2.1.1. Двумерный (плоский) случай

1. Уравнение Лапласа в прямоугольной декартовой системе координат x, y имеет вид

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

1.1. Точные решения:

$$\begin{aligned}
&T(x,y) = Ax + By + C,\\
&T(x,y) = A(x^2 - y^2) + Bxy,\\
&T(x,y) = \exp(\pm\mu x)(A\cos\mu y + B\sin\mu y),\\
&T(x,y) = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)\exp(\pm\mu y),\\
&T(x,y) = (A\,\mathrm{sh}\,\mu x + B\,\mathrm{ch}\,\mu x)(C\cos\mu y + D\sin\mu y),\\
&T(x,y) = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)(C\,\mathrm{sh}\,\mu y + D\,\mathrm{ch}\,\mu y),
\end{aligned}$$

где A, B, C, D, μ — произвольные постоянные.

Достаточно общий метод построения точных решений заключается в следующем. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — любая аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ (u и v — вещественные функции вещественных переменных x и y, $i^2 = -1$). Тогда действительная и мнимая части функции f удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta v = 0. \tag{2}$$

Напомним, что необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции f являются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким образом, задавая любые аналитические функции $f(z)$ и выделяя их действительные и мнимые части, в силу равенств (2) можно получать различные точные решения двумерного уравнения Лапласа (1).

1.2. Первая краевая задача для полуплоскости.

На границе $y=0$ области $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$ поддерживается заданное распределение температуры:

$$T = f(x) \qquad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение ($y > 0$):

$$T(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(x_0)\,dx_0}{(x_0 - x)^2 + y^2}.$$

1.3. Вторая краевая задача для полуплоскости.

На границе $y = 0$ области $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$ задается распределение теплового потока:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = f(x) \qquad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$T(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\ln\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2}\,dx_0 + C,$$

где C — произвольная постоянная.

1.4. Первая краевая задача в области $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

На каждой стороне прямоугольника поддерживается свое заданное распределение температуры:

$$\begin{aligned} &T = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad &&T = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,\\ &T = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad &&T = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b. \end{aligned}$$

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$):

$$\begin{aligned} T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}\Bigl[\frac{n\pi}{b}(a-x)\Bigr]\sin\Bigl(\frac{n\pi}{b}y\Bigr) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh}\Bigl(\frac{n\pi}{b}x\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi}{b}y\Bigr) +\\ + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\Bigl(\frac{n\pi}{a}x\Bigr)\operatorname{sh}\Bigl[\frac{n\pi}{a}(b-y)\Bigr] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\Bigl(\frac{n\pi}{a}x\Bigr)\operatorname{sh}\Bigl(\frac{n\pi}{a}y\Bigr), \end{aligned}$$

где коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются формулами

$$\begin{gathered} A_n = \frac{2}{\lambda_n}\int_0^b f_1(\xi)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{b}\Bigr)d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\lambda_n}\int_0^b f_2(\xi)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{b}\Bigr)d\xi,\\ C_n = \frac{2}{\mu_n}\int_0^a f_3(\xi)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{a}\Bigr)d\xi, \quad D_n = \frac{2}{\mu_n}\int_0^a f_4(\xi)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{a}\Bigr)d\xi,\\ \lambda_n = b\operatorname{sh}\Bigl(\frac{n\pi a}{b}\Bigr), \quad \mu_n = a\operatorname{sh}\Bigl(\frac{n\pi b}{a}\Bigr). \end{gathered}$$

1.5. Вторая краевая задача в области $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$.

На каждой стороне прямоугольника поддерживается свое заданное распределение теплового потока:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$):

$$T(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch}\Big[\frac{n\pi}{b}(a-x)\Big] \cos\Big(\frac{n\pi}{b}y\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch}\Big(\frac{n\pi}{b}x\Big) \cos\Big(\frac{n\pi}{b}y\Big) -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \operatorname{ch}\Big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \operatorname{ch}\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big) + K,$$

где коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются формулами (K — произвольная постоянная)

$$A_n = \frac{2}{\lambda_n}\int_0^b f_1(\xi)\cos\Big(\frac{n\pi\xi}{b}\Big)\,d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\lambda_n}\int_0^b f_2(\xi)\cos\Big(\frac{n\pi\xi}{b}\Big)\,d\xi,$$
$$C_n = \frac{2}{\mu_n}\int_0^a f_3(\xi)\cos\Big(\frac{n\pi\xi}{a}\Big)\,d\xi, \quad D_n = \frac{2}{\mu_n}\int_0^a f_4(\xi)\cos\Big(\frac{n\pi\xi}{a}\Big)\,d\xi,$$
$$\lambda_n = n\pi \operatorname{sh}\Big(\frac{n\pi a}{b}\Big), \quad \mu_n = n\pi \operatorname{sh}\Big(\frac{n\pi b}{a}\Big).$$

1.6. Смешанные краевые задачи в области $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$.

1.6а. На двух противоположных сторонах прямоугольника заданы краевые условия первого рода (распределения температуры), а на двух других — условия второго рода (распределения теплового потока):

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad T = g(x) \quad \text{при} \quad y = b,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = h(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = s(y) \quad \text{при} \quad x = a.$$

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$):

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_{ba}} \cos\Big(\frac{\pi n x}{a}\Big) \operatorname{sh}\Big[\frac{\pi n}{a}(b-y)\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda_{ba}} \cos\Big(\frac{\pi n x}{a}\Big) \operatorname{sh}\Big(\frac{\pi n y}{a}\Big) -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b h_n}{\pi n \lambda_{ab}} \operatorname{ch}\Big[\frac{\pi n}{b}(a-x)\Big] \sin\Big(\frac{\pi n y}{b}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b s_n}{\pi n \lambda_{ab}} \operatorname{ch}\Big(\frac{\pi n x}{b}\Big) \sin\Big(\frac{\pi n y}{b}\Big),$$
$$\lambda_{ab} = \operatorname{sh}\Big(\frac{\pi n a}{b}\Big), \qquad \lambda_{ba} = \operatorname{sh}\Big(\frac{\pi n b}{a}\Big),$$

где f_n, g_n, h_n, s_n — коэффициенты Фурье соответствующих функций:

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(\xi)\cos\Big(\frac{\pi n\xi}{a}\Big)\,d\xi, \quad g_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(\xi)\cos\Big(\frac{\pi n\xi}{a}\Big)\,d\xi,$$
$$h_n = \frac{2}{b}\int_0^b h(\xi)\sin\Big(\frac{\pi n\xi}{b}\Big)\,d\xi, \quad s_n = \frac{2}{b}\int_0^b s(\xi)\sin\Big(\frac{\pi n\xi}{b}\Big)\,d\xi.$$

⊙ Литература: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980, стр. 78).

1.6б. На двух соседних сторонах прямоугольника заданы краевые условия первого рода (распределения температуры), а на двух других — условия второго рода (распределения теплового потока):

$$T = f(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad T = g(x) \quad \text{при} \quad y = 0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = h(y) \quad \text{при} \quad x = a, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = s(x) \quad \text{при} \quad y = b,$$

где $f(0) = g(0)$.

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$):

$$T(x,y) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{f}_n}{\operatorname{ch}\omega_{ab}} \operatorname{ch}\Bigl(\omega_{ab}\frac{a-x}{a}\Bigr) \sin\Bigl(\omega_{ab}\frac{y}{a}\Bigr) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{g}_n}{\operatorname{ch}\omega_{ba}} \sin\Bigl(\omega_{ba}\frac{x}{b}\Bigr) \operatorname{ch}\Bigl(\omega_{ba}\frac{b-y}{b}\Bigr) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi h_n}{a(2n+1)\operatorname{ch}\omega_{ab}} \operatorname{sh}\Bigl(\omega_{ab}\frac{x}{a}\Bigr) \sin\Bigl(\omega_{ab}\frac{y}{a}\Bigr) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi s_n}{b(2n+1)\operatorname{ch}\omega_{ba}} \sin\Bigl(\omega_{ba}\frac{x}{b}\Bigr) \operatorname{sh}\Bigl(\omega_{ba}\frac{y}{b}\Bigr),$$
$$\omega_{ab} = \frac{\pi(2n+1)a}{2b}, \qquad \omega_{ba} = \frac{\pi(2n+1)b}{2a},$$

где $\overline{f}_n, \overline{g}_n, h_n, s_n$ — коэффициенты Фурье соответствующих функций:

$$\overline{f}_n = \frac{2}{b}\int_0^b \overline{f}(\xi)\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)}{b}\xi\Bigr]\,d\xi, \quad \overline{g}_n = \frac{2}{a}\int_0^a \overline{g}(\xi)\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)}{a}\xi\Bigr]\,d\xi,$$
$$h_n = \frac{2}{b}\int_0^b h(\xi)\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)}{b}\xi\Bigr]\,d\xi, \quad s_n = \frac{2}{a}\int_0^a s(\xi)\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)}{a}\xi\Bigr]\,d\xi,$$
$$\overline{f}(y) = f(y) - f(0), \quad \overline{g}(x) = g(x) - g(0).$$

⊙ Литература: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980, стр. 78).

2. Уравнение Лапласа в полярной системе координат ρ, φ ($x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$) имеет вид

$$\Delta T \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Bigl(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\Bigr) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} = 0.$$

2.1. Точные решения:

$$T(\rho) = A\ln\rho + B,$$
$$T(\rho,\varphi) = \Bigl(A\rho^m + \frac{B}{\rho^m}\Bigr)(C\cos m\varphi + D\sin m\varphi),$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots;$ A, B, C, D — произвольные постоянные.

2.2. Первая краевая задача в области $0 \leqslant \rho \leqslant R$ или $R \leqslant \rho < \infty$. На границе круга $\rho = R$ $(-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ поддерживается заданное распределение температуры:

$$T = f(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Решение внутренней задачи $(\rho \leqslant R)$:

$$T(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2}\, d\psi.$$

Эту формулу принято называть интегралом Пуассона.

Решение внутренней задачи в виде ряда:

$$T(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\, d\psi,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos(n\psi)\, d\psi, \qquad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin(n\psi)\, d\psi, \qquad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Решение внешней задачи $(\rho \geqslant R)$:

$$T(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2}\, d\psi.$$

Решение внешней задачи в виде ряда:

$$T(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи.

2.3. Вторая краевая задача в области $0 \leqslant \rho \leqslant R$ или $R \leqslant \rho < \infty$. На границе круга $\rho = R$ поддерживается заданное распределение теплового потока:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = f(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Функция $f(\varphi)$ должна удовлетворять условию разрешимости

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Решение внутренней задачи $(\rho \leqslant R)$:

$$T(\rho, \varphi) = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \ln \frac{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2}{R^2}\, d\psi + C,$$

где C — произвольная постоянная (эту формулу принято называть интегралом Дини).

Решение внутренней задачи в виде ряда:

$$T(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) + C,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi,$$

где C — произвольная постоянная.

Решение внешней задачи ($\rho \geqslant R$):

$$T(\rho,\varphi) = -\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\ln\frac{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\psi) + R^2}{\rho^2}\,d\psi + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Решение внешней задачи в виде ряда:

$$T(\rho,\varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) + C,$$

где коэффициенты a_n, b_n определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи, C — произвольная постоянная.

2.4. Третья краевая задача в области $0 \leqslant \rho \leqslant R$ или $R \leqslant \rho < \infty$. На границе круга $\rho = R$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей заданное распределение температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + kT = f(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Решение внутренней задачи ($\rho \leqslant R$):

$$T(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{kR+n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\,d\psi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Решение внешней задачи ($\rho \geqslant R$):

$$T(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{kR-n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи.

2.5. Первая краевая задача в области $R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$.

На границах кольца $\rho = R_1$ и $\rho = R_2$ поддерживаются заданные распределения температуры:

$$
\begin{aligned}
T &= f_1(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho = R_1,\\
T &= f_2(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho = R_2.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
T(\rho,\varphi) = A + B\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) &+ \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^n}(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)&,
\end{aligned}
$$

где коэффициенты A, B, A_n, B_n, C_n, D_n определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
A &= \cancel{\tfrac{1}{2}}\,\frac{a_0^{(1)} - a_0^{(2)}}{\ln R_1 - \ln R_2}, &\qquad B &= \frac{a_0^{(2)}\ln R_1 - a_0^{(1)}\ln R_2}{\ln R_1 - \ln R_2},\\
A_n &= \frac{R_2^n a_n^{(2)} - R_1^n a_n^{(1)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, &\qquad B_n &= \frac{R_2^n b_n^{(2)} - R_1^n b_n^{(1)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}},\\
C_n &= \frac{R_2^n a_n^{(1)} - R_1^n a_n^{(2)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}(R_1 R_2)^n &\qquad D_n &= \frac{R_2^n b_n^{(1)} - R_1^n b_n^{(2)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}\cdot(R_1 R_2)^n
\end{aligned}
$$

Здесь $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ $(i = 1,\, 2)$ — коэффициенты Фурье-функций $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
a_0^{(i)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_i(\psi)\,d\psi,\\
a_n^{(i)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_i(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\\
b_n^{(i)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_i(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots
\end{aligned}
$$

2.6. Вторая краевая задача в области $R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$.

На границах кольца $\rho = R_1$ и $\rho = R_2$ поддерживаются заданные распределения теплового потока:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \rho} &= f_1(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho = R_1,\\
\frac{\partial T}{\partial \rho} &= f_2(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho = R_2.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
T(\rho,\varphi) = B\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) &+ \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^n}(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) + C&,
\end{aligned}
$$

где коэффициенты B, A_n, B_n, C_n, D_n определяются по формулам

$$B = \frac{1}{2}R_1 a_0^{(2)}, \quad A_n = \frac{R_2^{n+1}a_n^{(2)} - R_1^{n+1}a_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}, \quad B_n = \frac{R_2^{n+1}b_n^{(2)} - R_1^{n+1}b_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})},$$

$$C_n = (R_1R_2)^{n+1}\frac{R_1^{n-1}a_n^{(2)} - R_2^{n-1}a_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}, \quad D_n = (R_1R_2)^{n+1}\frac{R_1^{n-1}b_n^{(2)} - R_2^{n-1}b_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})},$$

константы $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ определяются теми же формулами, что и для первой краевой задачи, C — произвольная постоянная.

Замечание. Отметим, что должно выполняться следующее равенство: $a_0^{(2)}R_1 = a_0^{(1)}R_2$, которое является следствием условия разрешимости задачи $\int_{\rho=R_1} f_1\,dS + \int_{\rho=R_2} f_2\,dS = 0$.

3. Область произвольной формы. Метод конформных отображений. Всякую плоскую односвязную область, ограниченную кусочно-гладкой кривой, можно взаимно однозначно отобразить на единичный круг. Первая краевая задача для такой области сводится к первой краевой задаче для круга, которая рассмотрена ранее.

Пусть $\zeta = \zeta(z)$ — аналитическая функция, реализующая это отображение из комплексной области $z = x + iy$ в комплексную область $\zeta = u + iv$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — новые независимые переменные. Учитывая, что действительная и мнимая части аналитических функций удовлетворяют условиям Коши — Римана $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$, имеем

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2}\right).$$

Поэтому при этом преобразовании уравнение Лапласа в плоскости xy переходит в уравнение Лапласа в плоскости uv. Естественно следует преобразовать и граничное условие.

Значительное число конформных отображений (т. е. отображений, осуществляемых аналитическими функциями) для областей различной формы можно найти, например, в книгах М. А. Лаврентьева, Б. В. Шабата (1973) и В. И. Лаврика, В. Н. Савенкова (1970).

2.1.2. Трехмерный случай

1. Уравнение Лапласа в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z имеет вид

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

1.1. Точные решения:

$$T(x, y, z) = Ax + By + Cz + D,$$
$$T(x, y, z) = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2 + Cxy + Dxz + Eyz,$$
$$T(x, y, z) = \cos(\mu_1 x + \mu_2 y)\exp(\pm\mu z),$$

$$T(x,y,z) = \sin(\mu_1 x + \mu_2 y)\exp(\pm\mu z),$$
$$T(x,y,z) = \exp(\mu_1 x + \mu_2 y)\cos(\mu z + A),$$
$$T(x,y,z) = \exp(\pm\mu x)\cos(\mu_1 y + A)\cos(\mu_2 z + B),$$
$$T(x,y,z) = \operatorname{ch}(\mu_1 x)\operatorname{ch}(\mu_2 y)\cos(\mu z + B),$$
$$T(x,y,z) = \operatorname{ch}(\mu_1 x)\operatorname{sh}(\mu_2 y)\cos(\mu z + B),$$
$$T(x,y,z) = \operatorname{ch}(\mu x)\cos(\mu_1 y + A)\cos(\mu_2 z + B),$$
$$T(x,y,z) = \operatorname{sh}(\mu_1 x)\operatorname{sh}(\mu_2 y)\sin(\mu z + B),$$
$$T(x,y,z) = \operatorname{sh}(\mu x)\sin(\mu_1 y + A)\sin(\mu_2 z + B),$$

где A, B, C, D, E, μ_1, μ_2 — произвольные постоянные, $\mu = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$.

1.2. Первая краевая задача для полупространства.

На границе $z = 0$ области $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$ задано распределение температуры:

$$T = f(x,y) \qquad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение ($z > 0$):

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z f(x_0,y_0)\,dx_0\,dy_0}{\left[(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2 + z^2\right]^{3/2}}.$$

1.3. Вторая краевая задача для полупространства.

На границе $z = 0$ области $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$ задано распределение теплового потока:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = f(x,y) \qquad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x_0,y_0)\,dx_0\,dy_0}{\sqrt{(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2 + z^2}} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

1.4. Первая краевая задача для прямоугольного параллелепипеда.

На границах области $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$ заданы распределения температуры:

$$\begin{aligned}
T &= f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, & T &= f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,\\
T &= f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, & T &= f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,\\
T &= f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, & T &= f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z = c.
\end{aligned}$$

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$):

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) = {}&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{mn}^2\operatorname{sh}(\lambda_{mn}^1 x) + f_{mn}^1\operatorname{sh}[\lambda_{mn}^1(a-x)]}{\operatorname{sh}(\lambda_{mn}^1 a)}\sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi n z}{c}\right) +\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{mn}^4\operatorname{sh}(\lambda_{mn}^2 y) + f_{mn}^3\operatorname{sh}[\lambda_{mn}^2(b-y)]}{\operatorname{sh}(\lambda_{mn}^2 b)}\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n z}{c}\right) +\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{mn}^5\operatorname{sh}(\lambda_{mn}^3 z) + f_{mn}^6\operatorname{sh}[\lambda_{mn}^3(c-z)]}{\operatorname{sh}(\lambda_{mn}^3 c)}\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right),
\end{aligned}$$

где постоянные коэффициенты определяются формулами

$$\lambda^1_{mn} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}, \quad \lambda^2_{mn} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{c^2}}, \quad \lambda^3_{mn} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

$$f^i_{mn} = \begin{cases} \dfrac{4}{bc}\displaystyle\int_0^b\int_0^c f_i(y,z)\sin\Bigl(\frac{\pi m y}{b}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n z}{c}\Bigr)\,dy\,dz & \text{при } i = 1,\,2; \\ \dfrac{4}{ac}\displaystyle\int_0^a\int_0^c f_i(x,z)\sin\Bigl(\frac{\pi m x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n z}{c}\Bigr)\,dx\,dz & \text{при } i = 3,\,4; \\ \dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b f_i(x,y)\sin\Bigl(\frac{\pi m x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n y}{b}\Bigr)\,dx\,dy & \text{при } i = 5,\,6. \end{cases}$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 107).

2. Уравнение Лапласа в сферической системе координат $r,\ \theta,\ \varphi$ ($x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$) имеет вид

$$\Delta T \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigl(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\Bigr) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} = 0.$$

2.1. Точные решения:

$$T(r,\theta,\varphi) = \frac{A}{r} + B,$$
$$T(r,\theta,\varphi) = \Bigl(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\Bigr)P_n(\cos\theta),$$
$$T(r,\theta,\varphi) = \Bigl(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\Bigr)P_n^m(\cos\theta)(C\cos m\varphi + D\sin m\varphi),$$

где $n = 0,\,1,\,2,\,\ldots;\ m = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n;\ A,\ B,\ C,\ D$ — произвольные постоянные, $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра, $P_n^m(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 1.4.3).

2.2. Первая краевая задача в области $0 \leqslant r \leqslant R$ или $R \leqslant r < \infty$.

На поверхности сферы $r = R$ поддерживается заданное распределение температуры:

$$T = f(\theta,\varphi) \qquad \text{при} \quad r = R.$$

Решение внутренней задачи ($r \leqslant R$):

$$T(r,\theta,\varphi) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta_0,\varphi_0)\frac{R^2 - r^2}{(r^2 - 2Rr\cos\gamma + R^2)^{3/2}}\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\varphi_0,$$
$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Эту формулу принято называть интегралом Пуассона для сферы.

Решение в виде ряда:

$$T(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\frac{r}{R}\Bigr)^n Y_n(\theta,\varphi),$$
$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$A_{00} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi,$$

$$A_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$B_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos\theta) \sin m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \qquad P_n(x) \text{ — полиномы Лежандра.}$$

Решение внешней задачи ($r \geqslant R$):

$$T(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \frac{r^2 - R^2}{(r^2 - 2Rr\cos\gamma + R^2)^{3/2}} \sin\theta_0\, d\theta_0\, d\varphi_0,$$

где $\cos\gamma$ определяется той же формулой, что и для внутренней задачи.

Решение в виде ряда:

$$T(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi),$$

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи.

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 101).

2.3. Вторая краевая задача в области $0 \leqslant r \leqslant R$ или $R \leqslant r < \infty$. На поверхности сферы $r = R$ поддерживается заданное распределение теплового потока:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = f(\theta, \varphi) \qquad \text{при} \quad r = R.$$

Функция $f(\theta, \varphi)$ должна удовлетворять условию разрешимости

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0.$$

Решение внутренней задачи ($r \leqslant R$):

$$T(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{R}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta) + C,$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются теми же формулами, что и для внутренней первой краевой задачи, C — произвольная постоянная.

Решение внешней задачи ($r \geqslant R$):

$$T(r,\theta,\varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{R}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta),$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются теми же формулами, что и для внутренней первой краевой задачи; произвольная постоянная опущена.

3. Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат ρ, φ, z ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) имеет вид

$$\Delta T \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

3.1. Точные решения:

$$T(\rho,\varphi,z) = \left(A\rho^m + \frac{B}{\rho^m}\right)(C\cos m\varphi + D\sin m\varphi)(\alpha + \beta z),$$
$$T(\rho,\varphi,z) = J_m(\mu\rho)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)\exp(\pm\mu z),$$
$$T(\rho,\varphi,z) = Y_m(\mu\rho)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)\exp(\pm\mu z),$$
$$T(\rho,\varphi,z) = I_m(\mu\rho)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z),$$
$$T(\rho,\varphi,z) = K_m(\mu\rho)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z),$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$; A, B, C, D, α, β, μ — произвольные постоянные, $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ — функции Бесселя, $I_m(\xi)$ и $K_m(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.2. Первая краевая задача для цилиндра ($0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant b$). На боковой поверхности ($\rho = a$) и торцах ($z = 0$, $z = b$) цилиндра поддерживаются заданные распределения температуры:

$$\begin{aligned} T &= f(\varphi,z) &&\text{при}\quad \rho = a,\\ T &= g_1(\rho,\varphi) &&\text{при}\quad z = 0,\\ T &= g_2(\rho,\varphi) &&\text{при}\quad z = b. \end{aligned}$$

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant b$):

$$T(\rho,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_n\left(\dfrac{\pi m\rho}{b}\right)}{I_n\left(\dfrac{\pi m a}{b}\right)}(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi)\sin\left(\frac{\pi m z}{b}\right) +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n\left(\frac{\mu_{mn}\rho}{a}\right)\left(C_{nm}^{(1)}\cos n\varphi + D_{nm}^{(1)}\sin n\varphi\right)\frac{\operatorname{sh}\left[\dfrac{\mu_{mn}(b-z)}{a}\right]}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\mu_{mn}b}{a}\right)} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n\left(\frac{\mu_{mn}\rho}{a}\right)\left(C_{nm}^{(2)}\cos n\varphi + D_{nm}^{(2)}\sin n\varphi\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\mu_{mn}z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\mu_{mn}b}{a}\right)},$$

где постоянные коэффициенты определяются по формулам

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi b(1+\delta_{n0})} \int_0^{2\pi} \int_0^b f(\varphi, z) \cos(n\varphi) \sin\Bigl(\frac{\pi m z}{b}\Bigr)\, d\varphi\, dz,$$

$$B_{nm} = \frac{2}{\pi b} \int_0^{2\pi} \int_0^b f(\varphi, z) \sin(n\varphi) \sin\Bigl(\frac{\pi m z}{b}\Bigr)\, d\varphi\, dz,$$

$$C_{nm}^{(i)} = \frac{2}{\pi a^2 (1+\delta_{n0})[J_n'(\mu_{mn})]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a g_i(\rho, \varphi) \cos(n\varphi) J_n\Bigl(\frac{\mu_{mn}\rho}{a}\Bigr) \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

$$D_{nm}^{(i)} = \frac{2}{\pi a^2 [J_n'(\mu_{mn})]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a g_i(\rho, \varphi) \sin(n\varphi) J_n\Bigl(\frac{\mu_{mn}\rho}{a}\Bigr) \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

$$\delta_{n0} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0, \end{cases} \qquad i = 1,\ 2,$$

$J_n(\rho)$ — функция Бесселя, μ_{mn} — m-й корень уравнения $J_n(\mu) = 0$.

⊙ Литература к разд. 2.1: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980), А. Г. Бутковский (1979), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

2.2. Уравнение Пуассона $\Delta T + \Phi(\mathbf{x}) = 0$

2.2.1. Предварительные замечания. Структура решения

Уравнение Пуассона, как и уравнение Лапласа, часто встречается в теории тепло- и массопереноса, гидро- и аэромеханике, теории упругости, электростатике и других областях механики и физики. Оно описывает стационарное распределение температуры при наличии источников тепла в рассматриваемой области*.

Уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона при $\Phi \equiv 0$.

Решение уравнения Пуассона в области V с однородными граничными условиями на границе S можно записать в виде

$$T(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\, \Phi(\mathbf{x}_0)\, dV_0, \tag{1}$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ — функция Грина, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbf{x}_0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$. Интегрирование в формуле (1) ведется по переменным x_m^0. Функция Грина симметрична относительно аргументов: $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$.

Решение уравнения Пуассона с неоднородными граничными условиями складывается из решения уравнения Пуассона с однородными граничными условиями (1) и решения уравнения Лапласа с неоднородными граничными условиями (эти решения для областей различной формы приведены в разд. 2.1).

---

* Всюду в этом разделе источниковый член $\Phi(\mathbf{x})$ отнесен к коэффициенту температуропроводности.

Решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона с неоднородным граничным условием

$$T = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in S,$$

можно записать в виде

$$T(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\, \Phi(\mathbf{x}_0)\, dV_0 - \int_S f(\mathbf{x}_0) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_0}\, dS_0, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_0}$ — производная функции Грина на границе S, взятая по направлению внешней нормали $\mathbf{n}_0$ к поверхности S.

Далее часто будут рассматриваться только задачи с однородными граничными условиями с указанием функции Грина, которая позволяет находить решение по формулам (1) или (2).

2.2.2. Двумерный (плоский) случай

1. Уравнение Пуассона в прямоугольной декартовой системе координат x, y имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \Phi(x, y) = 0.$$

Элемент объема в формулах (1), (2) в разд. 2.2.1 есть $dV_0 = dx\, dy$.

1.1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Решение:

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_0, y_0) \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\, dx_0\, dy_0.$$

1.2. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

На границе полуплоскости $y = 0$ поддерживается заданное распределение температуры:

$$T = f(x) \qquad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_0, y_0) \ln \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\, dx_0\, dy_0 + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(x_0)\, dx_0}{(x_0 - x)^2 + y^2}.$$

1.3. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

На границе четвертьплоскости $x = 0$, $y = 0$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0,$$
$$T = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}\sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2}}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 130).

1.4. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Первая краевая задача.

На каждой из сторон прямоугольника поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Функция Грина:

$$T(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_m y)\sin(\lambda_n x_0)\sin(\lambda_m y_0)}{\lambda_n^2 + \lambda_m^2},$$
$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \qquad \lambda_m = \frac{\pi m}{b}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 126).

2. Уравнение Пуассона в полярной системе координат ρ, φ $(x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi)$ имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \Phi(\rho, \varphi) = 0.$$

Элемент объема в формулах (1), (2) в разд. 2.2.1 есть $dV_0 = \rho\, d\rho\, d\varphi$.

Область: $0 \leqslant \rho \leqslant R,\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Первая краевая задача.

На границе круга $\rho = R$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Функция Грина для внутренней задачи ($\rho \leqslant R$):

$$G(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\rho} - \ln\left(\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{\rho_*}\right)\right],$$

где

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \rho_* = \sqrt{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2},$$
$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \qquad x_* = \frac{R^2}{\rho_0^2}x_0, \quad y_* = \frac{R^2}{\rho_0^2}y_0.$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 109).

Функция Грина для внутренней задачи в виде рядов ($\rho \leqslant R$):

$$G(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\begin{cases} -\ln\rho + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n\cos[n(\varphi - \varphi_0)] \\ \qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant \rho_0 < \rho \leqslant R, \\ -\ln\rho_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n\cos[n(\varphi - \varphi_0)] \\ \qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant \rho < \rho_0 \leqslant R. \end{cases}$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 127).

3. Область произвольной формы. Метод конформных отображений. Всякую плоскую односвязную область V в плоскости xy, ограниченную кусочно-гладкой кривой, можно с помощью конформного отображения взаимно однозначно отобразить на верхнюю полуплоскость или на единичный круг в плоскости uv. При конформном отображении уравнение Пуассона в плоскости xy переходит в уравнение Пуассона в плоскости uv (при таком преобразовании в уравнении изменится функция Φ и в граничном условии — функция f). Поэтому первая краевая задача для плоской области V сводится к первой краевой задаче для верхней полуплоскости или круга, которые рассмотрены ранее.

Функция Грина:

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\omega(z)-\bar{\omega}(\zeta)}{\omega(z)-\omega(\zeta)}\right|, \qquad z = x+iy, \;\; \zeta = x_0 + iy_0,$$

где $\omega(z)$ — конформное отображение области V в плоскости z на верхнюю полуплоскость в плоскости ζ, черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину.

Значительное число конформных отображений (т. е. осуществляемых аналитическими функциями) областей различной формы на верхнюю полуплоскость можно найти, например, в книгах М. А. Лаврентьева, Б. В. Шабата (1973) и В. И. Лаврика, В. Н. Савенкова (1970).

2.2.3. Трехмерный случай

1. Уравнение Пуассона в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \Phi(x,y) = 0.$$

Элемент объема в формулах (1), (2) в разд. 2.2.1 есть $dV_0 = dx\,dy\,dz$.

1.1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

Решение:

$$T(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(x_0,y_0,z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

1.2. Первая краевая задача в полупространстве.

На границе $z = 0$ области $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$ задано распределение температуры:

$$T = f(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z f(x_0,y_0)\,dx_0\,dy_0}{\left[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+z^2\right]^{3/2}} + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{R_-}-\frac{1}{R_+}\right)\Phi(x_0,y_0,z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$R_- = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$
$$R_+ = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 148).

1.3. Вторая и третья краевые задачи в полупространстве.

На границе $z=0$ области $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, $0\leqslant z<\infty$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\frac{\partial T}{\partial z}+kT=0 \qquad \text{при} \quad z=0.$$

Значению $k=0$ соответствует вторая краевая задача, а $k\neq 0$ — третья краевая задача.

Функция Грина:

$$G(x,y,z,x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\biggl[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+ \\ +\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}- \\ -2\int_{z_0}^{\infty}\frac{\exp[-k(z_0-\xi)]\,d\xi}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+\xi)^2}}\biggr].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 148).

1.4. Первая краевая задача для двугранного угла.

На границах области $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant y<\infty$, $0\leqslant z<\infty$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T=0 \qquad \text{при} \quad y=0,$$
$$T=0 \qquad \text{при} \quad z=0.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\biggl[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}- \\ -\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}- \\ -\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}+ \\ +\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}\biggr].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 148).

1.5. Первая краевая задача для октанта.

На границах области $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{1} \sum_{m=0}^{1} \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^{l+m+n}}{\sqrt{X_l^2 + Y_m^2 + Z_n^2}},$$
$$X_l = x - (-1)^l x_0, \quad Y_m = y - (-1)^m y_0, \quad Z_n = z - (-1)^n z_0.$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 149).

1.6. Первая краевая задача для слоя конечной толщины.

На границах $z = 0$ и $z = L$ области $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant L$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad z = L.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 - 2nL)^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0 - 2nL)^2}} \right].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 151).

1.7. Первая краевая задача для сферы $(x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2)$.

На границе сферы $r = R$ поддерживается постоянная температура

$$T = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0} \frac{1}{r_*} \right),$$

где

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$
$$r_* = \sqrt{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2 + (z - z_*)^2},$$
$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad x_* = \frac{R^2}{r_0^2} x_0, \quad y_* = \frac{R^2}{r_0^2} y_0, \quad z_* = \frac{R^2}{r_0^2} z_0.$$

Элемент объема в формулах (1), (2) в разд. 2.2.1: $dV_0 = r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$.

⊙ Литература к разд. 2.2: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980), А. Г. Бутковский (1979), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

2.3. Уравнение Гельмгольца $\Delta T + \beta T = \Phi(\mathbf{x})$

К уравнению Гельмгольца приводит широкий класс задач, связанных с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, тепловыми, электромагнитными и др.)*.

2.3.1. Предварительные замечания

1. Некоторые определения. При $\Phi = 0$ уравнение Гельмгольца называется однородным, при $\Phi \neq 0$ — неоднородным.

Однородной краевой задачей называется краевая задача для однородного уравнения с однородными краевыми условиями (частным решением однородной краевой задачи является $T = 0$).

Значения параметра $\beta = \beta_n$, при которых существуют нетривиальные (т. е. отличные от тождественного нуля) решения однородной краевой задачи, называются собственными значениями, а соответствующие им решения $T = T_n$ — собственными функциями данной краевой задачи. Далее считается, что область V конечна.

2. Свойства собственных значений и собственных функций.

2.1. Существует бесконечное множество собственных значений $\{\beta_n\}$, которое образует дискретный спектр данной краевой задачи.

2.2. Все собственные значения положительны, за исключением собственных значений второй краевой задачи, для которой существует $\beta_0 = 0$ (соответствующая собственная функция $T_0 = \text{const}$). Собственные значения будем располагать в порядке возрастания $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots$.

2.3. Собственные значения стремятся к бесконечности с возрастанием их номера. Справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\beta_n} = \frac{V_2}{4\pi} \qquad \text{для двумерной области,}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\beta_n^{3/2}} = \frac{V_3}{6\pi^2} \qquad \text{для трехмерной области,}$$

где V_2 — площадь двумерной области, V_3 — объем трехмерной области.

2.4. Собственные функции определены с точностью до постоянного множителя. Собственные функции, соответствующие разным собственным значениям $\beta_n \neq \beta_m$, ортогональны:

$$\int_V T_n T_m \, dv = 0.$$

2.5. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f = f(\mathbf{x})$, удовлетворяющая граничным условиям соответствующей

* Всюду в этом разделе источниковый член $\Phi(\mathbf{x})$ и величина β отнесены к коэффициенту температуропроводности.

краевой задачи, может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям этой краевой задачи:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n, \qquad \text{где} \quad a_n = \frac{1}{\|T_n\|^2} \int_V f T_n\, dv, \quad \|T_n\|^2 = \int_V T_n^2\, dv.$$

Если f суммируема с квадратом, то ряд сходится в среднем.

2.6. Собственные значения первой краевой задачи не возрастают при расширении области.

3. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца с однородными краевыми условиями. Имеются три возможности:

1°. Если параметр β не равен ни одному из собственных значений, то существует решение задачи, определяемое рядом

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\beta - \beta_n} T_n, \quad \text{где} \quad A_n = \frac{1}{\|T_n\|^2} \int_V \Phi T_n\, dv, \quad \|T_n\|^2 = \int_V T_n^2\, dv.$$

2°. Если $\beta = \beta_j$, то условием существования решения неоднородной задачи будет условие ортогональности функции Φ к собственной функции T_j:

$$\int_V \Phi T_j\, dv = 0.$$

Решение в этом случае имеет вид

$$T = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{A_n}{\beta_j - \beta_n} T_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{A_n}{\beta_j - \beta_n} T_n + C T_j, \quad A_n = \frac{1}{\|T_n\|^2} \int_V \Phi T_n\, dv,$$

где $\|T_n\|^2 = \int_V T_n^2\, dv$, C — произвольная постоянная.

3°. Если $\beta = \beta_j$ и $\int_V \Phi T_j\, dv \neq 0$, то краевая задача для неоднородного уравнения не имеет решения.

4. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца с неоднородными краевыми условиями. В случае неоднородных краевых задач делается любая замена зависимой переменой, приводящая к однородным краевым условиям (таких замен существует бесконечно много). Решение преобразованной задачи далее строится по схеме, указанной выше в п. 3.

Далее будут указаны собственные значения и собственные функции наиболее важных однородных краевых задач для уравнения Гельмгольца. Решения соответствующих неоднородных краевых задач строятся методом, указанным в пп. 3, 4.

2.3.2. Двумерный (плоский) случай

1. Однородное уравнение Гельмгольца в прямоугольной декартовой системе координат x, y имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \beta T = 0.$$

1.1. Точные решения:

$$T = (Ax + B)(C\cos\mu y + D\sin\mu y), \quad \beta = \mu^2,$$
$$T = (Ax + B)(C\operatorname{ch}\mu y + D\operatorname{sh}\mu y), \quad \beta = -\mu^2,$$
$$T = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)(Cy + D), \quad \beta = \mu^2,$$
$$T = (A\operatorname{ch}\mu x + B\operatorname{sh}\mu x)(Cy + D), \quad \beta = -\mu^2,$$
$$T = (A\cos\mu_1 x + B\sin\mu_1 x)(C\cos\mu_2 y + D\sin\mu_2 y), \quad \beta = \mu_1^2 + \mu_2^2,$$
$$T = (A\cos\mu_1 x + B\sin\mu_1 x)(C\operatorname{ch}\mu_2 y + D\operatorname{sh}\mu_2 y), \quad \beta = \mu_1^2 - \mu_2^2,$$
$$T = (A\operatorname{ch}\mu_1 x + B\operatorname{sh}\mu_1 x)(C\cos\mu_2 y + D\sin\mu_2 y), \quad \beta = -\mu_1^2 + \mu_2^2,$$
$$T = (A\operatorname{ch}\mu_1 x + B\operatorname{sh}\mu_1 x)(C\operatorname{ch}\mu_2 y + D\operatorname{sh}\mu_2 y), \quad \beta = -\mu_1^2 - \mu_2^2,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

1.2. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Первая краевая задача.

На сторонах прямоугольника поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Собственные значения (их удобно отмечать двойным индексом):

$$\beta_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right),$$

где $n = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$T_{nm} = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \qquad \|T_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

1.3. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Вторая краевая задача.

Стороны прямоугольника теплоизолированы:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, 2, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$T_{nm} = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \qquad \|T_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}(1 + \delta_{n0})(1 + \delta_{m0}),$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

1.4. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Третья краевая задача.

На сторонах прямоугольника происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\frac{\partial T}{\partial x} - k_1 T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} + k_2 T = 0 \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} - k_3 T = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} + k_4 T = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \mu_n^2 + \nu_m^2,$$

где μ_n и ν_m — корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg}(\mu a) = \frac{(k_1 + k_2)\mu}{\mu^2 - k_1 k_2}, \qquad \operatorname{tg}(\nu b) = \frac{(k_3 + k_4)\nu}{\nu^2 - k_3 k_4}.$$

Собственные функции:

$$T_{nm} = (\mu_n \cos \mu_n x + k_1 \sin \mu_n x)(\nu_n \cos \nu_n y + k_3 \sin \nu_n y).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{nm}\|^2 = \frac{\left[\dfrac{a}{2} + \dfrac{(k_1 + k_2)(\mu_n^2 + k_1 k_2)}{(\mu_n^2 + k_1^2)(\mu_n^2 + k_2^2)}\right]}{\sqrt{\mu_n^2 + k_1^2}} \, \frac{\left[\dfrac{b}{2} + \dfrac{(k_3 + k_4)(\nu_m^2 + k_3 k_4)}{(\nu_m^2 + k_3^2)(\nu_m^2 + k_4^2)}\right]}{\sqrt{\nu_m^2 + k_3^2}}.$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 127).

1.5. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Смешанные краевые задачи.

Случай 1. На двух противоположных сторонах прямоугольника поддерживается постоянная температура (равная нулю), а две другие — теплоизолированы:

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right),$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots;\ m = 0, 1, 2, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$T_{nm} = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \qquad \|T_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}(1 + \delta_{m0}),$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

Случай 2. На двух соседних сторонах прямоугольника поддерживается постоянная температура (равная нулю), а две другие — теплоизолированы:

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = a, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2}\right],$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots; m = 0, 1, 2, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$T_{nm} = \sin\left[\frac{\pi(2n+1)x}{2a}\right]\sin\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2b}\right], \qquad \|T_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 128).

2. Однородное уравнение Гельмгольца в полярной системе координат ρ, φ ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \beta T = 0.$$

2.1. Точные решения:

$$T = [AJ_0(\mu\rho) + BY_0(\mu\rho)](C\varphi + D), \quad \beta = \mu^2,$$
$$T = [AI_0(\mu\rho) + BK_0(\mu\rho)](C\varphi + D), \quad \beta = -\mu^2,$$
$$T = [AJ_m(\mu\rho) + BY_m(\mu\rho)](C\cos m\varphi + D\sin m\varphi), \quad \beta = \mu^2,$$
$$T = [AI_m(\mu\rho) + BK_m(\mu\rho)](C\cos m\varphi + D\sin m\varphi), \quad \beta = -\mu^2,$$

где $m = 1,\ 2,\ \ldots;$ A, B, C, D — произвольные постоянные; $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ — функции Бесселя, $I_m(\xi)$ и $K_m(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

2.2. Область: $0 \leqslant \rho \leqslant R$. Первая краевая задача.

На границе круга $\rho = R$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — корни функции Бесселя: $J_n(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$T_{nm}^{(1)} = J_n\bigl(\rho\sqrt{\beta_{nm}}\bigr)\cos n\varphi, \qquad T_{nm}^{(2)} = J_n\bigl(\rho\sqrt{\beta_{nm}}\bigr)\sin n\varphi.$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией:

$$T_{0m}^{(1)} = J_0(\rho\sqrt{\beta_{0m}}).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{nm}^{(k)}\|^2 = \frac{\pi R^2(1+\delta_{n0})}{2\xi_{nm}^2}[J_n'(\xi_{nm})]^2, \qquad k=1,\,2; \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i\neq j. \end{cases}$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 129).

2.3. Область: $0 \leqslant \rho \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Граница круга теплоизолирована:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = 0 \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — корни производной функции Бесселя: $J_n'(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$T_{nm}^{(1)} = J_n(\rho\sqrt{\beta_{nm}})\cos n\varphi, \qquad T_{nm}^{(2)} = J_n(\rho\sqrt{\beta_{nm}})\sin n\varphi.$$

В этих формулах $n = 0, 1, 2, \ldots$; при $n \neq 0$ параметр m принимает значения $m = 1, 2, 3, \ldots$; при $n = 0$ имеется корень $\xi_{00} = 0$ (соответствующая ему собственная функция $T_{00} = 1$).

Собственные функции, обладающие осевой симметрией:

$$T_{0m}^{(1)} = J_0(\rho\sqrt{\beta_{0m}}).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{nm}^{(k)}\|^2 = \frac{\pi^2 R^2(1+\delta_{n0})}{2\xi_{nm}^2}(\xi_{nm}^2 - n^2)[J_n(\xi_{nm})]^2, \quad \|T_{00}\|^2 = \pi R^2,$$

где $k = 1, 2$; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i\neq j. \end{cases}$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 129).

2.4. Область: $0 \leqslant \rho \leqslant R$. Третья краевая задача.

На границе круга $\rho = R$ происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + kT = 0 \qquad \text{при} \qquad \rho = R.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — m-й корень уравнения $\xi J_n'(\xi) + kRJ_n(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$T_{nm}^{(1)} = J_n\big(\rho\sqrt{\beta_{nm}}\,\big)\cos n\varphi, \qquad T_{nm}^{(2)} = J_n\big(\rho\sqrt{\beta_{nm}}\,\big)\sin n\varphi,$$

где $n = 0,\,1,\,2,\,\ldots;\ m = 1,\,2,\,3,\,\ldots$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{nm}^{(1)}\|^2 = \|T_{nm}^{(2)}\|^2 = \frac{\pi R^2(1+\delta_{n0})}{2\xi_{nm}^2}(k^2R^2 + \xi_{nm}^2 - n^2)[J_n(\xi_{nm})]^2,$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 130).

2.5. Область: $R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

На границах кольца поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \xi_{nm}^2, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots, \quad m = 1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

где ξ_{nm} — корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\xi R_1)Y_n(\xi R_2) - J_n(\xi R_2)Y_n(\xi R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$T_{nm}^{(1)} = [J_n(\xi_{nm}\rho)Y_n(\xi_{nm}R_1) - J_n(\xi_{nm}R_1)Y_n(\xi_{nm}\rho)]\cos n\varphi,$$
$$T_{nm}^{(2)} = [J_n(\xi_{nm}\rho)Y_n(\xi_{nm}R_1) - J_n(\xi_{nm}R_1)Y_n(\xi_{nm}\rho)]\sin n\varphi.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{nm}^{(1)}\|^2 = \|T_{nm}^{(2)}\|^2 = \frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi\xi_{nm}^2}\,\frac{J_n^2(\xi_{nm}R_1) - J_n^2(\xi_{nm}R_2)}{J_n^2(\xi_{nm}R_2)}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 130).

2.6. Область: $R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Границы кольца теплоизолированы:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \xi_{nm}^2, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots, \quad m = 1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

где ξ_{nm} — корни трансцендентного уравнения:

$$J_n'(\xi R_1)Y_n'(\xi R_2) - J_n'(\xi R_2)Y_n'(\xi R_1) = 0.$$

При $n = 0$ существует также корень $\xi_{00} = 0$ и соответствующая ему собственная функция $T_{00}^{(1)} = 1$.

Собственные функции:

$$T_{nm}^{(1)} = [J_n(\xi_{nm}\rho)Y_n(\xi_{nm}R_1) - J_n(\xi_{nm}R_1)Y_n(\xi_{nm}\rho)]\cos n\varphi,$$
$$T_{nm}^{(2)} = [J_n(\xi_{nm}\rho)Y_n(\xi_{nm}R_1) - J_n(\xi_{nm}R_1)Y_n(\xi_{nm}\rho)]\sin n\varphi.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{nm}^{(1)}\|^2 = \|T_{nm}^{(2)}\|^2 = \frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi\xi_{nm}^2}\left\{\left(1-\frac{n^2}{R_2^2\xi_{nm}^2}\right)\left[\frac{J_n'(\xi_{nm}R_1)}{J_n'(\xi_{nm}R_2)}\right]^2-\left(1-\frac{n^2}{R_1^2\xi_{nm}^2}\right)\right\},$$
$$\|T_{00}^{(1)}\|^2 = \pi(R_2^2-R_1^2); \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 131).

2.7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$. Первая краевая задача.

На границах сектора поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T=0 \quad \text{при} \quad \rho=R, \qquad T=0 \quad \text{при} \quad \varphi=0, \qquad T=0 \quad \text{при} \quad \varphi=\alpha.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — корни функции Бесселя: $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$T_{nm} = J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\xi_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{nm}\|^2 = \frac{\alpha R^2}{4}\left[J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm})\right]^2.$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 132).

2.8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$. Вторая краевая задача.

Границы сектора теплоизолированы:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}=0 \quad \text{при} \quad \rho=R, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0 \quad \text{при} \quad \varphi=0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0 \quad \text{при} \quad \varphi=\alpha.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — корни функции Бесселя $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$T_{nm} = J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\Big(\xi_{nm}\frac{\rho}{R}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\Big), \qquad T_{00} = 1.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{nm}\|^2 = \frac{\alpha R^2}{4}(1+\delta_{n0})\Big(1-\frac{n^2}{\xi_{nm}^2}\Big)\Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm})\Big]^2, \qquad \|T_{00}\|^2 = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 132).

2.9. Область: $R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$. Первая краевая задача.

На границах кольцевого сектора поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2,$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \alpha.$$

Собственные значения:

$$\beta_{nm} = \xi_{nm}^2,$$

где ξ_{nm} — корни трансцендентного уравнения

$$J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi R_1)Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi R_2) - J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi R_2)Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$T_{nm} = \Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}\rho)Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_1) - J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_1)Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}\rho)\Big]\sin\Big(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\Big).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{nm}\|^2 = \frac{\alpha}{\pi^2\xi_{nm}^2}\frac{\Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_1)\Big]^2 - \Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_2)\Big]^2}{\Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_2)\Big]^2}.$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 133).

2.3.3. Трехмерный случай

1. Однородное уравнение Гельмгольца в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \beta T = 0.$$

1.1. Точные решения:

$$T = (A_1 \cos lx + A_2 \sin lx)(B_1 \cos my + B_2 \sin my)(C_1 z + C_2), \quad \beta = l^2 + m^2;$$

$$T = (A_1 \cos lx + A_2 \sin lx)(B_1 \operatorname{ch} my + B_2 \operatorname{sh} my)(C_1 z + C_2), \quad \beta = l^2 - m^2;$$

$$T = (A_1 \cos lx + A_2 \sin lx)(B_1 \cos my + B_2 \sin my)(C_1 \cos nz + C_2 \sin nz),$$
$$\beta = l^2 + m^2 + n^2;$$

$$T = (A_1 \operatorname{ch} lx + A_2 \operatorname{sh} lx)(B_1 \cos my + B_2 \sin my)(C_1 \cos nz + C_2 \sin nz),$$
$$\beta = -l^2 + m^2 + n^2;$$

$$T = (A_1 \operatorname{ch} lx + A_2 \operatorname{sh} lx)(B_1 \operatorname{ch} my + B_2 \operatorname{sh} my)(C_1 \cos nz + C_2 \sin nz),$$
$$\beta = -l^2 - m^2 + n^2;$$

$$T = (A_1 \operatorname{ch} lx + A_2 \operatorname{sh} lx)(B_1 \operatorname{ch} my + B_2 \operatorname{sh} my)(C_1 \operatorname{ch} nz + C_2 \operatorname{sh} nz),$$
$$\beta = -l^2 - m^2 - n^2,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

1.2. Первая краевая задача для прямоугольного параллелепипеда.

На границах области $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$\begin{aligned} &T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad &T = 0 \quad \text{при} \quad x = a,\\ &T = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad &T = 0 \quad \text{при} \quad y = b,\\ &T = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad &T = 0 \quad \text{при} \quad z = c. \end{aligned}$$

Собственные значения:

$$\beta_{lmn} = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right),$$

где $l, m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$T_{lmn} = \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{c}\right), \qquad \|T_{lmn}\|^2 = \frac{abc}{8}.$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 134).

1.3. Вторая краевая задача для прямоугольного параллелепипеда.

Рассматривается область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Грани параллелепипеда теплоизолированы:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad &\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = a,\\ &\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad &\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b,\\ &\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad &\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = c. \end{aligned}$$

Собственные значения:

$$\beta_{lmn} = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right),$$

где $l, m, n = 0, 1, 2, \ldots$

Собственные функции:

$$T_{lmn} = \cos\left(\frac{\pi l x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi n z}{c}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{lmn}\|^2 = \frac{abc}{8}(1+\delta_{l0})(1+\delta_{m0})(1+\delta_{n0}), \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 134).

1.4. Третья краевая задача для прямоугольного параллелепипеда.

Рассматривается область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. На гранях параллелепипеда происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial x} - k_1 T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad && \frac{\partial T}{\partial x} + k_2 T = 0 \quad \text{при} \quad x = a, \\
&\frac{\partial T}{\partial y} - k_3 T = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad && \frac{\partial T}{\partial y} + k_4 T = 0 \quad \text{при} \quad y = b, \\
&\frac{\partial T}{\partial z} - k_5 T = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad && \frac{\partial T}{\partial z} + k_6 T = 0 \quad \text{при} \quad z = c,
\end{aligned}$$

где все $k_i = \text{const}$.

Собственные значения:

$$\beta_{lmn} = (\mu_l)^2 + (\nu_m)^2 + (\sigma_n)^2,$$

где μ_l, ν_m, σ_n — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg}(\mu a) = \frac{(k_1+k_2)\mu}{\mu^2 - k_1 k_2}, \quad \operatorname{tg}(\nu b) = \frac{(k_3+k_4)\nu}{\nu^2 - k_3 k_4}, \quad \operatorname{tg}(\sigma c) = \frac{(k_5+k_6)\sigma}{\sigma^2 - k_5 k_6}.$$

Собственные функции:

$$T_{lmn} = (\mu_l \cos\mu_l x + k_1 \sin\mu_l x)(\nu_m \cos\nu_m y + k_3 \sin\nu_m y) \times \\ \times (\sigma_n \cos\sigma_n z + k_5 \sin\sigma_n z).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{lmn}\|^2 = \frac{[a + F(\mu_l, k_1, k_2)][b + F(\nu_m, k_3, k_4)][c + F(\sigma_n, k_5, k_6)]}{8(\mu_l^2 + k_1^2)(\nu_m^2 + k_3^2)(\sigma_n^2 + k_5^2)},$$

где

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 2\frac{(\beta+\gamma)(\alpha^2 + \beta\gamma)}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}.$$

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 134).

2. Однородное уравнение Гельмгольца в сферической системе координат r, θ, φ ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \beta T = 0.$$

2.1. Точные решения:

$$T = \frac{1}{r}(A\sin\mu r + B\cos\mu r), \qquad \beta = \mu^2,$$
$$T = \frac{1}{r}(A\,\mathrm{sh}\,\mu r + B\,\mathrm{ch}\,\mu r), \qquad \beta = -\mu^2,$$
$$T = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(\mu r) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi), \quad \beta = \mu^2,$$
$$T = \frac{1}{\sqrt{r}} Y_{n+1/2}(\mu r) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi), \quad \beta = \mu^2,$$
$$T = \frac{1}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(\mu r) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi), \quad \beta = -\mu^2,$$
$$T = \frac{1}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}(\mu r) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi), \quad \beta = -\mu^2,$$

где $n = 1, 2, \ldots$; A, B, A_m, B_m — произвольные постоянные; $P_n^m(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра; $J_\nu(\xi)$, $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя, $I_\nu(\xi)$, $K_\nu(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

2.2. Первая краевая задача для сферы ($r \leqslant R$).

На границе сферы $r = R$ поддерживается постоянная температура (равная нулю):

$$T = 0 \qquad \text{при} \quad r = R.$$

Собственные значения:

$$\beta_{mn} = \frac{\xi_{mn}^2}{R^2},$$

где ξ_{mn} — корни функции Бесселя: $J_{m+1/2}(\xi) = 0$. Отметим, что $J_{m+1/2}(\xi)$ выражаются через элементарные функции, см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1974).

Собственные функции:

$$T_{lmn}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+1/2}\Big(\xi_{mn}\frac{r}{R}\Big) P_m^l(\cos\theta)\cos l\varphi,$$
$$T_{lmn}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+1/2}\Big(\xi_{mn}\frac{r}{R}\Big) P_m^l(\cos\theta)\sin l\varphi,$$

где $P_m^l(t) = (1-t^2)^{l/2}\,\dfrac{d^l}{dt^l}P_m(t)$, $P_m(t)$ — полиномы Лежандра.

Собственные функции, обладающие шаровой симметрией (которые не зависят от θ и φ):

$$T_{00n}^{(1)} = J_{1/2}\Big(\xi_{mn}\frac{r}{R}\Big).$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией (которые не зависят от φ):

$$T_{0mn}^{(1)} = J_{m+1/2}\Big(\xi_{mn}\frac{r}{R}\Big) P_m(\cos\theta).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T^{(1)}_{lmn}\|^2 = \|T^{(2)}_{lmn}\|^2 = \frac{2\pi(1+\delta_{l0})(l+m)!\,R^3}{(2m+1)(m-l)!\,\xi_{mn}}\left[J'_{m+1/2}(\xi_{mn})\right]^2,$$

где δ_{l0} — символ Кронекера.

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 140).

2.3. Вторая краевая задача для сферы ($r \leqslant R$).

Поверхность сферы теплоизолирована:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad \text{при} \quad r = R.$$

Собственные значения:

$$\beta_{00} = 0, \qquad \beta_{mn} = \frac{\xi^2_{mn}}{R^2},$$

где ξ_{mn} — корни трансцендентного уравнения

$$2\xi J'_{m+1/2}(\xi) - J_{m+1/2}(\xi) = 0.$$

Собственные функции:

$$T^{(1)}_{lmn} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+1/2}\Big(\xi_{mn}\frac{r}{R}\Big) P^l_m(\cos\theta)\cos l\varphi, \quad T^{(1)}_{000} = 1,$$

$$T^{(2)}_{lmn} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+1/2}\Big(\xi_{mn}\frac{r}{R}\Big) P^l_m(\cos\theta)\sin l\varphi,$$

где $P^l_m(t)$ — присоединенные функции Лежандра.

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T^{(1)}_{lmn}\|^2 = \|T^{(2)}_{lmn}\|^2 = \frac{2\pi(1+\delta_{l0})(l+m)!\,R^3}{(2m+1)(m-l)!\,\xi^2_{mn}}\left[1 - \frac{m(m+1)}{\xi^2_{mn}}\right]\left[J_{m+1/2}(\xi_{mn})\right]^2,$$

где δ_{l0} — символ Кронекера.

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 140).

2.4. Третья краевая задача для сферы ($r \leqslant R$).

На поверхности сферы происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + kT = 0 \qquad \text{при} \qquad r = R.$$

Собственные значения β_{mn} и собственные функции $T^{(1)}_{lmn}$, $T^{(2)}_{lmn}$ определяются по формулам, приведенным для первой краевой задачи, где ξ_{mn} — корень трансцендентного уравнения:

$$2\xi J'_{m+1/2}(\xi) - (1 - 2Rk) J_{m+1/2}(\xi) = 0.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T^{(i)}_{lmn}\|^2 = \frac{2\pi(1+\delta_{l0})(l+m)!\,R^3}{(2m+1)(m-l)!\,\xi^2_{mn}}\left[1 - \frac{m(m+1)+4Rk(1-Rk)}{\xi^2_{mn}}\right]\left[J_{m+1/2}(\xi_{mn})\right]^2,$$

где $i = 1,\,2$; δ_{l0} — символ Кронекера.

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 140).

3. Однородное уравнение Гельмгольца в цилиндрической системе координат ρ, φ, z ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \beta T = 0.$$

3.1. Точные решения:

$$T = \left[AJ_m\left(\rho\sqrt{\beta}\right) + BY_m\left(\rho\sqrt{\beta}\right)\right](C_1\varphi + D_1)(C_2 z + D_2),$$
$$T = J_m\left(\rho\sqrt{\beta+\mu^2}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)\exp(\pm\mu z),$$
$$T = Y_m\left(\rho\sqrt{\beta+\mu^2}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)\exp(\pm\mu z),$$
$$T = I_m\left(\rho\sqrt{\beta-\mu^2}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z),$$
$$T = K_m\left(\rho\sqrt{\beta-\mu^2}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z),$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$; A, B, C, D, C_1, C_2, D_1, D_2, μ — произвольные постоянные, $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ — функции Бесселя, $I_m(\xi)$ и $K_m(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.2. Первая краевая задача для цилиндра конечной длины.

Рассматривается область $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant h$. На боковой поверхности ($\rho = R$) и торцах ($z = 0$, $z = h$) кругового цилиндра поддерживается заданная температура (равная нулю):

$$T = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad z = h.$$

Собственные значения:

$$\beta_{lmn} = \frac{\pi^2 l^2}{h^2} + \frac{\xi_{mn}^2}{R^2}; \qquad m = 0, 1, \ldots; \quad l, n = 1, 2, \ldots,$$

где ξ_{mn} — корни функции Бесселя: $J_m(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$T_{lmn}^{(1)} = J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)\cos m\varphi\sin\left(\frac{\pi l z}{h}\right),$$
$$T_{lmn}^{(2)} = J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)\sin m\varphi\sin\left(\frac{\pi l z}{h}\right).$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией:

$$T_{m0n}^{(1)} = J_0\left(\xi_{0n}\frac{\rho}{R}\right)\sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{lmn}^{(1)}\|^2 = \|T_{lmn}^{(2)}\|^2 = \frac{\pi R^2 h}{4}(1 + \delta_{m0})\left[J_m'(\xi_{mn})\right]^2,$$

где δ_{m0} — символ Кронекера.

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 136).

3.3. Вторая краевая задача для цилиндра конечной длины.

Рассматривается область $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant h$. Боковая поверхность ($\rho = R$) и торцы ($z = 0$, $z = h$) кругового цилиндра теплоизолированы:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h.$$

Собственные значения:

$$\beta_{000} = 0, \quad \beta_{lmn} = \frac{\pi^2 l^2}{h^2} + \frac{\xi_{mn}^2}{R^2}; \qquad m = 0, 1, \ldots; \quad l, n = 0, 1, \ldots,$$

где ξ_{mn} — корни производной функции Бесселя: $J'_m(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$T_{lmn}^{(1)} = J_m\left(\xi_{mn} \frac{\rho}{R}\right) \cos m\varphi \cos\left(\frac{\pi l z}{h}\right), \qquad T_{000}^{(1)} = 1,$$
$$T_{lmn}^{(2)} = J_m\left(\xi_{mn} \frac{\rho}{R}\right) \sin m\varphi \cos\left(\frac{\pi l z}{h}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T_{lmn}^{(1)}\|^2 = \|T_{lmn}^{(2)}\|^2 = \frac{\pi R^2 h}{4\xi_{mn}^2}(1 + \delta_{m0})(\xi_{mn}^2 - m^2)\left[J_m(\xi_{mn})\right]^2, \quad \|T_{000}^{(1)}\|^2 = \pi R^2 h,$$

где δ_{m0} — символ Кронекера.

Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 136).

3.4. Третья краевая задача для цилиндра конечной длины.

Рассматривается область $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant h$. На боковой поверхности ($\rho = R$) и торцах ($z = 0$, $z = h$) кругового цилиндра происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой, имеющей нулевую температуру:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + k_0 T = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R,$$
$$\frac{\partial T}{\partial z} - k_1 T = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial z} + k_2 T = 0 \quad \text{при} \quad z = h,$$

где все k_i — постоянные.

Собственные значения:

$$\beta_{lmn} = \nu_l^2 + \frac{\xi_{mn}^2}{R^2},$$

где ν_l и ξ_{mn} — корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg}(\nu h) = \frac{(k_1 + k_2)\nu}{\nu^2 - k_1 k_2}, \qquad \xi J'_m(\xi) + R k_0 J_m(\xi) = 0.$$

Собственные функции:

$$T_{lmn}^{(1)} = J_m\left(\xi_{mn} \frac{\rho}{R}\right) \cos m\varphi \, \frac{\nu_l \cos \nu_l z + k_1 \sin \nu_l z}{\sqrt{\nu_l^2 + k_1^2}},$$
$$T_{lmn}^{(2)} = J_m\left(\xi_{mn} \frac{\rho}{R}\right) \sin m\varphi \, \frac{\nu_l \cos \nu_l z + k_1 \sin \nu_l z}{\sqrt{\nu_l^2 + k_1^2}}.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T^{(i)}_{lmn}\|^2 = \frac{\pi R^2}{2\xi^2_{mn}}(1+\delta_{m0})(R^2k_0^2+\xi^2_{mn}-m^2)\times$$
$$\times\big[J_m(\xi_{mn})\big]^2\left[\frac{h}{2}+\frac{(k_1+k_2)(\nu_l^2+k_1k_2)}{(\nu_l^2+k_1^2)(\nu_l^2+k_2^2)}\right],$$

где δ_{m0} — символ Кронекера.

⊙ Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 136).

3.5. Первая краевая задача для полого цилиндра.

Рассматривается область $R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant h$. На боковых поверхностях ($\rho = R_1$, $\rho = R_2$) и торцах ($z = 0$, $z = h$) полого цилиндра конечной длины поддерживается заданная температура (равная нулю):

$$T = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2,$$
$$T = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad z = h.$$

Собственные значения:

$$\beta_{lmn} = \frac{\pi^2 n^2}{h^2} + \xi^2_{lm}; \qquad m = 0,\,1,\,\ldots; \quad l,\,n = 1,\,2,\,\ldots,$$

где ξ_{lm} — корни трансцендентного уравнения

$$J_m(\xi R_1)Y_m(\xi R_2) - J_m(\xi R_2)Y_m(\xi R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$T^{(1)}_{lmn} = [J_m(\xi_{lm}\rho)Y_m(\xi_{lm}R_1) - J_m(\xi_{lm}R_1)Y_m(\xi_{lm}\rho)]\cos m\varphi \sin\Big(\frac{\pi n z}{h}\Big),$$
$$T^{(2)}_{lmn} = [J_m(\xi_{lm}\rho)Y_m(\xi_{lm}R_1) - J_m(\xi_{ml}R_1)Y_m(\xi_{lm}\rho)]\sin m\varphi \sin\Big(\frac{\pi n z}{h}\Big).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|T^{(1)}_{lmn}\|^2 = \|T^{(2)}_{lmn}\|^2 = \frac{h}{\pi \xi_{lm}}(1+\delta_{m0})\frac{\big[J_m(\xi_{lm}R_1)\big]^2 - \big[J_m(\xi_{lm}R_2)\big]^2}{\big[J_m(\xi_{lm}R_2)\big]^2},$$

где δ_{m0} — символ Кронекера.

⊙ Литература к разд. 2.3: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

2.4. Другие уравнения

2.4.1. Уравнения конвективного тепло- и массопереноса

1. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \alpha \dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это уравнение конвективного тепло- и массопереноса, которое описывает стационарное поле температуры (концентрации) в среде, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси x. В частности, оно моделирует конвективно-молекулярный перенос тепла от нагретой пластины, продольно обтекаемой потоком теплопроводной идеальной жидкости. Такая ситуация имеет место при обтекании пластины жидкометаллическим теплоносителем или фильтрационным потоком в зернистой среде.

Далее будем считать, что уравнение записано в безразмерных переменных x, y, которые отнесены к характерному масштабу длины (для плоской пластины длины $2h$ за характерный масштаб длины принимается h).

1. Замена $T(x,y)=\exp\left(\frac{1}{2}\alpha x\right)U(x,y)$ приводит исходное уравнение к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{1}{4}\alpha^2 U,$$

точные решения которого в декартовых и полярных координатах указаны в разд. 2.3.

2. В эллиптических координатах

$$x=\operatorname{ch}\zeta\cos\eta, \qquad y=\operatorname{sh}\zeta\sin\eta$$

широкий класс точных решений (которые стремятся к нулю при $\zeta\to\infty$) исходного уравнения можно представить в виде ряда

$$T=\exp\left(\tfrac{1}{2}\alpha x\right)\sum_{m=0}^{\infty}A_m\operatorname{ce}_m(\eta,-q)\operatorname{Fek}_m(\zeta,-q), \qquad q=-\tfrac{1}{16}\alpha^2.$$

Здесь A_m — произвольные постоянные, $\operatorname{ce}_m(\eta,-q)$ — функции Матье, а $\operatorname{Fek}_m(\zeta,-q)$ — модифицированные функции Матье, которые подробно описаны в книгах: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1967), Н. В. Мак-Лахлан (1953).

3. Рассмотрим первую краевую задачу в верхней полуплоскости $(-\infty<x<\infty,\ 0\leqslant y<\infty)$. Считаем, что на поверхности пластины конечной длины поддерживается постоянная температура T_0, а вдали от пластины среда имеет температуру $T_\infty=\mathrm{const}$:

$$\begin{aligned}&T=T_0 &&\text{при}\quad y=0,\ \ |x|<1,\\ &T\to T_\infty &&\text{при}\quad x^2+y^2\to\infty.\end{aligned}$$

Решение этой задачи в эллиптических координатах ζ, η (см. п. 2) имеет вид

$$T(\eta,\zeta)=T_\infty+(T_0-T_\infty)\exp\left(\tfrac{1}{2}\alpha\cos\eta\operatorname{ch}\zeta\right)\sum_{m=0}^{\infty}D_m\operatorname{ce}_m(\eta,-q)\frac{\operatorname{Fek}_m(\zeta,-q)}{\operatorname{Fer}_m(0,-q)},$$

где

$$D_{2n}=2\frac{\operatorname{ce}_{2n}(0,-q)}{\operatorname{ce}_{2n}(0,q)}A_0^{(2n)},\ \ D_{2n+1}=-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ce}_{2n+1}(0,-q)}{\operatorname{ce}_{2n+1}(0,q)}\alpha B_1^{(2n+1)},\ \ q=-\frac{1}{16}\alpha^2.$$

Здесь $A_0^{(2n)}$, $B_1^{(2n+1)}$ — коэффициенты разложения функций Матье в ряды, приведенные в книге Н. В. Мак-Лахлана (1953).

4. Рассмотрим вторую краевую задачу в верхней полуплоскости $(-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty)$. Считаем, что на поверхности пластины конечной длины задано распределение теплового потока, а вдали от пластины среда имеет постоянную температуру (равную нулю):

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -g(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad |x| < 1,$$
$$T \to 0 \qquad \text{при} \quad x^2 + y^2 \to \infty.$$

Решение этой задачи в декартовых координатах имеет вид

$$T(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g(\xi)\exp\bigl[\tfrac{1}{2}\alpha(x-\xi)\bigr]K_0\Bigl(\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\Bigr)\,d\xi,$$

где $K_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда).

⊙ Литература: П. В. Черпаков (1975, стр. 104), А. А. Борзых, Г. П. Черепанов (1978).

2. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \alpha\dfrac{\partial T}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial T}{\partial y} + \gamma T.$

Это уравнение описывает стационарное поле температуры (концентрации) в движущейся с постоянной скоростью среде при наличии объемного выделения (поглощения) тепла, которое пропорционально температуре.

Замена
$$T(x,y) = \exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\alpha x + \beta y)\bigr]U(x,y)$$

приводит исходное уравнение к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \bigl(\gamma + \tfrac{1}{4}\alpha^2 + \tfrac{1}{4}\beta^2\bigr)U,$$

которое подробно рассматривается в разд. 2.3 (см. также уравнение 2.4.1.1).

3. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \mathrm{Pe}\,(1-y^2)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это уравнение описывает стационарный теплообмен при ламинарном течении жидкости с параболическим профилем скорости в плоском канале. Уравнение записано в безразмерных прямоугольных координатах x, y, которые отнесены к полуширине канала h; $\mathrm{Pe} = Uh/a$ — число Пекле, U — скорость жидкости на оси канала (при $y = 0$). Стенки канала определяются значениями $y = \pm 1$.

1. Точные решения:

$$T(y) = A + By, \tag{1}$$

$$T(x,y) = 12Ax + A\,\mathrm{Pe}\,(6y^2 - y^4) + B, \tag{2}$$

$$T(x,y) = A - \sum_{n=0}^{m} A_n \exp\Bigl(-\frac{\mu_n^2}{\mathrm{Pe}}x\Bigr) f_n(y). \tag{3}$$

Здесь A, B, A_n, μ_n — произвольные постоянные, а функции f_n определяются формулами

$$f_n(y) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\mu_n y^2\bigr)\Phi\bigl(\alpha_n,\ \tfrac{1}{2};\ \mu_n y^2\bigr), \quad \alpha_n = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\mu_n - \tfrac{1}{4}\mu_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}, \tag{4}$$

где $\Phi(\alpha,\beta;\xi) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k}\frac{\xi^k}{k!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция, $(\alpha)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$.

2. Пусть на стенках канала поддерживается постоянная температура, равная нулю при $x<0$ и T_0 при $x>0$. Ввиду симметрии задачи относительно оси x достаточно рассмотреть половину области: $0 \leqslant y \leqslant 1$. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$y=0,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=0; \qquad y=1,\quad T=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0; \\ T_0 & \text{при } x>0; \end{cases}$$
$$x\to -\infty,\quad T\to 0; \qquad x\to\infty,\quad T\to T_0.$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями в области $x>0$ дается рядом (3) при $A=T_0$ и $m=\infty$, где собственные значения μ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\Phi\bigl(\alpha_n,\ \tfrac{1}{2};\ \mu_n\bigr) = 0, \quad \text{где}\quad \alpha_n = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\mu_n - \tfrac{1}{4}\mu_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}.$$

О вычислении коэффициентов A_n в формуле (3) и асимптотиках решения в предельных случаях $\mathrm{Pe}\to 0$ и $\mathrm{Pe}\to\infty$ см. в указанной ниже литературе.

3. Решение (2) описывает распределение температуры вдали от входного сечения в области тепловой стабилизации при заданном постоянном тепловом потоке на стенках канала (при $y=\pm 1$ для $x>0$).

⊙ Литература: L. Graetz (1883), W. Nusselt (1910), Б. С. Петухов (1967), С. О. Лехтмахер (1971), Д. А. Попов (1973), C. A. Deavours (1974), В. С. Аставин, И. О. Королев, Ю. С. Рязанцев (1979), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

4. $$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \mathrm{Pe}\,(1-r^2)\frac{\partial T}{\partial z}.$$

Это уравнение описывает стационарный теплообмен при ламинарном течении жидкости с параболическим (пуазейлевым) профилем скорости в круглой трубе. Уравнение записано в безразмерных цилиндрических координатах r, z, которые отнесены к радиусу трубы R; $\mathrm{Pe} = UR/a$ — число Пекле, U — скорость жидкости на оси трубы (при $r = 0$). Стенки трубы определяются значением $r = 1$.

1. Точные решения:

$$T(r) = A + B\ln r, \tag{1}$$

$$T(r,z) = 16Az + A\,\mathrm{Pe}\,(4r^2 - r^4) + B, \tag{2}$$

$$T(r,z) = A - \sum_{n=0}^{m} A_n \exp\Bigl(-\frac{\mu_n^2}{\mathrm{Pe}}z\Bigr) f_n(r). \tag{3}$$

Здесь A, B, A_n, μ_n — произвольные постоянные, а функции f_n определяются формулами

$$f_n(r) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\mu_n r^2\bigr)\,\Phi\bigl(\alpha_n,\, 1;\, \mu_n r^2\bigr), \quad \alpha_n = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\mu_n - \tfrac{1}{4}\mu_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}, \tag{4}$$

где $\Phi(\alpha,\beta;\xi)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (см. уравнение 2.4.1.3, п. 1).

2. Пусть на стенках трубы поддерживается постоянная температура, равная нулю при $z < 0$ и T_0 при $z > 0$. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \qquad r = 1, \quad T = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0; \\ T_0 & \text{при } z > 0; \end{cases}$$

$$z \to -\infty, \quad T \to 0; \qquad z \to \infty, \quad T \to T_0.$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями в области $z > 0$ дается рядом (3) при $A = T_0$ и $m = \infty$, где собственные значения μ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\Phi\bigl(\alpha_n,\, 1;\, \mu_n\bigr) = 0, \quad \text{где} \quad \alpha_n = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\mu_n - \tfrac{1}{4}\mu_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}.$$

О вычислении коэффициентов A_n в формуле (3) и асимптотиках решения в предельных случаях $\mathrm{Pe} \to 0$ и $\mathrm{Pe} \to \infty$ см. в указанной ниже литературе.

3. Решение (2) описывает распределение температуры вдали от входного сечения в области тепловой стабилизации при заданном постоянном тепловом потоке на стенке трубы (при $r = 1$ для $z > 0$).

⊙ Литература: Б. С. Петухов (1967), С. О. Лехтмахер (1971), C. A. Deavours (1974), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

5. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(y)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Это уравнение описывает стационарный теплообмен при ламинарном течении жидкости с произвольным профилем скорости $f = f(y)$ в плоском канале.

1. Точные решения:

$$T(x,y) = Ax + A\int_{y_0}^{y} (y - \xi) f(\xi)\, d\xi + By + C, \tag{1}$$

$$T(x,y) = B + \sum_{n=0}^{m} A_n \exp(-\beta_n x) w_n(y). \tag{2}$$

Здесь A, B, C, y_0, A_n, β_n — произвольные постоянные, а функции $w_n = w_n(y)$ определяются из линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 w_n}{dy^2} + \left[\beta_n f(y) + \beta_n^2\right] w_n = 0.$$

2. Решение (1) описывает распределение температуры вдали от *входного сечения в области тепловой стабилизации при заданном* постоянном тепловом потоке на стенках канала.

6. $$a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = v_1(x,y)\frac{\partial T}{\partial x} + v_2(x,y)\frac{\partial T}{\partial y}.$$

Уравнение стационарного конвективного тепло- и массопереноса, записанное в декартовой системе координат. Здесь $v_1 = v_1(x,y)$, $v_2 = v_2(x,y)$ — компоненты скорости жидкости, которые считаются известными из решения соответствующей гидродинамической задачи.

1. В плоских задачах конвективного теплообмена жидких металлов, использующих модель идеальной жидкости, и при описании фильтрационных потоков, использующих модель потенциальных течений, компоненты скорости жидкости $v_1(x,y)$ и $v_2(x,y)$ можно выразить через потенциал $\varphi = \varphi(x,y)$ и функцию тока $\psi = \psi(x,y)$ по формулам

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Функция φ определяется путем решения уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$. В конкретных задачах потенциал φ и функцию тока ψ можно найти с помощью методов теории функций комплексного переменного, см. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат (1973) и Л. И. Седов (1966).

Переходя в уравнении конвективного теплообмена от x, y к новым переменным φ, ψ (преобразование Буссинеска) с учетом равенств (1), получим более простое уравнение с постоянными коэффициентами вида 2.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \varphi}. \tag{2}$$

Поскольку преобразование Буссинеска одновременно с приведением исходного уравнения к виду (2) переводит любой потенциально обтекаемый плоский контур в разрез по оси φ, задача теплопереноса при потенциальном обтекании этого тела сводится к задаче теплообмена при продольном обтекании пластины идеальной жидкостью (см. уравнение 2.4.1.1, пп. 3, 4).

2. Асимптотический анализ плоских задач о тепло- и массообмене тел различной формы с ламинарным поступательным и сдвиговым потоками вязкой (и идеальной) несжимаемой жидкости при больших и малых числах Пекле проводился в работах, указанных

ниже. В приближении теплового пограничного слоя решение задачи о теплообмене плоской пластины, продольно обтекаемой поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса, приведено в 1.1.10.51.

⊙ Литература: В. Г. Левич (1959), П. В. Черпаков (1975, стр. 104), А. А. Борзых, Г. П. Черепанов (1978), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

7. $\boldsymbol{a\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\Big)\Big]=v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}.}$

Это уравнение часто встречается в осесимметричных задачах о конвективном тепло- и массообмене твердых частиц, капель и пузырей, движущихся в вязкой несжимаемой жидкости (или обтекаемых жидкостью). Компоненты вектора скорости $v_r=v_r(r,\theta)$, $v_\theta=v_\theta(r,\theta)$ можно выразить через функцию тока $\psi=\psi(r,\theta)$ по формулам

$$v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{1}$$

Асимптотический анализ широкого класса осесимметричных задач о тепло- и массообмене твердых частиц, капель и пузырей различной формы с ламинарным поступательным и сдвиговым потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших и малых числах Пекле $\mathrm{Pe}=UR/a$ проводился в книгах, указанных ниже. В выражение для числа Пекле входят следующие величины: U — характерная скорость (невозмущенная скорость жидкости вдали от частицы в случае поступательного потока), R — характерный размер частицы (радиус для сферической частицы).

Обычно рассматриваются задачи с граничными условиями

$$T=T_0\quad\text{при}\quad r=R,\qquad T\to T_\infty\quad\text{при}\quad r\to\infty, \tag{2}$$

где R — радиус частицы, T_0 — температура ее поверхности, T_∞ — температура вдали от частицы (T_0, $T_\infty=\mathrm{const}$).

Задачи конвективного массопереноса характеризуются большими числами Пекле. При этом часто используется приближение диффузионного пограничного слоя, когда в левой части уравнения учитывается только диффузионный перенос вещества по нормали к поверхности частицы (тангенциальным переносом вещества пренебрегается). Конвективные члены в правой части уравнения частично сохраняются — компоненты скорости жидкости аппроксимируются своими главными членами разложения вблизи межфазной поверхности. Ниже приведены некоторые важные результаты, полученные путем решения исходного уравнения с граничными условиями (2) в приближении диффузионного пограничного слоя.

Частный случай 1. При обтекании сферического пузыря поступательным стоксовым потоком вязкой несжимаемой жидкости функция тока имеет вид

$$\psi(r,\theta)=\frac{1}{2}Ur(r-R)\sin^2\theta.$$

Здесь U — невозмущенная скорость жидкости в набегающем потоке, R — радиус пузыря (значение $\theta = \pi$ соответствует передней критической точке поверхности пузыря).

В этом случае решение уравнения конвективного тепло- и массопереноса с граничными условиями (2), полученное при $\mathrm{Pe} = UR/a \gg 1$ в приближении диффузионного пограничного слоя, дается формулой

$$T(r,\theta) = T_0 + (T_\infty - T_0)\operatorname{erf}\xi, \quad \xi = \sqrt{\tfrac{3}{8}\mathrm{Pe}}\left(\frac{r}{R} - 1\right)\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}},$$

где $\operatorname{erf}\xi$ — функция вероятностей.

Частный случай 2. При обтекании твердой сферической частицы поступательным стоксовым потоком вязкой несжимаемой жидкости функция тока определяется выражением

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{4}U(r-R)^2\left(2 + \frac{R}{r}\right)\sin^2\theta.$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в случае пузыря.

Для твердой частицы решение уравнения конвективного тепло- и массопереноса с граничными условиями (2), полученное при $\mathrm{Pe} = UR/a \gg 1$ в приближении диффузионного пограничного слоя, дается формулой

$$T(r,\theta) = T_0 + (T_\infty - T_0)\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\right]^{-1}\gamma\left(\tfrac{1}{3},\xi\right), \qquad \xi = \frac{\mathrm{Pe}\,(r-R)^3\sin^3\theta}{3R^3\left(\pi - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)},$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, $\gamma(\beta,\xi) = \int_0^\xi e^{-z}z^{\beta-1}\,dz$ — неполная гамма-функция.

⊙ Литература: В. Г. Левич (1959), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), В. В. Дильман, А. Д. Полянин (1988), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

2.4.2. Уравнения тепло- и массопереноса в анизотропных средах

1. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0.$$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса в неоднородной анизотропной среде. Здесь $a_1(x) = ax^n$ и $a_2(y) = by^m$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1. Точные решения (A, B, C — произвольные постоянные):

$$T(x,y) = Ax^{1-n} + By^{1-m} + C,$$
$$T(x,y) = A\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)} - \frac{y^{2-m}}{b(2-m)}\right] + B.$$

Линейная комбинация этих решений также является решением исходного уравнения.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left[b(2-m)^2x^{2-n} + a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} T'_\xi = 0, \qquad A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}. \tag{1}$$

Общее решение уравнения (1) дается формулами

$$T(\xi) = \begin{cases} C_1 \xi^{1-A} + C_2 & \text{при } A \neq 1, \\ C_1 \ln \xi + C_2 & \text{при } A = 1, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. Существуют точные решения в виде произведения двух функций различных аргументов:

$$T(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A_2 — произвольная постоянная)

$$(ax^n \varphi'_x)'_x = -A_2 \varphi, \tag{3}$$

$$(by^m \psi'_y)'_y = A_2 \psi. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) дается формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{\frac{1-n}{2}} \left[C_1 J_\nu \left(\beta x^{\frac{2-n}{2}} \right) + C_2 Y_\nu \left(\beta x^{\frac{2-n}{2}} \right) \right] & \text{при } A_2 > 0, \\ x^{\frac{1-n}{2}} \left[C_1 I_\nu \left(\beta x^{\frac{2-n}{2}} \right) + C_2 K_\nu \left(\beta x^{\frac{2-n}{2}} \right) \right] & \text{при } A_2 < 0, \end{cases}$$

$$\nu = \frac{|1-n|}{2-n}, \qquad \beta = \frac{2}{2-n} \sqrt{\frac{|A_2|}{a}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя; $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Решение уравнения (4) дается формулами

$$\psi(y) = \begin{cases} y^{\frac{1-m}{2}} \left[C_1 J_\sigma \left(\mu y^{\frac{2-m}{2}} \right) + C_2 Y_\sigma \left(\mu y^{\frac{2-m}{2}} \right) \right] & \text{при } A_2 < 0, \\ y^{\frac{1-m}{2}} \left[C_1 I_\sigma \left(\mu y^{\frac{2-m}{2}} \right) + C_2 K_\sigma \left(\mu y^{\frac{2-m}{2}} \right) \right] & \text{при } A_2 > 0, \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{|1-m|}{2-m}, \qquad \mu = \frac{2}{2-m} \sqrt{\frac{|A_2|}{b}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Сумма решений вида (2), соответствующих различным значениям параметра A_2, также будет решением исходного уравнения.

2. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial T}{\partial y}\right)=c.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с постоянным объемным тепловыделением в неоднородной анизотропной среде. Здесь $a_1(x)=ax^n$ и $a_2(y)=by^m$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1. При $n\neq 2$, $m\neq 2$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi=\left[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}. \tag{1}$$

Здесь функция $T=T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}T'_\xi=B, \tag{2}$$

где

$$A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)},\quad B=\frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$T(\xi)=C_1\xi^{1-A}+C_2+\frac{B}{2(A+1)}\xi^2,\qquad A\neq\pm1,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2. Замена

$$T(x,y)=U(x,y)+\frac{c}{a(2-n)}x^{2-n},$$

приводит к однородному уравнению вида 2.4.2.1:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial T}{\partial y}\right)=cT.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с линейным источником в неоднородной анизотропной среде.

1. При $n\neq 2$, $m\neq 2$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi=\left[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $T=T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}T'_\xi=BT, \tag{1}$$

где

$$A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)},\quad B=\frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$T(\xi)=\xi^{\frac{1-A}{2}}\left[C_1J_\nu\left(\xi\sqrt{|B|}\right)+C_2Y_\nu\left(\xi\sqrt{|B|}\right)\right]\quad\text{при } B<0,$$
$$T(\xi)=\xi^{\frac{1-A}{2}}\left[C_1I_\nu\left(\xi\sqrt{B}\right)+C_2K_\nu\left(\xi\sqrt{B}\right)\right]\qquad\text{при } B>0,$$

где $\nu = \frac{1}{2}|1 - A|$; C_1, C_2 — произвольные постоянные; $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя; $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2. Существуют точные решения в виде произведения двух функций различных аргументов:

$$T(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A_1 — произвольная постоянная)

$$(ax^n \varphi'_x)'_x = A_1\varphi, \qquad (by^m \psi'_y)'_y = (c - A_1)\psi. \tag{2}$$

Решения уравнений (2) выражаются через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя), см. уравнение 2.4.2.1, п. 3.

3. Существуют точные решения в виде суммы двух функций различных аргументов:

$$T(x,y) = f(x) + g(y),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A_2 — произвольная постоянная)

$$(ax^n f'_x)'_x - cf = A_2, \qquad (by^m g'_y)'_y - cg = -A_2. \tag{3}$$

Решения уравнений (3) выражаются через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя).

4. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x+k)^n \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[b(y+s)^m \frac{\partial T}{\partial y}\right] = c.$

Преобразование $\zeta = x + k$, $\eta = y + s$ приводит к уравнению вида 2.4.2.2:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(a\zeta^n \frac{\partial T}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(b\eta^m \frac{\partial T}{\partial \eta}\right) = c.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x+k)^n \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[b(y+s)^m \frac{\partial T}{\partial y}\right] = cT.$

Преобразование $\zeta = x + k$, $\eta = y + s$ приводит к уравнению вида 2.4.2.3:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(a\zeta^n \frac{\partial T}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(b\eta^m \frac{\partial T}{\partial \eta}\right) = cT.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x} \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса в неоднородной анизотропной среде. Здесь $a_1(x) = ae^{\beta x}$ и $a_2(y) = be^{\mu y}$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1. Точные решения (A, B, C — любые):

$$T(x,y) = Ae^{-\beta x} + Be^{-\mu y} + C,$$

$$T(x,y) = \frac{A}{a\beta^2}(\beta x + 1)e^{-\beta x} - \frac{A}{b\mu^2}(\mu y + 1)e^{-\mu y} + B.$$

2. Существуют точные решения в виде произведения двух функций различных аргументов:

$$T(x,y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A_2 — произвольная постоянная)

$$(ae^{\beta x}\varphi'_x)'_x = -A_2\varphi, \tag{2}$$
$$(be^{\mu y}\psi'_y)'_y = A_2\psi. \tag{3}$$

Решение уравнения (2) дается формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\beta x/2}\big[C_1 J_1\big(ke^{-\beta x/2}\big) + C_2 Y_1\big(ke^{-\beta x/2}\big)\big] & \text{при } A_2 > 0, \\ e^{-\beta x/2}\big[C_1 I_1\big(ke^{-\beta x/2}\big) + C_2 K_1\big(ke^{-\beta x/2}\big)\big] & \text{при } A_2 < 0, \end{cases}$$

где $k = -\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{|A_2|}{a}}$; C_1, C_2 — произвольные постоянные; $J_1(z)$, $Y_1(z)$ — функции Бесселя; $I_1(z)$, $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Решение уравнения (3) дается формулами

$$\psi(y) = \begin{cases} e^{-\mu y/2}\big[C_1 J_1\big(se^{-\mu y/2}\big) + C_2 Y_1\big(se^{-\mu y/2}\big)\big] & \text{при } A_2 < 0, \\ e^{-\mu y/2}\big[C_1 I_1\big(se^{-\mu y/2}\big) + C_2 K_1\big(se^{-\mu y/2}\big)\big] & \text{при } A_2 > 0, \end{cases}$$

где $s = -\frac{2}{\mu}\sqrt{\frac{|A_2|}{b}}$; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Сумма решений вида (1), соответствующих различным значениям параметра A_2, также будет решением исходного уравнения.

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\right) = c.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с постоянным объемным тепловыделением в неоднородной анизотропной среде. Здесь $a_1(x) = ae^{\beta x}$ и $a_2(y) = be^{\mu y}$ — главные коэффициенты температуропроводности.

Замена

$$T(x,y) = U(x,y) - \frac{c}{a\beta^2}(\beta x + 1)e^{-\beta x}$$

приводит к однородному уравнению вида 2.4.2.6:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0.$$

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\right) = cT.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с линейным источником в неоднородной анизотропной среде.

1. При $\beta\mu \neq 0$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi}T'_\xi = AT, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}.$$

О решении этого уравнения см. в 2.4.2.3, п. 1.

2. Исходное уравнение допускает решения в виде произведения (и суммы) двух функций различных аргументов. Подробнее об этом см. в 2.4.2.9 при $f(x) = ae^{\beta x}$ и $g(y) = be^{\mu y}$.

9. $\boldsymbol{\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\dfrac{\partial T}{\partial y}\right] = \beta T.}$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с источником в неоднородной анизотропной среде. Здесь $f = f(x)$ и $g = g(y)$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1. Существуют точные решения в виде произведения двух функций различных аргументов:

$$T(x,y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} &(f\varphi'_x)'_x = A\varphi, && f = f(x),\\ &(g\psi'_y)'_y = (\beta - A)\psi, && g = g(y). \end{aligned} \tag{2}$$

Сумма решений вида (1), соответствующих различным значениям параметра A в (2), также будет решением исходного уравнения.

2. Существуют точные решения в виде суммы двух функций различных аргументов:

$$T(x,y) = \Phi(x) + \Psi(y),$$

где $\Phi(x)$ и $\Psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (C — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} &(f\Phi'_x)'_x - \beta\Phi = C, && f = f(x),\\ &(g\Psi'_y)'_y - \beta\Psi = -C, && g = g(y). \end{aligned}$$

В частном случае $\beta = 0$ решение этих уравнений можно записать в виде:

$$\Phi(x) = C\int \frac{x\,dx}{f(x)} + A_1\int \frac{dx}{f(x)} + B_1,$$
$$\Psi(y) = -C\int \frac{y\,dy}{g(y)} + A_2\int \frac{dy}{g(y)} + B_2,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f_1(x)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[f_2(y)\dfrac{\partial T}{\partial y}\right]+\dfrac{\partial}{\partial z}\left[f_3(z)\dfrac{\partial T}{\partial z}\right]=\beta T+\mu.$

Трехмерное линейное уравнение теории тепло- и массопереноса с источником в неоднородной анизотропной среде. Здесь $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(y)$ и $f_3 = f_3(z)$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Для функций $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(y)$, $f_3 = f_3(z)$ степенного и экспоненциального вида о некоторых точных решениях этого уравнения см. в 4.2.2.2–4.2.2.6 при $f(T) = \beta T + \mu$.

2°. При $\mu = 0$ существуют решения в виде произведения и суммы функций различных аргументов $T(x, y, z) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$ и $T(x, y, z) = \psi_1(x) + \psi_2(y) + \psi_3(z)$.

3. Нелинейные нестационарные уравнения тепло- и массопереноса

3.1. Уравнения с одной пространственной переменной

3.1.1. Уравнения, содержащие степенные функции

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT(1-T).$

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова — Фишера.

Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии. Оно описывает, например, массоперенос в двухкомпонентной неподвижной смеси при наличии объемной химической реакции квазипервого порядка. Кинетическая функция $f(T) = aT(1-T)$ моделирует также автокаталитическое цепное превращение в теории горения.

Частный случай уравнения 3.1.1.3 при $m=2$.

1. Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = \bigl[1 + C\exp\bigl(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\bigr)\bigr]^{-2},$$
$$T(x,t) = \bigl[-1 + C\exp\bigl(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\bigr)\bigr]^{-2},$$
$$T(x,t) = \frac{1 + 2C\exp\bigl(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\bigr)}{\bigl[1 + C\exp\bigl(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\bigr)\bigr]^2}.$$

О точных решениях см. также п. 2 уравнения 3.1.1.3.

2. Замена $U = 1 - T$ приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_1 = -a$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - aU(1-U).$$

⊙ Литература: В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987).

2. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - T(1-T)(a-T).$

Частный случай уравнения 3.1.1.4 при $m=2$.

1. Имеются три стационарных однородных решения: $T = T_k$, где $T_1 = 0$, $T_2 = 1$, $T_3 = a$. Стационарное неоднородное решение задается неявно (A, B — любые):

$$\int \frac{dT}{\sqrt{\frac{1}{4}T^4 - \frac{1}{3}(a+1) + \frac{1}{2}aT^2 + A}} = \pm x + B.$$

2. Точные нестационарные решения (A, B, C — любые):

$$T(x,t) = \frac{1}{1 + A\exp\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}(2a-1)t\right]},$$
$$T(x,t) = \frac{a}{1 + A\exp\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\,x + \frac{1}{2}a(2-a)t\right]},$$
$$T(x,t) = \frac{A\exp\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{2}(1-a^2)t\right] + a}{A\exp\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{2}(1-a^2)t\right] + 1},$$
$$T(x,t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{th}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,x + \tfrac{1}{4}(1-2a)t + A\right],$$
$$T(x,t) = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{th}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,ax + \tfrac{1}{4}a(a-2)t + A\right],$$
$$T(x,t) = \tfrac{1}{2}(1+a) + \tfrac{1}{2}(1-a)\,\mathrm{th}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x + \tfrac{1}{4}(1-a^2)t + A\right],$$
$$T(x,t) = \frac{2a}{(1+a) - (1-a)\,\mathrm{th}\left[\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{4}(1-a^2)t + A\right]},$$
$$T(x,t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{cth}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,x + \tfrac{1}{4}(1-2a)t + A\right],$$
$$T(x,t) = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{cth}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,ax + \tfrac{1}{4}a(a-2)t + A\right],$$
$$T(x,t) = \tfrac{1}{2}(1+a) + \tfrac{1}{2}(1-a)\,\mathrm{cth}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x + \tfrac{1}{4}(1-a^2)t + A\right],$$
$$T(x,t) = \frac{2a}{(1+a) - (1-a)\,\mathrm{cth}\left[\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{4}(1-a^2)t + A\right]},$$
$$T(x,t) = \frac{A\exp(z_1) + aB\exp(z_2)}{A\exp(z_1) + B\exp(z_2) + C},$$
$$z_1 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \left(\tfrac{1}{2} - a\right)t, \quad z_2 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,ax + a\left(\tfrac{1}{2}a - 1\right)t.$$

3. Укажем два преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения. Замена $U = 1 - T$ приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_1 = 1 - a$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - U(1-U)(1-a-U).$$

Преобразование

$$W(z,\tau) = 1 - \frac{1}{a}T(x,t), \quad \tau = a^2 t, \quad z = ax$$

приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_2 = 1 - a^{-1}$:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - W(1-W)\left(1 - \frac{1}{a} - W\right).$$

Поэтому если функция $T_1 = T(x,t;a)$ является решением, то функции

$$T_2 = 1 - T\left(x,t;\,1-a\right),$$
$$T_3 = a - aT\left(ax, a^2 t;\,1 - a^{-1}\right)$$

также будут решениями исходного уравнения. Сказанное позволяет «размножать» точные решения.

⊙ Литература: T. Kawahara, M. Tanaka (1983), N. H. Ibragimov (1994), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

2a. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha T(\beta - T)(\gamma - T).$

Частный случай уравнения 3.1.1.4 при $m = 2$, $a = -\alpha\beta\gamma$, $b = \alpha(\beta + \gamma)$, $c = -\alpha$.

1. Однопараметрические точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = \frac{\beta}{1 + C\exp\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,\beta x + \frac{1}{2}\alpha\beta(2\gamma - \beta)t\right]},$$

$$T(x,t) = \beta\frac{C\exp\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,(\beta - \gamma)x + \frac{1}{2}\alpha(\beta^2 - \gamma^2)t\right] + \gamma}{C\exp\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,(\beta - \gamma)x + \frac{1}{2}\alpha(\beta^2 - \gamma^2)t\right] + \beta}.$$

Второе решение можно записать в следующем виде:

$$T(x,t) = \beta\frac{(C + \gamma) + (C - \gamma)\,\mathrm{th}\,z}{(C + \beta) + (C - \beta)\,\mathrm{th}\,z} = \beta\frac{(C - \gamma) + (C + \gamma)\,\mathrm{cth}\,z}{(C - \beta) + (C + \beta)\,\mathrm{cth}\,z},$$

где $z = \pm\frac{1}{4}\sqrt{2\alpha}\,(\beta - \gamma)x + \frac{1}{4}\alpha(\beta^2 - \gamma^2)t$.

2. Двухпараметрическое точное решение (A, B, C — любые):

$$T(x,t) = \frac{A\beta\exp(z_1) + \gamma B\exp(z_2)}{A\exp(z_1) + B\exp(z_2) + C},$$

где

$$z_1 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,\beta x + \tfrac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 2\gamma)t, \quad z_2 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,\gamma x + \tfrac{1}{2}\alpha\gamma(\gamma - 2\beta)t.$$

Одну из констант A, B, C можно положить равной ± 1.

3. При $\alpha > 0$ преобразование $T = \beta U$, $t = \alpha\beta^2\tau$, $x = \pm\sqrt{\alpha}\,\beta\xi$ приводит к уравнению 3.1.1.2 относительно $U(\xi, \tau)$, где $a = \gamma/\beta$.

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT + bT^m.$

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова.

Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии. Например, оно описывает массоперенос в неподвижной среде при протекании двух параллельных объемных химических реакций с линейной и нелинейной кинетическими функциями.

1. Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = \left[\beta + C\exp(\omega t \pm \mu x)\right]^{\frac{2}{1-m}}, \qquad (1)$$

$$T(x,t) = \left[-\beta + C\exp(\omega t \pm \mu x)\right]^{\frac{2}{1-m}}, \qquad (2)$$

где параметры ω, μ, β определяются по формулам

$$\omega = \frac{a(1 - m)(m + 3)}{2(m + 1)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{a(1 - m)^2}{2(m + 1)}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

2. Решения (1), (2) являются частными случаями более широкого класса решений типа бегущей волны

$$T = T(z), \quad z = x + \sigma t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$T''_{zz} - \sigma T'_z + aT + bT^m = 0. \qquad (3)$$

Точное решение уравнения (3) при

$$\sigma = 1, \quad a = \frac{2(m+1)}{(m+3)^2} \qquad (m \neq \pm 1,\, m \neq -3)$$

можно записать в параметрическом виде

$$z = \frac{m+3}{m-1} \ln\Big[kC_1^{1-m} \frac{m-1}{m+3} \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 \pm \tau^{m+1}}} + C_2\Big], \qquad b = \mp\frac{m+1}{2k^2},$$

$$T = C_1^2 \tau \Big[kC_1^{1-m} \frac{m-1}{m+3} \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 \pm \tau^{m+1}}} + C_2\Big]^{\frac{2}{m-1}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, τ — параметр.

Уравнение (3) заменой $w(T) = T'_z$ приводится к уравнению Абеля

$$ww'_T - \sigma w + aT + bT^m = 0. \qquad (4)$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведены точные решения уравнений (3), (4) для некоторых пар параметров m, a ($\sigma = 1$, b — любое).

⊙ Литература: В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT + bT^m + cT^{2m-1}$.

Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии.

1. Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = \big[\beta + C\exp(\omega t + \mu x)\big]^{\frac{1}{1-m}}, \qquad (1)$$

где параметры β, ω, μ определяются путем решения системы алгебраических уравнений

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0, \qquad (2)$$
$$\mu^2 - (1-m)\omega + a(1-m)^2 = 0, \qquad (3)$$
$$\mu^2 - \omega + (1-m)[2a + (b/\beta)] = 0. \qquad (4)$$

Квадратное уравнение (2) для β решается независимо. В общем случае система (2)–(4) дает четыре набора искомых параметров, которым отвечают четыре точных решения исходного уравнения.

2. Решение (1) является частным случаем более широкого класса решений типа бегущей волны

$$T = T(z), \quad z = x + \sigma t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$T''_{zz} - \sigma T'_z + aT + bT^m + cT^{2m-1} = 0. \qquad (5)$$

Замена $w(T) = T'_z$ приводит (5) к уравнению Абеля

$$ww'_T - \sigma w + aT + bT^m + cT^{2m-1} = 0,$$

общие решения которого для некоторых m (на параметры a, b, c накладываются ограничения) приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT^{m-1} + bmT^m - mb^2T^{2m-1}.$

Точные решения типа бегущей волны

$$T = T(z), \quad z = x + \omega t$$

описываются автономным уравнением

$$T''_{zz} - \omega T'_z + aT^{m-1} + bmT^m - mb^2T^{2m-1} = 0. \tag{1}$$

Можно показать, что при $\omega = 1$ однопараметрическое семейство решений уравнения (1) удовлетворяет уравнению первого порядка

$$T'_z = T - bT^m + \frac{a}{mb}. \tag{2}$$

Интегрируя (2), получим решение в неявном виде (A — любое):

$$\int \frac{dT}{a + mbT - mb^2T^m} = \frac{1}{mb}z + A. \tag{3}$$

В частном случае $a = 0$ из формулы (3) имеем

$$T(z) = \bigl\{C \exp\bigl[(1-m)z\bigr] + b\bigr\}^{\frac{1}{1-m}},$$

где C — произвольная постоянная.

5а. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta\dfrac{\partial T}{\partial x} + aT + bT^m + cT^{2m-1}.$

Замена $t = \tau + x/\beta$ приводит к уравнению 3.1.1.4 относительно $T(x, \tau)$.

6. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Уравнение Бюргерса.

1. Точные решения (A, B, ω — любые):

$$T(x,t) = \omega + \frac{2}{x + \omega t + A},$$
$$T(x,t) = \frac{4x + 2A}{x^2 + Ax + 2t + B},$$
$$T(x,t) = \frac{6(x^2 + 2t + A)}{x^3 + 6xt + 3Ax + B},$$
$$T(x,t) = \frac{2\omega}{1 + A\exp(-\omega^2 t - \omega x)},$$

$$T(x,t) = -\omega + A\frac{\exp[A(x-\omega t)] - B}{\exp[A(x-\omega t)] + B},$$
$$T(x,t) = -\omega + 2A\,\mathrm{th}\big[A(x-\omega t) + B\big],$$
$$T(x,t) = \frac{\omega}{\omega^2 t + A}\left[2\,\mathrm{th}\left(\frac{\omega x + B}{\omega^2 t + A}\right) - \omega x - B\right],$$
$$T(x,t) = -\omega + 2A\,\mathrm{tg}\big[A(\omega t - x) + B\big],$$
$$T(x,t) = \frac{2\omega\cos(\omega x + A)}{B\exp(\omega^2 t) + \sin(\omega x + A)},$$
$$T(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi(t+\omega)}}\exp\left[-\frac{(x+A)^2}{4(t+\omega)}\right]\left[B + A\,\mathrm{erf}\left(\frac{x+A}{2\sqrt{t+\omega}}\right)\right]^{-1},$$

где $\mathrm{erf}\,z \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-\xi^2)\,d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок).

Другие решения можно получить по формуле (преобразование Хопфа — Коула)

$$T(x,t) = \frac{2}{U}\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{1}$$

где $U = U(x,t)$ — решение линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{2}$$

которое рассматривалось в разд. 1.1.1.

2. Область: $-\infty < x < +\infty$. В неограниченной области задано первоначальное распределение температуры:

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x}\ln F(x,t),$$

где

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} f(\xi')\,d\xi'\right]d\xi.$$

3. Уравнение Бюргерса связано с линейным уравнением теплопроводности (2) преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{2}UT = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial (UT)}{\partial x} = 0.$$

Это преобразование используется при решении конкретных краевых задач.

⊙ Литература: О. В. Руденко, С. И. Солуян (1975), N. H. Ibragimov (1994).

7. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Растяжение независимых переменных по формулам $x = \frac{a}{b}z$, $t = \frac{a}{b^2}\tau$ приводит к уравнению 3.1.1.6:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + T\frac{\partial T}{\partial z}.$$

8. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT^m\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Точное решение (C, ω — любые):

$$T(x,t) = \left[C\exp\left(-\frac{\omega m}{a}z\right) - \frac{b}{\omega(m+1)}\right]^{-1/m}, \qquad z = x + \omega t.$$

Более широкое семейство решений типа бегущей волны см. в 3.1.4.7 при $f(T) = bT^m$.

2. Существуют точные решения вида

$$T(\xi,t) = t^{-\frac{1}{2m}}\varphi(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

9. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bT^m + ct + s)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.8 при $f(T) = bT^m$, $g(t) = ct + s$.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \frac{1}{2}ct^2 + st$, получим уравнение вида 3.1.1.8:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + bT^m\frac{\partial T}{\partial z}.$$

10. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bT^m + ct^k)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.8 при $f(T) = bT^m$, $g(t) = ct^k$.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{c}{k+1}t^{k+1}$, получим уравнение вида 3.1.1.8:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + bT^m\frac{\partial T}{\partial z}.$$

11. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2.$

1. Точные решения (A, B, C, ω — произвольные постоянные):

$$T(x) = \frac{a}{b}\ln|Ax + B| + C,$$
$$T(x,t) = A^2bt \pm Ax + B,$$
$$T(x,t) = -\frac{(x+A)^2}{4bt} - \frac{a}{2b}\ln t + B,$$

$$T(x,t) = \frac{a}{b}\ln|x^2 + 2at + Ax + B| + C,$$
$$T(x,t) = \frac{a}{b}\ln|x^3 + 6axt + Ax + B| + C,$$
$$T(x,t) = \frac{a}{b}\ln|x^4 + 12ax^2t + 12a^4t^2 + A| + B,$$
$$T(x,t) = -\frac{a^2\omega^2}{b}t + \frac{a}{b}\ln|\cos(\omega x + A)| + B.$$

2. Замена
$$T(x,t) = \frac{a}{b}\ln|u(x,t)|$$
приводит к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
которое рассматривается в разд. 1.1.1.

12. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + cT + s.}$

Частный случай уравнения 3.1.4.10 при $f(t) = b$, $g(t) = c$, $h(t) = s$.

13. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + bcT^2 + sT + k.}$

Частный случай уравнения 3.1.4.11 при $f, g, h = \text{const}$.

Точные решения:
$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\big), \qquad b < 0, \tag{1}$$
где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка
$$\varphi'_t = bc\varphi^2 + s\varphi + k, \tag{2}$$
$$\psi'_t = (2bc\varphi + s - ac)\psi. \tag{3}$$

Решения системы уравнений (2), (3) описываются следующими формулами (C_1, C_2 — любые):
$$\varphi(t) = \lambda + \frac{2bc\lambda + s}{C_1\exp\big[-(2bc\lambda + s)t\big] - bc},$$
$$\psi(t) = \frac{C_1C_2\exp\big[-(2bc\lambda + s + ac)t\big]}{\big\{C_1\exp\big[-(2bc\lambda + s)t\big] - bc\big\}^2},$$
где $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ — корни квадратного уравнения
$$bc\lambda^2 + s\lambda + k = 0.$$

О более сложных решениях, содержащих гиперболические и тригонометрические функции по переменной x, см. работы В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1988, 1989) и уравнение 3.1.4.11 при f, g, $h = \text{const}$.

14. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + cT^2 + st^nT + kt^m.$

Частный случай уравнения 3.1.4.11 при $f = \text{const}$, $g = st^n$, $h = kt^m$.

15. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + b\dfrac{\partial T}{\partial x} + c.$

Замена $u = e^T$ приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu,$$

которое рассматривается в разд. 1.1.3.

16. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + bt^n\dfrac{\partial T}{\partial x} + ct^m.$

Частный случай уравнения 3.1.4.9 при $f(x,t) = bt^n$, $g(x,t) = ct^m$.

Замена $u = e^T$ приводит к линейному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bt^n\frac{\partial u}{\partial x} + ct^m u.$$

17. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bt^n\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + ct^mT + st^k.$

Частный случай уравнения 3.1.4.10 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = st^k$.

18. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{a}{T}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 3.1.4.12 при $f(T) = a/T$.

Замена

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{a+1}T^{a+1} & \text{при } a \neq -1, \\ \ln|T| & \text{при } a = -1 \end{cases}$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

19. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT^k\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 3.1.4.12 при $f(T) = aT^k$. При $k = 0$ см. уравнение 3.1.1.11, а при $k = -1$ — уравнение 3.1.1.18.

Замена

$$u = \int \exp\left(\frac{a}{k+1}T^{k+1}\right) dT$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

20. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT^m\Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + (bx + ct + s)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.14 при $f(T) = aT^m$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + s$.

21. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT^2 + cT + s.$

Частный случай уравнения 3.1.4.17 при f, $g = \text{const}$. Уравнения аналогичного вида рассматривались в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1988, 1989).

22. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT^2 + (ct + d)T + st + k.$

Частный случай уравнения 3.1.4.17 при $f(t) = ct + d$, $g(t) = st + k$.

23. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial T}{\partial x} + (ct + d)T + pt + k.$

Частный случай уравнения 3.1.4.18 при $f(t) \equiv 0$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + d$, $s(t) = pt + k$.

24. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + c\dfrac{\partial T}{\partial x} + pT + q.$

Частный случай уравнения 3.1.4.18 при $f(t) = b$, $g(t) = c$, $h(t) = p$, $s(t) = q$.

25. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + cT^2 + pT + q.$

Частный случай уравнения 3.1.4.17 при $f(t) = p$, $g(t) = q$.

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1988, 1989).

26. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$

Замена $T = 1/v$ дает уравнение вида 3.1.1.32:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\Big).$$

Поэтому решения исходного уравнения $T = T(x,t)$ выражаются через решения $u = u(y,t)$ линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

по формулам

$$T = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x = u.$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $T = T(x,t)$, следует исключить y.

⊙ Литература: Н. Х. Ибрагимов (1983).

27. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT^4 \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bx^m T^5.$

Частный случай уравнения 3.1.4.19 при $f(x) = bx^m$.

28. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT^k \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$

Замена $u = T^{1-k}$ приводит к уравнению вида 3.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{k}{1-k}}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

29. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a^2 T^m \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bxt^n \dfrac{\partial T}{\partial x} + ct^k T.$

Частный случай уравнения 3.1.4.21 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^k$.

30. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^{4-k} T^k \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 3.1.1.31.

Преобразование

$$T(x,t) = xu(z,t), \quad z = 1/x$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.28:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au^k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

31. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^n T^k \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$

1. Замена $u = T^{1-k}$ приводит к уравнению вида 3.1.1.46:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ax^n \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{k}{1-k}}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

2. Преобразование

$$T(x,t) = xu(z,t), \quad z = 1/x$$

приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = az^{4-n-k} u^k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

32. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T^{-2}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 3.1.1.38 при $m = -2$.

Введем новую искомую функцию $z = z(x,t)$ по формуле $T = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, а затем проинтегрируем полученное уравнение по переменной x. В результате имеем

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Это уравнение преобразованием годографа

$$x = u, \quad z = y \tag{2}$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности для функции $u = u(y,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Преобразование (2) означает, что зависимая переменная z принимается за независимую переменную, а независимая переменная x — за зависимую переменную.

Решения исходного уравнения $T = T(x,t)$ выражаются через решения $u = u(y,t)$ линейного уравнения (3) по формулам

$$T = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1}, \quad x = u(y,t). \tag{4}$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $T = T(x,t)$, из (4) следует исключить y.

⊙ Литература: G. W. Bluman, S. Kumei (1980), Н. Х. Ибрагимов (1983).

33. $\displaystyle\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T^{-2}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + b.$

Преобразование

$$x = -\frac{2}{bu}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad T(x,t) = -\frac{b}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]^{-1} \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = 0, \quad \text{где} \quad \Phi = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]^{-1}, \ \Psi = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Отсюда следует, что любому решению $u = u(x,t)$ линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

соответствует решение (1) исходного нелинейного уравнения.

⊙ Литература: В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983).

34. $\displaystyle\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(T^{-2}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + b\frac{\partial T}{\partial x} + cT.$

Частный случай уравнения 3.1.4.40 при $m = -2$, $f(t) = a$, $g(t) = b$, $h(t) = c$.

Преобразование (A, B — любые)

$$T(x,t) = e^{ct}u(z,\tau), \quad z = x + bt + A, \quad \tau = B - \frac{1}{2c}e^{-2ct}$$

приводит к уравнению вида 3.1.1.32:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

⊙ Литература: В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983), случай $b = 0$.

35. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{a}{(T+b)^2}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right] + c\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Преобразование

$$u(z,t) = T(x,t) + b, \qquad z = x + ct$$

приводит к уравнению вида 3.1.1.32:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

36. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T^{-4/3}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right).$

Специальный частный случай уравнения 3.1.1.38 при $m = -4/3$ (допускает больше инвариантных решений, чем при $m \neq -4/3$).

1. Отдельные частные решения см. в 3.1.1.38 при $m = -4/3$.
2. Существуют решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
T(x,t) &= f_1(x),\\
T(x,t) &= t^{3/4} f_2(x),\\
T(x,t) &= x^{-3} f_3(t),\\
T(x,t) &= f_4(x - \omega t),\\
T(x,t) &= f_5(x^2 t^{-1}),\\
T(x,t) &= e^t f_6(x e^{2t/3}),\\
T(x,t) &= x^{3C} f_7(t x^{-4C-2}),\\
T(x,t) &= x^{-3} f_8\left(t - \frac{1}{x}\right),\\
T(x,t) &= x^{-3} f_9\left(\frac{tx^2}{(x+1)^2}\right),
\end{aligned}$$

где C, ω — любые. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $f_n(z)$.

3. Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$T(x,t) = (Ax+B)^{-3} u(z,t), \quad z = \pm\frac{1}{A(Ax+B)}$$

приводит к уравнению такого же вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-4/3}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Поэтому если функция $T_1 = T(x,t)$ является решением, то функция

$$T_2 = \frac{1}{(Ax+B)^3} T\left(\frac{\pm 1}{A(Ax+B)}, t\right)$$

также будет решением исходного уравнения. Сказанное позволяет «размножать» точные решения.

⊙ Литература: Л. В. Овсянников (1978), N. H. Ibragimov (1994).

37. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^{-4/3}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + bx^m T^{-1/3}.$

1. При $m = 0$, $ab > 0$ преобразование

$$T(x,t) = \exp(\pm 3\omega x) z(\xi, t), \quad \xi = \frac{1}{2\omega}\exp(\pm 2\omega x), \qquad \omega = \left(\frac{b}{3a}\right)^{1/2}$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.36:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial \xi}\Big). \tag{1}$$

При $m = 0$, $ab < 0$ преобразование

$$T(x,t) = \frac{z(\xi,t)}{\cos^3(\omega x)}, \quad \xi = \frac{1}{\omega}\operatorname{tg}(\omega x), \qquad \omega = \left(-\frac{b}{3a}\right)^{1/2},$$

также приводит к уравнению (1).

⊙ Литература: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

2. При $m \neq 0$ см. уравнение 3.1.4.20 при $f(x) = bx^m$. Исходное уравнение в этом случае с помощью более сложного преобразования (в которое будут входить функции Бесселя) также можно привести к более простому уравнению (1).

38. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^m\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big).$

Это уравнение часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса, теории горения и теории фильтрации. Например, оно описывает нестационарный теплоперенос в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности является степенной функцией температуры. При $m = -2$ см. уравнение 3.1.1.32.

1. Точные решения*:

$$T(x) = (Ax + B)^{\frac{1}{m+1}},$$
$$T(x,t) = (\pm kx + k\omega t + A)^{1/m}, \quad k = \omega m/a,$$
$$T(x,t) = \left[\frac{m(x-A)^2}{2a(m+2)(B-t)}\right]^{\frac{1}{m}},$$
$$T(x,t) = t^{-\frac{1}{m+2}}\left[A - \frac{m}{2a(m+2)}x^2 t^{-\frac{2}{m+2}}\right]^{\frac{1}{m}},$$

где A, B, ω — произвольные постоянные. Третье решение соответствует режиму с обострением (решение неограниченно возрастает на конечном интервале времени).

⊙ Литература: Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец (1950), Г. И. Баренблатт (1952), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

* Здесь и далее, для краткости, точные решения нелинейных уравнений обычно приводятся только в области их пространственной локализации, где $T \not\equiv 0$.

2. Решения типа бегущей волны

$$T = T(z), \quad z = \pm x + \omega t,$$

определяются неявно формулой

$$a \int \frac{T^m \, dT}{\omega T + C_1} = C_2 + z,$$

где ω, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\omega = 0$ соответствует стационарное решение, а значению $C_1 = 0$ — второе решение в п. 1.

3. Решения в виде произведения функций различных переменных имеют вид

$$T(x,t) = (\omega t + A)^{-1/m} f(x), \tag{1}$$

где зависимость $f = f(x)$ задается неявно формулой

$$\int \frac{f^m \, df}{\sqrt{C_1 - b f^{m+2}}} = \pm x + C_2, \qquad b = \frac{2\omega}{am(m+2)},$$

а ω, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. Автомодельные решения вида

$$T = T(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} \qquad (0 \leqslant x < \infty),$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$2a\big(T^m T'_z\big)'_z + zT'_z = 0. \tag{2}$$

Решениями такого вида обычно описываются ситуации, когда искомая функция принимает постоянные значения в начальных и граничных условиях.

Частному решению уравнения (2) при $T(z) = k_2 z^{2/m}$ отвечает третье решение в п. 1.

Х. Фуджита (H. Fujita, 1952) получил общее решение уравнения (2) при $m = -1$ и $m = -2$. Об этих решениях подробно написано в книге А. В. Лыкова (1967).

В случае граничных условий

$$T = 1 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad T = 0 \quad \text{при} \quad z = \infty$$

решение уравнения (2) является локализованным и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} &T = (1-Z)^{1/m} \frac{P(1-Z,\, m)}{P(1,\, m)} && \text{при} \quad 0 \leqslant Z \leqslant 1, \\ &T = 0 && \text{при} \quad 1 \leqslant Z < \infty, \end{aligned}$$

где

$$Z = \frac{z}{z_0}, \quad z_0^2 = \frac{2a}{mP(1,\, m)}, \quad P(\xi,\, m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k,$$

$b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}[m(m+1)]^{-1}$, …; см. А. А. Самарский, И. М. Соболь (1963).

5. Автомодельные решения вида

$$T = t^{-\frac{1}{m+2}} F(\xi), \quad \xi = xt^{-\frac{1}{m+2}} \qquad (0 \leqslant x < \infty)$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$a(m+2)F^m F'_\xi + \xi F'_\xi = C, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная.

Значению $C = 0$ в уравнении (3) соответствует последнее решение в п. 1, которое описывает тепловую волну от плоского источника. Подробности см. в книге Я. Б. Зельдовича, Ю. П. Райзера (1966).

Сделаем замену $\varphi = F^m$ в уравнении (3). В результате получим

$$\varphi'_\xi = \alpha\varphi^{-1/m} - \beta\xi, \tag{4}$$

где $\alpha = \dfrac{mC}{a(m+2)}$, $\beta = \dfrac{m}{a(m+2)}$.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведены общие решения уравнения (4) для значений $m = -1$ и $m = 1$.

6. Более общие решения вида

$$T = t^\beta g(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{m\beta+1}{2}}, \qquad \beta \text{ — любое,}$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$G''_{\zeta\zeta} = A_1 \zeta G^{-\frac{m}{m+1}} G'_\zeta + A_2 G^{\frac{1}{m+1}}, \qquad G = g^{m+1}, \tag{5}$$

где $A_1 = -(m\beta+1)/(2a)$, $A_2 = \beta(m+1)/a$. Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода). Точные аналитические решения уравнения (5) при различных значениях параметра m приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1997).

7. Решения вида

$$T = e^{-2\omega t}\varphi(u), \quad u = xe^{\omega m t}, \qquad \omega \text{ — любое,}$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(\varphi^m \varphi'_u)'_u = \omega m u \varphi'_u - 2\omega\varphi. \tag{6}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода). Замена $\Phi = \varphi^{m+1}$ приводит (6) к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (5).

8. Решения вида

$$T = (t+A)^{-1/m}\psi(u), \quad u = x + b\ln(t+A), \qquad A,\ b \text{ — любые,}$$

определяются из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(\psi^m \psi'_u)'_u = b\psi'_u - \psi/m. \tag{7}$$

Введение новой зависимой переменной по формуле $p(\psi) = \frac{a}{b}\psi^m \psi'_u$ с учетом равенства $\dfrac{d}{du} = \dfrac{b}{a}\psi^{-m} p \dfrac{d}{d\psi}$ приводит (7) к уравнению Абеля второго рода

$$pp'_\psi = p - s\psi^{m+1}, \qquad s = a/(mb^2).$$

Общие решения этого уравнения при $m = -3,\ -2,\ -\frac{3}{2},\ -1$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

⊙ Литература к уравнению 3.1.1.38: Л. В. Овсянников (1978), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

39. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + bT^k.$

Частный случай уравнения 3.1.4.44 при $f(T) = aT^m$, $g(T) = bT^k$. При $b=0$ см. уравнение 3.1.1.38. При $m=-4/3$, $k=-1/3$ см. уравнение 3.1.1.37.

1. Пространственно-однородное и стационарное решения (последнее записано в неявной форме):

$$T(t) = \begin{cases} \left[(1-k)bt + C\right]^{\frac{1}{1-k}} & \text{при } k \neq 1, \\ Ce^{bt} & \text{при } k = 1, \end{cases}$$

$$\int T^m \left[A - \frac{2b}{a(m+k+1)} T^{m+k+1}\right]^{-1/2} dT = \pm x + B,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2. Решения типа бегущей волны

$$T = T(z), \quad z = x + \omega t,$$

описываются автономным уравнением

$$a[T^m T'_z]'_z - \omega T'_z + bT^k = 0. \tag{1}$$

Замена

$$u(T) = \frac{a}{\omega} T^m T'_z$$

преобразует (1) к уравнению Абеля

$$uu'_T - u = -ab\omega^{-2} T^{m+k}. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведены точные решения уравнения (2) при $m + k = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1$.

3. Автомодельные решения вида

$$T = t^{\frac{1}{1-k}} u(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{k-m-1}{2(1-k)}},$$

описываются нелинейным уравнением

$$a(u^m u'_\xi)'_\xi + \frac{m-k+1}{2(1-k)}\xi u'_\xi + bu^k - \frac{1}{1-k}u = 0.$$

4. Случай $k = m + 1$.

4.1. Точное решение в виде произведения ($a = b = 1$):

$$T(x,t) = \begin{cases} \left[\dfrac{2(m+1)}{m(m+2)}\dfrac{\cos^2(\pi x/L)}{(T_0 - t)}\right]^{1/m} & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{L}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{L}{2}, \end{cases} \qquad (3)$$

где $L = 2\pi(m+1)^{1/2}/m$. Решение (3) описывает режим с обострением для $t \in [0,\, T_0)$.

⊙ Литература: Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский (1976); А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

4.2. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$T(x,t) = \left(\frac{Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} + D}{m\omega t + C}\right)^{1/m},$$

$$B = \frac{\omega^2(m+1)^2}{4b^2 A(m+2)^2}, \quad D = -\frac{\omega(m+1)}{b(m+2)}, \quad \mu = m\sqrt{-\frac{b}{a(m+1)}},$$

где A, C, ω — произвольные постоянные, $ab(m+1) < 0$.

Общий вид решения в виде произведения (C, ω — любые):

$$T(x,t) = (m\omega t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(\varphi^m \varphi'_x)'_x + b\varphi^{m+1} + \omega\varphi = 0. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) в неявной форме:

$$\int \varphi^m \left[A - \frac{2\omega}{a(m+2)}\varphi^{m+2} - \frac{b}{a(m+1)}\varphi^{2m+2}\right]^{-1/2} d\varphi = \pm x + B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

4.3. Решения, содержащие экспоненциальные функции (считается, что $ab(m+1) < 0$):

$$T(x,t) = \left[f(t) + g(t)e^{\omega x}\right]^{1/m}, \qquad \omega = \pm m\sqrt{\frac{-b}{a(m+1)}}, \qquad (5)$$

где $f = f(t)$ и $g = g(t)$ определяются из системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2, \qquad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg.$$

Интегрируя, получим

$$f(t) = (C_1 - bmt)^{-1}, \quad g(t) = C_2(C_1 - bmt)^{-\frac{m+2}{m+1}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Более сложные решения, содержащие экспоненциальные функции, имеют вид (A, B — любые)

$$T(x,t) = \big[f(t) + g(t)(Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x})\big]^{1/m}, \qquad \omega = m\sqrt{\frac{-b}{a(m+1)}}, \quad (6)$$

где $f = f(t)$ и $g = g(t)$ определяются из автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2 + \frac{4bmAB}{m+1}g^2, \quad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg. \quad (7)$$

Исключив из этой системы t, получим однородное уравнение первого порядка

$$f'_g = \frac{m+1}{m+2}\,\frac{f}{g} + \frac{4AB}{m+2}\,\frac{g}{f}. \quad (8)$$

Подстановка $\zeta = f/g$ приводит (8) к уравнению с разделяющимися переменными. Интегрируя, находим решение уравнения (8) (C_1 — любое):

$$f = \pm g\big(4AB + C_1 g^{-\frac{2}{m+2}}\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (7), получим уравнение с разделяющимися переменными для функции $g = g(t)$.

4.4. Решения, содержащие гиперболические функции:

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \big[f(t) + g(t)\operatorname{ch}(\omega x)\big]^{1/m}, \\ T(x,t) &= \big[f(t) + g(t)\operatorname{sh}(\omega x)\big]^{1/m} \end{aligned} \quad (9)$$

являются частными случаями формулы (6) при $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ и $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ соответственно.

4.5. Решения, содержащие тригонометрические функции (считается, что $ab(m+1) > 0$):

$$T(x,t) = \big[f(t) + g(t)\cos(\omega x + C)\big]^{1/m}, \qquad \omega = m\sqrt{\frac{b}{a(m+1)}}, \quad (10)$$

где $f = f(t)$ и $g = g(t)$ определяются из системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2 + \frac{bm}{m+1}g^2, \quad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg,$$

которая совпадает с системой (7) при $AB = \frac{1}{4}$.

⊙ Литература к пп. 4.4, 4.5: M. Bertsch, R. Kersner, L. A. Peletier (1985), В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1988, 1989).

5. Случай $k = 1 - m$. Точные решения:

$$T(x,t) = \left[\frac{1}{F}x^2 + AF^{-\frac{m}{m+2}} - \frac{bm^2}{4a(m+1)}F\right]^{1/m},$$

$$F = F(t) = B - \frac{2a(m+2)}{m}t,$$

где A, B — произвольные постоянные.

⊙ Литература: R. Kersner (1978).

6. Случай $k = 1$. Исходное уравнение с помощью преобразования (Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов, 1972)

$$T(x,t) = v(x,\tau)e^{bt}, \quad \tau = \frac{a}{bm}e^{bmt} + \text{const}$$

приводится к уравнению вида 3.1.1.38:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v^m \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

⊙ Литература к уравнению 3.1.1.39: В. А. Дородницын (1979, 1982), В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983), В. А. Галактионов, В. А. Дородницын, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский (1986), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

40. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(T^m \frac{\partial T}{\partial x}\right) + bt^nT.$

Частный случай уравнения 3.1.4.22 при $f(t) = bt^n$.

41. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(T^m \frac{\partial T}{\partial x}\right) + bt^nT^{1-m}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.23 при $f(t) = bt^n$.

42. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(T^m \frac{\partial T}{\partial x}\right) + bt^nT + ct^kT^{1-m}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.24 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^k$.

43. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(T^m \frac{\partial T}{\partial x}\right) + bT^{1+m} + ct^nT + st^kT^{1-m}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.25 при $f(t) = ct^n$, $g(t) = st^k$.

При $n = k = 0$ это уравнение рассматривалось в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1988, 1989).

44. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(T^m \frac{\partial T}{\partial x}\right) + bx^nT^{1+m}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.26 при $f(x) = bx^n$.

45. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^{\frac{3m+4}{m+1}} \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 3.1.1.46.

Преобразование

$$T(x,t) = x^{\frac{1}{m+1}} u(z,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

46. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = ax^n \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big).$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса и является частным случаем уравнения 3.1.4.47 при $f(T) = aT^m$. При $n = 0$ см. уравнение 3.1.1.38.

1. Точные решения (A, B, ω — любые):

$$T(x) = (Ax+B)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$T(x,t) = k(\omega t + A)^{-\frac{1}{m}} x^{\frac{2-n}{m}}, \quad k = \Big[\frac{m\omega}{a(n-2)(2+m-n-nm)}\Big]^{\frac{1}{m}},$$

$$T(x,t) = t^{(1-n)\beta}\Big[\frac{m\beta}{a(2-n)}\big(xt^\beta\big)^{2-n} + A\Big]^{\frac{1}{m}}, \quad \beta = \frac{1}{nm+n-m-2},$$

$$T(x,t) = \exp(-\omega t)\Big[\frac{\omega}{a}(m+1)^2 x^{\frac{m}{m+1}}\exp(\omega m t) + A\Big]^{\frac{1}{m}}, \quad n = \frac{m+2}{m+1}.$$

2. Решения в виде произведения функций различных переменных имеют вид

$$T(x,t) = (\omega t + A)^{-1/m} f(x),$$

где зависимость $f = f(x)$ выражается через решения уравнения Эмдена — Фаулера:

$$F''_{xx} + \frac{\omega(m+1)}{am} x^{-n} F^{\frac{1}{m+1}} = 0, \qquad F = f^{m+1}. \tag{1}$$

Частному решению этого уравнения степенного вида отвечает второе решение исходного уравнения в п. 1.

Уравнение (1) допускает понижение порядка и подробно исследовалось в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997), где приведены его точные решения для 26 различных пар значений параметров n, m.

3. При $n \neq -2$ решения вида

$$T = T(z), \quad z = xt^{\frac{1}{n-2}} \qquad (0 < x < \infty)$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(2-n)\big(T^m T'_z\big)'_z + z^{1-n} T'_z = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993) приведено общее решение уравнения (2) при $m = -1$ и любом n.

4. Более общие решения вида

$$T = t^{\alpha} g(\zeta), \quad \zeta = xt^{\beta}, \qquad \beta = \frac{m\alpha + 1}{n-2},\ \alpha \text{ — любое},$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a\zeta^n \left(g^m g'_\zeta\right)'_\zeta = \beta\zeta g'_\zeta + \alpha g. \tag{3}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода).

В частном случае

$$\alpha = \frac{1-n}{nm+n-m-2}, \quad \beta = \frac{1}{nm+n-m-2}$$

первый интеграл уравнения (3) имеет вид

$$ag^m g'_\zeta = \beta\zeta^{1-n} g + C. \tag{4}$$

Значению $C = 0$ в (4) соответствует третье решение в п. 1.

В общем случае замена $G = g^{m+1}$ приводит (3) к уравнению

$$G''_{\zeta\zeta} = A_1 \zeta^{1-n} G^{-\frac{m}{m+1}} G'_\zeta + A_2 \zeta^{-n} G^{\frac{1}{m+1}}, \tag{5}$$

где $A_1 = \beta/a$, $A_2 = \alpha(m+1)/a$. Точные аналитические решения уравнения (5) при различных значениях параметров n, m приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

5. Решения вида

$$T = e^{\omega(n-2)t} \varphi(u), \quad u = xe^{\omega m t}, \qquad \omega \text{ — любое},$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$au^n (\varphi^m \varphi'_u)'_u = \omega m u \varphi'_u + \omega(n-2)\varphi. \tag{6}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода).

В частном случае $n = \dfrac{m+2}{m+1}$ уравнение (6) имеет первый интеграл вида

$$a\varphi^m \varphi'_u = \omega m u^{-\frac{1}{m+1}} \varphi + C.$$

Значению $C = 0$ соответствует последнее решение в п. 1.

В общем случае замена $\Phi = \varphi^{m+1}$ приводит (6) к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (5).

6. При $n = 2$ существуют решения вида

$$T = T(\xi), \quad \xi = \ln|x| - \omega t,$$

которые определяются неявно формулой

$$a(m+1)\int \frac{T^m\,dT}{aT^{m+1}-\omega(m+1)T+C_1}=\xi+C_2,$$

где ω, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Частному случаю $C_1=0$ соответствует решение

$$T(x,t)=\Bigl[\frac{\omega(m+1)}{a}+C|x|^{\frac{m}{m+1}}\exp\Bigl(-\frac{m\omega}{m+1}t\Bigr)\Bigr]^{\frac{1}{m}},$$

где C — любое.

7. Преобразование

$$T(x,t)=x^{\frac{1}{m+1}}u(z,t),\quad z=\frac{1}{x}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=az^{\frac{4+3m-n-nm}{m+1}}\frac{\partial}{\partial z}\Bigl(u^m\frac{\partial u}{\partial z}\Bigr).$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

47. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(\dfrac{a}{T^2+b^2}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr).}$

Точные решения (A, B — любые):

$$\begin{aligned}&T(x)=b\,\mathrm{tg}(Ax+B),\\&T(x,t)=-bx\bigl(A-2ab^{-2}t-x^2\bigr)^{-1/2},\\&T(x,t)=Ab\exp(ab^{-2}t-x)\Bigl\{1-A^2\exp\bigl[2(ab^{-2}t-x)\bigr]\Bigr\}^{-1/2}.\end{aligned}$$

Эти и другие решения и некоторые преобразования рассматривались в работах И. Ш. Ахатова, Р. К. Газизова, Н. Х. Ибрагимова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994).

48. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[\Bigl(\dfrac{ax+b}{cT+k}\Bigr)^2\dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr].}$

Преобразование

$$z=ax+b,\quad u=\frac{cT+k}{ax+b}\qquad (a,\,c\neq 0)$$

приводит к уравнению вида 3.1.1.32:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial}{\partial z}\Bigl(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\Bigr).$$

⊙ Литература: A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierres, E. Fijalkow, M. R. Feix (1981).

49. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 3.1.4.38 при $f(x) = ax^n$.

1. Пусть $m \neq -1$, $2m - 2n - nm + 3 \neq 0$. Преобразование

$$T(x,t) = x^{\frac{1-n}{m+1}} u(\xi, t), \quad \xi = x^{\frac{2m-2n-nm+3}{m+1}}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\xi^{\frac{3m-3n-2nm+4}{2m-2n-nm+3}} u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big), \tag{1}$$

где $A = a\Big(\dfrac{2m-2n-nm+3}{m+1}\Big)^2$.

2. В частном случае $n = \dfrac{3m+4}{2m+3}$ преобразованное уравнение сильно упрощается и совпадает (с точностью до переобозначений) с уравнением 3.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big).$$

3. В частном случае $n = 2$, $m = -2$ преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(u^{-2} \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big)$$

и совпадает с уравнением 3.1.1.32 (которое приводится к линейному уравнению теплопроводности).

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

50. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big).$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса. При $n = 0$ см. уравнение 3.1.1.38. Значению $n = 1$ соответствуют плоские задачи с осевой симметрией, а значению $n = 2$ — сферически-симметричные задачи. В теории статистической турбулентности встречаются уравнения при $n = 5$.

Точные решения:

$$T(x) = \big(Ax^{1-n} + B\big)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$T(x,t) = \Big[\frac{m(\pm x + A)^2}{B - kt}\Big]^{\frac{1}{m}}, \quad k = 2a(nm + m + 2),$$

$$T(x,t) = \Big[A(kt+B)^{-\frac{m(n+1)}{nm+m+2}} - \frac{mx^2}{kt+B}\Big]^{\frac{1}{m}}, \quad k = 2a(nm+m+2),$$

$$T(x,t) = \Big[A\exp\Big(-\frac{4a\omega}{m}t\Big) + \omega x^2\Big]^{\frac{1}{m}}, \quad n = -\frac{m+2}{m},$$

где A, B, ω — произвольные постоянные.

⊙ Литература: Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец (1950), Г. И. Баренблатт (1952, 1978), Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер (1966), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), Л. И. Седов (1972).

51. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = k(ax^2+bx+c)^m T^{4-2m}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.36 при $f(u) = ku^{-2m}$.

1. Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku^{4-2m}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k(ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^{5-2m}, \tag{2}$$

которое допускает решения типа бегущей волны $u = u(z+\omega t)$ и решения в виде произведения функций различных аргументов $u = f(t)g(z)$.

Используя замену $\varphi = u^{2m-3}$, из (2) получим уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi^n \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + p\varphi^{n+1},$$
$$n = \frac{4-2m}{2m-3}, \quad p = k(2m-3)(ac - \tfrac{1}{4}b^2),$$

которое допускает широкий класс точных решений (см. 3.1.1.39, п. 4).

2. Исходное уравнение преобразованием

$$T(x,t) = \bigl[v(\xi,t)\bigr]^{\frac{1}{2m+3}}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m} \tag{3}$$

приводится к дивергентному виду (см. уравнение 3.1.4.38)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[F(\xi)v^{\frac{4-2m}{2m-3}}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right], \tag{4}$$

где функция $F(\xi)$ задается параметрически следующими формулами:

$$F(\xi) = \frac{k}{(ax^2+bx+c)^m}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}. \tag{5}$$

Отметим некоторые частные случаи уравнения (4), когда функцию $F = F(\xi)$ можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\cos^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1, \quad a=1, \quad b=0, \quad c=1;$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1, \quad a=-1, \quad b=0, \quad c=1;$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi^{-3/2}}{\cos\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=\tfrac{1}{2}, \quad a=-1, \quad b=0, \quad c=1.$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

3.1.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a + be^{\omega T}.$

Уравнения этого вида встречаются в задачах тепло- и массопереноса и теории горения.

1. Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{2}{\omega}\ln\bigl[\beta + C\exp\bigl(\pm\mu x - \tfrac{1}{2}a\omega t\bigr)\bigr],$$
$$T(x,t) = -\frac{2}{\omega}\ln\bigl[-\beta + C\exp\bigl(\pm\mu x - \tfrac{1}{2}a\omega t\bigr)\bigr],\qquad \beta = \sqrt{-\frac{b}{a}},\ \mu = \sqrt{\frac{a\omega}{2}}.$$

2. Более широкий класс точных решений типа бегущей волны

$$T = T(z), \quad z = x + \sigma t$$

описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$T''_{zz} - \sigma T'_z + a + be^{\omega T} = 0. \tag{1}$$

Замена $u(T) = T'_z$ приводит (1) к уравнению Абеля

$$uu'_T - \sigma u + a + be^{\omega T} = 0. \tag{2}$$

При $\sigma = 1$, $b = -a$, $\omega = 2/a$ общее решение уравнения (2) можно записать в параметрическом виде

$$T = a\ln\left|\frac{\tau^2+1}{\tau}(\operatorname{arctg}\tau + C)\right|, \quad u = \frac{a}{\tau}\bigl[\tau + (\tau^2-1)(\operatorname{arctg}\tau + C)\bigr].$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1996).

2. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a + be^{\omega T} + ce^{2\omega T}.$

Уравнения этого вида встречаются в задачах тепло- и массопереноса и теории горения.

Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\omega}\ln\bigl[\beta + C\exp(\mu x - a\omega t)\bigr], \tag{1}$$

где параметры β, μ определяются путем решения двух алгебраических уравнений

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0, \tag{2}$$
$$\beta^2\mu^2 + \omega c = 0. \tag{3}$$

Квадратное уравнение (2) для β решается независимо. В общем случае система (2)–(3) дает четыре набора искомых параметров, которым отвечают четыре точных решения исходного уравнения.

Решения (1) являются частными случаями более широкого класса решений типа бегущей волны $T = T(x + \sigma t)$.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

2a. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta \dfrac{\partial T}{\partial x} + a + be^{\omega T} + ce^{2\omega T}.$

Замена $t = \tau + x/\beta$ приводит к уравнению 3.1.2.2 относительно $T(x, \tau)$.

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\omega T} \dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.7 при $f(T) = be^{\omega T}$.

Помимо точных решений типа бегущей волны $T = T(x + \omega t)$, существуют также точные решения вида

$$T = \varphi(\xi) - \frac{1}{2\omega} \ln t, \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\omega t} \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + ce^{\mu t} T + se^{\nu t}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.10 при $f(t) = be^{\omega t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$, $h(t) = se^{\nu t}$.

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + ae^{\omega T} \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 3.1.4.12 при $f(T) = ae^{\omega T}$.

Замена

$$u = \int \exp\Bigl(\frac{a}{\omega} e^{\omega T}\Bigr)\, dT$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

6. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a \dfrac{\partial}{\partial x} \left(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + be^{\omega t} T.$

Частный случай уравнения 3.1.4.22 при $f(t) = be^{\omega t}$.

7. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a \dfrac{\partial}{\partial x} \left(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + be^{\omega t} T^{1-m}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.23 при $f(t) = be^{\omega t}$.

8. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a \dfrac{\partial}{\partial x} \left(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + be^{\omega t} T + ce^{\mu t} T^{1-m}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.24 при $f(t) = be^{\omega t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$.

9. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a \dfrac{\partial}{\partial x} \left(e^{\omega T} \dfrac{\partial T}{\partial x}\right).$

Это уравнение описывает нестационарный теплоперенос в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности экспоненциально зависит от температуры.

1. Точные решения (A, B, C, μ — любые):

$$T(x) = \frac{1}{\omega}\ln(Ax + B),$$
$$T(x,t) = -\frac{1}{\omega}\ln(C - a\omega\mu t) + \frac{1}{\omega}\ln\left(\tfrac{1}{2}\omega\mu x^2 + Ax + B\right).$$

2. Существуют также решения вида ($\omega = 1$)

$$T(x,t) = 2t + f(z), \qquad z = xe^{-t},$$
$$T(x,t) = x + g(y), \qquad y = te^{x},$$
$$T(x,t) = C\ln x + h(\xi), \qquad \xi = tx^{1-2C},$$

где C — любое. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $f(z)$, $g(y)$, $h(\xi)$.

⊙ Литература: Л. В. Овсянников (1978), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

10. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\omega T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + bt^n.$

Частный случай уравнения 3.1.4.28 при $f(t) = bt^n$.

11. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\omega T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + be^{\mu t}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.28 при $f(t) = be^{\mu t}$.

12. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\omega T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + be^{\omega T} + ce^{\mu t}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.30 при $f(t) = ce^{\mu t}$, $g(t) = 0$.

13. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\omega T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + bt^n e^{-\omega T}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.29 при $f(t) = 0$, $g(t) = bt^n$.

14. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\omega T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + be^{-\omega T + \mu t}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.29 при $f(t) = 0$, $g(t) = be^{\mu t}$.

15. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\omega T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + be^{\mu t} + ce^{-\omega T + \nu t}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.29 при $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = ce^{\nu t}$.

16. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\omega T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + be^{\omega T} + c + se^{-\omega T}.$

Частный случай уравнения 3.1.4.30 при $f(t) = c$, $g(t) = s$.

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1988, 1989).

17. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\omega T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+(bx+c)e^{\omega T}.$

Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$T=-\frac{1}{\omega}\ln(\omega t+C)+\varphi(x),$$

где ω, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx}+\omega(bx+c)\psi+\omega=0,\qquad \psi=e^{\omega\varphi}.$$

18. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\omega T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+be^{\omega T+\mu x}.$

Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$T=-\frac{1}{\omega}\ln(\omega t+C)+\varphi(x),$$

где ω, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx}+\omega be^{\mu x}\psi+\omega=0,\qquad \psi=e^{\omega\varphi}.$$

19. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n e^{\omega T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 3.1.4.42 при $f(x)=ax^n$, $g(x)=0$.

20. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\omega T+\mu x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 3.1.4.42 при $f(x)=ae^{\mu x}$, $g(x)=0$.

21. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(Te^{\omega T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big).$

Точное решение (A, B — любые):

$$T(x,t)=\frac{1}{\omega}\ln\Big(Ax+\frac{a}{\omega}A^2t+B\Big).$$

⊙ Литература: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

3.1.3. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+aT\ln T.$

Точные решения (A, B — любые):

$$T(x,t)=\exp\big(Ae^{at}x+A^2e^{2at}+Be^{at}\big),$$
$$T(x,t)=\exp\big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}ax^2+Ae^{at}\big),$$
$$T(x,t)=\exp\Big[-\frac{ax^2}{4(1+e^{-at})}+\tfrac{1}{2}(e^{at}+A)\ln(1+e^{-at})\Big],$$

$$T(x,t) = \exp\Bigl[-\frac{ax^2}{4(1+Ae^{-at})} + \frac{1}{2A}(e^{at}+B)\ln(1+Ae^{-at})\Bigr].$$

⊙ Литература: В. А. Дородницын (1979, 1982), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

2. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT\ln T + bT.$

Замена $T = e^{-b/a}u$ приводит к уравнению 3.1.3.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au\ln u.$$

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT\ln T + (bx+c)T.$

Частный случай уравнения 3.1.4.3.

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT\ln T + (bx+ct+k)T.$

Частный случай уравнения 3.1.4.4.

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT\ln T + (bx^2+cx+k)T.$

Частный случай уравнения 3.1.4.5.

6. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (1+kT)\bigl[a\ln^2(1+kT) + b\ln(1+kT) + c\bigr].$

Частный случай уравнения 3.1.4.6.

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1988, 1989).

7. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^n\dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr) + bT\ln T.$

Точное решение (A, B — любые):

$$T(x,t) = \exp\Bigl[-\frac{bx^2}{4a(1-Ae^{-bt})} + Be^{bt} - \frac{1}{2}a(n+1)e^{bt}\ln(1-Ae^{-bt})\Bigr].$$

⊙ Литература: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

3.1.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(T).$

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова.

Уравнения этого вида часто встречаются в различных задачах тепло- и массопереноса (f — скорость объемной химической реакции), теории горения, биологии и экологии (см., например, книгу Дж. Астарита, 1971). Для функций $f = f(T)$ степенного, экспоненциального и логарифмического вида см. соответственно уравнения 3.1.1.1–3.1.1.5, 3.1.2.1–3.1.2.2 и 3.1.3.1–3.1.3.6.

1. Решение, однородное по пространственной координате $T = T(t)$:

$$\int \frac{dT}{f(T)} = t + C, \qquad C \text{ — любое.}$$

2. Стационарное решение $T = T(x)$:

$$\int \left[C_1 + \frac{2}{a}\int f(T)\,dT\right]^{-1/2} dT = C_2 \pm x.$$

3. Решения типа бегущей волны:

$$T = T(z), \quad z = x + \omega t,$$

где ω — любое. Функция $T = T(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aT''_{zz} - \omega T'_z + f(T) = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$z = (a/\omega)\xi, \quad u(T) = T'_\xi$$

приводит (1) к уравнению Абеля

$$uu'_T - u + a\omega^{-2} f(T) = 0. \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $f = f(T)$.

В книгах В. П. Маслова, В. Г. Данилова, К. А. Волосова (1987), А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова, А. П. Михайлова (1987) указано много точных решений исходного уравнения для различных функций $f = f(T)$.

2. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t)T\ln T + g(t)T.$

1. Точные решения:

$$T(x,t) = \exp\bigl[\Phi(t)x + \Psi(t)\bigr],$$

где функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ определяются по формулам

$$\Phi(t) = Ae^F, \quad \Psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(aA^2e^{2F} + g)\,dt, \qquad F = \int f\,dt,$$

A, B — произвольные постоянные.

2. Точные решения:

$$T(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = e^F\left(A - 4a\int e^F dt\right)^{-1}, \quad F = \int f\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(2a\varphi + g)\,dt,$$

A, B — произвольные постоянные.

3. Существуют также точные решения более общего вида

$$T(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_0(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 3.1.4.5), которая может быть проинтегрирована.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t)T\ln T + \bigl[g(t)x + h(t)\bigr]T.$

1. Точные решения:

$$T(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = Ae^F + e^F \int e^{-F} g\,dt, \quad F = \int f\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^F + e^F \int e^{-F}(a\varphi^2 + h)\,dt,$$

A, B — произвольные постоянные.

2. Существуют также точные решения более общего вида

$$T(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_0(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 3.1.4.5), которая может быть проинтегрирована.

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x)T\ln T + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr]T.$

Точные решения:

$$T(x,t) = \exp\bigl[-bt + \varphi(x)\bigr],$$

где функция $\varphi(x)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a\varphi''_{xx} + a(\varphi'_x)^2 + f(x)\varphi + g(x) + b = 0.$$

При f, $g = \text{const}$ это уравнение подстановкой $u(\varphi) = (\varphi'_x)^2$ приводится к линейному уравнению первого порядка.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t)T\ln T + \bigl[g(t)x^2 + h(t)x + s(t)\bigr]T.$

Точные решения:

$$T(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, 3)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h, s не указываются, штрих обозначает производную по t)

$$\varphi_2' = 4a\varphi_2^2 + f\varphi_2 + g, \tag{1}$$
$$\varphi_1' = 4a\varphi_2\varphi_1 + f\varphi_1 + h, \tag{2}$$
$$\varphi_0' = f\varphi_0 + a\varphi_1^2 + 2a\varphi_2 + s. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведено много решений этого уравнения для различных функций f и g.

Если решение уравнения (1) известно, то решения уравнений (2), (3) строятся последовательно (каждое из них линейно относительно искомой функции).

6. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (bT + c)\left[k\ln^2(bT + c) + f(t)\ln(bT + c) + g(t)\right].$

Замена

$$bT + c = \exp u, \quad u = u(x,t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.4.11:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + bku^2 + bf(t)u + bg(t),$$

которое имеет экспоненциальные и синусоидальные решения по переменной x.

7. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(T)\frac{\partial T}{\partial x}.$

Решения типа бегущей волны

$$T = T(z), \quad z = x + \omega t,$$

определяются неявной зависимостью

$$\int \frac{a\,dT}{\omega T - F(T) + A} = z + B, \qquad F(T) = \int f(T)\,dT,$$

где A, B — произвольные постоянные.

8. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left[f(T) + g(t)\right]\frac{\partial T}{\partial x}.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int g(t)\,dt$, получим уравнение вида 3.1.4.7:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f(T)\frac{\partial T}{\partial z}.$$

9. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + f(x,t)\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(x,t).$

Замена $u = e^T$ приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,t)u.$$

10. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + g(t)T + h(t).$

Точные решения:
$$T(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$
где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами
$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + g\varphi, \tag{1}$$
$$\psi'_t = (4f\varphi + g)\psi, \tag{2}$$
$$\chi'_t = g\chi + 2\mathrm{a}\varphi + f\psi^2 + h. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции φ является уравнением Бернулли и легко интегрируется. После этого последовательно определяются решения уравнений (2) и (3), которые линейны относительно функций ψ и χ. В итоге получим
$$\begin{aligned} &\varphi = e^G\Big(A_1 - 4\int e^G f\,dt\Big)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,\\ &\psi = A_2\exp\Big[\int(4f\varphi + g)\,dt\Big],\\ &\chi = A_3e^G + e^G\int e^{-G}(2\mathrm{a}\varphi + f\psi^2 + h)\,dt, \end{aligned} \tag{4}$$
где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные.

Предельному переходу $A_1 \to \infty$ в (4) соответствует вырожденное решение с $\varphi \equiv 0$.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

11. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + bf(t)T^2 + g(t)T + h(t).$

1. Точные решения:
$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\big), \qquad b < 0, \tag{1}$$
где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)
$$\varphi'_t = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$
$$\psi'_t = (2bf\varphi + g - ab)\psi. \tag{3}$$

Уравнение (2) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1997) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g, h.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi = \psi(t)$ определяется по формуле

$$\psi(t) = C \exp\Bigl[-abt + \int (2bf\varphi + g)\,dt\Bigr], \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

Отметим два частных случая интегрирования уравнения (2).

Решение уравнения (2) при $h \equiv 0$:

$$\varphi(t) = e^G \Bigl(C_1 - b\int fe^G\,dt\Bigr)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\, \beta = \text{const}),$$

то решение уравнения (2) имеет вид

$$\int \frac{\varphi\,d\varphi}{b\varphi^2 + \alpha\varphi + \beta} = \int f\,dt + C_2, \tag{5}$$

где C_2 — произвольная постоянная. После интегрирования левой части выражения (5) можно получить явный вид зависимости $\varphi = \varphi(t)$.

2. Точные решения более общего вида

$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\exp\bigl(x\sqrt{-b}\bigr) + B\exp\bigl(-x\sqrt{-b}\bigr)\bigr], \qquad b < 0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = bf\bigl(\varphi^2 + 4AB\psi^2\bigr) + g\varphi + h, \tag{7}$$

$$\psi'_t = 2bf\varphi\psi + g\psi - ab\psi. \tag{8}$$

Из уравнения (8) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (7). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g, $h = \text{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}\bigl(x\sqrt{-b}\bigr), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2},$$
$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}\bigl(x\sqrt{-b}\bigr), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}.$$

3. Точные решения вида (c — любое):

$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\bigl(x\sqrt{b} + c\bigr), \qquad b > 0, \tag{9}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = bf\bigl(\varphi^2 + \psi^2\bigr) + g\varphi + h, \tag{10}$$

$$\psi'_t = 2bf\varphi\psi + g\psi - ab\psi. \tag{11}$$

Из уравнения (11) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (10). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g, $h = \text{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

12. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(T)\Bigl(\frac{\partial T}{\partial x}\Bigr)^2.$

Замена

$$u = \int F(T)\,dT, \qquad \text{где} \quad F(T) = \exp\Bigl[\int f(T)\,dT\Bigr],$$

приводит для функции $u = u(x,t)$ к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

которое рассматривается в разд. 1.1.1.

13. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(T)\Bigl(\frac{\partial T}{\partial x}\Bigr)^2 + g(x)\frac{\partial T}{\partial x}.$

Замена

$$u = \int F(T)\,dT, \qquad \text{где} \quad F(T) = \exp\Bigl[\int f(T)\,dT\Bigr],$$

приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Некоторые точные аналитические решения полученного уравнения (при произвольной функции g) приведены в разд. 1.1.10.

14. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(T)\Bigl(\frac{\partial T}{\partial x}\Bigr)^2 + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\frac{\partial T}{\partial x}.$

Замена

$$u = \int F(T)\,dT, \qquad \text{где} \quad F(T) = \exp\Bigl[\int f(T)\,dT\Bigr],$$

приводит для функции $u = u(x,t)$ к линейному уравнению вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\frac{\partial u}{\partial x},$$

которое рассматривается в разд. 1.1.10.

14a. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(T)\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + g(x,t)\dfrac{\partial T}{\partial x}$.

Замена

$$u = \int F(T)\,dT, \qquad \text{где} \quad F(T) = \exp\Bigl[\int f(T)\,dT\Bigr],$$

приводит для функции $u = u(x,t)$ к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

15. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{f(t)}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + g(t)T\ln T$.

Точные решения:

$$T(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g не указываются)

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + g\varphi,$$
$$\psi'_t = 2(n+1)f\varphi + g\psi.$$

Последовательно интегрируя, получим

$$\varphi(t) = e^G\Bigl(A - 4\int fe^G dt\Bigr)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^G + 2(n+1)e^G\int f\varphi e^{-G}dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

16. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Bigl[xg(t) + \dfrac{h(t)}{x}\Bigr]\dfrac{\partial T}{\partial x} + s(t)T\ln T + \bigl[x^2 p(t) + q(t)\bigr]T$.

Точные решения:

$$T(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + (2g+s)\varphi + p, \tag{1}$$
$$\psi'_t = s\psi + 2(f+h)\varphi + q. \tag{2}$$

При $p \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется. В общем случае уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведено много решений этого уравнения. После решения уравнения (1) определяется решение линейного уравнения (2) для функции $\psi = \psi(t)$.

17. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + cT^2 + f(t)T + g(t).$

1. Точные решения, содержащие экспоненту:

$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\omega x), \quad \omega = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f и g не указываются)

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + f\varphi + g, \tag{2}$$

$$\psi'_t = (a\omega^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{3}$$

Уравнение (2) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g.

В частности, при $g \equiv 0$ уравнение (2) является уравнением Бернулли, которое легко интегрируется. В другом случае при f, $g = \mathrm{const}$ частное решение уравнения (2) — константа $\varphi = \varphi_0$, которая является корнем квадратного уравнения $c\varphi_0^2 + f\varphi_0 + g = 0$. Замена $u = \varphi - \varphi_0$ приводит к уравнению Бернулли.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi = \psi(t)$ определяется по формуле

$$\psi(t) = C\exp\Big[\int(a\omega^2\varphi + 2c\varphi + f)\,dt\Big], \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

2. Точные решения, содержащие гиперболический косинус (A — любое):

$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}(\omega x + A), \quad \omega = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2}, \tag{5}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f и g не указываются)

$$\varphi'_t = c\varphi^2 - b\omega^2\psi^2 + f\varphi + g, \tag{6}$$

$$\psi'_t = (a\omega^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{7}$$

Из уравнения (7) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (6). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, $g = \mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

3. Точные решения, содержащие гиперболический синус (A — любое):

$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}(\omega x + A), \quad \omega = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2},$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + b\omega^2\psi^2 + f\varphi + g,$$
$$\psi'_t = (a\omega^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi.$$

4. Точные решения, содержащие тригонометрические функции (A — любое):

$$T(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\omega x + A), \quad \omega = \left(\frac{c}{a+b}\right)^{1/2}, \qquad (8)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + b\omega^2\psi^2 + f\varphi + g, \qquad (9)$$
$$\psi'_t = (-a\omega^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \qquad (10)$$

Из уравнения (10) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (9). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g = const это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

18. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t)\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + g(t)\dfrac{\partial T}{\partial x} + h(t)T + s(t).$

Точные решения:

$$T(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h, s не указываются)

$$\varphi'_t = 2(2f + a)\varphi^2 + h\varphi, \qquad (1)$$
$$\psi'_t = (4f\varphi + 2a\varphi + h)\psi + 2g\varphi, \qquad (2)$$
$$\chi'_t = (2a\varphi + h)\chi + f\psi^2 + g\psi + s. \qquad (3)$$

Уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Бернулли и легко интегрируется. После этого решения уравнений (2), (3) строятся последовательно (каждое из них линейно относительно искомой функции).

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

19. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT^4 \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x)T^5.$

1. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} + f(x)u = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$\xi = \int \frac{dx}{u^2}, \quad z = \frac{T}{u}$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к следующему виду:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = az^4 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Используя замену $v = z^{-3}$, получим уравнение 3.1.1.36:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(v^{-4/3}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right).$$

Точные решения этого уравнения см. в 3.1.1.38 при $m = -4/3$.

2. Точные решения в виде произведения (C, ω — любые):

$$T(x,t) = (4\omega t + C)^{-1/4} g(x),$$

где функция $g = g(x)$ определяется из уравнения Ермакова

$$ag''_{xx} + f(x)g + \omega g^{-3} = 0. \tag{2}$$

Если известно частное решение $u = u(x)$ линейного уравнения (1), то общее решение нелинейного уравнения (2) имеет вид (см., например, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 1995, 1997)

$$Ag^2 = -\frac{\omega}{a}u^2 + u^2\left(B + A\int \frac{dx}{u^2}\right)^2,$$

где A, B — произвольные постоянные ($A \neq 0$).

20. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T^{-4/3}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + f(x)T^{-1/3}.$

1. Замена $T = v^{-3}$ приводит к уравнению вида 3.1.4.19:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = av^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \tfrac{1}{3} f(x)v^5.$$

2. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} - \tfrac{1}{3} f(x)u = 0.$$

Преобразование

$$\xi = \pm\int \frac{dx}{u^2}, \quad z = Tu^3$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к уравнению 3.1.1.36

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right),$$

точные решения которого см. в 3.1.1.38 при $m = -4/3$.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

21. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = aT^m \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(t)T.$

Преобразование

$$T(t,x) = u(z,\tau)G(t), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G^m(t)\,dt,$$

где функции F и G определяются формулами

$$F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr], \quad G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.28:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

22. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr) + f(t)T.$

Преобразование

$$T(t,x) = u(x,\tau)F(t), \quad \tau = \int F^m(t)\,dt, \qquad F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(u^m \frac{\partial u}{\partial x}\Bigr).$$

При $m = -2$ об этом уравнении см. 3.1.1.32.

23. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr) + f(t)T^{1-m}.$

Замена $u = T^m$ приводит к уравнению вида 3.1.4.18:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\Bigl(\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr)^2 + mf(t),$$

которое допускает решения вида $u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)$.

24. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr) + f(t)T + g(t)T^{1-m}.$

Замена $u = T^m$ приводит к уравнению вида 3.1.4.18:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\Bigl(\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr)^2 + mf(t)u + mg(t),$$

которое допускает решения вида $u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)$.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

25. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^m\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + bT^{1+m} + f(t)T + g(t)T^{1-m}.$

При $b = 0$ см. уравнение 3.1.4.24.

Замена $u = T^m$ приводит к уравнению вида 3.1.4.17:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + bmu^2 + mf(t)u + mg(t),$$

которое допускает решения следующих типов:

$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\omega x),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}(\omega x + C),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}(\omega x + C),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\omega x + C),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, параметр ω является корнем квадратного уравнения, C — произвольная постоянная.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

26. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^m\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + f(x)T^{1+m}.$

Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$T = (\omega mt + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где ω, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается уравнением

$$a\psi''_{xx} + (m+1)f(x)\psi + \omega(m+1)\psi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \qquad \psi = \varphi^{m+1}.$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведены точные решения этого уравнения для некоторых функций $f(x)$.

27. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^m\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + xf(t)\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(t)T.$

Обобщение уравнения Ильковича на нелинейный случай с объемной химической реакцией.

Преобразование

$$T(t,x) = u(z,\tau)G(t), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G^m(t)\,dt,$$

где функции F и G определяются формулами

$$F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big], \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m\frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

В частном случае $m = -2$ это уравнение может быть преобразовано к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами (см. 3.1.1.32).

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

28. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\omega T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + f(t).$

Преобразование

$$T(x,t) = u(x,\tau) + F(t), \quad \tau = \int \exp\big[\omega F(t)\big]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.2.9:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\omega T}\frac{\partial T}{\partial x}\Big).$$

29. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\omega T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + f(t) + g(t)e^{-\omega T}.$

Замена $u = e^{\omega T}$ приводит к уравнению вида 3.1.4.18:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega f(t)u + \omega g(t),$$

которое допускает решения вида $u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)$.

30. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\omega T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + be^{\omega T} + f(t) + g(t)e^{-\omega T}.$

При $b = 0$ см. уравнение 3.1.4.29.

Замена $u = e^{\omega T}$ приводит к уравнению вида 3.1.4.17:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu^2 + \omega f(t)u + \omega g(t),$$

которое допускает решения следующих типов:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\mu x),\\ u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}(\mu x + C),\\ u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}(\mu x + C),\\ u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\cos(\mu x + C), \end{aligned}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, параметр μ является корнем квадратного уравнения, C — произвольная постоянная.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

31. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\omega T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + f(x)e^{\omega T}.$

Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$T = -\frac{1}{\omega}\ln(\omega t + C) + \varphi(x),$$

где ω, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \omega f(x)\psi + \omega = 0, \qquad \psi = e^{\omega\varphi}.$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

32. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(x)T^m \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

1. Точные решения в виде произведения (C, ω — любые):

$$T(x,t) = (m\omega t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера

$$\varphi''_{xx} + \omega\big[f(x)\big]^{-1}\varphi^{1-m} = 0. \tag{1}$$

При $m = 1$ решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = -\omega\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}d\xi + A\xi + B,$$

где A, B, x_0 — любые.

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $f(x)$.

2. Преобразование $u = T/x$, $\xi = 1/x$ приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(\xi)u^m\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \qquad F(\xi) = \xi^{4-m}f(1/\xi).$$

33. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(x)T^m \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(x)T^{m+1}$.

Точные решения в виде произведения (C, ω — любые):

$$T(x,t) = (m\omega t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(x)\varphi^m\varphi''_{xx} + g(x)\varphi^{m+1} + \omega\varphi = 0. \tag{1}$$

В частном случае $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^k$ уравнение (1) имеет вид

$$\varphi''_{xx} + (b/a)x^{k-n}\varphi + (\omega/a)x^{-n}\varphi^{1-m} = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много точных решений уравнения (2) для различных значений параметров n, m, k.

34. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(T)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

1. Уравнение допускает точные решения вида (ω, a, b — любые)

$$T = T(z), \qquad z = x + \omega t,$$
$$T = T(y), \qquad y = \frac{(x+a)^2}{t+b}.$$

2. Замена $u = \int \frac{dT}{f(T)}$ приводит к уравнению вида 3.1.4.43:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

где функция F задается параметрически

$$F(u) = f(T), \qquad u = \int \frac{dT}{f(T)}.$$

Для получения явной зависимости $F = F(u)$ из этих формул следует исключить T.

35. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = x^4 f\left(\dfrac{T}{x}\right)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Преобразование $u = T/x$, $\xi = 1/x$ приводит к более простому уравнению вида 3.1.4.34:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

36. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = T^4 f\left(\dfrac{T}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Преобразование

$$T(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^4 f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^5 f(u),$$

которое допускает решения типа бегущей волны $u = u(z + \omega t)$.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

37. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T^m\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + g(t)T^{1-m}$.

Точные решения:

$$T(x,t) = \left[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\right]^{1/m},$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = \frac{2(m+2)}{m}f\varphi^2, \qquad \psi'_t = 2f\varphi\psi + mg.$$

Интегрируя, получим

$$\varphi = \frac{1}{F}, \quad \psi = F^{-\frac{m}{m+1}}\left(A + m\int gF^{\frac{m}{m+1}}\,dt\right),$$
$$F = B - \frac{2(m+2)}{m}\int f\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

38. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)T^m\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big].$

1. Точные решения в виде произведения (C, ω — любые):

$$T(x,t) = (m\omega t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$[f(x)\varphi^m\varphi'_x]'_x + \omega\varphi = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$z = \int\frac{dx}{f(x)}, \quad \Phi = \varphi^{m+1}$$

приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$\Phi''_{zz} + F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \tag{2}$$

где функция $F = F(z)$ задается (параметрически) с помощью формул

$$F = \omega(m+1)f(x), \qquad z = \int\frac{dx}{f(x)}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, разд. 2.3, 2.7) приведено много точных решений уравнения (2) для различных функций $F = F(z)$.

2. Преобразование

$$T(x,t) = \big[\psi(x)\big]^{\frac{1}{m+1}}u(\xi,t), \quad \xi = \int\big[\psi(x)\big]^{\frac{m+2}{m+1}}dx, \qquad \psi(x) = \int\frac{dx}{f(x)},$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Big[F(\xi)u^m\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big],$$

где функция $F = F(\xi)$ задается (параметрически) с помощью формул

$$F = f[\psi(x)]^{\frac{3m+4}{m+1}}, \quad \xi = \int\big[\psi(x)\big]^{\frac{m+2}{m+1}}dx, \qquad \psi(x) = \int\frac{dx}{f(x)}.$$

39. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)T^m\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big] + g(x)T^{m+1}.$

Точные решения в виде произведения (C, ω — любые):

$$T(x,t) = (m\omega t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$[f(x)\varphi^m\varphi'_x]'_x + g(x)\varphi^{m+1} + \omega\varphi = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$z = \int\frac{dx}{f(x)}, \quad \Phi = \varphi^{m+1}$$

приводит (1) к уравнению

$$\Phi''_{zz} + F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} + G(z)\Phi = 0, \qquad (2)$$

где функции $F = F(z)$ и $G = G(z)$ задаются параметрически с помощью формул

$$\begin{cases} F = \omega(m+1)f(x), \\ z = \int \dfrac{dx}{f(x)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} G = (m+1)f(x)g(x), \\ z = \int \dfrac{dx}{f(x)}. \end{cases}$$

В частном случае $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^k$ уравнение (2) имеет вид

$$\Phi''_{zz} + Az^{\frac{n}{1-n}}\Phi^{\frac{1}{m+1}} + Bz^{\frac{n+k}{1-n}}\Phi = 0, \qquad n \neq 1, \qquad (3)$$

где $A = \omega a(m+1)\big[a(1-n)\big]^{\frac{n}{1-n}}$, $B = ab(m+1)\big[a(1-n)\big]^{\frac{n+k}{1-n}}$.

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведено много точных решений уравнения (3) для различных значений параметров n, m, k.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

40. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + g(t)\dfrac{\partial T}{\partial x} + h(t)T.$

Преобразование

$$T(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],\ z = x + \int g(t)\,dt,\ \tau = \int f(t)\exp\Big[m\int h(t)dt\Big]\,dt$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

41. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^m \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial T}{\partial x} + s(t)T.$

Преобразование

$$T(x,t) = u(z,\tau)S(t), \quad z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)S^m(t)\,dt,$$

где функции S и G определяются формулами

$$S(t) = \exp\Big[\int s(t)\,dt\Big], \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

При $m = -2$ см. уравнение 3.1.1.32.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

42. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)e^{\beta T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big] + g(x)e^{\beta T}.$

Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$T(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta t + C) + \varphi(x),$$

где β, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$[f(x)\psi'_x]'_x + \beta g(x)\psi + \beta = 0, \qquad \psi = e^{\beta\varphi}.$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

43. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big].$

Это уравнение часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса (f — коэффициент температуропроводности или диффузии) и теории фильтрации. При $f(T) = aT^{-2}$ см. уравнение 3.1.1.32, $f(T) = aT^m$ — уравнение 3.1.1.38.

1. Решения типа бегущей волны

$$T = T(z), \quad z = \pm x + \omega t,$$

определяются неявно по формуле

$$\int \frac{f(T)\,dT}{\omega T + C_1} = C_2 - z, \tag{1}$$

где ω, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\omega = 0$ соответствует стационарное решение.

2. Решения вида

$$T = T(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} \qquad (0 \leqslant x < \infty),$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\big[f(T)T'_z\big]'_z + \tfrac{1}{2}zT'_z = 0. \tag{2}$$

Решения указанного вида обычно соответствуют постоянным значениям T в начальных и граничных условиях для исходного уравнения в частных производных (T_0, $T_1 = \text{const}$):

$$\begin{array}{llll} T = T_0 & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = T_1 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T \to T_0 & \text{при} & x \to \infty & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

При этом граничные условия для уравнения (2) имеют вид

$$T = T_1 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad T \to T_0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{3}$$

При $f(T) = aT^{-1}$, $f(T) = aT^{-2}$, $f(T) = (\alpha T^2 + \beta T + \gamma)^{-1}$ общие решения уравнения (2) получил Х. Фуджита (H. Fujita, 1952). Об этих решениях см. в книге А. В. Лыкова (1967).

ТАБЛИЦА 3
Точные решения уравнения 3.1.4.43 для различных зависимостей $f = f(T)$, где $z = xt^{-1/2}$.

№	Функция $f = f(T)$	Решение $z = z(T)$	Условия
1	$\dfrac{n}{2}T^n - \dfrac{n}{2(n+1)}T^{2n}$	$1 - T^n$	$n > 0$
2	$\dfrac{n}{2(n+1)}\left[(1-T)^{n-1} - (1-T)^{2n}\right]$	$(1-T)^n$	$n > 0$
3	$\dfrac{n}{2(1-n)}T^{-2n} - \dfrac{n}{2}T^{-n}$	$T^{-n} - 1$	$0 < n < 1$
4	$\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi T\right)$	$\cos\left(\frac{1}{2}\pi T\right)$	
5	$\frac{1}{8}\sin(\pi T)\left[\pi T + \sin(\pi T)\right]$	$\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi T\right)$	
6	$\frac{1}{16}\sin^2(\pi T)\left[5 + \cos(\pi T)\right]$	$\cos^3\left(\frac{1}{2}\pi T\right)$	
7	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\pi T\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}\pi T\right) + \frac{1}{2}\pi T - 1\right]$	$1 - \sin\left(\frac{1}{2}\pi T\right)$	
8	$\dfrac{T\arccos T + 1}{2\sqrt{1-T^2}} - \dfrac{1}{2}$	$\arccos T$	
9	$\dfrac{\pi - 2(1-T)\arcsin(1-T)}{4\sqrt{2T-T^2}} - \dfrac{1}{2}$	$\arcsin(1-T)$	
10	$\dfrac{T\arcsin T}{4\sqrt{1-T^2}} + \dfrac{1}{4}T^2$	$\sqrt{1-T^2}$	
11	$\frac{1}{2}(1 - \ln T)$	$-\ln T$	

3. Опишем простой способ поиска функций $f(T)$, для которых уравнение (2) допускает точное аналитическое (частное) решение. Для этого проинтегрируем уравнение (2) по z, а затем сделаем преобразование годографа (переменную T будем считать независимой, а z — зависимой). В результате получим

$$f(T) = -\frac{1}{2}z'_T\left(\int z\,dT + A\right), \qquad A\text{ — любое.} \tag{4}$$

Подставляя в правую часть формулы (4) конкретную зависимость $z = z(T)$, будем получать однопараметрическое семейство функций $f(T)$, для которых уравнение (2) имеет решение $z = z(T)$. Явный вид решения $T = T(z)$ получается обращением зависимости $z = z(T)$.

Описанный метод разработал Ж. Филип (J. R. Philip, 1960), который получил большое число точных решений исходного уравнения для различных зависимостей $f = f(T)$. Некоторые его результаты, соответствующие задаче с начальным и граничными условиями (3) при $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, приведены ниже в табл. 3. Все решения записаны в неявном виде $z = z(T)$ в области их пространственной локализации $0 \leqslant T \leqslant 1$.

4. Опишем другой простой способ поиска функций $f(T)$, для которых уравнение (2) допускает точное аналитическое (частное) решение. Прямой проверкой можно убедиться, что уравнение (2) удовлетворяется, если положить

$$T = \phi'_z, \quad f(T) = \frac{s + \phi - z\phi'_z}{2\phi''_{zz}}, \tag{5}$$

где $\phi = \phi(z)$ — произвольная функция, s — произвольная постоянная. Выражения (5) представляют собой параметрическую форму задания зависимости $f = f(T)$, которая получается после исключения z.

Полагая, например, в формулах (5)

$$\phi(z) = T_0 z + \frac{1}{\omega}(T_0 - T_1)e^{-\omega z} \qquad (\omega > 0,\ T_1 > T_0),$$

после исключения z находим

$$f(T) = \frac{A}{T - T_0} + B + C\ln(T - T_0), \qquad T = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\omega z},$$

где $A = -\frac{1}{2}s\omega^{-1}$, $B = \frac{1}{2}\omega^{-2}\left[1 + \ln(T_1 - T_0)\right]$, $C = -\frac{1}{2}\omega^{-2}$. Отметим, что это решение удовлетворяет граничным условиям (3). Аналогичным образом могут быть построены и другие функции $f(T)$.

5. Еще один способ построения функций $f(T)$, для которых уравнение (2) допускает точное аналитическое решение, заключается в следующем. Пусть $\bar{T} = \bar{T}(z)$ — некоторое решение уравнения (2) с функцией $f(T)$. Тогда $\bar{T} = \bar{T}(z)$ будет также решением и более сложного уравнения $\left[F(T)T'_z\right]'_z + \frac{1}{2}zT'_z = 0$ при

$$F(T) = f(T) + Ag(T) \qquad (A\text{ — любое}), \tag{6}$$

где функция $g = g(T)$ задается параметрически формулами

$$g(T) = \frac{1}{\bar{T}'_z}, \quad T = \bar{T}(z). \tag{7}$$

Например, для степенной зависимости $f(T) = aT^m$ частным решением уравнения (2) будет функция $\bar{T} = bz^{2/m}$, где b — некоторая константа. Из формул (6), (7) получим, что $\bar{T}$ будет также являться решением уравнения (2) и при $f(T) = aT^m + AT^{\frac{m-2}{2}}$.

Для первого решения, приведенного в табл. 3, этот метод дает однопараметрическое семейство функций

$$f(T) = \frac{n}{2}T^n - \frac{n}{2(n+1)}T^{2n} + AT^{n-1},$$

для которых уравнение (2) имеет решение $z = 1 - T^n$.

6. Преобразование

$$\bar{t} = t - t_0, \quad \bar{x} = \int_{x_0}^{x} T(y,t)\,dy + \int_{t_0}^{t} f\bigl(T(x_0,\tau)\bigr)\left[\frac{\partial T}{\partial x}(x,\tau)\right]_{x=x_0} d\tau, \qquad \bar{T}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{T(x,t)} \tag{8}$$

переводит ненулевое решение $T(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar{T}(\bar{x},\bar{t})$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[\bar{f}(\bar{T})\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}\right], \qquad \bar{f}(T) = \frac{1}{T^2} f\left(\frac{1}{T}\right). \tag{9}$$

В частном случае степенной зависимости $f(T) = aT^m$ преобразование (8) приводит к уравнению (9), где $\bar{f}(T) = aT^{-m-2}$.

⊙ Литература к уравнению 3.1.4.43: Л. В. Овсянников (1978), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), W. Strampp (1982), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), N. H. Ibragimov (1994).

44. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right] + g(T).$

Это уравнение описывает нестационарную теплопроводность в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности и скорость реакции являются произвольными функциями температуры.

1. Точные решения и преобразования (групповая классификация) уравнений данного вида для различных функций $f = f(T)$, $g = g(T)$ подробно рассматривались в работах В. А. Дородницына (1979, 1982), В. А. Дородницына, С. Р. Свирщевского (1983), В. А. Галактионова, В. А. Дородницына, Г. Г. Еленина, С. П. Курдюмова, А. А. Самарского (1986), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994).

Конкретные уравнения этого вида см. в разд. 3.1.1–3.1.3.

2. Решения типа бегущей волны

$$T = T(z), \quad z = \pm x + \omega t,$$

определяются из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$[f(T)T'_z]'_z - \omega T'_z + g(T) = 0. \tag{1}$$

Замена

$$y(T) = \frac{1}{\omega} f(T) T'_z$$

приводит (1) к уравнению Абеля

$$yy'_T - y = \varphi(T), \qquad \varphi(T) = -\omega^{-2} f(T) g(T). \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $\varphi = \varphi(T)$.

$f(T)$, для которых уравнение (1) имеет решение $z = z(T)$. Явный вид решения $T = T(z)$ находится обращением зависимости $z = z(T)$.

Выбирая, например, $z = (1-T)^k$, из формулы (2) получим соответствующую функцию

$$f(T) = A(1-T)^{k-1} - \frac{k}{(n+1)(nk+1)}(1-T)^{k(n+1)}, \qquad A \text{ — любое.}$$

3. Другой способ построения функций $f(T)$, для которых уравнение (1) допускает точное аналитическое решение, заключается в следующем. Пусть $\bar{T} = \bar{T}(z)$ — некоторое решение уравнения (1) с функцией $f(T)$. Тогда $\bar{T} = \bar{T}(z)$ будет также решением и более сложного уравнения $(n+1)\left[F(T)T'_z\right]'_z + z^n T'_z = 0$ при

$$F(T) = f(T) + Ag(T) \qquad (A \text{ — любое}), \tag{3}$$

а функция $g = g(T)$ задается параметрически формулами

$$g(T) = \frac{1}{\bar{T}'_z}, \quad T = \bar{T}(z). \tag{4}$$

Например, для степенной зависимости $f(T) = aT^m$ частным решением уравнения (1) будет функция $\bar{T} = bz^{\frac{n+1}{m}}$, где b — некоторая константа. Из формул (3), (4) получим, что $\bar{T}$ будет также являться решением уравнения (1) и при $f(T) = aT^m + AT^{\frac{m-n-1}{n+1}}$.

4. При $n = -1$ существуют решения вида

$$T = T(\xi), \quad \xi = \ln|x| + \omega t,$$

которые определяются неявно по формулам

$$\int \frac{f(T)\,dT}{\omega T + F(T) + C_1} = \xi + C_2, \qquad F(T) = \int f(T)\,dT,$$

где ω, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\omega = 0$ соответствует стационарное решение.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

48. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = x^k f(t) \frac{\partial}{\partial x}\left(T^m \frac{\partial T}{\partial x}\right) + xg(t)\frac{\partial T}{\partial x} + h(t)T.$

Преобразование

$$T(t,x) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{2-k}(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции G и H определяются формулами

$$G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big], \quad H(t) = \exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.46:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z^k \frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

45. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big] + g(t)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int g(t)\,dt$, получим более простое уравнение вида 3.1.4.43:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[f(T)\frac{\partial T}{\partial z}\Big].$$

46. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big] + xg(t)\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Обобщение уравнения Ильковича на нелинейный случай.

Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int G^2(t)\,dt + A, \quad z = xG(t), \qquad \text{где} \quad G(t) = B\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

для функции $T(\tau, z)$ получим более простое уравнение вида 3.1.4.43:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[f(T)\frac{\partial T}{\partial z}\Big].$$

47. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = x^{1-n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big].$

К этому уравнению приводятся нелинейные задачи диффузионного пограничного слоя (f — аналог коэффициента диффузии, $n = 1, 2, 3$), которые описываются уравнением 3.1.4.57. При $n = 1$ см. уравнение 3.1.4.43, а при $f(T) = aT^m$ — уравнение 3.1.1.46.

1. При $n \neq -1$ решения вида

$$T = T(z), \quad z = xt^{-\frac{1}{n+1}} \qquad (0 \leqslant x < \infty)$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$(n+1)\big[f(T)T'_z\big]'_z + z^n T'_z = 0, \tag{1}$$

которое часто рассматривается с граничными условиями (3) из 3.1.4.43.

Общее решение уравнения (1) при $f(T) = a(T+b)^{-1}$, n — любое, приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993).

2. Опишем простой способ поиска функций $f(T)$, для которых уравнение (1) допускает точное аналитическое (частное) решение. Для этого проинтегрируем уравнение (1) по z, а затем сделаем преобразование годографа (переменную T будем считать независимой, а z — зависимой). В результате получим

$$f(T) = -\frac{1}{n+1} z'_T\Big(\int z^n\,dT + A\Big), \qquad A\text{ — любое.} \tag{2}$$

Подставляя в правую часть формулы (2) конкретную зависимость $z = z(T)$, будем получать однопараметрическое семейство функций

$f(T)$, для которых уравнение (1) имеет решение $z = z(T)$. Явный вид решения $T = T(z)$ находится обращением зависимости $z = z(T)$.

Выбирая, например, $z = (1 - T)^k$, из формулы (2) получим соответствующую функцию

$$f(T) = A(1-T)^{k-1} - \frac{k}{(n+1)(nk+1)}(1-T)^{k(n+1)}, \qquad A \text{ — любое.}$$

3. Другой способ построения функций $f(T)$, для которых уравнение (1) допускает точное аналитическое решение, заключается в следующем. Пусть $\bar{T} = \bar{T}(z)$ — некоторое решение уравнения (1) с функцией $f(T)$. Тогда $\bar{T} = \bar{T}(z)$ будет также решением и более сложного уравнения $(n+1)\big[F(T)T'_z\big]'_z + z^n T'_z = 0$ при

$$F(T) = f(T) + Ag(T) \qquad (A \text{ — любое}), \tag{3}$$

а функция $g = g(T)$ задается параметрически формулами

$$g(T) = \frac{1}{\bar{T}'_z}, \quad T = \bar{T}(z). \tag{4}$$

Например, для степенной зависимости $f(T) = aT^m$ частным решением уравнения (1) будет функция $\bar{T} = bz^{\frac{n+1}{m}}$, где b — некоторая константа. Из формул (3), (4) получим, что $\bar{T}$ будет также являться решением уравнения (1) и при $f(T) = aT^m + AT^{\frac{m-n-1}{n+1}}$.

4. При $n = -1$ существуют решения вида

$$T = T(\xi), \quad \xi = \ln|x| + \omega t,$$

которые определяются неявно по формулам

$$\int \frac{f(T)\,dT}{\omega T + F(T) + C_1} = \xi + C_2, \qquad F(T) = \int f(T)\,dT,$$

где ω, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\omega = 0$ соответствует стационарное решение.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

48. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = x^k f(t)\frac{\partial}{\partial x}\Big(T^m \frac{\partial T}{\partial x}\Big) + xg(t)\frac{\partial T}{\partial x} + h(t)T.$

Преобразование

$$T(t,x) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{2-k}(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции G и H определяются формулами

$$G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big], \quad H(t) = \exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.1.46:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z^k \frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

49. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(t)\varphi(T)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.4.34:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \varphi(T)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

50. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\varphi(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big] + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.4.43:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\varphi(T)\frac{\partial T}{\partial z}\Big].$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

51. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(T_x)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad T_x = \dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Замена $u(x,t) = T_x$ приводит к уравнению вида 3.1.4.43:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big].$$

2. Преобразование годографа

$$\bar{x} = T(x,t), \quad \bar{T}(\bar{x},t) = x$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \bar{f}(\bar{T}_{\bar{x}})\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2}, \qquad \bar{f}(z) = z^{-2}f(1/z).$$

Эти и другие преобразования подробно рассматривались в работах И. Ш. Ахатова, Р. К. Газизова, Н. Х. Ибрагимова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994). Там же указаны точные решения.

52. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(x)g(T)h(T_x)\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad T_x = \dfrac{\partial T}{\partial x}.$

Преобразование годографа (x принимается за зависимую переменную, а T — за независимую переменную)

$$x = u, \quad T = y$$

приводит к уравнению аналогичного вида для функции $u = u(y,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(y)f(u)\overline{h}(u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \text{где} \quad \overline{h}(z) = z^{-2}h(1/z).$$

53. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[F(T, T_x)\Big], \qquad T_x = \dfrac{\partial T}{\partial x}.$

1. Преобразование

$$\bar t = t - t_0,\ \ \bar x = -\int_{x_0}^{x} T(y,t)\,dy - \int_{t_0}^{t} F\big(T(x_0,\tau), T_x(x_0,\tau)\big)\,d\tau,\ \ \bar T(\bar x, \bar t) = \frac{1}{T(x,t)}$$

переводит (ненулевое) решение $T(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar T(\bar x, \bar t)$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar T}{\partial \bar t} = \frac{\partial}{\partial \bar x}\Big[\bar F(\bar T, \bar T_{\bar x})\Big],$$

где

$$\bar F(T, T_x) = T F(T^{-1}, T^{-3} T_x). \tag{1}$$

2. В частном случае

$$F(T, T_x) = g(T)(T_x)^k$$

из формулы (1) получим

$$\bar F(T, T_x) = \bar g(T)(T_x)^k, \qquad \bar g(T) = T^{1-3k} g(T^{-1}).$$

⊙ Литература: W. Strampp (1982), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), N. H. Ibragimov (1994).

54. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right).$

Замена $u(x,t) = \dfrac{\partial T}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 3.1.4.51:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad f(z) = F'_z(z).$$

Это и другие преобразования подробно рассматривались в работах И. Ш. Ахатова, Р. К. Газизова, Н. Х. Ибрагимова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994). Там же указаны некоторые точные решения.

55. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = F\left(x,\, T,\, \dfrac{\partial T}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right).$

Пусть вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T = F(x, T, T'_x, T''_{xx})$$

после линейного преобразования

$$x = \varphi(z), \quad T = \psi(z) u$$

и последующего сокращения обеих частей на функцию $\psi(z)$ приводится к автономному виду

$$u = \mathcal{F}(u, u'_z, u''_{zz}),$$

где $\mathcal{F} = F/\psi$. Тогда рассматриваемое уравнение в частных производных таким же преобразованием

$$x = \varphi(z), \quad T(x,t) = \psi(z)u(z,t)$$

проводится к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{F}\Big(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big),$$

которое допускает частные решения типа бегущей волны $u = u(z + \omega t)$.

Сказанное позволяет использовать различные известные преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Э. Камке, 1976; В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 1995, 1997) для построения точных решений уравнений в частных производных. Если исходное уравнение было линейным, то такие преобразования будут приводить к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

56. $f(x)\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[\varphi(T)\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big]$.

Это уравнение встречается в нелинейных задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен капель и пузырей с потоком).

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^2(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Big[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.4.43:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\varphi(T)\frac{\partial T}{\partial z}\Big].$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

57. $f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial T}{\partial x} + g(x)y^n\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[\varphi(T)\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big]$.

Это уравнение встречается в нелинейных задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен твердых частиц и капель), x — координата, направленная вдоль поверхности тела, y — координата, направленная по нормали к поверхности тела.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Big[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.1.4.47:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = z^{1-n}\frac{\partial}{\partial z}\Big[\varphi(T)\frac{\partial T}{\partial z}\Big].$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

3.1.5. Уравнения гиперболического типа

Предварительные замечания. Нелинейные уравнения тепло- и массопереноса вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t, T) \tag{1}$$

с помощью преобразования

$$x = \xi \sqrt{a/\varepsilon}, \quad T(x, t) = \exp\Bigl(-\frac{1}{2\varepsilon} t\Bigr) w(\xi, t),$$

приводятся к канонической форме

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + F(\xi, t, w). \tag{2}$$

Здесь использованы обозначения

$$F(\xi, t, w) = \frac{1}{4\varepsilon^2} w + \frac{1}{\varepsilon} e^{\beta t} f\bigl(\xi\sqrt{a/\varepsilon},\, t,\, e^{-\beta t} w\bigr), \qquad \beta = \frac{1}{2\varepsilon}.$$

В уравнении (2) отсутствует первая производная по времени.

Далее в разд. 3.1.5 считается, что уравнения гиперболического типа на предварительном этапе были приведены к канонической форме.

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a[k^2 m T - k(m+1)T^m + T^{2m-1}].$

Точные решения (A, C — любые):

$$T(x, t) = \left\{\frac{1}{mk} + A \exp\Bigl[Cx \pm t\sqrt{C^2 + ak^2 m(m-1)^2}\Bigr]\right\}^{\frac{1}{1-m}}.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + e^{kt}(a + be^{kt})T^m.$

Точные решения (C — любое):

$$T(x, t) = \left\{C \exp\Bigl[\frac{k(m-1)}{2(m+1)}(t \pm x)\Bigr] + \frac{1}{k\sqrt{b}}\bigl[a + \tfrac{1}{2}(1-m)be^{kt}\bigr]\right\}^{\frac{2}{1-m}},$$

$$T(x, t) = \left\{C \exp\Bigl[\frac{k(m-1)}{2(m+1)}(t \pm x)\Bigr] - \frac{1}{k\sqrt{b}}\bigl[a + \tfrac{1}{2}(1-m)be^{kt}\bigr]\right\}^{\frac{2}{1-m}}.$$

3. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT + be^{kt}T^m.$

Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = \Big\{ C \exp\Big[\frac{m-1}{4k(m+1)}\Big(\pm\sqrt{[k^2-(m-1)^2a][k^2-(m+3)^2a]}\,x + [k^2+(m-1)(m+3)a]\,t\Big)\Big] + (m-1)\sqrt{\frac{b}{k^2-(m-1)^2a}}\,e^{kt/2}\Big\}^{\frac{2}{1-m}},$$

$$T(x,t) = \Big\{ C \exp\Big[\frac{m-1}{4k(m+1)}\Big(\pm\sqrt{[k^2-(m-1)^2a][k^2-(m+3)^2a]}\,x + [k^2+(m-1)(m+3)a]\,t\Big)\Big] - (m-1)\sqrt{\frac{b}{k^2-(m-1)^2a}}\,e^{kt/2}\Big\}^{\frac{2}{1-m}}.$$

4. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{k^2}{n^2+4}T + e^{kt}(a^2e^{kt} + nab - b^2e^{-kt})T^{-3}, \qquad n \neq 0.$

Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Big(kt + \frac{knx}{\sqrt{n^2+4}}\Big) + \frac{\sqrt{n^2+4}}{k}\Big(\frac{2a}{n}e^{kt} + b\Big)},$$

$$T(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Big(kt - \frac{knx}{\sqrt{n^2+4}}\Big) + \frac{\sqrt{n^2+4}}{k}\Big(\frac{2a}{n}e^{kt} + b\Big)},$$

$$T(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Big(kt + \frac{knx}{\sqrt{n^2+4}}\Big) - \frac{\sqrt{n^2+4}}{k}\Big(\frac{2a}{n}e^{kt} + b\Big)},$$

$$T(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Big(kt - \frac{knx}{\sqrt{n^2+4}}\Big) - \frac{\sqrt{n^2+4}}{k}\Big(\frac{2a}{n}e^{kt} + b\Big)}.$$

5. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dfrac{k^2}{n^2-4}T + e^{kt}(a^2e^{kt} + nab + b^2e^{-kt})T^{-3}, \quad |n| > 2.$

Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Big(kt + \frac{knx}{\sqrt{n^2-4}}\Big) + \frac{\sqrt{n^2-4}}{k}\Big(\frac{2a}{n}e^{kt} + b\Big)},$$

$$T(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Big(kt - \frac{knx}{\sqrt{n^2-4}}\Big) + \frac{\sqrt{n^2-4}}{k}\Big(\frac{2a}{n}e^{kt} + b\Big)},$$

$$T(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Big(kt + \frac{knx}{\sqrt{n^2-4}}\Big) - \frac{\sqrt{n^2-4}}{k}\Big(\frac{2a}{n}e^{kt} + b\Big)},$$

$$T(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Big(kt - \frac{knx}{\sqrt{n^2-4}}\Big) - \frac{\sqrt{n^2-4}}{k}\Big(\frac{2a}{n}e^{kt} + b\Big)}.$$

6. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + ae^{kt-\mu\psi(t)}e^{\mu T} + \psi''(t)$.

Точные решения (C_1, C_2, ν — любые):

$$T(x,t) = \psi(t) - \frac{k}{\mu}t - \frac{2}{\mu}\ln\Bigl(C_1 + C_2 x \pm \sqrt{C_2^2 + \tfrac{1}{2}\mu a\, t}\Bigr),$$
$$T(x,t) = \psi(t) - \frac{k}{\mu}t - \frac{2}{\mu}\ln\Bigl(C_1 e^{-\nu t} + C_2 e^{\nu x} - \frac{\mu a}{8\nu^2 C_1}e^{\nu t}\Bigr).$$

7. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k\beta e^{\mu T} + (\alpha e^{kt} + \mu\beta^2)e^{2\mu T}$.

Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\mu}\ln\Bigl[Ce^{kt} + \frac{\alpha}{2\beta}(t \pm x)e^{kt} - \frac{\mu\beta}{k}\Bigr].$$

8. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta e^{\mu T} + (\alpha e^{kt} + \gamma)e^{2\mu T}$.

1. Решения при $k^2\gamma - \beta^2\mu \neq 0$ (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\mu}\ln\Bigl[C\exp\Bigl(\pm\frac{k^2\gamma - \beta^2\mu}{2k\gamma}x + \frac{k^2\gamma + \beta^2\mu}{2k\gamma}t\Bigr) + \frac{\alpha\beta\mu}{k^2\gamma - \beta^2\mu}e^{kt} - \frac{\gamma}{\beta}\Bigr].$$

2. Решения при $k^2\gamma - \beta^2\mu = 0$ (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\mu}\ln\Bigl[Ce^{kt} + \frac{\alpha k}{2\beta}(t \pm x)e^{kt} - \frac{\mu\beta}{k^2}\Bigr].$$

9. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta e^{kt}e^{\mu T} + (\alpha e^{2kt} + \gamma)e^{2\mu T}$.

Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\mu}\ln\Bigl[C\exp\Bigl(\pm\frac{4k^2\alpha - \beta^2\mu}{4k\alpha}x - \frac{\beta^2\mu}{4k\alpha}t\Bigr) + \frac{\beta\gamma\mu}{4k^2\alpha - \beta^2\mu}e^{-kt} - \frac{\alpha}{\beta}e^{kt}\Bigr].$$

10. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta e^{\mu T} + (\alpha t + \gamma)e^{2\mu T}$.

Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\mu}\ln\Bigl\{C\exp\Bigl[-\frac{\beta^2\mu}{2\alpha}(t \pm x)\Bigr] - \frac{1}{\beta}(\alpha t + \gamma) + \frac{\alpha^2}{\beta^3\mu}\Bigr\}.$$

11. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta e^{\mu T} + (\alpha e^{kx} + \gamma)e^{2\mu T}$.

1. Решения при $k^2\gamma + \beta^2\mu \neq 0$ (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\mu}\ln\Bigl[C\exp\Bigl(\pm\frac{k^2\gamma + \beta^2\mu}{2k\gamma}t + \frac{k^2\gamma - \beta^2\mu}{2k\gamma}x\Bigr) - \frac{\alpha\beta\mu}{k^2\gamma + \beta^2\mu}e^{kx} - \frac{\gamma}{\beta}\Bigr].$$

2. Решения при $k^2\gamma + \beta^2\mu = 0$ (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\mu}\ln\Bigl[Ce^{kx} + \frac{\alpha k}{2\beta}(x \pm t)e^{kx} + \frac{\mu\beta}{k^2}\Bigr].$$

12. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta e^{kx} e^{\mu T} + (\alpha e^{2kx} + \gamma) e^{2\mu T}.$

Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\mu} \ln\left[C \exp\left(\pm \frac{4k^2\alpha + \beta^2\mu}{4k\alpha} t + \frac{\beta^2\mu}{4k\alpha} x\right) - \frac{\beta\gamma\mu}{4k^2\alpha + \beta^2\mu} e^{-kx} - \frac{\alpha}{\beta} e^{kx}\right].$$

13. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta e^{\mu T} + (\alpha x + \gamma) e^{2\mu T}.$

Точные решения (C — любое):

$$T(x,t) = -\frac{1}{\mu} \ln\left\{C \exp\left[\frac{\beta^2\mu}{2\alpha}(x \pm t)\right] - \frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) - \frac{\alpha^2}{\beta^3\mu}\right\}.$$

3.2. Уравнения с несколькими пространственными переменными*

3.2.1. Двумерные уравнения с произвольными параметрами

1. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = (\alpha + \beta T)\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \gamma T^2 + \delta T + \varepsilon.$

Уравнение допускает решения вида

$$T(x,y,t) = f(t) + g(t)\Theta(x,y).$$

Здесь $\Theta(x,y)$ — любое решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \varkappa\Theta = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где $\varkappa = \gamma/\beta$ ($\beta \neq 0$); об этом уравнении см. разд. 2.3.2. Функции $f(t)$ и $g(t)$ находятся из автономной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f'_t &= \gamma f^2 + \delta f + \varepsilon, \\ g'_t &= (\gamma f + \delta - \alpha\varkappa) g. \end{aligned} \tag{2}$$

Первое уравнение этой системы не зависит от функции $g(t)$ и представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. После определения $f(t)$ решается второе уравнение (2), которое линейно относительно функции $g(t)$.

Функции $f(t)$ и $g(t)$ имеют различный вид в зависимости от значений параметров уравнения. Выделим пять возможных случаев, ниже C_1, C_2 — произвольные постоянные.

---

* Некоторые точные решения (с цилиндрической и сферической симметрией) вида $T = T(r,t)$, где r — радиальная координата, приводятся в разд. 3.1.1–3.1.4.

1°. При $\gamma = \delta = 0$ имеем

$$f(t) = C_1 + \varepsilon t, \quad g(t) = C_2 e^{-\alpha\varkappa t}.$$

2°. При $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$ имеем

$$f(t) = C_1 e^{\delta t} - \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad g(t) = C_2 e^{(\delta - \alpha\varkappa)t}.$$

3°. При $\gamma \neq 0$, $\delta^2 - 4\gamma\varepsilon = \mu^2 > 0$ ($\mu > 0$) имеем

$$f(t) = \frac{s_1 + s_2 C_1 e^{\mu t}}{1 + C_1 e^{\mu t}}, \quad g(t) = \frac{C_2}{1 + C_1 e^{\mu t}} e^{-(\gamma s_2 + \alpha\varkappa)t}, \qquad s_{1,2} = \frac{-\delta \pm \mu}{2\gamma}.$$

4°. При $\gamma \neq 0$, $\delta^2 - 4\gamma\varepsilon = 0$ имеем

$$f(t) = -\frac{\delta}{2\gamma} - \frac{1}{C_1 + \gamma t}, \quad g(t) = \frac{C_2}{C_1 + \gamma t} \exp\bigl[\bigl(\tfrac{1}{2}\delta - \alpha\varkappa\bigr)t\bigr].$$

5°. При $\gamma \neq 0$, $\delta^2 - 4\gamma\varepsilon = -\mu^2 < 0$ ($\mu > 0$) имеем

$$f(t) = \frac{\mu}{2\gamma} \operatorname{tg}\bigl(\tfrac{1}{2}\mu t + C_1\bigr) - \frac{\delta}{2\gamma}, \quad g(t) = C_2 \frac{\exp\bigl[\bigl(\frac{1}{2}\delta - \alpha\varkappa\bigr)t\bigr]}{\cos\bigl(\frac{1}{2}\mu t + C_1\bigr)}.$$

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994).

2. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T\Bigl(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\Bigr) - \alpha\Bigl[\Bigl(\frac{\partial T}{\partial x}\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{\partial T}{\partial y}\Bigr)^2\Bigr] - \beta.$

1°. Точное решение:

$$T(x,y,t) = C_1 - \beta t + C_2 \exp\bigl[\alpha(\mu^2 + \nu^2)\bigl(C_1 t - \tfrac{1}{2}\beta t^2\bigr)\bigr] e^{\mu x + \nu y},$$

где μ, ν, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Точные решения при $\beta = 0$:

$$T(x,y,t) = \frac{1}{A+t} + B(A+t)e^{\mu x} \pm \frac{\sin(\mu y + \eta_0)}{A+t},$$

$$T(x,y,t) = A \operatorname{cth}\theta(t) + B \operatorname{sh}\theta(t)\, e^{\mu x} \pm A \frac{\sin(\mu y + \eta_0)}{\operatorname{sh}\theta(t)},$$

$$T(x,y,t) = A \operatorname{ctg}\theta(t) + B \sin\theta(t)\, e^{\mu x} \pm A \frac{\sin(\mu y + \eta_0)}{\sin\theta(t)},$$

$$T(x,y,t) = \frac{2A}{\operatorname{sh}[2\theta(t)]} \pm A \operatorname{th}\theta(t) \operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA \operatorname{cth}\theta(t) \sin(\mu y + \eta_0),$$

$$T(x,y,t) = -\frac{2A}{\operatorname{sh}[2\theta(t)]} \pm A \operatorname{cth}\theta(t) \operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA \operatorname{th}\theta(t) \sin(\mu y + \eta_0),$$

$$T(x,y,t) = \frac{2A}{\sin[2\theta(t)]} \pm A \operatorname{tg}\theta(t) \operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA \operatorname{ctg}\theta(t) \sin(\mu y + \eta_0),$$

$$T(x,y,t) = -\frac{2A}{\sin[2\theta(t)]} \pm A \operatorname{ctg}\theta(t) \operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA \operatorname{tg}\theta(t) \sin(\mu y + \eta_0),$$

где A, B, μ, ξ_0, η_0, τ_0 — произвольные постоянные, $\theta(t) = \alpha\mu^2 At + \tau_0$, s — параметр, принимающий значения 1 или -1.

Делая в указанных формулах замену $x \rightleftarrows y$, можно получить другую группу решений (которые здесь не выписываются).

3°. Уравнение допускает решения в форме

$$T(x,y,t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y).$$

В частности при $\varphi''_{xx} = \nu\varphi$, $\psi''_{yy} = -\nu\psi$, где ν — произвольная константа, имеем (A_1, A_2, B_1, B_2 — любые)

$$\varphi(x) = A_1 \operatorname{ch} \mu x + A_2 \operatorname{sh} \mu x, \quad \psi(y) = B_1 \cos \mu y + B_2 \sin \mu y \quad (\nu = \mu^2 > 0),$$
$$\varphi(x) = A_1 \cos \mu x + A_2 \sin \mu x, \quad \psi(y) = B_1 \operatorname{ch} \mu y + B_2 \operatorname{sh} \mu y \quad (\nu = -\mu^2 < 0).$$

Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$f'_t = \alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 - \alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,$$
$$g'_t = \alpha\nu f g,$$
$$h'_t = -\alpha\nu f h,$$

где $s = \operatorname{sign}\nu$. Можно понизить порядок этой системы на два и представить ее в виде (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$f = \Phi(h), \quad g = C_2/h, \quad h'_t = -\alpha\nu h\Phi(h),$$

где

$$\Phi(h) = \pm\sqrt{C_1 + (A_1^2 - sA_2^2)\frac{C_2^2}{h^2} + \frac{2\beta}{\alpha\nu}\ln|h| + (B_1^2 + sB_2^2)h^2}.$$

При $\beta = 0$ в некоторых случаях можно получить решение в явном виде (см. п. 2°).

4°. Уравнение допускает решения в форме

$$T(x,y,t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y) + u(t)\theta(x)\chi(y). \qquad (1)$$

При $\varphi''_{xx} = 4\nu\varphi$, $\psi''_{yy} = -4\nu\psi$, $\theta''_{xx} = \nu\theta$, $\chi''_{yy} = -\nu\chi$, где ν — произвольная константа, в формуле (1) следует положить

при $\nu = \mu^2 > 0$	при $\nu = -\mu^2 < 0$
$\varphi(x) = A_1 \operatorname{ch} 2\mu x + A_2 \operatorname{sh} 2\mu x$	$\varphi(x) = A_1 \cos 2\mu x + A_2 \sin 2\mu x$
$\psi(y) = B_1 \cos 2\mu y + B_2 \sin 2\mu y$	$\psi(y) = B_1 \operatorname{ch} 2\mu y + B_2 \operatorname{sh} 2\mu y$
$\theta(x) = C_1 \operatorname{ch} \mu x + C_2 \operatorname{sh} \mu x$	$\theta(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$
$\chi(y) = D_1 \cos \mu y + D_2 \sin \mu y$	$\chi(y) = D_1 \operatorname{ch} \mu y + D_2 \operatorname{sh} \mu y$

Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений ($s = \operatorname{sign}\nu$)

$$f'_t = -4\alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 + 4\alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,$$
$$g'_t = -4\alpha\nu f g + \alpha\nu a_1(D_1^2 + sD_2^2)u^2,$$
$$h'_t = 4\alpha\nu f h - \alpha\nu a_2(C_1^2 - sC_2^2)u^2,$$
$$u'_t = -2\alpha\nu(a_3 g - a_4 h)u.$$

Произвольные постоянные A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 связаны двумя соотношениями

$$2A_1C_1C_2 = A_2(C_1^2 + sC_2^2), \quad 2B_1D_1D_2 = B_2(D_1^2 - sD_2^2).$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 определяются формулами

$$a_1 = \frac{C_1^2 + sC_2^2}{2A_1}, \quad a_2 = \frac{D_1^2 - sD_2^2}{2B_1}, \quad a_3 = A_2\frac{C_1^2 - sC_2^2}{C_1C_2}, \quad a_4 = B_2\frac{D_1^2 + sD_2^2}{D_1D_2},$$

при $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $C_1C_2 \neq 0$, $D_1D_2 \neq 0$.

Если $A_1 = 0$ $(A_2 \neq 0)$, то следует положить $a_1 = C_1C_2/A_2$. Если $B_1 = 0$ $(B_2 \neq 0)$, то $a_2 = D_1D_2/B_2$. Если $C_1 = 0$ $(C_2 \neq 0)$, то $a_3 = -A_1$. Если $C_2 = 0$ $(C_1 \neq 0)$, то $a_3 = A_1$. Если $D_1 = 0$ $(D_2 \neq 0)$, то $a_4 = -B_1$. Если $D_2 = 0$ $(D_1 \neq 0)$, то $a_4 = B_1$.

5°. Уравнение имеет точные решения типа бегущей волны: $T = T(\xi)$, $\xi = k_1x + k_2y + \omega t$, где k_1, k_2, ω — любые.

6°. Уравнение имеет точные решения вида

$$T(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t).$$

В частном случае $\varphi(t) = \psi(t) \equiv 0$ функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\chi(t)$ определяются путем решения автономной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f_t' &= \alpha(2fh - 2f^2 - g^2), & h_t' &= \alpha(2fh - 2h^2 - g^2),\\ g_t' &= -2\alpha g(f+h), & \chi_t' &= 2\alpha(f+h)\chi - \beta, \end{aligned}$$

которая полностью интегрируется.

В работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994) рассматривались решения, которые являются частными случаями решений, указанных в пп. 3°, 4°.

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(T\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big).$

1°. Уравнение имеет точные решения вида (A, B, C — любые)

$$T(x,y,t) = Ax + By + (A^2 + B^2)t + C.$$

2°. Имеются точные решения типа бегущей волны (k_1, k_2, ω — любые):

$$T = T(\xi), \qquad \xi = k_1x + k_2y + \omega t,$$

где $T(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\omega T_\xi' = (k_1^2 + k_2^2)(TT_\xi')_\xi'.$$

Решение этого уравнения можно записать в неявном виде

$$\xi(T) = B + \frac{k_1^2 + k_2^2}{\omega^2}\big(\omega T - A\ln|A + \omega T|\big),$$

где A, B — произвольные постоянные.

3°. Уравнение допускает решения вида

$$T(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2,$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ определяются путем решения автономной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = 6f^2 + 2fh + g^2, \tag{1}$$

$$g'_t = 6(f+h)g, \tag{2}$$

$$h'_t = 6h^2 + 2fh + g^2. \tag{3}$$

Из уравнений (1), (3) следует, что $f'_t - h'_t = 6(f+h)(f-h)$. Далее с помощью уравнения (2) находим $f = h + Ag$, где A — произвольная постоянная. Используя это равенство, исключим из (2) и (3) функцию h. В итоге имеем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для $g(t)$

$$3gg''_{tt} - 5g'^2_t - 36(1+A^2)g^4 = 0.$$

Решая это уравнение с помощью замены $w(g) = g'^2$, получим (B — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} &g'_t = g\Phi(g), \qquad \Phi(g) = \pm\sqrt{Bg^{4/3} + 36(1+A^2)g^2}, \\ &h = \tfrac{1}{12}\Phi(g) - \tfrac{1}{2}Ag, \quad f = \tfrac{1}{12}\Phi(g) + \tfrac{1}{2}Ag, \end{aligned} \tag{4}$$

где первое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, и его решение можно выписать в неявном виде.

В частном случае $B = 0$ имеем решение в явном виде (C — произвольная постоянная):

$$f(t) = \frac{\mu + A}{2(C-\mu t)}, \quad g(t) = \frac{1}{C-\mu t}, \quad h(t) = \frac{\mu - A}{2(C-\mu t)}, \qquad \mu = \pm\sqrt{1+A^2}.$$

4°. Уравнение допускает решения вида

$$T(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ определяются путем решения следующей нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} f'_t &= 6f^2 + 2fh + g^2, & \varphi'_t &= 2(3f+h)\varphi + 2g\psi, \\ g'_t &= 6(f+h)g, & \psi'_t &= 2g\varphi + 2(f+3h)\psi, \\ h'_t &= 6h^2 + 2fh + g^2, & \chi'_t &= \varphi^2 + \psi^2 + 2(f+h)\chi. \end{aligned}$$

Первые три уравнения решаются независимо (см. п. 3°).

5°. Уравнение допускает решения вида $T(x,y,t) = (At+B)^{-1}\Theta(x,y)$, где A, B — произвольные постоянные, а стационарное уравнение для функции Θ выписано в 3.2.1.8 при $n = \alpha = 1$.

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(\alpha T+\beta)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(\alpha T+\beta)\dfrac{\partial T}{\partial y}\right].$

Это двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса, когда коэффициент температуропроводности зависит от температуры по линейному закону $a(T) = \alpha T + \beta$.

Замена $U = \alpha T + \beta$ приводит к уравнению 3.2.1.3:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{T}\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)\right].$

1°. Точные решения типа бегущей волны:

$$T(\xi) = -\frac{\alpha(k_1^2+k_2^2)}{\omega(\xi+A)}, \quad \xi = k_1x + k_2y + \omega t,$$

$$T(\xi) = \left\{A + B\exp\left[\frac{\omega\xi}{\alpha A(k_1^2+k_2^2)}\right]\right\}^{-1},$$

где A, B, k_1, k_2, ω — произвольные постоянные.

2°. Уравнение имеет точное решение в виде произведения

$$T(x,y,t) = (A\alpha t + B)e^{\Theta(x,y)},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ является решением стационарного уравнения

$$\Delta\Theta - Ae^{\Theta} = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

которое встречается в теории горения. О решении этого уравнения см. 4.1.1.2.

3°. Уравнение имеет точные решения

$$T(x,y,t) = \left[\frac{1}{A+t} + B(A+t)e^{\mu x} \pm \frac{\sin(\mu y+\eta_0)}{A+t}\right]^{-1},$$

$$T(x,y,t) = \left[A\operatorname{cth}\theta(t) + B\operatorname{sh}\theta(t)\,e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y+\eta_0)}{\operatorname{sh}\theta(t)}\right]^{-1},$$

$$T(x,y,t) = \left[A\operatorname{ctg}\theta(t) + B\sin\theta(t)\,e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y+\eta_0)}{\sin\theta(t)}\right]^{-1},$$

$$T(x,y,t) = \left[\frac{2A}{\operatorname{sh}[2\theta(t)]} \pm A\operatorname{th}\theta(t)\operatorname{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\operatorname{cth}\theta(t)\sin(\mu y+\eta_0)\right]^{-1},$$

$$T(x,y,t) = \left[-\frac{2A}{\operatorname{sh}[2\theta(t)]} \pm A\operatorname{cth}\theta(t)\operatorname{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\operatorname{th}\theta(t)\sin(\mu y+\eta_0)\right]^{-1},$$

$$T(x,y,t) = \left[\frac{2A}{\sin[2\theta(t)]} \pm A\operatorname{tg}\theta(t)\operatorname{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\operatorname{ctg}\theta(t)\sin(\mu y+\eta_0)\right]^{-1},$$

$$T(x,y,t) = \left[-\frac{2A}{\sin[2\theta(t)]} \pm A\operatorname{ctg}\theta(t)\operatorname{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\operatorname{tg}\theta(t)\sin(\mu y+\eta_0)\right]^{-1},$$

где $\theta(t) = \alpha\mu^2 At + \tau_0$, A, B, μ, ξ_0, η_0, τ_0 — произвольные постоянные, а s — параметр, принимающий значения 1 или -1.

Делая в указанных формулах замену $x \rightleftarrows y$, можно получить другую группу решений (которые здесь не выписываются).

4°. Преобразование $T = 1/U$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U \Delta U - \alpha\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big)^2\Big].$$

Некоторые точные решения этого уравнения см. в 3.2.1.2, пп. 4°, 6°.

6. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{\alpha T + \beta}\frac{\partial T}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{\alpha T + \beta}\frac{\partial T}{\partial y}\Big).$

Это двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса, когда коэффициент температуропроводности задается гиперболической зависимостью от температуры: $a(T) = \dfrac{1}{\alpha T + \beta}$.

Замена $U = \alpha T + \beta$ приводит к уравнению вида 3.2.1.5:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial y}\Big).$$

7. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big] + \beta T^2.$

Замена $T = 1/U$ приводит к уравнению 3.2.1.2 для функции U.

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994).

8. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(T^n\frac{\partial T}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(T^n\frac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big].$

Это двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса, когда коэффициент температуропроводности зависит от температуры по степенному закону $a(T) = \alpha T^n$ (показатель n может быть целым, дробным и отрицательным).

1°. Имеются точные решения типа бегущей волны:

$$T = T(\xi), \qquad \xi = k_1 x + k_2 y + \omega t.$$

Зависимость $T(\xi)$ задается в неявном виде:

$$\alpha(k_1^2 + k_2^2)\int \frac{T^n\,dT}{\omega T + A} = \xi + B,$$

где k_1, k_2, ω, A, B — произвольные постоянные.

2°. Уравнение допускает решения в виде произведения

$$T(x,y,t) = f(t)\Theta(x,y), \qquad f(t) = (A\alpha n t + B)^{-1/n}.$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ — любое решение двумерного стационарного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Theta^n\frac{\partial \Theta}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\Theta^n\frac{\partial \Theta}{\partial y}\Big) + A\Theta = 0.$$

Последнее уравнение при $n \neq -1$ можно преобразовать к следующей форме:

$$\Delta w + A(n+1)w^{\frac{1}{n+1}} = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad w = \Theta^{n+1}.$$

9. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\mu T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\mu T}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big].$

Это двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса, в случае когда коэффициент температуропроводности экспоненциальным образом зависит от температуры $a(T) = \alpha e^{\mu T}$.

1°. Имеются точные решения типа бегущей волны: $T = T(\xi)$, где $\xi = k_1x + k_2y + \omega t$ (k_1, k_2, ω — любые).

2°. Уравнение имеет точное решение в виде суммы

$$T(x,y,t) = f(t) + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y), \qquad f(t) = -\frac{1}{\mu}\ln(A\alpha t + B).$$

Здесь A, B, μ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ — любое решение уравнения Пуассона

$$\Delta\Theta + A = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решении этого линейного уравнения см. в разд. 2.2.

10. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\mu T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\mu T}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big] + \beta e^{\mu T} + \gamma + \delta e^{-\mu T}.$

Это двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса в случае, когда коэффициент температуропроводности экспоненциальным образом зависит от температуры $a(T) = \alpha e^{\mu T}$, при наличии тепловых источников.

Замена $T = \dfrac{1}{\mu}\ln U$, где $U = U(x,y)$ — новая зависимая переменная, приводит к уравнению вида 3.2.1.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\Big) + \beta\mu U^2 + \mu\gamma U + \mu\delta.$$

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994).

11. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(|\nabla T|\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(|\nabla T|\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big] + \beta T^2.$

Здесь $|\nabla T|^2 = \Big(\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)^2$.

1°. Точное решение:

$$T(x,y,t) = \frac{1}{C_1 - \beta t} + \frac{C_2}{(C_1 - \beta t)^2}\Theta(x,y),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $\Theta(x,y)$ — любое решение стационарного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial y}\Big)+\varkappa\Theta^2=0,\qquad \varkappa=\frac{\beta}{\alpha}\operatorname{sign}C_2.$$

2°. Точное решение имеет вид

$$T(x,y,t)=f(t)+g(t)\Theta(x,y).$$

Здесь функции $f(t)$, $g(t)$ определяются формулами

$$f(t)=\frac{1}{B-\beta t},\quad g(t)=\frac{\beta}{(B-\beta t)[A+C(B-\beta t)]},$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ — любое решение стационарного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial y}\Big)\pm\varkappa\Theta^2=\mu\Theta,\qquad \varkappa=\frac{\beta}{\alpha},\quad \mu=\frac{A}{\alpha}.$$

⊙ Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994).

3.2.2. Двумерные уравнения с произвольными функциями

1. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t}=a\Big(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\Big)+f(T).$

Это двумерное нестационарное уравнение теории горения.

1°. Точные решения типа бегущей волны (A, B, ω — любые):

$$T=T(\xi),\qquad \xi=Ax+By+\omega t,$$

где функция $T(\xi)$ удовлетворяет автономному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$a(A^2+B^2)T''_{\xi\xi}-\omega T'_\xi+f(T)=0.$$

О решениях последнего уравнения см. в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

2°. См. уравнение 3.2.2.3 при $a=b$, $n=m=0$.

2. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+f(T)\Big[\Big(\frac{\partial T}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)^2\Big].$

Замена

$$U=\int F(T)\,dT,\qquad \text{где}\quad F(T)=\exp\Big[\int f(T)\,dT\Big],$$

приводит к линейному уравнению для функции $U=U(x,y,t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2},$$

которое рассматривается в разд. 1.2.

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+f(T).$

При $n\neq 2$, $m\neq 2$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi,t),\qquad \xi^2=\frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n}+\frac{4}{b(2-m)^2}y^{2-m},$$

где функция $T(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+\frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}+f(T),\qquad A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}.$$

О решении этого уравнения при $A=0$ см. в 3.1.1.1–3.1.1.5, 3.1.2.1, 3.1.2.2, 3.1.3.1, 3.1.3.2, 3.1.4.1.

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\mu x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\nu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+f(T).$

При $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi,t),\qquad \xi^2=\frac{4}{a\mu^2}e^{-\mu x}+\frac{4}{b\nu^2}e^{-\nu y},$$

где функция $T(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}+f(T).$$

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\nu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+f(T).$

При $n\neq 2$, $\nu\neq 0$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi,t),\qquad \xi^2=\frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n}+\frac{4}{b\nu^2}e^{-\nu y},$$

где функция $T(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+\frac{n}{2-n}\frac{1}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}+f(T).$$

О решении этого уравнения при $n=0$ см. в 3.1.1.1–3.1.1.5, 3.1.2.1, 3.1.2.2, 3.1.3.1, 3.1.3.2, 3.1.4.1.

6. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\big[aT+f(t)\big]\Big(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\Big)+bT^2+g(t)T+h(t).$

Здесь $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ — произвольные функции; a, b — произвольные параметры ($a\neq 0$).

Уравнение допускает точные решения вида

$$T(x,y,t)=\varphi(t)+\psi(t)\Theta(x,y),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются из системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t=b\varphi^2+g(t)\varphi+h(t),\qquad (1)$$
$$\psi'_t=\big[b\varphi-\beta f(t)+g(t)\big]\psi,\qquad \beta=b/a,\qquad (2)$$

а функция $\Theta(x,y)$ — любое решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \beta\Theta = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Первое уравнение системы (1) не зависит от ψ и представляет собой уравнение Риккати для функции φ. В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $g(t)$ и $h(t)$. После решения уравнения (1), подставляя зависимость $\varphi = \varphi(t)$ в (2), получим линейное уравнение относительно $\psi = \psi(t)$, которое легко интегрируется.

В частном случае $b = 0$ решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t) = \exp\bigl[G(t)\bigr]\Bigl\{A + \int h(t)\exp\bigl[-G(t)\bigr]\,dt\Bigr\}, \quad G(t) = \int g(t)\,dt,$$
$$\psi(t) = B\exp\bigl[G(t) - \beta F(t)\bigr], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

О решении линейного стационарного уравнения (3) см. в разд. 2.3.1, 2.3.2.

7. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial t} = aT\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\Big) - a\Big[\Big(\frac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)^2\Big] + f(t).}$

1°. Уравнение имеет точные решения вида

$$T(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(\xi), \qquad \xi = \beta x + \gamma y.$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, имеем $\Theta(\xi) = e^{\xi}$, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = f(t), \qquad \psi'_t = a(\beta^2+\gamma^2)\varphi\psi.$$

В результате интегрирования находим решение

$$T(x,y,t) = \varphi(t) + A\exp\Bigl[\beta x + \gamma y + a(\beta^2+\gamma^2)\int\varphi(t)\,dt\Bigr], \quad \varphi(t) = \int f(t)\,dt + B,$$

где A, B, β, γ — произвольные постоянные.

2°. Уравнение допускает также точные решения следующего вида:

$$T(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)(A_1 \operatorname{ch}\mu x + A_2 \operatorname{sh}\mu x) + \chi(t)(B_1\cos\mu y + B_2\sin\mu y),$$
$$T(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)(A_1\cos\mu x + A_2\sin\mu x) + \chi(t)(B_1\operatorname{ch}\mu y + B_2\operatorname{sh}\mu y),$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, μ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ определяются путем решения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (здесь не приводятся).

3°. Уравнение допускает решения вида

$$T(x,y,t)=\varphi(t)+\psi(t)F(x)+\chi(t)G(y)+\eta(t)H(x)P(y),$$

где

$$F(x)=A_1\cos 2\mu x+A_2\sin 2\mu x,\qquad G(y)=B_1\operatorname{ch}2\mu y+B_2\operatorname{sh}2\mu y,$$
$$H(x)=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x,\qquad P(y)=D_1\operatorname{ch}\mu y+D_2\operatorname{sh}\mu y,$$

где произвольные постоянные A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, μ связаны двумя соотношениями, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, $\eta(t)$ удовлетворяют системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (здесь не приводятся).

8. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(T^n\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(T^n\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big]+f(t)T.}$

Это двумерное нестационарное уравнение теплопроводности, когда коэффициент температуропроводности зависит от температуры по степенному закону $a(T)=aT^n$ при наличии нестационарного объемного источника (тепловыделения).

1°. Уравнение имеет точные решения вида

$$T(x,y,t)=\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big]\big[\Theta(x,y)\big]^{\frac{1}{n+1}},\qquad (1)$$

где функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Theta=0,\qquad \Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решении этого линейного стационарного уравнения см. разд. 2.1.1.

2°. Другие точные решения в виде произведения функций:

$$T(x,y,t)=\varphi(t)\big[\Theta(x,y)\big]^{\frac{1}{n+1}},\qquad (2)$$

где функция $\varphi(t)$ определяется из уравнения Бернулли (A — произвольная постоянная)

$$\varphi'_t-f(t)\varphi+Aa\varphi^{n+1}=0,\qquad (3)$$

а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\Delta\Theta+A(n+1)\Theta^{\frac{1}{n+1}}=0,\qquad \Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Общее решение уравнения (2) дается формулой

$$\varphi(t)=\exp\big[F(t)\big]\Big\{Aan\int\exp\big[nF(t)\big]\,dt+B\Big\}^{-1/n},\quad F(t)=\int f(t)\,dt,$$

где B — произвольная постоянная.

3°. Преобразование

$$T(x,y,t)=F(t)U(x,y,\tau),\quad \tau=\int F^n(t)\,dt,\qquad F(t)=\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 3.2.1.8:

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}=a\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(U^n\frac{\partial U}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(U^n\frac{\partial U}{\partial y}\Big)\Big].$$

9. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\mu T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\mu T}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big] + f(t).$

Это двумерное нестационарное уравнение теплопроводности, когда коэффициент температуропроводности экспоненциальным образом зависит от температуры $a(T) = ae^{\mu T}$, при наличии нестационарного объемного источника (тепловыделения).

1°. Уравнение имеет точное решение в виде суммы

$$T(x,y,t) = \varphi(t) + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi'_t + A(a/\mu)\exp(\mu\varphi) - f(t) = 0, \tag{1}$$

а функция $\Theta(x,y)$ является решением двумерного уравнения Пуассона

$$\Delta\Theta + A = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{1}{\mu}\ln\Big\{B + Aa\int\exp\big[\mu F(t)\big]\,dt\Big\}, \quad F(t) = \int f(t)\,dt. \tag{3}$$

О решении линейного стационарного уравнения (2) см. разд. 2.2.2.

Отметим, что в уравнение (2) и в выражение (3) входят произвольные постоянные A и B.

2°. Преобразование

$$T(x,y,t) = U(x,y,\tau) + F(t), \quad \tau = \int\exp[\mu F(t)]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 3.2.1.9:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\mu U}\frac{\partial U}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\mu U}\frac{\partial U}{\partial y}\Big)\Big].$$

10. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(T)\,\mathbf{L}[T] + g(t)T + h(t).$

Здесь $\mathbf{L}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным x, y (который не зависит от t).

Уравнение имеет точные решения вида

$$T(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x,y),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются формулами (A — произвольная постоянная)

$$\varphi(t) = e^{G(t)}\Big[A + \int h(t)e^{-G(t)}\,dt\Big], \qquad \psi(t) = Be^{G(t)}, \qquad G(t) = \int g(t)\,dt,$$

а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет линейному стационарному уравнению

$$\mathbf{L}[\Theta] = 0.$$

Замечание 1. В рассматриваемом уравнении порядок линейного оператора $\mathbf{L}$ и число пространственных переменных может быть любым. Коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ могут зависеть от пространственных переменных.

Замечание 2. В уравнении вместо $f(T)$ может стоять произвольная функция вида $f(x,y,t,T)$. При этом в частном случае $f(x,y,t,T)=f_1(t)+aT$, $\mathbf{L}=\Delta+b$, где Δ — оператор Лапласа, a, b — некоторые постоянные, получим уравнение вида 3.2.2.6.

3.2.3. Трехмерные уравнения

В этом разделе div, ∇ и Δ — операторы дивергенции, градиента и Лапласа, записанные в декартовых координатах x, y, z (вместо декартовых могут быть использованы сферические и другие ортогональные системы координат в пространстве).

1. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\Delta T+f(t)T\ln T+g(t)T.}$

Замена $T=e^U$ приводит к частному случаю уравнения 3.2.3.2:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a\Delta U+a|\nabla U|^2+f(t)U+g(t). \tag{1}$$

Поэтому исходное уравнение имеет точные решения вида

$$T(x_1,x_2,x_3,t)=\exp\left[\sum_{n,m=1}^{3}\varphi_{nm}(t)x_nx_m+\sum_{n=1}^{3}\psi_n(t)x_n+\chi(t)\right].$$

Замечание. При $f(t)=b$, где $b=\text{const}$, уравнение (1) имеет также точные решения в виде суммы функций различных аргументов:

$$U(x_1,x_2,x_3,t)=\varphi(t)+\theta(x_1,x_2,x_3).$$

Здесь $\varphi(t)$ определяется формулой

$$\varphi(t)=Ae^{bt}+e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt,\qquad (A\text{ — любое}),$$

а $\theta(x_1,x_2,x_3)$ — любое решение стационарного уравнения

$$a\Delta\Theta+a|\nabla\Theta|^2+b\Theta=0.$$

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t}=a\Delta T+f(t)|\nabla T|^2+g(t)T+h(t).}$

Уравнение имеет точные решения вида

$$T(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{k,l=1}^{3}\varphi_{kl}(t)x_kx_l+\sum_{k=1}^{3}\psi_k(t)x_k+\chi(t).$$

Замечание. Решения такого же вида имеет более общее уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\sum_{n,m=1}^{3}a_{nm}(t)\frac{\partial^2T}{\partial x_n\partial x_m}+\sum_{n=1}^{3}b_n(t)\left(\frac{\partial T}{\partial x_n}\right)^2+\sum_{n=1}^{3}c_n(t)\frac{\partial T}{\partial x_n}+g(t)T+h(t).$$

3. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + f(T)|\nabla T|^2.$

Замена

$$U = \int F(T)\,dT, \qquad \text{где} \quad F(T) = \exp\Bigl[\int f(T)\,dT\Bigr],$$

приводит к линейному уравнению для функции $U = U(x,y,z,t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U,$$

которое рассматривается в разд. 1.4.1–1.4.3.

4. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(by^m \dfrac{\partial T}{\partial y}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl(cz^n \dfrac{\partial T}{\partial z}\Bigr) + f(T).$

1°. При $m \neq 2$, $n \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi, t), \qquad \xi^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{4\,y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{4\,z^{2-n}}{c(2-n)^2},$$

где функция $T(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi} + f(T), \qquad A = \frac{2(4-m-n)}{(2-m)(2-n)}.$$

О решении этого уравнения при $A = 0$ см. в 3.1.1.1–3.1.1.5, 3.1.2.1, 3.1.2.2, 3.1.3.1, 3.1.3.2, 3.1.4.1.

2°. При $m \neq 2$, $n \neq 2$ существуют решения вида

$$T = T(x, \xi, t), \qquad \xi^2 = \frac{4\,y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{4\,z^{2-n}}{c(2-n)^2},$$

где функция $T(x,\xi)$ определяется двумерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi} + f(T), \qquad A = \frac{4-mn}{(2-m)(2-n)}.$$

5. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ax^n \dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(by^m \dfrac{\partial T}{\partial y}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl(cz^l \dfrac{\partial T}{\partial z}\Bigr) + f(T).$

При $n \neq 2$, $m \neq 2$, $l \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\Bigl[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-l}}{c(2-l)^2}\Bigr],$$

где функция $T(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi} + f(T), \qquad A = 2\Bigl(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-l}\Bigr) - 1.$$

О решении этого уравнения при $A=0$ см. 3.1.1.1–3.1.1.5, 3.1.2.1, 3.1.2.2, 3.1.3.1, 3.1.3.2, 3.1.4.1.

6. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)+f(T).$

При $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi,t),\qquad \xi^2=4\Big(\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2}+\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big),$$

где функция $T(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}+f(T).$$

7. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^{n}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^{m}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)+f(T).$

При $n\neq 2$, $m\neq 2$, $\nu\neq 0$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi,t),\qquad \xi^2=4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big],$$

где функция $T(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+\frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}+f(T),\qquad A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}.$$

О решении этого уравнения при $A=0$ см. 3.1.1.1–3.1.1.5, 3.1.2.1, 3.1.2.2, 3.1.3.1, 3.1.3.2, 3.1.4.1.

8. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^{n}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)+f(T).$

При $n\neq 2$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi,t),\qquad \xi^2=4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big],$$

где функция $T(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+\frac{n}{2-n}\frac{1}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}+f(T).$$

О решении этого уравнения при $n=0$ см. 3.1.1.1–3.1.1.5, 3.1.2.1, 3.1.2.2, 3.1.3.1, 3.1.3.2, 3.1.4.1.

9. $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\alpha T\Delta T-\alpha|\nabla T|^2-\beta.$

Существуют точные решения вида

$$T(x,y,z,t)=Ax+By+Cz-[\alpha(A^2+B^2+C^2)+\beta]t+D,$$
$$T(x,y,z,t)=A-\beta t+B\exp\big[\alpha(\varkappa^2+\mu^2+\nu^2)\big(At-\tfrac{1}{2}\beta t\big)\big]e^{\varkappa x+\mu y+\nu z},$$

где A, B, C, D, $\varkappa$, μ, ν — произвольные постоянные.

В 3.2.3.10 указаны также решения другого вида.

10. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T\Delta T + f(t)|\nabla T|^2 + g(t)T + h(t).$

Уравнение имеет точные решения вида

$$T(x_1,x_2,x_3,t) = \sum_{k,l=1}^{3} \varphi_{kl}(t)x_k x_l + \sum_{k=1}^{3} \psi_k(t)x_k + \chi(t).$$

Замечание. Решения такого же вида имеет более общее уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{n,m=1}^{3} \left[a_{nm}(t)T + b_{nm}(t)\right] \frac{\partial^2 T}{\partial x_n \partial x_m} + \sum_{n=1}^{3} c_n(t)\left(\frac{\partial T}{\partial x_n}\right)^2 + \sum_{n=1}^{3} s_n(t)\frac{\partial T}{\partial x_n} + g(t)T + h(t).$$

11. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = [aT + f(t)]\Delta T + bT^2 + g(t)T + h(t).$

Здесь $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ — произвольные функции; a, b — произвольные параметры ($a \neq 0$). Частный случай уравнения 3.2.3.12 при $\mathbf{L}\,[T] \equiv \Delta T$.

Отметим, что при $f(t) \equiv \text{const}$, $g(t) \equiv \text{const}$, $h(t) \equiv \text{const}$ это уравнение рассмотрено в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994).

12. $\displaystyle \frac{\partial T}{\partial t} = [aT + f(t)]\,\mathbf{L}\,[T] + bT^2 + g(t)T + h(t).$

Здесь $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ — произвольные функции; a, b — произвольные параметры ($a \neq 0$); $\mathbf{L}\,[T]$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (любого) порядка, зависящий только от пространственных переменных $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{L}\,[\text{const}] \equiv 0$:

$$\mathbf{L}\,[T] \equiv \sum_{n,m=1}^{3} p_{nm}(\vec{x})\frac{\partial^2 T}{\partial x_n \partial x_m} + \sum_{n=1}^{3} q_n(\vec{x})\frac{\partial T}{\partial x_n}, \qquad \vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Уравнение допускает точные решения вида

$$T(x_1,x_2,x_3,t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x_1,x_2,x_3),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются из системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = b\varphi^2 + g(t)\varphi + h(t), \tag{1}$$

$$\psi'_t = \big[b\varphi - \beta f(t) + g(t)\big]\psi, \qquad \beta = b/a, \tag{2}$$

а функция $\Theta(x_1,x_2,x_3)$ — любое решение линейного стационарного уравнения

$$\mathbf{L}\,[\Theta] + \beta\Theta = 0. \tag{3}$$

Первое уравнение системы (1) не зависит от ψ и представляет собой уравнение Риккати для функции φ. В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $g(t)$ и $h(t)$. После решения уравнения (1), подставляя зависимость $\varphi = \varphi(t)$ в (2), получим линейное уравнение относительно $\psi = \psi(t)$, которое легко интегрируется.

В частном случае $b = 0$ решение системы (1), (2) дается следующими формулами:

$$\varphi(t) = \exp\bigl[G(t)\bigr]\left\{A + \int h(t)\exp\bigl[-G(t)\bigr]\,dt\right\}, \quad G(t) = \int g(t)\,dt,$$

$$\psi(t) = B\exp\bigl[G(t) - \beta F(t)\bigr], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

В частном случае $\mathbf{L} \equiv \Delta$ о решении линейного стационарного уравнения (3) см. в разд. 2.3.3.

13. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha\,\mathrm{div}\bigl(T^n\nabla T\bigr) + f(t)T.$

Это трехмерное нестационарное уравнение теплопроводности, когда коэффициент температуропроводности зависит от температуры по степенному закону $a(T) = \alpha T^n$, при наличии нестационарного объемного источника (тепловыделения).

1°. Уравнение имеет точные решения вида

$$T(x,y,z,t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]\bigl[\Theta(x,y,z)\bigr]^{\frac{1}{n+1}}, \qquad (1)$$

где функция $\Theta(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Theta = 0.$$

О решении этого линейного стационарного уравнения см. разд. 2.1.2.

2°. Другие точные решения в виде произведения функций:

$$T(x,y,z,t) = \varphi(t)\bigl[\Theta(x,y,z)\bigr]^{\frac{1}{n+1}}, \qquad (2)$$

где функция $\varphi(t)$ определяется из уравнения Бернулли

$$\varphi'_t - f(t)\varphi + A\alpha\varphi^{n+1} = 0. \qquad (3)$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x,y,z)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\Delta\Theta + A(n+1)\Theta^{\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Общее решение уравнения (3) дается формулой

$$\varphi(t) = \exp\bigl[F(t)\bigr]\left\{A\alpha n\int \exp\bigl[nF(t)\bigr]\,dt + B\right\}^{-1/n}, \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где B — произвольная постоянная.

3°. Преобразование

$$T(x,y,z,t) = F(t)U(x,y,z,\tau), \quad \tau = \int F^n(t)\,dt, \qquad F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]$$

приводит к более простому уравнению $\dfrac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha\,\mathrm{div}(U^n\nabla U)$.

14. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha \operatorname{div}(T^n \nabla T) + f(t)T + g(t)T^{1-n}.$

Замена $U = T^n$ приводит к частному случаю уравнения 3.2.3.10

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U \Delta U + \frac{\alpha}{n}|\nabla U|^2 + nf(t)U + ng(t).$$

15. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha \operatorname{div}(e^{\mu T} \nabla T) + f(t).$

Это трехмерное нестационарное уравнение теплопроводности, когда коэффициент температуропроводности экспоненциальным образом зависит от температуры $a(T) = \alpha e^{\mu T}$, при наличии нестационарного объемного источника (тепловыделения).

1°. Уравнение имеет точное решение

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu}\int f(t)\,dt + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x, y, z),$$

где функция $\Theta = \Theta(x, y, z)$ — любое решение уравнения Лапласа $\Delta\Theta = 0$.

2°. Уравнение имеет более сложное решение в виде суммы

$$T(x, y, z, t) = \varphi(t) + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x, y, z),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi'_t + A(\alpha/\mu)\exp(\mu\varphi) - f(t) = 0. \qquad (1)$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\Theta = \Theta(x, y, z)$ является решением уравнения Пуассона

$$\Delta\Theta + A = 0. \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{1}{\mu}\ln\left\{B + A\alpha\int\exp\bigl[\mu F(t)\bigr]\,dt\right\}, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt. \quad (3)$$

О решении линейного стационарного уравнения (2) см. разд. 2.2.3.

Отметим, что в уравнение (2) и в выражение (3) входят произвольные постоянные A и B.

3°. Преобразование

$$T(x, y, z, t) = U(x, y, z, \tau) + F(t), \quad \tau = \int\exp[\mu F(t)]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению $\dfrac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha \operatorname{div}(e^{\mu U}\nabla U)$.

16. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\,\mathrm{div}\big(e^{\mu T}\nabla T\big) + be^{\mu T} + g(t) + h(t)e^{-\mu T}$.

Замена $U = e^{\mu T}$ приводит к уравнению вида 3.2.3.11 для функции $U = U(x,y,z,t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = aU\Delta U + b\mu U^2 + \mu g(t)U + \mu h(t).$$

Поэтому исходное уравнение имеет решения вида

$$T(x,y,z,t) = \frac{1}{\mu}\ln[\varphi(t) + \psi(t)\Theta(x,y,z)].$$

Отметим, что при $g(t) \equiv \mathrm{const}$, $h(t) \equiv \mathrm{const}$ исходное уравнение рассмотрено в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994).

17. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = f(t)\,\mathbf{N}_\beta[T] + g(t)T$.

Здесь $\mathbf{N}_\beta[T]$ — произвольный однородный нелинейный дифференциальный оператор степени β относительно T (т. е. $\mathbf{N}_\beta[\alpha T] = \alpha^\beta\,\mathbf{N}[T]$, $\alpha = \mathrm{const}$), действующий только по пространственным переменным x, y, z (который не зависит от t).

Преобразование

$$T(x,y,z,t) = G(t)U(x,y,z,\tau),\quad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt,\quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \mathbf{N}_\beta[U], \tag{1}$$

которое допускает точные решения в виде произведения функций $U = \varphi(\tau)\Theta(x,y,z)$.

Замечание 1. В рассматриваемом уравнении порядок (относительно производных) нелинейного оператора $\mathbf{N}_\beta$ и число пространственных переменных может быть любым. Коэффициенты оператора $\mathbf{N}_\beta$ могут зависеть от пространственных переменных.

Замечание 2. Если оператор $\mathbf{N}_\beta$ не зависит явно от пространственных координат, то уравнение (1) имеет также точные решения типа бегущей волны: $U = U(\xi)$, где $\xi = k_1x + k_2y + k_3z + \omega\tau$. Ниже приведены два примера таких операторов $\mathbf{N}_\beta$:

$$\mathbf{N}[T] = a\,\mathrm{div}(T^{\beta-1}\nabla T) + b|\nabla T|^\beta + cT^\beta,$$
$$\mathbf{N}[T] = a\,\mathrm{div}(|\nabla T|^{\beta-1}\nabla T) + bT^\mu|\nabla T|^{\beta-\mu},$$

где a, b, c, μ — некоторые постоянные.

18. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)T = \Delta T + f(T)|\nabla T|^2.}$

Здесь $\vec{v}$ — произвольная вектор-функция, зависящая от пространственных координат и времени (которая не зависит от T).

Замена

$$w = \int F(T)\,dT, \qquad \text{где} \quad F(T) = \exp\Bigl[\int f(T)\,dT\Bigr],$$

приводит к линейному уравнению конвективного тепло- и массопереноса для функции $w = w(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)w = \Delta w.$$

19. $\boldsymbol{\dfrac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)T = a\Delta T + a|\nabla T|^2 + f(\vec{x}, t).}$

Здесь $\vec{v}$ — произвольная вектор-функция, зависящая от пространственных координат и времени (которая не зависит от T).

Замена $w = e^T$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)w = a\Delta w + f(\vec{x}, t)w.$$

4. Нелинейные стационарные уравнения тепло- и массопереноса

4.1. Двумерные уравнения

4.1.1. Уравнения вида $\Delta T = f(T)$

1. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \alpha T^n$.

Уравнение теории массопереноса с объемной реакцией n-го порядка в плоском случае. Это уравнение встречается также в теории горения и является частным случаем уравнения 4.1.4.1 при $f(T) = \alpha T^n$. При $n = 0$ см. разд. 2.2, а при $n = 1$ — разд. 2.3.

1. Точное решение:

$$T(x, y) = (Ax + By + C)^{\frac{2}{1-n}},$$

где A и C — произвольные постоянные, а параметр B выражается через A с помощью соотношения

$$A^2 + B^2 = \frac{\alpha(n-1)^2}{2(n+1)}.$$

2. Имеются точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = Ax + By + C,$$

где зависимость $T = T(\xi)$ задается неявно с помощью формулы

$$\int \left[D + \frac{2\alpha T^{n+1}}{(n+1)(A^2 + B^2)}\right]^{-1/2} dT = \xi,$$

A, B, C, D — произвольные постоянные ($n \neq -1$).

3. Имеются точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \sqrt{(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} T'_{\xi} = \alpha T^n.$$

2. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \alpha e^{\beta T}$.

Это уравнение встречается в теории горения и является частным случаем уравнения 4.1.4.1 при $f(T) = \alpha e^{\beta T}$.

1. Точные решения:

$$T(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2(A^2+B^2)}{\alpha\beta(Ax+By+C)^2}\Big],\qquad \alpha\beta>0,$$
$$T(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2(A^2+B^2)}{\alpha\beta\cos^2(Ax+By+C)}\Big],\qquad \alpha\beta>0,$$
$$T(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2(A^2+B^2)}{\alpha\beta\,\mathrm{sh}^2(Ax+By+C)}\Big],\qquad \alpha\beta>0,$$
$$T(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{-2(A^2+B^2)}{\alpha\beta\,\mathrm{ch}^2(Ax+By+C)}\Big],\qquad \alpha\beta<0,$$
$$T(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\Big(-\frac{8C}{\alpha\beta}\Big)-\frac{2}{\beta}\ln\big[(x+A)^2+(y+B)^2+C\big],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2. Исходное уравнение связано с линейным уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\beta\frac{\partial T}{\partial y}=\big(\tfrac{1}{2}\alpha\beta\big)^{1/2}\exp\big(\tfrac{1}{2}\beta T\big)\sin U, \tag{2}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}-\tfrac{1}{2}\beta\frac{\partial T}{\partial x}=\big(\tfrac{1}{2}\alpha\beta\big)^{1/2}\exp\big(\tfrac{1}{2}\beta T\big)\cos U. \tag{3}$$

Пусть имеется (частное) решение $U=U(x,y)$ уравнения Лапласа (1). Тогда (2) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $T=T(y)$ с параметром x. Оно приводится к линейному уравнению с помощью замены $w=\exp\big(-\frac{1}{2}\beta T\big)$. В результате получим

$$T=-\frac{2}{\beta}F-\frac{2}{\beta}\ln\Big[\Psi(x)-k\int e^{-F}\sin U\,dy\Big],\qquad F=\int\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)\,dy;$$

при интегрировании x считается параметром, $k=\big(\frac{1}{2}\alpha\beta\big)^{1/2}$. Функция $\Psi(x)$ определяется после подстановки этого выражения в уравнение (3).

⊙ Литература: Д. А. Франк-Каменецкий (1987), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983).

3. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\alpha\,\mathrm{sh}(\beta T)$.

Частный случай уравнения 4.1.4.1 при $f(T)=\alpha\,\mathrm{sh}(\beta T)$.

1. Имеются точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi=Ax+By+C,$$

где зависимость $T=T(\xi)$ задается неявно с помощью формулы

$$\int\Big[D+\frac{2\alpha\,\mathrm{ch}(\beta T)}{\beta(A^2+B^2)}\Big]^{-1/2}dT=\xi,$$

A, B, C, D — произвольные постоянные.

2. Имеются точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \sqrt{(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}T'_\xi = \alpha\,\mathrm{sh}(\beta T).$$

3. Исходное уравнение связано с уравнением 4.1.1.5

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \alpha \sin(\beta U) \qquad (1)$$

преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sin\left(\tfrac{1}{2}\beta U\right)\mathrm{ch}\left(\tfrac{1}{2}\beta T\right),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial x} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cos\left(\tfrac{1}{2}\beta U\right)\mathrm{sh}\left(\tfrac{1}{2}\beta T\right).$$

⊙ Литература: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), A. C. Ting, H. H. Cheb, Y. C. Lee (1987).

4. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \alpha T \ln(\beta T).}$

Частный случай уравнения 4.1.4.1 при $f(T) = \alpha T \ln(\beta T)$.

Сделав замену $U = \ln(\beta T)$, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = \alpha U. \qquad (1)$$

1. Уравнение (1) имеет точные решения полиномиального вида:

$$U(x) = \tfrac{1}{4}\alpha(x + A)^2 + \tfrac{1}{2},$$
$$U(y) = \tfrac{1}{4}\alpha(y + A)^2 + \tfrac{1}{2},$$
$$U(x, y) = \tfrac{1}{4}\alpha(x + A)^2 + \tfrac{1}{4}\alpha(y + B)^2 + 1,$$
$$U(x, y) = A(x+B)^2 \pm \sqrt{A\alpha - 4A^2}\,(x+B)(y+C) + (\tfrac{1}{4}\alpha - A)(y+C)^2 + \tfrac{1}{2},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2. Уравнение (1) имеет решения типа «бегущей волны»:

$$U(x, y) = F(\xi), \qquad \xi = Ax + By + C.$$

Здесь функция $F = F(\xi)$ задается неявно с помощью формулы

$$\xi = \int \left[De^{-2F} + \frac{\alpha}{A^2 + B^2}(F - \tfrac{1}{2})\right]^{-1/2} dF,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3. Уравнение (1) имеет решения в виде суммы функций различных аргументов:
$$U(x,y) = f(x) + g(y).$$
Здесь функции $f = f(x)$ и $g(y)$ задаются неявно с помощью формул
$$A_1 \pm x = \int \left(B_1 e^{-2f} + \alpha f - \tfrac{1}{2}\alpha\right)^{-1/2} df,$$
$$A_2 \pm y = \int \left(B_2 e^{-2g} + \alpha g - \tfrac{1}{2}\alpha\right)^{-1/2} dg,$$
где A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные.

4. Исходное уравнение имеет точные решения вида
$$T = T(\zeta), \qquad \zeta = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $T = T(\zeta)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения
$$T''_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta}T'_\zeta = \alpha T \ln(\beta T).$$

5. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \alpha \sin(\beta T).}$

Частный случай уравнения 4.1.4.1 при $f(T) = \alpha\sin(\beta T)$.

1. Имеются точные решения вида
$$T = T(\xi), \qquad \xi = Ax + By + C,$$
где зависимость $T = T(\xi)$ задается неявно с помощью формулы
$$\int \left[D - \frac{2\alpha\cos(\beta T)}{\beta(A^2+B^2)}\right]^{-1/2} dT = \xi,$$
A, B, C, D — произвольные постоянные.

2. Имеются точные решения вида
$$T = T(\xi), \qquad \xi = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения
$$T''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}T'_\xi = \alpha\sin(\beta T).$$

3. Точное решение при $\alpha = \beta = 1$:
$$T(x,y) = 4\,\mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}\,A)\frac{\mathrm{ch}\,F}{\mathrm{ch}\,G},$$
$$F = \frac{\cos A}{\sqrt{1+B^2}}(x - By), \quad G = \frac{\sin A}{\sqrt{1+B^2}}(x + By),$$
где A, B — произвольные постоянные.

⊙ Литература: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983).

4.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial T}{\partial y}\right)=f(T)$

1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial T}{\partial y}\right)=cT^p.$

Нелинейное уравнение теории тепло- и массопереноса с источником степенного вида в анизотропном случае. Здесь $a_1(x)=ax^n$ и $a_2(y)=by^m$ — главные коэффициенты температуропроводности. Частный случай уравнения 4.1.4.2 при $f(T)=cT^p$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T=T(x)$ и $T=T(y)$.

2. При $n\neq 2$, $m\neq 2$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi=\left[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $T=T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}T'_\xi=BT^p,\tag{1}$$

где

$$A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)},\quad B=\frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $p\neq 1$ допускает точное решение вида

$$T=\left[\frac{2(1+p+A-Ap)}{B(1-p)^2}\right]^{\frac{1}{p-1}}\xi^{\frac{2}{1-p}}.$$

3.2. При $m=4/n$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения:

$$\int\left[C_1+\frac{2cn^2T^{p+1}}{ab(p+1)(2-n)^4}\right]^{-1/2}dT=C_2\pm\xi,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3.3. Замена $\zeta=\xi^{1-A}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$T''_{\zeta\zeta}=\frac{B}{(1-A)^2}\zeta^{\frac{2A}{1-A}}T^p.\tag{2}$$

Более 20 точных решений уравнения (2) для различных значений параметра p приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1997).

2. $\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial T}{\partial y}\right)=ce^{\beta T}.$

Уравнение стационарной теории горения в анизотропном случае. Частный случай уравнения 4.1.4.2 при $f(T)=ce^{\beta T}$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T=T(x)$ и $T=T(y)$.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \bigl[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\bigr]^{1/2}.$$

Здесь функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} T'_{\xi} = Be^{\beta T}, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $A \neq 1$ допускает точное решение вида

$$T(\xi) = -\frac{1}{\beta} \ln\Bigl[\frac{B\beta}{2(1-A)}\xi^2\Bigr].$$

3.2. При $A = 0$, что соответствует $m = \frac{4}{n}$, $B = \frac{cn^2}{ab(2-n)^4}$, из (1) получаем еще несколько семейств точных решений исходного уравнения:

$$\begin{aligned}
T(\xi) &= \frac{1}{\beta} \ln\Bigl[\frac{2\omega^2}{\beta B \cos^2(\omega\xi + C)}\Bigr] && \text{при } \beta B > 0,\\
T(\xi) &= \frac{1}{\beta} \ln\Bigl[\frac{2\omega^2}{\beta B \operatorname{sh}^2(\omega\xi + C)}\Bigr] && \text{при } \beta B > 0,\\
T(\xi) &= \frac{1}{\beta} \ln\Bigl[\frac{-2\omega^2}{\beta B \operatorname{ch}^2(\omega\xi + C)}\Bigr] && \text{при } \beta B < 0,\\
T(\xi) &= \frac{1}{\beta} \ln\Bigl[\frac{-8\omega^2 C_1 C_2}{\beta B \bigl(C_1 e^{\omega\xi} + C_2 e^{-\omega\xi}\bigr)^2}\Bigr],
\end{aligned}$$

где ω, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3.3. При $A = 1$, что соответствует $m = \frac{n}{n-1}$, из (1) получаем другое семейство точных решений исходного уравнения:

$$T(\xi) = \frac{1}{\beta} \ln\Bigl(-\frac{8C}{\beta B}\Bigr) - \frac{2}{\beta} \ln(\xi^2 + C), \qquad B = \frac{4c(n-1)^2}{ab(2-n)^4},$$

где C — произвольная постоянная.

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ae^{\beta x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Bigr) = cT^m.$

Нелинейное уравнение теории тепло- и массопереноса с источником степенного вида в случае неоднородной анизотропной среды. Здесь главные коэффициенты температуропроводности экспоненциальным образом зависят от координат: $a_1(x) = ae^{\beta x}$ и $a_2(y) = be^{\mu y}$. Частный случай уравнения 4.1.4.5 при $f(T) = cT^m$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T = T(x)$ и $T = T(y)$.

2. При $\beta\mu \neq 0$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi} T'_{\xi} = AT^m, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}. \tag{1}$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) допускает точное решение вида

$$T = \left[\frac{abm\beta^2\mu^2}{c(1-m)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}} \xi^{\frac{2}{1-m}}.$$

3.2. Замена $\zeta = \xi^2$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$T''_{\zeta\zeta} = \tfrac{1}{4} A\zeta^{-1} T^m,$$

решения которого при $m = -1$ и $m = -2$ приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1997).

4. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = ce^{\omega T}.$

Уравнение теории горения в анизотропном случае. Частный случай уравнения 4.1.4.5 при $f(T) = ce^{\omega T}$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T = T(x)$ и $T = T(y)$.

2. При $\beta\mu \neq 0$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi} T'_{\xi} = Ae^{\omega T}, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}. \tag{1}$$

Уравнение (1) допускает точное решение

$$T = -\frac{1}{\omega}\ln\left(\frac{1}{4}A\omega\xi^2\right).$$

5. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\beta y}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = cT^m.$

Частный случай уравнения 4.1.4.7 при $k = an$, $s = b\beta$, $f(T) = cT^m$.

6. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\beta y}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = ce^{\omega T}.$

Частный случай уравнения 4.1.4.7 при $k = an$, $s = b\beta$, $f(T) = ce^{\omega T}$.

7. $\displaystyle \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\alpha T+\beta}\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0.$

1. Замена $\alpha T+\beta=e^U$ приводит к уравнению вида 4.1.2.10 (в котором сделаны переобозначения координат $x \rightleftarrows y$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^U\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0.$$

2. Точные решения:

$$\begin{aligned}
T(x,y)&=\frac{-A^2x^2+Bx+C}{\alpha(Ay+D)^2}-\frac{\beta}{\alpha},\\
T(x,y)&=\frac{p^2}{A\alpha}\frac{Ax^2+Bx+C}{\operatorname{ch}^2(py+q)}-\frac{\beta}{\alpha},\\
T(x,y)&=-\frac{p^2}{A\alpha}\frac{Ax^2+Bx+C}{\operatorname{sh}^2(py+q)}-\frac{\beta}{\alpha},\\
T(x,y)&=-\frac{p^2}{A\alpha}\frac{Ax^2+Bx+C}{\cos^2(py+q)}-\frac{\beta}{\alpha},
\end{aligned}$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные.

3. О других точных решениях исходного уравнения см. 4.1.2.10.

8. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(T^m\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T^m\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\alpha T^n.$

1. При $m\neq -1$ замена $U=T^{m+1}$ приводит к уравнению вида 4.1.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\alpha(m+1)U^{\frac{n}{m+1}}.$$

2. При $m=-1$ замена $T=e^W$ приводит к уравнению вида 4.1.1.2:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\alpha e^{nW}.$$

9. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(aT^n\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(bT^m\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0.$

Нелинейное уравнение теории тепло- и массопереноса в анизотропном случае, где $a_1(T)=aT^n$ и $a_2(T)=bT^m$ — главные коэффициенты температуропроводности. Частный случай уравнения 4.1.4.11.

1. Имеются точные решения вида

$$T(x,y)=f(x)g(y). \qquad (1)$$

Функции $f(x)$ и $g(y)$ определяются из автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A — произвольная постоянная)

$$(f^nf'_x)'_x=Abf^{m+1}, \qquad (g^mg'_y)'_y=-Aag^{n+1}, \qquad (2)$$

которые независимы друг от друга. В результате интегрирования получим решения уравнений (2) в неявном виде

$$\int f^n \left(\frac{2Ab}{n+m+2} f^{n+m+2} + B_1 \right)^{-1/2} df = C_1 \pm x,$$

$$\int g^m \left(-\frac{2Aa}{n+m+2} g^{n+m+2} + B_2 \right)^{-1/2} dg = C_2 \pm y,$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные, $n+m+2 \neq 0$.

2. О других точных решениях исходного уравнения см. 4.1.4.11.

10. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(a e^{\beta T} \dfrac{\partial T}{\partial y} \right) = 0.$

1. Точные решения:

$$T(x,y) = \frac{1}{\beta} \ln(-aA^2y^2 + By + C) - \frac{2}{\beta} \ln(-aAx + D),$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\beta} \ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{p^2}{aA \operatorname{ch}^2(px+q)} \right],$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\beta} \ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{p^2}{-aA \cos^2(px+q)} \right],$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\beta} \ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{p^2}{-aA \operatorname{sh}^2(px+q)} \right],$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные.

2. Существуют решения вида

$$T = T(\xi), \quad \xi = y \pm \mu x,$$

где зависимость $T = T(\xi)$ задается неявно с помощью формулы (A, B, μ — любые)

$$\beta\mu^2 T + ae^{\beta T} = A\xi + B.$$

3. Автомодельные решения вида (b, c — любые)

$$T = T(\zeta), \quad \zeta = \frac{x+b}{y+c},$$

описываются уравнением

$$(\zeta^2 T'_\zeta)'_\zeta + (ae^{\beta T} T'_\zeta)'_\zeta = 0,$$

которое допускает первый интеграл

$$(\zeta^2 + ae^{\beta T}) T'_\zeta = C.$$

Принимая T за независимую переменную, для функции $\zeta = \zeta(T)$ получим уравнение Риккати

$$C\zeta'_T = \zeta^2 + ae^{\beta T},$$

решение которого выражается через функции Бесселя.

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\gamma T}\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)=0.$

Нелинейное уравнение теории тепло- и массопереноса в анизотропной среде, где главные коэффициенты температуропроводности $a_1(T)=ae^{\beta T}$ и $a_2(T)=be^{\gamma T}$ экспоненциальным образом зависят от температуры. Частный случай уравнения 4.1.4.11.

1. Имеются точные решения вида

$$T(x,y)=f(x)+g(y). \tag{1}$$

Функции $f(x)$ и $g(y)$ определяются из автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} &f''_{xx}+\beta(f'_x)^2=Abe^{(\gamma-\beta)f},\\ &g''_{yy}+\gamma(g'_y)^2=-Aae^{(\beta-\gamma)g}, \end{aligned} \tag{2}$$

которые независимы друг от друга. В результате интегрирования получим решения уравнений (2) в неявном виде

$$\int e^{\beta f}\left[\frac{2Ab}{\beta+\gamma}e^{(\beta+\gamma)f}+B_1\right]^{-1/2}df=C_1\pm x,$$
$$\int e^{\gamma g}\left[-\frac{2Aa}{\beta+\gamma}e^{(\beta+\gamma)g}+B_2\right]^{-1/2}dg=C_2\pm y,$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\beta+\gamma\neq 0$.

2. О других точных решениях исходного уравнения см. 4.1.4.11.

4.1.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $ax^n\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+by^m\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}=cT^p.$

Частный случай уравнения 4.1.4.4 при $k=s=0$, $f(T)=cT^p$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T=T(x)$ и $T=T(y)$.

2. При $n\neq 2$, $m\neq 2$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi=\left[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $T=T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}T'_\xi=BT^p, \tag{1}$$

где

$$A=\frac{3nm-4n-4m+4}{(2-n)(2-m)},\quad B=\frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $p \neq 1$ допускает точное решение вида

$$T = \left[\frac{2(1+p+A-Ap)}{B(1-p)^2}\right]^{\frac{1}{p-1}} \xi^{\frac{2}{1-p}}.$$

3.2. При $m = \dfrac{4n-4}{3n-4}$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения

$$\int \left[C_1 + \frac{2c(3n-4)^2 T^{p+1}}{ab(p+1)(2-n)^4}\right]^{-1/2} dT = C_2 \pm \xi,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3.3. Замена $\zeta = \xi^{1-A}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$T''_{\zeta\zeta} = \frac{B}{(1-A)^2} \zeta^{\frac{2A}{1-A}} T^p. \tag{2}$$

Более 20 точных решений уравнения (2) для различных значений параметра p приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

2. $ax^n \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + by^m \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = ce^{\beta T}$.

Частный случай уравнения 4.1.4.4 при $k = s = 0$, $f(T) = ce^{\beta T}$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T = T(x)$ и $T = T(y)$.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} T'_\xi = Be^{\beta T}, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{3nm - 4n - 4m + 4}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $A \neq 1$ допускает точное решение вида

$$T(\xi) = -\frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{B\beta}{2(1-A)} \xi^2\right].$$

3.2. При $A = 0$, что соответствует $m = \dfrac{4n-4}{3n-4}$, $B = \dfrac{c(3n-4)^2}{ab(2-n)^4}$, из (1) получаем еще несколько семейств точных решений исходного уравнения:

$$T(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2\omega^2}{\beta B\cos^2(\omega\xi + C)}\right] \qquad \text{при } \beta B > 0,$$
$$T(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2\omega^2}{\beta B\,\mathrm{sh}^2(\omega\xi + C)}\right] \qquad \text{при } \beta B > 0,$$
$$T(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{-2\omega^2}{\beta B\,\mathrm{ch}^2(\omega\xi + C)}\right] \qquad \text{при } \beta B < 0,$$

где ω, C — произвольные постоянные.

3.3. При $A = 1$, что соответствует $m = \frac{n}{n-1}$, из (1) получаем другое семейство точных решений исходного уравнения:

$$T(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\left(-\frac{8C}{\beta B}\right) - \frac{2}{\beta}\ln(\xi^2 + C), \qquad B = \frac{4c(n-1)^2}{ab(2-n)^4},$$

где C — произвольная постоянная.

3. $ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = cT^m.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T = T(x)$ и $T = T(y)$.

2. При $\beta\mu \neq 0$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2}.$$

Здесь функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{3}{\xi}T'_\xi = AT^m, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}. \tag{1}$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) допускает точное решение вида

$$T(\xi) = \left[\frac{ab(2-m)\beta^2\mu^2}{c(1-m)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}}\xi^{\frac{2}{1-m}}.$$

3.2. Замена $\zeta = \xi^{-2}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$T''_{\zeta\zeta} = \tfrac{1}{4}A\zeta^{-3}T^m,$$

решение которого при $m = 3$ приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

4. $ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = ce^{\omega T}.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T = T(x)$ и $T = T(y)$.

2. При $\beta\mu \neq 0$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2}.$$

Здесь функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{3}{\xi}T'_{\xi} = Ae^{\omega T}, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}. \tag{1}$$

Уравнение (1) допускает точное решение

$$T = -\frac{1}{\omega}\ln\left(-\frac{1}{4}A\omega\xi^2\right).$$

5. $\boldsymbol{ax^n \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\beta y}\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = cT^m.}$

Частный случай уравнения 4.1.4.7 при $k = s = 0$, $f(T) = cT^m$.

6. $\boldsymbol{ax^n \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\beta y}\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = ce^{\omega T}.}$

Частный случай уравнения 4.1.4.7 при $k = s = 0$, $f(T) = ce^{\omega T}$.

7. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + bcT^2 + kT + s.}$

Частный случай уравнения 4.1.4.8 при $f(x) = c$, $g(x) = k$, $h(x) = s$. Пусть A — корень квадратного уравнения $bcA^2 + kA + s = 0$.

1. Если выполнено неравенство $2Abc + k + ab = \sigma^2 > 0$, то точные решения имеют вид

$$T(x,y) = A + \left[C_1\exp(\sigma x) + C_2\exp(-\sigma x)\right]\exp\left(\pm y\sqrt{-b}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Если выполнено неравенство $2Abc + k + ab = -\sigma^2 < 0$, то точные решения имеют вид

$$T(x,y) = A + \left[C_1\cos(\sigma x) + C_2\sin(\sigma x)\right]\exp\left(\pm y\sqrt{-b}\right).$$

О более сложных решениях см. уравнение 4.1.4.8.

8. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = cx^n\left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + bcx^nT^2 + kx^mT + sx^l.}$

Частный случай уравнения 4.1.4.8 при $f(x) = cx^n$, $g(x) = kx^m$, $h(x) = sx^l$.

9. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = ce^{\beta x}\left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + bce^{\beta x}T^2 + ke^{\mu x}T + se^{\nu x}.}$

Частный случай уравнения 4.1.4.8 при $f(x) = ce^{\beta x}$, $g(x) = ke^{\mu x}$, $h(x) = se^{\nu x}$.

10. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT^4 \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = by^n T^5.$

Частный случай уравнения 4.1.4.10 при $f(y) = by^n$.

11. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT^4 \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = be^{\beta y} T^5.$

Частный случай уравнения 4.1.4.10 при $f(y) = be^{\beta y}$.

12. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + ae^{\beta T} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \qquad a > 0.$

Точные решения:

$$T(x,y) = Axy + By + Cx + D,$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{B^2}{a}\frac{(y+A)^2}{\operatorname{sh}^2(Bx+C)}\Bigr], \qquad T(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{1}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{(x+C)^2}\Bigr],$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{B^2}{a}\frac{(y+A)^2}{\cos^2(Bx+C)}\Bigr], \qquad T(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{1}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{(x+C)^2}\Bigr],$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{\operatorname{sh}^2(Cx+D)}\Bigr], \qquad T(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{\cos^2(Cx+D)}\Bigr],$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{\operatorname{sh}^2(Cx+D)}\Bigr], \qquad T(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{\cos^2(Cx+D)}\Bigr],$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

4.1.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(T).$

Это уравнение описывает стационарные процессы тепло- и массопереноса и горения в неоднородных анизотропных средах. Здесь a и b — главные коэффициенты температуропроводности, $f = f(T)$ — кинетическая функция, которая задает закон тепловыделения.

1. Имеются точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = Ax + By.$$

Зависимость $T = T(\xi)$ задается неявно с помощью формул

$$\int\Bigl[C_1 + \frac{2}{aA^2+bB^2}F(T)\Bigr]^{-1/2} dT = C_2 \pm \xi, \qquad F(T) = \int f(T)\,dT,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Имеются точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \sqrt{b(x+C_1)^2 + a(y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}T'_{\xi} = (ab)^{-1} f(T).$$

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)=f(T).$

Нелинейное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения с источником произвольного вида в неоднородной анизотропной среде. Частный случай уравнения 4.1.4.4 при $k=an$, $s=bm$. Здесь $a_1(x)=ax^n$ и $a_2(y)=by^m$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T=T(x)$ и $T=T(y)$.

2. При $n\neq 2$, $m\neq 2$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi=\big[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $T=T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}T'_{\xi}=Bf(T), \tag{1}$$

где

$$A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)},\quad B=\frac{4}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

При $m=4/n$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f=f(T)$:

$$\int\Big[C_1+\frac{2n^2}{ab(2-n)^4}F(T)\Big]^{-1/2}dT=C_2\pm\xi,\qquad F(T)=\int f(T)\,dT,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. Замена $\zeta=\xi^{1-A}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$T''_{\zeta\zeta}=\frac{B}{(1-A)^2}\zeta^{\frac{2A}{1-A}}f(T). \tag{2}$$

Большое число точных решений уравнения (2) для различных функций $f=f(T)$ приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 485).

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(ax+c)^n\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(by+s)^m\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big]=f(T).$

Преобразование

$$\zeta=ax+c,\quad \eta=by+s$$

приводит к уравнению вида 4.1.4.2:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(a^2\zeta^n\frac{\partial T}{\partial\zeta}\Big)+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(b^2\eta^m\frac{\partial T}{\partial\eta}\Big)=f(T).$$

4. $\boldsymbol{ax^n \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + by^m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + kx^{n-1} \frac{\partial T}{\partial x} + sy^{m-1} \frac{\partial T}{\partial y} = f(T).}$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T = T(x)$ и $T = T(y)$.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$AT''_{\xi\xi} + \frac{B}{\xi} T'_\xi = f(T), \tag{1}$$

где

$$A = \tfrac{1}{4} ab(2-n)^2(2-m)^2,$$

$$B = \tfrac{1}{4}(2-n)(2-m)\left[ab(3nm - 4n - 4m + 4) + 2bk(2-m) + 2as(2-n)\right].$$

При $B = 0$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f = f(T)$:

$$\int \left[C_1 + \frac{2}{A} F(T)\right]^{-1/2} dT = C_2 \pm \xi, \qquad F(T) = \int f(T)\, dT,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 486).

5. $\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x} \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \frac{\partial T}{\partial y}\right) = f(T).}$

Нелинейное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения с источником произвольного вида в неоднородной анизотропной среде. Здесь главные коэффициенты температуропроводности экспоненциальным образом зависят от координат: $a_1(x) = ae^{\beta x}$ и $a_2(y) = be^{\mu y}$. Частный случай уравнения 4.1.4.6 при $k = a\beta$, $s = b\mu$.

При $\beta\mu \neq 0$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi} T'_\xi = Af(T), \qquad A = \frac{4}{ab\beta^2\mu^2}. \tag{1}$$

Замена $\zeta = \xi^2$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$T''_{\zeta\zeta} = \tfrac{1}{4} A\zeta^{-1} f(T),$$

решения которого при $f(T) = (kT + s)^{-1}$ и $f(T) = (kT + s)^{-2}$ ($k, s = \text{const}$) приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 487).

6. $ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + ke^{\beta x}\dfrac{\partial T}{\partial x} + se^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y} = f(T).$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T = T(x)$ и $T = T(y)$.

2. При $\beta\mu \neq 0$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2}.$$

Здесь функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$AT''_{\xi\xi} + \frac{B}{\xi}T'_{\xi} = f(T), \tag{1}$$

где

$$A = \tfrac{1}{4}ab\beta^2\mu^2, \quad B = \tfrac{1}{4}\beta\mu(3ab\beta\mu - 2bk\mu - 2as\beta).$$

При $B = 0$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f = f(T)$:

$$\int\left[C_1 + \frac{2}{A}F(T)\right]^{-1/2} dT = C_2 \pm \xi, \qquad F(T) = \int f(T)\,dT,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

7. $ax^n\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + be^{\beta y}\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + kx^{n-1}\dfrac{\partial T}{\partial x} + se^{\beta y}\dfrac{\partial T}{\partial y} = f(T).$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $T = T(x)$ и $T = T(y)$.

2. При $\beta \neq 0$, $n \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi = \left[b\beta^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 e^{-\beta y}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $T = T(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$AT''_{\xi\xi} + \frac{B}{\xi}T'_{\xi} = f(T), \tag{1}$$

где

$$A = \tfrac{1}{4}ab\beta^2(2-n)^2, \quad B = \tfrac{1}{4}\beta(2-n)\left[ab\beta(4-3n) + 2bk\beta - 2as(2-n)\right].$$

При $B = 0$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f = f(T)$:

$$\int\left[C_1 + \frac{2}{A}F(T)\right]^{-1/2} dT = C_2 \pm \xi, \qquad F(T) = \int f(T)\,dT,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 488).

8. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x)\Big(\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)^2 + bf(x)T^2 + g(x)T + h(x).$

1. Точные решения:

$$T(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\exp\bigl(\pm y\sqrt{-b}\bigr), \qquad b<0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{xx} = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$
$$\psi''_{xx} = (2bf\varphi + g + ab)\psi. \tag{3}$$

Если удается найти решение $\varphi = \varphi(x)$ уравнения (2), то функцию $\psi = \psi(x)$ можно получить путем решения уравнения (3), линейного относительно ψ.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\,\beta = \mathrm{const}),$$

то частные решения уравнения (2) *имеют вид*

$$\varphi = k_1, \quad \varphi = k_2, \tag{4}$$

где k_1, k_2 — корни квадратного уравнения $bk^2 + \alpha k + \beta = 0$. В этом случае уравнение (3) записывается так:

$$\psi''_{xx} = \bigl[(2bk_n + \alpha)f + ab\bigr]\psi, \qquad n = 1,\,2. \tag{5}$$

В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997) приведено много точных решений линейного уравнения (5) для различных зависимостей $f = f(x)$. В частном случае $f = \mathrm{const}$ общее решение уравнения (5) является суммой экспонент (или синуса и косинуса).

2. Точные решения более общего вида:

$$T(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\bigl[A\exp\bigl(y\sqrt{-b}\bigr) + B\exp\bigl(-y\sqrt{-b}\bigr)\bigr], \qquad b<0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (A, B — произвольные постоянные)

$$\varphi''_{xx} = bf\bigl(\varphi^2 + 4AB\psi^2\bigr) + g\varphi + h,$$
$$\psi''_{xx} = 2bf\varphi\psi + g\psi + ab\psi.$$

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$T(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\,\mathrm{ch}\bigl(y\sqrt{-b}\bigr), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2},$$
$$T(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\,\mathrm{sh}\bigl(y\sqrt{-b}\bigr), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}.$$

3. Имеются точные решения вида (c — любое):

$$T(x,y)=\varphi(x)+\psi(x)\cos\bigl(y\sqrt{b}+c\bigr),\qquad b>0,\tag{7}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned}\varphi''_{xx}&=bf\bigl(\varphi^2+\psi^2\bigr)+g\varphi+h,\\ \psi''_{xx}&=2bf\varphi\psi+g\psi+ab\psi.\end{aligned}$$

⊙ Литература: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 488).

9. $\displaystyle\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=f(T)\Bigl[\Bigl(\frac{\partial T}{\partial x}\Bigr)^2+\Bigl(\frac{\partial T}{\partial y}\Bigr)^2\Bigr].$

Замена

$$U=\int\frac{dT}{F(T)},\qquad\text{где}\quad F(T)=\exp\Bigl[\int f(T)\,dT\Bigr]$$

приводит к двумерному уравнению Лапласа для функции $U=U(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,$$

которое рассматривается в разд. 2.1.1.

10. $\displaystyle\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+aT^4\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=f(y)T^5.$

Пусть $u=u(y)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{yy}-f(y)u=0.\tag{1}$$

Преобразование

$$\zeta=\int\frac{dy}{u^2},\quad \xi=\frac{T}{u}$$

сильно упрощает исходное уравнение и приводит его к виду

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+a\xi^4\frac{\partial^2\xi}{\partial\zeta^2}=0.\tag{2}$$

Это уравнение не зависит от функции f (явно) и имеет точное решение

$$\xi(x,\zeta)=Ax\zeta+B\zeta+Cx+D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Кроме того, уравнение (2) имеет точные решения, например, следующей структуры:

$$\begin{aligned}\xi(x,\zeta)&=g(x)h(\zeta),\\ \xi(x,\zeta)&=x^k\varphi(w),\quad w=\zeta x^{-2k-1},\end{aligned}$$

где k — любое.

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(T)\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big]=0.$

Нелинейное уравнение теплопроводности для анизотропной среды, когда главные коэффициенты температуропроводности являются произвольными функциями температуры.

1. Точные решения вида

$$T=T(\xi),\quad \xi=Ax+By,$$

определяются неявной зависимостью

$$\int\left[A^2f(T)+B^2g(T)\right]dT=C_1\xi+C_2,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Точные решения вида (α, β — любые)

$$T=T(\zeta),\quad \zeta=\frac{x+\alpha}{y+\beta},$$

являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$[f(T)T'_\zeta]'_\zeta+[\zeta^2g(T)T'_\zeta]'_\zeta=0. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1) и принимая T за независимую переменную, для функции $\zeta=\zeta(T)$ получим уравнение Риккати (C — любое)

$$C\zeta'_T=g(T)\zeta^2+f(T). \qquad (2)$$

Большое число точных решений уравнения (2) для различных функций $f=f(T)$ и $g=g(T)$ приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

3. В частном случае $g(T)=k^2f(T)$ преобразование

$$\bar{x}=kx,\quad u=\int f(T)\,dT$$

приводит к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2u}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,$$

которое рассматривалось в разд. 2.1.1.

4.2. Трехмерные уравнения

4.2.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^l\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(cz^n\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=sT^k.$

Частный случай уравнения 4.2.2.3 при $f(T)=sT^k$.

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^l\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(cz^n\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=se^{\beta T}.$

Частный случай уравнения 4.2.2.3 при $f(T)=se^{\beta T}$.

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=sT^k.$

Частный случай уравнения 4.2.2.4 при $f(T)=sT^k$.

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=se^{\beta T}.$

Частный случай уравнения 4.2.2.4 при $f(T)=se^{\beta T}$.

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^m\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^n\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=sT^k.$

Частный случай уравнения 4.2.2.5 при $f(T)=sT^k$.

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^m\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^n\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=se^{\beta T}.$

Частный случай уравнения 4.2.2.5 при $f(T)=se^{\beta T}$.

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=sT^k.$

Частный случай уравнения 4.2.2.6 при $f(T)=sT^k$.

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=se^{\beta T}.$

Частный случай уравнения 4.2.2.6 при $f(T)=se^{\beta T}$.

4.2.2. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}+c\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}=f(T).$

Это уравнение описывает стационарные процессы тепло- и массопереноса и горения в неоднородных анизотропных средах. Здесь a, b, c — главные коэффициенты температуропроводности, $f=f(T)$ — кинетическая функция, которая задает закон тепловыделения.

1°. Существуют точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi=Ax+By+Cz.$$

Зависимость $T=T(\xi)$ задается неявно с помощью формул

$$\int\Big[C_1+\frac{2}{aA^2+bB^2+cC^2}F(T)\Big]^{-1/2}dT=C_2\pm\xi,\qquad F(T)=\int f(T)\,dT,$$

где A, B, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Уравнение имеет точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}.$$

Функция $T(\xi)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{2}{\xi}T'_{\xi} = f(T).$$

3°. Преобразование $x = \sqrt{a}\,\bar{x}$, $y = \sqrt{b}\,\bar{y}$, $z = \sqrt{c}\,\bar{z}$ приводит исходное уравнение к виду $\Delta T = f(T)$.

2. $\displaystyle a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(by^n\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(cz^m\frac{\partial T}{\partial z}\right) = f(T).$

1°. При $n = m = 0$ см. уравнение 4.2.2.1.

2°. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^2}{4a} + \frac{y^{2-n}}{b(2-n)^2} + \frac{z^{2-m}}{c(2-m)^2}\right].$$

Функция $T(\xi)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi}T'_{\xi} = f(T), \qquad A = \frac{2(4-n-m)}{(2-n)(2-m)}.$$

3°. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют решения вида

$$T = T(x,\xi), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{y^{2-n}}{b(2-n)^2} + \frac{z^{2-m}}{c(2-m)^2}\right],$$

где функция $T(x,\xi)$ определяется двумерным уравнением

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi} = f(T), \qquad A = \frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}.$$

⊙ Литература: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

3. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(cz^l\frac{\partial T}{\partial z}\right) = f(T).$

При $n \neq 2$, $m \neq 2$, $l \neq 2$ существуют точные решения вида

$$T = T(\xi), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-l}}{c(2-l)^2}\right].$$

Функция $T(\xi)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi}T'_{\xi} = f(T), \qquad A = 2\left(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-l}\right) - 1.$$

⊙ Литература: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=f(T).$

При $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi^2=4\Big(\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2}+\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big),$$

где функция $T(\xi)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi}-\frac{1}{\xi}T'_{\xi}=f(T).$$

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^{n}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^{m}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=f(T).$

При $n\neq 2$, $m\neq 2$, $\nu\neq 0$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi^2=4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big],$$

где функция $T(\xi)$ находится из уравнения

$$T''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}T'_{\xi}=f(T),\qquad A=2\Big(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2-m}\Big)-1.$$

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^{n}\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big)=f(T).$

При $n\neq 2$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$ существуют точные решения вида

$$T=T(\xi),\qquad \xi^2=4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big].$$

Функция $T(\xi)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$T''_{\xi\xi}+\frac{n}{2-n}\frac{1}{\xi}T'_{\xi}=f(T).\qquad (1)$$

Частный случай 1. При $n=0$ и любой функции $f=f(T)$ уравнение (1) имеет решение в квадратурах:

$$\int\Big[C_1+2\int f(T)\,dT\Big]^{-1/2}dT=C_2\pm\xi,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Частный случай 2. При $n=1$, $f(T)=Ae^{\beta T}$ (A, β — любые) уравнение (1) имеет однопараметрическое решение

$$T(\xi)=-\frac{1}{\beta}\ln\Big(-\frac{8C}{\beta A}\Big)-\frac{2}{\beta}\ln(\xi^2+C),$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ Литература: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

7. $\boldsymbol{\Delta T = f(T)|\nabla T|^2}$**.**

Замена

$$U = \int \frac{dT}{F(T)}, \qquad \text{где} \quad F(T) = \exp\Bigl[\int f(T)\,dT\Bigr],$$

приводит к трехмерному уравнению Лапласа для функции $U(x, y, z)$:

$$\Delta U = 0,$$

которое рассматривается в разд. 2.1.2.

Замечание. О более сложном уравнении вида $(\vec{v} \cdot \nabla)T = \Delta T - f(T)|\nabla T|^2$ с дополнительным конвективным членом см. разд. 3.2.3, уравнение 18.

Приложения

П1. Ортогональные криволинейные системы координат. Операторы ∇ и Δ

П1.1. Произвольная ортогональная система координат

Криволинейные координаты x_1, x_2, x_3 задаются как функции прямоугольных декартовых координат x, y, z:

$$x_1 = x_1(x, y, z), \quad x_2 = x_2(x, y, z), \quad x_3 = x_3(x, y, z).$$

Используя эти выражения можно выразить x, y, z через криволинейные координаты x_1, x_2, x_3:

$$x = x(x_1, x_2, x_3), \quad y = y(x_1, x_2, x_3), \quad z = z(x_1, x_2, x_3).$$

Компоненты метрического тензора g_{ij} определяются по формулам

$$g_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial x}{\partial x_i}\frac{\partial x}{\partial x_j} + \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j};$$

$$g_{ij}(x_1, x_2, x_3) = g_{ji}(x_1, x_2, x_3); \qquad i, j = 1,\ 2,\ 3.$$

Система координат является ортогональной, если выполняются соотношения

$$g_{ij}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В этом случае третий инвариант метрического тензора определяется формулой

$$g = g_{11} g_{22} g_{33}.$$

Элемент объема: $dV = \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$.

Ниже приведены основные дифференциальные операторы в ортогональной криволинейной системе координат x_1, x_2, x_3. Соответствующие единичные направляющие вектора обозначаются $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Градиент температуры T:

$$\nabla T = \vec{e}_1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial T}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial T}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial T}{\partial x_3}.$$

Дивергенция вектора $\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3$:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_1 \sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(v_2 \sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(v_3 \sqrt{\frac{g}{g_{33}}}\right)\right].$$

Градиент скаляра T по вектору $\vec{v}$:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) T = \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{v_3}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial T}{\partial x_3}.$$

Оператор Лапласа скаляра T:

$$\Delta T = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\frac{\partial T}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)\right].$$

Дивергенция теплового потока при $\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_3)$:

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = \lambda \Delta T + (\nabla \lambda \cdot \nabla T),$$

где $(\nabla \lambda \cdot \nabla T)$ — скалярное произведение векторов $\nabla \lambda$ и ∇T.

Дивергенция теплового потока при $\lambda = \lambda(T)$:

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = \lambda \Delta T + \lambda'_T |\nabla T|^2.$$

П1.2. Цилиндрические координаты

Цилиндрические координаты ϱ, φ, z $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ выражаются через декартовы координаты следующим образом:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = y/x, \quad z = z \qquad (\sin\varphi = y/\varrho),$$
$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\varrho\varrho} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \varrho^2, \quad g_{zz} = 1, \quad \sqrt{g} = \varrho.$$

Градиент температуры T:

$$\nabla T = \vec{e}_\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\varrho}\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Дивергенция вектора $\vec{v}$:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho v_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Градиент скаляра T по вектору $\vec{v}$:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)T = v_\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho} + \frac{v_\varphi}{\varrho}\frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Лапласиан скаляра T:

$$\Delta T = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Замечание. Цилиндрические координаты ϱ, φ применяются также как полярные координаты на плоскости xy.

П1.3. Сферические координаты

Сферические координаты r, θ, φ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ выражаются через декартовы координаты следующим образом:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\frac{z}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \qquad \left(\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$
$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta, \quad \sqrt{g} = r^2\sin\theta.$$

Градиент температуры T:

$$\nabla T = \vec{e}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \varphi}.$$

Дивергенция вектора $\vec{v}$:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Градиент скаляра T по вектору $\vec{v}$:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)T = v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \varphi}.$$

Лапласиан скаляра T:

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}.$$

П1.4. Координаты вытянутого эллипсоида вращения

Координаты вытянутого эллипсоида вращения σ, τ, φ ($\sigma \geqslant 1 \geqslant \tau \geqslant -1$) связаны с декартовыми координатами следующим образом:

$$x^2 = b^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)\cos^2\varphi, \quad y^2 = b^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)\sin^2\varphi, \quad z = b\sigma\tau.$$

Специальная система координат u, v, φ ($0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$):

$$\sigma = \operatorname{ch} u, \quad \tau = \cos v, \quad \varphi = \varphi,$$

$$x = b \operatorname{sh} u \sin v \cos\varphi, \quad y = b \operatorname{sh} u \sin v \sin\varphi, \quad z = b \operatorname{ch} u \cos v.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = b^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}, \quad g_{\tau\tau} = b^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = b^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2),$$

$$\sqrt{g} = b^3(\sigma^2 - \tau^2), \;\; g_{uu} = g_{vv} = b^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), \;\; g_{\varphi\varphi} = b^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v.$$

Градиент температуры T:

$$\nabla T = \vec{e}_\sigma \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - \tau^2}}\frac{\partial T}{\partial \sigma} + \vec{e}_\tau \frac{1}{b}\sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 - \tau^2}}\frac{\partial T}{\partial \tau} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{b\sqrt{(1 - \tau^2)(\sigma^2 - 1)}}\frac{\partial T}{\partial \varphi}.$$

Дивергенция вектора $\vec{v}$:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{b(\sigma^2 - \tau^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[v_\sigma\sqrt{(\sigma^2 - \tau^2)(\sigma^2 - 1)}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[v_\tau\sqrt{(\sigma^2 - \tau^2)(1 - \tau^2)}\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[v_\varphi \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}}\right]\right\}.$$

Градиент скаляра T по вектору $\vec{v}$:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)T = \frac{v_\sigma}{b}\sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - \tau^2}}\frac{\partial T}{\partial\sigma} + \frac{v_\tau}{b}\sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 - \tau^2}}\frac{\partial T}{\partial\tau} + \frac{v_\varphi}{b\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}}\frac{\partial T}{\partial\varphi}.$$

Лапласиан скаляра T:

$$\Delta T = \frac{1}{b^2(\sigma^2 - \tau^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[(\sigma^2 - 1)\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right] + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[(1 - \tau^2)\frac{\partial T}{\partial\tau}\right] + \frac{\sigma^2 - \tau^2}{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

П1.5. Координаты сплюснутого эллипсоида вращения

Координаты сплюснутого эллипсоида вращения σ, τ, φ ($\sigma \geqslant 0$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$) связаны с декартовыми координатами следующим образом:

$$x^2 = b^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)\cos^2\varphi, \quad y^2 = b^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)\sin^2\varphi, \quad z = b\sigma\tau.$$

Специальная система координат u, v, φ ($0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$):

$$\sigma = \operatorname{sh} u, \quad \tau = \cos v, \quad \varphi = \varphi,$$

$$x = b \operatorname{ch} u \sin v \cos\varphi, \quad y = b \operatorname{ch} u \sin v \sin\varphi, \quad z = b \operatorname{sh} u \cos v.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = b^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{1 + \sigma^2}, \quad g_{\tau\tau} = b^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = b^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2),$$

$$\sqrt{g} = b^3(\sigma^2 + \tau^2), \quad g_{uu} = g_{vv} = b^2(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v), \quad g_{\varphi\varphi} = b^2 \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v.$$

Градиент температуры T:

$$\nabla T = \vec{e}_\sigma \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 + \tau^2}}\frac{\partial T}{\partial\sigma} + \vec{e}_\tau \frac{1}{b}\sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}}\frac{\partial T}{\partial\tau} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{b\sqrt{(1 - \tau^2)(\sigma^2 + 1)}}\frac{\partial T}{\partial\varphi}.$$

Дивергенция вектора $\vec{v}$:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{b(\sigma^2+\tau^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[v_\sigma\sqrt{(\sigma^2+\tau^2)(\sigma^2+1)}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[v_\tau\sqrt{(\sigma^2+\tau^2)(1-\tau^2)}\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[v_\varphi\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sqrt{(\sigma^2+1)(1-\tau^2)}}\right]\right\}.$$

Градиент скаляра T по вектору $\vec{v}$:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)T = \frac{v_\sigma}{b}\sqrt{\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2+\tau^2}}\frac{\partial T}{\partial\sigma} + \frac{v_\tau}{b}\sqrt{\frac{1-\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}}\frac{\partial T}{\partial\tau} + \frac{v_\varphi}{b\sqrt{(\sigma^2+1)(1-\tau^2)}}\frac{\partial T}{\partial\varphi}.$$

Лапласиан скаляра T:

$$\Delta T = \frac{1}{b^2(\sigma^2+\tau^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[(1+\sigma^2)\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right] + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[(1-\tau^2)\frac{\partial T}{\partial\tau}\right] + \frac{\sigma^2+\tau^2}{(1+\sigma^2)(1-\tau^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

П1.6. Координаты эллиптического цилиндра

Координаты эллиптического цилиндра σ, τ, z ($\sigma \geqslant 0$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$) связаны с декартовыми координатами следующим образом:

$$x = b\sigma\tau, \quad y^2 = b^2(\sigma^2-1)(1-\tau^2), \quad z = z.$$

Специальная система координат u, v, z ($0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$):

$$\sigma = \operatorname{ch} u, \quad \tau = \cos v, \quad z = z,$$
$$x = b\operatorname{ch} u\cos v, \quad y = b\operatorname{sh} u\sin v, \quad z = z.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = b^2\frac{\sigma^2-\tau^2}{\sigma^2-1}, \quad g_{\tau\tau} = b^2\frac{\sigma^2-\tau^2}{1-\tau^2}, \quad g_{zz} = 1,$$
$$g_{uu} = g_{vv} = b^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), \quad g_{zz} = 1.$$

Лапласиан:

$$\Delta T = \frac{1}{b^2(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 v)}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{\sigma^2-1}}{b^2(\sigma^2-\tau^2)}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sqrt{\sigma^2-1}\,\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right) + \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{b^2(\sigma^2-\tau^2)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{1-\tau^2}\,\frac{\partial T}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Замечание. Координаты эллиптического цилиндра применяются также как эллиптические координаты на плоскости xy.

⊙ Литература к приложению П1: Дж. Хаппель, Г. Бреннер (1976), Г. Корн, Т. Корн (1984), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

П2. Решение дифференциальных уравнений с помощью пакета CONVODE

*А. Мусьё**

П2.1. Введение

1. О пакете CONVODE.

CONVODE (CONVersion of Ordinary Differential Equations) — это специализированный программный пакет, написанный средствами языка Reduce и предназначенный для аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений Пфаффа. (По своим возможностям CONVODE намного превосходит стандартные средства решения дифференциальных уравнений в таких системах, как Reduce, Maple, Mathematica и др.)

При разработке пакета автор стремился создать такую программу, которая не только была бы полезным инструментом для студентов и научных работников, но и носила бы образовательный характер, сообщая пользователю много полезной информации об исследуемых уравнениях, их свойствах и процессе решения.

На практике CONVODE можно использовать двумя способами: через электронную почту (e-mail) или автономно на персональном компьютере.

Первый способ, пожалуй, наиболее доступен для большинства российских пользователей; нужно подготовить сообщение с исходными данными и послать его по адресу

convode@riemann.physmath.fundp.ac.be

и через некоторое время CONVODE пришлет ответ. Дополнительную информацию можно найти в сети Интернет по адресу

http://www.physique.fundp.ac.be/physdpt/administration/convode.html

Следует отметить, что CONVODE постоянно развивается, а версия, доступная по электронной почте, ежемесячно обновляется, включая новые возможности и учитывая замечания и пожелания пользователей.

Второй способ состоит в приобретении книги A. Moussiaux (1996) с дискетой. Содержащиеся на дискете файлы следует переписать на свой компьютер. Для работы пакета CONVODE необходимо наличие на компьютере системы Reduce версии 3.6 или выше.

Важной особенностью пакета является то, что для его использования не требуется знания языка Reduce (хотя это может быть полезным). Кроме того, по желанию пользователя сообщения выдаются на французском, английском или немецком языках. Планируется перевод и на другие языки.

2. Некоторые обозначения и замечания.

Исходные данные для пакета CONVODE представляют собой команды на языке Reduce.

Знаки арифметических операций на языке Reduce:

`+` (сложение), `-` (вычитание), `*` (умножение), `/` (деление)

Константы e, π, i (мнимая единица) на языке Reduce записываются как `e`, `pi`, `i`. Квадратный корень $\sqrt{x}$ обозначается `sqrt(x)`.

* Alain Moussiaux, FUNDP, Physique Mathématique, rue de Bruxelles, 61, B-5000 Namur, Belgium. E-mail: Alain.Moussiaux@fundp.ac.be

Обозначения основных элементарных функций:

x^a	`x**a` или `x^a`	$\ln x$	`log(x)`
e^x	`exp(x)` или `e**x`	$\lg x$	`log10(x)`
a^x	`a**x` или `a^x`	$\log_a x$	`logb(x,a)`
$\sin x$	`sin(x)`	$\arcsin x$	`asin(x)`
$\cos x$	`cos(x)`	$\arccos x$	`acos(x)`
$\operatorname{tg} x$	`tan(x)`	$\operatorname{arctg} x$	`atan(x)`
$\operatorname{ctg} x$	`cot(x)`	$\operatorname{arcctg} x$	`acot(x)`
$\operatorname{sh} x$	`sinh(x)`	$\operatorname{arsh} x$	`asinh(x)`
$\operatorname{ch} x$	`cosh(x)`	$\operatorname{arch} x$	`acosh(x)`
$\operatorname{th} x$	`tanh(x)`	$\operatorname{arth} x$	`atanh(x)`
$\operatorname{cth} x$	`coth(x)`	$\operatorname{arcth} x$	`acoth(x)`

Производные записываются следующим образом:

$\dfrac{dy}{dx}$	`df(y,x)`	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	`df(u,x,y)`
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	`df(y,x,2)`	$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$	`df(u,x,2,y)`
$\dfrac{\partial u}{\partial x}$	`df(u,x)`	$\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z}$	`df(u,x,2,y,3,z)`

Прежде чем использовать производные, необходимо сообщить системе Reduce, какие функции зависят от каких переменных. Для этого используется команда **depend**. Например:

`depend y,x;`	для	$y(x)$
`depend u,x,y;`	для	$u(x,y)$
`depend u,x,y,z;`	для	$u(x,y,z)$

Команда «`depend u,x,y;`» эквивалентна двум командам

```
depend u,x;  depend u,y;
```

а команда «`depend u,x,y,z;`» — трем командам

```
depend u,x;  depend u,y;  depend u,z;
```

Примеры записи некоторых выражений на языке Reduce:

`x**(3/2)` или `x^(3/2)`	$x^{3/2}$
`(a*y**n+sin(x))**(-2)`	$(ay^n+\sin x)^{-2}$
`{x,y,z}`	список из трех элементов x, y, z (списки используются при подготовке файла исходных данных для CONVODE)
`L1:={df(y,x)=y/x^2+e^x};`	команда, присваивающая переменной `L1` значение списка из одного элемента — уравнения $y'_x = \dfrac{y}{x^2} + e^x$

Не имеет значения, в каком регистре набраны буквы. Например, записи `l3:={x,y,z}`, `L3:={X,Y,Z}` и `L3:={x,Y,z}` с точки зрения системы Reduce эквивалентны.

В примерах, рассматриваемых ниже, встречаются многобуквенные обозначения, например, `AL`, `ZZ`, `CTE`, `MMM`, `NVZ` и др. Это самостоятельные переменные (их не следует воспринимать как произведение отдельных букв). В языке Reduce нет переменных с индексами, греческих букв и т. п. Поэтому их записывают с использованием нескольких букв и цифр и круглых скобок: например, $\Phi_1(z)$ можно обозначать как `PHI(1,z)`, а α, β, γ — как `al`, `be`, `ga` и т. д.

Более подробно о языке Reduce см., например, G. Rayna (1987), Д. М. Климов, В. М. Руденко (1989), A. C. Hearn, J. P. Fitch (1995).

П2.2. Примеры решения обыкновенных дифференциальных уравнений

В разд. П2.2 и П2.3 рассматриваются примеры решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений в частных производных (УрЧП), которые иллюстрируют работу пакета CONVODE. Даются пояснения и инструкции по использованию пакета. Конкретные комментарии и сообщения пакета могут немного отличаться от указанных в связи с тем, что CONVODE непрерывно совершенствуется.

1. Уравнение Риккати (пример 1).

Рассмотрим уравнение Риккати. Это нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее в общем случае вид

$$g(x)\frac{dy}{dx} = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x). \tag{1}$$

Для определенности рассмотрим уравнение

$$x^2\frac{dy}{dx} = ax^2y^2 + b.$$

Запишем исходные данные для программы CONVODE*:

```
1   nmax:=3;
2   smax:=4;
3   lparti:={};
4   argstop:=2;
5   depend y,x;
6   L1:={x**2*df(y,x)=a*x**2*y**2+b};
7   L2:={y};
8   L3:={x};
9   L4:={};
10  L5:={English};
11  convode(L1,L2,L3,L4,L5);
```

Здесь и далее для удобства читателя строки файла исходных данных помечены цифрами, но при наборе данных нумерации быть не должно.

Отметим некоторые важные моменты. В строке 5 сообщается, что переменная y зависит от x. В строке 6 задается дифференциальное уравнение, которое требуется решить. Команда в строке 7 указывает зависимую переменную, а в строке 8 — независимую. Строка 10 означает, что сообщения должны выводиться на английском языке. В последней строке вызывается процедура **convode** с пятью аргументами, заданными выше.

Дополнительную информацию можно найти в разд. П2.4.

Приведенную последовательность команд можно отправить по электронной почте (см. п. 3 из разд. П2.4) или ввести при работе с системой Reduce.

Далее CONVODE начинает анализировать исходные данные и пытается решить уравнение, выдавая при этом множество сообщений. В ответ пользователь на экране компьютера получает**

```
1:
nmax := 3
```

---

* Каждая команда должна оканчиваться точкой с запятой (;) или знаком доллара ($). В первом случае результат выполнения команды выводится на экран, а во втором — нет.

** Число с двоеточием соответствует номеру строки в исходных данных, а в последующих строках отображается результат выполнения данной командной строки. Многоточие (...) заменяет выводимую информацию, которая здесь не существенна. Для удобства читателя все комментарии, появляющиеся на экране компьютера на английском языке, сопровождаются переводом на русский язык.

```
2:
smax := 4
.............................

10:
L5 := {english}

11:
****************************************************************

.............................
```

THE SYSTEM IS OF THE FIRST ORDER.
Система имеет первый порядок.

I AM STARTING THE PROCEDURE ODE WITH THE FOLLOWING ARGUMENTS.
Запускаю процедуру ODE со следующими аргументами.

```
                      2       2  2
L1={df(y,x)*x  - a*x *y  - b=0}
L2={y}
L3={x}
L4={}
L5={}
L222={y}
LANGUE={english}

.............................
```

YOU HAVE ONLY ONE EQUATION WITH ONE UNKNOWN.
У вас одно уравнение с одной зависимой переменной.

```
                                  2       2  2
THIS EQUATION IS:  df(y,x)*x  - a*x *y  - b
```

Это уравнение: $y'_x x^2 - ax^2y^2 - b = 0$

THE UNKNOWN IS: y
Зависимая переменная: y

THE GENERAL FORM OF THE EQUATION IS MMM*DX+NNN*DY=0 WITH:
Общий вид уравнения: $MMM\,dx + NNN\,dy = 0$, где

```
     2
NNN=x

            2  2
MMM= - (a*x *y  + b)
```

YOUR EQUATION IS NOT LINEAR.
Ваше уравнение нелинейно.

Далее CONVODE делает ряд проверок, задавая себе вопросы и отвечая на них:

THE SOLUTION MAY PERHAPS BE COMPUTED VIA A QUADRATURE?
THE SOLUTION DO NOT REDUCE TO A SIMPLE QUADRATURE.
Может быть, решение получается квадратурой (т. е. уравнение имеет вид $y'_x = f(x)$)? Решение не получается простой квадратурой.

IS THE EQUATION EXACT?
THE EQUATION IS NOT EXACT.
Это уравнение в полных дифференциалах? Нет.

TESTINT1 IS PERHAPS AN INTEGRATING FACTOR?
TESTINT1 IS NOT AN INTEGRATING FACTOR.
Возможно, $TESTINT1$ — интегрирующий множитель? $TESTINT1$ — не интегрирующий множитель.

```
PERHAPS IT IS A BERNOULLI D.E.?
A(X)*DF(Y,X)+B(X)*Y=C(X)*Y**N
IT IS NOT A BERNOULLI D.E.
```

Может быть, это уравнение Бернулли: $a(x)y'_x + b(x)y = c(x)y^n$? Нет, это не уравнение Бернулли.

```
TESTINT2 IS PERHAPS AN INTERATING FACTOR?
TESTINT2 IS NOT AN INTEGRATING FACTOR,SORRY!
```

Возможно, $TESTINT2$ — интегрирующий множитель? К сожалению, $TESTINT2$ — не интегрирующий множитель.

```
PERHAPS THAT INTFACT3 IS AN INTEGRATING FACTOR?
SORRY INTFACT3 IS NOT AN INTEGRATING FACTOR.
```

Возможно, $INTFACT3$ — интегрирующий множитель? К сожалению, $INTFACT3$ — не интегрирующий множитель.

Не вдаваясь в подробности, заметим, что $TESTINT1$, $TESTINT2$, $INTFACT3$ относятся к различным классическим способам поиска интегрирующего множителя.

```
IS IT POSSSIBLE TO FIND AN INTEGRATING FACTOR
OF THE FORM X**AL*Y**BE ?
SORRY IT IS NOT POSSIBLE.
```

Может быть, удастся найти интегрирующий множитель вида $x^\alpha y^\beta$? Нет, не удается.

```
QUESTION: IS THE EQUATION A HOMOGENEOUS D.E.?
NO, THE EQUATION IS NOT HOMOGENEOUS.
```

Является ли уравнение однородным? Нет, не является.

```
LET ME TRY THE FOLLOWING CHANGE OF VARIABLE Y=ZZ**AL.
OK! WITH AL=-1 IT RUNS.
```

Попробую замену переменной $y = ZZ^\alpha$. При $\alpha = -1$ эта замена работает!

```
WITH Y=ZZ**AL THE EQUATION BECOMES HOMOGENEOUS.
```

При $y = ZZ^\alpha$ уравнение становится однородным.

Самое важное сделано. CONVODE нашел один из способов решения уравнения. Замена $y = ZZ^\alpha$ $(\alpha = -1)$ приводит к однородному ОДУ.

```
THE IMPLICIT SOLUTION IS:
```

Решение в неявном виде:

```
                                     2*b + x*y
{(2*sqrt(4*a*b - 1)*atan(---------------------) + 4*log(x)*a*b - log(x)
                                sqrt(4*a*b - 1)*x*y

   - 4*a*b*cte + cte)/(4*a*b - 1)=0}

12:
Quitting
```

Конец

Здесь *cte* — произвольная постоянная.

Таким образом, получено решение в неявном виде $F(x, y; C) = 0$:

$$\frac{1}{A}\Big(2\sqrt{A}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2b+xy}{\sqrt{A}\,xy} + A\ln x + C\Big) = 0, \tag{2}$$

где $A = 4ab - 1$, а C — произвольная постоянная ($C = -A\,cte$). Заметим, что уравнение (2) можно сократить на множитель $1/A$. Если Reduce может разрешить (с помощью процедуры `solve`) это равенство относительно y, тогда можно получить решение и в явном виде $y = y(x; C)$. Однако CONVODE не делает этого автоматически, поскольку такая процедура может занимать очень много времени. Получив решение в неявном виде, пользователь может «попросить» Reduce разрешить выражение относительно y (или x), послав по e-mail исходные данные с дополнительными строками (или ввести необходимые команды в системе Reduce). Например:

```
12  sol:=solve(lhs first reponse,y);
13  verif:=sub(sol,lhs first L1 - rhs first L1);
```

Получаем ответ:

```
12:
sol :=

                                        - 2*b
{y=-----------------------------------------------------------------}
                               4*log(x)*a*b-log(x)-4*a*b*cte+cte
   x*(sqrt(4*a*b-1)*tan(-----------------------------------) + 1)
                                     2*sqrt(4*a*b-1)

13:
verif := 0

14:
Quitting
```

Отметим, что окончательный результат CONVODE заносит в переменную *reponse* в виде списка (список берется в фигурные скобки, а его элементы разделяются запятыми). Строка 12 дает указание системе Reduce выделить левую часть первого (в данном случае единственного) равенства списка *reponse* и разрешить ее относительно y.

Далее в строке 13 производится проверка полученного решения. Результат «`verif := 0`» подтверждает правильность решения.

Если процедура `solve` не в состоянии выразить зависимую переменную через независимую в явном виде, то можно проверить решение и в неявном виде:

```
12  eq1:=lhs first reponse;
13  eq2:=df(eq1,x);
14  eq3:=solve(eq2,df(y,x));
15  L1;
16  verif:=sub(eq3,lhs first L1 - rhs first L1);
```

В ответ получим:

```
12:
                                   2*b + x*y
eq1 := (2*sqrt(4*a*b-1)*atan(------------------)+4*log(x)*a*b-log(x)
                               sqrt(4*a*b-1)*x*y

        - 4*a*b*cte + cte)/(4*a*b - 1)

13:
                      2      2  2
         - df(y,x)*x  + a*x *y  + b
eq2 := ---------------------------
                   2  2
           x*(a*x *y  + b + x*y)

14:
                     2  2
                  a*x *y  + b
eq3 := {df(y,x)=-------------}
                       2
                      x
```

```
15:
              2    2  2
{df(y,x)*x =a*x *y  + b}

16:
verif := 0

17:
Quitting
```

Как видно, решение (2) справедливо при $4ab-1\neq 0$. Чтобы исследовать случай $4ab-1=0$, модифицируем исходные данные следующим образом:

```
b:=1/(4*a)$
convode(L1,L2,L3,L4,L5);
```

В этом случае к решению опять приводит подстановка $y = 1/ZZ$:

```
.........................

  2*log(x)*a*x*y + log(x) - 2*a*cte*x*y - cte + 2
{-----------------------------------------------=0}
                    2*a*x*y + 1
```

Используя solve, получим решение в явном виде:

```
r:=solve(reponse,y);
verif:=sub(r,lhs first l1 - rhs first l1);
```

Получаем:

```
13:
            - log(x) + cte - 2
r := {y=----------------------}
          2*a*x*(log(x) - cte)

14:
verif := 0
```

Таким образом, CONVODE дает следующие общие решения уравнения (1):

$$y = -\frac{2b}{x}\left(\sqrt{A}\,\mathrm{tg}\,\frac{A\ln x + C}{2\sqrt{A}} + 1\right)^{-1} \quad \text{при} \quad A = 4ab-1\neq 0,$$
$$y = \frac{C-\ln x - 2}{2ax(\ln x - C)} \quad \text{при} \quad b = 1/(4a),$$

где C — произвольная постоянная.

2. Уравнение Риккати (пример 2).

Данный пример демонстрирует некоторые существенные возможности пакета CONVODE. Рассмотрим уравнение

$$x\frac{dy}{dx} + x^a y^2 + \tfrac{1}{2}(a-b)y + x^b = 0.$$

Исходные данные:

```
nmax:=3;
smax:=4;
lparti:={};
argstop:=2;
depend y,x;
L1:={x*df(y,x)+x**a*y**2+((a-b)/2)*y+x**b=0};
L2:={y};
L3:={x};
L4:={};
L5:={English};
convode(L1,L2,L3,L4,L5);
```

Имеем:

```
............................

THE SYSTEM IS OF THE FIRST ORDER.
```
Система имеет первый порядок.

```
I AM STARTING THE PROCEDURE ODE WITH THE FOLLOWING ARGUMENTS.
```
Запускаю процедуру *ODE* со следующими аргументами.

```
                      a  2    b
L1={df(y,x)*x + x *y  + x  + 1/2*a*y - 1/2*b*y=0}
L2={y}
L3={x}
L4={}
L5={}
L222={y}
LANGUE={english}

............................

THE FORM OF THE EQUATION IS MMM*DX+NNN*DY=0 WITH:
```
Уравнение имеет вид $MMM\,dx + NNN\,dy = 0$, где

```
NNN=x

        a  2      b
    2*x *y  + 2*x  + a*y - b*y
MMM=----------------------------
                 2
```

Как и предыдущих примерах, CONVODE делает ряд проверок, с тем чтобы найти способ интегрирования рассматриваемого ОДУ первого порядка. В данном случае уравнение нелинейно, не является уравнением в полных дифференциалах, не является уравнением Бернулли, неоднородно, и не удается найти интегрирующий множитель. Эта информация здесь опускается. Наиболее важны комментарии после того, как CONVODE выясняет, что уравнение (1) является уравнением Риккати:

```
............................

YOUR EQUATION IS A RICCATI D.E.
```
Ваше уравнение является уравнением Риккати:

```
DF(Y,X)+A(X)*Y**2+B(X)*Y+C(X)=0

         a
        x
A(X)=----
        x

      a - b
B(X)=-------
       2*x

         b
        x
C(X)=----
        x
```

Есть много способов решения уравнений Риккати, например, искать частное решение, искать группу и т. п. Один из способов (когда другие оказываются безрезультатными) — перейти к уравнению второго порядка. В данном случае уравнение Риккати преобразуется к линейному ОДУ второго порядка:

```
............................

LET ME TRANSFORM RICCATI INTO A SECOND ORDER D.E.
```
Преобразуем уравнение Риккати в ОДУ второго порядка.

THE EQUATION OF THE SECOND ORDER (FOR UY) AND THE TRANSFORMATION ARE:

Уравнение второго порядка (для uy) и преобразование имеют вид

```
                       2
{{2*df(uy,x,2)*x  - df(uy,x)*a*x - df(uy,x)*b*x

                            a + b
   + 2*df(uy,x)*x + 2*x          *uy=0},
```

THE TRANSFORMATION IS,

Преобразование:

```
    df(uy,x)*x
 y=------------}
        a
      x *uy
```

Теперь задача сводится к решению уравнения для uy. Это означает, что CONVODE умеет также решать ОДУ второго порядка. Как и для уравнений первого порядка, CONVODE начинает задавать себе множество вопросов:

YOUR EQUATION IS NOT OF THE FIRST ORDER.

Ваше уравнение — не первого порядка.

YOUR EQUATION INVOLVES NO CONSTANT COEFFICIENTS.

Оно не является уравнением с постоянными коэффициентами.

IS IT POSSIBLE TO REDUCE THE ORDER OF THE EQUATION?
IT IS NOT POSSIBLE TO REDUCE THE ORDER OF THE EQUATION.

Нельзя ли понизить порядок уравнения? Нет, нельзя.

PERHAPS THAT IT IS AN EULER D.E.?
IT IS NOT AN EULER D.E.

Возможно, это уравнение Эйлера? Нет, это не уравнение Эйлера.

IS IT POSSIBLE TO FACTORIZE?
FACTORIZATION IS NOT POSSIBLE.

Нельзя ли разложить на множители. Факторизация невозможна.

PERHAPS THAT THE INDEPENDENT VARIABLE IS NOT IN THE EQUATION?
YOUR EQUATION DEPENDS ON X !

Может быть, уравнение не содержит независимой переменной? Уравнение зависит от x!

IS THE EQUATION EXACT?
THE EQUATION IS NOT EXACT.

Это уравнение в полных дифференциалах (сводится к уравнению первого порядка)? Нет.

IS THE EQUATION EQUIDIMENTIONAL IN Y (Y=>A*Y) ?
THE EQUATION IS NOT EQUIDIMENTIONAL IN Y !

Является ли уравнение однородным по y ($y \to ay$)? Нет, не является.

IS THE EQUATION EQUIDIMENTIONAL IN X (X=>A*X) ?
SORRY, THE EQUATION IS NOT EQUIDIMENTIONAL IN X.

Является ли уравнение однородным по x ($x \to ax$)? К сожалению, не является.

PERHAPS THAT THE EQUATION IS SCALE INVARIANT ?
THE TRANSFORMATION Y=X**P*UWU(X) GIVES FOR UWU(X)
AN EQUIDIMENTIONAL EQUATION IN X.

Возможно, уравнение инвариантно относительно изменения масштаба? В таком случае преобразование $y = x^p uwu(x)$ должно приводить к уравнению относительно $uwu(x)$, однородному по x.

```
SORRY, YOUR EQUATION IS NOT SCALE INVARIANT.
```

Сожалею, но ваше уравнение не инвариантно относительно изменению масштаба.

```
IS IT POSSIBLE TO TRANSFORM THE EQUATION INTO A
SECOND ORDER D.E. WITH CONSTANT COEFFICIENTS?
```

Нельзя ли преобразовать данное уравнение в ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами?

Самое главное сделано. CONVODE находит такую замену $nvz = f(x)$ независимой переменной, которая переводит рассматриваемое уравнение в уравнение с постоянными коэффициентами!

```
YOUR EQUATION MAY BE TRANSFORMED INTO AN EQUATION WITH
CONSTANT COEFFICIENTS WITH THE HELP OF THE FOLLOWING TRANSFORMATION.
```

Ваше уравнение можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью преобразования

```
         (a + b)/2
      2*x
{nvz=--------------}
         a + b
```

```
YOUR EQUATION IS:
```

Ваше уравнение

```
                  2                                                  a+b
  2*df(uy,x,2)*x  -df(uy,x)*a*x-df(uy,x)*b*x+2*df(uy,x)*x+2*x    *uy
{----------------------------------------------------------------------=0}
                                                        2
                                                     2*x
```

```
AND BECOMES AFTER THE TRANSFORMATION:
```

после преобразования принимает вид

```
{df(uy,nvz,2) + uy=0}
```

Теперь задача проста. Однако изначально CONVODE был написан для решения систем ОДУ первого порядка, поэтому, чтобы использовать эту уже имеющуюся возможность, уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами преобразуется в систему уравнений первого порядка:

```
CONVODE RESTARTS.
```

CONVODE перезапускается.

```
YOUR EQUATION IS NOT OF THE FIRST ORDER.
```

Ваше уравнение — не первого порядка.

```
THE EQUATION HAS CONSTANT COEFFICIENTS.
```

Это уравнение с постоянными коэффициентами.

```
.............................
```

```
HERE IS THE SYSTEM OF THE FIRST ORDER IN TERMS OF Y(I).
```

Система ОДУ первого порядка относительно $y(1)$, $y(2)$:

```
RESULTAT1= {df(y(1),nvz)=y(2),df(y(2),nvz) + y(1)=0}

RESULTAT2={y(1),y(2)}

I HAVE SET:
```

Введены обозначения:

```
CORRESPONDANCES={y(1)=uy,y(2)=df(uy,nvz)}
```

```
I START THE PROCEDURE ODE WITH THE FOLLOWING ARGUMENTS:
```
Запускаю процедуру *ODE* со следующими аргументами:

```
****************************
L1={df(y(1),nvz)=y(2),df(y(2),nvz) + y(1)=0}
L2={y(1),y(2)}
L3={nvz}
L4={}
L5={}
L222={y}
LANGUE={english}
****************************

............................

THE UNKNOWNS ARE: {y(1),y(2)}
```
Зависимые переменные: $y(1)$, $y(2)$

```
THE INDEPENDENT VARIABLE IS:{nvz}
```
Независимая переменная: *nvz*

```
THE SYSTEM IS NOT DEGENERATED.
```
Система невырождена.

```
THE NUMBER OF ARBITRARY CONSTANTS IN THE SOLUTION IS:
```
Число произвольных постоянных в решении:

```
NBRCONSTANTES= 2

THE CHARACTERISTIC EQUATION IS:
```
Характеристическое уравнение:

```
   2
lam  + 1 =0

THE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION ARE:
```
Корни характеристического уравнения:

```
SS={lam=i,lam= - i}

THE MULTIPLICITIES ARE: MULTI={1,1}
```
Кратности корней: 1, 1

```
YOUR SYSTEM IS HOMOGENEOUS.
```
Система является однородной.

```
HERE IS THE ANSWER :
```
Ответ:

В ответе приводятся решения для $y(1)$ и $y(2)$. Эти решения выражены через *nvz*:

```
                            2*i*nvz
      arbcomplex(2)*i - e          *arbcomplex(1)*i
{y(1)=-----------------------------------------------,
                            i*nvz
                           e

                          2*i*nvz
      arbcomplex(2) + e          *arbcomplex(1)
 y(2)=-------------------------------------------}
                          i*nvz
                         e
```

Кроме того, выписывается решение для $uy(x)$:

```
                                    (a + b)/2
                               (4*x          *i)/(a + b)
     arbcomplex(2)*i - e                                *arbcomplex(1)*i
{uy=-----------------------------------------------------------------------}
                                   (a + b)/2
                              (2*x          *i)/(a + b)
                             e
```

И, наконец, CONVODE выписывает решение для $y(x)$:

```
        (a + b)/2                  2
{y=( - x          *arbcomplex(2) *i

                               (a + b)/2
         (a + b)/2    (8*x               *i)/(a + b)              2
     + x           *e                               *arbcomplex(1) *i)/(

      a                 2
     x *arbcomplex(2)

                         (a + b)/2
           a     (4*x              *i)/(a + b)
     - 2*x *e                                  *arbcomplex(2)*arbcomplex(1)

                   (a + b)/2
        a   (8*x              *i)/(a + b)                2
     + x *e                                *arbcomplex(1) )},
```

Поскольку решение было получено опосредованно через решение уравнения второго порядка, оно формально содержит две произвольные постоянные. Но на самом деле роль играет лишь отношение этих констант. Поэтому ответ можно записать, полагая $arbcomplex(2) = 1$, $arbcomplex(1) = cte$.

3. Нелинейное уравнение, квадратичное относительно производной. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin x\,\frac{dy}{dx} + \ln x\,\frac{dy}{dx} + \sin x \ln x = 0. \tag{1}$$

Исходные данные:

```
nmax:=3;
smax:=4;
lparti:={};
argstop:=2;
depend y,x;
L1:={df(y,x)**2+sin(x)*df(y,x)+log(x)*df(y,x)+sin(x)*log(x)=0};
L2:={y};
L3:={x};
L4:={};
L5:={English};
convode(L1,L2,L3,L4,L5);
```

CONVODE сразу же устанавливает, что уравнение можно разложить на множители. (Заметим, что возможность факторизации уравнения не всегда бывает очевидной.) Кроме того, уравнение зависит только y'_x и x, но не зависит от y. В этом случае CONVODE дает решение в параметрическом виде (*para* — параметр).

```
...........................

*****************************************************
TAKE CARE YOUR EQUATION MAY BE FACTORIZED ........
```

Внимание! Ваше уравнение можно факторизовать ...

```
*****************************************************
```

```
THE SYSTEM IS OF THE FIRST ORDER.
```

Система имеет первый порядок.

```
IS YOUR EQUATION A CLAIRAUT OR LAGRANGE-CLAIRAUT D.E?
YOUR EQUATION HAS NOT THE APPROPRIATE FORM. SORRY.
```

Является ли ваше уравнение уравнением Клеро или Лагранжа—Клеро?
Нет, ваше уравнение не имеет соответствующего вида.

```
YOUR EQUATION DOES NOT DEPEND ON Y.
```

Уравнение не зависит от y.

```
A SOLUTION IN PARAMETRIC FORM IS:
```

Одно из решений в параметрическом виде:

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

                                  2
{x= - asin(para),y=sqrt( - para  + 1) + cte}

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

Несложно убедиться в том, что, исключая *para*, мы получаем для y выражение $y(x) = \cos x + C$.

```
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

YOUR PROBLEM IS TO SOLVE THE FOLLOWING 2 EQUATIONS.
```

Задача состоит в решении следующих двух уравнений:

```
{{df(y,x)= - log(x)},{df(y,x)= - sin(x)}}

I START THE PROCEDURE ODE WITH THE FOLLOWING ARGUMENTS.
```

Запускаю процедуру ODE со следующими аргументами.

```
***************************************************
L1={df(y,x)= - log(x)}
L2={y}
L3={x}
L4={}
L5={}
L222={y}
LANGUE={english}
***************************************************

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

THE FORM OF THE EQUATION IS: MMM*DX+NNN*DY=0 WITH:
```

Уравнение имеет вид $MMM\,dx + NNN\,dy = 0$, где

```
NNN=1

MMM=log(x)

YOUR EQUATION IS LINEAR.
```

Ваше уравнение линейно.

```
MU(TT)*DF(Y,TT)=NU(TT)*Y(TT)+V(TT)

I START THE PROCEDURE ODE WITH THE FOLLOWING ARGUMENTS.
```

Запускаю процедуру ODE со следующими аргументами.

```
***************************************************
L1={df(y,x)= - sin(x)}
L2={y}
L3={x}
L4={}
L5={}
```

Кроме того, выписывается решение для uy(x):

```
                               (a + b)/2
                          (4*x            *i)/(a + b)
     arbcomplex(2)*i - e                              *arbcomplex(1)*i
{uy=-----------------------------------------------------------------}
                                (a + b)/2
                           (2*x           *i)/(a + b)
                          e
```

И, наконец, CONVODE выписывает решение для $y(x)$:

```
        (a + b)/2                 2
{y=( - x          *arbcomplex(2) *i

                       (a + b)/2
        (a + b)/2  (8*x           *i)/(a + b)             2
    + x           *e                          *arbcomplex(1) *i)/(

    a              2
   x *arbcomplex(2)

                  (a + b)/2
       a  (4*x              *i)/(a + b)
   - 2*x *e                              *arbcomplex(2)*arbcomplex(1)

              (a + b)/2
      a  (8*x           *i)/(a + b)              2
    + x *e                         *arbcomplex(1) )},
```

Поскольку решение было получено опосредованно через решение уравнения второго порядка, оно формально содержит две произвольные постоянные. Но на самом деле роль играет лишь отношение этих констант. Поэтому ответ можно записать, полагая $arbcomplex(2) = 1$, $arbcomplex(1) = cte$.

3. Нелинейное уравнение, квадратичное относительно производной. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin x\,\frac{dy}{dx} + \ln x\,\frac{dy}{dx} + \sin x \ln x = 0. \tag{1}$$

Исходные данные:

```
nmax:=3;
smax:=4;
lparti:={};
argstop:=2;
depend y,x;
L1:={df(y,x)**2+sin(x)*df(y,x)+log(x)*df(y,x)+sin(x)*log(x)=0};
L2:={y};
L3:={x};
L4:={};
L5:={English};
convode(L1,L2,L3,L4,L5);
```

CONVODE сразу же устанавливает, что уравнение можно разложить на множители. (Заметим, что возможность факторизации уравнения не всегда бывает очевидной.) Кроме того, уравнение зависит только y'_x и x, но не зависит от y. В этом случае CONVODE дает решение в параметрическом виде (*para* — параметр).

```
...........................

************************************************
TAKE CARE YOUR EQUATION MAY BE FACTORIZED ........
```
Внимание! Ваше уравнение можно факторизовать ...
```
************************************************
```

```
THE SYSTEM IS OF THE FIRST ORDER.
```
Система имеет первый порядок.

```
IS YOUR EQUATION A CLAIRAUT OR LAGRANGE-CLAIRAUT D.E?
YOUR EQUATION HAS NOT THE APPROPRIATE FORM. SORRY.
```
Является ли ваше уравнение уравнением Клеро или Лагранжа — Клеро?
Нет, ваше уравнение не имеет соответствующего вида.

```
YOUR EQUATION DOES NOT DEPEND ON Y.
```
Уравнение не зависит от y.

```
A SOLUTION IN PARAMETRIC FORM IS:
```
Одно из решений в параметрическом виде:

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

                                     2
{x= - asin(para),y=sqrt( - para  + 1) + cte}

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

Несложно убедиться в том, что, исключая *para*, мы получаем для y выражение $y(x) = \cos x + C$.

```
............................

YOUR PROBLEM IS TO SOLVE THE FOLLOWING 2 EQUATIONS.
```
Задача состоит в решении следующих двух уравнений:

```
{{df(y,x)= - log(x)},{df(y,x)= - sin(x)}}

I START THE PROCEDURE ODE WITH THE FOLLOWING ARGUMENTS.
```
Запускаю процедуру *ODE* со следующими аргументами.
```
****************************************************
L1={df(y,x)= - log(x)}
L2={y}
L3={x}
L4={}
L5={}
L222={y}
LANGUE={english}
****************************************************

............................

THE FORM OF THE EQUATION IS: MMM*DX+NNN*DY=0 WITH:
```
Уравнение имеет вид $MMM\,dx + NNN\,dy = 0$, где

```
NNN=1

MMM=log(x)

YOUR EQUATION IS LINEAR.
```
Ваше уравнение линейно.

```
MU(TT)*DF(Y,TT)=NU(TT)*Y(TT)+V(TT)

I START THE PROCEDURE ODE WITH THE FOLLOWING ARGUMENTS.
```
Запускаю процедуру *ODE* со следующими аргументами.
```
****************************************************
L1={df(y,x)= - sin(x)}
L2={y}
L3={x}
L4={}
L5={}
```

```
L222={y}
LANGUE={english}
*****************************************************

.............................

THE FORM OF THE EQUATION IS: MMM*DX+NNN*DY=0 WITH:
```

Уравнение имеет вид $MMM\,dx + NNN\,dy = 0$, где

```
NNN=1

MMM=sin(x)

YOUR EQUATION IS LINEAR.
```

Ваше уравнение линейно.

```
MU(TT)*DF(Y,TT)=NU(TT)*Y(TT)+V(TT)

THE SOLUTIONS ARE:
```

Решения:

```
{{y=arbcomplex(1) - log(x)*x + x}, {y=arbcomplex(1) + cos(x)}}
```

Здесь $arbcomplex(1)$ — произвольная комплексная постоянная. Итак, общее решение уравнения (1) описывается двумя формулами

$$y = C + x(1 - \ln x) \quad \text{и} \quad y = C + \cos x,$$

где C — произвольная постоянная.

П2.3. Примеры решения уравнений с частными производными

1. Уравнение первого порядка.

В этом примере рассматривается уравнение в частных производных первого порядка

$$(y^2 - 2xy + x^2 + ay)\frac{\partial u}{\partial x} + ay\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

После множества проверок CONVODE добивается результата путем решения характеристического уравнения.

Исходные данные:

```
nmax:=3;
smax:=4;
argstop:=2;
lparti:={};
depend u,x,y;
L1:={(y**2-2*x*y+x**2+a*y)*df(u,x)+a*y*df(u,y)=0};
L2:={u};
L3:={x,y};
L4:={};
L5:={English};
convode(L1,L2,L3,L4,L5);
```

Имеем:

```
.............................

YOU HAVE TO SOLVE A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION
WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES.
```

У вас уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными

```
YOUR EQUATION IS LINEAR.
```

Ваше уравнение линейное.

```
ARE THE COEFFICIENTS CONSTANTS?
YOUR EQUATION HAS NO CONSTANT COEFFICIENTS
```

Коэффициенты уравнения постоянные? Нет, не постоянные.

```
THE EQUATION IS LINEAR WITHOUT SECOND MEMBER.
```

Уравнение линейное, с нулевой правой частью.

```
THE EQUATION IS OF THE FIRST ORDER.
```

Уравнение — первого порядка.

```
THE PROCEDURE PARTI DOES NOT PROVIDE ANY PARTICULAR SOLUTION.
```

Процедура *PARTI* не находит частного решения.

```
PERHAPS THAT THE EQUATION IS HOMOGENEOUS?
THE EQUATION IS NOT HOMOGENEOUS.
```

Возможно, уравнение однородно (по отношению к независимым переменным)? Нет, не однородно.

```
AND THE METHOD OF CHARACTERISTICS?
```

Попробую метод характеристик.

```
*********************************

THE FORM OF THE EQUATION IS:
A*DF(U,X)+B*DF(U,Y)+C*U=0
```

Уравнение имеет вид $Au'_x + Bu'_y + Cu = 0$.

```
IN ORDER TO FIND THE CHARACTERISTICS YOU MUST SOLVE
THE FOLLOWING O.D.E. IT IS DONE BY CONVODE.
```

Чтобы найти характеристики, необходимые решить следующее ОДУ. Это сделает CONVODE.

```
                     a*y
{df(y,x)=------------------------}
                   2            2
          a*y + x   - 2*x*y + y

*******************************************
I MAY ALREADY PROVIDE THE FOLLOWING SOLUTION:
```

Сразу могу сообщить, что имеется следующее решение:

```
*******************************************

                            2                            2
{df(y,x)*a*y + df(y,x)*x  - 2*df(y,x)*x*y + df(y,x)*y  - a*y=0}

+++++++++++++++++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++++++++++++++
{y=x}
+++++++++++++++++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++++++++++++++

I START THE PROCEDURE ODE WITH THE FOLLOWING ARGUMENTS.
```

Запускаю процедуру *ODE* со следующими аргументами.

```
**************************************************

               2             2 -1
L1={ - (a*y + x  - 2*x*y + y )  *a*y + df(y,x)=0}
L2={y}
L3={x}
L4={}
L5={}
```

```
L222={y}
LANGUE={}
****************************

.........................

THE FORM OF THE EQUATION IS MMM*DX+NNN*DY=0 WITH:
```

Уравнение имеет вид $MMM\,dx + NNN\,dy = 0$, где

```
NNN=1

               - a*y
MMM=----------------------
              2            2
     a*y + x   - 2*x*y + y
```

Теперь для решения последнего уравнения CONVODE мобилизует все свои возможности и задает вопросы, на которые отвечает. (Вопросы и ответы приведены ниже.)

Уравнение линейно? Нет. Уравнение является уравнением в полных дифференциалах? Нет. Уравнение однородно? Нет. Это уравнение Бернулли, Клеро или Лагранжа? Нет. Удается ли найти интегрирующий множитель? Нет. Это уравнение Риккати или Абеля? Нет. Может ли здесь CONVODE применить группу? Нет. И так далее. Ни один из методов не работает! Что же делать дальше? До этого момента CONVODE пытался решать данное уравнение как уравнение относительно $y(x)$. А почему бы не попробовать решить его как уравнение относительно $x(y)$? Теперь x — зависимая переменная, а y — независимая.

```
THE EQUATION FOR X IN TERMS OF Y IS:
```

Уравнение для x как функции y:

```
                    2            2
           a*y + x   - 2*x*y + y
{df(x,y)=-----------------------}
                   a*y
```

Поскольку было установлено, что $y(x) = x$ является частным решением уравнения для y, то очевидно, что $x(y) = y$ является частным решением последнего уравнения:

```
********************************************
I MAY ALREADY PROVIDE THE FOLLOWING SOLUTION:
```

Сразу могу сообщить, что имеется следующее решение:

```
********************************************

                           2              2
{df(x,y)*a*y - a*y - x   + 2*x*y - y =0}

+++++++++++++++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++++++++++++
{x=y}
+++++++++++++++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++++++++++++

I START THE PROCEDURE ODE WITH THE FOLLOWING ARGUMENTS.
```

Запускаю процедуру *ODE* со следующими аргументами.

```
*****************************************************

                 -1   2  -1        -1        -1
L1={df(x,y) - a  *x *y   + 2*a  *x - a  *y - 1=0}
L2={x}
L3={y}
L4={}
```

```
L5={}
L222={x}
LANGUE={}
****************************

............................

THE FORM OF THE EQUATION IS MMM*DX+NNN*DY=0 WITH:
```

Уравнение имеет вид $MMM\ dx + NNN\ dy = 0$, где

```
MMM=1

                   2           2
       - a*y - x   + 2*x*y - y
NNN=-------------------------
                a*y

............................

YOUR EQUATION IS A RICCATI D.E.
```

Ваше уравнение является уравнением Риккати:

```
DF(X,Y)+A(Y)*X**2+B(Y)*X+C(Y)=0

        - 1
A(Y)=------
       a*y

       2
B(Y)=---
       a

       - (a + y)
C(Y)=------------
           a

ARE WE IN A PARTICULAR CASE?
YOU ARE NOT IN A PARTICULAR CASE.
```

Мы имеем дело с одним из специальных случаев? Нет.

```
A PARTICULAR SOLUTION IS X0=y
```

Частное решение: $x_0 = y$

```
IF X0=X0(Y) IS A PARTICULAR SOLUTION OF RICCATI THEN
THE GENERAL SOLUTION IS GIVEN BY:
```

Если $x_0 = x_0(y)$ является частным решением уравнения Риккати, то общее решение имеет вид

```
**********************************************
X(y)=X0(y)+PHI(y)*[CTE+INT(PHI(y)*A(y),y)]**(-1)
WITH:
```

где

```
PHI(y)=EXP[-INT(2*X0(y)*A(y)+B(y),y)]

IT IS NOW A SIMPLE PROBLEM OF INTEGRATION.
```

Теперь остается только вычислить интегралы.

```
**********************************************

THE ANSWER OF CONVODE IS:
```

Ответ:

```
    log(y)*y - a*cte*y - a
{x=------------------------}
        log(y) - a*cte
```

```
THE METHOD OF CHARACTERISTICS PROVIDES THE SOLUTION !
```

Решение получено методом характеристик!

```
****************************************************

              log(y)*x - log(y)*y + a
{u=arbfonc(-------------------------)}
                   a*x - a*y
```

Общее решение исходного УрЧП представляется в виде произвольной функции заданного аргумента *arbfonc*(*argument*). Имеем:

$$u(x, y) = \Phi\Big(\frac{a + (x - y)\ln y}{a(x - y)}\Big),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция z.

Для проверки этого решения можно использовать переменную *argument*. Добавим к исходным данным следующие строки:

```
12  argument;
13  arbfonc(argument):=argument**2+3*log(argument)$
14  reponse;
15  verif:=sub(reponse,lhs first l1 - rhs first l1);
```

Для проверки можно задать любую конкретную функцию. В ответ получаем:

```
............................

12:
 log(y)*x - log(y)*y + a
-------------------------
        a*(x - y)

13:

14:
              log(y)*x - log(y)*y + a    2  2
{u=(3*log(-------------------------)*a *x
                   a*x - a*y

           log(y)*x - log(y)*y + a    2
   - 6*log(-------------------------)*a *x*y
                   a*x - a*y

           log(y)*x - log(y)*y + a    2  2         2  2          2
   + 3*log(-------------------------)*a *y +log(y) *x -2*log(y) *x*y
                   a*x - a*y

           2  2                             2    2  2     2       2  2
   + log(y) *y +2*log(y)*a*x-2*log(y)*a*y+a )/(a *x -2*a *x*y+a *y )

 }

15:
verif := 0
```

Последняя строка подтверждает, что полученное решение верно.

2. Линейное уравнение второго порядка.

Рассмотрим линейное УрЧП второго порядка с двумя независимыми переменными и ненулевой правой частью

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy.$$

В этом примере будет показано, что CONVODE умеет классифицировать такие уравнения и выписывать каноническую форму.

Исходные данные:

```
nmax:=3;
smax:=4;
lparti:={};
argstop:=2;
depend u,x,y;
L1:={df(u,x,2)-2*df(u,x,y)+df(u,y,2)=x*y};
L2:={u};
L3:={x,y};
L4:={};
L5:={English};
convode(l1,l2,l3,l4,l5);
```

Имеем:

```
............................

YOU HAVE TO SOLVE A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION
WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES, I TRY TO DO MY BEST...
```

У вас уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными. Попробую сделать всё, что смогу ...

```
YOUR EQUATION IS LINEAR BUT WITH A RIGHT MEMBER.
```

Уравнение линейное, но с правой частью.

```
PERHAPS THAT THE COEFFICIENTS ARE CONSTANT ?
YES, IT IS AN EQUATION INVOLVING CONSTANT COEFFICIENTS.
```

Может быть, коэффициенты постоянны? Да, это уравнение с постоянными коэффициентами.

```
THE EQUATION MAY BE FACTORIZED AND IS REDUCTIBLE.
```

Левую часть уравнения можно факторизовать и упростить.

```
PERHAPS THAT YOU ARE INTERESTED BY THE CANONICAL FORM
AND THE CLASSIFICATION OF YOUR EQUATION ?
```

Возможно, вам интересны каноническая форма и классификация уравнения.

Далее CONVODE дает ответ на вопрос: «Является ли уравнение эллиптическим, гиперболическим или параболическим?»

```
***** I START THE CLASSIFICATION **********
```

Приступаю к классификации

```
YOU WANT TO CLASSIFY THE FOLLOWING EQUATION:
```

Вы хотите классифицировать следующее уравнение:

```
{ - 2*df(u,x,y) + df(u,x,2) + df(u,y,2)=x*y}

DELTA=0

SO YOUR EQUATION IS PARABOLIC.
```

Так что ваше уравнение параболическое.

```
LET ME PUT:
```

Положим

```
{xi=x,eta= - x - y}

OR:
```

или

```
{x=xi,y= - eta - xi}
```

```
WITH THE NEW VARIABLES xi AND eta THE CANONICAL FORM IS :
```

В новых переменных ξ, η каноническая форма следующая:

```
                                2
{df(u,xi,2)= - eta*xi - xi }
```

```
YOUR P.D.E. HAS BEEN CLASSIFIED.
```

Тип уравнения установлен.

```
THE RESULTS OF THIS COMPUTATION ARE IN THE NON SCALAR IDENTIFIER
"REPONSEDECLASSI" WHICH MAY BE USED LATER.
```

Каноническая форма сохранена в переменной *REPONSEDECLASSI*, которую можно использовать в дальнейшем.

```
***** END OF THE CLASSIFICATION **********
```

Классификация завершена

Итак, CONVODE установил, что уравнение параболическое, и нашел его каноническую форму. Поскольку правая часть уравнения отлична от нуля, то необходимо вычислять частное решение. Это делается на следующем шаге:

```
A PARTICULAR SOLUTION OF THE EQUATION WITH THE RIGHT MEMBER IS:
```

Частное решение неоднородного уравнения:

```
                    4       3         2  2         3       4
                 5*x  + 4*x *y - 18*x *y  + 4*x*y  + 5*y
REPONSEBIS={u=-----------------------------------------------}
                                 192
```

Конечно, общее решение однородного уравнения должно включать две произвольные функции $\Phi_1(\cdots)$, $\Phi_2(\cdots)$ — $arbphi(1,\ldots)$, $arbphi(2,\ldots)$:

```
THE GENERAL SOLUTION OF THE HOMOGENEOUS EQUATION IS:
```

Общее решение однородного уравнения:

```
REPONSE-HOMOGENE=arbphi(2,x + y)*x + arbphi(1,x + y)
```

```
WHERE arbphi(1,x+y) AND arbphi(2,x+y) ARE ARBITRARY FUNCTIONS OF x+y
```

где $arbphi(1, x+y)$, $arbphi(2, x+y)$ — произвольные функции аргумента $x+y$.

```
THE GENERAL SOLUTION OF THE PROBLEM (IN REPONSE) IS:
```

Общее решение задачи (в переменной *REPONSE*):

```
{u=(192*arbphi(2,x + y)*x + 192*arbphi(1,x + y)

         4       3         2  2         3       4
  + 5*x  + 4*x *y - 18*x *y  + 4*x*y  + 5*y )/192}
```

В привычной записи полученное решение имеет вид

$$u(x,y) = x\Phi_1(x+y) + \Phi_2(x+y) + \frac{5x^2 + 4x^3y - 18x^2y^2 + 4xy^3 + 5y^4}{192},$$

где Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции.

Произведем проверку. Верно ли частное решение *reponsebis*?

```
12  reponsebis;
13  verifpar:=sub(reponsebis,lhs first l1 - rhs first l1);
```

Имеем:

```
12:
       4       3         2  2         3       4
    5*x  + 4*x *y - 18*x *y  + 4*x*y  + 5*y
{u=-----------------------------------------}
                      192
```

```
13:
verifpar := 0
```

Частное решение верно.

Теперь проверим, верно ли общее решение, задавшись конкретным видом произвольных функций:

```
reponse;
arbphi(2,x+y):=(x+y)**2$
arbphi(1,x+y):=log(x+y)$
reponse;
verif:=sub(reponse,lhs first l1 - rhs first l1);
```

Имеем:

```
14:
{u=(192*arbphi(2,x + y)*x + 192*arbphi(1,x + y)

          4       3             2  2         3       4
   + 5*x  + 4*x *y - 18*x *y  + 4*x*y  + 5*y )/192}

15:

16:

17:
                              4      3               3
{u=(192*log(x + y) + 5*x  + 4*x *y + 192*x

        2  2          2             3            2       4
   - 18*x *y  + 384*x *y + 4*x*y  + 192*x*y  + 5*y )/192}

18:
verif := 0
```

П2.4. Как использовать CONVODE

В рассмотренных выше примерах приведены исходные данные для решения соответствующих уравнений и вкратце указан смысл вводимых строк. Ниже в пп. 1, 2 исходные параметры обсуждаются более подробно.

1. Аргументы процедуры CONVODE.

CONVODE представляет собой Reduce-процедуру, имеющую пять аргументов — `convode(L1,L2,L3,L4,L5)`, — каждый из которых является списком. Список на языке Reduce есть конструкция вида `{...}`, причем элементы списка разделяются запятыми.

Первый аргумент `L1:={...}` есть список, содержащий уравнения (уравнение), которые требуется решить (это могут быть обыкновенные дифференциальные уравнения или уравнения в частных производных).

Например, командой `L1:={df(u,x,2)-2*df(u,x,y)+df(u,y,2)=x*y};` задается уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy,$$

а командой `L1:={df(x,t,2)=2*x*y-y^2,df(y,t)=x^2-x*y+3y^2};` — система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2xy - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - xy + 3y^2. \end{cases}$$

`L2:={...}` — список зависимых переменных.

`L3:={...}` — список независимых переменных.

Например, если `L2:={u}`, а `L3:={x,y,z}`, то это означает, что CONVODE будет трактовать `L1` как УрЧП относительно $u(x, y, z)$.

Если `L2:={y}`, `L3:={x}`, то `L1` есть ОДУ относительно $y(x)$.

Если же `L2` — пустой список (`L2:={}`), а `L3:={x,y,z}`, то CONVODE знает, что пользователь хочет решить уравнение вида

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0.$$

`L4:={}` — список начальных условий. Если начальные условия не указаны, (`L4:={}`), то решение будет содержать произвольные постоянные.

Например, если список зависимых переменных есть `L2:={x,y,z}`, и нужно решить систему ОДУ для $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, скажем, при начальных условиях

$$x(0) = 5,\quad x'(0) = 6,\quad y(0) = 15,\quad y'(0) = 67,\quad y''(0) = 45,\quad z(0) = 11,\quad z'(0) = 59,$$

то нужно указать

```
L4:={{5,6,15,67,45,11,59},0};
```

Пятый аргумент задает язык, на котором CONVODE будет печатать свои комментарии. Если `L5:={}` или `L5:={Francais}`, то комментарии будут на французском языке, а если `L5:={English}` или `L5:={Deutch}`, то на английском, немецком и т. д.

После того как все аргументы заданы, следует вызов процедуры CONVODE, которая анализирует входные данные и решает поставленную задачу.

2. Глобальные переменные.

Если известно частное решение линейного ОДУ второго порядка, то его следует указать в глобальной переменной `LPARTI`:

```
LPARTI:={y=...}
```

CONVODE проверит это решение, вычислит второе частное решение и выпишет общее решение. Если ни одно частное решение не известно, то следует указать `LPARTI:={}`.

Переменным `NMAX` и `SMAX` можно присваивать положительные целые значения. Когда решение представляется в виде ряда, `SMAX` фиксирует количество вычисляемых членов ряда, а `NMAX` задает максимальную степень полинома при поиске полиномиального решения.

`ARGSTOP` — переменная, принимающая положительные целочисленные значения. Если линейное ОДУ второго порядка имеет полиномиальное частное решение, то может быть вычислено второе решение, но вычисления могут быть очень громоздкими. Если значение `ARGSTOP` меньше степени первого полиномиального решения, то второе решение вычисляться не будет, а в противном случае — будет. (Данная возможность предназначена для тех, кто знает, что уравнение имеет полиномиальное частное решение, и интересуется вторым частным решением.)

Если CONVODE сумел найти решение поставленной задачи, то оно записывается в переменную `REPONSE`.

Постоянные интегрирования CONVODE обозначает следующим образом: `CTE`, `ARBCOMPLEX(1)`, `ARBCOMPLEX(2)` и т. д. Произвольные функции при решении УрЧП записываются в виде `ARBPHI(1,...)`, `ARBPHI(2,...)` и т. д.

Кроме того, имеются другие глобальные переменные, которые могут представлять интерес для пользователя. О них CONVODE сообщает дополнительно. Например, при вычислении частного решения неоднородного уравнения это решение заносится в переменную `REPONSEBIS`, а общее решение однородного уравнения при этом запоминается в `REPONSE!-HOMOGENE`.

3. CONVODE по электронной почте.

Свежую информацию о том, как пользоваться пакетом CONVODE через электронную почту, можно получить в сети Интернет по адресу

http://www.physique.fundp.ac.be/physdpt/administration/convode.html

Возможность использования пакета CONVODE по e-mail очень проста. Нужно подготовить файл данных вида

```
NMAX:=2;
SMAX:=3;
ARGSTOP:=1;
LPARTI:={};
DEPEND Y,X;
L1:={(X**2-1)*DF(Y,X)=2*X*Y*LOG(Y)};
L2:={Y};
L3:={X};
L4:={};
L5:={};
CONVODE(L1,L2,L3,L4,L5);
```

и отправить его по адресу

convode@riemann.physmath.fundp.ac.be

В посылаемом сообщении не должно быть никакой другой текстовой информации — только команды на языке Reduce. В графе «`Subject:`» можно указать название посылаемого задания, например, «`Subject: Example 1`».

Ответ не заставит себя долго ждать. Проанализировав полученное сообщение, вы можете модифицировать исходный файл данных с тем, чтобы добиться нужного результата, и послать измененный файл по электронной почте.

Благодарности. Автор хотел бы выразить свою признательность профессору А. Ронво (A. Ronveaux) и Р. Мэрэссу (R. Mairesse) за плодотворные дискуссии.

⊙ Литература к разд. П2: Э. Камке (1976), G. Rayna (1987), Д. М. Климов, В. М. Руденко (1989), D. Zwillinger (1989), A. Moussiaux (1993, 1996), A. C. Hearn, J. P. Fitch (1995), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995–1997).

Список литературы

Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Аксельруд Г. А., Молчанов А. Д. Растворение твердых веществ. — М.: Химия, 1977. — 269 с.

Аставин В. С., Королев И. О., Рязанцев Ю. С. О температуре потока в канале со скачком температуры на стенке. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа, 1979, № 5, с. 194–198.

Астарита Дж. Массопередача с химической реакцией. — Л.: Химия, 1971. — 224 с.

Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход. В кн.: Современные проблемы математики, т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР) — М.: 1989, с. 3–83.

Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др. Линейные уравнения математической физики. — М.: Наука, 1964. — 368 с.

Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — М.: Гидрометеоиздат, 1978. — 208 с.

Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. // Прикл. матем. и механика, 1952, т. 16, № 1, с. 67–78.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. — М.: Наука, 1973. — 296 с.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. — М.: Наука, 1974. — 296 с.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 3. — М.: Наука, 1967. — 300 с.

Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. — М.: Химия, 1974. — 688 с.

Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1985. — 312 с.

Борзых А. А., Черепанов Г. П. Плоская задача теории конвективной теплопередачи и массообмена. // Прикл. матем. и механика, 1978, т. 42, № 5, с. 848–855.

Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1980. — 686 с.

Буллаф Р., Кодри Ф. Солитоны. — М.: Мир, 1983. — 408 с.

Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1979. — 224 с.

Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. В кн.: Современные проблемы математики, т. 28 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). — М.: 1986, с. 95–206.

Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1989, т. 29, № 4, с. 497–506.

Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. — М.: Препринт № 115 Института прикл. математики АН СССР, 1988. — 24 с.

Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. — М.: Наука, 1985. — 336 с.

Гухман А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена. — М.: Высшая школа, 1974. — 328 с.

Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288 с.

Дильман В. В., Полянин А. Д. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии. — М.: Химия, 1988. — 304 с.

Дородницын В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнений нелинейной теплопроводности с источником или стоком. — М.: Препринт № 57 Института прикл. математики АН СССР, 1979. — 32 с.

Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.

Дородницын В. А., Свирщевский С. Р. О группах Ли — Беклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником. — М.: Препринт № 101 Института прикл. математики АН СССР, 1983. — 28 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. — М.: Наука, 1993. — 464 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. — М.: Наука, 1995. — 560 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными. — М.: Международная программа образования, 1996. — 512 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997. — 304 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997. — 512 с.

Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980. — 480 с.

Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. В кн.: Сборник, посв. 70-летию А. Ф. Иоффе. — М.: Изд. АН СССР, 1950, с. 61–71.

Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 688 с.

Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением. — М.: Препринт № 74 Института прикл. математики АН СССР, 1976. — 67 с.

Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

Исаев С. И., Кожинов И. А., Кофанов В. И., Леонтьев А. И. и др. Теория тепломассообмена. — М.: Высшая школа, 1979. — 495 с.

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 488 с.

Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высшая школа, 1985. — 480 с.

Климов Д. М., Руденко В. М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. — М.: Наука, 1989. — 215 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1984. — 832 с.

Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979. — 416 с.

Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика. — М.: Бюро Квантум, 1996. — 336 с.

Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 736 с.

Лаврик В. И., Савенков В. Н. Справочник по конформным отображениям. — Киев: Наукова Думка, 1970. — 252 с.

Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. — М.: Физматлит, 1959. — 670 с.

Лехтмахер С. О. Осаждение частиц из ламинарного потока в зависимости от числа Пекле. // Инж.-физич. журнал, 1971, т. 20, № 3, с. 546–549.

Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.

Лыков А. В., Берковский Б. М. Конвекция и тепловые волны. — М.: Энергия, 1974. — 336 с.

Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. — 475 с.

Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 4, с. 1048–1054.

Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. — М.: Наука, 1987. — 352 с.

Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 248 с.

Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Часть I. — М.: Наука, 1987. — 464 с.

Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.

Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. — М.: Энергия, 1967. — 412 с.

Полянин А. Д., Журов А. И. Точные решения нелинейных уравнений механики и математической физики. // Докл. РАН, 1998 (в печати).

Попов Д. А. Учет продольной диффузии при течении в канале. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа, 1973, № 6, с. 63–73.

Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — 799 с.

Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975. — 288 с.

Самарский А. А., Соболь И. М. Примеры численного расчета температурных волн. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1963, т. 3, № 4, с. 702–719.

Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.

Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1972. — 440 с.

Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966. — 448 с.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.

Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1987. — 502 с.

Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976. — 631 с.

Черпаков П. В. Теория регулярного теплообмена. — М.: Энергия, 1975. — 225 с.

Шервуд Т., Пигфорд Р., Уилки Ч. Массопередача. — М.: Химия, 1982. — 696 с.

Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A. Positivity versus localization in degenerate diffusion equations. // Nonlinear Analys., Theory, Meth. and Appl., 1985, v. 9, No. 9, p. 987–1008.

Bluman G. W., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation $[a(u+b)^{-2}u_x]_x - u_t = 0$. // J. Math. Phys., 1980, v. 21, No. 5, p. 1019–1023.

Burgan J. R., Munier A., Feix M. R., Fijalkow E. Homology and the nonlinear heat diffusion equation. // SIAM J. Appl. Math., 1984, v. 44, No. 1, p. 11.

Graetz L. Über die Warmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten. // Annln. Phys., 1883, Bd. 18, S. 79–84.

Deavours C. A. An exact solution for the temperature distribution in parallel plate Poiseuille flow. // Trans. ASME, J. Heat Transfer, 1974, v. 96, No. 4.

Fujita H. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium. Part II. // Textile Res., 1952, v. 22, p. 823.

Hearn A. C., Fitch J. P. (editors). REDUCE User's Manual 3.6. — Berlin: Zentrum fur Informatik Berlin (ZIB), 1995.

Ibragimov N. H. (editor). CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, v. 1. — Boca Raton: CRC Press, 1994. — 429 p.

Kawahara T., Tanaka M. Interactions of traveling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equations. // Phys. Lett., 1983, v. 97, p. 311.

Kersner R. On some properties of weak solutions of quasilinear degenerate parabolic equations. // Acta Math. Academy of Sciences, Hung., 1978, v. 32, No. 3–4, p. 301–330.

Moussiaux A. CONVODE: un programme REDUCE pour la résolution des équations différentielles. — Bruxelles: Didier Hatier, 1996. — 446 p.

Moussiaux A. CONVODE: a REDUCE package for solving differential equations. // J. Comp. and Appl. Math., 1993, v. 48, p. 157–165.

Munier A., Burgan J. R., Gutierres J., Fijalkow E., Feix M. R. Group transformations and the nonlinear heat diffusion equation. // SIAM J. Appl. Math., 1981, v. 40, No. 2, p. 191.

Nusselt W. Abhängigkeit der Wärmeübergangzahl con der Rohränge. // VDI Zeitschrift, 1910, Bd. 54, No. 28. S. 1154–1158.

Philip J. R. General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation. // Australian Journal of Physics, 1960, v. 13, No. 1, p. 13–20.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. — Boca Raton — New York: CRC Press, 1995. — 720 p.

Rayna G. REDUCE: Software for Algebraic Computation. — New York — Berlin: Springer-Verlag, 1987. — 329 p.

Rotem Z., Neilson J. E. Exact solution for diffusion to flow down an incline. // Can. J. Chem. Engng., 1966, v. 47, p. 341–346.

Strampp W. Bäcklund transformations for diffusion equations. // Physica D, 1982, No. 6, p. 113.

Sutton W. G. L. On the equation of diffusion in a turbulent medium. // Proc. Poy. Soc., Ser. A, 1943, v. 182, No. 988, p. 48–75.

Ting A. S., Cheb H. H., Lee Y. C. Exact solutions of a nonlinear boundary value problem: the vortices of the two-dimensional sinh-Poisson equation. // Physica D, 1987, p. 37–66.

Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. — Academic Press: San Diego, 1989. — 673 p.

Справочное издание

ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич
ВЯЗЬМИН Андрей Валентинович
ЖУРОВ Алексей Иванович
КАЗЕНИН Дмитрий Александрович

СПРАВОЧНИК ПО ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 23. Бумага офсетная № 1. Гарнитура литературная. Подписано к печати 12.02.1998. Тираж 1000 экз. Заказ № 3312.

Издательство «Факториал», 117449, Москва, а/я 331; ЛР № 063537 от 22.07.1994.

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука». 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6.