А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев

ФГОС

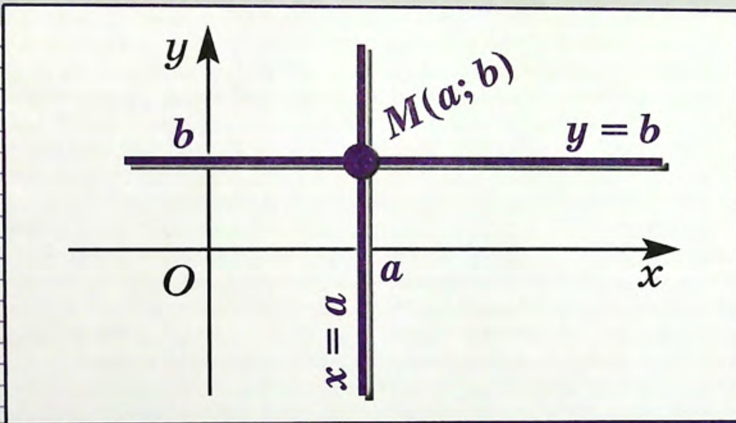
Алгебра

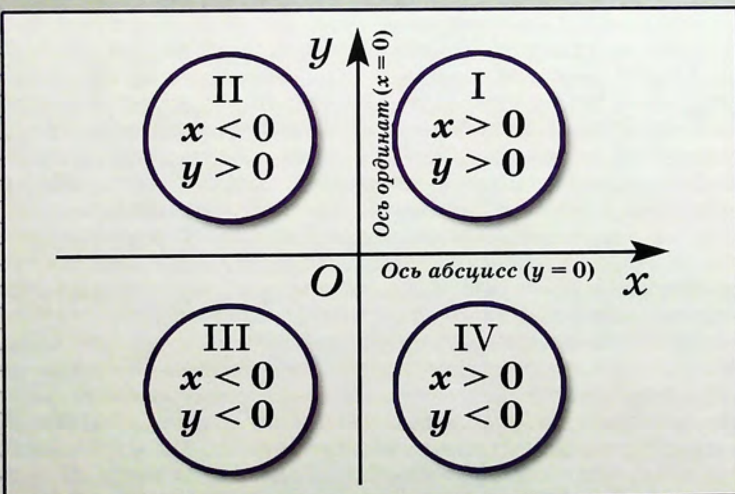
7

Углублённый уровень

часть 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МНЕМОЗИНА


y
M(a; b)
b
y = b
O
a
x
x = a


y
Ось ординат (x = 0)
II
x < 0
y > 0
I
x > 0
y > 0
O
Ось абсцисс (y = 0)
x
III
x < 0
y < 0
IV
x > 0
y < 0

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

$(n = 2, 3, 4, \ldots)$

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1 \; (a \neq 0)$$

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}; \quad a^n : a^k = a^{n-k}$$

$$(a^n)^k = a^{nk}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев

Алгебра

7

часть

1

УЧЕБНИК
для общеобразовательных
организаций
(углублённый уровень)

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

13-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МНЕМОЗИНА

Москва 2021

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721
М79

На учебник получены положительные заключения по результатам трёх экспертиз: научной (Российская академия наук, № 004946 от 19.12.2016), педагогической (Российская академия наук, № 005053 от 19.12.2016) и общественной (РШБА, № ОЭ/16-0381 от 26.12.2016)

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра. 7 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (углублённый уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. — 13-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2021. — 232 с. : ил.

ISBN 978-5-346-04686-8

Учебник написан в соответствии с ФГОС ООО, реализует авторскую концепцию, в которой приоритетной содержательно-методической основой является функционально-графическая линия, а идейным стержнем курса — математический язык и математическая модель, с помощью которых строится описание реальных ситуаций окружающей действительности. В учебнике реализованы принципы проблемного, развивающего и опережающего обучения.

Подбор и последовательность учебного материала позволяют изучать предмет как на базовом, так и на углублённом уровне в соответствии с Примерной основной общеобразовательной программой.

Электронная форма учебника содержит соответствующий мультимедийный материал и тесты для самопроверки.

Первая часть учебника содержит теоретический материал, написанный понятным языком, доступным для всех учащихся.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич, **Николаев** Николай Петрович

АЛГЕБРА

7 класс

УЧЕБНИК

для общеобразовательных организаций
(углублённый уровень)

В двух частях

Часть 1

Формат 70×90 1/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,97.
Тираж 20 000 экз. (1-й завод — 1—6000 экз.). Заказ № 10477.

Издательство «Мнемозина».
111033, Москва, ул. Волочаевская, 40 г. Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.
Тел.: 8 (495) 783 8284. www.shop.mnemozina.ru

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Ульяновский Дом Печати».
432980, Россия, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

ISBN 978-5-346-04685-1 (общ.)
ISBN 978-5-346-04686-8 (ч. 1)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие семиклассники! Первые шесть классов позади. Вы приступаете к следующему этапу своего обучения в школе. От его итогов в большой степени зависит ваш дальнейший жизненный путь. Теперь у вас появятся экзамены, новые уроки. Относится это и к математике, которая будет состоять из двух предметов: алгебры и геометрии.

Практически всё, что окружает нас в повседневной жизни (дома и дороги, машины и механизмы, компьютеры, мобильные телефоны и многое другое), в процессе своего создания было тем или иным образом сконструировано, спланировано, рассчитано. Все эти объекты, процессы и операции с ними связаны с математикой. Только высокий уровень овладения математикой может гарантировать безошибочность вычислений, точность прогнозов, надёжность схем, устойчивость конструкций, действенность алгоритмов. Математика является одним из базовых методов познания действительности, позволяющим описывать и изучать реальные процессы и явления. Современная цивилизация давно и прочно основана именно на таком положении дел. Ещё в начале XVII в. знаменитый итальянский учёный Галилео Галилей писал: «Великая книга Природы написана языком математики». А вот современная цитата: «Математика — фундаментальная наука, предоставляющая (общие) языковые средства другим наукам; она выявляет их структурную взаимосвязь и способствует нахождению самых общих законов природы». Важна математика и с гуманитарной точки зрения. В любом обсуждении, споре, дискуссии, речи, докладе, статье, книге мы что-то доказываем, приводим аргументы и опровержения, различаем истинное и ложное, стремимся к логичности утверждений, стараемся верно понять позицию возможного оппонента. Математика как часть общемировой культуры в самой существенной степени развивает способности к этим видам деятельности человека.

Вы начинаете изучать алгебру. Алгебра — основа математики как языка для построения математических моделей процессов и явлений реального мира. Математический язык — это формулы, графики, таблицы, алгоритмы, схемы рассуждений, формулировки определений и теорем. Особенность математического языка состоит в том, что с его помощью, используя минимум слов, можно выразить максимум содержания. Культурному человеку в наше стремительное время это жизненно необходимо.

В задачи изучения алгебры входят также развитие алгоритмического мышления, необходимого, в частности, для усвоения курса информатики, развитие умений извлекать информацию, анализировать массивы данных.

Учебник для изучения курса алгебры в 7-м классе состоит из двух книг: первая часть содержит теоретический материал, а вторая часть — практический. Сейчас вы держите в руках первую часть учебника. Структурно он состоит из 8 глав, в каждой главе есть параграфы, часть которых разбита на пункты. В конце каждого параграфа приведены вопросы для самопроверки. Закончив изучение параграфа, прочитайте вопросы для самопроверки и попробуйте ответить на них. Если возникнут затруднения, всегда можно в соответствующем параграфе учебника найти ответы на все вопросы.

Каждая глава заканчивается разделом «Основные результаты». Это своеобразное подведение итогов, что для успешности процесса обучения очень важно. Кроме того, в конце каждой главы даны примерные темы исследовательских работ, которые позволят вам расширить знания по математике и создать свой ученический проект.

Оглавление и предметный указатель, помещённые в конце книги, помогут вам быстро найти нужный раздел, определение того или иного понятия или теорему. Для облегчения навигации текст снабжён пиктограммами.

Желаем вам успехов!

Авторы

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Решение примера согласно предложенному ранее алгоритму

Ключевое место в рассуждении

Новые понятия и термины

Обратите внимание!
Текст для вдумчивого чтения!

1 ГЛАВА МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

§ 1 ЧИСЛОВЫЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1 Числовые выражения

В младших классах вы учились оперировать с целыми и дробными числами, решали уравнения, знакомились с геометрическими фигурами, с координатной прямой и координатной плоскостью. Всё это составляло содержание одного школьного предмета «Математика». В действительности такая важная область науки, как математика, подразделяется на огромное число самостоятельных дисциплин: алгебру, геометрию, теорию вероятностей, математический анализ, математическую логику, математическую статистику, теорию игр и т. д. У каждой дисциплины — свои объекты изучения, свои методы познания реальной действительности.

Алгебра, к изучению которой мы приступаем, даёт человеку возможность не только выполнять различные вычисления, но и учит его делать это как можно быстрее, рациональнее. Человек, владеющий алгебраическими методами, имеет преимущество перед теми, кто не владеет этими методами: он быстрее считает, успешнее ориентируется в жизненных ситуациях, чётче принимает решения, лучше мыслит. Наша задача — помочь вам овладеть алгебраическими методами, ваша задача — не противиться обучению, с готовностью следовать за нами, преодолевая возникающие трудности.

На самом деле в младших классах вам уже приоткрыли окно в волшебный мир алгебры, ведь алгебра в первую очередь изучает числовые и алгебраические выражения.

числовое выражение

алгебраическое выражение

Напомним, что *числовым выражением* называют всякую запись, составленную из чисел и знаков арифметических действий (составленную, разумеется, со смыслом, например, $3 + 5 \cdot 7$ — числовое выражение, тогда как $3 + :$ — не числовое выражение, а бессмысленный набор символов). По некоторым причинам (о них мы будем говорить в дальнейшем) часто вместо конкретных чисел употребляются буквы (преимущественно из латинского алфавита), тогда получается *алгебраическое выражение*. Эти выражения могут быть очень громоздкими. Алгебра учит упрощать их, используя разные правила, законы, свойства, формулы.

ПРИМЕР 1

Найти значение числового выражения

$$\frac{(2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81) : \left(\frac{2}{5} - \frac{14}{15}\right)}{25 \cdot 37 \cdot 0{,}4}.$$

Решение Сейчас мы вместе с вами кое-что вспомним, и вы увидите, как много алгебраических фактов вы уже знаете.

Прежде всего нужно выработать план осуществления вычислений. Для удобства введём следующие обозначения. Числитель данного дробного выражения обозначим буквой A, а знаменатель — буквой B:

$$A = (2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81) : \left(\frac{2}{5} - \frac{14}{15}\right); \quad B = 25 \cdot 37 \cdot 0{,}4.$$

В выражении A обозначим делимое буквой C, а делитель — буквой D. Тогда план наших действий будет выглядеть так:

1) найдём значение c выражения C;
2) найдём значение d выражения D;
3) разделив c на d, найдём значение a выражения A;
4) найдём значение b выражения B;
5) разделив a на b, найдём значение заданного числового выражения.

Итак, план вычислений есть (а наличие плана — половина успеха!), приступим к его реализации.

1) $C = 2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81$. Конечно, можно считать подряд, или, как иногда говорят, «в лоб»: $2{,}73 + 4{,}81$, затем к этому числу

прибавить 3,27, затем вычесть 2,81. Но красивее сделать так, вспомнив переместительный и сочетательный законы сложения:

$$(2{,}73 + 3{,}27) + (4{,}81 - 2{,}81) = 6 + 2 = 8.$$

Итак, $c = 8$.

2) $D = \frac{2}{5} - \frac{14}{15}$. Здесь нам придётся вспомнить, как действовать с обыкновенными дробями. Сначала надо привести дроби к общему знаменателю. Наименьшим общим кратным чисел 5 и 15 является число 15, оно и будет общим знаменателем. Для дроби $\frac{2}{5}$ получаем: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$. Значит,

$$\frac{2}{5} - \frac{14}{15} = \frac{6}{15} - \frac{14}{15} = \frac{6 - 14}{15} = -\frac{8}{15}.$$

Итак, $d = -\frac{8}{15}$.

3) Разделим c на d:

$$8 : \left(-\frac{8}{15}\right) = 8 \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) = -\frac{8 \cdot 15}{8} = -15.$$

Итак, $a = -15$.

4) $B = 25 \cdot 37 \cdot 0{,}4$. Конечно, можно проводить вычисления «в лоб», т. е. вычислить $25 \cdot 37$, затем то, что получится, умножить на 0,4. Но рациональнее воспользоваться переместительным и сочетательным законами умножения:

$$25 \cdot 37 \cdot 0{,}4 = (25 \cdot 0{,}4) \cdot 37 = 10 \cdot 37 = 370.$$

Итак, $b = 370$.

5) Осталось разделить числитель a на знаменатель b. Получим $-\frac{15}{370} = -\frac{3}{74}$ (разделили числитель и знаменатель дроби на 5, т. е. сократили дробь).

Ответ $-\frac{3}{74}$.

А теперь вместе проанализируем, какие сведения из математики нам пришлось вспомнить в процессе решения примера (причём не просто вспомнить, но и использовать).

1. Порядок арифметических действий.
2. Переместительный закон сложения: $a + b = b + a$.
3. Переместительный закон умножения: $ab = ba$.
4. Сочетательный закон сложения:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

5. Сочетательный закон умножения: $abc = (ab) \cdot c = a \cdot (bc)$.

6. Понятия обыкновенной дроби, десятичной дроби, отрицательного числа.

7. Арифметические операции с десятичными дробями.

8. Арифметические операции с обыкновенными дробями.

9. Основное свойство обыкновенной дроби: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (значение дроби не изменится, если её числитель и знаменатель одновременно умножить на одно и то же число или разделить на одно и то же число, отличное от нуля). Это свойство позволило нам преобразовать дробь $\frac{2}{5}$ к виду $\frac{6}{15}$ (числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{5}$ одновременно умножили на одно и то же число 3). Оно же позволило нам сократить дробь $\frac{15}{370}$ (числитель и знаменатель дроби $\frac{15}{370}$ одновременно разделили на одно и то же число 5).

10. Правила действий с положительными и отрицательными числами.

Всё это вы знаете, но ведь всё это — алгебраические факты. Таким образом, некоторое знакомство с алгеброй у вас уже состоялось в младших классах. Основная трудность, как видно уже из примера 1, заключается в том, что таких фактов довольно много, причём их надо не только знать, но и уметь использовать, как говорят, «в нужное время и в нужном месте». Вот этому и будем учиться.

И последнее, чтобы закончить обсуждение примера 1. То число, которое получается в результате упрощений числового выражения (в данном примере это было число $-\frac{3}{74}$), называют *значением числового выражения*.

2 Алгебраические выражения

Если дано алгебраическое выражение, то можно говорить о *значении алгебраического выражения*, но только при конкретных значениях входящих в него букв. Например, алгебраическое выражение $a + b$ при $a = 5$, $b = 7$ имеет значение 12 (поскольку $a + b = 5 + 7 = 12$); при $a = -16$, $b = -14$ оно имеет значение -30 (так как $a + b = -16 + (-14) = -16 - 14 = -30$). Алгебраическое выражение $a^2 - 3b$ при $a = -2$, $b = 0,4$ принимает вид числового выражения $(-2)^2 - 3 \cdot 0,4$; упрощая, получаем $4 - 1,2 = 2,8$ — это и есть значение алгебраического выражения $a^2 - 3b$ при $a = -2$, $b = 0,4$.

значение алгебраического выражения

Поскольку буквам, входящим в состав алгебраического выражения, можно придавать различные числовые значения (т. е. можно менять значения букв), эти буквы называют *переменными*.

ПРИМЕР 2

Найти значение алгебраического выражения

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)},$$

если: а) $a = 1$, $b = 2$; б) $a = 3{,}7$, $b = -1{,}7$; в) $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{3}{5}$.

Решение

а) Соблюдая порядок действий, последовательно находим:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$;

2) $a + b = 1 + 2 = 3$;

3) $a - b = 1 - 2 = -1$;

4) $(a + b)(a - b) = 3 \cdot (-1) = -3$;

5) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{9}{-3} = -3$.

б) Аналогично, соблюдая порядок действий, последовательно находим:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = 3{,}7^2 + 2 \cdot 3{,}7 \cdot (-1{,}7) + (-1{,}7)^2 = 13{,}69 - 12{,}58 + 2{,}89 = 4$;

2) $a + b = 3{,}7 + (-1{,}7) = 2$;

3) $a - b = 3{,}7 - (-1{,}7) = 5{,}4$;

4) $(a + b)(a - b) = 2 \cdot 5{,}4 = 10{,}8$;

5) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{4}{10{,}8} = \frac{4 \cdot 10}{10{,}8 \cdot 10} = \frac{40}{108} = \frac{10}{27}$

(разделили числитель и знаменатель дроби $\frac{40}{108}$ на 4, т. е. сократили дробь).

в) Снова, соблюдая порядок действий, последовательно находим:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 =$

$= \frac{9}{25} + \frac{18}{25} + \frac{9}{25} = \frac{36}{25}$;

2) $a + b = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$;

3) $a - b = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0$;

4) $(a + b)(a - b) = \frac{6}{5} \cdot 0 = 0$.

А на нуль делить нельзя! Что это значит в данном случае (и в других аналогичных случаях)? Это значит, что при $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{3}{5}$ заданное алгебраическое выражение *не имеет смысла.*

допустимые, недопустимые значения переменных

Используется такая терминология: если при конкретных значениях букв (переменных) алгебраическое выражение имеет числовое значение, то указанные значения переменных называют *допустимыми*; если же при конкретных значениях букв (переменных) алгебраическое выражение не имеет смысла, то указанные значения переменных называют *недопустимыми*. Так, в примере 2 значения $a = 1$ и $b = 2$, $a = 3{,}7$ и $b = -1{,}7$ — допустимые, тогда как значения $a = \frac{3}{5}$ и $b = \frac{3}{5}$ — недопустимые (более точно, первые две пары значений — допустимые, а третья пара значений — недопустимая).

Вообще в примере 2 недопустимыми будут такие значения переменных a, b, при которых либо $a + b = 0$, либо $a - b = 0$. Например, $a = 7$, $b = -7$ или $a = 28{,}3$, $b = 28{,}3$ — недопустимые пары значений; в первом случае $a + b = 0$, а во втором случае $a - b = 0$. В обоих случаях знаменатель заданного в этом примере выражения обращается в нуль, а на нуль, повторим ещё раз, делить нельзя. Теперь, наверное, вы и сами сможете придумать как допустимые пары значений для переменных a, b, так и недопустимые пары значений этих переменных в примере 2. Попробуйте!

Пример 2в) на самом деле мы решали плохо (некультурно), поскольку сделали ряд лишних, ненужных вычислений. Надо было сразу заметить, что при $a = \frac{3}{5}$ и $b = \frac{3}{5}$ знаменатель обращается в нуль, и объявить: выражение не имеет смысла! Но, как говорится, сразу замечает тот, кто знает, что надо замечать. Этому и учит алгебра.

Если бы мы с вами решали пример 2 позднее, то сделали бы это лучше. Мы бы смогли преобразовать выражение к более простому виду $\frac{a+b}{a-b}$, а тогда, согласитесь, гораздо проще было бы и вычислять. А вот почему верно равенство $\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$, пока мы сказать не можем. На этот вопрос ответим позднее (в § 42).

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение числового выражения.
2. Что такое значение числового выражения?
3. Что называется алгебраическим выражением?
4. Что такое значение алгебраического выражения?
5. Сформулируйте переместительный закон сложения.
6. Сформулируйте переместительный закон умножения.

7. Сформулируйте сочетательный закон сложения.
8. Сформулируйте сочетательный закон умножения.
9. Сформулируйте основное свойство дроби.
10. Как вы понимаете фразу: «Заданное алгебраическое выражение не имеет смысла»? Приведите пример такого выражения.
11. Какие значения переменных называются допустимыми?
12. Какие значения переменных называются недопустимыми?

§2 ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК

На математическом языке многие утверждения выглядят яснее и прозрачнее, чем на обычном. Например, на обычном языке говорят: «От перемены мест слагаемых сумма не меняется». Слыша это, математик пишет (или говорит):

$$a + b = b + a.$$

Он переводит высказанное утверждение на математический язык, в котором используются разные числа, буквы (переменные), знаки арифметических действий, иные символы. Запись $a + b = b + a$ экономна и удобна для применения.

Возьмём другой пример. На обычном языке говорят: «Чтобы сложить две обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить без изменения». Математик осуществляет «синхронный перевод» на свой язык:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

А вот пример обратного перевода. На математическом языке записан распределительный закон:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Осуществляя перевод на обычный язык, получим длинное предложение: «Чтобы умножить число a на сумму чисел b и c, можно число a умножить поочерёдно на каждое слагаемое и полученные произведения сложить».

Во всяком языке есть письменная и устная речь. Выше мы говорили о письменной речи в математическом языке. А устная речь — это употребление специальных терминов («слагаемое», «уравнение», «неравенство», «график», «координата» и т. п.), а также различные математические утверждения, выраженные словами.

Чтобы овладеть новым языком, необходимо изучить его буквы, слоги, слова, предложения, правила, грамматику. Это не самое весёлое занятие, интереснее сразу начать читать и говорить. Но так не бывает, придётся набраться терпения и сначала изучить основы. В результате такого изучения ваши представления о математическом языке будут постепенно расширяться.

Вопросы для самопроверки

1. Вспомните из курса математики 5—6-го классов правила действий с обыкновенными дробями. Сформулируйте их на обычном языке и постарайтесь осуществить перевод этих правил на математический язык.
2. Запишите на математическом языке: из суммы чисел 3 и 8 вычесть произведение чисел 7 и 12.
3. Запишите на математическом языке: чтобы умножить число m на сумму чисел n и k, надо число m умножить поочерёдно на каждое слагаемое и полученные произведения сложить. О каком законе идёт речь?
4. Запишите на математическом языке: чтобы умножить число p на разность чисел q и t, надо число p умножить поочерёдно на каждое слагаемое и из первого произведения вычесть второе. О каком законе идёт речь?

§3 ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1 Понятие о математической модели

Представьте себе такую ситуацию: в школе четыре седьмых класса. В 7«А» учатся 15 девочек и 13 мальчиков, в 7«Б» — 12 девочек и 12 мальчиков, в 7«В» — 9 девочек и 18 мальчиков, в 7«Г» — 20 девочек и 10 мальчиков. Если нам нужно ответить на вопрос, сколько учеников в каждом из седьмых классов, то нам 4 раза придётся осуществлять одну и ту же операцию сложения:

в 7«А» $15 + 13 = 28$ учеников;
в 7«Б» $12 + 12 = 24$ ученика;
в 7«В» $9 + 18 = 27$ учеников;
в 7«Г» $20 + 10 = 30$ учеников.

Используя математический язык, можно все эти четыре разные ситуации объединить: в классе учатся a девочек и b мальчиков, значит, всего учеников $a + b$. Такова ***математическая модель*** данной реальной ситуации. Алгебра, в частности, занимается тем, что описывает различные реальные ситуации на математическом языке в виде математических моделей, а затем имеет дело уже не с реальными ситуациями, а с этими моделями, используя разные правила, свойства, законы, выработанные в алгебре.

В следующей таблице приведены различные реальные ситуации и их математические модели; при этом a — число девочек в классе, b — число мальчиков в том же классе.

№	Реальная ситуация	Математическая модель
1	В классе девочек и мальчиков поровну (как в 7«Б»)	$a = b$
2	Девочек на 2 больше, чем мальчиков (как в 7«А»)	$a - b = 2$ или $a = b + 2$ или $a - 2 = b$
3	Девочек на 9 меньше, чем мальчиков (как в 7«В»)	$b - a = 9$ или $b = a + 9$ или $a = b - 9$
4	Девочек в 2 раза больше, чем мальчиков (как в 7«Г»)	$a = 2b$ или $b = \frac{a}{2}$
5	Девочек в 2 раза меньше, чем мальчиков (как в 7«В»)	$a = \frac{b}{2}$ или $b = 2a$
6	Если в данный класс придут ещё одна девочка и три мальчика, то девочек и мальчиков станет поровну (как в 7«А»)	$a + 1 = b + 3$
7	Если из класса уйдут три девочки, то мальчиков станет в 3 раза больше (как в 7«В»)	$b = 3\,(a - 3)$

Составляя эту таблицу, мы шли от реальной ситуации к её математической модели. Но надо уметь двигаться и в обратном направлении, т. е. по заданной математической модели описывать словами реальную ситуацию. Например, что означает (при тех же обозначениях, что и в нашей таблице) такая математическая модель: $a - 5 = b + 5$? Она означает, что если из класса уйдут 5 девочек и придут 5 мальчиков, то девочек и мальчиков в классе станет поровну (эта ситуация имеет место в 7«Г» из рассмотренного примера).

Наверное, у вас возник вопрос: а зачем нужна математическая модель реальной ситуации, что она нам даёт, кроме краткой выразительной записи? Чтобы ответить на этот вопрос, решим следующую задачу.

ПРИМЕР 1

В классе девочек вдвое больше, чем мальчиков. Если из этого класса уйдут три девочки и придут три мальчика, то девочек будет на 4 больше, чем мальчиков. Сколько учеников в данном классе?

Решение Пусть x — число мальчиков в классе, тогда $2x$ — число девочек. Если уйдут три девочки, то останется $(2x - 3)$ девочек. Если придут три мальчика, то станет $(x + 3)$ мальчиков. По условию девочек будет тогда на 4 больше, чем мальчиков; на математическом языке это записывается так: $(2x - 3) - (x + 3) = 4$.

Это уравнение — математическая модель задачи. Используя известные правила решения уравнений, последовательно получаем:

$2x - 3 - x - 3 = 4$ (раскрыли скобки);

$x - 6 = 4$ (привели подобные слагаемые);

$x = 6 + 4$;

$x = 10$.

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи. В классе 10 мальчиков, а значит, 20 девочек (вы помните, их по условию было в 2 раза больше).

Ответ Всего в классе 30 учеников.

Интересно, заметили ли вы, что в ходе решения было чёткое разделение рассуждений на три этапа? Давайте посмотрим вместе.

На первом этапе, введя переменную x и переведя текст задачи на математический язык, мы составили математическую модель — в виде уравнения $(2x - 3) - (x + 3) = 4$.

На втором этапе, используя наши знания из курса математики 5—6-го классов, мы это уравнение решили: $x = 10$. На этом этапе мы не думали ни про девочек, ни про мальчиков, а занимались «чистой» математикой, работали только с математической моделью.

На третьем этапе мы использовали полученное решение, чтобы ответить на вопрос задачи. На этом этапе мы снова вернулись к девочкам, мальчикам и интересующему нас классу.

Подведём итоги. В процессе решения задачи были чётко выделены три этапа.

I ЭТАП. *Составление математической модели.*

II ЭТАП. *Работа с математической моделью.*

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Вот так обычно применяется математика к реальной действительности. После рассмотренного примера повторим вопрос: нужны ли математические модели и надо ли уметь работать с ними? Нужны!

Разумеется, чем сложнее модель, тем больше фактов, правил, свойств приходится применять для работы с ней. Эти факты, правила, свойства надо изучить, что мы и будем с вами делать на протяжении всех лет изучения алгебры в школе.

2 Виды математических моделей

Математические модели бывают не только алгебраическими (в виде равенства с переменными, как в таблице на с. 13, или в виде уравнения, как было в примере 1). Для знакомства ещё с одним видом математической модели возьмём задачу из учебника математики для 6-го класса (специально берём задачу, с которой вы, может быть, встречались).

ПРИМЕР 2

Построить график температуры воздуха, если известно, что температуру измеряли в течение суток и по результатам измерения составили следующую таблицу:

Время суток, ч	0	2	4	6	8	10	11	14	16	18	22	24
Температура, °С	5	0	0	−3	−4	−2	0	6	8	5	3	3

Решение Построим прямоугольную систему координат. По горизонтальной оси (оси абсцисс) будем откладывать значения времени t, а по вертикальной оси (оси ординат) — значения температуры T. Построим на координатной плоскости точки, координатами которых являются соответствующие числа из таблицы. Всего получается 12 точек (рис. 1). Соединив их плавной линией, получим один из возможных графиков температуры (рис. 2).

Построенный график есть математическая модель, описывающая зависимость температуры от времени. Анализируя этот график, можно описать словами, что происходило с температурой воздуха в течение суток. Ночью с 0 ч до 8 ч утра становилось всё холоднее (от 5 °С в 0 ч до −4 °С в 8 ч утра). Потом, видимо, выглянуло солнышко и стало теплеть, так что в 11 ч температура была уже не отрицательной, а нулевой (0 °С). До 16 ч теплело, причём в 16 ч было теплее всего (8 °С). А затем стало темнеть, температура начала постепенно снижаться и понизилась до 3 °С в 22 ч.

Глядя на график температуры, можно приближённо определить, какая температура была наименьшей (−4 °С в 8 ч утра), какая — наибольшей (8 °С в 16 ч), где температура менялась быстрее, где

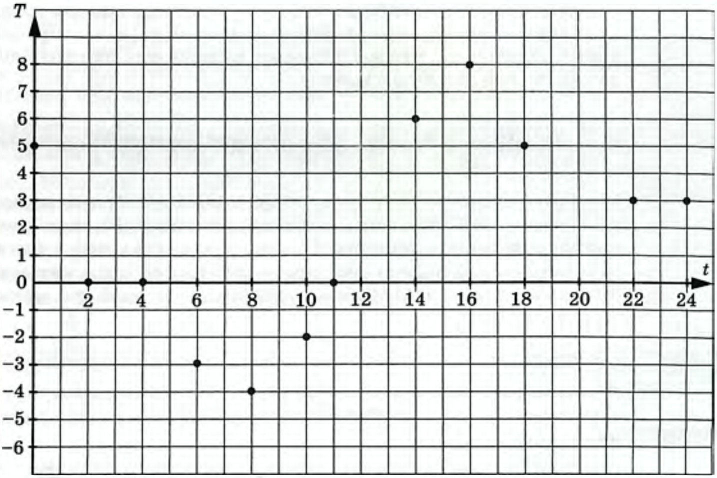

T
t
8 7 6 5 4 3 2 1 0 −1 −2 −3 −4 −5 −6
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24

Рис. 1

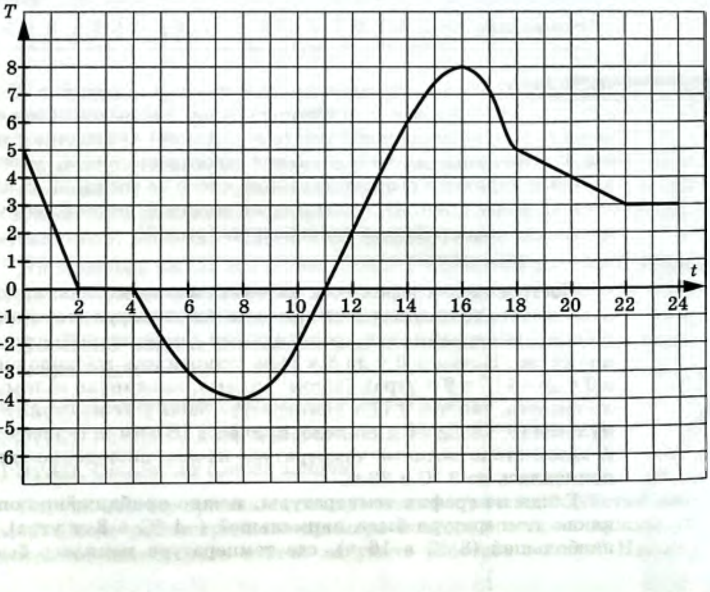

T
t
8 7 6 5 4 3 2 1 0 −1 −2 −3 −4 −5 −6
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24

Рис. 2

медленнее, а где вообще не менялась (от 2 до 4 ч ночью и от 22 до 24 ч вечером). Рассмотренная математическая модель является примером графической модели.

Итак, нам нужно учиться описывать реальные ситуации словами (*словесная модель*), алгебраически (*алгебраическая модель*), графически (*графическая модель*). Бывают ещё *геометрические модели* реальных ситуаций — они изучаются в курсе геометрии. Впрочем, графические модели также иногда называют геометрическими, а вместо термина «алгебраическая модель» употребляют термин «аналитическая модель». Всё это — виды математических моделей.

аналитическая модель

геометрическая модель

словесная модель

Чтобы свободно оперировать любыми видами математических моделей, нужно научиться переходить от одной из них к другой. Так, выше, в примере 1, нам удалось перейти от словесной модели к аналитической. В примере 2 удалось перейти от словесной (точнее, табличной) модели к графической, что позволило вновь вернуться к словесному описанию рассматриваемой ситуации, но уже на более содержательном уровне. Будем учиться этим переходам.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое математическая модель?
2. Какие виды математических моделей вы знаете? Приведите примеры каждого вида моделей.
3. Назовите три этапа математического моделирования.

§4 ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Одним из самых простых и в то же время очень важных видов математических моделей реальных ситуаций являются известные вам из курса математики 5—6-го классов *линейные уравнения с одной переменной*. Приведём примеры линейных уравнений:

$$3x = 12,\ 5y - 10 = 0,\ 2a + 7 = 0$$

и т. д.

Решить линейное уравнение — это значит найти все те значения переменной, при каждом из которых уравнение обращается в верное числовое равенство. Каждое такое значение переменной называют **корнем уравнения**. Так, уравнение $3x = 12$ имеет корень $x = 4$, поскольку $3 \cdot 4 = 12$ — верное равенство, причём других корней нет; уравнение $5y - 10 = 0$ имеет корень $y = 2$, поскольку $5 \cdot 2 - 10 = 0$ —

верное равенство, причём других корней нет; уравнение $2a + 7 = 0$ имеет корень $a = -3{,}5$, поскольку $2 \cdot (-3{,}5) + 7 = 0$ — верное равенство, причём других корней нет.

Вообще **линейным уравнением с одной переменной** x называют уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — любые числа (*коэффициенты*). Если $a = 0$ и $b = 0$, т. е. уравнение имеет вид $0 \cdot x + 0 = 0$, то корнем уравнения является любое число (бесконечное множество корней). Если $a = 0$ и $b \neq 0$, т. е. уравнение имеет вид $0 \cdot x + b = 0$, то ни одно число этому уравнению не удовлетворяет; говорят, что уравнение не имеет корней.

линейное уравнение с одной переменной

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда $a \neq 0$. Рассуждаем так:

1) $ax + b = 0$, значит, $ax = -b$ (поскольку $(-b) + b = 0$); фактически слагаемое b перенесли из левой части уравнения в правую с противоположным знаком;

2) $ax = -b$, т. е. произведение чисел a и x равно $-b$; но тогда множитель x равен частному от деления произведения $-b$ на второй множитель. Значит, $x = (-b) : a$. Вместо знака деления можно использовать черту дроби:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

А как быть, если уравнение записано в более сложном виде, например

$$2x - 2 = 10 - x?$$

Рассуждаем так. Два выражения равны тогда и только тогда, когда их разность равна нулю:

$$(2x - 2) - (10 - x) = 0.$$

Воспользуемся известными из курса математики 5—6-го классов правилами раскрытия скобок и приведения подобных членов:

$$2x - 2 - 10 + x = 0;$$
$$3x - 12 = 0;$$
$$3x = 12;$$
$$x = 4.$$

Такие уравнения вы уже решали в курсе математики 5—6-го классов. Фактически при этом используется определённая программа действий, определённый порядок ходов. В математике в таких случаях используют термин *алгоритм*. Для линейного уравнения вида $ax + b = cx + d$, где $a \neq c$, этот алгоритм выглядит так:

алгоритм

1) перенести все члены уравнения из правой части в левую с противоположными знаками;
2) привести в левой части подобные слагаемые, в результате чего получится уравнение вида $kx + m = 0$, где $k \neq 0$;

3) преобразовать уравнение к виду $kx = -m$ и записать его корень $x = -\frac{m}{k}$.

Именно так было решено уравнение, которое получилось в предыдущем параграфе в примере 1.

ПРИМЕР 1

Решить уравнение $\frac{2}{3}y + \frac{7}{8} = \frac{5}{6}y - \frac{1}{4}$.

Решение *Первый способ.* Воспользуемся алгоритмом:

$$\frac{2}{3}y + \frac{7}{8} - \frac{5}{6}y + \frac{1}{4} = 0;$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right)y + \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$-\frac{1}{6}y + \frac{9}{8} = 0;$$

$$-\frac{1}{6}y = -\frac{9}{8};$$

$$\frac{1}{6}y = \frac{9}{8};$$

$$y = \frac{9}{8} : \frac{1}{6};$$

$$y = \frac{27}{4}, \text{ т. е. } y = 6\frac{3}{4}.$$

Второй способ. Прежде чем применять алгоритм, умножим обе части уравнения на 24 — это наименьший общий знаменатель имеющихся дробей. При этом мы пользуемся тем, что если $A = B$, то $24A = 24B$ и обратно. Получим:

$$24\left(\frac{2}{3}y + \frac{7}{8}\right) = 24\left(\frac{5}{6}y - \frac{1}{4}\right);$$

$$\left(24 \cdot \frac{2}{3}\right)y + 24 \cdot \frac{7}{8} = \left(24 \cdot \frac{5}{6}\right)y - 24 \cdot \frac{1}{4};$$

$$16y + 21 = 20y - 6.$$

А далее воспользуемся алгоритмом:

$$16y + 21 - 20y + 6 = 0;$$
$$-4y + 27 = 0;$$
$$4y = 27;$$
$$y = \frac{27}{4}, \text{ т. е. } y = 6\frac{3}{4}.$$

Ответ $y = 6\frac{3}{4}$.

ПРИМЕР 2

Решить уравнение $\frac{3z - 4}{5} = \frac{2z + 1}{2}$.

Решение Воспользовавшись основным свойством пропорции (произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов), получим:

$$2(3z - 4) = 5(2z + 1).$$

Дальнейший ход решения, надеемся, уже не требует комментариев:

$$6z - 8 - 10z - 5 = 0;$$
$$-4z - 13 = 0;$$
$$-4z = 13;$$
$$z = -\frac{13}{4}, \text{ т. е. } z = -3\frac{1}{4}.$$

Ответ $z = -3\frac{1}{4}$.

Умения составлять математические модели и решать линейные уравнения с одной переменной можно использовать и в игровых ситуациях. Приведём простой пример.

Задумайте число (для простоты вычислений однозначное, хотя это совсем не обязательно), умножьте его на 2, к полученному числу прибавьте 5, затем эту сумму умножьте на 3 и из полученного произведения вычтите 13. Скажите мне, что получилось, и я тут же скажу, какое число задумано.

Например, вы задумали число 7. Выполняя вышеперечисленные указания, вы последовательно получали такие числа: 14, 19, 57, 44. Чтобы отгадать задуманное число, нужно из числа 44 вычесть 2 и полученную разность разделить на 6; получается 42 : 6 = 7.

Второй эксперимент: вы задумали число 10. Выполняя вышеперечисленные указания, вы последовательно получали такие числа: 20, 25, 75, 62. Чтобы отгадать задуманное число, нужно из числа 62 вычесть 2 и полученную разность разделить на 6; получается $60 : 6 = 10$.

Секрет фокуса очень прост. Вы задумали число x; выполняя вышеперечисленные указания, вы составили число $3(2x + 5) - 13$, т. е. $6x + 2$. Осталось лишь решить в уме линейное уравнение: в первом случае $6x + 2 = 44$ (получится $x = 7$), а во втором случае $6x + 2 = 62$ (получится $x = 10$).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое линейное уравнение с одной переменной?
2. Что называют корнем уравнения с одной переменной?
3. Приведите пример уравнения, у которого нет корней.
4. Что означает фраза: «Решить линейное уравнение»?
5. Приведите пример линейного уравнения с одной переменной, имеющего своим корнем число:
   а) 0; б) 2; в) −1.
6. Сформулируйте алгоритм решения линейного уравнения $ax + b = 0$ в случае, когда $a \neq 0$.
7. Сформулируйте алгоритм решения линейного уравнения $ax + b = cx + d$ $(a \neq c)$.
8. Приведите пример таких значений a и b, при которых уравнение $ax = b$:
   а) не имеет корней; б) имеет бесконечное множество корней.

§5 ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

С теоретической точки зрения эта тема не является для вас абсолютно новой. Пример текстовой задачи, процесс решения которой привёл к линейному уравнению с одной переменной, уже был выше (см. пример 1 в § 3). Да и в курсе математики 5—6-го классов подобные задачи встречались. Тем не менее мы рассмотрим в этом параграфе довольно много разнообразных примеров, поскольку умение составлять математическую модель по заданным условиям и работать с ней — одно из важнейших в курсе алгебры.

ПРИМЕР 1

Купили некоторое количество книг. Их пытаются разместить на одинаковых полках в книжном шкафу. Сначала поставили по 20 книг на каждую полку. В результате две полки оказались пустыми, а остальные заполненными (по 20 книг). Затем решили ставить по 15 книг на полку. Попытка оказалась удачной: все полки заполнились (по 15 книг на каждой). Сколько книг было куплено?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Обозначим буквой x число полок в книжном шкафу. Когда на каждую полку поставили по 20 книг, то заполненными оказались $(x - 2)$ полки. Значит, общее число купленных книг выражается формулой $20(x - 2)$. Далее в задаче сказано, что когда на каждую полку поставили по 15 книг, то все x полок оказались заполненными. Значит, общее число купленных книг выражается формулой $15x$. Остаётся приравнять два полученных выражения для числа купленных книг:

$$20(x - 2) = 15x.$$

Это уравнение — математическая модель задачи.

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Решаем уравнение:

$$20(x - 2) - 15x = 0;$$
$$20x - 40 - 15x = 0;$$
$$5x - 40 = 0;$$
$$5x = 40;$$
$$x = 8.$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Мы выяснили, что в книжном шкафу 8 полок. Все купленные книги разместились на этих полках по 15 штук на каждой. Значит, всего было куплено $15 \cdot 8 = 120$ книг.

Ответ Всего было куплено 120 книг.

Важно подчеркнуть, что в школьных задачах принято идеализировать ситуацию: считать, что путник (поезд, автомобиль) движется всё время с постоянной скоростью, что скорость течения реки всегда одна и та же, что мастер, выполняя заказ, работает с постоянной производительностью труда и т. д. и т. п. Учтём это в примерах 2—6 — это так называемые задачи на движение.

ПРИМЕР 2

Пункты A, B и C расположены на шоссе так, как показано на рисунке 3. Расстояние между A и B равно 16 км. Из B по направлению к C вышел пешеход. Через 2 ч после этого из A по направлению к C

Рис. 3

выехал велосипедист, скорость которого на 6 км/ч больше скорости пешехода. Через 4 ч после своего выезда велосипедист догнал пешехода в пункте C. Чему равно расстояние от B до C?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость пешехода, тогда $(x + 6)$ км/ч — скорость велосипедиста.

Расстояние от A до C велосипедист проехал за 4 ч, значит, это расстояние выражается формулой $4(x + 6)$ км. Итак, $AC = 4(x + 6)$.

Расстояние от B до C пешеход прошёл за 6 ч (ведь до выезда велосипедиста он уже был в пути 2 ч), следовательно, это расстояние выражается формулой $6x$ км. Итак, $BC = 6x$.

А теперь обратите внимание на рисунок 3: $AC - BC = AB$, т. е. $AC - BC = 16$. Это — основа для составления математической модели задачи. Напомним, что $AC = 4(x + 6)$, $BC = 6x$; следовательно,

$$4(x + 6) - 6x = 16.$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

$$4x + 24 - 6x = 16;$$
$$24 - 2x = 16;$$
$$-2x = 16 - 24;$$
$$-2x = -8;$$
$$x = 4.$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Мы получили, что $x = 4$, значит, скорость пешехода 4 км/ч. Но нам нужно найти не это, в задаче требуется найти расстояние от B до C. Мы установили, что $BC = 6x$; значит, $BC = 6 \cdot 4 = 24$.

Ответ Расстояние от B до C равно 24 км.

ПРИМЕР 3

Лодка плыла по течению реки 3 ч 12 мин, а затем против течения 1,5 ч. Найти собственную скорость лодки (т.е. скорость в стоячей воде), если известно, что скорость течения реки 2 км/ч, а всего лодкой пройден 41 км.

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, тогда по течению она плывёт со скоростью $(x + 2)$ км/ч (течение помогает), а против течения — со скоростью $(x - 2)$ км/ч (течение препятствует).

По течению реки лодка плыла 3 ч 12 мин. Поскольку скорость выражена в километрах в час, это время надо записать в часах. Имеем:

12 мин $= \frac{12}{60}$ ч $= \frac{1}{5}$ ч $= 0{,}2$ ч. Значит, 3 ч 12 мин $= 3{,}2$ ч. За это время со скоростью $(x + 2)$ км/ч лодкой пройден путь $3{,}2\,(x + 2)$ км.

Против течения лодка плыла 1,5 ч. За это время со скоростью $(x - 2)$ км/ч лодкой пройден путь $1{,}5\,(x - 2)$ км.

По условию весь её путь равен 41 км. Так как он состоит из пути по течению и пути против течения, то получаем:

$$3{,}2\,(x + 2) + 1{,}5\,(x - 2) = 41.$$

Это уравнение — математическая модель задачи.

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

$$3{,}2x + 6{,}4 + 1{,}5x - 3 = 41;$$
$$4{,}7x + 3{,}4 = 41;$$
$$4{,}7x = 41 - 3{,}4;$$
$$4{,}7x = 37{,}6;$$
$$x = \frac{37{,}6}{4{,}7},\ \text{т. е. } x = 8.$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, чему равна собственная скорость лодки, т. е. чему равен x? Но ответ на этот вопрос уже получен: $x = 8$.

Ответ Собственная скорость лодки 8 км/ч.

ПРИМЕР 4

Турист идёт из деревни к железнодорожной станции. Пройдя за час 3 км, он понял, что, продолжая движение с той же скоростью, он опоздает на поезд на 40 минут, и пошёл со скоростью 4 км/ч. На станцию турист пришёл за 45 минут до отправления поезда. Чему равно расстояние от деревни до станции?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Пусть x км — расстояние от деревни до станции. Найдём расчётное время до отправления поезда. Если турист будет весь путь идти со скоростью 3 км/ч, он потратит $\frac{x}{3}$ ч и опоздает на поезд на 40 минут, т. е. на $\frac{2}{3}$ ч. Значит, расчётное время до отправления поезда выражается формулой $\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)$ ч.

На самом деле турист с упомянутой выше скоростью шёл 1 ч, а оставшиеся $(x - 3)$ км он шёл со скоростью 4 км/ч, затратив на оставшийся путь $\frac{x-3}{4}$ ч. На станции он ждал отправления поезда 45 минут, т. е. $\frac{3}{4}$ ч. Значит, время до отправления поезда можно выразить формулой $\left(1+\frac{x-3}{4}+\frac{3}{4}\right)$ ч.

В итоге получаем уравнение $\frac{x}{3}-\frac{2}{3}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{3}{4}$.

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*
Умножив обе части уравнения на 12, получим:

$$12\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)=12\left(1+\frac{x-3}{4}+\frac{3}{4}\right);$$

$$4x-8=12+3(x-3)+9;$$
$$4x-8=12+3x;$$
$$x=20.$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Он уже получен, ведь буквой x мы как раз обозначили то, о чём спрашивается в задаче.

Ответ От деревни до станции 20 км.

ПРИМЕР 5

Самолёт пролетел первую часть маршрута со скоростью 450 км/ч, а вторую часть, которая на 300 км меньше первой, — со скоростью 600 км/ч. Какова протяжённость всего маршрута, если известно, что средняя скорость движения самолёта оказалась равной 500 км/ч?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Пусть x км — протяжённость первой части маршрута, тогда протяжённость второй части — $(x-300)$ км. Время, потраченное самолётом на весь маршрут, таково: $\left(\frac{x}{450}+\frac{x-300}{600}\right)$ ч. Длина всего маршрута равна $x+x-300$, т. е. $(2x-300)$ км. Пролетев весь маршрут со средней скоростью 500 км/ч, самолёт потратил бы $\frac{2x-300}{500}$ ч.

Значит,

$$\frac{x}{450}+\frac{x-300}{600}=\frac{2x-300}{500}.$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.* Целесообразно сначала умножить обе части составленного уравнения на 10; получим

$$\frac{x}{45} + \frac{x - 300}{60} = \frac{2x - 300}{50}.$$

Найдём наименьшее общее кратное чисел 45, 60, 50. Имеем: НОК(60, 50) = 300, НОК(45, 300) = 900. Умножим обе части последнего уравнения на 900:

$$900\left(\frac{x}{45} + \frac{x - 300}{60}\right) = 900\left(\frac{2x - 300}{50}\right);$$

$$20x + 15(x - 300) = 18(2x - 300);$$

$$35x - 4500 = 36x - 5400;$$

$$x = 900.$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Первая часть маршрута равна 900 км, а вторая — на 300 км меньше, т. е. 600 км. Значит, протяжённость всего маршрута 1500 км.

Замечание В примерах 6—12 ради краткости мы не будем явно выделять три этапа математического моделирования при решении текстовой задачи, заменив их пунктами 1, 2, 3. Кроме того, постепенно всё меньшее и меньшее внимание будем уделять технической стороне дела — решению линейного уравнения; надеемся, вы справитесь с этим без нашей помощи.

ПРИМЕР 6

Пассажир, сидящий в поезде, который едет со скоростью 40 км/ч, заметил, глядя в окно, что в противоположном направлении в течение 3 с прошёл встречный поезд, длина которого 75 м. Какова скорость встречного поезда?

Решение 1. Если x км/ч — скорость встречного поезда, то мимо пассажирского окна он проходит с суммарной скоростью двух поездов, т. е. со скоростью $(x + 40)$ км/ч. За 3 с мимо окна проехал встречный поезд длиной 75 м, т. е. 0,075 км. Обратим 3 с в долю часа: 3 с $= \frac{1}{20}$ мин $= \frac{1}{1200}$ ч. В итоге получаем уравнение — математическую модель задачи:

$$\frac{1}{1200}(x + 40) = 0{,}075.$$

2. Умножив обе части уравнения на 1200, получим:

$$x + 40 = 90;$$

$$x = 50.$$

3. Скорость встречного поезда равна 50 км/ч.

! В следующих примерах мы рассмотрим две задачи на отыскание неизвестного числа по заданным условиям. Главное в этих задачах — умение использовать знания о десятичной системе счисления при записи числа.

ПРИМЕР 7

Трёхзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести в начало числа, не меняя порядок остальных цифр, то новое число станет больше на 1, чем утроенное первоначальное число. Найти исходное число.

Решение 1. Исходное трёхзначное число, оканчивающееся цифрой 3, можно записать в виде $10x + 3$, где x — двузначное число, образованное первыми двумя цифрами исходного числа (например, $273 = 27 \cdot 10 + 3$, $503 = 50 \cdot 10 + 3$ и т. д.). Если цифру 3 перенести на первое место, то новое число будет иметь вид $300 + x$ (например, $327 = 300 + 27$, $350 = 300 + 50$ и т. д.). По условию новое число больше утроенного исходного числа на 1. Это значит, что $3(10x + 3) + 1 = 300 + x$.

2. Поработаем с составленной моделью:

$$30x + 9 + 1 = 300 + x;$$
$$29x = 290;$$
$$x = 10.$$

3. Итак, в искомом числе первые две цифры образуют число 10, а на третьем месте стоит цифра 3. Значит, 103 — исходное число.

ПРИМЕР 8

Задумали шестизначное число, запись которого начинается с цифры 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных цифр, то полученное число будет втрое больше первоначального. Какое число было задумано?

Решение 1. После цифры 2 в задуманном шестизначном числе следуют в определённом порядке 5 цифр, они составляют некое пятизначное число; обозначим его буквой x. Тогда задуманное число можно выразить формулой $200\,000 + x$. Если цифру 2 поместить на последнее место, то число будет иметь вид $\overline{x2}$, т. е. $10x + 2$. Согласно условию новое число в три раза больше задуманного. Это значит, что

$$10x + 2 = 3(200\,000 + x).$$

Математическая модель составлена.

2. Решим полученное уравнение:

$$10x + 2 = 600\,000 + 3x;$$
$$7x = 599\,998;$$
$$x = 85\,714.$$

3. Задуманное число начинается с цифры 2, значит, это число 285 714.

Последние примеры, которые мы рассмотрим в настоящем параграфе, пугают многих учащихся, но на самом деле это не такие уж страшные задачи на проценты, сплавы, смеси.

ПРИМЕР 9

Два завода по плану должны были за месяц выпустить 360 станков. На самом деле они выпустили 400 станков, причём первый завод выполнил заказ на 112%, а второй — на 110%. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод?

Решение 1. Сразу отметим, что 112 % = 1,12, 110 % = 1,1. По плану первый завод должен был выпустить x станков, а второй $(360 - x)$ станков. На самом деле первый выпустил $1{,}12x$, а второй — $1{,}1\,(360 - x)$ станков. Вместе они выпустили 400 станков, значит, $1{,}12x + 1{,}1\,(360 - x) = 400$.

2. Решим составленное уравнение:

$$1{,}12x + 396 - 1{,}1x = 400;$$
$$0{,}02x = 4;$$
$$x = 200.$$

3. По плану первый завод должен был выпустить 200 станков, а второй, соответственно, 160 станков. Первый завод перевыполнил план на 12%, т. е. выпустил сверх плана $0{,}12 \cdot 200 = 24$ станка. Второй завод перевыполнил план на 10%, т. е. выпустил сверх плана $0{,}1 \cdot 160 = 16$ станков.

Ответ 24 станка, 16 станков.

ПРИМЕР 10

В течение нескольких лет цену на некоторый товар постепенно повышали: сначала на 10%, затем на 300 р., затем ещё на 25%. В результате цена на товар повысилась на 75% по сравнению с первоначальной. Сколько стоил товар до повышения цен?

Решение 1. Пусть x р. — первоначальная цена товара. После первого повышения товар стоил $1,1x$ р., после второго повышения — $(1,1x + 300)$ р., после третьего — $1,25\,(1,1x + 300)$ р. По условию после третьего повышения цена товара составила $1,75x$ р. (175 %, т. е. 1,75 от первоначальной цены). В итоге получаем следующее уравнение:

$$1,25\,(1,1x + 300) = 1,75x.$$

2. Решим составленное уравнение. Есть смысл сначала умножить обе его части на 4:

$$5\,(1,1x + 300) = 7x.$$

Далее имеем:

$$5,5x + 1500 = 7x;$$
$$x = 1000.$$

Ответ Первоначальная цена товара 1000 р.

ПРИМЕР 11

Смешали некоторое количество 40 % и 10 % растворов кислоты и получили 800 г раствора кислоты с концентрацией 21,25 %. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение 1. Предположим, что взяли x г более насыщенного раствора. Тогда менее насыщенного раствора пришлось взять $(800 - x)$ г. В более насыщенном растворе чистой кислоты было $0,4x$ г, а в менее насыщенном — $0,1\,(800 - x)$ г. После объединения получилось 800 г раствора кислоты с концентрацией 21,25 %, т. е. чистой кислоты в новом растворе $0,2125 \cdot 800$ г. В итоге получаем следующее уравнение:

$$0,4x + 0,1\,(800 - x) = 0,2125 \cdot 800.$$

Математическая модель составлена.

2. Решим полученное уравнение:

$$0,4x + 80 - 0,1x = 170;$$
$$0,3x = 90;$$
$$x = 300.$$

Ответ Взяли 300 г 40 % раствора и 500 г 10 % раствора кислоты.

ПРИМЕР 12

В 500 кг руды имеется некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20%. Сколько железа осталось в руде?

Решение

1. Обозначим буквой x процент содержания железа в руде. Это значит, что железа было $\frac{x}{100} \cdot 500 = 5x$ кг. В 200 кг примесей содержалось 12,5% железа, т. е. $0{,}125 \cdot 200 = 25$ кг. В очищенной руде массой 300 кг железо составило $(x + 20)\%$, т. е. $\frac{x + 20}{100} \cdot 300 = 3(x + 20)$ кг. Поскольку с примесями было удалено 25 кг железа, получаем уравнение $5x - 25 = 3(x + 20)$.

2. Решив уравнение, получим $x = 42{,}5$. Это значит, что в руде было 42,5% железа.

3. Нас спрашивают, сколько железа осталось в руде после удаления примесей. Это количество выражается формулой $5x - 25$. Получаем $5 \cdot 42{,}5 - 25 = 187{,}5$ кг.

Ответ

187,5 кг.

ПРИМЕР 13

Из 40 т руды выплавляют 20 т металла, содержащего 6 % примесей. Каков процент примесей в руде?

Решение

Обозначим буквой x процент примесей в руде. Тогда в 40 т руды примесей содержится $\frac{x}{100} \cdot 40 = 0{,}4x$ т, а «чистого» металла будет $(40 - 0{,}4x)$ т. В 20 т выплавленного металла «чистого» металла содержится 94%, т. е. $0{,}94 \cdot 20 = 18{,}8$ т. Этого «чистого» металла и в руде, и в выплавленном металле одно и то же количество. Значит, $40 - 0{,}4x = 18{,}8$, откуда находим $x = 53$.

Ответ

В руде 53% примесей.

§ 6 КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

1 Основные понятия

В конце § 3 мы говорили, что нужно уметь свободно переходить от одного вида математической модели к другому, выбирать то, что удобнее. В этой связи весьма полезна известная вам из курса математики 5—6-го классов такая графическая модель, как координатная прямая.

координатная прямая

Прямую l, на которой выбрана начальная точка O (начало отсчёта), масштаб (единичный отрезок, т. е. отрезок, длина которого считается равной 1) и положительное направление, называют **координатной прямой** или **координатной осью** (рис. 4); употребляют также термин «ось x» («ось y», «ось z» и т. д.).

Каждому числу соответствует единственная точка координатной прямой. Например, числу 4,5 соответствует точка M (рис. 5), которая удалена от начала отсчёта, т. е. от точки O, на расстояние, равное 4,5 (в заданном масштабе), и отложена от точки O в заданном (положительном) направлении. Числу −4 соответствует точка P (см. рис. 5), которая удалена от точки O на расстояние, равное 4, и отложена от точки O в отрицательном направлении, т. е. в направлении, противоположном заданному.

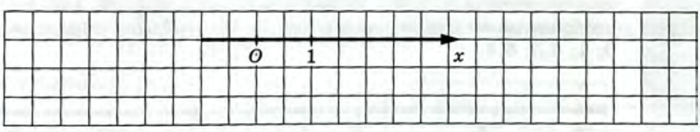


Рис. 4

Рис. 5

Можно говорить и о решении обратной задачи. Например, точка K, удалённая от точки O на расстояние 6,4 в положительном (заданном) направлении, соответствует числу 6,4, а точка N, удалённая от точки O на расстояние 2,1 в отрицательном направлении, соответствует числу −2,1 (см. рис. 5).

координата точки

Указанные числа называют **координатами** соответствующих точек. Так, на рисунке 5 точка K имеет координату 6,4; точка P — координату −4; точка M — координату 4,5; точка N — координату −2,1; точка O — координату 0 (нуль). Отсюда и происходит название — координатная прямая. Образно выражаясь, координатная прямая — это густо заселённый дом, жильцы этого дома — точки, а координаты точек — это номера квартир, в которых живут точки.

Зачем нужна координатная прямая? Зачем характеризовать точку числом, а число — точкой? Есть ли в этом какая-либо польза? Да, есть.

Пусть, например, на координатной прямой даны две точки: A — с координатой a и B — с координатой b (обычно в таких случаях пишут короче: $A(a)$, $B(b)$). Пусть нам надо найти расстояние d между точками A и B. Оказывается, вместо того чтобы делать геометрические измерения, достаточно воспользоваться готовой формулой $\rho(A; B) = |a - b|$ (ρ — «ро» — буква греческого алфавита; впрочем, вместо $\rho(A; B)$ можно писать просто AB).

Так, на рисунке 5 имеем:

$$KM = |6{,}4 - 4{,}5| = |1{,}9| = 1{,}9;$$
$$PM = |-4 - 4{,}5| = |-8{,}5| = 8{,}5;$$
$$PN = |-4 - (-2{,}1)| = |-4 + 2{,}1| = |-1{,}9| = 1{,}9.$$

Стремясь к лаконичности рассуждений, математики договорились вместо длинной фразы «точка A координатной прямой, имеющая координату a» использовать короткую фразу «точка a» и на чертеже рассматриваемую точку обозначать её координатой. Так, на рисунке 6 изображена координатная прямая, на которой отмечены точки −4; −2,1; 0; 1; 4,5; 6,4.

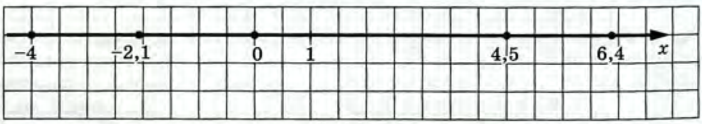


Рис. 6

ПРИМЕР 1

Решить уравнение $|x + 1| = 3$.

Решение $|x + 1|$ — это с геометрической точки зрения расстояние между точками x и −1 координатной прямой. Нам нужно найти такие точки x, которые удалены от точки −1 на расстояние 3.

Таких точек две: -4 и 2 (рис. 7). Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

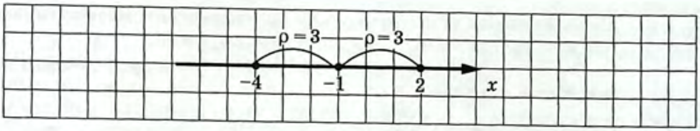


Рис. 7

ПРИМЕР 2

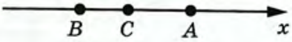


Рис. 8

На координатной прямой взяты три точки: $A\left(\frac{2}{73}\right)$, $B\left(\frac{2}{75}\right)$, $C\left(\frac{1}{37}\right)$. К какой из точек A, B ближе точка C?

Решение Имеем: $\frac{1}{37} = \frac{2}{74}$; $\frac{2}{75} < \frac{2}{74} < \frac{2}{73}$. Значит, точка $C\left(\frac{2}{74}\right)$ располагается на координатной прямой между точками $A\left(\frac{2}{73}\right)$ и $B\left(\frac{2}{75}\right)$ (рис. 8). Найдём расстояния BC и CA:

$$BC = \frac{2}{74} - \frac{2}{75} = \frac{2}{74 \cdot 75};\ CA = \frac{2}{73} - \frac{2}{74} = \frac{2}{73 \cdot 74}.$$

Поскольку $\frac{2}{74 \cdot 75} < \frac{2}{74 \cdot 73}$, делаем вывод: точка C располагается ближе к точке B.

Координатная прямая даёт нам возможность свободно переходить с алгебраического языка на геометрический и обратно. Пусть, например, число a меньше числа b. На алгебраическом языке это записывают так: $a < b$; на геометрическом языке это означает, что точка a расположена на координатной прямой *левее* точки b; при этом мы, если не оговорено противное, будем считать, что координатная прямая располагается на листе бумаги горизонтально с направлением слева направо. Впрочем, подчеркнём ещё раз, и алгебраический, и геометрический языки — это разделы одного и того же математического языка, который мы с вами изучаем.

2 Виды числовых промежутков

Познакомимся ещё с несколькими элементами математического языка, которые связаны с координатной прямой.

1. Пусть на координатной прямой отмечена точка a. Рассмотрим все точки, которые лежат на прямой правее точки a, и отметим соответствующую часть координатной прямой штриховкой (рис. 9). Это множество точек (чисел) называют **открытым лучом** и обозначают $(a; +\infty)$, где знак $+\infty$ читают так: «плюс бесконечность»; оно характеризуется неравенством $x > a$ (под x понимается любая точка луча).

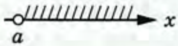


Рис. 9

Обратите внимание: точка a открытому лучу *не принадлежит*. Если же эту точку надо присоединить к открытому лучу, то пишут $x \geqslant a$ или $[a; +\infty)$ (перед a ставят не круглую, а квадратную скобку), а на чертеже такую точку обозначают не светлым, как на рисунке 9, а закрашенным кружком (рис. 10). Если про множество точек $(a; +\infty)$ говорят, что это — открытый луч, то для $[a; +\infty)$ употребляют термин **луч** (без прилагательного «открытый»).

Рис. 10

открытый луч
луч
интервал
отрезок

2. Пусть на координатной прямой отмечена точка b. Рассмотрим все точки, которые лежат на прямой левее точки b, и отметим соответствующую часть координатной прямой штриховкой (рис. 11). Это множество точек (чисел) также называют *открытым лучом* и обозначают $(-\infty; b)$, где знак $-\infty$ читают так: «минус бесконечность». Оно характеризуется неравенством $x < b$.

Снова обращаем ваше внимание на то, что точка b открытому лучу не принадлежит. Если же мы эту точку хотим присоединить к открытому лучу, то будем писать $x \leqslant b$ или $(-\infty; b]$ и на чертеже точку b закрашивать (рис. 12); для $(-\infty; b]$ также будем употреблять термин *луч*.

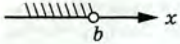


Рис. 11

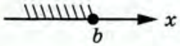


Рис. 12

3. Пусть на координатной прямой отмечены точки a и b, причём $a < b$ (т.е. точка a расположена левее точки b). Рассмотрим все точки, которые лежат правее точки a, но левее точки b; отметим соответствующую часть координатной прямой штриховкой (рис. 13). Это множество точек (чисел) называют **интервалом** и обозначают $(a; b)$. Оно характеризуется строгим двойным неравенством $a < x < b$ (под x понимается любая точка интервала).

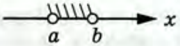


Рис. 13

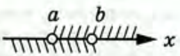


Рис. 14

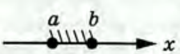


Рис. 15

Обратите внимание: интервал $(a; b)$ есть *пересечение* (общая часть) двух открытых лучей $(-\infty; b)$ и $(a; +\infty)$ — это хорошо видно на рисунке 14.

Если к интервалу $(a; b)$ добавить его концы, т. е. точки a и b, то получится **отрезок** $[a; b]$ (рис. 15), который характеризуется нестро-

Рис. 16

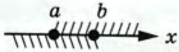


Рис. 17

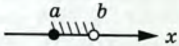
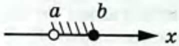


Рис. 18



гим двойным неравенством $a \leqslant x \leqslant b$. Обратите внимание: в обозначении отрезка используют не круглые скобки, как это было в обозначении интервала, а квадратные; на чертеже точки a и b отмечены тёмными кружками, а не светлыми, как это было в случае интервала.

Отрезок $[a; b]$ есть пересечение (общая часть) двух лучей $(-\infty; b]$ и $[a; +\infty)$ — это хорошо видно на рисунке 16.

А что получится, если к интервалу $(a; b)$ добавить только один конец — только точку a (рис. 17) или только точку b (рис. 18)? Получится **полуинтервал**, который в первом случае обозначают $[a; b)$, а во втором — $(a; b]$ и который характеризуется с помощью двойных неравенств: $a \leqslant x < b$ — в первом случае, $a < x \leqslant b$ — во втором.

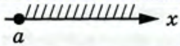
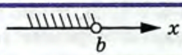
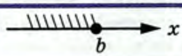
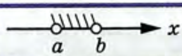
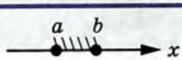
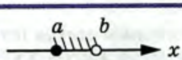
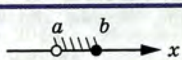
полуинтервал

числовой промежуток

Итак, мы ввели пять новых для вас терминов математического языка: луч, открытый луч, интервал, отрезок, полуинтервал (см. таблицу). Есть и общий термин: **числовые промежутки**.

Сама координатная прямая также считается числовым промежутком; для неё используют обозначение $(-\infty; +\infty)$.

Сводная таблица числовых промежутков

Геометрическая модель	Обозначение	Название числового промежутка	Аналитическая модель
	$(a; +\infty)$	открытый луч	$x > a$
	$[a; +\infty)$	луч	$x \geqslant a$
	$(-\infty; b)$	открытый луч	$x < b$
	$(-\infty; b]$	луч	$x \leqslant b$
	$(a; b)$	интервал	$a < x < b$
	$[a; b]$	отрезок	$a \leqslant x \leqslant b$
	$[a; b)$	полуинтервал	$a \leqslant x < b$
	$(a; b]$	полуинтервал	$a < x \leqslant b$

ПРИМЕР 3

Ученик составил множество чисел, представляющих собой попарно различные произведения двух множителей a и c, где a — натуральное число из интервала $(3; 7)$, а c — натуральное число из отрезка $[8; 12]$. Случайным образом он выбирает произвольный элемент ac составленного числового множества. Какова вероятность того, что ac делится на 9?

Решение В интервале $(3; 7)$ имеется три натуральных числа: 4, 5, 6; в отрезке $[8; 12]$ — пять натуральных чисел: 8, 9, 10, 11, 12. Значит, всего можно составить 15 пар чисел вида $(a; c)$. Но среди произведений чисел, входящих в пару, есть одинаковые: $4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$; $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$; $5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$. Различных произведений всего 12. На 9 делятся такие произведения: $4 \cdot 9$; $5 \cdot 9$; $6 \cdot 9$; $6 \cdot 12$ — их всего четыре (из двенадцати). Искомая вероятность $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое координатная прямая? Чем она отличается от обычной прямой?
2. Как найти координату точки на координатной прямой?
3. Дано число a. Как на координатной прямой найти точку с координатой a?
4. Чему на координатной прямой равно расстояние между точками:
   а) $A(2)$ и $B(5)$; в) $E(-2)$ и $F(8)$;
   б) $C(-3)$ и $D(-7)$; г) $M(a)$ и $N(b)$?
5. Какие виды числовых промежутков на координатной прямой вы знаете? Приведите примеры луча, открытого луча, отрезка, интервала, полуинтервала. Изобразите указанный вами числовой промежуток на координатной прямой и приведите соответствующую запись с помощью неравенств.

§7[1] ДАННЫЕ И РЯДЫ ДАННЫХ

Слово «статистика» — однокоренное с латинским *status* (статус), что может быть переведено как «состояние дел». В XVII—XVIII вв. для статистических исследований использовали термин «политическая

[1] Параграф написан П. В. Семеновым.

арифметика». В современном мире статистика является одним из важнейших комплексов теорий, методов, алгоритмов и рекомендаций по получению, обработке и анализу разнообразных данных об окружающей нас действительности.

Познакомимся с начальными понятиями статистики, используя для этого материал § 1—6. Вот простые линейные уравнения:

1) $2x = -4$;	6) $16 - x = 2x + 1$;
2) $4x = 25 - x$;	7) $-4x - 8 = 0$;
3) $17 + x = 8$;	8) $12x - 11 = -11(x + 1)$;
4) $3(x + 2) - 2 = x$;	9) $1 - x = 6 - 2x$;
5) $3 - x = 4 - (1 - 3x)$;	10) $-2 - (3 - x) = -7$.

Выпишем поочерёдно, в строчку корни этих уравнений (найти их можно устно):

$$-2,\ 5,\ -9,\ -2,\ 0,\ 5,\ -2,\ 0,\ 5,\ -2.$$

Мы получили набор расположенных в ряд чисел. Его называют рядом числовых данных или, проще, *рядом данных*. Количество всех данных, из которых состоит ряд, — это *объём ряда данных*. В нашем случае объём ряда данных равен 10.

ряд данных

объём ряда данных

Если объём ряда — небольшое число, то с данными такого ряда работать просто. Их все можно выписать, перечислить, упорядочить, выбрать нужные и т. п. А вот если объём равен, скажем, 1000 или 1 000 000, то для обработки такого количества данных абсолютно необходимы компьютерные средства и технологии.

Вернёмся к нашему примеру с корнями линейных уравнений. Наименьший из корней равен −9, а наибольший равен 5. Значит, все корни принадлежат отрезку [−9; 5], длина которого равна 14.

В статистике говорят, что 14 — это размах ряда −2, 5, −9, −2, 0, 5, −2, 0, 5, −2. В общем случае *размах* ряда чисел — это разность между наибольшим и наименьшим числом из ряда. Чем меньше размах, тем «кучнее» на координатной прямой расположены данные. Наоборот, большой размах показывает, что некоторые из данных заметно отличаются друг от друга.

размах

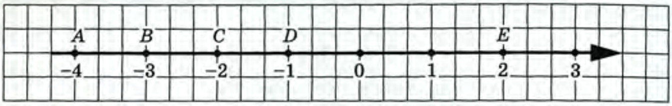
мода

А какое число чаще всего встречается в нашем ряду? Число −2 стоит на 1-м, 4-м, 7-м и 10-м местах. Оно встретилось четыре раза — больше каждого из других чисел ряда. Говорят, что (−2) — это мода ряда −2, 5, −9, −2, 0, 5, −2, 0, 5, −2. Итак, *мода* ряда данных — это самое «модное» данное, то, которое чаще всего встречается в этом ряду. Мода ряда — ещё один важный статистический показатель. Мода бывает и у рядов данных, состоящих не из чисел. Например, если рассмотреть все данные о продажах легковых автомобилей в России за 2014 г., то модой будет марка наиболее покупаемого легкового автомобиля.

ПРИМЕР 1

На координатной прямой отмечены точки $A(-4)$, $B(-3)$, $C(-2)$, $D(-1)$, $E(2)$. Вычислить все расстояния между этими точками. Найти объём, размах и моду полученного ряда данных.

Решение Координатная прямая помогает найти нужные расстояния: $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$, $AE = 6$, $BC = 1$, $BD = 2$, $BE = 5$, $CD = 1$, $CE = 4$, $DE = 3$. Получился ряд чисел 1, 2, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 4, 3. Он состоит из 10 чисел, наименьшее число равно 1, наибольшее равно 6, т. е. размах равен $6 - 1 = 5$, а чаще всего (три раза) встречается число 1 — это мода.



Ответ Объём равен 10, размах равен 5, мода равна 1.

Заметим, что объём ряда из примера 1 можно было найти до вычисления всех расстояний. Смотрите, всего есть 5 точек A, B, C, D, E. Для точки A нужно вычислить четыре расстояния AB, AC, AD, AE. Для точки B нужно вычислить три расстояния BC, BD, BE: ведь расстояние $BA = AB$ уже учтено. Для точки C останутся CD и CE, а для точки D — только DE. Всего получается $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ попарных расстояний между пятью точками.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716), немецкий философ, математик и дипломат

Вот другая версия этого же рассуждения: «Встретились 5 друзей, и каждый пожал руку каждому. Сколько было рукопожатий?» Если обозначить друзей A, B, C, D, E, то AB, AC, ..., DE будут обозначать все рукопожатия. Их 10 штук. А вот ещё один вариант: «Каждую вершину правильного пятиугольника соединили отрезком с каждой. Сколько провели отрезков?» Ясно, что и решение, и ответ — те же.

У всех этих разных по форме вопросов есть общая (словесная) математическая модель: «Даны пять элементов. Из них нужно выбрать два элемента, без учёта их порядка. Сколькими способами это можно сделать?» Ответ на такой вопрос мы уже получили: 10.

Здесь мы встретились с одной из типичных задач *комбинаторики*. Этот термин впервые использовал Готфрид Лейбниц в своей «Диссертации о комбинаторном искусстве», 1666 г. Грубо говоря, *комбинаторика* — это искусство подсчёта числа различных комбинаций, соединений, сочетаний, перестановок и т. п. тех или иных элементов некоторых множеств. С одним из основных правил комбинаторики, *правилом умножения*, вы уже встречались в 5-м и в 6-м классах. Напомним его.

Правило умножения Если предмет A первого типа можно выбрать n способами, после каждого из которых предмет B второго типа можно выбрать m способами, то пару предметов (A, B) можно выбрать nm способами.

Например, если в левом кармане лежат 7 монет, а в правом кармане лежат 9 монет, то имеется $7 \cdot 9 = 63$ способа выбрать одну монету из левого кармана и одну — из правого кармана.

ПРИМЕР 2

В выражение $ax + by$ вместо a и b подставляют одно из чисел 1, 2, ..., 8, 9.

а) Сколько всего различных выражений с переменными x и y может получиться?

Сколько среди них будет выражений, в которых:

б) b равно 7 или 9?

в) a в два раза больше, чем b?

г) a чётно, b нечётно?

Решение а) Коэффициент a можно выбрать 9 способами, после каждого из которых коэффициент b можно выбрать также 9 способами. По правилу умножения получаем $9 \cdot 9 = 81$.

б) Как и выше, a можно выбрать 9 способами, после каждого из которых b можно выбрать 2 способами: b равно 7 или 9. По правилу умножения получаем $9 \cdot 2 = 18$.

в) В этом случае a не может быть нечётным числом. Значит, a можно выбрать 4 способами: a равно или 2, или 4, или 6, или 8. Но как только a выбрано, то для выбора b остаётся один способ: $b = \frac{a}{2}$. Получаем ответ: $4 \cdot 1 = 4$. Наверное, тут проще просто перебрать все нужные пары $(a; b)$.

г) Как и в пункте в), число a можно выбрать 4 способами: a равно или 2, или 4, или 6, или 8. После каждого из них b можно выбрать 5 способами: b равно или 1, или 3, или 5, или 7, или 9. По правилу умножения получаем ответ: $4 \cdot 5 = 20$.

Ответ а) 81; б) 18; в) 4; г) 20.

Вопросы для самопроверки

1. Найдите объём, размах и моду ряда данных 13, 7, 8, 11, 19, 13, 10, 10, 10, 13, 20, 19, 13.
2. Приведите пример ряда, у которого объём равен 7, размах равен нулю, а мода равна 70.
3. Какой из трёх показателей (объём, размах, мода) всегда будет натуральным числом?
4. Какие из трёх показателей (объём, размах, мода) могут оказаться равными нулю?
5. Какой из трёх показателей (объём, размах, мода) может оказаться отрицательным числом?
6. Числа в ряду данных записали в каком-то другом порядке. Какой из показателей (объём, размах, мода) при этом изменился?
7. Встретились 3 друга, и каждый пожал руку каждому. Сколько было рукопожатий?
8. Каждую вершину квадрата соединили отрезком с каждой. Сколько провели отрезков?
9. В классе 14 мальчиков и 11 девочек. Сколькими способами можно составить пару «мальчик-девочка»?

Основные результаты

- В этой главе мы с вами вспомнили, что такое числовое выражение и его значение, что такое алгебраическое выражение и его значение; вспомнили мы законы сложения и умножения.
- Познакомились с основными понятиями математики: математический язык, математическая модель.
- Сформулировали три этапа математического моделирования при решении текстовых задач.
- Мы узнали, что существуют различные виды математических моделей: алгебраическая, геометрическая, словесная.
- Вспомнили, что такое линейное уравнение и его корень, сформулировали алгоритм решения линейного уравнения.
- Вспомнили, что такое координатная прямая и координата точки на координатной прямой.
- Узнали, как находить расстояние $\rho(a; b)$ между точками a и b координатной прямой: $\rho(a; b) = |a - b|$.
- Мы научились различать виды числовых промежутков на координатной прямой: луч, открытый луч, отрезок, интервал, полуинтервал.
- Мы познакомились с первыми понятиями статистики: ряд данных, объём ряда данных, размах ряда данных, мода ряда данных.

- Вспомнили, как формулируется правило умножения при решении простейших комбинаторных задач.

Темы исследовательских работ

1. Линейные уравнения с одной переменной.
2. Линейные уравнения как математические модели реальных ситуаций.
3. Ряды данных. Объём, размах и мода ряда данных.

2 ГЛАВА ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 8 КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

1 Оси координат и отыскание координат точки на плоскости

прямоугольная система координат
начало координат
оси координат
координатные углы

На координатной прямой «прописаны» точки-жильцы, у каждой точки есть свой номер дома — её координата. Если же точка берётся в плоскости, то для её «прописки» нужно указывать не только номер дома, но и номер квартиры. Напомним, как это делается.

Проведём две взаимно перпендикулярные координатные прямые и будем считать началом отсчёта на обеих прямых точку их пересечения — точку O. Тем самым на плоскости задана **прямоугольная система координат** (рис. 19), которая превращает обычную плоскость в **координатную**. Точку O называют **началом координат**, координатные прямые (ось x и ось y) называют **осями координат**, а прямые углы, образованные осями координат, называют **координатными углами**. Координатные углы нумеруют так, как показано на рисунке 19.

А теперь обратимся к рисунку 20, где изображена прямоугольная система координат и отмечена точка M. Проведём через точку M прямую, параллельную оси y. Прямая пересекает ось x в некоторой точке, у этой точки есть координата на оси x (для точки M, изобра-

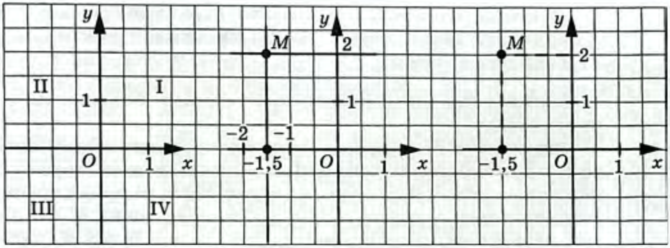


Рис. 19 *Рис. 20* *Рис. 21*

жённой на рисунке 20, эта координата равна −1,5), её называют **абсциссой точки** M. Далее проведём через точку M прямую, параллельную оси x. Прямая пересекает ось y в некоторой точке, у этой точки есть координата — на оси y (для точки M, изображённой на рисунке 20, эта координата равна 2), её называют **ординатой точки** M. Коротко пишут так: $M(x; y)$ (для точки на рисунке 20 имеем $M(-1{,}5; 2)$). Абсциссу записывают на первом месте, ординату — на втором.

абсцисса
ордината

На практике для отыскания координат точки M обычно вместо прямых, проходящих через точку M параллельно осям, строят отрезки этих прямых от точки M до осей координат (рис. 21).

Замечание В предыдущем параграфе мы ввели разные обозначения для числовых промежутков. В частности, как мы условились, запись (3; 5) означает, что на координатной прямой рассматривается интервал с концами в точках 3 и 5. В настоящем же параграфе пару чисел мы рассматриваем как координаты точки; например, (3; 5) — это точка на координатной плоскости с абсциссой 3 и ординатой 5. Как же правильно по символической записи определить, о чём идёт речь: об интервале или о координатах точки? Обычно это бывает ясно из контекста.

Учитывая введённые термины и обозначения, горизонтальную координатную прямую называют **осью абсцисс** или **осью** x, а вертикальную координатную прямую — **осью ординат** или **осью** y. Обозначения x, y используют обычно при задании на плоскости прямоугольной системы координат (см. рис. 19) и часто говорят так: дана система координат xOy. Впрочем, встречаются и другие обозначения, например, на рисунке 22 задана система координат tOs.

АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ КООРДИНАТ ТОЧКИ M, ЗАДАННОЙ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ xOy

1. Провести через точку M прямую, параллельную оси y, и найти координату точки пересечения этой прямой с осью x — это будет абсцисса точки M.

2. Провести через точку M прямую, параллельную оси x, и найти координату точки пересечения этой прямой с осью y — это будет ордината точки M.

Именно так мы и действовали, находя координаты точки M на рисунке 20.

Если точка $M_1(x;\ y)$ принадлежит первому координатному углу, то $x > 0$, $y > 0$; если точка $M_2(x;\ y)$ принадлежит второму координатному углу, то $x < 0$, $y > 0$; если точка $M_3(x;\ y)$ принадлежит третьему координатному углу, то $x < 0$, $y < 0$; если точка $M_4(x;\ y)$ принадлежит четвёртому координатному углу, то $x > 0$, $y < 0$ (рис. 23).

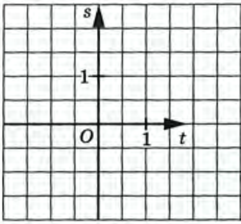


Рис. 22

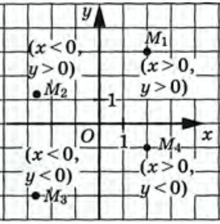


Рис. 23

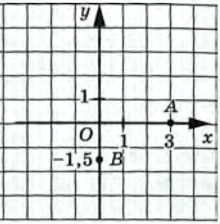


Рис. 24

А что будет, если точка, координаты которой надо найти, лежит на одной из осей координат? Пусть точка A лежит на оси x, а точка B — на оси y (рис. 24). Проводить через точку A прямую, параллельную оси y, и находить точку пересечения этой прямой с осью x не имеет смысла, поскольку такая точка пересечения уже есть — это точка A, её координата (абсцисса) равна 3. Точно так же не нужно проводить через точку A прямую, параллельную оси x: сама ось x пересекает ось y в точке O с координатой (ординатой) 0. В итоге для точки A получаем $A(3;\ 0)$. Аналогично для точки B получаем $B(0;\ -1{,}5)$. А для точки O имеем $O(0;\ 0)$.

Вообще любая точка на оси x имеет координаты $(x;\ 0)$, а любая точка на оси y — координаты $(0;\ y)$.

2 Построение точки на плоскости по её координатам

Выше мы обсудили, как находить координаты точки в координатной плоскости. А как решать обратную задачу, т. е. как, задав координаты, построить соответствующую точку? Чтобы выработать алгоритм, проведём два вспомогательных, но в то же время важных рассуждения.

Первое рассуждение. Пусть в системе координат xOy проведена прямая l, параллельная оси y и пересекающая ось x в точке с координатой (абсциссой) 4 (рис. 25). Любая точка, лежащая на этой прямой, имеет абсциссу 4. Так, для точек M_1, M_2, M_3 имеем $M_1(4;\ 3)$, $M_2(4;\ 6)$, $M_3(4;\ -2)$. Иными словами, абсцисса любой точки M прямой l удовлетворяет условию $x = 4$. Если же взять точку, не лежащую на этой прямой, то её абсцисса будет отлична от 4. Говорят, что $x = 4$ — *уравнение прямой l* или что *прямая l (и только она) удовлетворяет уравнению $x = 4$.*

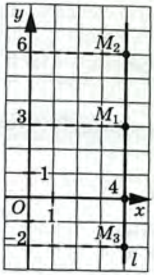


Рис. 25

На рисунке 26 изображены прямые, удовлетворяющие уравнениям $x = -4$ (прямая l_1), $x = -1$ (прямая l_2), $x = 3{,}5$ (прямая l_3). А какая прямая удовлетворяет уравнению $x = 0$? Ось y.

Второе рассуждение. Пусть в системе координат xOy проведена прямая l, параллельная оси x и пересекающая ось y в точке с координатой (ординатой) 3 (рис. 27). Любая точка, лежащая на этой прямой, имеет ординату 3. Так, для точек M_1, M_2, M_3 имеем: $M_1(0;\ 3)$, $M_2(4;\ 3)$, $M_3(-2;\ 3)$. Иными словами, ордината любой точки M прямой l удовлетворяет условию $y = 3$. Если же взять точку, не лежащую на этой прямой, то её ордината будет отлична от 3. Говорят, что $y = 3$ — *уравнение прямой l* или что *прямая l (и только она) удовлетворяет уравнению* $y = 3$.

На рисунке 28 изображены прямые, удовлетворяющие уравнениям $y = -4$ (прямая l_1), $y = -1$ (прямая l_2), $y = 3{,}5$ (прямая l_3). А какая прямая удовлетворяет уравнению $y = 0$? Ось x.

Заметим, что математики, стремясь к краткости речи, говорят «прямая $x = 4$», а не «прямая, удовлетворяющая уравнению $x = 4$». Аналогично они говорят «прямая $y = 3$», а не «прямая, удовлетворяющая уравнению $y = 3$». Мы будем поступать точно так же.

Вернёмся теперь к рисунку 20. Обратите внимание, что точка $M(-1{,}5;\ 2)$, которая там изображена, есть точка пересечения прямой

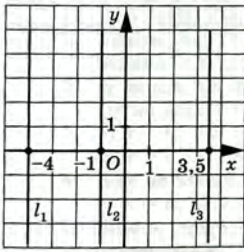


Рис. 26

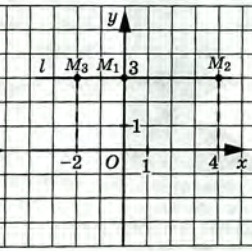


Рис. 27

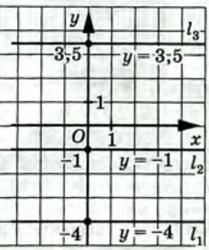


Рис. 28

$x = -1{,}5$ и прямой $y = 2$. Теперь, видимо, будет понятен алгоритм построения точки по заданным её координатам.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧКИ $M(a; b)$ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ xOy

1. Построить прямую $x = a$.
2. Построить прямую $y = b$.
3. Найти точку пересечения построенных прямых — это и будет точка $M(a; b)$.

ПРИМЕР 1

В системе координат xOy построить точки:

$$A(1; 3),\ B(-2; 1),\ C(4; 0),\ D(0; -3).$$

Решение Точка A есть точка пересечения прямых $x = 1$ и $y = 3$. Точка B есть точка пересечения прямых $x = -2$ и $y = 1$. Точка C принадлежит оси x, а точка D — оси y (рис. 29).

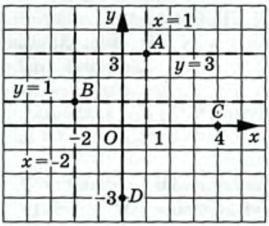
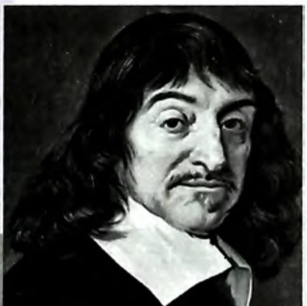


Рис. 29



Рене Декарт (1596–1650), французский философ, математик, физик, физиолог. Первым стал задавать кривые с помощью уравнений. В физиологии открыл принцип рефлекторной деятельности.

Впервые прямоугольную систему координат на плоскости стал активно использовать Рене Декарт для решения геометрических задач алгебраическими методами и, обратно, для замены алгебраических моделей геометрическими. Поэтому иногда говорят: «декартова система координат», «декартовы координаты».

ПРИМЕР 2

На координатной плоскости построен четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(2; 3)$, $B(2; 5)$, $C(6; 5)$, $D(6; 3)$. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке M. Найти площадь и периметр четырёхугольника, а также координаты точки M_1, симметричной точке M относительно оси абсцисс, координаты точки M_2, симметричной точке M относительно оси ординат, и координаты точки M_3, симметричной точке M относительно начала координат.

Решение Четырёхугольник $ABCD$ изображён на рисунке 30; это прямоугольник, его стороны равны 4 и 2, площадь 8, периметр 12, диагонали пересекаются в точке $M(4; 4)$.

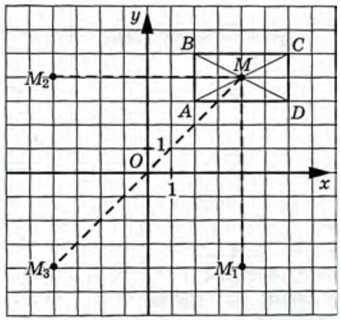


Рис. 30

Нетрудно найти координаты всех трёх интересующих нас точек:

$$M_1(4; -4),\ M_2(-4; 4),\ M_3(-4; -4).$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое прямоугольная система координат на плоскости?
2. Сформулируйте алгоритм отыскания координат точки M, заданной в системе координат xOy.
3. В какой четверти координатной плоскости xOy находится точка $M(x; y)$, если:
   а) $x < 0,\ y > 0$; в) $x < 0,\ y < 0$;
   б) $x > 0,\ y < 0$; г) $x > 0,\ y > 0$?
4. Как на координатной плоскости xOy построить прямую:
   а) $x = a$; б) $y = b$?
5. Какая прямая в координатной плоскости xOy задаётся уравнением:
   а) $x = 0$; б) $y = 0$?

6. Сформулируйте алгоритм построения точки $M(a; b)$ в прямоугольной системе координат xOy.
7. Как на координатной плоскости расположены друг относительно друга точки: $M(a; b)$ и $P(a; -b)$; $M(a; b)$ и $N(-a; b)$; $M(a; b)$ и $K(-a; -b)$?

§ 9 ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК

1 Линейное уравнение и его решение

В главе 1 мы видели, что математической моделью реальной ситуации может служить линейное уравнение с одной переменной или уравнение, которое после преобразований сводится к линейному. А теперь рассмотрим такую реальную ситуацию.

Из городов A и B, расстояние между которыми 500 км, навстречу друг другу вышли два поезда, каждый со своей постоянной скоростью. Известно, что первый поезд вышел на 2 ч раньше второго. Через 3 ч после выхода второго поезда они встретились. Чему равны скорости поездов?

Составим математическую модель задачи. Пусть x км/ч — скорость первого поезда, y км/ч — скорость второго поезда. Первый был в пути 5 ч и, значит, прошёл путь $5x$ км. Второй поезд был в пути 3 ч, т. е. прошёл путь $3y$ км. Их встреча произошла в пункте C.

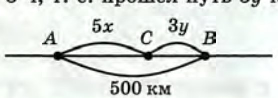


Рис. 31

На рисунке 31 представлена геометрическая модель ситуации. На алгебраическом языке её можно описать так:

$$5x + 3y = 500$$

или

$$5x + 3y - 500 = 0.$$

Такую математическую модель называют линейным уравнением с двумя переменными x, y.

Вообще

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — числа (коэффициенты), — **линейное уравнение с двумя переменными x и y** (или с двумя неизвестными x и y).

а-я
линейное уравнение с двумя переменными

Вернёмся к уравнению $5x + 3y = 500$. Замечаем, что если $x = 40$, $y = 100$, то $5 \cdot 40 + 3 \cdot 100 = 500$ — верное равенство. Значит, ответ на вопрос задачи может быть таким: скорость первого поезда 40 км/ч, скорость второго поезда 100 км/ч. Пару чисел $x = 40$, $y = 100$ называют *решением уравнения* $5x + 3y = 500$. Говорят также, что пара значений (40; 100) *удовлетворяет уравнению* $5x + 3y = 500$.

Найденное решение не единственное. В самом деле, возможен и такой вариант: $x = 64$, $y = 60$; действительно, $5 \cdot 64 + 3 \cdot 60 = 500$ — верное равенство. И такой: $x = 70$, $y = 50$ (поскольку $5 \cdot 70 + 3 \cdot 50 = 500$ — верное равенство).

А вот, скажем, пара чисел $x = 80$, $y = 60$ решением уравнения не является, поскольку при этих значениях верного равенства не получается: $5 \cdot 80 + 3 \cdot 60 \neq 500$.

Вообще **решением уравнения $ax + by + c = 0$** называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by + c = 0$ в верное числовое равенство.

Вернёмся ещё раз к уравнению $5x + 3y = 500$, полученному в рассмотренной выше задаче. Среди бесконечного множества его решений имеются, например, и такие: $x = 100$, $y = 0$ (в самом деле, $5 \cdot 100 + 3 \cdot 0 = 500$ — верное числовое равенство); $x = 118$, $y = -30$ (так как $5 \cdot 118 + 3 \cdot (-30) = 500$ — верное числовое равенство). Однако, являясь решениями уравнения, эти пары не могут служить решениями данной задачи, ведь скорость поезда не может быть равной нулю (тогда он не едет, а стоит на месте); тем более скорость поезда не может быть отрицательной.

ПРИМЕР 1*

Нужно смешать 30%-ный и 3%-ный растворы перекиси водорода так, чтобы в результате получился 12%-ный раствор. В каком отношении надо взять имеющиеся растворы?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Предположим, что взяли x г 30%-ного раствора и y г 3%-ного раствора. В более насыщенном растворе чистой перекиси водорода содержится $0{,}3x$ г, а в менее насыщенном — $0{,}03y$ г. Всего после смешивания получается $(0{,}3x + 0{,}03y)$ г чистой перекиси водорода. Где она находится? Она находится в новом растворе, масса которого равна $(x + y)$ г, и составляет там 12 %, т. е. $0{,}12\,(x + y)$ г. В итоге получаем следующее уравнение:

$$0{,}3x + 0{,}03y = 0{,}12\,(x + y).$$

Математическая модель составлена.

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Последовательно получаем:

$$0{,}3x + 0{,}03y = 0{,}12x + 0{,}12y;$$
$$0{,}3x - 0{,}12x = 0{,}12y - 0{,}03y;$$

---

* Пример заимствован из книги Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра».

$$0{,}18x = 0{,}09y;$$
$$y = 2x.$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Он фактически уже получен: равенство $y = 2x$ означает, что 3%-ного раствора перекиси водорода следует взять ровно в 2 раза больше, чем 30%-ного раствора.

ПРИМЕР 2

Пункт B расположен ниже пункта A по течению реки. Катер проходит путь от A до B за 5,5 ч, а обратно — за 7 ч 15 мин. Можно ли утверждать, что собственная скорость катера (скорость в стоячей воде) более чем в 7 раз превышает скорость течения реки?

Решение

I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — собственная скорость катера, y км/ч — скорость течения реки. Из A в B по течению реки катер идёт со скоростью $(x + y)$ км/ч, а обратно — против течения реки — со скоростью $(x - y)$ км/ч. Туда он идёт 5,5 ч и за это время проходит путь, равный $5{,}5\,(x + y)$ км. Обратно он идёт 7,25 ч и за это время проходит путь, равный $7{,}25\,(x - y)$ км. Эти пути, естественно, одинаковы, значит, получаем уравнение $5{,}5\,(x + y) = 7{,}25\,(x - y)$.

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Последовательно получаем:

$$5{,}5\,(x + y) = 7{,}25\,(x - y);$$
$$5{,}5x + 5{,}5y = 7{,}25x - 7{,}25y;$$
$$5{,}5y + 7{,}25y = 7{,}25x - 5{,}5x;$$
$$12{,}75y = 1{,}75x.$$

Умножив обе части последнего уравнения на 4, получим $51y = 7x$, т. е. $\frac{x}{y} = \frac{51}{7}$.

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Имеем $\frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}$, во столько раз скорость катера в стоячей воде больше скорости течения реки. Значит, ответ на вопрос задачи положителен: собственная скорость катера более чем в 7 раз превышает скорость течения реки.

2 Геометрическая модель линейного уравнения

ПРИМЕР 3

Изобразить решения линейного уравнения с двумя переменными $x + y - 3 = 0$ точками в координатной плоскости xOy.

Решение Подберём несколько решений заданного уравнения, т. е. несколько пар чисел, которые удовлетворяют уравнению: (3; 0), (2; 1), (1; 2), (0; 3), (−2; 5).

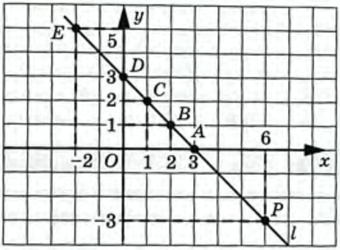


Рис. 32

Построим в координатной плоскости xOy точки $A(3; 0)$, $B(2; 1)$, $C(1; 2)$, $D(0; 3)$, $E(-2; 5)$ (рис. 32). Обратите внимание: все эти пять точек лежат на одной прямой l, проведём её.

Говорят, что прямая l является ***графиком уравнения*** $x + y - 3 = 0$ или что прямая l — *геометрическая модель* уравнения $x + y - 3 = 0$ (или $x + y = 3$). Вообще **графиком уравнения** $p(x; y) = 0$ называют множество всех тех точек плоскости xOy, при подстановке координат которых в выражение $p(x; y)$ оно принимает числовое значение 0.

Итак, если пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению $x + y - 3 = 0$, то точка $M(x; y)$ принадлежит прямой l; если точка $M(x; y)$ принадлежит прямой l, то пара $(x; y)$ — решение уравнения $x + y - 3 = 0$. Например, точка $P(6; -3)$ принадлежит прямой l (рис. 32) и пара $(6; -3)$ — решение уравнения $x + y - 3 = 0$.

Подведём итоги:

Словесная модель	Алгебраическая модель	Геометрическая модель
Сумма двух чисел равна 3	$x + y = 3$ (линейное уравнение с двумя переменными)	Прямая l на рисунке 32 (график линейного уравнения с двумя переменными)

А как вообще выглядит график линейного уравнения $ax + by + c = 0$? Проведём небольшое исследование, рассмотрев различные случаи в зависимости от значений коэффициентов.

1) Пусть $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$, т. е. $0 = 0$ при любых значениях x, y. Это значит, что любая пара чисел $(x; y)$ является решением уравнения, а график уравнения — вся координатная плоскость.

2) Пусть $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$, т. е. $c = 0$. Это не выполняется ни при каких значениях x, y, т. е. уравнение не имеет решений.

3) Пусть $a = 0$, $b \neq 0$. Тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x + by + c = 0$, т. е. $y = -\frac{c}{b}$. Графиком служит прямая, параллельная оси x, об этом мы говорили в § 8.

4) Пусть $a \neq 0$, $b = 0$. Тогда уравнение принимает вид $ax + 0 \cdot y + c = 0$, т. е. $x = -\frac{c}{a}$. Графиком служит прямая, параллельная оси y, об этом мы также говорили в § 8.

5) Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$. В этом случае графиком является прямая, не параллельная ни одной из осей координат (как это было в примере 3).

Вообще справедлива следующая теорема (для её доказательства нужны некоторые факты из геометрии, которых вы пока не знаете).

ТЕОРЕМА 1

Если хотя бы один из коэффициентов a, b линейного уравнения $ax + by + c = 0$ отличен от нуля, то графиком уравнения служит прямая линия.

ПРИМЕР 4

Построить график уравнения $3x - 2y + 6 = 0$.

Решение Подберём несколько решений заданного уравнения:

1) $(0; 3)$; в самом деле, если $x = 0$, $y = 3$, то $3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 6 = 0$ — верное равенство (в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$ мы подставили значения $x = 0$, $y = 3$);

2) $(-2; 0)$; действительно, если $x = -2$, $y = 0$, то $3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 6 = 0$ — верное равенство;

3) $(2; 6)$; если $x = 2$, $y = 6$, то $3 \cdot 2 - 2 \cdot 6 + 6 = 0$ — верное равенство;

4) $(4; 9)$; если $x = 4$, $y = 9$, то $3 \cdot 4 - 2 \cdot 9 + 6 = 0$ — верное равенство.

Построим точки $(0; 3)$, $(-2; 0)$, $(2; 6)$, $(4; 9)$ на координатной плоскости xOy. Они лежат на одной прямой, проведём её (рис. 33). Эта прямая и есть график уравнения $3x - 2y + 6 = 0$.

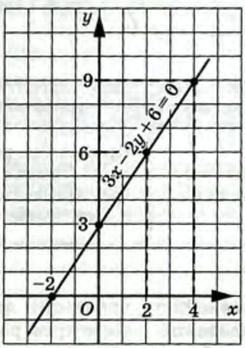


Рис. 33

3 Построение графика линейного уравнения

Пример 4 решён верно, но, признаемся, очень нерационально. Почему? Давайте рассуждать.

1. Мы знаем, что графиком линейного уравнения $3x - 2y + 6 = 0$ является прямая (это утверждается в теореме 1). Чтобы провести прямую, достаточно указать две её точки. Через две точки можно провести прямую и притом только одну — этому нас учит геометрия. Поэтому построенные выше четыре точки — это явный перебор. Достаточно было построить точки $(0; 3)$ и $(-2; 0)$ и с помощью линейки провести через них прямую.

2. Решения данного уравнения мы *подбирали*, т. е. угадывали. Угадать что-либо всегда труднее, чем действовать по определённому правилу. Нельзя ли было и здесь не угадывать, а действовать по какому-то правилу? Можно. Например, так. Дадим переменной x конкретное значение, например $x = 0$ (обычно пишут $x_1 = 0$). Подставив это значение в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$, получим $3 \cdot 0 - 2y + 6 = 0$, т. е. $-2y + 6 = 0$. Из этого уравнения находим $y = 3$ (обычно пишут $y_1 = 3$). Значит, если $x = 0$, то $y = 3$; пара $(0; 3)$ — решение данного уравнения.

Дадим переменной x ещё одно конкретное значение, например $x = -2$ (обычно пишут $x_2 = -2$). Подставив это значение в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$, получим $3 \cdot (-2) - 2y + 6 = 0$, т. е. $-2y = 0$. Из этого уравнения находим $y = 0$ (обычно пишут $y_2 = 0$). Значит, если $x = -2$, то $y = 0$; пара $(-2; 0)$ — решение данного уравнения.

Вот теперь мы в состоянии сформулировать алгоритм построения графика линейного уравнения $ax + by + c = 0$ для общего случая, когда $a \neq 0$, $b \neq 0$.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА УРАВНЕНИЯ $ax + by + c = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$

1. Придать переменной x конкретное значение $x = x_1$; найти из уравнения $ax_1 + by + c = 0$ соответствующее значение $y = y_1$.
2. Придать переменной x другое значение $x = x_2$; найти из уравнения $ax_2 + by + c = 0$ соответствующее значение $y = y_2$.
3. Построить на координатной плоскости xOy точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.
4. Провести через эти две точки прямую — она и будет графиком уравнения $ax + by + c = 0$.

Чаще всего на первом шаге алгоритма берут значение $x = 0$. Второй шаг иногда немного изменяют: полагают $y = 0$ и находят соответствующее значение x.

ПРИМЕР 5

Построить график уравнения

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

Решение Будем действовать по алгоритму.

1) Положим $x = 0$, подставим это значение в уравнение $4x + 3y - 12 = 0$, получим: $4 \cdot 0 + 3y - 12 = 0$, $3y - 12 = 0$, $y = 4$.

2) Положим $y = 0$, подставим это значение в уравнение $4x + 3y - 12 = 0$, получим: $4 \cdot x + 3 \cdot 0 - 12 = 0$, $4x - 12 = 0$, $x = 3$.

3) Построим на координатной плоскости xOy две точки: (0; 4) — она найдена на первом шаге алгоритма — и (3; 0) — она найдена на втором шаге.

4) Проведём через точки (0; 4) и (3; 0) прямую. Это и есть искомый график (рис. 34).

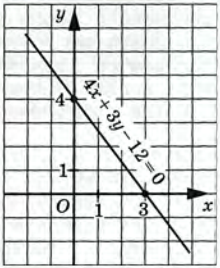


Рис. 34

4 Использование графиков линейных уравнений для решения задач

ПРИМЕР 6

Иванов и Петров посадили на своих садовых участках яблони, причём Петров посадил яблонь в 2,5 раза больше, чем Иванов. На следующий год они увеличили число яблонь (подсадили новые саженцы), причём у Иванова стало яблонь в 3 раза больше, чем было, а у Петрова в 2 раза больше, чем было. В итоге у них вместе стало 16 яблонь. Сколько яблонь посадили Иванов и Петров в первый год?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Пусть x — число яблонь, посаженных в первый год Ивановым, а y — число яблонь, посаженных в первый год Петровым. По условию задачи $y = 2{,}5x$. Здесь целесообразно умножить обе части уравнения на 2, получим $2y = 5x$. Это уравнение перепишем в виде

$$5x - 2y = 0. \qquad (1)$$

На второй год Иванов увеличил число саженцев на своём участке в 3 раза и, значит, у него стало $3x$ яблонь. Петров увеличил число саженцев на своём участке в 2 раза, т. е. у него стало $2y$ яблонь.

По условию у обоих в сумме стало 16 яблонь, т. е. $3x + 2y = 16$. Перепишем это уравнение в виде

$$3x + 2y - 16 = 0. \qquad (2)$$

Математическая модель задачи готова, она состоит из двух линейных уравнений с двумя переменными x и y — из уравнений (1) и (2). Обычно в таких случаях уравнения записывают одно под другим и используют специальный символ — фигурную скобку — и специальный термин — *система уравнений*:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

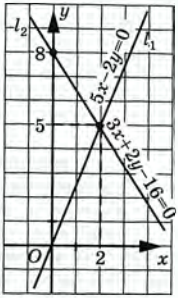


Рис. 35

Интересующая нас пара чисел $(x; y)$ должна удовлетворять и уравнению (1), и уравнению (2), т. е. интересующая нас точка $(x; y)$ должна лежать как на прямой (1), так и на прямой (2). Что делать? Ответ очевиден: надо построить прямую (1), затем прямую (2) и, наконец, найти точку пересечения этих прямых.

1) Строим график уравнения $5x - 2y = 0$. Если $x = 0$, то $y = 0$; если $x = 2$, то $y = 5$. Проведём через точки (0; 0) и (2; 5) прямую l_1 (рис. 35).

2) Строим график уравнения $3x + 2y - 16 = 0$. Если $x = 0$, то $y = 8$; если $x = 2$, то $y = 5$. Проведём через точки (0; 8) и (2; 5) прямую l_2 (рис. 35).

3) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке (2; 5), т. е. $x = 2$, $y = 5$.

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, сколько яблонь посадили в первый год Иванов и Петров, т. е. чему равны x и y? Ответ на этот вопрос уже получен: $x = 2$, $y = 5$.

Ответ В первый год Иванов посадил 2 яблони, а Петров — 5 яблонь.

Как видите, не зря мы с вами учились строить графики линейных уравнений с двумя переменными. Это позволило нам от одной математической модели (алгебраической модели (3)) перейти к другой математической модели — геометрической (две прямые на координатной плоскости на рисунке 35), что и дало возможность довести решение до конца.

А можно ли работать непосредственно с моделью (3), не переходя к геометрической модели? Можно, но об этом речь пойдёт впереди, в главе 3. Там, используя новые знания, мы снова вернёмся к модели (3).

Завершая этот параграф, рассмотрим примеры построения более сложных графиков, в той или иной степени связанных с графиками линейных уравнений.

5 Графики с модулями

ПРИМЕР 7

Построить график уравнения:
а) $y - |x| = 0$; б) $|y| + x = 0$; в) $|x| + |y| = 2$; г) $x + |x| = y + |y|$.

Решение а) Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$ и уравнение принимает вид $y - x = 0$. Что это означает? Это означает, что при $x \geqslant 0$, т. е. в правой координатной полуплоскости, надо построить график уравнения $y - x = 0$. На рисунке 36 построен график этого уравнения, причём выделена та его часть, которая принадлежит правой полуплоскости.

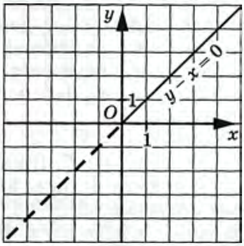


Рис. 36

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и уравнение принимает вид $y + x = 0$. Что это означает? Это означает, что при $x < 0$, т. е. в левой координатной полуплоскости, надо построить график уравнения $y + x = 0$. На рисунке 37 построен график этого уравнения, причём выделена та его часть, которая принадлежит левой полуплоскости.

Ну а как же выглядит график заданного уравнения? Он изображён на рисунке 38: мы соединили рисунки 36 и 37.

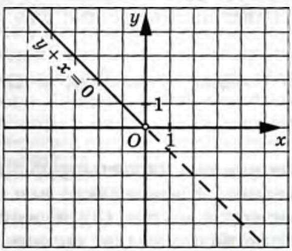


Рис. 37

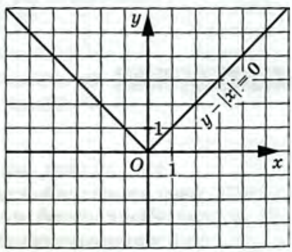


Рис. 38

б) Если $y \geqslant 0$, то $|y| = y$ и уравнение принимает вид $y + x = 0$. Что это означает? Это означает, что при $y \geqslant 0$, т. е. в верхней координатной полуплоскости, надо построить график уравнения $y + x = 0$. На рисунке 39 построен график этого уравнения, причём выделена та его часть, которая принадлежит верхней полуплоскости.

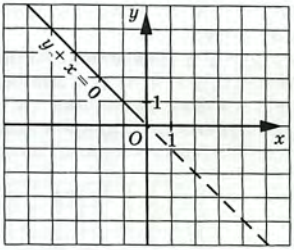


Рис. 39

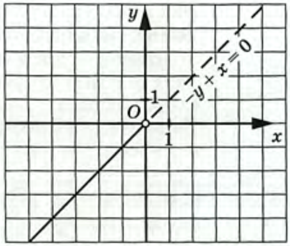


Рис. 40

Если $y < 0$, то $|y| = -y$ и уравнение принимает вид $-y + x = 0$. Это означает, что при $y < 0$, т. е. в нижней координатной полуплоскости, надо построить график уравнения $x - y = 0$. На рисунке 40 построен график этого уравнения и выделена та его часть, которая принадлежит нижней полуплоскости.

График заданного уравнения изображён на рисунке 41 (объединение лучей, изображённых на рис. 39 и 40).

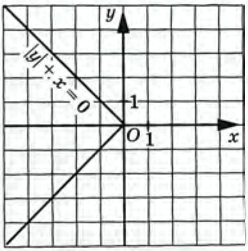


Рис. 41

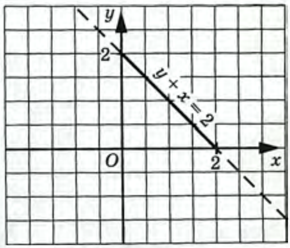


Рис. 42

в) Если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $|x| = x$, $|y| = y$ и уравнение принимает вид $y + x = 2$. Что это означает? Это означает, что при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, т. е. в правом верхнем координатном угле, надо построить график уравнения $y + x = 2$. На рисунке 42 построен график этого уравнения, причём выделена та его часть, которая принадлежит упомянутому координатному углу.

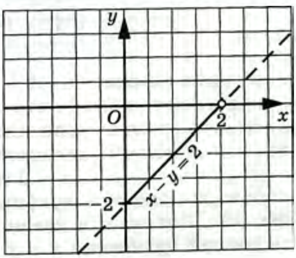


Рис. 43

Если $x \geqslant 0$ и $y < 0$, то $|x| = x$, $|y| = -y$ и уравнение принимает вид $x - y = 2$. Что это означает? Это означает, что при $x \geqslant 0$, $y < 0$, т. е. в правом нижнем координатном угле, надо построить график уравнения $x - y = 2$. На рисунке 43 построен график этого уравнения, причём выделена та его часть, которая принадлежит упомянутому координатному углу.

Если $x < 0$ и $y \geqslant 0$, то $|x| = -x$, $|y| = y$ и уравнение принимает вид $-x + y = 2$. Это означает, что при $x < 0$, $y \geqslant 0$, т. е. в левом верхнем координатном угле, надо построить график уравнения $-x + y = 2$. На рисунке 44 построен график этого уравнения, причём выделена та его часть, которая принадлежит упомянутому координатному углу.

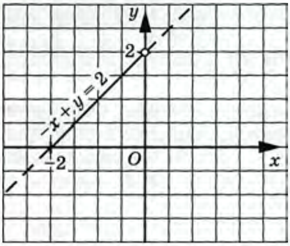


Рис. 44

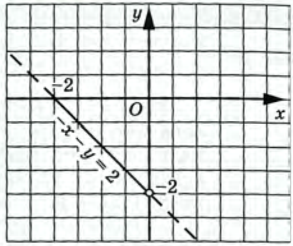


Рис. 45

Если, наконец, $x < 0$ и $y < 0$, то $|x| = -x$, $|y| = -y$ и уравнение принимает вид $-x - y = 2$. Это означает, что в левом нижнем координатном угле надо построить график уравнения $x + y = -2$. На рисунке 45 построен график этого уравнения, причём выделена та его часть, которая принадлежит упомянутому координатному углу.

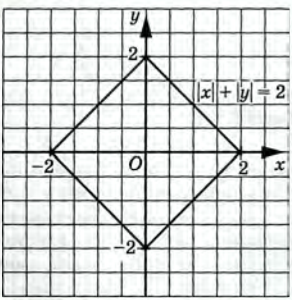


Рис. 46

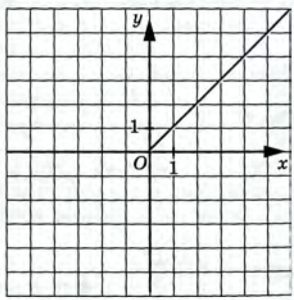


Рис. 47

График заданного уравнения изображён на рисунке 46.

г) Рассуждая, как в пункте в), приходим к выводу, что в правом верхнем координатном угле надо построить график уравнения $x + x = y + y$, т. е. $x = y$ (рис. 47). В правом нижнем координатном угле надо построить график уравнения $x + x = y - y$, т. е. $x = 0$ (рис. 48). В левом верхнем координатном угле надо построить график уравнения $x - x = y + y$, т. е. $y = 0$ (рис. 49). Наконец, в левом нижнем координатном угле надо построить график уравнения $x - x = y - y$,

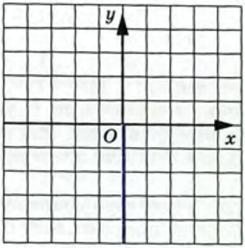


Рис. 48

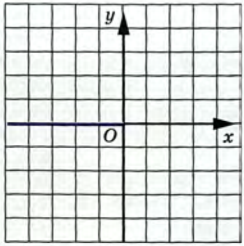


Рис. 49

т. е. $0 = 0$. Последнее равенство верно при любых x, y. Это значит, что все точки рассматриваемого координатного угла удовлетворяют уравнению (рис. 50).

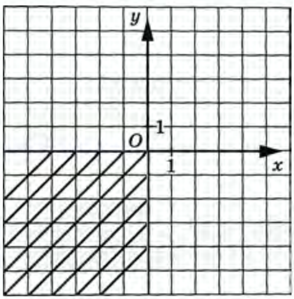


Рис. 50

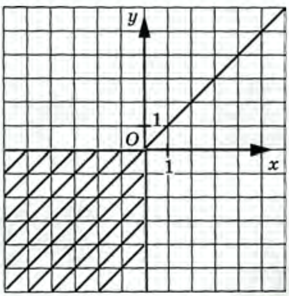


Рис. 51

Подводя итоги, получаем график заданного уравнения — он изображён на рисунке 51.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите в общем виде линейное уравнение с двумя переменными x, y.
2. Запишите в общем виде линейное уравнение с двумя переменными u, v.
3. Что называют решением уравнения $ax + by + c = 0$, где x, y — переменные, а a, b, c — коэффициенты?
4. Может ли линейное уравнение с двумя переменными не иметь решений? Если да, то приведите пример.
5. Может ли линейное уравнение с двумя переменными иметь конечное множество решений? бесконечное множество решений? Если да, то приведите пример.

6. Придумайте текстовую задачу, математической моделью которой является линейное уравнение с двумя переменными.
7. Что называют графиком уравнения $p(x; y) = 0$?
8. Как построить график линейного уравнения с двумя переменными, у которого оба коэффициента при переменных отличны от нуля? Сколько точек для этого достаточно взять?
9. Что представляет собой график линейного уравнения с двумя переменными, у которого один коэффициент при переменной отличен от нуля, а другой равен нулю? (Рассмотрите два случая.)
10. В каком случае из линейного уравнения $ax + by + c = 0$ можно выразить переменную y через переменную x, а в каком нельзя? Что получится, если переменную y можно выразить через переменную x?

§ 10 ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК

1 Преобразование уравнения $ax + by + c = 0$ к виду $y = kx + m$

Алгоритм построения графика уравнения $ax + by + c = 0$, который мы сформулировали в § 9, при всей его чёткости и определённости математикам не очень нравится. Обычно они выдвигают претензии к первым двум шагам алгоритма. Зачем, говорят они, дважды решать уравнение относительно переменной y: сначала $ax_1 + by + c = 0$, затем $ax_2 + by + c = 0$? Не лучше ли сразу выразить y из уравнения $ax + by + c = 0$, тогда легче будет проводить вычисления (и, главное, быстрее)? Давайте проверим.

Рассмотрим сначала уравнение $3x - 2y + 6 = 0$ (см. пример 4 из § 9), т. е. $2y = 3x + 6$.

Умножив обе части уравнения на $\frac{1}{2}$, получим $\frac{1}{2} \cdot 2y = \frac{1}{2}(3x + 6)$, т. е. $y = \frac{3}{2}x + 3$. Впрочем, тот же результат мы получили бы, если обе части исходного уравнения почленно разделили на 2. Обычно предпочитают в подобных случаях говорить не об умножении, а о почленном делении обеих частей уравнения на одно и то же число.

Итак, $y = \frac{3}{2}x + 3$.

Придавая x конкретные значения, легко вычислить соответствующие значения y. Например, при $x = 0$ получаем $y = 3$; при $x = -2$ имеем $y = 0$; при $x = 2$ имеем $y = 6$; при $x = 4$ получаем $y = 9$. Видите, как легко и быстро найдены точки (0; 3), (−2; 0), (2; 6) и (4; 9), которые были выделены в примере 4 из § 9.

Точно так же уравнение $5x - 2y = 0$ (см. пример 6 из § 9) можно было преобразовать к виду $2y = 5x$ и далее $y = 2{,}5x$; нетрудно найти точки (0; 0) и (2; 5), удовлетворяющие этому уравнению. Наконец, уравнение $3x + 2y - 16 = 0$ из того же примера можно было преобразовать к виду $2y = 16 - 3x$ и далее $y = 8 - \frac{3}{2}x$. Из этого уравнения можно найти решения (0; 8) и (2; 5), которые ему удовлетворяют.

Рассмотрим теперь указанные преобразования в общем виде.

Случаи, когда в уравнении $ax + by + c = 0$ оба коэффициента a, b равны нулю, мы рассмотрели в § 9. Там же мы отметили, что в случае, когда $a \neq 0$, $b = 0$, графиком уравнения является прямая, параллельная оси y.

Рассмотрим случай, когда $b \neq 0$.

Имеем:

$$ax + by + c = 0; \qquad (1)$$

$$by = -ax - c;$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Введя обозначения $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = m$, получаем

$$y = kx + m.$$

Таким образом, *линейное уравнение* (1) *с двумя переменными x и y в случае, когда $b \neq 0$, можно преобразовать к виду*

$$y = kx + m, \qquad (2)$$

где k, m — числа (коэффициенты).

Это частный вид линейного уравнения. Зная, чему равен x, по правилу $y = kx + m$ всегда можно найти, чему равен y. Будем называть уравнение (2) **линейной функцией**.

линейная функция

С помощью уравнения (2) легко, указав конкретное значение x, вычислить соответствующее значение y. Пусть, например, $y = 2x + 3$. Тогда:

если $x = 0$, то $y = 3$;
если $x = 1$, то $y = 5$;
если $x = -1$, то $y = 1$;
если $x = 3$, то $y = 9$ и т. д.

Обычно эти результаты оформляют в виде таблицы:

x	0	1	−1	3
y	3	5	1	9

независимая переменная (аргумент)

зависимая переменная

Значения y из второй строки таблицы называют *значениями линейной функции* $y = 2x + 3$ соответственно *в точках* $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 3$.

В уравнении (1) переменные x и y равноправны, а в уравнении (2) — нет: конкретные значения мы придаём одной из них — переменной x, тогда как значение переменной y зависит от выбранного значения переменной x. Поэтому обычно говорят, что x — **независимая переменная** (или **аргумент**), y — **зависимая переменная**.

2 График линейной функции

Частным случаем теоремы 1 из § 9 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2

Графиком линейной функции $y = kx + m$ является прямая.

ПРИМЕР 1

Построить график линейной функции $y = 2x + 3$.

Решение Составим таблицу:

x	0	1
y	3	5

Построим на координатной плоскости xOy точки (0; 3) и (1; 5) и проведём через них прямую. Это и есть график линейной функции $y = 2x + 3$ (рис. 52).

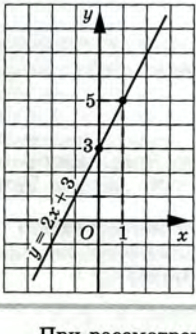


Рис. 52

При рассмотрении линейных функций вида $y = kx + m$ особо выделяют случай, когда $m = 0$; в этом случае линейная функция принимает вид $y = kx$.

ТЕОРЕМА 3

Графиком линейной функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат.

Доказательство Доказательство осуществим в два этапа.

1. $y = kx$ — частный случай линейной функции, а графиком линейной функции согласно теореме 2 является прямая; обозначим её через l.

2. Пара $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяет уравнению $y = kx$, а потому точка $(0; 0)$ принадлежит графику уравнения $y = kx$, т. е. прямой l.

Следовательно, прямая l проходит через начало координат. Теорема доказана.

Надо уметь переходить не только от аналитической модели $y = kx$ к геометрической, но и от геометрической модели к аналитической. Рассмотрим, например, прямую на координатной плоскости xOy, изображённую на рисунке 53. Она является графиком линейной функции $y = kx$, нужно лишь найти значение коэффициента k. Так как $k = \frac{y}{x}$, то достаточно взять любую точку на прямой и найти отношение ординаты этой точки к её абсциссе. Прямая проходит через точку $P(3; 6)$, а для этой точки имеем $\frac{6}{3} = 2$. Значит, $k = 2$, а потому заданная прямая линия служит графиком линейной функции $y = 2x$.

График линейной функции $y = kx$ обычно строят так: берут точку $(1; k)$ (если $x = 1$, то из равенства $y = kx$ находим, что $y = k$) и проводят прямую через эту точку и начало координат. Впрочем, в случае необходимости точку $(1; k)$ можно заменить другой точкой, более удобной. На рисунке 54 изображены графики линей-

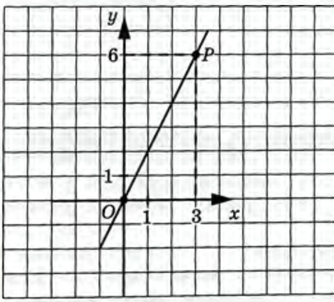


Рис. 53

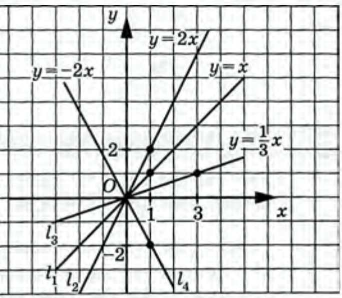


Рис. 54

ных функций $y = x$ (прямая l_1), $y = 2x$ (прямая l_2), $y = \frac{1}{3}x$ (прямая l_3; здесь не очень удобно брать точку $\left(1; \frac{1}{3}\right)$, мы взяли точку $(3; 1)$), $y = -2x$ (прямая l_4).

Обратите внимание: от коэффициента k зависит угол, который построенная прямая образует с положительным направлением оси x; заметим, что этот угол отсчитывают от оси x в направлении против часовой стрелки. Если $k > 0$, то этот угол *острый* (так обстоит дело на рисунке 54 с прямыми l_1, l_2, l_3); если $k < 0$, то этот угол *тупой* (так обстоит дело на рисунке 54 с прямой l_4). Далее, если $k > 0$, то чем больше k, тем больше угол. Так, на рисунке 54 для прямой l_3 имеем $k = \frac{1}{3}$, для прямой l_1 имеем $k = 1$, для прямой l_2 имеем $k = 2$; при увеличении коэффициента k увеличивается и угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс. Поэтому коэффициент k в записи $y = kx$ называют **угловым коэффициентом.**

угловой коэффициент

Как известно из курса физики, $s = vt$ — закон равномерного прямолинейного движения; здесь s — путь, v — скорость, t — время. Если перейти к обозначениям, которые мы использовали в этом параграфе, закон равномерного движения можно записать в виде $y = kx$ (x — время, y — путь). Угловой коэффициент k — это скорость движения.

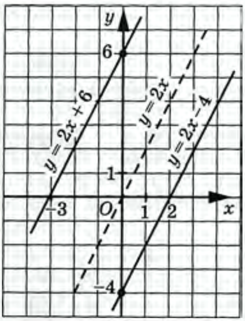


Рис. 55

На рисунке 55 изображены графики линейных функций $y = 2x - 4$, $y = 2x + 6$. Оба они параллельны графику линейной функции $y = 2x$, только первая прямая ($y = 2x - 4$) получается из прямой $y = 2x$ сдвигом *вниз* на 4 единицы масштаба, а вторая прямая ($y = 2x + 6$) получается из прямой $y = 2x$ сдвигом *вверх* на 6 единиц масштаба.

Справедлив следующий общий результат, который мы оформим в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 4

Прямая, служащая графиком линейной функции $y = kx + m$, параллельна прямой, служащей графиком линейной функции $y = kx$.

Вследствие этого коэффициент k в записи линейной функции $y = kx + m$ также называют *угловым коэффициентом*. ***Если $k > 0$, то прямая $y = kx + m$ образует с положительным направлением оси x острый угол*** (рис. 56, *а*), а ***если $k < 0$ — тупой угол*** (рис. 56, *б*).

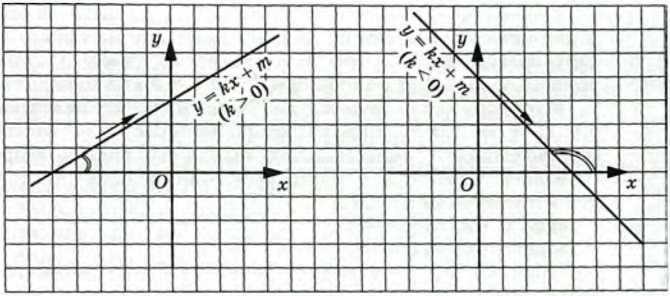


Рис. 56 а б

3 Линейные функции как математические модели реальных ситуаций

Многие реальные ситуации описываются математическими моделями, представляющими собой линейные функции. Приведём примеры.

Первая ситуация. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали подвозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе через 2, 4, 10 дней?

Если пройдёт x дней, то количество угля y на складе (в тоннах) выразится формулой $y = 500 + 30x$. Таким образом, линейная функция $y = 30x + 500$ есть математическая модель ситуации.

Теперь нетрудно установить, что:

при $x = 2$ имеем $y = 560$ (в уравнение $y = 30x + 500$ подставили $x = 2$ и получили $y = 560$);

при $x = 4$ имеем $y = 620$;

при $x = 10$ имеем $y = 800$.

Вторая ситуация. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали увозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе через 2, 4, 10 дней?

Здесь математической моделью ситуации является линейная функция $y = 500 - 30x$. С помощью этой модели нетрудно ответить на вопрос задачи:

если $x = 2$, то $y = 440$ (в уравнение $y = 500 - 30x$ подставили $x = 2$ и получили $y = 440$);

если $x = 4$, то $y = 380$;

если $x = 10$, то $y = 200$.

Третья ситуация. Турист проехал на автобусе 15 км от пункта A до пункта B, а затем продолжил движение из пункта B в том же направлении, но уже пешком со скоростью 4 км/ч. На каком расстоянии от пункта A будет турист через 2 ч, через 4 ч, через 5 ч ходьбы?

Математической моделью ситуации является линейная функция $y = 15 + 4x$, где x — время ходьбы (в часах), y — расстояние от A (в километрах). С помощью этой модели отвечаем на вопрос задачи:

если $x = 2$, то $y = 23$ (в уравнение $y = 15 + 4x$ подставили $x = 2$ и получили $y = 23$);

если $x = 4$, то $y = 31$;

если $x = 6$, то $y = 39$.

Итак, в каждой из рассмотренных ситуаций математической моделью служит линейная функция. Но, строго говоря, все три составленные модели не совсем точны, они не учитывают тех ограничений на переменную, которые вытекают из смысла задачи. Ведь ясно, что в первой ситуации независимая переменная x может принимать только значения 1, 2, 3, ..., поскольку x — число дней. Следовательно, уточнённая математическая модель первой ситуации выглядит так:

$$y = 500 + 30x, \text{ где } x \text{ — натуральное число.}$$

Вторую ситуацию необходимо уточнить условием $y \geqslant 0$. Это значит, что независимая переменная x, обозначающая, как и в первой ситуации, число дней, может принимать только значения 1, 2, 3, ..., 16. Действительно, если $x = 16$, то по формуле $y = 500 - 30x$ находим: $y = 500 - 30 \cdot 16 = 20$. Значит, уже на 17-й день вывезти со склада 30 т угля не удастся, поскольку на складе к этому дню останется всего 20 т и вывоз угля придётся прекратить. Следовательно, уточнённая математическая модель второй ситуации выглядит так:

$$y = 500 - 30x,\ y \geqslant 0 \text{ или}$$
$$y = 500 - 30x, \text{ где } x = 1, 2, 3, \ldots, 16.$$

В третьей ситуации независимая переменная x теоретически может принять любое неотрицательное значение ($x = 0$, $x = 2$, $x = 3{,}5$ и т. д.), но практически турист не может шагать с постоянной скоростью без сна и отдыха сколько угодно времени. Значит, нам нужно было сделать разумные ограничения на x, скажем, $0 \leqslant x \leqslant 6$ (т. е. турист идёт не более 6 ч).

Напомним, что геометрической моделью нестрогого двойного неравенства $0 \leqslant x \leqslant 6$ служит отрезок $[0; 6]$ координатной прямой (рис. 57). Значит, уточнённая модель третьей ситуации выглядит так: $y = 15 + 4x$, где x принадлежит отрезку $[0; 6]$.

Рис. 57

Условимся вместо фразы «x принадлежит множеству X» писать $x \in X$ (читают: «элемент x принадлежит множеству X», $\in$ — *знак принадлежности*). Как видите, наше знакомство с математическим языком продолжается. Множество натуральных чисел обычно обозначают буквой N. Значит, вместо фразы «x — натуральное число» мы можем использовать соотношение $x \in N$.

Если линейную функцию $y = kx + m$ надо рассматривать не при всех значениях x, а лишь для значений x из некоторого числового множества X, то пишут

$$y = kx + m,\ x \in X.$$

А теперь запишем более точные математические модели для рассмотренных выше трёх ситуаций.

Первая ситуация: $y = 500 + 30x,\ x \in N$.

Вторая ситуация: $y = 500 - 30x,\ x \in \{1, 2, 3, ..., 16\}$.

Третья ситуация: $y = 15 + 4x,\ x \in [0; 6]$.

4 Построение графика линейной функции на заданном промежутке

ПРИМЕР 2

Построить график линейной функции:

а) $y = -2x + 1,\ x \in [-3; 2]$; б) $y = -2x + 1,\ x \in (-3; 2)$.

Решение а) Составим таблицу для линейной функции $y = -2x + 1$:

x	-3	2
y	7	-3

Построим на координатной плоскости xOy точки $(-3; 7)$ и $(2; -3)$ и проведём через них прямую линию. Это график уравнения $y = -2x + 1$. Выделим отрезок, соединяющий построенные точки (рис. 58). Это и есть график линейной функции $y = -2x + 1,\ x \in [-3; 2]$.

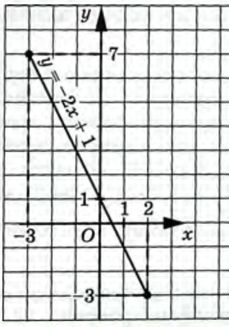


Рис. 58

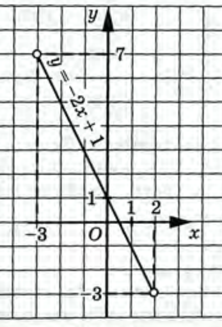


Рис. 59

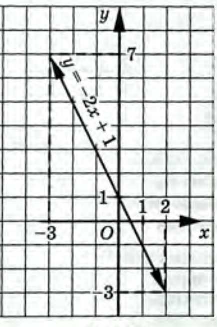


Рис. 60

Обычно говорят так: мы построили график линейной функции $y = -2x + 1$ на отрезке $[-3; 2]$.

Рис. 61

б) Чем отличается этот пример от предыдущего? Линейная функция та же ($y = -2x + 1$), значит, и графиком её служит та же прямая. Но — будьте внимательны! — на этот раз $x \in (-3; 2)$, т. е. значения $x = -3$ и $x = 2$ не рассматриваются, они *не принадлежат* интервалу $(-3; 2)$. Как мы отмечали концы интервала на координатной прямой? Светлыми кружочками (рис. 61), об этом мы говорили в § 6. Точно так же и точки $(-3; 7)$ и $(2; -3)$ придётся отметить на чертеже светлыми кружочками. Это будет напоминать нам о том, что берутся лишь те точки прямой $y = -2x + 1$, которые лежат между точками, отмеченными кружочками (рис. 59). Впрочем, иногда в таких случаях используют не светлые кружочки, а стрелки (рис. 60). Это непринципиально: главное понимать, о чём идёт речь.

ПРИМЕР 3

Найти наибольшее и наименьшее значения линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$ на отрезке $[0; 6]$.

Решение Составим таблицу для линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$:

x	0	6
y	4	7

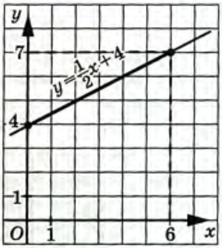


Рис. 62

Построим на координатной плоскости xOy точки $(0; 4)$ и $(6; 7)$ и проведём через них прямую — график линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$ (рис. 62).

Нам нужно рассмотреть эту линейную функцию не целиком, а на отрезке $[0; 6]$, т. е. для $x \in [0; 6]$. Соответствующий отрезок графика выделен на чертеже. Замечаем, что самая большая ордината у точек, принадлежащих выделенной части, равна 7 — это и есть *наибольшее значение* линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$ на отрезке $[0; 6]$. Обычно используют такую запись: $y_{наиб} = 7$.

наибольшее значение линейной функции

наименьшее значение линейной функции

Замечаем, что самая маленькая ордината у точек, принадлежащих выделенной на рисунке 62 части прямой, равна 4 — это и есть *наименьшее значение* линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$ на отрезке [0; 6]. Обычно используют такую запись: $y_{\text{наим}} = 4$.

Ответ $y_{\text{наиб}} = 7$, $y_{\text{наим}} = 4$.

ПРИМЕР 4

Найти $y_{\text{наиб}}$ и $y_{\text{наим}}$ для линейной функции $y = -1{,}5x + 3{,}5$:
а) на отрезке [1; 5];
б) на интервале (1; 5);
в) на полуинтервале [1; 5);
г) на луче $[0; +\infty)$;
д) на луче $(-\infty; 3]$.

Решение Составим таблицу для линейной функции $y = -1{,}5x + 3{,}5$:

x	1	5
y	2	−4

Построим на координатной плоскости xOy точки (1; 2) и (5; −4) и проведём через них прямую (рис. 63—67). Выделим на построенной прямой часть, соответствующую значениям x из отрезка [1; 5] (рис. 63), из интервала (1; 5) (рис. 64), из полуинтервала [1; 5) (рис. 65), из луча $[0; +\infty)$ (рис. 66), из луча $(-\infty; 3]$ (рис. 67).

а) С помощью рисунка 63 нетрудно сделать вывод, что $y_{\text{наиб}} = 2$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 1$), а $y_{\text{наим}} = -4$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 5$).

б) В отличие от предыдущего случая, оба конца отрезка, в которых как раз и достигались наибольшее и наименьшее значения, из

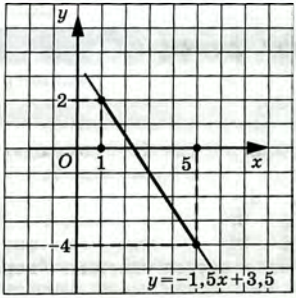


Рис. 63

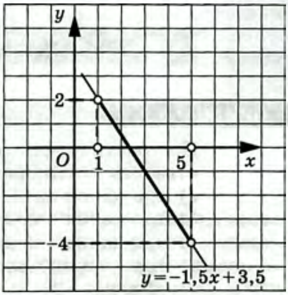


Рис. 64

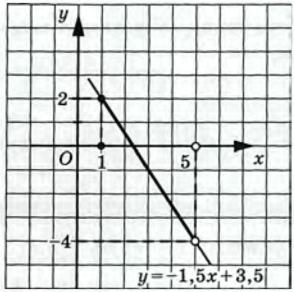


Рис. 65

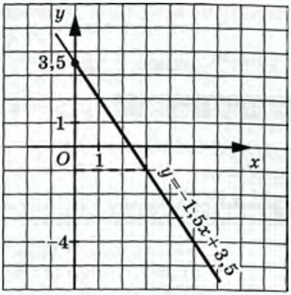


Рис. 66

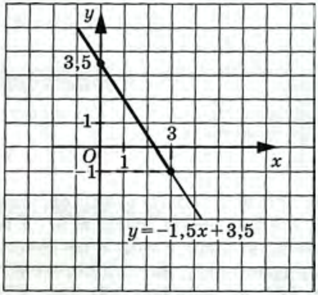


Рис. 67

рассмотрения исключены (рис. 64). Среди остальных точек графика нет ни точки с наименьшей ординатой, ни точки с наибольшей ординатой. Значит, ни наибольшего, ни наименьшего значений на заданном интервале у данной линейной функции нет, они *не существуют*.

в) С помощью рисунка 65 заключаем, что $y_{наиб} = 2$ (как и в первом случае), а наименьшего значения у линейной функции нет (как и во втором случае).

г) $y_{наиб} = 3,5$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 0$), а $y_{наим}$ не существует (рис. 66).

д) $y_{наим} = -1$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 3$), а $y_{наиб}$ не существует (рис. 67).

5 Свойства линейной функции

ПРИМЕР 5

Построить график линейной функции $y = 2x - 6$. С помощью графика ответить на следующие вопросы:

а) при каком значении x будет $y = 0$;
б) при каких значениях x будет $y > 0$;
в) при каких значениях x будет $y < 0$;
г) при каких значениях x выполняется двойное неравенство $-4 \leqslant y \leqslant -2$?

Решение Составим таблицу для линейной функции $y = 2x - 6$:

x	0	3
y	-6	0

Через точки $(0; -6)$ и $(3; 0)$ проведём прямую — график линейной функции $y = 2x - 6$ (рис. 68).

а) $y = 0$ при $x = 3$. График пересекает ось x в точке $x = 3$, это и есть точка с ординатой $y = 0$.

б) $y > 0$ при $x > 3$. В самом деле, если $x > 3$, то соответствующая часть прямой расположена в ы ш е оси x, значит, ординаты соответствующих точек прямой *положительны*.

в) $y < 0$ при $x < 3$. В самом деле, если $x < 3$, то соответствующая часть прямой расположена н и ж е оси x, значит, ординаты соответствующих точек прямой *отрицательны*.

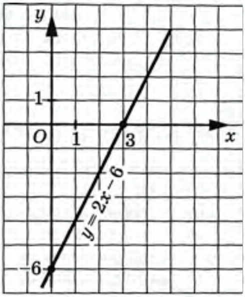


Рис. 68

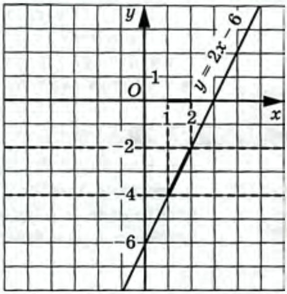


Рис. 69

г) На рисунке 69 выделены часть прямой, ординаты точек которой удовлетворяют двойному неравенству $-4 \leqslant y \leqslant -2$, и соответствующий промежуток оси абсцисс. Это и есть интересующий нас промежуток: $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Обратите внимание, что в этом примере мы с помощью графика решили:

а) уравнение $2x - 6 = 0$ (получили $x = 3$);

б) неравенство $2x - 6 > 0$ (получили $x > 3$);

в) неравенство $2x - 6 < 0$ (получили $x < 3$);

г) неравенство $-4 \leqslant 2x - 6 \leqslant -2$ (получили $1 \leqslant x \leqslant 2$).

Замечание В русском языке часто один и тот же объект называют по-разному, например: «дом», «здание», «сооружение», «коттедж», «особняк», «барак», «хибара», «избушка». В математическом языке ситуация примерно та же. Скажем, равенство с двумя переменными $y = kx + m$, где k, m — конкретные числа, можно назвать линейной функцией, можно назвать линейным уравнением с двумя переменными x и y (или с двумя неизвестными x и y), можно назвать формулой, можно назвать соотношением, связывающим x и y, можно, наконец, назвать зависимостью между x и y. Это неважно, главное, понимать, что во всех случаях речь идёт о математической модели $y = kx + m$.

возрастающая линейная функция

убывающая линейная функция

Рассмотрим график линейной функции, изображённый на рисунке 56, *а* (с. 65). Если двигаться по этому графику слева направо, то ординаты точек графика всё время увеличиваются, мы как бы «поднимаемся в горку». В таких случаях математики употребляют термин *возрастание* и говорят так: ***если $k > 0$, то линейная функция $y = kx + m$ возрастает.***

Рассмотрим график линейной функции, изображённый на рисунке 56, *б*. Если двигаться по этому графику слева направо, то ординаты точек графика всё время уменьшаются, мы как бы «спускаемся с горки». В таких случаях математики употребляют термин *убывание* и говорят так: ***если $k < 0$, то линейная функция $y = kx + m$ убывает.***

ПРИМЕР 6

На рисунке 70 изображён график движения автомобиля между пунктами 1 и 2. По оси t отмечено время (в часах), по оси S — расстояние до пункта 1. Требуется охарактеризовать весь процесс движения словами.

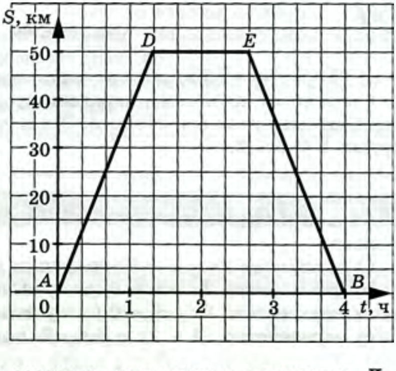


Рис. 70

Решение

1) Точка A соответствует началу движения. До пункта 2 автомобиль доехал за $1\frac{1}{3}$ ч — об этом можно судить по абсциссе точки D. Пройденное расстояние равно 50 км — об этом

можно судить по ординате точки D. Значит, можно вычислить скорость движения автомобиля: $v = 50 : \frac{4}{3} = 37{,}5$ км/ч.

2) На участке графика DE ордината постоянна, т. е. расстояние от пункта 1 не менялось. Это значит, что автомобиль не двигался (стоял в пункте 2). Причём он стоял в промежутке от $1\frac{1}{3}$ ч до $2\frac{2}{3}$ ч (это абсциссы точек D и E). Остановка длилась, таким образом, 1 ч 20 мин.

3) На обратный путь после остановки автомобиль потратил столько же времени, сколько на путь от 1 до 2 $\left(\text{поскольку } 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}\right)$, значит, обратно он ехал с той же скоростью.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое линейная функция?
2. Что является графиком линейной функции?
3. Сколько точек достаточно взять для построения графика линейной функции?
4. Опишите процесс построения графика линейной функции $y = 2x + 3$, где $x \in [0; 2]$. Что изменится, если $x \in (0; 2)$?
5. Дана линейная функция $y = kx + m$, $x \in X$, где X — некоторый числовой промежуток. Что такое $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$?
6. Как с помощью графика линейной функции $y = kx + m$, где $k \neq 0$, решить:
   а) уравнение $kx + m = 0$;
   б) неравенство $kx + m > 0$;
   в) неравенство $kx + m \leqslant 0$?
7. В каком случае линейная функция возрастает, а в каком — убывает? Как об этом можно судить по графику линейной функции?
8. Что представляет собой график линейной функции $y = kx$?
9. Почему в уравнении $y = kx$ коэффициент k называют угловым?
10. Что вы можете сказать о взаимном расположении графиков функций $y = kx + m$ и $y = kx$?
11. Какой угол (острый или тупой) образует прямая $y = kx + m$ с положительным направлением оси Ox при $k > 0$ и при $k < 0$?

§ 11 ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Вернёмся ещё раз к графикам линейных функций $y = 2x - 4$ и $y = 2x + 6$, представленным на рисунке 55 (с. 64). Мы уже отмечали (в § 10), что эти две прямые параллельны прямой $y = 2x$, а значит, параллельны друг другу. Признаком параллельности служит равенство угловых коэффициентов ($k = 2$ для всех трёх прямых: и для $y = 2x$, и для $y = 2x - 4$, и для $y = 2x + 6$). Если же угловые коэффициенты различны, как, например, у линейных функций $y = 2x$ и $y = 3x + 1$, то прямые, служащие их графиками, не параллельны и тем более не совпадают. Следовательно, указанные прямые пересекаются. Вообще справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5

Пусть даны две линейные функции $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$. Прямые, служащие графиками заданных линейных функций:
1) параллельны, если $k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$;
2) совпадают, если $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$;
3) пересекаются, если $k_1 \neq k_2$.

ПРИМЕР 1

Найти точку пересечения прямых:

а) $y = 2x - 3$ и $y = 2 - \frac{x}{2}$;

б) $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$.

Решение а) Для линейной функции $y = 2x - 3$ имеем:

x	0	2
y	−3	1

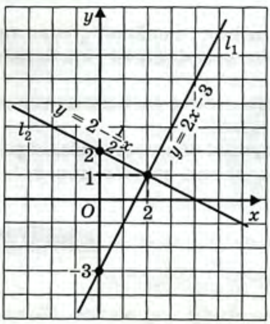


Рис. 71

Прямая l_1, служащая графиком линейной функции $y = 2x - 3$, проведена на рисунке 71 через точки (0; −3) и (2; 1).

Для линейной функции $y = 2 - \frac{1}{2}x$ имеем:

x	0	2
y	2	1

Прямая l_2, служащая графиком линейной функции $y = 2 - \frac{1}{2}x$, проведена на рисунке 71 через точки (0; 2) и (2; 1).

Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке (2; 1).

б) Линейные функции $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ имеют один и тот же угловой коэффициент ($k = -3$), значит, прямые $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ параллельны, т. е. точки пересечения у них нет.

ПРИМЕР 2

Найти точку пересечения прямых $y = 4x + 7$ и $y = -2x + 7$.

Решение Здесь можно обойтись без чертежа. Будем рассуждать так. Во-первых, угловые коэффициенты прямых различны ($k_1 = 4$, $k_2 = -2$), значит, прямые пересекаются в одной точке.

Во-вторых, как одна, так и другая прямая проходят через точку (0; 7) (вы обратили внимание, что $m_1 = m_2 = 7$?).

Следовательно, (0; 7) и есть искомая точка пересечения.

Вообще *прямые* $y = k_1x + m$ *и* $y = k_2x + m$, *где* $k_1 \neq k_2$, *пересекаются в точке* (0; m).

Завершая главу 2, обратим внимание на характерную особенность математического языка: во многих фразах, как вы, наверное, заметили, одновременно встречаются элементы алгебраического и геометрического языков — составных частей единого математического языка. Так, мы говорим: точка 3, прямая $x = 2$, прямая $y = -5$, прямая $y = 2x + 3$, отрезок [3; 7], луч [−2; +∞] и т. п. А в этом параграфе мы получили, пожалуй, наиболее яркие образцы свободного оперирования алгебраическим и геометрическим языками в одном суждении — они представлены в приведённой таблице.

Линейные функции	Алгебраическое условие	Геометрический вывод
$y = k_1x + m_1$ $y = k_2x + m_2$	1) $k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$	1) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ параллельны
	2) $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$	2) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ совпадают
	3) $k_1 \neq k_2$	3) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ пересекаются

ПРИМЕР 3

Графики линейных функций $y = kx + m$ и $y = ax + b$ пересекаются в точке, принадлежащей четвёртому координатному углу координатной плоскости xOy. Известно, что первая прямая не пересекает первый координатный угол, а вторая проходит через начало координат. Найти знаки коэффициентов k, m, a, b.

Решение На рисунке 72 представлена геометрическая иллюстрация условий задачи, которая позволяет сделать все необходимые выводы. Линейная функция $y = kx + m$ убывает (рис. 72, *а*) или постоянна (рис. 72, *б*), значит, $k < 0$ или $k = 0$. Её график пересекает ось ординат в точке, лежащей ниже начала координат, значит, $m < 0$. График линейной функции $y = ax + b$ проходит через начало координат, значит, $b = 0$. Линейная функция $y = ax + b$ убывает, значит, $a < 0$.

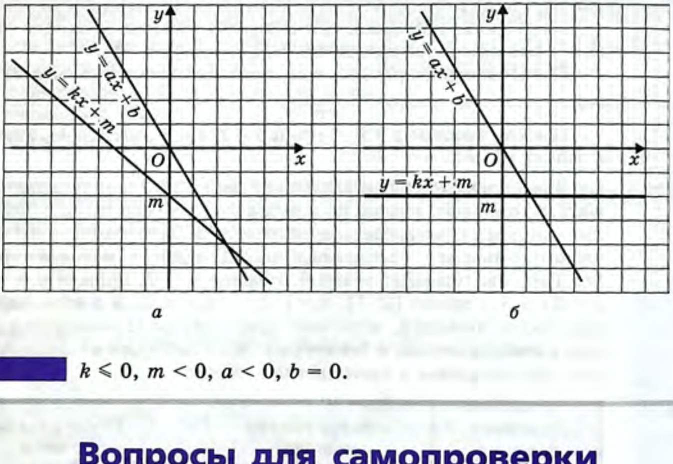


Рис. 72 *а* *б*

Ответ $k \leqslant 0$, $m < 0$, $a < 0$, $b = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры линейных функций, графики которых параллельны.
2. Приведите примеры линейных функций, графики которых совпадают.
3. Приведите примеры линейных функций, графики которых пересекаются.
4. Что вы можете сказать о взаимном расположении на координатной плоскости xOy графиков линейных функций: а) $y = 2x + 3$ и $y = 3x - 2$; б) $y = 2x + 3$ и $y = 2x$?

5. Как будет расположен график функции $y = 4x + a$ относительно графика функции $y = 4x$, если $a > 0$? если $a < 0$?
6. Сформулируйте теорему о взаимном расположении графиков линейных функций.

§12[1] УПОРЯДОЧЕНИЕ ДАННЫХ, ТАБЛИЦЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Если данных много, то лучше их как-то упорядочить. Например, если подряд записать сотню телефонных номеров и имена их владельцев, то в таком списке легко запутаться. Совсем другое дело, если расположить те же номера по алфавиту, по заглавным буквам фамилий или имён абонентов. Тогда на каждую букву, скорее всего, придётся не более 7—8 номеров, и поиск нужного номера станет простым делом.

Статистическая обработка данных, как правило, начинается с расположения данных в каком-либо разумном порядке: по алфавиту, по числовому значению, в наглядно организованной таблице, в столбчатой или круговой диаграмме, в виде дерева возможных вариантов и т. д. Мы начнём с простейших способов *упорядочивания* данных.

Откроем наш задачник. В упражнении 8.39 а) надо было отметить на координатной плоскости 14 точек. Составим ряд из абсцисс этих точек:

$$-1, -3, -3, -2, 3, 3, 0, 3, 3, -3, -3, 1, 1, -1.$$

Его можно упорядочить «слева направо» в том же порядке, в котором упорядочена координатная прямая. А именно, сначала выписать все абсциссы, принимающие наименьшее значение -3. Их будет четыре штуки: $-3, -3, -3, -3$. Справа от них приписать следующую по величине абсциссу -2. Она встретилась один раз. Затем написать две абсциссы, равные -1. Потом пойдёт 0, два раза 1, и на правом конце ряда останутся четыре абсциссы, равные 3:

$$-3, -3, -3, -3, -2, -1, -1, 0, 1, 1, 3, 3, 3, 3.$$

а-я **упорядоченный ряд данных**

Получился *упорядоченный ряд данных*. Сами данные в нём не изменились по сравнению с исходным рядом. Изменился только порядок выписывания данных. Грубо говоря, мы расположили первоначальные данные «по росту».

ПРИМЕР 1

а) Выписать поочерёдно ординаты всех точек из упражнения 8.39 б).
б) Каков объём и размах этого ряда данных?
в) Составить упорядоченный ряд данных.
г) Какова мода этого ряда данных? Сколько раз она встретилась?

---
[1] Параграф написан П. В. Семеновым.

Решение а) Открываем задачник (№ 8.39 б)) и аккуратно выписываем ординаты из условия:

$$7,\ 0,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ -2,\ -2,\ -4,\ -4,\ -2,\ -2,\ 0,\ 7.$$

б) Объём равен 15, так как выписаны 15 чисел. Размах равен 11, так как наименьшее число равно -4, а наибольшее равно 7.

в) Упорядоченный ряд выглядит так:

$$-4,\ -4,\ -2,\ -2,\ -2,\ -2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 2,\ 7,\ 7.$$

г) По упорядоченному ряду сразу видно, что чаще всего встретилось число 0. Мода равна 0, она встретилась 5 раз.

Упорядоченный ряд помогает объяснить ещё один важный статистический показатель. Допустим, что упорядоченный ряд состоит из 15 чисел (см. рис. 73). Рассмотрим восьмое по счёту число. И слева, и справа от него расположено одинаковое количество чисел ряда: по 7 штук. Грубо говоря, это восьмое по счёту число находится «посередине», делит ряд «пополам». В таком случае в статистике говорят, что мы нашли *медиану* ряда.

медиана ряда данных

Рис. 73

А как поступить, если упорядоченный ряд состоит из 16 чисел? Тогда надо выбрать восьмое и девятое по счёту числа и взять их полусумму. На геометрическом языке это означает, что следует взять середину отрезка между точками на координатной прямой, которые соответствуют восьмому и девятому числам ряда. Найденная полусумма снова находится «посередине», делит ряд «пополам»: и слева, и справа от него расположено одинаковое количество чисел ряда (по 8 штук).

Теперь мы можем сформулировать правило нахождения медианы ряда данных.

Правило нахождения медианы ряда данных Для нахождения медианы ряда из нечётного количества $(2n + 1)$ чисел следует упорядочить этот ряд и затем взять число, стоящее на $(n + 1)$-м месте.

Для нахождения медианы ряда из чётного количества $(2n)$ чисел следует упорядочить этот ряд и затем взять полусумму чисел, стоящих на n-м и $(n + 1)$-м местах.

Вот несколько примеров нахождения медиан:

- ряд 3, 4, 5 состоит из трёх чисел, его медиана равна 4;

- ряд −3, −3, −1, 0, 5, 6, 7, 8, 2017 состоит из девяти чисел, его медиана равна 5;
- ряд 3, 4, 5, 6 состоит из четырёх чисел, его медиана равна полусумме $\frac{4+5}{2}$, т. е. равна 4,5;
- ряд 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 состоит из десяти чисел, его медиана равна полусумме чисел, стоящих на 5-м и на 6-м местах, т. е. равна $\frac{0+0}{2} = 0$.

Иногда ответ для упорядоченного ряда выгодно записать так, чтобы включить в него более подробную информацию. Вот как это выглядит в разобранном примере 1в):

$$\underbrace{\underbrace{-4, -4}_{2},\ \underbrace{-2, -2, -2, -2}_{4},\ \underbrace{0, 0, 0, 0, 0}_{5},\ \underbrace{2, 2}_{2},\ \underbrace{7, 7}_{2}}_{15}$$

В такой записи сразу видно и сколько раз встретилось каждое число, и каковы мода, объём, медиана ряда. Однако у такой записи есть и недостатки: она громоздка, а для объёмов, бóльших, скажем, 100, зачастую вряд ли возможна. В статистике придумали другой способ записи. В нём все данные и сведения о них записаны в виде таблицы. Эту таблицу называют *таблицей распределения данных*. Она состоит из двух строчек. В первой записывают по одному разу каждый результат, встретившийся в ряду данных. Во второй указывают, сколько именно раз встретился каждый результат. В нашем случае это выглядит так.

таблица распределения данных

Результат	−4	−2	0	2	7
Сколько раз встречается	2	4	5	2	2

Если упорядоченный ряд уже составлен, то нетрудно составить таблицу распределения: надо вместо повторений одного и того же результата записать само количество этих повторений. Верно и обратное: если известна таблица распределения, то легко можно восстановить упорядоченный ряд. Например, по таблице распределения

Результат	−3	−1	5	7	8
Сколько раз встречается	3	4	2	1	5

сразу получается такой упорядоченный ряд:

$$-3, -3, -3, -1, -1, -1, -1, 5, 5, 7, 8, 8, 8, 8, 8.$$

Сумма чисел во второй строке таблицы распределения всегда равна объёму ряда данных. Действительно, такая сумма равна количеству всех данных, из которых состоит ряд, т. е. объёму ряда. Это свойство полезно для контроля возможных ошибок при подсчётах.

Подведём промежуточный итог. Ряд данных, упорядоченный ряд и таблица распределения по существу содержат одну и ту же информацию. Меняется только способ её записи, оформления, представления, дизайна.

Замечание Иногда по техническим соображениям бывает удобно таблицу распределения записывать не в виде двух строчек, а в виде двух столбцов.

Таблицы распределения можно составлять и без выписывания упорядоченного ряда, а производя подсчёты непосредственно среди имеющихся данных. Разберём пример.

ПРИМЕР 2

На контрольной по алгебре ученики 7 «Б» получили такие оценки:

№	Ученик	Оценка	№	Ученик	Оценка	№	Ученик	Оценка
1	Петя А.	3	9	Володя Е.	4	18	Таисия О.	2
2	Вера А.	5	10	Павел К.	4	19	Лёша С.	4
3	Лена А.	4	11	Света К.	3	20	Андрей С.	5
4	Коля Б.	н	12	Сергей К.	2	21	Валера Т.	3
5	Маша В.	3	13	Клава К.	н	22	Витя У.	4
6	Галя Г.	4	14	Артём Л.	5	23	Митя Ф.	5
7	Ваня Д.	2	15	Анна Л.	4	24	Виталий Ю.	4
8	Слава Д.	5	16	Ксения М.	5	25	Надя Я.	3
			17	Тоня Н.	4			

Составить таблицу распределения оценок, включая оценку «н» — «не был на контрольной».

Решение Сначала заполним первую строку таблицы распределения оценок, оставив пока пустыми клетки во второй строке.

Оценка за контрольную	н	2	3	4	5
Сколько раз встречается					

На контрольной отсутствовали двое: Коля и Клава. Значит, во второй строке под буквой «н» ставим число 2. Двойки получили трое: Ваня, Сергей и Таисия. Ставим во второй строке под оценкой (под результатом) 2 число 3. Троечников пятеро: Петя, Маша, Света, Валера, Надя. Отличников шестеро: Вера, Слава, Артём, Ксения, Андрей, Митя. Остальные ученики получили четвёрки. Их было 25 – 2 – 3 – – 5 – 6 = 9 человек, больше, чем в других группах. Получаем таблицу:

Оценка за контрольную	н	2	3	4	5
Сколько раз встречается	2	3	5	9	6

Мы познакомились с начальными понятиями того, как происходит *статистическая обработка данных*. Отметим, что данные практически всегда являются результатом какого-либо *измерения*. Вы измеряете либо рост или вес человека, либо показания счётчика электроэнергии, либо результаты в беге на стометровку и т. п. Вместо длинного словесного оборота *объём (размах, мода, медиана) ряда данных некоторого измерения* можно говорить более кратко: *объём (размах, мода, медиана) данных* или *объём (размах, мода, медиана) измерения*. Часто бывает удобнее называть конкретные данные. Например, объём сведений об урожайности, размах результатов голосования, мода баллов на ЕГЭ по литературе, медиана зарплат на предприятии и т. п.

Вопросы для самопроверки

1. Найдите объём, размах и моду ряда данных 13, 7, 8, 11, 19, 13, 10, 10, 10, 13, 20, 19, 13.
2. По ряду из предыдущего вопроса составьте упорядоченный ряд. Найдите его медиану.
3. Составьте соответствующую таблицу распределения данных.
4. По таблице распределения

Результат	0	3	7	8	9
Сколько раз встречается	2	4	2	3	4

восстановите соответствующий упорядоченный ряд.

5. Найдите объём, размах, моду и медиану ряда, полученного в предыдущем вопросе.
6. Может ли во второй строке таблицы распределения встретиться число 2,5? А в первой?
7. Может ли во второй строке таблицы распределения встретиться число 0? А в первой?

8. Приведите пример ряда, у которого объём больше размаха (меньше размаха, равен размаху).
9. Приведите пример ряда, у которого размах больше моды (меньше моды, равен моде).
10. Приведите пример ряда, у которого мода больше медианы (меньше медианы, равна медиане).

Основные результаты

- Мы пополнили наш словарный запас математического языка следующими *терминами:*
  — прямоугольная система координат на плоскости (декартова система координат);
  — координатная плоскость, координатные углы, начало координат;
  — абсцисса, ордината, ось абсцисс, ось ординат;
  — линейное уравнение с двумя переменными ($ax + by + c = 0$);
  — решение линейного уравнения с двумя переменными;
  — независимая переменная (аргумент);
  — зависимая переменная;
  — линейная функция ($y = kx + m$);
  — угловой коэффициент (для линейной функции $y = kx + m$);
  — медиана ряда данных.
- Мы ввели следующие *обозначения*:
  — xOy (для прямоугольной системы координат на плоскости);
  — $M(x; y)$ (для обозначения координат точки M на координатной плоскости);
  — $y_{\text{наиб}}$, $y_{\text{наим}}$ (для наибольшего и наименьшего значений линейной функции на заданном числовом промежутке).
- Мы познакомились с тремя новыми *математическими моделями*:
  — $y = kx$;
  — $y = kx + m$;
  — $ax + by + c = 0$.
- Мы узнали, что:
  — графиком уравнения $x = a$ является прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку a на оси абсцисс; в частности, $x = 0$ — уравнение оси ординат;
  — графиком уравнения $y = b$ является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку b на оси ординат; в частности, $y = 0$ — уравнение оси абсцисс;

— графиком линейной функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат;
— графиком линейной функции $y = kx + m$ является прямая;
— графиком линейного уравнения $ax + by + c = 0$ в случае, когда хотя бы один из коэффициентов a, b отличен от нуля, является прямая.

- Мы изучили следующие *алгоритмы*:
  — алгоритм отыскания координат точки M, заданной в прямоугольной системе координат xOy;
  — алгоритм построения точки $M(a; b)$ в прямоугольной системе координат xOy;
  — алгоритм построения графика линейного уравнения $ax + by + c = 0$.
- Мы научились:
  — строить прямые, заданные уравнениями $x = a$, $y = b$;
  — строить график уравнения $ax + by + c = 0$;
  — строить график линейной функции $y = kx$, $y = kx + m$;
  — составлять таблицу распределения данных.
- Мы познакомились с некоторыми понятиями статистической обработки данных: упорядоченный ряд данных, объём, размах, мода и медиана измерения.

Темы исследовательских работ

1. Задачи на координатной плоскости.
2. Линейные уравнения с двумя переменными и линейные функции как математические модели реальных ситуаций.
3. Упорядоченные ряды данных. Медиана ряда данных.

3 ГЛАВА СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 13 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1 Понятие о системе уравнений и её решении

В § 9 мы ввели понятие линейного уравнения с двумя переменными — так называют равенство $ax + by + c = 0$, где a, b, c — конкретные числа, а x, y — переменные (неизвестные).

Примеры линейных уравнений с двумя переменными:

$$2x - 3y + 1 = 0;$$
$$x + y - 3 = 0;$$
$$s - 5t + 4 = 0$$

(здесь переменные обозначены по-другому: s, t — но это роли не играет).

В том же § 9 мы ввели понятие решения линейного уравнения с двумя переменными — так называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by + c = 0$ в верное числовое равенство. На первом месте всегда пишут значение переменной x, на втором — значение переменной y.

Приведём примеры:

1. $(2; 3)$ — решение уравнения $5x + 3y - 19 = 0$. В самом деле, $5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 19 = 0$ — верное числовое равенство.

2. $(-4; 2)$ — решение уравнения $3x - y + 14 = 0$. Действительно, $3 \cdot (-4) - 2 + 14 = 0$ — верное числовое равенство.

3. $\left(0; -\frac{7}{3}\right)$ — решение уравнения $-0{,}4x + 3y + 7 = 0$. Имеем $-0{,}4 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 7 = 0$ — верное числовое равенство.

4. $(1; 2)$ не является решением уравнения $2x - 3y + 1 = 0$. В самом деле, $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 = 0$ — неверное числовое равенство (получается, что $-3 = 0$).

В § 10 мы отмечали, что математическую модель $ax + by + c = 0$ при $b \neq 0$ можно заменить более простой: $y = kx + m$. Например, уравнение $3x - 4y + 12 = 0$ можно преобразовать к виду $y = \frac{3}{4}x + 3$.

Графиком линейного уравнения $ax + by + c = 0$, если хотя бы один из коэффициентов a, b отличен от нуля (случай $a = 0$, $b = 0$ мы рассматривать в этой главе не будем), является прямая (см. § 9). Координаты любой точки этой прямой удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, т. е. являются решениями уравнения. Сколько же решений имеет уравнение $ax + by + c = 0$? Столько же, сколько точек расположено на прямой, служащей графиком уравнения $ax + by + c = 0$, т. е. бесконечно много.

Многие реальные ситуации при переводе на математический язык оформляются в виде математической модели, состоящей из двух линейных уравнений с двумя переменными. С такой ситуацией мы встретились в задаче про двух садоводов (пример 6, § 9). Математическая модель состояла из двух уравнений: $5x - 2y = 0$ и $3x + 2y - 16 = 0$, причём нас интересовала такая пара значений $(x; y)$, которая *одновременно* удовлетворяла и тому и другому уравнению. В таких случаях обычно не говорят, что математическая модель состоит из двух уравнений, а говорят, что *математическая модель представляет собой систему уравнений.*

система уравнений

решение системы уравнений

Вообще, если даны два линейных уравнения с двумя переменными x и y: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ — и поставлена задача найти такие пары значений $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют и тому и другому уравнению, то говорят, что заданные уравнения образуют **систему уравнений.** Уравнения системы записывают друг под другом и объединяют специальным символом — фигурной скобкой:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пару значений $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнений системы, называют **решением системы уравнений**.

Решить систему — это значит найти все её решения или установить, что их нет.

Теперь мы можем сказать, что встречались с системой линейных уравнений — математическая модель уже упомянутой задачи про садоводов из § 9 выглядела так:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Её решением была пара (2; 5), т. е. $x = 2$, $y = 5$.

2 Графический метод решения системы уравнений

ПРИМЕР 1

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решение Графиком уравнения $x + 2y - 5 = 0$ является прямая. Найдём две пары значений переменных x, y, удовлетворяющих этому уравнению. Если $y = 0$, то из уравнения $x + 2y - 5 = 0$ находим $x = 5$. Если $x = 0$, то из уравнения $x + 2y - 5 = 0$ находим $y = 2,5$. Итак, нашли две точки (5; 0) и (0; 2,5). Построим на координатной плоскости xOy прямую, проходящую через эти две точки, — прямая l_1 на рисунке 74.

Графиком уравнения $2x + 4y + 3 = 0$ также является прямая. Найдём две пары значений переменных x, y, удовлетворяющих этому уравнению. Если $y = 0$, то из уравнения $2x + 4y + 3 = 0$ находим $x = -1,5$. Если $x = 2,5$, то из уравнения $2x + 4y + 3 = 0$ находим $5 + 4y + 3 = 0$ и, следовательно, $y = -2$. Итак, нашли две точки (−1,5; 0) и (2,5; −2). Построим на координатной плоскости xOy прямую, проходящую через эти две точки, — прямая l_2 на рисунке 74.

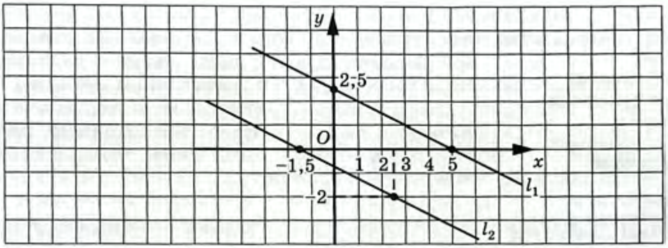


Рис. 74

Прямые l_1 и l_2 параллельны. Что означает этот геометрический факт для данной системы уравнений? То, что она не имеет решений (поскольку нет точек, удовлетворяющих одновременно и тому и другому уравнению, т. е. принадлежащих одновременно и той и другой из построенных прямых l_1 и l_2).

Ответ Система не имеет решений.

ПРИМЕР 2

Найти два числа, если известно, что их сумма равна 39, а разность равна 11.

Решение Если x, y — искомые числа, то $x + y = 39$ и $x - y = 11$, причём эти равенства должны выполняться одновременно:

$$\begin{cases} x + y = 39, \\ x - y = 11. \end{cases} \qquad (4)$$

Получили систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

Можно угадать, чему равны x и y: $x = 25$, $y = 14$. Но, во-первых, «метод угадывания» далеко не всегда применим на практике. А во-вторых, где гарантия, что иного решения нет, может быть, мы просто до него не додумались, не «доугадали»?

Можно построить графики уравнений $x + y = 39$ и $x - y = 11$, это прямые, причём непараллельные (в отличие от тех, что в примере 1), они пересекаются в одной точке. Эту точку мы уже знаем: (25; 14); значит, это единственная пара чисел, которая нас устраивает, единственное решение системы.

Ответ 25 и 14.

графический метод решения системы двух линейных уравнений

В примерах 1 и 2 мы применили **графический метод** решения системы линейных уравнений. Этим же методом мы пользовались в § 9 при решении задачи о числе яблонь у двух садоводов (система (2) решена в § 9 графическим методом).

К сожалению, графический метод, как и «метод угадывания», не самый надёжный: например, прямые могут пересечься в точке, координаты которой по чертежу не очень легко определить.

ПРИМЕР 3

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Решение Построим графики уравнений системы. Здесь есть смысл преобразовать оба уравнения к виду линейной функции.

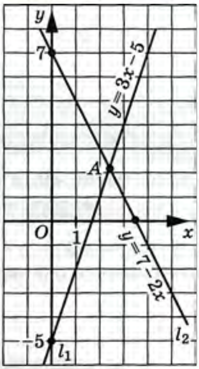


Рис. 75

Из первого уравнения получаем $y = 3x - 5$, а из второго $y = 7 - 2x$.

Построим в одной системе координат графики линейных функций $y = 3x - 5$ (прямая l_1 на рис. 75) и $y = 7 - 2x$ (прямая l_2 на рис. 75). Они пересекаются в точке A, координаты которой — единственное решение заданной системы. А вот чему конкретно равны абсцисса и ордината точки A, мы по рисунку 75 точно определить не сможем (точка A как бы «висит» внутри определённой клеточки). Придётся нам позднее вернуться к этому примеру.

несовместная система

неопределённая система уравнений

Но всё-таки графический метод решения системы линейных уравнений имеет большое значение. С его помощью можно сделать следующие важные *выводы*:

- графиками обоих уравнений системы (1) являются прямые;
- эти прямые могут пересекаться, причём только в одной точке, — это значит, что система (1) имеет единственное решение (так было в рассмотренных в этом параграфе системах (2), (4), (5));
- эти прямые могут быть параллельны — это значит, что система не имеет решений (говорят также, что система **несовместна** — такой была система (3));

• эти прямые могут совпасть — это значит, что система имеет бесконечно много решений (говорят также, что система **неопределённа**).

Итак, мы познакомились с новой математической моделью (1) — системой двух линейных уравнений с двумя переменными. Наша задача — научиться её решать. «Метод угадывания» ненадёжен, графический метод также выручает не всегда. Значит, нам нужно располагать надёжными алгебраическими методами решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Об этом и пойдёт речь в следующих параграфах.

Вопросы для самопроверки

1. Подберите три решения уравнения $x + 2y - 9 = 0$.
2. Что такое система двух линейных уравнений с двумя переменными?
3. Что называют решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными?
4. Придумайте систему двух линейных уравнений с двумя переменными, которая имеет своим решением пару: а) $(0; -1)$; б) $(3; 0)$; в) $(1; 2)$.
5. Придумайте систему двух линейных уравнений, которая не имеет решений.
6. Расскажите, как графически решить систему двух линейных уравнений с двумя переменными, которая составлена вами в задании 4в).
7. Что такое неопределённая система уравнений?
8. Что такое несовместная система уравнений?

§ 14 МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Вернёмся ещё раз к системе (2) из § 13:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases}$$

Мы её решили графическим методом в § 9 и знаем, что $x = 2$, $y = 5$ — единственное решение этой системы. А теперь решим ту же систему другим способом.

Первое уравнение преобразуем к виду $2y = 5x$, т. е. $y = 2{,}5x$. Второе уравнение преобразуем к виду $2y = 16 - 3x$ и далее

$y = 8 - 1{,}5x$ (все коэффициенты уравнения $2y = 16 - 3x$ разделили на 2). Теперь систему можно переписать так:

$$\begin{cases} y = 2{,}5x, \\ y = 8 - 1{,}5x. \end{cases}$$

Ясно, что нас интересует такое значение x, при котором $2{,}5x = 8 - 1{,}5x$. Из этого уравнения находим:

$$2{,}5x + 1{,}5x = 8;$$
$$4x = 8;$$
$$x = 2.$$

Если $x = 2$, то из уравнения $y = 2{,}5x$ получим $y = 5$. Итак, $(2; 5)$ — решение системы (что, напомним, нам уже было известно).

Чем эти рассуждения отличаются от тех, что мы применяли в § 9? Тем, что никаких графиков строить не пришлось, вся работа шла на алгебраическом языке. Как же мы рассуждали?

Мы выразили y через x из первого уравнения и получили $y = 2{,}5x$. Затем подставили выражение $2{,}5x$ вместо y во второе уравнение; получили $2{,}5x = 8 - 1{,}5x$. Далее решили это уравнение относительно x; получили $x = 2$. Наконец, по формуле $y = 2{,}5x$ нашли соответствующее значение y. И вот что важно: во втором уравнении совсем не обязательно было выражать y через x, можно было подставить $2{,}5x$ вместо y в заданное уравнение $3x + 2y - 16 = 0$. Смотрите:

$$3x + 2 \cdot 2{,}5x - 16 = 0;$$
$$3x + 5x = 16;$$
$$8x = 16;$$
$$x = 2.$$

а:я

метод подстановки

Подобный метод рассуждений называют обычно **методом подстановки**. Он представляет собой определённую последовательность шагов, т. е. некоторый алгоритм.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ МЕТОДОМ ПОДСТАНОВКИ

1. Выразить y через x из первого уравнения системы.
2. Подставить полученное на первом шаге выражение вместо y во второе уравнение системы.
3. Решить полученное на втором шаге уравнение относительно x.
4. Подставить найденное на третьем шаге значение x в выражение y через x, полученное на первом шаге.
5. Записать ответ в виде пары значений $(x; y)$, которые были найдены соответственно на третьем и четвёртом шагах.

ПРИМЕР 1

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение 1) Из первого уравнения системы получаем

$$y = 3x - 5.$$

2) Подставим найденное выражение вместо y во второе уравнение системы:

$$2x + (3x - 5) - 7 = 0.$$

3) Решим полученное уравнение:

$$2x + 3x - 5 - 7 = 0;$$
$$5x - 12 = 0;$$
$$5x = 12;$$
$$x = \frac{12}{5}.$$

4) Подставим найденное значение x в формулу $y = 3x - 5$:

$$y = 3 \cdot \frac{12}{5} - 5 = \frac{36}{5} - 5 = \frac{36 - 25}{5} = \frac{11}{5}.$$

5) Пара $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{11}{5}$ — единственное решение заданной системы.

Ответ $\left(\frac{12}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Вы узнали эту систему? Мы с ней встретились в предыдущем параграфе (система (5)), пробовали решить её графическим методом, и у нас ничего не получилось. Зато метод подстановки нас выручил. Он активно применяется и в более сложных системах уравнений, не обязательно линейных; о таких системах речь впереди — в старших классах. Этот метод, быть может, не всегда эффективен (т. е. не всегда быстро приводит к цели), но достаточно надёжен.

Вернёмся к рассмотренному алгоритму из пяти шагов, в котором описан метод подстановки. У вас не возник вопрос, почему y выражают именно из первого уравнения и подставляют во второе, почему не выразить y из второго уравнения и подставить в первое? И вообще, почему выражали y через x, а не x через y, почему такое неравноправие? Ответ: никакой причины нет, просто ищите наиболее удобный вариант.

ПРИМЕР 2

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 3y + 8 = 0, \\ x + 12y = 11. \end{cases}$$

Решение

1) Выразим x через y из второго уравнения:

$$x = 11 - 12y.$$

2) Подставим найденное выражение вместо x в первое уравнение системы:

$$5(11 - 12y) - 3y + 8 = 0.$$

3) Решим полученное уравнение:

$$55 - 60y - 3y + 8 = 0;$$
$$63 - 63y = 0;$$
$$63y = 63;$$
$$y = 1.$$

4) Подставим найденное значение y в формулу $x = 11 - 12y$:

$$x = 11 - 12 \cdot 1 = -1.$$

5) Пара $x = -1$, $y = 1$ — единственное решение заданной системы.

Ответ $(-1; 1)$.

Вопросы для самопроверки

1. Расскажите, в чём суть метода подстановки при решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными.
2. Опишите алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными методом подстановки на примере решения системы $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$

§15 МЕТОД АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СЛОЖЕНИЯ

1 Понятие о методе алгебраического сложения

Мы довольно часто возвращаемся к тому, что уже обсудили ранее, например для того, чтобы рассмотреть ситуацию под другим углом зрения. Вот и теперь давайте вернёмся к примеру 1 из § 14, где речь шла о решении системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Как мы решали эту систему? Мы выразили y из первого уравнения и подставили результат во второе, что привело к уравнению с одной переменной x, т. е. фактически к временному исключению из рассмотрения переменной y. Но исключить y из рассмотрения можно было значительно проще — достаточно сложить оба уравнения системы (сложить уравнения — это значит по отдельности составить сумму левых частей, сумму правых частей уравнений и полученные суммы приравнять):

$$+\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{(3x - y - 5) + (2x + y - 7) = 0 + 0;}$$

$$5x - 12 = 0;$$

$$x = \frac{12}{5}.$$

Затем можно было найденное значение x подставить в любое уравнение системы, например в первое, и найти y:

$$3 \cdot \frac{12}{5} - y - 5 = 0;$$

$$\frac{36}{5} - 5 = y;$$

$$y = \frac{11}{5}.$$

Попробуем применить аналогичные рассуждения ещё для нескольких систем линейных уравнений с двумя переменными.

ПРИМЕР 1

Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 5x + 3y = 7. \end{cases}$

Решение 1) Вычтем второе уравнение из первого:

$$-\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\overline{(2x + 3y) - (5x + 3y) = 1 - 7;}$$

$$2x + 3y - 5x - 3y = -6;$$

$$-3x = -6;$$

$$x = 2.$$

2) Подставим найденное значение $x = 2$ в первое уравнение заданной системы, т. е. в уравнение $2x + 3y = 1$:

$$2 \cdot 2 + 3y = 1;$$
$$3y = 1 - 4;$$
$$3y = -3;$$
$$y = -1.$$

3) Пара $x = 2$, $y = -1$ — решение заданной системы.

Ответ $(2; -1)$.

ПРИМЕР 2

Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

Решение Здесь сразу исключить переменную x или переменную y из обоих уравнений с помощью сложения или вычитания уравнений не удастся. Нужен подготовительный этап. Сначала умножим все члены первого уравнения системы на 3, а все члены второго уравнения — на 4. Получим $\begin{cases} 9x - 12y = 15, \\ 8x + 12y = 28. \end{cases}$

Теперь можно сложить уравнения, что приведёт к исключению переменной y. Имеем $17x = 43$, т. е. $x = \frac{43}{17}$.

Подставим найденное значение x во второе уравнение исходной системы, т. е. в уравнение $2x + 3y = 7$:

$$2 \cdot \frac{43}{17} + 3y = 7;\ 3y = 7 - \frac{86}{17};\ 3y = \frac{119 - 86}{17};\ 3y = \frac{33}{17};\ y = \frac{11}{17}.$$

Ответ $\left(\frac{43}{17}; \frac{11}{17}\right)$.

Краткая запись приведённого решения:

$$+\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{matrix} \right.$$
$$\overline{3(3x - 4y) + 4(2x + 3y) = 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4.}$$

Далее находим $17x = 43$, $x = \frac{43}{17}$ и т. д.

метод алгебраического сложения

Здесь справа от вертикальной черты записаны дополнительные множители, с помощью которых удалось уравнять абсолютные величины коэффициентов при переменной y в обоих уравнениях системы.

Метод, который мы обсудили в этом параграфе, называют **методом алгебраического сложения**.

2 Более сложные примеры

ПРИМЕР 3

На координатной плоскости построить прямую, проходящую через точки $A(2;\ 3)$ и $B(-2;\ -9)$, и составить её уравнение.

Решение Искомая прямая проведена на рисунке 76. Её уравнение будем искать в виде $y = kx + m$. Поскольку точка $A(2;\ 3)$ принадлежит прямой, получаем соотношение $3 = 2k + m$. Поскольку точка $B(-2;\ -9)$ принадлежит прямой, получаем соотношение $-9 = -2k + m$. Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений $\begin{cases} 2k + m = 3, \\ -2k + m = -9. \end{cases}$

Сложив уравнения системы, получим $2m = -6$, $m = -3$. Если из первого уравнения системы вычесть второе, получим $4k = 12$, $k = 3$.

Итак, $k = 3$, $m = -3$, т. е. уравнение прямой таково: $y = 3x - 3$.

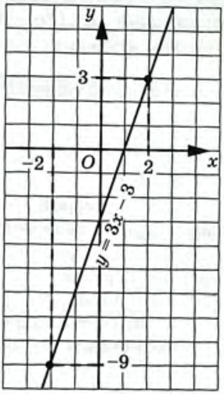


Рис. 76

ПРИМЕР 4

Решить уравнение $(2x + 3y + 1)^4 + (3x - 4y - 24)^2 = 0$.

Решение В левой части уравнения содержится сумма двух выражений, каждое из которых принимает только неотрицательные значения. Эта сумма равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из выражений равно нулю. Это значит, что задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x - 4y - 24 = 0. \end{cases}$

Умножив обе части первого уравнения на 4, а обе части второго уравнения — на 3 и сложив полученные уравнения, придём к уравнению $17x - 68 = 0$, откуда находим $x = 4$. При этом значении x первое уравнение системы принимает вид $8 + 3y + 1 = 0$, откуда находим $y = -3$.

Ответ $x = 4$, $y = -3$.

ПРИМЕР 5

Найти целочисленные решения уравнения:
а) $100(3x + 5y - 22)^2 + (3y - 3x)^2 = 36$;
б) $3(2x + 3y)^2 + 5(4x + 5y)^2 = 8$.

Решение а) Если $3x + 5y - 22$ принимает целочисленное значение, отличное от нуля, то выражение $100(3x + 5y - 22)^2$ уж во всяком случае не меньше 100. Если к нему прибавить неотрицательное число $(3y - 3x)^2$, то 36 никак не получится. Что это значит? Это значит, что обязательно должно выполняться соотношение $3x + 5y - 22 = 0$. Но тогда заданное уравнение принимает вид $(3y - 3x)^2 = 36$ и далее $9(y - x)^2 = 36$; $(y - x)^2 = 4$. Значит, либо $y - x = 2$, либо $y - x = -2$.

Таким образом, задача сводится к решению двух систем уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 22 = 0, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y - 22 = 0, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x = 4$, $y = 2$; из второй — $x = 1{,}5$, $y = 3{,}5$. Второе решение нас не устраивает, ведь в задаче требуется найти целочисленные решения уравнения. Итак, уравнение имеет лишь одну пару целочисленных решений: $x = 4$, $y = 2$.

б) Если a и b — неотрицательные целые числа, то равенство $3a + 5b = 8$ может выполняться тогда и только тогда, когда $a = 1$, $b = 1$. Для заданного уравнения это означает, что должны одновременно выполняться два соотношения:

$$(2x + 3y)^2 = 1 \text{ и } (4x + 5y)^2 = 1.$$

Таким образом, задача сводится к решению четырёх систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 4x + 5y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 4x + 5y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 5y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 5y = -1. \end{cases}$$

Получаем соответственно: $(-1; 1)$, $(-4; 3)$, $(4; -3)$, $(1; -1)$.

ПРИМЕР 6

Найти такие пары натуральных чисел x и y, которые являются решениями двух и только двух из данных уравнений: 1) $3x + 4y = 65$, 2) $4x + 3y = 60$, 3) $5x - 2y = 13$.

Решение Рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений: $\begin{cases} 3x + 4y = 65, \\ 4x + 3y = 60. \end{cases}$ Решив её, получим $x = \frac{45}{7}$, $y = \frac{80}{7}$.

Это нас не устраивает.

Рассмотрим систему, состоящую из второго и третьего уравнений: $\begin{cases} 4x + 3y = 60, \\ 5x - 2y = 13. \end{cases}$ Она также не имеет натуральных решений.

Осталось рассмотреть систему, состоящую из первого и третьего уравнений: $\begin{cases} 3x + 4y = 65, \\ 5x - 2y = 13. \end{cases}$ Решив её, получим $x = 7$, $y = 11$. Это нас устроит, если найденная пара натуральных чисел не удовлетворяет второму уравнению. Подставив найденные значения во второе уравнение, получим $28 + 33 = 60$ — неверное равенство. Значит, пара (7; 11) удовлетворяет всем требованиям задачи.

Ответ (7; 11).

Вопросы для самопроверки

1. Расскажите, в чём суть метода алгебраического сложения при решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными.
2. Прокомментируйте метод алгебраического сложения на примере решения системы:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 3y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

§ 16 СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

Собственно говоря, ничего особенно нового вы в этом параграфе не узнаете. Ведь вам уже известно, что реальная ситуация может быть описана на математическом языке в виде математической модели, представляющей собой систему двух линейных уравнений с двумя переменными. Так было в § 9 в ситуации с садоводами Ивановым и Петровым. Так было и в примере 2 из § 13. Поэтому теоретический разговор, соответствующий названию параграфа, можно считать законченным. А вот с практической точки зрения обсуждение новых ситуаций полезно. Этим и займёмся.

ПРИМЕР 1

В седьмом классе в понедельник не пришли в школу одна девочка и пять мальчиков. При этом число девочек в классе оказалось в 2 раза больше числа мальчиков. Во вторник не пришли один мальчик и девять девочек. При этом число мальчиков оказалось в 1,5 раза больше числа девочек. В среду на уроки пришли все ученики. Сколько школьников присутствовало на уроках в среду в седьмом классе?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Пусть x — число девочек, y — число мальчиков в седьмом классе.

В понедельник было $(x - 1)$ девочек, $(y - 5)$ мальчиков. При этом оказалось, что девочек вдвое больше, т. е.

$$x - 1 = 2(y - 5).$$

Во вторник было $(x - 9)$ девочек, $(y - 1)$ мальчиков. При этом оказалось, что мальчиков в 1,5 раза больше, т. е.

$$y - 1 = 1{,}5(x - 9).$$

Математическая модель ситуации составлена:

$$\begin{cases} x - 1 = 2(y - 5), \\ y - 1 = 1{,}5(x - 9). \end{cases}$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Сначала упростим каждое уравнение системы. Для первого уравнения имеем:

$$x - 1 = 2(y - 5);$$
$$x - 1 = 2y - 10;$$
$$x - 2y + 9 = 0.$$

Для второго уравнения имеем:

$$y - 1 = 1{,}5(x - 9);$$
$$2(y - 1) = 3(x - 9)$$

(обе части уравнения умножили на 2); далее

$$2y - 2 = 3x - 27;$$
$$3x - 2y - 25 = 0.$$

Итак, получили следующую систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} x - 2y + 9 = 0, \\ 3x - 2y - 25 = 0 \end{cases}$$

(скорректированная математическая модель рассматриваемой ситуации).

Решим эту систему двумя способами.

Первый способ. Применим метод подстановки. Из первого уравнения системы находим $x = 2y - 9$. Подставим этот результат вместо x во второе уравнение системы. Получим:

$$3(2y - 9) - 2y - 25 = 0;$$
$$4y = 52;$$
$$y = 13.$$

Так как $x = 2y - 9$, то $x = 2 \cdot 13 - 9 = 17$.

Итак, $x = 17$, $y = 13$ — решение системы.

Второй способ. Применим метод алгебраического сложения:

$$-\begin{cases} x - 2y + 9 = 0 \\ 3x - 2y - 25 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{(x - 2y + 9) - (3x - 2y - 25) = 0 - 0;}$$
$$x - 2y + 9 - 3x + 2y + 25 = 0;$$
$$-2x + 34 = 0;$$
$$x = 17.$$

Подставим найденное значение x в первое уравнение системы, т. е. в уравнение $x - 2y + 9 = 0$:

$$17 - 2y + 9 = 0;$$
$$y = 13.$$

Итак, $x = 17$, $y = 13$ — решение системы.

Второй этап мы завершили (решили полученную систему, причём даже двумя способами).

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, сколько школьников было в седьмом классе на уроках в среду, когда пришли все ученики. Поскольку $x = 17$, $y = 13$, т. е. в классе было 17 девочек и 13 мальчиков, делаем вывод: всего в классе $17 + 13 = 30$ учеников.

Ответ 30 учеников.

Вы, конечно, понимаете, что для решения конкретной системы уравнений надо выбирать тот способ, который представляется для данного случая наиболее уместным, или тот, который вам больше нравится (т. е. вы можете использовать графический метод, метод подстановки или метод алгебраического сложения — это ваше дело). Составленную в рассмотренной задаче систему мы решили двумя способами, чтобы повторить методы подстановки и алгебраического сложения и сопоставить эти методы друг с другом.

ПРИМЕР 2

Если двузначное число A разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Если число B, записанное теми же цифрами, что число A, но в обратном порядке, разделить на разность его цифр, то в частном получится 18 и в остатке 1. Найти число A, если известно, что $A < B$ и что рассматриваемая разность цифр является натуральным числом.

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

В условии задачи дважды говорится о делении с остатком. Например, если 35 разделить на 4, то в частном получится 8 и в остатке 3. Имеет место следующее равенство: $35 = 8 \cdot 4 + 3$. Этот пример позволит вам вспомнить формулу деления с остатком: если a — делимое, b — делитель, q — частное, r — остаток, то $a = bq + r$.

Пусть x — цифра десятков, а y — цифра единиц числа A. Тогда само число имеет вид $10x + y$. Если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Это значит, что $10x + y = 3(x + y) + 7$.

Число B, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, имеет вид $10y + x$. Его предлагается разделить на разность цифр. Но какую разность взять: $x - y$ или $y - x$?

Эта разность должна быть натуральным числом, значит, всё зависит от того, какая из цифр больше. Для этого в условии задачи есть подсказка: $A < B$; это значит, что у числа A цифра десятков меньше цифры единиц, а потому в качестве разности цифр придётся взять $y - x$. По условию если число B разделить на разность цифр, то в частном получится 18 и в остатке 1. Это значит, что $10y + x = 18(y - x) + 1$.

Таким образом, получаем систему уравнений — математическую модель задачи:

$$\begin{cases} 10x + y = 3(x + y) + 7, \\ 10y + x = 18(y - x) + 1. \end{cases}$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Несколько упростим полученную систему уравнений

$$\begin{cases} 7x - 2y = 7, \\ 19x - 8y = 1. \end{cases}$$

Эту систему удобно решить методом алгебраического сложения:

$$-\begin{cases} 28x - 8y = 28 \\ 19x - 8y = 1 \end{cases}$$

$$9x = 27.$$

Значит, $x = 3$. Из уравнения $7x - 2y = 7$ находим, что тогда $y = 7$. Система решена.

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Он фактически уже получен: поскольку $x = 3$, а $y = 7$, искомое число есть 37.

Ответ 37.

В примерах 3 и 4, ради краткости, мы не будем явно выделять три этапа математического моделирования при решении текстовой задачи. Кроме того, меньшее внимание будем уделять технической стороне дела — решению системы линейных уравнений; надеемся, вы справитесь с этим без нашей помощи.

ПРИМЕР 3

По окружности, длина которой равна 100 см, равномерно движутся две точки. Двигаясь в противоположных направлениях, они встречаются каждые 4 с, а двигаясь в одном направлении — каждые 20 с. Найти скорости движения обеих точек.

Решение Пусть x см/с — скорость движения первой точки, y см/с — скорость движения второй точки; положим для определённости, что $x > y$. Двигаясь в противоположных направлениях, т. е. навстречу друг другу, они встречаются каждые 4 с; это значит, что за 4 с они в сумме пройдут путь, равный длине окружности:

$$4x + 4y = 100, \text{ т. е. } x + y = 25.$$

Представим себе теперь, что, стартуя из одной и той же точки окружности, они двинулись в одном направлении. Когда произойдёт их новая встреча? Тогда, когда первая точка, которая по условию движется быстрее, догонит вторую, т. е. пройдёт путь больший, чем вторая точка, ровно на длину окружности, т. е. на 100 см. Первая точка догоняет вторую со скоростью $(x - y)$ см/с. Значит, $20(x - y) = 100$, т. е. $x - y = 5$.

В итоге мы пришли к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 15$, $y = 10$.

Ответ 15 см/с, 10 см/с.

ПРИМЕР 4

Имеются два раствора соли — 40%-ный и 60%-ный. Их смешали, добавили 5 л воды и получили 20%-ный раствор. Если бы вместо воды добавили 5 л 80%-ного раствора соли, то получился бы 70%-ный раствор. Сколько было 40%-ного и 60%-ного растворов?

Решение Предположим, что было x л 40%-ного раствора и y л 60%-ного раствора. Количество чистой соли в первом растворе выражается формулой $\frac{40}{100}x$, т. е. $\frac{2}{5}x$ л; количество чистой соли во втором растворе выражается формулой $\frac{60}{100}y$, т. е. $\frac{3}{5}y$ л. Их смешали, добавили 5 л воды и получили $(x + y + 5)$ л 20%-ного раствора. Количество чистой соли в этом третьем растворе выражается формулой $\frac{20}{100}(x + y + 5)$, т. е. $\frac{1}{5}(x + y + 5)$ л. Но, с другой стороны, это количество складывается из соли в первом растворе и из соли во втором растворе. Значит,

$$\frac{1}{5}(x + y + 5) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y;\ x + y + 5 = 2x + 3y;\ x + 2y = 5.$$

А что получилось бы, если добавили 5 л 80%-ного раствора? Количество чистой соли в гипотетическом 70%-ном растворе выражается формулой $\frac{70}{100}(x + y + 5)$, т. е. $\frac{7}{10}(x + y + 5)$ л. Но, с другой стороны, это количество складывается из соли в первом растворе, из соли во втором растворе и из соли, содержащейся в 5 л 80%-ного раствора. Значит,

$$\frac{7}{10}(x + y + 5) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{80}{100}\cdot 5.$$

Далее имеем: $7(x + y + 5) = 4x + 6y + 40$; $3x + y = 5$.

В итоге мы пришли к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + y = 5. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 1$, $y = 2$.

Ответ 1 л 40%-ного раствора и 2 л 60%-ного раствора.

Вопросы для самопроверки

1. Придумайте задачу, математической моделью которой является система двух линейных уравнений с двумя переменными. Составьте соответствующую математическую модель.
2. Решите систему уравнений, полученную в п. 1, методом подстановки и методом алгебраического сложения. Сравните получившиеся у вас ответы при решении системы уравнений.

§17[1] НЕЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ ДАННЫХ

Вот список команд, получивших серебряные медали на чемпионатах мира по футболу с 1930 по 2014 гг.: Аргентина, Чехословакия[2], Венгрия, Бразилия, Венгрия, Швеция, Чехословакия, ФРГ[3], Италия, Нидерланды, Нидерланды, ФРГ, ФРГ, Аргентина, Италия, Бразилия, Германия, Франция, Нидерланды, Аргентина. Этот список (этот ряд) состоит из 20 данных: именно столько к 2015 г. было проведено чемпионатов мира по футболу. Значит, объём ряда равен 20. Можно составить и таблицу распределения.

Аргентина	Бразилия	Венгрия	Германия= ФРГ	Италия	Нидерланды	Франция	Чехословакия	Швеция
3	2	2	4	2	3	1	2	1

В ней подсчитано, что Швеция и Франция встретились по одному разу, немецкая команда (мода ряда) — четыре раза, Нидерланды, Аргентина — трижды, а все остальные команды из списка — дважды. Можно посчитать соответствующие доли, процентные доли, нарисовать круговую диаграмму и т. п. Но нам сейчас важнее, что получился не числовой, а *номинативный ряд* данных: мы «измерили» данные не в числах, а в именах, в названиях, в *номинациях*[4]. Это новый для нас тип статистических данных, который в окружающей действительности встречается ничуть не реже, чем числовые ряды. Отметим, что в дополнении к главе 2, в примере 2 мы работали с рядом даже смешанного типа, в котором были и числа (2, 3, 4, 5), и буква «н».

номинативный ряд

[1] Параграф написан П. В. Семеновым.

[2] Чехословакия — страна, до 1991 г. объединявшая нынешние Чехию и Словакию.

[3] ФРГ (Федеративная Республика Германия) — западная часть Германии с 1949 по 1990 гг.

[4] Слово *номинация*, наверное, знакомо вам по разнообразным конкурсам. В них награждение происходит, как правило, по более специальным номинациям, каждая из которых имеет своё название. Например, «Самый быстрый», «Самый весёлый» и т. п.

ПРИМЕР 1

Даны четыре прямые l, m, p, q, заданные соответственно уравнениями $y = 3$, $x - y = 0$, $x + y = 1$, $x = -2$, и точки $A(1;\ 1)$, $B(-3;\ 3)$, $C(6;\ -5)$, $D(33;\ 3)$, $E(-3;\ 4)$, $F(-2;\ -22)$, $G(1;\ 0)$, $H(0;\ 1)$, $J(-2;\ 0)$, $K(0{,}3;\ 0{,}7)$. Заполнить таблицу распределения точек по прямым, которым они принадлежат.

Решение Точка $A(1;\ 1)$ принадлежит только прямой m, так как её координаты удовлетворяют уравнению $x - y = 0$ и не удовлетворяют остальным уравнениям. Точка $B(-3;\ 3)$ принадлежит только прямой l, так как её координаты удовлетворяют уравнению $y = 3$ и не удовлетворяют остальным уравнениям. Чтобы не потерять информацию при переборе остальных точек, вставим в таблицу распределения вспомогательную строчку «Какие точки лежат на прямой». Получаем следующую таблицу.

Прямая	l	m	p	q
Какие точки лежат на прямой	B, D	A	C, E, G, H, K	F, J
Сколько точек лежит на прямой	2	1	5	2

По составленной таблице можно легко получить разнообразные сведения о распределении данных точек по данным прямым. Например, объём равен 10, мода — это прямая p, на ней лежат 5 точек, процентная доля моды равна 50 % и т. п. Формально для ответа на поставленный вопрос можно удалить среднюю строчку и оставить только первую и последнюю. Но этого можно и не делать, чтобы не терять уже найденную информацию. Кроме того, средняя строка полезна при проверке ответа и контроле за возможными ошибками.

В следующем примере мы будем работать с текстом правила подсчёта вероятности, с которым вы познакомились в 6-м классе.

Правило подсчёта вероятности Вероятность случайного события равна дроби, в знаменателе которой содержится число всех равновероятных возможностей, из которых состоит достоверное событие, а в числителе — число тех возможностей, при которых рассматриваемое событие происходит.

ПРИМЕР 2

В приведённом правиле подсчёта вероятности от каждого слова оставили только первую букву.

а) Какой (буквенный) ряд получился?

б) Сколько раз в этом ряду встретилась буква «в»?

в) Составить упорядоченный по алфавиту ряд.
г) Составить соответствующую таблицу распределения.

Решение а) Поочерёдно выпишем все первые буквы. Получим в, с, с, р, д, в, з, к, с, ч, в, р, в, и, к, с, д, с, а, в, ч, ч, т, в, п, к, р, с, п.

б) Подчеркнём в нём поочерёдно все буквы «в». Получим 6 подчёркиваний:

в, с, с, р, д, в, з, к, с, ч, в, р, в, и, к, с, д, с, а, в, ч, ч, т, в, п, к, р, с, п.

в) Теперь переставим все буквы этого ряда в алфавитном порядке. Получим

а, в, в, в, в, в, в, д, д, з, и, к, к, к, п, п, р, р, р, с, с, с, с, с, с, т, ч, ч, ч.

г) При составлении упорядоченного ряда мы сосчитали всё, что нужно для заполнения таблицы распределения. В её первой строке стоят буквы: а, в, д, з, и, к, п, р, с, т, ч. Во второй строке стоят натуральные числа, равные количеству соответствующих букв. Получаем следующую таблицу

Первая буква слова	а	в	д	з	и	к	п	р	с	т	ч
Сколько слов начинается с этой буквы	1	6	2	1	1	3	2	3	6	1	3

Обратите внимание: и с буквы «в», и с буквы «с» начинается наибольшее количество слов в приведённом правиле (по шесть слов). Значит, здесь есть *две моды*. Такие распределения часто называют *бимодальными*. Приставка *би-* во многих случаях означает удвоение. Например, *бицепс* — двуглавая мышца.

бимодальное распределение

Вопросы для самопроверки

1. Результаты каких из перечисленных ниже измерений являются числовыми, номинативными, смешанными рядами данных?
   а) Рост семиклассников в сантиметрах;
   б) имена семиклассников;
   в) мировые рекорды (в секундах) в беге на 100 м;
   г) конечные пункты движения электричек;
   д) оценки в журнале за контрольную работу;
   е) перечень продаваемых на сайте квестов;
   ж) цены продаваемых на сайте компьютерных игр;
   з) количество промахов биатлониста на стрельбах лёжа и стоя в течение сезона.

2. Могут ли во второй строке таблицы распределения данных встретиться не числа, а символы?
3. Верно ли, что таблицу распределения можно заполнить, только составив до этого упорядоченный ряд?

Основные результаты

- В этой главе мы познакомились с новыми математическими *понятиями*:
  - — система двух линейных уравнений с двумя переменными;
  - — решение системы уравнений;
  - — несовместная система, неопределённая система уравнений.
- Мы познакомились с новой *математической моделью* — системой двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

- Мы с вами обсудили *три метода* решения систем линейных уравнений: графический метод, метод подстановки, метод алгебраического сложения.
- Мы узнали, что такое номинативный ряд данных и бимодальное распределение.

Темы исследовательских работ

1. Решение систем линейных уравнений методом подстановки.
2. Решение систем линейных уравнений методом алгебраического сложения.
3. Системы линейных уравнений как математические модели реальных ситуаций.
4. Нечисловые ряды данных. Таблица распределения данных.

4 ГЛАВА. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

§ 18 ЧТО ТАКОЕ СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Одна из особенностей математического языка, которым мы с вами должны научиться пользоваться, состоит в стремлении применять как можно более короткие записи. Математик не будет писать $a + a + a + a + a$, он напишет $5a$; не будет писать $a + a + a + a + a + a + a + a + a + a$ (здесь 10 слагаемых), а напишет $10a$; не будет писать $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}}$, а напишет na.

Точно так же математик не будет писать $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, а воспользуется специально придуманной короткой записью 2^5. Аналогично вместо произведения семи одинаковых множителей $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ он запишет 3^7. Конечно, в случае необходимости он будет двигаться в обратном направлении, например, заменит короткую запись 2^6 более длинной $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Если появляется новое обозначение, то возникают и новые термины. И всё это (и обозначения, и термины) охватывается новым определением. **Определением** обычно называют предложение, разъясняющее суть нового термина, нового слова, нового обозначения. Просто так определения не придумываются, они появляются только тогда, когда в этом возникает необходимость.

Определение 1

Под a^n, где $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, понимают произведение n одинаковых множителей, каждым из которых является число a. Выражение a^n называют **степенью**, число a — **основанием степени**, число n — **показателем степени**.

степень

основание степени

показатель степени

Подчеркнём ещё раз, что показатель степени — натуральное число (в старших классах мы снимем это ограничение); обычно говорят короче: *натуральный показатель*. Отсюда и происходит название как всей главы, так и этого параграфа.

Итак,

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n;$$

a^n — степень с натуральным показателем;

a — основание степени;

n — показатель степени.

Запись a^n читают так: «a в n-й степени». Исключение составляют запись a^2, которую читают «a в квадрате» (хотя можно читать и «a во второй степени»), и запись a^3, которую читают «a в кубе» (хотя можно читать и «a в третьей степени»).

ПРИМЕР 1

Записать в виде степени произведение

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

и использовать соответствующие термины.

Решение

Поскольку дано произведение шести одинаковых множителей, каждый из которых равен 5, имеем:

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$;

5^6 — степень;

5 — основание степени;

6 — показатель степени.

ПРИМЕР 2

Вычислить $(-2)^4$.

Решение $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16.$

Ответ 16.

ПРИМЕР 3

Вычислить $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Решение $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}.$

Ответ $\frac{8}{27}$.

Как вы думаете, полностью ли соответствует названию параграфа определение 1? Параграф называется «Что такое степень с натуральным показателем», т.е. имеется в виду, что в качестве показателя может фигурировать любое натуральное число. А любое ли натуральное число фигурирует в качестве показателя в определении 1? Как вы ответите на этот вопрос?

Ответим на этот вопрос вместе: мы говорили о степени a^n, где $n = 2, 3, 4, \ldots$, а вот случай, когда $n = 1$, пока упустили из виду («потеряли» одно натуральное число). Это упущение исправим с помощью нового определения.

Определение 2

Степенью числа a с показателем 1 называют само это число:

$$a^1 = a.$$

ПРИМЕР 4

Найти значение степени a^n при заданных значениях a и n:

а) $a = 2{,}5$, $n = 2$; д) $a = -1$, $n = 5$;

б) $a = \frac{1}{3}$, $n = 4$; е) $a = 0$, $n = 1$;

в) $a = -5$, $n = 1$; ж) $a = 0$, $n = 12$;

г) $a = -1$, $n = 4$; з) $a = 1$, $n = 17$.

Решение

а) $a^n = 2{,}5^2 = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$;

б) $a^n = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$;

в) $a^n = (-5)^1 = -5$;

г) $a^n = (-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$;

д) $a^n = (-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;

е) $a^n = 0^1 = 0$;

ж) $a^n = 0^{12} = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{12\text{ множителей}} = 0$;

з) $a^n = 1^{17} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{17\text{ множителей}} = 1$.

возведение в степень

Операцию отыскания степени a^n называют **возведением в степень**. В примере 4 мы рассмотрели восемь случаев возведения в степень.

ПРИМЕР 5

Вычислить $7^1 \cdot 3^2 \cdot (-2)^3$.

Решение

1) $7^1 = 7$;

2) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$;

3) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;

4) $7 \cdot 9 \cdot (-8) = -504$.

Ответ -504.

В рассмотренных примерах мы несколько раз возводили в степень отрицательные числа. Заметили ли вы закономерность: если отрицательное число возводится в *чётную* степень, то получается *положительное* число, если же отрицательное число возводится в *нечётную* степень, то получается *отрицательное* число? Попробуйте объяснить, почему это так.

Вопросы для самопроверки

1. Что означает символ a^n, где $n = 2, 3, 4, \ldots$?
2. Что означает символ a^1?
3. В записи 7^9 назовите, что является степенью, что основанием степени, что — показателем степени.
4. Запишите число 2^{12} в виде степени с другим основанием.

§ 19 ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ СТЕПЕНЕЙ

Вы знаете таблицу умножения, в неё включены произведения любых двух однозначных чисел ($3 \cdot 5$, $4 \cdot 7$ и т. д.), этой таблицей вы постоянно пользуетесь при вычислениях. На практике полезна и таблица степеней простых однозначных чисел (в пределах тысячи). Составим её.

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$5^1 = 5$	$7^1 = 7$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$	$7^3 = 343$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$	
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$		
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$		
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

С помощью этой таблицы можно находить и степени составных чисел (поэтому такие степени в таблицу обычно не включают). Например:

$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = (3 \cdot 3)(3 \cdot 3)(3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729.$$

ПРИМЕР 1

Известно, что $2^n = 128$, $3^k = 243$. Что больше: n или k?

Решение По таблице находим, что $128 = 2^7$, значит, $n = 7$. По таблице также находим, что $243 = 3^5$, значит, $k = 5$. Так как $7 > 5$, то $n > k$.

Ответ $n > k$.

Имеются ещё три числа, для которых легко составить таблицу степеней, особенно учитывая, что ничего вычислять не нужно и результат фактически известен заранее. Это числа 1, 0, –1, а таблица степеней для этих оснований выглядит следующим образом:

> $1^n = 1$ для любого n;
> $0^n = 0$ для любого n;
> если n — чётное число ($n = 2, 4, 6, 8, \ldots$), то $(-1)^n = 1$;
> если n — нечётное число ($n = 1, 3, 5, 7, \ldots$), то $(-1)^n = -1$.

Кстати, используя формулу чётного числа $n = 2k$ и формулу нечётного числа $n = 2k - 1$, можем записать, что

$$\boxed{(-1)^{2k} = 1;\ (-1)^{2k-1} = -1.}$$

А теперь выберем в качестве основания степени число 10:

$$10^1 = 10, \qquad 10^2 = 100, \qquad 10^3 = 1000.$$

Обратите внимание: каков показатель, столько нулей надо записать после цифры 1.

Вообще

$$10^n = 1\underbrace{000\ldots0}_{n\text{ нулей}}.$$

Например, $10^6 = 1\,000\,000$; напротив, $100\,000 = 10^5$.

ПРИМЕР 2

Найти значение выражения

$$\frac{a^{17} + b^{18} + c^{19}}{a^{18} - b^{37} + c^1} + \frac{(10c)^4}{(a+3)^4}$$

при $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$.

Решение 1) $\dfrac{a^{17} + b^{18} + c^{19}}{a^{18} - b^{37} + c^1} = \dfrac{(-1)^{17} + 0^{18} + 1^{19}}{(-1)^{18} - 0^{37} + 1^1} = \dfrac{-1 + 0 + 1}{1 - 0 + 1} = \dfrac{0}{2} = 0;$

2) $\dfrac{(10c)^4}{(a+3)^4} = \dfrac{(10 \cdot 1)^4}{(-1+3)^4} = \dfrac{10^4}{2^4} = \dfrac{10\,000}{16} = 625;$

3) $0 + 625 = 625.$

Ответ 625.

В заключение данного параграфа ещё раз отметим, что математики всегда стремятся к краткости записей, чёткости рассуждений. Поэтому, введя новое понятие, они начинают изучать его свойства, а затем применяют эти свойства на практике. О разных свойствах степени с натуральным показателем поговорим в следующем параграфе, а пока, забегая вперёд, заметим, что если бы одно из таких свойств мы уже знали, то не вычисляли бы так долго 9^3, как это было сделано выше. Мы бы записали так:

$$9^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729.$$

Видите, запись в два раза короче. А почему это так, узнаем в § 20.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равно значение выражения $(-1)^{2014}$? $(-1)^{2015}$?
2. Сколько нулей содержится в записи числа 10^{2016}?
3. Что больше: 0^{1000} или 1^{10}?
4. Что больше: 1^{1000} или 1000^1?

§ 20 СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1 Умножение степеней с одинаковыми основаниями

Бóльшая часть математических утверждений проходит в своём становлении три этапа.

На *первом этапе* человек в ряде конкретных случаев подмечает одну и ту же закономерность.

На *втором этапе* он пытается сформулировать подмеченную закономерность в общем виде, т. е. предполагает, что эта закономерность действует не только в рассмотренных случаях, но и во всех других аналогичных случаях.

На *третьем этапе* он пытается доказать, что закономерность, сформулированная (гипотетически) в общем виде, на самом деле верна.

Доказать какое-либо утверждение — это значит объяснить, почему оно верно (объяснить убедительно, а не так: «это верно потому, что это верно»). При доказательстве можно ссылаться только на уже известные факты (так мы действовали, например, при доказательстве теоремы 3 на с. 63).

Давайте попытаемся вместе пройти все три этапа, попробуем самостоятельно *открыть*, *сформулировать* и *доказать* свойства степеней, хорошо известные в математике.

Открытие первое

ПРИМЕР 1

Вычислить: а) $2^3 \cdot 2^5$; б) $3^1 \cdot 3^4$.

Решение а) $2^3 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\text{ множителя}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\text{ множителей}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8\text{ множителей}} = 256.$$

Всего имеется 8 одинаковых множителей, каждый из которых равен 2, т. е. 2^8, что по таблице (см. § 19) даёт 256.

б) $3^1 \cdot 3^4 = 3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = \underbrace{3}_{\text{1 множитель}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{4 множителя}} = 3^5 = 243.$

Ответ а) 256; б) 243.

В процессе решения примера мы заметили, что:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8, \text{ т. е. } 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5};$$
$$3^1 \cdot 3^4 = 3^5, \text{ т. е. } 3^1 \cdot 3^4 = 3^{1+4}.$$

Наблюдается закономерность: основания перемножаемых степеней одинаковы, при этом показатели складываются. *Первый этап* завершён.

На *втором этапе* осмелимся предположить, что мы открыли (для себя) *общую закономерность*: $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

ТЕОРЕМА 1

Для любого числа a и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

Обычно теорему формулируют так: если ... (условие), то ... (заключение). Например, теорему 1 можно (и, честно говоря, так было бы аккуратнее) сформулировать следующим образом:

если а — любое число и n, k — натуральные числа, то справедливо равенство

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

Первая часть утверждения, начиная со слова «если», — это условие теоремы; вторая часть утверждения, начиная со слова «то», — это заключение теоремы.

На *третьем этапе* надо доказать, что наше предположение верно, т. е. доказать теорему 1. Сделаем это.

Доказательство 1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$;

2) $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}}$;

3) $a^n \cdot a^k = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множителей}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{k \text{ множителей}} =$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+k \text{ множителей}} = a^{n+k}.$$

Теорема доказана.

Итак, первое открытие у нас состоялось. Идём дальше.

2 Деление степеней с одинаковыми основаниями

Открытие второе

ПРИМЕР 2

Вычислить: а) $2^6 : 2^4$; б) $3^8 : 3^5$.

Решение а) Запишем частное в виде дроби и сократим её:

$$2^6 : 2^4 = \frac{2^6}{2^4} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 \cdot 2}{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4.$$

б) $3^8 : 3^5 = \dfrac{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27.$

Ответ а) 4; б) 27.

В процессе решения примера мы заметили, что:

$$2^6 : 2^4 = 2^2, \text{ т. е. } 2^6 : 2^4 = 2^{6-4};$$
$$3^8 : 3^5 = 3^3, \text{ т. е. } 3^8 : 3^5 = 3^{8-5}.$$

Наблюдается закономерность: основания делимого и делителя одинаковы, показатель делимого больше, чем показатель делителя, при этом из показателя делимого вычитается показатель делителя. *Первый этап* завершён.

На *втором этапе* предположим, что мы открыли общую закономерность: $a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$.

ТЕОРЕМА 2

Для любого числа $a \neq 0$ и любых натуральных чисел n и k таких, что $n > k$, справедливо равенство

$$a^n : a^k = a^{n-k}.$$

Можете ли вы сформулировать теорему 2 иначе, используя грамматическое построение «если..., то...»? Видите ли вы, где в этой теореме условие, а где заключение? Ответьте для себя на эти вопросы (а наш ответ будет приведён после доказательства теоремы).

Доказательство Рассмотрим произведение $a^{n-k} \cdot a^k$. Мы знаем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются (об этом шла речь в теореме 1). Сложив показатели $n - k$ и k, получим $(n - k) + k = n$.

Итак, $a^{n-k} \cdot a^k = a^n$, а это как раз и означает, что $a^n : a^k = a^{n-k}$. Теорема доказана.

А теперь иначе сформулируем теорему 2:

если $a \neq 0$ и n, k — натуральные числа такие, что $n > k$, то справедливо равенство

$$a^n : a^k = a^{n-k}.$$

Условие теоремы: $a \neq 0$; n, k — натуральные числа, $n > k$.
Заключение теоремы: $a^n : a^k = a^{n-k}$.
Второе открытие у нас состоялось. Идём дальше.

3 Возведение степени в степень

Открытие третье

ПРИМЕР 3

Вычислить: а) $(2^5)^2$; б) $(3^2)^3$.

Решение а) $(2^5)^2 = 2^5 \cdot 2^5 = 2^{5+5} = 2^{10} = 1024$ (см. § 19).
б) $(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^6 = 729$ (см. § 19).

Ответ а) 1024; б) 729.

В процессе решения примера мы заметили, что:

$$(2^5)^2 = 2^{10}, \text{ т. е. } (2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2};$$

$$(3^2)^3 = 3^6, \text{ т. е. } (3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3}.$$

Наблюдается закономерность: в обоих случаях при возведении степени в степень показатели перемножаются. *Первый этап* завершён.

На *втором этапе* предположим, что мы открыли общую закономерность: $(a^n)^k = a^{nk}$.

ТЕОРЕМА 3

Для любого числа a и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство

$$(a^n)^k = a^{nk}.$$

Доказательство Имеем: $(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{k \text{ множителей}} =$

$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot \ldots \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{k \text{ групп по } n \text{ множителей в каждой}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{nk \text{ множителей}} = a^{nk}.$$

Мы совершили с вами три открытия, которые привели нас к трём серьёзным теоремам. Эти теоремы на практике удобнее формулировать в виде трёх правил, которые полезно запомнить.

Правило 1 При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются.

Правило 2 При делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя делимого вычитают показатель делителя.

Правило 3 При возведении степени в степень показатели перемножаются.

Сравните эти три правила с формулировками теорем 1, 2, 3. Почувствовали разницу? В теоремах всё чётко, всё оговорено, всё предусмотрено, а в правилах ощущается какая-то неполнота, лёгкость мысли, поэтому они легче запоминаются и воспринимаются; правила похожи на афоризмы. Это тоже одна из особенностей математического языка: наряду с серьёзными отточенными формулировками используются и краткие афористичные правила.

ПРИМЕР 4

Вычислить $\dfrac{(2^3 \cdot 2^4)^5}{(2 \cdot 2^8)^3}$.

Решение 1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ (правило 1);

2) $(2^7)^5 = 2^{7 \cdot 5} = 2^{35}$ (правило 3);

3) $2 \cdot 2^8 = 2^{1+8} = 2^9$ (правило 1);

4) $(2^9)^3 = 2^{9 \cdot 3} = 2^{27}$ (правило 3);

5) $2^{35} : 2^{27} = 2^{35-27} = 2^8$ (правило 2);

6) $2^8 = 256$ (см. § 19).

Ответ 256.

Опытный оратор, выступив с длинной и трудной для слушателей речью, обязательно в конце доклада ещё раз выделит самое главное, самое важное. У нас с вами была трудная и напряжённая работа, давайте же и мы выделим самое главное.

Самое главное — три формулы:

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k};$$
$$a^n : a^k = a^{n-k}, \text{ где } n > k,\ a \neq 0;$$
$$(a^n)^k = a^{nk}.$$

Их можно применять как справа налево, так и слева направо. Например,

$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$; $\quad 2^8 = 2^{4+4} = 2^4 \cdot 2^4$; $\quad 2^{2+n} = 2^2 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n$;

$3^7 : 3^1 = 3^6$; $\quad 3^6 = 3^{10-4} = \frac{3^{10}}{3^4}$; $\quad 3^{n-4} = \frac{3^n}{3^4} = \frac{3^n}{81}$;

$(5^3)^4 = 5^{12}$; $\quad 5^{12} = (5^6)^2 = (5^2)^6 = (5^4)^3 = (5^3)^4$.

! Мы говорили только об умножении и делении степеней с одинаковыми основаниями. А вот об их сложении и вычитании ничего не известно, так что не сочиняйте новых правил. Нельзя, например, заменять сумму $2^4 + 2^3$ на 2^7; в самом деле, посчитайте: $2^4 = 16$; $2^3 = 8$; $16 + 8 = 24$, но это не есть 2^7, поскольку $2^7 = 128$. Нельзя заменять разность $3^5 - 3^4$ на 3^1; действительно, посчитайте: $3^5 = 243$; $3^4 = 81$; $243 - 81 = 162$, но это не есть 3^1, так как $3^1 = 3$. Будьте внимательны!

4 Решение примеров

ПРИМЕР 5

Расположить в порядке возрастания числа 2^{45}, 4^{22}, 8^{14}, 16^{12}.

Решение Имеем $4^{22} = (2^2)^{22} = 2^{44}$; $8^{14} = (2^3)^{14} = 2^{42}$; $16^{12} = (2^4)^{12} = 2^{48}$. Ясно, что $2^{42} < 2^{44} < 2^{45} < 2^{48}$. Значит, в порядке возрастания заданные числа следует расположить так: 8^{14}, 4^{22}, 2^{45}, 16^{12}.

ПРИМЕР 6

Сравнить числа $a = 5^{88}$, $b = 3^{132}$.

Решение $a = 5^{88} = (5^2)^{44} = 25^{44}$; $b = 3^{132} = (3^3)^{44} = 27^{44}$. Ясно, что $25^{44} < 27^{44}$, т. е. $a < b$.

ПРИМЕР 7

а) Найти последнюю цифру числа 38^{200};
б) доказать, что $(7^{48} - 3^{72}) ⋮ 10$ (символ ⋮ означает «делится на»).

Решение а) $38^{200} = (38^4)^{50}$; число 38^2 оканчивается цифрой 4, а число 38^4, т. е. $(38^2)^2$, — цифрой 6. Осталось лишь заметить, что любая степень числа, оканчивающегося на 6, также имеет своей последней цифрой цифру 6 (смотрите: $6^1 = 6$, $6^2 = 36$, $6^3 = 216$ и т. д.).

б) $7^{48} = ((7^2)^2)^{12}$; $7^2 = 49$, 49^2 оканчивается цифрой 1. Любая степень числа, оканчивающегося на 1, также имеет своей последней цифрой цифру 1.

Далее, $3^{72} = (3^4)^{18}$; $3^4 = 81$; 81^{18} оканчивается цифрой 1.

Итак, последние цифры чисел 7^{48} и 3^{72} одинаковы, значит, разность этих чисел оканчивается цифрой 0, а потому делится на 10.

ПРИМЕР 8

Без использования знаков арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) записать наибольшее возможное число: а) тремя единицами; б) тремя двойками; в) тремя тройками; г) тремя четвёрками; д) четырьмя единицами; е) четырьмя двойками.

Решение а) Выпишем возможные варианты записи: 111, 11^1, 1^{11}, 1^{1^1}. Наибольшим является число 111.

б) Выпишем возможные варианты записи: 222, 22^2, 2^{22}, 2^{2^2}. Наибольшим является число 2^{22}.

в) Выпишем возможные варианты записи: 333, 33^3, 3^{33}, 3^{3^3}. Наибольшим является либо 33^3, либо 3^{33}. Но смотрите: $33^3 = 33 \cdot 33 \cdot 33 < 81 \cdot 81 \cdot 81 = 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = 3^{12} < 3^{33}$. Значит, наибольшим является число 3^{33}.

г) Выпишем возможные варианты записи: 444, 44^4, 4^{44}, 4^{4^4}. Ясно, что 444 — самое маленькое из этих четырёх чисел, а $4^{44} < 4^{4^4} = 4^{256}$. Значит, осталось сравнить числа 44^4 и 4^{4^4}. Сделаем это: $44^4 = 44 \cdot 44 \cdot 44 \cdot 44 < 64 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 64 = 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 = 4^{12} < 4^{256}$. Значит, наибольшим является число 4^{4^4}.

д) Выпишем возможные варианты записи: 1111, 111^1, 11^{11}, 11^{1^1}, 1^{111}, 1^{11^1}, $1^{1^{11}}$, $1^{1^{1^1}}$.

Наибольшим является число 11^{11}.

е) Выпишем возможные варианты записи: 2222, 222^2, 22^{22}, 22^{2^2}, 2^{222}, 2^{22^2}, $2^{2^{22}}$, $2^{2^{2^2}}$.

Наибольшим может быть либо 22^{22}, либо $2^{2^{22}}$. Сравним эти числа: $22^{22} < 32^{32} = (2^5)^{32} = 2^{160} < 2^{2^{22}}$. Итак, наибольшим является число $2^{2^{22}}$.

Вопросы для самопроверки

1. Закончите предложение: «При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели ...».
2. Закончите предложение: «При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели ...».

3. Закончите предложение: «При возведении степени в степень показатели ...».
4. Запишите каждое из сформулированных вами в п. 1—3 правил на математическом языке.
5. Что получится, если 2^{17} умножить на 2^{13}?
6. Что получится, если 2^{17} разделить на 2^{13}?
7. Какое из двух равенств верно: $(2^4)^3 = 2^{4+3}$ или $(2^4)^3 = 2^{4\cdot 3}$?

§21 УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В предыдущем параграфе мы рассматривали умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями. Оказывается, можно умножать и делить степени и с *разными* основаниями, если только показатели у этих степеней одинаковы.

ПРИМЕР 1

Вычислить $2^4 \cdot 5^4$.

Решение Конечно, можно по таблице из § 19 установить, что $2^4 = 16$, $5^4 = 625$, а затем умножить 16 на 625. Однако эффективнее следующее рассуждение:

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =$$
$$= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000.$$

В процессе решения мы получили числовое равенство

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4.$$

Точно так же можно доказать, что $a^3b^3 = (ab)^3$.
В самом деле,

$$a^3b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^3.$$

Вообще имеет место равенство

$$a^nb^n = (ab)^n.$$

Приведём «молчаливое» доказательство этого утверждения. Попробуйте его «озвучить» и прокомментировать:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множителей}} =$$
$$= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ множителей}} = (ab)^n.$$

ПРИМЕР 2

Вычислить $\frac{12^6}{4^6}$.

Решение Конечно, можно производить вычисления «в лоб», т. е. найти 12^6, затем 4^6, затем первое число разделить на второе. Но лучше рассуждать так:

$$\frac{12^6}{4^6} = \frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} =$$

$$= \left(\frac{12}{4}\right)^6 = 3^6 = 729.$$

В процессе решения мы получили числовое равенство $\frac{12^6}{4^6} = \left(\frac{12}{4}\right)^6$.

Точно так же можно доказать, что $\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ и $\frac{a^7}{b^7} = \left(\frac{a}{b}\right)^7$. Вообще имеет место равенство

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ если } b \neq 0 \text{ (докажите!).}$$

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered} a^n b^n = (ab)^n; \\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0. \end{gathered}}$$

Обе эти формулы применяют как слева направо, так и справа налево. Их также можно оформить в виде правил действий над степенями, тогда к трём правилам из § 20 добавятся ещё два.

Правило 4 Чтобы перемножить степени с одинаковыми показателями, достаточно перемножить основания, а показатель степени оставить неизменным.

Правило 5 Чтобы разделить друг на друга степени с одинаковыми показателями, достаточно разделить одно основание на другое, а показатель степени оставить неизменным.

ПРИМЕР 3

Упростить выражение $\left(\frac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5$.

Решение $\left(\frac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5 = \frac{(2^2a^3b^4)^5}{3^5}$ (правило 5);

$(2^2a^3b^4)^5 = (2^2)^5(a^3)^5(b^4)^5$ (правило 4).

Но

$$(2^2)^5 = 2^{10} = 1024;\ (a^3)^5 = a^{15};\ (b^4)^5 = b^{20} \text{ (правило 3).}$$

Значит, $(2^2a^3b^4)^5 = 1024a^{15}b^{20}$. Так как $3^5 = 243$, то окончательно получаем $\left(\frac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5 = \frac{1024a^{15}b^{20}}{243}$.

ПРИМЕР 4

Расположить в порядке убывания числа:

$$a = 27^{37} \cdot 25^{28},\ b = 75^{28} \cdot 9^{41},\ c = 45^{56}.$$

Решение $a = 27^{37} \cdot 25^{28} = (3^3)^{37} \cdot (5^2)^{28} = 3^{111} \cdot 5^{56};$

$$b = 75^{28} \cdot 9^{41} = (3 \cdot 5^2)^{28} \cdot (3^2)^{41} = 3^{28} \cdot 5^{56} \cdot 3^{82} = 3^{110} \cdot 5^{56};$$
$$c = 45^{56} = (3^2 \cdot 5)^{56} = 3^{112} \cdot 5^{56}.$$

Итак, $a = 3^{111} \cdot 5^{56}$, $b = 3^{110} \cdot 5^{56}$, $c = 3^{112} \cdot 5^{56}$, значит, $c > a > b$.

В заключение — одно предостережение. Мы знаем, что:

если *основания* одинаковы, то	если *показатели* одинаковы, то
$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$; $a^n : a^k = a^{n-k}$;	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$; $a^n : b^n = (a : b)^n$.

Если же умножение и деление выполняется над степенями с *различными* основаниями и *разными* показателями, то будьте внимательны. Так, $3^5 \cdot 2^4$ можно вычислить «в лоб»: сначала вычислить 3^5, затем 2^4 и, наконец, выполнить умножение. А можно так: $3 \cdot 3^4 \cdot 2^4 = 3 \cdot (3 \cdot 2)^4 = 3 \cdot 6^4$.

Вопросы для самопроверки

1. Закончите предложение: «Чтобы перемножить степени с одинаковыми показателями ...».
2. Закончите предложение: «Чтобы разделить друг на друга степени с одинаковыми показателями ...».
3. Запишите каждое из сформулированных вами в п. 1—2 правил на математическом языке.
4. Верно ли, что $3^5 \cdot 4^5 = 12^5$? Если да, то сошлитесь на соответствующее свойство степеней.
5. Верно ли, что $\frac{3^5}{4^5} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$? Если да, то сошлитесь на соответствующее свойство степеней.

6. Верно ли, что $28^5 = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 7^5$? Если да, то сошлитесь на соответствующее свойство степеней.
7. Запишите число 3^{30} в виде степени с основанием 27.

§ 22 СТЕПЕНЬ С НУЛЕВЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В предыдущих параграфах мы с вами научились вычислять значение степени с любым *натуральным* показателем. Например:

$$0{,}2^1 = 0{,}2; \quad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9; \quad 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64;$$
$$1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1; \quad (-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32;$$
$$0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \text{ и т. д.}$$

В дальнейшем вы узнаете, что показателем степени может быть не только натуральное число. Но это произойдёт позднее, в старших классах, а пока мы сделаем лишь один скромный шаг в этом направлении: введём понятие *степени с нулевым показателем*, т. е. выясним, какой смысл придаётся в математике символу a^0. А ведь этот символ «напрашивается». Смотрите: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$, $3^8 : 3 = 3^{8-1} = 3^7$. Почему бы не написать $5^4 : 5^4 = 5^{4-4} = 5^0$?

До сих пор всё было хорошо: a^3 — это значит, что число a нужно умножить само на себя 3 раза, a^{10} — это значит, что число a нужно умножить само на себя 10 раз, a^1 — это просто a. А что такое a^0? Ведь нельзя же, в самом деле, умножить число a само на себя 0 раз!

степень с нулевым показателем

Хотелось бы, чтобы для a^0 выполнялись привычные правила, например, чтобы при вычислении $a^3 \cdot a^0$ показатели складывались: $a^3 \cdot a^0 = a^{3+0}$. Но $3 + 0 = 3$. Что же получается? Получается, что $a^3 \cdot a^0 = a^3$. Значит, $a^0 = a^3 : a^3 = 1$ (при этом нужно ввести естественное ограничение — $a \neq 0$). Проведённое рассуждение как-то мотивирует следующее определение.

Определение

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Например, $5{,}7^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $(2^n)^0 = 1$ и т. д. Однако учтите, что символ 0^0 считается в математике не имеющим смысла.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение степени с нулевым показателем.
2. Сравните: $(987\,654\,321)^0$ и $0^{987\,654\,321}$.

3. Как вы думаете, можно ли отрицательное число возвести в нулевую степень?
4. Как вы думаете, почему запись 0^0 считается в математике лишённой смысла?

§23[1] РАБОТА С ТАБЛИЦАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Продолжим знакомство с таблицами распределения, способами их составления и получения статистической информации на основе этих таблиц. Для получения первоначальных данных обратимся к нашему задачнику. На этот раз — к задачам 18.1—18.6. Все эти задачи определённо похожи друг на друга. Например, ответ в каждой из них имеет вид $(A)^k$, где A — некоторое числовое или буквенное выражение, а k — некоторое натуральное число, показатель степени. Посмотрим, как распределены эти показатели.

Ясно, что наименьшее значение k равно 2 (в 18.1 в)), а наибольшее значение k равно 8 (в 18.2 а)). Значит, таблица распределения показателей степеней будет примерно такой.

k — показатель степени	2	3	4	5	6	7	8
Сколько раз встретилось k							

Как заполнить пустые клетки? Можно выписать весь ряд данных, т. е. все показатели степени во всех задачах 18.1—18.6, пп. а) — г). После этого упорядочить ряд и тогда легко будет заполнить таблицу распределения. Но можно провести такое заполнение и без выписывания рядов данных. Мы сразу будем вносить данные в таблицу. Для этого вставим в таблицу дополнительную среднюю строку. В ней будем проводить промежуточные подсчёты.

В № 18.1 а) ответ 3^4, т. е. $k = 4$. Поставим одну палочку во второй строке под четвёркой. Мы «сосчитали» № 18.1 а).

k — показатель степени	2	3	4	5	6	7	8
k встретилось			/				
Сколько раз встретилось k							

В № 18.1 б) — г) ответы таковы: 7^6; $0{,}5^2$; $8{,}4^5$, т. е. $k = 6$, $k = 2$, $k = 5$. Поставим по одной палочке во второй строке под шестёркой, под

[1] Параграф написан П. В. Семеновым.

двойкой и под пятёркой. Мы полностью «сосчитали» задачу 18.1. Вот как в этот момент выглядит (не до конца заполненная) таблица:

k — показатель степени	2	3	4	5	6	7	8
k встретилось	/		/	/	/		

В № 18.2 а) — г) ответы таковы: x^8; y^5; z^6; q^3, т. е. $k = 8$, $k = 5$, $k = 6$, $k = 3$. Поставим ещё по одной палочке под восьмёркой, пятёркой, шестёркой и тройкой. Вот что получится.

k — показатель степени	2	3	4	5	6	7	8
k встретилось	/	/	/	//	//		/

Точно так же можно поступать и со всеми остальными задачами 18.3—18.6. В итоге мы добавим ещё $16 = 4 \cdot 4$ наклонных палочек. Таблица будет выглядеть так.

k — показатель степени	2	3	4	5	6	8
k встретилось	///	~~////~~	~~////~~	~~////~~	~~////~~	/

В ней каждая пятая по счёту палочка перечёркивает предыдущие четыре. Как говорили в старину, так, «по пятка́м», действительно удобнее считать.

Остаётся вспомнить, что для ответа нам нужны не сами выписанные палочки, а их количество. Поэтому допишем в таблицу необходимую строчку.

k — показатель степени	2	3	4	5	6	8
k встретилось	///	~~////~~	~~////~~	~~////~~	~~////~~	/
Сколько всего раз встретилось k	3	5	5	5	5	1

Если совсем точно отвечать на поставленный вопрос, то полагалось бы удалить среднюю строчку. Но этого можно и не делать, чтобы не терять уже найденную информацию. К тому же средняя строка полезна при проверке ответа и контроле за возможными ошибками.

Мы получили таблицу распределения, в которой показатели степени 3, 4, 5 и 6 встречаются одинаковое количество раз (по 5). Это почти *равномерное* распределение. При таком распределении говорить о моде было бы странно: ведь почти все данные находятся в одинаковом положении. Заметим, что первоначальный столбец под числом «7» лучше убрать из ответа. Ведь показатель степени 7 не встретился ни разу: нет данных — нет столбца.

Рассмотрим пример, в котором таблицу распределения придётся составлять на основе круговой диаграммы.

ПРИМЕР 1

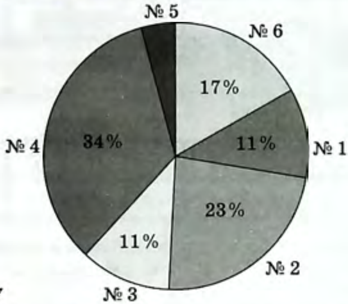


Рис. 77

В интернет-магазине начали продавать новые компьютерные игры № 1—6. По результатам продаж через неделю на сайте магазина была размещена диаграмма (см. рис. 77), на которой было указано, что хитом продаж является игра № 4, которой было продано 104 экземпляра.

а) Какова процентная доля игры № 5?

б) Сколько игр составляет 1% продаж?

в) Сколько всего игр продано за эту неделю?

г) Заполнить таблицу распределения количества проданных игр.

Решение а) Сумма процентов продаж всех игр, кроме № 5, равна $11 + 11 + 17 + 23 + 34 = 96$. Значит, на долю игры № 5 приходится $100 - 96 = 4$ (%).

б) Так как 102 проданных экземпляра игры № 4 составляют 34%, то 1% составляет $102 : 34 = 3$ игры.

в) Всего продано 100% игр, а 1% составляет 3 игры. Значит, всего продано 300 игр.

г) Для заполнения таблицы распределения надо указанные проценты продаж умножить на 3.

Номер игры	1	2	3	4	5	6	Всего: 6 игр
Количество продаж	33	69	33	102	12	51	Всего: 300 штук

Ответ а) 4%; б) 3; в) 300.

От статистики вернёмся к комбинаторике.

ПРИМЕР 2

В равенство $2^n \cdot 2^{25} \cdot 2^k = 2^{36}$ следует поставить такие натуральные показатели n и k, чтобы получилось верное числовое равенство.

а) Сколько существует способов такой подстановки?

б) В скольких случаях верно неравенство $n < k$?

в) В скольких случаях n и k различны между собой?

г) В скольких случаях отношение $k : n$ будет целым числом?

Решение а) Так как $2^n \cdot 2^{25} \cdot 2^k = 2^{n+25+k}$, то $n + k + 25 = 36$, или $n + k = 9$. Слагаемое n может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Действительно, если $n = 9$; $n = 10$; ... то слагаемое k уже не может быть положительным. Значит, есть ровно восемь нужных пар $(n; k)$: это пары (1; 8), (2; 7), (3; 6), ..., (8; 1).

б) Из перечисленных восьми пар годятся только первые четыре: (1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5).

в) Проще определить, когда $n = k$. Но тогда $n + k = 9$, $2n = 9$, что невозможно, так как n — натуральное число. Поэтому во всех восьми случаях n и k различны между собой.

г) Снова перебирая по очереди восемь возможных случаев (пункт а), получаем, что отношение $k : n$ будет целым числом только в двух случаях (1; 8), (3; 6).

Ответ а) 8; б) 4; в) 8; г) 2.

Вопросы для самопроверки

1. Какое натуральное число записано в виде ~~////~~ ~~////~~ //?
2. Какое натуральное число записано в виде ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~?
3. Запишите число 9 «в пятка́х» наклонных палочек.
4. Запишите число 26 «в пятках» наклонных палочек.
5. Найдите 250% от 250.
6. Сколько процентов от числа 52 составляет число 39?
7. 40% от какого числа составляет число 40?
8. Испорченный калькулятор может делать только одну операцию — вычислять 10% от числа. Через какое наименьшее число операций получится число, меньшее 0,1, если начать с 2014?
9. Перечислите все решения уравнения $2n + k = 9$ в натуральных числах.
10. Перечислите все решения уравнения $n + 3k = 9$ в натуральных числах.

Основные результаты

Здесь даны основные определения, свойства, теоремы, формулы, правила, которые мы с вами изучали в § 18—22. Всё это записано на сухом математическом языке без всяких комментариев, поскольку комментарии, обоснования были приведены в указанных параграфах.

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}};$$

$$a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0;$$
$$1^n = 1; \quad 0^n = 0;$$
$$(-1)^{2n} = 1; \quad (-1)^{2n-1} = -1;$$
$$10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ нулей}};$$
$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}; \quad a^{n+k+m} = a^n \cdot a^k \cdot a^m;$$
$$a^n : a^k = a^{n-k}, \text{ где } n \geqslant k;$$
$$(a^n)^k = a^{nk};$$
$$a^n b^n = (ab)^n; \quad (abc)^n = a^n b^n c^n; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ где } b \neq 0.$$

Знание этих формул — ключ к успеху в работе с любыми алгебраическими выражениями. К этой работе мы приступаем постепенно, начиная со следующей главы.

Темы исследовательских работ

1. Свойства степеней с натуральным и нулевым показателем.
2. Таблицы распределения данных. Круговые диаграммы.

5 ГЛАВА
ОДНОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ОДНОЧЛЕНАМИ

§ 24 ПОНЯТИЕ ОДНОЧЛЕНА. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ОДНОЧЛЕНА

Определение

Одночленом называют алгебраическое выражение, которое представляет собой произведение чисел и переменных, возведённых в степень с натуральными показателями.

Примеры одночленов:

$$2ab; \quad \frac{1}{3}a^2xy^3; \quad (-2)xy^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 x^3ab^4; \quad 1{,}7a^nb^n \ (n \in N).$$

одночлен

Одночленами являются, в частности, все числа, любые переменные, степени переменных. Например, одночленами являются:

$$0; \quad 2; \quad -0{,}6; \quad x; \quad a; \quad b; \quad x^2; \quad a^3; \quad b^n \quad (n \in N).$$

Теперь приведём примеры алгебраических выражений, не являющихся одночленами:

$$a + b; \quad 2x^2 - 3y^3 + 5; \quad \frac{a^2}{b}.$$

А как вы считаете: выражение $\frac{2ab}{3}$ — одночлен или нет? Ведь оно по форме похоже на выражение $\frac{a^2}{b}$, которое фигурирует у нас среди выражений, не являющихся одночленами, и содержит в своей записи черту дроби. Тем не менее $\frac{2ab}{3}$ — одночлен: $\frac{2ab}{3} = \frac{2}{3}ab$.

Вот ещё два примера, построенных на контрасте: $\frac{a}{3}$ и $\frac{3}{a}$. Как вы считаете, какое из этих выражений одночлен, а какое нет? А теперь проверьте себя: $\frac{a}{3}$ — одночлен, его можно записать в виде $\frac{1}{3}a$; выражение же $\frac{3}{a}$ не является одночленом. Термины в математике надо употреблять правильно.

Рассмотрим одночлен $3a \cdot \frac{2}{3}a^2bc$. Глядя на это выражение, математик обычно рассуждает так: «От перемены мест множителей произведение не изменится, запишу-ка я это выражение в более удобном виде:

$$\left(3 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot (a \cdot a^2)bc.$$

Тогда, — думает математик, — я получу $2a^3bc$, а эта запись удобнее той, что была, хотя бы потому, что короче. Кроме того, в ней нет того сумбура, какой был сначала: первый множитель — число, второй — переменная a, затем снова число, потом опять переменная a, но уже в квадрате и т. д.».

Стремящийся к чёткости, краткости и порядку математик на самом деле привёл одночлен *к стандартному виду.*

Вообще, *чтобы привести одночлен к стандартному виду, нужно*:

1) *перемножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место;*
2) *перемножить все имеющиеся степени с одним буквенным основанием;*
3) *перемножить все имеющиеся степени с другим буквенным основанием и т. д.*

стандартный вид одночлена

коэффициент одночлена

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют **коэффициентом одночлена.**

Любой одночлен можно привести к стандартному виду.

ПРИМЕР

Привести одночлен к стандартному виду и назвать коэффициент одночлена:

а) $3x^2yz \cdot (-2)xy^2z^5$;

б) $4ab^2c \cdot \frac{1}{4}c$;

в) $-2ax^2y^3z^n \cdot \frac{1}{2}ax^5yz$;

г) $\frac{3ab}{10}$.

Решение а) $3x^2yz \cdot (-2)xy^2z^5 = 3 \cdot (-2)x^2xyy^2zz^5 = -6x^3y^3z^6$.

Коэффициент одночлена равен -6.

б) $4ab^2c \cdot \frac{1}{4}c = 4 \cdot \frac{1}{4}ab^2c \cdot c = 1 \cdot ab^2c^2 = ab^2c^2$.

Коэффициент одночлена равен 1, такой коэффициент обычно не пишут, но подразумевают.

в) $-2ax^2y^3z^n \cdot \frac{1}{2}ax^5yz = (-2) \cdot \frac{1}{2}aax^2x^5y^3yz^nz = -a^2x^7y^4z^{n+1}$.

Коэффициент одночлена равен -1.

г) А это, как говорят, «маленькая провокация»: одночлен не надо приводить к стандартному виду, он и так записан в стандартном виде: $\frac{3}{10}ab$. Коэффициент одночлена равен 0,3.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое одночлен?
2. Можно ли назвать одночленом выражение $2a^3bc^2$; $2a^3 + bc^2$?
3. Расскажите, как привести одночлен к стандартному виду, и проиллюстрируйте свой рассказ на примере одночлена $3abc^2a^3bc^2$.
4. Приведите свой пример одночлена, записанного в стандартном виде, и одночлена, не записанного в стандартном виде. Во втором случае приведите одночлен к стандартному виду.
5. Составьте одночлен с переменными x, y и с коэффициентом 1.
6. Составьте одночлен с переменными a, b, c и с коэффициентом -1.

§ 25 СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ

В этой главе мы изучаем новые для вас математические объекты — одночлены. Образно говоря, если для математического языка числа, переменные и степени переменных являются буквами, то одночлены — слогами. Когда в детстве вы учились читать, то сначала изучали буквы, затем читали слоги и только потом целиком произносили написанное слово; буквы, слоги, слова, предложения — этапы изучения языка. И тут уже не важно, нравятся нам одночлены как самостоятельный объект изучения или нет, ничего не поделаешь —

без уверенного владения ими нам не обойтись, если мы хотим свободно владеть математическим языком.

В § 24 мы ввели понятия одночлена, стандартного вида одночлена. Значит, надо научиться работать с одночленами, например, выполнять над ними арифметические операции. При этом сразу договоримся, что будем рассматривать только одночлены, записанные в стандартном виде.

Определение

Два одночлена, состоящие из одних и тех же переменных, каждая из которых входит в оба одночлена в одинаковых степенях (т. е. с равными показателями степеней), называют **подобными одночленами.**

Примеры подобных одночленов:

$$2a \text{ и } 5a, \quad 3ab^2c \text{ и } -\frac{2}{7}ab^2c, \quad x^n \text{ и } 5x^n.$$

подобные одночлены

Как видите, подобные одночлены отличаются друг от друга только коэффициентами (впрочем, и коэффициенты могут быть равны, например, $7ab$ и $7ab$ — подобные одночлены).

А вот примеры неподобных одночленов:

$$5a \text{ и } 3a^2, \quad 2x \text{ и } 7y, \quad 3a^2b^2 \text{ и } 6a^2b.$$

Слово «подобные» имеет примерно тот же смысл, что в обыденной речи слово «похожие». Согласитесь, что одночлены $5a^2b$ и $23a^2b$ похожи друг на друга (подобные одночлены), тогда как одночлены $5a^2b$ и $23ab^3c^2$ не похожи друг на друга (неподобные одночлены).

Рассмотрим сумму двух подобных одночленов $5a^2b + 23a^2b$. Воспользуемся *методом введения новой переменной*: положим $a^2b = c$. Тогда сумму $5a^2b + 23a^2b$ можно переписать в виде $5c + 23c$. Эта сумма равна $28c$. Итак, $5a^2b + 23a^2b = 28a^2b$.

В чём смысл этого преобразования? Смысл в том, что равенство $5a^2b + 23a^2b = 28a^2b$ является верным при подстановке любых значений переменных.

метод введения новой переменной

Нам удалось сложить подобные одночлены; оказалось, что это очень просто: достаточно сложить их коэффициенты, а буквенную часть оставить неизменной. Так же обстоит дело и с вычитанием подобных одночленов. Например,

$$7abc^3 - 9abc^3 = (7 - 9)\,abc^3 = -2abc^3.$$

А как быть, если одночлены неподобны: можно ли их складывать, вычитать? Увы, пока нельзя! Мы вернёмся к этому вопросу позднее, в главе 6.

Сейчас мы сформулируем алгоритм сложения и вычитания одночленов (впрочем, обычно оставляют только термин «сложение», а знак «минус» относят к коэффициенту).

АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ ОДНОЧЛЕНОВ

1. Привести все одночлены к стандартному виду.
2. Убедиться, что все одночлены подобны; если же они неподобны, то алгоритм далее не применяется.
3. Найти сумму коэффициентов подобных одночленов.
4. Записать ответ: одночлен, подобный данным, с коэффициентом, полученным на третьем шаге.

ПРИМЕР 1

Упростить выражение

$$2a^2b - 7a \cdot 0{,}5ba + 3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a).$$

Решение Речь идёт о сложении одночленов, значит, будем действовать в соответствии с алгоритмом.

1) Первый одночлен уже имеет стандартный вид.

Для второго одночлена имеем:

$$7a \cdot 0{,}5ba = (7 \cdot 0{,}5) \cdot (a \cdot a)\, b = 3{,}5a^2b,$$

это стандартный вид.

Приведём к стандартному виду третий одночлен:

$$3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a) = 3 \cdot 2 \cdot (-0{,}5) \cdot (a \cdot a)\, b = -3a^2b.$$

2) Получили три одночлена: $2a^2b$, $3{,}5a^2b$, $-3a^2b$. Они подобны, поэтому с ними можно производить дальнейшие действия, т. е. переходить к третьему шагу алгоритма.

3) Найдём сумму коэффициентов трёх полученных одночленов: $2 - 3{,}5 - 3 = -4{,}5$.

4) Запишем ответ: $-4{,}5a^2b$.

ПРИМЕР 2

Представить одночлен $27ab^2$ в виде суммы одночленов.

Решение Здесь в отличие от рассмотренных ранее примеров решение не единственное (а разве в жизни во всех случаях вы можете найти единственное решение? Иногда решений несколько, а иногда решения и вовсе нет). Можно написать

$$27ab^2 = 20ab^2 + 7ab^2,$$

и это будет верно. Можно написать

$$27ab^2 = 15ab^2 + 12ab^2,$$

что также будет верно. Можно написать так:

$$27ab^2 = ab^2 + 26ab^2$$

и даже так:

$$27ab^2 = 100ab^2 - 73ab^2.$$

Можно указать ещё ряд решений. Главное, чтобы сумма коэффициентов складываемых подобных одночленов была равна 27.

Кстати, не обязательно составлять сумму двух одночленов (в условии ведь это не оговорено). Значит, можно предложить, например, такое решение: $27ab^2 = 20ab^2 + 4ab^2 + 3ab^2$.

Или такое: $27ab^2 = 2ab^2 + 8ab^2 + 22ab^2 - 5ab^2$.

Попробуйте сами придумать ещё несколько решений примера 2.

Мы заканчиваем изучение темы «Сложение и вычитание одночленов». Но вы, наверное, ощущаете какую-то недоговорённость. Мало ли с какими одночленами нам придётся иметь дело в дальнейшем, а вдруг среди них будут неподобные? Что делать, если, составляя математическую модель реальной ситуации, мы пришли к выражению, представляющему собой сумму неподобных одночленов, например $2ab + 3a - 5b$? Математики нашли выход из положения: такую сумму назвали *многочленом*, т. е. ввели новое понятие, и научились производить операции над многочленами. Но об этом речь впереди, в главе 6.

Вопросы для самопроверки

1. Какие одночлены называют подобными? Приведите пример двух подобных одночленов и пример двух неподобных одночленов.
2. Будет ли сумма или разность двух подобных одночленов одночленом? Приведите два соответствующих примера.
3. Будет ли сумма или разность двух неподобных одночленов одночленом?
4. Используя переменные m и n, составьте одночлен с коэффициентом 36 и представьте его в виде суммы одночленов несколькими способами.
5. В каком случае сумма двух подобных одночленов, содержащих буквенные части, является числом? Что это за число?

§ 26 УМНОЖЕНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ. ВОЗВЕДЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА В НАТУРАЛЬНУЮ СТЕПЕНЬ

В § 25 мы рассматривали сложение и вычитание одночленов. Оказалось, что эти операции применимы только к подобным одночленам. А как обстоит дело с умножением одночленов? Очень просто: если между двумя одночленами поставить знак умножения, то снова получится одночлен; остаётся лишь привести его к стандартному виду (фактически это мы уже делали в примере из § 24). Не вызывает затруднений и возведение одночлена в степень. При этом используются правила действий со степенями (фактически в примере 3 из § 21 мы уже возводили одночлен в степень).

ПРИМЕР 1

Найти произведение трёх одночленов: $2a^2bc^5$, $\frac{3}{4}a^3cx^3$ и a^2b.

Решение $(2a^2bc^5)\cdot\left(\frac{3}{4}a^3cx^3\right)\cdot(a^2b)=\left(2\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot(a^2a^3a^2)\cdot(b\cdot b)\cdot(c^5c)\,x^3=$

$=1{,}5a^7b^2c^6x^3$.

ПРИМЕР 2

Упростить выражение $(-2a^2bc^3)^5$ (т. е. представить его в виде одночлена).

Решение $(-2a^2bc^3)^5=-2^5(a^2)^5b^5(c^3)^5=-32a^{10}b^5c^{15}$.

Мы использовали, во-первых, тот факт, что при возведении произведения в степень надо возвести в эту степень каждый множитель. Поэтому у нас появилась запись $-2^5(a^2)^5b^5(c^3)^5$.

Во-вторых, мы воспользовались тем, что $(-2)^5=-2^5$.

В-третьих, мы использовали тот факт, что при возведении степени в степень показатели перемножаются. Поэтому вместо $(a^2)^5$ мы написали a^{10}, а вместо $(c^3)^5$ мы написали c^{15}.

ПРИМЕР 3

Представить одночлен $36a^2b^4c^5$ в виде произведения одночленов.

Решение Здесь, как и в примере 2 из § 25, решение не единственное. Вот несколько вариантов решения:

$$36a^2b^4c^5=(18a^2)\cdot(2b^4c^5);$$
$$36a^2b^4c^5=(36abc)\cdot(ab^3c^4);$$
$$36a^2b^4c^5=(-3b^4)\cdot(-12a^2c^5);$$
$$36a^2b^4c^5=(2a^2)\cdot(3bc)\cdot(6b^3c^4).$$

Попробуйте сами придумать ещё несколько решений примера 3.

ПРИМЕР 4

Представить данный одночлен A в виде B^n, где B — одночлен, если:

а) $A=32a^5,\ n=5$;
б) $A=a^3b^6,\ n=3$;
в) $A=49a^2b^4c^6,\ n=2$;
г) $A=-27a^3b^9,\ n=3$;
д) $A=16a^8b^5,\ n=4$.

Решение а) $32a^5 = 2^5a^5 = (2a)^5$. Значит, $A = B^5$, где $B = 2a$.

б) $a^3b^6 = a^3(b^2)^3 = (ab^2)^3$. Следовательно, $A = B^3$, где $B = ab^2$.

в) Так как $49a^2b^4c^6 = 7^2a^2(b^2)^2(c^3)^2 = (7ab^2c^3)^2$, то $A = B^2$, где $B = 7ab^2c^3$.

г) Поскольку $-27a^3b^9 = (-3)^3a^3(b^3)^3 = (-3ab^3)^3$, заключаем, что $A = B^3$, где $B = -3ab^3$.

д) С одночленом $16a^8b^5$ у нас ничего не получится. Почему? Давайте рассуждать. Если бы не было множителя b^5, то задача решалась бы без труда: $16a^8 = 2^4(a^2)^4 = (2a^2)^4$; если бы вместо b^5 был множитель, например, b^{12}, то мы решили бы задачу так:

$$16a^8b^{12} = 2^4(a^2)^4(b^3)^4 = (2a^2b^3)^4.$$

Однако множитель b^5 нельзя представить в виде $(b^k)^4$, где k — натуральное число; этот множитель, как говорится, «портит всё дело». Значит, одночлен $16a^8b^5$ нельзя представить в виде B^4, где B — некоторый одночлен.

Пример 4д) показывает, что в математике далеко не всё получается, не любая задача имеет решение (как и в реальной жизни).

Кстати, если математику предлагают задание, заведомо невыполнимое (например, разделить 5 на 0 или найти точку пересечения параллельных прямых), то он говорит: «*Задача поставлена некорректно*» или «Это — *некорректная задача*». Тот, кто предложил некорректную задачу, должен извиниться. Вот и авторы извиняются за пример 4д). Хотя согласитесь, что он был дан не без пользы.

Раз уж мы заговорили о корректных и некорректных задачах, приведём ещё несколько примеров и тех и других, а вы попытайтесь объяснить, почему задача корректна или некорректна.

Корректные задачи:

1. Упростить $2ab^2 \cdot (3ab)^3$.
2. Упростить $7ab + 8ab + ab$.
3. Вычислить $\frac{2{,}7 + 3{,}8}{2 - 6}$.
4. Представить одночлен $13a^4b^5$ в виде суммы одночленов.
5. Представить одночлен $48x^3y^5z$ в виде произведения одночленов.
6. Представить одночлен $A = 25a^4$ в виде квадрата некоторого одночлена B.

Некорректные задачи:

1. Сложить одночлены $3ab^2$, $5ab^2$ и $7a^2b$.
2. Вычислить $\frac{2{,}7 + 3{,}8}{6 - 6}$.
3. Представить одночлен A в виде квадрата некоторого одночлена B, если $A = -25a^4$.
4. Найти точку пересечения прямых $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ (см. пример 1б) в § 11).

Вопросы для самопроверки

1. Как перемножить два одночлена? Приведите пример.
2. Используя переменные p, q и r, составьте одночлен с коэффициентом 144 и представьте его в виде произведения одночленов несколькими способами.
3. Как возвести одночлен в натуральную степень? Приведите пример.
4. Представьте одночлен $16a^4b^6$ в виде произведения двух одночленов, в виде степени одночлена.

§27 ДЕЛЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Что такое одночлен, мы знаем; как одночлены складывать, вычитать, перемножать и даже возводить в степень — обсудили. Но ведь имеется ещё деление — операция, обратная умножению. Можно ли быть уверенным в том, что операция деления одночлена на одночлен всегда выполнима — в том смысле, что в частном получится одночлен? Вот об этом и поговорим.

ПРИМЕР 1

Опираясь на свойства арифметических действий, попытаемся выполнить деление одночленов:

а) $10a : 2$; г) $\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z)$;

б) $18ab : (3a)$; д) $4x^3 : (2xy)$;

в) $36a^3b^5 : (4ab^2)$; е) $a^2 : a^5$.

Решение а) Воспользуемся тем, что если произведение двух чисел делят на третье число, то можно разделить на это число один множитель и полученное частное умножить на другой множитель. (Вспомнили? Например, $(12 \cdot 4) : 3 = (12 : 3) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$.) Имеем:

$$10a : 2 = (10 : 2) \cdot a = 5a.$$

б) Рассуждаем, как в примере а):

$$18ab : (3a) = (18 : 3) \cdot (a : a)\, b = 6 \cdot 1 \cdot b = 6b.$$

в) $36a^3b^5 : (4ab^2) = (36 : 4) \cdot (a^3 : a) \cdot (b^5 : b^2) = 9a^2b^3$.

Иногда удобнее вместо знака деления (:) использовать черту дроби. Вот как тогда будет выглядеть решение примера в):

$$\frac{36a^3b^5}{4ab^2} = \frac{36}{4} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^5}{b^2} = 9a^2b^3.$$

г) Здесь мы используем комбинированную запись решения, т. е. и знак деления, и черту дроби:

$$\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z) = \left(\frac{4}{7} : (-2)\right) \cdot \frac{x^3y^2z}{x^3y^2z} =$$

$$= -\frac{4}{7 \cdot 2} \cdot \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{y^2}{y^2} \cdot \frac{z}{z} = -\frac{2}{7} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{7}.$$

Здесь всё верно, но, как говорят математики, *нерационально*, поскольку сразу было ясно, что $x^3y^2z : x^3y^2z = 1$ (фактически выражение делится само на себя).

д) $4x^3 : (2xy) = \frac{4x^3}{2xy} = \frac{4}{2} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2x^2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x^2}{y}.$

Это не одночлен, значит, разделить $4x^3$ на $2xy$ нельзя (в том смысле, чтобы в частном получился одночлен).

е) И эта задача невыполнима, так как мы пока не умеем делить при одном и том же основании степень с меньшим показателем на степень с бóльшим показателем.

Мы рассмотрели шесть примеров, из них четыре оказались корректными, а два (последние) — некорректными (этот термин мы ввели в § 26).

Проанализируем теперь решённые примеры и попробуем с помощью этого анализа выяснить, когда можно разделить одночлен на одночлен так, чтобы в частном снова получился одночлен.

Естественно, удобнее, чтобы оба одночлена (и делимое, и делитель) были записаны в стандартном виде (впрочем, об этом мы условились ещё в § 25) с отличными от нуля коэффициентами.

Первое наблюдение. В делителе не должно быть переменных, которых нет в делимом (по этой причине мы «споткнулись» в примере 1д)).

Второе наблюдение. Если в делимом и делителе есть одна и та же переменная, причём в делимом она возводится в степень n, а в делителе — в степень k, то число k не должно быть больше числа n (поэтому мы «споткнулись» в примере 1е)).

Третье наблюдение. Коэффициенты делимого и делителя могут быть любыми, за исключением делителя, равного нулю (поскольку мы умеем делить друг на друга любые числа, кроме, разумеется, деления на нуль).

Значит, если вам предложат разделить одночлен на одночлен, то сначала убедитесь, что задача корректна, т. е. проведите указанные наблюдения и убедитесь, что всё в порядке. В случае, когда задача корректна, решайте её по образцу примера 1.

ПРИМЕР 2

Упростить $48a^4b^5c^6d : (36ab^3c^6)$.

Решение 1) Оба одночлена (и делимое, и делитель) записаны в стандартном виде.

2) В делимом фигурируют переменные a, b, c, d, в делителе a, b, c. Лишних переменных в делителе нет.

3) В делителе нет степеней бо́льших, чем у одноимённых переменных в делимом.

Вывод: задача корректна, будем её решать:

$$\frac{48a^4b^5c^6d}{36ab^3c^6} = \frac{48}{36} \cdot \frac{a^4}{a} \cdot \frac{b^5}{b^3} \cdot \frac{c^6}{c^6} \cdot d = \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot 1 \cdot d = \frac{4}{3}a^3b^2d.$$

! Вы чувствуете, что в этом параграфе, как и в § 25, есть недоговорённость? А что же всё-таки делать, если одночлен на одночлен не разделился? Разве мы застрахованы от такой ситуации? Поэтому математики ввели новый объект — *алгебраическую дробь*. Вспомните, ведь и обыкновенные дроби появились из-за того, что во множестве натуральных чисел деление выполнимо не всегда; например, 14 делится на 7, а 13 не делится на 7. Как записывается ответ во втором случае, когда надо всё-таки разделить 13 на 7? Он записывается в виде обыкновенной дроби $\frac{13}{7}$. Алгебраическая дробь встретилась нам в примере 1д) — это было выражение $\frac{2x^2}{y}$. И конечно, математики научились оперировать этими новыми объектами — алгебраическими дробями. Мы будем изучать их в 8-м классе, а встретимся ещё раз в § 42.

Вопросы для самопроверки

1. Проверьте, можно ли одночлен $8a^3bc^2$ разделить на одночлен $2a^2bc$. Если да, то выполните деление; если нет, то объясните почему.
2. Проверьте, можно ли одночлен $8a^3bc^2$ разделить на одночлен $2abc^2$. Если да, то выполните деление; если нет, то объясните почему. А как обстоит дело с делением на одночлен a^3bc^2d?
3. Всегда ли задание разделить одночлен на одночлен является корректным?
4. Приведите пример, когда задание разделить одночлен на одночлен является корректным.
5. Приведите пример, когда задание разделить одночлен на одночлен является некорректным.

§28[1] ТАБЛИЦЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ

В конкретном ряду данных какие-то данные встречаются чаще, какие-то реже. Например, мода (по своему определению) встречается чаще всего. Допустим, что какое-то данное (какой-то результат) встретилось 10 раз. Десять раз — это много или мало, часто или редко?

Для ответа необходимо иметь в виду объём всего ряда. Действительно, 10 раз в ряду из 20 результатов — это половина, а те же 10 раз в ряду из 1000 результатов — это всего лишь одна сотая. Одновременный учёт и объёма ряда, и количества вхождений в этот ряд конкретного результата приводит к новому и крайне важному понятию *частоты*.

частота результата

$$\text{Частота результата} = \frac{\text{Сколько раз результат встретился}}{\text{Объём ряда}}$$

Посмотрим, как это выглядит в конкретном примере. Откроем задачник в начале главы 5. В первом же упражнении 20.1 есть цифры и есть буквы. Выпишем все встречающиеся цифры по порядку, слева направо, включая и номер упражнения. Получится числовой ряд:

1, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 3, 0, 3, 5, 9, 2, 3.

Составим таблицу распределения полученных 14 чисел; последний столбец — для контроля подсчётов.

Результат	0	1	2	3	5	6	9	Всего: 7
Сколько раз встретился	1	3	3	4	1	1	1	Сумма: 14

Результат «9» встретился 1 раз из 14. Поэтому его частота равна $\frac{1}{14}$. Результат «1» встретился 3 раза из тех же 14. Поэтому его частота равна $\frac{3}{14}$. Если каждое число из второй строки разделить на 14 и результаты записать в третью строку, то получится более подробная таблица.

Результат	0	1	2	3	5	6	9	Всего: 7
Сколько раз встретился	1	3	3	4	1	1	1	Сумма: 14
Частота	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	Сумма: 1

[1] Параграф написан П. В. Семеновым.

После заполнения третьей строки сведения из второй строки можно удалить. Ведь они уже учтены. Останется *таблица распределения частот*.

Результат	0	1	2	3	5	6	9	Всего: 7
Частота	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	Сумма: 1

таблица распределения частот

На практике бывает удобно всё же сохранить вторую строку и работать с более полной таблицей из трёх строчек. Во-первых, не нужно ещё раз переписывать те же данные в ещё одну таблицу из двух строк. Во-вторых, это способ проконтролировать возможные вычислительные ошибки.

ТЕОРЕМА

У любого ряда сумма частот всех данных равна единице.

Доказательство Мы проведём его для ряда, в котором встречаются 4 разных результата.

Результат	a	b	c	d	Всего: 4
Сколько раз встретился	k	m	n	s	Сумма: $v = k + m + n + s$
Частота	$\frac{k}{v}$	$\frac{m}{v}$	$\frac{n}{v}$	$\frac{s}{v}$	Сумма: ?

Найдём сумму всех частот: $\frac{k}{v} + \frac{m}{v} + \frac{n}{v} + \frac{s}{v} = \frac{k + m + n + s}{v} = \frac{v}{v} = 1.$

Теорема доказана.

Замечание Если при подсчёте частот обыкновенные дроби заменить на их приближённые значения в десятичных дробях, то сумма частот вполне может оказаться равной 1 лишь приближённо. Например, если $\frac{1}{3}$ заменить её приближением 0,333, то получим следующую таблицу.

Результат	☺	©	∞	Всего: 3
Сколько раз встретился	1	1	1	Сумма: 3
Частота	0,333	0,333	0,333	Сумма: 0,999 ≈ 1

ПРИМЕР

Следующие одночлены $(-ab)^3 \cdot (-b)^4$, $3x \cdot 4xy$, $(2b)^4 \cdot 0{,}75c$, $(-2dn)^2$, $(-pq)^5 \cdot (-p)^3$, $(-a)^{2017}$, $2ab \cdot 6c$, $(-0{,}25x) \cdot (2x)^2$, $(5c)^2 \cdot 0{,}48d$, $3x^2 + (3x)^2$, $(0{,}5y^2)^2 + 0{,}75y^4$, $(6p)^2 : 3p$ привели к стандартному виду и выписали их числовые коэффициенты. Составить: упорядоченный числовой ряд коэффициентов, таблицу распределения коэффициентов, таблицу распределения частот.

Решение У 12 одночленов есть 12 числовых коэффициентов. Вот они по порядку следования:

$$-1,\ 12,\ 12,\ 4,\ 1,\ -1,\ 12,\ -1,\ 12,\ 12,\ 1,\ 12.$$

Упорядочим этот ряд: $-1, -1, -1, 1, 1, 4, 12, 12, 12, 12, 12, 12$.
Составим таблицу распределения коэффициентов.

Коэффициент	–1	1	4	12	Всего: 4
Сколько раз встретился	3	2	1	6	Сумма: 12

Делим все данные из второй строки на 12. Результаты дописываем в третью строку.

Коэффициент	–1	1	4	12	Всего: 4
Сколько раз встретился	3	2	1	6	Сумма: 12
Частота	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	Сумма: 1

! Если мы знаем числа во второй строке, то мы знаем объём ряда и можем написать все дроби в третьей строке. Обратное утверждение неверно. Смотрите: если все числа во второй строке увеличить в 5 раз, то и объём увеличится в 5 раз. Но при этом все частоты останутся неизменными, так как общий множитель 5 сократится при вычислении нужной дроби. Вывод: зная только частоты результатов, невозможно сказать, сколько именно раз встретился каждый результат. Для ответа необходимо знать объём ряда: умножая частоту на объём, мы найдём, сколько раз встретился результат.

Вопросы для самопроверки

Подряд выписали числа от 11 до 20. Между цифрами поставили запятые: 1, 1, 1, 2, ..., 1, 9, 2, 0.

1. Для полученного ряда цифр найдите:
а) объём; б) размах; в) моду; г) медиану; д) частоту цифры 7; е) частоту моды.

2. Может ли частота результата равняться 1,1; 0,1; –0,1?
3. Может ли частота равняться нулю?
4. Приведите пример ряда объёма 20, в котором ровно 5 разных данных одинаковой частоты.
5. Верно ли, что частота результата определена только для рядов, состоящих из чисел?

Основные результаты

Перечислим главное из того, что обсуждалось в этой главе, а вы проверьте, знаете ли вы то, что написано ниже, и сможете ли объяснить это постороннему человеку.

- Итак, основное из того, что мы изучили в главе 4:
  — понятие одночлена;
  — запись одночлена в стандартном виде;
  — понятие коэффициента одночлена;
  — понятие подобных одночленов;
  — какие одночлены можно складывать (вычитать), какие нельзя;
  — как складывать (вычитать) подобные одночлены;
  — как представить одночлен в виде суммы подобных одночленов;
  — как перемножать одночлены;
  — как возвести одночлен в натуральную степень;
  — в каком случае один одночлен можно разделить на другой и как это сделать.
- Мы познакомились с понятием частоты результата измерения и с тем, как составлять таблицы распределения частот.

Темы исследовательских работ

1. Деление одночлена на одночлен.
2. Частота результата. Таблица распределения частот.

6 ГЛАВА МНОГОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

§ 29 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В главе 5 мы уже отмечали, что не любые одночлены можно складывать и вычитать, а только подобные; также отмечали и то, что реальная задача может привести к такой математической модели, в которой будет содержаться сумма неподобных одночленов. Для изучения таких сумм в математике введено понятие многочлена.

Определение

Многочленом называют сумму одночленов.

Примеры многочленов:

$2a + b$; $5a^2b - 3ab^2 - 3ab^2 + 7c$; $x^5 + x^4 + x^2 - 2$.

а-я

многочлен

двучлен

трёхчлен

Разумеется, существуют алгебраические выражения, не являющиеся многочленами. Например, $\frac{x}{y}$, $2x^2 + 5y - \frac{2}{y}$.

Слагаемые (одночлены), из которых состоит многочлен, называют **членами многочлена:** если их два, то говорят, что дан **двучлен** (например, $2a + b$ — двучлен), если их три, то говорят, что дан **трёхчлен** (например, трёхчленом является выражение $5a^2 - 2cb^2 + 7c$). С этой точки зрения становится понятнее термин «одночлен» и то, что одночлен обычно считают частным случаем многочлена.

Рассмотрим многочлен

$$2ab^2 \cdot 3a^2b - 5a - 7a + 3b^2 - \frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a - 2b^2.$$

То, что это — многочлен, сомнению не подлежит (поскольку записана сумма одночленов), но нравится ли вам такая запись? Наверное, нет. Почему?

Во-первых, одночлен $2ab^2 \cdot 3a^2b$ не записан в стандартном виде, а мы знаем, что стандартный вид — наиболее удобная запись одночлена. Приведя его к стандартному виду, получим $6a^3b^3$.

Аналогично надо привести к стандартному виду ещё один член многочлена, а именно $-\frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a$. Получим $-2a^3b^3$.

Теперь запись данного многочлена принимает более приятный вид $6a^3b^3 - 5a - 7a + 3b^2 - 2a^3b^3 - 2b^2$.

Во-вторых, поскольку от перемены мест слагаемых сумма не меняется, подобные одночлены можно расположить рядом, а затем сложить.

Получим

$$(6a^3b^3 - 2a^3b^3) + (-5a - 7a) + (3b^2 - 2b^2) = 4a^3b^3 - 12a + b^2.$$

Правда, обычно подобные одночлены в многочлене не переставляют, их одинаково подчёркивают, а потом складывают:

$$\underline{6a^3b^3} - \underline{\underline{5a}} - \underline{\underline{7a}} + \underline{\underline{\underline{3b^2}}} - \underline{2a^3b^3} - \underline{\underline{\underline{2b^2}}} = 4a^3b^3 - 12a + b^2.$$

Эту процедуру называют **приведением подобных членов.**

Если в многочлене все члены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то говорят, что многочлен приведён к **стандартному виду** (или записан в стандартном виде).

приведение подобных членов

стандартный вид многочлена

Теперь вы понимаете, почему запись $4a^3b^3 - 12a + b^2$ предпочтительнее первоначальной записи

$$2ab^2 \cdot 3a^2b - 5a - 7a + 3b^2 - \frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a - 2b^2?$$

Дело в том, что первоначальная запись — не стандартный вид многочлена, а $4a^3b^3 - 12a + b^2$ — стандартный вид.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду. Условимся в дальнейшем всегда с этого начинать — так удобнее производить действия с многочленами.

Обычно многочлен обозначают буквой p или P — с этой буквы начинается греческое слово *polys* («многий», «многочисленный»; многочлены в математике называют также *полиномами*). В обозначение включают и переменные, из которых состоят члены многочлена. Например, многочлен $2x^2 - 5x + 3$ обозначают $p(x)$ — читают «пэ от икс»; многочлен $2x^2 + 3xy - y^4$ обозначают $p(x; y)$ — читают «пэ от икс, игрек» и т. д.

ПРИМЕР

Дан многочлен

$$p(x; y) = 2x \cdot 3xy^2 - 7x^3 \cdot 2x - 3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - 2xy \cdot 4y^2.$$

а) Записать его в стандартном виде;

б) вычислить: $p(1; 2)$; $p(-1; 1)$; $p(0; 1)$.

Решение а) $2x \cdot 3xy^2 - 7x^3 \cdot 2x - 3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - 2xy \cdot 4y^2 =$

$$= \underline{6x^2y^2} - \underline{\underline{14x^4}} - \underline{\underline{3x^4}} + 2y^4 + \overline{5x^2y^2} - 8xy^3 =$$

$$= 11x^2y^2 - 17x^4 + 2y^4 - 8xy^3;$$

это стандартный вид многочлена.

б) Запись $p(1; 2)$ означает, что нужно найти значение многочлена $p(x; y)$ при $x = 1$, $y = 2$. Вычисления будем производить для многочлена, записанного в стандартном виде:

$$p(x; y) = 11x^2y^2 - 17x^4 + 2y^4 - 8xy^3.$$

Имеем:

$$p(1; 2) = 11 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 17 \cdot 1^4 + 2 \cdot 2^4 - 8 \cdot 1 \cdot 2^3 =$$
$$= 44 - 17 + 32 - 64 = -5.$$

Итак, $p(1; 2) = -5$.

Аналогично

$$p(-1; 1) = 11 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2 - 17 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot (-1) \cdot 1^3 =$$
$$= 11 - 17 + 2 + 8 = 4,$$

т. е. $p(-1; 1) = 4$.

Наконец,

$$p(0; 1) = 11 \cdot 0^2 \cdot 1^2 - 17 \cdot 0^4 + 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot 0 \cdot 1^3 =$$
$$= 0 - 0 + 2 - 0 = 2.$$

Итак, $p(0; 1) = 2$.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое многочлен?
2. Опишите процесс приведения многочлена к стандартному виду. Прокомментируйте это на примере приведения к стандартному виду многочлена $2ababc - 3abcb^2 + 4bcbab + 5a^2bcb$.
3. Если $p(x; y) = 3x^2y - 2xy^2 + 2x - 3y$, то чему равно $p(1; -1)$?

§ 30 СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

В предыдущем параграфе мы ввели понятия многочлена и стандартного вида многочлена. Вы уже, наверное, начинаете привыкать к тому, что, введя новое понятие, надо учиться работать с ним. В частности, будем учиться выполнять арифметические операции над многочленами.

Начинаем со сложения и вычитания. Это очень простые операции: чтобы сложить несколько многочленов, их записывают в скобках со знаком «+» между скобками, раскрывают скобки и приводят подобные члены. При вычитании одного многочлена из другого их записывают в скобках со знаком «−» перед вычитаемым, раскрывают скобки и приводят подобные члены.

ПРИМЕР 1

Сложить многочлены:

а) $p_1(x) = 2x^2 + 3x - 8$ и $p_2(x) = 5x + 2$;

б) $p_1(a;\ b) = a^2 + 2ab - b^2$, $p_2(a;\ b) = 2a^3 - a^2 + 3ab - b^2 + 5$, $p_3(a;\ b) = a^2 - ab - b^2 - 4$.

Решение а) Обозначим сумму многочленов через $p(x)$. Тогда

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) =$$
$$= (2x^2 + 3x - 8) + (5x + 2) = 2x^2 + 3x - 8 + 5x + 2 =$$
$$= 2x^2 + (3x + 5x) + (-8 + 2) = 2x^2 + 8x - 6.$$

б) Обозначим сумму многочленов через $p(a;\ b)$. Тогда

$$p(a;\ b) = p_1(a;\ b) + p_2(a;\ b) + p_3(a;\ b) =$$
$$= (a^2 + 2ab - b^2) + (2a^3 - a^2 + 3ab - b^2 + 5) + (a^2 - ab - b^2 - 4) =$$
$$= \underline{a^2} + \underline{\underline{2ab}} - \underline{\underline{\underline{b^2}}} + 2a^3 - \underline{a^2} + \underline{\underline{3ab}} - \underline{\underline{\underline{b^2}}} + \underset{\sim}{5} + \underline{a^2} - \underline{\underline{ab}} - \underline{\underline{\underline{b^2}}} - \underset{\sim}{4} =$$
$$= a^2 + 4ab - 3b^2 + 2a^3 + 1.$$

ПРИМЕР 2

Найти разность многочленов

$$p_1(x;\ y) = x^3 + y^3 + 2x + 3y + 5$$

и

$$p_2(x;\ y) = x^3 - y^3 - 5x + 3y - 7.$$

Решение Обозначим разность многочленов через $p(x;\ y)$. Тогда

$$p(x;\ y) = p_1(x;\ y) - p_2(x;\ y) =$$
$$= (x^3 + y^3 + 2x + 3y + 5) - (x^3 - y^3 - 5x + 3y - 7) =$$
$$= \underline{x^3} + \underline{\underline{y^3}} + 2x + \underline{\underline{\underline{3y}}} + \underset{\sim}{5} - \underline{x^3} + \underline{\underline{y^3}} + 5x - \underline{\underline{\underline{3y}}} + \underset{\sim}{7} = 2y^3 + 7x + 12.$$

! Обратите внимание: $x^3 - x^3 = 0$ и $3y - 3y = 0$. Поэтому «исчезли» одночлен x^3 и одночлен $3y$ из состава обоих многочленов. В таких случаях говорят: x^3 и $-x^3$, $3y$ и $-3y$ *взаимно уничтожились* (правда, школьники в таких случаях любят говорить «сократились», но так говорить не следует: термин «сокращение» в математике принято употреблять только по отношению к дробям; например, можно сократить дробь $\frac{15}{20}$ и тогда получится $\frac{3}{4}$).

Заметим, что сложение и вычитание многочленов выполняют по одному и тому же правилу, т. е. необходимости в различении операций сложения и вычитания нет, значит, нет и особой необходимости в использовании двух терминов «сложение многочленов», «вычитание многочленов». Вместо них можно употребить термин *алгебраическая сумма многочленов*. Вот несколько примеров алгебраических сумм трёх многочленов $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$:

$$p_1(x) + p_2(x) + p_3(x);$$
$$p_1(x) - p_2(x) + p_3(x);$$
$$p_1(x) - p_2(x) - p_3(x);$$
$$p_2(x) - p_3(x) + p_1(x).$$

Теперь мы можем подвести итог всему сказанному в этом параграфе в виде следующего правила составления алгебраической суммы многочленов.

Правило 1 Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены. При этом если перед скобкой стоит знак «+», то при раскрытии скобок надо знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, оставить без изменения. Если же перед скобкой стоит знак «−», то при раскрытии скобок нужно знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, заменить на противоположные («+» на «−», «−» на «+»).

! А теперь обязательно вернитесь к примерам 1 и 2 и прокомментируйте (хотя бы для себя) их решение с помощью этого правила. Сделали? Тогда рассмотрим заключительный пример.

ПРИМЕР 3

Даны три многочлена:

$$p_1(x) = 2x^2 + x - 3; \quad p_2(x) = x^2 - 3x + 1; \quad p_3(x) = 5x^2 - 2x - 8.$$

Найти алгебраическую сумму

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_3(x).$$

Решение $p(x) = (2x^2 + x - 3) + (x^2 - 3x + 1) - (5x^2 - 2x - 8) =$
$= \underline{2x^2} + \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{\underline{3}}} + \underline{x^2} - \underline{\underline{3x}} + \underline{\underline{\underline{1}}} - \underline{5x^2} + \underline{\underline{2x}} + \underline{\underline{\underline{8}}} = -2x^2 + 6.$

Вопросы для самопроверки

1. Может ли сумма двух многочленов быть одночленом? Если да, то приведите пример.
2. Может ли разность двух многочленов быть одночленом? Если да, то приведите пример.
3. Всегда ли задание найти сумму или разность многочленов является корректным?
4. Может ли сумма или разность двух многочленов быть равной числу? Если да, то приведите пример.
5. Приведите пример многочлена, у которого есть взаимно уничтожающиеся члены.

§31 УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Вы, наверное, заметили, что до сих пор глава 6 строилась по тому же плану, что и глава 5. В обеих главах сначала вводились основные понятия: в главе 5 — одночлен, стандартный вид одночлена, коэффициент одночлена; в главе 6 — многочлен, стандартный вид многочлена. Затем в главе 5 мы рассматривали сложение и вычитание одночленов; аналогично в главе 6 — сложение и вычитание многочленов.

Что было в главе 5 дальше? Дальше мы говорили об умножении одночленов. Значит, по аналогии, о чём нам следует поговорить теперь? Об умножении многочленов. Но здесь придётся действовать не спеша: сначала (в этом параграфе) рассмотрим умножение многочлена на одночлен (или одночлена на многочлен, это всё равно), а потом (в следующем параграфе) — умножение любых многочленов. Когда вы в младших классах учились перемножать числа, вы ведь тоже действовали постепенно: сначала учились умножать многозначное число на однозначное и только потом умножали многозначное число на многозначное.

Приступим к делу. При умножении многочлена на одночлен используют распределительный закон умножения: $(a + b)c = ac + bc$.

ПРИМЕР 1

Выполнить умножение $(2a^2 - 3ab) \cdot (-5a)$.

Решение Введём новые переменные:

$$x = 2a^2, \quad y = -3ab, \quad z = -5a.$$

Тогда данное произведение перепишем в виде $(x + y)\,z$, что по распределительному закону равно $xz + yz$. Теперь вернёмся к старым переменным:

$$xz + yz = 2a^2 \cdot (-5a) + (-3ab) \cdot (-5a).$$

Нам остаётся лишь найти произведения одночленов. Получим

$$-10a^3 + 15a^2b.$$

Приведём краткую запись решения (так мы и будем записывать в дальнейшем, не вводя новых переменных):

$$(2a^2 - 3ab) \cdot (-5a) = 2a^2 \cdot (-5a) + (-3ab) \cdot (-5a) =$$
$$= -10a^3 + 15a^2b.$$

Теперь мы можем сформулировать соответствующее правило умножения многочлена на одночлен.

Правило 2 Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

Это же правило действует и при умножении одночлена на многочлен:

$$-5a\,(2a^2 - 3ab) = (-5a) \cdot 2a^2 + (-5a) \cdot (-3ab) = -10a^3 + 15a^2b$$

(мы взяли пример 1, но поменяли местами множители).

ПРИМЕР 2

Представить заданный многочлен в виде произведения многочлена и одночлена:

а) $2x^2y + 4x$; б) $x^2 + 3y^2$.

Решение а) Заметим, что $2x^2y = 2x \cdot xy$, а $4x = 2x \cdot 2$. Значит,

$$2x^2y + 4x = xy \cdot 2x + 2 \cdot 2x = (xy + 2) \cdot 2x.$$

б) В примере а) нам удалось в составе каждого члена многочлена $2x^2y + 4x$ выделить одинаковую часть (одинаковый множитель) $2x$. Здесь же такой общей части нет. Тем не менее и многочлен $x^2 + 3y^2$ можно представить в виде произведения, например, так:

$$x^2 + 3y^2 = (2x^2 + 6y^2) \cdot 0{,}5$$

или так:

$$x^2 + 3y^2 = (x^2 + 3y^2) \cdot 1.$$

Но это — искусственное преобразование и без большой необходимости не используется.

Кстати, требование представить заданный многочлен в виде произведения одночлена и многочлена встречается в математике довольно часто, поэтому указанной процедуре присвоено специальное название: *вынесение общего множителя за скобки*. Задание вынести общий множитель за скобки может быть корректным (как в примере 2а)), а может быть и не совсем корректным (как в примере 2б)). В следующей главе мы специально рассмотрим этот вопрос.

вынесение общего множителя за скобки

ПРИМЕР 3

Дан многочлен $p(x;\ y;\ z) = ax + by + cz$, где a, b, c — некоторые коэффициенты, x, y, z — переменные. Известно, что $p(12;\ 8;\ 6) = 48$. Вычислить $p\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)$.

Решение

Подставим в данный многочлен вместо переменных x, y, z их заявленные значения 12, 8, 6 соответственно. Получим $p(12;\ 8;\ 6) = 12a + 8b + 6c = 48$. Теперь составим выражение для $p\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)$; получим $p\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c$. Умножим обе части этого равенства на 24:

$$24p\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right) = 24\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c\right) = 12a + 8b + 6c = 48.$$

Итак, $24p\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right) = 48$, значит, $p\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right) = 2$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте правило умножения многочлена на одночлен. Проиллюстрируйте его на придуманном вами примере умножения трёхчлена на одночлен.
2. Всегда ли задание представить заданный многочлен в виде произведения многочлена и одночлена является корректным?

§ 32 УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Овладев правилом умножения многочлена на одночлен, нетрудно сделать следующий шаг: получить правило умножения любых двух многочленов. Рассмотрим сначала произведение самых простых (после одночленов) многочленов, а именно двучленов $a + b$ и $c + d$.

Итак, пусть нужно раскрыть скобки в произведении $(a + b)(c + d)$. Введём новую переменную $m = c + d$, тогда получим:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)m = am + bm.$$

Вернёмся к исходным переменным:

$$am + bm = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Таким образом,

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Аналогично можно проверить, что

$$(a + b + c)(x + y) = ax + ay + bx + by + cx + cy$$

(сделайте это!), т. е., как и в случае умножения двучлена на двучлен, приходится *каждый* член первого многочлена поочерёдно умножать *на каждый* член второго многочлена и полученные произведения складывать.

Правило 3 Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена поочерёдно на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

В результате умножения многочленов всегда получается многочлен, надо лишь привести его к стандартному виду.

ПРИМЕР 1

Выполнить умножение многочленов

$$p_1(x) = 2x^2 - 5x + 1 \text{ и } p_2(x) = 3x - 4.$$

Решение

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = (2x^2 - 5x + 1)(3x - 4) =$$
$$= 2x^2 \cdot 3x + 2x^2 \cdot (-4) + (-5x) \cdot 3x + (-5x) \cdot (-4) + 1 \cdot 3x + 1 \cdot (-4) =$$
$$= 6x^3 - 8x^2 - 15x^2 + 20x + 3x - 4 = 6x^3 - 23x^2 + 23x - 4.$$

! Особенно внимательно нужно следить за знаками коэффициентов тех одночленов, которые получаются при раскрытии скобок. И ещё один совет: если у одного многочлена m членов, а у другого n членов, то в произведении должно быть (до приведения подобных членов) mn членов; если же их не mn, то вы что-то потеряли, проверьте. Так, в рассмотренном примере мы умножали трёхчлен на двучлен, получилась сумма шести слагаемых (а после приведения подобных членов осталось четыре слагаемых).

ПРИМЕР 2

Даны многочлены

$$p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 7,\ q(x) = x^5 - 7x^3 + 4x + 1.$$

Чему равна сумма коэффициентов многочлена $h(x) = (p(x))^2q(x)$?

Решение Можно, конечно, перемножить многочлены $p(x)$, $p(x)$, $q(x)$, привести произведение к стандартному виду, выписать последовательно все полученные коэффициенты, а затем найти их сумму. Но есть значительно более красивый и рациональный способ решения. Чтобы его понять, рассмотрим вспомогательный пример.

Пусть дан многочлен $r(x) = x^6 + 2x^5 + 12x^4 - 13x^3 - 15x^2 + 10x - 17$; вычислим $r(1)$: $r(1) = 1 + 2 + 12 - 13 - 15 + 10 - 17 = -20$. Но обратите внимание: $1 + 2 + 12 - 13 - 15 + 10 - 17$ — это как раз сумма коэффициентов многочлена $r(x)$. Вообще, чтобы найти сумму коэффициентов произвольного многочлена $m(x)$, достаточно вычислить $m(1)$.

Вернёмся к нашей задаче и вычислим $h(1)$:

$$h(1) = (p(1))^2q(1) = (2 + 3 - 5 + 1 - 7)^2 \cdot (1 - 7 + 4 + 1) = -36.$$

Ответ Сумма коэффициентов многочлена $h(x)$ равна -36.

ПРИМЕР 3

Натуральные числа A и B дают при делении на 3 остатки соответственно 1 и 2. Доказать, что $(A + B)^2 \,⋮\, 9$.

Решение Число A при делении на 3 даёт в остатке 1, значит, число A можно представить в виде $A = 3n + 1$; аналогично число B можно представить в виде $A = 3k + 2$, где n, k — натуральные числа. Но тогда $(A + B)^2 = (3n + 1 + 3k + 2)^2 = (3\,(n + k + 1))^2 = 9\,(n + k + 1)^2$. Ясно, что это произведение делится на 9.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен. Проиллюстрируйте его на придуманном вами примере умножения двучлена на двучлен.
2. Всегда ли задание найти произведение двух многочленов является корректным?

§ 33 ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

Имеется несколько случаев, когда умножение одного многочлена на другой приводит к компактному, легко запоминающемуся результату. В этих случаях предпочтительнее не умножать каждый раз один многочлен на другой, а пользоваться готовым результатом. Рассмотрим эти случаи.

1 Квадрат суммы и квадрат разности

Умножим двучлен $a + b$ на себя, т. е. раскроем скобки в произведении $(a + b)(a + b)$ или, что то же самое, в выражении $(a + b)^2$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = \\ = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Аналогично получаем:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}} \qquad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

На обычном языке формулу (1) читают так: ***квадрат суммы двух выражений равен сумме их квадратов плюс их удвоенное произведение.***

Формулу (2) читают так: ***квадрат разности двух выражений равен сумме их квадратов минус их удвоенное произведение.***

квадрат суммы

квадрат разности

Этим формулам присвоены специальные названия: формуле (1) — **квадрат суммы,** формуле (2) — **квадрат разности.**

ПРИМЕР 1

Раскрыть скобки в выражении:
а) $(3x + 2)^2$; б) $(5a^2 - 4b^3)^2$.

Решение

а) Воспользуемся формулой (1), учтя, что в роли a выступает $3x$, а в роли b — число 2:

$$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4.$$

б) Воспользуемся формулой (2), учтя, что в роли a выступает $5a^2$, а в роли b выступает $4b^3$:

$$(5a^2 - 4b^3)^2 = (5a^2)^2 - 2 \cdot 5a^2 \cdot 4b^3 + (4b^3)^2 = 25a^4 - 40a^2b^3 + 16b^6.$$

При использовании формул квадрата суммы или квадрата разности учитывайте, что:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2;$$
$$(b - a)^2 = (a - b)^2.$$

Это следует из того, что $(-a)^2 = a^2$.

Отметим, что на формулах (1) и (2) основаны некоторые математические фокусы, позволяющие производить вычисления в уме. Например, можно практически устно возводить в квадрат двузначные числа, оканчивающиеся на 1, 2, 8 и 9. Смотрите:

$$71^2 = (70 + 1)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041;$$
$$91^2 = (90 + 1)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 1 + 1^2 = 8100 + 180 + 1 = 8281;$$
$$69^2 = (70 - 1)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 - 140 + 1 = 4761;$$
$$102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 =$$
$$= 10\,000 + 400 + 4 = 10\,404;$$
$$48^2 = (50 - 2)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304.$$

Но самый элегантный фокус связан с возведением в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5. Проведём соответствующие рассуждения для числа 85^2:

$$85^2 = (80 + 5)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 5 + 5^2 =$$
$$= 80 \cdot (80 + 10) + 25 = 80 \cdot 90 + 25 = 7200 + 25 = 7225.$$

Замечаем, что для вычисления 85^2 достаточно было умножить 8 на 9 и к полученному результату приписать справа 25. Аналогично можно поступать и в других случаях. Например, $35^2 = 1225$ ($3 \cdot 4 = 12$ и к полученному числу приписали справа 25); $65^2 = 4225$; $125^2 = 15\,625$ ($12 \cdot 13 = 156$ и к полученному числу приписали справа 25).

Приведём доказательство отмеченного факта.

Пусть число a оканчивается цифрой 5, это значит, что $a = 10b + 5$, где b — число, полученное из числа a отбрасыванием последней цифры 5 (например, $125 = 10 \cdot 12 + 5$; здесь $b = 12$). Тогда

$$a^2 = (10b + 5)^2 = 100b^2 + 100b + 25 = 100b\,(b + 1) + 25.$$

Получили, что число b надо умножить на $b + 1$, умножить полученное произведение на 100 и затем прибавить 25. Это равносильно тому, что к числу $b(b + 1)$ справа приписать 25.

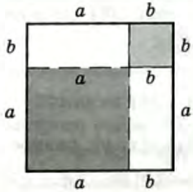


Рис. 78

Раз уж мы с вами заговорили о различных любопытных обстоятельствах, связанных со скучными (на первый взгляд) формулами (1) и (2), то дополним этот разговор следующим геометрическим рассуждением. Пусть a и b — положительные числа. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b$ и вырежем в двух его углах квадраты со сторонами, соответственно равными a и b (рис. 78).

Площадь квадрата со стороной $a + b$ равна $(a + b)^2$. Этот квадрат мы разрезали на четыре части: квадрат со стороной a (его площадь равна a^2), квадрат со стороной b (его площадь равна b^2), два прямоугольника со сторонами a и b (площадь каждого такого прямоугольника равна ab). Значит, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, т. е. получили формулу (1).

ПРИМЕР 2

Вычислить наиболее рациональным способом

$$(729 - 171)^2 + 4 \cdot 729 \cdot 171.$$

Решение

$$(729 - 171)^2 + 4 \cdot 729 \cdot 171 =$$
$$= 729^2 - 2 \cdot 729 \cdot 171 + 171^2 + 4 \cdot 729 \cdot 171 =$$
$$= 729^2 + 2 \cdot 729 \cdot 171 + 171^2 = (729 + 171)^2 = 900^2 = 810\ 000.$$

ПРИМЕР 3

Решить уравнение $(3x - 2)^2 + (4x + 1)^2 = (5x - 3)^2$.

Решение Воспользуемся формулами квадрата суммы и квадрата разности:

$$(9x^2 - 12x + 4) + (16x^2 + 8x + 1) = 25x^2 - 30x + 9;$$
$$9x^2 - 12x + 4 + 16x^2 + 8x + 1 - (25x^2 - 30x + 9) = 0;$$
$$26x - 4 = 0;$$
$$x = \frac{2}{13}.$$

ПРИМЕР 4

Найти ту пару значений переменных x, y, при которых многочлен $p(x; y) = (2x + 3y - 22)^4 + 9x^2 + 5 + y^2 - 6xy$ принимает наименьшее значение.

Решение Заметим, что $9x^2 + y^2 - 6xy = (3x - y)^2$. Значит, $p(x; y) = (2x + 3y - 22)^4 + (3x - y)^2 + 5$. Выражения $(3x - y)^2$ и $(2x + 3y - 22)^4$ принимают неотрицательные значения при любых значениях переменных, а потому наименьшим значением заданного многочлена будет число 5, при одновременном выполнении двух условий: $2x + 3y - 22 = 0$, $3x - y = 0$. Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - 22 = 0, \\ 3x - y = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = 2$, $y = 6$.

Ответ Наименьшее значение многочлена $p(x; y)$, равное 5, достигается при $x = 2$, $y = 6$.

2 Разность квадратов

Умножим двучлен $a + b$ на двучлен $a - b$:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Итак,

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.} \qquad (3)$$

разность квадратов

Любое равенство в математике употребляют как слева направо (т. е. левая часть равенства заменяется его правой частью), так и справа налево (т. е. правая часть равенства заменяется его левой частью). Если формулу (3) использовать слева направо, то она позволяет заменить произведение $(a + b)(a - b)$ готовым результатом $a^2 - b^2$. Эту же формулу можно использовать справа налево, тогда она позволяет заменить разность квадратов $a^2 - b^2$ произведением $(a + b)(a - b)$. Формуле (3) в математике дано специальное название — **разность квадратов.**

Не путайте термины «разность квадратов» и «квадрат разности». Разность квадратов — это $a^2 - b^2$, значит, речь идёт о формуле (3); квадрат разности — это $(a - b)^2$, значит, речь идёт о формуле (2).

На обычном языке формулу (3) читают справа налево так:

разность квадратов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на их разность.

ПРИМЕР 5

Выполнить умножение $(3x - 2y)(3x + 2y)$.

Решение $(3x - 2y)(3x + 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$.

ПРИМЕР 6

Представить двучлен $16x^4 - 9$ в виде произведения двучленов.

Решение Заметим, что $16x^4 = (4x^2)^2$, $9 = 3^2$, значит, заданный двучлен есть разность квадратов, т. е. к нему можно применить формулу (3), прочитанную справа налево:

$$16x^4 - 9 = (4x^2)^2 - 3^2 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3).$$

Формула (3), как и формулы (1) и (2), используется иногда для быстрого счёта. Смотрите:

$$79 \cdot 81 = (80 - 1)(80 + 1) = 80^2 - 1^2 = 6400 - 1 = 6399;$$
$$42 \cdot 38 = (40 + 2)(40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596.$$

ПРИМЕР 7

Вычислить наиболее рациональным способом $6275 \cdot 6269 - 6272^2$.

Решение $6275 \cdot 6269 - 6272^2 = (6272 + 3) \cdot (6272 - 3) - 6272^2 =$
$= (6272^2 - 3^2) - 6272^2 = -9.$

ПРИМЕР 8

Найти отрицательный корень уравнения

$$x^4 = 631 \cdot 619 + 36.$$

Решение Рассмотрим правую часть уравнения:

$$631 \cdot 619 + 36 = (625 + 6)(625 - 6) + 36 =$$
$$= (625^2 - 6^2) + 36 = 625^2 = 25^4.$$

Теперь заданное уравнение мы можем переписать в виде $x^4 = 25^4$, отрицательным корнем этого уравнения является число -25.

Ответ $x = -25$.

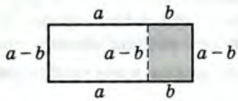


Рис. 79

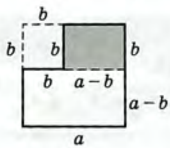


Рис. 80

Завершим разговор о формуле разности квадратов любопытным геометрическим рассуждением. Пусть a и b — положительные числа, причём $a > b$. Рассмотрим прямоугольник со сторонами $a + b$ и $a - b$ (рис. 79). Его площадь равна $(a + b)(a - b)$. Отрежем прямоугольник со сторонами b и $a - b$ и подклеим его к оставшейся части так, как показано на рисунке 80. Ясно, что полученная фигура имеет ту же площадь, т. е. $(a + b)(a - b)$. Но эту фигуру можно построить так: из квадрата со стороной a вырезать квадрат со стороной b (это хорошо видно на рис. 80). Значит, площадь новой фигуры равна $a^2 - b^2$. Итак, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, т. е. получили формулу (3).

3 Разность кубов и сумма кубов

Умножим двучлен $a - b$ на трёхчлен $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a \cdot a^2 + a \cdot ab + a \cdot b^2 - b \cdot a^2 - b \cdot ab -$$
$$- b \cdot b^2 = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Аналогично

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

(проверьте это сами).

Итак,

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3; \qquad (4)$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \qquad (5)$$

Формулу (4) обычно называют **разностью кубов**, формулу (5) — **суммой кубов** (по виду правой части).

разность кубов

сумма кубов

Попробуем перевести формулы (4) и (5) на обычный язык. Прежде чем это сделать, заметим, что выражение $a^2 + ab + b^2$ похоже на выражение $a^2 + 2ab + b^2$, которое фигурировало в формуле (1) и давало $(a + b)^2$; выражение $a^2 - ab + b^2$ похоже на выражение $a^2 - 2ab + b^2$, которое фигурировало в формуле (2) и давало $(a - b)^2$.

Чтобы отличить (в языке) эти пары выражений друг от друга, каждое из выражений $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$ называют **полным квадратом** (суммы или разности), а каждое из выражений $a^2 + ab + b^2$ и $a^2 - ab + b^2$ называют **неполным квадратом** (суммы или разности). Тогда получается следующий перевод формул (4) и (5) (прочитанных справа налево) на обычный язык:

разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы;

сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.

ПРИМЕР 9

Выполнить умножение $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$.

Решение Так как первый множитель есть разность одночленов $2x$ и 1, а второй множитель — неполный квадрат их суммы, то можно воспользоваться формулой (4):

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1.$$

ПРИМЕР 10

Представить двучлен $27a^6 + 8b^3$ в виде произведения многочленов.

Решение Заметим, что $27a^6 = (3a^2)^3$, $8b^3 = (2b)^3$. Значит, заданный двучлен есть сумма кубов, т. е. к нему можно применить формулу (5), прочитанную справа налево:

$$27a^6 + 8b^3 = (3a^2)^3 + (2b)^3 =$$
$$= (3a^2 + 2b)((3a^2)^2 - 3a^2 \cdot 2b + (2b)^2) =$$
$$= (3a^2 + 2b)(9a^4 - 6a^2b + 4b^2).$$

ПРИМЕР 11

Вычислить наиболее рациональным способом $0{,}546^3 + 0{,}454^3 + 3 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454$.

Решение

$$(0{,}546^3 + 0{,}454^3) + 3 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454 =$$
$$= (0{,}546 + 0{,}454)(0{,}546^2 - 0{,}546 \cdot 0{,}454 + 0{,}454^2) + 3 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454 =$$
$$= 0{,}546^2 - 0{,}546 \cdot 0{,}454 + 0{,}454^2 + 3 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454 =$$
$$= 0{,}546^2 + 2 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454 + 0{,}454^2 = (0{,}546 + 0{,}454)^2 = 1^2 = 1.$$

4 Куб суммы и куб разности

Рассмотрим выражение $(a + b)^3$. Имеем:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Аналогично получаем:

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + b^2a - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}} \qquad \begin{matrix}(6)\\(7)\end{matrix}$$

Формулу (6) читают так:

куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения.

Формулу (7) читают так:

куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения.

куб суммы
куб разности

Этим формулам присвоены специальные названия: формуле (6) — **куб суммы**, формуле (7) — **куб разности**.

ПРИМЕР 12

Раскрыть скобки в выражении:

а) $(2a + 3b)^3$; б) $(x^2 - 5y^3)^3$.

Решение

а) $(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (3b) + 3 \cdot (2a) \cdot (3b)^2 + (3b)^3 =$
$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3;$

б) $(x^2 - 5y^3)^3 = (x^2)^3 - 3 \cdot (x^2)^2 \cdot (5y^3) + 3 \cdot (x^2)(5y^3)^2 - (5y^3)^3 =$
$= x^6 - 15x^4y^3 + 75x^2y^6 - 125y^9.$

ПРИМЕР 13

Решить уравнение $x^3 - 448 = 149^3 + 3 \cdot 149^2$.

Решение Заметив, что $448 = 447 + 1 = 3 \cdot 149 + 1 = 3 \cdot 149 \cdot 1^2 + 1^3$, перепишем данное уравнение следующим образом: $x^3 = 149^3 + 3 \cdot 149^2 \cdot 1 + 3 \cdot 149 \cdot 1^2 + 1^3$. В правой части получился куб суммы чисел 149 и 1, т. е. приходим к уравнению $x^3 = (149 + 1)^3$. Получаем: $x^3 = 150^3$; $x = 150$.

В заключение ещё раз подчеркнём, что все полученные в этом параграфе формулы (1)—(7) используют как слева направо, так и справа налево, только в первом случае (слева направо) говорят, что (1)—(7) — *формулы сокращённого умножения*, а во втором случае (справа налево) говорят, что (1)—(7) — *формулы разложения на множители*.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равен квадрат суммы двух выражений? Запишите это утверждение на математическом языке.
2. Чему равен квадрат разности двух выражений? Запишите это утверждение на математическом языке.
3. Можно ли данный многочлен представить в виде квадрата суммы или квадрата разности? Если да, то сделайте это; если нет, то объясните почему:
   а) $a^2 + 4ab + 4b^2$; в) $x^2 + 20xy + 25y^2$;
   б) $x^4 - 2x^2y + y^2$; г) $x^4 - 2x^2y + 2y^2$.
4. Чему равна разность квадратов двух выражений? Запишите это утверждение на математическом языке.
5. Вычислите устно: а) $21 \cdot 19$; б) $58 \cdot 62$.
6. Чему равна сумма кубов двух выражений? Запишите это утверждение на математическом языке.
7. Чему равна разность кубов двух выражений? Запишите это утверждение на математическом языке.
8. Какой из многочленов можно назвать полным квадратом, а какой — неполным квадратом: $x^2 + 5xy + 25y^2$, $x^2 - 10xy + 25y^2$?

9. Чему равен куб суммы двух выражений? Запишите это утверждение на математическом языке.
10. Чему равен куб разности двух выражений? Запишите это утверждение на математическом языке.

§ 34 МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ПОЛНОГО КВАДРАТА

метод выделения полного квадрата

Во многих задачах бывает полезно преобразовать заданное выражение так, чтобы, обнаружив в нём в разных местах три слагаемых вида a^2, b^2 и $2ab$, объединить их в одну группу $(a^2 + b^2 + 2ab)$, что позволит записать эту группу слагаемых в виде квадрата суммы $(a + b)^2$. В этом заключается определённый метод рассуждений, который обычно называют **методом выделения полного квадрата**. Рассмотрим ряд примеров.

ПРИМЕР 1

Найти наименьшее значение многочлена $p(x)$:

а) $p(x) = x^2 - 6x + 8$; б) $p(x) = 2x^2 + 3x - 5$.

При каком значении x оно достигается?

Решение а) $p(x) = x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 1 = (x - 3)^2 - 1$.

Теперь ясно, что наименьшее значение достигается многочленом при $x = 3$; $p(3) = -1$. Почему? Потому что наименьшее значение выражения $(x - 3)^2$ равно 0, оно достигается при $x = 3$.

б) $$p(x) = 2x^2 + 3x - 5 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) - 5 = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x\right) - 5.$$

У выражения в скобках для полного квадрата не хватает квадрата числа $\frac{3}{4}$. Заметив это, в скобках прибавим и вычтем квадрат числа $\frac{3}{4}$:

$$p(x) = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) - 5 =$$

$$= 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} - 5 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 6\frac{1}{8}.$$

Теперь ясно, что наименьшее значение достигается многочленом при $x = -\frac{3}{4}$; $p\left(-\frac{3}{4}\right) = -6\frac{1}{8}$.

Ответ а) $p(3) = -1$; б) $p\left(-\frac{3}{4}\right) = -6\frac{1}{8}$.

ПРИМЕР 2

Найти наибольшее значение многочлена $p(x)$:

а) $p(x) = 5 - 4x - 4x^2$; б) $p(x) = 7 + 4x - 3x^2$.

При каком значении x оно достигается?

Решение а) $p(x) = 5 - 4x - 4x^2 = 6 - (1 + 4x + 4x^2) = 6 - (2x + 1)^2$.

Наибольшее значение достигается многочленом при $x = -\frac{1}{2}$; $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$.

б) $p(x) = 7 + 4x - 3x^2 = -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 7 =$

$$= -3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + 7 = -3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{3} + 7 =$$

$$= -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 8\frac{1}{3}.$$

Наибольшее значение достигается многочленом при $x = \frac{2}{3}$; $p\left(\frac{2}{3}\right) = 8\frac{1}{3}$.

Ответ а) $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$; б) $p\left(\frac{2}{3}\right) = 8\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 3

Найти ту пару значений $(x; y)$, при которых многочлен $p(x; y) = 2x^2 + 3xy + 5y^2 + 4y + 3$ достигает наименьшего значения при условии, что $x - 3y = 4$.

Решение Из условия следует, что $x = 3y + 4$. Подставим выражение $3y + 4$ вместо x в данный многочлен:

$$p(y) = 2\,(3y + 4)^2 + 3\,(3y + 4)\,y + 5y^2 + 4y + 3 =$$
$$= 2\,(9y^2 + 24y + 16) + 3y\,(3y + 4) + 5y^2 + 4y + 3 =$$
$$= 32y^2 + 64y + 35 = 32\,(y^2 + 2y + 1) + 3 =$$
$$= 32\,(y + 1)^2 + 3.$$

Наименьшее значение многочлена равно 3, достигается оно при $y = -1$.

Если $y = -1$, то $x = 3y + 4 = 1$.

Ответ $x = 1,\ y = -1$.

ПРИМЕР 4

Доказать, что многочлен $p(a;\ b) = 72ab - 16a^2 - 83b^2$ при любых значениях переменных принимает неположительные значения.

Решение $p(a;\ b) = 72ab - 16a^2 - 83b^2 = -(16a^2 - 72ab + 81b^2) - 2b^2 = -(4a - 9b)^2 - 2b^2 = -((4a - 9b)^2 + 2b^2)$. Выражение $(4a - 9b)^2 + b^2 + b^2$ как сумма трёх квадратов при любых значениях переменных принимает неотрицательные значения, а потому выражение $-((4a - 9b)^2 + 2b^2)$ неположительно при любых значениях a и b, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5

Какими должны быть размеры прямоугольного участка, периметр которого равен 60 м, чтобы площадь участка была наибольшей?

Решение Участок представляет собой прямоугольник; пусть его длина равна x м, ширина y м, тогда $2x + 2y$ — периметр. Из условия следует, что $2x + 2y = 60$, т. е. $x + y = 30$, $y = (30 - x)$ м — это ширина прямоугольника (рис. 81). Площадь S прямоугольника вычисляется по формуле $S = x(30 - x)$ м^2. Поработаем с выражением для площади:

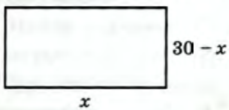


Рис. 81

$$S = x(30 - x) = 30x - x^2 = -(x^2 - 30x) =$$
$$= -(x^2 - 30x + 225) + 225 = 225 - (x - 15)^2.$$

Значит, $S_{\text{наиб}} = 225$ и достигается это значение при $x = 15$, т. е. когда участок представляет собой квадрат.

Ответ Наибольшую площадь имеет квадратный участок со стороной 15 м.

Вопросы для самопроверки

1. Какой одночлен нужно добавить к заданному многочлену, чтобы получился полный квадрат суммы:
   а) $x^2 + 25y^2$; б) $x^4 + 4y^4$?
2. Какой одночлен нужно добавить к заданному многочлену, чтобы получился полный квадрат разности:
   а) $16x^2 + 25y^2$; б) $x^8 + 36y^8$?

§35 ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Снова, как и в начале § 31, сравним планы построения глав 5 и 6. Вы, наверное, заметили, что эти планы почти одинаковы, хотя полное совпадение нарушил предыдущий параграф (посвящённый специфическим формулам сокращённого умножения), да и в главе 5 мы рассмотрели возведение одночлена в степень, а в главе 6 соответствующего разговора о возведении в степень многочлена не было, за исключением случаев, когда двучлен возводится в квадрат или куб. После умножения одночленов в главе 5 шла речь о делении одночлена на одночлен. Вот и в главе 6 мы поговорим об аналогичной операции — делении многочлена на одночлен.

В её основе лежит следующее свойство деления суммы на число:

$$(a + b + c) : m = (a : m) + (b : m) + (c : m).$$

Это позволяет сразу сформулировать правило деления многочлена на одночлен.

Правило 4 Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

В § 27 мы отмечали, что не всегда можно разделить одночлен на одночлен; чтобы деление было выполнимо, необходимо соблюдение целого ряда условий — вспомните их (или посмотрите в § 27), прежде чем рассматривать пример, который приведён ниже. Если задача деления одночлена (простейшего многочлена) на одночлен не всегда была корректной, то что же говорить о делении многочлена на одночлен. Такое деление выполнимо достаточно редко.

ПРИМЕР 1

Разделить многочлен $2a^2b + 4ab^2$ на одночлен $2a$.

Решение $(2a^2b + 4ab^2) : 2a = (2a^2b : 2a) + (4ab^2 : 2a) = \frac{2a^2b}{2a} + \frac{4ab^2}{2a} =$

$$= \frac{2}{2} \cdot \frac{a^2}{a} \cdot b + \frac{4}{2} \cdot \frac{a}{a} \cdot b^2 = 1 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 1 \cdot b^2 = ab + 2b^2.$$

Здесь мы использовали тот способ записи, который обговорили в § 27. А вот другой способ (можно применять и тот и другой, смотря по тому, какой из них вам больше нравится): выделим в каждом члене многочлена $2a^2b + 4ab^2$ множитель, в точности равный делителю $2a$. Получим:

$$2a^2b + 4ab^2 = 2a \cdot ab + 2a \cdot 2b^2.$$

Эту сумму можно записать в виде произведения $2a(ab + 2b^2)$. Теперь ясно, что если это произведение разделить на $2a$ (на один множитель), то в частном получится $ab + 2b^2$ (другой множитель).

ПРИМЕР 2

Разделить многочлен $6x^3 - 24x^2$ на $6x^2$.

Решение *Первый способ.*

$$(6x^3 - 24x^2) : 6x^2 = (6x^3 : 6x^2) - (24x^2 : 6x^2) =$$

$$= \frac{6x^3}{6x^2} - \frac{24x^2}{6x^2} = \frac{6}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2} - \frac{24}{6} \cdot \frac{x^2}{x^2} = 1 \cdot x - 4 \cdot 1 = x - 4.$$

Второй способ.

$$6x^3 - 24x^2 = 6x^2 \cdot x - 6x^2 \cdot 4 = 6x^2(x - 4).$$

Значит, частное от деления $6x^3 - 24x^2$ на $6x^2$ равно $x - 4$.

ПРИМЕР 3

Разделить многочлен $8a^3 + 6a^2b - b$ на $2a^2$.

Решение $8a^3 + 6a^2b - b = 2a^2 \cdot 4a + 2a^2 \cdot 3b - b.$

Поскольку в третьем члене заданного многочлена (речь идёт о члене $-b$) множитель $2a^2$ не выделяется, деление невозможно. Эта задача некорректна. Фактически мы снова, как и в конце § 27, пришли к алгебраической дроби — на этот раз к алгебраической дроби $\frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2}$.

Итак, деление многочлена на одночлен выполняется не всегда, а если и выполняется, то требует определённых усилий. Деление же многочлена на многочлен — ещё более трудная (и ещё более редко выполнимая) операция, это нам пока не по силам.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример, когда задание разделить многочлен на одночлен является корректным. Выполните это деление.
2. Приведите пример, когда задание разделить многочлен на одночлен является некорректным. Объясните почему.

§36[1] ПРОЦЕНТНЫЕ ЧАСТОТЫ

Среди 19 данных b, n, a, c, a, b, b, c, n, c, d, k, b, c, d, k, c, m, a некоторого измерения результат «c» встретился 5 раз. Значит, частота результата «c» равна $\frac{5}{19}$. Тут всё правильно, но работать с такими дробями не всегда удобно. На практике чаще всего имеют дело с десятичными дробями. Например, $\frac{5}{19} = 0{,}263157894...$, или приближённо $\frac{5}{19} \approx 0{,}263$[2]. В статистике, как правило, десятичные дроби умножают на 100, переводя их тем самым в проценты. В данном случае получаем, что результат «c» составляет примерно 26,3 % от количества всех результатов. Говорят также, что 26,3 % есть *процентная частота*, или *частота в процентах* результата «c».

процентная частота

Процентная частота = (Частота · 100) %

На самом деле с процентной частотой результата вы уже встречались ранее, только называли её *процентной долей*. Правда, ранее ответы всегда были равны целому числу процентов. На практике такие «хорошие» ответы довольно редки. Куда чаще приходится иметь дело с приближёнными значениями.

Разберём, например, вопрос о распределении числа переменных в многочленах. Рассмотрим многочлены $xy + zt$, $(a - b)(1 - c)$, $y + xy^2$, $(ax + 1)bx$, $ax^2 + bx + c$, $(x + 1)(x + 2)$, $pqrs$, $d + e + f$, $ax + by + d$, xy, $xy(u + v)$, $x^4y^3z^2tw$, $(x + y)xy$ и выпишем в ряд числа переменных в каждом из них. Вот что получится (проверьте!):

4, 3, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 5, 2, 4, 5, 2.

Получился ряд «нехорошего» объёма 13. К сожалению, дробные числа $\frac{n}{13}$ не могут быть записаны в виде конечной десятичной дроби. Значит, при записи частот в десятичных дробях получатся лишь приближённые значения этих частот. Но не будем опережать события. Для начала составим таблицу распределения данных в полученном ряду. Вот она:

Число переменных	1	2	3	4	5	Всего: 5 значений
Сколько раз встретилось	1	3	3	4	2	Сумма: 13

[1] Параграф написан П. В. Семеновым.

[2] В дальнейшем мы будем ограничиваться приближениями с точностью до тысячных, т. е. до 3-го знака после запятой.

Дописываем третью строчку из частот, сразу переводя их в десятичные дроби. Для краткости оставляем только столбцы с существенной информацией.

1	2	3	4	5
1	3	3	4	2
$\frac{1}{13} \approx 0{,}077$	$\frac{3}{13} \approx 0{,}231$	$\frac{3}{13} \approx 0{,}231$	$\frac{4}{13} \approx 0{,}308$	$\frac{2}{13} \approx 0{,}154$

Оставляем в третьей строке только десятичные дроби, умножаем их на 100 и результаты выписываем в четвёртую строчку.

1	2	3	4	5
1	3	3	4	2
0,077	0,231	0,231	0,308	0,154
7,7	23,1	23,1	30,8	15,4

После заполнения четвёртой строки сведения из второй и третьей строки можно удалить, ведь они уже учтены. Останется *таблица распределения процентных частот*.

Число переменных	1	2	3	4	5	Всего: 5 значений
Частота (в %)	7,7	23,1	23,1	30,8	15,4	Сумма: 100,1 % (≈100 %)

таблица распределения процентных частот

Обратите внимание, сумма процентных частот равна 100,1 %. Больше 100 %!!! На первый взгляд — очень странно. Ведь мы умножили на 100 % сумму всех (просто) частот, т. е. умножили 100 на 1, а получили 100,1?! Объяснение тут простое.

Смотрите, частота результата «1» равна $\frac{1}{13} = 0{,}07692307... \approx$ $\approx 0{,}077$. Значит, ответ 7,7 % является приближённым: мы немного, но увеличили точное значение. Небольшое увеличение получается и для других частот: $\frac{2}{13} = 0{,}15384... \approx 0{,}154$, или 15,4 %. При сложении по всем результатам эти небольшие ошибки накапливаются, и получается ответ 100,1 %. Итак, давайте запомним: *ответы для процентных частот могут быть не точными, а приближёнными.* Соответственно, сумма всех процентных частот может оказаться равной 100 % не точно, а лишь приблизительно.

Замечание В статистике вместо термина *частота* результата часто распространён и более сложный оборот *относительная частота* результата. При этом *абсолютной частотой* результата называется тот показатель, который мы выписывали во второй строке таблицы распределения, т. е. количество вхождений результата в имеющийся ряд данных. Мы ограничимся одним словом «частота».

Вопросы для самопроверки

1. Таблица распределения данных выглядит так.

Результат	⌂	□	☺	♯	•
Сколько раз встретился	3	7	5	4	6

Найдите: а) объём полученных данных; б) моду данных; в) частоту моды; г) процентную частоту моды. Заполните таблицу распределения процентных частот.

Результат	⌂	□	☺	♯	•
Процентная частота					

2. В расширенной таблице распределения пятидесяти данных некоторые сведения пропали.

Результат	−5	−3	0	2	6
Сколько раз встретился				14	6
Частота	0,2				
Процентная частота		24			

Вычислите: а) что должно стоять в клетке под числом 0,2; б) что должно стоять в клетке над числом 0,2; в) что должно стоять в клетках выше числа 24; г) что должно стоять в клетке под числом 0; д) значения во всех остальных клетках.

Основные результаты

- В этой главе мы изучили следующие *понятия*:
  — многочлен, в частности двучлен, трёхчлен;
  — приведение подобных членов многочлена, взаимное уничтожение членов многочлена;

— стандартный вид многочлена;
— алгебраическая сумма многочленов.

- Мы изучили следующие *правила*:
  — правило составления алгебраической суммы многочленов;
  — правило умножения многочлена на одночлен;
  — правило умножения многочлена на многочлен;
  — правило деления многочлена на одночлен.
- Мы изучили следующие *формулы*:
  — $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы);
  — $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности);
  — $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (разность квадратов);
  — $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ (разность кубов);
  — $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ (сумма кубов);
  — $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы);
  — $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности).
- Мы научились складывать и вычитать многочлены, умножать и делить многочлен на одночлен, умножать многочлен на многочлен, применять формулы сокращённого умножения.
- Мы познакомились с понятием процентной частоты результата измерения и с тем, как составлять таблицы распределения процентных частот.

Темы исследовательских работ

1. Формулы сокращённого умножения.
2. Метод выделения полного квадрата.
3. Процентные частоты. Относительная и абсолютная частота.

7 ГЛАВА
РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

§ 37 ЧТО ТАКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ И ЗАЧЕМ ОНО НУЖНО

Для начала выполним знакомую операцию: умножим многочлен $2x - 3$ на многочлен $x + 2$.

$$(2x - 3)(x + 2) = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x^2 + x - 6.$$

Итак, $(2x - 3)(x + 2) = 2x^2 + x - 6$.

Это равенство можно записать по-другому, поменяв его части местами:

$$2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2).$$

Такая запись означает, что многочлен $2x^2 + x - 6$ представлен в виде произведения более простых многочленов $2x - 3$ и $x + 2$. Обычно в таких случаях говорят, что многочлен удалось *разложить на множители*.

На самом деле формулировка «разложение многочлена на множители» вам уже знакома, мы несколько раз использовали её в главе 6, но там же мы говорили, что позднее более подробно обсудим эту проблему (проблему разложения многочлена на множители). Это время пришло. Однако сначала убедимся в том, что разложение многочлена на множители — вещь полезная (иначе зачем нам этим заниматься?).

Представьте себе, что вам предложили решить уравнение $2x - 3 = 0$. Вы справитесь с этим без труда: $2x = 3$, $x = 1{,}5$. Затем вам предложили решить уравнение $x + 2 = 0$. И с ним вы справитесь легко: $x = -2$. А теперь вам предлагают решить уравнение $2x^2 + x - 6 = 0$, т. е. дать ответ на вопрос, при каких значениях x трёхчлен $2x^2 + x - 6$ обращается в нуль, — эти значения x называют *корнями уравнения*. Для таких уравнений имеется специальное правило решения, но вы его пока не знаете. Как быть?

Воспользуемся полученным выше разложением многочлена $2x^2 + x - 6$ на множители: $2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$(2x - 3)(x + 2) = 0.$$

Теперь остаётся воспользоваться следующим известным фактом: если произведение двух множителей равно нулю, то один из множителей равен нулю. Значит, либо $2x - 3 = 0$, либо $x + 2 = 0$. Задача свелась к решению двух более простых уравнений. Из уравнения $2x - 3 = 0$ получаем $x = 1{,}5$. Из уравнения $x + 2 = 0$ получаем $x = -2$. Уравнение решено, оно имеет два корня: 1,5 и −2.

Итак, разложение многочлена на множители может пригодиться нам для решения уравнений.

Рассмотрим другую ситуацию. Пусть нужно найти значение числового выражения $\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2}$. Можно, конечно, проводить вычисления «в лоб», но более эффективно дважды воспользоваться формулой разности квадратов:

$$\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2} = \frac{(53 - 47)(53 + 47)}{(61 - 39)(61 + 39)} = \frac{6 \cdot 100}{22 \cdot 100} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}.$$

Разложение на множители позволило нам сократить дробь. Позднее мы оценим это и при выполнении действий с алгебраическими дробями.

Таким образом, разложение многочлена на множители используется для решения уравнений, для преобразования числовых и алгебраических выражений. Применяется оно и в других ситуациях, как, скажем, в следующем примере, где ключ к успеху опять-таки в разложении на множители.

ПРИМЕР

Доказать, что для любого натурального числа n выражение $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится без остатка на 6.

Решение Пусть $p(n) = n^3 + 3n^2 + 2n$.

Если $n = 1$, то $p(1) = 1 + 3 + 2 = 6$. Значит, $p(1)$ делится на 6 без остатка.

Если $n = 2$, то $p(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 + 12 + 4 = 24$. Следовательно, и $p(2)$ делится на 6 без остатка.

Если $n = 3$, то $p(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 27 + 27 + 6 = 60$. Поэтому и $p(3)$ делится на 6 без остатка.

Но вы же понимаете, что так перебрать <u>все</u> натуральные числа нам не удастся. Как быть? На помощь приходят алгебраические методы.

Имеет место равенство

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n\,(n + 1)\,(n + 2).$$

В самом деле,

$$n\,(n + 1) = n^2 + n,$$

$$(n^2 + n)\,(n + 2) = n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n = n^3 + 3n^2 + 2n.$$

Итак,

$$p(n) = n\,(n + 1)\,(n + 2),$$

т. е. $p(n)$ есть произведение трёх идущих подряд натуральных чисел n, $n + 1$, $n + 2$. Но из трёх таких чисел одно обязательно делится на 3, значит, и их произведение делится на 3. Кроме того, по крайней мере одно из этих чисел — чётное, т. е. делится на 2, значит, и произведение делится на 2. Итак, $p(n)$ делится и на 2, и на 3, т. е. делится и на 6.

Всё прекрасно, скажете вы, но как догадаться, что $n^3 + 3n^2 + 2n = n\,(n + 1)\,(n + 2)$? Ответ очевиден: надо учиться разложению многочленов на множители. К этому и перейдём: в каждом из следующих параграфов этой главы мы будем изучать тот или иной приём разложения многочлена на множители.

Вопросы для самопроверки

1. Используя материал данного параграфа, расскажите, для каких типов заданий нужно уметь раскладывать многочлен на множители. Попробуйте привести примеры таких заданий.
2. Вычислите без калькулятора: $\dfrac{52^2 - 34^2}{63^2 - 23^2}$.

§ 38 ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

1 Разложение многочлена на множители с помощью вынесения за скобки общего множителя

Прежде чем начинать изучение этого параграфа, вернитесь к § 31. Там мы уже рассмотрели пример, в котором требовалось представить многочлен в виде произведения многочлена и одночлена. Если такое произведение удалось составить, то обычно говорят, что многочлен разложен на множители с помощью *вынесения общего множителя за скобки*. Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1

Разложить на множители многочлен:

а) $2x + 6y$; в) $4a^3 + 6a^2$; д) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5$.

б) $a^3 + a^2$; г) $12ab^4 - 18a^2b^3c$;

Решение а) $2x + 6y = 2(x + 3y)$. За скобки вынесли общий делитель коэффициентов членов многочлена.

б) $a^3 + a^2 = a^2(a + 1)$. Если одна и та же переменная входит во все члены многочлена, то её можно вынести за скобки в степени, равной наименьшей из имеющихся (т. е. выбирают наименьший из имеющихся показателей).

в) Здесь используем те же приёмы, что и при решении примеров а) и б): для коэффициентов находим общий делитель (в данном случае число 2), для переменных — наименьшую степень из имеющихся (в данном случае a^2):

$$4a^3 + 6a^2 = 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot 3 = 2a^2(2a + 3).$$

г) Обычно для целочисленных коэффициентов стараются найти не просто общий делитель, а *наибольший* общий делитель. Для коэффициентов 12 и 18 им будет число 6. Замечаем, что переменная a входит в оба члена многочлена, при этом наименьший показатель равен 1. Переменная b также входит в оба члена многочлена, причём наименьший показатель равен 3. Наконец, переменная c входит только во второй член многочлена и не входит в первый член, значит, эту переменную нельзя вынести за скобки ни в какой степени. В итоге получаем:

$$12ab^4 - 18a^2b^3c = 6ab^3 \cdot 2b - 6ab^3 \cdot 3ac = 6ab^3(2b - 3ac).$$

д) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 5a^3(a - 2 + 3a^2)$.

В этом примере мы фактически использовали следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ОДНОЧЛЕНОВ

1. Найти наибольший общий делитель коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, — он и будет общим числовым множителем (разумеется, это относится только к случаю целочисленных коэффициентов).
2. Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена, и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.
3. Произведение коэффициента, найденного на первом шаге, и степеней, найденных на втором шаге, является общим множителем, который целесообразно вынести за скобки.

Замечание Следует понимать, что шаги 1 и 2 алгоритма имеют совершенно разный статус. В реальных задачах коэффициенты почти никогда не бывают целыми числами (а оказываются целыми благодаря усилиям составителей задачников, подбирающих условия так, чтобы ответ был покрасивее). Поэтому шаг 1 посвящён лишь получению наиболее приятной для глаза записи, тогда как шаг 2 есть нечто содержательное.

В ряде случаев полезно выносить за скобку в качестве общего множителя и дробный коэффициент. Например:

$$2{,}4x + 7{,}2y = 2{,}4(x + 3y);$$

$$\frac{3}{7}a - \frac{6}{7}b + \frac{9}{7}c = \frac{3}{7}(a - 2b + 3c).$$

ПРИМЕР 2

Разложить на множители многочлен

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2.$$

Решение Воспользуемся сформулированным алгоритмом.

1) Наибольший общий делитель коэффициентов -1, -2 и 5 равен 1.

2) Переменная x входит во все члены многочлена с показателями соответственно 4, 3, 2; следовательно, можно вынести за скобки x^2.

Переменная y входит не во все члены многочлена; значит, её нельзя вынести за скобки.

3) *Вывод*: за скобки можно вынести x^2. Правда, в данном случае целесообразнее вынести за скобки $-x^2$. Итак,

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2 = -x^2(x^2y^3 + 2xy^2 - 5).$$

ПРИМЕР 3

Можно ли разделить многочлен $5a^4 - 10a^3 + 15a^5$ на одночлен: а) $5a^3$; б) $25a^2$? Если да, то выполнить деление.

Решение а) В примере 1д) мы получили, что

$$5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 5a^3(a - 2 + 3a^2).$$

Значит, заданный многочлен можно разделить на $5a^3$, при этом в частном получится $a - 2 + 3a^2$.

б) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 25a^2\left(\frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a^3\right)$.

Значит, заданный многочлен можно разделить на $25a^2$, при этом в частном получится $\frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a^3$.

Подобные примеры мы рассматривали в § 35; просмотрите их, пожалуйста, ещё раз, но уже с точки зрения вынесения общего множителя за скобки.

Разложение многочлена на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки тесно связано с двумя операциями, которые мы изучали в § 31 и 35, — с умножением многочлена на одночлен и с делением многочлена на одночлен.

А теперь несколько расширим наши представления о вынесении общего множителя за скобки. Дело в том, что иногда алгебраическое выражение задаётся в таком виде, что в качестве общего множителя может выступать не одночлен, а сумма нескольких одночленов, т. е. некоторый многочлен.

ПРИМЕР 4

Разложить на множители

$$2x(x - 2) + 5(x - 2)^2.$$

Решение Введём новую переменную $y = x - 2$. Тогда получим:

$$2x(x - 2) + 5(x - 2)^2 = 2xy + 5y^2.$$

Замечаем, что переменную y можно вынести за скобки: $2xy + 5y^2 = y(2x + 5y)$. А теперь вернёмся к старым обозначениям:

$$y(2x + 5y) = (x - 2)(2x + 5(x - 2)) =$$
$$= (x - 2)(2x + 5x - 10) = (x - 2)(7x - 10).$$

В подобных случаях после приобретения некоторого опыта можно не вводить новую переменную, а сразу использовать следующую запись:

$$2x(x - 2) + 5(x - 2)^2 = (x - 2)(2x + 5(x - 2)) =$$
$$= (x - 2)(2x + 5x - 10) = (x - 2)(7x - 10).$$

2 Дальнейшие примеры

ПРИМЕР 5

Вычислить $(2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5) \cdot (9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4) - 984 \cdot 2365$.

Решение Числовое выражение в первых скобках — это число 2375, числовое выражение во вторых скобках — это число 984. Заметив это, произведём вычисления:

$$2375 \cdot 984 - 984 \cdot 2365 = 984 \cdot (2375 - 2365) = 984 \cdot 10 = 9840.$$

ПРИМЕР 6

Доказать, что $(7^5 + 14^4) \vdots 23$ (напомним ещё раз, что символ $\vdots$ означает «делится на»).

Решение Имеем $7^5 + 14^4 = 7^5 + 7^4 \cdot 2^4 = 7^4(7 + 2^4) = 7^4 \cdot 23$. Делимость полученного произведения на 23 теперь не вызывает никаких сомнений.

ПРИМЕР 7

Решить уравнение $(x - 2)(x + 3)^3 = (x + 3)(x - 2)^3$.

Решение Преобразуем уравнение к виду

$$(x - 2)(x + 3)^3 - (x + 3)(x - 2)^3 = 0$$

и вынесем в левой его части за скобки общий множитель $(x - 2)(x + 3)$; получим:

$$(x - 2)(x + 3)((x + 3)^2 - (x - 2)^2) = 0;$$
$$(x - 2)(x + 3)(x + 3 + x - 2)(x + 3 - x + 2) = 0;$$
$$5(x - 2)(x + 3)(2x + 1) = 0.$$

Значит, либо $x - 2 = 0$, откуда находим $x = 2$; либо $x + 3 = 0$, откуда находим $x = -3$; либо $2x + 1 = 0$, откуда находим $x = -0{,}5$.

Ответ -3, $-0{,}5$, 2.

ПРИМЕР 8

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x - 2y)^2 = 11(x - 2y), \\ 2x + y = 50. \end{cases}$$

Решение Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x - 2y)^2 - 11(x - 2y) = 0;$$
$$(x - 2y)(x - 2y - 11) = 0.$$

Значит, либо $x - 2y = 0$, либо $x - 2y - 11 = 0$, а потому решение заданной системы сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x + y = 50; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y - 11 = 0, \\ 2x + y = 50. \end{cases}$$

Из первой системы получим $x = 20$, $y = 10$, из второй — $x = 22{,}2$, $y = 5{,}6$.

Ответ (20; 10), (22,2; 5,6).

ПРИМЕР 9

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 3x + 6y = 4xy, \\ 3x + y = 21. \end{cases}$$

Решение Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) - (3x - 6y) = 0;$$
$$(x - 2y)^2 - 3\,(x - 2y) = 0;$$
$$(x - 2y)\,(x - 2y - 3) = 0.$$

Значит, либо $x - 2y = 0$, либо $x - 2y - 3 = 0$, а потому решение заданной системы сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 3x + y = 21; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y - 3 = 0, \\ 3x + y = 21. \end{cases}$$

Из первой системы получим $x = 6$, $y = 3$, из второй — $x = 6\frac{3}{7}$, $y = 1\frac{5}{7}$.

Ответ $(6; 3), \left(6\frac{3}{7}; 1\frac{5}{7}\right)$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте алгоритм отыскания общего множителя нескольких одночленов.
2. Приведите пример трёхчлена, у которого можно вынести за скобки общий множитель $3x^2$.
3. Объясните, почему числовое выражение $2^9 + 3 \cdot 2^{11}$ делится: а) на 13; б) на 26; в) на 52.

§ 39 СПОСОБ ГРУППИРОВКИ

1 Понятие о способе группировки при разложении многочлена на множители

Для уяснения сути способа группировки рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 1

Разложить на множители многочлен

$$2a^2 + 6a + ab + 3b.$$

Решение Объединим в одну группу первые два члена, а в другую — последние два члена многочлена:

$$(2a^2 + 6a) + (ab + 3b).$$

Замечаем, что в первой группе можно вынести за скобки $2a$, а во второй группе — b; получим $2a(a + 3) + b(a + 3)$. Теперь мы видим, что «проявился» общий множитель $(a + 3)$, который можно вынести за скобки. В результате получим $(a + 3)(2a + b)$.

Поскольку процесс преобразований в примере 1 перемежался комментариями, приведём ещё раз решение, но уже без комментариев:

$$2a^2 + 6a + ab + 3b = (2a^2 + 6a) + (ab + 3b) =$$
$$= 2a(a + 3) + b(a + 3) = (a + 3)(2a + b).$$

Объединение членов многочлена $2a^2 + 6a + ab + 3b$ в группы можно осуществить различными способами. Однако нужно учитывать, что иногда такая группировка оказывается удачной для последующего разложения на множители, а иногда нет. Проведём эксперимент. Объединим в одну группу первый и третий члены рассматриваемого многочлена, а в другую группу — второй и четвёртый:

$$2a^2 + 6a + ab + 3b = (2a^2 + ab) + (6a + 3b) =$$
$$= a(2a + b) + 3(2a + b) = (2a + b)(a + 3).$$

Разложение на множители получилось, группировка оказалась удачной.

Теперь объединим в одну группу первый и четвёртый члены, а в другую — второй и третий:

$$2a^2 + 6a + ab + 3b = (2a^2 + 3b) + (6a + ab) = (2a^2 + 3b) + a(6 + b).$$

Эта группировка явно неудачна.

способ группировки

Подведём итоги. Члены многочлена можно группировать так, как нам хочется. Иногда удаётся такая группировка, что в каждой группе после вынесения общих множителей в скобках остаётся один и тот же многочлен, который, в свою очередь, может быть вынесен за скобки как общий множитель. Тогда говорят, что разложение многочлена на множители осуществлено *способом группировки.*

ПРИМЕР 2

Разложить на множители многочлен

$$xy - 6 + 3x - 2y.$$

Решение *Первый способ группировки:*

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy - 6) + (3x - 2y).$$

Группировка неудачна.

Второй способ группировки:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy + 3x) + (-6 - 2y) =$$
$$= x(y + 3) - 2(y + 3) = (y + 3)(x - 2).$$

Третий способ группировки:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy - 2y) + (-6 + 3x) =$$
$$= y(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(y + 3).$$

Ответ $xy - 6 + 3x - 2y = (x - 2)(y + 3).$

Как видите, не всегда с первого раза группировка бывает удачной. Если группировка оказалась неудачной, то откажитесь от неё, ищите иной способ. По мере приобретения опыта вы будете быстро находить удачную группировку, как это сделано в следующем примере.

ПРИМЕР 3

Разложить на множители многочлен

$$ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6.$$

Решение Составим три группы: в первую включим первый и четвёртый члены, во вторую — второй и пятый, в третью — третий и шестой:

$$ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6 = (ab^2 + 2b^2) + (-2ab - 4b) +$$
$$+ (3a + 6) = b^2(a + 2) - 2b(a + 2) + 3(a + 2).$$

Во всех группах оказался общий множитель $(a + 2)$, который можно вынести за скобки. Получим $(a + 2)(b^2 - 2b + 3)$.

Ответ $ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6 = (a + 2)(b^2 - 2b + 3)$.

Иногда полезно проверить себя, т. е. в полученном разложении на множители выполнить операцию умножения многочленов (раскрыть скобки) и убедиться, что в результате получится тот многочлен, который был задан. А если нет? Тогда надо искать ошибку в разложении на множители.

2 Дальнейшие примеры

ПРИМЕР 4

Разложить на множители многочлен $x^2 - 7x + 12$.

Решение Наверное, вы думаете: какое отношение имеет этот пример к способу группировки, ведь здесь и группировать-то нечего? Это верно, но можно сделать небольшой «фокус»: если представить слагаемое $-7x$ в виде суммы $-3x - 4x$, то получится сумма уже не трёх (как в заданном многочлене), а четырёх слагаемых. Эти четыре слагаемых можно распределить по двум группам:

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = (x^2 - 3x) + (-4x + 12) =$$
$$= x(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 4).$$

ПРИМЕР 5

Решить уравнение:
а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$.

Решение а) Разложим трёхчлен $x^2 - 7x + 12$ на множители так, как это сделано в примере 4:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

Тогда заданное уравнение можно переписать в виде $(x - 3)(x - 4) = 0$. Теперь ясно, что исходное уравнение имеет два корня: $x = 3$, $x = 4$.

б) Разложим многочлен $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ на множители:

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x^3 - 2x^2) + (3x - 6) =$$
$$= x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 3).$$

Перепишем теперь заданное уравнение в виде

$$(x - 2)(x^2 + 3) = 0.$$

Так как произведение равно нулю, то равен нулю один из множителей. Но $x^2 + 3$ при любых значениях x является положительным числом, т. е. в нуль обратиться не может. Значит, может выполняться только равенство $x - 2 = 0$, откуда получаем $x = 2$.

Ответ а) 3, 4; б) 2.

ПРИМЕР 6

Построить в системе координат xOy график линейной функции $y = p^2 + 3px$, если известно, что этот график проходит через точку (2; −5) и пересекает ось абсцисс в точке, расположенной левее точки (1; 0).

Решение Поскольку график проходит через точку (2; −5), должно выполняться соотношение $-5 = p^2 + 3p \cdot 2$, т. е. $p^2 + 6p + 5 = 0$.

Подобное уравнение, применив способ группировки, мы уже решили выше, в примере 5а). Здесь мы тоже применим способ группировки:

$$p^2 + 6p + 5 = 0;$$
$$(p^2 + p) + (5p + 5) = 0;$$
$$p(p + 1) + 5(p + 1) = 0;$$
$$(p + 1)(p + 5) = 0.$$

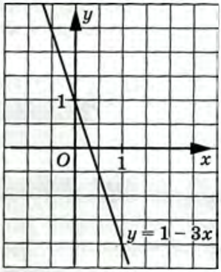


Рис. 82

Значит, либо $p + 1 = 0$, т. е. $p = -1$, либо $p + 5 = 0$, т. е. $p = -5$.

Если $p = -1$, то заданная линейная функция принимает вид $y = 1 - 3x$; если $p = -5$, то заданная линейная функция принимает вид $y = 25 - 15x$. Осталось из этих двух линейных функций выбрать ту, график которой пересекает ось абсцисс в точке, расположенной левее точки (1; 0).

Прямая $y = 1 - 3x$ пересекает ось абсцисс в точке $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, а прямая $y = 25 - 15x$ — в точке $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$; левее точки (1; 0) расположена лишь точка $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. Значит, искомая линейная функция — это $y = 1 - 3x$, её график изображён на рисунке 82.

ПРИМЕР 7

Построить график уравнения $x^2 + 2xy - 8x - 6y + 15 = 0$.

Решение Разложим левую часть уравнения на множители, предварительно представив одночлен $-8x$ в виде $-3x - 5x$:

$$x^2 + 2xy - 8x - 6y + 15 = x^2 - 3x + 2xy - 6y - 5x + 15 =$$
$$= (x^2 - 3x) + (2xy - 6y) - (5x - 15) =$$
$$= x(x - 3) + 2y(x - 3) - 5(x - 3) = (x - 3)(x + 2y - 5).$$

Значит, уравнение, график которого нам надо построить, можно записать так:

$$(x - 3)(x + 2y - 5) = 0.$$

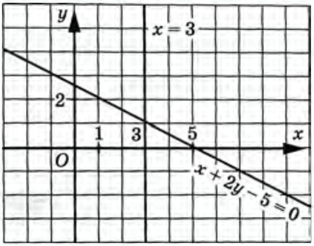


Рис. 83

График этого уравнения — объединение двух прямых: прямой $x = 3$ (прямая, параллельная оси ординат) и прямой $x + 2y - 5 = 0$. Для построения второй прямой следует найти две точки, ей принадлежащие: если $y = 0$, то $x = 5$; если $x = 1$, то $y = 2$. Итак, строим вторую прямую по точкам $(5; 0)$ и $(1; 2)$. График заданного уравнения (две прямые) изображён на рисунке 83.

ПРИМЕР 8

Найти пары целых чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют уравнению $9y + 10x - 6xy = 8$.

Решение Поработаем с левой частью уравнения:

$$9y + 10x - 6xy = (9y - 6xy) + 10x = 3y(3 - 2x) + (10x - 15) + 15 =$$
$$= 3y(3 - 2x) + 5(2x - 3) + 15 = 15 - 3y(2x - 3) + 5(2x - 3) =$$
$$= 15 + (2x - 3)(5 - 3y) = 15 - (2x - 3)(3y - 5).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать так:

$15 - (2x - 3)(3y - 5) = 8$, откуда следует, что $(2x - 3)(3y - 5) = 7$.

Нас интересуют только целочисленные решения уравнения, значит, оба множителя в левой части уравнения должны быть целыми числами, которые при перемножении дают в результате 7. Какие два целых числа дадут 7 в произведении? Есть лишь 4 возможности: 1 и 7, 7 и 1, −1 и −7, −7 и −1. Рассмотрим каждый из этих четырёх случаев по отдельности.

1) 1 и 7. Это значит, что $2x - 3 = 1$, $3y - 5 = 7$. Отсюда следует, что $x = 2$, $y = 4$.

2) 7 и 1. Это значит, что $2x - 3 = 7$, $3y - 5 = 1$. Отсюда следует, что $x = 5$, $y = 2$.

3) -1 и -7. Это значит, что $2x - 3 = -1$, $3y - 5 = -7$. Отсюда следует, что $x = 1$, $y = -\frac{2}{3}$. Эта пара нас не устраивает, нас интересуют только пары целых чисел.

4) -7 и -1. Это значит, что $2x - 3 = -7$, $3y - 5 = -1$. Отсюда следует, что $x = -2$, $y = \frac{4}{3}$. Эта пара нас также не устраивает.

Ответ (2; 4) и (5; 2).

ПРИМЕР 9

Доказать, что при любом натуральном значении n выполняется соотношение $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) \vdots 24$.

Решение Похожий пример, но попроще мы рассмотрели выше, в § 37. Теперь нам по силам более сложный пример. Поработаем с многочленом $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, попытаемся разложить его на множители — это всегда полезно при решении задач на делимость:

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n^3 + n^2 + 5n^2 + 5n + 6n + 6) =$$
$$= n(n^2(n + 1) + 5n(n + 1) + 6(n + 1)) = n(n + 1)(n^2 + 5n + 6).$$

Теперь разложим на множители трёхчлен $n^2 + 5n + 6$:

$$n^2 + 5n + 6 = n^2 + 2n + 3n + 6 = n(n + 2) + 3(n + 2) =$$
$$= (n + 2)(n + 3).$$

Итак, $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

Среди четырёх подряд идущих натуральных чисел n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ обязательно присутствует хотя бы одно число, делящееся на 3, и два чётных числа, причём одно из этих чётных чисел даже делится на 4. Значит, произведение этих четырёх чисел делится на $2 \cdot 3 \cdot 4$, т. е. на 24. Итак, $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) \vdots 24$.

ПРИМЕР 10

Имеются два сплава с различным процентным содержанием меди, один — массой 12 кг, другой — массой 8 кг. От первого и второго сплавов отрезали куски равной массы и поменяли местами. В результате получилось два новых сплава с теми же массами, но уже с равным процентным содержанием меди. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Введём три переменные: x кг — масса каждого из отрезанных кусков; y % — содержание меди в первом сплаве, z % — содержание меди во втором сплаве. После того как от каждого из первоначальных сплавов отрезали по куску массой x кг и поменяли местами, получились два новых сплава: их структура схематически представлена на рисунке 84. Обсудим эти схемы.

На рисунке 84, *а* представлена структура третьего сплава: он состоит из $(12 - x)$ кг первого сплава с y%-ным содержанием меди и из x кг второго сплава с z%-ным содержанием меди. Можно подсчитать массу A меди в третьем сплаве:

$$A = \left(\frac{y}{100}(12 - x) + \frac{z}{100}x\right) \text{ кг.}$$

На рисунке 84, *б* представлена структура четвёртого сплава: он состоит из $(8 - x)$ кг второго сплава с z%-ным содержанием меди и из x кг первого сплава с y%-ным содержанием меди. Можно подсчитать массу меди B в четвёртом сплаве:

$$B = \left(\frac{z}{100}(8 - x) + \frac{y}{100}x\right) \text{ кг.}$$

Наступил самый ответственный момент. Что значит, что процентное содержание меди в третьем и четвёртом сплавах одинаково? Это значит, что отношение массы меди в третьем сплаве к массе третьего сплава равно отношению массы меди в четвёртом сплаве к массе четвёртого сплава: $\frac{A}{12} = \frac{B}{8}$. Из этой пропорции следует, что $2A = 3B$, т. е.

$$2\left(\frac{y}{100}(12 - x) + \frac{z}{100}x\right) = 3\left(\frac{z}{100}(8 - x) + \frac{y}{100}x\right).$$

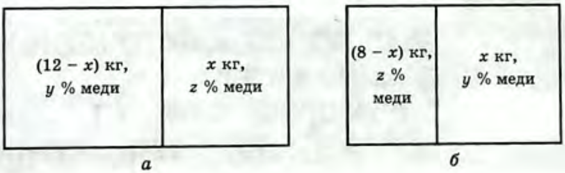


Рис. 84 *а* *б*

Это уравнение — математическая модель задачи.

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Умножим обе части уравнения на 100 и раскроем скобки в обеих частях уравнения:

$$24y - 2xy + 2xz = 24z - 3xz + 3xy;$$
$$(24y - 24z) + (5xz - 5xy) = 0;$$

$$24(y - z) - 5x(y - z) = 0;$$
$$(y - z)(24 - 5x) = 0.$$

По условию $y \neq z$, но тогда из последнего уравнения следует, что $24 - 5x = 0$, т. е. $x = 4{,}8$.

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Нам нужно было найти массу каждого из отрезанных от обоих сплавов кусков, эту величину мы обозначили буквой x, так что ответ на вопрос задачи уже получен: от каждого из сплавов отрезали (и поменяли местами) по 4,8 кг.

Обратите внимание, что в составленном уравнении было три переменных, из которых две нас не интересовали, да, впрочем, они и исчезли в процессе преобразований.

Ответ 4,8 кг.

Вопросы для самопроверки

1. Дан многочлен $2x^3 + x^2a - 2ax - a^2$. Применяя для его разложения на множители способ группировки, можно поступить так:
   а) сгруппировать 1-й и 2-й, 3-й и 4-й члены;
   б) сгруппировать 1-й и 3-й, 2-й и 4-й члены;
   в) сгруппировать 1-й и 4-й, 2-й и 3-й члены.
   В каких случаях группировка окажется удачной и приведёт к разложению многочлена на множители, а в каких — нет?
2. Постройте график уравнения $xy - x - y + y^2 = 0$. Если окажется, что график состоит из двух прямых, то найдите точку пересечения этих прямых.

§ 40 РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

В § 33 мы получили семь формул сокращённого умножения. Там же мы отметили, что любой из этих формул можно пользоваться как для сокращённого умножения многочлена на многочлен (если применять формулы в том виде, в котором они были записаны в § 33), так и для разложения многочлена на множители, если их переписать следующим образом:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (1)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \quad (2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad (3)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \quad (4)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2; \quad (5)$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3; \quad (6)$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3. \quad (7)$$

Первую из этих формул можно применять к выражению, представляющему собой *разность квадратов* (безразлично чего — чисел, одночленов, многочленов), вторую и третью — к выражению, представляющему собой *разность (сумму) кубов;* четвёртую и пятую формулы применяют к трёхчлену, представляющему собой *полный квадрат,* т. е. содержащему сумму квадратов двух выражений и удвоенное произведение тех же выражений; шестую и седьмую формулы применяют к многочлену, представляющему собой *полный куб.*

ПРИМЕР 1

Разложить на множители:

а) $64x^2 - 9$; в) $(2x - 1)^2 - 25$;

б) $x^6 - 4a^4$; г) $(a + 3)^2 - (b - 2)^2$.

Решение Во всех четырёх примерах воспользуемся формулой (1) (разность квадратов):

а) $64x^2 - 9 = (8x)^2 - 3^2 = (8x - 3)(8x + 3)$;

б) $x^6 - 4a^4 = (x^3)^2 - (2a^2)^2 = (x^3 - 2a^2)(x^3 + 2a^2)$;

в) $(2x - 1)^2 - 25 = (2x - 1)^2 - 5^2 = ((2x - 1) - 5) \cdot ((2x - 1) + 5) =$
$= (2x - 6)(2x + 4) = 2(x - 3) \cdot 2(x + 2) = 4(x - 3)(x + 2)$.

Здесь, кроме формулы разности квадратов, мы использовали приём вынесения общего множителя за скобки — для двучленов $2x - 6$ и $2x + 4$.

г) $(a + 3)^2 - (b - 2)^2 = ((a + 3) - (b - 2)) \cdot ((a + 3) + (b - 2)) =$
$= (a + 3 - b + 2)(a + 3 + b - 2) = (a - b + 5)(a + b + 1)$.

ПРИМЕР 2

Разложить на множители:

а) $125a^3 - 8b^3$; б) $a^6 + 27b^3$; в) $x^6 - a^6$.

Решение Здесь воспользуемся формулами (2) и (3) (разность и сумма кубов).

а) $125a^3 - 8b^3 = (5a)^3 - (2b)^3 = (5a - 2b) \cdot ((5a)^2 + 5a \cdot 2b + (2b)^2) =$
$= (5a - 2b)(25a^2 + 10ab + 4b^2)$.

б) $a^6 + 27b^3 = (a^2)^3 + (3b)^3 = (a^2 + 3b) \cdot ((a^2)^2 - a^2 \cdot 3b + (3b)^2) =$
$= (a^2 + 3b)(a^4 - 3a^2b + 9b^4)$.

в) *Первый способ*:

$$x^6 - a^6 = (x^2)^3 - (a^2)^3 = (x^2 - a^2) \cdot ((x^2)^2 + x^2 \cdot a^2 + (a^2)^2) =$$
$$= (x - a)(x + a)(x^4 + x^2a^2 + a^4).$$

Второй способ:

$$x^6 - a^6 = (x^3)^2 - (a^3)^2 = (x^3 - a^3)(x^3 + a^3) =$$
$$= (x - a)(x^2 + xa + a^2)(x + a)(x^2 - xa + a^2).$$

!

В примере 2в) при одном способе решения получилось разложение

$$(x - a)(x + a)(x^4 + x^2a^2 + a^4),$$

а при другом способе — разложение

$$(x - a)(x + a)(x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2).$$

Разумеется, это одно и то же: в следующем параграфе мы покажем, как от многочлена $x^4 + x^2a^2 + a^4$ перейти к произведению $(x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2)$. Впрочем, и сейчас вы можете убедиться, что

$$x^4 + x^2a^2 + a^4 = (x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2).$$

Для этого достаточно раскрыть скобки в правой части равенства (сделайте это).

ПРИМЕР 3

Разложить на множители:

а) $a^2 - 4ab + 4b^2$; в) $4x^4 - 12x^2y + 9y^2$;
б) $x^4 + 2x^2 + 1$; г) $25a^2 + 10ab + 4b^2$.

Решение В этих примерах даны трёхчлены, для их разложения на множители будем пользоваться формулами (4) и (5), если, конечно, убедимся в том, что трёхчлен является полным квадратом.

а) $a^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 + (2b)^2 - 2 \cdot a \cdot 2b = (a - 2b)^2$.

Мы убедились, что трёхчлен содержит сумму квадратов одночленов a и $2b$, а также удвоенное произведение этих одночленов. Значит, это полный квадрат, причём квадрат разности.

б) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 = (x^2 + 1)^2$;

в) $4x^4 - 12x^2y + 9y^2 = (2x^2)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3y = (2x^2 - 3y)^2$;

г) $25a^2 + 10ab + 4b^2 = (5a)^2 + (2b)^2 + 5a \cdot 2b$.

Так как $10ab$ — это не удвоенное произведение одночленов $5a$ и $2b$, то данный трёхчлен не является полным квадратом. Разложить его на множители с помощью формул (4) или (5) мы не можем.

Подчеркнём ещё раз: если хотите воспользоваться формулами (4) или (5), то сначала убедитесь, что заданный трёхчлен есть полный квадрат. В противном случае формулы (4) и (5) применять нельзя — именно так обстояло дело в примере 3г).

ПРИМЕР 4

Доказать, что $(27^3 + 28^3) \vdots 55$.

Решение $27^3 + 28^3 = (27 + 28)(27^2 - 27 \cdot 28 + 28^2) =$
$= 55 \cdot (27^2 - 27 \cdot 28 + 28^2)$.

Полученное произведение делится на 55, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x - 5y)(x^2 - 36) = 0, \\ 4x - 3y + 12 = 0. \end{cases}$$

Решение Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x - 5y)(x - 6)(x + 6) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Значит, либо $x - 5y = 0$, либо $x - 6 = 0$, либо $x + 6 = 0$. Соответственно, заданная система «распадается» на три случая:

$$\begin{cases} x - 5y = 0, \\ 4x - 3y + 12 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 6 = 0, \\ 4x - 3y + 12 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 6 = 0, \\ 4x - 3y + 12 = 0. \end{cases}$$

В первой системе из первого уравнения находим $x = 5y$; подставив выражение $5y$ вместо x во второе уравнение, получим $20y - 3y + 12 = 0$; $y = -\frac{12}{17}$; соответственно, $x = -\frac{60}{17}$. Из второй системы находим $x = 6$, $y = 12$; из третьей системы находим $x = -6$, $y = -4$.

Ответ $\left(-3\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$, $(6; 12)$, $(-6; -4)$.

ПРИМЕР 6

Найти целочисленные решения уравнения:

$$4x^2 - y^2 = 7;$$

Решение Преобразуем заданное уравнение к виду

$$(2x - y)(2x + y) = 7.$$

Поскольку речь идёт об отыскании целочисленных решений уравнений, нас интересуют только целочисленные значения множителей $2x - y$ и $2x + y$. Произведение двух целых чисел равно 7, если множители составляют такие пары: 1 и 7, 7 и 1, −1 и −7, −7 и −1.

Таким образом, задача сводится к решению четырёх систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x + y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 7, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -1, \\ 2x + y = -7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -7, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

В итоге получаем четыре пары решений заданного уравнения: (2; 3), (2; −3), (−2; −3), (−2; 3).

Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример разложения многочлена на множители по формуле разности квадратов двух выражений.
2. Приведите пример разложения многочлена на множители по формуле разности кубов двух выражений.
3. Приведите пример разложения многочлена на множители по формуле суммы кубов двух выражений.
4. Приведите пример трёхчлена, который является полным квадратом суммы, и разложите его на множители.
5. Приведите пример трёхчлена, который является полным квадратом разности, и разложите его на множители.
6. Объясните, почему числовое выражение $2 \cdot 11^3 + 2 \cdot 13^3$ делится:
   а) на 3; б) на 6; в) на 48; г) на 147.

§41 РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ С ПОМОЩЬЮ КОМБИНАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ПРИЁМОВ

1 Понятие о комбинации различных приёмов

Не так уж часто бывает, чтобы при решении математического примера применялся только один приём, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один приём, затем другой и т. д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало знать сами приёмы, надо ещё уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим в этом параграфе.

ПРИМЕР 1

Разложить на множители многочлен

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5.$$

Решение 1) Сначала займёмся вынесением общего множителя за скобки. Рассмотрим коэффициенты 36, 96, 64. Все они делятся на 4, причём это — наибольший общий делитель, вынесем его за скобки. Во все члены многочлена входит переменная a (в первый a^6, во второй a^4, в третий a^2), поэтому за скобки можно вынести a^2. Точно так же во все члены многочлена входит переменная b (в первый b^3, во второй b^4, в третий b^5) — за скобки можно вынести b^3.

Итак, за скобки вынесем $4a^2b^3$:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(9a^4 - 24a^2b + 16b^2).$$

2) Рассмотрим трёхчлен $9a^4 - 24a^2b + 16b^2$. Выясним, не является ли он полным квадратом. Имеем:

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2)^2 + (4b)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 4b.$$

Все условия полного квадрата соблюдены, следовательно,

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2 - 4b)^2.$$

3) Комбинируя два приёма (вынесение общего множителя за скобки и использование формулы сокращённого умножения), получаем окончательный результат:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(3a^2 - 4b)^2.$$

ПРИМЕР 2

Разложить на множители многочлен $a^2 - c^2 + b^2 + 2ab$.

Решение 1) Сначала попробуем воспользоваться способом группировки. До сих пор четыре слагаемых мы разбивали на группы по парам (см. § 39). Попытаемся и здесь сделать так же:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 - c^2) + (b^2 + 2ab) =$$
$$= (a - c)(a + c) + b(b + 2a).$$

Эта группировка неудачна, нет общего множителя.

Попробуем по-другому:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + b^2) + (-c^2 + 2ab),$$

здесь также ничего хорошего нет.

Третья попытка:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + 2ab) + (-c^2 + b^2) =$$
$$= a(a + 2b) + (b - c)(b + c),$$

и здесь нет общего множителя.

Однако всё-таки способ группировки в этом примере сработает. Ведь ниоткуда не следует, что группировать слагаемые можно только по парам, это можно сделать и так:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) - c^2 = (a + b)^2 - c^2.$$

Теперь вы отчётливо видите структуру данного многочлена: разность квадратов.

2) К полученному выражению применим формулу разности квадратов:

$$(a + b)^2 - c^2 = ((a + b) - c)((a + b) + c) = (a + b - c)(a + b + c).$$

Итак, комбинируя два приёма (группировку и использование формул сокращённого умножения — квадрат суммы и разность квадратов), мы получили окончательный результат:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a + b - c)(a + b + c).$$

2 Дальнейшие примеры

ПРИМЕР 3

Разложить на множители двучлен $x^4 + 4y^4$.

Решение Проанализируем структуру данного двучлена. Что такое x^4? Это $(x^2)^2$. Что такое $4y^4$? Это $(2y^2)^2$. Значит, имеем сумму квадратов $(x^2)^2 + (2y^2)^2$. Обычно, увидев сумму квадратов двух выражений (чисел, одночленов, многочленов), математик ищет удвоенное произведение этих выражений для того, чтобы получить полный квадрат (об этом мы уже говорили выше, в § 34). В данном случае таким удвоенным произведением будет $2 \cdot x^2 \cdot 2y^2$, т. е. $4x^2y^2$. Но его в примере нет. Что же делать?

Прибавим к заданному многочлену то, что нам нужно, но, чтобы ничего не изменилось, тут же и вычтем:

$$(x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2.$$

Это даёт возможность сгруппировать первые три члена так, что выделится полный квадрат. Дальнейшее решение идёт по плану примера 2:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = ((x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy).$$

ПРИМЕР 4

Разложить на множители трёхчлен

$$x^4 + x^2a^2 + a^4.$$

Решение Применим метод выделения полного квадрата. Для этого представим x^2a^2 в виде $2x^2a^2 - x^2a^2$. Получим:

$$x^4 + x^2a^2 + a^4 = x^4 + 2x^2a^2 - x^2a^2 + a^4 = (x^4 + 2x^2a^2 + a^4) - x^2a^2 =$$
$$= (x^2 + a^2)^2 - (xa)^2 = (x^2 + a^2 - xa)(x^2 + a^2 + xa).$$

Это разложение мы уже фактически получили при решении примера 2в), § 40.

ПРИМЕР 5

Решить уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Решение *Первый способ.* Представим $-6x$ в виде суммы $-x - 5x$, а затем применим способ группировки:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5 = (x^2 - x) + (-5x + 5) =$$
$$= x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x - 5).$$

Тогда заданное уравнение примет вид

$$(x - 1)(x - 5) = 0,$$

откуда находим, что либо $x = 1$, либо $x = 5$.

Второй способ. Применим метод выделения полного квадрата, для чего представим слагаемое 5 в виде $9 - 4$:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x^2 - 6x + 9) - 4 =$$
$$= (x - 3)^2 - 2^2 = (x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = (x - 5)(x - 1).$$

Снова пришли к уравнению $(x - 1)(x - 5) = 0$, имеющему корни 1 и 5.

Ответ 1, 5.

ПРИМЕР 6

Разложить на множители многочлен

$$x^5 + x^2 + 2x + 2.$$

Решение Здесь есть смысл представить x^2 в виде $-x^2 + 2x^2$; тогда появится возможность представить одну группу слагаемых в виде $x^5 - x^2$, а другую — в виде $2x^2 + 2x + 2$. Что это даёт? Смотрите:

$$x^5 + x^2 + 2x + 2 = (x^5 - x^2) + (2x^2 + 2x + 2) = x^2(x^3 - 1) +$$
$$+ 2(x^2 + x + 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x^2 + x + 1) =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 2).$$

ПРИМЕР 7

Решить уравнение: а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; б) $x^4 + 14x^2 - 15 = 0$.

Решение а) Представим $-13x^2$ в виде $-9x^2 - 4x^2$:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = x^4 - 9x^2 - 4x^2 + 36 = (x^4 - 9x^2) - (4x^2 - 36) =$$
$$= x^2(x^2 - 9) - 4(x^2 - 9) = (x^2 - 9)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2).$$

Значит, заданное уравнение нам удалось преобразовать к следующему виду: $(x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0$. Теперь можно без особого труда указать корни данного уравнения: 3, –3, 2, –2.

б) Здесь можно использовать ту же идею, что и в пункте а): представить $14x^2$ в виде $15x^2 - x^2$; предоставим вам возможность самим довести эту идею до логического завершения. А мы, ради разнообразия, воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$x^4 + 14x^2 - 15 = (x^4 + 14x^2 + 49) - 49 - 15 = (x^2 + 7)^2 - 64 =$$
$$= (x^2 + 7 - 8)(x^2 + 7 + 8) = (x^2 - 1)(x^2 + 15) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 15).$$

Значит, заданное уравнение нам удалось преобразовать к следующему виду: $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 15) = 0$. Уравнение $x^2 + 15 = 0$ не имеет корней, значит, заданное уравнение имеет два корня: 1, –1.

Ответ а) 3, –3, 2, –2; б) 1, –1.

! Приоткроем секрет, как в примере 7а) мы догадались представить $-13x^2$ в виде $-9x^2 - 4x^2$, а в примере 7б) представить $14x^2$ в виде $15x^2 - x^2$. Обратите внимание: $9 \cdot 4 = 36$, а $15 \cdot (-1) = -15$; в обоих случаях произведение равно свободному члену уравнения. Между прочим, ту же идею мы использовали в примерах 4 и 6 из § 39 (проверьте!).

ПРИМЕР 8

Решить уравнение $x^3 + 9x^2 + 27x + 19 = 0$.

Решение Этот пример несколько сложнее, здесь придётся применить не уже привычный вам метод выделения полного квадрата, а похожую идею — выделить полный куб:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 8 = (x + 3)^3 - 8.$$

А теперь воспользуемся формулой разности кубов:

$$(x + 3)^3 - 2^3 = ((x + 3) - 2)((x + 3)^2 + 2(x + 3) + 2^2) =$$
$$= (x + 1)(x^2 + 8x + 19).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать так:

$$(x + 1)(x^2 + 8x + 19) = 0.$$

Отсюда следует, что либо $x + 1 = 0$, т. е. $x = -1$, либо $x^2 + 8x + 19 = 0$. Последнее уравнение не имеет корней. Чтобы в этом убедиться, перепишем квадратный трёхчлен $x^2 + 8x + 19$ в виде $(x + 4)^2 + 3$. Это выражение положительно (т. е. отлично от нуля) при любых значениях переменной.

Ответ $x = -1$.

Вопросы для самопроверки

1. Почему прочитанный вами параграф носит такое название?
2. В чём заключается метод выделения полного квадрата?
3. Расскажите, о комбинации каких приёмов идёт речь в этом параграфе.

§42 СОКРАЩЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

1 Что такое алгебраическая дробь

Новое понятие в математике редко возникает из ничего, на пустом месте. Оно появляется тогда, когда в нём ощущается объективная необходимость. Именно так появились в математике отрицательные числа, так появились обыкновенные и десятичные дроби.

Предпосылки для введения нового понятия «алгебраическая дробь» у нас имеются. Давайте вернёмся к § 27. Обсуждая там деление одночлена на одночлен, мы рассмотрели ряд примеров. Выделим два из них.

1. Разделить одночлен $36a^3b^5$ на одночлен $4ab^2$ (см. пример 1в) из § 27).

Решали мы его так. Выражение $36a^3b^5 : 4ab^2$ записали, используя черту дроби: $\frac{36a^3b^5}{4ab^2}$ (ведь $A : B$ и $\frac{A}{B}$ — одно и то же). Это позволило выражения $36 : 4$, $a^3 : a$, $b^5 : b^2$ также записать с использованием черты дроби, что сделало решение примера более наглядным:

$$\frac{36a^3b^5}{4ab^2} = \frac{36}{4} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^5}{b^2} = 9a^2b^3.$$

2. Разделить одночлен $4x^3$ на одночлен $2xy$ (см. пример 1д) из § 27). Действуя по тому же образцу, мы получили:

$$4x^3 : 2xy = \frac{4x^3}{2xy} = \frac{4}{2} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2x^2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x^2}{y}.$$

В § 27 мы отметили, что одночлен $4x^3$ не удалось разделить на одночлен $2xy$ так, чтобы получился одночлен. Но ведь математические модели могут содержать операцию деления любых одночленов, не обязательно таких, что один делится на другой. Поэтому математики ввели новое понятие — понятие алгебраической дроби. В частности, $\frac{2x^2}{y}$ — алгебраическая дробь.

Теперь вернёмся к § 35. Обсуждая там операцию деления многочлена на одночлен, мы отметили, что она не всегда выполнима. Так, в примере 2 из § 35 речь шла о делении двучлена $6x^3 - 24x^2$ на одночлен $6x^2$. Эта операция оказалась выполнимой, и в результате мы получили двучлен $x - 4$. Значит,

$$\frac{6x^3 - 24x^2}{6x^2} = x - 4.$$

Иными словами, алгебраическое выражение $\frac{6x^3 - 24x^2}{6x^2}$ удалось заменить более простым выражением — многочленом $x - 4$.

В то же время в примере 3 из § 35 не удалось разделить многочлен $8a^3 + 6a^2b - b$ на $2a^2$, т. е. выражение $\frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2}$ не удалось заменить более простым выражением, пришлось так и оставить его в виде алгебраической дроби.

Что же касается операции деления многочлена на многочлен, то единственное, что мы можем сейчас сказать: один многочлен можно разделить на другой, если этот другой многочлен является одним из множителей в разложении первого многочлена на множители.

Например, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Значит, $x^3 - 1$ можно разделить на $x^2 + x + 1$, получится $x - 1$; $x^3 - 1$ можно разделить на $x - 1$, получится $x^2 + x + 1$.

алгебраическая дробь

Алгебраической дробью называют отношение двух многочленов P и Q. При этом используют запись $\frac{P}{Q}$, где P — *числитель*, Q — *знаменатель алгебраической дроби*.

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{2x^2}{y}, \frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2}, \frac{x + y}{x - y}.$$

2 Как сократить алгебраическую дробь

Иногда алгебраическую дробь удаётся заменить многочленом. Например, как мы уже установили ранее,

$$\frac{6x^3 - 24x^2}{6x^2} = x - 4$$

(многочлен $6x^3 - 24x^2$ удалось разделить на $6x^2$, при этом в частном получается $x - 4$); мы также отмечали, что

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = x - 1.$$

Но так бывает сравнительно редко.

Впрочем, похожая ситуация уже встречалась вам — при изучении обыкновенных дробей. Например, дробь $\frac{24}{6}$ можно заменить целым числом 4, а дробь $\frac{40}{8}$ — целым числом 5. А вот дробь $\frac{32}{24}$ целым числом заменить не удаётся, хотя эту дробь можно сократить, разделив числитель и знаменатель на число 8 — общий множитель числителя и знаменателя: $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$. Точно так же *можно сокращать алгебраические дроби, разделив одновременно числитель и знаменатель дроби на их общий множитель.* А для этого надо разложить и числитель, и знаменатель дроби на множители. Здесь нам и понадобится всё то, что мы так долго обсуждали в этой главе.

ПРИМЕР 1

Сократить алгебраическую дробь:

а) $\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5}$; б) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)}$; в) $\frac{x^2 - xy}{x^4 - xy^3}$.

Решение

а) Найдём общий множитель для одночленов $12x^3y^4$ и $8x^2y^5$; это $4x^2y^4$. Тогда

$$12x^3y^4 = 4x^2y^4 \cdot 3x; \quad 8x^2y^5 = 4x^2y^4 \cdot 2y.$$

Значит,

$$\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5} = \frac{4x^2y^4 \cdot 3x}{4x^2y^4 \cdot 2y} = \frac{3x}{2y}.$$

Числитель и знаменатель заданной алгебраической дроби сократили на общий множитель $4x^2y^4$.

Решение этого примера можно записать по-другому:

$$\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5} = \frac{12}{8} \cdot \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{y^4}{y^5} = \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{y} = \frac{3x}{2y}.$$

б) Чтобы сократить дробь, разложим её числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{(a + b)(a + b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}$$

(дробь сократили на общий множитель $a + b$).

А теперь вернитесь в § 1 (см. с. 10). Видите, данное там обещание мы наконец-то смогли выполнить.

в) $\dfrac{x^2 - xy}{x^4 - xy^3} = \dfrac{x(x-y)}{x(x^3 - y^3)} = \dfrac{x(x-y)}{x(x-y)(x^2 + xy + y^2)} = \dfrac{1}{x^2 + xy + y^2}$

(сократили дробь на общий множитель числителя и знаменателя, т. е. на $x(x - y)$).

Итак, для того чтобы сократить алгебраическую дробь, следует сначала разложить на множители её числитель и знаменатель (если они не совпадают). Так что ваш успех в этом новом деле (сокращении алгебраических дробей) в основном зависит от того, как вы усвоили материал предыдущих параграфов этой главы.

ПРИМЕР 2

Сократить алгебраическую дробь:

а) $\dfrac{a^6 + b^6}{2a^3 - b^3 - a^2b + 2ab^2}$;

б) $\dfrac{a^4 - 10a^2 + 169}{a^2 + 6a + 13}$;

в) $\dfrac{a^3 - 6a^2 + 12a - 9}{a^4 - 3a^3 + 3a^2}$.

Решение а) Разложим на множители числитель дроби:

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

Разложим на множители знаменатель дроби:

$$2a^3 - b^3 - a^2b + 2ab^2 = (2a^3 + 2ab^2) - (a^2b + b^3) = 2a(a^2 + b^2) - b(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(2a - b).$$

Теперь можно сократить данную дробь:

$$\frac{a^6 + b^6}{2a^3 - b^3 - a^2b + 2ab^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)}{(a^2 + b^2)(2a - b)} = \frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{2a - b}.$$

б) Разложим на множители числитель дроби:

$$a^4 - 10a^2 + 169 = ((a^2)^2 + 13^2 + 26a^2) - 26a^2 - 10a^2 = (a^2 + 13)^2 - 36a^2 = (a^2 + 13 - 6a)(a^2 + 13 + 6a).$$

Обращаем ваше внимание, что здесь мы в очередной раз воспользовались методом выделения полного квадрата.

Что касается заданной дроби, то её уже можно сократить:

$$\frac{a^4 - 10a^2 + 169}{a^2 + 6a + 13} = \frac{(a^2 - 6a + 13)(a^2 + 6a + 13)}{a^2 + 6a + 13} = a^2 - 6a + 13.$$

в) Разложим на множители числитель дроби; для этого, как в примере 8 из предыдущего параграфа, выделим полный куб:

$$a^3 - 6a^2 + 12a - 9 = (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) - 1 = (a - 2)^3 - 1 =$$
$$= ((a - 2) - 1)((a - 2)^2 + (a - 2) + 1) = (a - 3)(a^2 - 3a + 3).$$

Разложим на множители знаменатель дроби:

$$a^4 - 3a^3 + 3a^2 = a^2(a^2 - 3a + 3).$$

Теперь можно сократить данную дробь:

$$\frac{a^3 - 6a^2 + 12a - 9}{a^4 - 3a^3 + 3a^2} = \frac{(a - 3)(a^2 - 3a + 3)}{a^2(a^2 - 3a + 3)} = \frac{a - 3}{a^2}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение алгебраической дроби.
2. Используя переменные a и b, запишите алгебраическую дробь, числитель которой представляет собой трёхчлен, а знаменатель — одночлен.
3. Что означает задание сократить алгебраическую дробь? Что вы для этого должны сделать?
4. Может ли в результате сокращения алгебраической дроби в ответе получиться одночлен? число?
5. Приведите пример алгебраической дроби, в результате сокращения которой получается двучлен.

§43 ТОЖДЕСТВА

В этом параграфе мы познакомимся ещё с одним алгебраическим термином. Мы знаем, например, что:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2,$$
$$(a + b)c = ac + bc.$$

Написанные равенства верны при любых значениях входящих в их состав переменных. Такие равенства в алгебре называют *тождествами*. Левую и правую части тождества называют выражениями, *тождественно равными* друг другу (или просто *тождественными*). Например, $a^2 - b^2$ и $(a - b)(a + b)$— тождественно равные выражения. Всякую замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют *тождественным преобразованием* выражения.

тождественное преобразование

Всё, чем мы занимались в главах 4—7: действия со степенями, с одночленами, с многочленами, — всё это было изучением тождественных преобразований.

В математике часто бывает так, что, используя некоторый термин, вдруг обнаруживают, что к новой ситуации он становится не очень приспособленным, требует уточнения. Это относится и к термину «тождество». Для работы с многочленами данное выше определение абсолютно точное. Однако уже для работы с алгебраическими дробями в понимании этого термина понадобится корректировка, придётся сделать некоторые уточнения.

Рассмотрим алгебраическую дробь $\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)}$. Её можно сократить на $x - 1$ — общий множитель числителя и знаменателя. Таким образом, имеет место равенство

$$\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x}{x-2}. \qquad (1)$$

Является ли это равенство тождеством? Введя выше этот термин, мы отметили, что тождество — это равенство с переменными, верное при *любых* значениях переменных. Но про равенство (1) этого сказать нельзя, оно не имеет смысла при $x = 1$, при $x = 2$, т. е. оно верно уже не при любых значениях переменной x. Указанные значения не являются допустимыми для выражений, входящих в состав равенства (1). Если же ограничиться только *допустимыми* значениями переменной x, то при любых таких значениях равенство (1) окажется верным.

тождество

Учитывая подобные ситуации, математики уточнили понятие тождества.

Определение

Тождество — это равенство, верное *при любых допустимых* значениях входящих в его состав переменных.

В этом смысле равенство (1) — тождество. Вот та корректировка понятия «тождество», о которой мы упоминали выше.

Вернёмся к последнему примеру § 42. В пункте а) мы видели, что $\frac{a^6 + b^6}{2a^3 - b^3 - a^2b + 2ab^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)}{(a^2 + b^2)(2a - b)} = \frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{2a - b}$, т. е. получили тождество $\frac{a^6 + b^6}{2a^3 - b^3 - a^2b + 2ab^2} = \frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{2a - b}$. Каковы здесь допустимые значения переменных? Во-первых, должно выполняться условие $2a - b \neq 0$. Во-вторых, дробь мы сократили на $a^2 + b^2$, значит, должно выполняться условие $a^2 + b^2 \neq 0$ или, что то же самое, $(a; b) \neq (0; 0)$. Впрочем, если $2a - b \neq 0$, то, в частности, $(a; b) \neq (0; 0)$. Первое условие более ограничительное, чем второе, так что достаточно оставить первое условие: $2a - b \neq 0$.

В пункте б) мы видели, что $\frac{(a^2 - 6a + 13)(a^2 + 6a + 13)}{a^2 + 6a + 13} = a^2 - 6a + 13$. Каковы здесь допустимые значения переменной? Должно выполняться условие $a^2 + 6a + 13 \neq 0$. Но оно автоматически выполняется, поскольку $a^2 + 6a + 13 = (a + 3)^2 + 4 > 0$. Что это значит? Это значит, что $\frac{(a^2 - 6a + 13)(a^2 + 6a + 13)}{a^2 + 6a + 13} = a^2 - 6a + 13$ является тождеством при любых значениях переменной.

ПРИМЕР 1

Доказать, что при $x \neq 1$ имеет место тождество

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 = \frac{x - 6x^6 + 5x^7}{(x - 1)^2}. \quad (2)$$

Решение Чтобы доказать, что $A = \frac{B}{C}$, достаточно установить, что $AC = B$. Воспользовавшись этим замечанием, рассмотрим произведение многочленов $(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5)(x - 1)^2$. Имеем:

$$(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5)(x - 1)^2 =$$
$$= (x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5)(x^2 - 2x + 1) =$$
$$= x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 - 2x^2 - 4x^3 - 6x^4 - 8x^5 - 10x^6 + x +$$
$$+ 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5.$$

Осталось привести подобные члены; получим $x - 6x^6 + 5x^7$. Тождество (2) доказано.

ПРИМЕР 2

Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Решение $a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3$. Сгруппируем в полученной сумме слагаемые $(a + b)^3$ и c^3; это позволит применить формулу суммы кубов:

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 = ((a + b)^3 + c^3) - 3ab(a + b) =$$
$$= ((a + b) + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b) =$$
$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ac - bc) - 3ab(a + b).$$

Но по условию $a + b + c = 0$, значит, в полученном выражении первое произведение равно нулю, а во втором произведении вместо $a + b$ можно написать $-c$, т. е. $-3ab(a + b) = -3ab(-c) = 3abc$. В итоге получаем, что $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

ПРИМЕР 3

Построить график уравнения:

а) $\frac{xy + 4x - 2x^2 - 2y}{x - 2} = 0$; б) $\frac{y^2 + 2y - 2x - x^2}{x - y} = 0$.

Решение а) Рассмотрим числитель алгебраической дроби в левой части уравнения:

$$xy + 4x - 2x^2 - 2y = (xy - 2y) - (2x^2 - 4x) = y(x - 2) - 2x(x - 2) = (x - 2)(y - 2x).$$

Значит, $\frac{xy + 4x - 2x^2 - 2y}{x - 2} = \frac{(x - 2)(y - 2x)}{x - 2} = y - 2x$. Подчеркнём, что тождество $\frac{xy + 4x - 2x^2 - 2y}{x - 2} = y - 2x$ имеет место лишь при $x \neq 2$.

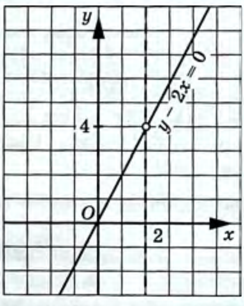


Рис. 85

Проведённые рассуждения позволяют переформулировать условия задачи: нам нужно построить график уравнения $y - 2x = 0$ при условии, что $x \neq 2$. Графиком уравнения $y - 2x = 0$ является прямая, а условие $x \neq 2$ означает, что на этой прямой нельзя брать точку с абсциссой $x = 2$. График заданного уравнения изображён на рисунке 85. Обратите внимание: точка $(2; 4)$ отмечена светлым кружочком — «выколотая» точка.

б) Как и в пункте а), начнём с числителя алгебраической дроби:

$$y^2 + 2y - 2x - x^2 = (y^2 - x^2) + (2y - 2x) = (y - x)(y + x) + 2(y - x) = (y - x)(y + x + 2).$$

Значит, $\frac{y^2 + 2y - 2x - x^2}{x - y} = \frac{(y - x)(y + x + 2)}{x - y} = -(y + x + 2)$.

Подчеркнём, что тождество $\frac{y^2 + 2y - 2x - x^2}{x - y} = -(y + x + 2)$ имеет место лишь при $x - y \neq 0$.

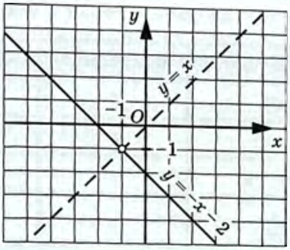


Рис. 86

Проведённые рассуждения позволяют переформулировать условия задачи: нам нужно построить график уравнения $-(y + x + 2) = 0$, т. е. график линейной функции $y = -x - 2$ при условии, что $y \neq x$. Графиком линейной функции $y = -x - 2$ является прямая, а условие $y \neq x$ означает, что на этой прямой нельзя брать точку, координаты которой удовлетворяют условию $y = x$, т. е. принадлежащую прямой $y = x$. График заданного уравнения изображён на рисунке 86; обратите внимание: точка пересечения прямых $y = -x - 2$ и $y = x$ — «выколотая» точка.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое тождество?
2. Приведите пример тождества, верного при любых значениях переменных.
3. Приведите пример тождества, верного не при всех, а лишь при допустимых значениях переменных.

§44[1] СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ И ДИСПЕРСИЯ

Если данных имеется много (несколько десятков, сотен, тысяч...), то работать со всеми этими данными целиком затруднительно. Поэтому от всей первоначальной информации стараются оставить небольшое количество лишь самых важных показателей. Они описывают распределение данных в самых общих чертах, «забывая» многие первоначальные детали. Т. е. кратко: выигрываем в уменьшении информации, но проигрываем в её точности.

С некоторыми из таких показателей мы уже знакомились ранее. Это — объём, размах, мода и медиана данных. Но, пожалуй, самой распространённой является ещё одна статистическая характеристика ряда числовых данных — *среднее арифметическое значение*, кратко: *среднее значение*, или просто *среднее*.

среднее значение

Правило Для того чтобы найти среднее арифметическое (среднее) нескольких чисел, следует их сумму разделить на их количество.

[1] Параграф написан П. В. Семеновым.

Несколько примеров вычисления среднего соберём в таблице:

Числа	Сумма	Количество	Среднее
20, 16	20 + 16 = 36	2	18
20, 1, 6	20 + 1 + 6 = 27	3	9
2, 0, 1, 6	2 + 0 + 1 + 6 = 9	4	2,25
2, 0, 1, 6, 2016	2 + 0 + 1 + 6 + + 2016 = 2025	5	405
2, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 6, 6, 6	2 + 3 + 18 = 23	10	2,3

Отметим, что ни в одном из этих случаев среднее значение ряда чисел не совпадает ни с одним из чисел ряда. Это — весьма типичная ситуация, хотя так бывает не всегда.

ПРИМЕР 1

Для ряда чисел 7, 2, −3, 5, 3, 5, 2, 30, 4, 2, −2, 6, 4 найти наименьшее число и наибольшее число. Вычислить размах, моду, медиану, среднее.

Решение Наименьшее число равно −3, наибольшее равно 30, размах равен 33. Упорядочим ряд: −3, −2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 30. Мода равна числу 2, которое встречается три раза. Медиана равна числу 4, которое стоит на «среднем», седьмом месте. Осталось вычислить среднее арифметическое

$$\frac{-3-2+2+2+2+3+4+4+5+5+6+7+30}{13}=\frac{65}{13}=5.$$

Ответ Размах 33, мода 2, медиана 4, среднее 5.

Мы видим, что мода, медиана и среднее — это различные характеристики ряда данных. Они по-разному описывают распределение данных.

Вернёмся к среднему. В общем виде среднее двух чисел a и b равно их полусумме $\frac{a+b}{2}$, среднее трёх чисел a, b и c равно $\frac{a+b+c}{3}$, и т. д. А как записать формулу среднего для произвольного количества чисел? Для этого сначала нужно научиться записывать произвольное количество чисел. Так как количество чисел никак не ограничено, то букв какого-либо разговорного языка для такого перечисления может не хватить. В математике действуют так: используют для обозначения только одну букву, но снабжают её индексом, который будет нумеровать наши числа. Например,

a_1, a_2, a_3 — набор (ряд) из трёх чисел; a_1 — первое число в этом ряду;

b_1, b_2, b_3, b_4 — набор (ряд) из четырёх чисел; b_3 — третье число в этом ряду;

$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ — набор (ряд) из семи чисел; z_6 — шестое число в этом ряду;

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ — набор (ряд) из n чисел.

Теперь приведённое ранее правило вычисления среднего можно записать формулой, на математическом языке:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}.$$

В статистике используют разные обозначения для среднего значения. Одно из наиболее употребительных — та буква, которой обозначены сами данные, но с чёрточкой вверху и без индексов: $\overline{x}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$ и т. п.

ПРИМЕР 2

За первые два месяца учебного года Петя получил по русскому языку такие отметки: 4, 2, 4, 4, 5, 5. В ноябре он подряд получил несколько пятёрок, и его средняя отметка после этого стала равной 4,4. Сколько пятёрок подряд Петя получил в ноябре?

Решение Предположим, что к имеющимся отметкам добавлены n пятёрок. Тогда количество всех отметок равно $6 + n$, а их сумма равна $4 + 2 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5n = 24 + 5n$. Тогда среднее будет равно $\frac{24 + 5n}{6 + n}$. Составляем уравнение: $\frac{24 + 5n}{6 + n} = 4{,}4$. Решаем его:

$$24 + 5n = 4{,}4\,(6 + n),\ 24 + 5n = 26{,}4 + 4{,}4n,\ 0{,}6n = 2{,}4,\ n = 4.$$

Ответ 4.

Два следующих свойства среднего значения иногда позволяют упростить вычисления.

ТЕОРЕМА 1

Если каждое число ряда увеличить (уменьшить) на постоянное число *a*, то среднее ряда также увеличится (уменьшится) на то же число.

ТЕОРЕМА 2

Если каждое число ряда умножить на постоянное число *b*, то среднее ряда также умножится на то же число.

Доказательство Докажем теорему 1. Сначала были числа $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$. Их среднее равнялось $\bar{x}$. Из них получились числа $x_1 + a, x_2 + a, x_3 + a, ..., x_{n-1} + a, x_n + a$. Среднее новых n чисел равно

$$\frac{(x_1 + a) + (x_2 + a) + ... + (x_n + a)}{n} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n) + (\overbrace{a + a + a + ... + a}^{n})}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} + a = \bar{x} + a,$$

т. е. оно на a больше среднего первоначальных чисел. Теорема доказана.

Попробуйте по аналогии доказать теорему 2.

ПРИМЕР 3

Измерили рост команды баскетболистов седьмых классов, включая запасных. Получили ряд (в см): 151, 162, 159, 154, 161, 155, 153, 155, 155, 160, 154, 153. Найти средний рост команды.

Решение Уменьшим каждое число на 155. Получим ряд: −4, 7, 4, −1, 6, 0, −2, 0, 0, 5, −1, −2. Сумму чисел в новом ряду можно сосчитать устно. Получится 12. Значит, среднее нового ряда равно 1. Теперь вернёмся к прежнему ряду, т. е. добавим к числам нового ряда по 155. По теореме 1 получаем, что среднее первоначального ряда равно 1 + 155 = 156.

Ответ 156 см.

Познакомимся ещё с одним статистическим показателем. Он называется «страшным» словом *дисперсия*[1]. Дисперсия ряда (набора) чисел $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$ показывает, насколько тесно эти числа распределены, рассеяны вокруг своего среднего значения $\bar{x}$.

дисперсия

Вычисление дисперсии — непростая задача. Сначала вычисляют среднее $\bar{x}$. Затем вычисляют все отклонения $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, ..., $x_n - \bar{x}$ чисел ряда от среднего $\bar{x}$. Эти отклонения возводят в квадрат: $(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, ..., (x_n - \bar{x})^2$. Наконец, находят среднее полученных квадратов отклонений.

Итак, дисперсия D вычисляется по следующей формуле:

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Дисперсия всегда неотрицательна. Дисперсия ряда чисел равна нулю только в том случае, когда все эти числа равны между собой (и, значит, равны среднему $\bar{x}$). Чем ближе дисперсия к нулю, тем тес-

[1] От латинского *dispersio* — «рассеяние».

нее числа x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n расположены вокруг своего среднего значения $\overline{x}$. Если дисперсия заметно отличается от нуля, то какие-то из чисел ряда заметно отличаются от среднего $\overline{x}$.

ПРИМЕР 4

Четыре контролёра независимо друг от друга взвесили опытный образец. Получились такие результаты (в граммах): 14,1; 13,85; 14,15; 13,9. Для того чтобы образец прошёл проверку, требуется, чтобы дисперсия была меньше 0,04. Пройдёт ли проверку этот образец?

Решение Так как $14{,}1 + 13{,}85 + 14{,}15 + 13{,}9 = (14{,}1 + 13{,}9) + (13{,}85 + 14{,}15) = 56$, то среднее равно $56 : 4 = 14$. Выпишем отклонения: 0,1; −0,15; 0,15; −0,1 и квадраты отклонений: 0,01; 0,0225; 0,0225; 0,01. Их среднее равно $0{,}065 : 4 = 0{,}01625$. Это и есть дисперсия. Она меньше 0,04.

Ответ Да, пройдёт.

Вопросы для самопроверки

1. Вычислите среднее следующих рядов чисел:
а) 1, 1, 1, 1, 2; б) 1, 2, 2, 2, 2; в) 1, 2, 11, 12, 21, 22.
2. Почему среднее ряда и среднее соответствующего упорядоченного ряда равны между собой?
3. Какое число следует добавить в набор 9, 1, 4, 5 для того, чтобы среднее стало равняться 5?
4. Из оценок 9,1; 9,5; 8,7; 8,9; 8,5; 9,3; 9,0 отбросили худшую и лучшую, а итоговую оценку вычислили, как среднее оставшихся оценок. Чему равна итоговая оценка?
5. При каком значении n среднее ряда из n единиц и одной двойки будет равно 1,02?
6. При каком значении n среднее ряда из n двоек и одной единицы будет равно 1,95?
7. Есть несколько чисел, больших 3, но меньших 5. Проверьте, что их среднее тоже больше 3, но меньше 5.
8. По определению дисперсия равна

$$\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}.$$

Проверьте, что если дисперсия равна нулю, то $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_n = \overline{x}$.

Основные результаты

- В этой главе мы ввели новые (для вас) *понятия* математического языка:
  — разложение многочлена на множители;
  — алгебраическая дробь, сокращение алгебраической дроби;
  — тождество, тождественно равные выражения, тождественное преобразование выражения.
- Мы познакомились со следующими *приёмами разложения многочлена на множители*:
  — вынесение общего множителя за скобки;
  — группировка;
  — использование формул сокращённого умножения;
  — выделение полного квадрата.
- Мы познакомились с новыми статистическими показателями: среднее значение, дисперсия.
- Мы научились:
  — раскладывать многочлен на множители, используя различные приёмы;
  — сокращать алгебраические дроби;
  — вычислять среднее значение и дисперсию ряда данных.

Темы исследовательских работ

1. Разложение многочлена на множители способом группировки.
2. Разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приёмов.
3. Различные применения метода разложения на множители.
4. Среднее арифметическое числовых данных. Дисперсия числовых данных.

ГЛАВА 8. ФУНКЦИЯ $y = x^2$

§ 45 ФУНКЦИЯ $y = x^2$ И ЕЁ ГРАФИК

1 Парабола — график функции $y = x^2$

В главе 2 мы ввели термин «линейная функция», понимая под этим линейное уравнение вида $y = kx + m$ с двумя переменными x, y. Правда, переменные x, y, фигурирующие в этом уравнении (в этой математической модели), считались неравноправными: x — независимая переменная (аргумент), которой мы могли придавать любые значения независимо ни от чего; y — зависимая переменная, поскольку её значение зависело от того, какое значение переменной x было выбрано. Но тогда возникает естественный вопрос: а не встречаются ли математические модели такого же плана, но такие, у которых y выражается через x не по формуле $y = kx + m$, а каким-то иным способом? Ответ ясен: конечно, встречаются. Если, например, x — сторона квадрата, а y — его площадь, то $y = x^2$. Если x — сторона куба, а y — его объём, то $y = x^3$. Если x — одна сторона прямоугольника, площадь которого равна 100 см^2, а y — другая его сторона, то $y = \frac{100}{x}$. Поэтому, естественно, приходится изучать и модель $y = x^2$, и модель $y = x^3$, и модель $y = \frac{100}{x}$, и многие другие модели, имеющие такую же структуру: в левой части равенства находится переменная y, а в правой — какое-то выражение с переменной x. Для таких моделей сохраняют термин «функция», опуская прилагательное «линейная».

Замечание Выше мы уже не раз говорили о том, как обстоит дело в математике с новыми понятиями, новыми терминами. Часто бывает так: ввели новое понятие, работают с ним, но затем, по мере дальнейшего изучения математики, начинают осознавать, что введённое понятие требует уточнения, развития. Именно так обстояло дело с понятием «тождество» (см. § 43). Точно так же обстоит дело и с понятием «функция». Мы ещё довольно долго будем привыкать к нему, набираться опыта, работать с этим понятием, пока не придём к строгому определению (это будет в 9-м классе).

В этом параграфе мы рассмотрим функцию $y = x^2$ и построим её график.

Дадим независимой переменной x несколько конкретных значений и вычислим соответствующие значения зависимой переменной y (по формуле $y = x^2$):

если $x = 0$, то $y = 0^2 = 0$;
если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;
если $x = 2$, то $y = 2^2 = 4$;
если $x = 3$, то $y = 3^2 = 9$;
если $x = -1$, то $y = (-1)^2 = 1$;
если $x = -2$, то $y = (-2)^2 = 4$;
если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$.

Короче говоря, мы составили следующую таблицу:

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	0	1	4	9	1	4	9

Построим найденные точки (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9), (−1; 1), (−2; 4), (−3; 9) на координатной плоскости xOy (рис. 87, *а*). Эти точки расположены на некоторой линии, начертим её (рис. 87, *б*). Эту линию называют **параболой**.

парабола

Конечно, в идеале надо было дать аргументу x *все возможные значения*, вычислить соответствующие значения переменной y и построить полученные точки $(x; y)$. Тогда график был бы абсолютно точным, безупречным. Однако это нереально, ведь таких точек бесконечно много. Поэтому математики поступают так: берут конечное множество точек, строят их на координатной плоскости и смотрят, какая линия намечается этими точками. Если контуры этой линии проявляются достаточно отчётливо, то эту линию проводят. Возможны ли ошибки? Не без этого. Поэтому и надо всё глубже и глубже изучать математику, чтобы были возможности избегать ошибок.

Попробуем, глядя на рисунок 87, *б*, описать геометрические свойства параболы.

Во-первых, отмечаем, что парабола обладает симметрией. В самом деле, если провести выше оси x любую прямую, параллельную

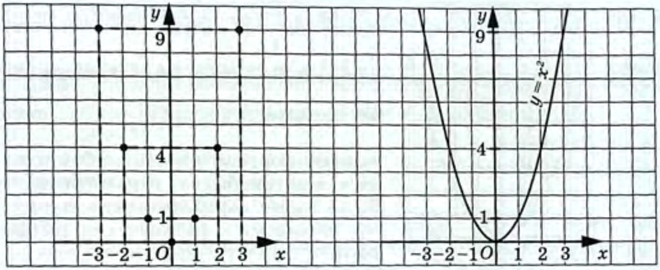


Рис. 87 *а* *б*

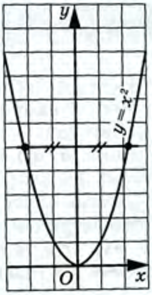


Рис. 88

оси x, то эта прямая пересечёт параболу в двух точках, расположенных на равных расстояниях от оси y, но по разные стороны от неё (рис. 88). Кстати, то же можно сказать и о точках, отмеченных на рисунке 87, *а*: (1; 1) и (−1; 1); (2; 4) и (−2; 4); (3; 9) и (−3; 9). Говорят, что ось y является **осью симметрии параболы** $y = x^2$ или что *парабола симметрична относительно оси y*.

Во-вторых, замечаем, что ось симметрии как бы разрезает параболу на две части, которые обычно называют **ветвями параболы.**

В-третьих, отмечаем, что у параболы есть особая точка, в которой смыкаются обе ветви и которая лежит на оси симметрии параболы, — точка (0; 0). Учитывая её особенность, ей присвоили специальное название — **вершина параболы.**

В-четвёртых, когда одна ветвь параболы соединяется в вершине с другой ветвью, это происходит плавно, без излома; парабола как бы «прижимается» к оси абсцисс. Обычно говорят: *парабола касается оси абсцисс.*

ось симметрии параболы

ветви параболы

вершина параболы

Теперь попробуем, глядя на рисунок 87, *б*, описать некоторые свойства функции $y = x^2$.

Во-первых, замечаем, что $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x > 0$ и при $x < 0$.

Во-вторых, отмечаем, что $y_{наим} = 0$, а $y_{наиб}$ не существует.

В-третьих, замечаем, что *функция $y = x^2$ убывает на луче* $(-\infty; 0]$, — при этих значениях x, двигаясь по параболе слева направо, мы «спускаемся с горки». *Функция $y = x^2$ возрастает на луче* $[0; +\infty)$ — при этих значениях x, двигаясь по параболе слева направо, мы «поднимаемся в горку».

Отметим ещё одно любопытное свойство параболы. Если рассматривать параболу $y = x^2$ как экран, как отражающую поверхность, а в

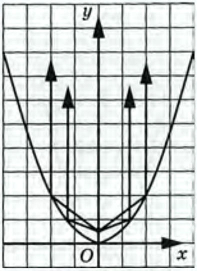


Рис. 89

точке $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ поместить источник света (рис. 89), то лучи, отражаясь от параболы-экрана, образуют параллельный пучок света. Точку $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ называют *фокусом параболы*. Эта идея используется в автомобилях: отражающая поверхность фары имеет параболическую форму, а лампочку помещают в фокусе — тогда свет от фары распространяется достаточно далеко.

2 Функция $y = -x^2$ и её график

Построим график функции $y = -x^2$. Для этого сравним функции $y = x^2$ и $y = -x^2$. При одном и том же значении аргумента, например при $x = a$, первая функция принимает значение a^2, а вторая — значение $-a^2$. Значит, на графике первой функции есть точка $(a; a^2)$, а на графике второй функции — точка $(a; -a^2)$. Эти точки расположены на координатной плоскости xOy симметрично относительно оси абсцисс (рис. 90). Значит, график функции $y = -x^2$ симметричен графику функции $y = x^2$ относительно оси абсцисс (рис. 91). Это та же парабола с той же вершиной и с той же осью симметрии, но только ветви параболы направлены не вверх, а вниз.

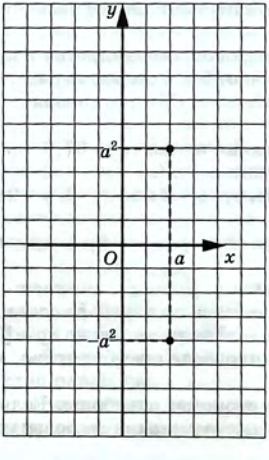


Рис. 90

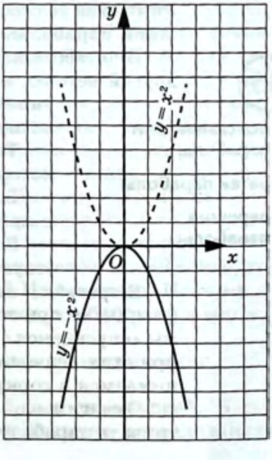


Рис. 91

3 Решение примеров

ПРИМЕР 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2$:
а) на отрезке $[1; 3]$;
б) на отрезке $[-3; -1{,}5]$;
в) на отрезке $[-3; 2]$.

Решение а) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту её часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[1; 3]$ (рис. 92). Для выделенной части графика находим $y_{\text{наим}} = 1$ (при $x = 1$), $y_{\text{наиб}} = 9$ (при $x = 3$).

б) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту её часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[-3; -1{,}5]$ (рис. 93). Для выделенной части графика находим $y_{\text{наим}} = 2{,}25$ (при $x = -1{,}5$), $y_{\text{наиб}} = 9$ (при $x = -3$).

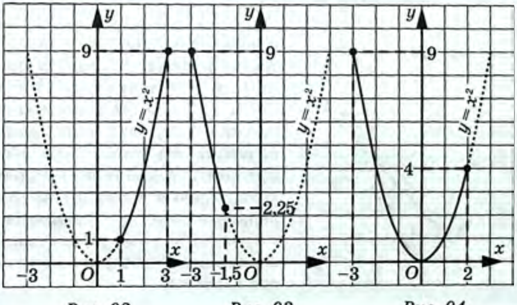


Рис. 92 *Рис. 93* *Рис. 94*

в) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту её часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[-3; 2]$ (рис. 94). Для выделенной части графика находим $y_{\text{наим}} = 0$ (при $x = 0$), $y_{\text{наиб}} = 9$ (при $x = -3$).

! Чтобы каждый раз не строить график функции $y = x^2$ по точкам, вырежьте из плотной бумаги шаблон параболы. С его помощью вы будете очень быстро чертить параболу.

Предлагая вам заготовить шаблон параболы, мы как бы уравниваем в правах функцию $y = x^2$ и линейную функцию $y = kx + m$. Ведь графиком линейной функции является прямая, а для изображения прямой используется обычная линейка — это и есть шаблон графика функции $y = kx + m$. Так пусть у вас будет и шаблон графика функции $y = x^2$.

ПРИМЕР 2

Найти точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.

Решение Построим в одной системе координат параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 2$ (рис. 95). Они пересекаются в точках A и B, причём по чертежу нетрудно найти координаты этих точек A и B: для точки A имеем $x = -1$, $y = 1$, а для точки B имеем $x = 2$, $y = 4$.

Ответ Парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 2$ пересекаются в двух точках: $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$.

Замечание До сих пор мы с вами довольно смело делали выводы с помощью чертежа. Однако математики не слишком доверяют чертежам. Обнаружив на рисунке 95 две точки пересечения параболы и прямой и определив с помощью рисунка координаты этих точек, математик обычно проверяет себя: на самом ли деле точка $(-1; 1)$ лежит как на прямой, так и на параболе; действительно ли точка $(2; 4)$ лежит и на прямой, и на параболе? Для этого нужно подставить координаты точек A и B в уравнение прямой и в уравнение параболы, а затем убедиться, что и в том и в другом случае получится верное равенство. В примере 2 в обоих случаях получатся верные равенства. Особенно часто проводят такую проверку, когда сомневаются в точности чертежа.

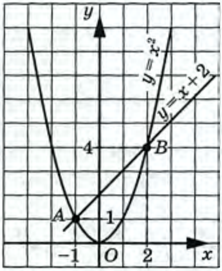


Рис. 95

Вопросы для самопроверки

1. Как называют график функции $y = x^2$? функции $y = -x^2$?
2. Какая прямая является осью симметрии графика функции $y = x^2$? графика функции $y = -x^2$?
3. Какая точка является вершиной графика функции $y = x^2$? графика функции $y = -x^2$?
4. Даны функции $y = x^2$ и $y = -x^2$. Какая из них возрастает при $x \leqslant 0$ и убывает при $x \geqslant 0$? Какая из них убывает при $x \leqslant 0$ и возрастает при $x \geqslant 0$?
5. Что можно сказать о взаимном расположении графиков функций $y = x^2$ и $y = -x^2$?

6. Дана функция $y = x^2$. Придумайте линейную функцию $y = kx + m$ такую, чтобы графики обеих функций:
   а) не пересекались;
   б) пересекались в двух точках;
   в) имели одну общую точку.
7. Дана функция $y = -x^2$. Придумайте линейную функцию $y = kx + m$ такую, чтобы графики обеих функций:
   а) не пересекались;
   б) пересекались в двух точках;
   в) имели одну общую точку.

§ 46 ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Подытожим наши знания о графиках функций. Мы с вами научились строить графики следующих функций:

$y = b$ (прямая, параллельная оси x);

$y = kx$ (прямая, проходящая через начало координат);

$y = kx + m$ (прямая);

$y = x^2$, $y = -x^2$ (параболы).

Знание этих графиков позволит нам в случае необходимости заменить аналитическую модель геометрической (графической), например, вместо модели $y = x^2$ (которая представляет собой равенство с двумя переменными x и y) рассматривать параболу в координатной плоскости. В частности, это иногда полезно для решения уравнений. Как это делается, обсудим на нескольких примерах.

ПРИМЕР 1

Решить уравнение $x^2 = x + 2$.

Решение Рассмотрим функции $y = x^2$ и $y = x + 2$; построим их графики и найдём точки пересечения графиков. Эту задачу мы с вами уже решали (см. пример 2 из § 45 и, соответственно, рис. 95). Парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 2$ пересекаются в точках $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$.

Как же найти корни уравнения $x^2 = x + 2$, т. е. те значения x, при которых выражения x^2 и $x + 2$ принимают одинаковые числовые значения? Очень просто, эти значения уже найдены: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Это абсциссы точек A и B, в которых пересекаются построенные графики.

Ответ $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Фактически мы использовали следующий алгоритм.

1. Ввели в рассмотрение функции $y = x^2$, $y = x + 2$ (для другого уравнения будут, разумеется, иные функции).

2. Построили в одной системе координат графики функций $y = x^2$, $y = x + 2$.

3. Нашли точки пересечения графиков.

4. Нашли абсциссы точек пересечения — это и есть корни уравнения.

ПРИМЕР 2

Решить уравнение $x^2 - x + 4 = 0$.

Решение Здесь придётся дополнить выработанный алгоритм ещё одним шагом (подготовительным): надо переписать уравнение в виде, для которого имеется алгоритм. Этот вид таков: $x^2 = x - 4$. Теперь всё в порядке, действуем в соответствии с алгоритмом.

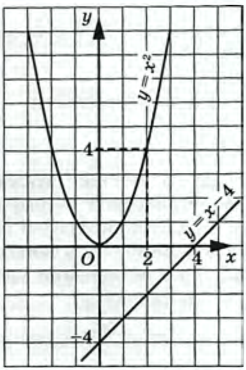


Рис. 96

1) Введём две функции: $y = x^2$, $y = x - 4$.

2) Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = x - 4$ (рис. 96).

3) Точек пересечения у построенных параболы и прямой нет.

Как вы думаете, что означает этот геометрический факт для данной алгебраической задачи (для данного уравнения)? Догадались? А теперь сопоставьте свою догадку с тем, что ниже записано в ответе.

Ответ Уравнение не имеет корней.

Существуют так называемые квадратные уравнения — уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — числа, $a \neq 0$. Они решаются по специальным формулам для отыскания корней, но этих формул вы пока не знаете. Тем не менее некоторые квадратные уравнения мы уже решили. Так, в § 41 мы решили уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$ методом разложения на множители. А в настоящем параграфе мы решили ещё два квадратных уравнения — графическим методом. Это уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ (см. пример 1; правда, там уравнение было записано по-другому: $x^2 = x + 2$ — но вы же понимаете, что это то же самое) и уравнение $x^2 - x + 4 = 0$ (см. пример 2).

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите все функции, которые мы с вами изучили в курсе алгебры 7-го класса.
2. Что нужно сделать, чтобы графически решить уравнение вида $x^2 = kx + m$? Прокомментируйте свой ответ на примере решения уравнения $x^2 = 2x + 3$.
3. Используя графический метод, ответьте на вопрос, сколько корней имеет уравнение:
а) $x^2 + x - 4 = 0$; б) $x^2 + x + 4 = 0$?

§47 ЧТО ОЗНАЧАЕТ В МАТЕМАТИКЕ ЗАПИСЬ $y = f(x)$

1 Знакомство с символом $f(x)$

Изучая какой-либо реальный процесс, обычно обращают внимание на две величины, участвующие в процессе (в более сложных процессах участвуют не две величины, а три, четыре и т. д., но мы пока такие процессы не рассматриваем): одна из них меняется произвольно, независимо ни от чего (такую переменную чаще всего обозначают буквой x), а другая величина принимает значения, которые зависят от выбранных значений переменной x (такую зависимую переменную чаще всего обозначают буквой y). Математической моделью реального процесса как раз и является запись на математическом языке зависимости y от x, т.е. связи между переменными x и y.

Ещё раз напомним, что к настоящему моменту мы изучили следующие математические модели: $y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$. Есть ли у этих математических моделей что-либо общее? Есть! Их структура одинакова:

$$y = f(x).$$

Эту запись следует понимать так: имеется выражение $f(x)$ с переменной x, с помощью которого мы находим значения переменной y.

Математики предпочитают запись $y = f(x)$ не случайно. Пусть, например, $f(x) = x^2$, т. е. речь идёт о функции $y = x^2$. Пусть нам надо выделить несколько значений аргумента и соответствующих значений функции. До сих пор мы писали так:

если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;
если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$ и т. д.

Если же использовать обозначение $f(x) = x^2$, то запись становится более экономной:

$$f(1) = 1^2 = 1;$$
$$f(-3) = (-3)^2 = 9.$$

Итак, мы познакомились ещё с одним фрагментом математического языка: фраза «значение функции $y = x^2$ в точке $x = 2$ равно 4» записывается короче: «если $f(x) = x^2$, то $f(2) = 4$».

А вот образец обратного перевода: если $f(x) = x^2$, то $f(-3) = 9$. По-другому — значение функции $y = x^2$ в точке $x = -3$ равно 9.

ПРИМЕР 1

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^3$. Вычислить:

а) $f(1)$; д) $f(a - 1)$;
б) $f(-4)$; е) $f(3x)$;
в) $f(a)$; ж) $f(-x)$.
г) $f(2a)$;

Решение Во всех случаях план действий один и тот же: нужно в выражение $f(x)$ подставить вместо x то значение аргумента, которое указано в скобках, и выполнить соответствующие вычисления и преобразования.

а) $f(1) = 1^3 = 1$;
б) $f(-4) = (-4)^3 = -64$;
в) $f(a) = a^3$;
г) $f(2a) = (2a)^3 = 8a^3$;
д) $f(a - 1) = (a - 1)^3$;
е) $f(3x) = (3x)^3 = 27x^3$;
ж) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$.

Замечание Разумеется, вместо буквы f можно использовать любую другую букву (в основном из латинского алфавита): $g(x)$, $h(x)$, $s(x)$ и т. д.

ПРИМЕР 2

Даны две функции: $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, и $y = g(x)$, где $g(x) = x^3$. Доказать, что:

а) $f(-x) = f(x)$; б) $g(-x) = -g(x)$.

Решение а) Так как $f(x) = x^2$, то $f(-x) = (-x)^2 = x^2$. Итак, $f(x) = x^2$, $f(-x) = x^2$, значит, $f(-x) = f(x)$.

б) Так как $g(x) = x^3$, то $g(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Итак, $g(x) = x^3$, $g(-x) = -x^3$, т. е. $g(-x) = -g(x)$.

2 Кусочные функции

Использование математической модели вида $y = f(x)$ оказывается удобным во многих случаях, в частности тогда, когда реальный процесс описывается различными формулами на разных промежутках изменения независимой переменной.

ПРИМЕР 3

Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x < 0; \\ x^2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Вычислить: $f(-5)$, $f(-2)$, $f(1{,}5)$, $f(4)$, $f(0)$.
б) Построить график функции $y = f(x)$.

Решение а) Что такое $f(-5)$? Это значение заданной функции в точке $x = -5$. Но функция задана не одним выражением, а двумя: $2x$ и x^2. Каким из них воспользоваться? Это зависит от выбранного значения аргумента. Мы выбрали $x = -5$, а число -5 удовлетворяет неравенству $x < 0$; в этом случае функция задаётся выражением, стоящим в первой строке, т. е. $f(x) = 2x$. Тогда $f(-5) = 2 \cdot (-5) = -10$.

Аналогично вычисляем $f(-2)$: если $x = -2$, то $x < 0$ и, значит, $f(x) = 2x$, т. е. $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Вычислим $f(1{,}5)$, т. е. значение функции $y = f(x)$ в точке $x = 1{,}5$. Это значение x удовлетворяет условию $x \geqslant 0$, и, следовательно, функция задаётся выражением, стоящим во второй строке, т. е. $f(x) = x^2$. Поэтому $f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

Аналогично находим $f(4)$: если $x = 4$, то $x \geqslant 0$ и, значит, $f(x) = x^2$, т. е. $f(4) = 4^2 = 16$.

Осталось вычислить $f(0)$. Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $x \geqslant 0$, следовательно, $f(x) = x^2$, т. е. $f(0) = 0^2 = 0$.

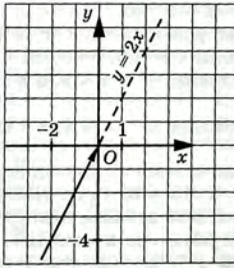


Рис. 97

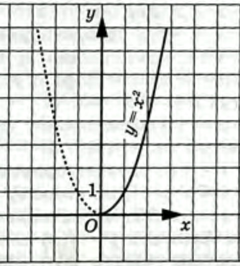


Рис. 98

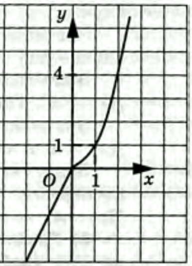


Рис. 99

б) Мы умеем строить графики функций $y = 2x$ (рис. 97) и $y = x^2$ (рис. 98). Заданная функция $y = f(x)$ совпадает с функцией $y = 2x$ при $x < 0$ — эта часть графика выделена на рисунке 97. Заданная функция $y = f(x)$ совпадает с функцией $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ — эта часть графика выделена на рисунке 98. Если мы теперь изобразим обе выделенные части в одной системе координат, то получим требуемый график функции $y = f(x)$ (рис. 99).

Конечно, математики не строят подобные графики так долго. Обычно всё делается сразу в одной системе координат. Только, естественно, прямая $y = 2x$ берётся не целиком, а лишь при условии $x < 0$, т. е. на промежутке $(-\infty; 0)$, и парабола $y = x^2$ берётся не целиком, а лишь при условии $x \geqslant 0$, т. е. на промежутке $[0; +\infty)$. Вот так по кусочкам и воспроизводится весь график. Поэтому функции такого типа, как в примере 3, называют *кусочными функциями*.

кусочная функция

ПРИМЕР 4

Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leqslant 0; \\ 4, & \text{если } \ 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

а) Вычислить: $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$.
б) Построить график функции $y = f(x)$.
в) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ для различных значений a?

Решение

а) Значение $x = -4$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant -1$, а в этом случае $f(x) = x + 2$. Поэтому $f(-4) = -4 + 2 = -2$.

Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant -1$, а в этом случае $f(x) = x + 2$. Значит, $f(-2) = -2 + 2 = 0$.

Значение $x = -0{,}5$ удовлетворяет условию $-1 < x \leqslant 0$, а в этом случае $f(x) = x^2$. Следовательно, $f(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 = 0{,}25$.

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-1 < x \leqslant 0$, а в этом случае $f(x) = x^2$. Тогда $f(0) = 0^2 = 0$.

Значение $x = 1$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 4$, а в этом случае $f(x) = 4$; в частности, и $f(1) = 4$.

Значение $x = 5$ не удовлетворяет ни одному из имеющихся условий: ни первому $-4 \leqslant x \leqslant -1$, ни второму $-1 < x \leqslant 0$, ни третьему $0 < x \leqslant 4$. Поэтому вычислить $f(5)$ мы не можем, *это задание некорректно*.

б) График функции $y = f(x)$ построим «по кусочкам». На рисунке 100 изображён график функции $y = x + 2$, где $x \in [-4; -1]$. На рисунке 101 представлен график функции $y = x^2$, где $x \in (-1; 0]$.

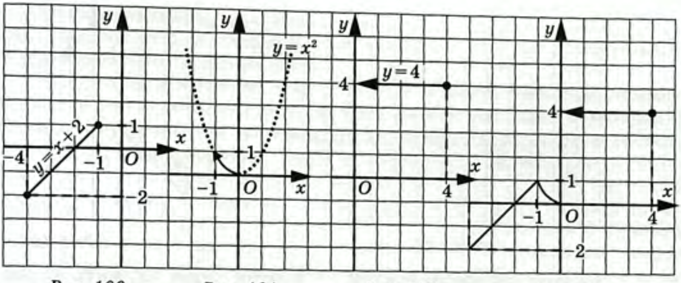


Рис. 100 *Рис. 101* *Рис. 102* *Рис. 103*

На рисунке 102 изображён график функции $y = 4$, где $x \in (0; 4]$. Наконец, на рисунке 103 все «кусочки» воссоединены в одно целое — в график функции $y = f(x)$.

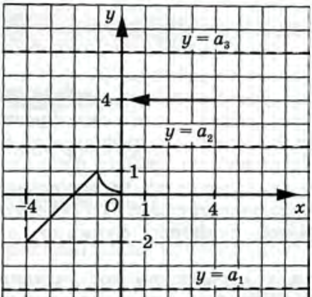


Рис. 104

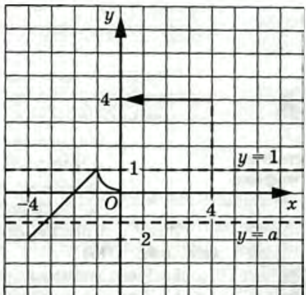


Рис. 105

в) Ответ на поставленный вопрос мы сможем получить с помощью графика функции $y = f(x)$, представленного на рисунке 103. Фактически речь идёт о том, сколько точек пересечения имеет этот график с прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс. Мы видим, что если $a < -2$, или $1 < a < 4$, или $a > 4$, то график функции $y = f(x)$ не пересекается с прямой $y = a$ (три такие прямые проведены на рис. 104); при указанных значениях a уравнение $f(x) = a$ не имеет корней.

Если $-2 \leqslant a < 0$ или $a = 1$, то прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ одну точку пересечения (рис. 105); соответственно, уравнение $f(x) = a$ имеет один корень.

Если $0 \leqslant a < 1$, то прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ две точки пересечения (рис. 106); соответственно, уравнение $f(x) = a$ имеет два корня. Наконец, если $a = 4$, то уравнение $f(x) = a$ имеет

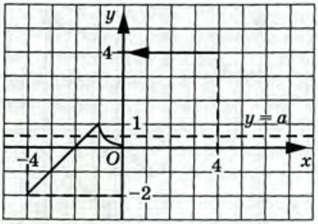


Рис. 106

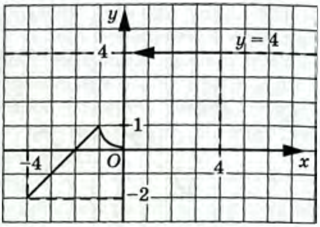


Рис. 107

бесконечно много корней — корнем будет служить любое число из полуинтервала (0; 4] (рис. 107).

Подведём итоги:
если $a < -2$, $1 < a < 4$, $a > 4$, то уравнение $f(x) = a$ не имеет корней; если $-2 \leqslant a < 0$ или $a = 1$, то уравнение $f(x) = a$ имеет один корень; если $0 \leqslant a < 1$, то уравнение $f(x) = a$ имеет два корня; если $a = 4$, то уравнение $f(x) = a$ имеет бесконечно много корней.

Опишем с помощью построенного на рисунке 103 графика некоторые свойства функции $y = f(x)$ — такое описание свойств обычно называют *чтением графика*. Чтение графика — это своеобразный переход от геометрической модели (от графической модели) к словесной модели (к описанию свойств функции). А построение графика — это переход от аналитической модели (она представлена в условии примера 4) к геометрической.

чтение графика

Итак, приступаем к чтению графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 103).

1. Независимая переменная x «пробегает» все значения от −4 до 4. Иными словами, для каждого значения x из отрезка [−4; 4] можно вычислить значение функции $f(x)$. Говорят так: [−4; 4] — *область определения функции*.

область определения функции

Почему при решении примера 4 мы сказали, что найти $f(5)$ нельзя? Да потому, что значение $x = 5$ не принадлежит области определения функции.

2. $y_{\text{наим}} = -2$ (этого значения функция достигает при $x = -4$); $y_{\text{наиб}} = 4$ (этого значения функция достигает в любой точке полуинтервала (0; 4]).

3. $y = 0$, если $x = -2$ и если $x = 0$; в этих точках график функции $y = f(x)$ пересекает ось x.

4. $y > 0$, если $x \in (-2; 0)$ или если $x \in (0; 4]$; на этих промежутках график функции $y = f(x)$ расположен *выше оси* x.

5. $y < 0$, если $x \in [-4; -2)$; на этом промежутке график функции $y = f(x)$ расположен *ниже оси* x.

6. Функция возрастает на отрезке [−4; −1], убывает на отрезке [−1; 0] и постоянна (ни возрастает, ни убывает) на полуинтервале (0; 4].

По мере того как мы с вами будем изучать новые свойства функций, процесс чтения графика будет становиться более насыщенным, содержательным и интересным.

Обсудим одно из таких новых свойств. График функции, рассмотренной в примере 4, состоит из трёх ветвей (из трёх «кусочков»). Первая и вторая ветви (отрезок прямой $y = x + 2$ и часть параболы) «состыкованы» удачно: отрезок заканчивается в точке $(-1; 1)$, а участок параболы начинается в той же точке. А вот вторая и третья ветви менее удачно «состыкованы»: третья ветвь («кусочек» горизонтальной прямой) начинается не в точке $(0; 0)$, а в точке $(0; 4)$. Математики говорят так: «функция $y = f(x)$ *претерпевает разрыв* при $x = 0$ (или в точке $x = 0$)». Если функция не имеет точек разрыва, то её называют *непрерывной*. Так, все функции, с которыми мы познакомились в предыдущих параграфах ($y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$), — непрерывные.

непрерывная функция

3 График с «выколотой» точкой

ПРИМЕР 5

Дана функция $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$. Построить и прочитать её график.

Решение Как видите, здесь функция задана достаточно сложным выражением. Но математика — единая и цельная наука, её разделы тесно связаны друг с другом. Воспользуемся тем, что мы изучали в главе 7, и сократим алгебраическую дробь $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \frac{x^2(x - 2)}{x - 2} = x^2.$$

Итак, на самом деле $f(x) = x^2$. Правда, надо учесть, что тождество $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = x^2$ справедливо лишь при ограничении $x \neq 2$. Следовательно, мы можем переформулировать задачу так: вместо функции $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ будем рассматривать функцию $y = x^2$, где $x \neq 2$.

Построим на координатной плоскости xOy параболу $y = x^2$. Прямая $x = 2$ пересекает её в точке $(2; 4)$. Но по условию $x \neq 2$, значит, точку $(2; 4)$ параболы мы должны исключить из рассмотрения, для чего на чертеже отметим эту точку светлым кружком. Таким образом, график функции построен — это парабола $y = x^2$ с «выколотой» точкой $(2; 4)$ (рис. 108).

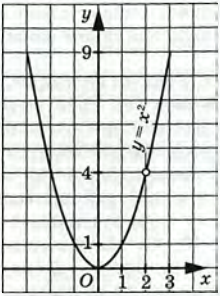


Рис. 108

Перейдём к описанию свойств функции $y = f(x)$, т. е. к чтению её графика.

1. Независимая переменная x принимает любые значения, кроме $x = 2$. Значит, область определения функции состоит из двух открытых лучей $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$.

2. $y_{наим} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наиб}$ не существует.

3. Функция претерпевает разрыв при $x = 2$ (в точке $x = 2$); на $(-\infty; 2)$ и на $(2; +\infty)$ она непрерывна.

4. $y = 0$, если $x = 0$.

5. $y > 0$, если $x \in (-\infty; 0)$, если $x \in (0; 2)$ и если $x \in (2; +\infty)$.

6. Функция убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на полуинтервале $[0; 2)$ и на открытом луче $(2; +\infty)$.

Вопросы для самопроверки

1. Как вы понимаете, что такое кусочная функция?
2. Приведите пример кусочной функции $y = f(x)$, в котором задание вычислить $f(17)$ является некорректным.
3. Придумайте кусочную функцию, график которой состоит из части параболы и луча графика линейной функции. Задайте её аналитически (с помощью формул).
4. Придумайте кусочную функцию, график которой состоит из части параболы и двух отрезков графиков разных линейных функций. Задайте её аналитически.
5. Приведите пример функции, которая претерпевает разрыв при $x = 1$.
6. Сколько свойств функции мы можем записать, когда выполняем чтение графика? Перечислите эти свойства.

§48[1] ГРУППИРОВКА ДАННЫХ

Если данных имеется много (несколько десятков, сотен, тысяч...), то работать со всеми этими данными целиком затруднительно. Один из способов выхода из ситуации мы рассматривали в § 44. Он состоял в том, что от всей первоначальной информации оставляют небольшое количество лишь самых важных показателей. Среди них объём, размах, мода, медиана, среднее, дисперсия.

[1] Параграф написан П. В. Семеновым.

В этой главе мы рассмотрим другой способ преобразования данных. Он состоит в их *группировке*. Если различных данных слишком много, то их объединяют в группы. При группировке индивидуальные особенности первоначальных данных, как правило, пропадают. Точнее, они смешиваются с особенностями других данных из той же группы. Уже из этого общего описания следует важное наблюдение: *при группировке информация становится менее точной!*

Рассмотрим конкретный пример. В конкурсах по литературе, по истории и по математике участвовали: команда «А» (Аня, Ася, Антон), команда «Б» (Белла, Боря, Богдан) и команда «В» (Вера, Вита, Витя). Вот данные о набранных очках.

Игрок	Аня	Ася	Антон	Белла	Боря	Богдан	Вера	Вита	Витя
Литература	6	4	3	2	8	7	5	9	1
История	1	8	4	9	5	6	2	3	7
Математика	7	5	9	4	8	2	1	6	3

Из этой таблицы можно получить разнообразную информацию. Например, больше всех очков в сумме набрал Боря (21 очко). Хуже всех выступила Вера — 8 очков. Суммы очков каждого участника можно изобразить на столбчатой диаграмме (рис. 109).

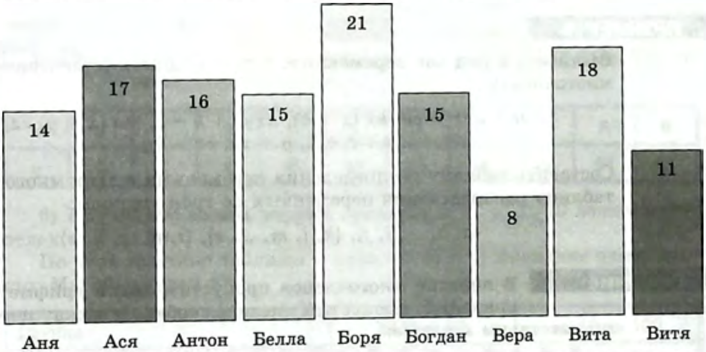


Рис. 109

Упорядоченный ряд данных выглядит так: 8, 11, 14, 15, 15, 16, 17, 18, 21. Мода суммы очков по трём предметам равна 15, медиана также равна 15, и т. п.

Но соревнование было командным, и в итоге нам важны командные результаты.

Команда	«А»	«Б»	«В»
Сумма	47	51	37

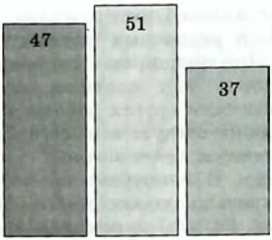


Рис. 110

Столбчатая диаграмма (рис. 110) командных результатов проще и нагляднее.

Те же первоначальные данные можно сгруппировать и по-другому. Например, по результатам девочек и мальчиков.

Кто	Девочки	Мальчики
Сумма очков	72	63

В сумме девочки набрали очков больше, чем мальчики. Но девочек — пятеро, а мальчиков — четверо. Среднее результатов девочек равно $\frac{72}{5} = 14,4$, а среднее результатов мальчиков равно $\frac{63}{4} = 15,75$. Значит, в среднем мальчики выступили успешнее девочек.

Повторим ещё раз: при группировке данных мы выигрываем в краткости и наглядности ответа, но проигрываем в точности. Вопрос о том, что важнее, следует отдельно решать в каждом конкретном случае.

ПРИМЕР 1

Выписать в ряд все переменные, встречающиеся (с повторениями) в многочленах

$$n + abx + cy,\ kx(x + b),\ axyz + k - c,\ ma(x + y)xz,$$
$$n + c + 1,\ y + xz,\ cn - 2y.$$

Составить таблицу распределения переменных в этих многочленах и таблицу распределения переменных по трём группам:

$$\{a, b, ..., i, j\},\ \{k, l, m, ..., s\},\ \{t, u, ..., y, z\}.$$

Решение В перечне многочленов пропустим знаки арифметических операций, пропустим числа и скобки, а между переменными расставим запятые:

$n, a, b, x, c, y, k, x, x, b, a, x, y, z, k, c, m, a, x, y, x, z, n, c, y, x, z, c, n, y.$

Таблицу распределения переменных составим, перечисляя буквы по алфавиту: «a» встретилась трижды, «b» — дважды и т. д. Получаем такую таблицу

Переменная	a	b	c	k	m	n	x	y	z	Всего: 9
Сколько раз встретилась	3	2	4	2	1	3	7	5	3	Сумма: 30

В первую группу $\{a, b, ..., i, j\}$ вошли a, b и c. Всего $3 + 2 + 4 = 9$ вхождений. Во вторую группу $\{k, l, m, ..., s\}$ вошли k, m и n; 6 вхождений. Наконец, в последнюю группу 15 раз вошли x, y или z. Эти буквы чаще всего используют для обозначения переменных.

Группа	Первая	Вторая	Третья	Всего: 3
Сколько раз встретилась	9	6	15	Сумма: 30

Наш эксперимент показал, что в данном примере последние буквы латинского алфавита чаще других (в половине случаев) используются в алгебре для обозначения переменных.

ПРИМЕР 2

а) Заполнить таблицу значений функции $y = x^2$ для $x = 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9$.

б) Сколько значений лежит в пределах от 0 до 50?

в) Составить таблицу распределения значений по группам «от 0 до 50» и «от 51 до 100».

г) По таблице из пункта в) составить таблицу распределения процентных частот.

Решение

а) Надеемся, это для вас — нетрудный устный счёт. Вот ответ:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

б) Видим, что восемь первых значений 0, 1, 4, ..., 49 лежит в пределах от 0 до 50.

По этой причине таблицы в пунктах в) и г) выглядят очень просто. Мы объединим их.

Группа	от 0 до 50	от 50 до 100
Сколько значений в группе	8	2
Частота (в %)	80	20

Вопросы для самопроверки

1. В каких случаях при обработке информации применяют группировку данных?
2. Как изменяется точность информации при группировке данных?

Основные результаты

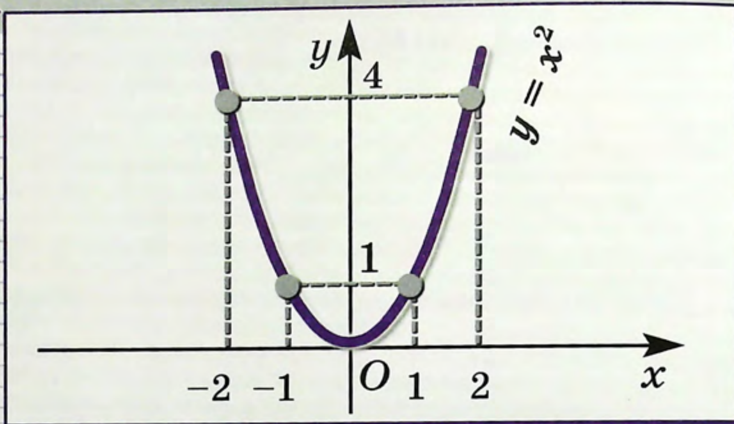
- Мы пополнили наш словарный запас математического языка следующими *терминами*:
  — парабола, ось (ось симметрии) параболы, ветви параболы, вершина параболы;
  — непрерывная функция, разрыв функции;
  — кусочная функция;
  — область определения функции;
  — чтение графика.
- Мы познакомились с тремя *математическими моделями*:
  — $y = x^2$, $y = -x^2$;
  — $y = f(x)$.
- Мы получили следующий *результат*:
  — графиком функции $y = x^2$ (и функции $y = -x^2$) является парабола.
- Мы разработали *алгоритм* графического решения уравнения вида $f(x) = g(x)$.
- Наконец, мы познакомились с тем, как строить графики кусочных функций.

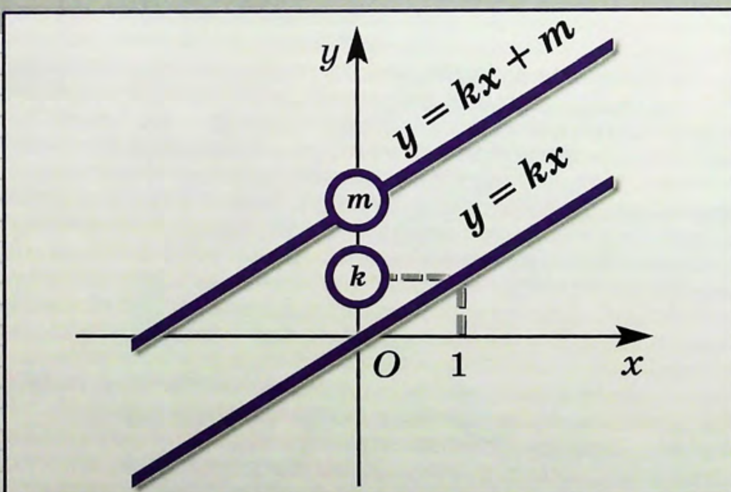
Темы исследовательских работ

1. Графическое решение уравнений.
2. Кусочная функция.
3. Группировка данных.

Предметный указатель

Оглавление


$y = x^2$
y
4
1
−2
−1
O
1
2
x


$y = kx + m$
$y = kx$
y
m
k
O
1
x

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

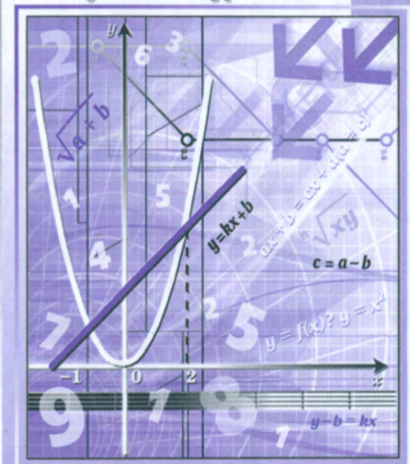
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Алгебра

7

часть 1

Углублённый уровень



ISBN 978-5-346-04686-8
9 785346 046868